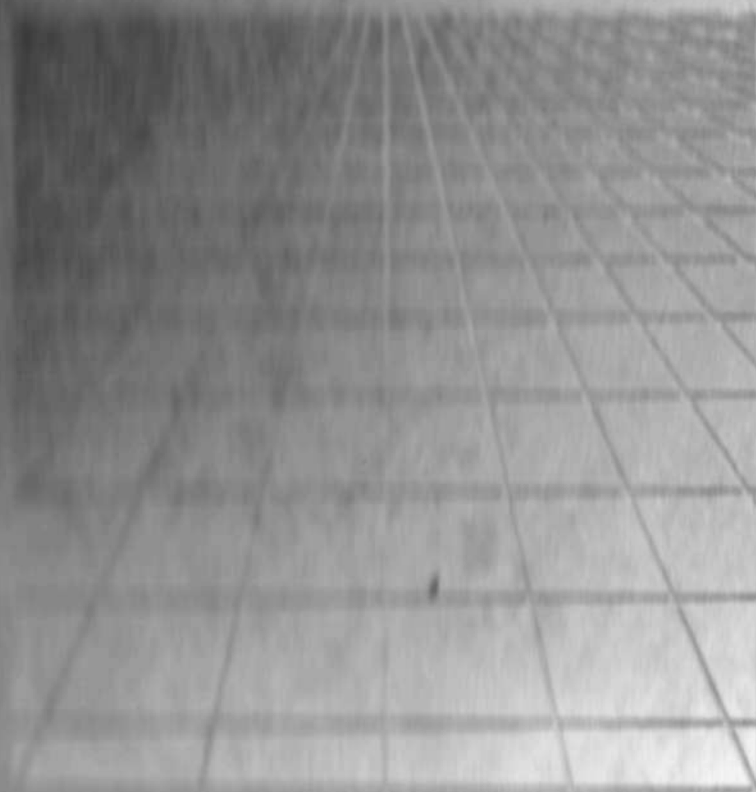
ISBN 978-9943-13-066-1
9 789943 130661

G. NASRITDINOV

EKONOMETRIKA

1



$$F(L,K)=a\,[aK^{\rho}+(1-a)L^{\rho}]^{\beta}$$

IQTISOD-MOLIYA

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
\Ufta **TA'LIM VAZIRLIGI**

Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy Universiteti

GNXSKITDINOV

EKONOMETRIKA. 1

O'zbekiston Respublikasi oliy va o'rta maxsus ta'Jim vazirligi
tomonidan 5406200 - Statistika, 5340400 - Biznesni
boshqarishva 5340100— Iqtisodiyot mutaxassisliklari
bo'yicha tahsil oluvchi talabalar uchun o'quv
qo'llanma sifatida tavsiya etilgan

z M U
flmty kutubxoaasl

Toshkent
«IQTISOD-MOLIYA»
2008

65B6

Taqrizchilar:

fizika-matematikafanlari doktori, akademik **V.Q. Qobulov;**
iqtisod fanlari doktori, professor **T.Sh. Shodiyev**

Nasritdinov G.

H28 **Ekonometrika. 1:** 5406200 - «Statistika», 5340400 - «Biznesni boshqarish» va 5340100- «Iqtisodiyot» mutaxassisliklari bo'yichatahsil oluvchi talabalar uchun o'quvqo'llanma/ G.Nasritdinov; O'zbekiston Respublikasi oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi, Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti. -Toshkent: Iqtisod-Moliya, 2008.-252 b.

Mazkur o'quv qo'llanma «Ekonometrika. 1» kursi boiib, 5406200 - statistika, 5340400 - biznesni boshqarish va 5340100 - iqtisodiyot mutaxassisliklari bo'yicha amaliy o'quv dasturi asosida yozilgan. Unda determinatsiyalangan jarayonlar uchun korrelatsion-regression tahlil asoslari, iqtisodiy-matematik modellar va ularni o'rganish usullari bayon etilgan. Qoilanmadan ekonometrikani o'rganmoqchi bo'lgan yosh o'qituvchilar, magistrantlar hamda aspirantlar foydalanishlari mumkin.

BBK 65B6»73

ISBN 978-9943-13-066-1

Kirish

Ekonometrika fanlar orasida nisbatan yosh bo'lib, hozirgi zamonda iqtisodiy jarayonlarni o'rganishda va ularning keyingi holatini bashorat qilishda muhim ahamiyat kasb etadi.

Ekonometrika – matematik statistika usullari yordamida iqtisodiyotda miqdoriy qonuniyatlar va o'zaro bog'lanishlarni tadqiqot qiladigan fandir. O'sha usullar asosida korrelatsion-regression tahlil yotadi.

Ekonometrika bo'yicha birinchi ishlar XIX asr oxirlari – XX asr boshlarida paydo bo'ldi. 1897-yilda V. Paretoning turli mamlakatlardagi aholi daromadlarini statistik usul bilan o'rganishga bag'ishlangan ishi chop etildi. Bu maqolada kelajakda Pareto nomi bilan atalgan $y = A(x-a)^{-\alpha}$ egri chiziq tavsiya qilingan. Unda x – daromad miqdori; y – daromadi bor shaxslar soni bo'lib, har bir shaxs daromadi miqdori x dan katta deb qaraladi; a – minimal daromad; A va α – munosabatning (funksiyaning) statistik usullar bilan topiladigan parametrlari. XX asr boshida ekonometrikaga oid qator ishlar chop etildi. Guker, Pirson, R.Frish va boshqalarning ishlari shular jumlasidandir.

Ekonometrika fanining asoslarini norvegiyalik olim Robert Frish (1895-1973) ishlab chiqqan. Shu sababli u haqli ravishda ekonometrikaning otasi hisoblanadi. 1931-yilda Jahon Ekonometrik Jamiyati tuzildi. Shu yil ekonometrikaning tug'ilgan yili hisoblanadi. 1932-yildan boshlab ba'zi mamlakatlarda ekonometrika fani o'quv rejasiga kiritildi. Shunday ekan, ekonometrika nima? – degan tabiiy savol tug'iladi. R. Frishning o'zi, ekonometrika – iqtisodiy nazariya, matematika va statistikaning sintezi, deb hisoblaydi.

Ekonometrika fan sifatida iqtisodiyot, statistika va matematika orasida joylashgan. U – iqtisodiy qonunlarni taqribiy chiqarish bilan bog'langan fandir. Ekonometrika bilan shug'ullanuvchi mutaxassis *ekonometrist* deb ataladi.

Ekonometrist iqtisodiy nazariyaga yoki empirik ma'lumotlarga asoslangan holda iqtisodiy modellarni tavsiflaydi, shu modellardagi parametrlarni (noma'lum miqdorlarni) baholaydi, iqtisodiy ko'rsatkichlarning keyingi holatini bashorat qiladi. Ekonometrist iqtisodiy ko'rsatkichlar qiymatlari jadvalini o'rganib, ular orasidagi empirik munosabatlarni keltirib chiqaradi. Ekonometristning jadvallami o'rganish bilan bogiangan ishi *ekonometrik analiz* deyiladi.

Ekonometrik analiz yordamida iqtisodiy jarayonning birinchi modeli fransuz olimi Fransua Kene (1694-1774) tomonidan yaratilgan. U 1758-yilda "Iqtisodiy jadval", 1766-yildauning ikkinchi varianti boigan "Arifmetik formula" nomli asarlarniyozdi. F. Kene jadvali XVIII asro'rtalarida iqtisodiy nazariyaning rivojlanishida muhim o'ringa ega boidi. Bu jadvalga K.Marks ham yuqori baho bergan.

O'quv qo'llanma "Ekonometrika 1" deb nomlangan. Unda o'rganiladigan iqtisodiy jarayonlartasodifiy emas, aniq deb qaraladi. Tasodifiyjarayonlar "Ekonometrika. 2" da o'rganiladi.

"Ekonometrika. 1" 13 bobdaniboratboiib,harbirbobmisol vamasalalar bilan ta'minlangan hamda nazorat savollari ham keltirilgan.

O'quv qo'llanma mavjud dasturga mos boiib, "statistika", "biznesni boshqarish" va "iqtisodiyot" mutaxassisliklari bo'yicha tahsil oluvchi talabalarga moijallangan. O'quv qoilanmaning ba'zi materiallaridan "Iqtisodiy-matematik usullar va modellar", "Iqtisodiyotda matematik modellar" kabi predmetlarni bayon etishda foydalanish mumkin.

Muallif o'quv qo'llanma qoiyozmasi mazmuni va sifatiga oid qimmatli maslahatlari uchun fizika-matematika fanlari doktori, akademik V.Q. Qobulovga; iqtisod fanlari doktori, professor T.Sh. Shodiyevga; shuningdek, o'quv qoilanmani tayyorlashdagi yordami uchun fizika-matematika fanlari doktori, professor A.Abdushukurovga; iqtisod fanlari doktori, professor F.Egamfjerdiyevga o'z minnatdorchiligini bildiradi.

1-bob. CHIZIQLI REGRESSION MODEL

1.1-§. Korrelatsiya va regressiya haqida tushuncha

O'rganiluvchi erkli parametrlar (faktorlar) $x_1, x_2, ..., x_n$, o'rganiluvchi erksiz parametr (faktor) Y bo'lsin. Alohida hollarda Y ni $x_1, x_2, ..., x_n$ faktorlarning funksiyasi deb qarash mumkin, ya'ni

$$Y = f(x_1, x_2, ..., x_n). \tag{1.1}$$

Agar Y hosil hajmi bo'lsa, u sug'orishlar soniga, ishlatilgan mineral ozuqa hajmiga, havoning harorati va boshqalarga bog'liq. Bundan ko'rinadiki, hosildorlik tasodifiy jarayondir. Shuning uchun (1.1) munosabat tasodifiy o'zgaruvchini o'z ichiga olishi kerak. Bunday o'zgaruvchini U desak, (1.1) o'rniga ushbu

$$Y = f(x_1, x_2, ..., x_n, U) \tag{1.2}$$

munosabatni yozish mumkin. Bunday munosabat (bog'liqlik) korrelatsion deyiladi. Y va $x_1, x_2, ..., x_n$ lar orasidagi analitik munosabat *regressiya tenglamasi* deyiladi.

Agar (1.1) da $n = 1$ bo'lsa,

$$Y = f(x) \qquad \text{yoki} \qquad y = f(x) \tag{1.3}$$

munosabat *juftlik regressiya tenglamasi* deyiladi, unda y – erksiz o'zgaruvchi (natijaviy belgi), x – erkli (tushuntiruvchi) o'zgaruvchi (belgi - faktor). Amalda, har bir alohida olingan holda, u ikki qo'shiluvchidan tashkil topadi:

$$y = y_x + \varepsilon, \tag{1.4}$$

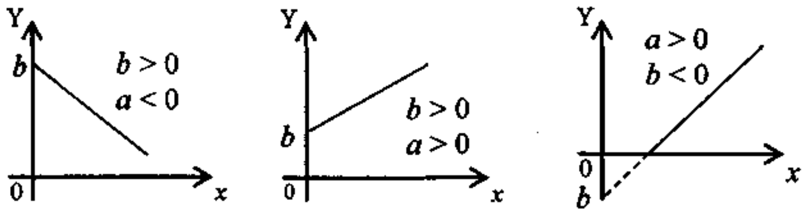
bunda y – natijaviy belgining asl qiymati (berilgan (x, y) nuqtaning ordinatasi); y_x – natijaviy belgining nazariy qiymati bo'lib, u (x, y) nuqta absissasi uchun regressiya tenglamasidan topiladi; ε – tasodifiy miqdor bo'lib, natijaviy belgining real qiymatidan uning regressiya tenglamasidan topiladigan nazariy qiymati qanchalik farq qilishini tavsiflaydi.

Juftlik regressiyada $y_x = f(x)$ matematik funksiyaning ko'rinishini tanlash uch usul bilan amalga oshiriladi:

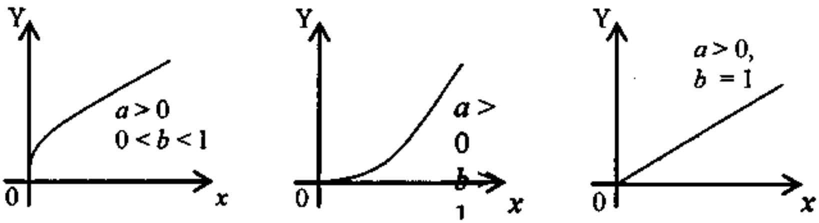
1) grafik usul;
2) analitik usul, ya'ni o'rganilayotgan o'zaro bogiiqlik nazariyasidan kelib chiqqan holda;
3) tajriba o'tkazish usuli.

Regressiya tenglamasining ko'rinishini tanlashda grafik usul eng ko'rgazmali hisoblanadi. Quyida bog'lanishlarni miqdoriy baholash uchun foydalaniladigan egri chiziqlarning asosiy turlarini keltiramiz:

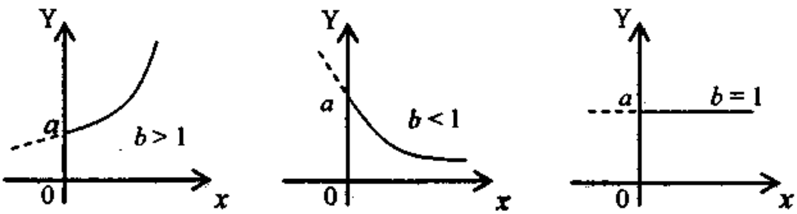
a) $y_x = ax + b$, $b > 0$ (yoki $b < 0$) (chiziqli bog'lanish) – to'g'ri chiziq.



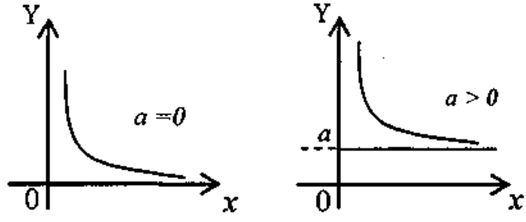
b) $y_x = ax^b$, $a > 0$ (chiziqsiz bog'lanish) – darajali funksiya.



v) $y_x = ab^x$, $a > 0$, $b > 0$ (chiziqsiz bog'lanish) – eksponenta egri chizig'i (ko'rsatkichli funksiya).



g) $y_x = a + \frac{b}{x}$, $a \geq 0$, $b > 0$ (chiziqsiz bog'lanish) – giperbola shoxchasi.



Yuqoridagi b), v), g) hollarda bog'lanishlar chiziqsiz. Ular yangi yordamchi o'zgaruvchilar kiritish orqali chiziqli bog'lanishga keltirilishi mumkin. Jumladan, b) hol uchun $Y_1 = \ln Y$, $x_1 = \ln x$ belgilashlar kiritamiz. Unda $\ln Y = \ln a + b \ln x$ munosabatga ko'ra $Y_1 = \ln a + bx_1$ ko'rinishdagi chiziqli bog'lanishga (chiziqli funksiyaga) kelamiz. Shunga o'xshash v) holida $\ln Y = \ln a + x \ln b$ ga ko'ra $Y_1 = \ln Y$ va $x_1 = x$ desak, yana $Y_1 = \ln a + (\ln b)x_1$ ko'rinishdagi chiziqli bog'lanish hosil bo'ladi. Nihoyat, g) holda $Y = Y_1$, $x = x_1^{-1}$ desak, $Y_1 = a + bx_1$ hosil bo'ladi.

Agar tekislikning birinchi choragida n ta (x_1, y_1), (x_2, y_2), ¼ , (x_n, y_n), $(x_1 < x_2 < ... < x_n)$, nuqta berilgan bo'lib, tanlangan $y_x = f(x)$ funksiya grafigi shu nuqtalardan o'tsa, unda natijaviy belgining asl qiymatlari (berilgan nuqtalarning ordinatalari) ularning nazariy qiymatlari $f(x_i)$ bilan ustma-ust tushadi, ya'ni $y_x(x_i) = y_i$. Bu holda *qoldiqli dispersiya* nolga teng bo'ladi, ya'ni $\sigma^2_{xonд.} = 0$, bunda

$$\sigma^2_{qold.} = \frac{1}{n}\left(y_i - y_x(x_i)\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - f(x_i)\right)^2.$$

Ravshanki, qoldiqli dispersiya miqdori qanchalik kichkina bo'lsa, regressiya tenglamasida e'tiborga olinmagan faktorlar ta'siri shunchalik kamligini va regressiya tenglamasi berilgan ma'lumotlarga shunchalik to'g'ri kelishini kŏrsatadi.

Kuzatuvlar natijasida olinadigan nuqtalar soni o'zgaruvchi x oldidagi hisoblanayotgan parametrlar sonidan 7-8 marta ortiq bo'lishi kerak. Ushbu $y_x = a + bx$ sodda holda kuzatuvlar soni $7 \times 1 = 7$ dan kam bo'lmasligi lozim.

1.2-§. Juftlik regressiya va korrelatsiyaning chiziqli modeli

Juftlik regressiyaning eng sodda modeli chiziqli regressiya bo'lib, u iqtisodiyotda keng qo'llaniladi. Buning sababi chiziqli regressiya parametrlarining aniq iqtisodiy izohlanishidadir.

Chiziqli regressiya tenglamasi quyidagi

$$y_x = a + bx \quad \text{yoki} \quad y = a + bx + \varepsilon \tag{1.5}$$

ko'rinishga ega. Ushbu $y_x = a + bx$ ko'rinishdagi tenglama berilgan nuqtalar absissalari bo'yicha natijaviy belgining nazariy qiymatlarini topishga imkoniyat beradi. Agar $y_x = f(x)$ deb belgilasak, unda $f(x) = a + bx$ tenglama tekislikda to'g'ri chiziqni tavsiflaydi. Shuning uchun $f(x_i) = a + bx_i$ miqdorlar $x = x_i$ bo'lganda to'g'ri chiziqdagi nuqtalarning ordinatalarini anglatadi. Ularni $\bar{y}_i = f(x_i)$ deb belgilaymiz. Agar n ta $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, ¼, $A_n(x_n, y_n)$, $(0 < x_1 < x_2 < ... < x_n)$, nuqta berilgan bo'lsa, bu nuqtalar, umuman aytganda, bir to'g'ri chiziqda yotishi ham mumkin. Bu holda chiziqli regressiya to'g'ri chizig'i berilgan nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq bilan ustma-ust tushadi. Ammo bunday hol iqtisodiyotda kuzatilmaydi, chunki iqtisodiy o'sish vaqtining $[\,0, T\,]$ oralig'ida to'g'ri chiziq bo'ylab ro'y berishi faqat nazariy jihatdan mumkin. Shu sababli, $A_1, A_2, ..., A_n$ nuqtalar tekislikdagi koordinata sistemasining birinchi choragida joylashgan va bir to'g'ri chiziqda yotmaydi, deb faraz etamiz.

Chiziqli regressiya to'g'ri chizig'ini qurish uning a va b parametrlarini ((1.5) ga qarang) baholash (topish) dan iborat.

Chiziqli va chiziqsiz regressiyani qurishga doir sodda misollar ko'ramiz.

1-misol. $A_1(2; 25)$, $A_2(4; 15)$; $f(6) = ?$.

Bu misolda $n = 2$. Chiziqli regressiya tenglamasini $y_x = a + bx$ ko'rinishda izlaymiz. Ko'rilayotgan holda chiziqli regressiya to'g'ri chizig'i berilgan ikkita nuqtadan o'tadigan to'g'ri chiziq bilan ustma-ust tushadi. Sodda hisoblashlar yordamida topamiz: $y_x = 35 - 5x$. Bundan $f(6) = 5$.

Endi berilgan nuqtalar bo'yicha chiziqli regressiya tenglamasini $y_x = \frac{a}{x} + b$ ko'rinishda izlaymiz. a va b parametrlar

$$25 = \frac{a}{2} + b, \quad 15 = \frac{a}{4} + b$$

sistemani qanoatlantiradi. Yechim $a = 40$, $b = 5$ va chiziqli regressiya tenglamasi $y_x = \frac{40}{x} + 5$ va $f(6) = 11\frac{2}{3}$.

2-misol. $A_1(4;9)$, $A_2(9;24)$; $f(16) = ?$

Avval chiziqli regressiya tenglamasini topamiz: $y_x = a + bx$. Sodda hisoblashlar yordamida topamiz: $a = -3$; $b = 3$, ya'ni $y_x = -3 + 3x$. Bundan $f(16) = 45$. Ravshanki, iqtisodiy ma'nosi bo'yicha $y \geq 0$, ya'ni $-3 + 3x \geq 0$ yoki $x \geq 1$. Endi chiziqsiz regressiya tenglamasini $y = a\sqrt{x} + b$ ko'rinishda izlasak, $a = 15$, $b = -21$ ni topamiz. Demak, $y = 15\sqrt{x} - 21$. Bundan $f(16) = 39$ (1.1-, 1.2-chizmalar).

E'tibor berib qaralsa, 1-misolda talab, 2-misolda taklif funksiyalari qaralgan. 2-misolda chiziqli holda taklif $x \geq 1$ bo'lganda, chiziqsiz holda taklif $x \geq 1{,}96$ bo'lganda amalga oshiriladi.

1.3-§. Eng kichik kvadratlar usuli (EKKU) va chiziqli regressiyaning empirik tenglamasi

Chiziqli regressiya parametrlarini baholashning turli usullari mavjud. Chiziqli regressiyaning $y_x = a + bx$ tenglamasini olaylik. Tekislikning birinchi choragida bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan n ta $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, ¼, $A_n(x_n, y_n)$, $(0 < x_1 < x_2 < ... < x_n)$ nuqta berilgan bo'lsin. Chiziqli regressiya $y_x = a + bx$ to'g'ri chizig'idagi ordinatalarning kuzatish natijalaridan (berilgan nuqtalar ordinatalaridan) farq qilishining o'lchovi sifatida quyidagi ifodani olish mumkin:

1) $\Phi(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)^2$ – og'ishlar kvadratlari yig'indisi;

2) $\Phi(a,b)=\sum_{i=1}^{n}|y_i-a-bx_i|$ – og'ishlar modullari yig'indisi;

3) $\Phi(a,b)=\sum_{i=1}^{n}G(y_i-a-bx_i)$, bunda $G(a, b)$ – a va b o'zgaruvchilarning musbat (yoki manfiy) qiymatlar qabul qiladigan biror funksiyasi.

Jumladan, $\Phi(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)$ ko'rinishda bo'lishi mumkin.

Chiziqli regressiyaning a va b koeffitsiyentlarini baholash uchun kriteriy (belgi) sifatida og'ishlar kvadratlari yig'indisini olaylik. Unda tegishli masala quyidagicha yoziladi:

$$\Phi(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)^2\to\min,\quad (a,b)\in R^2 \tag{1.6}$$

Ravshanki, (1.6) masala chiziqsiz dasturlashning shartsiz minimum masalasidan iborat. Uni yechishga kirishamiz. Avval F(a, b) funksiyaning statsionar nuqtalarini topamiz. Buning uchun shu funksiyaning a va b bo'yicha xususiy hosilalarini topib, nolga tenglashtiramiz:

$$\frac{\partial\Phi(a,b)}{\partial a}=2\cdot\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)\cdot(-1),$$

$$\frac{\partial\Phi(a,b)}{\partial b}=2\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)\cdot(-x_i),$$

$$\begin{cases}2\cdot\sum(y_i-a-bx_i)\cdot(-1)=0,\\ 2\cdot\sum(y_i-a-bx_i)\cdot(-x_i)=0,\end{cases}$$

yoki

$$\begin{cases}\left(\sum x_i\right)\cdot a+\left(\sum x_i^2\right)b=\sum x_iy_i\ ,\\ n\cdot a+b\cdot\left(\sum x_i\right)=\sum y_i\ .\end{cases} \tag{1.7}$$

Bundan a va b larni topish qiyin emas:

$$b_0 = \frac{n\cdot\left(\sum x_i y_i\right)-\left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)}{n\cdot\left(\sum x_i^2\right)-\left(\sum x_i\right)^2}, \tag{1.8}$$

$$a_0 = y_i - b_0 x_i = \frac{\left(\sum x_i^2\right)\cdot\left(\sum y_i\right)-\left(\sum x_i\right)\cdot\left(\sum x_i y_i\right)}{n\left(\sum x_i^2\right)-\left(\sum x_i\right)^2}. \tag{1.9}$$

(1.8) va (1.9) formulalar ko'rsatadiki, $F(a, b)$ funksiya yagona statsionar nuqtaga ega. Shu (a_0, b_0) nuqtada $F(a, b)$ funksiya o'zining eng kichik qiymatiga erishadi. Buni isbotlash uchun ikkinchi tartibli hosilalarni hisoblab, ulardan matritsa tuzamiz:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial a^2}=2n,\quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial b^2}=2\cdot\left(\sum x_i^2\right);\quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial a\,\partial b}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial b\,\partial a}=2\cdot\left(\sum x_i\right);$$

$$A=\begin{pmatrix} 2n & 2\cdot\left(\sum x_i\right) \\ 2\cdot\left(\sum x_i\right) & 2\cdot\left(\sum x_i^2\right)\end{pmatrix}.$$

Endi mos kvadratik formani yozamiz ($Q = Z'AZ$):

$$Q(z_1,z_2)=(z_1,z_2)\cdot\begin{pmatrix} 2n & 2\cdot\left(\sum x_i\right) \\ 2\cdot\left(\sum x_i\right) & 2\cdot\left(\sum x_i^2\right)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2\end{pmatrix}=$$

$$=2\cdot\left[\left(\sum x_i^2\right)\cdot z_2^2+2\cdot\left(\sum x_i\right)\cdot z_1 z_2+n\cdot z_1^2\right].$$

Ravshanki, $z_1^2+z_2^2\neq 0$ bo'lganda $Q(0,z_2)=2\left(\sum x_i^2\right)z_2^2>0$, $Q(z_1,0)=2n\cdot z_1^2>0$ tengsizliklar o'rinli. $Q(z_1,z_2)>0$, $\forall(z_1,z_2)\neq 0$ tengsizlik o'rinli ekanini isbotlaymiz. Buning uchun kvadratik forma diskriminanti manfiy ekanini ko'rsatish kifoya:

$$D=\left(\sum x_i\right)^2-n\left(\sum x_i^2\right)=\left(\sum x_i\right)^2-n^2\frac{1}{n}\left(\sum x_i^2\right)=$$

$$=n^2\left[\left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2-\frac{\sum x_i^2}{n}\right]=n^2\left(A_n^2-D_n^2\right),$$

bunda $A_n=\frac{1}{n}\sum x_i$, $D_n=\sqrt{\frac{1}{n}\sum x_i^2}$. Bir tomondan, $0<x_1<x_2<...<x_n$, ikkinchi tomondan, $A_n<D_n$ bo'lgani uchun $D<0$ bo'ladi. Shunday qilib, kvadratik forma $Q(z_1,z_2)$ faqat musbat qiymatlar qabul qiladi ($Q(z_1,z_2)\neq 0$). Demak, F(a, b) funksiya (a_0, b_0) nuqtada o'zining mahalliy minimumiga erishadi. Ammo F(a, b) funksiya qavariq funksiyadan iborat, chunki yuqorida topilgan A matritsa musbat aniqlangan. Shunday qilib, $\Phi(a,b)$ funksiya (a_0, b_0) nuqtada o'zining eng kichik qiymatiga erishadi. (1.6) masala to'liq yechildi.

Chiziqli regressiyaning koeffitsiyentlari chiziqsiz dasturlash usuli bilan (EKKU bilan) topilgan tenglamasi *empirik tenglama*, unga mos to'g'ri chiziq *empirik to'g'ri chiziq* deb ataladi.

Endi sodda misollarni ko'ramiz:

1-misol. A_1, A_2, A_3 nuqtalar quyidagi jadval bilan berilgan:

x	1	4	7
y	3	1	4

(1.8) va (1.9) formulalar yordamida topamiz: $a_0=2$, $b_0=\frac{1}{6}$, ya'ni chiziqli regressiya tenglamasi $y=2+x/6$ bo'ladi.

2-misol. A_1, A_2, A_3 nuqtalar yana jadval bilan berilgan:

x	2	4	7
y	3	1	4

Yana usha (1.8) va (1.9) formulalar yordamida $a_0=\frac{29}{19}$, $b_0=\frac{5}{19}$ lar topiladi. Chiziqli regressiya tenglamasi $y=\frac{29}{19}+\frac{5}{19}x$ bo'ladi.

Endi $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum x_i$ va $\bar{y}=\frac{1}{n}\sum y_i$ belgilashlar kiritamiz.

1.1 – teorema. *Empirik to'g'ri chiziq* $(\bar{x},\bar{y})$ *nuqtadan o'tadi.*

Isbot. (1.7) sistemaning ikkinchi tenglamasini $a=a_0$, $b=b_0$ bo'lganda yozamiz: $\sum y_i = n\,a_0+\left(\sum x_i\right)b_0$. Shu sonli tenglikning har ikki tomonini n ga bo'lamiz:

$$\frac{1}{n}\sum y_i = a_0+\frac{\sum x_i}{n}b_0\,.$$

Bundan $\overline{y} = a_0 + b_0\overline{x}$ kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

Eslatib o'tamizki, (1.8) va (1.9) kasrlarning maxrajlari bir xil va musbat. Haqiqatan,

$$N_n = n\left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)^2 = n^2\left[\frac{1}{n}\sum x_i^2 - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2\right] = n^2\left(D_n^2 - A_n^2\right) > 0 .$$

Yana shuni aytib o'tamizki, a_0 va b_0 sonlarning ishoralari mos kasrlarning suratlari ishoralariga bog'liq. Ammo a_0 va b_0 lar bir vaqtda manfiy bo'la olmaydi, aks holda $y = a_0 + b_0 x$ to'g'ri chiziq IV chorakdan o'tgan bo'lar edi. Bu $x_i > 0$, $i = 1,2,...,n$ ga zid.

1.4-§. Chiziqli regressiyaning asl to'g'ri chizig'i va uni qurishning geometrik usuli

Chiziqli regressiya tenglamasini chiqarishda chiziqli regressiya to'g'ri chizig'ining berilgan $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, ¼ , $A_n(x_n, y_n)$, nuqtalarga «yaqinligini» F(*a*, *b*) funksiyaning minimumi ((1.6) ga qarang) ma'nosida tushunilgan edi. Endi «yaqinlik» belgisi sifatida berilgan nuqtalar ordinatalari bilan izlanayotgan to'g'ri chiziqdagi ordinatalar ($\widetilde{y}_i$) ayirmalari yig'indisi nolga teng bo'lgan holni ko'ramiz, ya'ni

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \widetilde{y}_i) = 0 , \qquad (1.10)$$

bunda y_i – berilgan nuqtalar ordinatasi, $\widetilde{y}_i$ – izlanayotgan to'g'ri chiziqdagi nuqtalar ordinatasi. (1.10) belgi bo'yicha topilgan to'g'ri chiziq tenglamasini

$$y = \overline{a} + \overline{b}x \qquad (1.11)$$

ko'rinishda yozamiz. Ravshanki, $\widetilde{y}_i = \overline{a} + \overline{b}x_i$, $i = 1,2,...,n$. (1.6) va (1.10) belgilar yordamida topilgan $y = a_0 + b_0 x$ va $y = \overline{a} + \overline{b}x$ to'g'ri chiziqlar, umuman aytganda, ustma-ust tushmaydi. (1.10) belgi bilan topilgan (1.11) tenglama chiziqli regressiyaning *asl tenglamasi*, unga mos to'g'ri chiziq esa – *asl to'g'ri chizig'i* deyiladi.

1.2 – teorema. *Chiziqli regressiyaning asl to'g'ri chizig'i* $(\bar{x}, \bar{y})$ *nuqtadan o'tadi.*

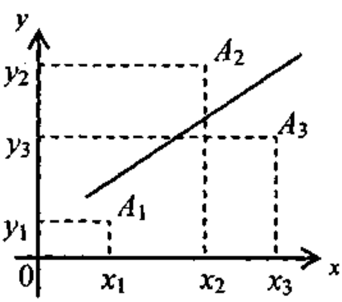
Isbot. (1.11) to'g'ri chiziq uchun (1.10) sonli tenglik bajariladi, ya'ni $\sum y_i = \sum \tilde{y}_i$ va $\tilde{y}_i = \bar{a} + \bar{b}x_i$. Oxirgi tenglikning ikki tomonini i bo'yicha jamlaymiz: $\sum \tilde{y}_i = n\bar{a} + \bar{b}\sum x_i$ hamda n ga bo'lamiz: $\frac{1}{n}\sum \tilde{y}_i = \bar{a} + \frac{1}{n}\bar{b} \cdot \sum x_i$ yoki $\bar{y} = \bar{a} + \bar{b}\bar{x}$. Shuni isbot etish talab etilgan edi.

(1.1) ***va*** **(1.2)** ***teoremalar natijalari***: Chiziqli regressiyaning empirik va asl to'g'ri chiziqlari $(\bar{x}, \bar{y})$ nuqtada o'zaro kesishadi.

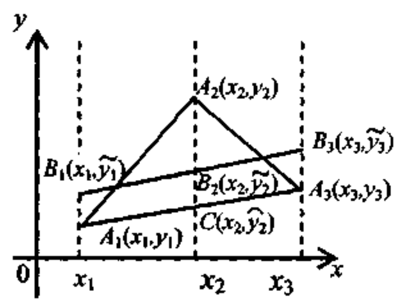
Agar $n = 2$ bo'lsa, empirik va asl to'g'ri chiziqlar ustma-ust tushadi, chunki ikki nuqtadan yagona to'g'ri chiziq o'tadi.

Agar $n = 3$ bo'lsa, to'g'ri chiziqlar ustma-ust tushishi ham, tushmasligi ham mumkin, ammo ular $(\bar{x}, \bar{y})$ nuqtadan albatta o'tadi. Bu holda chiziqli regressiya asl to'g'ri chizig'ini geometrik usul bilan qurish, so'ngra uning tenglamasini topish mumkin.

Tavsiya etilayotgan geometrik usulning mohiyati quyidagidan iborat. Tekislikning birinchi choragida bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan 3 ta $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$, $(0 < x_1 < x_2 < x_3)$, nuqta berilgan bo'lsin. Ravshanki, *A2* nuqta *A1A3* to'g'ri chiziqdan yuqorida yoki pastda joylashgan bo'lishi mumkin. Geometrik usulni *A2* nuqta *A1A3* dan yuqorida joylashgan hol uchun bayon etamiz (mulohazalar *A2* nuqta *A1A3* dan pastda joylashganda ham o'xshash) (1.3-chizma).



1.3 - chizma



1.4 - chizma

A_1, A_2, A_3 nuqtalarni tutashtirib $A_1A_2A_3$ uchburchakni hosil qilamiz. So'ngra A_2 nuqtadan abssissa o'qiga perpendikular tushiramiz. U A_1A_3 tomonni $C(x_2, \hat{y}_2)$ nuqtada kesib o'tadi. A_2C kesmani 3 ta teng bo'lakka bo'lamiz. A_2C ni 1:2 nisbatda bo'ladigan nuqtani $B_2(x_2, \tilde{y}_2)$ deb belgilaymiz. Shuning uchun $CB_2 = \frac{1}{3}CA_2$. Endi B_2 nuqtadan A_1A_3 ga parallel chiziq o'tkazamiz. U $x = x_1$ vertikal chiziqni $B_1(x_1, \tilde{y}_1)$ nuqtada, $x = x_3$ chiziqni $B_3(x_3, \tilde{y}_3)$ nuqtada kesib o'tadi. Hosil bo'lgan B_1B_3 chiziq chiziqli regressiyaning asl to'g'ri chizig'i bo'ladi, shu chiziq uchun (1.10) sonli tenglik bajariladi. Haqiqatan, 1.4-chizmadan ko'rinadiki, $y_1 - \tilde{y}_1 = y_3 - \tilde{y}_3 = p < 0$, $y_2 - \tilde{y}_2 = 2p > 0$. Demak,

$$(y_1 - \tilde{y}_1) + (y_2 - \tilde{y}_2) + (y_3 - \tilde{y}_3) = p - 2p + p = 0.$$

Agar B_1B_3 to'g'ri chiziqni A_1A_2 ga yoki A_2A_3 ga parallel qilib o'tkazsak, (1.10) bajarilmaydi.

Endi B_1B_3 tenglamasini topish qiyin emas. Buning uchun $\tilde{y}_1, \tilde{y}_3$ ni topish kerak. Avval $C(x_2, \hat{y}_2)$ nuqtaning ordinatasini topamiz. Ravshanki, $\dfrac{x_1 + \lambda x_3}{1+\lambda} = x_2$ ga ko'ra $\lambda = \dfrac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2}$ va $\hat{y}_2$ ni topish mumkin:

$$\hat{y}_2 = \frac{y_1 + \lambda y_3}{1+\lambda} = \frac{(x_3 - x_2)y_1 + (x_2 - x_1)y_3}{x_3 - x_1}.$$

Keyin A_1 va A_3 nuqtalar ordinatalariga $CB_2 = \frac{1}{3}(y_2 - \hat{y}_2)$ miqdorni qo'shamiz (A_2 nuqta A_1A_3 dan pastda joylashgan bo'lsa, shu CB_2 miqdor ayriladi). Shunday qilib,

$$\tilde{y}_1 = y_1 + \frac{1}{3}(y_2 - \hat{y}_2), \quad \tilde{y}_3 = y_3 + \frac{1}{3}(y_2 - \hat{y}_2).$$

Nihoyat, B_1 va B_3 nuqtalardan o'tuvchi B_1B_3 to'g'ri chiziq tenglamasini yozish mumkin.

Misol. Ushbu $A_1(2; 6)$, $A_2(4; 9)$, $A_3(7; 4)$ nuqtalar berilgan bo'lsin. Ular bir to'g'ri chiziqda yotmasligi ravshan. Shu uchta nuqta uchun chiziqli regressiyaning empirik va asl tenglamalarini topamiz. Empirik tenglama koeffitsiyentlari (1.8) va (1.9) formulalar yordamida hisoblanadi:

$a_0=\frac{17}{2}$, $b_0=-\frac{1}{2}$. Empirik tenglama $y=\frac{17}{2}-\frac{1}{2}x$ ko'rinishga ega bo'ladi. $(\bar{x},\bar{y})=\left(\frac{13}{3};\ \frac{19}{3}\right)$ nuqta bu tenglamani qanoatlantiradi.

Endi geometrik usul bilan B_1B_3 to'g'ri chiziqni quramiz va tenglamasini topamiz. Ravshanki, A_2 nuqta A_1A_3 dan yuqorida joylashgan. Sodda hisoblar ko'rsatadiki, $\lambda=\frac{2}{3}$, $\tilde{y}=\frac{26}{3}$, $CA_2=\frac{19}{5}$, $CB_2=\frac{19}{5}$, $\tilde{y}_1=6+\frac{19}{15}=\frac{109}{15}$, $\tilde{y}_3=4+\frac{19}{15}=\frac{79}{15}$.

Shunday qilib, $B_1\left(2;\frac{100}{15}\right)$, $B_3\left(7;\frac{79}{15}\right)$. Shu nuqtalardan o'tadigan to'g'ri chiziq tenglamasi $y=\frac{121}{15}-\frac{2}{5}x$ ko'rinishga ega. Bu to'g'ri chiziq ham $(\bar{x},\bar{y})=\left(\frac{13}{3};\frac{19}{3}\right)$ nuqtadan o'tadi.

1.5-§. Chiziqli regressiyaning empirik va asl tenglamalari orasidagi bog'lanish

Avvalgi 1.4- § da empirik va asl to'g'ri chiziqlar $(\bar{x},\bar{y})$ nuqtadan o'tishi haqida 1.1- va 1.2-teoremalar isbotlangan edi. Bu empirik va asl tenglamalar orasidagi *birinchi bog'lanish* bo'ladi.

Aytib o'tilganidek, chiziqli regressiyaning empirik va asl to'g'ri chiziqlari, umuman aytganda, ustma-ust tushmaydi. Ammo ular ustma-ust tushadigan hol ham mavjud. Bunday hol 1.3-teoremada keltirilgan. Bu esa empirik va asl tenglamalar orasidagi *ikkinchi bog'lanish* bo'ladi.

Iqtisodiyotda ko'pincha $x_1,x_2,...,x_n$ ($0<x_1<x_2<...<x_n$) sonlar arifmetik progressiya tashkil etgan hollar uchraydi. Masalan, biror mamlakat uchun 1991, 1992, ..., 2000-yillar uchun yalpi ichki mahsulot (YAIM) hajmi berilgan bo'lsa, $x_1=1991$, $x_2=1992$, ..., $x_9=1999$, $x_{10}=2000$ bo'ladi. Bu sonlar arifmetik progressiyani tashkil etadi, unda arifmetik progressiya ayirmasi $d=1$.

Faraz etaylik, $0<x_1<x_2<...<x_n$ va x_1, x_1+d, x_1+2d, ...$x_1+(n-1)\cdot d$, $d>0$. Bu holda a_0 va b_0 larni hisoblash formulalari soddalashadi. Masalan, (1.8) formuladagi kasr suratini M_n, maxrajini N_n deb belgilaymiz. Sodda hisoblashlar yordamida quyidagi formulalarni keltirib chiqarish mumkin:

$$M_n = n \cdot d\left[\sum_{i=1}^{n}(i-1)y_i - \frac{n-1}{2}\sum_{i=1}^{n} y_i\right], \quad N_n = \frac{1}{12}d^2 n^2 (n^2-1).$$

Shunday qilib, b_0 uchun formula quyidagicha yoziladi:

$$b_0 = \frac{12\left[\sum_{i=1}^{n}(i-1)y_i - \frac{n-1}{2}\sum_{i=1}^{n} y_i\right]}{dn(n^2-1)}. \qquad (1.12)$$

1.3 - teorema. *Tekislikning birinchi choragida uchta* $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$, $(0 < x_1 < x_2 < x_3)$, *nuqta berilgan bo'lsin. Chiziqli regressiyaning empirik va asl tenglamalari ustma-ust tushishi uchun* x_1, x_2, x_3 *sonlar arifmetik progressiyani tashkil etishi yetarli.*

Isbot. Teoremani ikki usul bilan isbotlaymiz. Ularni algebraik va geometrik usullar deb atadik.

Algebraik usul. $x_2 = x_1 + d,\ x_3 = x_1 + 2d,\ d > 0$ bo'lsin. A_2 nuqta A_1A_3 dan yuqorida joylashgan holni ko'ramiz. Avvalgi 1.4 § da bayon etilgan geometrik usul bilan chiziqli regressiyaning asl to'g'ri chizig'i B_1B_3 ni quramiz (1.4-chizmaga qarang). Yasashga ko'ra quyidagilarga ega bo'lamiz:

$A_1B_1 = A_3B_3,\ \ A_2B_2 = 2A_1B_1,$

$$CA_2 = y_2 - \tfrac{1}{2}(y_1 + y_3),\ CB_2 = \tfrac{1}{3}CA_2 = \tfrac{1}{6}(2y_2 - y_1 - y_3),$$

$$B_1\left(x_1,\ \tfrac{1}{6}(5y_1 + 2y_2 - y_3)\right),\ B_3\left(x_1 + 2d,\ \tfrac{1}{6}(5y_3 + 2y_2 - y_1)\right).$$

Sodda hisoblashlar yordamida B_1B_3 tenglamasini topamiz:

$$y = \frac{y_3 - y_1}{2d}x + \frac{1}{6d}(5dy_1 + 2dy_2 - dy_3 - 3x_1y_3 + 3x_1y_1).$$

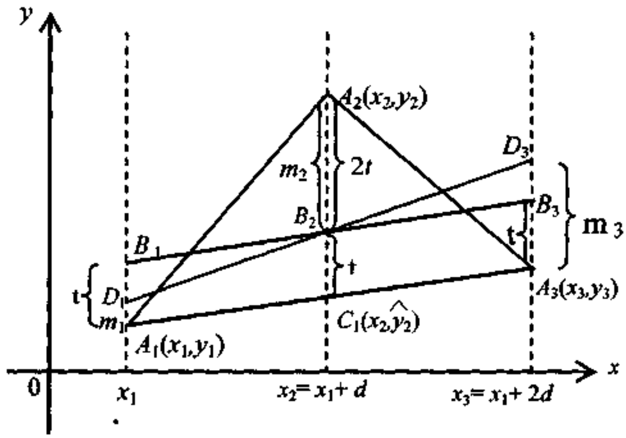
Bundan ko'rinadiki, $\overline{b_0} = \dfrac{y_3 - y_1}{2d}$. Endi b_0 ni (1.12) formula yordamida hisoblaymiz ($n = 3$ da):

$$b_0=\frac{12[y_2+2y_3-(y_1+y_2+y_3)]}{3d\cdot 8}=\frac{y_3-y_1}{2d}.$$

Shunday qilib, $\overline{b_0}=b_0$ tenglik o'rinli.

Geometrik usul[1]. Ma'lumki, $\bar{x}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, $\bar{y}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$.

Ko'rilayotgan holda $\bar{x}=x_1+d$, $\bar{y}=\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)$, $\tilde{y}_2=\frac{1}{2}(y_1+y_2)$ (1.5-chizmaga qarang). Demak, B_2 ning koordinatalari $(\bar{x},\bar{y})$ bo'ladi.



1.5 - chizma

Endi quyidagi belgilashlarni kiritamiz: $A_1D_1=m_1$, $A_2B_2=m_2=2t$, $A_1B_1=\widetilde{C}B_2=A_3B_3=t$, $l_\Delta=A_1B_1^2+A_2B_2^2+A_3B_3^2$, $A_3D_3=m_3$.

Kiritilgan belgilashlarga ko'ra, $l_*=A_1D_1^2+A_2B_2^2+A_3B_3^2=$ $=m_1^2+4t^2+m_3^2$, (1.5-chizmaga qarang).

[1] Mazkur usul Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zMU iqtisodiyot fakulteti talabasi A.Murtazayev tomonidan tavsiya etilgan.

Yuqorida B_1B_3 bilan geometrik usul bilan qurilgan *asl* to‘g‘ri chiziq, D_1D_3 bilan esa, $B_2(\bar{x},\bar{y})$ nuqtadan o‘tadigan va eng kichik kvadratlar usuli bilan topilgan (topiladigan) empirik to‘g‘ri chiziq belgilangan. Bu holda $\Phi(a,b) = l_* = m_1^2 + 4t^2 + m_3^2$.

Shunga o‘xshash B_1B_3 uchun $\Phi(a,b) = l_\Delta = A_1B_1^2 + A_2B_2^2 + A_3B_3^2$. 1.5 chizmada $A_1D_1D_3A_3$ to‘rtburchak trapetsiya va $\widetilde{C}B_2$ esa uning o‘rta chizig‘idir. Shuning uchun $\widetilde{C}B_2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) = t$.

Endi l_Δ va l_* larni taqqoslaymiz:

$$l_* - l_\Delta = m_1^2 + 4t^2 + m_3^2 - 6t^2 =$$

$$= m_1^2 + m_3^2 - 2\frac{(m_1 + m_3)^2}{4} = \frac{(m_1 - m_2)^2}{2} \geq 0 \ .$$

Ma’lumki, $l_* = \Phi(a,b)$ funksiya $a = a_0$, $b = b_0$ bo‘lganda o‘zining eng kichik qiymatiga erishadi. Ushbu $l_* \geq l_\Delta$ tengsizlikdan $\min l_* = l_\Delta$ kelib chiqadi. Bundan B_1 nuqta D_1 bilan, B_3 nuqta esa D_3 bilan ustma-ust tushishi, ya’ni B_1B_3 va D_1D_3 to‘g‘ri chiziqlar ustma-ust tushishi ham kelib chiqadi. 1.3-teorema isbot etildi.

Agar parametrlar soni 2 tadan ortiq bo‘lsa, $Y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ munosabat *to‘plamli regressiya* deyiladi. Agar $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots$ $\ldots + a_nx_n + b$ bo‘lsa, biz to‘plamli chiziqli regressiyaga ega bo‘lamiz. Shu holda parametrlarni baholash ushbu

$$\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_n, b) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \left(a_1x_{1i} + a_2x_{2i} + \ldots + a_nx_{ni} + b \right) \right)^2 \to \min \quad (*)$$

masala bilan bog‘langan. Bunda $x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni}$ sonlar,

$A_i(x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni})$, $i = 1,2,\ldots,n$, nuqtalar koordinatalari, $y = a_1x_1 +$ $+ a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b$ esa ($n + 1$) o‘lchovli Yevklid fazosida tekislikdan iborat.

(*) masala chiziqsiz dasturlashning shartsiz minimum masalasidir. Parametrlarni topish usuli eng kichik kvadratlar usuli deb yuritiladi. Agar $a_1^0, a_2^0, ..., a_n^0$ va b^0 qiymatlar masalaning yechimi bo'lsa,

$$y = a_1^0 x_1 + a_2^0 x_2 + ... + a_n^0 x_n + b^0$$

munosabat empirik tekislik tenglamasini anglatadi.

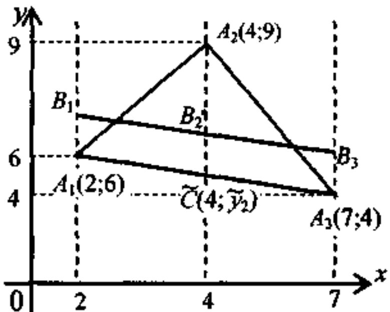
Misollar

1-misol. $A_1(2; 6)$, $A_2(4\ 9)$, $A_3(7; 4)$,

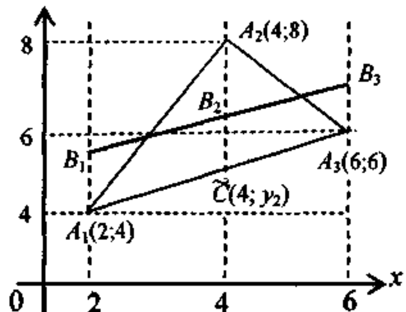
x	2	4	7
y	6	9	4

Empirik to'g'ri chiziq koeffitsiyentlarini (1.8) va (1.9) formulalar yordamida hisoblaymiz: $a_0 = \frac{17}{2}$, $b_0 = -\frac{1}{2}$ va $y = \frac{17}{2} - \frac{1}{2}x$. Ravshanki, $\bar{x} = \frac{13}{3}$, $\bar{y} = \frac{19}{3}$, $\frac{17}{2} - \frac{1}{2}\frac{13}{3} = \frac{36}{8} = \frac{19}{3} = \bar{y}$. Demak, empirik to'g'ri chiziq $\left(\frac{13}{3}, \frac{19}{3}\right)$ nuqtadan o'tadi.

Endi chiziqli regressiyaning asl to'g'ri chizig'ini quramiz (1.6 chizma).



1.6 - chizma



1.7 - chizma

$\widetilde{C}$ nuqta A_1A_3 ni qanday nisbatda bo'lishini topamiz: $\frac{2 + \lambda \cdot 7}{1 + \lambda} = 4$, bundan

$\lambda = \frac{2}{3}$. *Bundan foydalanib,* $\widetilde{y}_2$ *ni topish mumkin:* $\widetilde{y}_2 = \frac{6 + \frac{2}{3} \cdot 4}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{26}{5}$.

Shu sababli, $\tilde{C}B_2 = \frac{15}{9}$, $\tilde{C}B_2 = A_1B_1 = A_3B_3 = \frac{19}{5}$. Nihoyat, B_1 va B_3 nuqtalarning koordinatalarini yozish mumkin: $B_1\left(2;\ \frac{109}{5}\right)$, $B_3\left(7;\ \frac{79}{15}\right)$.

Sodda hisoblashlar shuni ko'rsatadiki, asl to'g'ri chiziq tenglamasi $y = \frac{121}{15} - \frac{2}{5}x$ ko'rinishda bo'ladi. Bu to'g'ri chiziq ham $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{13}{3}; \frac{19}{3}\right)$ nuqtadan o'tadi. Shunday qilib, empirik $y = \frac{17}{2} - \frac{1}{2}x$ va asl $y = \frac{121}{15} - \frac{2}{5}x$ to'g'ri chiziqlar topildi. Ular ustma-ust tushmaydi, ammo $\left(\frac{13}{3}; \frac{19}{3}\right)$ nuqtadan o'tadi.

2-misol. $A_1(2; 4)$, $A_2(4; 8)$, $A_3(6; 6)$,

x	2	4	6
y	4	8	6

Ma'lumotlardan berilgan nuqtalar abssissalari arifmetik progressiyani tashkil etishi ko'rinib turibdi. Demak, 1.3 teoremaga ko'ra mos empirik va asl to'g'ri chiziqlar ustma-ust tushishi lozim. Sodda hisoblashlar yordamida empirik tenglama $y = 4 + \frac{1}{2}x$ ko'rinishida ekanligini chiqarish mumkin.

Ravshanki, $\bar{x} = 4$, $\bar{y} = 6$, $4 + \frac{1}{2}\bar{x} = 4 + \frac{1}{2} \cdot 4 = 6 = \bar{y}$.

Endi chiziqli regressiyaning asl to'g'ri chizig'ini quramiz. 1.7-chizmadan ko'rinadiki, $\lambda = 1$, $y_2 = 5$, $A_2\tilde{C} = 3$, $B_2\tilde{C} = 1$. B_1 va B_3 nuqtalarning koordinatalarini yozamiz: $B_1(2; 5)$, $B_3(6; 7)$. B_1B_3 to'g'ri chiziq tenglamasi $y = 4 + \frac{1}{2}x$ ko'rinishda bo'ladi. Ko'rinadiki, bu tenglama empirik tenglama bilan ustma-ust tushadi.

1-bobga oid masalalar

Quyida $n = 3$ bo'lganda berilgan ma'lumotlar bo'yicha chiziqli regressiyaning empirik va asl to'g'ri chiziqlari topilsin va ular $(\bar{x}, \bar{y})$ nuqtadan o'tishi tekshirilsin (javoblar berilgan):

1	x | 3 | 5 | 8		$a_0=-\frac{17}{19}$	$b_0=\frac{21}{19}$	$y=-\frac{17}{19}+\frac{21}{19}x$
	y | 4 | 2 | 9		$\bar{a}=-\frac{1}{3}$	$\bar{b}=1$	$y=-\frac{1}{3}+x$
2	x | 1 | 3 | 6		$a_0=6$	$b_0=\frac{1}{2}$	$y=6+\frac{1}{2}x$
	y | 8 | 5 | 10		$\bar{a}=\frac{19}{3}$	$\bar{b}=\frac{2}{5}$	$y=-\frac{19}{3}+\frac{2}{5}x$
3	x | 2 | 5 | 7		$a_0=8$	$b_0=-\frac{1}{2}$	$y=8-\frac{1}{2}x$
	y | 6 | 8 | 3		$\bar{a}=\frac{127}{15}$	$\bar{b}=-\frac{3}{5}$	$y=\frac{127}{15}-\frac{3}{5}x$
4	x | 3 | 6 | 8		$a_0=\frac{5}{2}$	$b_0=\frac{1}{2}$	$y=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}x$
	y | 5 | 3 | 8		$\bar{a}=\frac{29}{15}$	$b_0=\frac{5}{2}$	$y=\frac{29}{15}+\frac{3}{5}x$
5	x | 3 | 5 | 7		$a_0=\frac{55}{12}$	$b_0=\frac{3}{4}$	$y=\frac{55}{2}+\frac{3}{4}x$
	y | 8 | 6 | 11		$\bar{a}=a_0$	$\bar{b}=b_0$	$y=\frac{55}{2}+\frac{3}{4}x$
6	x | 3 | 5 | 8		$a_0=\frac{67}{19}$	$b_0=\frac{10}{19}$	$y=\frac{67}{19}+\frac{10}{19}x$
	y | 4 | 8 | 7		$\bar{a}=\frac{47}{15}$	$\bar{b}=\frac{3}{5}$	$y=\frac{47}{15}+\frac{3}{5}x$
7	x | 2 | 4 | 6		$a_0=\frac{13}{3}$	$b_0=\frac{1}{4}$	$y=\frac{13}{3}+\frac{1}{4}x$
	y | 4 | 7 | 5		$\bar{a}=a_0$	$\bar{b}=b_0$	$y=\frac{13}{3}+\frac{1}{4}x$
8	x | 1 | 3 | 5		$a_0=\frac{11}{2}$	$b_0=-\frac{1}{2}$	$y=\frac{11}{2}-\frac{1}{2}x$
	y | 6 | 2 | 4		$\bar{a}=a_0$	$\bar{b}=b_0$	$y=\frac{11}{2}-\frac{1}{2}x$

1-bobga oid nazorat savollari

1. Korrelatsion munosabat nima?
2. Chiziqli regressiya deb nimaga aytiladi?
3. Regressiya egri chiziqlarining asosiy turlarini aytib bering.
4. Qoldiqli dispersiya formulasini yozing.
5. Juftlik regressiyaning chiziqli modeli nima?
6. Eng kichik kvadratlar usulining mohiyatini aytib bering.
7. Chiziqli regressiyaning empirik va asl tenglamalari hamda ular orasidagi bog'lanishlar haqida bayon qiling.
8. $n = 3$ bo'lganda asl to'g'ri chiziqni qurishning geometrik usuli nimadan iborat?
9. Empirik va asl to'g'ri chiziqlar ustma-ust tushishining yetarli sharti nimadan iborat?
10. To'plamli regressiya nima?

2-bob. CHIZIQLI REGRESSIYA TENGLAMASINI TANLASHNING SIFATINI BAHOLASH USULLARI

2.1-§. Umumiy belgilashlar

Juftlik chiziqli regressiya tenglamasini

$$y = a + bx \tag{2.1}$$

ko'rinishda yozamiz. Statistik kuzatishlar ko'rsatadiki, kuzatishlar natijasida olinadigan nuqtalar soni n o'zgaruvchi x oldidagi parametrlar sonidan 7-8 marta ko'p bo'lishi lozim. Juftlik chiziqli regressiya uchun x oldida yagona b koeffitsiyenti bor. Shuning uchun kuzatishlar soni 7 dan kam bo'lmasligi kerak.

Ko'rilayotgan holda masala quyidagicha qo'yiladi ((1.6) ga qarang):

$$\Phi(a,b) = \sum (y_i - a - bx_i)^2 \to \min, \quad (a,b) \in R^2. \tag{2.2}$$

Masalaning yechimi (1.8) va (1.9) formulalar bilan topiladi. Juftlik regressiyaning chiziqli tenglamasi $\hat{y}_x = a_0 + b_0 x$ bo'ladi.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\left.\begin{array}{c} \bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum y_i, \quad \overline{y \cdot x} = \frac{1}{n}\sum x_i y_i, \\ \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum x_i^2, \qquad \overline{y^2} = \frac{1}{n}\sum y_i^2, \\ \bar{x}^2 = \frac{1}{n^2}\left(\sum x_i\right)^2, \qquad \bar{y}^2 = \frac{1}{n^2}\left(\sum y_i\right)^2, \end{array}\right\} \tag{2.3}$$

bunda

$\bar{x} - x_1, x_2, \ldots, x_n,\ x_i > 0,\ i = 1,2,\ldots n$, sonlarning o'rta arifmetigi;

$\bar{y} - y_1, y_2, \ldots, y_n,\ y_i > 0,\ i = 1,2,\ldots n$, sonlarning o'rta arifmetigi;

$\overline{y \cdot x}$ – $x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots, x_n y_n$ sonlarning o'rta arifmetigi;

$\overline{x^2}$ – $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sonlarning o'rta kvadratik miqdori;

$\overline{y^2}$ – $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sonlarning o'rta kvadratik miqdori;

Yana quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$\sigma_x^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = \frac{1}{n}\sum x_i^2 - \frac{1}{n^2}(\sum x_i)^2$ – $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$) o'zgaruvchining dispersiyasi;

$\sigma_y^2 = \overline{y^2} - \bar{y}^2 = \frac{1}{n}\sum y_i^2 - \frac{1}{n^2}(\sum y_i)^2$ – $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ o'zgaruvchining dispersiyasi;

$\text{cov}(x, y) = \overline{y \cdot x} - \bar{y} \cdot \bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i y_i - \left(\frac{1}{n}\sum y_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum x_i\right)$ – x va y o'zgaruvchilarning kovariatsiyasi.

Bu belgilashlar yordamida a_0 va b_0 koeffitsiyentlar uchun formulalarni quyidagicha yozish mumkin:

$$b_0 = \frac{\overline{y \cdot x} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{y^2}}, \quad a_0 = \overline{y} - b_0 \cdot \overline{x}.$$

Kiritilgan belgilashlar chiziqli regressiya tenglamasining sifatini tekshirish uchun olib boriladigan hisob-kitobni yengillashtiradi, ba'zi formulalarni qulayroq yozishga imkon tug'iladi.

2.2-§. Chiziqli regressiya tenglamasini tanlashning sifatini baholash formulalari

Statistik kuzatishlar natijasida olingan ma'lumotlar asosida eng kichik kvadratlar usuli bilan chiziqli regressiya tenglamasi $y = a + bx$ topilgan deylik. Bu tenglama qanchalik sifatli tanlangan? – degan savol tug'iladi. Sifat yanada yaxshilanishi uchun kuzatishlar sonini ko'paytirish kerak, – degan fikrlarni muhokama qilish lozim. Qisqacha aytganda, ekonometrik analiz jarayoni savollarga javob beradi.

Bunda muhim ko'rsatkichlardan biri chiziqli korrelatsiya koeffitsiyentidir. U quyidagicha hisoblanadi:

$$r_{xy}=b_0\frac{\sigma_x}{\sigma_y}=\frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sigma_x\cdot\sigma_y}=\frac{\overline{y\cdot x}-\bar{y}\cdot\bar{x}}{\sqrt{\overline{x^2}-\bar{x}^2}\sqrt{\overline{y^2}-\bar{y}^2}}. \qquad (2.4)$$

Chiziqli korrelatsiya koeffitsiyenti r_{xy} *bog'lanish zichligi* ko'rsatkichidir. Aniqrog'i, r_{xy} miqdor berilgan nuqtalar topilgan empirik chiziqqa qanchalik yaqin joylashganini anglatadi. r_{xy} miqdor uchun $-1\le r_{xy}\le 1$ tengsizlik o'rinli. Shu r_{xy} ning absolut qiymati 1 ga yaqinlashgan sari, $A_1,A_2,\dots,A_n$ nuqtalar empirik chiziqqa shuncha yaqin joylashgan bo'ladi. Agar $|r_{xy}|=1$ bo'lsa, barcha $A_1,A_2,\dots,A_n$ nuqtalar empirik chiziqda yotadi.

Regressiya chizig'ini tanlash sifatini baholash uchun r_{xy}^2 – chiziqli korrelatsiya koeffitsiyentining kvadrati hisoblanadi. Ushbu r_{xy}^2 miqdor *determinatsiya koeffitsiyenti* deyiladi. U regressiya yordamida aniqlanadigan y o'zgaruvchi dispersiyasi ulushini tavsiflaydi. $r_{xy}^2\cdot 100\%$ – x o'zgaruvchi variatsiyasi yordamida aniqlanadigan y o'zgaruvchi variatsiyasi protsentini aniqlaydi.

Qurilgan modelning sifati *approksimatsiyaning o'rtacha xatoligi* bilan aniqlanadi:

$$\bar{A}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{y_i-\bar{y}_{x_i}}{y_i}\right|\cdot 100\%. \qquad (2.5)$$

Agar $\bar{y}_x=a_0+b_0x$ bo'lsa, $\bar{A}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}A_i$ bo'ladi. Bunda

$$A_i=\left|\frac{y_i-a_0-b_0x_i}{y_i}\right|\cdot 100\%.$$

Approksimatsiyaning o'rtacha xatoligi 8% – 10% dan oshmasligi kerak.

Regressiya chizig'i tenglamasi *ma'nodorligini* baholash, umuman olganda, Fisherning F – belgisi yordamida olib boriladi. Fisherning F – belgisi miqdori determinatsiya koeffitsiyenti r_{xy}^2 bilan bog'langan, u quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$F_{fakt}=\frac{r_{xy}^2}{1-r_{xy}^2}\cdot(n-2),\quad n\ge 3. \qquad (2.6)$$

Agar $\alpha = 0{,}05$ (besh protsentlik ma'nodorlik darajasi) va erkinlik darajalari $k_1 = 1$ va $k_2 = n - 2$ bo'lsa, tasodifiy miqdorlarning Fisher taqsimoti keltirilgan jadvallardan Fisherning F – belgisi *jadval qiymatini* topamiz. Agar ushbu $F_{fakt} > F_{jadv}$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, regressiya tenglamasi *statistik ma'nodor* hisoblanadi.

Juftlik chiziqli regressiya uchun regressiya koeffitsiyentlarining *ma'nodorligi* ham baholanadi. Regressiya parametrlarining statistik ma'nodorligi bahosini Styudentning t *t* belgisi yordamida ham amalga oshirish mumkin, unda har bir ko'rsatkich uchun *ishonchlilik intervali* hisoblanadi.

Erkinlik darajasi soni $n - 2$ hamda $\alpha = 0{,}05$ bo'lganda t belgining jadval qiymatini Styudent taqsimotidan topiladi (Magnus Ya.R. va boshq. Ekonometrika. Moskva. Delo. 1998, 2 va 4-jadvallarga qarang, 236-237, 240-241-betlar).

Tasodifiy xatolar m_a, m_b, $m_{r_{xy}}$ quyidagi formulalar yordamida hisoblanadi ($n \geq 3$):

$$m_a = S_{qold} \cdot \frac{\sqrt{\sum x^2}}{n\sigma_x} = \sqrt{\frac{1}{n-2}\sum(y - \hat{y}_x)^2} \cdot \frac{\sqrt{\sum x^2}}{n\sigma_x};$$

$$m_b = \frac{S_{qold}}{\sigma_x\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n-2}\sum(y - \hat{y}_x)^2}}{\sigma_x\sqrt{n}};$$

$$m_{r_{xy}} = \sqrt{\frac{1 - r_{xy}}{n-2}};$$

$$t_a = \frac{a}{m_a}, \quad t_b = \frac{b}{m_b}, \quad t_{r_{xy}} = \frac{r_{xy}}{m_{r_{xy}}}. \qquad (2.7)$$

Agar t - belgining topilgan asl qiymatlari uning jadval qiymati t_{jadv} dan katta bo'lsa (ya'ni $t_a > t_{jadv}$, $t_b > t_{jadv}$, $t_{r_{xy}} > t_{jadv}$ bo'lsa), a va b parametrlar *statistik ma'nodor* hisoblanadi.

Endi a va b parametrlarning ishonchlilik intervalini topish mumkin:

$$\gamma_a = a \pm \Delta_a, \quad \gamma_b = b \pm \Delta_b, \tag{2.8}$$

bunda $\Delta_a = t_{jadv} \cdot m_a, \quad \Delta_b = t_{jadv} \cdot m_b$, $\gamma_{a_{\min}} = a - \Delta_a$,

$$\gamma_{a_{\max}} = a + \Delta_a, \quad \gamma_{b_{\min}} = b - \Delta_b, \quad \gamma_{b_{\max}} = b + \Delta_b.$$

Chiziqli regressiya tenglamasi uchun olingan baholar undan bashorat qilishda foydalanish imkonini beradi. Agar o'zgaruvchi x ning bashorat qiymati $x_p = \bar{x} \cdot 1{,}07$ bo'lsa, o'zgaruvchi y ning bashorat qiymati $\bar{y}_p$ bo'ladi. Bashorat xatoligi ushbu

$$m_{\hat{y}_p} = S_{qold} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_p - \bar{x})^2}{\sum (x - \bar{x})^2}}$$

formula yordamida hisoblanadi.

Limit xatolik $\Delta_{\hat{y}_p}$ ushbu

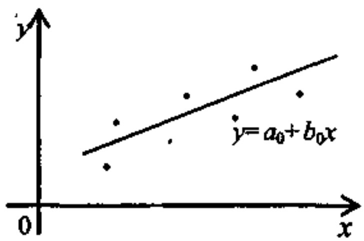
$$\Delta_{\hat{y}_p} = t_{jadv} - m_{\hat{y}_p}$$

formula yordamida topiladi.

Bashoratning ishonchlilik intervali quyidagi formulalar yordamida hisoblanadi:

$$\gamma_{\bar{y}_p} = \hat{y}_p \pm \Delta_{\hat{y}_p}, \quad \gamma_{\hat{y}_{p\max}} = \hat{y}_p + \Delta_{\hat{y}_p}, \quad \gamma_{\hat{y}_{p\min}} = \bar{y}_p - \Delta_{\hat{y}_p},$$

$$p = 1 - \alpha = 1 - 0{,}05 = 0{,}95.$$



2.1- chizma

Chiziqli regressiya tenglamasini tanlash sifatini to'liq ekonometrik analiz qilib chiqqandan so'ng bitta chiziqda berilgan (kuzatish natijalarida topilgan) nuqtalarni va regressiya to'g'ri chizig'ini qurish kerak (2.1- chizma).

Chiziqli regressiya tenglamasini tanlash sifatini baholash usullarining qo'llanishi "Ilova"da berilgan bo'lib, unda javobini berish lozim bo'lgan savollar hamda masalani yechishda hisob-kitoblarni soddalashtiradigan (qulaylashtiradigan) 2 jadval keltirilgan. Biror mintaqa hududi bo'yicha muayyan yil uchun quyidagi ma'lumotlar berilgan bo'lsin.

Ilova

Masalani yechishni yengillashtiradigan 2 ta jadval keltiramiz.

1-jadval

№	Mehnatga layoqatli kishilar uchun jon boshiga bir kunlik o'rtacha zarur xarajat, so'm hisobida	Bir kunlik o'rtacha maosh, so'm hisobida
1	x_1	y_1
2	x_2	y_2
...	...	...
n^*	x_n	y_n

* Juftlik chiziqli regressiya uchun $n \geq 7$ bo'ladi

Quyidagi savollarga javob berish talab qilinadi:

1. Juftlik regressiyaning chiziqli tenglamasi tuzilsin ($y = a + bx$).

2. Juftlik regressiyaning chiziqli korrelatsiya koeffitsiyenti r_{xy} va approksimatsiyaning o'rtacha xatoligi $\overline{A}$ hisoblansin.

3. Fisherning F – belgisi va Styudentning t – belgisi yordamida regressiya va korrelatsiyaning statistik ma'nodorligini baholang.

4. O'rtacha darajasiga nisbatan 107 % ni tashkil etadigan x ning jon boshiga zarur qiymati bashoratiga qarab, maosh y ni bashorat qiling.

5. Bashorat xatoligini va uning ishonchlilik intervalini hisoblab chiqib, bashorat aniqligini baholang.

6. Bitta chizmada berilgan ma'lumotlarni va chiziqli regressiya to'g'ri chizig'ini quring.

Hisoblarni olib borish uchun avval 2-jadvalni to'ldirish qulay bo'ladi:

2-jadval

	x	y	yx	x^2	y^2	$\hat{y}_x$	$y-\hat{y}_x$	A_i,%
1	x_1	y_1	$y_1 \cdot x_1$	x_1^2	y_1^2	$a_0+b_0x_1$	$y_1-a_0-b_0x_1$	A_1
2	x_2	y_2	$y_2 \cdot x_2$	x_2^2	y_2^2	$a_0+b_0x_2$	$y_2-a_0-b_0x_2$	A_2
...	...	...	...	...	...	...	...	
n	x_n	y_n	$y_n \cdot x_n$	x_n^2	y_n^2	$a_0+b_0x_n$	$y_n-a_0-b_0x_n$	A_n
Jami	$\sum x_i$	$\sum y_i$	$\sum y_i x_i$	$\sum x_i^2$	$\sum y_i^2$	–	–	$\sum A_i$
O'rtacha qiymat	$\frac{\sum x_i}{n}$	$\frac{\sum y_i}{n}$	$\frac{\sum y_i x_i}{n}$	$\frac{\sum x_i^2}{n}$	$\frac{\sum y_i^2}{n}$	–	–	$\frac{\sum A_i}{n}$
σ	σ_x	σ_y	–	–	–	–	–	–
σ^2	σ_x^2	σ_y^2	–	–	–	–	–	–

2.3-§. Chiziqli regressiya tenglamasini tanlash sifatini baholash usullarini qo'llanishga doir misollar

1-misol. Aytib o'tildiki, juftlik chiziqli regressiya uchun kuzatishlar soni 7 dan kam bo'lmasligi kerak. Bu misolda hisob-kitoblarni olib borish texnikasini namoyish etish uchun $n = 3$ bo'lgan holni ko'ramiz.

Uch guruh oilalar bilan olib borilgan savol-javoblar natijasida ularning daromadi va oziq-ovqatlar uchun xarajati orasidagi bog'lanish ma'lum bo'lsin, deylik:

Oziq-ovqatlar uchun xarajatlar, y, ming so'm.	0,9	1,2	1,8
Oila daromadi, x, ming so'm.	1,2	3,1	5,3

Shu ma'lumotlar bo'yicha avvalgi 2.2 - § da bayon etilgan 6 ta savolga javob beramiz. Hisob-kitoblarni osonlashtirish uchun avval 2-jadvalni to'ldiramiz.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
	x	y	$y \cdot x$	x^2	y^2	$\hat{y}_x$	$y-\hat{y}_x$	$A_i, \%$
1	1,2	0,9	1,08	1,44	0,81	0,88	0,02	2,2
2	3,1	1,2	3,72	9,61	1,44	1,28	-0,08	6,7
3	5,3	1,8	9,54	28,09	3,24	1,74	0,06	3,33
Jami	9,6	3,9	14,34	39,14	5,49	3,90	0	12,23
O'rtacha qiymat	3,2	1,3	4,75	13,05	1,83	1,30	0	4,08
σ	1,62	0,37	–	–	–	–	–	–
σ^2	2,81	0,14	–	–	–	–	–	–

1. 2-jadvalning 2-6 ustunlarini to'ldirish qiyin emas. Endi b_0 va a_0 larni topamiz.

$$b_0 = \frac{\overline{y \cdot x} - \bar{y} \cdot \bar{x}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{4{,}75 - 3{,}2 \cdot 1{,}3}{13{,}05 - 3{,}2 \cdot 3{,}2} = \frac{0{,}59}{2{,}81} \approx 0{,}21 ,$$

$$a_0 = \bar{y} - b_0 \bar{x} = 1{,}3 - 0{,}21 \cdot 3{,}2 = 0{,}63 .$$

Juftlik chiziqli regressiya tenglamasini yozamiz:

$$\hat{y}_x = 0{,}63 + 0{,}21 \cdot x$$

Shu tenglamadan foydalanib, jadvalning 7-ustunini to'ldirish mumkin:

$$0{,}63 + 0{,}21 \times 1{,}2 = 0{,}63 + 0{,}25 = 0{,}88 ;$$
$$0{,}63 + 0{,}21 \times 3{,}1 = 0{,}63 + 0{,}65 = 1{,}28 ;$$
$$0{,}63 + 0{,}21 \times 5{,}3 = 0{,}63 + 1{,}11 = 1{,}74 .$$

8-ustun $y - \hat{y}_x$ ayirmadan tuzilgan:

$$0{,}98 - 0{,}88 = 0{,}02; \quad 1{,}2 - 1{,}28 = -0{,}08; \quad 1{,}8 - 1{,}74 = 0{,}06 .$$

Endi 9-ustunni to'ldirish qoldi:

$$A_1 = \left| \frac{y_1 - \hat{y}_{x_1}}{y_1} \right| \cdot 100\% = \left| \frac{0{,}02}{0{,}90} \right| \cdot 100\% = 2{,}2\% ;$$

$$A_1 = \left| \frac{y_2 - \hat{y}_{x_2}}{y_2} \right| \cdot 100\% = \left| \frac{-0{,}08}{1{,}2} \right| \cdot 100\% = 6{,}7\% ;$$

$$A_1 = \left|\frac{y_3 - \hat{y}_{x_3}}{y_3}\right| \cdot 100\% = \left|\frac{0,06}{1,8}\right| \cdot 100\% = 3,33\% \,.$$

Shunday qilib, $\overline{A} = \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + A_3) = 4,08\,\%$. Bu miqdor 8 10 % dan kam bo'lgani uchun qurilgan model sifati *yaxshi* deb baholanadi.

Endi $\sigma_x, \sigma_x^2, \sigma_y$ va σ_y^2 miqdorlarni hisoblaymiz:

$$\sigma_x^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2 = 13,05 - 3,2^2 = 2,81\,; \quad \sigma_x = \sqrt{2,81} = 1,62\,;$$

$$\sigma_y^2 = \overline{y^2} - \overline{y}^2 = 1,83 - 1,69 = 0,14\,; \quad \sigma_y = \sqrt{0,14} = 0,37\,.$$

Yuqoridagi hisob-kitoblar yordamida 2-jadval to'liq to'ldirildi. Endi juftlik chiziqli regressiya tenglamasining sifatini baholashga o'tish mumkin. Regressiya tenglamasiga ko'ra jon boshiga minimal xarajat 1 so'mga ortsa, o'rtacha kundalik maosh o'rtacha 0,21 so'mga ortadi.

2. Bog'lanish zichligini anglatuvchi korrelatsiya koeffitsiyentini hisoblaymiz:

$$r_{xy} = b_0 \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} - 0,21 \cdot \frac{1,62}{0,37} = 0,92\,; \; r_{xy}^2 = 0,85\,.$$

Bu natijadan ko'rinadiki, maosh (y) ning 85 % variatsiyasi jon boshiga o'rtacha minimal xarajat (x) ning variatsiyasi bilan tushuntiriladi.

Model sifati approksimatsiyaning o'rtacha xatoligi bilan aniqlanadi:

$$\overline{A} = \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + A_3) = 4,08\,\%\,.$$

Bu holda, yuqorida aytib o'tilganidek, 4,08 % < 8 % tengsizlikka ko'ra, model sifati yaxshi deb baholanadi.

3. Regressiya ma'nodorligini baholashni Fisherning F belgisi yordamida olib boramiz. F belgining (F_{fakt} ning) asl qiymatini ($n = 3$ bo'lganda) hisoblaymiz:

$$F_{fakt} = \frac{r_{xy}^2}{1 - r_{xy}^2} \cdot 1 = \frac{0,85}{1 - 0,85} = 5,66\,; \quad F_{fakt} = 5,66\,.$$

Endi $\alpha = 0{,}05$, $k_1 = 1$; $k_2 = 3-2 = 1$ bo'lganda F_{jadv}=166.

Agar $F_{fakt} > F_{jadv}$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, regressiya tenglamasi statistik ma'nodor deb qaralar edi. Ammo bu holda $5{,}66 \not> 161$. Demak, regressiya tenglamasi Fisherning F - belgisi bo'yicha *statistik ma'nodor emas*. Bunga asosiy sabab $n = 3 < 7$ bo'lganidadir.

Regressiya tenglamasini tadqiqot qilishni davom ettiramiz. Regressiya parametrlarining statistik ma'nodorligini baholashni Styudentning t – belgisi yordamida olib boramiz. Erkinlik darajasi $k = n - 2 = 3 - 2 = 1$ va $\alpha = 0{,}05$ (0,15) bo'lganda t –statistikaning jadval qiymati 3,182 ga teng, ya'ni $t_{jadv} = 3{,}182$.

Endi tasodifiy xatoliklarni aniqlaymiz:

$$S_{qold} = \sqrt{\sum (y - \hat{y}_x)^2} = 0{,}102 \;;$$

$$m_a = 0{,}102 \cdot \frac{\sqrt{39{,}14}}{3 \cdot 1{,}62} = 0{,}13\;; \quad m_b = \frac{S_{qold}}{\sigma_x} = \frac{0{,}102}{1{,}62} = 0{,}063\;;$$

$$m_{r_{xy}} = \sqrt{1 - r_{xy}^2} = \sqrt{0{,}15} = 0{,}378$$

Shunday qilib, $S_{qold} = 0{,}102$; $m_a = 0{,}13$; $m_b = 0{,}063$; $m_{r_{xy}} = 0{,}378$.

Tasodifiy xatoliklarning topilgan qiymatlaridan foydalanib, t –belgi qiymatlarini topamiz:

$$t_a = \frac{a}{m_a} = \frac{0{,}63}{0{,}13} = 4{,}85\;; \qquad t_b = \frac{b}{m_b} = \frac{0{,}21}{0{,}063} = 3{,}33\;;$$

$$t_{r_{xy}} = \frac{r_{xy}}{m_{r_{xy}}} = \frac{0{,}92}{0{,}39} = 2{,}33$$

Endi $n = 3$, $n - 2 = 1$, $\alpha = 0{,}05$ uchun F_{jadv}=12,706. Quyidagi tengsizliklar o'rinli:

$$t_a = 4{,}85 < t_{jadv} = 12{,}706\;; \quad t_b = 3{,}33 < t_{jadv} = 12{,}706\;;$$

$$t_{r_{xy}} = 2{,}33 < t_{jadv} = 12{,}706$$

Natijalar ko'rsatadiki, $n = 3$ bo'lganda t_a, t_b va $t_{r_{xy}}$ parametrlar *statistik ma'nodor emas*.

a va b parametrlar uchun ishonchlilik intervallarini hisoblaymiz. Avval har bir parametr uchun limit xatoliklarni topamiz:

$$\Delta_a = t_{jadv} \cdot m_a = 12,7 \cdot 0,13 = 1,65;$$

$$\Delta_b = t_{jadv} \cdot m_b = 12,7 \cdot 0,063 = 0,80.$$

Ishonchlilik intervallari:

$$\gamma_a = a \pm \Delta_a = 0,63 \pm 1,65; \quad \gamma_b = b \pm \Delta_b = 0,21 \pm 0,80;$$

$$\gamma_{a_{min}} = 0,63 - 1,65 = -1,02; \quad \gamma_{a_{max}} = 0,63 + 1,65 = 2,28;$$

$$\gamma_{b_{min}} = 0,21 - 0,80 = -0,59; \quad \gamma_{b_{max}} = 0,21 + 0,80 = 1,01.$$

Xulosa. a va b parametrlar mos ravishda (-1,02; 2,28) va (0,59; 1,01) intervallarda nolga teng bo‘lishi mumkin. Shuning uchun ular statistik ma’nodor emas.

4. Yashash uchun zarur minimal daromad va xarajatlar quyidagicha bashorat qilinadi:

– oila daromadi: $x_p = \bar{x} \cdot 1,07 = 3,2 \cdot 1,07 = 3,424$ ming so‘m;

– maosh: $\hat{y}_p = 0,63 + 0,21 \cdot 3,42 = 1,35$ ming so‘m.

5. Bashorat xatosi:

$$m_{\hat{y}_p} = S_{qold} \sqrt{1 + \frac{1}{3} + \frac{(x_p - \bar{x})^2}{\sum (x - \bar{x})^2}} = 0,102.$$

Bashoratning limit xatoligini hisoblaymiz:

$$\Delta_{\hat{y}_p} = t_{jadv} \cdot m_{\hat{y}_p} = 12,7 \cdot 0,102 = 01,3.$$

Bashoratning ishonchlilik intervali:

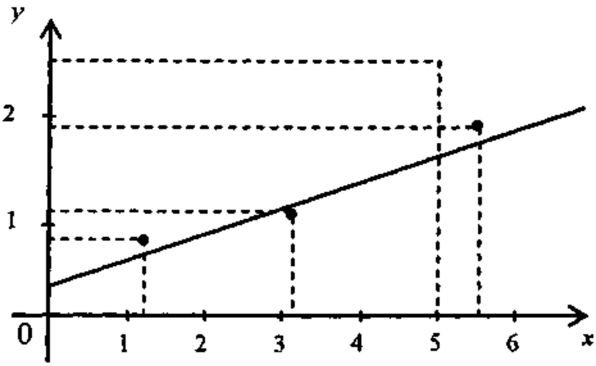
$$\gamma_{\hat{y}_p} = \hat{y}_p \pm \Delta_{\hat{y}_p} = 1,35 \pm 1,30;$$

$$\gamma_{\hat{y}_{p\,min}} = 0,05; \quad \gamma_{\hat{y}_{p\,max}} = 2,65.$$

Maoshning o‘rtacha oylik miqdori bashorati $\hat{y}_p = 1,35$ ming so‘m ($p = 1 - \alpha = 1 - 0,05 = 0,95$) (0,05; 2,65) intervalga tegishli va shuning uchun ishonchlidir.

6. Endi berilgan (1,2; 0,9), (3,1; 1,2), (5,3; 1,8) nuqtalarni va juftlik regressiya to‘g‘ri chizig‘ini, ya’ni $\hat{y}_x = 0,63 + 0,21x$ tenglama bilan

tasvirlangan to'g'ri chiziqni bitta koordinata sistemasida chizamiz (2.2-chizma).



2.2-chizma

2-misol. Endi 1-misolga o'xshash holni $n = 12$ bo'lganda ko'ramiz.

q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x	78	82	87	79	89	106	67	88	73	87	76	115
y	133	148	134	154	162	195	139	158	152	162	159	173

Jadvalda q – oila guruhlari; y – bir kunlik o'rtacha maosh, x – ish bilan band bo'lganlar uchun bir kunlik minimum xarajat.

Berilgan ma'lumotlarga qarab 6 ta savolga javob beramiz.

1. 2-jadvalni to'ldiramiz:

	x	y	yx	x^2	y^2	$\hat{y}_x$	$y-\hat{y}_x$	A_i,%
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	78	133	10374	6084	17689	149	-16	12,0
2	82	148	12136	6724	21904	152	-4	2,7
3	87	134	11658	7569	17956	157	-23	17,2
4	79	154	12166	6241	23716	150	4	2,6
5	89	162	14418	7921	26244	159	3	1,9
6	67	139	9313	4489	19321	139	0	0,0
7	106	195	20670	11236	38025	174	21	10,8
8	88	158	139904	7744	24964	158	0	0,0
9	73	152	11096	5329	23104	144	8	5,3
10	87	162	14094	7569	26244	157	5	3,1

1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	76	159	12084	5776	25281	147	12	7,5
12	115	173	19895	13225	29929	183	-10	5,8
J	1027	1869	161808	89907	294377	1869	0	68,9
O‘	85,6	155,8	13484	7492,3	24531,4	–	–	5,7
σ	12,84	16,05	–	–	–	–	–	–
σ^2	164,94	257,76	–	–	–	–	–	–

Jadvalda J – jami, O‘ – o‘rta qiymatni anglatadi.

Endi a_0 va b_0 larni hisoblaymiz:

$$b_0 = \frac{\overline{y \cdot x} - \bar{y} \cdot \bar{x}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{13484 - 155{,}8 \cdot 85{,}6}{7492{,}3 - 85{,}6^2} = \frac{147{,}52}{164{,}94} = 0{,}89;$$

$$a_0 = y - b_0 x = 155{,}8 - 0{,}89 \cdot 85{,}6 = 79{,}62.$$

Chiziqli regressiya tenglamasini yozamiz: $y_x = 79{,}62 + 0{,}89x$.

Bundan kelib chiqadiki, jon boshiga zarur minimal xarajat 1 so‘mga ortsa, o‘rtacha kundalik maoshi o‘rta hisobda 0,89 so‘mga ortar ekan.

2. Bog‘lanish zichligini anglatuvchi korrelatsiya koeffitsiyentini hisoblaymiz:

$$r_{xy} = b_0 \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 0{,}89 \cdot \frac{12{,}84}{16{,}05} = 0{,}712; \quad r_{xy}^2 = 0{,}51.$$

Bu maoshning (y) 51 % variatsiyasi jon boshiga zarur minimal xarajat faktori x bilan tushuntirilishini anglatadi.

Approksimatsiyaning o‘rtacha xatoligi model sifatini aniqlaydi:

$$A = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} A_i = \frac{68{,}9\,\%}{12} = 5{,}74\,\%.$$

Ushbu 5,74 % < 8 % tengsizlik o‘rinli bo‘lgani uchun qurilgan model sifati *yaxshi* deb baholanadi.

3. Regressiya tenglamasining *ma'nodorligini*, ko‘pincha, Fisherning F – belgisi yordamida baholanadi. F – belgining asl qiymati (F_{fakt}) ni hisoblaymiz:

$$F_{fakt}=\frac{r_{xy}^2}{1-r_{xy}^2}(12-2)=\frac{0{,}51}{1-0{,}51}\cdot 10=10{,}41.$$

F – belgining ma'nodorlik darajasi 5 % va erkinlik darajalari $k_1 = 1$ va $k_2 = 12-2 = 10$ bo'lgandagi jadval qiymati $F_{jadv} = 4{,}96$. Shunday qilib, $F_{fakt} = 10{,}41 > F_{jadv} = 4{,}96$ tengsizlik bajariladi. Shuning uchun regressiya tenglamasi *statistik ma'nodor* deb hisobga olinadi.

Endi regressiya parametrlarining statistik ma'nodorligini Styudentning t – belgisi yordamida baholaymiz.

t – belgining ma'nodorlik darajasi 5 % ($\alpha = 0{,}05$) va erkinlik darajasi $n-2 = 12-2 = 10$ bo'lgandagi qiymati $F_{jadv} = 2{,}23$ bo'ladi.

m_a, m_b, $m_{r_{xy}}$ tasodifiy xatoliklarni topamiz:

$$m_a = S_{qold}\cdot\frac{\sqrt{\sum x^2}}{n\sigma_x}=12{,}6\cdot\frac{\sqrt{89907}}{12\cdot 12{,}84}=24{,}5;$$

$$m_b=\frac{S_{qold}}{\sigma_x\sqrt{n}}=\frac{12{,}6}{12{,}95\cdot\sqrt{12}}=0{,}281;$$

$$m_{r_{xy}}=\sqrt{\frac{1-r_{xy}^2}{n-2}}=\sqrt{\frac{1-0{,}51}{12-2}}=0{,}219.$$

t – belgining qiymatlarini topamiz:

$$t_a=\frac{a}{m_a}=\frac{79{,}616}{24{,}6}=3{,}2;\quad t_b=\frac{b}{m_b}=\frac{0{,}89}{0{,}281}=3{,}2;\quad t_{r_{xy}}=\frac{r_{xy}}{m_{r_{xy}}}=\frac{0{,}712}{0{,}219}=3{,}3.$$

Ko'rinadiki, t – belgining qiymatlari uning jadval qiymatidan katta:

$$t_a = 3{,}2 > t_{jadv} = 2{,}23;\ t_b = 3{,}2 > t_{jadv} = 2{,}23;$$

$$t_{r_{xy}} = 3{,}3 > t_{jadv} = 2{,}23.$$

Shunday qilib, a, b va r_{xy} parametrlar statistik ma'nodor ekan.

Regressiyaning a va b parametrlari uchun ishonchlilik intervallarini topamiz. Buning uchun har bir ko'rsatkich uchun limit xatolikni hisoblaymiz:

$$\Delta_a = t_{jadv} \cdot m_a = 2,23 \cdot 24,5 = 54,64 ;\ \Delta_b = t_{jadv} \cdot m_b = 2,23 \cdot 0,281 = 0,62 .$$

Ishonchlilik intervallari:

$$\gamma_a = a \pm \Delta_a = 79,62 \pm 54,64 ;$$

$$\gamma_{a_{\min}} = 79,62 - 54,64 = 24,98 ;$$

$$\gamma_{a_{\max}} = 79,62 + 54,64 = 134,26$$

$$\gamma_b = b \pm \Delta_b = 0,89 \pm 0,62 ;$$

$$\gamma_{b_{\min}} = 0,89 - 0,62 = 0,27 ;$$

$$\gamma_{b_{\max}} = 0,89 + 0.62 = 1,51 .$$

Ishonchlilik intervallarining yuqori va quyi chegaralarining analizi shunday xulosaga olib keladiki, a va b parametrlar $p = 1 - \alpha = 0,95$ ga teng ehtimollik bilan ko'rsatilgan chegaralarda nolga teng qiymatlarni qabul qilmaydi, ya'ni statistik *ma'nodor* va noldan anchagina farq qiladi.

4. Regressiya tenglamasi uchun olingan baholar undan bashorat qilishda foydalanish mumkinligini bildiradi. Agar zarur minimum xarajatning bashorat qiymati

$x_p = \bar{x} \cdot 1,07 = 85,6 \cdot 1,07 = 91,6$ ming so'm bo'lsa,

maoshning bashorat qiymati

$\hat{y}_p = 79,62 + 0,89 \cdot 91,6 = 161,14$ ming so'm bo'ladi.

5. Bashorat xatoligi:

$$m_{\hat{y}_p} = S_{qold} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_p - \bar{x})^2}{\sum (x - \bar{x})^2}} = 12,6 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{12} + \frac{(91,6 - 85,6)^2}{12 \cdot 12,84^2}} = 13,22 .$$

Bashoratning limit xatoligi $\Delta_{\hat{y}_p} = t_{jadv} \cdot m_{\hat{y}_p} = 2,23 \cdot 13,22 = 29,48 .$

Bashoratning ishonchlilik intervali

$$\gamma_{\hat{y}_p} = \hat{y}_p \pm \Delta_{\hat{y}_p} = 161,14 \pm 29,48 ;$$

$$\gamma_{\hat{y}_{p\min}} = 161,14 - 29,48 = 131,66 \text{ ming so'm;}$$

$$\gamma_{\hat{y}_{p\max}} = 161,14 + 29,48 = 190,62 \text{ ming so'm .}$$

Bashoratning limit xatoligi 95 % holatlarda 29,48 dan ortmaydi. O'rtacha oylik maoshning topilgan bashorati ishonchli deb hisoblanadi ($p = 1 - \alpha = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$) va 131,66 ming so'm bilan 190,62 ming so'm orasida bo'ladi.

6. Masalalar yechimining nihoyasida bitta koordinata sistemasida berilgan 12 ta nuqta va chiziqli regressiya to'g'ri chizig'ini qurish qiyin emas.

2-bobga oid masalalar

Faraz qilaylik, biror mintaqa hududi bo'yicha bir kunda mehnatga layoqatli kishilar uchun jon boshiga o'rtacha zarur minimum xarajat (x so'm) va kunlik o'rtacha maosh (y so'm) ga oid bir yillik shartli ma'lumotlar berilgan bo'lsin. Ma'lumotlar 3-jadvalda keltirilgan. 2.2 - § da bayon etilgan 6 ta savolga javob berish lozim.

3-jadval

	I				II			
	Bitta mehnatga layoqatli kishi uchun bir kunlik jon boshiga zarur xarajat (x, so'm)				Bir kunlik o'rtacha maosh (y, so'm)			
	1	2	3	4	1	2	3	4
1	81	74	77	83	124	122	123	137
2	77	81	85	88	131	134	152	142
3	85	90	79	75	146	136	140	128
4	79	79	93	89	139	125	142	140
5	93	89	89	85	143	120	157	133
6	100	87	81	79	159	127	181	153
7	72	77	79	81	135	125	133	142
8	90	93	97	97	152	148	163	154
9	71	70	73	79	157	122	134	132
10	89	93	95	90	154	158	155	150
11	82	87	84	84	127	144	132	132
12	111	121	108	112	118	165	165	166

3-jadval yordamida variantlar tuzish mumkin. Agar variant (3, 4) deb belgilangan bo'lsa, I bo'limdan 3-ustunni, II bo'limdan 4-ustunni olish kerak. Shu usul bilan 16 ta variant hosil bo'ladi. Agar variantlar sonini ko'paytirmoqchi bo'lsak, I va II bo'limlardagi 12 tadan satrlar borligini e'tiborga olib, satrlar sonini 7, 8, 9, 10, 11, 12 kabi berish mumkin. Bunda yuqoridagi (3, 4)-variant o'rniga (3, 4, 7), ..., (3, 4, 12) uchliklar yordamida variantlar berish mumkin. Bu holda 6 ta variant hosil bo'ladi. Har bir (i, j), $i = 1, 2, 3, 4$; $j = 1, 2, 3, 4$ variant o'rniga 6 ta variant, hammasi bo'lib 96 ta variant tuzish mumkin.

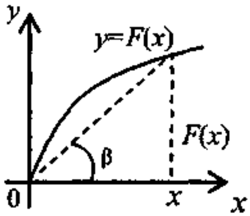
2-bobga oid nazorat savollari

1. Ushbu $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\overline{y \cdot x}$, $\overline{x^2}$, $\bar{x}^2$, $\overline{y^2}$, $\bar{y}^2$ belgilashlar nimani anglatadi?
2. x va y o'zgaruvchilar dispersiyasi formulasini yozing.
3. Ikki o'zgaruvchi kovariatsiyasi $cov(x, y)$ uchun formulani yozing.
4. Chiziqli regressiya koeffitsiyentlarini hisoblash formulalarini yozing.
5. Chiziqli korrelatsiya koeffitsiyenti r_{xy} uchun formulani yozing.
6. Bog'lanish zichligi va determinatsiya koeffitsiyenti nima?
7. Approksimatsiyaning o'rtacha xatoligi qanday hisoblanadi?
8. Fisherning F – belgisi qiymati qanday hisoblanadi?
9. Qachon regressiya tenglamasi statistik ma'nodor deyiladi?
10. Juftlik chiziqli regressiya ma'nodorligi qaysi hollarda Styudentning t – belgisi yordamida baholanadi?
11. Tasodifiy xatoliklar m_a, m_b, $m_{r_{xy}}$ ni hisoblash formulalarini keltiring.
12. Qachon a, b va r_{xy} parametrlar statistik ma'nodor hisoblanadi?
13. a va b parametrlarning ishonchlilik intervallari qanday topiladi?

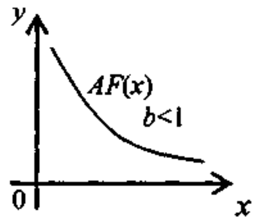
3-bob. IQTISODIYOTDA JAMLAMA, O'RTA VA MARJINAL MIQDORLAR

3.1-§. Iqtisodiyotda jamlama, o'rta va marjinal miqdorlar ta'rifi

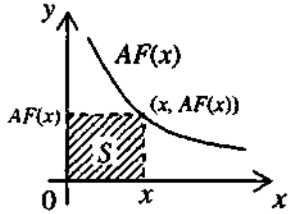
Jamlama miqdorlar deyilganda erkli o'zgaruvchi x ning ixtiyoriy $F(x)$ funksiyasi tushuniladi. Iqtisodiyotda turli jamlama miqdorlar uchraydi. Daromad R va xarajat C ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi Q ning funksiyasi $\left(R(Q),\ C(Q) \right)$, ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi Q o'zgaruvchi resurs, masalan, L ning funksiyasi $Q(L)$, foydalilik iste'mol qilinadigan mahsulot hajmi x ning funksiyasi $U(x)$ va boshqalar shular jumlasidandir (3.1-chizma).



3.1-chizma



3.2-chizma



3.3-chizma

O'rta miqdor jamlama miqdor $F(x)$ ning erkli o'zgaruvchi x ga nisbati bilan aniqlanadi va $AF(x)$ deb belgilanadi: $AF(x) = \dfrac{F(x)}{x}$. Bunda A harfi *Average* (o'rtacha) so'zining bosh harfidan iborat. Ba'zida o'rta miqdor $\overline{F} = \dfrac{F(x)}{x}$ kabi belgilanadi. Iqtisodiyotda quyidagilar o'rta miqdorlarga misol bo'la oladi: jon boshiga iste'molning o'rtacha hajmi (jon boshiga iste'mol) $-\ \dfrac{C}{L}$ (C – iste'mol hajmi, L – mehnat resurslari hajmi), qurollanganlik

$\frac{K}{L}$ (K – asosiy fondlar hajmi), o'rtacha daromad $AR = \frac{R(Q)}{Q}$, o'rtacha xarajat $AC = \frac{C(Q)}{Q}$, o'rtacha mehnat mahsuli $AQ_L = \frac{Q(L)}{L}$ va boshqalar.

Bundan tashqari, o'rtacha mehnat unumdorligi $\frac{F(L,K)}{L}$ ($F(L, K)$ – ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori yoki milliy daromad), fondlar bo'yicha o'rtacha unumdorlik $\frac{F(L,K)}{L}$ kabi o'rta miqdorlar ham mavjud.

Limit (marjinal) miqdor $MF(x)$ jamlama miqdor $F(x)$ dan erkli o'zgaruvchi x bo'yicha olingan hosila kabi aniqlanadi, ya'ni

$$MF(x) = F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x}$$

bu erkli o'zgaruvchi x uzluksiz o'zgarganda. Agar jamlama miqdor diskret o'zgarsa, unda $MF(x)$ miqdor quyidagicha aniqlanadi:

$$MF(x) = \frac{\Delta F}{\Delta x}.$$

Masalan, quyidagi formulaga egamiz:

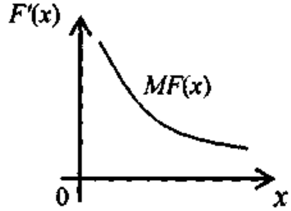
$$MR(Q) = R'(Q) \left(MR(Q) = \frac{\Delta R}{\Delta Q} \right), \ MC(Q) = C'(Q) \left(MC(Q) = \frac{\Delta C}{\Delta Q} \right).$$

Iqtisodiyotda jamlama, o'rta va limit (marjinal) miqdorlar orasidagi bog'lanishdan foydalanishga to'g'ri keladi, ulardan biri bo'yicha qolgan ikkitasini topish masalasini yechish kerak bo'ladi (masalan, jamlama daromad bo'yicha o'rta va limit daromadni topish masalasi). Ravshanki, agar jamlama miqdor $F(x)$ berilgan bo'lsa, o'rta miqdor $\frac{F(x)}{x}$ ga, limit miqdor esa $F'(x)$ ga teng. Faraz qilaylik, $F(x) = a_0 x^{\alpha}$, $a_0 > 0$, $0 < \alpha < 1$ bo'lsin. Unda $AF(x) = \frac{a_0 x^{\alpha}}{x} = a_0 x^{\alpha-1}$, $MF(x) = F'(x) = a_0 \alpha \, x^{\alpha-1}$.

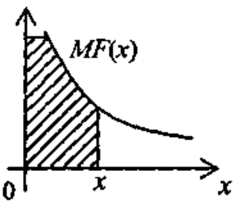
Ravshanki, $F''(x)=a_0\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}<0$. Shu sababli, $F(x)$ funksiya grafigi koordinata boshidan chiqadi va botiqdir(3.1-chizma). 3.1 chizmadan ko'rinadiki, $AF(x)=\frac{F(x)}{x}=tg\,\beta$.

Bu miqdor β o'sishi bilan kamayadi (3.2-chizma). O'rta miqdor ta'rifiga ko'ra jamlama funksiya $F(x)$ quyidagi formula bo'yicha topiladi: $F(x)=x\cdot AF(x)$. Shu funksiya o'zgarishi xarakterini o'rganish uchun tomonlari x va $AF(x)$ bo'lgan to'g'ri to'rtburchakni ko'rib chiqamiz. Uning yuzini $S(x)$ deb belgilaylik (3.3-chizma). Shu yuzning o'zgarishiga qarab jamlama miqdorning grafigini chizish mumkin. Yuqorida ko'rilgan misol uchun $F'(x)=x\cdot AF(x)=x\cdot a_0x^{\alpha-1}=a_0x^{\alpha}$ (3.4, 3.5- chizmalar).

Marjinal miqdor $F'(x)=MF(x)$ bo'yicha jamlama miqdor $F(x)$ topilishi mumkin:



3.4-chizma



3.5-chizma

$$F(x)=\int MF(x)\,dx.$$

Masalan, agar $MF(x)=a_0\alpha\,x^{\alpha-1}$ bo'lsa,

$F(x)=\int a_0\alpha\,x^{\alpha-1}dx=a_0x^{\alpha}+const$. Iqtisodiy masala shartlaridan foydalanib, o'zgarmasni (*const* ni) topish imkoni bo'ladi.

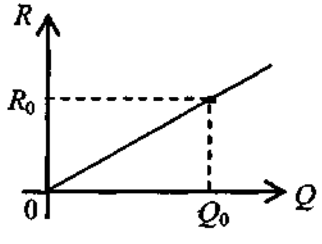
Endi limit, o'rta va jamlama miqdorlar orasidagi munosabatlardan foydalanishga oid misol ko'ramiz.

Har bir firma quyidagi iqtisodiy ko'rsatkichlar bilan tavsiflanadi:

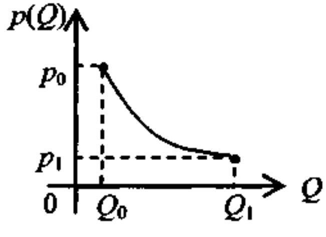
Q – ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi, p – narh, $R=p(Q)\,Q$ – daromad, C – xarajat, $\text{P}=R-C$ – sof foyda.

Ma'lumki, bozorda raqobatlar 4 turli bo'ladi. Avval *mukammal* raqobatni ko'raylik. Bunda firma mahsuloti narhi shu firma ishlab chiqargan mahsulot hajmiga bog'liq bo'lmaydi. Narx bozorda aniqlanadi va o'zgarmas bo'ladi, ya'ni $p(Q) = p = const$. Shuning uchun $R = p(\theta)\,Q = p \cdot Q$, ya'ni $R = p\,Q$, $p > 0$ ($tg\,\beta = \frac{R_0}{Q_0}$; 3.6-chizma). Endi $MR = (pQ)' = p = \frac{pQ}{Q} = AR$ ekanini ko'rsatish qiyin emas.

Agar monopolistik raqobat ko'rilsa, ravshanki, $p \neq const$. Bu holda firma o'z mahsulotiga o'zi narh qo'yadi. Mahsulot qancha ko'p ishlab chiqarilsa, uning narhi shuncha kamayadi, ya'ni $p(Q)$ funksiya kamayuvchidir. Demak, $p'(Q) < 0$. Ammo $Q = Q_1$ bo'lganda narh $p = p_1$ dan kamaya olmaydi, chunki bu holda mahsulotni sotishning ma'nosi yo'q. Ishlab chiqarilgan mahsulotning minimal hajmi Q_0 uchun narh p_0 dan ortib keta olmaydi, chunki bu holda mahsulot sotilmay qoladi (3.7-chizma).



3.6-chizma



3.7-chizma

3.2-§. Statistik o'rta miqdorlar va iqtisodiy masalalarni yechishning tengsizliklar usuli

Ko'plab iqtisodiy masalalar bir yoki ko'p argumentli funksiyalarning ekstremal qiymatlarini topishga keltiriladi. Albatta, bunday masalalarni yechishning klassik usullari mavjud. Ularda differensial hisobdan foydalaniladi. Bu holat ko'plab noqulayliklarga ega. XX asrning 60-yillarida ekstremal masalalarni yechishda qulaylik tug'diradigan "geometrik dasturlash" nomli yo'nalish yaratildi. Geometrik dasturlash usullari differensial hisobdan foydalanmasdan, matematikada keng qo'llaniladigan ayrim tengsizliklar yordamida ekstremal masalalarni yechishga asoslangan. Quyida biz *tengsizliklar* hamda *pozinomlar* usulini bayon etamiz va iqtisodiyotga oid masalalarni yechib ko'rsatamiz. Avval tengsizliklar usuliga to'xtalamiz. Quyida ba'zi statistik o'rta miqdorlar ta'rifini keltiramiz.

Faraz qilaylik, $x_1, x_2, ..., x_n$ – musbat sonlar yoki biror sohada aniqlangan va musbat qiymatlar qabul qiladigan funksiyalar bo'lsin. Quyida 4 ta o'rta miqdorni yozamiz:

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}} \text{ – o'rta garmonik miqdor;}$$

$$\Gamma_n = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n} \text{ – o'rta geometrik miqdor;}$$

$$A_n = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \text{ – o'rta arifmetik miqdor;}$$

$$D_n = \sqrt{\frac{1}{n}\left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2\right)} \text{ – o'rta kvadratik miqdor.}$$

Shu o'rta miqdorlar orasida ushbu

$$H_n \le \Gamma_n \le A_n \le D_n \tag{3.1}$$

tengsizliklar o'rinli, unda tenglik ishorasi faqat $x_1 = x_2 = ... = x_n$ bo'lgandagina o'rinli. Biz $\Gamma_n \le A_n$, ya'ni

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n} \le \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + ... + x_n) \tag{3.2}$$

tengsizlikni ko'ramiz. Ba'zi hollarda bu tengsizlikdan matematik dasturlashning anchagina murakkab masalasini yechishda foydalanish mumkin. Shu (3.2) tengsizlik yordamida ekstremal masalalarni yechish usuli *tengsizliklar usuli* deb ataladi.

Ikki holni alohida-alohida ko'ramiz.

1^0 - hol. Faraz qilaylik, $x_1 = x_1(t) > 0$, $x_2 = x_2(t) > 0, ... x_n = x_n(t) > 0$, $\forall t \in (a, b)$ va $x_1 + x_2 + ... + x_n = a$, $a = const > 0$ bo'lsin. Bu holda (3.2) tengsizlik $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n} \le \frac{a}{n}$ ko'rinishni oladi. Quyidagi masalani ko'raylik:

$$
\left.
\begin{aligned}
&x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \to max\,, \\
&x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a, \quad a = const\,, \\
&x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ \ldots, x_n > 0\,.
\end{aligned}
\right\}
\qquad (3.3)
$$

Bu (3.3) masala chiziqsiz dasturlashning shartlari tengliklar bilan berilgan shartli maksimum masalasidir. Uni sodda hollarda chiqarish usuli bilan, umumiy holda esa, Lagranj ko'paytuvchilari usuli bilan yechiladi. Bu usullar differensial hisobdan foydalanadi va ko'plab hisob-kitoblarni talab etadi. Ko'rilayotgan holda, agar masala (3.3) ko'rinishga keltirilgan bo'lsa, uning yechimini darhol yozish mumkin:

$$
\left.
\begin{aligned}
&max\left(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n\right) = \left(\frac{a}{n}\right)^n, \\
&x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{a}{n}\,.
\end{aligned}
\right\}
\qquad (3.4)
$$

Masalalar ko'ramiz.

1-masala. To'g'ri to'rtburchakning yarim perimetri berilgan: $x_1 + x_2 = p$. To'g'ri to'rtburchakning tomonlari x_1 va x_2 qanday bo'lganda uning yuzi eng katta bo'ladi?

Yechish. Masala quyidagi

$$
\begin{cases}
x_1 \cdot x_2 \to max\,, \\
x_1 + x_2 = p,\ p > 0\,,
\end{cases}
$$

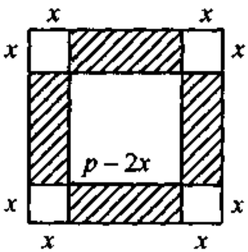
ko'rinishda yoziladi. Unda $n = 2$, $a = p$. Masalaning yechimi (3.4) bo'yicha yoziladi: $max(x_1 \cdot x_2) = \left(\frac{p}{2}\right)^2$, $x_1 = x_2 = \frac{p}{2}$.

2-masala. Ushbu $f(x) = a\,x(b - x) \to max$, $0 < x < b$, $a > 0$, masala yechilsin.

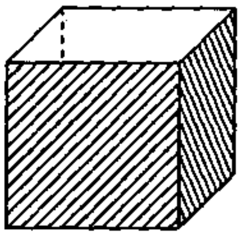
Yechish. Quyidagi almashtirishlarni bajaramiz: $x_1 = x$, $x_2 = b - x$. Unda $x_1 + x_2 = b = const$. Yana $x_1 = x_2$ tenglamani x ga nisbatan yechamiz: $x = b - x$, $x = \frac{b}{2}$. Demak, $\max\limits_{0<x<b} f(x) = f\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{ab^2}{4}$.

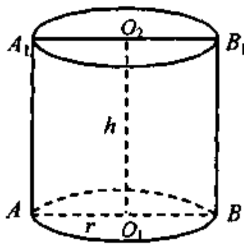
3-masala. Tomoni p bo'lgan kvadrat shaklida buyum berilgan. Shu buyumdan shunday usti ochiq to'rtburchakli parallelepiped yasash kerakki, uning hajmi eng katta bo'lsin.

Yechish. Kvadratning burchaklaridan tomoni x ga teng bo'lgan (ravshanki, $0 < x < p/2$) kvadratchalar kesib olamiz va yon tomonidagi shtrixlangan qismini yuqoriga ko'taramiz. Natijada parallelepiped hosil bo'ladi (3.8-*a*, *b* chizmalar). Uning hajmi $V(x) = x \cdot (p-2x)^2$.



3.8*a*-chizma


3.8*b*-chizma



3.9-chizma

Biz ushbu $V(x) = x \cdot (p-2x)^2 \to max$, $0 < x < p/2$ masalaga keldik. Uni yechish uchun (3.3) ko'rinishga keltirish kerak. $V(x)$ funksiyani quyidagicha yozamiz:

$$V(x) = x \cdot (p-2x)(p-2x) = \frac{1}{4} 4x \cdot (p-2x)(p-2x)$$

Endi $x_1 = 4x$, $x_2 = x_3 = p - 2x$ desak, $x_1 + x_2 + x_3 = 2p$ bo'ladi. Unda $n = 3$ va $4x = p - 2x$ dan $x = p/6$ kelib chiqadi. Shunday qilib, masalaning yechimini yozish mumkin:

$$\max_{0<x<\frac{p}{2}} V(x) = V\left(\frac{p}{6}\right) = \frac{8p^3}{27}$$

2-hol. Faraz etaylik, $x_1 = x_1(t) > 0$, $x_2 = x_2(t) > 0, \ldots$, $x_n = x_n(t) > 0$, $\forall t \in (a,b)$ va $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = b$, $b = const > 0$ bo'lsin. Bunda (3.2) tengsizlik $\sqrt[n]{b} \le \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$ ko'rinishga keladi. Shuning uchun $min(x_1+x_2+...+x_n)=n\cdot\sqrt[n]{b}$ bo'ladi, yana $x_1=x_2=...=x_n$ bo'lganda $x_i=\sqrt[n]{b}$, $i=1,2,..,n$ ga egamiz.

Endi quyidagi masalani ko'raylik;

$$\left.\begin{aligned} & x_1\cdot x_2\cdot...\cdot x_n\to min, \\ & x_1+x_2+...+x_n=b, \quad b=const, \\ & x_1>0,\ x_2>0,\ ...,x_n>0. \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

Ravshanki, (3.5) masala ham chiziqsiz dasturlashning shartlari tengliklar bilan berilgan shartli minimum masalasidir. Ma'lumki, bunday masalani yechish turli qiyinchiliklar bilan bog'liq. Ammo ko'rilayotgan holda (3.5) masalaning yechimini osonlik bilan yozamiz:

$$\left.\begin{aligned} & min(x_1\cdot x_2\cdot...\cdot x_n)=n\cdot\sqrt[n]{b}, \\ & x_1=x_2=...=x_n=\sqrt[n]{b}. \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

4-masala. Yuzasi S bo'lgan to'g'ri to'rtburchak berilgan. Uning tomonlari qanday bo'lganda perimetri eng kichik bo'ladi?

Yechish. Masala quyidagicha yoziladi:

$$\left.\begin{aligned} & x_1+x_2\to min, \\ & x_1\cdot x_2=S. \end{aligned}\right\}$$

Masala (3.5) ko'rinishda bo'lgani uchun yechimni darhol yozish mumkin:

$$min\ (x_1+x_2)=2\sqrt{S}, \qquad x_1=x_2=\sqrt{S}.$$

5-masala. (Eng yaxshi konserva idishi haqidagi masala). Hajmi V bo'lgan silindr shaklidagi konserva idishi berilgan. Silindr asosining radiusi r va balandligi h qanday bo'lganda uning narxi eng arzon bo'ladi?

Yechish. Silindr hajmi $V=\pi\cdot r^2h$ formula bilan hisoblanadi. Agar silindrning to'liq sirti eng kam bo'lsa, uni yasash uchun ketadigan material ham eng kam bo'ladi va eng arzon bo'ladi. Shu sababli masala quyidagicha qo'yiladi:

$$S=2\pi\cdot r^2+2\pi\cdot r\cdot h\to min, \quad V=\pi\cdot r^2h.$$

Masalaning qo'yilishini soddalashtirish mumkin. Aniqrog'i, $h=\dfrac{V}{\pi\cdot r^2}$ ni S ga qo'ysak, masala ushbu

$$S(r)=2\pi\cdot r^2+\frac{2V}{r}\to min, \quad 0<r<+\infty$$

ko'rinishga keladi. Endi $S(r)$ ni $S(r)=2\pi\cdot r^2+\frac{V}{r}+\frac{V}{r}$ ko'rinishda yozamiz.

Ushbu $x_1=2\pi\cdot r^2$, $x_2=x_3=\frac{V}{r}$ belgilashlar kiritamiz. Unda

$x_1\cdot x_2\cdot x_3=2\pi\cdot r^2\frac{V}{r}\cdot\frac{V}{r}=2\pi\cdot V^2$ bo'ladi. So'ngra $2\pi\cdot r^2=\frac{V}{r}$

tenglamani yechamiz: $r_0=\sqrt[3]{V/2\pi}$. Nihoyat, oxirgi masalaning yechimini yozamiz:

$$min\left(2\pi\cdot r^2+\frac{2V}{r}\right)=3\sqrt[3]{2\pi\cdot V^2}, \quad r_0=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

Ravshanki, $h_0=\frac{V}{\pi r^2}=2r_0$.

Xulosa. Berilgan V hajmli konserva idishi eng arzon bo'lishi uchun uning o'q kesimi kvadrat bo'lishi kerak, ya'ni $h_0=2r_0$, $r_0=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

3.3-§. Iqtisodiy masalalarni yechishning pozinomlar usuli

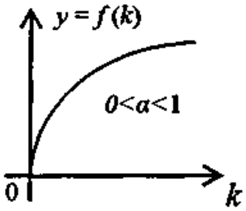
Pozinomlar maxsus xossalarga ega bo'lgan funksiyalarning muayyan sinfidan iborat.

3.1–*ta'rif*. *Ushbu*

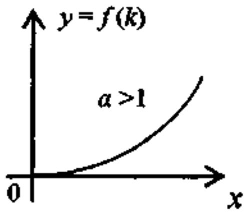
$$f(x)=c\,x^{\alpha}, \quad c>0, \quad \alpha\in R, \quad x>0 \qquad (3.7)$$

ko'rinishdagi har bir funksiya bir o'zgaruvchili bir hadli pozinom deyiladi.

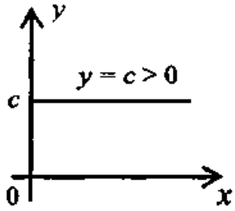
Ixtiyoriy musbat haqiqiy son s bunga misol bo'la oladi, chunki $s=s\,x^0$; iqtisodiyotda uchraydigan Kobb-Duglasning ishlab chiqarish funksiyasi uchun o'rtacha mehnat unumdorligi $f(k)=a_0k^{\alpha}$ bir o'zgaruvchili bir hadli pozinomdir. Unda $a_0>0$, $0<\alpha<1$, $k>0$ – qurollanganlik (3.10*a*, 3.10*b*, 3.10*c*-chizmalar).



3.10*a*-chizma



3.10*b*-chizma



3.10*c*-chizma

3.2 – ta'rif. *Ushbu*

$$f(x)=c_1x^{\alpha_1}+c_2x^{\alpha_2}+...+c_nx^{\alpha_n},\ c_i>0,\ \alpha_i\in R,\ i=\overline{1,n},\ x>0 \quad (3.8)$$

ko'rinishdagi har bir funksiya bir o'zgaruvchili n hadli pozinom deyiladi.

Masalan, $1+x^{\sin\beta}+x^{\cos\beta}$ – uch hadli, $ax+\frac{b}{x}$, $a>0$, $b>0$ – ikki hadli, $\frac{n(n-1)}{2}x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+...+\frac{1}{x^n}$ – ($n+1$) hadli bir o'zgaruvchili pozinomlar.

Pozinomlarning ba'zi muhim xossalarini keltiramiz:

1°. Chekli sondagi ixtiyoriy pozinomlar yig'indisi yana pozinom bo'ladi.

2°. Chekli sondagi ixtiyoriy pozinomlar ko'paytmasi yana pozinom bo'ladi.

3°. Ixtiyoriy hadli pozinomning bir hadli pozinomga nisbati yana pozinom bo'ladi.

Natijalar.

1. Ixtiyoriy pozinomning kvadrati va ixtiyoriy natural darajasi yana pozinom bo'ladi.

2. Ixtiyoriy pozinomning musbat haqiqiy songa ko'paytmasi (bo'linmasi) yana pozinom bo'ladi.

3.3–ta'rif. *Agar (3.8) pozinom uchun ushbu*

$$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+...+c_n\alpha_n=0 \quad (3.9)$$

sonli tenglik o'rinli bo'lsa, (3.8) *regular pozinom deyiladi.*

Regular pozinomlar iqtisodiy masalalarni yechishda muhim ahamiyatga ega. Regular pozinomlarga misollar keltiramiz:

$$f(x)=c,\ c=const>0 \quad ; \ f(x)=x+\frac{1}{x};\ f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{2x};$$

$$f(x)=x+x^{-\sin^2\beta}+x^{-\cos^2\beta};\ f(x)=\frac{n(n+1)}{2}x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+...+\frac{1}{x^n}.$$

3.1–teorema. *Agar* (3.8) *pozinom regular bo'lsa, unda shu pozinom o'zining eng kichik qiymatiga* $x=1$ *bo'lganda erishadi, ya'ni*

$$\mu f=f(1)=c_1+c_2+...+c_n ,$$

bunda μf belgi pozinomlarning eng kichik qiymatini anglatadi.

Masalan, $\mu\left(x+\frac{1}{x}\right)=2$, $\mu\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2x}\right)=\frac{3}{2}$, $\mu\left(x+x^{-\sin^2\beta}+x^{-\cos^2\beta}\right)=3$,

$$\mu\left(\frac{n(n+1)}{2}x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+...+\frac{1}{x^n}\right)=\frac{n(n+1)}{2}+n .$$

3.1-teoremaga ko'ra regular pozinomning eng kichik qiymatini topish uchun uning qiymatini $x=1$ bo'lganda hisoblash kerak. Bundan $x=1$ nuqta regular pozinom uchun statsionar nuqta ekani kelib chiqadi, ya'ni $f'(1)=0$ tenglik bajariladi. Agar qo'yilgan masalani hosila usuli bilan yechmoqchi bo'lsak, statsionar nuqtalarni topish uchun ushbu:

$$\alpha_1c_1x^{\alpha_1-1}+\alpha_2c_2x^{\alpha_2-1}+...+\alpha_nc_nx^{\alpha_n-1}=0$$

yoki, baribir:

$$\alpha_1c_1x^{\alpha_1}+\alpha_2c_2x^{\alpha_2}+...+\alpha_nc_nx^{\alpha_n}=0$$

tenglamani yechishga to'g'ri keladi. Ammo bu tenglamani yechish katta qiyinchiliklar bilan bog'langan. Masalan, $f(x)=\frac{n(n+1)}{2}x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+...+\frac{1}{x^n}$ pozinom regular va $\mu f=f(1)=\frac{n(n+1)}{2}+n$. Shu funksiyaning hosilasini topamiz:

$$f'(x)=\frac{n(n+1)}{2}-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}-...-\frac{n-1}{x^n}-\frac{n}{x^{n+1}}.$$

Endi $f'(x)=0$ tenglama $\frac{n(n+1)}{2}-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}-...-\frac{n-1}{x^n}-\frac{n}{x^{n+1}}=0$ ko'rinishda bo'lib, u ($n+1$) – darajali algebraik tenglamadan iborat. Uni yechish mushkul ish. Ammo $x=1$ qiymat shu tenglamani qanoatlantiradi. Haqiqatan ham,

$$\frac{n(n+1)}{2}-1-2-...-(n-1)-n=\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}=0.$$

Agar (3.8) pozinom noregular bo'lsa, ya'ni (3.9) sonli tenglik bajarilmasa, unda ba'zi hollarda (3.8) pozinom o'zgaruvchini almashtirish yordamida yangi o'zgaruvchi bo'yicha regular pozinomga keltirilishi mumkin.

3.2–teorema. *Agar* (3.8) *pozinom noregular bo'lib,* α_i *va* α_j $i\neq j$, *sonlarning kamida bitta juftligi uchun* $\alpha_i\cdot\alpha_j<0$ *tengsizlik o'rinli bo'lsa, unda* $x=x_0y$ *almashtirish yordamida* (3.8) *pozinom yangi* y *o'zgaruvchiga nisbatan regular pozinomga keltirilishi mumkin, bunda* x_0 *ushbu*

$$\alpha_1c_1x^{\alpha_1}+\alpha_2c_2x^{\alpha_2}+...+\alpha_nc_nx^{\alpha_n}=0 \tag{3.10}$$

tenglamaning musbat yechimi.

Isbot. Soddalik uchun teoremani $n=2$ bo'lganda isbotlaymiz. (3.8) pozinom $n=2$ da $f(x)=c_1x^{\alpha_1}+c_2x^{\alpha_2}$, $c_1\alpha_1+c_2\alpha_2\neq 0$ ko'rinishga ega bo'ladi. (3.10) tenglama esa $\alpha_1c_1x^{\alpha_1}+\alpha_2c_2x^{\alpha_2}=0$ ko'rinishda yoziladi. Uning yechimi

$$x_0=\left(-\frac{c_1\alpha_1}{c_2\alpha_2}\right)^{\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}}>0. \tag{3.11}$$

Endi $x=x_0y$ almashtirish bajaramiz:

$$f(x)=f(x_0y)=f_*(y)=c_1x_0^{\alpha_1}y^{\alpha_1}+c_2x_0^{\alpha_2}y^{\alpha_2}=$$

$$=x_0^{\alpha_1}\left(c_1y^{\alpha_1}+c_2x_0^{\alpha_2-\alpha_1}y^{\alpha_2}\right)=x_0^{\alpha_1}\left[c_1y^{\alpha_1}+c_2\cdot\left(-\frac{c_1\alpha_1}{c_2\alpha_2}\right)\cdot y^{\alpha_2}\right]=$$

$$=x_0^{\alpha_1}\cdot\left[c_1y^{\alpha_1}+\left(-\frac{c_1\alpha_1}{\alpha_2}\right)\cdot y^{\alpha_2}\right].$$

Hosil bo'lgan ifoda y ga nisbatan regular pozinom, haqiqatan, avvalo

$-\frac{c_1\alpha_1}{\alpha_2}>0$, chunki $\alpha_1\cdot\alpha_2<0$, qolaversa,

$$c_1\alpha_1+(-c_1\alpha_1/\alpha_2)\cdot\alpha_2=c_1\alpha_1-c_1\alpha_1=0.$$

Teorema isbot bo'ldi.

3.1-teoremaning natijasi. $\mu f=f(x_0)$, $\mu f_*=f_*(1)=f(x_0)$.

Misollar ko'ramiz.

1-misol. $f(x)=ax+\frac{b}{x}\to\min.$

Yechish. Ravshanki, $a\cdot1+b\cdot(-1)=a-b$. Agar $a-b=0$ bo'lsa, $f(x)$ regular bo'ladi va $\mu f=2a$. Agar $a-b\neq0$ bo'lsa, $\alpha_1=1$, $\alpha_2=-1$ va $\alpha_1\cdot\alpha_2=-1<0$ bo'lgani uchun pozinomni regular ko'rinishga keltirish mumkin. x_0 ni topish uchun tegishli tenglamani yozamiz:

$$a\cdot1\cdot x+b\cdot(-1)\cdot\frac{1}{x}=0 \quad \text{yoki} \quad a\cdot x-\frac{b}{x}=0.$$

Bu tenglamaning musbat yechimi $x_0=\sqrt{b/a}$. Ushbu $x=\sqrt{b/a}\cdot y$ almashtirish bajaramiz.

$$f_*(y)=a\cdot\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot y+\frac{b}{\sqrt{b/a\cdot y}}=\sqrt{ab}\cdot y+\frac{\sqrt{ab}}{y}=\sqrt{ab}\cdot\left(y+\frac{1}{y}\right).$$

Oxirgi funksiya regular pozinomdir. Shuning uchun $\mu f_*=f_*(1)=$ $=2\cdot\sqrt{ab}$. Ikkinchi tomondan,

$$\mu f=f(x_0)=a\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}+\frac{b}{\sqrt{b/a}}=2\cdot\sqrt{ab}.$$

2-misol. $f(x)=x^2+2x+\frac{N}{x}+\frac{N}{2x^2}\to\min$, N>0.

Yechish. Ravshanki, $1\cdot 2+2\cdot 1+N\cdot(-1)\cdot\frac{1}{x}+\frac{N}{2}\cdot(-2)\cdot\frac{1}{x^2}=0$.

Ko'rinadiki, berilgan pozinom $N=2$ bo'lganda regular va $\mu f=6$ bo'ladi. Endi $N\neq 2$ bo'lsin. Unda x_0 ni topish uchun tegishli tenglamani yozamiz:

$$1\cdot 2\cdot x^2+2\cdot 1\cdot x+N\cdot(-1)\cdot\frac{1}{x}+\frac{N}{2}\cdot(-2)\cdot\frac{1}{x^2}=0$$

yoki $2\cdot x^2+2\cdot x+\frac{N}{x}-\frac{N}{x^2}=0$.

Bu tenglamani $(x+1)\cdot\left(2\cdot x-\frac{N}{x^2}\right)=0$ ko'rinishda yozish mumkin.

Uning musbat yechimi $x_0=\sqrt[3]{N/2}$ bo'ladi. Endi $x=x_0y$ almashtirish bajaramiz:

$$f(x)=f(x_0\cdot y)=\sqrt[3]{\left(\frac{N}{2}\right)^2}\cdot y^2+\sqrt[3]{4N}\cdot y+2\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{N}{2}\right)^2}\cdot\frac{1}{y}+\sqrt[3]{\frac{N}{2}}\cdot\frac{1}{y^2}.$$

Hosil bo'lgan pozinomning regularligini tekshirish qiyin emas. Demak,

$$\mu f=f(x_0)=f_*(1)=3\cdot\left(\sqrt[3]{\left(\frac{N}{2}\right)^2}+\sqrt[3]{\frac{N}{2}}\right).$$

Endi pozinomlar bilan bog'langan iqtisodiy masalalarni ko'ramiz.

1-misol. $x\cdot y=S$, $x+y\to\min$, $x>0, y>0$ (shu bobning 3.2-§ ga qarang).

Yechish. $y=\frac{x}{S}$, $f(x)=x+\frac{S}{x}$. Bu pozinom $S=1$ bo'lganda regular va $\min f(x)=f(1)=2$. Agar $S\neq 1$ bo'lsa, $x_0=\sqrt{S}$ va $x=\sqrt{S}\cdot y$ almashtirish $f_*(y)=\sqrt{S}\cdot(y+1/y)$ ga olib keladi. Shu sababli $\mu f=f(\sqrt{S})=f_*(1)=2\cdot\sqrt{S}$.

2-misol. $S(r)=2\pi\cdot r^2+2\cdot V/r\to\min,\ r>0$. (3.2-§ ga qarang).

Yechish. Agar $V=2\pi$ bo'lsa, $S(r)$ regular bo'ladi va $\mu\, S=S(1)=6\pi$. Agar $V\neq 2\pi$ bo'lsa, $S(r)$ noregular va $\alpha_1=2$, $\alpha_2=-1$, va $\alpha_1\cdot\alpha_2=-2<0$. Demak, pozinomni regular ko'rinishga keltirish mumkin. $r=r_0\cdot y$ da r_0 ni $4\pi\cdot r^2-\dfrac{2\cdot V}{r}=0$ tenglamadan topamiz: $r_0=\sqrt[3]{V/2\pi}$. Endi $r=r_0 y$ almashtirish bajarsak, ushbu

$$S(r)=S(r_0 y)=S_*(y)=\sqrt[3]{2\pi V^2}\cdot y^2+\sqrt[3]{16\pi V^2}\cdot\frac{1}{y}$$

regular pozinomga kelamiz. Uning regularligi

$$\sqrt[3]{2\pi V^2}\cdot 2+\sqrt[3]{16\pi V^2}\cdot(-1)=2\cdot\sqrt[3]{2\pi V^2}-2\cdot\sqrt[3]{2\pi V^2}=0$$

sonli tenglikdan kelib chiqadi. Shunday qilib,

$$\mu\, S=S(r_0)=S_*(1)=3\cdot\sqrt[3]{2\pi V^2},\qquad r_0=\sqrt[3]{V/2\pi}\ .$$

Biz yuqorida bir o'zgaruvchili pozinomlarga to'xtaldik.

3.4 – *ta'rif.* *Ushbu*

$$f(x,y)=cx^{\alpha}y^{\beta},\quad c>0,\quad \alpha\in R,\quad \beta\in R,\quad x>0,\quad y>0$$

ko'rinishdagi funksiya bir hadli ikki o'zgaruvchili pozinom deyiladi.

Masalan, $2xy^2,\ x^{-1}y,\ x^{\alpha}y^{1-\alpha}$ lar ikki o'zgaruvchili pozinomdir. Iqtisodiyotda muhim ahamiyatga ega bo'ladigan Kobb-Duglas ishlab chiqarish funksiyasi $F(L,K)=a_0K^{\alpha}L^{1-\alpha}$, $a_0>0$, $0<\alpha<1$, $K>0$, $L>0$, ko'rinishda yoziladi, unda K – asosiy fondlar hajmini, L – mehnat resurslari hajmini, $F(L,K)$ esa ishlab chiqarilgan mahsulot miqdorini anglatadi. Shu $F(L,K)$ bir hadli ikki L va K o'zgaruvchili pozinomdir.

3.5 – *ta'rif.* *Ushbu*

$$f(x_1,x_2,..,x_n)=cx_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}...x_n^{\alpha_n},\quad c>0,\quad \alpha_i\in R,\quad x_i>0,\quad i=1,...n$$

ko'rinishdagi funksiya bir hadli n o'zgaruvchili pozinom deyiladi

3-bobga oid masalalar

I. Quyidagi ekstremal masalalar tengsizliklar usuli bilan yechilsin ($n = 1, 2, \ldots$):

A. 1. $f(x)=\frac{1}{3}x^3(4-nx)\to\max$, $0<x<\frac{4}{n}$.

2. $f(x)=n\cdot x\cdot\sqrt{n-x^2}\to\max$, $0<x<\sqrt{n}$.

3. $f(x)=x\cdot\sqrt[3]{n-x}\to\max$, $0<x<n$.

4. $f(x)=x^2\cdot(n-x^3)\to\max$, $0<x<\sqrt[3]{n}$.

5. $f(x)=x^3\cdot\sqrt{n-x^3}\to\max$, $0<x<\sqrt[3]{n}$.

6. $f(x)=x\cdot(n-\sqrt[3]{x})\to\max$, $0<x<n^3$.

B. 1. $f(x)=\frac{x}{n}+\frac{3n}{2\cdot x^2}\to\min$, $x>0$.

2. $f(x)=nx^2+\frac{3}{n\cdot x}\to\min$, $x>0$.

3. $f(x)=n\cdot x+\frac{2}{\sqrt{x}}\to\min$, $x>0$.

4. $f(x)=n\cdot\sqrt{x}+\frac{1}{n\cdot\sqrt[3]{x}}\to\min$, $x>0$.

5. $f(x)=\sqrt[3]{x}+\frac{n}{x}\to\min$, $x>0$.

6. $f(x)=n\cdot\sqrt[3]{x}+\frac{n}{n\cdot\sqrt[4]{x}}\to\min$, $x>0$.

II. Quyidagi pozinomlar regularlikka tekshirilsin va minimal qiymati topilsin ($n = 1, 2, \ldots$):

1. $f(x)=ax+\frac{b}{x}$, $a>0$, $b>0$.

bo‘lsa, $Q'(p_0) = 5 \ \frac{s}{so'm}$ bo‘ladi. Bu sonlar o‘zaro teng emas. Shu sababli argumentning bir protsent (foiz) o‘zgarishiga qarab funksiyaning o‘zgarishini aniqlaydigan o‘lchov birliklariga bog‘liq bo‘lmaydigan tushuncha kiritish zaruriyati tug‘iladi. Bunday tushunchani kiritish uchun nisbiy o‘zgarishlarni aniqlaydigan miqdorlarni keltiramiz:

$\frac{\Delta y}{y}$ – erksiz o‘zgaruvchining (funksiyaning) nisbiy o‘zgarishi;

$\frac{\Delta x}{x}$ – erkli o‘zgaruvchining (argumentning) nisbiy o‘zgarishi;

4.1 – ta’rif. *Bir o‘zgaruvchili funksiya elastikligi deb erksiz va erkli o‘zgaruvchilar nisbiy o‘zgarishlari nisbatining* Δx *nolga intilgandagi limitiga aytiladi va* $E_x(y)$ *kabi belgilanadi:*

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Agar $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ mavjud bo‘lsa, unda $E_x(y)$ uchun formula quyidagi ko‘rinishda yoziladi: $E_x(y) = \frac{x \cdot y'}{y} = \frac{d \ln y}{d \ln x}$.

O‘rta qiymatlar ta’rifidan foydalanib, elastiklik formulasini ushbu

$$E_x(y) = \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} = \frac{M\,f}{A\,f}$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Bunda $Mf - f$ funksiyaning x nuqtadagi marjinal qiymati, $Af - f$ funksiyaning x nuqtadagi o‘rta qiymati.

Ikki va ko‘p argumentli funksiyalarning muayyan argumenti bo‘yicha elastikligi ham yuqoridagi kabi kiritiladi.

4.2 – ta’rif. *Ushbu* $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *funksiyaning* x_i *argumenti bo‘yicha elastikligi deb*

$$E_{x_i}(z) = \lim_{\Delta x_i \to 0}\left(\frac{\Delta z}{z} : \frac{\Delta x_i}{x_i}\right)$$

limitga aytiladi.

Ta'rifga ko'ra: $E_{x_i}(z)=\frac{\partial z}{\partial x_i}\cdot\frac{x_i}{z}, \quad i=1,2,...,n$.

$z=f(x,y)$ bo'lgan holda elastiklik uchun

$$E_x(z)=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{x}{z} \quad \text{va} \quad E_y(z)=\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{y}{z}$$

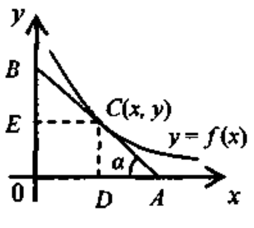
formulaga egamiz.

Ko'p argumentli funksiyalar uchun ishlab chiqarish elastikligi deb barcha argumentlar bo'yicha elastikliklar yig'indisiga aytiladi va

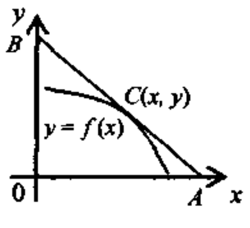
$$E_{x_1,x_2,...,x_n}(z)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial z}{\partial x_i}\cdot\frac{x_i}{z}; \quad E_{(x,y)}(z)=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{x}{z}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{y}{z}.$$

Agar $\left|E_{x_1,x_2,...,x_n}(z)\right|>1$, $\left(\left|E_{(x,y)}(z)\right|>1\right)$ tengsizlik bajarilsa, ishlab chiqarish *elastik* deyiladi.

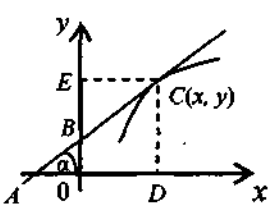
Endi bir argumentli funksiya elastikligining geometrik ma'nosiga to'xtalamiz. Ravshanki, $y=f(x)$ funksiya differensiallanuvchi deb qaraladi. Ta'kidlab o'tamizki, iqtisodiy ma'nosi bo'yicha $y=f(x)$ funksiya grafigi birinchi chorakda joylashgan va har bir nuqtasida urinma mavjud. Bu urinma koordinata o'qlari bilan albatta kesishadi. Quyidagi 4.1-4.6-chizmalarda urinmalarning mumkin bo'lgan holatlari keltirilgan.



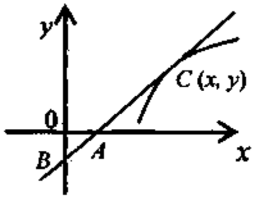
4.1-chizma



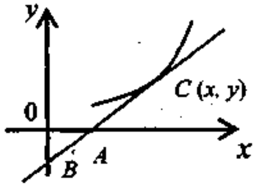
4.2-chizma



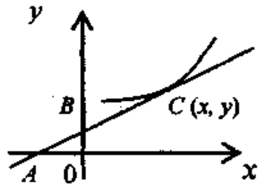
4.3-chizma



4.4-chizma



4.5-chizma



4.6-chizma

Shu 6 holning har biri uchun elastiklik formulasini keltiramiz, ular elastiklikning geometrik ma'nosini anglatadi.

1. $E_x(y) = -\dfrac{CB}{CA} < 0$; 2. $E_x(y) = -\dfrac{CB}{CA} < 0$;

3. $E_x(y) = \dfrac{CB}{CA} < 1$; 4. $E_x(y) = \dfrac{CB}{CA} > 1$;

5. $E_x(y) = \dfrac{CB}{CA} > 1$; 6. $E_x(y) = \dfrac{CB}{CA} < 1$.

Elastiklik uchun keltirilgan formulalardan ko'rinadiki, elastiklik $y = f(x)$ funksiya grafigiga $C(x, y)$, $x > 0$, $y > 0$ nuqtada o'tkazilgan urinmaning urinish nuqtasidan ordinata o'qigacha bo'lgan masofaning shu nuqtadan abssissa o'qi bilan kesishish nuqtasigacha bo'lgan masofaga nisbatiga teng bo'lib, ishora urinma burchak koeffitsiyenti ishorasi bilan aniqlanadi. Masalan, 1 holda ishora $tg(180^0 - \alpha) = tg\,\alpha < 0$ ga ko'ra manfiy bo'ladi. 2 holda ham ishora manfiy. Qolgan 3-6 hollarda esa ishora musbat ekanini payqash qiyin emas.

Agar 1-2-hollarda $CB = CA$ bo'lsa, $E_x(y) = 1$ bo'ladi. Qolgan hollarda $CB \neq CA$. Ammo $CB = CA$ hol urinma koordinata boshidan o'tgandagina mumkin. Bunda $E_x(y)=1$ bo'ladi. 1-2-hollarda urinma koordinata boshidan o'tadigan hol ro'y bermaydi.

Endi 1-holda $E_x(y) = -\dfrac{CB}{CA} < 0$ formula elastiklikni anglatishini isbot qilamiz. ADC uchburchakdan $f'(x) = tg(180^0 - \alpha) = -tg\,\alpha$, ya'ni $tg\,\alpha = -f'(x)$. Shu uchburchakdan $tg\,\alpha = \dfrac{CD}{AD} = \dfrac{f(x)}{AD}$. Shuning uchun $-f'(x) = \dfrac{f(x)}{AD}$ yoki $AD = -\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ ifodaga egamiz. CBE va ACD uchburchaklar o'xshashligidan

$$\frac{CB}{CA} = \frac{CE}{AD} \text{ yoki } \frac{CB}{CA} = x : \left(-\frac{f(x)}{f'(x)}\right) = -\frac{x f'(x)}{f(x)} = -E_x(y).$$

Bundan $E_x(y) = -\frac{CB}{CA}$ formula kelib chiqadi.

Elastiklik uchun 2-6-formulalar ham shunga o'xshash isbotlanadi.

Shu formulalardan yana uchinchisini isbot qilamiz. 4.3-chizmaga ko'ra $tg\,\alpha = \frac{CD}{AD} = \frac{f(x)}{AD}$ va $\frac{CB}{CA} = \frac{OD}{AD} = \frac{x}{AD}$ munosabatlar kelib chiqadi. Avvalo ravshanki, $tg\,\alpha = f'(x)$. Shuning uchun $AD = \frac{f(x)}{f'(x)}$ va

$\frac{CB}{CA} = x : \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} = E_x(y)$ kelib chiqadi.

4.3-*ta'rif*. *Elastiklikning absolut miqdori* $|E_x(y)|$ *elastiklik koeffitsiyenti deyiladi.*

4.4-*ta'rif*. *Agar biror iqtisodiy ko'rsatkich uchun elastiklik koeffitsiyenti **birdan** katta bo'lsa, tegishli ko'rsatkichning o'zgarishi **elastik** deyiladi.*

4.2-§. Elastiklik xossalari va elementar funksiyalarning elastikligi

Elastiklik quyidagi xossalarga ega:

1°. Elastiklik o'lchovsiz miqdor, uning qiymati x va y lar o'lchov birligiga bog'liq emas, ya'ni

$E_{ax}(by) = E_x(y)$

Isbot.

$$E_{ax}(by) = \frac{d\ln by}{d\ln ax} = \frac{1}{by} \cdot b \cdot dy : \frac{1}{ax} \cdot a \cdot dx = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = E_x(y).$$

2°. O'zaro teskari funksiyalarning elastikliklari ham o'zaro teskari bo'ladi, ya'ni

$$E_x(y) = \frac{1}{E_y(x)}.$$

Isbot. $E_x(y)=\frac{dy}{dx}\frac{x}{y}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}\frac{y}{x}}=\frac{1}{E_y(x)}$.

Masalan, narx bo'yicha talab elastikligi talab bo'yicha narx elastikligi bilan o'zaro teskari miqdorlar, ya'ni $E_p(Q)=\left[E_Q(p)\right]^{-1}$.

3°. Bir xil argument x ga bog'liq ikki funksiya ko'paytmasining elastikligi shu funksiyalar elastikliklari yig'indisiga teng, ya'ni

$$E_x(u\,v)=E_x(u)+E_x(v).$$

Isbot.

$$E_x(u\cdot v)=\frac{(uv)'\cdot x}{uv}=\frac{(u'v+uv')x}{uv}=\frac{u'x}{u}+\frac{v'x}{v}=E_x(u)+E_x(v).$$

Bu xossa ko'paytma logarifmi xossasiga o'xshash.

4°. Bir xil argument x ga bog'liq ikki $u(x)$ va $v(x)$, $v(x)\neq 0$, funksiya nisbati elastikligi shu funksiyalar elastikliklari ayirmasiga teng, ya'ni

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right)=E_x(u)-E_x(v).$$

Isbot.

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{\left(\frac{u}{v}\right)'\cdot x}{\frac{u}{v}}=\frac{v}{u}\cdot x\cdot\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{u'x}{u}-\frac{v'x}{v}=E_x(u)-E_x(v).$$

5°. Ikki funksiya yig'indisi (ayirmasi) ning elastikligi quyidagi formula yordamida hisoblanadi:

$$E_x(u\pm v)=\frac{uE_x(u)\pm vE_x(v)}{u\pm v},\quad u\neq v.$$

Endi elementar funksiyalarning elastikligi uchun formulalarni keltiramiz:

1. $y=C,\quad C=const\neq 0;\ E_x(C)=0.$

2. $y=x,\quad E_x(x)=1.$

3. $y = x^{\alpha}$, $E_x(x^{\alpha}) = \alpha$.

4. $y = a^x$, $E_x(a^x) = x\ln a$; $E_x(e^x) = x$.

5. $y = \sin x$, $E_x(\sin x) = x\operatorname{ctg} x$.

6. $y = \cos x$, $E_x(\cos x) = -x\operatorname{tg} x$.

Ushbu $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ funksiyalarning elastikligi formulalarini ham chiqarish mumkin.

Endi 1^0-5^0 xossalar bo'yicha elastiklikni hisoblashga doir misollar ko'ramiz:

1. $f(x) = 2x^3e^x$, $E_x(y) = 2\cdot\left(E_x(x^3) + E_x(e^x)\right) = 2\cdot(3+x)$.

2. $f(x) = \dfrac{3^x}{x^2}$, $E_x(y) = E_x(3^x) - E_x(x^2) = x\ln 3 - 2$.

3. $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{\cos x}$, $E_x(y) = E_x(\sin 2x) - E_x(\cos x) = 2x\operatorname{ctg}2x - x\operatorname{tg}x$.

4. $f(x) = x^4 + e^{2x}$, $E_x(y) = \dfrac{x^4E_x(x^4) + e^{2x}E_x(e^{2x})}{x^4 + e^{2x}} = \dfrac{4x^4 + 2xe^{2x}}{x^4 + e^{2x}}$.

Chiziqli funksiyaning elastikligiga alohida to'xtab o'tamiz. Ravshanki, agar $y = ax + b$ bo'lsa, uning elastikligi ushbu

$$E_x(ax+b) = \frac{ax}{ax+b}$$

formula yordamida hisoblanadi.

$a < 0$ bo'lganda (narh bo'yicha talab funksiyasi uchun), uch hol yuz beradi:

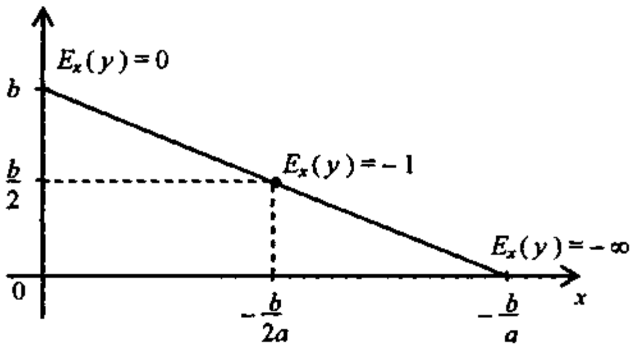
1. $b \neq 0$, $x = 0$ bo'lganda $E_x(y) = 0$.

2. $\dfrac{ax}{ax+b} = -1$, agar $x = -\dfrac{b}{2a}$ bo'lsa. Bu holda $E_x(y) = 1$.

3. $x = -\dfrac{b}{a}$ bo'lganda $E_x(y) = -\infty$ bo'ladi.

Shunday qilib, $a<0$ bo'lganda chiziqli funksiyaning elastikligi uchun quyidagi hollar ro'y berishi mumkin (4.7 chizma)

$$E_x(y)=\begin{cases} 0, & x=0; \\ -1<E_x(y)<-1, & 0<x<\dfrac{-b}{2a};\ a<0; \\ E_x(y)=-1, & -\dfrac{b}{2a}<x<-\dfrac{b}{a}; \\ -1, & x=-\dfrac{b}{2a}. \end{cases}$$



4.7-chizma

Yuqoridagi mulohazalardan $a<0$ bo'lganda elastiklik chiziqli funksiya grafigining og'ishiga (burchak koeffitsiyentiga) bog'liq bo'lib qolmasdan, elastiklik qanday nuqtada hisoblanayotganiga ham bog'liq.

4.3-§. Elastiklik intervali va uning bozor iqtisodiyotiga bog'liqligi

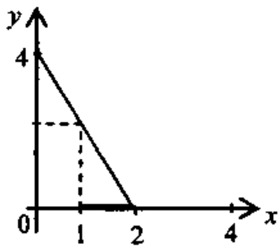
Ta'rif bo'yicha elastiklik koeffitsiyenti $|E_x(y)|$ musbat va x ga bog'liq. Agar $|E_x(y)|>1$ tengsizlik bajarilsa, jarayon elastik bo'lishini aytib o'tgan edik. Shu tengsizlik yechimi biror intervaldan iborat bo'lib, uni *elastiklik intervali* deyiladi.

Elastiklik intervalini topishga doir misollar ko'ramiz.

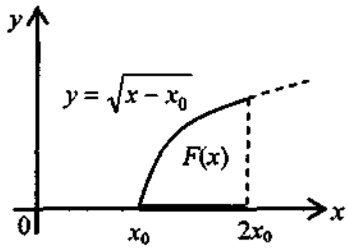
1-misol. $y=-2x+4$ (talab funksiyasi, x – narx, $x>0$). Unda $a=-2<0$, $b=4$. Endi $-2x+4>0$ dan $x<2$ kelib chiqadi.

$E_x(y)=\dfrac{-2x}{-2x+4}$; Ushbu $\left|\dfrac{-2x}{-2x+4}\right|>1$ tengsizlikni yechamiz. $x<2$ bo'lgani uchun $\dfrac{-2x}{-2x+4}>1$ yoki $4x>4$, ya'ni $x>1$ kelib chiqadi.

Shunday qilib, $1<x<2$ berilgan chiziqli talab funksiyasi uchun elastiklik intervali bo'ladi (4.8-chizma).



4.8-chizma



4.9-chizma

2-misol. $y=\begin{cases} 0, & 0\le x\le x_0, \\ \sqrt{x-x_0}, & x\ge 0 \end{cases}$.

Bu taklif funksiyasi bo'lib, $x\neq x_0$ da $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x-x_0}}$, $x>x_0$. Shuning uchun

$$E_x(y)=\frac{1\cdot x}{2\sqrt{x-x_0}\cdot\sqrt{x-x_0}}=\frac{x}{2\cdot(x-x_0)}.$$

Endi elastiklik intervalini

$$\frac{x}{2\cdot(x-x_0)}>1$$

tengsizlikdan topamiz. Undan $x>2(x-x_0)$ va $x<2x_0$ kelib chiqadi. Shunday qilib, berilgan chiziqsiz taklif funksiyasi uchun $x_0<x<2x_0$ elastiklik intervali bo'ladi.

Eslatma. Elastiklik intervali haqidagi mulohazalardan kelib chiqadiki, mahsulotlarni narxi elastiklik intervalini qanoatlantiradigan bozorlarga olib borish lozim. Har bir bozorga olib boriladigan mahsulotlar taqsimoti daromad maksimal bo'ladigan qilib amalga oshiriladi.

4-bobga oid masalalar

A. Quyidagi talab va taklif funksiyalari uchun elastiklik va elastiklik intervali topilsin (mahsulot narhi x – musbat):

1. $y=2\sqrt{x-3},\ x\geq 3$. 2. $y=-\dfrac{x}{3}+11$. 3. $y=-x+12$.

4. $y=-\dfrac{x}{2}+15$ 5. $y=\sqrt{x-1},\ x\geq 1$. 6. $y=x^2+1$.

7. $y=-x^2+1$. 8. $y=\dfrac{x^3}{3}+3$ 9. $y=-3x+15$.

10. $y=-\dfrac{x^3}{3}+1$. 11. $y=2\sqrt{x}+3$. 12. $y=-3\sqrt[3]{x}+4$.

B. Quyidagi funksiyalarning elastikligi hisoblansin:

1. $y=\operatorname{arctg} x$. 2. $y=\cos(\ln x)$ 3. $y=\arccos x$

4. $y=xe^{2x}$. 5. $y=x^2e^x$ 6. $y=x^2\sin x$.

7. $y=\dfrac{a^x}{x^3}$. 8. $y=\dfrac{a^x}{x^\alpha}$ 9. $y=\dfrac{\cos x}{x}$.

10. $y=\dfrac{\ln 2x}{x}$. 11. $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 12. $y=2x+3e^x$

V. 4.2; 4.4 -4.6 chizmalardagi hollar uchun elastiklikning geometrik ma'nosi isbotlansin.

4-bobga oid nazorat savollari

1. Bir argumentli funksiya elastikligi ta'rifini bering.
2. Ikki va ko'p argumentli funksiya elastikligi ta'rifini bering.
3. Bir argumentli funksiya elastiklik koeffitsiyenti nima?
4. Ikki argumentli funksiya uchun ishlab chiqarish elastikligi nima?
5. Elastiklikning geometrik ma'nosini (6 ta holni) aytib bering.
6. Funksiya elastikligi xossalarini aytib bering.
7. Elastiklik intervali nima?

Chiziqli, chiziqsiz talab va taklif funksiyalarining elastikligi qanday hisoblanadi?

5-bob. ISHLAB CHIQARISH FUNKSIYALARI (ICHF) VA ULARNING IQTISODIY JARAYONLARNI O'RGANISHDA TUTGAN O'RNI

Iqtisodiy jarayonlarni ICHF yordamida tadqiqot qilish XX asrning birinchi yarmida amerikalik olimlar K.Kobb va P.Duglas tomonidan boshlangan. Ulardan birinchisi matematik, ikkinchisi esa iqtisodchi bo'lgan. Ular birgalikda ilmiy-tadqiqot ishlari olib borishgan. Jumladan, AQSH uchun 1900-1922-yillarga oid makroiqtisodiy statistik ma'lumotlarni sinchkovlik bilan o'rganishgan. Ma'lumki, ishlab chiqarish faoliyatini makroiqtisodiy ko'rsatkichlarning o'zgarishi belgilaydi. Ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi (milliy daromad hajmi) Y, asosiy kapital (asosiy fondlar) hajmi K va sarflangan mehnat (mehnat resurslari) hajmi asosiy makroiqtisodiy ko'rsatkichlardir. K.Kobb va P.Duglaslar shu ko'rsatkichlar orasidagi bog'lanishni iloji boricha aniq ifodalab beradigan funksiyalarning parametrik sinfini topish masalasini qo'yishgan. Matematik K.Kobb bunday funksiyalar sinfini ushbu

$$Y = a_0 K^{\alpha} L^{\beta}$$

ko'rinishda izlashni tavsiya etgan va avvaldan a_0, α, β parametrlarga quyidagi

$$a_0 > 0, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta = 1 \qquad (5.1)$$

shartlarni qo'ygan. Ular parametrlarning statistik ma'lumotlarga mos qiymatlarini eng kichik kvadratlar usuli bilan izlashgan. Ko'rilayotgan holda ushbu

$$\Phi(a_0,\alpha,\beta) = \sum_{t=1899}^{1922} \left(\ln Y_K - \ln a_0 - \alpha \ln K_t - \beta \ln L_t\right)^2 \to \min \quad (5.2)$$

masala qo'yilgan. Bu (5.2) masala chiziqsiz dasturlashning shartsiz minimum masalasidir. Aniqrog'i, (5.1) shartlarni qanoatlantiradigan a_0, α va β lar ichidan $\Phi(a_0,\alpha,\beta)$ funksiyaga eng kichik qiymat beradigan (a_0, α, β) uchlikni topish lozim bo'ladi. Hisoblashlar natijasida quyidagi a_0, α, β lar topildi:

$$a_0 = 1{,}01; \quad \alpha = 0{,}25; \quad \beta = 0{,}75.$$

Endi izlangan funksiyani uzil-kesil yozish mumkin:

$$Y = 1{,}01 \cdot K^{0,25} \cdot L^{0,75} \tag{5.3}$$

Keyinroq bu funksiya va $Y = a_0 K^{\alpha} L^{\beta}$ ko'rinishdagi funksiyalar Kobb-Duglas funksiyasi nomini oldi.

Tadqiqot natijalari 1928-yilda "Ishlab chiqarish nazariyasi" nomli maqolada chop etildi (*A theory of production. – "American Economic Review"*, v.18 №1, 1928), (5.3) funksiya esa Kobb-Duglas ICHF deb ataladigan bo'ldi. Shundan keyin ICHF nazariyasi keng ko'lamda rivojlanib ketdi. ICHF ning CES (Solou va boshqalar), Leontev, Sato kabi yangi turlari paydo bo'ldi.

5.1-§. Bir va ko'p o'zgaruvchili ICHF haqida. Eyler teoremalari

Matematikada

$$y = f(x) \tag{5.4}$$

ko'rinishda yoziladigan bir argumentli (bir o'zgaruvchili) funksiya tushunchasi ma'lum. Unda x – erkli o'zgaruvchi, y esa – erksiz o'zgaruvchi.

5.1 – *ta'rif. Agar* (5.4) *da erkli o'zgaruvchi x sarf qilinadigan yoki foydalaniladigan resurs (ishlab chiqarish faktori) hajmi qiymatini, erksiz o'zgaruvchi y esa, ishlab chiqariladigan mahsulot hajmi qiymatini anglatsa, unda* (5.4) *bir o'zgaruvchili ishlab chiqarish funksiyasi* (*IChF*) *deyiladi.*

Iqtisodiy ma'nosi bo'yicha $x \geq 0$, $y \geq 0$ va (5.4) funksiyaning grafigi birinchi chorakda joylashgan bo'ladi. f belgi iqtisodiy sistemaning resursni mahsulotga aylantiradigan xarakteristikasidan iborat. Makroiqtisodiyotda y maksimal ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi deb qabul qilingan. Ammo makroiqtisodiyotda parametrlardan foydalanish evaziga bu miqdor yana ko'proq bo'lishi mumkin. Bunday holda $y = f(x, a)$ deb yoziladi. ICHF parametrlari vektori a deb belgilangan. Masalan, $y = ax^{\alpha}$ funksiyani olaylik, unda x – sarf qilinadigan resurs miqdori, $y = f(x)$ – ishlab chiqariladigan mahsulot hajmi, a va α – ICHF parametrlari, $a > 0$, $0 < \alpha < 1$. Shu funksiya grafigi botiq va koordinata boshidan chiqadi hamda birinchi chorakda joylashgan. Shu bilan birga, funksiya monoton o'suvchi va quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$y(0)=0,\ y=ax^{\alpha}>0,\ \ y'=\alpha\cdot a\cdot x^{\alpha-1}>0,\ \ \ y''=a\cdot\alpha(\alpha-1)\cdot x^{\alpha-2}<0,$

$$\lim_{x\to+0}y'=\lim_{x\to+0}\frac{a\cdot\alpha}{x^{1-\alpha}}=+\infty;\quad \lim_{x\to+\infty}y'=\lim_{x\to+\infty}\frac{a\cdot\alpha}{x^{1-\alpha}}=0.$$

Ikkinchi hosilaning manfiyligi x ning ortishi bilan y ning kamayishini anglatadi. Bu holat iqtisodiy nazariyada *kamayuvchi samaradorlik qonuni* deyiladi.

Bir o'zgaruvchili ICHF ichida ushbu

$$f(0)=0;\ \ f(x)>0;\ \ f'(x)>0;\ \ f''(x)<0;\ \ \forall\, x>0 \qquad (5.5)$$

shartlarni qanoatlantiradiganlari ham uchraydi. (5.4) shartlarni qanoatlantiradigan ICHF bir o'zgaruvchili klassik ICHF deyiladi. Agar ICHF (5.5) dan tashqari $f(\lambda x)\equiv\lambda f(x),\ \ \lambda>0$ shartni ham bajara olsa, u *neoklassik* deyiladi. Masalan, $f(x)=ax$, $a>0$ – neoklassik ICHF. Agar $f(x)$ funksiya uchun $f(\lambda x)\equiv\lambda^{\delta}f(x)$ ayniyat bajarilsa, $f(x)$ funksiya bir o'zgaruvchili *umumlashgan ICHF* deyiladi.

Makroiqtisodiy darajada sarf va ishlab chiqarilgan mahsulotlar ularning baholari bilan o'lchanadi. Aniqrog'i, sarf qilinadigan (yoki sarf qilingan) resurslar va ishlab chiqarilgan mahsulotlar ularning hajmini mos narxlariga ko'paytmasi orqali o'lchanadi. Bir o'zgaruvchili ICHF *bir faktorli ICHF* deb ham yuritiladi.

Makroiqtisodiy sistemada, matematikada ikki yoki ko'p o'zgaruvchili $y=f(x_1,x_2)$, $y=f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyalarga o'xshash, ikki va ko'p faktorli IChF lardan tez-tez foydalaniladi.

5.2 – *ta'rif.* *Agar ushbu*

$$y=f(x_1,x_2,...,x_n) \qquad (5.6)$$

formulada $x_1,x_2,...,x_n$ *o'zgaruvchilar sarf qilinadigan (yoki foydalanadigan) resurslar hajmi qiymatini (o'zgaruvchilar soni resurslar soniga teng), erksiz o'zgaruvchi* y *– ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori bo'lib,* (5.6) *funksiyaning qiymati ma'nosini anglatsa, shu* (5.6) *funksiya ko'p argumentli (o'zgaruvchili) ICHF deyiladi.*

(5.6) funksiya yana n – resursli yoki n – faktorli (umuman, ko'p faktorli) deb ham ataladi. Iqtisodiy ma'nosi bo'yicha $x_1,x_2,...,x_n$ o'zgaruvchilar nomanfiy. Shuning uchun ushbu

$$R_+^n = \{ (x_1, x_2, ..., x_n) : \ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ ..., \ x_n \geq 0 \}$$

to'plam ko'p faktorli ICHF ning aniqlanish sohasi bo'ladi. Agar $x_1, x_2, ..., x_n$ koordinatali vektorni x deb belgilasak, R_+^n to'plam n o'lchovli R^n fazoning barcha nomanfiy vektorlari to'plamidan iborat.

5.3 – ta'rif. *(5.6) funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:*

1^0. *(5.6) funksiya R_+^n sohada aniqlangan, uzluksiz va birinchi hamda ikkinchi tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga ega.*

2^0. $f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n) = 0$; $i = 1,2,...,n$; $f(0,0,...,0) = 0$.

3^0. $f(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) \equiv \lambda \cdot f(x_1, x_2, ..., x_n)$; $\forall x \in R_+^n$; $\lambda > 0$.

4^0. $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1} > 0$; $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_2} > 0$; ..., $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_n} > 0$; $\left(\dfrac{\partial f(x)}{\partial x} > 0 \right)$; $\forall x \in R_+^n$.

5^0. $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} < 0$; $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} < 0$; ...; $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} < 0$; $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} > 0$; $i \neq j$, $\forall x \in R_+^n$.

Shu shartlarni qanoatlantiradigan (5.6) funksiya n o'zgaruvchili neoklassik ICHF deyiladi.

3^0 shartning ma'nosiga alohida to'xtalamiz. Shu 3^0 shartni qanoatlantiradigan funksiyalar n o'zgaruvchili chiziqli – bir jinsli deb ataladi. Quyida shunday funksiyalarga misollar keltiramiz:

1. $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i x_i$, $\quad k_i > 0$, $\quad i = 1,2,...,n$.

2. $f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_0 \prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$; $a_0 > 0$; $\alpha_i > 0$; $i = 1,2,...,n$; $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

3. $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \dfrac{a_1 x_1^{\alpha+1} + a_2 x_2^{\alpha+1} + ... + a_n x_n^{\alpha+1}}{b_1 x_1^{\alpha} + b_2 x_2^{\alpha} + ... + b_n x_n^{\alpha}}$, $a_i > 0$; $b_i > 0$

$a_i \neq b_i$, $\alpha > 0$, $i = 1,2,...,n$ (kamida bitta i uchun).

4. $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i^2}$, $\quad a_i > 0$, $\quad i = 1,2,...,n$.

5. $f(x_1,x_2,...,x_n)=a_0\left(\sum_{i=1}^{n}a_ix_i^{\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}}$, $a_i>0$, $i=0,1,...,n$; $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$, $\rho>-1$.

Bu misollardan ko'rinadiki, turli "tabiatli" funksiyalar chiziqli-bir jinsli bo'lishi mumkin. Chiziqli-bir jinsli, umumiy holda, δ-tartibli bir jinsli funksiya ta'rifi shveysariyalik buyuk olim Leonard Eyler tomonidan kiritilgan.

5.1-teorema. *Agar (5.6) funksiya chiziqli-bir jinsli bo'lib, R_+^n da birinchi tartibli uzluksiz hosilalarga ega bo'lsa, u holda quyidagi ayniyat o'rinli:*

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}x_1+\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}x_2+...+\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}x_n\equiv f(x);\quad x=(x_1,x_2,...,x_n). \quad (5.7)$$

5.4-*ta'rif*. *Agar (5.6) funksiya uchun ($\forall x\in R_+^n$) ushbu*

$$f(\lambda x_1,\lambda x_2,...,\lambda x_n)\equiv\lambda^{\delta}\cdot f(x_1,x_2,...,x_n),\quad \lambda>0;\ \delta>0 \quad (5.8)$$

ayniyat o'rinli bo'lsa, uni δ-tartibli bir jinsli funksiya deyiladi.

Misollar keltiramiz:

1. $f(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n}k_ix_i^{\delta}$, $k_i>0$, $\delta>0$, $i=1,2,...,n$.

2. $f(x_1,x_2,...,x_n)=\left(\sum_{i=1}^{n}k_ix_i\right)^{\delta}$, $k_i>0$, $\delta>0$, $i=1,2,...,n$.

3. $f(x_1,x_2,...,x_n)=a_0\prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha_i}$; $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=\delta>0$; $a_0>0$; $\alpha_i>0$; $i=1,2,...,n$.

4. $f(x_1,x_2,...,x_n)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_ix_i^{2\delta}}$, $a_i>0$, $i=1,2,...,n$; $\delta>0$.

5. $f(x_1,x_2,...,x_n)=a_0\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_ix_i^{-\rho}}\right)^{-\frac{\delta}{\rho}}$, $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$, $a_0>0$,

$a_i>0$, $i=1,2,...,n$; $\rho>-1$; $\delta>0$.

5.2-teorema. $\delta > 0$ *tartibli bir jinsli funksiyalar uchun ushbu* $(\forall x \in R_+^n)$

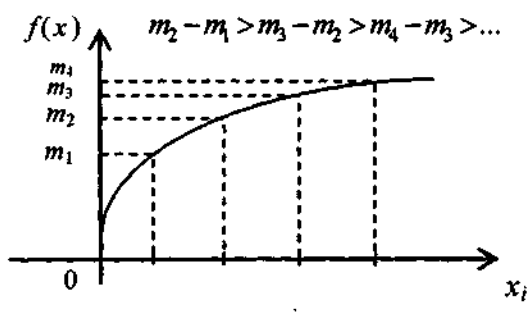
$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}x_2 + ... + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}x_n \equiv \delta \cdot f(x) \qquad (5.9)$$

ayniyat o'rinli.

Agar $\delta > 1$ bo'lsa, ishlab chiqarish masshtabini (ko'lamini) λ $(\lambda > 1)$ marta orttirilsa, bundan ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori λ^δ marta ortadi, ya'ni ishlab chiqarish masshtabini orttirishdan samaradorlik bor bo'ladi. Agar $\delta < 1$ bo'lsa, ishlab chiqarish samaradorligi ishlab chiqarish masshtabi ortishidan kamayadi. Nihoyat, $\delta = 1$ bo'lganda masshtabning ortishidan erishiladigan samaradorlik o'zgarmas bo'ladi.

Yuqoridagi mulohazalar neoklassik ICHF ta'rifidagi 3^0 shart bilan bog'langan edi. Endi 4^0, 5^0 shartlar va ularning iqtisodiy ma'nosiga to'xtalamiz.

4^0 shartdan har bir $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} > 0$ tengsizlik $f(x)$ funksiya x_i bo'yicha o'suvchi ekanini, 5^0 shart esa o'sish tezligining kamayib borishini anglatadi (5.1-chizma). Albatta, x_i resursni qolgan resurslar o'zgarmas bo'lganda xohlagancha orttirib borishning ma'nosi yo'q. Bu hol 5^0 shart bilan ifodalanadi. Bunday hol *kamayuvchi samaradorlik qonuni* deb ataladi. ICHF grafigi R_+^{n+1} sohada sirtni anglatadi. Agar $n = 2$ bo'lsa, ICHF grafigi R_+^3 sohada joylashgan va qavariqligi yuqoriga qaragan sirtni bildiradi.



5.1-chizma

5.2-§. Ikki faktorli ICHF

Biz ikki faktorli ICHF ga alohida to'xtalamiz. Iqtisodiyotda qabul qilingan belgilashlardan foydalanib, ICHF ni quyidagicha yozamiz:

$$Y = F(L,K)\,. \qquad (5.10)$$

Ko'plab kitoblar va ilmiy maqolalarda $F(K, L)$ deb yozishadi, unda abssissa (gorizontal) o'qi deb K belgilanadi. Bu hol grafiklarni chizishda ba'zi qiyinchiliklarga (noqulayliklarga) olib keladi.

Ikki faktorli ICHF uchun neoklassik ICHF ning umumiy ta'rifidagi 1^0–5^0 shartlar quyidagicha yoziladi:

1^0. *$F(L,K)$ funksiya R_+^2 sohada aniqlangan, uzluksiz va birinchi, ikkinchi tartibli uzluksiz hosilalarga ega.*

2^0. $F(0,K) = F(L,0) = 0;\quad F(0,0) = 0\,.$

3^0. $F(\lambda L,\lambda K) = \lambda F(L,K)\,;\quad \forall (L,K) \in R_+^2\,.$

4^0. $\dfrac{\partial F(L,K)}{\partial L} > 0\,;\quad \dfrac{\partial F(L,K)}{\partial K} > 0\,;\quad \forall (L,K) \in R_+^2\,.$

5^0. $\dfrac{\partial^2 F(L,K)}{\partial L^2} < 0\,;\quad \dfrac{\partial^2 F(L,K)}{\partial K^2} < 0\,;\quad \dfrac{\partial^2 F(L,K)}{\partial L\,\partial K} \ge 0;\quad \forall (L,K) \in R_+^2\,.$

Asosiy ikki faktorli ICHF sifatida Kobb-Duglas va CES sinfidagi (*Constant Elasticity of Subtitution*) ICHF larni ko'rsatish mumkin. Ularni alohida-alohida o'rganamiz.

1. *Kobb-Duglas ICHF quyidagi ko'rinishga ega*:

$$Y = F(L,K) = a_0 K^{\alpha} L^{1-\alpha}, \quad a_0 > 0, \quad 0 < \alpha < 1\,. \qquad (5.11)$$

Bu funksiyaning neoklassik 1^0–5^0 shartlarni qanoatlantirishini tekshiramiz. 1^0 va 2^0 shartlar bajarilishi ko'rinib turibdi. Endi 3^0-shartni tekshiramiz:

$$Y = F(\lambda L,\lambda K) = a_0 (\lambda K)^{\alpha} \cdot (\lambda L)^{1-\alpha} = \lambda a_0 K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha} = \lambda F(L,K)\,.$$

Nihoyat, 4^0 va 5^0 - shartlar bevosita hisoblashlar orqali tekshiriladi:

$$\frac{\partial F}{\partial L} = a_0 \cdot (1-\alpha)\, K^{\alpha}\, L^{-\alpha} > 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial K} = a_0 \cdot \alpha\, K^{\alpha-1}\, L^{1-\alpha} > 0\,;$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial L^2}=-a_0\cdot\alpha\,(1-\alpha)\,K^{\alpha}L^{-\alpha-1}<0,\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial K^2}=a_0\cdot\alpha\,(1-\alpha)\,K^{\alpha-2}L^{1-\alpha}<0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial L\partial K}=a_0\cdot\alpha\,(1-\alpha)\,K^{\alpha-1}L^{-\alpha}>0$$

2. CES sinfidagi ICHF quyidagi ko'rinishga ega:

$$Y=F(L,K)=a_0\left[aK^{-\rho}+(1-a)L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}},\quad a_0>0,\quad 0<a<1,\ \rho>-1. \quad (5.12)$$

Mazkur funksiya 1961-yilda E.Errou, X.Cheneri, B.Minal va R.Solou tomonidan kashf etilgan (*Capital–labor subtitation and economic efficienc, – Review Economics and Statistics, v.45, N2, 1961*). Qisqalik uchun keyingi mulohazalarda uni Solou funksiyasi deb yuritamiz. Shu funksiya uchun 1^0-5^0 shartlarni tekshiramiz. Ravshanki, 1^0 shart bajariladi. 2^0 shartni tekshirish uchun ikki holni ko'ramiz: 1) $\rho>0$; 2) $-1<\rho<0$.

1-holda (5.12) ni o'zgartirib,

$$F(L,K)=\frac{a_0\cdot K\cdot L}{\left[aL^{\rho}+(1-a)K^{\rho}\right]^{1/\rho}}$$

ko'rinishda yozamiz. Bundan $F(0,K)=F(L,0)=0$ ekani kelib chiqadi. Ammo 2-holda $F(0,K)=a_0aK\neq 0$, $F(L,0)=a_0(1-a)L\neq 0$. Bundan ko'rinadiki, $-1<\rho<0$ bo'lganda Solou funksiyasi uchun 2^0 shart bajarilmaydi va funksiya neoklassik bo'lmaydi.

Endi chiziqli bir jinslilik sharti, 3^0 ni tekshiramiz. Bu shart bajariladi. Haqiqatan,

$$F(\lambda L,\lambda K)=a_0\left[a(\lambda K)^{-\rho}\cdot(1-a)(\lambda L)^{\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}=a_0\left[\lambda^{-\rho}aK^{-\rho}+\lambda^{-\rho}(1-a)L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}=$$

$$=a_0\lambda^{-\rho}\left[aK^{-\rho}+(1-a)L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}=\lambda F(L,K)$$

Shunday qilib, 3^0 shart ixtiyoriy $\lambda>0$, $\rho>-1$ lar uchun bajariladi.

Endi 4^0 va 5^0 shartlarning bajarilishini tekshirish qoldi. Bu ishni bevosita hosilalarni hisoblash yordamida olib boramiz:

$$\frac{\partial F(L,K)}{\partial L}=a_0\cdot(-1/\rho)\cdot\left[a\cdot K^{-\rho}+(1-a)\cdot L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}-1}\cdot(1-a)\cdot(-\rho)L^{-\rho-1}=$$

$$=a_0\cdot(1-a)\cdot L^{-\rho-1}\cdot\left[aK^{-\rho}+(1-a)\cdot L^{-\rho}\right]^{-\frac{1+\rho}{\rho}}>0;$$

$$\frac{\partial F(L,K)}{\partial K}=a_0\cdot(-1/\rho)\cdot\left[a\cdot K^{-\rho}+(1-a)\cdot L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}-1}\cdot a\cdot(-\rho)K^{-\rho-1}=$$

$$=a_0\cdot a\cdot K^{-\rho-1}\cdot\left[aK^{-\rho}+(1-a)\cdot L^{-\rho}\right]^{-\frac{1+\rho}{\rho}}>0\cdot$$

Keyingi hisob-kitoblar murakkabroq bo'lgani uchun yozuvni kamaytirish maqsadida ushbu

$$[...]=\left[aK^{-\rho}\cdot+(1-a)\cdot L^{-\rho}\right]$$

belgilashdan foydalanamiz. Endi ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni hisoblashga kirishamiz:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial L^2}=a_0\cdot(1-a)\cdot\left\{(-\rho-1)L^{-\rho-2}[...]^{-\frac{1}{\rho}-1}+L^{-\rho-1}(-1/\rho-1)\cdot[...]^{-\frac{1}{\rho}-2}(1-a)^{-\rho}L^{-\rho-1}\right\}=$$

$$=a_0\cdot(1-a)(-\rho-1)\left\{L^{-\rho-2}[...]^{-\frac{1}{\rho}-1}+(1/\rho-1)\cdot(-\rho)(1-a)L^{-2\rho-2}[...]^{-\frac{1}{\rho}-2}\right\}=$$

$$=a_0\cdot(1-a)\cdot(-\rho-1)\cdot[...]^{-\frac{1}{\rho}-2}\left\{L^{-\rho-2}\left(aK^{-\rho}+(1-a)L^{-\rho}\right)-(1-a)L^{-2\rho-2}\right\}=$$

$$=-a_0\cdot(1-a)\cdot(\rho+1)\cdot a\cdot L^{-\rho-2}K^{-\rho}\cdot[...]^{-\frac{1}{\rho}-2}<0;$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2}=a_0 a\cdot\left\{(-\rho-1)\cdot K^{-\rho-2}[...]^{-\frac{1}{\rho}-1}+K^{-\rho-1}(-(1+\rho)/\rho)\cdot[...]^{-\frac{1+\rho}{\rho}-1}a\cdot(-\rho)K^{-\rho-1}\right\}=$$

$$=a_0 aK^{-2\rho-2}[...]^{-\frac{1+\rho}{\rho}-1}\left\{(-\rho-1)K^{\rho}(-(1+\rho)/\rho)\cdot[...]+a(\rho+1)\right\}=$$

$$=a_0 a\cdot K^{-2\rho-2}[...]^{-\frac{1+\rho}{\rho}-1}\left\{(-\rho-1)\cdot K^{\rho}\left(a\cdot K^{-\rho}+(1-a)\cdot L^{-\rho}\right)+a\cdot(\rho+1)\right\}=$$

$$=-a_0\cdot(1-a)\cdot(\rho+1)\cdot a\cdot L^{-\rho-2}K^{-\rho}\cdot[...]^{-\frac{1}{\rho}-2}=$$

$$= -a_0 \cdot a \cdot K^{-2\rho-2} \cdot [\ldots]^{-\frac{1+\rho}{\rho}-1} \left\{ -(\rho+1) \cdot (1-a) \cdot K^{\rho} \cdot L^{\rho} \right\} =$$

$$= -a_0 \cdot a \cdot (\rho+1) \cdot (1-a) \cdot K^{-2\rho-2} \cdot [\ldots]^{-\frac{1+\rho}{\rho}-1} < 0$$

Endi aralash hosilaning musbatligini ko'rsatamiz:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial L \partial K} = a_0 \cdot (1-a) \cdot L^{-\rho-1} \cdot (-(1+\rho)/\rho) \cdot [\ldots]^{-\frac{1+\rho}{\rho}-1} \cdot a \cdot (-\rho) \cdot K^{-\rho-1} =$$

$$= a_0 \cdot (1-a) \cdot a \cdot (1+\rho) \cdot L^{-\rho-1} \cdot K^{-\rho-1} \cdot [\ldots]^{-\frac{1+\rho}{\rho}-1} > 0$$

Shunday qilib, Solou ICHF uchun $\rho > 0$ bo'lganda barcha 1^0-5^0 shartlar bajariladi, ammo $-1 < \rho < 0$ bo'lganda 2^0 shartdan boshqalari bajariladi. Biz ongli ravishda $\rho = 0$ bo'lgan holni tushirib qoldirdik. Umuman, $\rho \to 0$, $\rho \to -1$ va $\rho \to +\infty$ hollar ham ko'rilishi lozim.

Avval $\rho \to 0$ holni qaraymiz. Buning uchun avval $\lim\limits_{\rho \to 0} \ln Y$ ni hisoblaymiz:

$$\lim_{\rho \to 0} \ln Y = \ln a_0 - \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\rho} \ln\left[aK^{-\rho} + (1-a) \cdot L^{-\rho}\right] =$$

$$= \ln a_0 - \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\rho} \ln \frac{aL^{\rho} + (1-a) \cdot K^{\rho}}{K^{\rho} \cdot L^{\rho}} =$$

$$= \ln a_0 - \lim_{\rho \to 0} 1/\rho \cdot \left[\ln\left(aL^{\rho} + (1-a) \cdot K^{\rho}\right) - \rho \ln(K \cdot L)\right] =$$

$$= \ln a_0 - \ln(K \cdot L) - \lim_{\rho \to 0} \frac{\ln\left(aL^{\rho} + (1-a) \cdot K^{\rho}\right)}{\rho}.$$

Bu limitni hisoblash uchun Lopital qoidasidan foydalanamiz:

$$\lim_{\rho \to 0} \ln Y = \ln a_0 + \ln(KL) - \lim_{\rho \to 0} \frac{aL^{\rho} \ln L + (1-a) \cdot K^{\rho} \ln K}{aL^{\rho} + (1-a) \cdot K^{\rho}} =$$

$$= \ln(a_0 KL) - \left[aLnL + (1-a) \ln K\right] = \ln(a_0 KL) - \ln K^{1-a} L^{a} = \ln\left(a_0 K^{a} L^{1-a}\right)$$

Demak, $\lim\limits_{\rho \to 0} \ln Y = \ln\left(a_0 K^{a} L^{1-a}\right)$. Endi uzil-kesil ushbu

$$\lim_{\rho\to 0} \ln Y = \ln\left(a_0 K^a L^{1-a}\right), \ a_0 > 0, \ \ 0 < a < 1$$

formulaga ega bo'lamiz.

Demak, $\rho \to 0$ da Solou ICHF Kobb-Duglas ICHF ga aylanadi. Xulosa qilib aytganda, Kobb-Duglas funksiyasi Solou funksiyasining $\rho \to 0$ dagi xususiy holidan iborat.

Endi $\rho \to +\infty$ holni ko'raylik:

$$\lim_{\rho\to+\infty} \ln Y = a_0 \lim_{\rho\to 0}\left[aK^{\rho} + (1-a)L^{-\rho}\right]^{-1/\rho} =$$

$$= a_0 \lim_{\rho\to+\infty} \frac{K\cdot L}{aL^{\rho} + (1-a)K^{1/\rho}} = \begin{cases} a_0 L, & \text{агар } L < K \text{ бўлса,} \\ a_0 K, & \text{агар } K < L \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Demak, $\rho \to +\infty$ da Solou funksiyasi $Y = a_0 \min\{L;\ K\}$ funksiyaga aylanadi. Bu funksiya tayinlangan proporsiyali ICHF deyiladi. U Leontev ICHF deb yuritiladi. Bunday ICHF ham Solou funksiyasining xusu-siy holidan iborat.

Nihoyat, $\rho \to -1$ holni ko'rish qoldi. Ravshanki,

$$\lim_{\rho\to -1} \ln Y = a_0\left[\,a\,K + (1-a)\,L\right].$$

Demak, $\rho \to -1$ da Solou funksiyasi ushbu $Y = a_0\left[\,a\,K + (1-a)L\right]$ chiziqli ICHF ga aylanadi.

Oxirgi ikki xususiy holda olingan ICHF neoklassik shartlarni qanoatlantiradi. Ammo Leontev va chiziqli ICHF lar ham iqtisodiyotni o'rganishda asqotadi.

5.4-teorema. *Ushbu* $Y = F(L,K) = a_0 K^{\alpha} L^{1-\alpha}$, $0<\alpha<1$, $a_0 > 0$ *Kobb-Duglas funksiyasi quyidagi ikkinchi tartibli kvazichiziqli differensial tenglamani qanoatlantiradi:*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} = \frac{K^2}{L^2}\frac{\partial^2 F}{\partial K^2}. \tag{5.13}$$

Isboti bevosita hisob-kitoblar yordamida olib boriladi.

Ta'kidlab o'tamizki, O'zbekiston xalq xo'jaligi uchun 1961-1990-yillarga mos makroiqtisodiy ICHF hisoblangan edi:

$$Y = F(L,K) = e^{0,011} \cdot K^{0,3616} \cdot L^{0,6386},$$

bunda $\alpha = 0,3616;\ \beta = 0,6386;\ a_0 = e^{0,011}$. Ravshanki, $\alpha + \beta = 1,002$.

5.3-§. Ikki faktorli neoklassik ICHF uchun asosiy iqtisodiy-matematik xarakteristikalar

Ikki faktorli neoklassik ICHF uchun asosiy iqtisodiy-matematik xarakteristikalarni (ko'rsatkichlarni) keltiramiz.

Faraz qilaylik, $Y = F\ (L, K)$ – ikki faktorli neoklassik ICHF bo'lsin.

1°. $\dfrac{K}{L} = k$ – qurollanganlik, $\dfrac{1}{k}$ – ishlab chiqarish quvvati.

2°. $y = \dfrac{Y}{L} = \dfrac{F(L,K)}{L}$ – o'rtacha mehnat unumdorligi.

3°. $z = \dfrac{Y}{K} = \dfrac{F(K,L)}{K}$ – o'rtacha fond unumdorligi.

4°. $v = \dfrac{\partial F(L,K)}{\partial L}$ – mehnat bo'yicha marjinal (limit) unumdorligi.

5°. $r = \dfrac{\partial F(L,K)}{\partial K}$ – fondlar bo'yicha marjinal (limit) unumdorligi.

6°. $\alpha = \dfrac{\partial F(L,K)}{\partial K} \cdot \dfrac{K}{F(L,K)}$ – fondlar bo'yicha elastiklik koeffitsiyenti.

7°. $\beta = \dfrac{\partial F(L,K)}{\partial L} \cdot \dfrac{L}{F(L,K)}$ – mehnat bo'yicha elastiklik koeffitsiyenti.

8°. $S = \dfrac{dK}{dL} = \dfrac{\partial F(L,K)}{\partial L} : \dfrac{\partial F(L,K)}{\partial K}$ – $F(L,K)$ - o'zgarmas bo'lganda L resursni K resurs bilan almashtirishning marjinal (limit) normasi.

9°. $\sigma = \left(\dfrac{dS}{dk} \cdot \dfrac{R}{S}\right)^{-1}$ – $F(L,K)$ - o'zgarmas bo'lganda L resursni K resurs bilan almashtirish elastikligi (aslida o'sha elastiklikka teskari miqdor).

10⁰. $K\cdot\dfrac{\partial F}{\partial K}$ – kapitaldan olingan daromad.

11⁰. $L\cdot\dfrac{\partial F}{\partial L}$ – mehnatdan olingan daromad.

12⁰. $L\cdot\dfrac{\partial F}{\partial L}+K\cdot\dfrac{\partial F}{\partial K}=F$ – jamlama daromad.

ICHF ning chiziqli bir jinsliligidan foydalansak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$F(L,K)=F\left(L\cdot 1,L\frac{K}{L}\right)=LF\left(1,\frac{K}{L}\right)=L\cdot F(1,k)=L\cdot f(k)\,,$$

bunda $F(L,K)=Lf(k)$, $f(k)$ – o'rtacha mehnat unumdorligi. Keyingi mulohazalarda tez-tez ushbu:

$$F(L,K)=L\cdot f(k) \tag{5.14}$$

formuladan foydalanamiz. Bu formula $F(L, K)$ dan $f(k)$ ga o'tishga va aksincha, $f(k)$ dan $F(L, K)$ ga qaytishga yordam beradi.

Endi o'rtacha mehnat unumdorligi $f(k)$ ning xossalarini ko'ramiz. Ikki faktorli neoklassik funksiyalar uchun yozilgan 1⁰ 5⁰ shartlarni qaraymiz:

$$0<\frac{\partial F}{\partial K}=\frac{\partial}{\partial K}[L\cdot f(k)]=L\cdot f'(k)\cdot\frac{\partial K}{\partial k}=L\cdot f'(k)\cdot\frac{1}{L}=f'(k)\,.$$

Bundan $f'(k)>0,\quad \forall k>0$ ekani kelib chiqadi.

$$0<\frac{\partial F}{\partial L}=\frac{\partial}{\partial L}[L\cdot f(k)]+Lf(k)\frac{\partial k}{\partial L}=f(k)+Lf'(k)\frac{K}{L^2}=f(k)-k\cdot f'(k).$$

Demak, $f(k)-k\cdot f'(k)>0$, ya'ni ushbu muhim:

$$0<\frac{f'(k)\cdot k}{f(k)}<1$$

tengsizlik o'rinli.

$$0>\frac{\partial^2 F}{\partial K^2}=\frac{\partial}{\partial K}\left(\frac{\partial F}{\partial K}\right)=\frac{\partial}{\partial K}(f'(k))=f''(k)\cdot\frac{1}{L}$$

Bundan $f''(k)<0,\quad \forall k>0$ kelib chiqadi. Shu tengsizlik $\dfrac{\partial^2 F}{\partial L^2}<0$ ekanidan ham kelib chiqadi. Haqiqatan ham:

$$0 > \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} = \frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{\partial F}{\partial L}\right) = \frac{\partial}{\partial K}[f(k) - kf'(k)]$$

$$= [f'(k) - f'(k) - f''(k)]\cdot\frac{\partial k}{\partial L} = -k\cdot f''(k)\cdot\left(-\frac{K}{L^2}\right) = \frac{1}{L}\cdot k^2\cdot f''(k)\,.$$

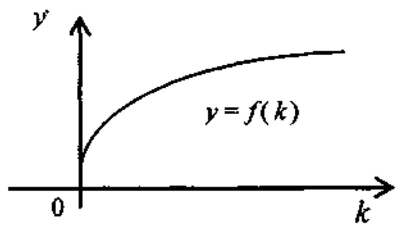
Shunday qilib, o‘rtacha mehnat unumdorligi $y = f(k)$ quyidagi munosabatlarni qanoatlantiradi:

$$f(0) = 0,\ f(k) > 0,\ f'(k) > 0,\ f''(k) < 0,\quad \forall k > 0\,. \qquad (5.15)$$

Bundan tashqari, $y = f(k)$ funksiya uchun ushbu

$$\lim_{k\to+\infty} f(k) = +\infty,\quad \lim_{k\to+0} f'(k) = +\infty,\quad \lim_{k\to+\infty} f'(k) = 0 \qquad (5.16)$$

munosabatlar o‘rinli ekanini ko‘rsatish qiyin emas. Shu (5.15) va (5.16) larga ko‘ra $y = f(k)$ funksiyaning grafigi koordinata boshidan ordinata o‘qiga urinib chiqadi va birinchi chorakda joylashgan bo‘ladi (5.2-chizma). Shu bilan birga, $y = f(k)$ funksiya qavariqdir.



5.2-chizma

Misol sifatida Kobb-Duglas funksiyasini olamiz: $F(L,K) = a_0 K^{\alpha} L^{1-\alpha}$.

Bu funksiya uchun

$$f(k) = a_0 k^{\alpha},\ f'(k) = a_0\alpha\cdot k^{\alpha-1} > 0,\ f''(k) = a_0\cdot\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot k^{\alpha-2} < 0,$$

$$\lim_{k\to+0} f'(k) = \lim_{k\to+0}\frac{a_0\alpha}{k^{1-\alpha}} = +\infty\,;\ \lim_{k\to+\infty} f'(k) = \lim_{k\to+\infty}\frac{a_0\alpha}{k^{1-\alpha}} = 0\,.$$

Asosiy iqtisodiy-matematik xarakteristikalar $1^0 - 12^0$ larda keltirilgan ko‘rinishda foydalanishga noqulay. Ularni k, $f(k)$, $f'(k)$ va $f''(k)$ lar orqali ifodalansa, ICHF bilan bog‘langan turli masalalarni yechishda qulaylik tug‘iladi:

1°. $\frac{K}{L}=k$.

2°. $y=\frac{Y}{L}=\frac{F(L,K)}{L}=f(k)$.

3°. $z=\frac{Y}{K}=\frac{F(K,L)}{K}=\frac{f(k)}{k}$.

4°. $v=\frac{\partial F(L,K)}{\partial L}=\frac{\partial}{\partial L}(Lf(k))=f(k)-kf'(k)$.

5°. $r=\frac{\partial F(L,K)}{\partial K}=\frac{\partial}{\partial K}(Lf(k))=f'(k)$.

6°. $\alpha=\frac{\partial F(L,K)}{\partial K}\cdot\frac{K}{F(L,K)}=[f(k)-kf'(k)]=\frac{L}{Lf(k)}=1-\frac{kf'(k)}{f(k)}$.

7°. $\beta=\frac{\partial F(L,K)}{\partial L}\cdot\frac{L}{F(L,K)}=f'(k)\frac{K}{Lf(k)}=\frac{kf'(k)}{f(k)}$.

8°. $s=\frac{\partial F(L,K)}{\partial L}:\frac{\partial F(L,K)}{\partial K}=\frac{f(k)-kf'(k)}{f'(k)}=\frac{f(k)}{f'(k)}-k>0$.

9°. $\frac{ds}{dk}=\frac{[f'(k)]^2-f(k)f''(k)}{[f'(k)]^2}-1=-\frac{f(k)f''(k)}{[f'(k)]^2}>0$.

$$\sigma=\left[-\frac{f(k)f''(k)}{[f'(k)]^2}\cdot\frac{kf'(k)}{f(k)-kf'(k)}\right]^{-1}=\frac{f'(k)[kf'(k)-f(k)]}{kf(k)f''(k)}>0 .$$

10°. $K\cdot\frac{\partial F(L,K)}{\partial K}=k\cdot f'(k)$.

11°. $L\cdot\frac{\partial F(L,K)}{\partial L}=L\cdot[f(k)-k\cdot f'(k)]$.

12°. $L\cdot\frac{\partial F(L,K)}{\partial L}+K\cdot\frac{\partial F(L,K)}{\partial K}=L\cdot f(k)$.

3-bobda belgilashlar bo'yicha F/L va F/K lar o'rta miqdorlar, ularni $A_L = F/L$, $A_K = F/K$ kabi belgilaymiz; xususiy hosilalar $\frac{\partial F}{\partial L}$ va $\frac{\partial F}{\partial K}$ marjinal (limit) miqdorlar, ularni $M_L = \frac{\partial F}{\partial L}$, $M_K = \frac{\partial F}{\partial K}$ deb belgilaymiz. Resurslar bo'yicha ishlab chiqarilgan mahsulot (milliy daromad) elastikliklari uchun quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$E_L(Y) = \frac{\partial F}{\partial L}\frac{L}{F} = \frac{M_L}{A_L} = 1 - \frac{k \cdot f'(k)}{f(k)}$$

$$E_K(Y) = \frac{\partial F}{\partial K}\frac{K}{F} = \frac{M_K}{A_K} = \frac{k \cdot f'(k)}{f(k)}$$

Ushbu $E_L + E_K = E_{(L,K)}$ yig'indi ishlab chiqarish elastikligi deyiladi. Neoklassik ICHF uchun $E_{(L,K)} = 1$.

Resurslar bo'yicha elastiklik tushunchasi ixtiyoriy ICHF uchun ham kiritiladi. Agar $E_{(L,K)} > 1$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, ishlab chiqarish *elastik* deyiladi. Masalan, $F = a_0 K^\alpha L^\beta$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $a_0 > 0$ ICHF uchun $E_{(L,K)} = \alpha + \beta$. Agar $\alpha + \beta > 1$ bo'lsa, ishlab chiqarish *elastik* bo'ladi.

Jarayonlarni o'rganishda Kobb-Duglas va Solou ICHF dan keng foydalaniladi. Shuning uchun bu ICHF uchun asosiy iqtisodiy-matematik xarakteristikalarni hisoblab chiqamiz: $F = a_0 K^\alpha L^{1-\alpha}$, $a_0 > 0$, $0 < \alpha < 1$.

2^0. $y = f(k) = \frac{F}{L} = a_0 k^\alpha$;

3^0. $z = \frac{f(k)}{k} = a_0 k^{\alpha - 1}$;

4^0. $v = \frac{\partial F}{\partial L} = a_0 (1 - \alpha) k^\alpha$;

5^0. $r = \frac{\partial F}{\partial K} = a_0 \alpha k^{\alpha - 1}$;

$6^0.\ \dfrac{\partial F}{\partial L}\cdot\dfrac{L}{F}=1-\alpha\ ;$

$7^0.\ \dfrac{\partial F}{\partial K}\cdot\dfrac{K}{F}=\alpha\ ;$

$8^0.\ S(k)=\dfrac{1-\alpha}{\alpha}k;\quad \dfrac{dS}{dk}=\dfrac{1-\alpha}{\alpha};$

$9^0.\ \sigma=\left(\dfrac{dS}{dk}\cdot\dfrac{k}{S}\right)^{-1}=1\,.$

Endi Solou ICHF uchun asosiy xarakteristikalarni hisoblaymiz:

$$F=a_0\left[aK^{-\rho}+(1-a)L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}},\ a_0>0,\quad 0<\alpha<1,\ \rho>-1.$$

$2^0.\ y=f(k)=\dfrac{F}{L}=a_0\dfrac{1}{L}\left[aK^{-\rho}+(1-a)L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}=a_0\left[ak^{-\rho}+(1-a)\right]^{-\frac{1}{\rho}}$

$3^0.\ z=\dfrac{f(k)}{k}=a_0k^{-1}\left[ak^{-\rho}+(1-a)\right]^{-\frac{1}{\rho}}=a_0\left[a+(1-a)k^{\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}$

$4^0.\ v=f(k)-kf'(k)=$

$$=a_0\left[ak^{-\rho}+(1-a)\right]^{-\frac{1}{\rho}}-\frac{ka_0}{-\rho}\left[ak^{-\rho}+(1-a)k^{\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}-1}a(-\rho)k^{-\rho-1}=$$

$$=a_0\left[ak^{-\rho}+(1-a)\right]^{-\frac{1}{\rho}-1}\cdot\left[ak^{-\rho}+1-a-ak^{-\rho}\right]=$$

$$=a_0\cdot(1-a)\cdot\left[ak^{-\rho}+(1-a)\right]^{-\frac{1}{\rho}-1}$$

$5^0.\ r=\dfrac{\partial F}{\partial K}=f'(k)=a_0ak^{-\rho-1}\left[ak^{-\rho}+(1-a)\right]^{-\frac{1}{\rho}-1}$

$6^0.\ \dfrac{\partial F}{\partial L}\cdot\dfrac{L}{F}=\dfrac{(1-a)k^{\rho}}{a+(1-a)k^{\rho}}$

$7^0.\ \dfrac{\partial F}{\partial K}\cdot\dfrac{K}{F}=\dfrac{a}{a+(1-a)k^{\rho}}$

Natija. 6^0- va 7^0- larga ko'ra $\frac{\partial F}{\partial K}\cdot\frac{K}{F}+\frac{\partial F}{\partial L}\cdot\frac{L}{F}=1$

8^0. $S(k)=\frac{\partial F}{\partial L}:\frac{\partial F}{\partial K}=\frac{1-\alpha}{\alpha}k^{\rho+1};\quad S(k)=\frac{1-\alpha}{\alpha}k^{\rho+1};$

9^0. $\sigma=\left(\frac{dS}{dk}\cdot\frac{k}{S}\right)^{-1}=\frac{1}{\rho+1},\quad \sigma=\frac{1}{\rho+1},\quad \rho>-1.$

Foydalanish qulay bo'lishi uchun neoklassik ICHF lar bo'yicha olingan natija va formulalarni 1, 2, 3-jadvallarga joylashtiramiz:

1-jadval

Neoklassik shartlardan chiqadigan natijalar

$\frac{\partial F}{\partial L}>0,\quad \frac{\partial F}{\partial L}=f(k)-k\cdot f'(k)\ \Rightarrow\ 0<\frac{k\cdot f'(k)}{f(k)}<1$
$\frac{\partial F}{\partial K}>0,\quad \frac{\partial F}{\partial K}=f'(k)\ \Rightarrow\ f'(k)>0$
$\frac{\partial^2 F}{\partial L^2}<0,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2}=\frac{1}{L}k^2 f''(k)\ \Rightarrow\ f''(k)<0$
$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2}<0,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial K^2}=\frac{1}{L}f''(k)\ \Rightarrow\ f''(k)<0,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial L\partial K}=-\frac{1}{L}kf''(k)>0$

3-jadval

Solou ICHF va uning xususiy hollari

$F(L,K)=a_0\left[aK^{-\rho}+(1-a)L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}},\ a_0>0,\ 0<a<1,\ \rho>-1$
$\lim\limits_{\rho\to 0}F(L,K)=a_0K^aL^{1-a}$ (Kobb-Duglas)
$\lim\limits_{\rho\to+\infty}F(L,K)=a_0\min\{L,K\}$ (tayinlangan koeffitsiyentli ICHF)
$\lim\limits_{\rho\to-1}F(L,K)=a_0aK+a_0(1-a)L$ (chiziqli ICHF)

2-jadval

№	Asosiy iqtisodiy-matematik xarakteristikalar	Asosiy iqtisodiy-matematik xarakteristikalarning $k, f(k), f'(k), f''(k)$ orqali ifodasi	Kobb-Duglas ICHF uchun	Solou ICHF uchun
1^0	$K/L=k$	–	–	–
2^0	$y=F/L$	$f(k)$	a_0k^{α}	$a_0\left[ak^{-\rho}+(1-a)\right]^{-1/\rho}$
3^0	$z=F/K$	$f(k)/k$	$a_0k^{\alpha-1}$	$a_0\left[a+(1-a)k^{\rho}\right]^{-1/\rho}$
4^0	$v=\dfrac{\partial F}{\partial L}$	$f(k)-k\cdot f'(k)$	$a_0(1-\alpha)\cdot k^{\alpha}$	$a_0(1+a)\left[ak^{-\rho}+(1-a)\right]^{-1/\rho-1}$
5^0	$r=\dfrac{\partial F}{\partial K}$	$f'(k)$	$a_0\alpha\cdot k^{\alpha-1}$	$a_0a\left[a+(1-a)k^{\rho}\right]^{-1/\rho-1}$
6^0	$\alpha=\dfrac{\partial F}{\partial L}\cdot\dfrac{L}{F}$	$\dfrac{k\cdot f'(k)}{f(k)}$	α	$\dfrac{a}{a+(1-a)k^{\rho}}$
7^0	$\beta=\dfrac{\partial F}{\partial L}\cdot\dfrac{L}{F}$	$1-\dfrac{k\cdot f'(k)}{f(k)}$	$1-\alpha$	$\dfrac{1-a}{ak^{-\rho}+(1-a)}$
8^0	$S=\dfrac{\partial F}{\partial L}:\dfrac{\partial F}{\partial K}$	$\dfrac{f(k)-k\cdot f'(k)}{f'(k)}$	$\dfrac{1-\alpha}{\alpha}\cdot k$	$\dfrac{1-a}{a}k^{\rho+1}$
9^0	$\sigma=\left(\dfrac{dS}{dR}\cdot\dfrac{k}{S}\right)^{-1}$	$\dfrac{f'(k)\cdot\left[k\cdot f'(k)-f(k)\right]}{k\cdot f'(k)\cdot f''(k)}$	1	$\dfrac{1}{\rho+1}$

Biz yuqorida ikki faktorli neoklassik ICHF ning ba'zi xususiyatlari bilan tanishdik. 5.2-§ da Kobb-Duglas ICHF (5.3) differensial tenglamani qanoatlantirishini isbotlagan edik (5.3-teoremaga qarang). Endi, aslida, bundan ham umumiyroq tasdiq o'rinli ekanini isbotlash mumkin.

5.4-teorema. *Agar $Y=F(L, K)$ – ikki faktorli neoklassik ICHF bo'lsa, u quyidagi*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial L^2}=\frac{K^2}{L^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} \tag{5.17}$$

ikkinchi tartibli kvazichiziqli differensial tenglamaning yechimi bo'ladi.

Isbot. Ma'lumki, $\frac{\partial^2 F}{\partial L^2}=\frac{1}{L}k^2 f''(k)$, $\frac{\partial^2 F}{\partial K^2}=\frac{1}{L}f''(k)$.

Bu munosabatlardan (5.17) kelib chiqadi.

Mazkur teoremadan (5.17) tenglamani Solou ICHF ham qanoatlantirishi kelib chiqadi.

5.4-§. Kobb–Duglas va Solou ICHF uchun o'rtacha mehnat unumdorligi xossalari

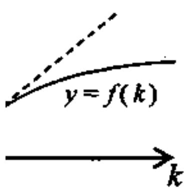
1. Kobb-Duglas ICHF uchun o'rtacha mehnat unumdorligi, ma'lumki, $f(k)=a_0k^{\alpha}$, $a_0>0$, $0<\alpha<1$, ko'rinishga ega va quyidagi munosabatlarni qanoatlantiradi (5.3-§ ga qarang):

$$f(0)=0,\ \ f(k)>0,\ \ f'(k)=a_0\alpha\, k^{\alpha-1}>0;\ \ f''(k)=a_0\alpha\,(\alpha-1)\,k^{\alpha-2}>0,$$

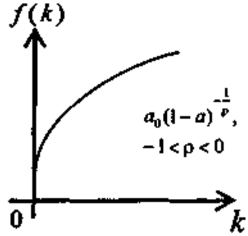
$$\lim_{k\to+0}f'(k)=\lim_{k\to+0}a_0\alpha\,k^{\alpha-1}=+\infty,\ \ \lim_{k\to+\infty}f'(k)=a_0\alpha\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k^{1-\alpha}}=0.$$

Ko'rinadiki, $y=a_0k^{\alpha}$ funksiyaning grafigi koordinata boshidan ordinata o'qiga urinib chiqadi va botiq egri chiziqdan iborat. $k\to+\infty$ da grafik gorizontal holatga intiladi, ammo u gorizontal asimptota emas. Sababi, $\lim\limits_{k\to+\infty}a_0k^{\alpha}=+\infty$ (5.3-chizma).

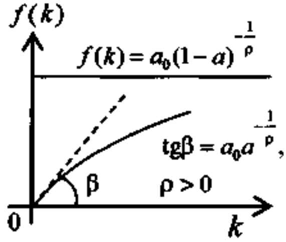
2. Solou neoklassik ICHF uchun o'rtacha mehnat unumdorligi quyidagicha edi: $f(k)=a_0\left[ak^{-\rho}+(1-a)\right]^{-\frac{1}{\rho}}$, $a_0>0$, $0<\alpha<1$, $\rho>-1$.



5.3-chizma



5.4- chizma



5.5- chizma

vval $-1<\rho<0$ bo'lgan holni ko'ramiz. Bu holda elementar hisoblashlar mida quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\lim_{k\to+0} f(k)=a_0(1-a)^{-1/\rho}>0; \qquad \lim_{k\to+\infty} f(k)=+\infty;$$

$$f'(k)=a_0\,a\left[a+(1-a)k^{\rho}\right]^{-\frac{1+\rho}{\rho}}>0;$$

isob-kitoblar ko'rsatadiki, ko'rilayotgan $-1<\rho<0$ holda $y=f(k)$ iya grafigi $\left(0;\ a_0(1-a)^{-1/\rho}\right)$ nuqtadan ordinata o'qiga urinib chiqadi hizma) va botiq egri chiziqdan iborat. Shu bilan birga, grafikka o'tka- urinma burchak koeffitsiyenti +" dan $a^{-1/\rho}$ songacha kamayadi. ptotalar mavjud emas.

ndi $\rho>0$ bo'lsin. Elementar hisoblashlar yordamida quyidagi lalarni topamiz:

$$\lim_{k\to+0} f(k)=\lim_{k\to+0}\frac{a_0}{\left[ak^{-\rho}+(1-a)\right]^{1/\rho}}=0; \qquad \lim_{k\to+\infty} f(k)=a_0(1-a)^{-1/\rho};$$

$$\lim_{k\to+0} f'(k)=a_0a^{-1/\rho}>0; \qquad \lim_{k\to+\infty} f'(k)=0 \ \text{(5.5-chizma)}.$$

u holda funksiya grafigi gorizontal asimptotaga ega: $=a_0(1-a)^{-1/\rho}$ va koordinata boshidan $a_0a^{-1/\rho}$ ga teng bo'lgan ak koeffitsiyenti bilan chiqadi. Funksiya grafigi botiq egri chiziqdan , chunki $f''(k)<0$:

$$f''(k)=a_0a\cdot(-1/\rho-1)\cdot\left[a+(1-a)\cdot k^{\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}-2}(1-a)\rho\cdot k^{\rho-1}<0\ .$$

5-bobga oid masalalar

I. Quyidagi Kobb-Duglas ICHF uchun 1^0-5^0 neoklassik shartlarning bajarilishi isbotlansin:

1. $F(L,K)=\sqrt{K\,L}$. 4. $F(L,K)=\sqrt[4]{K^3L}$.

2. $F(L,K)=\sqrt[3]{K\,L^2}$. 5. $F(L,K)=\sqrt[4]{K\,L^3}$.

3. $F(L,K)=\sqrt[3]{K^2L}$. 6. $F(L,K)=\sqrt[5]{K\,L^4}$.

II. Quyidagi Solou ICHF uchun 1^0-5^0 neoklassik shartlarning bajarilishi tekshirilsin:

1. $F(L,K)=\dfrac{2K}{K+L}$. 4. $F(L,K)=\dfrac{\sqrt{2}\,K\,L}{\sqrt{K^2+L^2}}$.

2. $F(L,K)=\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{K}+\sqrt{L}\right)^2$, 5. $F(L,K)=\dfrac{\sqrt[3]{4}\,K\,L}{\sqrt[3]{\left(K^{3/2}+L^{3/2}\right)^2}}$.

3. $F(L,K)=\dfrac{4K\,L}{\left(\sqrt{K}+\sqrt{L}\right)^2}$. 6. $F(L,K)=\dfrac{2\sqrt[3]{2}\,K\,L}{\sqrt[3]{\left(K^{3/4}+L^{3/4}\right)^4}}$.

III. Yuqorida keltirilgan I va II bo'limdagi ICHF uchun asosiy iqtisodiy-matematik xarakteristikalar hisoblansin (2^0-9^0 larni hisoblash yetarli).

5-bobga oid nazorat savollari

1. Bir o'zgaruvchili ICHF ta'rifini bering.
2. Bir o'zgaruvchili ICHF qanday shartlarni qanoatlantiradi?
3. Kamayuvchi samaradorlik nima?
4. Ko'p o'zgaruvchili ICHF ta'rifini bering.
5. Ko'p o'zgaruvchili neoklassik ICHF ta'rifini bering.
6. Neoklassik shartlar nima?
7. Chiziqli-bir jinsli funksiya ta'rifini bering va misollar keltiring.
8. Chiziqli-bir jinsli va δ-tartibli bir jinsli funksiyalar haqida Eyler teoremalarini aytib bering.
9. Kobb-Duglas va Solou neoklassik ICHF ni yozing.
10. Kobb-Duglas va Solou funksiyalari uchun neoklassik shartlarni tekshiring.

11. Solou ICHF uchun $\rho \to 0$, $\rho \to +\infty$ va $\rho \to -1$ bo'lgandagi xususiy hollarni yozib bering.

12. Ikki faktorli neoklassik ICHF uchun asosiy iqtisodiy-matematik xarakteristikalarni yozib bering.

13. Asosiy iqtisodiy-matematik xarakteristikalarning k, $f(k)$, $f'(k)$ va $f''(k)$ orqali ifodalarini keltiring.

14. Ishlab chiqarish elastikligi ta'rifini keltiring

15. Kobb-Duglas va Solou funksiyalari uchun asosiy xarakteristikalarni hisoblang.

16. Kobb-Duglas va Solou ICHF uchun o'rtacha mehnat unumdorligi xossalarini keltiring.

6-bob. ISHLAB CHIQARISH FUNKSIYALARI BILAN BOG'LANGAN MASALALARNING EKONOMETRIK ANALIZI

Ekonometrika bo'yicha mutaxassis (ekonometrist) qo'lida asosiy fondlar, mehnat resurslari va ishlab chiqarilgan mahsulotlar bo'yicha statistik ma'lumotlar bor bo'lsin, ya'ni quyidagi jadval berilgan deylik. Iqtisodiyotda bashorat qilish masalasi muhim ahamiyatga ega. Ko'pincha, bu ish mos ICHF orqali amalga oshiriladi. Agar berilgan (ma'lum bo'lgan) statistik ma'lumotlarga qarab ICHF ni topish mumkin bo'lsa, bashorat qilish masalasi yechilgan bo'ladi. Amerika olimlari K.Kobb (matematik) va P.Duglas (iqtisodchi) (5-bobning kirish qismiga qarang) boshqacha yo'l tutishgan. Ular avvaldan ICHF ko'rinishini berib, so'ngra statistik ma'lumotlardan foydalangan holda ICHF parametrlarini topishgan. Agar ICHF ni boshqa ko'rinishda izlasa ham qandaydir ICHF topilar edi. Shu sababli ularning yondashuvi empirik (taqribiy) munosabatga olib kelgan. Ammo olimlar topgan (tavsiya etgan) ICHF yordamida qator muhim savollarga javob berish mumkin bo'lgan.

L	L_1	L_2	...	L_n
K	K_1	K_2	...	K_n
Y	Y_1	Y_2	...	Y_n

Agar statistik ma'lumotlar bo'yicha ICHF ko'rinishini bilib olish (oldindan ICHF ko'rinishini tanlamasdan) mumkin bo'lib, keyin ICHF parametrlarini baholansa, bu yondashuv ma'lum ma'noda optimal bo'ladi. Ko'p hollarda L, K va Y larning makroiqtisodiy qiymatlariga qarab ICHF ko'rinishini aniqlash mumkin. Avval ba'zi xarakteristikalar o'zgarmas yoki biror qonuniyat (funksiya) bo'yicha o'zgaradigan hollarni ko'ramiz.

6.1-§. Iqtisodiy ko'rsatkichlar o'zgarmas bo'lgan hollar

1-hol. Fondlar bo'yicha limit unumdorlik o'zgarmas bo'lsin, ya'ni $\dfrac{\partial F(L,K)}{\partial K} = f'(k) = a, \quad a = const > 0$. Bundan $f(k) = a\,k + c$ kelib chiqadi.

Ikki tomonini L ga ko'paytiramiz: $L \cdot f(k) = L \cdot a \cdot \frac{K}{L} + c \cdot L = aK + cL$,

ya'ni $F(L,K) = aK + cL$ – chiziqli ICHF.

2-hol. Endi mehnat bo'yicha limit unumdorlik o'zgarmas bo'lsin, ya'ni $\frac{\partial F(L,K)}{\partial L} = f(k) - k\,f'(k) = a, \quad a = const > 0$. Bu holda $f(k)$ ni topish uchun $f(k) - k\,f'(k) = a$ birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamani yechishga to'g'ri keladi. Uni ushbu $f'(k) = \frac{1}{k} f(k) - \frac{a}{k}$ standart ko'rinishda yozamiz va integrallaymiz:

$$f(k) = \left[c + \int\left(-\frac{a}{k}\right) \cdot e^{-\int \frac{1}{k} dk} dk\right] \cdot e^{\int \frac{1}{k} dk} = \left(c - \int \frac{a}{k} e^{-\ln k} dk\right) \cdot e^{\ln k} =$$

$$= \left(c - \int \frac{a}{k^2} dk\right) \cdot k = \left(c + \frac{a}{k}\right) \cdot k = ck + a$$

Demak, $f(k) = ck + a$. Ikki tomonini L ga ko'paytiramiz: $F(L,K) = cK + aL$. Yana chiziqli ICHF hosil bo'ldi.

3-hol. L resursni K resursga almashtirish limit normasi S o'zgarmas bo'lsin, ya'ni $\frac{f(k) - k\,f'(k)}{f'(k)} = S, \quad S = const > 0$. Bu holda ham $f(k)$ ni topish uchun birinchi tartibli differensial tenglamani integrallash lozim bo'ladi. Uni

$$\frac{f'(k)}{f(k)} = \frac{1}{S+k}$$

o'zgaruvchilari almashadigan birinchi tartibli differensial tenglama ko'rinishida yozish mumkin. Integrallash natijasida $\ln f(k) = \ln(S+k) + \ln c$ yoki $f(k) = c \cdot (S+k)$ funksiya hosil bo'ladi. Uning ikki tomonini L ga ko'paytirish natijasida yana $F(L,K) = c\,S\,L + c\,K$ chiziqli ICHF ga kelamiz.

4-hol. Endi L resursni K resurs bilan almashtirish elastikligi σ o'zgarmas bo'lgan holni ko'raylik, ya'ni

$$\sigma=\left(\frac{dS}{dk}\cdot\frac{k}{S}\right)^{-1}, \quad \text{bunda } \sigma=const>0.$$

Bundan ushbu $\frac{dS}{dk}\cdot\frac{k}{S}=\frac{1}{\sigma}$ o'zgaruvchilari ajraladigan (S ga nisbatan) differensial tenglama hosil bo'ladi. Uni $\frac{dS}{S}=\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{dk}{k}$ ko'rinishda yozib integrallaymiz: $S(k)=c_1k^{1/\sigma}$, $c_1>0$. $S(k)$ o'rniga o'z ifodasini qo'yamiz:

$$\frac{f(k)-k\,f'(k)}{f'(k)}=c_1k^{1/\sigma}.$$

Bundan ushbu

$$\frac{f'(k)}{f(k)}=\frac{1}{k+c_1k^{1/\sigma}} \qquad (6.1)$$

ko'rinishdagi o'zgaruvchilari ajraladigan tenglama hosil bo'ladi. Uni integrallash uchun avval

$$J=\int\frac{dk}{k+c_1k^{1/\sigma}}$$

noaniq integralni hisoblab olamiz. Quyidagi $k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}=\tau$ almashtirish bajaramiz.

Unda, ravshanki, $\frac{\sigma-1}{\sigma}k^{-1/\sigma}dk=d\tau$.

$$J=\int\frac{dk}{k^{1/\sigma}\left(k^{(\sigma-1)/\sigma}+c_1\right)}=\int\frac{k^{-1/\sigma}dk}{k^{(\sigma-1)/\sigma}+c_1}=\frac{\sigma}{\sigma-1}\int\frac{d\tau}{\tau+c_1}=$$

$$=\frac{\sigma}{\sigma-1}(\ln\tau+\ln c_2)=\frac{\sigma_0}{\sigma-1}\left[\ln\left(k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+c_1\right)+\ln c_2\right]=\frac{\sigma}{\sigma-1}\ln\left[c_2\left(k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+c_1\right)\right].$$

Shunday qilib, $J=\frac{\sigma}{\sigma-1}\ln\left[c_2\left(k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+c_1\right)\right]$.

Endi (6.1) tenglamani integrallasa bo'ladi:

$$\ln f(k)=\frac{\sigma}{\sigma-1}\ln\left[c_2\left(k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+c_1\right)\right].$$

Bundan

$$f(k)=c_2^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}\left(k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+c_1\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}.$$

Shu tenglikning ikki tomonini L ga ko'paytiramiz. Sodda almashtirish natijasida $F(L, K)$ uchun quyidagi

$$F(L,K)=a_0\left[aK^{-\rho}+(1-a)L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}$$

ko'rinishdagi funksiya hosil bo'ladi, unda

$$a_0=\left[(1+c_1)\cdot c_2\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}},\quad a=\frac{1}{1+c_1},\quad 1-a=\frac{c_1}{1+c_1},\quad -\rho=\frac{\sigma-1}{\sigma}$$

Demak, $\sigma\neq 0$, $\sigma\neq 1$ bo'lganda biz Solou ICHF ga ega bo'ldik.

Agar $\sigma=1$ bo'lsa, tenglama $\frac{dS}{dk}\cdot\frac{k}{S}=1$ yoki $\frac{dS}{S}=\frac{dk}{k}$ ko'rinishga keladi.

Undan $\ln S=\ln k+\ln c$ yoki $S=c\cdot k$ kelib chiqadi. Endi $f(k)$ ga nisbatan differensial tenglama

$$\frac{f'(k)}{f(k)}=\frac{1}{(1+c_1)\cdot k}$$

ko'rinishda bo'ladi. Uni integrallaymiz: $\ln f(k)=\frac{1}{1+c_1}\ln k+\ln c_2$ yoki

$f(k)=c_2k^{1/(1+c_1)}$, $c_1>0$, $c_2>0$. Ikki tomonini L ga ko'paytiramiz:

$$f(L,K)=c_2K^{\frac{1}{1+c_1}}\cdot L^{\frac{c_1}{1+c_1}}.$$

Bunda $c_1>0$, $c_2>0$ bo'lgani uchun $\alpha=\frac{1}{1+c_1}<1$, $1-\alpha=\frac{c_1}{1+c_1}<1$,

$\frac{1}{1+c_1}+\frac{c_1}{1+c_1}=1$. Shunday qilib, bu holda Kobb-Duglas ICHF hosil bo'ladi.

Agar $\sigma \to +0$ bo'lsa, $\rho \to +\infty$. Haqiqatan, $\lim\limits_{\sigma \to +0}(1-\sigma)/\sigma =$

$= \lim\limits_{\sigma \to +0}\left(1/\sigma - 1\right) = +\infty$. Ma'lumki, $\rho \to +\infty$ da biz tayinlangan proporsiyali ICHF ga egamiz.

5-hol. Fondlar bo'yicha elastiklik koeffitsiyenti o'zgarmas bo'lsin, ya'ni $\alpha = \frac{\partial F}{\partial K} \cdot \frac{K}{F}$, $\alpha = const > 0$. Bu holda ham $\alpha = \frac{k \cdot f'(k)}{f(k)}$ ko'rinishdagi o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamaga kelamiz. Uni $\frac{f'(k)}{f(k)} = \frac{\alpha}{k}$ deb yozamiz va integrallaymiz: $\ln f(k) = \alpha \ln k + \ln c$ yoki $f(k) = c \cdot k^{\alpha}$. Ikki tomonini L ga ko'paytiramiz: $F(L,K) = c \cdot L \cdot \left(K/L\right)^{\alpha} = c \cdot K^{\alpha} L^{1-\alpha}$. Biz yana Kobb-Duglas ICHF ga keldik.

6-hol. Endi mehnat bo'yicha elastiklik koeffitsiyenti o'zgarmas deylik, ya'ni $\frac{\partial F}{\partial L} \cdot \frac{L}{F} = \beta = const > 0$. Bu holda $\frac{f(k) - k f'(k)}{f(k)} = \beta$ ko'rinishdagi differensial tenglama hosil bo'ladi. Uni

$$\frac{f'(k)}{f(k)} = \frac{1-\beta}{k}$$

kabi yozamiz. Uni integrallab topamiz:

$$\ln f(k) = (1-\beta)\ln k + \ln c,\ c > 0 \quad \text{yoki} \quad f(k) = c \cdot k^{1-\beta}.$$

Ikki tomonini L ga ko'paytirish natijasida yana $F(L,K) = c \cdot k^{1-\beta} L^{\beta}$, $c > 0$, $0 < \beta < 1$ ko'rinishidagi Kobb-Duglas ICHF ni hosil qilamiz.

Demak, quyidagi xulosalarni bayon etamiz:

1. Fondlar va mehnat bo'yicha limit unumdorlik o'zgarmas bo'lganda mos ICHF chiziqli bo'ladi.
2. L resursni K resursga almashtirishning limit normasi o'zgarmas bo'lganda mos ICHF chiziqli bo'ladi.
3. L resursni K resursga almashtirishning elastikligi o'zgarmas bo'lganda mos ICHF Solou funksiyasi ko'rinishida bo'ladi.

4. Fondlar va mehnat elastikligi o'zgarmas bo'lganda mos ICHF Kobb Duglas funksiyasi bo'ladi.

6.2-§. Funksional iqtisodiy ko'rsatkichlar holi

1-hol. Fondlar bo'yicha elastiklik ushbu

$$\frac{\partial F}{\partial K}\cdot\frac{K}{F}=\frac{k\cdot f'(k)}{f(k)}=\frac{ak}{ak+b}, \qquad a>0, \quad b>0$$

ko'rinishdagi kasr-chiziqli funksiya bo'lsin. Ravshanki,

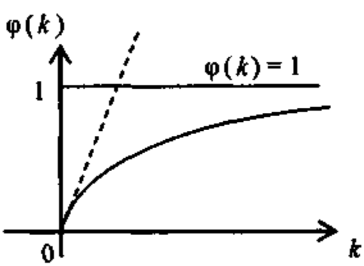
$0<\dfrac{ak}{ak+b}<1$, $\forall k>0$. Agar $\varphi(k)=\dfrac{ak}{ak+b}$ belgilashni kiritsak, $\varphi(k)$ funksiya quyidagi munosabatlarni qanoatlantiradi:

$$\varphi(0)=0, \quad \varphi'(k)=\frac{ab}{(ak+b)^2}>0, \quad \varphi''(k)=-\frac{2a^2b}{(ak+b)^3}<0, \ .$$

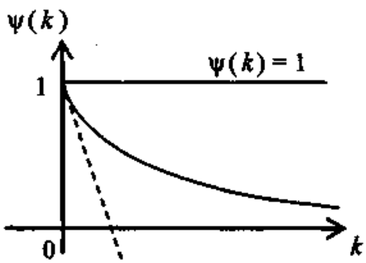
Bundan funksiya monoton o'suvchi va yuqoridan 1 bilan chegaralangai botiq ekani kelib chiqadi (6.1-chizma). Shu bilan birga, gorizontal to'g'r chiziq asimptota bo'ladi, chunki

$$\lim_{k\to+\infty}\varphi(k)=\lim_{k\to+\infty}\frac{ak}{ak+b}=\lim_{k\to+\infty}\frac{a}{a+b/k}=1; \quad \lim_{k\to+0}\frac{ak}{ak+b}=0.$$

Shu funksiyaning grafigi koordinata boshidan $\varphi'(0)=a/b$ ga teng bo'lgai burchak koeffitsiyenti bilan chiqadi (6.1-chizma).



6.1-chizma



6.2- chizma

ICHF ko'rinishini aniqlash uchun quyidagi

$$\frac{k\cdot f'(k)}{f(k)}=\frac{ak}{ak+b} \quad \text{yoki} \quad \frac{f'(k)}{f(k)}=\frac{a}{ak+b}$$

o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamani integrallaymiz:

$$\ln f'(k)=\ln(ak+b)+\ln c \quad \text{yoki} \quad f(k)=c(ak+b)\,, \quad s>0.$$

Ikki tomonini L ga ko'paytiramiz, natijada $F(L,K)=caK+cbL$ ko'rinishidagi *chiziqli* ICHF hosil bo'ladi.

2-hol. Endi mehnat bo'yicha elastiklik kasr-chiziqli funksiya bo'lsin, ya'ni

$$\frac{\partial F}{\partial L}\cdot\frac{L}{F}=1-\frac{k\cdot f'(k)}{f(k)}=\frac{ak}{ak+b}, \quad a>0, \quad b>0.$$

Bundan

$$\frac{k\,f'(k)}{f(k)}=\frac{b}{ak+b} \quad \text{yoki} \quad \frac{f'(k)}{f(k)}=\frac{b}{k\,(ak+b)}$$

ko'rinishdagi yana o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama hosil bo'ladi. $\psi(k)=\dfrac{b}{ak+b}$ deylik. Ravshanki, $0<\dfrac{b}{ak+b}<1$ va quyidagi munosabatlar o'rinli:

$$\psi(0)=1\,, \quad \psi'(k)=-\frac{ab}{(ak+b)^2}<0\,, \quad \psi''(k)=\frac{2a^2b}{(ak+b)^3}>0\,, \quad \forall k>0.$$

Demak, $\psi(k)$ funksiya monoton kamayuvchi va qavariq. Uning grafigi $\psi'(0)=-a/b$ burchak koeffitsiyent bilan $(1;0)$ nuqtadan chiqadi (6.2-chizma). Abssissa o'qi shu funksiya uchun asimptota bo'ladi, chunki

$$\lim_{k\to+\infty}\psi(k)=0\,, \quad \lim_{k\to+\infty}\frac{\psi(k)}{k}=\lim_{k\to+\infty}\frac{b}{k(ak+b)}=0$$

tengliklar o'rinli.

Endi yuqorida hosil bo'lgan differensial tenglamani integrallaymiz. Uni ushbu

$$\frac{f'(k)}{f(k)}=\frac{1}{k}-\frac{a}{ak+b}$$

ko'rinishda yozib olamiz. Undan

$$\ln f(k) = \ln(k) - \ln(ak+b) + \ln c, \quad c > 0 \text{ yoki } \quad f(k) = \frac{ck}{ak+b}$$

kelib chiqadi. Ikki tomonini L ga ko'paytiramiz:

$$F(L,K) = \frac{Lc \cdot K/L}{a \cdot K/L + b} = \frac{c \cdot KL}{aK + bL}.$$

Bu Solou ICHF funksiyasidir. Haqiqatan, elementar o'zgartirishlar ko'rsatadiki,

$$\frac{CKL}{aK+bL} = C\left[K^{-1}L^{-1}(aK+bL)\right]^{-1} = \frac{C}{a+b}\left[\frac{b}{a+b}K^{-1} + \frac{a}{a+b}L^{-1}\right]^{-1},$$

bunda

$$a_0 = \frac{C}{a+b} > 0, \; \frac{b}{a+b} = A > 0, \; \frac{a}{a+b} = 1 - A, \; A > 0, \; \rho = 1.$$

Shunday qilib, mehnat bo'yicha elastiklik kasr-chiziqli funksiya bo'lsa, mos ICHF Solou funksiyasidan iborat bo'ladi.

6.3-§. ICHF ning izokvantalari, izoklinallari va izokostalari

Agar ishlab chiqarish faktorlari (makroiqtisodiy erkli o'zgaruvchilar) K va L o'zgarishi bilan ishlab chiqarilgan (ishlab chiqariladigan) mahsulot miqdori (yoki milliy daromad) o'zgarmay qolsa, ya'ni $F(L, K) = c$, $c = const > 0$, biz bir parametrli egri chiziqlar oilasiga egamiz. Xususan, bu chiziqlar to'g'ri chiziqlar oilasi bo'lishi mumkin. Umuman, $F(L, K) = c$ chiziqlar oilasining har bir chizig'i $F(L, K)$ ICHF ning sath chiziqlari bo'ladi.

ICHF ning har bir sath chizig'i *izokvanta* deyiladi. Izokvantaning nuqtalarida ICHF ning qiymati o'zgarmaydi va $s = s_0$ bo'lganda $\forall(L,K)$ uchun $F(L,K) = c_0$ bo'ladi. Har bir $s = s_0$ uchun bitta izokvanta mos keladi, demak, izokvantalar cheksiz ko'p. Har bir izokvanta grafigi birinchi chorakda joylashgan.

Endi izokvantalarning differensial tenglamasini chiqaramiz. Uning uchun $F(L, K) = c$ ning ikki tomonini differensiallaymiz:

$$dF(L,K) = \frac{\partial F}{\partial L}dL + \frac{\partial F}{\partial K}dK = 0,$$

bundan

$$\frac{dK}{dL}=-\frac{\partial F(L,K)}{\partial L}\Big/\frac{\partial F(L,K)}{\partial K} \tag{6.2}$$

tenglik kelib chiqadi. (6.2) tenglik izokvantalarning *differensial* tenglamasidir. Misol sifatida Kobb-Duglas va Solou ICHF uchun differensial tenglamani yozamiz.

Agar $F(L,K)=a_0K^{\alpha}L^{1-\alpha}$ bo'lsa, ushbu

$$\frac{\partial F}{\partial L}=a_0(1-\alpha)K^{\alpha}L^{-\alpha}, \quad \frac{\partial F}{\partial K}=a_0\alpha K^{\alpha-1}L^{1-\alpha}$$

hosilaga ko'ra

$$\frac{dK}{dL}=-\frac{1-\alpha}{\alpha}\cdot\frac{K}{L} \tag{6.3}$$

differensial tenglama kelib chiqadi. (6.3) ning umumiy yechimi $a_0K^{\alpha}L^{1-\alpha}=c$ izokvantalarning tenglamasidan iborat. Haqiqatan, (6.3) ni

$$\frac{dK}{K}=-\frac{1-\alpha}{\alpha}\cdot\frac{dL}{L}$$

ko'rinishda yozamiz va integrallaymiz: $\ln K=\left(-(1-\alpha)/\alpha\right)\ln L+\ln c,\ c>0.$

Bundan $K=c\,L^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}}$ yoki $K\cdot L^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}=c$ kelib chiqadi. Ikki tomonini á darajaga ko'taramiz: $K^{\alpha}L^{1-\alpha}=c^{\alpha}$. Bu esa, izokvantalarning tenglamasidir.

Agar $F(L,K)=a_0\left[aK^{-\rho}+(1-a)L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}$ bo'lsa, ushbu

$$\frac{\partial F(L,K)}{\partial L}=a_0\left(-\frac{1}{\rho}\right)[\ldots]^{-\frac{1}{\rho}-1}\cdot(-\rho)\cdot(1-a)\cdot L^{-\rho-1},$$

$$\frac{\partial F(L,K)}{\partial K}=a_0\left(-\frac{1}{\rho}\right)[\ldots]^{-\frac{1}{\rho}-1}\cdot(-\rho)\cdot a\cdot K^{-\rho-1}$$

hosilalarni topamiz. Shunga ko'ra

$$\frac{\partial F}{\partial L}:\frac{\partial F}{\partial K}=\frac{1-a}{a}\cdot\frac{K^{\rho+1}}{L^{\rho+1}}.$$

Shuning uchun Solou ICHF uchun izokvantalar differensial tenglamasini

$$\frac{dK}{dL}=-\frac{1-a}{a}\cdot\frac{K^{\rho+1}}{L^{\rho+1}} \tag{6.4}$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu (6.4) o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamadir. Uni integrallasak, yana izokvantalarning tenglamasiga kelamiz.

Endi neoklassik ICHF izokvantalarining xossalarini bayon etamiz:

1^0. *Izokvantalar o'zaro kesishmaydi.*

Haqiqatan, har bir izokvanta (6.2) differensial tenglamaning integral to'g'ri chizig'idan iborat. (6.2) tenglamaning o'ng tomoni differensiallanuvchi (L va K bo'yicha), chunki faraz bo'yicha $F(L, K)$ funksiya L va K lar bo'yicha ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi. Shu sababli, Koshi teoremasiga ko'ra, R_+^2 sohaning har bir nuqtasidan yagona egri chiziq (izokvanta) o'tadi.

2^0. *Har bir izokvanta bo'ylab* $K=K(L)$ *funksiya kamayuvchi va qavariq.*

$K=K(L)$ funksiyaning kamayuvchiligi (6.2) tenglamaning o'zidan ko'rinib turibdi, chunki (6.2) ga ko'ra $\frac{dK(L)}{dL}<0$. Endi shu funksiyaning qavariqligini isbot etamiz. Buning uchun

$$\frac{d^2K(L)}{dL^2}>0$$

tengsizlik o'rinli ekanligini ko'rsatamiz.

Avval $\frac{dK}{dL}$ uchun k, $f(k)$ va $f'(k)$ orqali ifodani yozamiz:

$$\frac{dK}{dL}=-\frac{\partial F}{\partial L}\bigg/\frac{\partial F}{\partial K}=-\frac{f(k)-kf'(k)}{f'(k)}=-\frac{f(k)}{f'(k)}+k\,.$$

Endi $d^2K(L)/dL^2$ ni hisoblaymiz:

$$\frac{d^2K}{dL^2}=\frac{d}{dL}\left(-\frac{f(k)}{f'(k)}+k\right)=\left[-\frac{[f'(k)]^2-f(k)f''(k)}{[f'(k)]^2}+1\right]\frac{\partial k}{\partial L}=$$

$$=\frac{f(k)f''(k)}{[f'(k)]^2}\cdot\frac{\frac{dK}{dL}\cdot L-K}{L^2}=\frac{f(k)f''(k)}{[f'(k)]^2}\cdot\frac{\left(-\frac{f(k}{f'(k)}+k\right)\cdot L-K}{L^2}=$$

$$=\frac{f(k)f''(k)}{[f'(k)]^2}\cdot\frac{-\dfrac{f(k}{f''(k)}\cdot L+\dfrac{k}{L}\cdot L-K}{L^2}=-\frac{[f(k)]^2 f''(k)}{[f'(k)]^3}\cdot\frac{1}{L}.$$

Shunday qilib,

$$\frac{d^2K}{dL^2}=-\frac{[f(k)]^2 f''(k)}{[f'(k)]^3}\cdot\frac{1}{L}.$$

Oxirgi ifoda musbat, chunki $f'(k)>0$, $f''(k)<0$. Bu esa, izokvantalarning qavariqligini ko'rsatadi.

3^0. *Izokvantalar gorizontal va vertikal asimptotalarga ega. Ular abssissa (L) va ordinata (K) o'qlaridir.*

Buni isbotlash uchun quyidagi munosabatlardan foydalanamiz:

$$\lim_{L\to+0} k=\lim_{L\to+0}\frac{K}{L}=+\infty,\quad \lim_{L\to+\infty} k=0,\quad \lim_{L\to+0} f(k)=\lim_{L\to+0} f\left(\frac{K}{L}\right)=+\infty,$$

$$\lim_{L\to+0} f'(k)=\lim_{L\to+0} f'(K/L)=0,\quad \lim_{L\to+\infty} f'(K/L)=+\infty.$$

Ulardan quyidagi munosabatlar kelib chiqadi:

$$\lim_{L\to+0}\frac{dK}{dL}=\lim_{L\to+0}\left(-\frac{f(k)}{f'(k)}+k\right)=+\infty;$$

$$\lim_{L\to+\infty}\frac{dK}{dL}=\lim_{L\to+\infty}\left(-\frac{f(k)}{f'(k)}+k\right)=0.$$

Oxirgi ikki tenglik mazkur hossani isbot etadi (6.3-chizma).

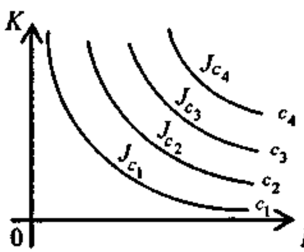
Keyingi mulohazalarda $F(L,K)=c$ izokvantani J_c deb belgilaymiz. Ravshanki, $c_1<c_2<...<c_n<...$ bo'lsa, $J_{c_1}<J_{c_2}<...\quad ...<J_{c_n}<...$ tengsizliklar o'rinli. Boshqacha aytganda, birinchi chorakda shimoli-sharq tomonga qarab yuqoriga harakat qilinsa, birin-ketin $J_{c_1}, J_{c_1},...,J_{c_n}...$ izokvantalarni kesib o'tadi va ICHF qiymati ortib boradi (6.3-chizma).

Endi izoklinal ta'rifini keltiramiz.

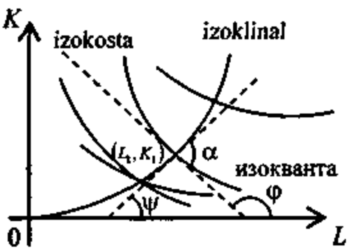
Ta'rif. *Izoklinal deb shunday chiziqqa aytiladiki, uning grafigi koordinata boshidan chiqadi va izokvantalar bilan kesishgan nuqtalarida*

Izokvantalarga o'tkazilgan urinmalar parallel bo'ladi. Shu parallel urinmalar izokostalar deyiladi (6.4-chizma).

Ma'lumki, izokvantalarning differensial tenglamasi osongina topiladi (6.2-ga qarang). Endi iqtisodiyot uchun muhim bo'lgan *izoklinal* differensial tenglamasi, shu bilan birga, izoklinal tenglamasini topish masalasi bilan shug'ullanaylik. Ta'rif bo'yicha izoklinal grafigi koordinata boshidan chiqadi va I chorakda joylashgan. Izoklinal chizig'idagi o'zgaruvchilarni L_1 va K_1 deylik. (L_1, K_1) nuqtadagi burchak koeffitsiyenti dK_1/dL_1 bo'ladi. Izokvantalar differensial tenglamasiga ko'ra kesishish nuqtasida ularning burchak koeffitsiyenti quyidagicha aniqlanadi:



6.3-chizma



6.4- chizma

$$\left(\frac{dK}{dL}\right)_{(L_1,K_1)} = -\frac{\partial F(L_1,K_1)}{\partial L} : \frac{\partial F(L_1,K_1)}{\partial K}.$$

Izoklinalga (L_1, K_1) da o'tkazilgan urinma L o'qi bilan ψ burchakni, izokvantaga shu nuqtada o'tkazilgan urinma L o'qi bilan φ burchak tashkil qilsin deylik (6.4-chizma). Unda $tg\alpha = tg(\psi - \varphi)$ bo'ladi. $tg\ \alpha = p$ deb belgilaymiz, bu holda

$$p = \frac{tg\psi - tg\varphi}{1 + tg\varphi \cdot tg\psi} = \frac{\left(\frac{dK}{dL}\right)_{(L_1,K_1)} - \frac{dK_1}{dL_1}}{1 + \left(\frac{dK}{dL}\right)_{(L_1,K_1)} \cdot \frac{dK_1}{dL_1}} \qquad (6.5)$$

(6.5) ni yana ushbu

$$p = \frac{\frac{\partial F(L_1,K_1)}{\partial L_1} + \frac{\partial F(L_1,K_1)}{\partial K_1} \cdot \frac{dK_1}{dL_1}}{\frac{\partial F(L_1,K_1)}{\partial L_1} \cdot \frac{dK_1}{dL_1} - \frac{\partial F(L_1,K_1)}{\partial K_1}} \qquad (6.6)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Ma'lumki, (L_1, K_1) nuqta $F(L, K) = C$ izokvantada yotadi. Demak, $F(L_1, K_1) = C$ bo'ladi. Endi (6.6) va shu tengliklardan ixtiyoriy o'zgarmas C ni chiqarib yuborsak, natijada izoklinal differensial tenglama kelib chiqadi. So'ngra L_1 ni L ga, K_1 ni K ga almashtirib qo'yish mumkin.

Izoklinallar ishlab chiqarishni uzoq vaqt davomida kengaytirib borish yo'lini ko'rsatadi. Agar (L_i, K_i) nuqta izokvantada yotsa, unga o'tkazilgan urinma (izokosta) tenglamasi

$$K - K_i = \left.\frac{dK}{dL}\right|_{(L_i, K_i)} \cdot (L - L_i)$$

ko'rinishda bo'ladi. Izokostalar parallel bo'lgani uchun ixtiyoriy izokvanta uchun $\left.\frac{dK}{dL}\right|_{(L_i, K_i)} = \gamma, \gamma = const$ bo'ladi. Shu sababli izokosta tenglamasi $K - \gamma L = K_i - \gamma L_i$ ko'rinishni oladi. Uni umumiyroq, $\omega_1 K + \omega_2 L = \omega_3$ ko'rinishda yozsak, $\omega_1 K + \omega_2 L$ miqdor ishlab chiqarish resurslari sarfini anglatadi. Bu esa izokostalar ishlab chiqarish xarajatlar o'zgarmas bo'lgan nuqtalar geometrik o'rnini anglatadi.

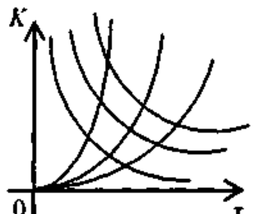
6.4-§. ICHF ning magistrallari. Chiziqlilashtirish usuli

Faraz etaylik, $Y = F(L, K)$ chiziqli va neoklassik statik ICHF bo'lsin. Eslatib o'tamizki, ICHF ning izokvantalari $F(L, K) = C$ tenglama bilan tavsiflanadigan chiziqlardan iborat. Izoklinal esa koordinata boshidan chiqadigan va barcha izokvantalarni o'zgarmas burchak ostida kesib o'tadigan chiziqdir. Izoklinallar soni cheksiz ko'p. Ular ichida *magistral* deb ataladigan va iqtisodiyotda muhim ahamiyatli chiziq bor.

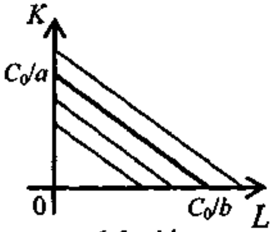
Minimal sarflar bilan uzoq muddatga ishlab chiqarishni kengaytirish sharoitida ishlab chiqariladigan mahsulot (milliy daromad) hajmini maksimallashtirish masalasi yechimini ifodalaydigan izoklinal chizig'i *magistral* deyiladi. Shunday qilib, cheksiz ko'p izoklinallar orasidan uzoq davrga iqtisodiy o'sishni ta'minlaydiganini ajratib olish lozim (6.5-chizma). Quyida bu masalani yechish uchun optimallik belgisi bayon etiladi. Chiziqsiz ICHF uchun esa *chiziqlilashtirish* usuli keltiriladi.

1. Chiziqli ICHF uchun magistrallarni qurish usulini bayon etamiz. Faraz etaylik, ushbu $F(L, K) = aK + bL$, $a>0$, $b>0$ chiziqli ICHF berilgan bo'lsin.

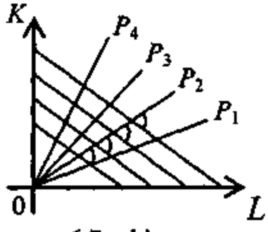
Unda mos izokvantalar $aK + bL = C$ tenglama bilan beriladi. Tenglamada C – *ixtiyoriy* musbat o'zgarmas son. Shuning uchun $aK + bL = C$ tenglama bilan parallel to'g'ri chiziqlar oilasi berilgan, aniqrog'i, shu to'g'ri chiziqlarning I chorakda joylashgan kesmalari ifodalangan. Masalan, $C = C_0$ da $aK + bL = C_0$ to'g'ri chiziq abssissa o'qidan C_0/b, ordinata o'qidan C_0/a kesmani kesadigan, $(C_0/b; 0)$ va $(C_0/a; 0)$ nuqtalarni tutashtiradigan kesmani tasviflaydi (6.6-chizma). Shu kesma izokvanta ekani ravshan.



6.5-chizma



6.6- chizma



6.7- chizma

Koordinata boshidan chiqib, I chorakda joylashgan nurlar cheksiz ko'p. Ular to'g'ri chiziq kesmalaridan iborat bo'lgan izokvantalarni albatta kesib o'tadi. (6.7-chizma).

Ushbu $K = \rho L$, $0 < \rho < +\infty$ ko'rinishda berilgan ixtiyoriy nur koordinata boshidan chiqadi, I chorakda joylashgan hamda barcha kesma – izokvantalarni o'zgarmas burchak ostida kesib o'tadi: $tg\alpha = \dfrac{ap + b}{bp - a}$.

Ravshanki, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Masala $K = \rho L$ ko'rinishdagi cheksiz ko'p izoklinallar (nurlar) ichidan *optimal* izoklinalni topishdan iborat. Quyida optimallik belgisi keltiriladi va masala yechiladi.

Quyidagi sistemani ko'ramiz:

$$\begin{cases} aK + bL = C_0, \\ K = pL. \end{cases}$$

Bu ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi.
Elementar hisoblashlar yordamida yechimni topamiz:

$$L_0 = \frac{C_0}{ap + b}, \quad K_0 = \frac{p \cdot C_0}{ap + b}.$$

Ushbu

$$Q=\left\{(L,K):\quad 0\le L\le\frac{C_0}{ap+b}\ ,\quad 0\le K\le\frac{p\cdot C_0}{ap+b}\right\}$$

to‘g‘ri to‘rtburchakni olamiz. Uning yuzi quyidagi formula bilan hisoblanadi (6.8-chizma):

$$S(p)=\frac{p\cdot C_0^2}{(ap+b)^2}>0,\quad 0<p<+\infty .$$

Shu $S(p)$ funksiya uchun ushbu

$$S(p)>0,\ 0<p<+\infty,\ \lim_{p\to+0}S(p)=\lim_{p\to+\infty}S(p)=0.$$

munosabatlar o‘rinli. Bu $S(p)$ funksiya $(0;+\infty)$ intervalda biror $p_0\in(0;+\infty)$ nuqtada o‘zining eng katta qiymatiga erishishini anglatadi. Shunday qilib, izoklinalning optimallik belgisi sifatida Q to‘g‘ri to‘rtburchak yuzini maksimallashtirish masalasini olish mumkin, ya’ni

$$S(p)=\frac{p\cdot C_0^2}{(ap+b)^2}\to max,\ 0<p<+\infty .$$

Shu masalaning yechimi p_0 optimal izoklinalni, ya’ni $K=\rho_0 L$ nurni aniqlaydi. Yuqoridagi mulohazalarga ko‘ra bu masala yechimi mavjud. Endi shu yechimni (ya’ni ρ_0 ni) topishga kirishamiz.

$S(p)$ funksiyaning hosilasini topib, nolga tenglashtiramiz:

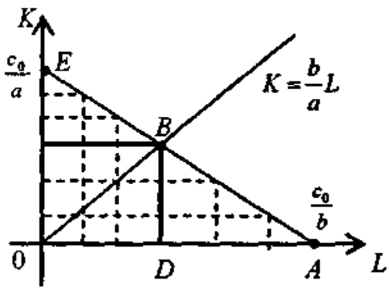
$$S'(p)=C_0^2\cdot\frac{1\cdot(ap+b)^2-p\cdot 2\cdot(ap+b)\cdot a}{(ap+b)^4}=C_0^2\frac{b-ap}{(ap+b)^3};$$

$$S'(p)=0;\ \ b-ap=0;\ \ p_0=b/a .$$

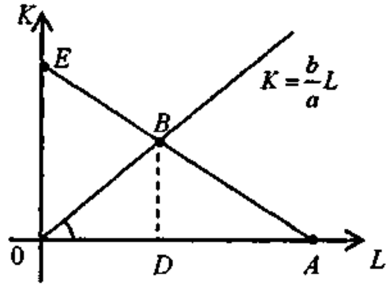
Shunday qilib, masalaning yechimi mavjud va $S(p)$ funksiya yagona statsionar nuqtaga ega. Demak, shu $p_0=b/a$ nuqtada $S(p)$ funksiya o‘zining eng katta qiymatiga erishadi. Shunday qilib, $K=(b/a)\times L$ magistral tenglamasidir (6.8-chizma).

Chiziqli ICHF izokvantalarining magistrali qiziq hossaga ega. OAB uchburchak teng yonli, ya’ni $OD=AD$ ($RD\perp OA$). Haqiqatan, B nuqta koordinatalarini topamiz. Buning uchun $aK+bL=C_0$, $K=(b/a)\cdot L$ tenglamalar sistemasini yechamiz. Ravshanki, $L_0=C_0/(2b)$, $K_0=C_0/(2a)$. A nuqtaning abssissasi esa C_0/b edi. Bundan $OD=OA$. Demak, $\Delta\,OAB$

tengyonli ekani kelib chiqadi. Shuning uchun $\angle BOD = \angle BAD$. Endi magistralni geometrik usul bilan topish mumkin bo'ladi. Buning uchun $\angle A$ burchakni o'lchaymiz va koordinata boshida shu burchakka teng burchak yasaymiz. Shu burchakning og'ma tomonini davom ettiramiz, u AE izokvantani B nuqtada kesib o'tadi. OB chiziq magistral bo'ladi (6.9-chizma).



6.8-chizma



6.9- chizma

Biz chiziqli ICHF uchun uning izokvantalariga mos magistralni qurish usulini bayon etdik. Ammo bu usulni chiziqsiz ICHF lar uchun bevosita qo'llab bo'lmaydi. Ba'zi hollarda chiziqlilashtirish usuli yordamida masalani yechish mumkin.

2. Endi $Y = a_0 K^{\alpha} L^{1-\alpha}$ Kobb–Duglas funksiyasi uchun magistralni topamiz va grafigini chizamiz. Bu funksiya chiziqsiz, uni chiziqlilashtirish mumkin. Chiziqlilashtirish usulining mohiyati quyidagidan iborat: Kobb–Duglas funksiyasi izokvantasi $a_0 K^{\alpha} L^{1-\alpha} = C_0$ tenglamasining ikki tomonini logarifmlaymiz:

$$\ln C_0 = \ln a_0 + \alpha \ln K + (1-\alpha)\ln L \quad \text{yoki} \quad \alpha \ln K + (1-\alpha)\ln L = \ln\frac{C_0}{a_0}.$$

Ushbu $K_1 = \ln K$, $L_1 = \ln L$ belgilashlarni kiritamiz. Natijada $\alpha K_1 + (1-\alpha)L_1 = \ln(C_0/a_0)$ munosabat hosil bo'ladi. U $\alpha K_1 + (1-\alpha)L_1$ ko'rinishdagi chiziqli ICHF ning izokvantalari tenglamasi.

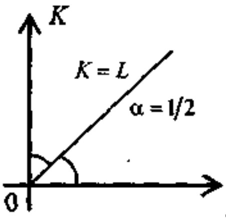
Shu L_1, K_1 o'zgaruvchilar bo'yicha magistral tenglamasini yozish mumkin: $K_1 = (1-\alpha)/\alpha \cdot L_1$. Eski o'zgaruvchilarga qaytamiz:

$\ln K = (1-\alpha)/\alpha \cdot \ln L$. Bundan $K = L^{(1-\alpha)/\alpha}$ magistral tenglamasi kelib chiqadi. Bunda α – parametr. Shu parametrning $0 < \alpha < 1$ dagi turli qiymatlariga qarab magistral turli chiziqlardan iborat bo'ladi:

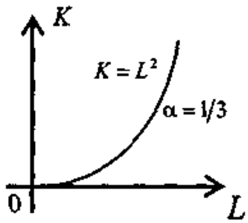
1) $0 < \alpha < 1/2$; 2) $\alpha = 1/2$; 3) $1/2 < \alpha < 1$.

Agar $\alpha = 1/2$ bo'lsa, $K = L$. Magistral I chorak bissektrisasidan iborat (6.10-chizma). Agar, masalan, $\alpha = 1/3$ bo'lsa, $K = L^2$ bo'ladi. Bu holda magistral $K = L^2$ parabolaning $L \geq 0$ bo'lgandagi yarim shoxchasi (6.11-chizma). Nihoyat, $\alpha = 2/3$ bo'lganda magistral tenglamasi $K = \sqrt{L}$ bo'ladi. Bu $K = L^2$ ga teskari bo'lgan $K = \sqrt{L}$ chizig'ining I chorakdagi qismi (6.12-chizma).

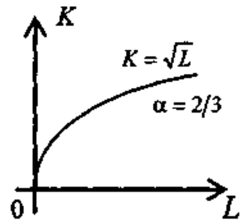
Misollardan chiqadigan natija shuki, ko'rilayotgan holda magistrallar grafiklari asosan uch turli bo'ladi (6.10-, 6.11-, 6.12 chizmalar).



6.10-chizma



6.11- chizma



6.12- chizma

3. Chiziqlilashtirish usuli bilan Solou ICHF uchun magistralni topish mumkin. Ma'lumki,

$$F(L,K) = a_0\left[aK^{-\rho} + (1-a)L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}, \quad a_0 > 0, \quad 0 < a < 1, \quad \rho > -1 .$$

Izokvantalar tenglamasini yozamiz:

$$a_0\left[aK^{-\rho} + (1-a)L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}} = C_0, \quad C_0 > 0 .$$

Bu tenglikning ikki tomonini $(-\rho)$ – darajaga ko'taramiz:

$$aK^{-\rho} + (1-a)L^{-\rho} = \left(\frac{C_0}{a_0}\right)^{-\rho} .$$

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$K^{-\rho} = K_1, \quad L^{-\rho} = L_1 .$$

Natijada yangi L_1, K_1 o'zgaruvchilarga nisbatan chiziqli ifodaga kelamiz:

$$aK_1 + (1-a)L_1 = \left(\frac{C_0}{a_0}\right)^{-\rho}.$$

Bu tenglama $aK_1 + (1-a)L_1$ chiziqli ICHF izokvantalari tenglamasidir. Endi magistral tenglamasini yozish mumkin:

$$K_1 = \frac{1-a}{a} \cdot L_1.$$

Eski o‘zgaruvchilarga qaytamiz: $K^{-\rho} = (1-a)/a \cdot L^{-\rho}$ yoki $K = [a/(1-a)]^{1/\rho} \cdot L$. Oxirgi munosabat koordinata boshidan chiqadigan, burchak koeffitsiyenti $[a/(1-a)]^{1/\rho} > 0$ ga teng bo‘lgan nurni anglatadi. Agar $a=1/2$ bo‘lsa, $K = L$ – I chorak bissektrisasi, $\rho = 1$ bo‘lsa, $K = [a/(1-a)] \cdot L$ – burchak koeffitsiyenti $a/(1-a)$ ga teng bo‘lgan nur bo‘ladi. Ixtiyoriy a, $0 < a < 1$ uchun $\rho \to +\infty$ da magistral $K = L$ holatga intiladi, $\rho \to -1$ da magistral $K = [(1-a)/a] \cdot L$ holatga intiladi.

Yuqorida Kobb-Duglas va Solou ICHF ga chiziqlilashtirish usulini qo‘llanib, mos magistral tenglamalarini topdik. Bu usulni ixtiyoriy chiziqlilashtirish mumkin bo‘lgan ICHFga qo‘llash mumkin.

6.5-§. ICHF ko‘rinishini makroiqtisodiy L, K va Y o‘zgaruvchilarning statistik qiymatlari bo‘yicha aniqlash

Agar ICHF ni biror ko‘rinishda Kobb va Duglaslardek (5-bobga qarang) izlamoqchi bo‘lsak, uning parametrlarini EKKU yordamida topish mumkin. Ammo makroiqtisodiy o‘zgaruvchilarning statistik qiymatlari bo‘yicha ICHF ko‘rinishini aniqlab olish muhim ahamiyat kasb etadi. Buning uchun qo‘shimcha kuzatuvlar olib borish yetarli ekanini ko‘rsatamiz.

Faraz etaylik, makroiqtisodiy L, K va Y o‘zgaruvchilarning quyidagi statistik qiymatlari berilgan bo‘lsin:

L	L_1	L_2	L_3	...	L_n
K	K_1	K_2	K_3	...	K_n
Y	Y_{11}	Y_{22}	Y_{33}	...	Y_{nn}

, $Y_{ii} = F(L_i, K_i)$.

Bu jadvalda $L_i < L_{i+1}$, $K_i < K_{i+1}$, $Y_{ii} < Y_{i+1\ i+1}$, $i = \overline{1, n-1}$. Biz neoklassik shartlarni qanoatlantiradigan ICHF ko‘rinishini aniqlash masalasini qo'yamiz. Yuqorida keltirilgan Y_{ii}, $i=\overline{1,n-1}$, qiymatlar masalani yechish uchun yetarli emas. Agar yana ba'zi qo'shimcha kuzatuvlar olib borilsa, masalani yechish mumkin bo'ladi. Buni ko'rsatish uchun $Y_{ij}=F(L_i,K_j), i\neq j$, qiymatlarni ham kuzatuvlar natijasida topib olamiz. Ravshanki, neoklassik shartlarga ko'ra quyidagi tengliklar o'rinli:

$$
\begin{array}{lll}
Y_{12}=F(L_1,K_2)=F(L_1,K_1)+\gamma_1, & \gamma_1>0, & K_1<K_2,\\
Y_{23}=F(L_2,K_3)=F(L_2,K_2)+\gamma_2, & \gamma_2>0, & K_2<K_3,\\
\ldots & \ldots & \ldots\\
Y_{n-1n}=F(L_{n-1},K_n)=F(L_{n-1},K_{n-1})+\gamma_{n-1}, & \gamma_{n-1}>0, & K_{n-1}<K_n;\\
Y_{21}=F(L_2,K_1)=F(L_1,K_1)+\delta_1, & \delta_1>0, & L_1<L_2,\\
Y_{32}=F(L_3,K_2)=F(L_2,K_2)+\delta_2, & \delta_2>0, & L_2<L_3,\\
\ldots & \ldots & \ldots\\
Y_{nn-1}=F(L_n,K_{n-1})=F(L_{n-1},K_{n-1})+\delta_n, & \delta_n>0, & L_{n-1}<L_n.
\end{array}
$$

Kuzatuvlar natijasida $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n-1}$ miqdorlar topilgan bo'ladi. Umuman, kuzatuvlar yordamida quyidagi matritsa elementlarini topib olish mumkin:

$$
A=\left(Y_{ij}\right)=\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \ldots & Y_{1n}\\ Y_{21} & Y_{22} & \ldots & Y_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ Y_{n1} & Y_{n2} & \ldots & Y_{nn}\end{pmatrix}.
$$

Shu ma'lumotlardan foydalanib, barcha asosiy iqtisodiy-matematik xarakteristikalarni hisoblab chiqish mumkin. Ular quyidagilardan iborat:

$$
k_i=\frac{K_i}{L_i},\quad y_i=\frac{F(L_i,K_i)}{L_i},\quad z_i=\frac{F(L_i,K_i)}{K_i},\quad v_i=\frac{\partial F(L_i,K_i)}{\partial L},
$$

$$
r_i=\frac{\partial F(L_i,K_i)}{\partial K};\quad \alpha_i=\frac{\partial F(L_i,K_i)}{\partial K}\frac{K_i}{F(L_i,K_i)},\quad \beta_i=\frac{\partial F(L_i,K_i)}{\partial L}\frac{L_i}{F(L_i,K_i)},
$$

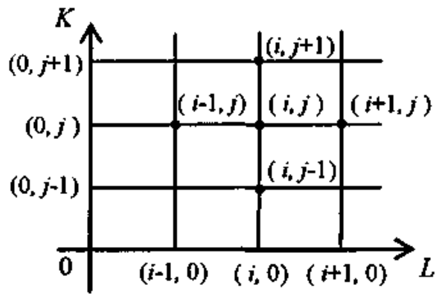
$$
S_i=\frac{\partial F(L_i,K_i)}{\partial L}:\frac{\partial F(L_i,K_i)}{\partial K};\quad \sigma_i=\left(\frac{dS_i}{dk_i}\cdot\frac{k_i}{S_i}\right)^{-1}.
$$

Bunda k_t, y_t, z_t lar uchun $i = 1, 2, \dots, n$; v_i, r_i, α_i, β_i va S_i lar uchun $i = 2, 3, \dots, n-1$; σ_i lar uchun esa, $i = 3, 4, \dots, n-2$.
Yuqoridagi formulalardan ko'rinadiki, hosilalar qatnashgan hollarda o'sha hosilalarni bizga ma'lum ma'lumotlar yordamida hisoblash lozim bo'ladi.

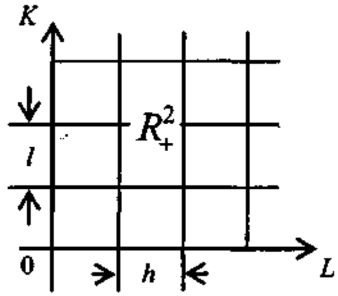
Jumladan, v_i va r_i miqdorlar ushbu

$$\begin{cases} v_i = \dfrac{\partial F(L_i, K_i)}{\partial L} \approx \dfrac{F(L_{i+1}, K_i) - F(L_{i-1}, K_i)}{L_{i+1} - L_{i-1}}, \\ r_i = \dfrac{\partial F(L_i, K_i)}{\partial K} \approx \dfrac{F(L_i, K_{i+1}) - F(L_i, K_{i-1})}{K_{i+1} - K_{i-1}}. \end{cases} \tag{6.5}$$

taqribiy formulalar orqali hisoblanadi. Bu (6.5) formulalar xususiy hosilalarni R_+^2 sohaning ichki (i, j) tugun nuqtalarida taqriban almashtirish uchun *ayirmali munosabatlar* deyiladi (6.13- va 6.14-chizmalar).



6.13-chizma



6.14- chizma

Chizmalarda (i, j) tugun nuqta $(L_i, K_j) = (ih,\ jl)$ ni anglatadi, unda h – L o'qi bo'yicha, l esa K o'qi bo'yicha qadamni anglatadi, (0; 0) tugun nuqta koordinata boshini bildiradi.

Shunday qilib, osongina hisoblanadigan

$$k_i,\ y_i,\ z_i,\ L_i/Y_i,\ K_i/Y_i,\ v_i \text{ ва } r_i$$

miqdorlar yordamida qolgan α_i, β_i, S_i va σ_i miqdorlarni ham hisoblash mumkin. Ularni 12 ta ustunga joylashtiramiz (6.1 jadvalga qarang). 7-ustundan boshlab, har bir ustunda joylashgan sonlarni sinchiklab kuzatamiz. Ba'zi ustundagi sonlar *deyarli* o'zgarmasligi yoki biror qonun bo'yicha o'zgarayotganligini payqab qolsak, unda 6.4-§ dagi mulohazalarga asoslanib, ICHF ning ko'rinishini aniqlab olish mumkin. U funksiya neoklassik ICHF bo'lishi kerakligi ravshan.

Yuqoridagi mulohazalarni shartli statistik ma'lumotlar uchun misolda amalga oshiramiz. Avvalo, K_i va L_i lar jadvalini yozamiz:

K	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
L	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5

Endi Y_{ij} lar uchun A matritsa elementlarini yozish kerak bo'ladi. Ammo masalani yechish uchun shu matritsaning bosh diagonal elementlari Y_{ii}, $i=\overline{1,6}$, shu diagonalga yopishgan undan yuqorida joylashgan diagonal elementlari $Y_{i\,i+1}$, $i=\overline{1,6-1}$ va undan pastda joylashgan diagonal elementlari $Y_{i+1\,i}$, $i=\overline{2,6}$ qiymatlari yetarli bo'ladi. Shu qiymatlarni keltiramiz:

$Y_{11}=1{,}414;\ Y_{22}=1{,}382;\ Y_{33}=1{,}352;\ Y_{44}=1{,}330;\ Y_{55}=1{,}309;\ Y_{66}=1{,}290;$
$Y_{12}=1{,}483;\ Y_{23}=1{,}587;\ Y_{34}=1{,}691;\ Y_{45}=1{,}794;\ Y_{56}=1{,}897;$
$Y_{21}=1{,}999;\ Y_{32}=1{,}556;\ Y_{43}=1{,}661;\ Y_{54}=1{,}766;\ Y_{65}=1{,}871.$

Endi hosilalarni hisoblaymiz ((6.5)-ga qarang):

$$\frac{\partial F(L_2,K_2)}{\partial L}\approx\frac{1{,}556-1{,}483}{0{,}2}=0{,}365;\quad \frac{\partial F(L_3,K_3)}{\partial L}\approx\frac{1{,}661-1{,}587}{0{,}2}=0{,}370;$$

$$\frac{\partial F(L_4,K_4)}{\partial L}\approx\frac{1{,}766-1{,}691}{0{,}2}=0{,}375;\quad \frac{\partial F(L_5,K_5)}{\partial L}\approx\frac{1{,}871-1{,}794}{0{,}2}=0{,}385.$$

$$\frac{\partial F(L_2,K_2)}{\partial K}\approx\frac{1{,}587-1{,}449}{0{,}2}=0{,}690;\quad \frac{\partial F(L_3,K_3)}{\partial K}\approx\frac{1{,}691-1{,}556}{0{,}2}=0{,}675.$$

$$\frac{\partial F(L_4,K_4)}{\partial K}\approx\frac{1{,}794-1{,}661}{0{,}2}=0{,}665;\quad \frac{\partial F(L_5,K_5)}{\partial K}\approx\frac{1{,}897-1{,}776}{0{,}2}=0{,}655.$$

Topilgan qiymatlardan foydalanib, α_i va β_i larni hisoblash mumkin:
$\alpha_2=0{,}449;\quad \alpha_3=0{,}449;\quad \alpha_4=0{,}500;\quad \alpha_5=0{,}500;$
$\beta_2=0{,}504;\quad \beta_3=0{,}501;\quad \beta_4=0{,}449;\quad \beta_5=0{,}504.$

Bundan tashqari, S_i, $i=2,3,4,5$ va σ_i, $i=3,4$, qiymatlarni ham hisoblaymiz:

$$S_2=\frac{v_2}{r_2}=\frac{0,365}{0,690}=0,529;\quad S_3=\frac{v_3}{r_3}=\frac{0,370}{0,675}=0,549;$$

$$S_4=\frac{v_4}{r_4}=\frac{0,375}{0,665}=0,563;\quad S_5=\frac{v_5}{r_5}=\frac{0,385}{0,655}=0,588;$$

$$\sigma_3=\left(\frac{dS_3}{dk}\cdot\frac{k_3}{S_3}\right)^{-1}=\left(\frac{S_4-S_2}{k_4-k_2}\cdot\frac{k_3}{S_3}\right)^{-1}=\left(\frac{0,563-0,529}{0,565-0,524}\cdot\frac{0,545}{0,549}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{0,034}{0,041}\cdot\frac{0,545}{0,549}\right)^{-1}=\left(\frac{18530}{22509}\right)^{-1}=1,215;$$

$$\sigma_4=\left(\frac{dS_4}{dk}\cdot\frac{k_4}{S_4}\right)^{-1}=\left(\frac{S_5-S_3}{k_5-k_3}\cdot\frac{k_4}{S_4}\right)^{-1}=\left(\frac{0,588-0,549}{0,583-0,545}\cdot\frac{0,565}{0,563}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{0,039}{0,038}\cdot\frac{0,565}{0,563}\right)^{-1}=\left(\frac{22035}{21394}\right)^{-1}=\frac{21394}{22035}=0,979.$$

Shunday qilib, barcha zarur miqdorlar hisoblandi. Natijalarni bitta jadvalga joylashtiramiz (6.1-jadvalga qarang).

6.1-jadvaldan ko'rinadiki, $\alpha_i\approx 0,5$; $\beta_i\approx 0,5$; $\alpha_i+\beta_i\approx 1$. Bundan makroiqtisodiy L, K va Y ko'rsatkichlarning jadvalda berilgan qiymatlariga Kobb-Duglas ICHF mos kelishi kelib chiqadi. Biz fondlar yoki mehnat resurslari bo'yicha elastiklik o'zgarmas bo'lgan holda mos ICHF Kobb-Duglas funksiyasi ekaniga asoslandik. Demak, ICHF ni $Y=a_0K^{\alpha}L^{\beta}$, $a_0>0$, $\alpha>0$, $\beta>0$, $\alpha+\beta=1$ ko'rinishda izlash kerak, degan xulosaga kelamiz.

Agar 6.1-jadvalga sinchiklab qaralsa, shartli ma'lumotlar (1,2,3-ustunlar) $Y=\sqrt{KL}$ ko'rinishdagi Kobb-Duglas ICHF qiymatlaridan iborat ekaniga ishonch hosil qilamiz.. Eng kichik kvadratlar usulini qo'llash natijasida $a_0\approx 1$, $\alpha=\beta\approx 1/2$ qiymatlarga ega bo'lamiz. Hisob-kitoblarni olib borishni talabaning o'ziga topshiramiz.

6.1-jadval

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	K_i	L_i	Y_i	$k_i=\frac{K_i}{L_i}$	$y_i=\frac{Y_i}{L_i}$	$z_i=\frac{Y_i}{K_i}$	$v_i=\frac{\partial F_i}{\partial L}$	$r_i=\frac{\partial F_i}{\partial K}$	$\alpha_i=\frac{\partial F_i}{\partial K}\frac{K_i}{F_i}$	$\beta_i=\frac{\partial F_i}{\partial L}\frac{L_i}{F_i}$	S_i	σ_i
1	1,0	2,0	1,414	0,500	0,707	1,414						
2	1,1	2,1	1,520	0,524	0,724	1,382	0,365	0,690	0,499	0,504	0,529	
3	1,2	2,2	1,625	0,545	0,739	1,352	0,370	0,675	0,499	0,501	0,545	1,265
4	1,3	2,3	1,729	0,565	0,752	1,330	0,375	0,665	0,500	0,499	0,563	0,979
5	1,4	2,4	1,833	0,583	0,764	1,309	0,385	0,655	0,500	0,504	0,588	
6	1,5	2,5	1,936	0,600	0,774	1,290						

6-bobga oid masalalar

I. Ba'zi iqtisodiy-matematik xarakteristikalarning statistik qiymatlari bo'yicha ICHF ko'rinishi aniqlansin:

1.

k	1	2	3	4	5	6
$f'(k)$	1,01	1,02	0,99	0,98	1,03	0,97

$$f'(k) = const$$

2.

k	1	2	3	4	5	6
$f(k) - kf'(k)$	2	2,01	2,02	1,99	1,98	1,97

$$f(k) - k\,f'(k) = const$$

3.

k	1	2	3	4	5	6
$\frac{f(k) - kf'(k)}{f'(k)}$	2	2,01	2,02	1,99	1,98	1,97

$$\frac{f(k) - kf'(k)}{f'(k)} = const$$

4.

k	1	2	3	4	5	6
$\frac{kf'(k)}{f(k)}$	2	2,01	2,02	1,99	1,98	1,97

$$\frac{k\,f'(k)}{f(k)} = const$$

II. Quyidagi ICHF uchun izokvantalarning va ularning differensial tenglamasi yozilsin. Bundan tashqari, shu ICHF larning magistrallari topilsin va grafigi chizilsin:

A. 1. $F(L,K) = \sqrt{KL}$. 4. $F(L,K) = \sqrt[4]{K^3L}$.

2. $F(L,K) = \sqrt[3]{KL^2}$. 5. $F(L,K) = \sqrt[4]{KL^3}$.

3. $F(L,K) = \sqrt[3]{K^2L}$. 6. $F(L,K) = \sqrt[5]{KL^4}$.

B. 1. $F(L,K) = \frac{2K}{K+L}$. 2. $F(L,K) = \frac{\sqrt{2}\,KL}{\sqrt{K^2+L^2}}$.

3. $F(L,K)=\frac{1}{4}\left(\sqrt{K}+\sqrt{L}\right)^2$.

4. $F(L,K)=\frac{\sqrt[3]{4}\,KL}{\sqrt[3]{\left(K^{3/2}+L^{3/2}\right)^2}}$.

5. $F(L,K)=\frac{4KL}{\left(\sqrt{K}+\sqrt{L}\right)^2}$.

6. $F(L,K)=\frac{2\sqrt[3]{2}\,KL}{\sqrt[3]{\left(K^{3/4}+L^{3/4}\right)^4}}$

III. Quyidagi statistik ma'lumotlarga asoslanib, asosiy – iqtisodiy-matematik xarakteristikalarni hisoblang va ICHF ko'rinishini aniqlang:

K	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
L	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
Y	1,414	1,520	1,625	1,729	1,853	1,936

6-bobga oid nazorat savollari

1. Agar limit unumdorlik (fondlar, mehnat bo'yicha) o'zgarmas bo'lsa, mos ICHF qanday ko'rinishda bo'ladi?
2. Almashishning limit normasi o'zgarmas bo'lsa, ICHF qanday ko'rinishda bo'ladi?
3. Almashishning elastikligi o'zgarmas bo'lganda, ICHF ko'rinishini aytib bering.
4. Fondlar va mehnat bo'yicha elastiklik o'zgarmas bo'lsa, ICHF qanday ko'rinishda bo'ladi?
5. Fondlar va mehnat bo'yicha elastiklik kasr-chiziqli funksiya bo'lganda mos ICHF qanday ko'rinishda bo'ladi?
6. Izokvanta, izoklinal va izokvetalar ta'rifini bering.
7. Izokvantalar qanday xossalarga ega?
8. ICHF magistrali ta'rifini bering.
9. ICHF ning magistralini topish usullarini tushuntirib bering.
10. Chiziqlilashtirish usuli nima?
11. Kobb-Duglas va Solou ICHF ning magistrallarini toping.
12. Ikki faktorli ICHF ning birinchi tartibli xususiy hosilalarini taqribiy hisoblash formulalarini yozib bering.
13. Asosiy iqtisodiy-matematik xarakteristikalarning qiymatlariga qarab ICHF ko'rinishini bilish mumkinligini tushuntirib bering.

7-bob. ICHF UCHUN OPTIMALLASHTIRISH MASALALARI

7.1-§. Asosiy tushunchalar va masalalarning qo'yilishi

Mazkur bobda ishlab chiqarishni optimallashtirish masalalarini ko'ramiz, bunda ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi ikki faktorli neoklassik ICHF $Y = F(L, K)$ bilan ifodalanadi. Ba'zi tushunchalar ta'rifini keltiramiz.

Firmaning daromadi R deb aniq vaqt oralig'ida (biror yil yoki bir necha yillarda) ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi $F(L, K)$ ni uning bir birlik narhi p_0 ga ko'paytmasi $p_0 F(L, K)$ ga aytiladi.

Firmaning umumiy harajati hajmi C deb aniq vaqt oralig'ida qilingan barcha xarajatlarga aytiladi, ya'ni $C=p_1K+p_2L$, bunda K va L – firma tomonidan xarajat qilinadigan (foydalanilgan) ishlab chiqarish resurslari hajmi, p_1 va p_2 lar esa mos ravishda K va L resurslarning bozor narhi.

Firmaning aniq vaqt oralig'ida qilgan daromadi R bilan uning sarflari (xarajatlari) C ayirmasi firma foydasi deyiladi va $PR = R - C$ yoki

$$\Phi(L,K) = p_0F(L,K) - (p_1K + p_2L)$$

kabi yoziladi.

Agar firma *mukammal (sof)* raqobat sharoitida faoliyat ko'rsatayotgan bo'lsa, unda shu firma bozor narxlari p_0, p_1, p_2 ga ta'sir eta olmaydi. Boshqa sharoitda narxlarni bozor aniqlamaydi. Istalgan holda firmaning vazifasi (asosiy maqsadi) o'z foydasini maksimallashtirishdan iborat. Bu masala

$$\Phi(L,K) \to \max, \quad L \geq 0, \quad K \geq 0, \tag{7.1}$$

ko'rinishda yoziladi. (7.1) masala chiziqsiz dasturlashning shartsiz maksimum masalasidir.

Resurslarning sarf etiladigan hajmi chegaralangan bo'lsa, u $g(L, K) \leq b$ tengsizlik bilan beriladi. Bu holda foydani maksimallashtirish masalasi ushbu

$$\Phi(L,K) \to \max, \quad g(L,K) \leq b, \quad L \geq 0, \quad K \geq 0 \tag{7.2}$$

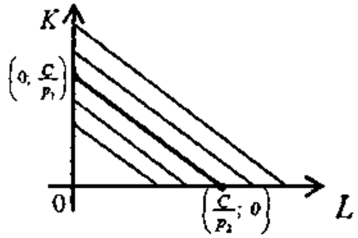
ko'rinishda yoziladi.

Bu (7.2) masala chiziqsiz dasturlashning shartlari tengsizliklar bilan berilgan shartli maksimum masalasidan iborat.

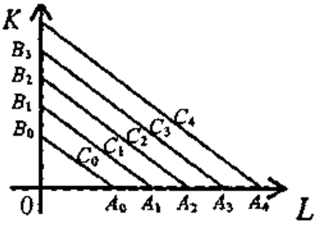
Ishlab chiqarish xarajatlari funksiyasi $p_1K + p_2L$ ning sath chiziqlari $p_1K + p_2L = C$ kabi yoziladi va *izokostalar* deb ataladi. Agar masala $p_1K + p_2L \to \min$ kabi qo'yilgan bo'lsa, $p_1K + p_2L = C$ chiziqlar bir vaqtda ham izokosta, ham izokvanta vazifasini bajaradi. Izokosta $p_1K+p_2L=C$ to'g'ri chiziqning I chorakda joylashgan kesmasidan iborat, uning uchlari

$\left(0;\ \frac{C}{p_1}\right)$, $\left(\frac{C}{p_2};\ 0\right)$ (7.1-chizma).

O'zgarmas C ning C_0, C_1, C_2, ... qiymatlariga mos ravishda A_0B_0, A_1B_1, A_2B_2, ...izokostalar to'g'ri keladi. Buning har bir A_iB_i izokostaga nisbatan «shimoli-sharqda» joylashgan $A_{i+1}B_{i+1}$ nuqtasiga A_iB_i ga qaraganda ortiq xarajat mos keladi, ya'ni $C_0 < C_1 < C_2 < \ldots$ (7.1a-chizma).



7.1-chizma



7.1a- chizma

Iqtisodiyotda ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi berilgan holda umumiy xarajatlarni minimallashtirish masalasini yechishga to'g'ri keladi. Bu masala quyidagicha yoziladi:

$$\begin{cases} G(L,K)=p_1K+p_2L\to\min, \\ F(L,K)=Q. \end{cases} \qquad (7.3)$$

(7.3) masala chiziqsiz dasturlashning shartlari tengliklar bilan berilgan shartli minimum masalasidir. Uni umumiy holda Lagranjning ko'paytuvchilari usuli bilan yechiladi. Sodda hollarda u chiqarish usuli bilan ham yechilishi mumkin. Albatta, (7.3) masalani yechishning taqribiy usullari ham mavjud. Ulardan masalaning o'lchovlari katta bo'lganda foydalaniladi. Biz ularga to'xtalmaymiz.

7.2-§. Foydani maksimallashtirish masalasi

Bu masalani Kobb-Duglas va Solou ICHF uchun yechamiz.

1. (7.1) masalada ICHF sifatida Kobb-Duglas: $Y=a_0K^{\alpha}L^{1-\alpha}$ funksiyasi olingan bo'lsin. Unda masala ushbu

$$\Phi(L,K)=p_0a_0K^{\alpha}L^{1-\alpha}-(p_1K+p_2L)\to\max, \quad L\ge 0, \quad K\ge 0 \quad (7.4)$$

ko'rinishda yoziladi. Masalani yechish uchun avval birinchi tartibli xususiy hosilalarni hisoblab, nolga tenglashtiramiz:

$$p_0 a_0 (1-\alpha) K^{\alpha} L^{-\alpha} - p_2 = 0, \quad p_0 a_0 \alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} - p_1 = 0$$

yoki

$$p_0 a_0 (1-\alpha) \cdot (K/L)^{\alpha} = p_2, \qquad p_0 a_0 \alpha (K/L)^{\alpha-1} = p_1 .$$

Bu tengliklardan K/L uchun ikki turli ifoda kelib chiqadi;

$$\frac{K}{L} = \left(\frac{p_2}{p_0 a_0 (1-\alpha)} \right)^{1/\alpha} \quad \text{va} \quad \frac{K}{L} = \left(\frac{p_1}{p_0 a_0 \alpha} \right)^{1/(\alpha-1)} . \qquad (7.5)$$

Ularni tenglashtirsak, soddalashtirilgandan keyin quyidagi tenglik hosil bo'ladi:

$$p_1^{\alpha} \cdot p_2^{1-\alpha} = p_0 \cdot a_0 \cdot \alpha^{\alpha} \cdot (1-\alpha)^{1-\alpha} . \qquad (7.6)$$

Avvalo (7.6) tenglik p_0, p_1, p_2 narxlar orasidagi bog'lanishni ifodalaydi. (7.5) munosabatlar esa, resurslarning optimal taqsimoti (7.5) tenglama bilan tavsiflanadigan nurda yotishini bildiradi. Ko'rinadiki, (7.4) masala uchun cheksiz ko'p statsionar nuqtalar mavjud va ular o'sha nurda yotadi. Endi ikkinchi tartibli hosilalarni hisoblaymiz:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial L^2} = p_0 a_0 (1-\alpha)(-\alpha) K^{\alpha} L^{-\alpha-1}; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial K^2} = p_0 a_0 \alpha (\alpha-1) K^{\alpha-2} L^{1-\alpha};$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial L \partial K} = p_0 a_0 (1-\alpha) \alpha K^{\alpha-1} L^{-\alpha} .$$

Kvadratik forma tuzamiz:

$$Q(y_1, y_2) = (y_1, y_2) \cdot \begin{pmatrix} p_0 a_0 (1-\alpha)(-\alpha) K^{\alpha} L^{-\alpha-1} & p_0 a_0 (1-\alpha) \alpha K^{\alpha-1} L^{-\alpha} \\ p_0 a_0 (1-\alpha) \alpha K^{\alpha-1} L^{-\alpha} & p_0 a_0 (\alpha-1) \alpha K^{\alpha-2} L^{1-\alpha} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Sodda hisoblashlar natijasida quyidagi kvadratik forma hosil bo'ladi:

$$Q(y_1, y_2) = -p_0 a_0 (1-\alpha) K^{\alpha-2} L^{-\alpha} \left(\frac{K^2}{L} y_1^2 - 2K \cdot y_1 y_2 + L \cdot y_2^2 \right).$$

Bu kvadratik forma uchun $Q(y_1, y_2) \le 0$ tengsizlik bajariladi. $Q(L, K)$ funksiya botiq ekanini ko'rsatish qiyin emas (bu $Q(L, K)$ ning botiqligidan kelib chiqadi). Shu sababli (7.5) nurdagi har bir nuqta uchun $Q(L, K)$ funksiya o'zining eng katta qiymatiga erishadi.

Agar firma K resursni (yoki L resursni) faqat $\overline{K}$ hajmda sarf qilish maqsadga muvofiq bo'lsa, $\overline{L}$ ni ($\overline{K}$ ni) (7.5) dan topamiz. Agar $\alpha = 1/$ bo'lsa, (7.6) munosabat $p_0 a_0 = 2 \cdot \sqrt{p_1 p_2}$ ko'rinishni oladi.

2. Endi (7.1) masalani Solou ICHF uchun yechamiz. Masala ushbu

$$\Phi(L,K) = p_0 a_0 \left[aK^{\rho} + (1-a)L^{1-\rho} \right]^{\frac{1}{\rho}} - (p_1 K + p_2 L) \to \max, \quad L \geq 0, \quad K \geq 0$$

ko'rinishda yoziladi. Masalani yechish uchun avvalgi holdagidek mulohaza, hisob-kitoblarni bajaramiz. Natijada K va L faktorlar orasida ushbu

$$K = \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{a}{1-a} L$$

munosabatni topamiz. Agar $L = L_0$ bo'lsa, F(L, K) funksiya $\left(L_0, \ \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{a}{1-a} L_0 \right)$ nuqtada o'zining eng katta qiymatiga erishadi.

7.3-§. Umumiy xarajatlarni minimallashtirish masalasi

1. Endi (7.3) masalani Kobb-Duglas ICHF uchun yechamiz. Bu holda masala quyidagi ko'rinishni oladi:

$$G(L,K) = p_1 K + p_2 L \to \min, \quad a_0 K^{\alpha} L^{1-\alpha} = Q. \tag{7.7}$$

Masala sodda bo'lgani uchun uni avval chiqarish usuli bilan yechamiz. Uning uchun K ni L orqali ifodalaymiz:

$$K = \left(\frac{Q}{a_0} \right)^{1/\alpha} \cdot L^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}.$$

Bunda $G(L, K)$ funksiya ushbu

$$G_*(L) = p_1 \cdot \left(\frac{Q}{a_0} \right)^{1/\alpha} \cdot L^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + p_2 L$$

ko'rinishga keladi. Shu funksiya $0 < L < +\infty$ intervalda o'zining eng kichik qiymatiga erishadi. Sababi, avvalo funksiyaning eng kichik qiymati mavjud ekani quyidagi munosabatlardan kelib chiqadi:

$$\lim_{L\to+0} G_*(L) = \lim_{L\to+\infty} G_*(L) = +\infty \quad \text{va} \quad G_*(L) > 0, \quad \forall L \in (0; +\infty).$$

Endi $G_*(L)$ funksiya eng kichik qiymatga erishadigan nuqtani topamiz. Buning uchun $G_*'(L) = 0$ tenglamani yechamiz:

$$G_*'(L) = p_1 \cdot \left(\frac{Q}{a_0}\right)^{1/\alpha} \cdot \frac{\alpha-1}{\alpha} \cdot L^{-\frac{1}{\alpha}} + p_2; \qquad p_1 \cdot \left(\frac{Q}{a_0}\right)^{1/\alpha} \cdot \frac{\alpha-1}{\alpha} \cdot L^{-\frac{1}{\alpha}} + p_2 = 0.$$

Bundan statsionar nuqtani topamiz:

$$L_0 = \left(\frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\alpha} \cdot \frac{Q}{a_0}.$$

Statsionar nuqta yagona bo‘lgani uchun $G_*(L)$ funksiyaning eng kichik qiymati mavjudligidan shu L_0 nuqta izlangan nuqtadir. L_0 dan foydalanib, K_0 ni ham topib qo‘yamiz:

$$K_0 = \frac{Q}{a_0} \cdot \left(\frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}.$$

Shunday qilib, $a_0 K^{\alpha} L^{1-\alpha} = Q$ bo‘lganda xarajatlar funksiyasi $G(L, K) = p_1 K + p_2 L$ topilgan (L_0, K_0) nuqtada o‘zining eng kichik qiymatiga erishadi.

(7.3) masalani Lagranjning ko‘paytuvchilar usuli bilan yechamiz. Lagranj funksiyasini tuzamiz:

$$\Phi(L,K) = p_1 K + p_2 L + \lambda \cdot \left(a_0 K^{\alpha} L^{1-\alpha} - Q\right).$$

Xususiy hosilalarni hisoblaymiz:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial L} = p_2 + \lambda \cdot a_0 K^{\alpha} (1-\alpha) \cdot L^{-\alpha}; \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial K} = p_1 + \lambda \cdot a_0 \alpha \cdot K^{\alpha-1} L^{1-\alpha}.$$

Tenglamalar sistemasini tuzamiz: $\frac{\partial\Phi}{\partial L} = 0$, $\frac{\partial\Phi}{\partial K} = 0$ yoki

$$\begin{cases} p_2 + \lambda \cdot a_0 (1-\alpha) \cdot K^{\alpha} L^{-\alpha} = 0, \\ p_1 + \lambda \cdot a_0 \alpha \cdot K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} = 0, \\ a_0 \cdot K^{\alpha} L^{1-\alpha} - Q = 0. \end{cases}$$

Sistemaning birinchi ikki tenglamasidan

$$\frac{K}{L}=\frac{p_2}{1-\alpha}\cdot\frac{\alpha}{p_1}$$

tenglik kelib chiqadi. Sistemaning oxirgi tenglamasini

$$a_0\cdot(K/L)^{\alpha}L=Q$$

ko'rinishda yozsak, K/L uchun topilgan ifodadan foydalanib, L_0 ni topish mumkin:

$$L_0=\frac{Q}{a_0}\cdot\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\cdot\frac{p_1}{p_2}\right)^{\alpha}.$$

Bu chiqarish usuli bilan topilgan qiymat bilan ustma-ust tushadi. Shuningdek, K_0 ni ham topsak, avvalgi qiymatiga teng bo'ladi. Shunday qilib, (7.3) masala uchun yagona shartli-statsionar nuqta topildi. Lagranj funksiyasi qavariq bo'lgani uchun shu nuqtada F(L, K) funksiya eng kichik qiymatga erishadi.

7.4-§. Iqtisodiyotda optimallashtirish masalalarini yechishning burchak koeffitsiyentlarni tenglashtirish usuli

Mazkur bobning avvalgi paragraflarida optimallashtirish masalalarini yechishga klassik bo'lib qolgan chiqarish va Lagranj ko'paytuvchilari usuli qo'llandi. Ammo bu usullar turli noqulayliklarga ega. Jumladan, masalani Lagranj ko'paytuvchilari usuli bilan yechish uchun avval birinchi tartibli xususiy hosilalar hisoblanadi va ularni nolga tenglashtirib, hosil bo'lgan tenglamalar sistemasini yechiladi. Natijada statsionar nuqtalar (agar ular mavjud bo'lsa) topiladi. So'ngra ikkinchi tartibli hosilalar hisoblanadi va statsionar nuqtalarda qiymatlari topiladi. Mos matritsa tuzilib, tegishli kvadratik forma tuziladi. Qo'yilgan masalaning yechimi kvadratik formaning musbat yoki manfiy aniqlanganligiga bog'liq bo'ladi.

Iqtisodiyotda masalalarning qo'yilishida ICHF ishtirok etadi. Agar ICHF ning xossalaridan foydalanilsa, optimallashtirish masalalarini yechishda qulay bo'lgan usulni tavsiya etish mumkin. Uni *burchak koeffitsiyentlarni tenglashtirish* usuli deb yuritamiz. Mazkur usul ikkinchi tartibli hosilalardan foydalanmaydi, faqat funksiyalarning *qavariqligi* va *botiqligidan* foydalanadi.

1. Chiziqli budjet chegarasi berilganda ishlab chiqarilgan (chiqariladigan) mahsulot hajmini maksimallashtirish masalasini ko'ramiz.

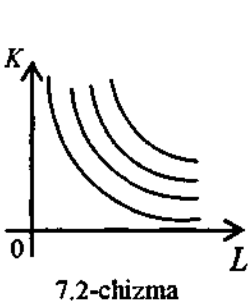
Masala quyidagicha qo'yiladi:

$$\begin{cases} F(L,K) \to \max, \\ p_1K + p_2L = I, \end{cases} \qquad (7.8)$$

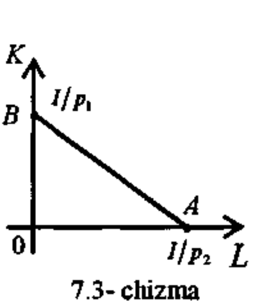
bunda $F(L, K)$ – neoklassik IChF, p_1 – asosiy fondlar birligi narhi, p_2 – mehnat resurslari birligi narhi, I – xarajatlarning berilgan hajmi. (7.8) ning ikkinchi tenglamasini chiziqli *budjet chegarasi* deymiz.

Demak, masala asosiy fondlar K va mehnat resurslari L orasida shunday taqsimotni topishdan iboratki, ular $p_1K + p_2L = I$ ni qanoatlantirsin va $F(L, K)$ IChF ga maksimal qiymat bersin.

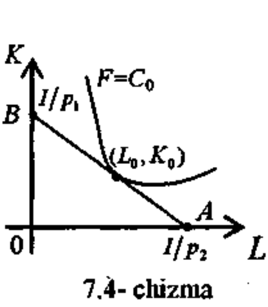
(7.8) masalani yechish uchun avval ICHF ning izokvantalarini chizamiz. Ular, ma'lumki, qavariq egri chiziqlardan iborat va gorizontal hamda vertikal asimptotalarga ega (7.2-chizma). Ushbu $p_1K + p_2L = I$ tenglama esa burchak koeffitsiyenti $k_2 = -p_2/p_1$ ga teng bo'lgan to'g'ri chiziqni tavsiflaydi. $L \geq 0$, $K \geq 0$ ga ko'ra biz shu to'g'ri chiziqning I chorakda joylashgan kesmasiga egamiz (7.3 chizma). k_1 deb izokvanta urinmasining burchak koeffitsiyentini belgilaymiz.



7.2-chizma



7.3- chizma



7.4- chizma

Izokvantalar ichida biror $C = C_0$ da AB kesmaga urinadigani mavjud. Urinish nuqtasi (L_0, K_0) masalaning yechimi bo'ladi (7.4-chizma). Urinish nuqtasida $F(L, K) = C$ izokvanta urinmasining va $p_1K + p_2L = I$ to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentlari o'zaro teng, ya'ni $k_1 = k_2$. Masalani yechish uchun

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial F(L,K)}{\partial L}\Big/\dfrac{\partial F(L,K)}{\partial K}=-\dfrac{p_2}{p_1}, \\ p_1K+p_2L=I \end{cases} \tag{7.9}$$

sistemani yechish yetarli.

Misol. Ushbu $\sqrt{KL}\to\max$, $2K+3L=6$ masala berilgan bo'lsin. Bunda $F(L,K)=\sqrt{KL}$ (Kobb-Duglas ICHF). k_1 va k_2 larni topamiz:

$$k_1=-\frac{\sqrt{K}}{2\sqrt{L}}\Big/\frac{\sqrt{L}}{2\sqrt{K}}=-\frac{K}{L}; \qquad k_2=-\frac{3}{2}.$$

Tenglamalar sistemasini yozamiz: $-K/L=-3/2$, $2K+3L=6$. Undan $L_0=1$, $K_0=3/2$ yechimni topamiz.

2. Chiziqsiz budjet chegarasi berilganda ishlab chiqarilgan (chiqariladigan) mahsulot hajmini maksimallashtirish masalasini ko'rib chiqamiz. Masala quyidagicha beriladi:

$$\begin{cases} F(L,K)\to\max, \\ p_1\varphi(K)+p_2g(L)=I, \end{cases} \tag{7.10}$$

bunda $\varphi(K)$ va $g(L)$ – quyidagi shartlarni qanoatlantiradigan chiziqsiz funksiyalar:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(0)=0,\ \ \varphi(K)>0,\ \ \varphi'(K)>0,\ \ \varphi''(K)>0 \quad \forall K>0 \\ &g(0)=0,\ \ g(L)>0,\ \ g'(L)>0,\ \ g''(L)>0 \quad \forall L>0 \end{aligned}\right\} \tag{7.11}$$

Quyidagi $\Phi(L,K)=p_1\varphi(K)+p_2g(L)-I=0$ belgilashni kiritamiz. Shu $\Phi(L,K)=0$ chiziq botiq, uning grafigi I chorakda joylashgan. $\Phi(L,K)=0$ chiziqning botiqligini isbotlaymiz. (7.10) ning ikkinchi tenglamasini differensiallaymiz:

$$p_1\varphi'(K)\frac{dK}{dL}+p_2g'(L)=0.$$

Bundan

$$\frac{dK}{dL}=-\frac{p_2g'(L)}{p_1\varphi'(K)}<0$$

tengsizlik kelib chiqadi, demak, $K = K(L)$ funksiya kamayuvchi. Endi ikkinchi tartibli hosilani hisoblaymiz:

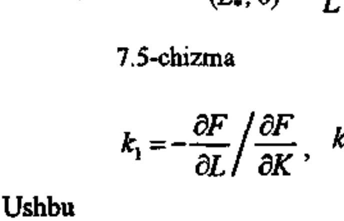
$$\frac{d^2K}{dL^2} = -\frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{g''(L)\cdot\varphi'(K) - g'(L)\cdot\varphi''(K)\cdot\dfrac{dK}{dL}}{[\varphi'(K)]^2}.$$

O'ng tomondagi kasr surati $dK / dL < 0$ bo'lgani uchun musbat. Bundan

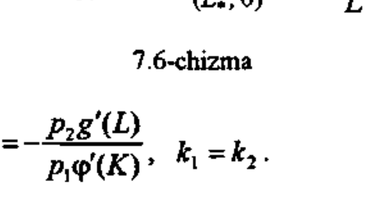
$\dfrac{d^2K}{dL^2} < 0$ ekani kelib chiqadi. Bu esa, $\Phi(L,K) = 0$ chiziq botiqligini anglatadi.

$\Phi(L,K) = 0$ yoki, baribir, $p_1\varphi(K) + p_2 g(L) = I$ egri chiziqning uchlari koordinata o'qlarida yotadi va $(L_*, 0)$, $(0, K_*)$ koordinatalarga ega. Bunda L_* va K_* lar mos ravishda $p_2 g(L) = I$, $p_1\varphi(K) = I$ tenglamalarning yechimlari. Shu tenglamalar $g'(L) > 0$, $\varphi(K) > 0$ tengsizliklarga ko'ra bir qiymatli yechimlarga ega (7.5-chizma).

Endi $\Phi(L, K) = 0$ chiziq botiq va $\Phi(L, K) = C$ izokvantalar qavariq bo'lgani uchun $\Phi(L, K) = 0$ chiziqqa urinadigan yagona $\Phi(L, K) = C_0$ izokvanta mavjud. Urinish nuqtasida bu chiziqlar umumiy urinmaga ega. Urinmalarning burchak koeffitsiyentlari o'zaro teng bo'ladi, ya'ni (7.6-chizma)



7.5-chizma



7.6-chizma

$$k_1 = -\frac{\partial F}{\partial L}\bigg/\frac{\partial F}{\partial K}, \quad k_2 = -\frac{p_2 g'(L)}{p_1\varphi'(K)}, \quad k_1 = k_2.$$

Ushbu

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial F}{\partial L}\bigg/\dfrac{\partial F}{\partial K} = -\dfrac{p_2 g'(L)}{p_1\varphi'(K)}, \\ p_1\varphi(K) + p_2 g(L) = I, \end{cases} \tag{7.12}$$

tenglamalar sistemasi yagona (L_0, K_0) yechimga ega. Shu (L_0, K_0) nuqta masalasining yechimini beradi.

Misol. Ushbu $F(L,K)=\sqrt{KL}\to\max$, $2K+5L^2=10$ masalani yechaylik. Bunda $\Phi(L,K)=2K+5L^2-10=0$. Endi k_1 va k_2 lar osongina topiladi:

$$k_1=-\frac{K}{L},\quad k_2=-\frac{\partial\Phi}{\partial L}\Big/\frac{\partial\Phi}{\partial K}=-5L,$$

(7.12) sistema bu holda

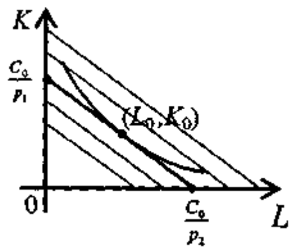
$$\begin{cases} -\dfrac{K}{L}=-5L, \\ 2K+5L^2=10, \end{cases}$$

ko'rinishga ega. Bundan, ravshanki, $L_0=\sqrt{2/3}$, $K_0=10/3$.

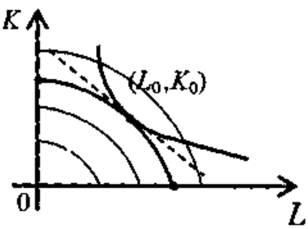
3. Endi tavsiya etilgan usul bilan ishlab chiqarilgan (chiqariladigan) mahsulot miqdori berilganda umumiy xarajatlarni minimallashtirish masalasini yechamiz. Bu holda masala ushbu

$$\begin{cases} \Phi(L,K)=p_1K+p_2L\to\min, \\ F(L,K)=Q \end{cases} \tag{7.13}$$

ko'rinishida yoziladi. $\Phi(L,K)$ funksiya chiziqli xarajat funksiyasi bo'lib, $p_1K+p_2L=C$, $C=const>0$ chiziqlar o'zaro parallel to'g'ri chiziqlar, ular $L\geq 0$, $K\geq 0$ ga ko'ra I chorakda joylashgan kesmalardan iborat (7.7-chizma), uchlari $(C/p_2, 0)$ va $(0, C/p_1)$ nuqtalardan iborat. $F(L,K)=Q$ tengligi esa, $F(L,K)$ ICHF izokvantalaridan biridir. Shu izokvanta kesmalardan biriga albatta urinadi (7.8-chizma). Urinish nuqtasida $p_1K+p_2L=C$ va



7.7-chizma



7.8- chizma

$F(L, K) = Q$ chiziqlarga o'tkazilgan urinmalarning burchak koeffitsiyentlari o'zaro teng, ya'ni $k_1 = k_2$. Bunda $k_1 = -\frac{\partial F}{\partial L}\Big/\frac{\partial F}{\partial K}$, $k_2 = -\frac{p_2}{p_1}$. Shuning uchun (L_0, K_0) yechim quyidagi tenglamalar sistemasidan topiladi (7.8-chizma):

$$\frac{\partial F}{\partial L}\Big/\frac{\partial F}{\partial K} = \frac{p_2}{p_1}, \qquad F(L, K) = Q. \tag{7.14}$$

Misol. Ushbu

$$\begin{cases} 2K + 3L \to \min, \\ \sqrt{LK} - Q = 0 \end{cases}$$

masala berilgan bo'lsin. Bundan $k_2 = -3/2$, $k_1 = -K/L$ hosil bo'ladi. Yechim

$$\begin{cases} -\dfrac{K}{L} = -\dfrac{3}{2}, \\ \sqrt{LK} = Q \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} 2K = 3L, \\ K \cdot L = Q^2 \end{cases}$$

sistemadan topiladi: $L_0 = \sqrt{2/3} \cdot Q$, $\quad K_0 = \sqrt{3/2} \cdot Q$.

4. Nihoyat, ishlab chiqarilgan (chiqariladigan) mahsulot hajmi berilganda xarajatlarning chiziqsiz funksiyasini minimallashtirish masalasini ko'raylik. Masala quyidagicha yoziladi:

$$\begin{cases} \Phi(L, K) = p_1 \varphi(K) + p_2 g(L) \to \min, \\ F(L, K) = Q. \end{cases} \tag{7.15}$$

Bunda $g(L)$ va $\varphi(K)$ funksiyalar (7.11) shartlarni qanoatlantiradi. Shunga ko'ra $p_1 \varphi(K) + p_2 g(L) = C$ chiziqlar botiq bo'ladi, $\frac{d^2K}{dL^2} < 0$. Boshqacha aytganda, $p_1 \varphi(K) + p_2 g(L) = C$ izokvantalar grafigi I chorakda joylashgan botiq egri chiziqlardan iborat (7.8 chizma). $F(L, K) = Q$ tenglama bilan esa, $F(L, K) = C$ izokvantalardan bittasi tavsiflanadi. Shuning uchun bu izokvantaga $p_1 \varphi(K) + p_2 g(L) = C$ chiziqlardan bittasi urinadi. Urinish nuqtasi masalaning yechimini beradi. Izlangan urinish nuqtasi koordinatalarini topish uchun urinma burchak koeffitsiyentini topamiz:

$$k_1=-\frac{\partial F}{\partial L}\bigg/\frac{\partial F}{\partial K},\qquad k_2=-\frac{p_2 g'(L)}{p_1\varphi'(L)}.$$

Masalaning yechimi (L_0, K_0) quyidagi sistemadan topiladi:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial F}{\partial L}\bigg/\dfrac{\partial F}{\partial K}=-\dfrac{p_2 g'(L)}{p_1\varphi'(K)}, \\ F(\mathrm{L,K})=\mathrm{Q}. \end{cases} \qquad (7.16)$$

Misol. Ushbu

$$\begin{cases} \Phi(L,K)=p_1K^3+p_2L^2\to\min, \\ F(L,K)=\sqrt{K\cdot L}=Q \end{cases}$$

masalani yechish talab qilingan bo‘lsin. k_1 va k_2 larni topamiz:

$$k_1=-\frac{K}{L},\qquad k_2=-\frac{2p_2L}{3p_1K^2}.$$

Quyidagi sistemani tuzamiz:

$$\begin{cases} \dfrac{K}{L}=\dfrac{2p_2L}{3p_1K^2}, \\ \sqrt{KL}=Q \end{cases}\quad \text{yoki}\quad \begin{cases} 3p_1K^3=2p_2L^2, \\ KL=Q^2. \end{cases}$$

Sistemani yechib, masalaning yechimini topamiz:

$$L_0=\sqrt[5]{\frac{3p_1Q^6}{2p_2}};\qquad K_0=\sqrt[5]{\frac{2p_2Q^4}{3p_1}}.$$

7-bobga oid masalalar

I. Quyidagi Solou ICHF uchun daromadni maksimallashtirish masalasi yechilsin:

1. $F(L,K)=\dfrac{2K\cdot L}{K+L}$. 2. $F(L,K)=\dfrac{\sqrt{2}K\cdot L}{\sqrt{K^2+L^2}}$.

3. $F(L,K)=\frac{1}{4}\left(\sqrt{K}+\sqrt{L}\right)^2$, 5. $F(L,K)=\frac{4K\cdot L}{\left(\sqrt{K}+\sqrt{L}\right)^2}$.

4. $F(L,K)=\frac{\sqrt[3]{4}\cdot K\cdot L}{\sqrt[3]{\left(K^{3/2}+L^{3/2}\right)^2}}$ 6. $F(L,K)=\frac{2\sqrt[3]{2}\cdot K\cdot L}{\sqrt[3]{\left(K^{3/4}+L^{3/4}\right)^4}}$.

II. **Ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori Q berilganda umumiy** xarajatlarni minimallashtirish masalasi yechilsin *F(L, K)=Q*:

1. $F(L,K)=\sqrt{KL}$. 4. $F(L,K)=\frac{2KL}{K+L}$.

2. $F(L,K)=\sqrt[3]{KL^2}$, 5. $F(L,K)=\sqrt[3]{K^2L}$.

3. $F(L,K)=\frac{1}{4}\left(\sqrt{K}+\sqrt{L}\right)^2$. 6. $F(L,K)=\frac{4KL}{\left(\sqrt{K}+\sqrt{L}\right)^2}$.

III. Quyidagi masalalar burchak koeffitsiyentlarni tenglashtirish usuli bilan yechilsin:

1. $\begin{cases}\sqrt[3]{K^2L}\to\max,\\ 3K+2L=12.\end{cases}$ 4. $\begin{cases}3K+2L\to\min\\ \sqrt{K\cdot L}=6\end{cases}$

2. $\begin{cases}\sqrt[3]{K\cdot L^2}\to\max\\ 2K^3+3L^3=6\end{cases}$ 5. $\begin{cases}2K^2+3L^3\to\min\\ \sqrt[3]{K\cdot L^2}=12\end{cases}$

7-bobga oid nazorat savollari

1. Firma daromadi ta'rifini bering.
2. Firma xarajatlari (sarflari) ta'rifini bering.
3. Firma foydasining ta'rifini bering.
4. Firma foydasini maksimallashtirish masalasini bayon eting.
5. Umumiy xarajatlarni minimallashtirish masalasini bayon eting.
6. Foydani maksimallashtirish masalasini yechish usullarini aytib bering.

7. Umumiy xarajatlami minimallashtirish masalasini yechishning chiqarish usuli nimadan iborat?

8. Umumiy xarajatlarni minimallashtirish masalasini yechishda Lagranjning ko'paytiruvchilari usulini aytib bering.

9. Kobb-Duglas va Solou ICHF lar uchun foydani maksimallashtirish va umumiy xarajatlarni minimallashtirish masalalarini ekonometrik analizqiling.

10. Burchak koeffitsiyentlarni tenglashtirish usulining g'oyasini so'zlab bering.

11. Burchak koeffitsiyentlarni tenglashtirish usuli bilan yechiladigan masalalarning xususiyatlari nimadan iborat?

8-bob. UMUMLASHGAN STATIK ICHF

8.1-§. Umumlashgan statik ICHF haqida

5-bobda chiziqli-bir jinsli, so'ngra umumiyroq δ-tartibli bir jinsli funksiyalar ta'rifi berilgan va ularning xossalari bayon qilingan edi. Keyin bir va ko'p o'zgaruvchili ICHF tushunchasi ham kiritilgan, shu bilan birga, ICHF bilan bog'langan turli masalalar bayon etilgan. O'sha bobda keltirilgan ICHF tushunchasini *oddiy ICHF* deb aytish mumkin. Quyida bir va ko'p o'zgaruvchili umumlashgan ICHF tushunchasini keltiramiz.

8.1-ta'rif. Bir o'zgaruvchili umumlashgan ICHF deb quyidagi

$$\begin{aligned} &f(0)=0, \quad f(x)>0, \quad f'(x)>0, \quad f''(x)<0, \\ &f(\lambda x)\equiv \lambda^{\delta} f(x), \quad \forall\lambda>0, \quad x>0, \quad \delta>0 \end{aligned} \tag{8.1}$$

shartlarni qanoatlantiradigan $y=f(x)$ *funksiyaga aytiladi.*

Masalan, $y=a_0x^{\delta}$, $a_0>0$, $0<\delta<1$ funksiya uchun (8.1) shartlar bajariladi:

$$a_0x^{\delta}>0, \ f'(x)=a_0\delta\cdot x^{\delta-1}>0, \ f''(x)=a_0\delta\cdot(\delta-1)\cdot x^{\delta-2}<0,$$

$$f(\lambda x)=a_0(\lambda x)^{\delta}=\lambda^{\delta} f(x), \ x>0.$$

Hatto bu funksiya umumlashgan neoklassik ICHF deb ataladi.

8.2-ta'rif. *Faraz etaylik,* $y=f(x_1,x_2,...,x_n)$ *funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:*

1°. $f\in C^2\left(R_+^n\right)$, *bunda* $C^2\left(R_+^n\right)$ – R_+^n *sohada ikki marta uzluksiz differensiallanuvchiligini anglatadi.*

2°. $f(x_1,x_2,...,x_{i-1},0,x_{i+1},...,x_n)=0$; $i=\overline{1,n}$; $f(0,0,...,0)=0$.

3°. $f(\lambda x_1,\lambda x_2,...,\lambda x_n)\equiv\lambda^{\delta} f(x_1,x_2,...,x_n)$; $(x_1,x_2,...,x_n)\in R_+^n$.

4^0. $\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}>0$; $\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}>0$; ..., $\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}>0$; $\forall x=(x_1,x_2,...,x_n)\in R_+^n$.

5^0. $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2}<0$; $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2}<0$; ...; $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2}<0$; $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\geq 0; i\neq j, \forall x\in R_+^n$.

Shu 1^0-5^0 *shartlarni qanoatlantiradigan funksiya n o'zgaruvchili umumlashgan neoklassik ICHF deyiladi.*

Quyida n o'zgaruvchili umumlashgan neoklassik ICHF ga misollar keltiramiz ($x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $d>0$):

1) $f(x)=a_0\cdot x_1^{\alpha_1}\cdot x_2^{\alpha_2}\cdot ...\cdot x_n^{\alpha_n}$; $a_0>0$; $\alpha_i>0$; $i=\overline{1,n}$; $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=\delta>0$;

2) $f(x)=a_0\left[\sum_{i=1}^{n}a_i x_i^{\rho}\right]^{-\delta/\rho}$, $a_i>0$, $i=\overline{0,n}$; $\sum a_i=1$, $\rho>-1$;

3) $f(x_1,x_2,...,x_n)=a_0\left(\sum_{i=1}^{n}a_i x_i\right)^{\delta}$, $a_0>0$, $a_i>0$, $i=\overline{1,n}$; $0<\delta<1$;

4) $f(x_1,x_2,...,x_n)=a_0\cdot\left(\min\{x_1,x_2,...,x_n\}\right)^{\delta}$; $a_0>0$; $\delta>0$.

Mazkur funksiyalar uchun 1^0-5^0 shartlarning bajarilishini bevosita hisoblashlar yordamida tekshirish mumkin.

Umumlashgan neoklassik ICHF ta'rifining 3^0-sharti chuqur iqtisodiy ma'noga ega. Shu shart bo'yicha $\delta>0$ bo'lganda ishlab chiqarish masshtabi (ko'lami) λ marta ($\lambda>1$) orttirilsa, ishlab chiqarilgan (chiqariladigan) mahsulot hajmi λ^{δ} marta ortadi. Boshqacha aytganda, ishlab chiqarish masshtabi ortishidan ishlab chiqarish *samaradorligi* ortadi. Ammo $0<\delta<1$ bo'lganda ishlab chiqarish masshtabi ortishidan ishlab chiqarish samaradorligi kamayadi; $\delta=1$ bo'lganda masshtab ortsa ham, ishlab chiqarish samaradorligi o'zgarmay qoladi. Bu holda ICHF chiziqli-bir jinsli ICHF ga aylanadi.

Albatta, λ ham, δ ham 1 dan ancha katta bo'la olmaydi, ular 1 dan katta va unga yaqin qiymatlar qabul qilishi mumkin. Bu iqtisodiy sharoitlardan kelib chiqadi. Masalan, agar $\lambda=1+\varepsilon$, $\delta=1+\nu$ bo'lib, ε va ν ixtiyoriy kichik sonlar bo'lsa,

$$\lambda^{\delta}=(1+\varepsilon)^{1+\nu}>1+\varepsilon=\lambda, \text{ ya'ni } \lambda^{\delta}>1$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Qanday hollarda ishlab chiqarish masshtabini λ marta orttirilsa, ishlab chiqarilgan (chiqariladigan) mahsulot hajmi λ dan ortiq marta ortadi? – degan savol tug'ilishi tabiiy. Bunga, avvalo, yangi texnologiyalarni qo'llash va xodimlarning malakasini oshirish hisobiga erishish mumkin. Iqtisodiy o'sish s - simon egri chiziqlar bo'yicha sodir bo'lishini ta'minlash kerak bo'ladi (qarang: Фостер Р. Обновление производства: атакующие выигрывают. Москва. Прогресс. 1987; глава 4).

Endi umumlashgan ikki faktorli neoklassik ICHF ni alohida o'rganamiz. Faraz etaylik, $F(L, K)$ – umumlashgan ikki faktorli neoklassik ICHF bo'lsin. Bunday funksiya uchun quyidagi neoklassik shartlar bajariladi:

1^0. $F(L,K)$ funksiya R_+^2 sohada aniqlangan, uzluksiz hamda birinchi, ikkinchi tartibli xususiy hosilalarga ega.

2^0. $F(0,K) = F(L,0) = 0; \quad F(0,0) = 0$.

3^0. $F(\lambda L, \lambda K) = \lambda^\delta F(L,K); \quad \forall (L,K) \in R_+^2; \quad \delta > 0; \quad \lambda > 0$.

4^0. $\dfrac{\partial F}{\partial L} > 0; \; \dfrac{\partial F}{\partial K} > 0; \quad \forall (L,K) \in R_+^2$.

5^0. $\dfrac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0; \; \dfrac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0; \; \dfrac{\partial^2 F}{\partial L\,\partial K} \geq 0; \quad \forall (L,K) \in R_+^2$.

Misol sifatida umumlashgan Kobb-Duglas va Solou (CES sinfidagi – *Constant Elasticity of Substitution*) ICHF ni keltirish mumkin. Ularni o'rganamiz.

1. Umumlashgan Kobb-Duglas ICHF quyidagi ko'rinishga ega:

$$Y = F(L,K) = a_0 K^\alpha L^{\delta-\alpha}, \quad a_0 > 0, \; 0 < \alpha < 1, \; 0 < \delta - \alpha < 1. \qquad (8.2)$$

Shu (8.2) funksiya uchun 1^0-5^0 shartlar bajariladi. Haqiqatan, (8.2) funksiya differensiallanuvchi, uning birinchi va ikkinchi tartibli xususiy hosilalari mavjud va $0 < \alpha < 1$, $0 < \delta - \alpha < 1$ tengsizliklarga ko'ra $F(0, K) = F(L, 0) = 0$ tengliklar bajariladi. 3^0 shart ham bajariladi:

$$F(\lambda L, \lambda K) = a_0 (\lambda K)^\alpha (\lambda L)^{\delta-\alpha} = \lambda^\delta \cdot a_0 K^\alpha L^{\delta-\alpha} = \lambda^\delta \cdot F(L,K).$$

Nihoyat, 4^0 va 5^0 shartlar bevosita hisoblashlar yordamida tekshirilishi mumkin:

$$\frac{\partial F}{\partial L} = a_0(\delta - \alpha) K^\alpha L^{\delta-\alpha-1} > 0, \quad \frac{\partial F}{\partial K} = a_0 \alpha \cdot K^{\alpha-1} L^{\delta-\alpha} > 0, \; L > 0, K > 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} = a_0(\delta-\alpha)\cdot(\delta-\alpha-1)\cdot K^{\alpha}L^{\delta-\alpha-2} < 0,\ \ L>0,\ \ K>0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} = a_0\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot K^{\alpha-2}L^{\delta-\alpha} < 0,\ \ L>0,\ \ K>0.$$

8.2-teorema. *Umumlashgan Kobb-Duglas ICHF quyidagi*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} = \frac{(\delta-\alpha)\cdot(\delta-\alpha-1)}{\alpha\cdot(\alpha-1)}\cdot\frac{K^2}{L^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} \qquad (8.3)$$

kvazichiziqli differensial tenglamaning yechimi.

Isboti. Ikkinchi tartibli hosilalar uchun topilgan ifodalardan foydalansak, (8.3) tenglama osongina kelib chiqadi.

2. Umumlashgan Solou ICHF quyidagicha yoziladi:

$$Y = F(L,K) = a_0\left[aK^{-\rho} + (1-a)L^{-\rho}\right]^{-\delta/\rho}, a_0>0,\ 0<a<1,\ \rho>-1,\ \delta>0. \quad (8.4)$$

Bu funksiya uchun ham 1^0-5^0 shartlar bajariladi, faqat $F(0,K) = F(L,0) = 0$ shart $\rho>0$ bo'lganda o'rinli. 3^0-5^0 shartlarni tekshiramiz:

$$F(\lambda L,\lambda K) = a_0\left[a(\lambda K)^{-\rho} + (1-a)(\lambda L)^{-\rho}\right]^{-\delta/\rho} =$$

$$= a_0\left[\lambda^{-\rho}\left(aK^{-\rho} + (1-a)L^{-\rho}\right)\right]^{-\delta/\rho} = \lambda^{\delta}a_0\left[aK^{-\rho} + (1-a)L^{-\rho}\right]^{-\delta/\rho} = \lambda^{\delta}F(L,K).$$

1-tartibli xususiy hosilalarning musbatligini ko'rsatamiz:

$$\frac{\partial F}{\partial L} = a_0\left(-\frac{\delta}{\rho}\right)\cdot\left[a\cdot K^{-\rho} + (1-a)\cdot L^{-\rho}\right]^{-\frac{\delta}{\rho}-1}\cdot(1-a)\cdot(-\rho)L^{-\rho-1} > 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial K} = a_0\left(-\frac{\delta}{\rho}\right)\cdot\left[a\cdot K^{-\rho} + (1-a)\cdot L^{-\rho}\right]^{-\frac{\delta}{\rho}-1}\cdot a\cdot(-\rho)\cdot K^{-\rho-1} > 0.$$

Ikkinchi tartibli hosilalarga tegishli 5^0 shart ham bajariladi, uni ham bevosita hisoblashlar yordamida isbotlash mumkin.

Umumlashgan Solou ICHF ning $\rho\to 0$, $\rho\to+\infty$ va $\rho\to -1$ dagi xususiy hollarini ko'ramiz.

Avval $\rho\to 0$ holni ko'raylik. Biz $\lim\limits_{\rho\to 0} Y$ o'rniga $\lim\limits_{\rho\to 0}\ln Y$ ni hisoblaymiz:

$$\lim_{\rho\to 0}\ln Y = \ln a_0 - \lim_{\rho\to 0}\frac{\delta}{\rho}\ln\left[aK^{-\rho} + (1-a)\cdot L^{-\rho}\right] =$$

$$= \ln a_0 - \delta \lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\rho}\ln\frac{aL^\rho + (1-a)\cdot K^\rho}{K^\rho \cdot L^\rho} =$$

$$= \ln a_0 + \delta\cdot \ln(K\cdot L) - \delta \lim_{\rho\to 0}\ln\left(aL^\rho + (1-a)\cdot K^\rho\right)\cdot 1/\rho =$$

$$= \ln a_0 - \delta \ln(K\cdot L) - \delta \lim_{\rho\to 0}\frac{aL^\rho \ln L + (1-a)\cdot K^\rho \ln K}{aL^\rho + (1-a)\cdot K^\rho} =$$

$$= \ln a_0 L^\delta K^\delta - \delta\cdot\left[a\ln L + (1-a)\ln K\right] = \ln a_0 K^{a\delta} L^{(1-a)\delta}$$

Oxirgi natija ko'rsatadiki, $\rho \to 0$ da $\ln Y = \ln a_0 K^{a\delta} L^{(1-a)\delta}$. Bundan $Y = a_0 K^{a\delta} L^{(1-a)\delta}$ – Kobb-Duglasning umumlashgan ICHF hosil bo'ladi.

Agar $\rho \to -1$ bo'lsa, ravshanki, $\lim_{\rho\to -1} Y = a_0\left[aK + (1-a)L\right]^\delta$, ya'ni $F(L,K) = a_0\left[aK + (1-a)L\right]^\delta$ ko'rinishdagi umumlashgan chiziqli ICHF hosil bo'ladi:

Agar $\rho \to +\infty$ bo'lsa, $F(L, K)$ ni quyidagicha yozib olamiz:

$$F(L,K) = a_0 \frac{K^\delta L^\delta}{\left[aK^\rho + (1-a)L^\rho\right]^{\delta/\rho}}.$$

Ravshanki, bundan

$$\lim_{\rho\to+\infty} F = \begin{cases} a_0 K^\delta, & K < L, \\ a_0 L^\delta, & L < K. \end{cases}$$

Shunday qilib, biz ushbu

$$F(L,K) = \begin{cases} a_0 K^\delta, & K < L \\ a_0 L^\delta, & L < K \end{cases} = a_0 \cdot \left[\min\{K; L\}\right]^\delta, \quad \delta > 0$$

ko'rinishdagi ICHF ni hosil qilamiz. Bu funksiya umumlashgan proporsiyali ICHF deyiladi. U *Leontev ICHF* deb yuritiladi. Bu funksiya umumiy holda

$$F(L,K) = \min\left\{a\cdot K^\delta;\ b\cdot L^\delta\right\}, \quad a > 0,\ b > 0,\ \delta > 0$$

kabi yoziladi.

8.2-§. Umumlashgan ikki faktorli neoklassik ICHF uchun asosiy iqtisodiy-matematik xarakteristikalar

Avvalo, 3^0 shartga ko'ra $F(L, K)$ ni quyidagicha yozish mumkin:

$$F(L,K)=F\left(L\cdot 1,\ L\cdot\frac{K}{L}\right)=L^{\delta}\cdot F\left(1,\ \frac{K}{L}\right)=L^{\delta}\cdot F(1,k)=L^{\delta}f(k).$$

Shunday qilib, keyingi mulohazalarda tez-tez foydalaniladigan formulalarga egamiz:

$$F(L,K)=L^{\delta}f(k),\quad f(k)=\frac{F(L,K)}{L^{\delta}},\quad k=\frac{K}{L},$$

bunda: $f(k)$ – umumlashgan ICHF uchun o'rtacha mehnat unumdorligi.

Endi umumlashgan ikki faktorli ICHF uchun asosiy iqtisodiy-matematik xarakteristikalarni yozib chiqamiz:

1^0. $y=\dfrac{F}{L^{\delta}}=f(k)$ – o'rtacha mehnat unumdorligi.

2^0. $z=\dfrac{F}{K^{\delta}}=\dfrac{L^{\delta}f(k)}{K^{\delta}}=\dfrac{f(k)}{k^{\delta}}$ – fondlar bo'yicha o'rtacha unumdorlik.

3^0. $v=\dfrac{\partial F}{\partial L}=L^{\delta-1}\left[\delta\cdot f(k)-k\cdot f'(k)\right]$ – limit mehnat unumdorligi.

4^0. $r=\dfrac{\partial F}{\partial K}=L^{\delta-1}f'(k)$ – fondlar bo'yicha limit unumdorlik.

5^0. $\alpha=\dfrac{\partial F}{\partial K}\cdot\dfrac{K}{F}=\dfrac{k\cdot f'(k)}{f(k)}$ – fondlar bo'yicha elastiklik.

6^0. $\beta=\dfrac{\partial F}{\partial L}\cdot\dfrac{L}{F}=\delta-\dfrac{k\cdot f'(k)}{f(k)}$ – mehnat bo'yicha elastiklik.

7^0. $S=-\dfrac{dK}{dL}=\dfrac{\partial F(L,K)}{\partial L}:\dfrac{\partial F(L,K)}{\partial K}=\dfrac{\delta\cdot f(k)-k\cdot f'(k)}{f'(k)}$ – L resursni K resurs bilan almashtirishning limit normasi.

8^0. $\sigma=\left(\dfrac{dS}{dk}\cdot\dfrac{k}{S}\right)^{-1}=\dfrac{f'(k)\left[\delta\cdot f(k)-k\cdot f'(k)\right]}{(\delta-1)\cdot\left[f'(k)\right]^2-k\cdot f(k)f'(k)},\ \delta>1$ – L resursni K resurs bilan almashtirish elastikligi.

Endi 1^0-5^0 shartlardan foydalanish uchun ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni hisoblaymiz.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2}=L^{\delta-1}f''(k)\frac{\partial k}{\partial K}=L^{\delta-1}f''(k)\frac{1}{L}=L^{\delta-2}f''(k);$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial L^2}=\frac{\partial}{\partial L}\left[L^{\delta-1}(\delta\cdot f(k)-k\cdot f'(k))\right]=(\delta-1)L^{\delta-2}[\delta\cdot f(k)-k\cdot f'(k)]+$$

$$+L^{\delta-1}\cdot[\delta\cdot f'(k)-f'(k)-k\cdot f''(k)]\cdot\left(\frac{K}{L^2}\right)=$$

$$=L^{\delta-2}\cdot\left[(\delta-1)\cdot(\delta\cdot f(k)-2k\cdot f'(k))+k^2 f''(k)\right]$$

Shartga ko‘ra $\frac{\partial^2 F}{\partial K^2}<0$. Shu sababli, yuqoridagi ifodadan $f''(k)<0$ tengsizlik kelib chiqadi. Endi $\frac{\partial F}{\partial L}>0$ va $\frac{\partial^2 F}{\partial L^2}<0$ tengsizliklar $1<\delta<2$ va $\frac{\delta}{2}<\frac{k\,f'(k)}{f(k)}<1$ munosabatlar bajarilganda o‘rinli bo‘ladi.

Shunday qilib, agar $\delta>1$ bo‘lsa, $\delta\, f(k)-k\, f'(k)>0$ tengsizlik; $1<\delta<2$, $\frac{\delta}{2}<\frac{k\,f'(k)}{f(k)}<1$ bo‘lganda esa,

$$(\delta-1)\cdot(\delta\, f(k)-2k\, f'(k))+k^2 f''(k)<0$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Umumlashgan Kobb-Duglas ICHF uchun 1^0 - 8^0 xarakteristikalarni hisoblaymiz. Sodda hisoblashlar yordamida quyidagilarni topamiz:

1^0. $y=\frac{F}{L^\delta}=a_0k^\delta$, $f(k)=a_0k^\delta$.

2^0. $z=\frac{F}{K^\delta}=a_0k^{\alpha-\delta}$.

3^0. $v=\frac{\partial F}{\partial L}=a_0(\delta-\alpha)\cdot L^{\delta-1}k^\alpha$.

4⁰. $r=\dfrac{\partial F}{\partial K}=a_0\cdot\alpha\cdot L^{\delta-1}k^{\alpha-1}$.

5⁰. $\alpha=\dfrac{\partial F}{\partial K}\cdot\dfrac{K}{F}=\alpha$.

6⁰. $\beta=\dfrac{\partial F}{\partial L}\cdot\dfrac{L}{F}=\delta-\alpha$.

7⁰. $S(k)=\dfrac{\delta-\alpha}{\alpha}k$.

8⁰. $\sigma=\left(\dfrac{dS}{dk}\cdot\dfrac{k}{S}\right)^{-1}=1$.

Endi umumlashgan Solou ICHF uchun 1⁰-8⁰ xarakteristikalarni keltiramiz:

$$F(L,K)=a_0\left[aK^{-\rho}+(1-a)L^{-\rho}\right]^{-\delta/\rho},\ a_0>0,\quad 0<a<1,\quad \rho>-1.$$

1⁰. $y=f(k)=a_0\left[ak^{-\rho}+(1-a)\right]^{-\delta/\rho}$.

2⁰. $z=\dfrac{F}{K^{\delta}}=a_0\left[a+(1-a)k^{\rho}\right]^{-\delta/\rho}$.

3⁰. $\nu=\dfrac{\partial F}{\partial L}=a_0\delta\cdot L^{\delta-1}\cdot(1-a)\cdot\left[ak^{-\rho}+(1-a)\right]^{-\delta/\rho-1}$.

4⁰. $r=\dfrac{\partial F}{\partial K}=L^{\delta-1}\cdot a_0\cdot a\cdot\delta\cdot k^{-\rho-1}\cdot\left[ak^{-\rho}+(1-a)\right]^{-\delta/\rho-1}$.

5⁰. $\alpha=\dfrac{\partial F}{\partial K}\cdot\dfrac{K}{F}=\dfrac{a\cdot\delta}{a+(1-a)\cdot k^{\rho}}$.

6⁰. $\beta=\dfrac{\partial F}{\partial L}\cdot\dfrac{L}{F}=\dfrac{(1-a)\cdot\delta\cdot k^{\rho}}{a+(1-a)\cdot k^{\rho}}$.

7⁰. $s(k)=\dfrac{1-a}{a}\cdot k^{\rho+1},\quad \rho>-1$.

8⁰. $\sigma=\dfrac{1}{\rho+1}$.

8.3-teorema. *Umumlashgan neoklassik ICHF $F(L,K)$ quyidagi*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial L^2}-\frac{K^2}{L^2}\frac{\partial^2 F}{\partial L^2}+2(\delta-1)\frac{K}{L}\frac{\partial F}{\partial K}=\delta(\delta-1)\frac{1}{L^2}F, \quad 1<\delta<2 \qquad (8.5)$$

ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamani qanoatlantiradi.

Isboti bevosita hisoblashlar yordamida olib boriladi.

Agar $\delta=1$ bo'lsa, (8.5) dan (8.3) tenglama kelib chiqadi.

Quyidagi $F(L,K)=\sqrt[4]{K^2L}$, $\alpha=1/2$, $\beta=1-\alpha=1/4$, $a_0=1$ – umumlashgan Kobb-Duglas ICHF (8.5) differensial tenglamaning yechimi ekanini bevosita hisoblash yordamida ko'rsatamiz.

Unda $1/4=\delta-1/2$ va $\delta=3/4$;

$$\frac{\partial F}{\partial L}=\frac{1}{4}L^{-3/4}K^{1/2}, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2}=-\frac{3}{16}L^{-7/4}K^{1/2},$$

$$\frac{\partial F}{\partial K}=\frac{1}{2}L^{1/4}K^{-1/2}, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial K^2}=-\frac{1}{4}L^{1/4}K^{-3/2}.$$

Topilgan ifodalarni (8.5) ning chap tomoniga qo'yamiz:

$$-\frac{3}{16}L^{-7/4}K^{1/2}-\left(\frac{K}{L}\right)^2\left(-\frac{1}{4}L^{1/4}K^{-3/2}\right)+2\left(-\frac{1}{4}\right)\frac{K}{L}\frac{1}{2}L^{1/4}K^{-1/2}=$$

$$=-\frac{3}{16}L^{\frac{1}{4}}K^{\frac{1}{2}}\left(L^{-\frac{7}{4}-\frac{1}{4}}-\frac{4}{3}L^{-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}+\frac{4}{3}L^{-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}\right)=-\frac{3}{16}L^{-\frac{7}{4}}K^{\frac{1}{2}}$$

Endi (8.5) ning o'ng tomonini hisoblaymiz:

$$\delta\cdot(\delta-1)\cdot\frac{1}{L^2}\cdot L^{\frac{1}{4}}\cdot K^{\frac{1}{2}}=-\frac{3}{16}\cdot L^{-\frac{7}{4}}\cdot K^{\frac{1}{2}}$$

Ko'rinadiki, (8.5) ning chap va o'ng tomonlari o'zaro teng. Bu $F(L,K)=\sqrt[4]{K^2L}$ funksiya (8.5) tenglamaning yechimi ekanini anglatadi.

8.3-§. Umumlashgan iqtisodiy ko'rsatkichlar o'zgarmas bo'lgan hollar

5-bobda oddiy neoklassik ICHF uchun ba'zi iqtisodiy ko'rsatkichlarning o'zgarmas va funksiya ko'rinishda bo'lganda ICHF ko'rinishini aniqlash bilan shug'ullangan edik. Endi o'sha hollarni umumlashgan ICHF uchun ko'ramiz:

1. Fondlar bo'yicha elastiklik α o'zgarmas bo'lsin, ya'ni $\alpha = const > 0$. Bu holda ushbu

$$\frac{k \cdot f'(k)}{f(k)} = \alpha$$

o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamaga egamiz. Uni

$$\frac{f'(k)}{f(k)} = \frac{\alpha}{k}$$

ko'rinishda yozib, integrallaymiz: $\ln f(k) = \alpha \ln k + \ln C$ yoki $f(k) = C \cdot k^{\alpha}$. Bu tenglikning ikki tomonini L^{δ} ga ko'paytirib, $F(L,K) = L^{\delta} f(k)$ dan foydalansak, $F(L,K) = C \cdot K^{\alpha} L^{\delta-\alpha}$ – umumlashgan Kobb-Duglas IChF hosil bo'ladi.

2. Endi mehnat bo'yicha elastiklik o'zgarmas bo'lsin, ya'ni $\beta = const > 0$. Bu holda

$$\delta - \frac{k \cdot f'(k)}{f(k)} = \beta \quad \text{yoki} \quad \frac{f'(k)}{f(k)} = \frac{\delta - \beta}{k}$$

o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamaga kelamiz. Uni integrallab topamiz:

$$\ln f(k) = (\delta - \beta) \ln k + \ln C \quad \text{yoki} \quad f(k) = C \cdot k^{\delta-\beta}.$$

Ikki tomonini L^{β} ga ko'paytirsak, ushbu $F(L,K) = C \cdot K^{\delta-\beta} L^{\beta}$ ko'rinishdagi umumlashgan Kobb-Duglas IChF kelib chiqadi.

3. Almashtirishning umumlashgan limit normasi S o'zgarmas bo'lsin, ya'ni $S = const > 0$. Bunda $S = \delta f(k) / f'(k) - k$ ko'rinishdagi differensial tenglama hosil bo'ladi. Uni

$$\frac{f'(k)}{f(k)} = \frac{\delta}{S+k}$$

kabi yozib, integrallaymiz: $\ln f(k) = \delta \ln(S+k) + \delta \ln C$, $C > 0$. Bundan $F(L,K) = (C\,S + C\,k)^{\delta}$ – umumlashgan chiziqli ICHF kelib chiqadi.

4. Nihoyat, almashtirishning limit normasi elastikligi ó o'zgarmas bo'l-gan holni ko'raylik. Bunda $\sigma = \text{const} > 0$. Demak, $\sigma = \left(\frac{dS}{dk}\cdot\frac{k}{S}\right)^{-1} = const$,

bundan $\frac{dS}{dk}\cdot\frac{k}{S} = const > 0$ ekani ko'rinadi.

Boshqacha aytganda, $\frac{dS}{dk}\cdot\frac{k}{S} = \frac{1}{\sigma}$ – o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamaga egamiz. Uni integrallab topamiz:

$$\ln f(k) = 1/\sigma \cdot \ln k + \ln C_1,\ C_1 > 0 \quad \text{yoki} \quad S(k) = C_1 k^{1/\sigma}.$$

Endi $S = \frac{\delta\, f(k) - k\, f'(k)}{f'(k)}$ formulani e'tiborga olsak,

$$\frac{\delta\, f(k) - k\, f'(k)}{f'(k)} = C_1 k^{1/\sigma}$$

differensial tenglama hosil bo'ladi. Uni

$$\frac{f'(k)}{f(k)} = \frac{\delta}{k + C_1 k^{1/\sigma}} \tag{8.6}$$

ko'rinishda yozib olamiz. 6-bobning birinchi paragrafida (8.6) ning o'ng tomonidagi funksiya integrali hisoblangan. Shuning uchun (8.6) ni integrallab topamiz:

$$\ln f(k) = \frac{\delta\cdot\sigma}{\sigma - 1}\ln C_2\left(k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + C_1\right) \quad \text{yoki} \quad f(k) = C_2^{\frac{\delta\sigma}{\sigma-1}}\left(k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + C_1\right)^{\frac{\delta\sigma}{\sigma-1}}.$$

Bu tenglikning ikki tomonini L^{δ}ga ko'paytirib, ba'zi o'zgartirishlarni bajarsak,

$$F(L,K) = \left[C_2(1 + C_1)\right]^{\frac{\delta\sigma}{\sigma-1}}\cdot\left(\frac{1}{1+C_1}K^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \frac{C_1}{1+C_1}L^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\delta\sigma}{\sigma-1}}$$

yoki

$$F(L,K) = a_0\left[a\,K^{-\rho} + (1-a)\,L^{-\rho}\right]^{-\frac{\delta}{\rho}}$$

ko'rinishdagi umumlashgan Solou ICHF ni hosil qilamiz, unda

$$a_0=\left[C_2(1+C_1)\right]^{\frac{\delta\sigma}{\sigma-1}},\quad a=1/(1+C_1),\quad \rho=-\frac{\sigma-1}{\sigma}=\frac{1}{\sigma}-1\ .$$

Bundan $\delta\to+0$ da $\rho\to+\infty$, $\delta\to+\infty$ da $\rho\to-1$. Demak, $\rho>-1$.

Yuqorida ko'rilgan 4 ta holdan quyidagi xulosalarni chiqarish mumkin:

1. Agar fondlar va mehnat bo'yicha elastiklik o'zgarmas bo'lsa, mos ICHF Kobb-Duglas funksiyasidan iborat bo'ladi.
2. Agar almashishning umumlashgan limit normasi o'zgarmas bo'lsa, mos ICHF umumlashgan chiziqli bo'ladi.
3. Agar almashtirishning umumlashgan limit normasi elastikligi o'zgarmas bo'lsa, mos ICHF umumlashgan Solou funksiyasi bo'ladi.

8.4-§. Umumlashgan ICHF ning izokvantalari, izoklinallari va izokostalari

Umumlashgan neoklassik IChF ning izokvantalari, izoklinallari va izokostalari ta'rifi 6-bobda shu tushunchalar oddiy neoklassik ICHF uchun kiritilgan ta'rifi kabi kiritiladi.

$F(L,K)$ – umumlashgan neoklassik ICHF bo'lsin. Ushbu $F(L,K)=C$, $C>0$ tenglama bilan berilgan bir parametrli silliq chiziqlar oilasini ko'ramiz. Shu chiziqlar oilasining har bir chizig'i izokvanta deyiladi. Grafigi koordinata boshidan chiqib, barcha izokvantalarni bir xil burchak ostida kesadigan, shu kesishish nuqtasida izokvantalarga o'tkazilgan urinmalar parallel bo'ladigan chiziq izoklinal deyiladi. Parallel urinmalar izokostalar deyiladi.

Izokvantalarning differensial tenglamasi

$$\frac{dK}{dL}=-\frac{\partial F}{\partial L}\bigg/\frac{\partial F}{\partial K} \tag{8.7}$$

ko'rinishda bo'ladi. Umumlashgan Kobb-Duglas funksiyasi izokvantalarining differensial tenglamasi

$$\frac{dK}{dL}=-\frac{\delta-\alpha}{\alpha}\cdot\frac{K}{L},$$

umumlashgan Solou funksiyasi izokvantalarining differensial tenglamasi esa,

$$\frac{dK}{dL}=-\frac{1-a}{a}\cdot\frac{K^{\rho+1}}{L^{\rho+1}}$$

ko'rinishga ega.

Umumlashgan ICHFning xossalariga qisqacha to'xtalamiz.

1. *Umumlashgan ICHF ning izokvantalari o'zaro kesishmaydi.*

Eslatib o'tamizki, har bir izokvanta (8.7) differensial tenglamaning integral egri chizig'idan iborat. Shu tenglamaning o'ng tomoni K bo'yicha differensiallanuvchi. Shuning uchun R_+^2 sohaning har bir nuqtasidan yagona izokvanta o'tadi. Bu hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli differensial tenglamalarning yechimi mavjudligi va yagonaligi haqidagi Koshi teoremasidan kelib chiqadi.

2. *Har bir izokvanta bo'ylab $K = K(L)$ funksiya kamayuvchi va qavariq.*

$K = K(L)$ funksiyaning kamayuvchiligi (8.7) tenglamaning o'ng tomoni manfiy ekanidan kelib chiqadi. Eslatib o'tamizki,

$$\frac{\partial F}{\partial K} = L^{\delta-1} f'(k), \quad \frac{\partial F}{\partial L} = L^{\delta-1}[\delta f(k) - k f'(k)], \quad \delta > 1,$$

$$\frac{dK}{dL} = -\delta \frac{f(k)}{f'(k)} + k.$$

Bundan $\frac{d^2K}{dL^2} > 0$ tengsizlik kelib chiqadi. Haqiqatan,

$$\frac{d^2K}{dL^2} = \frac{d}{dk}\left[-\delta \frac{f(k)}{f'(k)} + k\right] \cdot \frac{dk(L)}{dL} =$$

$$= \left[-\delta \frac{[f'(k)]^2 - f(k) \cdot f''(k)}{[f'(k)]^2} + 1\right] \cdot \frac{dK/dL \cdot L - K \cdot 1}{L^2} =$$

$$= \frac{(1-\delta) \cdot [f'(k)]^2 + \delta \cdot f(k) \cdot f''(k)}{[f'(k)]^2} \cdot \left[\frac{1}{L}\left(-\delta \frac{f(k)}{f'(k)} + k\right) - \frac{K}{L^2}\right] =$$

$$= -\frac{\delta}{L} \cdot \frac{f(k) \cdot \left[(1-\delta) \cdot [f'(k)]^2 + \delta \cdot f(k) \cdot f''(k)\right]}{[f'(k)]^3}.$$

Bu ifoda $\delta > 1$ va $f''(k) < 0$ tengsizliklarga ko'ra musbat. Shuni isbot etish talab qilingan edi.

3. *Umumlashgan neoklassik ICHF gorizontal va vertikal asimptotalarga ega.*

8.5-§. Umumlashgan ICHF ning magistrallari

Umumlashgan ICHF uchun (6.4-§) magistral tushunchasi oddiy ICHF uchun kiritilgan tushunchadan farq qilmaydi. Eslatib o'tamizki, *magistral* deb minimal sarflar bilan uzoq muddatga ishlab chiqarishni kengaytirish sharoitida ishlab chiqariladigan mahsulot (milliy daromad) hajmini maksimallashtirish masalasi yechimini ifodalaydigan *izoklinalga* aytiladi. Magistral L va K resurslar optimal munosabatlarga (proporsiyaga) ega bo'lgan chiziqdir. Shunday qilib, cheksiz ko'p izoklinallar orasidan uzoq davrga iqtisodiy o'sishni ta'minlaydiganini ajratib olish masalasini hal qilish kerak.

Quyida umumlashgan statik ICHF ning uch turi uchun magistrallarni quramiz.

1. Faraz etaylik, $F(L,K) = (aK + bL)^\delta$ – umumlashgan chiziqli ICHF bo'lsin. Bu holda izokvantalar $(aK + bL)^\delta = C_0$ yoki $aK + bL = C_0^{1/\delta}$ tenglama bilan beriladi, $C_0 = const$. Bu koordinata o'qlaridan mos ravishda $\overline{L}_0 = C_0^{1/\delta}/b$ va $\overline{K}_0 = C_0^{1/\delta}/a$ ga teng kesmalarni ajratadigan to'g'ri chiziqni anglatadi. Koordinata boshidan chiqadigan ixtiyoriy $K = pL$, $0 < p < \infty$ nur parallel kesmalardan iborat barcha izokvantalarni bir xil burchak ostida kesib o'tadi: $tg\varphi = \dfrac{ap+b}{bp-a}$, $0 < \varphi < 90^0$. Ushbu

$$\begin{cases} aK + bL = C_0^{1/\delta}, \\ K = pL, \end{cases}$$

sistemani ko'ramiz. Uning yechimi:

$$L_0 = \frac{C_0^{1/\delta}}{ap+b}, \qquad K_0 = \frac{C_0^{1/\delta}p}{ap+b}.$$

Quyidagi Q to'g'ri to'rtburchakni olaylik:

$$Q = \left\{ (L,K): \ 0 \le L_0 \le \frac{C_0^{1/\delta}}{ap+b}, \ 0 \le K_0 \le \frac{C_0^{1/\delta}p}{ap+b} \right\},$$

uning yuzi $S(p)$ ni topamiz:

$$S(p) = \frac{C_1^{2/\delta} \cdot p}{(a+bp)^2}, \qquad 0 < p < +\infty.$$

Shu $S(p)$ funksiya uchun quyidagi munosabatlar o'rinli:

$$\lim_{p\to+0} S(p) = \lim_{p\to+\infty} S(p) = 0, \quad S(p) > 0, \quad \forall p \in (0,+\infty).$$

Bu $S(p)$ funksiyaning eng katta qiymati mavjudligini ko'rsatadi. Boshqacha aytganda, $\lim_{L\to L_0} S(L,K) = \lim_{K\to K_0} S(L,K) = 0$ tengliklardan ham bu tasdiq kelib chiqadi. Endi $S(p)$ ga maksimal qiymat beradigan nuqtani, ya'ni mos nurni (magistralni) topamiz. Sodda hisoblashlar bajaramiz:

$$S'(p) = C_0^{2/\delta}\frac{b-ap}{(a+bp)^3}, \quad S'(p) = 0, \quad p_0 = \frac{b}{a}.$$

Shunday qilib, izlangan magistral $K = b/a \cdot L$ tenglama bilan ifodalanadi.

2. Umumlashgan Kobb-Duglas ICHF berilgan bo'lsin:

$$F(L,K) = a_0 K^{\alpha} L^{\delta-\alpha}, \quad a_0 > 0, \quad 0 < \delta - \alpha < 1, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Ravshanki, $\alpha < \delta < 1 + \alpha$. Demak, $\delta > 1$ bo'lishi mumkin. Biz $1 < \delta < 1 + \alpha$ holni ko'ramiz. Magistralni 6-bobdagi kabi chiziqlilashtirish usulidan foydalanib topamiz. Bu holda magistral tenglamasi

$$K = L^{(\delta-\alpha)/\alpha}$$

ko'rinishda bo'ladi.

3. Endi umumlashgan Solou ICHF ni olaylik:

$$F(L,K) = a_0\left[aK^{-\rho} + (1-a)L^{-\rho}\right]^{-\delta/\rho}, a_0 > 0, \ 0 < a < 1, \ \rho > -1, \ \delta > 0$$

Bu funksiyaning magistralini topish uchun ham chiziqlilashtirish usulini qo'llaymiz. Sodda hisoblashlar ko'rsatadiki, magistral tenglamasi quyidagi

$$K = \left[a/(1-a)\right]^{1/\delta} \cdot L$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu – to'g'ri chiziq nuridan iborat.

Umumlashgan ikki faktorli neoklassik ICHF lar haqidagi ma'lumotlar 8.1 – 8.3 – jadvallarga joylashtirilgan.

8.1-jadval

$F(\lambda L, \lambda K) \equiv \lambda^{\delta} F(L,K); \quad \lambda > 0, \ \delta > 0; \ F(L,K) = L^{\delta} f(k)$
$\frac{\partial F}{\partial L} > 0, \ \frac{\partial F}{\partial L} = L^{\delta-1}\left[\delta f(k) - k f'(k)\right] \Leftrightarrow \quad 1 < \delta < 2, \ 0 < \frac{k f'(k)}{f(k)} < 1$

$\frac{\partial F}{\partial K} > 0,\ \frac{\partial F}{\partial K} = L^{\delta-1} f'(k) \Leftrightarrow f'(k) > 0$
$\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0,\ \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} = L^{\delta-2} \cdot \left\{ (1-\delta) \cdot \left[\delta \cdot f(k) - 2k \cdot f'(k) \right] + k^2 f''(k) \right\},\ 1 < \delta < 2$
$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0,\ \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} = L^{\delta-2} f''(k) \Rightarrow f''(k) < 0,$ $f(0) = 0,\ f(k) > 0,\ f'(k) > 0,\ f''(k) < 0,\ \forall k > 0$

8.2-jadval

	Umumlashgan IChF	Izokvantalar tenglamasi	Izokvantalar differensial tenglamasi	Magistrallar tenglamasi
1	Chiziqli IChF $F(L,K) = [aK + bL]^{\delta}$ $a > 0,\ b > 0,\ \delta > 0$	$[aK + bL]^{\delta} = C$	$\frac{dK}{dL} = -\frac{b}{a}$	$K = \frac{b}{a} L$
2	Kobb-Duglas ICHF $F(L,K) = a_0 K^{\alpha} L^{\delta-\alpha}$ $a_0 > 0,\ 0 < \alpha < 1,\ 0 < \delta - \alpha < 1$	$a_0 K^{\alpha} L^{\delta-\alpha} = C$	$\frac{dK}{dL} = -\frac{\delta - \alpha}{\alpha} \frac{b}{a}$	$K = L^{\frac{\delta-\alpha}{\alpha}}$
3	Solou ICHF $F(L,K) = a_0 \left[aK^{-\rho} + (1-a)L^{-\rho} \right]^{-\frac{\delta}{\rho}}$ $a_0 > 0,\ 0 < a < 1,\ \rho > -1,\ \delta > 0$	$F(L,K) = C$	$\frac{dK}{dL} = -\frac{1-a}{a} \frac{K^{\rho+1}}{L^{\rho+1}}$	$K = \left(\frac{1-a}{a} \right)^{-\frac{1}{\rho}} L$

8.3-jadval

№	Asosiy iqtisodiy-matematik xarakteristikalar	Asosiy xarakteristikalarning $k, f(k), f'(k), f''(k)$ lar orqali ifodasi	Umumlashgan Kobb-Duglas ICHF uchun asosiy xarakteristikalar	Umumlashgan Solou ICHF uchun asosiy xarakteristikalar
1	$\frac{K}{L}=k$	–	–	–
2	$y=\frac{F}{L^{\delta}}$	$f(k)$	a_0k^{δ}	$a_0\left[aK^{-\rho}+(1-a)L^{-\rho}\right]^{-\delta/\rho}$
3	$z=\frac{F}{K^{\delta}}$	$\frac{f(k)}{K^{\delta}}$	$a_0k^{\alpha-\delta}$	$a_0\left[a+(1-a)k^{-\rho}\right]^{-\delta/\rho}$
4	$v=\frac{\partial F}{\partial L}$	$L^{\delta-1}\left[\delta\cdot f(k)-k\cdot f'(k)\right]$	$a_0(\delta-\alpha)\cdot L^{\delta-1}k^{\alpha}$	$(1-a)\delta a_0\left[ak^{-\rho}+(1-a)\right]^{-\delta/\rho-1}$
5	$r=\frac{\partial F}{\partial K}$	$L^{\delta-1}\cdot f'(k)$	$a_0\cdot\alpha\cdot L^{\delta-1}k^{\alpha}$	$a\delta a_0K^{\delta-1}\left[a+(1-a)k^{\rho}\right]^{-\frac{\delta}{\rho}-1}$
6	$\alpha=\frac{\partial F}{\partial K}\cdot\frac{K}{F}$	$\frac{k\cdot f'(k)}{f(k)}$	α	$\frac{a\delta}{a+(1-a)k^{\rho}}$
7	$\beta=\frac{\partial F}{\partial L}\cdot\frac{L}{F}$	$\delta-\frac{k\cdot f'(k)}{f(k)}$	$\delta-\alpha$	$\frac{(1-a)\delta\cdot k^{\rho}}{a+(1-a)k^{\rho}}$
8	$s=\frac{\partial F}{\partial L}:\frac{\partial F}{\partial K}$	$\frac{\delta\cdot f(k)-k\cdot f'(k)}{f'(k)}$	$\frac{\delta-\alpha}{\alpha}k$	$\frac{1-a}{a}\cdot k^{\rho+1}$
9	$\sigma=\left(\frac{dS}{dk}\cdot\frac{k}{S}\right)^{-1}$	$\frac{f'(k)\left[\delta\cdot f(k)-k\cdot f'(k)\right]}{(\delta-1)\cdot\left[f'(k)\right]^2-k\cdot f(k)\,f''(k)}$	1	$\frac{1}{\rho+1}$

8-bobga oid masalalar

Quyidagi umumlashgan Kobb-Duglas va Solou ICHF (8.5) differensi[al] tenglamaning yechimi ekanligi isbotlansin va ularning magistrallari topilsin:

I. 1. $F(L,K)=\sqrt{K\,L}$. 3. $F(L,K)=\sqrt[12]{K^4L^5}$.

2. $F(L,K)=\sqrt[6]{K^3L}$, 4. $F(L,K)=\sqrt[3]{K\,L}$.

5. $F(L,K)=\sqrt[10]{K^5L^3}$. 6. $F(L,K)=L\sqrt[3]{K}$.

II. 1. $F(L,K)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{K^2+L^2}$. 3. $F(L,K)=\frac{2K^2L^2}{K^2+L^2}$.

2. $F(L,K)=\frac{1}{4}\left(\sqrt[4]{K}+\sqrt[4]{L}\right)^2$, 4. $F(L,K)=\frac{4K^2L^2}{(K+L)^2}$.

8-bobga oid nazorat savollari

1. Umumlashgan neoklassik ICHF ta'rifini bering.

2. Umumlashgan neoklassik ICHF qanday differensial tenglamani qanoatlantiradi?

3. Umumlashgan ikki faktorli Kobb-Duglas va Solou ICHF uchun 1^0-5^0 shartlarning bajarilishini tekshiring.

4. Umumlashgan Solou ICHF ning $\rho \to 0$ dagi xususiy holini tekshiring.

5. Umumlashgan Solou ICHF ning $\rho \to +\infty$ hamda $\rho \to -1$ dagi xususiy hollari chiqarilsin.

6. Umumlashgan ICHF lar uchun asosiy iqtisodiy-matematik xarakteristikalarni aytib bering.

7. Umumlashgan Kobb-Duglas va Solou ICHF lar uchun asosiy xarakteristikalarni hisoblang.

8. Umumlashgan ICHF lar uchun izokvanta, izoklinal va izokosta tushunchalarining ta'rifini keltiring.

9. Izokvantalar differensial tenglamasini yozib bering

10. Izokvantalarning uchta xossasini aytib bering.

11. Magistral ta'rifini va uning iqtisodiyotdagi ma'nosini keltiring.

12. Kobb-Duglas va Solou ICHF ning magistrallari tenglamasini yozib bering.

9-bob. IQTISODIY DINAMIKANING MATEMATIK MODELLARI

9.1-§. *Iqtisodiy dinamikaning modellari haqida*

Avvalgi boblarda iqtisodiy jarayonlarning statik modellari ko'rildi. Ularda L, K va $Y = F(L, K)$ kabi makroiqtisodiy ko'rsatkichlar vaqt o'tishi bilan o'zgarmaydi va biror $[0, T]$ vaqt davrida o'zgarmas bo'lib qoladi. Statik modellarga oid misollarni yechish model o'zgaruvchilari orasidagi optimal (eng foydali) munosabatni izlashdan iborat.

Aslida barcha makroiqtisodiy ko'rsatkichlar vaqt t ga bog'liq bo'ladi. Agar modellarda bunday ko'rsatkichlarni vaqt t ga bog'liq deb qaralsa, iqtisodiy jarayon haqida to'laroq tasavvurga ega bo'linadi. Ba'zi iqtisodiy dinamika modellarining mazmunini bayon etishdan avval "iqtisodiyot" tushunchasiga to'xtalamiz. Iqtisodiyot tushunchasining qisqa va "aniq" ta'rifini Rossiya FA ning akademigi V.L. Makarov quyidagicha bayon etgan: "Iqtisodiyot kishilarning mahsulotlarni ishlab chiqarish, taqsimlash-ayirboshlash va iste'mol qilish usullari bilan bog'langan faoliyati doirasidan iborat". Uning ta'biri bo'yicha iqtisodiyotning 4 elementi bor:

1) kishilar (iqtisodiyotning bosh elementi);

2) mahsulotlar (moddiy, nomoddiy – turli xizmatlar);

3) kishilarning turli faoliyatlari (bir xil mahsulotlarni boshqa turga aylantirish, mahsulotlarni iste'mol qilish bo'yicha faoliyat);

4) tashkiliy struktura.

Iqtisodiyot tushunchasi shunchalik keng va murakkabki, unga aniq chegara qo'yib bo'lmaydi. Hamma narsa qanday aniq iqtisodiyot ko'rilayotganiga bog'liq. Bu esa iqtisodiyotning holatini tavsiflaydigan o'zgaruvchilarga bog'liq. Bu o'zgaruvchilarning ba'zilari o'zgarmas, ba'zilari esa o'zgaruvchi bo'lishi mumkin. Iqtisodiyot elementlarining t vaqtdagi qiymati iqtisodiyotning shu t momentdagi *holatini* tavsiflaydi. Odatda, boshlang'ich t_0 momentda o'rganilayotgan iqtisodiyot holati berilgan bo'ladi.

Iqtisodiyot holatining o'zgarishini vaqt uzluksiz o'zgarib borganda ham, vaqtning butun qiymatlarida ham o'rganish mumkin. Agar iqtisodiyot 0 dan T momentgacha bo'lgan vaqt davomida o'rganilsa, iqtisodiyot holatlarining shu vaqt oralig 'iga mos majmuasi *iqtisodiyot trayektoriyasi* deyiladi. Bunda *T*> 0 rejalashtirish ufqi deyiladi. Makroiqtisodiyotda 7"Vetarli"katta qilib; tanlanadi.

Iqtisodiyot holatining vaqt o'tishi bilan o'zgarishi uning holati o 'zgaruvchilari orasidagi ba'zi munosabatlar bilan tavsiflanadigan qonunlar bo'yicha kechadi. Albatta, bunda iqtisodiyot holati faqat empirik (taxminan) ta'riflanadi. Ammo ko'pincha shuning o'zi ham iqtisodiyotni bashorat qilish uchun yetarli bo'ladi. Iqtisodiyot modeli, ya'ni iqtisodiy jarayon modeli - iqtisodiy jarayon kechishini uning o'zgaravchilari orasidagi munosabatlar bilan tavsiflanishidir. Agar iqtisodiy jarayonning matematik modelida vaqt uzluksiz o'zgarsa- *uzluksiz model,* agar u diskret (uzlukli) o'zgarsa - *diskret model deyiladi.*

Biz iqtisodiy jarayonlarning uzluksiz modellarini, aniqrog'i, iqtisodiy dinamikaning matematik modellarini o'rganamiz. Ular, birinchidan, biror ma'lum me'yorda abstraktlashtirilgan iqtisodiyot holatining kechishini tavsiflaydi, ikkinchidan, bunday modellar matematik jiddiylik bilan o 'rganilgan va modellami tavsiflash uchun dastlabki shart-sharoitlar tamomila aniq iqtisodiy ma'noga ega.

Iqtisodiyotning birinchi modellari yaratilishining qisqacha tarixiga to'xtalamiz. Eslatib o'tamizki, iqtisodiyot modellarini qurish, o'rganish va tatbiq etish iqtisodiyotni (iqtisodiy jarayonlami) *modellashtirish* deyiladi. Iqtisodiy jarayonlami modellashtirish o'zining azaliy tarixiga ega. Fransuz olimi doktor Fransua Keneni bu sohaning *pioneri* desa bo'ladi. Fransua Kene (1694-1774) o'zining "Iqtisodiyjadval" (1758), "Arifmetik formula" (1766) nomli asarlari bilan nom qozondi. Shu asarlarda u milliy iqtisodiyotni miqdoriy jihatdan tavsiflab berishga harakat qildi. Iqtisodiy jarayonlami modellashtirish sohasida Adam Smitning katta hissasini aytib o'tish lozim. U1776-yilda Londonda "Xalqlar boyligi, tabiati va sabablari haqida tadqiqot" nomli mashhur kitobni chop etdi. A.Kumo 1838-yilda Parijda "Boyliklar nazariyasi matematik prinsiplarining tadqiqoti" nomli nodir asarni nashr qildi. Bu sohada yana V.Geyl, Jon Fon Neyman, L.Valraslaming qo'shgan ulkan hissalarini ham eslatib o'tish lozim. L.Valras o'zining *"Elements d"Economic Politique Pure"* (Lausanne, 1874) nomli asarida quyidagi mashhur so'zlarni yozgan: "Sof iqtisodiyot nazariyasi butunlay fizika-matematikafanlarini eslatuvchi fandir".

Tabiiy ravishda mutaxassislami ko'proq iqtisodiyotning shunday matematik modellari qiziqtiradiki, bu modellar yordamida iqtisodiyotning o'sishini uning butun trayektoriyasi yoki alohida o'zgamvchilari bo'yicha kuzatib borish mumkin bo'ladi. Tegishli modellar "Iqtisodiy o'sishning matematik modellari" degan nom bilan ataladi. Bunday modellar dastlab XX asrning o'rtalarida paydo bo'ldi (Ramsey, Solou, Shell va boshqalar modellari). Birinchi bo'lib Solouning iqtisodiy o'sish modelida iqtisodiyotning kechishini tavsiflash uchun "ishlab chiqarish funksiyasi" jalb etildi. Bu funksiya oxirgi ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi Y bilan mehnat L va asosiy fondlar K hajmini bog'laydigan munosabatdir. Ma'lumki, ICHF tushunchasi amerikalik olimlar K.Kobb (matematik) va P.Duglas (iqtisodchi) nomlari bilan bog'langan. Birinchi ICHF 1928-yilda xuddi shu olimlar tomonidan kashf etilgan. Iqtisodiy dinamika modellarida mablag'ni optimal sarflash (optimal kapital qo'yish) masalalarini o'rganish R.Solou (1956) ishlaridan boshlangan. Solou milliy daromad Y ni (ishlab chiqarilgan mahsulotni) kapital qo'yishga (investitsiya) va iste'molga optimal ajratish masalasi bilan shug'ullangan, ya'ni $Y = I + C = sY + (1\text{-}s)Y$ tenglikda s ni topish masalasini qo'ygan, unda I – kapital hajmi, C – iste'mol hajmi. Optimallik jon boshiga iste'molni ($s = const$) yoki iste'molning integral fondini ($s = s(t), t \in [0; T]$) maksimum qilish ma'nosida tushuniladi. Bunda

$$s(t) = \frac{I(t)}{Y(t)}, \qquad 0 \le s(t) \le 1$$

miqdor jamg'arish normasi (tejash normasi) deyiladi.

$s(t)$ funksiya uchun ikki hol ko'rilgan:

1) $s(t) \equiv s$, $s = const$ $(0 < s < 1)$ – jamg'arish normasi o'zgarmas bo'lgan holni R.Solou o'rgangan;

2) $0 \le s(t) \le 1$ – jamg'arish normasi o'zgaruvchi, aniqrog'i, bo'lakli-uzluksiz bo'lgan holni K.Shell ko'rgan.

Har ikki holda ham ICHF lar *dinamik funksiya* bo'lgan.

Endi dinamik ICHF lar ta'rifiga to'xtalamiz:

9.1-ta'rif. *Faraz etaylik, ishlab chiqarish faktorlari* $x_1, x_2, ..., x_n$ *vaqt* t *ning funksiyalari:* $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$, Y *esa ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori bo'lsin. Unda*

$$Y(t) = F(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t);\ t) \tag{9.1}$$

munosabat dinamik ICHF (DICHF) deyiladi.

(9.1) dan ko'rinadiki, F funksiya t ga oshkor va $x_1, x_2, ..., x_n$ lar orqali oshkormas bog'liq. Vaqt t ga oshkor bog'liqlikda iqtisodiy jarayonni o'rganishda ilmiy-texnik progress (ITP) natijalari hisobga olinadi. Turgan gap, ITP dan foydalanish iqtisodiy o'sishga olib kelishi kerak, bu esa $Y(t)$

funksiyaning monoton o'sishini anglatadi. Agar (9.1) funksi[ya] $R_+^n \times [\,0\,;\,T\,]$ sohada uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsa, uning o'suv[chi] bo'lishi uchun t bo'yicha to'liq hosilasi musbat bo'lishi kerak, ya'[ni] $Y'(t) > 0,\ \forall t \in [0;T]$. Bu tengsizlikning bajarilishi iqtisodiy o'sish sod[ir] bo'lishining faqat zaruriy shartidir.

9.1-teorema. *Iqtisodiy o'sish bo'lishi uchun*

$$\frac{dY(t)}{dt} > 0, \quad \forall t \in [0;T] \tag{9.2}$$

tengsizlikning bajarilishi zarur.

Teoremaning ma'nosi shuki, har yili avvalgi yildagidan ko'proq ishlab chiqarish iqtisodiy o'sish uchun yetarli shart bo'la olmaydi. Quyidagi teorema zaruriy va yetarli shartlarni ifodalaydi.

9.2-teorema. *Iqtisodiy o'sish bo'lishi uchun ushbu*

$$\frac{dY(t)}{dt} > 0, \quad \frac{Y(t)}{L(t)} > \frac{Y(t-1)}{L(t-1)}, \quad t \geq 1 \tag{9.3}$$

tengsizliklarning bajarilishi zarur va yetarli.

Mazkur teorema $x_1 = L(t)$, $x_2 = K(t)$ bo'lgan hol uchun yozilgan. Agar $L(t)$ – aholi soni bo'lsa, $Y(t)/L(t)$ – jon boshiga ishlab chiqarilgan mahsulot miqdorini anglatadi. Gap shundaki, (9.2) shart bajarilsa ham, aholi soni shunday ko'payishi mumkinki, (9.3) ning ikkinchi tengsizligi bajarilmasligi mumkin. Aksincha, (9.3) ning ikkinchi tengsizligi bajarilsa ham, (9.2) bajarilmasligi mumkin. Bu iqtisodiy o'sish sodir bo'lmaganda, ya'ni ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori kamayganda, aholi soni yanada tezroq kamayganda sodir bo'ladi.

$Y(t)$ funksiyaning to'liq hosilasini yozamiz:

$$\frac{dY(t)}{dt} = \frac{\partial Y(t)}{\partial t} + \frac{\partial Y(t)}{\partial x_1}\dot{x}_1(t) + \frac{\partial Y(t)}{\partial x_2}\dot{x}_2(t) + \ldots + \frac{\partial Y(t)}{\partial x_n}\dot{x}_n(t) =$$

$$= \frac{\partial Y(t)}{\partial t} + \left(\frac{\partial Y(t)}{\partial x},\ \dot{x}(t)\right),$$

unda $\dot{x}(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$, $\left(\dfrac{\partial Y(t)}{\partial x},\ \dot{x}(t)\right)$ – skalar ko'paytma.

Agar F funksiya t ga oshkor bog'liq bo'lmasa, unda ushbu

$$Y(t) = F(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)) \qquad (9.4)$$

ko'rinishdagi DICHF avtonom DICHF (ADICHF) deyiladi. Bu holda ITP natijalari e'tiborga olinmaydi. Barcha masalalar $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ faktorlar orasidagi optimal munosabatlarni topish bilan bog'langan bo'ladi. Makroiqtisodiy jarayonlarda ko'proq ikki faktorli ADICHF lar uchraydi. Ular quyidagi

$$Y(t) = F(L(t), K(t)) \qquad (9.5)$$

ko'rinishda yoziladi.

Agar (9.5) funksiya (1^0-5^0) neoklassik shartlarni qanoatlantirsa (5-bob, 2-§ ga qarang), uni neoklassik ADICHF deyiladi.

ADICHF ga misollar keltiramiz:

1. $Y(t) = a_0 K^{\alpha}(t) L^{1-\alpha}(t)$, $a_0 > 0$, $0 < \alpha < 1$, $t \in [0,T]$ – Kobb–Duglas ADICHF.

2. $Y(t) = a_0 \left[aK^{-\rho}(t) + (1-a)L^{-\rho}(t) \right]^{-\frac{1}{\rho}}$, $a_0 > 0$, $0 < a < 1$, $\rho > -1$ – Solou ADICHF.

3. $Y(t) = a\,K(t) + b\,L(t)$, $a > 0$, $b > 0$ – chiziqli ADICHF.

9.2-§. Iqtisodiy dinamikaning o'zgarmas jamg'arish normali modeli: mehnat resurslari eksponensial funksiya

Quyida biz Solouning sodda dinamik modelini ko'ramiz. Bu model quyidagi munosabatlar bilan tavsiflanadi:

$$\dot{K}(t) = I(t) - \mu K(t), \quad 0 \le \mu < 1, \quad \mu = const \ (0{,}02 \le \mu \le 0{,}04), \qquad (9.6)$$

$$\dot{L}(t) = \eta L(t), \quad \eta = const \ (0{,}005 \le \eta \le 0{,}001), \qquad (9.7)$$

$$Y(t) = F(\,L(t), K(t)\,) = I(t) + C(t) = s\,Y + (1-s)\,Y, \ s = const, \ 0 < s < 1, \qquad (9.8)$$

bunda $F(L(t), K(t))$ neoklassik shartlarni qanoatlantiradi, $I(t) = sY(t)$ – investitsiyalar (kapital qo'yish), $C(t) = (1-s)\,Y(t)$ – iste'mol, $K(t)$ – mavjud asosiy fondlar hajmi, $L(t)$ – mavjud mehnat resurslari hajmi, $s = I(t)/Y(t)$ ($= const$) – jamg'arish normasi, μ – asosiy fondlarning chiziqli yaroqsizlanishi koeffitsiyenti. (9.7) munosabat ishchi kuchining o'sish sur'ati $\dot{L}(t)/L(t)$ o'zgarmas va η ga tengligini anglatadi. Endi jon boshiga iste'mol tushunchasini kiritamiz:

k ning vaqt bo'yicha o'zgarishini (9.10), (9.11) munosabatlar bo'yicha tekshirish yetarli.

(9.10) tenglama avtonom bo'lgani uchun uning statsionar yechimlari (muvozanat holatlari) quyidagi tenglamadan topiladi:

$$s\,f(k)-(\mu+\eta)\,k=0\,. \tag{9.12}$$

Statsionar yechimlarning mavjudligi haqidagi teoremani bayon etish uchun quyidagi

$$\lim_{k\to+0} f'(k)=f'(+0)$$

miqdor haqida gapiraylik. $f'(+0)$ miqdor chekli bo'lishi ham ($\rho>0$ da Solou funksiyasi uchun), cheksiz bo'lishi ham mumkin (Kobb-Duglas funksiyasi uchun).

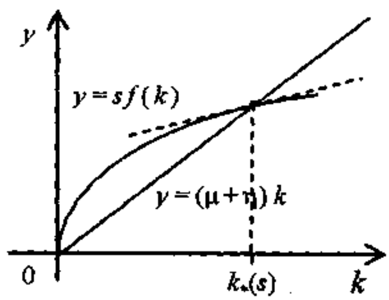
9.3-teorema. *Agar* (9.10) *asosiy differensial tenglama uchun* (9.11) *boshlang'ich shart berilgan bo'lib, ushbu*

$$\mu+\eta<s\,f'(+0) \tag{9.13}$$

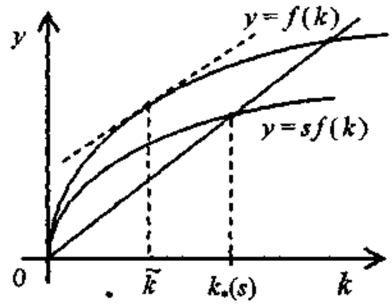
tengsizlik o'rinli bo'lsa, unda (9.10) *tenglama yagona* (*sodda yechimdan tashqari*) *musbat va asimptotik turg'un* (*Lyapunov bo'yicha*) $[0;T]$ *vaqt oralig'ida aniqlangan statsionar yechim* $k(t)\equiv k_*>0$ ga ega.

Isbot. Statsionar yechimlar (9.12) tenglamadan topiladi. Bu tenglama yagona musbat yechimga ega. Haqiqatan, ikkita $y=s\,f(k)$ va $y=(\mu+\eta)\,k$ funksiyani ko'ramiz. Ularning grafiklari kesishgan nuqtalar statsionar yechimni aniqlaydi. Ma'lumki, $f(0)=0$, shuning uchun $k(t)\equiv 0$ sodda yechimga egamiz. Ammo bizni $k>0$ bo'lgan hol qiziqtiradi. Musbat statsionar yechimni izlaymiz. Har ikki funksiyaning grafigi koordinata boshidan chiqadi va I chorakda joylashgan. Ammo (9.13) ga ko'ra $y=s\,f(k)$ funksiya grafigi urinmasining burchak koeffitsiyenti koordinata boshida $y=(\mu+\eta)\,k$ nurning burchak koeffitsiyentidan katta. Undan tashqari, $f(k)$ funksiya neoklassik shartlarni qanoatlantiradi (ya'ni $f'(k)>0$, $f''(k)<0$, $\forall\ k>0$), shuning uchun $y=s\,f(k)$ funksiya botiq. Bu $y=s\,f(k)$ va $y=(\mu+\eta)\,k$ funksiya grafiklari abssissasi $k_*>0$ bo'lgan nuqtada kesishishini tasdiqlaydi. Shu k_* son izlangan statsionar yechim $k(t)\equiv k_*$ bo'ladi. Demak, musbat statsionar yechim yagona ekan. Endi uning asimptotik turg'un ekanligini isbotlash qoldi (9.1-chizma).

Agar (9.10) tenglamaning o'ng tomoni $y=s\,f(k)-(\mu+\eta)\,k$ uchun $\varphi'(k_*)<0$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, bundan skalar differensial tenglama uchun Lyapunov-Puankare teoremasiga ko'ra (M.Salohitdinov, G'.Nasritdinov. Oddiy differensial tenglamalar. Darslik. "O'zbekiston" nashriyoti, Toshkent, 1994, 11-bob, 11.3-§, 314-bet) $k(t) \equiv k_*$ statsionar yechim asimptotik turg'un bo'ladi. Haqiqatan, $\varphi'(k_*) = s\,f'(k_*) - (\mu+\eta) < 0$. Shuni isbot etish talab etilgan edi. 9.3-teorema to'liq isbotlandi.



9.1-chizma



9.2- chizma

9.2-ta'rif. *Iqtisodiy o'sishning qurollanganlikning o'zgarmas* k_* *qiymatiga mos rejimi balanslangan o'sish deyiladi.*

Makroiqtisodiy sistemaning parametrlari s, μ, η berilgan bo'lsa, k_* miqdor bir qiymatli aniqlanadi. Amalda mehnat resurslari hajmining o'sish sur'ati η $(0{,}005 \le \eta \le 0{,}01)$ va yaroqsizlanish koeffitsiyenti μ $(0{,}02 \le \mu \le 0{,}04)$ avvaldan ma'lum bo'ladi. Shuning uchun k_* ni jamg'arish normasining funksiyasi deb qarash mumkin: $k_* = k_*(s)$.

9.1-lemma. *Balanslangan o'sish rejimi* $k_*(s)$ *funksiya* $(0;1)$ *intervalda aniqlangan, differensiallanuvchi va monoton o'suvchi.*

Isbot. Ushbu $\dfrac{dk_*(s)}{ds} > 0,\ \forall s \in (0;1)$ tengsizlikni isbotlaymiz. Uning uchun $s \cdot f'(k_*(s)) - (\mu+\eta)\,k_*(s) = 0$ sonli tenglikni ko'ramiz. Ikki tomonini s bo'yicha differensiallaymiz:

$$f(k_*(s)) + s\,f'(k_*(s)) \cdot \frac{dk_*(s)}{ds} - (\mu+\eta) \cdot \frac{dk_*(s)}{ds} = 0\,.$$

Bundan

$$\frac{dk_*(s)}{ds} = \frac{f(k_*(s))}{(\mu+\eta) - s\,f'(k_*(s))}$$

formula kelib chiqadi, unda kasrning mahraji va surati musbat. Shuning uchun $\dfrac{dk_*(s)}{ds} > 0$, $\forall s \in (0;1)$ tengsizlik o'rinli.

Shunday qilib, balanslangan o'sish $k_*(s)$, $0 < s < 1$ funksiya bilan aniqlanadi. Har bir s ($0 < s < 1$) uchun balanslangan o'sishning bitta rejimini hosil qilamiz. Bunday rejimlar cheksiz ko'p. Ularning ichidan (9.9) funksiyaga eng katta qiymat beradiganini topish lozim. Boshqacha aytganda, jamg'arish normasining ushbu

$$c(s) = (1 - s) \cdot f(k_*(s)) \to \max, \quad 0 < s < 1 \tag{9.14}$$

masalaning yechimi bo'ladigan qiymatini topish kerak. $c(s)$ funksiya (0; 1) intervalda aniqlangan va ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi hamda $c(s) > 0$, $\forall s \in (0;1)$.

Ravshanki, quyidagi munosabatlar bajariladi:

$$\lim_{s \to +0} c(s) = \lim_{s \to +1-0} c(s) = 0, \quad \lim_{s \to +0} k_*(s) = 0, \quad c(s) > 0, \quad \forall s \in (0;1).$$

Bundan $c(s) > 0$ funksiyaning eng katta qiymati mavjud ekani kelib chiqadi. Endi shu funksiyaga eng katta qiymat beruvchi $\tilde{s} \in (0,1)$ ni topamiz. Buning uchun avval (9.14) dagi $c(s)$ funksiyani o'zgartirib yozamiz ($sf(k_*(s)) - (\mu + \eta)\, k_*(s) = 0$ tenglikka ko'ra):

$$c(s) = f(k_*(s)) - (\mu + \eta) \cdot k_*(s). \tag{9.15}$$

Endi $c'(s)$ ni hisoblab, nolga tenglashtiramiz:

$$f'(k_*(s)) \cdot \frac{dk_*(s)}{ds} - (\mu + \eta) \cdot \frac{dk_*(s)}{ds} = 0$$

yoki

$$[\, f'(k_*(s)) - (\mu + \eta)\,] \cdot \frac{dk_*(s)}{ds} = 0.$$

Bundan $\dfrac{dk_*(s)}{ds} > 0$ ga ko'ra

$$f'(k_*(s)) - (\mu + \eta) = 0 \tag{9.16}$$

tenglama kelib chiqadi. Bundan statsionar nuqtani topib bo'lmaydi, chunki unda s oshkormas qatnashgan. Aslida k ga nisbatan (9.16) tenglamani

$$f'(k) = \mu + \eta \tag{9.17}$$

ko'rinishda yozamiz. (9.13) ga ko'ra $s=1$ da $\mu+\eta<f'(+0)$ tengsizlik o'rinli. Ma'lumki, $k>0$ uchun $y=f(k)$ botiq. Shuning uchun biror $\widetilde{k}$ da $f(\widetilde{k})=\mu+\eta$ tenglik o'rinli. Shunday qilib, (9.16) tenglama yagona musbat $\widetilde{k}$ yechimga ega.

Endi (9.12) tenglamaga $k=\widetilde{k}$ ni qo'yamiz:

$$s\,f(\tilde{k})-(\mu+\eta)\,\tilde{k}=0.$$

Bundan yagona statsionar nuqta $\widetilde{s}$ ni topamiz:

$$\widetilde{s}=\frac{(\mu+\eta)\widetilde{k}}{f(\widetilde{k})}.$$

Endi $f'(\widetilde{k})=(\mu+\eta)$ tenglikdan foydalanib, $\widetilde{s}$ ni uzil-kesil aniqlaymiz:

$$\widetilde{s}=\frac{\widetilde{k}\,f'(\widetilde{k})}{f(\widetilde{k})}. \tag{9.18}$$

Avvaldan ma'lum ediki, neoklassik ICHF lar uchun $0<\dfrac{k\cdot f'(k)}{f(k)}<1$, $\forall k>0$ tengsizlik o'rinli. Bundan $0<\widetilde{s}<1$ ekani kelib chiqadi. Statsionar nuqta yagona va $c(s)$ funksiyaning (0; 1) da eng katta qiymati mavjud bo'lgani uchun shu $s=\widetilde{s}$ nuqtada $c(s)$ funksiya o'zining eng katta qiymatiga erishadi. Shu bilan quyidagi teorema isbotlandi, desak bo'ladi.

9.4-teorema. *Agar* $\widetilde{k}$ *chekli* (9.17) *tenglamaning yechimi bo'lsa, optimal jamg'arish normasi* $\widetilde{s}$ (9.18) *formula yordamida topiladi.*

Shunday qilib, iqtisodiy sistema trayektoriyasini $\widetilde{s}$ va $\widetilde{k}$ lar orqali hisoblash mumkin:

$$K(t)=L(t)\cdot\widetilde{k}=L_0e^{\eta t}\widetilde{k},\quad L(t)=L_0e^{\eta t},\ Y(t)=L(t)\cdot f(\widetilde{k})=L_0e^{\eta t}f(\widetilde{k}),$$

$$I(t)=\widetilde{s}\,Y(t)=L_0\,\widetilde{s}\,f(\widetilde{k})\cdot e^{\eta t},\quad c(t)=(1-\widetilde{s})\,Y(t)=(1-\widetilde{s})\,L_0f(\widetilde{k})\cdot e^{\eta t}.$$

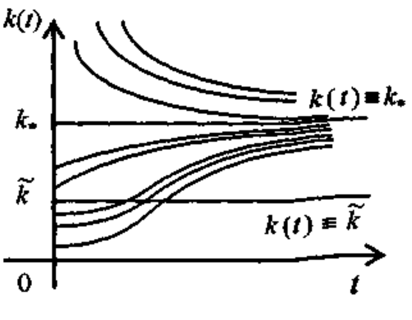
Oxirgi munosabatlar ko'rsatadiki, qurollanganlikning statsionar trayektoriyasi $k(t)\equiv\widetilde{k}$ bo'ylab modelning barcha asosiy o'zgaruvchilari vaqt bo'yicha o'zgarmas bo'lgan holda mehnat resurslarining o'sish sur'atiga teng bo'lgan sur'at bilan o'sadi.

Endi statsionar yechimdan farq qiladigan yechimlar qanday bo'lishini tekshiramiz. 9.1-teoremaga ko'ra statsionar yechim asimptotik turg'un. Buning ma'nosi shuki, (9.10) differensial tenglamaning ixtiyoriy boshlang'ich shartni qanoatlantiradigan $k(t)$ yechimi ($k(0)=k_*$, $k_0 \neq k_*$) t ning yetarli katta qiymatlarida $k(t)=k_*$ – statsionar yechimga intiladi.

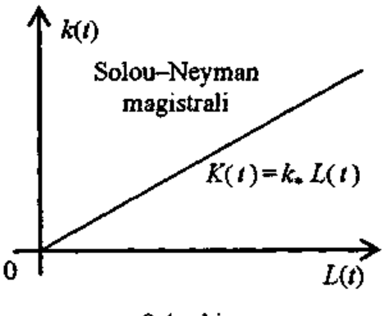
Avval $k_0 > k_*$ bo'lsin. Bu holda $s\,f(k_0)-(\mu+\eta)\,k_0 < 0$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bundan $\dot{k}(t)<0, t>0$ tengsizlik kelib chiqadi. Endi $\ddot{k}$ ni tekshiramiz:

$$\ddot{k}=s\,f'(k)\,\dot{k}-(\mu+\eta)\,\dot{k}=[\,s\,f'(k)-(\mu+\eta)\,]\,\dot{k}\,.$$

$k_0 > k_*$ ga ko'ra $s\,f'(k)-(\mu+\eta)<0$ tengsizlik o'rinli bo'lgani uchun $\ddot{k}>0$. Demak, $k_0 > k_*$ bo'lganda $k(t)$ trayektoriya qavariq (9.3-chizma).



9.3-chizma



9.4- chizma

Endi $k_0 < k_*$ holni ko'ramiz. Uch hol yuz berishi mumkin:

1) $k_0=\tilde{k}<k_*$; 2) $0<k_0<\tilde{k}$; 3) $\tilde{k}<k_0<k_*$.

1) $k_0=\tilde{k}<k_*$ bo'lsin. Bunda $k(t)\equiv\tilde{k}$ chiziq (nur) $k(t)$ funksiyaning burilish nuqtalaridan tashkil topgan bo'ladi. 2) va 3) hollarni ko'rganda bunga ishonchimiz komil bo'ladi. Agar 2) $0<k_0<\tilde{k}$ bo'lsa, unda, ravshanki, $\dot{k}=\tilde{s}\,f(k)-(\mu+\eta)k>0$, $\ddot{k}=\left[\tilde{s}\,f(\tilde{k})-(\mu+\eta)\right]k>0$ bo'ladi. Bu $0<k_0<\tilde{k}$ da

$k(t)$ funksiyaning qavariqligini anglatadi. Agar 3) $\tilde{k} < k_0 < k_*$ bo'lsa, yana $\dot{k} > 0$, ammo $\ddot{k} < 0$ bo'ladi. Bundan $k(t)$ funksiyaning botiqligi kelib chiqadi. Demak, $k = \tilde{k}$ dan o'tishda qavariqlik botiqlikka o'tadi, ya'ni $k_0 = \tilde{k}$ da $k(t) = \tilde{k}$ chiziq $k(t)$ funksiyaning burilish nuqtalaridan tashkil topgan bo'ladi.

L va K o'zgaruvchilar tekisligida $K(t) = k_* \, L(t)$ nur Solou–Neyman magistrali deyiladi (9.4-chizma).

1966-yilda E.Felps "oltin qoida"ni taklif qildi (ba'zida "optimal qoida" deganda optimal jamg'arish normasi $\tilde{s}$ ni topish usuli tushuniladi). Ko'rilayotgan holda quyidagicha aytiladi: *asosiy fondlarga qo'yilgan kapital-mablag' kapitaldan olingan daromadga teng.*

Bu quyidagi munosabatlarda ko'rinadi:

$$\tilde{s}\,\tilde{L}\, f(\tilde{k}) = \tilde{L}\,\tilde{k}\, f'(\tilde{k}), \quad \tilde{s}\, F(\tilde{L},\tilde{K}) = \tilde{K}\frac{\partial F(\tilde{L},\tilde{K})}{\partial K},$$

bunda $I = \tilde{s}\, F(\tilde{L},\tilde{K})$–asosiy fondlarga qo'yilgan mablag', $\tilde{K}\dfrac{\partial F(\tilde{L},\tilde{K})}{\partial K}$ – kapitaldan olingan daromad.

Misollar.

1-misol. $F(L,K) = a_0\, K^{\alpha} L^{1-\alpha}, \quad a_0 > 0, \quad 0 < \alpha < 1$.

Ravshanki, bu holda $f(k) = a_0\, k^{\alpha}, \;\; f'(k) = \alpha\, a_0\, k^{\alpha-1}$; $\tilde{k}$ ni $\alpha\, a_0\, k^{\alpha-1} = \mu + \eta$ tenglamadan topamiz:

$$\tilde{k} = \left(\frac{a_0\alpha}{\mu+\eta}\right)^{1/(1-\alpha)}, \quad \tilde{s} = \alpha.$$

2-misol. $F(L,K) = a_0\left[aK^{-\rho} + (1-a)L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}, \; a_0 > 0, \;\; 0 < a < 1, \; \rho > -1$

Bunda $f(k) = a_0\left[ak^{-\rho} + (1-a)\right]^{-\frac{1}{\rho}}, \;\; f'(k) = aa_0\left[a + (1-a)k^{\rho}\right]^{-\frac{1+\rho}{\rho}}$.
Endi ushbu

$$a a_0 \left[\, a + (1-a)k^{\rho}\, \right]^{-\frac{1+\rho}{\rho}} = \mu + \eta$$

tenglamadan topiladi:

$$\widetilde{k} = (1-\alpha)^{-\frac{1}{\rho}} \left[\left(\frac{a_0 \alpha}{\mu+\eta} \right)^{(1+\rho)/\rho} - a \right]^{1/\rho}, \qquad \frac{a_0}{\mu+\eta} > a^{1/(1+\rho)}.$$

Oxirida optimal jamg'arish normasi $\widetilde{s}$ ni topamiz:

$$\widetilde{s} = \frac{\widetilde{k} \cdot f'(\widetilde{k})}{f(\widetilde{k})} = a \left(\frac{\mu+\eta}{a_0 \alpha} \right)^{\rho/(1+\rho)}.$$

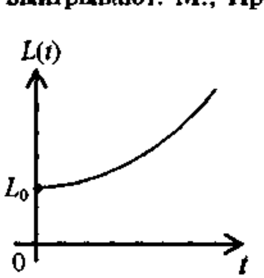
Ma'lumki, $0 < \widetilde{s} < 1$ tengsizlik o'rinli. Oxirgi formuladan iqtisodiy sistemaning parametrlari a, a_0, μ, η, ρ orasidagi bog'lanish kelib chiqadi:

$$\mu + \eta < a_0 \alpha^{-\frac{1}{\rho}}.$$

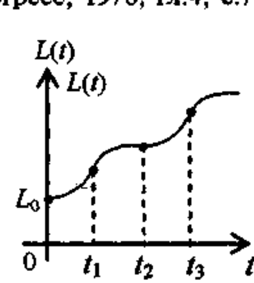
9.3-§. Iqtisodiy dinamikaning o'zgarmas jamg'arish normali modeli: *mehnat resurslari hajmi chiziqli-botiq funksiya*

I. Mehnat resurslari (aholi soni) o'sishining botiq qonuni haqida

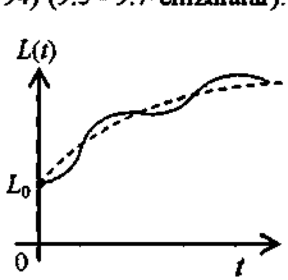
Iqtisodiyotda, asosan, mehnat resurslarining o'sishi haqida gap boradi. Ish bilan bandlar soni aholi soniga bog'liq. Ish bilan bandlar sonining ko'payishi (o'sishi) esa faqat aholi soniga bog'liq emas. Ko'pgina ilmiy risolalarda mehnat resurslari (aholi soni) eksponensial qonun bo'yicha o'sadi deb qaraladi. Bu $L(t)$ funksiyaning hosilasi $\dot{L}(t)$ shu $L(t)$ ga chiziqli bog'liq deb qaraladi degan so'z, ya'ni $\dot{L}(t) = \eta \cdot L(t)$, bunda η – o'sish sur'ati. Bundan $L(t) = L_0 \cdot e^{\eta t}$, $L_0 > 0$ kelib chiqadi (9.5-chizma). Shuning uchun $\ddot{L}(t) = \eta^2 \dot{L}(t) > 0$, ya'ni $L = L(t)$ funksiya qavariq (9.5-chizma). Demak, t ning biror qiymatidan boshlab $L(t)$ ning qiymati yetarli katta bo'lib ketishi mumkin. Tug'ilishlar soni haqida L.Eyler quyidagi gipotezani aytgan: "tug'ilishlar soni yildan yilga geometrik progressiya bo'yicha ortib boradi". Ingliz ruhoniysi Maltus iqtisodiyot bilan, aniqrog'i, demografiya bilan shug'ullangan. U Eyler gipotezasiga qo'shimcha qilib, "oziq-ovqat mahsulotlari arifmetik progressiya bo'yicha ortib boradi" degan. Eslatib o'tamizki, aholi sonining (umumiy holda mehnat resurslari hajmining) eksponensial o'sish qonuni vaqti-vaqti bilan va qisqa vaqt oralig'ida rivojlangan mamlakatlarda sodir bo'ladi hamda o'sish tezligi vaqt o'tishi bilan barqarorlashadi. Bunda ma'lum vaqt oralig'ida egri chiziqning qavariq qismi botiq, aksincha, botiq qismi qavariq qismga o'tadi (9.6-chizma). Umuman, o'sish biror botiq egri chiziq yaqinida S-simon egri chiziq bo'ylab sodir bo'ladi. Tegishli botiq egri chiziq o'sish tezligining barqarorlashishini anglatadi (qarang: Р.Фостер. Обновление производства: атакующие выигрывают. М., Прогресс, 1978, гл.4, с.78-94) (9.5 - 9.7-chizmalar).



9.5-chizma



9.6- chizma



9.7- chizma

Mehnat resurslari hajmining (aholi sonining) o'sish tezligiga qanday parametrlar ta'sir qiladi? – degan savol tug'iladi. Umuman, o'sish tezligi ko'pgina parametrlarga bog'liq. Eyler gipotezasi bo'yicha $\dot{L}(t)$ (o'sish tezligi) shu $L(t)$ ning hajmiga bog'liq: $\dot{L} = \eta L$. Ba'zi mamlakatlarda aholining yashash sharoitining yaxshilanib borishi, iqtisodiy rivojlanish sodir bo'layotganiga sabab ishlab chiqarishga qo'yilayotgan mablag'larning (kapitalning) ortib borishidir, bunday sharoitda ishlab chiqariladigan mahsulot (milliy daromad) hajmi ortib boradi. Demak, $\dot{L}(t)$ miqdor faqat $L(t)$ ga bog'liq bo'lib qolmasdan, yana $K(t)$ ga – kapital sarfga ham bog'liq. Agar bu bog'lanish $L(t)$ va $K(t)$ ga nisbatan chiziqli bo'lsa, $\dot{L}(t)$ uchun quyidagi munosabatni yozish mumkin:

$$\dot{L}(t) = \eta\, L(t) + \nu\, K(t), \quad \eta > 0, \ \nu > 0. \qquad (9.19)$$

Ravshanki, $\ddot{L}(t) = \eta\, \dot{L}(t) + \nu\, \dot{K}(t)$, $t > 0$. Qanday shartlar bajarilganda $\ddot{L}(t) < 0$, ya'ni $L(t)$ funksiyaning grafigi botiq bo'ladi?

Ushbu

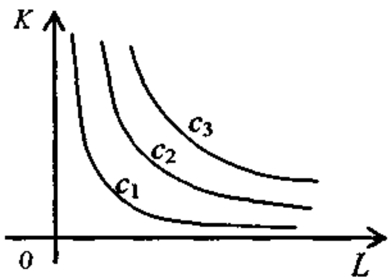
$$\ddot{L}(t) < 0 \qquad (9.20)$$

tengsizlikni qanoatlantiradigan botiq $L(t)$ funksiyani *chiziqli-botiq* deb ataymiz. Chiziqlilik $\dot{L}(t)$ ning $L(t)$ va $K(t)$ ga chiziqli bog'liqligini, botiqlik esa $L(t)$ funksiyaning botiqligini anglatadi.

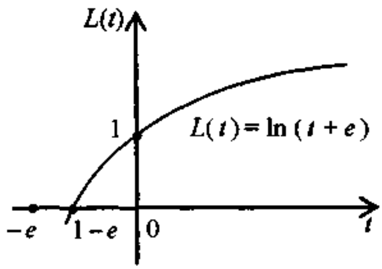
Izokvantalar $F(L,K)=C$, $C>0$ tenglama bilan beriladi. Undan, ma'lumki,

$$\frac{dK}{dL} = -\frac{\partial F}{\partial L} \Big/ \frac{\partial F}{\partial K} < 0$$

tengsizlik kelib chiqadi. Har bir izokvanta ICHF ning sath chiziqlaridan iborat bo'lib, qavariq egri chiziqdir (9.8-chizma).



9.8-chizma



9.9- chizma

Endi (9.19) ning ikki tomonini differensiallaymiz:

$$\ddot{L}(t) = \eta\,\dot{L}(t) + \nu\,\dot{K}(t) = \dot{L}(t)\left(\eta + \nu\frac{\dot{K}}{\dot{L}}\right) = \dot{L}\left(\eta + \nu\frac{dK}{dL}\right). \qquad (9.21)$$

9.5-teorema. $L(t)$ *funksiya botiq bo'lishi uchun har bir izokvanta bo'ylab ushbu*

$$\frac{dK}{dL} < -\frac{\eta}{\nu} < 0 \qquad (9.22)$$

tengsizlik bajarilishi yetarli.

Isboti $\dot{L} > 0$ va (9.22) tengsizliklardan kelib chiqadi. Haqiqatan, (9.21) ga ko'ra

$$\ddot{L}(t)=\dot{L}\cdot\left(\eta+\nu\cdot\frac{dK}{dL}\right)<\dot{L}\cdot\left(\eta+\nu\cdot\left(-\frac{\eta}{\nu}\right)\right)=0.$$

Misollar.

1-misol. $L(t)=\ln(t+e)$, t≥0 (9.9-chizma) deylik. Unda $\dot{L}(t)=\frac{1}{t+e}>0$,

$\ddot{L}(t)=-\frac{1}{(t+e)^2}<0$, t > 0. Quyidagi $\dot{L}=\eta L+\nu K$, $\ddot{L}=\eta\dot{L}+\nu\dot{K}$ munosabatlarni ko'raylik. $\dot{L}(t)$ va $\ddot{L}(t)$ larning ifodalaridan foydalansak,

$$-\frac{1}{(t+e)^2}=\eta\cdot\frac{1}{t+e}+\nu\cdot\dot{K}$$

kelib chiqadi. Biz birinchi tartibli differensial tenglamaga keldik. Uni integrallaymiz:

$$\dot{K}=\frac{1}{\nu(t+e)}+\frac{\eta}{\nu}\cdot\ln(t+e).$$

Endi dK/dL ni hisoblaymiz:

$$\frac{dK}{dL}=\frac{\dot{K}}{\dot{L}}=\left[-\frac{1}{\nu(t+e)}-\frac{\eta}{\nu}\cdot\ln(t+e)\right]:\frac{1}{t+e}=-\frac{1}{\nu(t+e)}-\frac{\eta}{\nu}<-\frac{\eta}{\nu}.$$

Shunday qilib, ICHF izokvantalarida (9.22) tengsizlik bajariladi. Kobb-Duglas ICHF uchun (9.22) tengsizlik ushbu

$$\frac{K}{L}>\frac{\eta}{\nu}\cdot\frac{\alpha}{1-\alpha}$$

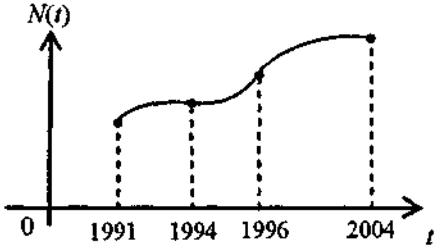
tengsizlik uchun bajariladi.

2-misol. Ikkinchi misol o'rnida 1991-2001-yillar davomida O'zbekiston Respublikasi aholisining o'sish dinamikasini ko'raylik. Avval shu yillardagi aholi soni jadvalini keltiramiz:

Jadvaldan ko'rinadiki, $N(t)$ funksiya o'suvchi, ammo o'sish tezligi (Δ_i miqdorlar) asosan kamayib borayapti. Faqat 1995 va 1996-yillarda o'sish tezroq bo'lgan. $N(t)$ funksiya 1991-1994-yillarda botiq, 1994-1996-yillarda qavariq va 1996-2004-yillarda yana botiq. Demak, $N(t)$ chiziq S-simon ko'rinishda (9.9a chizma).

i	Yillar	Aholi soni (mln) N_i	$\Delta_i = N_{i+1} - N_i$
1	1991	20,862	
2	1992	21,360	0,498
3	1993	21,852	0,498
4	1994	22,828	0,430
5	1995	23,002	0,720
6	1996	23,444	0,442
7	1997	23,867	0,423
8	1998	24,231	0,364
9	1999	24,583	0,352
10	2000	24,908	0,325
11	2001	25,211	0,303
12	2002	25,523	0,312
13	2003	25,803	0,280
14	2004	26,116	0,313

(Ma'lumotlar "O'zbekiston Respublikasi Davlat statistika qo'mitasi, 2005" dan olingan).



9.9a-chizma

II. ***Iqtisodiy dinamikaning mehnat resurslari hajmi chiziqli-botiq bo'lgan modeli.***

Iqtisodiy sistema (iqtisodiy jarayon) quyidagi munosabatlar bilan tavsiflansin, deylik:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{K} = I - \mu K, \quad 0 \le \mu \le 1, \\ \dot{L} = \eta L + \nu K, \quad \eta = const > 0, \quad \nu = const > 0, \\ Y = F(L,K) = I + C = sY + (1-s)Y, \ s = const > 0, \ 0 < s < 1, \\ c(t) = \dfrac{C(t)}{L(t)} \to \max, \ 0 < s < 1. \end{array}\right\} \quad (9.23)$$

Bu munosabatlardan ko'rinadiki, asosiy fondlarning chiziqli yaroqsizlanishi va mehnat resurslarining hajmi chiziqli-bog'liq bo'lgan hollarga egamiz. Masala jon boshiga iste'molning eng katta qiymatini ta'minlaydigan (optimal) jamg'arish normasini topishdan iborat. Endi ko'rilayotgan jarayonning asosiy differensial tenglamasini chiqaramiz. (9.23) munosabatlardan ikkinchisini

$$\frac{\dot{L}}{L}=\eta+\nu k$$

ko'rinishda yozib olamiz. Endi $\dot{k}=\frac{dk}{dt}$ ni hisoblaymiz:

$$\dot{k}=\frac{d}{dt}\left(\frac{K}{L}\right)=\frac{\dot{K}L-K\dot{L}}{L^2}=\frac{(sY-\mu K)-K(\eta L+\nu K)}{L^2}=$$

$$=\frac{1}{L^2}\left[(sLf(k)-\mu K)L-K(\eta L+\nu K)\right]=sf(k)-(\mu+\eta)k-\nu k^2.$$

Shunday qilib, asosiy differensial tenglama ushbu

$$\dot{k}=sf(k)-(\mu+\eta)k-\nu k^2,\qquad k(0)=k_0>0 \tag{9.24}$$

ko'rinishga ega. (9.24) ixtiyoriy $k(0)=k_*>0$ boshlang'ich shart uchun yagona yechimga ega. Bu tasdiq Koshi teoremasidan kelib chiqadi, chunki (9.24) ning o'ng tomoni $\varphi(k)=sf(k)-(\mu+\eta)k-\nu k^2$ uzluksiz differensiallanuvchi (k bo'yicha), ya'ni

$$\varphi'(k)=sf'(k)-(\mu+\eta)-2\nu k.$$

9.6-teorema. *Agar asosiy differensial tenglama uchun*

$$\mu+\eta<sf'(+0) \tag{9.25}$$

tengsizlik ((2.13) *bilan taqqoslang*) *o'rinli bo'lsa, unda* (9.24) *tenglama yagona* (*sodda yechimdan tashqari*) *musbat va asimptotik turg'un statsionar yechimga ega, ya'ni* $k(t)\equiv k_*$.

Isbot. Quyidagi $\varphi(k)=0$, ya'ni

$$sf(k)-(\mu+\eta)k-\nu k^2=0 \tag{9.26}$$

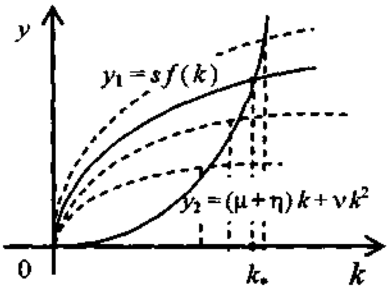
chekli tenglamani ko'ramiz. Bu tenglama $k=0$ sodda yechimga egaligi ravshan. U musbat yechimga ham ega. Shuni isbot etish uchun $y_1=sf(k)$

va $y_2=(\mu+\eta)k+\nu k^2$ funksiyalarni o'rganamiz. Har ikki funksiya grafigi koordinata boshidan chiqadi va I chorakda joylashgan. Shu bilan birga, $y_1''(k)<0$, $y_2''(k)=2\nu>0$ tengsizliklar o'rinli. Demak, $y_1(k)$ funksiya botiq, $y_2(k)$ funksiya esa qavariq. Grafiklar koordinata boshidan mos ravishda ((9.26) ga qarang)

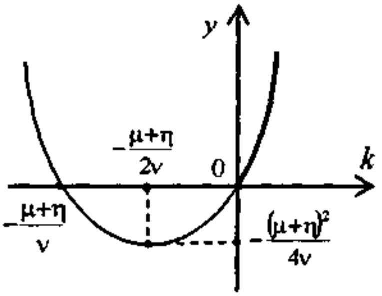
$$\lim_{k\to+0} s\,f'(k)=s\,f'(+0)>0\,,\quad \lim_{k\to+0} y_2'(k)=\mu+\eta$$

burchak koeffitsiyentlar bilan chiqadi. Shunday qilib, $y_1(k)$ va $y_2(k)$ funksiya grafiklari I chorakda albatta kesishadi (9.10-chizma).

Ikkinchi funksiya $y_2(k)=(\mu+\eta)k+\nu k^2$ grafigi paraboladan iborat bo'lib, u koordinata o'qlarini $\left(-(\mu+\eta)/\nu;\ 0\right)$ va $(0;\,0)$ nuqtalarda kesib o'tadi, uchi $\left(-\dfrac{\mu+\eta}{2\nu};\ -\dfrac{(\mu+\eta)^2}{4\nu}\right)$ nuqtada joylashgan. Bizni shu parabolaning $k\ge 0$ bo'lgandagi bo'lagi qiziqtiradi, u 9.11-chizmada quyuq chiziq bilan belgilangan.



9.10-chizma



9.11- chizma

Grafiklar kesishgan nuqtaning abssissasini $k_*>0$ deymiz. Bu bilan (9.24) tenglama yagona musbat statsionar yechimga ega ekani isbot etildi.

Endi shu $k(t)\equiv k_*$ statsionar yechimning asimptotik turg'un ekanini isbotlash qoldi. Buning uchun $\varphi'(k_*)<0$ tengsizlikni isbot etish yetarli. Haqiqatan,

$$\varphi'(k_*)=s\,f(k_*)-(\mu+\eta)-2\,\nu\,k_*<0\,,$$

chunki $y_1'(k_*)=s\,f(k_*)$ miqdor $y_1(k)$ funksiya grafigiga k_* da o'tkazilgan urinma burchak koeffitsiyenti, $y_2'(k_*)=(\mu+\eta)-2\nu k_*$ esa $y_2(k)$ grafigiga o'tkazilgan urinma burchak koeffitsiyenti. Ravshanki, $y_1'(k_*) < y_2'(k_*)$ tengsizlik o'rinli (9.10-chizma). Teorema isbotlandi.

Ta'kidlab o'tamizki, k_* ning o'rni (abssissa o'qida) s ning qiymatiga bog'liq, ya'ni $k_*(s)$.

9.2-lemma. *Statsionar yechim $k_*(s)$ monoton o'suvchi funksiya* (9.10-chizma).

Isbot. Avvalo $k_*(s)$ funksiya $(0;\,1)$ intervalda aniqlangan va differensiallanuvchi, u (9.26) chekli tenglamani qanoatlantiradi, ya'ni quyidagi sonli tenglik o'rinli:

$$s\, f(k_*(s)) - (\mu+\eta)\, k_*(s) - \nu\, k_*^2(s) = 0\,. \qquad (9.27)$$

Bu tenglikning ikki tomonini s bo'yicha differensiallaymiz:

$$f(k_*(s)) + s\, f'(k_*(s))\frac{dk_*(s)}{ds} - (\mu+\eta)\frac{dk_*(s)}{ds} - 2\nu\, k_*(s)\frac{dk_*(s)}{ds} = 0\,.$$

Endi $\dfrac{dk_*(s)}{ds}$ ni topamiz:

$$\frac{dk_*(s)}{ds} = \frac{f(k_*(s))}{\mu+\eta+2\nu\, k_*(s) - s\, f'(k_*(s))}\,.$$

(9.10) chizmadan ko'rinadiki, $\dfrac{dk_*(s)}{ds} > 0$. Lemma isbotlandi.

$k(t) \equiv k_*(s)$ funksiya balanslangan o'sish rejimi bo'lgani uchun ($s \in (0;\,1)$), bunday rejimlar cheksiz ko'p. Har bir rejim jamg'arish normasi s ning $(0;1)$ intervaldan olingan bitta qiymatiga mos keladi. Agar jon boshiga iste'molni maksimallashtirish masalasi ko'rilsa, bu masalaning yechimi balanslangan o'sishning optimal rejimini va optimal jamg'arish normasini aniqlab beradi. Masala quyidagicha qo'yiladi:

$$c(s) = \frac{C}{L} = (1-s)\, f(k_*(s)) \to \max, \quad 0 < s < 1. \qquad (9.28)$$

Avval masalaning yechimi mavjudligini ko'rsatamiz.

Ravshanki, quyidagi munosabatlar bajariladi:

$$\lim_{s\to+0} c(s) = \lim_{s\to+1-0} c(s) = 0 \quad \text{va} \quad c(s) > 0\,, \ \forall s \in (0;1)\,,$$

bunda $\lim\limits_{s\to+0} k_*(s) = 0$ tenglik e'tiborga olingan. Bu munosabatlar (9.28) masalaning yechimi mavjudligini isbotlaydi. Endi $c(s)$ funksiyaning statsionar nuqtalarini topamiz. Uning $c'(s)$ ni hisoblab, $c'(s) = 0$ tenglamani yechamiz. Dastlab (9.27) ga ko'ra $c(s)$ funksiya ko'rinishini o'zgartirib olamiz:

$$c(s) = f(k_*(s)) - (\mu+\eta)\, k_*(s) - \nu\, k_*^2(s). \tag{9.29}$$

Endi $c'(s)$ ni hisoblaymiz:

$$c'(s) = \left[\, f'(k_*(s)) - (\mu+\eta) - 2\nu\, k_*(s) \,\right] \frac{dk_*(s)}{ds}.$$

9.2-lemmaga ko'ra $\dfrac{dk_*(s)}{ds} > 0$. Shuning uchun $c'(s) = 0$ tenglama $f'(k_*(s)) - (\mu+\eta) - 2\nu k_*(s) = 0$ ko'rinishni oladi. Bu tenglamadan statsionar nuqta – s ni topib bo'lmaydi, chunki s oshkormas shaklda qatnashyapti. Aslida biz ushbu

$$f'(k) = (\mu+\eta) + 2\nu k \tag{9.30}$$

k ga nisbatan tenglamaga egamiz. (9.30) tenglamaning yagona musbat $\bar{\bar{k}}$ yechimi mavjud. Haqiqatan, ravshanki, $y_2 = (\mu+\eta)\,k + \nu\, k^2$ va $y_1 = f(k)$ funksiyalarning grafigi koordinata boshidan chiqadi, $f(k)$ – botiq va $(\mu+\eta)\,k + \nu\, k^2$ – qavariq bo'lgani uchun ularga o'tkazilgan urinmalar yagona $\bar{\bar{k}}$ nuqtada o'zaro parallel bo'ladi, ya'ni $f'(\bar{\bar{k}}) = \mu+\eta+\nu\bar{\bar{k}}$ (9.12-chizma). Shuning uchun $k = \bar{\bar{k}}$ da

$$s\, f(\bar{\bar{k}}) - (\mu+\eta)\,\bar{\bar{k}} - \nu\,\bar{\bar{k}}^2 = 0$$

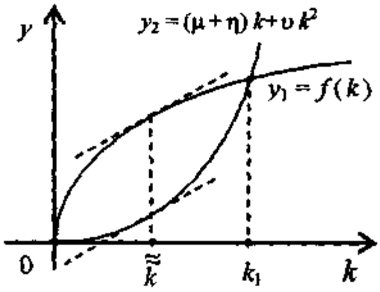
tenglik o'rinli bo'ladi. Bundan yagona statsionar nuqta $\bar{\bar{s}}$ ni topamiz:

$$\bar{\bar{s}} = \frac{(\mu+\eta)\,\bar{\bar{k}} + \nu\,\bar{\bar{k}}^2}{f(\bar{\bar{k}})} > 0. \tag{9.31}$$

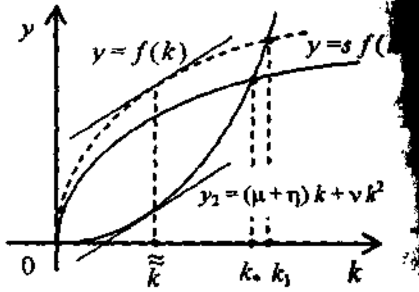
Endi (9.30) ga ko'ra $\mu+\eta = f'(\bar{\bar{k}}) + 2\nu\bar{\bar{k}}$ ni e'tiborga olsak, ushbu

$$\bar{\bar{s}} = \frac{\bar{\bar{k}}\, f'(\bar{\bar{k}})}{f(\bar{\bar{k}})} - \frac{\nu\,\bar{\bar{k}}^2}{f(\bar{\bar{k}})} \tag{9.32}$$

formulani hosil qilamiz. $\bar{\bar{s}} > 0$ va $0 < \dfrac{\bar{\bar{k}}\, f'(\bar{\bar{k}})}{f(\bar{\bar{k}})} < 1$ tengsizliklardan $0 < \bar{\bar{s}} < 1$ kelib chiqadi.



9.12-chizma



9.13- chizma

Ravshanki, $\tilde{s} > \tilde{\tilde{s}}$ ((9.18) ga qarang). Demak, $1-\tilde{\tilde{s}} > 1-\tilde{s}$, ya'ni iste'molga ajratiladigan bo'lak kattalashadi. Bunga sabab mehnat resurslari hajmi chiziqli-botiq funksiya deb qaralishidadir. Shunday qilib, (9.28) masalaning yechimi mavjud va statsionar nuqta yagona bo'lgani uchun $s = \tilde{\tilde{s}}$ nuqtada $c(s)$ funksiya eng katta qiymatga ega bo'ladi. Quyidagi teorema isbot etildi.

9.7-teorema. (9.28) *masalaning yechimi mavjud va yagona. Optimal jamg'arish normasi* $\tilde{\tilde{s}}$ (9.32) *formula yordamida, balanslangan o'sishning optimal rejimi* $\tilde{\tilde{k}}$ (9.30) *tenglamaning yagona musbat yechimi sifatida aniqlanadi.*

Shunday qilib, (9.23) iqtisodiy sistemaning trayektoriyasi quyidagi munosabatlar bilan tavsiflanadi:

$$K(t)=\tilde{\tilde{k}}L(t),\quad \dot{K}(t)=\tilde{\tilde{k}}\dot{L}(t)=\tilde{\tilde{k}}(\eta L(t)+\nu K(t))=\tilde{\tilde{k}}\left(\eta L(t)+\nu\tilde{\tilde{k}}L(t)\right)=$$

$$=\tilde{\tilde{k}}L(t)\left(\eta+\nu\tilde{\tilde{k}}\right).\ \text{Bundan}\ \ \dot{L}(t)=L(t)\cdot\left(\eta+\nu\tilde{\tilde{k}}\right),\ L(t)=L_0\,e^{\left(\eta+\nu\tilde{\tilde{k}}\right)t},$$

$$K(t)=L_0\tilde{\tilde{k}}\cdot e^{\left(\eta+\nu\tilde{\tilde{k}}\right)t},\quad Y(t)=L_0\,e^{\left(\eta+\nu\tilde{\tilde{k}}\right)t}f(\tilde{\tilde{k}}),$$

$$I(t)=\tilde{\tilde{s}}Y(t)=L_0\,\tilde{\tilde{s}}\,e^{\left(\eta+\nu\tilde{\tilde{k}}\right)t}f(\tilde{\tilde{k}}),\quad C(t)=L_0(1-\tilde{\tilde{s}})\cdot e^{\left(\eta+\nu\tilde{\tilde{k}}\right)t}f(\tilde{\tilde{k}})$$

Endi quyidagicha *xulosa* chiqarish mumkin: *modelning barcha asosiy o'zgaruvchilari* $K(t), L(t), Y(t), I(t)$ *va* $C(t)$ *– statsionar yechim* $k(t)\equiv\tilde{\tilde{k}}$ *bo'ylab* $\eta+\nu\tilde{\tilde{k}}$ *ga teng bo'lgan bir xil sur'at bilan o'sadi.*

Mehnat resurslari hajmi chiziqli-botiq funksiya bo'lgan modelni o'rganishni oxiriga yetkazish uchun statsionar yechim $k(t)=\tilde{\tilde{k}}>0$ dan farqli $k=k(t)$ trayektoriyalarni sifat nuqtayi nazaridan tekshiramiz. Ravshanki, $k_*>\tilde{\tilde{k}}$ (9.13-chizma).

Faraz etaylik, $k=k(t)$ funksiya (9.24) tenglamaning ixtiyoriy boshlang'ich shartni qanoatlantiradigan yechimi bo'lsin, $k_0=k(0)>0$. Ikki hol yuz beradi: 1) $k_0>k_*$; 2) $k_0<k_*$. Avval 1) $k_0>k_*$ holni ko'ramiz. $s=\tilde{\tilde{s}}$ bo'lganda (9.24) tenglama ushbu

$$\dot{k}=\tilde{\tilde{s}}f(k)-(\mu+\eta)k-\nu k^2$$

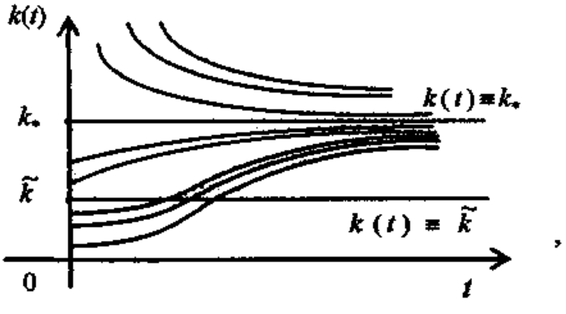
ko'rinishni oladi. Unda ixtiyoriy $k_0>k_*$ uchun (9.13-chizma)

$$\dot{k}_0=\tilde{\tilde{s}}f(k_0)-(\mu+\eta)k_0-\nu k_0^2<0,$$

shuning uchun $\dot{k}(t)<0$ tengsizlik kelib chiqadi. Endi $\ddot{k}$ ni hisoblaymiz:

$$\ddot{k}=\left[\tilde{\tilde{s}}f'(k)-(\mu+\eta)-2\nu k\right]\cdot\dot{k}>0 \text{ , ya'ni } \ddot{k}>0,\ \forall k_0>k_*.$$

Bu $k=k(t)$ egri chiziqning ixtiyoriy $k_0>k_*$ da qavariq ekanini anglatadi (9.14-chizma).



9.14-chizma

Endi 2) $k_0<k_*$ holni ko'ramiz. Bunda yana uchta qismiy hollar yuz berishi mumkin:

a) $k_0=\tilde{\tilde{k}}<k_*$; b) $0<k_0<\tilde{\tilde{k}}$; v) $\tilde{\tilde{k}}<k_0<k_*$;

Ravshanki, a) holida $k(t) \equiv \tilde{\tilde{k}}$ nur burilish nuqtalaridan tashkil topgan. Bu b) va v) hollarni ko'rganimizda kelib chiqadi. b) holida (9.13-chizma) quyidagi tengsizliklar o'rinli:

$$\dot{k} = \tilde{\tilde{s}} f(k) - (\mu + \eta)k - \nu k^2 > 0 ,$$

$$\ddot{k} = \left[\tilde{\tilde{s}} f'(k) - (\mu + \eta) - 2\nu k \right] \cdot \dot{k} > 0 .$$

Shu tengsizliklar $k(t)$ funksiyaning monoton o'suvchi va qavariqligini anglatadi. Nihoyat, v) holni ko'ramiz. Bu holda ushbu

$$\dot{k} = \tilde{\tilde{s}} f(k) - (\mu + \eta)k - \nu k^2 > 0 ,$$

$$\ddot{k} = \left[\tilde{\tilde{s}} f'(k) - (\mu + \eta) - 2\nu k \right] \cdot \dot{k} < 0$$

tengsizliklarga egamiz, ular $k(t)$ funksiyaning monoton o'suvchiligini va botiqligini bildiradi. Yuqoridagi mulohazalar ko'rsatadiki, $k(t) \equiv \tilde{\tilde{k}}$ nurda $k(t)$ funksiyaning ikkinchi hosilasi o'z ishorasini (musbatdan manfiyga) o'zgartiradi. Shunday qilib, $k(t) \equiv \tilde{\tilde{k}}$, $t > 0$ nur $\tilde{\tilde{k}} < k_0 < k_*$ da $k(t)$ funksiyaning burilish nuqtalaridan tashkil etganini isbotlaydi (9.14-chizma).

Iqtisodiy dinamikaning ko'rilayotgan (9.23) modeli uchun Felpsning "oltin qoida"sini chiqaramiz. (9.32) ga ko'ra

$$\tilde{\tilde{s}}\, f(\tilde{\tilde{k}}) = \tilde{\tilde{k}}\, f'(\tilde{\tilde{k}}) - \nu \cdot \tilde{\tilde{k}}^2 .$$

Ikki tomonini $\tilde{\tilde{L}}$ ga ko'paytiramiz:

$$\tilde{\tilde{s}}\, F(\tilde{\tilde{L}}, \tilde{\tilde{K}}) = \frac{\partial F(\tilde{\tilde{L}}, \tilde{\tilde{K}})}{\partial K} \tilde{\tilde{K}} - \nu\, \tilde{\tilde{k}}\, \tilde{\tilde{K}} .$$

Endi "oltin qoida"ni keltiramiz: asosiy fondlarga ajratilgan mablag' $\tilde{\tilde{s}}\, F(\tilde{\tilde{L}}, \tilde{\tilde{K}})$ kapitaldan olingan daromad $\frac{\partial F(\tilde{\tilde{L}}, \tilde{\tilde{K}})}{\partial K} \tilde{\tilde{K}}$ dan $\nu\, \tilde{\tilde{k}}\, \tilde{\tilde{K}}$ miqdorga kam. $\nu\, \tilde{\tilde{k}}\, \tilde{\tilde{K}}$ miqdorni mehnat resurslari hajmi chiziqli-botiqligidan olingan "yutuq" deb ataymiz. Eslatib o'tamizki, (9.6) - (9.8), (9.9') modelda optimal jamg'arish normasi $\tilde{s} = \frac{\tilde{k}\, f'(\tilde{k})}{f(\tilde{k})}$ ga, (9.23) modelda esa $\tilde{\tilde{s}} = \frac{\tilde{\tilde{k}}\, f'(\tilde{\tilde{k}})}{f(\tilde{\tilde{k}})} - \frac{\nu\, \tilde{\tilde{k}}^2}{f(\tilde{\tilde{k}})}$ ga teng edi. Ravshanki, $\tilde{\tilde{s}} < \tilde{s}$. Bu holda $\tilde{\tilde{k}} > \tilde{k}$

tengsizlik o'rinli. Shu sababli aytish mumkinki, mehnat resurslari hajmini chiziqli-botiq funksiya deb qarash *samarador* ekan.

Shuni ta'kidlab o'tamizki, statsionar yechimni topish uchun ushbu

$$s\,f(k)-(\mu+\eta)\,k-\nu\,k^2=0$$

tenglamani yechishga to'g'ri keladi. Uni analitik usul bilan deyarli yechish mumkin emas. Masalan, $f(k)=a\,k$ bo'lsa, tenglama $\nu\,k^2+[(\mu+\eta)-a\,s]k=0$ sodda ko'rinishga keladi va $k_1=0$, $k_2=1/\nu[as-(\mu+\eta)]$. Agar $f(k)=a\sqrt{k}$ bo'lsa, $s\,a\sqrt{k}=(\mu+\eta)k+\nu k^2$ tenglamaga egamiz. Agar $\sqrt{x}=k$ desak, $\nu\,x^4+(\mu+\eta)\,x^2-s\,x$ tenglama hosil bo'ladi. Undan $x_1=0$, ya'ni $k_1=0$ ni topamiz. Qolgan yechimlarni topish uchun $\nu x^3+(\mu+\eta)\,x-s\,a=0$ kubik tenglamani yechishga to'g'ri keladi.

Neoklassik ICHF lar uchun o'rtacha mehnat unumdorligi $f(k)$ ixtiyoriy bo'lganda ham $s\,f(k)-(\mu+\eta)k-\nu k^2=0$ tenglamani yechishning qator taqribiy usullari mavjud.

9.4-§. Iqtisodiy dinamikaning o'zgarmas jamg'arish normali modeli: mehnat resurslari hajmi chiziqsiz-botiq funksiya

Avvalgi 9.3-§ da iqtisodiy dinamikaning mehnat resurslari hajmi chiziqli-botiq funksiya bo'lgan modeli ko'rildi. Umumiy holda mehnat resurslari hajmi chiziqsiz-botiq funksiya bo'lishi mumkin. Faraz etamiz,

$$\dot{L}=L\left[\eta+\nu\,\psi\left(\frac{K}{L}\right)\right]\quad\left(yoki\quad\frac{\dot{L}}{L}=\eta+\nu\,\psi\left(\frac{K}{L}\right)\right).$$

Endi, iqtisodiy sistema quyidagi munosabatlar yordamida tavsiflansin, deylik:

$$\left.\begin{aligned}&\dot{K}=I-\mu K,\quad 0\le\mu<1,\\&\dot{L}=L[\eta+\nu\cdot\psi(K/L)],\quad \eta>0,\quad \nu>0,\\&Y=F(L,K)=I+C=sY+(1-s)Y,\ s=const>0,\ 0<s<1,\\&c(t)=\frac{C(t)}{L(t)}\to\max,\ 0<s<1.\end{aligned}\right\}\qquad(9.33)$$

Bunda $\psi(K/L)=\psi(k)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$\psi(0)=0;\ \ \psi'(+0)\geq 0;\ \psi(k)>0;\ \ \psi'(k)>0;\ \psi''(k)>0;\ \forall k>0. \quad (9.34)$$

Agar $\psi(K/L)\equiv K/L$ bo‘lsa, $L[\eta+\nu\cdot\psi(K/L)]=L\eta+\nu K$ bo‘ladi.

(9.33) ga ko‘ra $\dot{L}>0$. Endi $\ddot{L}$ ni hisoblaymiz:

$$\ddot{L}=\dot{L}\,[\,\eta+\nu\,\psi(k)\,]+L\,\nu\,\psi'(k)\frac{\dot{K}\,L-K\,\dot{L}}{L^2}=$$

$$=\dot{L}\left[\ \eta+\nu\,\psi(k)-\nu\,k\,\psi'(k)+\nu\,\psi'(k)\frac{dK}{dL}\ \right].$$

Faraz etaylik, $k\cdot\psi'(k)-\psi(k)<\eta/\mu$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsin. Unda $\ddot{L}<0$ va $L(t)$ funksiya botiq bo‘ladi. Bundan tashqari, (9.34) ga ko‘ra $\psi(k)<k\,\psi'(k)$ tengsizlik o‘rinli. Bu ushbu sodda

$$\psi(k)=\int_0^k\psi'(\tau)d\tau<\int_0^k\psi'(k)d\tau=\psi'(k)\cdot k$$

mulohazadan kelib chiqadi. Shunday qilib,

$$0<k\cdot\psi'(k)-\psi(k)<\frac{\eta}{\nu},\qquad \frac{k\cdot\psi'(k)}{\psi(k)}>1. \qquad (9.35)$$

Shu bilan quyidagi teorema isbotlandi.

9.8-teorema. *$L(t)$ funksiya botiq bo‘lishi uchun izokvanta bo‘ylab ushbu*

$$\frac{dK}{dL}<k-\frac{\eta}{\nu\,\psi'(k)}-\frac{\psi(k)}{\psi'(k)} \qquad (9.36)$$

tengsizlik bajarilishi yetarli.

Agar $\psi(k)\equiv k$ bo‘lsa, (9.36) dan $\frac{dK}{dL}<-\frac{\eta}{\nu}<0$ kelib chiqadi ((9.22) ga qarang). Agar $0<k\,\psi'(k)-\psi(k)<\eta/\nu$ bo‘lsa, (9.36) ning o‘ng tomoni manfiy. Bunga (9.36) ni ushbu

$$\frac{dK}{dL}<-\frac{\eta+\nu\left[\psi(k)-k\,\psi'(k)\right]}{\nu\,\psi'(k)}$$

ko‘rinishda yozib, ishonch hosil qilish mumkin.

Endi (9.36) iqtisodiy dinamika modeli (9.33) uchun asosiy differensial tenglamani chiqaramiz. Uning uchun $\dot{k}$ ni hisoblaymiz:

$$\dot{k}=\frac{d}{dt}\left(\frac{K}{L}\right)=\frac{\dot{K}L-K\dot{L}}{L^2}=\frac{L\cdot[sLf(k)-\mu K]-K\dot{L}}{L^2}=$$

$$=s\,f(k)-(\mu+\eta)\,k-\nu\,k\,\psi(K)\,.$$

Demak, asosiy differensial tenglama quyidagi ko'rinishga ega:

$$\dot{k}=s\,f(k)-(\mu+\eta)\,k-\nu\,k\,\psi(K)\,. \qquad (9.37)$$

(9.37) tenglamaning o'ng tomoni k bo'yicha differensiallanuvchi bo'lgani uchun avval ko'rilgan modellardagi kabi bu tenglamaning ixtiyoriy boshlang'ich shartni ($k(0)=k_0>0$) qanoatlantiradigan yagona yechimi mavjud. Qolaversa, (9.37) – skalar avtonom differensial tenglama. Bizni uning statsionar yechimlari qiziqtiradi. Bunday yechim topilsa, iqtisodiy sistemaning (iqtisodiy jarayonning) trayektoriyasini topish mumkin bo'ladi.

9.9-teorema. *Agar* (9.37) *tenglama uchun ushbu*

$$\mu+\eta<s\,f'(+0) \qquad (9.38)$$

tengsizlik ((9.25) *bilan taqqoslang*) *o'rinli bo'lsa, shu tenglama yagona musbat* (*sodda yechimdan tashqari*) *va asimptotik turg'un* $k(t)\equiv k_*$, $t\in[0;T]$ *statsionar yechimga ega.*

Isbot. Statsionar yechimlar ushbu

$$(\,\psi(k)=\,)\quad s\,f(k)-(\mu+\eta)\,k-\nu\,k\,\psi(K)=0 \qquad (9.39)$$

chekli tenglamaning yechimi kabi aniqlanadi. Avval bu tenglama $k(t)\equiv 0$ dan tashqari yagona musbat yechimga ega ekanligini ko'rsatamiz. Avvalgi mavjudlik teoremalaridagi kabi (9.3-, 9.6-teoremalarga qarang) ikkita $y_1=s\,f(\,k)$ va $y_2=(\mu+\eta)\,k+\nu k\,\psi(k)$ funksiya grafiklari koordinata boshidan chiqib, I chorakda albatta $k=k_*(s)>0$ nuqtada kesishishini ko'rsatish mumkin. Bu quyidagi munosabatlardan kelib chiqadi:

$$f(0)=0\,,\ f'(+0)=\lim_{k\to+0}f'(k)\,,\quad y_2(0)=0\,;\ y_2'(+0)=\mu+\eta\,,$$

$$y_2'(k)=(\mu+\eta)+\nu\left[\psi(k)+k\,\psi'(k)\right],$$

$$y_2''(k)=\nu\left[2\psi'(k)+k\,\psi''(k)\right]>0\,,\forall k>0.$$

Demak, $y_1(k)$ botiq, $y_2(k)$ qavariq funksiya va grafiklari koordinata boshidan chiqadi. (9.38) ga ko'ra, ular yana bitta $k_*(s)$ umumiy nuqtaga ega. Shuning uchun quyidagi sonli tenglik o'rinli:

$$s\,f(k_*(s))-(\mu+\eta)\,k_*(s)-\nu\,k_*(s)\,\psi(k_*(s))=0\,. \qquad (9.40)$$

Endi $k(t)\equiv k_*(s)$ statsionar yechimning asimptotik turg'unligini isbotlash mumkin. Buning uchun (9.37) ning o'ng tomonidagi $\psi(k)$ funksiya $\psi'(k_*(s))<0$ tengsizlikning qanoatlantirishini ko'rsatish kifoya. Bu

$$\psi'(k_*(s))=s\,f'(k_*(s))-(\mu+\eta)-\nu\left[\psi(k_*(s))+k_*(s)\,\psi'(k_*(s))\right]<0$$

tengsizlikdan kelib chiqadi. 9.9-teorema isbot etildi.

9.3-lemma. *Statsionar yechim* $k(t)\equiv k_*(s)$, $0<s<1$ *intervalda* s *ning monoton o'suvchi funksiyasi.*

Isbot. (9.40) ning ikki tomonini s bo'yicha differensiallaymiz:

$$f(k_*(s))+\left[s\,f'(k_*(s))-(\mu+\eta)-\nu\left(\psi(k_*(s))+k_*(s)\,\psi'(k_*(s))\right)\right]\frac{dk_*(s)}{ds}=0\,.$$

Bu tenglikda kvadrat qavs ichidagi ifoda manfiy. Ravshanki, $\dfrac{dk_*(s)}{ds}>0$ bo'ladi; lemma isbotlandi.

Topilgan statsionar yechim $k_*(s)$ balanslangan o'sish rejimini anglatadi. $k_*(s)$ funksiya $(0;\,s)$ intervalda aniqlangan. Demak, rejimlar cheksiz ko'p. Ularning ichidan jon boshiga iste'molga maksimum qiymat beradiganini ajratib olish lozim. Optimal jamg'arish normasini topish uchun quyidagi masalani ko'ramiz:

$$c(s)=(1-s)f'(k_*(s))\to\max\,,\quad 0<s<1\,. \qquad (9.41)$$

Masalani yechish uchun (9.41) dagi $c(s)$ funksiyani ushbu

$$c(s)=f(k_*(s))-(\mu+\eta)\,k_*(s)-\upsilon\,k_*(s)\,\psi(k_*(s))$$

ko'rinishda yozib olamiz. Endi $c'(s)$ ni hisoblaymiz:

$$c'(s)=\left[f'(k_*(s))-(\mu+\eta)-\upsilon\left(\psi(k_*(s))+k_*(s)\,\psi'(k_*(s))\right)\right]\frac{dk_*(s)}{ds}\,.$$

9.3-lemmaga ko'ra $\dfrac{dk_*(s)}{ds}>0$. Shuning uchun $c'(s)=0$ tenglama k ga nisbatan (chunki s oshkormas qatnashadi) ushbu

$$f'(k)-(\mu+\eta)-\nu\left[\psi(k)+k\,\psi'(k)\right]=0 \qquad (9.42)$$

tenglamaga ekvivalent. Avvalgi paragraflardagi mulohazalarga o'xshash, (9.42) tenglama yagona musbat $\bar{k}$ yechimga ega ekanini isbotlash mumkin. Agar (9.39) da $k=\bar{k}$ desak, ($\bar{k}<k_*(s)$ ekani ravshan) $\bar{s}$ ni topish mumkin:

$$\bar{s}=\frac{(\mu+\eta)\bar{k}-\upsilon\bar{k}\,\psi(\bar{k})}{f(\bar{k})}.$$

Endi (9.42) dan foydalanib, $\bar{s}$ uchun formulani quyidagi, uzil-kesil ko'rinishda yozamiz:

$$\bar{s}=\frac{\bar{k}\,f'(\bar{k})}{f(\bar{k})}-\frac{\nu\bar{k}^2\,\psi'(\bar{k})}{f(\bar{k})}. \qquad (9.43)$$

(9.33) model uchun topilgan ma'lumotlarni teorema ko'rinishida ifodalaymiz.

9.10-teorema. (9.41) *masalaning yechimi mavjud va yagona. Optimal jamg'arish normasi* $\bar{s}$ (9.43) *formuladan, balanslangan o'sishning optimal rejimi* $\bar{k}$ *esa* (9.42) *tenglamaning musbat yechimi sifatida topiladi.*

Topilgan $\bar{k}$ va $\bar{s}$ qiymatlar yordamida iqtisodiy sistema trayektoriyasining barcha o'zgaruvchilarini topish mumkin. Albatta, avvalgi paragraflardagi kabi (9.37) differensial tenglamaning $k(t)\equiv\bar{k}$ yechimidan farqli yechimlarini ham o'rganish mumkin. $k(t)$ egri chiziqlarning chizmalari 9.14 chizmadagidek bo'ladi. Nihoyat, "oltin qoida" ni ham chiqarib, iqtisodiy ma'nosini bayon etish mumkin. Bu fikrlarning asoslanishini o'quvchiga mustaqil ish sifatida topshiramiz.

9-bobga oid masalalar

1. Ushbu

$$\dot{k}=s\,a_0\,k^{\alpha}-(\mu+\eta)\,k, \quad 0<s<1, \quad a_0>0, \quad 0<\alpha<1$$

Bernulli differensial tenglamasi integrallansin.

2. Quyidagi berilgan ICHF ga mos iqtisodiy dinamika modellari uchun optimal jamg'arish normasi $\bar{s}$ va balanslangan o'sishning optimal rejimi $\bar{k}$ topilsin:

1. $F(L,K)=\sqrt{KL}$. 2. $F(L,K)=\dfrac{2KL}{K+L}$.

3. $F(L,K)=\sqrt[3]{K L^2}$.

4. $F(L,K)=\sqrt[3]{K^2 L}$.

5. $F(L,K)=\sqrt[4]{K L^3}$.

6. $F(L,K)=\frac{1}{4}\left(\sqrt{K}+\sqrt{L}\right)^2$.

7. $F(L,K)=\frac{4K L}{(\sqrt{K}+\sqrt{L})^2}$.

8. $F(L,K)=\frac{\sqrt{2}K L}{\sqrt{K^2+L^2}}$.

3. Ushbu

$$\dot{k}=s\,a_0\left[a\,k^{-\rho}+(1-a)\right]^{-\frac{1}{\rho}}-(\mu+\eta)\,k$$

differensial tenglamani $s=0{,}5,\ a_0=1,\ a=0{,}5,\ \rho=-0{,}5$ bo'lganda integrallang (ko'rsatma: $\sqrt{k}=x$ almashtirish bajaring).

4. Solou ICHF ning turli xususiy hollarida asosiy differensial tenglamasini yozing.

9-bobga oid nazorat savollari

1. Dinamik ICHF (DICHF) ta'rifini bering.
2. Ikki faktorli va ko'p faktorli DICHF ga misollar keltiring.
3. Avtonom DICHF (ADICHF) nima?
4. Iqtisodiy dinamikaning modellari nima?
5. Iqtisodiy dinamikaning sodda modelini tavsiflang.
6. Sodda model uchun asosiy differensial tenglamani chiqaring.
7. Asosiy differensial tenglama uchun yagona musbat va asimptotik turg'un yechimning mavjudligi haqidagi teoremani aytib bering.
8. Statsionar yechim yaqinida integral egri chiziqlar qanday joylashgan?
9. Mehnat resurslari hajmining chiziqli-botiqligi ta'rifini bering.
10. Chiziqli-botiqlik holida asosiy differensial tenglamani chiqaring.
11. Mehnat resurslari hajmining chiziqsiz-botiqligi ta'rifini bering va mos asosiy differensial tenglamani yozing.
12. Kobb-Duglas va Solou DICHF ga mos iqtisodiy dinamika modellarini yozib bering.
13. Ko'rilgan modellar uchun balanslangan o'sish optimal rejimini topish tenglamasini va optimal jamg'arish normasi formulasini yozib bering.

10-bob. IQTISODIY DINAMIKANING ISHLAB CHIQARISH RESURSLARI CHIZIQSIZ YAROQSIZLANGAN MODELLARI

Avvalgi bobda iqtisodiy dinamikaning faqat asosiy fondlar chiziqli yaroqsizlangan modellari ko'rildi. Amalda asosiy fondlar ham, mehnat resurslari ham yaroqsizlanishi kuzatiladi. Asosiy fondlar (masalan, stanoklar) eskirishi mumkin, mehnat resurslari esa (ish bilan band bo'lganlar) ishga yaroqsiz holga kelishi (pensiyaga chiqishi, vaqtincha kasal bo'lishi, vafot etishi) tabiiy. Bunday hollarda mehnat resurslari va asosiy fondlarning majmuasi yaroqsizlanishini e'tiborga olish zarur. Ishlab chiqarish resurslarining yaroqsizlanishini hisobga olganda iqtisodiy sistemani va uning trayektoriyasini chuqurroq o'rganish imkoniyati tug'iladi. Mazkur bobda iqtisodiy dinamikaning ishlab chiqarish resurslari chiziqsiz yaroqsizlangan modellarini ko'ramiz.

Faraz etamiz, vaqtning t momentida ishlab chiqarish resurslarining ushbu

$$\mu\cdot L(t)\cdot\chi\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)$$

formula bilan berilgan qismini almashtirish kerak bo'lsin, unda $\chi\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)=\chi(k)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$\chi(0)=0,\ \ \chi(k)>0,\ \chi'(+0)\geq 0,\ \chi'(k)>0,\ \chi''(k)\geq 0,\ \forall k>0\,. \quad (10.1)$$

Shu (10.1) ga ko'ra $\chi(k)$ funksiya monoton o'suvchi va qavariqdir. $\chi(k)\equiv k$ bo'lgan hol chiqarib tashlanmaydi. Bunda $\chi(0)=0$, $\chi'(+0)=1$, $\chi'(k)=1$, $\chi''(k)=0$ bo'ladi. Shunda ham $\chi(k)$ funksiyani, odatda, qavariq deb hisoblashadi. (10.1) ga ko'ra $\chi(k)-k\cdot\chi'(k)<0,\ \forall k>0$ tengsizlik o'rinli. Bundan $\frac{k\cdot\chi'(k)}{\chi(k)}>1$ tengsizlik kelib chiqadi.

Quyida uch holni ko'ramiz:

1) mehnat resurslari hajmi eksponensial funksiya;
2) mehnat resurslari hajmi chiziqli-botiq funksiya;
3) mehnat resurslari hajmi chiziqsiz-botiq funksiya.

10.1-§. Mehnat resurslari hajmi eksponensial funksiya

Iqtisodiy sistema quyidagi munosabatlar bilan tavsiflansin, deylik:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{K} = I - \mu \cdot L \cdot \chi\left(\dfrac{K}{L}\right), \quad 0 \le \mu < 1, \\ \dot{L} = L \cdot \eta, \quad \eta > 0, \\ \mathrm{Y} = s\mathrm{Y} + (1\text{-s})\mathrm{Y} = I + C, \quad 0 < s < 1, \quad s = const > 0, \\ c = \dfrac{C}{L} = (1-s)f(k) \to \max, \quad 0 < s < 1. \end{array}\right\} \qquad (10.2)$$

Ravshanki, agar $\chi\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{K}{L}$ bo'lsa, 9-bobning 9.2-§ da ko'rilgan iqtisodiy dinamika modelini hosil qilamiz.

(10.2) modelni o'rganish uchun avvalgi bobdagi kabi asosiy differensial tenglamani chiqaramiz:

$$\dot{k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{\dot{K}\,L - K\,\dot{L}}{L^2} = \frac{1}{L^2} \cdot \left[\left(I - \mu\,\dot{L}\,\chi\left(\frac{K}{L}\right)\right) \cdot L - K\,\dot{L}\,\right] =$$

$$= \frac{1}{L^2} \cdot \left[\left(\mathrm{s}\,L\,f(k) - \mu\,L\chi(k)\right) \cdot L - K\,\dot{L}\,\right] = s\,f(k) - \eta\,k - \mu\,\chi(k)\,.$$

Shunday qilib, (10.2) model uchun asosiy differensial tenglama

$$\dot{k} = s\,f(k) - \eta\,k - \mu\,\chi(k)\,, \quad k(0) = k_0 > 0 \qquad (10.3)$$

ko'rinishga ega. Uning o'ng tomoni $\phi(k) = s\,f(k) - \eta\,k - \mu\,\chi(k)$ differensiallanuvchi (k bo'yicha). Shu sababli, Koshi teoremasiga ko'ra, (10.3) tenglama ixtiyoriy boshlang'ich shartni qanoatlantiradigan yagona yechimga ega.

Optimal jamg'arish normasini topish masalasi bilan shug'ullanamiz, bunda optimallik jon boshiga iste'molning maksimumi ma'nosida tushuniladi. Bu masalani yechishda, avvalgi bobdagiga o'xshash, (10.3) avtonom differensial tenglamaning statsionar yechimi muhim ahamiyatga ega.

10.1.-teorema. *Agar* (10.3) *asosiy differensial tenglama uchun ushbu*

$$\mu \chi'(+0)+\eta < s f'(+0) \qquad (10.4)$$

tengsizlik bajarilsa, unda (10.3) *tenglama yagona musbat* (*sodda yechimdan tashqari*) *va* (*Lyapunov bo'yicha*) *asimptotik turg'un statsionar yechimga ega, ya'ni* $k(t) \equiv k_*$ $\quad t \in [0; T]$.

Isbot. (10.3) tenglama avtonom, uning statsionar yechimlari ushbu

$$s f(k)-\eta k-\mu \chi(k)=0 \qquad (10.5)$$

chekli tenglamadan topiladi. $k(t) \equiv 0$ – (10.3) tenglamaning sodda yechimi. $y_1 = sf(k)$ va $y_2 = \eta k + \mu \chi(k)$ funksiyalarning grafiklari koordinata boshidan mos ravishda $sf'(+0)$ va $\eta + \mu \chi'(+0)$ burchak koeffitsiyentlar bilan chiqadi. (10.4) ga ko'ra $\eta + \mu \chi'(+0) < sf'(+0)$. Demak, k ning nolga yaqin qiymatlarida $y_2(k)$ ning grafigi $y_1(k)$ ning grafigidan pastroqda bo'ladi. Shu grafiklar $k > 0$ da kesishishini ko'rsatish mumkin. Bu $y_1 = sf(k)$ ning botiqligi va $y_2 = \eta k + \mu \chi(k)$ ning qavariqligidan kelib chiqadi. $y_2(k)$ ning qavariqligi ushbu

$$y_2(0)=0, \;\; y_2'(k)=\eta+\mu \chi'(k)>0, \;\; y_2''(k)=\mu \chi''(k)>0, \;\forall k>0$$

munosabatlardan ko'rinadi.

Grafiklar kesishish nuqtasini (k_*, y_*) deb belgilaymiz, bunda k_* – (10.5) tenglamaning musbat yechimi. Shunday qilib, (10.3) differensial tenglama yagona musbat statsionar yechim $k(t) \equiv k_*$ ga ega. Shu yechimning asimptotik turg'unligi ham osongina isbotlanadi. (10.3) ning o'ng tomoni $\phi(k)$ uchun $\phi'(k_*) < 0$ tengsizlik bajarilishini ko'rsatish kerak. Ravshanki,

$$\phi'(k_*)=\frac{d}{dk}\left[s f(k)-\eta k-\mu \chi(k)\right]\Big|_{k=k_*}=s f'(k_*)-\eta-\mu \chi'(k_*)<0. \qquad (10.6)$$

Lyapunov-Puankare teoremasiga ko'ra, (10.6) tengsizlik $k(t) \equiv k_*$ yechimning asimptotik turg'unligini anglatadi. 10.1-teorema isbot etildi.

(10.2) iqtisodiy sistema uchun qurollanganlik k_* qiymati balanslangan o'sish deyiladi. Ravshanki, avvalgi bobdagi kabi balanslangan o'sish rejimi k_* jamg'arish normasi s ning funksiyasi bo'ladi: $k_* = k_*(s)$, $0 < s < 1$.

10.1-lemma. (10.2) *iqtisodiy sistema uchun topilgan balanslangan o'sish rejimi* $k_*(s)$ (0; 1) *intervalda aniqlangan, differensiallanuvchi va monoton o'suvchi funksiyadir.*

Isbot. $k_*(s)$ ning (0; 1) da aniqlangan, differensiallanuvchi ek
ravshan. Monoton o'suvchiligini isbotlash uchun $\frac{dk_*(s)}{ds}>0$, $\forall s\in(0;1)$
tengsizlikning o'rinli ekanini ko'rsatish kerak. Uning uchun ushbu $s\,f(k_*(s))-\eta k_*(s)-\mu\chi(k_*(s))=0$ sonli tenglikning ikki tomonini s bo'yicha differensiallab topamiz ((10.6) ga qarang):

$$\frac{dk_*(s)}{ds}=-\frac{f(k_*(s))}{\phi'(k_*(s))}>0.$$

Bundan $k_*(s)$ ning monoton o'suvchiligi kelib chiqadi.

Endi optimal jamg'arish normasi va balanslangan o'sish rejimini topish bilan shug'ullanamiz. Jon boshiga iste'mol funksiyasini quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$c(s)=(1-s)\,f(k_*(s))=f(k_*(s))-\eta k_*(s)-\mu\chi(k_*(s)),\ \ 0<s<1. \quad (10.7)$$

Shu funktsiyaning eng katta qiymati mavjud, chunki $c(s)$ uchun ushbu $\lim\limits_{s\to+0}c(s)=\lim\limits_{s\to1-0}c(s)=0$, $c(s)>0$, $\forall s\in(0;1)$ munosabatlar o'rinli. Demak, biror $\tilde{s}\in(0;1)$ uchun $\max\limits_{s\in(0;1)}c(s)=c(\tilde{s})$ tenglik bajariladi. Shu $\tilde{s}$ ni topish uchun $c'(s)$ ni topib, $c'(s)=0$ tenglamani yechish lozim. Ravshanki,

$$c'(s)=[\,f'(k_*(s))-\eta-\mu\chi'(k_*(s))\,]\,\frac{dk_*(s)}{ds}.$$

(10.1) lemmaga ko'ra $c'(s)=0$ tenglama $f'(k_*(s))-\eta-\mu\chi'(k_*(s))=0$ tenglamaga teng kuchli. Ammo undan bevosita s ni topib bo'lmaydi, chunki s tenglamada oshkormas qatnashayapti. Aslida biz k ga nisbatan

$$f'(k)-\eta-\mu\chi'(k)=0 \quad (10.8)$$

tenglamaga egamiz. (10.8) ning chap tomoni hosilasi (k ga nisbatan) noldan farqli, ya'ni $f''(k)-\mu\chi''(k)=0<0$ $\forall k>0$. Shu sababli oshkormas tenglamaning bir qiymatli yechilishi haqidagi teoremaga ko'ra (10.8) ning yagona $\tilde{k}$ yechimi mavjud. Ikkinchi tomondan, bu tasdiq $y_1=sf(k)$ va $y_2=\eta k+\mu\chi(k)$ funksiya grafiklari biror $\bar{k}>0$ da kesishishidan kelib chiqadi. (10.4) tengsizlik $s=1$ da ham bajariladi: $\mu\chi'(+0)+\eta<f'(+0)$.

Ammo $\widetilde{k}$ da unga teskari $\mu\chi'(\widetilde{k})+\eta > s\, f'(\widetilde{k})$ tengsizlik o'rinli. Shu sababli biror $\widetilde{k}$, $0<\widetilde{k}<\bar{k}$ qiymatda $y_1'(\widetilde{k})=y_2'(\widetilde{k})$ tenglik bajariladi. Topilgan $\widetilde{k}$ ni $\phi(k(s))=0$ ga qo'yamiz. Undan $\widetilde{s}$ ni topamiz:

$$\widetilde{s}=\frac{\mu\chi(\widetilde{k})+\eta\widetilde{k}}{f(\widetilde{k})}>0.$$

Endi (10.8) ga ko'ra $\widetilde{s}$ uchun formulani uzil-kesil ushbu

$$\widetilde{s}=\frac{\widetilde{k}\, f'(\widetilde{k})}{f(\widetilde{k})}-\mu\cdot\frac{\widetilde{k}\,\chi'(\widetilde{k})+\chi(\widetilde{k})}{f(\widetilde{k})} \tag{10.9}$$

ko'rinishda yozamiz. Ravshanki, $\widetilde{s}<\dfrac{\widetilde{k}\, f'(\widetilde{k})}{f(\widetilde{k})}$, chunki $k\,\chi'(k)-\chi(k)>0$ $\forall k>0$. Demak, $0<\widetilde{s}<1$ tengsizlik o'rinli.

Ko'rinib turibdiki, ishlab chiqarish resurslarining chiziqsiz yaroqsizlanishi hisobga olinsa, optimal jamg'arish normasi uchun

$$\mu\cdot\frac{\widetilde{k}\,\chi'(\widetilde{k})+\chi(\widetilde{k})}{f(\widetilde{k})} \tag{10.10}$$

miqdorga teng "yutuqqa" egamiz.

Yuqoridagi hisob-kitoblar quyidagi teoremani isbot etadi, desa bo'ladi:

10.2-teorema. (10.2) *munosabatlar bilan tavsiflanadigan iqtisodiy sistema (iqtisodiy jarayon) uchun optimal jamg'arish normasi* $\widetilde{s}$ (10.10) *formulaga teng yutuq bilan* (10.9) *formula yordamida topiladi, balanslangan o'sishning optimal rejimi* $\widetilde{k}$ (10.8) *chekli tenglamaning yechimi sifatida aniqlanadi.*

Endi "oltin qoida" ni chiqarish qiyin emas. (10.9) formuladan uning ikki tomonini $\widetilde{L}$ ga ko'paytirib, ushbu

$$\widetilde{s}F(\widetilde{L},\widetilde{K})=\widetilde{K}\frac{\partial F(\widetilde{K},\widetilde{L})}{\partial K}-\mu\widetilde{L}\left(k\,\chi'(\widetilde{k})+\chi(\widetilde{k})\right) \tag{10.11}$$

tenglikni hosil qilamiz. Bunda, bilamizki, $\tilde{s}F(\tilde{L},\tilde{K})$ – asosiy fondl

ajratilgan kapital miqdori, $\tilde{K}\dfrac{\partial F(\tilde{K},\tilde{L})}{\partial K}$ esa kapitaldan olingan darom

(10.11) dan quyidagi "oltin qoida" kelib chiqadi:
asosiy fondlarga qo'yilgan kapital miqdori kapitaldan olingan darom hajmidan

$$\mu\tilde{L}\left(k\chi'(\tilde{k})+\chi(\tilde{k})\right)$$

miqdorga kam.

Shu miqdor ishlab chiqarish resurslarining chiziqsiz yaroqsizlanishi hisobga olingandagi *samaradorlikni* anglatadi. Bu holda ishlab chiqarilgan mahsulot miqdorining (milliy daromadning) iste'molga ajratilgan qismi Solouning sodda dinamik modelidagiga qaraganda (10.10) miqdorga ko'p bo'ladi. Xulosa shuki, qo'shimcha parametrlarni hisobga olish natijasida iste'molga ajratiladigan ulushni orttirish va buning uchun ishlab chiqarish hajmini qisqartirmaslik mumkin ekan.

10.2-§. Mehnat resurslari hajmi chiziqli-botiq funksiya

Endi iqtisodiy dinamikaning ishlab chiqarish resurslari yaroqsizlanishi chiziqsiz bo'lishi bilan birga mehnat resurslari hajmi chiziqli-botiq bo'lgan modelni ko'ramiz. Bunday iqtisodiy sistema (iqtisodiy jarayon) quyidagi munosabatlar bilan tavsiflanadi:

$$\left.\begin{array}{l}\dot{K}=I-\mu\cdot L\cdot\chi\left(\dfrac{K}{L}\right),\quad 0\le\mu<1,\\ \dot{L}=\eta L+\nu K,\quad \eta>0,\quad \nu>0,\\ \mathrm{Y}=s\mathrm{Y}+(1-s)\mathrm{Y}=I+C,\quad 0<s<1,\quad s=const,\\ c=\dfrac{C}{L}=(1-s)f(k)\to\max,\quad 0<s<1.\end{array}\right\}\qquad(10.12)$$

Iqtisodiy dinamikaning (10.12) modeli trayektoriyasini o'rganish uchun avvalgi hollardagi asosiy differensial tenglamani topib olamiz. Sodda hisoblashlar yordamida topamiz:

$$\dot{k}=s\,f(k)-\mu\chi(k)-\eta k-\nu k^2,\quad k(0)=k_0>0.\qquad(10.13)$$

Bu (10.13) differensial tenglama ham avtonom va uning o'ng tomoni k bo'yicha differensiallanuvchi. Koshi teoremasiga ko'ra (10.13) ning ixtiyoriy boshlang'ich $k(0)=k_0$ shartni qanoatlantiradigan yagona yechimi mavjud.

10.3-teorema. *Agar* (10.13) *tenglama uchun ushbu* ((10.11) *bilan taqqoslang*)

$$\mu\,\chi'(+0)+\eta< s\,f'(+0) \tag{10.14}$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, (10.13) *tenglama yagona musbat* (*sodda yechimdan tashqari*) *va asimptotik turg'un* (*Lyapunov bo'yicha*) *statsionar yechim* $k(t)\equiv k_*>0$ *ga ega, unda* $t\in[0;T]$.

Isbot. (10.13) tenglamaning statsionar yechimlari

$$s\,f(k)-\mu\,\chi\,(k)-\eta\,k-\nu\,k^2=0 \tag{10.15}$$

chekli tenglamadan topiladi. Uning yagona musbat $k=k_*>0$ yechimi mavjudligi avvalgi ko'rilgan modellardagi kabi isbotlanadi.

Shunday qilib,

$$s\,f(k_*)-\mu\,\chi\,(k_*)-\eta\,k-\nu\,k_*^2=0 \tag{10.16}$$

sonli tengsizlik o'rinli. Bu esa, (10.13) tenglama yagona musbat $k(t)\equiv k_*>0$ statsionar yechimga ega ekanini anglatadi. Endi shu yechimning asimptotik turg'unligini ko'rsatish qiyin emas. Uning uchun (10.13) ning o'ng tomoni

$$\varphi(k)=s\,f(k)-\mu\,\chi\,(k)-\eta\,k-\nu\,k^2$$

hosilasini $k=k_*$ da hisoblaymiz:

$$\varphi'(k_*)=s\,f'(k_*)-\mu\,\chi'(k_*)-\eta-2\nu\,k_*.$$

Bu miqdor $f(k)$ va $\chi\,(k)$ funksiyalarning xossalariga ko'ra manfiy. 10.3-teorema isbot bo'ldi.

Iqtisodiy dinamikaning (10.12) modeli uchun $k(t)\equiv k_*$ statsionar yechim *balanslangan o'sish* deyiladi.

Ravshanki, balanslangan o'sish jamg'arish normasi s ga bog'liq. Har bir s ga $(0<s<1)$ bitta balanslangan o'sish rejimi mos keladi. Demak, balanslangan o'sish rejimlari cheksiz ko'p. Optimal rejim esa, jon boshiga iste'molni maksimallashtirish masalasini yechish natijasida topiladi. Shunday qilib, $k_*=k_*(s)$, $0<s<1$.

10.2-lemma. (0; 1) *intervalda aniqlangan va differensiallanuvchi* $k_*(s)$ *funksiya shu intervalda monoton o'suvchi bo'ladi.*

Isboti avvalgi paragrafdagi kabi. (10.16) ning ikki tomonini s bo'yicha differensiallaymiz:

$$f(k_*(s))+[\,s\,f'(k_*(s))-\mu\chi'(k_*(s))-\eta-2\nu\,k_*(s)\,]\,\frac{dk_*(s)}{ds}=0.$$

Bundan

$$\frac{dk_*(s)}{ds}=\frac{f(k_*(s))}{\mu\chi'(k_*(s))+\eta+2\nu\,k_*(s)-s\,f'(k_*(s))}$$

formula kelib chiqadi. Endi $f(k)$ va $\chi(k)$ funksiyalarning xossalariga ko'ra $\frac{dk_*(s)}{ds}>0$ tengsizlik bajariladi. Lemma isbot bo'ldi.

Nihoyat, ushbu

$$c(s)=\frac{C}{L}=(1-s)\,f(k_*(s))\to\max,\quad 0<s<1$$

masalani yechish bilan shug'ullanamiz. Bu masalaning yechimi mavjud, chunki quyidagi munosabatlar o'rinli:

$$\lim_{s\to+0}c(s)=\lim_{s\to1-0}c(s)=0,\quad c(s)>0,\ \forall s\in(0;1).$$

Statsionar nuqtalarni topish uchun $c'(s)$ ni hisoblab, $c'(s)=0$ tenglamani yechamiz: dastavval $c(s)$ ni

$$c(s)=f(k_*(s))-\mu\chi(k_*(s))-\eta k_*(s)-\nu\,k_*^2(s)$$

ko'rinishda yozib olamiz. Sodda hisoblashlar ko'rsatadiki,

$$\frac{dc(s)}{ds}=0\quad\text{yoki}\quad[\,f'(k_*(s))-\mu\chi'(k_*(s))-\eta-2\nu\,k_*(s)\,]\,\frac{dk_*(s)}{ds}=0.$$

Bundan $f'(k_*(s))-\mu\chi'(k_*(s))-\eta-2\nu\,k_*(s)=0$ tenglama kelib chiqadi. Undan s ni topib bo'lmaydi, chunki s oshkormas qatnashgan. Shuning uchun biz aslida k ga nisbatan

$$f'(k)-\mu\chi'(k)-\eta-2\nu\,k=0$$

yoki

$$f'(k)=\mu\chi'(k)+\eta+2\nu\,k \tag{10.17}$$

tenglamaga egamiz. Yana $f(k)$ va $\chi(k)$ funksiyalarning xossalariga ko'ra (10.17) tenglama yagona musbat $\tilde{\tilde{k}}$, $0<\tilde{\tilde{k}}<k_*$ yechimga ega. Endi $\tilde{\tilde{k}}$ ni (10.16) ga qo'yib, $\tilde{\tilde{s}}$ ni topamiz:

$$\tilde{\tilde{s}}=\frac{\mu\chi(\tilde{\tilde{k}})+\eta\tilde{\tilde{k}}+\nu\tilde{\tilde{k}}^2}{f(\tilde{\tilde{k}})}>0. \qquad (10.18)$$

(10.17) dan η ni topib, (10.18) ga qo'yamiz:

$$\tilde{\tilde{s}}=\frac{\tilde{\tilde{k}}\,f'(\tilde{\tilde{k}})}{f(\tilde{\tilde{k}})}-\mu\cdot\frac{\tilde{\tilde{k}}\,\chi'(\tilde{\tilde{k}})-\chi(\tilde{\tilde{k}})}{f(\tilde{\tilde{k}})}-\frac{\nu\tilde{\tilde{k}}^2}{f(\tilde{\tilde{k}})}. \qquad (10.19)$$

Bundan $\tilde{\tilde{s}}>0$ va $\frac{\tilde{\tilde{k}}\,f'(\tilde{\tilde{k}})}{f(\tilde{\tilde{k}})}<1$ bo'lgani uchun $\tilde{\tilde{s}}<1$, ya'ni $0<\tilde{\tilde{s}}<1$ tengsizlik kelib chiqadi.

Jamg'arish normasi bo'yicha "yutuq"

$$\mu\cdot\frac{\tilde{\tilde{k}}\,\chi'(\tilde{\tilde{k}})-\chi(\tilde{\tilde{k}})}{f(\tilde{\tilde{k}})}+\frac{\nu\tilde{\tilde{k}}^2}{f(\tilde{\tilde{k}})} \qquad (10.20)$$

miqdorga teng.
Ravshanki ((10.19) ga qarang),

$$0<\mu\cdot\frac{\tilde{\tilde{k}}\,\chi'(\tilde{\tilde{k}})-\chi(\tilde{\tilde{k}})}{f(\tilde{k})}+\frac{\nu\tilde{\tilde{k}}}{f(\tilde{k})}<\frac{\tilde{\tilde{k}}f'(\tilde{\tilde{k}})}{f(\tilde{k})}$$

tengsizliklar o'rinli.

Shunday qilib, quyidagi teorema isbotlandi.

10.4-teorema. *Iqtisodiy dinamikaning* (10.12) *modeli uchun optimal jamg'arish normasi* $\tilde{\tilde{s}}$ (10.20) *yordamida hisoblanadigan "yutuq" bilan aniqlanadi, balanslangan o'sishning optimal rejimi* $\tilde{\tilde{k}}$ **(10.17)** *chekli tenglamaning yechimi sifatida topiladi.*

"Oltin qoida" esa, ushbu

$$\tilde{\tilde{s}}F(\tilde{\tilde{L}},\tilde{\tilde{K}})=\tilde{\tilde{K}}\frac{\partial F(\tilde{\tilde{K}},\tilde{\tilde{L}})}{\partial K}-\mu\tilde{\tilde{L}}\cdot\left[k\,\chi'(\tilde{\tilde{k}})+\chi(\tilde{\tilde{k}})\right]-\tilde{\tilde{L}}\,\nu\tilde{\tilde{k}}^2 \qquad (10.21)$$

munosabat bilan ifodalanadi: *asosiy fondlarga qo'yiladigan mablag' kapitaldan olinadigan daromadga nisbatan*

$$\mu\,\tilde{\tilde{L}}\cdot\left[k\,\chi'(\tilde{\tilde{k}})+\chi(\tilde{\tilde{k}})\right]-\tilde{\tilde{L}}\,\nu\,\tilde{\tilde{k}}^{2}$$

miqdorga kam bo'ladi. Bu mehnat resurslarini chiziqli-botiq, ishlab chiqarish resurslari yaroqsizlanishini chiziqsiz qilib olingan samaradorlikni bildiradi.

Albatta iqtisodiy dinamikaning mehnat resurslari chiziqsiz-botiq bo'lgan modelini ham ko'rish mumkin edi. Bu ishni mustaqil vazifa sifatida qoldiramiz.

10-bobga oid masalalar

1. $\dot{L}=\eta\cdot L,\ \chi\left(\frac{K}{L}\right)=\left(\frac{K}{L}\right)^{2}$ bo'lganda asosiy differensial tenglama yozilsin.

2. $\tilde{k}$ ni topish uchun tegishli chekli tenglama yozilsin va yechilsin (hech bo'lmaganda taqriban).

3. $\tilde{k}$ bo'yicha $\tilde{s}$ topilsin.

4. $\dot{L}=\eta\,L+\nu\,K,\ \chi\left(\frac{K}{L}\right)=\left(\frac{K}{L}\right)^{2}$ bo'lganda asosiy differensial tenglama yozilsin.

5. $\tilde{\tilde{k}}$ ni topish uchun tegishli chekli tenglama yozilsin va yechilsin (hech bo'lmaganda taqriban).

6. $\tilde{\tilde{k}}$ bo'yicha $\tilde{\tilde{s}}$ topilsin.

7. $\chi\left(\frac{K}{L}\right)=\left(\frac{K}{L}\right)^{3/2}$ bo'lganda yuqoridagi 6 ta savolga javob bering.

10-bobga oid nazorat savollari

1. Ishlab chiqarish resurslari chiziqsiz yaroqsizlanishi qanday ifodalanadi?
2. Mehnat resurslari eksponensial funksiya bo'lganda ishlab chiqarish resurslari chiziqsiz yaroqsizlanishi uchun iqtisodiy dinamika modelini tavsiflang.
3. Mos asosiy differensial tenglamani yozing.
4. Statsionar yechimning mavjudligi haqidagi teoremani aytib bering.

5. Optimal jamg'arish normasi $\tilde{s}$ ni topish uchun formulani yozib bering.

6. Optimal balanslangan rejim $\tilde{k}$ ni aniqlaydigan tenglamani keltiring.

7. Mehnat resurslari chiziqsiz-botiq bo'lganda ishlab chiqarish resurslari chiziqsiz yaroqsizlanishi uchun iqtisodiy dinamika modelini tavsiflang

8. Mos asosiy differensial tenglamani yozing.

9. Shu model uchun statsionar yechimning mavjudligi haqidagi teoremani keltiring.

10. Optimal jamg'arish normasi $\tilde{\tilde{s}}$ ni topish uchun formulani va optimal balanslangan rejim $\tilde{\tilde{k}}$ ni aniqlaydigan tenglamani yozib bering.

11. Ko'rilgan modellar uchun sodda misollar keltiring.

11- bob. IQTISODIY DINAMIKANING IKKI SEKTORLI MODELLARI

Avvalgi ikki bobda ko'rilgan iqtisodiy sistema bitta sektordan iborat bo'lib, unga mos ICHF ham berilgan bo'lar va bittagina tur mahsulot (milliy daromad) ishlab chiqarilar edi. Aslida makroiqtisodiy sistemada ishlab chiqarish ikki va undan ortiq o'zaro hamkorlik qiladigan sektorlarda amalga oshirilishi mumkin. Xususan, hatto K.Marks ikki sektorli modellarni ko'rgan. Unda I sektor ishlab chiqarish qurollarini (asosiy fondlarni), II sektor esa, iste'mol buyumlarini ishlab chiqargan. Bu sodda va kengaytirilgan takror ishlab chiqarish bilan bog'langan edi. Quyida biz hozirgi zamonda keng qo'llaniladigan ikki sektorli modellarni ko'ramiz.

11.1-§. Mehnat resurslari hajmlari yig'indisi o'zgarmas bo'lgan ikki sektorli model

Makroiqtisodiy sistema ikki sektordan iborat bo'lib, ular mos ravishda ushbu

$$Y_1 = F_1(L_1, K_1), \quad Y_2 = F_2(L_2, K_2).$$

neoklassik dinamik ICHF lar bilan xarakterlansin, deylik. Bunda L_1, L_2 – mehnat resurslari hajmi, K_1, K_2 – asosiy fondlar hajmi, Y_1, Y_2 – ishlab chiqarilgan mahsulotlar hajmi. Faraz etaylik, birinchi sektor ishlab chiqarish vositalarini, ikkinchi sektor esa iste'mol buyumlarini ishlab chiqarsin. I va II sektordagi asosiy fondlarga mablag'lar birinchi sektorda ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori Y_1 hisobiga amalga oshiriladi, iste'mol C esa ikkinchi sektorda ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori Y_2 bilan ustma-ust tushadi. Bundan tashqari, mehnat resurslari yig'indisi $L = L_1(t) + L_2(t)$ o'zgarmas deb faraz etiladi, ya'ni $\dot{L}=\dot{L}_1(t)+\dot{L}_2(t)=0$ va $L_1(t) = q(t)\,L$, $L_2(t) =(1-q(t))\,L$, bunda $L = const$, $0 \le q(t) \le 1$. Biz $q(t) \equiv const$, $t\in[0; T]$ holni ko'ramiz. Ravshanki, bu holda $0 < q < 1$.

Yuqorida qilingan farazlar bajarilgan deb qarab, iqtisodiy dinamikaning quyidagi munosabatlar bilan tavsiflanadigan ikki sektorli modelini ko'ramiz:

$$\begin{cases} \dot{K}_1 = s\cdot F_1(L_1,K_1)-\mu_1 K_1, \quad 0<\mu_1<1, \quad 0<s<1, & (11.1)\\ \dot{K}_2=(1-s)F_1(L_1,K_1)-\mu_2 K_2, \quad 0<\mu_2<1, & (11.2)\\ L_1=qL, \quad L_2=(1-q)L, \quad 0<q<1, \quad q=const, & (11.3)\\ C=F_2(L_2,K_2), \quad L_1+L_2=L, \quad L=const. & (11.4)\end{cases}$$

(11.1)–(11.4) modelni o'rganish uchun belgilashlar kiritamiz:

$$k_1=\frac{K_1}{L_1}, \quad k_2=\frac{K_2}{L_2}, \quad F_1(L_1,K_1)=L_1 f_1(k_1), \quad F_2(L_2,K_2)=L_2 f_2(k_2).$$

Shu belgilashlar yordamida (11.1) va (11.2) tenglamalar ushbu

$$\left.\begin{aligned} \dot{k}_1 &= s\, f_1(k_1)-\mu_1 k_1, \\ \dot{k}_2 &= \frac{q\,(1-s)}{1-q} f_1(k_1)-\mu_2 k_2 \end{aligned}\right\} \qquad (11.5)$$

ko'rinishda yoziladi, (11.4) esa

$$C=L_2 f_2(k_2)=(1-q)\,L\, f_2(k_2), \quad 0<q<1 \qquad (11.6)$$

ko'rinishga keladi.

11.1-teorema. *Agar iqtisodiy dinamikaning ikki sektorli* (11.5) *modeli uchun ushbu*

$$\mu_1 < s\, f_1'(+0) \qquad (11.7)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, unda normal avtonom sistema (11.5) *yagona musbat (sodda yechimdan tashqari) va asimptotik turg'un*

$$k_1(t)\equiv k_1^*=k_1(s), \quad k_2(t)\equiv k_2^*=k_2(s,q)$$

statsionar yechimga ega.

Isbot. (11.5) sistemaning birinchi tenglamasiga ko'ra ixtiyoriy $k_1(t)$ yechim faqat s parametrga, shu sistemaning ikkinchi tenglamasiga ko'ra $k_2(t)$ yechim ikkita s va q parametrlarga bog'liq bo'ladi. (11.5) sistemaning o'ng tomonidagi funksiyalar k_1 va k_2 lar bo'yicha uzluksiz differensiallanuvchi. Shuning uchun bu sistema ixtiyoriy boshlang'ich shartlarni qanoatlantiradigan yagona yechimga ega.

(11.5) sistemaning statsionar yechimlari ushbu

$$\left.\begin{aligned} & s\, f_1(k_1)-\mu_1 k_1=0, \\ & \frac{q\,(1-s)}{1-q} f_1(k_1)-\mu_2 k_2=0 \end{aligned}\right\} \qquad (11.8)$$

chekli tenglamalar sistemasining yechimi bo'ladi. (11.8) sistemaning birinchi tenglamasi faqat bitta k_1 noma'lumni o'z ichiga oladi. U yagona musbat (sodda $k_1(t) \equiv 0$ yechimdan tashqari) $k_1^*(s) > 0$ yechimga ega. Endi $k_1 = k_1^*(s)$ bo'lganda (11.8) ning ikkinchi tenglamasi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{q\,(1-s)}{1-q} f_1(k_1^*(s)) - \mu_2 k_2 = 0 \, .$$

Undan $\mu_2 \neq 0$ da $k_2^*(s,q)$ ni topamiz:

$$k_2^*(s,q) = \frac{q\,(1-s)}{\mu_2(1-q)} f_1(k_1^*(s)) > 0 \, . \qquad (11.9)$$

Shunday qilib, (11.5) sistemaning yagona musbat statsionar yechimi $\left(k_1(t); k_2(t)\right) \equiv \left(k_1^*(s); k_2^*(s)\right)$ mavjudligi isbotlandi.

Endi bu yechimning (Lyapunov bo'yicha) asimptotik turg'un ekanini isbotlaymiz. Buning uchun statsionar yechimning asimptotik turg'unligi haqida Lyapunov-Puankare teoremasini qo'llaymiz. Quyidagi

$$P(k_1,k_2) = s\, f_1(k_1) - \mu_1 k_1 \, , \qquad Q(k_1,k_2) = \frac{q\,(1-s)}{1-q} f_1(k_1) - \mu_2 k_2$$

belgilashlarni kiritamiz. Barcha birinchi tartibli xususiy hosilalarni hisoblaymiz:

$$\frac{\partial P}{\partial k_1} = s\, f_1'(k_1) - \mu_1 \, , \qquad \frac{\partial P}{\partial k_2} = 0 \, ,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial k_1} = \frac{q\,(1-s)}{1-q} f_1'(k_1) \, , \qquad \frac{\partial Q}{\partial k_2} = -\mu_2 \, .$$

Endi ushbu

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial k_1} & \dfrac{\partial P}{\partial k_2} \\[2ex] \dfrac{\partial Q}{\partial k_1} & \dfrac{\partial Q}{\partial k_2} \end{pmatrix}$$

matritsani tuzamiz.

Agar shu matritsaning $k_1 = k_1^*(s)$, $k_2 = k_2^*(s,q)$ bo'lganda xos sonlari manfiy haqiqiy qismlarga ega bo'lsa, unda statsionar yechimning asimptotik turg'un ekani isbot etilgan bo'ladi. Haqiqatan, mos xarakteristik tenglamani tuzamiz:

$$\begin{vmatrix} s\, f_1'(k_1^*) - \mu_1 - \lambda & 0 \\ \dfrac{q\,(1-s)}{1-q} f_1'(k_1^*) & -\mu_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Uning yechimlari: $\lambda_1 = s\, f_1'(k_1^*) - \mu_1 < 0$, $\lambda_2 = -\mu_2 < 0$, $0 < \mu_2 < 1$. Shunday qilib, 11.1-teorema isbotlandi.

Topilgan $(k_1^*; k_2^*)$ statsionar yechim mos ravishda birinchi va ikkinchi sektorlar balanslangan o'sish rejimlarini anglatadi, ular cheksiz ko'p, chunki $s \in (0;\, 1)$, $q \in (0;\, 1)$. Har bir $(s;\, q)$ juftlikka bitta balanslangan o'sish rejimi mos keladi. Har bir sektor uchun optimal balanslangan o'sish rejimini topish masalasini qo'yamiz. Optimallik jon boshiga iste'molni maksimallashtirish ma'nosida tushuniladi. Shunday qilib, quyidagi masalani ko'ramiz:

$$c(s,q) = \frac{C}{L} = (1-q)\, f_2(k_2^*(s,q)) \to max,\ 0 < s < 1,\ 0 < q < 1. \quad (11.10)$$

Avval (11.10) masala yechimining mavjudligini ko'rsatamiz. Π_2 deb ochiq kvadratni belgilaymiz, ya'ni

$$\Pi_2 = \{\, (s;\, q):\ 0 < s < 1,\quad 0 < q < 1 \,\}.$$

Π_2 kvadratning tomonlarini G_1, G_2, G_3 va G_4 deb belgilaymiz:

$$G_1 = \{\, (s;\, q):\ 0 < s < 1,\quad q = 0 \,\},\quad G_2 = \{\, (s;\, q):\ s = 1,\quad 0 < q < 1 \,\},$$
$$G_3 = \{\, (s;\, q):\ 0 < s < 1,\quad q = 1 \,\},\quad G_4 = \{\, (s;\, q):\ s = 0,\quad 0 < q < 1 \,\}.$$

Kvadratning chegarasini $\partial\Pi_2 = \overline{\Gamma}_1 + \overline{\Gamma}_2 + \overline{\Gamma}_3 + \overline{\Gamma}_4$ deb belgilasak, $\overline{\Pi}_2 = \Pi_2 \cup \partial\Pi_2$ bo'ladi, bunda $\overline{\Pi}_2$ – yopiq kvadrat. Ravshanki, (11.9) ga ko'ra ushbu

$$\lim_{s \to +0} k_2^*(s,q) = \lim_{q \to +0} k_2^*(s,q) = 0$$

tengliklar o'rinli. Shuning uchun quyidagi tengliklar o'rinli:

$$\lim_{\substack{s \to +0 \\ 0<q<1}} c\,(s,q) = \lim_{\substack{q \to +0 \\ 0<s<1}} c\,(s,q) = \lim_{\substack{q \to 1-0 \\ 0<s<1}} c\,(s,q) = \lim_{\substack{s \to 1-0 \\ 0<q<1}} c\,(s,q) = 0\,,$$

ya'ni $\lim\limits_{(s,q)\to\partial\Pi_2} c(s,q)=0$. Bundan tashqari $c(s,q)>0$, $\forall(s,q)\in\Pi_2$. Demak, (11.10) masalaning yechimi mavjud, ya'ni $c(s,q)$ funksiya $(\bar{s},\bar{q})\in\Pi_2$ nuqtada o'zining eng katta qiymatiga erishadi. Endi shu $(\bar{s},\bar{q})$ nuqtani topamiz.

Avval statsionar nuqtalarni aniqlaymiz. Buning uchun ushbu $\dfrac{\partial c}{\partial s}$, $\dfrac{\partial c}{\partial q}$

hosilalarni $k_1=k_1^*(s)$, $k_2=k_2^*(s,q)$ da hisoblab, nolga tenglashtiramiz:

$$\frac{\partial c}{\partial s}=(1-q)\,f_2'(k_2)\cdot\frac{\partial k_2}{\partial s},$$

$\partial k_2/\partial s$ uchun ifoda topamiz:

$$\frac{\partial k_2}{\partial s}=\frac{q}{(1-q)\,\mu_2}[\,f_1'(k_1)-\mu_1\,]\cdot\frac{\partial k_1}{\partial s}\ .$$

O'z navbatida, $\partial k_2/\partial s$ uchun ifoda chiqaramiz:

$$\frac{\partial k_1}{\partial s}=\frac{f_1(k_1)}{\mu_1-s\,f_1'(k_1)}>0\ .$$

Endi $\partial k_2/\partial s$ uchun uzil-kesil formulani yozamiz:

$$\frac{\partial k_2}{\partial s}=\frac{q}{(1-q)\,\mu_2}[\,f_1'(k_1)-\mu_1]\cdot\frac{f_1(k_1)}{\mu_1-s\,f_1'(k_1)}\ .$$

Bundan keyin $\dfrac{\partial c}{\partial s}=0$ tenglamaga ko'ra k_1 ga nisbatan tenglama hosil bo'ladi (unga s oshkormas kiradi):

$$f_1'(k_1)-\mu_1=0. \qquad (11.11)$$

Bundan yagona musbat $\bar{k}_1$ yechimni topamiz. Shu $\bar{k}_1$ qiymatni (11.8) sistemaning birinchi tenglamasiga qo'yib, optimal jamg'arish normasi $\bar{s}$ ni topamiz:

$$\bar{s}=\frac{\mu_1\bar{k}_1}{f_1(\bar{k}_1)}=\frac{\bar{k}_1 f_1'(\bar{k}_1)}{f_1(\bar{k}_1)}. \qquad (11.12)$$

$F(L_1, K_1)$ IChF ning neoklassikligidan $f_1(k_1)$ uchun ushbu

$$0 < \frac{\bar{k}_1 f_1'(\bar{k}_1)}{f_1(\bar{k}_1)} < 1$$

tengsizlikni yozish mumkin.

Endi $\dfrac{\partial c}{\partial q} = 0$ ni $k_1 = k_1^*(s)$, $k_2 = k_2^*(s, q)$ nuqtada hisoblaymiz:

$$\frac{\partial c}{\partial q} = -f_2(k_2) + (1-q) f_2'(k_2) \frac{\partial k_2}{\partial q}. \qquad (11.13)$$

Bundagi $\dfrac{\partial k_2}{\partial q}$ ni hisoblash uchun (11.8) sistemaning ikkinchi tenglamasini q bo'yicha differensiallaymiz:

$$(1-s)\left[\frac{1}{(1-q)^2} f_1(k_1) + \frac{q}{1-q} f_1'(k_1) \frac{\partial k_1}{\partial q}\right] - \mu_2 \frac{\partial k_2}{\partial q} = 0.$$

Bundan $\partial k_1 / \partial q = 0$ bo'lgani uchun

$$\frac{\partial k_2}{\partial q} = \frac{1-s}{\mu_2 (1-q)^2} f_1(k_1) \qquad (11.14)$$

formula kelib chiqadi. Endi (11.14) ni (11.13) ga qo'yamiz:

$$\frac{\partial c}{\partial q} = -f_2(k_2) + (1-q) f_2'(k_2) \cdot \frac{1-s}{\mu_2 (1-q)^2} f_1(k_1).$$

(11.8) sistemaning ikkinchi tenglamasiga ko'ra

$$\frac{1-s}{1-q} = \frac{\mu_2}{q} \cdot \frac{k_2}{f_1(k_1)}$$

tenglik o'rinli. Shuni e'tiborga olgan holda $\partial c / \partial q$ ni uzil-kesil topish mumkin:

$$\frac{\partial c}{\partial q} = -f_2(k_2) + \frac{f_2'(k_2) f_1(k_1)}{\mu_2} \cdot \frac{\mu_2 k_2}{q f_1(k_1)} = \frac{k_2 f_2'(k_2)}{q} - f_2(k_2).$$

Shunday qilib,

$$\frac{\partial c}{\partial q}=\frac{k_2 f_2'(k_2)}{q}-f_2(k_2). \qquad (11.15)$$

Bundan $\frac{\partial c}{\partial q}=0$ tenglamani q ga nisbatan yechib topamiz:

$$q=\frac{k_2 f_2'(k_2)}{q}, \quad 0<q<1. \qquad (11.16)$$

(11.16) va (11.8) ning ikkinchi tenglamasiga ko'ra $s=\bar{s}$, $k_1=\bar{k}_1$ (bunda $\bar{k}_1$ – (11.11) tenglamaning yechimi) bo'lganda k_2 ga nisbatan quyidagi tenglamaga ega bo'lamiz:

$$\frac{(1-\bar{s})f_1(\bar{k}_1)}{\mu_2}=k_2\left[-1+\frac{f_2(k_2)}{k_2 f_2'(k_2)}\right]. \qquad (11.17)$$

Bu tenglamaning o'ng tomoni ixtiyoriy $k_2>0$ uchun musbat, chunki neoklassik shartga asosan

$$\frac{f_2(k_2)}{k_2 f_2'(k_2)}>1.$$

Tenglamaning chap tomoni esa musbat son. Endi (11.17) tenglama yagona musbat yechimga ega ekanini isbotlash qiyin emas. Avvalo (11.17) ni k_2 ga nisbatan bir qiymatli yechish mumkin, chunki (11.17) o'ng tomonining k_2 bo'yicha hosilasi noldan farqli, aniqrog'i

$$\frac{d}{dk_2}\left[-k_2+\frac{f_2(k_2)}{f_2'(k_2)}\right]=-\frac{f_2(k_2)f_2''(k_2)}{\left[f_2'(k_2)\right]^2}>0.$$

Shu bilan birga,

$$\lim_{k_2\to+0}\left[-k_2+\frac{f_2(k_2)}{f_2'(k_2)}\right]=0 \qquad (f_2(+0)=0,\ f_2'(+0)>0).$$

Yuqoridagi munosabatlardan (11.17) ning o'ng tomoni monoton o'suvchi va uning qiymati 0 dan boshlab o'sib borib, biror $\bar{k}_2$ da chap tomonga teng bo'ladi.

Endi topilgan $\bar{k}_2$ ni (11.16) ga qo'yamiz:

$$\bar{q} = \frac{\bar{k}_2 f_2'(\bar{k}_2)}{f_2(\bar{k}_2)}, \quad 0 < \bar{q} < 1. \tag{11.18}$$

Shunday qilib, (11.10) masala uchun $c(s, q)$ funksiyaning yagona statsionar nuqtasi $(\bar{s}, \bar{q}) \in \Pi_2$ topildi. Shu nuqtada *(11.10)* masalaning yechimi mavjudligi sababli $c(s, q)$ funksiya o'zining eng katta qiymatiga erishadi.

Topilgan natijalarni teorema shaklida bayon qilamiz:

11.2-teorema. *Iqtisodiy dinamikaning* (11.1)–(11.4), (11.10) *modeli uchun optimal jamg'arish normasi* $\bar{s}$ *va mehnat resurslari optimal taqsimoti koeffitsiyenti* $\bar{q}$ (11.12) *va* (11.18) *formulalar yordamida hisoblanadi,* $\bar{k}_1$ – (11.11) *tenglamaning,* $\bar{k}_2$ *esa* (11.17) *tenglamaning musbat yechimlari.*

Endi "oltin qoida" ni chiqaramiz, (11.11) ga ko'ra:

$$\bar{s} \cdot F_1(\bar{L}_1, \bar{K}_1) = \frac{\partial F_1(\bar{L}_1, \bar{K}_1)}{\partial K_1} \cdot \bar{K}_1. \tag{11.19}$$

$F_1(L_1, K_1)$ ICHF ning chiziqli–bir jinsligiga ko'ra

$$\frac{\partial F_1}{\partial L_1} \cdot \bar{L}_1 + \frac{\partial F_1}{\partial K_1} \cdot \bar{K}_1 = F_1.$$

Bundan

$$\frac{\partial F_1}{\partial K_1} \cdot \bar{K}_1 = F_1 - \frac{\partial F_1}{\partial L_1} \cdot \bar{L}_1.$$

Bu ifodani (11.19) ga qo'yamiz:

$$(1 - \bar{s}) \cdot F_1(\bar{L}_1, \bar{K}_1) = \frac{\partial F_1(\bar{L}_1, \bar{K}_1)}{\partial L_1} \cdot \bar{L}_1. \tag{11.20}$$

Endi (11.18) dan foydalanib, ushbu

$$\frac{\partial F_2(\bar{L}_2, \bar{K}_2)}{\partial K_2} \cdot \bar{K}_2 = \bar{q} \cdot F_2(\bar{L}_2, \bar{K}_2) \tag{11.21}$$

tenglikni hosil qilamiz. Nihoyat, $F_2(\bar{L}_2, \bar{K}_2)$ ICHF ning neoklassikligidan foydalanib, yana bir muhim

$$\frac{\partial F_2(\overline{L}_2,\overline{K}_2)}{\partial L_2}\cdot\overline{L}_2=(1-\overline{q})\cdot F_2(\overline{L}_2,\overline{K}_2) \qquad (11.22)$$

tenglikni chiqaramiz.

Endi "*oltin qoida*"ni bayon qilish mumkin:

a) (11.19) ga ko'ra birinchi sektorga ajratiladigan mablag' shu sektorning kapitaldan oladigan daromadiga teng; ikkinchi sektorga ajratiladigan mablag' (11.20) ga ko'ra birinchi sektorning mehnatdan olgan daromadiga teng;

b) mehnat resurslari birinchi va ikkinchi sektorlar orasida ikkinchi sektorning kapitaldan hamda mehnatdan olgan daromadlariga proporsional qilib taqsimlanadi. Bu tasdiq (11.21) va (11.22) munosabatlardan kelib chiqadi.

Misol. ICHF lar *o'rnida ushbu* $F_1=a_1K_1^{\alpha_1}L_1^{\beta_1}$, $F_2=a_2K_2^{\alpha_2}L_2^{\beta_2}$, $\alpha_i+\beta_i=1$, $\alpha_i>0$, $\beta_i>0$, $i=1,2$, $a_1>0$, $a_2>0$ Kobb-Duglas funksiyalarini olaylik. Quyidagilarga egamiz:

$$f_1(k_1)=a_1k_1^{\alpha_1}, \qquad f_1'(k_1)=a_1\alpha_1k_1^{\alpha_1-1},$$

$$f_2(k_2)=a_2k_2^{\alpha_2}, \qquad f_2'(k_2)=a_2\alpha_2k_2^{\alpha_2-1}.$$

(11.11) tenglamani yozamiz: $a_1\alpha_1k_1^{\alpha_1-1}=\mu_1$. Bundan $\overline{k}_1$ ni topamiz:

$$\overline{k}_1=\left(\frac{a_1\alpha_1}{\mu_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_1}}.$$

(11.12) formula bo'yicha $\bar{s}=\alpha_1$. (11.17) tenglamani yozamiz:

$$\frac{1}{\mu_2}(1-\alpha_1)\frac{a_1\alpha_1}{\mu_1}=k_2\left[-1+\frac{k_2^{\alpha_2}}{k_2\alpha_2k_2^{\alpha_2-1}}\right].$$

Bundan $\overline{k}_2$ ni topamiz:

$$\overline{k}_2=\frac{\alpha_2(1-\alpha_1)}{\mu_2(1-\alpha_2)}\cdot a_1^{\frac{1}{1-\alpha_1}}\cdot\left(\frac{\alpha_1}{\mu_2}\right)^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}}.$$

Endi (11.18) formula bo'yicha $\bar{q}$ ni hisoblaymiz

$$\bar{q}=\frac{\bar{k}_2\cdot f_2'(\bar{k}_2)}{f_2(\bar{k}_2)}=\frac{\bar{k}_2\cdot a_2\cdot\alpha_2\cdot\bar{k}_2^{\alpha_2-1}}{a_2\cdot\bar{k}_2^{\alpha_2}}=\alpha_2 .$$

Shunday qilib, $\bar{s}=\alpha_1$, $\bar{q}=\alpha_2$. Kobb-Duglas funksiyasi uchun ko'rilgan misol quyidagi ancha aniqlashtirilgan "oltin qoida" ni chiqarishga imkon beradi:

a) birinchi sektorga ajratilgan mablag'lar birinchi sektorda ishlab chiqarilgan mahsulotning α_1 -qismini, ikkinchi sektorga ajratilgan mablag'lar birinchi sektorda ishlab chiqarilgan mahsulotning β_1 -qismini tashkil etadi;

b) birinchi sektorning mehnat resurslari hamma mehnat resurslarining α_2 -qismini, ikkinchi sektorlar mehnat resurslari hamma mehnat resurslarining β_2 -qismini tashkil etadi.

11.2-§. Mehnat resurslari hajmlari yig'indisi eksponensial funksiya bo'lgan ikki sektorli model

Iqtisodiy dinamikaning ikki sektorli modellarini mehnat resurslari hajmlari yig'indisi *o'zgarmas bo'lmagan* holda o'rganish shu yig'indi *o'zgarmas bo'lgan* holidagiga qaraganda anchagina muhim hisoblanadi. Mazkur paragrafda mehnat resurslari hajmlari yig'indisi eksponensial, ya'ni qavariq funksiya bo'lgan holni ko'ramiz. Faraz etaylik,

$$L_1(t)+L_2(t)=L(t) \text{ va } \dot{L}(t)=\eta L(t),\ \eta>0 \ (\text{ya'ni } L(t)=L_0e^{\eta t}).$$

Bu mehnat resurslari hajmlari yig'indisining o'sish sur'ati o'zgarmas ekanini anglatadi. Shunday qilib, iqtisodiy dinamikaning quyidagi munosabatlar bilan tavsiflanadigan ikki sektorli modelini ko'ramiz:

$$\begin{cases} \dot{K}_1=s\cdot F_1(L_1,K_1)-\mu_1K_1, \quad 0<s<1, \quad 0<\mu_1<1, & (11.23)\\ \dot{K}_2=(1-s)F_1(L_1,K_1)-\mu_2K_2, \quad 0<\mu_2<1, & (11.24)\\ \dot{L}_1=\eta L, \quad L_1=qL, \quad L_2=(1-q)L, \quad 0<q<1, \quad q=const, & (11.25)\\ C=F_2(L_2,K_2), & (11.26)\\ c=\dfrac{C}{L}\to max, \quad 0<s<1, \quad 0<q<1. & (11.27)\end{cases}$$

Mehnat resurslarining sektorlarga taqsimot koeffitsiyenti q o'zgarmas va $0<q<1$ bo'lgani uchun ushbu $\dot{L}_1=q\dot{L}$, $\dot{L}_2=(1-q)\dot{L}$ tengliklar o'rinli. Endi differensial tenglamalarning asosiy sistemasini chiqaramiz. Uning uchun $\dot{k}_1$ va $\dot{k}_2$ larni hisoblaymiz:

$$\dot{k}_1 = \frac{d}{dt}\left(\frac{K_1}{L_1}\right) = \frac{\dot{K}_1 L_1 - K_1 \dot{L}_1}{L_1^2} = \frac{(sL_1 f_1(k_1) - \mu_1 K_1)L_1 - K_1 \dot{L}_1}{L_1^2} =$$

$$= s\, f_1(k_1) - (\mu_1 + \eta)\, k_1,$$

$$\dot{k}_2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{K_2}{L_2}\right) = \frac{\dot{K}_2 L_2 - K_2 \dot{L}_2}{L_2^2} = \frac{[(1-s)F_1 - \mu_2 K_2]L_2 - K_2 \dot{L}_2}{L_2^2} =$$

$$= \frac{(1-s)\, L_1\, f_1(k_1)\, L_2}{L_2^2} - \mu_2 k_2 - k_2 \frac{\dot{L}_2}{L_2} = \frac{(1-s)qL}{(1-q)L} f_1(k_1) -$$

$$-\mu_2 k_2 - k_2 \frac{(1-q)\, q\dot{L}}{(1-q)L} = \frac{q\,(1-s)}{1-q} f_1(k_1) - (\mu_2 + \eta) k_2 .$$

Shunday qilib, differensial tenglamalarning asosiy sistemasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\begin{cases} \dot{k}_1 = s\, f_1(k_1) - (\mu_1 + \eta)\, k_1, \\ \dot{k}_2 = \dfrac{q(1-s)}{1-q} f_1(k_1) - (\mu_2 + \eta) k_2 . \end{cases} \tag{11.28}$$

Biz ikkita differensial tenglamaning normal avtonom sistemasini hosil qildik. Bu sistema ixtiyoriy $k_1(0) = k_1^0 > 0$, $k_2(0) = k_2^0 > 0$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiradigan yagona yechimga ega, chunki (11.28) sistemaning o'ng tomoni Koshi teoremasining shartlarini qanoatlantiradi. Aniqroq aytganda, (11.28) sistemaning o'ng tomoni k_1 va k_2 lar bo'yicha uzluksiz differensiallanuvchi va bu Koshi teoremasining asosiy sharti edi.

11.3-teorema. *Agar iqtisodiy dinamikaning ikki sektorli modeli* (11.28) *uchun ushbu*

$$\mu_1 + \eta < s\, f_1'(+0) \tag{11.29}$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, (11.28) *sistema yagona musbat* (*sodda yechimdan boshqa*) *va asimptotik turg'un* (*muvozanat holatiga*) *statsionar yechimga* *ga bo'ladi* (11.1-*teoremaga taqqoslang*), *ya'ni* $k_1(t) \equiv k_1^* = k_1(s)$, $k_2(t) \equiv k_2^* = k_2(s, q)$, $0 < q < 1$, $0 < s < 1$.

Isbot. Mazkur teoremaning isboti 11.1-teoremaning isbotiga o'xshash. Shuning uchun mulohazalarni qisqacha olib boramiz. (11.28) sistemaning statsionar yechimlari ushbu

$$\begin{cases} s\, f_1(k_1) - (\mu_1 + \eta)\, k_1 = 0, \\ \dfrac{q(1-s)}{1-q} f_1(k_1) - (\mu_2 + \eta) k_2 = 0 \end{cases} \tag{11.30}$$

chekli sistemaning yechimi sifatida topiladi. Shu yechimni quyidagi $k_1(t) \equiv k_1^*(s)$, $k_2(t) \equiv k_2^*(s, q)$ ko'rinishda yozamiz. Statsionar yechim $0 < s < 1$, $0 < q < 1$ intervallarda har ikki sektorning balanslangan o'sish rejimlaridan iborat. Bunday rejimlar cheksiz ko'p. Ularning ichidan (11.27) belgi bo'yicha optimal rejimni ajratib olish lozim. Boshqacha aytganda, quyidagi masalani yechish kerak:

$$\begin{cases} c(s, q) = \dfrac{C}{L} = (1-q) f_2(k_2^*(s, q)) \to \max, \\ 0 < s < 1, \quad 0 < q < 1. \end{cases} \tag{11.31}$$

Avvalgi paragrafdan ma'lumki, $c(s, q)$ funktsiya $\text{P}_2 = \{ (s, q): 0 < s < 1,\ 0 < q < 1 \}$ ochiq kvadratda aniqlangan, uzluksiz differensiallanuvchi va $(\tilde{s}, \tilde{q}) \in \Pi_2$ nuqtada o'zining eng katta qiymatiga erishadi.

11.4-teorema. *Iqtisodiy dinamikaning* ((11.23) - (11.27)) *modeli uchun optimal jamg'arish normasi* $\tilde{s}$ *va mehnat resurslarining optimal taqsimoti koeffitsiyenti* $\tilde{q}$ *quyidagi formulalar yordamida topiladi:*

$$\tilde{s} = \frac{\tilde{k}_1\, f_1'(\tilde{k}_1)}{f_1(\tilde{k}_1)}, \qquad \tilde{q} = \frac{\tilde{k}_2\, f_2'(\tilde{k}_2)}{f_2(\tilde{k}_2)},$$

bunda $\tilde{k}_1$ **ushbu**

$$f_1'(k_1) - (\mu_1 + \eta) = 0$$

tenglamaning, $\tilde{k}_2$ *esa ushbu* ((11.17) *bilan taqqoslang*)

$$\frac{(1-\widetilde{s})f_1(\widetilde{k}_1)}{\mu_2}=k_2\left[-1+\frac{f_2(k_2)}{k_2 f_2'(k_2)}\right]$$

tenglamaning yechimi.

"Oltin qoida" avvalgi paragrafdagi mazmunga ega.

11.3-§. Mehnat resurslari hajmlari yig'indisi chiziqli-botiq bo'lgan ikki sektorli model

Mehnat resurslar hajmlari yig'indisi vaqt t, $t\in[0;T]$ ning chiziqli-botiq funksiyasi bo'lsin. Chiziqlilik $\dot{L}(t)$ ning $L(t)$ va $K(t)$ ga chiziqli bog'liqlini, ya'ni $\dot{L}(t)=\eta L(t)+\nu K(t)>0$, $\eta>0$, $\nu>0$ ni anglatadi. Botiqlik esa, $\dot{L}(t)$ funksiyaning botiqligini, ya'ni $\ddot{L}(t)<0$, $t\in[0;\mathrm{T}]$ ni anglatadi. Ravshanki,

$$\ddot{L}(t)=\eta\dot{L}(t)+\nu\dot{K}(t)=\dot{L}(t)\left[\eta+\nu\frac{dK}{dL}\right].$$

11.1-lemma. *Agar $F_1(L_1,K_1)$ va $F_2(L_2,K_2)$ ICHF lar izokvantalarida*

$$\frac{dK_1}{dL_1}<-\frac{\eta}{\nu}<0,\qquad \frac{dK_2}{dL_2}<-\frac{\eta}{\nu}<0 \tag{11.32}$$

tengsizliklar bajarilsa, unda $L(t)$ funksiya botiq bo'ladi.

Isbot. Ma'lumki, $L(t)=L_1(t)+L_2(t)$, $K(t)=K_1(t)+K_2(t)$, $\dot{L}(t)=\dot{L}_1(t)+\dot{L}_2(t)$, $\dot{K}(t)=\dot{K}_1(t)+\dot{K}_2(t)$. Shuning uchun

$$\ddot{L}(t)=\dot{L}_1(t)\left[\eta+\nu\frac{dK_1}{dL_1}\right]+\dot{L}_2(t)\left[\eta+\nu\frac{dK_2}{dL_2}\right].$$

Bundan (11.32) ga ko'ra, $\ddot{L}(t)<0$ tengsizlik kelib chiqadi.

Agar (11.32) tengsizlik o'rinli bo'lsa, $L_1(t)$ va $L_2(t)$ funksiyalar ham botiq bo'lishi ravshan.

Endi iqtisodiy dinamikaning quyidagi munosabatlar bilan tavsiflanadigan ikki sektorli modelini quramiz:

$$
\begin{cases}
\dot{K}_1 = s\,F_1(L_1, K_1) - \mu_1 K_1, \quad 0 < s < 1\,, \quad 0 < \mu_1 < 1, & (11.33)\\
\dot{K}_2 = (1-s)F_1(L_1, K_1) - \mu_2 K_2, \quad 0 < \mu_2 < 1, & (11.34)\\
\dot{L}_j = \mu L_j + \nu K_j, \quad j = 1,2, \quad \dot{L}_1 = q\dot{L}, \quad \dot{L}_2 = (1-q)\dot{L}, & \\
\qquad L_1 = qL, \quad L_2 = (1-q)L, \quad 0 < q < 1, \quad q = const, & (11.35)\\
c = \dfrac{C}{L} \to max, \quad 0 < s < 1, \quad 0 < q < 1. & (11.36)
\end{cases}
$$

Avvalgi paragrafdagiga o'xshash $\dot{k}_1$ va $\dot{k}_2$ larni hisoblab, quyidagi differensial tenglamalarning asosiy sistemasini hosil qilamiz:

$$
\begin{cases}
\dot{k}_1 = s\,f_1(k_1) - (\mu_1 + \eta)\,k_1 - \nu k_1^2\,,\\
\dot{k}_2 = \dfrac{q\,(1-s)}{1-q}\cdot f_1(k_1) - (\mu_2 + \eta)\,k_2 - \nu\,k_2^2\,.
\end{cases} \qquad (11.37)
$$

Bu sistema ixtiyoriy boshlang'ich shartlarni: $k_1(0) = k_1^0$, $k_2(0) = k_2^0$ qanoatlantiradigan yagona yechimga ega, chunki (11.37) ning o'ng tomoni k_1, k_2 larga nisbatan uzluksiz differensiallanuvchi bo'lgani uchun yagonalik haqidagi Koshi teoremasining shartlari bajariladi.

Keyingi mulohazalarda qulaylik bo'lishi uchun ushbu

$$
\chi_1(k_1) = k_1 + \frac{\nu}{\mu_1 + \eta}k_1^2\,, \qquad \chi_2(k_2) = k_2 + \frac{\nu}{\mu_2 + \eta}k_2^2\,, \qquad (11.38)
$$

belgilashlarni kiritamiz. Natijada (11.37) quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$
\begin{cases}
\dot{k}_1 = s\,f_1(k_1) - (\mu_1 + \eta)\,\chi_1(k_1)\,,\\
\dot{k}_2 = \dfrac{q\,(1-s)}{1-q}\,f_1(k_1) - (\mu_2 + \eta)\,\chi_2(k_2)\,.
\end{cases} \qquad (11.39)
$$

Har ikki $\chi_1(k_1)$, $\chi_2(k_2)$ funksiya ham quyidagi shartlarni qanoatlantiradi (j=1,2, $\forall k_j > 0$):

$$
\chi_j(0) = 0\,, \quad \chi_j'(0) = 1\,, \quad \chi_j'(k_j) = 1 + \frac{2\nu\,k_j}{\mu_j + \eta} > 0\,, \quad \chi_j''(k_j) = \frac{2\,\nu}{\mu_j + \eta} > 0\,.
$$

Bundan ko'rinadiki, $y = (\mu_1 + \eta)\,\chi_1(k_1)$, $y = (\mu_2 + \eta)\,\chi_2(k_2)$ funksiyalar monoton o'suvchi va qavariq. Grafiklari koordinata boshidan $\mu_1 + \eta$ va $\mu_2 + \eta$ burchak koeffitsiyent bilan chiqadi va I chorakda joylashgan.

Endi (11.39) asosiy sistemaning statsionar yechimlarini o'rganamiz.

11.5-teorema. *Agar* (11.39) *sistema uchun ushbu* ((11.29) *ga qarang*)

$$\mu_1 + \eta < s\, f_1'(+0) \tag{11.40}$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, unda shu sistema yagona musbat va asimptotik turg'un statsionar yechimga ega bo'ladi, ya'ni

$$k_1(t) \equiv k_1(s), \quad k_2(t) \equiv k_2(s,q), \quad t \in [0;T].$$

Isbot. Quyidagi chekli sistemani ko'ramiz;

$$\begin{cases} s\, f_1(k_1) - (\mu_1 + \eta)\,\chi_1(k_1) = 0, \\ \dfrac{q\,(1-s)}{1-q}\, f_1(k_1) - (\mu_2 + \eta)\,\chi_2(k_2) = 0. \end{cases} \tag{11.41}$$

Bu sistemaning birinchi tenglamasi (11.40) ga ko'ra, $s\, f_1(k_1)$ ning neoklassikligi va $(\mu_1 + \eta)\,\chi_1(k_1)$ funksiyaning qavariqligi uchun yagona musbat $k_1 = k_1(s)$ yechimga ega. (11.41) ning ikkinchi tenglamasi $k_1 = k_1(s)$ bo'lganda ushbu

$$\frac{q\,(1-s)}{1-q}\, f_1(k_1(s)) = (\mu_2 + \eta)\,\chi_2(k_2)$$

ko'rinishga keladi. Bu tenglamaning chap tomoni o'zgarmas va musbat, o'ng tomoni esa monoton o'suvchi va $(\mu_2 + \eta)\,\chi_2(0) = 0$. Shu sababli oxirgi tenglama k_2 ga nisbatan yagona musbat $k_2 = k_2(s, q)$ yechimga ega. Shunday qilib, (11.41) chekli tenglamalar sistemasi yagona musbat (sodda $k_2 = 0$, $k_2 = 0$ echimdan boshqa) yechimga ega. Bu esa, (11.39) asosiy sistema yagona musbat $k_1(t) \equiv k_1(s)$, $k_2(t) \equiv k_2(s,q)$, $t \in [0;T]$ statsionar yechimga ega ekanini anglatadi.

Endi shu yechim asimptotik turg'un ekanini isbotlaylik. Qulaylik uchun ushbu

$$P(k_1,k_2) = s\, f_1(k_1) - (\mu_1 + \eta)\,\chi_1(k_1),$$

$$Q(k_1,k_2) = \frac{q\,(1-s)}{1-q}\, f_1(k_1) - (\mu_2 + \eta)\,\chi_2(k_2),$$

belgilashlarni kiritamiz. $P(k_1, k_2)$ va $Q(k_1, k_2)$ funksiyalarning birinchi tartibli xususiy hosilalarini hisoblaymiz:

$$\frac{\partial P}{\partial k_1}=s\, f_1'(k_1)-(\mu_1+\eta)\,\chi_1'(k_1), \qquad \frac{\partial P}{\partial k_2}=0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial k_1}=\frac{q\,(1-s)}{1-q}\, f_1'(k_1), \quad \frac{\partial Q}{\partial k_2}=-(\mu_2+\eta)\,\chi_2'(k_2).$$

Endi $k_1=k_1(s)$, $k_2=k_2(s,q)$ bo'lganda birinchi tartibli hosilalardan matritsa tuzamiz:

$$A=\begin{pmatrix} s\, f_1'(k_1)-(\mu_1+\eta)\,\chi_1'(k_1) & 0 \\ \dfrac{q\,(1-s)}{1-q}\, f_1'(k_1) & -(\mu_2+\eta)\,\chi_2'(k_2) \end{pmatrix}.$$

A matritsaning xos sonlari manfiy va mos ravishda ushbu

$$\lambda_1=s\, f_1'(k_1(s))-(\mu_1+\eta)\,\chi_1'(k_1(s))<0,$$

$$\lambda_2=-(\mu_2+\eta)\,\chi_2'(k_2(s,q))<0$$

sonlarga teng. Bu esa, Lyapunov-Puankare teoremasiga ko'ra $k_1(t)\equiv k_1(s)$, $k_2(t)\equiv k_2(s,q)$, $t\in[0;T]$ statsionar yechimning asimptotik turg'unligini anglatadi. 11.5-teorema isbot bo'ldi.

Ta'kidlab o'tamizki, statsionar yechim $\Pi_2=\{\,(s;\,q)\colon 0<s<1,\ 0<q<1\,\}$ ochiq kvadratda aniqlangan. Har bir $(s;\,q)\in\Pi_2$ juftlikka bitta balanslangan o'sish rejimi mos keladi. Har bir sektor uchun bunday rejimlar cheksiz ko'p. Masala optimal rejimni topishdan iborat. Shu munosabat bilan ushbu

$$c(s,q)=\frac{C}{L}=(1-q)\, f_2(k_2(s,q))\to\max, \quad (s,\,q)\in\Pi_2 \qquad (11.42)$$

masalani ko'ramiz. Bu masalaning yechimi mavjudligi avvalgi paragrafdagi shunga o'xshash masalaning yechimi mavjudligi isboti kabi olib boriladi. Biz Π_2 ochiq kvadratning $c(s,q)$ funktsiya o'zining eng katta qiymatiga erishadigan nuqtasini topish bilan shug'ullanamiz. $c(s,q)$ funksiyaning statsionar nuqtalarini topish uchun yana barcha birinchi tartibli xususiy hosilalarini topamiz va nolga tenglashtiramiz, ya'ni $\partial c/\partial s=0$, $\partial c/\partial q=0$ sistemani yechamiz. $\partial c/\partial s=0$ hosila osongina topiladi:

$$\frac{\partial c}{\partial s}=(1-q)\, f_2'(k_2)\,\frac{\partial k_2}{\partial s}.$$

Endi (11.41) sistemaning ikkinchi tenglamasining ikkala tomonini s bo'yicha differensiallaymiz:

$$\frac{q}{1-q}\left[(1-s)\, f_1'(k_1)\frac{\partial k_1}{\partial s}-f_1(k_1)\right]-(\mu_2+\eta)\,\chi_2'(k_2)\frac{\partial k_2}{\partial s}=0 .$$

Bu tenglamada $\partial k_1/\partial s$ va $\partial k_2/\partial s$ hosilalar ishtirok etgan. Ularning ifodasini topish kerak. Avvalo, $\partial k_1/\partial s$ ni topish uchun (11.41) sistemaning birinchi tenglamasining ikkala tomonini s bo'yicha differensiallaymiz:

$$f_1(k_1)+s\, f_1'(k_1)\frac{\partial k_1}{\partial s}-(\mu_1+\eta)\,\chi_1'(k_1)\frac{\partial k_1}{\partial s}=0 .$$

Bundan $\partial k_1/\partial s$ uchun quyidagi ifodani chiqaramiz:

$$\frac{\partial k_1}{\partial s}=\frac{f_1(k_1)}{(\mu_1+\eta)\,\chi_1'(k_1)-s\, f_1'(k_1)}>0, \quad k_1=k_1(s), \quad k_2=k_2(s,q).$$

Endi $\partial k_2/\partial s$ ni topsa bo'ladi:

$$\frac{\partial k_2}{\partial s}=\frac{q\left(f_1'(k_1)-(\mu_1+\eta)\,\chi_1'(k_1)\right)}{(1-q)(\mu_2+\eta)\,\chi_2'(k_2)}\frac{\partial k_1}{\partial s}, \quad \frac{\partial k_1}{\partial s}=\frac{dk_1}{ds}.$$

$\partial k_2/\partial s$ uchun shu ifodani e'tiborga olgan holda $\partial c/\partial s=0$ tenglamaga ko'ra k_1 ga nisbatan (s ga nisbatan emas) tenglama hosil qilamiz:

$$f_1'(k_1)-(\mu_1+\eta)\,\chi_1'(k_1)=0. \qquad (11.43)$$

Bu tenglama $f_1(k_1)$ va $\chi_1(k_1)$ funksiyalarning xossalariga ko'ra yagona musbat $\tilde{\tilde{k}}_1>0$ yechimga ega. Endi $k_1=\tilde{\tilde{k}}_1$ ni (11.41) sistemaning birinchi tenglamasiga qo'yib, $\tilde{\tilde{s}}$ ni topamiz:

$$\tilde{\tilde{s}}=\frac{(\mu_1+\eta)\,\chi_1(\tilde{\tilde{k}}_1)}{f_1(\tilde{\tilde{k}}_1)} .$$

Endi (11.43) tenglikdan foydalanib, $k_1=\tilde{\tilde{k}}_1$ bo'lganda $\tilde{\tilde{s}}$ (jamg'arish normasi) uchun chiroyli formula chiqaramiz:

$$\tilde{\tilde{s}} = \frac{f_1'(\tilde{\tilde{k}}_1)}{f_1(\tilde{\tilde{k}}_1)} \cdot \frac{\chi_1(\tilde{\tilde{k}}_1)}{\chi_1'(\tilde{\tilde{k}}_1)}. \qquad (11.44)$$

Shu $\tilde{\tilde{s}}$ miqdor $0 < \tilde{\tilde{s}} < 1$ tengsizlikni qanoatlantiradi. Haqiqatan, $f_1(k_1) > k_1 f_1'(k_1)$, $\chi_1(k_1) < k_1 \chi_1'(k_1)$ tengsizliklarga ko'ra

$$0 < \frac{k_1 f_1'(k_1)}{f_1(k_1)} < 1, \qquad 0 < \frac{\chi_1(k_1)}{k_1 \chi_1'(k_1)} < 1$$

tengsizliklar o'rinli. Agar $\tilde{\tilde{s}}$ ni

$$\tilde{\tilde{s}} = \frac{\tilde{\tilde{k}}_1 f_1'(\tilde{\tilde{k}}_1)}{f_1(\tilde{\tilde{k}}_1)} \cdot \frac{\chi_1(\tilde{\tilde{k}}_1)}{\tilde{\tilde{k}}_1 \chi_1'(\tilde{\tilde{k}}_1)}$$

ko'rinishda yozsak, $0 < \tilde{\tilde{s}} < 1$ tengsizlik kelib chiqadi.

Mulohazalarni davom ettiramiz. $\partial c/\partial q$ hosilani hisoblaymiz:

$$\frac{\partial c}{\partial q} = -f_2(k_2) + (1-q)\, f_2'(k_2) \frac{\partial k_2}{\partial q},$$

bunda

$$\frac{\partial k_2}{\partial q} = \frac{1}{q(1-q)} \cdot \frac{\chi_2(k_2)}{\chi_2'(k_2)}.$$

Shunday qilib,

$$\frac{\partial c}{\partial q} = -f_2(k_2) + \frac{1}{q} f_2'(k_2) \cdot \frac{\chi_2(k_2)}{\chi_2'(k_2)}.$$

Endi $\partial c/\partial q = 0$ tenglama q ni aniqlash uchun formulaga olib keladi:

$$q = \frac{f_2'(k_2)}{f_2(k_2)} \cdot \frac{\chi_2(k_2)}{\chi_2'(k_2)}.$$

Bu formulada hozircha k_2 noma'lum. (11.41) sistemaning ikkinchi tenglamasiga $s = \tilde{\tilde{s}}_1$, $k = \tilde{\tilde{k}}_1$ bo'lganda q ning ifodasini qo'yamiz. Natijada k_2 ga nisbatan tenglama hosil bo'ladi:

$$\frac{1-\tilde{\tilde{s}}}{\mu_2+\eta} f_1(\tilde{\tilde{k}}_1)=\chi_2(k_2)\cdot\left[-1+\frac{f_2'(k_2)}{f_2(k_2)}\cdot\frac{\chi_2(k_2)}{\chi_2'(k_2)}\right]. \qquad (11.45)$$

(11.45) tenglama yagona musbat $\tilde{\tilde{k}}_2$ echimga ega. Haqiqatan, shu tenglama chap tomonida musbat son turibdi. O'ng tomoni esa, $k_2 \to +0$ da nolga intiladi va monoton o'suvchi funksiya. Monoton o'suvchiligi quyidagi tengsizlikdan kelib chiqadi:

$$\frac{d}{dk_2}\chi_2(k_2)\cdot\left[-1+\frac{f_2(k_2)}{f_2'(k_2)}\cdot\frac{\chi_2'(k_2)}{\chi_2(k_2)}\right]=\frac{f_2(k_2)}{f_2'(k_2)}\chi_2''(k_2)-\frac{f_2(k_2)\chi_2'(k_2)}{[f_2'(k_2)]^2}f_2''(k_2)>0.$$

Shuning uchun (11.45) ning o'ng tomoni 0 dan boshlab monoton o'sib borib, biror $\tilde{\tilde{k}}_2 > 0$ da chap tomoniga tenglashadi. Endi $k_2 = \tilde{\tilde{k}}_2$ bo'lganda q uchun uzil-kesil formulaga ega bo'lamiz:

$$\tilde{\tilde{q}}=\frac{f_2'(\tilde{\tilde{k}}_2)}{f_2(\tilde{\tilde{k}}_2)}\cdot\frac{\chi_2(\tilde{\tilde{k}}_2)}{\chi_2'(\tilde{\tilde{k}}_2)}. \qquad (11.46)$$

Ravshanki, $0 < \tilde{\tilde{q}} < 1$. Bunga ishonch hosil qilish uchun (11.46) ni

$$\frac{\tilde{\tilde{k}}_2\, f_2'(\tilde{\tilde{k}}_2)}{f_2(\tilde{\tilde{k}}_2)}\cdot\frac{\chi_2(\tilde{\tilde{k}}_2)}{\tilde{\tilde{k}}_2\,\chi_2'(\tilde{\tilde{k}}_2)}$$

ko'rinishda yozish kerak. Shunday qilib, qo'yilgan masala uchun yagona $(\tilde{\tilde{s}},\tilde{\tilde{q}})$, $0<\tilde{\tilde{s}}<1$, $0<\tilde{\tilde{q}}<1$ statsionar nuqta topildi. Shu sababli jon boshiga iste'mol funksiyasi $c(s,q)$ xuddi shu $(\tilde{\tilde{s}},\tilde{\tilde{q}}) \in \Pi_2$ nuqtada o'zining eng katta qiymatiga erishadi. Shunday qilib, yuqoridagi mulohazalar quyidagi teoremani isbot etadi.

11.6-teorema. *Iqtisodiy dinamikaning* (11.33) - (11.36) *ikki sektorli modeli uchun optimal jamg'arish normasi* $\tilde{\tilde{s}}$ *va mehnat resurslari optimal taqsimot koeffitsiyenti* $\tilde{\tilde{q}}$ *mos ravishda* (11.44), (11.46) *formulalar yordamida topiladi, bunda* $\tilde{\tilde{k}}_1$ *son* (11.43) *tenglamaning,* $\tilde{\tilde{k}}_2$ *son esa* (11.45) *tenglamaning musbat yechimidan iborat.*

Ko'rilayotgan model uchun avvalgi paragraflardagi kabi "oltin qoida" ni chiqarish mumkin edi. Bu ishni mustaqil ish sifatida qoldiramiz.

11-bobga oid masalalar

O'rtacha mehnat unumdorligi quyidagi ko'rinishlarda bo'lganda (11.5), (11.28) va (11.39) modellar uchun s, q, k_1, k_2 parametrlar hisoblansin:

1. $f_1(k_1) = \sqrt{k_1}$.

2. $f_1(k_1) = \sqrt[3]{k_1^2}$.

3. $f_1(k_1) = \sqrt[3]{k_1}$.

4. $f_1(k_1) = \sqrt[4]{k_1}$.

5. $f_1(k_1) = \sqrt[4]{k_1^3}$.

6. $f_1(k_1) = 1/4 \cdot \left(\sqrt{k_1} + 1\right)^2$.

11-bobga oid nazorat savollari

1. Iqtisodiy dinamikaning ikki sektorli modelida sektorlar orasida qanday bog'lanish bor?

2. Mehnat resurslari hajmlari yig'indisi o'zgarmas bo'lgan ikki sektorli model tasvifini bering.

3. Differensial tenglamalarning asosiy sistemasini yozib bering.

4. Statsionar yechimni topish uchun chekli tenglamalar sistemasini yozib bering.

5. Jon boshiga iste'molni maksimallashtirish masalasi qanday qo'yiladi.

6. Optimal jamg'arish normasi va mehnat resurslarining sektorlar orasida optimal taqsimot koeffitsiyenti uchun formulani yozib bering.

7. Balanslangan o'sishning optimal rejimlarini topish uchun tenglamalarni yozib bering.

8. Mehnat resurslari hajmlari yig'indisi eksponensial funksiya bo'lgan ikki sektorli model tavsifini bering.

9. Shu model uchun 3-7 savollarga javob bering.

10. Mehnat resurslari hajmlari yig'indisi chiziqli-botiq funksiya bo'lgan ikki sektorli model tavsifini bering.

11. Shu model uchun 3-7 savollarga javob bering.

12- bob. IQTISODIY DINAMIKANING O'ZGARUVCHI JAMG'ARISH NORMALI MODELLARI VA MAGISTRAL TEOREMALAR

Avvalgi 9, 10 va 11-boblarda iqtisodiy dinamikaning o'zgannas jamg'arish normalibirvaikki sektorli modellarini o'igandik. Ma'lum bo'ldiki, balanslangan o'sishning optimal rejimlari qurollanganlik *k* ning [0; *T]* vaqt oralig'ida o'zgannas bo'Lganholatini aks ettiradi. Shu asosdaiqtisodiyotning barcha o'zgaruvchilari (iqtisodiyot trayektoriyasi) kechishini kuzatish imkoni yaratildi. Agarjamg'arish normasi o'zgannas emas, balki o'zgaruvchi bo'lsa, [0; *T]* vaqt oralig'ining har bir momentida o'z qiymatini o'zgartirib tursa, amaldabunday iqtisodiyotni (iqtisodiyjarayonni)boshqaribbo'lmaydi. Shuning uchun o'zgaruvchi jamg'arish normali modellarni o'zgannas jamg'arish normali modellarga "yaqinlashtiradigan" yangi modellarni yaratish zaruriyati tug'iladi. Bunday yangi modellar "magistral teoremalar"yordamidatavsiflanadi.

Iqtisodiy dinamikaning o 'zgaruvchi jamg 'arish normali modellari birinchi bo'lib 1967-yildaR. Shell tomonidan o'rganilgan. Uakademik L.S. Pontryagin va uning shogirdlari tomonidan yaratilgan optimal boshqarish nazariyasidan keng foydalandi. Mazkur bobda biz iqtisodiy dinamikaning o'zgaruvchi jamg'arish normali bir sektorli modelini o'rganish natijalarim bayon etamiz.

12.1-§. Iqtisodiy dinamikaning mehnat resurslari hajmi eksponensial funksiya bo'lgan modeli

Masalalarning qo'yilishi. Iqtisodiy dinamikaning o'zgaruvchi *jamg'arish normali bir sektorli modelini* ko'raylik. Unda mehnat resurslari hajmi eksponensial funksiya va asosiy fondlarning yaroqsizlanishi chiziqli bo'lsin. Bunday model quyidagi munosabatlar bilan tavsiflanadi:

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{K}(t)=I(t)-\mu K(t), \quad 0\le\mu<1, \quad K(0)=K_0>0,\\
&\dot{L}(t)=\eta L(t), \quad \mathrm{L}(0)=\mathrm{L}_0>0, \quad \eta>0,\\
&\mathrm{Y}(t)=F(L(t),K(t))=I(t)+C(t)=s(t)Y(t)+(1-s(t))Y(t),\\
&I(t)=s(t)Y(t), \quad C(t)=(1-s(t))Y(t), \quad 0\le s(t)\le 1, \quad 0\le t\le T.
\end{aligned}\right\} \qquad (12.1)$$

(12.1) modelga ko'ra ishlab chiqarilgan mahsulot (milliy daromad) miqdori ikki qismdan iborat; $I(t)$ – asosiy fondlarga qo'yilgan (qo'yiladigan) mablag' (kapital) va $S(t)$ – iste'mol, jamg'arish normasi $s(t)$ funktsiya bo'lakli-uzluksiz, $[0; T]$ vaqt oralig'ida aniqlangan va $0 \le s(t) \le 1$ tengsizlikni qanoatlantiradi. Masala bo'lakli-uzluksiz va $0 \le s(t) \le 1$ tengsizlikni qanoatlantiradigan $s(t)$ funksiyalar ichidan ishlab chiqarilgan (chiqariladigan) mahsulot (milliy daromad) miqdorini *ma'lum ma'noda* optimal ikki qismga (I va C ga) ajratadiganini topishdan iborat.

Qurollanganlik $k(t)=K(t)/L(t)$ va jamg'arish normasi $s(t)$, $0 \le s(t) \le 1$, $t \in [0; T]$ bo'lsin. Asosiy differensial tenglama (12.1) model uchun quyidagi ko'rinishga ega (9-bobga qarang):

$$\dot{k}(t)=s(t)f(k)-(\mu+\eta)\,k\,,\quad k(0)=k_0\,, \tag{12.2}$$

bunda $f(k)$ – neoklassik shartlarni qanoatlantiradigan o'rtacha mehnat unumdorligi funksiyasi ($f(0)=0$, $f(k)>0$, $f'(k)>0$, $f''(k)<0$, $\forall k>0$). T – rejalashtirish ufqi va $k_T>0$ tengsizlikni qanoatlantiradigan, qurollanganlikning biror holatini anglatuvchi son. Ushbu

$$k_0 < k_T \tag{12.3}$$

tengsizlik muhim ahamiyatga ega. Yana

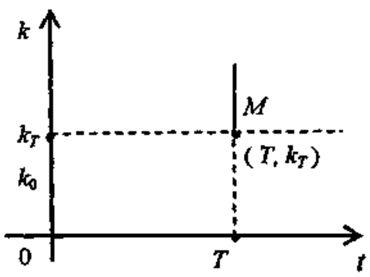
$$k(T) \ge k_T \tag{12.4}$$

tengsizlikni qanoatlantiradigan nuqtalar to'plami M va ushbu

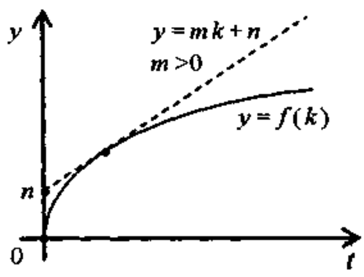
$$J[s]=\int_0^T \frac{C(t)}{L(t)}dt=\int_0^T (1-s(t))f(k(t))dt \tag{12.5}$$

jamlama iste'mol funksionali berilgan bo'lsin.

(12.4) tengsizlik bilan aniqlanadigan M to'plam (T, k_T) nuqtadan chiqadigan va yuqoriga yo'nalgan (vertikal) nurdan iborat (12.1-chizma).



12.1-chizma



12.2- chizma

O‘zgaruvchi jamg‘arish normasi $s(t)$, $0 \le s(t) \le 1$ boshqarish funksiyasi vazifasini bajaradi. Agar shu funksiya ixtiyoriy qiymatlar qabul qilsa, bitta boshlang‘ich $k_0 > 0$ nuqtadan chiqadigan barcha holatlar trayektoriyalari oxirlari M to‘plamni tashkil etadi. Uni oxirgi holatlar to‘plami deyiladi.

Masalaning qo‘yilishini bayon qilishdan avval optimal boshqarishga oid ba’zi tushunchalarni keltirib o‘tamiz.

Masalaning qo‘yilishini bayon qilishdan avval optimal boshqarishga oid ba’zi tushunchalarni keltirib o‘tamiz.

Avvalo (12.2) da $s(t)$ funksiyani boshqarish deb ataladi. Agar $s(t)$ bo‘lakli-uzluksiz bo‘lib, $[0; T]$ da $0 \le s(t) \le 1$ tengsizlikni qanoatlantirsa, u joiz boshqarish deyiladi. Agar $s(t)$ joiz boshqarish uchun (12.2) ning trayektoriyasi $k(0) = k_0$ va $k(t) \in M$ shartni qanoatlantirsa, u obyektni (iqtisodiy sistemani) k_0 boshlang‘ich nuqtadan $k(T) \in M$ nuqtaga o‘tkazuvchi joiz boshqarish deyiladi.

Endi masalaning qo‘yilishini bayon qilish mumkin.

Masalaning qo‘yilishi: (12.2) - (12.5) obyektni (iqtisodiy sistemani) qurollanganlikning boshlang‘ich holati $k_0 > 0$ dan M to‘plamning (nurning) biror $k(T)$ nuqtasiga o‘tkazuvchi bo‘lakli-uzluksiz boshqarishlar $s(t)$, $0 \le s(t) \le 1$ ichidan (12.5) jamlama iste’mol funksionaliga maksimal qiymat beradigani topilsin.

Masala yechimining mavjudligi. Qo‘yilgan masala optimal boshqarishning *o‘ng uchi qo‘zg‘aluvchi* va tayin vaqtli masalasidan iborat. Shu masala uchun optimallikning zaruriy shartini ifodalaydigan Pontryaginning maksimum prinsipi ifodasini keltiramiz (qarang: Pontryagin L.S. va boshqalar. Математическая теория оптимальных процессов, M.: Наука, 1983, стр.79).

12.1-teorema (zaruriy shart). *Faraz etaylik, n o‘lchovli Yevklid fazosi E^n da harakat tenglamasi*

$$\dot{k} = A(k,t) + B(k,t)\cdot s(t) \quad (= f), \tag{12.6}$$

va optimallik belgisi

$$J[s] = \int_0^T \left[A_0(k,t) + B_0(k,t)\cdot s(t)\right]dt \quad \left(= \int_0^T f^0 dt\right) \tag{12.7}$$

berilgan bo‘lsin. Bunda A, B, A_0, B_0 matritsalar E^{n+1} dagi C^1 sinfga tegishli va $s(t) \in U$, U – qavariq kompakt.

Gamiltonianni

$$H(\overline{\psi},k,t,s) = \psi_0 f^0(k,t,s) + (\psi, f(k,t,s)), \quad \overline{\psi} = (\psi_0, \psi) \tag{12.8}$$

va qovushgan sistemani

$$\psi_0 = 0, \qquad \dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial k_i} = -\psi_0 \frac{\partial f^0}{\partial k_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^j}{\partial k_j} \psi_j \tag{12.9}$$

tuzamiz.

Agar holat nuqtasini (qurollanganlik holatini) boshlang'ich $k_0 > 0$ holatdan $M = \{(t; k): t > T, k(T) \geq k_T, k_T > 0, k_0 < k_T\}$ to'plamning biror nuqtasiga o'tkazuvchi joiz boshqarish (12.7) funksionalning maksimumi ma'nosida optimal bo'lsa, unda (12.9) qovushgan sistemaning shunday nolmas yechimi $\overline{\psi}(t)$ mavjud bo'ladiki, quyidagi shartlar bajariladi:

1^0. H funksiya ixtiyoriy $t > 0$ uchun s bo'yicha $s = s(t) \in U$ nuqtada maksimumga erishadi:

$$H(\overline{\psi}(t), k(t), t, s(t)) = \max_{s \in U} H(\overline{\psi}(t), k(t), t, s). \tag{12.10}$$

2^0. $t = T$ da o'ng uchda transversallik sharti bajariladi, ya'ni

$$\psi(t) \geq 0, \qquad (\psi(T), \quad k(T) - k_T) = 0. \tag{12.11}$$

3^0. $\psi_0 = const \geq 0$. (12.12)

Optimallikning yetarli sharti sifatida biz Li-Markus teoremasidan foydalandik (qarang: Ли Е.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972, стр. 288 – 4-teoremaning 2-natijasi). Ko'rilayotgan iqtisodiy masalani e'tiborga olgan holda bu teorema quyidagicha ifodalanishi mumkin.

12.2-teorema (Li-Markus teoremasi). *Harakat tenglamasi* (12.6) *va optimallik belgisi* (12.7) *belgisi berilgan bo'lsin. Yana ushbu*

$$|k(t)| \leq b, \quad \forall\, t \in [0; T]$$

tekis baho mavjud va tayinlangan k hamda t lar uchun

$$V(k,t) = \{ (f^0(k,t,s), f(k,t,s)) : s \in U \}$$

to'plam s bo'yicha qavariq bo'lsin, bunda $f^0 = A_0 + B_0 s$, $f = A + Bs$.

Agar (12.6) *obyektni berilgan boshlang'ich k_0 holatdan M to'plamning biror nuqtasiga o'tkazuvchi hech bo'lmasa bitta joiz boshqarish mavjud bo'lsa, unda* (12.7) *funksionalning maksimumi ma'nosida optimal boshqarish $s(t)$ ham mavjud bo'ladi.*

(12.2) - (12.5) obyekt uchun Li-Markus teoremasining shartlari bajariladi. Bunga bevosita teorema shartlarini tekshirish bilan ishonch hosil qilish mumkin. Shuning uchun qo'yilgan masalaning yechimi mavjud bo'ladi.

Masala yechimini qurish. Endi qo'yilgan masala yechimini qurishga kirishamiz. Buning uchun boshlang'ich k_0 nuqtadan chiqadigan va M nurning biror nuqtasiga olib keladigan shunday trayektoriya qurish kerak bo'ladiki, shu trayektoriya bo'ylab jamlama iste'mol funksionali (12.5) o'zining eng katta qiymatiga erishadi. Demak, bo'lakli-uzluksiz $s(t)$, $0 \le s(t) \le 1$ boshqarishlar ichidan optimal boshqarishni topish kerak bo'ladi. Masalani yechishga quyidagicha yondashamiz: avval Pontryaginning maksimum prinsipini qanoatlantiradigan boshqarishni va unga mos trayektoriyani topamiz. So'ngra topilgan boshqarish va trayektoriyalarning (12.5) funksional maksimumi ma'nosida optimalligini isbot etamiz.

Maksimum prinsipini qanoatlantiradigan holatlar trayektoriyasini quramiz. Gamilton funksiyasini tuzamiz:

$$H = \psi_0(1-s)f(k) + \psi\cdot[\, s\, f(k) - (\mu+\eta)\, k\,]. \qquad (12.13)$$

Yordamchi funksiyalar uchun *qovushma* sistema quyidagicha yoziladi:

$$\begin{cases} \psi_0 = const \ge 0, \\ \dot{\psi} = -\dfrac{\partial H}{\partial k} = -\psi_0(1-s)f'(k) + \psi\cdot[\, s\, f'(k) - (\mu+\eta)]. \end{cases} \qquad (12.14)$$

O'ng uchdagi transversallik sharti $\psi(T)\,(k(T) - k_T) = 0$ tenglik bilan ifodalanadi. Undan (12.4) ga ko'ra

$$\psi(T) = 0 \qquad (12.15)$$

tenglik kelib chiqadi.

H funksiyaning s bo'yicha maksimumga erishishi shartidan quyidagi natija kelib chiqadi:

$$s(t) = \begin{cases} 0, & agar \;\; \psi - \psi_0 < 0, \\ 1, & agar \;\; \psi - \psi_0 > 0, \\ 0 \le s \le 1, & agar \;\; \psi - \psi_0 \equiv 0. \end{cases} \qquad (12.16)$$

Ta'kidlab o'tamizki, maksimum prinsipiga ko'ra $\psi_0 = const \ge 0$. $\psi_0 = 0$ bo'lsin. Unda $\psi - \psi_0 \equiv 0$ bo'ladigan $[\tau_1; \tau_2] \subset [0; T]$ kesma mavjud emas. Agar $\psi - \psi_0 \equiv 0$, $\forall\, t \in [\tau_1; \tau_2]$ bo'lsa, $\psi \equiv \psi_0 = 0$ bo'ladi. Ammo ψ_0 va $\psi(\tau)$ lar maksimum prinsipiga ko'ra bir vaqtda nolga teng bo'la olmaydi. Shuning uchun $\psi_0 \ge 0$ ga asosan ψ_0 deb $\psi_0 = 1$ *ni olish mumkin*. Shunday qilib, (12.6) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$s(t) = \begin{cases} 0, & agar \;\; \psi < 1, \\ 1, & agar \;\; \psi > 1, \\ 0 \le s \le 1, & agar \;\; \psi \equiv 1. \end{cases} \qquad (12.17)$$

Agar $[\tau_1;\tau_2]\subset[0;T]$ kesmada $\psi(t)\equiv 1$ ayniyat o'rinli bo'lsa, (12.14) dan ushbu

$$f'(k)=\mu+\eta \tag{12.18}$$

ayniyat kelib chiqadi. Bu ayniyat t ga oshkor bog'liq emas, shuning uchun k ga nisbatan tenglama deb qarash mumkin. Ravshanki, $f'(k)=\mu+\eta$ tenglama yagona musbat $k=\bar{k}$ yechimga ega. Shunday qilib, (12.2) tenglama $[t_1,t_2]$ kesmada yagona musbat statsionar yechim $k(t)=\bar{k}>0$ ga ega. Unga mos jamg'arish normasining (boshqarishning) o'zgarmas $\bar{s}$ qiymati ushbu

$$\bar{s}=\frac{(\mu+\eta)\bar{k}}{f(\bar{k})}=\frac{\bar{k}\,f'(\bar{k})}{f(\bar{k})} \tag{12.19}$$

formula bilan topiladi. $f(k)$ funksiyaning neoklassikligidan (ya'ni $f(k)-kf'(k)>0,\ \forall k$) $0<\bar{s}<1$ tengsizlik kelib chiqadi.

Demak, $\psi(t)\equiv 1$ bo'ladigan $[\tau_1,\tau_2]$ kesmada jamg'arish normasi qiymati *o'zgarmas* va (12.19) formula yordamida bir qiymatli topiladi. Shunday qilib, $s(t)$ uchun (12.17) munosabatlarni uzil-kesil quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$s(t)=\begin{cases} 0, & agar \quad \psi<1, \\ 1, & agar \quad \psi>1, \\ \bar{s}=\bar{k}\,f'(\bar{k})/f(\bar{k}), & agar \quad \psi\equiv 1. \end{cases} \tag{12.20}$$

Endi $\psi_0=1$ bo'lganda (12.14) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\dot{\psi}=-(1-s)f'(k)-\left[s\,f'(k)-(\mu+\eta)\right]\psi. \tag{12.21}$$

Transversallik sharti (12.15) ga ko'ra $\psi(T)=0<1$ kelib chiqadi. Shuning uchun (12.20) dan $s(T)=0$ bo'ladi. $\psi(t)$ funksiyaning uzluksizligi bo'yicha shunday $[\tau_1;T]$ kesma mavjudki, unda $\psi(T)<1$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Ikki hol yuz berishi mumkiin;

A) $\psi(t)<1$ va $[\tau_1;T]=[0;T]$;

B) $\psi(t)<1,\quad \tau\in(\tau_1;T]\subset[0;T]$; $\quad\psi(\tau_1)=1,\quad [\tau_1;T]\subset[0;T]$.

A) holida (12.20) ga ko'ra $s(t)\equiv 0,\ \forall t\in[0;T]$, ya'ni barcha resurslar iste'molga yo'llangan va kapital xarajatlarga resurslar ajratilmagan. Resurslarni bunday taqsimlash faqat matematik ma'noga ega, ammo iqtisodiy ma'noga ega emas. Shuning uchun bu holni ko'rmaymiz.

B) holida (12.20) ga asosan $s(t)\equiv 0,\ \forall t\in[\tau_1;T]$. Unda (12.21) quyidagicha yoziladi:

$$\dot{\psi} = -f'(k) + (\mu+\eta)\,\psi\,. \qquad (12.22)$$

Bundan (12.15) transversallik shartini e'tiborga olib, (12.21) differensial tenglamani integrallaymiz:

$$\psi = \int_t^T f'(k(t))\cdot e^{(\mu+\eta)(t-\tau)}d\tau\,, \qquad (12.23)$$

bunda $k(t)$ ushbu

$$\dot{k} = -(\mu+\eta)\,k \qquad (12.24)$$

differensial tenglamaning yechimi, $k(T) = k_T$. Bu yechim quyidagi ko'rinishga ega:

$$k(t) = k_T\cdot e^{(\mu+\eta)(T-t)}\,. \qquad (12.25)$$

Endi $\psi(\tau_1) = 1$ bo'lgani uchun $s(\tau_1) = \bar{s}$ va $k(\tau_1) = \bar{k}$. Shuning uchun (12.25) dan $t = t_1$ da

$$k_T\cdot e^{(\mu+\eta)(T-\tau_1)} = \bar{k}\,.$$

kelib chiqadi. Bundan

$$T-\tau_1 = \frac{1}{\mu+\eta}\cdot\ln\frac{\bar{k}}{k_T}$$

kelib chiqadi. Shunday qilib, $t_1 < T$ ga ko'ra

$$k_T < \bar{k} \qquad (12.26)$$

tengsizlikka erishamiz. Bu tengsizlik qurollanganlikning rejalashtirilayotgan potensiali qurollanganlikning statsionar rejimdagi (balanslangan o'sish rejimidagi) iqtisodiy potensialidan kam bo'lishi kerakligini anglatadi. Bundan tashqari, ushbu

$$\tau_1 = T - \frac{1}{\mu+\eta}\cdot\ln\frac{\bar{k}}{k_T} > 0 \qquad (12.27)$$

tengsizlik o'rinli bo'lishi uchun rejalashtirish ufqi $T > 0$ yetarli katta bo'lishi kerak.

(12.22) ga ko'ra $t > \tau_1$ miqdor $\psi(\tau)$ funksiyaning statsionar nuqtasi bo'ladi. Haqiqatan,

$$\dot{\psi}(\tau_1) = -f'(k(\tau_1)) + (\mu+\eta)\,\psi(\tau_1) = -f'(\bar{k}) + (\mu+\eta)\,.$$

Shunday qilib, $\psi(t)$ funksiya $t=\tau_1$ nuqtada ekstremumga ega bo'lishi mumkin. Haqiqatda ham, shu funksiya $t=\tau_1$ da o'zining mahalliy maksimumiga erishadi. Buni ko'rsatish uchun $\ddot{\psi}$ ni hisoblaymiz:

$$\ddot{\psi}=-f''(k)\,\dot{k}+(\mu+\eta)\,\dot{\psi}\,.$$

Bundan $f''(\bar{k})<0,\ \dot{k}(\tau_1)=-(\mu+\eta)\bar{k}<0,\ \dot{\psi}(\tau_1)=0$ munosabatlarga ko'ra $\ddot{\psi}(\tau_1)<0$ kelib chiqadi. Shuni isbot etish talab qilingan edi. Yuqoridagi mulohazalar natijasida $\psi(t)\le 1,\ \forall\, t\in[\tau_1;\,T]$ tengsizlikka ega bo'ldik.

Endi rejalashtirish davrining boshqa resurslarning taqsimoti bilan shug'ullanamiz. Boshlang'ich vaqt $t=0$ da uch hol yuz berishi mumkin:

a) $\psi(0)=1$; b) $\psi(0)<1$; v) $\psi(0)>1$.

Ularni alohida-alohida o'rganamiz:

a) hol. $\psi(0)=1$ bo'lganda, o'z navbatida, uchta kichik hol yuz berishi mumkin.

1) $\psi(t)\equiv 1,\ t\in[0;\,\tau_1]$. Unda (12.18) ga ko'ra $k(t)=\bar{k}$ ayniyat o'rinli. Bundan $k_0=\bar{k}$ kelib chiqadi. Ammo (12.3) va (12.26) shartlarga ko'ra $k_0<\bar{k}$ tengsizlik o'rinli. Bu $k_0=\bar{k}$ ga ziddiyat. Demak, bu hol yuz bermaydi.

2) $\psi(0)=1,\ \psi(t)<1\ (\psi(t)>1),\ \forall\, t\in(0;\,\tau_0)$. Bu hol b) va v) hollarda keltiriladi.

b) hol. $\psi(0)<1$. Bunda yoki $\psi(t)<1,\ \forall\, t\in[0;\,T]$, yoki shunday son $\tau_0>0$ mavjud bo'ladiki, $\psi(\tau_0)=1,\ 0<\tau_0<T$ bo'ladi. Agar $\psi(t)<1,\ \forall\, t\in[0;\,T]$ bo'lsa, (12.20) ga asosan $s(t)\equiv 0$ bo'ladi, ya'ni barcha resurslar iste'molga ajratiladi. Yuqorida aytganimizdek, bu holning iqtisodiy ma'nosi yo'q. Agar shunday $\tau_0>0$ son mavjud bo'lsaki, $\psi(\tau_0)=1$ bo'lsa, $[0;\,\tau_0]$ kesmada $s(t)\equiv 0$ ga ega bo'lamiz. Unda $\psi(t)$ uchun mos tenglama (12.22) bilan, qurollanganlik $k(t)$ uchun esa – (12.24) tenglama bilan ustma-ust tushadi. Endi (12.24) tenglamaning $k(0)=k_0$ boshlang'ich shartni qanoatlantiradigan yechimini topish uchun uni integrallab topamiz:

$$k(t)=k_0\,e^{-(\mu+\eta)t}\,. \qquad (12.28)$$

Bundan $t=\tau_0$ da $\psi(\tau_0)=1,\ k(\tau_0)=\bar{k}$ tengliklar o'rinli bo'lgani uchun $\bar{k}=k_0\cdot e^{-(\mu+\eta)\tau_0}$ tenglikka egamiz. Uning ikki tomonini logarifmlab, τ_0 uchun quyidagi formulani chiqaramz:

$$\tau_0 = \frac{1}{\mu+\eta} \cdot \ln \frac{k_0}{\bar{k}}. \tag{12.29}$$

Bundan $t_0 > 0$ bo'lgani uchun $k(0) > \bar{k}$ tengsizlik chiqadi. Ammo bu $k_0 < \bar{k}$ tengsizlikka zid. Shunday qilib, b) hol ham sodir bo'la olmaydi.

v) hol. $\psi(0) > 1$. Bu holda yoki $\psi(t) > 1$, $\forall t \in [0; T]$, yoki shunday $\tau_0 > 0$ son mavjud bo'ladiki, $\psi(\tau_0) = 1$ bo'ladi. Agar $\psi(t) > 1$, $t \in [0; T]$ bo'lsa, (12.20) ga ko'ra $s(t) \equiv 1$, $t \in [0; T]$, ya'ni barcha resurslar butun rejalashtirish davrida kapital harajatga ajratiladi. Bu esa iqtisodiy ma'noga ega emas. Agar shunday $\tau_0 > 0$ son mavjud bo'lsaki, $\psi(\tau_0) = 1$ bo'lsa, $s(t) \equiv 1$, $\forall t \in [0; \tau_0]$ bo'ladi. Bu holda (12.2) tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\dot{k} = f(k) - (\mu+\eta)\, k. \tag{12.30}$$

Biz o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamaga egamiz. Uni $k(0) = k_0$ boshlang'ich shart uchun integrallaymiz:

$$t = \int_{k_0}^{k(t)} \frac{d\xi}{f(\xi) - (\mu+\eta)\xi}.$$

Ushbu $\psi(\tau_0) = 1$, $k(\tau_0) = \bar{k}$ tengliklarni e'tiborga olib, τ_0 uchun formula chiqaramiz:

$$\tau_0 = \int_{k_0}^{\bar{k}} \frac{d\xi}{f(\xi) - (\mu+\eta)\xi}. \tag{12.31}$$

Ma'lumki, $k < \bar{k}$ da $f(k) - (\mu+\eta)\, k < 0$ tengsizlik o'rinli. Shuning uchun (12.31) dan $\tau_0 > 0$ kelib chiqadi.

Endi $k(t)$ funksiya τ_0 nuqtada mahalliy maksimumga erishishini ko'rsatamiz. Haqiqatan,

$$\dot{k}_-(\tau_0) = f(\bar{k}) - (\mu+\eta)\bar{k} = f(\bar{k}) - f'(\bar{k}) \cdot \bar{k} > 0$$

(bunda $\dot{k}_-(\tau_0)$ – $k(t)$ funksiyaning τ_0 nuqtadagi chap hosilasi). Agar $t > \tau_0$ da $k(t) \equiv \bar{k} = const$ ayniyatni e'tiborga olsak, $\dot{k}_+(\tau_0) = 0$ bo'ladi ($\dot{k}_+(\tau_0)$ – $k(t)$ funksiyaning τ_0 nuqtadagi o'ng hosilasi). Ushbu munosabatlar $\dot{k}_-(\tau_0) > 0$, $\dot{k}_+(\tau_0) = 0$, $k(t) \equiv \bar{k} = const$, $t > t_0$ $k(t)$ funksiya uchun mahalliy maksimum nuqtasi ekanini ko'rsatadi.

$\psi(t)$ funksiya uchun $s=1$ bo'lganda (12.21) dan

$$\dot{\psi}=\left[(\mu+\eta)-f'(k)\right]\psi(t)$$

differensial tenglama hosil bo'ladi. Bundan $f'(k(\tau_0))=f'(\bar{k})$, $\psi(\tau_0)=1$ munosabatlarni e'tiborga olib, ushbu

$$\dot{\psi}(\tau_0)=\left[(\mu+\eta)-f'(\bar{k})\right]\cdot 1=0$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu esa, $\psi(t)$ funksiya $t=\tau_0$ da ekstremumga ega bo'lishi mumkinligini ko'rsatadi. $\psi(t)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini hisoblaymiz:

$$\ddot{\psi}=f''(\bar{k})\,\dot{k}\,\psi+\left[(\mu+\eta)-f'(k)\right]\dot{\psi}\,.$$

Bundan $t=\tau_0$ da quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\ddot{\psi}(\tau_0)=-f''(\bar{k})\left[f(\bar{k})-(\mu+\eta\,\bar{k})\right]\psi(\tau_0)-f'(\bar{k})\,\dot{\psi}(\tau_0)=$$

$$=-f''(\bar{k})\left[f(\bar{k})-(\mu+\eta)\,\bar{k}\right].$$

Ushbu $f(\bar{k})-(\mu+\eta)\bar{k}=f(\bar{k})-f'(\bar{k})\bar{k}>0$, $f''(\bar{k})<0$ munosabatlarga ko'ra $\ddot{\psi}(\tau_0)>0$ tengsizlik kelib chiqadi. Shuning uchun $\psi(t)$ funksiya $t=\tau_0$ nuqtada mahalliy minimumga ega va $t\in[0;\tau_0]$ da $\psi(t)\geq 1$.

Shunday qilib, biz τ_0 ((12.31) ga qarang) va τ_1 ((12.27) ga qarang) miqdorlarni hisoblash uchun formulalar chiqardik. Agar rejalashtirish ufqi $T>0$ shunday tanlangan bo'lsaki, $0<\tau_0<\tau_1<T$ tengsizliklar o'rinli bo'lsa, unda (12.18) tenglama bilan topiladigan balanslangan o'sish rejimi $k(t)\equiv\bar{k}$ ko'rilayotgan iqtisodiy dinamika modeli uchun *magistral* deyiladi. U $(t\,;k)$ tekislikda $[\tau_0;\tau_1]$ vaqt oralig'iga mos *gorizontal kesmadan* iborat. Unda τ_0 – magistralga *qo'nish*, τ_1 esa magistraldan *tushish* momentlari deyiladi.

Endi $T>0$ ni qanday tanlanganda $\tau_1-\tau_0$ musbat bo'lishi mumkinligini tekshiramiz. Shu $\tau_1-\tau_0$ ayirmani hisoblab, $T\geq T_0$ tengsizlik bajarilishi $\tau_1-\tau_0>0$ ni ta'minlashga amin bo'lamiz, bunda

$$T_0=\frac{1}{\mu+\eta}\ln\frac{\bar{k}}{k_T}+\int_{k_0}^{\bar{k}}\frac{d\xi}{f(\xi)-(\mu+\eta)\xi},$$

$\tau_1-\tau_0=T-T_0$, $T_0=\tau_0+(T-\tau_1)=T-(\tau_1-\tau_0)$. Boshqacha aytganda, T_0 miqdor $[0;\tau_0]$ va $[\tau_1;T]$ kesmalar uzunliklari yig'indisidan iborat. Shunday qilib, $\tau_1-\tau_0\geq 0$ tengsizlik $T-T_0\geq 0$ tengsizlikka ekvivalentdir.

Agar $T=T_0$ tenglik o'rinli bo'lsa, $\tau_0=\tau_1$ va magistral mavjud emas, k_0 nuqtadan M to'plamga harakat bitta o'tish (boshqarishni bir marta o'zgartirish) bilan amalga oshiriladi. Agar $T\geq T_0$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, unda $k(t)\equiv\bar{k}$ magistral mavjud bo'ladi. Shu bilan birga, τ_0 va τ_1 momentlar ham mavjud va (12.31), (12.27) formulalar bilan hisoblanishi mumkin. Shu momentlar boshqarishni o'zgartirish (almashtirish) momentlaridir. Agar T yetarli katta qilib olingan bo'lsa, $\tau_1-\tau_0$ – magistral bo'yicha harakat davri $T>0$ ga yetarli "yaqin" bo'ladi.

Masala yechimining optimalligi. Ta'kidlab o'tamizki, quyidagi

$$s(t)=\begin{cases} 1, & agar \quad 0\leq t<\tau_0, \\ \bar{s}, & agar \quad \tau_0\leq t<\tau_1, \\ 0, & agar \quad \tau_1\leq t<T \end{cases} \tag{12.32}$$

munosabatlar bilan tavsiflanadigan $s(t)$ boshqarish zaruriy shartni, ya'ni maksimum prinsipini va o'ng uchda transversallik shartini qanoatlantiradi. Biz M nurning shunday nuqtasini topishimiz kerakki, shu nuqtaga obyekt o'tkazilishi kerak va (12.5) jamlama iste'mol funksionali eng katta qiymatga erishsin.

Shu maqsadda maksimum prinsipini qanoatlantiradigan boshqa boshqarishlarni ko'ramiz. Aniqrog'i, quyidagicha aniqlangan $s(t)$ boshqarishni olamiz:

$$s(t)=\begin{cases} 1, & agar \quad 0\leq t<\tau_0, \\ \bar{s}, & agar \quad \tau_0\leq t<\theta, \\ 0, & agar \quad \theta\leq t<T, \end{cases} \tag{12.33}$$

bunda θ quyidagicha aniqlangan: $k(T)=k_\theta$, $k_T<k_\theta<\bar{k}$, deylik. Unda $k(t)$ uchun

$$k(t)=k_\theta\cdot e^{(\mu+\eta)(T-t)},$$

$\psi(t)$ funksiya uchun

$$\psi(t)=\int_t^T f'(k(\tau))\cdot e^{(\mu+\eta)(t-\tau)}dt$$

formulaga egamiz. Endi θ ni $k(\theta)=\bar{k}$ shartdan, ya'ni

$$k_\theta\cdot e^{(\mu+\eta)(T-\theta)}=\bar{k}$$

tenglamadan topamiz. Bundan θ uchun ushbu

$$\theta = T - \frac{1}{\mu+\eta}\ln\frac{\bar{k}}{k_\theta} \tag{12.34}$$

formula kelib chiqadi.

Shunday qilib, biz (12.2) obyektni berilgan boshlang'ich $k(0) = k_0$, $k_0 < k_T < k_\theta$ holatdan M nurning biror nuqtasiga o'tkazuvchi va maksimum prinsipini qanoatlantiruvchi ikkita (12.32) va (12.33) boshqarishlarga egamiz. Bunda (12.32) boshqarish obyektni $(T, k_T) \in M$ nuqtaga, (12.33) boshqarish esa, $(T, k_\theta) \in M$, $k_\theta > k_T$ nuqtaga o'tkazadi. Endi shu boshqarishlar uchun (12.5) funksionalning qiymatini (12.33) boshqarish uchun hisoblaymiz. Unda (12.5) funksional θ ning funksiyasi bo'lib qoladi. Uni $\Phi(\theta)$, ya'ni $J[s] = \Phi(\theta)$ deb belgilaymiz. Sodda hisoblashlar yordamida topamiz:

$$\Phi(\theta) = J[s] = \int_0^T (1 - s(t)) f(k(t))\,dt = \int_0^{\tau_0} 0 \cdot dt + \int_{\tau_0}^{\theta} (1-\bar{s}) f(\bar{k})\,dt +$$

$$+ \int_0^T f(k(t))\,dt = (1-\bar{s}) f(\bar{k})(\theta - \tau_0) + \int_0^T f(k(t))\,dt. \tag{12.35}$$

$$\Phi(\tau_1) = (1-\bar{s}) f(\bar{k})(\tau_1 - \tau_0)\int_{\tau_1}^T f(k(t))\,dt.$$

Endi $\Phi(\theta)$, $\theta \in [\tau_1; T]$. funksiyani o'rganamiz. $\Phi(\tau_1)$ funksionalning (12.32) boshqarishdagi qiymati. (12.35) funksiyaning hosilasini θ bo'yicha hisoblaymiz:

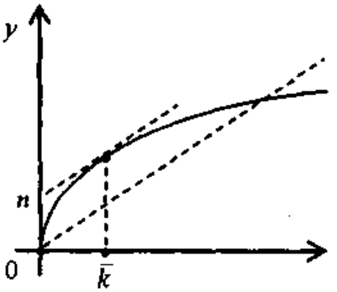
$$\Phi'(\theta) = (1-\bar{s}) f(\bar{k}) - f(\bar{k}) = -\bar{s}\, f(\bar{k}) = const < 0. \tag{12.36}$$

Bu $\Phi(\theta)$ funksiyaning chiziqli ekanini anglatadi. Boshqacha aytganda, $\Phi(\theta)$ funksiya $[\tau_1; T]$ kesmada monoton kamayuvchi. Shuning uchun $\Phi(\theta)$ ning eng katta qiymatiga kesmaning chap uchida erishiladi, ya'ni $\Phi(\tau_1) > \Phi(\theta)$, $\forall\, \theta \in (\tau_1; T]$. Shunday qilib, (12.5) funksionalning (12.32) boshqarishga mos qiymati eng katta bo'ladi, ya'ni (12.32) boshqarish (12.5) funksionalning maksimumi ma'nosida optimal bo'ladi. Buning ma'nosi shuki, optimal holatlar trayektoriyasi obyektni $(T; k_T]$ nuqtaga o'tkazadi.

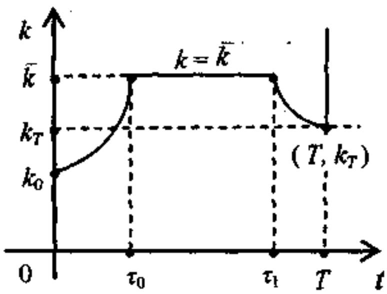
Optimal trayektoriyani qurish uchun $k(t)$ funksiyani qavariqlikka tekshiramiz. $[0, \tau_0]$ kesmada $s = 1$ bo'lganda $\dot{k} = f(k) - (\mu + \eta)\,k$ differensial tenglamaga egamiz. $\ddot{k}(t)$ ni hisoblaymiz:

$$\ddot{k}(t)=f'(k(t))\dot{k}(t)-(\mu+\eta)\dot{k}(t)=\left[f'(k(t))-(\mu+\eta)\right]\cdot\left[f(k(t))-(\mu+\eta)k(t)\right].$$

Ammo $[0;\tau_0]$ kesmada $f(k(t))>(\mu+\eta)\,k(t)$, $f''(k(t))>\mu+\eta$ tengsizliklar o'rinli (12.3-chizmaga qarang), bunda $k(\tau_0)=\bar{k}$, $\dot{k}(t)=f(k(t))-(\mu+\eta)\,k(t)>0$. Shuning uchun $\ddot{k}(t)>0$, ya'ni $k(t)$ funksiya $[0;\tau_0]$ da qavariq (12.4-chizma).



12.3-chizma



12.4- chizma

Endi ma'lumki, $[\tau_1;T]$ kesmada $s=0$ va ushbu $\dot{k}(t)=-(\mu+\eta)\,k(t)$ differensial tenglamaga egamiz. Bundan foydalanib, $\ddot{k}(t)$ ni hisoblaymiz:

$$\ddot{k}(t)=-(\mu+\eta)\dot{k}(t)=-(\mu+\eta)\cdot\left[-(\mu+\eta)k(t)\right]=(\mu+\eta)^2k(t)>0.$$

Bundan $k(t)$ funksiya $[\tau_1;T]$ kesmada ham qavariq ekani kelib chiqadi (12.4-chizma). Nihoyat, (12.32) optimal boshqarishga mos optimal trayektoriyani uzil-kesil qurish mumkin. 12.4-chizmadan optimal trayektoriya quyidagicha qurilgani ko'rinadi: obyekt k_0 holatdan $\bar{k}$ holatga (k_T dan ham yuqoriroq holatga) tezkorlik bilan o'tkaziladi, keyin shu $\bar{k}$ holatda iloji boricha uzoqroq vaqt ushlab turiladi. Nihoyat, $\bar{k}$ holatdan ($[\tau_1, \bar{k}]$ nuqtadan) k_T holatga ((T, k_T) nuqtaga) tezkorlik bilan o'tkaziladi (tushiriladi). Yuqorida aytib o'tilganidek, $T\to+\infty$ da $\tau_1-\tau_0\to+\infty$. Shuning uchun yetarli katta T lar uchun obyektni (iqtisodiy sistemani) boshqarish usuli iqtisodiy dinamikaning o'zgarmas jamg'arish normali modelini boshqarishdagi usuli bilan "yaqin". Shu yaqinlik *magistral teorema* yordamida ifodalanadi.

12.3-teorema (magistral teorema). *Rejalashtirish davri* $T > 0$ *yetarli katta bo'lsin. Unda* (12.1) – (12.5) *masala* (12.5) *jamlama iste'mol funksionali maksimumi ma'nosida optimal boshqarish* $s(t)$ *mavjud. U quyidagicha qurilgan: rejalashtirish davrining boshida (ya'ni* $0 \le t \le \tau_0$ *da, bunda* τ_0 *son* (12.31) *formula yordamida hisoblanadi) boshqarish (jamg'arish normasi)* $s(t) \equiv 1$ *rejalashtirish davrining oxirida (ya'ni* $\tau_1 \le t \le T$ *da, bunda* τ_1 *son* (12.27) *formula yordamida hisoblanadi) boshqarish* $s \equiv 0$ *bo'ladi. Qolgan vaqt davomida (ya'ni* $\tau \le t \le \tau_1$ *vaqt oralig'ida) harakat* $k(t) \equiv \bar{k}$ *magistral bo'yicha* $s(t) \equiv \bar{s}$ *boshqarish yordamida amalga oshiriladi, bunda* $\bar{k}$ *son* – (12.18) *tenglamaning yechimi,* $\bar{s}$ *son esa* (12.19) *formula yordamida hisoblanadi* (12.4-chizma).

Misol ko'ramiz. Hisob-kitoblarni Kobb-Duglas ICHF uchun olib boramiz: $F(L,K) = a_0 K^{1-\alpha} L^{\alpha}$, $a_0 > 0$, $0 < \alpha < 1$. Ma'lumki, o'rtacha mehnat unumdorligi $f(k) = a_0 k^{\alpha}$. Hisoblashlar jarayonida μ va η parametrlar kichik sonlar ekanini e'tiborga olish kerak. Shuning uchun ushbu $\dfrac{\mu+\eta}{a_0} \le \alpha < 1$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Hisoblashlar natijasini keltiramiz:

$$\bar{k} = \left(\frac{\alpha a_0}{\mu+\eta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \ge 1, \quad k_0 < k_T < \bar{k};$$

$$k(t) = \left[\frac{a_0}{\mu+\eta} + \left(k_0^{1-\alpha} - \frac{a_0}{\mu+\eta}\right) e^{-(\mu+\eta)(1-\alpha)t}\right]^{1/(1-\alpha)}, \quad t \in [0; \tau_0),$$

$$s(t) \equiv 1;$$

$$\tau_0 = \frac{1}{(1-\alpha)(\mu+\eta)} \ln \frac{a_0 - (\mu+\eta) k_0^{1-\alpha}}{a_0 - (\mu+\eta) \bar{k}^{1-\alpha}} = \frac{1}{(1-\alpha)(\mu+\eta)} \ln \frac{a_0 - (\mu+\eta) k_0^{1-\alpha}}{a_0(1-\alpha)} > 0;$$

$$\tau_1 = T + \frac{1}{\mu+\eta} \ln k_T - \frac{1}{(1-\alpha)(\mu+\eta)} \ln \frac{a_0 \alpha}{\mu+\eta} > 0;$$

$$T_0 = \frac{1}{(1-\alpha)(\mu+\eta)} \ln \frac{\alpha\left[a_0 - (\mu+\eta) k_0^{1-\alpha}\right]}{(1-\alpha)(\mu+\eta) k_T^{1-\alpha}}, \quad \bar{s} = \alpha, \quad 0 < \alpha < 1.$$

12.2-§. Iqtisodiy dinamikaning mehnat resurslari hajmi chiziqli-botiq modeli

Avvalgi paragrafda iqtisodiy dinamikaning mehnat resurslari hajmi eksponensial (qavariq) funktsiya bo'lgan modeli to'liq o'rganildi. Unda asosiy fondlarning chiziqli yaroqsizlanishi hisobga olindi. Endi iqtisodiy dinamikaning mehnat resurslari hajmi chiziqli-botiq modelini o'rganamiz. Asosiy fondlarning yaroqsizlanishi yana chiziqli deb qaraladi. Aniqrog'i, iqtisodiy dinamikaning bir sektorli modeli quyidagi munosabatlar bilan berilgan bo'lsin:

$$\left.\begin{aligned}
&\dot K(t)=I(t)-\mu K(t),\quad 0\le\mu<1,\quad K(0)=K_0>0,\\
&\dot L(t)=\eta L(t)+\nu K(t),\quad \eta>0,\ \nu>0,\ L(0)=L_0>0,\\
&Y(t)=F(L(t),K(t))=I(t)+C(t),\\
&I(t)=s(t)Y(t),\ C(t)=(1-s(t))Y(t),\ 0\le s(t)\le 1,\ 0\le t\le T.
\end{aligned}\right\}\tag{12.36}$$

Shu model uchun asosiy differensial tenglama quyidagi ko'rinishga ega:

$$\dot k(t)=s(t)f(k)-(\mu+\eta)k-\nu k^2,\quad k(0)=k_0>0.\tag{12.37}$$

Rejalashtirish ufqi $T>0$, qurollanganlikning biror holati $k_T>0$ berilgan bo'lsin, $k_0<k_T$. Yana $k(T)\ge k_T$ (12.4) tengsizlik bilan berilgan M to'plam va jamlama iste'mol funksionali (12.5) ham berilgan deylik. Keyingi mulohazalarda qulaylik uchun ushbu

$$\chi(k)=k+\frac{\nu}{\mu+\eta}k^2,\quad k\ge 0\tag{12.38}$$

belgilashlarni kiritamiz (11.3-§ga qarang). Bu funksiya quyidagi xossalarga ega:

$$\chi(0)=0,\ \chi(k)>0,\ \chi'(0)=1,\ \chi'(k)=1+\frac{2\nu k}{\mu+\eta}>0,\ \chi''(k)=\frac{2\nu}{\mu+\eta}>0,\ k\ge 0.$$

Endi (12.37) tenglama ushbu

$$\dot k=s(t)f(k)-(\mu+\eta)\chi(k),\quad k(0)=k_0>0\tag{12.39}$$

ko'rinishda yoziladi.

Faraz etaylik,

$$\mu+\eta<s\,f'(+0)\tag{12.40}$$

tengsizlik o'rinli bo'lsin.

Masalaning qo'yilishini bayon etamiz: ((12.39), (12.3)-(12.5)) obyektni (iqtisodiy sistemani) qurollanganlikning boshlang'ich holati $k_0 > 0$ dan M to'plamning (nurning) biror $k(T)$ nuqtasiga o'tkazuvchi bo'lakli-uzluksiz boshqarishlar $s(t)$, $0 \le s(t) \le 1$ ichidan (12.5) jamlama iste'mol funksionaliga maksimal qiymat beradigani topilsin.

Masala yechimining mavjudligi *Li-Markus teoremasidan* (*12.2-teoremaga* qarang) kelib chiqadi.

Masala yechimini qurish. Maksimum prinsipini qanoatlantiradigan trayektoriyalarni avvalgi paragrafda qo'llanilgan usul bilan qurish mumkin. Shuning uchun natijalarni qisqacha bayon etamiz.

Gamilton funksiyasi va yordamchi o'zgaruvchilar uchun *qovushgan* (qovushma) sistema quyidagi ko'rinishga ega:

$$H = \psi_0(1-s)f(k) + \psi\left[s\,f(k) - (\mu+\eta)\,\chi(k)\right], \qquad (12.41)$$

$$\begin{cases} \psi_0 \ge 0, \quad \psi_0 = const, \\ \dot{\psi} = -\dfrac{\partial H}{\partial k} = -\psi_0(1-s)f'(k) + \psi\left[s\,f'(k) - (\mu+\eta)\chi'(k)\right]. \end{cases} \qquad (12.42)$$

O'ng uchida transversallik sharti $\psi(T)\,(k(T) - k_T) = 0$ kabi yoziladi. Bundan $\psi(T) = 0$ (12.15) ga qarang). H funksiyasining maksimumi shartiga ko'ra (s bo'yicha) $s(t)$ boshqarish (12.16) formula bilan topiladi. Avvalgi paragraflardagidek $\psi_0 \ne 0$ ekani va ψ_0 deb $\psi_0 = 1$ ni olish mumkinligi isbotlanadi. Shu sababli $s(t)$ uchun formula (12.17) ko'rinishda bo'ladi. Agar $\psi(t) \equiv 1$, $\forall t \in [\tilde{\tau}_0, \tilde{\tau}_1] \in [0;T]$ bo'lsa, (12.42) ga ko'ra ushbu

$$f'(k) = (\mu+\eta)\,\chi'(k) \qquad (12.43)$$

ayniyatga ega bo'lamiz. Bu ayniyat s ga oshkor bog'lanmagan. Shuning uchun uni k ga nisbatan tenglama deb qarash mumkin. (12.43) tenglama yagona musbat $k = \tilde{k}$ yechimga ega. Qurollanganlikning $\tilde{k}$ rejimiga jamg'arish normasining ushbu

$$\tilde{s} = \frac{(\mu+\eta)\,\chi(\tilde{k})}{f(\tilde{k})} = \frac{f'(\tilde{k})}{f(\tilde{k})}\frac{\chi'(\tilde{k})}{\chi(\tilde{k})} \qquad (12.44)$$

formula bilan aniqlanadigan qiymati mos keladi. Ravshanki, $0 < \tilde{s} < 1$. Shunday qilib, $\psi(t) \equiv 1$ bo'ladigan vaqt oralig'i $[\tau_0; \tau_1]$ da jamg'arma normasining *qiymati* (12.44) formula yordamida bir qiymatli aniqlanadi va $s(t)$, $\forall t \in [0; T]$ uchun quyidagiga egamiz:

$$s(t)=\begin{cases} 0, & agar \quad \psi<1, \\ \bar{s}=\dfrac{f'(\tilde{k})}{f(\tilde{k})}\dfrac{\chi'(\tilde{k})}{\chi(\tilde{k})}, & agar \quad \psi=1, \\ 1, & agar \quad \psi>1. \end{cases} \tag{12.45}$$

Endi $\psi_0 = 1$ bo'lganda (12.42) ni quyidagicha yoziladi:

$$\dot{\psi}=-(1-s)f'(k)-\left[s\,f'(k)-(\mu+\eta)\,\chi'(k)\right]\cdot\psi. \tag{12.46}$$

Transversallik shartiga ko'ra $\psi(T)=0<1$ bo'lgani uchun (12.45) ga asosan $s(T)=0$ tenglik o'rinli. $\psi(t)$ funksiyaning uzluksizligiga asosan $\psi(T)\le 1$ bo'ladigan $[\tilde{\tau}_1;T]\subseteq[0;T]$ kesma mavjud. Ikki hol yuz berishi mumkin:

A) $\psi(T)<1$ va $[\tilde{\tau}_1;T]=[0;T]$;

B) $\psi(T)<1,\ \ t\in(\tilde{\tau}_1;T),\ \ \psi(\tau_1)=1,\ \ [\tilde{\tau}_1,T]\subset[0,T]$.

A) holini ko'rmaymiz, chunki bu hol iqtisodiy ma'noga ega emas. **B)** holida $s(t)\equiv 0,\ \forall t\in[\tilde{\tau}_1;T]$. Bunda (12.46) tenglama quyidagicha yoziladi:

$$\dot{\psi}=-f'(k)-(\mu+\eta)\,\chi'(k)\cdot\psi,\quad \forall t\in(\tilde{\tau}_1;T]. \tag{12.47}$$

Shu chiziqli bir jinsli bo'lmagan tenglamaning $\psi(T)=0$ shartni qanoatlantiradigan yechimini yozamiz:

$$\psi=\int_t^T f'(k(t))\cdot e^{(\mu+\eta)\int_\tau^t \chi'(k(p))dp}\,d\tau, \tag{12.48}$$

bunda $k(t)$ – (12.39) differensial tenglamaning $s(t)\equiv 0$ bo'lgandagi yechimi, ya'ni

$$\dot{k}=-(\mu+\eta)\cdot\chi(k),\qquad k(T)=k_T \tag{12.49}$$

tenglamaning yechimi. $\chi(k)$ funksiya (12.38) formula bilan aniqlanadi, shuning uchun (12.49) o'rniga ushbu

$$\dot{k}=-(\mu+\eta)\cdot k-\nu k^2,\qquad k(T)=k_T \tag{12.49'}$$

Bernulli tenglamasiga egamiz. Uni integrallab yechimini topamiz:

$$k(t)=\frac{1}{\left(\dfrac{1}{k_T}+\dfrac{\nu}{\mu+\eta}\right)\cdot e^{-(\mu+\eta)(T-t)}-\dfrac{\nu}{\mu+\eta}}=$$

$$= \frac{k_T(\mu+\eta)\cdot e^{(\mu+\eta)(T-t)}}{(\mu+\eta+\nu\cdot k_T)-\nu\cdot k_T\cdot e^{-(\mu+\eta)(T-t)}}. \qquad (12.50)$$

Ushbu $\psi(\widetilde{\tau}_1)=1$ tenglikdan $s(\widetilde{\tau}_1)=\widetilde{s}$ va $k(\widetilde{\tau}_1)=\widetilde{k}$ kelib chiqadi. Shu sababli $t=\widetilde{\tau}_1$ da (12.50) dan topamiz:

$$T-\widetilde{\tau}_1=\frac{1}{\mu+\eta}\ln\frac{\widetilde{k}\cdot\left(\frac{1}{k_T}+\frac{\nu}{\mu+\eta}\right)}{1+\widetilde{k}\frac{\nu}{\mu+\eta}}=\frac{1}{\mu+\eta}\ln\frac{\widetilde{k}\cdot(\mu+\eta+\nu k_T)}{k_T(\mu+\eta+\nu\widetilde{k})}.$$

Rejalashtirish ufqi $T>0$ yetarli katta bo'lgani uchun $T-\widetilde{\tau}_1>0$ tengsizlik o'rinli va oxirgi tenglikdangi logarifm musbat. Bundan

$$\frac{\widetilde{k}\,(\mu+\eta+\nu k_T)}{k_T(\mu+\eta+\nu\widetilde{k})}>1 \text{ yoki } \widetilde{k}>k_T$$

tengsizlikka egamiz. Endi $\widetilde{\tau}_1$ uchun formulani yozamiz:

$$\widetilde{\tau}_1=T-\frac{1}{\mu+\eta}\ln\frac{\widetilde{k}\,(\mu+\eta+\nu k_T)}{k_T(\mu+\eta+\nu\widetilde{k})}. \qquad (12.51)$$

Endi (12.43), (12.47) larga ko'ra $t=\widetilde{\tau}_1$ nuqta $y(t)$ funksiyaning statsionar nuqtasi bo'ladi. Haqiqatan,

$$\dot{\psi}(\widetilde{\tau}_1)=-f'(k(\widetilde{\tau}_1))+(\mu+\eta)\chi'(k(\widetilde{\tau}_1))\cdot\psi(\widetilde{\tau}_1)=$$
$$=-f'(\widetilde{k})+(\mu+\eta)\chi'(\widetilde{k})\cdot 1=0.$$

Shu nuqtada $\ddot{\psi}(\widetilde{\tau}_1)$ ni hisoblaymiz:

$$\ddot{\psi}(\widetilde{\tau}_1)=-f''(\widetilde{k})\dot{k}(\widetilde{\tau}_1)+(\mu+\eta)\cdot\left[\chi''(\widetilde{k})\,\psi(\widetilde{\tau}_1)\,\dot{k}(\widetilde{\tau}_1)+\chi'(\widetilde{k})\,\dot{\psi}(\widetilde{\tau}_1)\right]=$$
$$=-f''(\widetilde{k})\cdot\dot{k}(\widetilde{\tau}_1)+(\mu+\eta)\cdot\chi''(\widetilde{k})\cdot\dot{k}(\widetilde{\tau}_1).$$

(12.39) ga ko'ra $\dot{k}=-(\mu+\eta)\cdot\chi(k)$ va $\dot{k}(\widetilde{\tau}_1)=-(\mu+\eta)\cdot\chi(k)<0$.

Shuning uchun $\ddot{\psi}(\widetilde{\tau}_1)<0$. Demak, $y(t)$ funksiya $\widetilde{\tau}_1$ nuqtada mahalliy maksimumga erishadi. Shunday qilib, keyingi mulohazalarda muhim bo'lgan

$$\psi(t) \le 1, \quad \forall\, t \in (\tilde{\tau}_1; T), \quad \psi(\tilde{\tau}_1) = 1 \tag{12.52}$$

tengsizlikka egamiz. Bu harakatning yakuniy bosqichi $s(t) \equiv 0$, $t \in [\tilde{\tau}_1, T]$ boshqarish bilan amalga oshirilishini anglatadi. Shu bilan birga, $\psi(\tilde{\tau}_1) = 1$, $k(\tilde{\tau}_1) = \tilde{k}$. Harakat tenglamasi quyidagi ko'rinishga ega ((12.41) ga qarang):

$$\dot{k} = -(\mu + \eta)\,\chi(k) \quad \text{yoki} \quad \dot{k} = -(\mu+\eta)k - \nu k^2.$$

Bu tenglamaning yechimi $k(T) > k_T$ da (12.50) ko'rinishda yoziladi. Ammo $k(\tilde{\tau}_1) = \tilde{k}$ bo'lgani uchun $\dot{k}(\tilde{\tau}_1) = -(\mu+\eta)\chi(k) < 0$ va $\forall t \in (\tilde{\tau}_1; T]$ da $\dot{k}(t) = -(\mu+\eta)\chi(k(t)) < 0$ tengsizlik o'rinli. Demak, $k(t)$ funksiya $(\tilde{\tau}_1; T]$ da monoton kamayuvchi.

Endi rejalashtirish davrining boshida resurslarni optimal boshqarish masalasi bilan shug'ullanamiz. Ravshanki, $t = 0$ bo'lganda uch hol yuz beradi: a) $\psi(0) = 1$; b) $\psi(0) < 1$; v) $\psi(0) > 1$. Avvalgi paragrafdagidek a) va b) hollar yuz bera olmasligi ko'rsatiladi.

Biz v) holini ko'ramiz. $\psi(0) > 1$ bo'lsin. Unda yoki $\psi(t) > 1$, $\forall t \in [0; T]$, yoki shunday $\tau_0 > 0$ son mavjud bo'ladiki, $\psi(\tau_0) = 1$, $0 < \tau_0 < T$ tenglik o'rinli bo'ladi. Agar $\psi(t) > 1$, $\forall t \in [0; T]$ bo'lsa, $s(t) \equiv 1$, $\forall t \in [0; T]$, kelib chiqadi. Buning iqtisodiy ma'nosi yo'q. Agar shunday τ_0 mavjud bo'lsaki, $\tau_0 < T$ va $\psi(\tau_0) = 1$ bo'lsa, unda $[0; \tau_0]$ kesmada $s(t) \equiv 1$. Endi (12.39) tenglama ushbu

$$\dot{k} = f(k) - (\mu + \eta)\,\chi(k) \tag{12.53}$$

ko'rinishga keladi. Bundan $k(0) = k_0 > 0$ da

$$t = \int_{k_0}^{k(t)} \frac{d\xi}{f(\xi) - (\mu + \eta)\,\chi(\xi)}$$

kelib chiqadi. $\psi(\tau_0) = 1$, $k(\tilde{\tau}_0) = \tilde{k}$ bo'lganda τ_0 uchun quyidagi formulaga ega bo'lamiz:

$$\tilde{\tau}_0 = \int_{k_0}^{\tilde{k}} \frac{d\xi}{f(\xi) - (\mu + \eta)\,\chi(\xi)}. \tag{12.54}$$

Endi $k_0 < k < \tilde{k}$ da $f(k) - (\mu + \eta)\,\chi(k) > 0$ tengsizlik o'rinli bo'lgani uchun (12.54) integral mavjud.

Avvalgi mulohazalarga o'xshash $k(t)$ funksiya $t = \widetilde{\tau}_0$ nuqtada mahalliy minimumga erishishini isbotlaymiz. Haqiqatan ham,

$$\dot{k}_-(\widetilde{\tau}_0) = f(\widetilde{k}) - (\mu+\eta)\chi(\widetilde{k}) = f(\widetilde{k}) - \frac{f'(\widetilde{k})}{\chi'(\widetilde{k})}\chi(\widetilde{k}) =$$

$$= f(\widetilde{k})\left[1 - \frac{\widetilde{k}\, f'(\widetilde{k})}{f(\widetilde{k})}\frac{\chi(\widetilde{k})}{\widetilde{k}\,\chi'(\widetilde{k})}\right] > 0,$$

chunki $f(k) > k\, f'(k)$, $\chi(k) > k\,\chi'(k)$, $\forall\, k > 0$; $\dot{k}_+(\widetilde{\tau}_0) = 0$, chunki $t > \widetilde{\tau}_0$ da $k(t) = \widetilde{k} = const$. Demak, $k(t)$ funksiya $t = \widetilde{\tau}_0$ nuqtada mahalliy minimumga erishadi.

Shunga o'xshash tasdiqni $\psi(t)$ funksiya uchun ham isbotlaymiz. Haqiqatan ham, $t > \widetilde{\tau}_0$ da $s(t) \equiv 1$ va (12.46) ga ko'ra ushbu

$$\dot{\psi} = -\left[f'(k) - (\mu+\eta)\,\chi'(k)\right]\cdot\psi$$

differensial tenglama hosil bo'ladi. $f'(k(\widetilde{\tau}_0)) = f'(\widetilde{k})$, $\psi(\widetilde{\tau}_0) = 1$ bo'lgani uchun $\widetilde{\tau}_0$ nuqtada ushbu

$$\dot{\psi}(\widetilde{\tau}_0) = -\left[f'(\widetilde{k}) - (\mu+\eta)\,\chi'(\widetilde{k})\right]\cdot\psi(\widetilde{\tau}_0) = 0$$

tenglik kelib chiqadi. Bu esa, $\widetilde{\tau}_0$ nuqta $y(t)$ funksiyaning statsionar nuqtasi ekanini isbotlaydi.

Endi $t = \widetilde{\tau}_0$ da $\ddot{\psi}(t)$ ni hisoblaymiz:

$$\ddot{\psi} = -\left[f''(k) - (\mu+\eta)\chi''(k)\right]\dot{k}\,\psi - \left[f'(k) - (\mu+\eta)\,\chi'(k)\right]\cdot\dot{\psi},$$

$$\ddot{\psi}(\widetilde{\tau}_0) = -\left[f''(\widetilde{k}) - (\mu+\eta)\chi''(\widetilde{k})\right]\dot{k}(\widetilde{\tau}_0)\,\psi(\widetilde{\tau}_0) -$$

$$-\left[f'(\widetilde{k}) - (\mu+\eta)\,\chi'(\widetilde{k})\right]\cdot\dot{\psi}(\widetilde{\tau}_0) =$$

$$= -\left[f''(\widetilde{k}) - (\mu+\eta)\chi''(\widetilde{k})\right]\left[f(\widetilde{k}) - (\mu+\eta)\,\chi(\widetilde{k})\right] > 0.$$

Shunday qilib, $\dot{\psi}(\widetilde{\tau}_0) = 0$, $\ddot{\psi}(\widetilde{\tau}_0) > 0$ va $\psi(t)$ funksiya $t = \widetilde{\tau}_0$ nuqtada mahalliy minimumga erishadi. Shuning uchun $\psi(t) \geq 1$, $\forall\, t \in [0, \widetilde{\tau}_0]$.

Demak, $\tilde{\tau}_0$ moment aniqlandi ((12.54) formulaga qarang). Ravshanki, yetarli katta $T>0$ uchun $0<\tilde{\tau}_0<\tilde{\tau}_1<T$ tengsizlik o'rinli.

Endi $\tilde{\tau}_1-\tilde{\tau}_0$ ayirma musbat bo'lishi uchun T ni $T\geq\tilde{T}_0$ deb tanlash etarli, bunda

$$\tilde{T}_0=\tilde{\tau}_0+T-\tau_1=\frac{1}{\mu+\eta}\ln\frac{\tilde{k}\cdot(\mu+\eta+\nu k_T)}{k_T(\mu+\eta+\nu\tilde{k})}+\int_{k_0}^{\tilde{k}}\frac{d\xi}{f(\xi)-(\mu+\eta)\chi(\xi)}.$$

Qurollanganlik k ning $(\tilde{\tau}_0,\tilde{\tau}_1)$ intervalga mos $k\equiv\tilde{k}$ holati *magistral* deyiladi. Avvalgi paragrafdagi kabi magistral uchlari $(\tilde{\tau}_0,\tilde{k})$ va $(\tilde{\tau}_1,\tilde{k})$ nuqtalardan iborat bo'lgan gorizontal kesmalardan iborat. Agar $T=\tilde{T}_0$ bo'lsa, magistral mavjud emas, chunki unda $\tilde{\tau}_0=\tilde{\tau}_1$. Agar $T>\tilde{T}_0$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, magistral mavjud. Asosiy maqsad qurollanganlik holatini iloji boricha uzoqroq shu magistral darajasida (holatida) ushlab turishdan iborat. Shunda iqtisodiy dinamikaning o'zgaruvchi jamg'arish normali modeli o'zgarmas jamg'arish normali modeliga "yaqin" bo'ladi.

Biz yuqorida optimallik va transversallik shartlarini qanoatlantiradigan ushbu

$$\tilde{s}(t)=\begin{cases}1, & agar\quad 0\leq t<\tau_0,\\ \tilde{s}, & agar\quad \tau_0\leq t<\tau_1,\\ 0, & agar\quad \tau_1\leq t<T,\end{cases}\tag{12.55}$$

boshqarish funksiyasini qurdik. Shu boshqarish funksiyasining optimalligi avvalgi paragrafdagidek isbotlanadi.

Optimal holatlar trayektoriyasini qurish uchun uni $[0;\tilde{\tau}_0]$ va $[\tilde{\tau}_1;T]$ kesmalarda o'rganamiz. Agar $t\in[0;\tilde{\tau}_0]$ bo'lsa, $\dot{k}=f(k)-(\mu+\eta)\chi(k)>0$, $\ddot{k}=f'(k)\dot{k}-(\mu+\eta)\chi'(k)\dot{k}>0$. Shunday qilib, $[0;\tilde{\tau}_0]$ kesmada holatlar trayektoriyasi k_0 nuqtadan chiqadi va $k(t)$ funksiya monoton o'suvchi va qavariq.

Endi $t\in[\tilde{\tau}_1;T]$ bo'lsin. Bunda $s(t)\equiv 0$ va $\dot{k}=-(\mu+\eta)\chi(k)>0$, $\ddot{k}=-(\mu+\eta)\chi'(k)\dot{k}>0$. Bundan holatlar trayektoriyasi $[\tilde{\tau}_1;T]$ kesmada qavariqligi va monoton kamayuvchiligi kelib chiqadi. $\tilde{k} > k_T$ bo'lgani uchun qurollanganlik holati $\tilde{k}$ dan k_T gacha pasayadi (12.4-chizmaga qarang).

Endi magistral teoremani bayon etsa bo'ladi.

12.4-teorema (magistral teorema). *Rejalashtirish ufqi $T > 0$ yetarli katta bo'lsin. Unda* ((12.39), (12.3) - (12.5)) *masala uchun* (12.5) *funksionalning maksimumi ma'nosida optimal boshqarish $s(t)$ mavjud va u quyidagicha qurilgan: rejalashtirishning boshi* $(0, \tilde{\tau}_0)$ *davrida harakat* $s(t) \equiv 1$ *boshqarish bilan, oxiri* $(\tilde{\tau}_1; T]$ *da* $s(t) \equiv 0$ *boshqarish bilan amalga oshiriladi. Qolgan vaqt* $(\tilde{\tau}_0; \tilde{\tau}_1)$ *davomida harakat* $k(t) \equiv \tilde{k}$ *magistral bo'ylab* $s(t) \equiv \tilde{s}$ *boshqarish,* $0 < \tilde{s} < 1$ *yordamida amalga oshiriladi. Ushbu* $\tilde{\tau}_0$, $\tilde{\tau}_1$, $\tilde{s}$ *miqdorlar mos ravishda* (12.54), (12.51) *va* (12.44) *formulalar yordamida hisoblanadi, balanslangan o'sish rejimi* $\tilde{k}$ *esa* (12.43) *tenglamaning yechimi.*

Biz yuqorida iqtisodiy dinamikaning asosiy fondlarning chiziqli yaroqsizlanishi va mehnat resurslari hajmi eksponensial hamda chiziqli-botiq funksiyalar bo'lgan modellarini to'liq o'rgandik. Shunga o'xshash, iqtisodiy dinamikaning mehnat resurslari hajmi *chiziqsiz-botiq* bo'lgan modelini ham o'rganish mumkin. Bu mavzuni mustaqil ish sifatida qoldiramiz.

12-bobga oid masalalar

I. Quyidagi ICHF lar uchun iqtisodiy dinamikaning mehnat resurslari hajmi eksponensial funksiya bo'ladigan modeli uchun $\bar{k}$, $\bar{s}$, $\bar{\tau}_0$, $\bar{\tau}_1$ miqdorlar hisoblansin:

1. $F(L,K) = \sqrt{KL}$.
2. $F(L,K) = \sqrt[3]{KL^2}$.
3. $F(L,K) = \sqrt[4]{K^3 L}$.
4. $F(L,K) = \dfrac{4KL}{\left(\sqrt{K} + \sqrt{L}\right)^2}$.
5. $F(L,K) = \dfrac{2KL}{K+L}$.
6. $F(L,K) = \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{K} + \sqrt{L}\right)^2$.
7. $F(L,K) = \sqrt[5]{KL^4}$.
8. $F(L,K) = \dfrac{\sqrt{2}KL}{\sqrt{K^2 + L^2}}$.

II. I bo'limdagi ICHF lar uchun iqtisodiy dinamikaning mehnat resurslari hajmi chiziqli-botiq funksiya bo'lgan modeli uchun $\tilde{k}$, $\tilde{s}$, $\tilde{\tau}_0$, $\tilde{\tau}_1$ miqdorlar hisoblansin.

12-bobga oid nazorat savollari **^H**

1. O'zgaruvchijamg'arishnormali model uchun masalaningq yilishini ^H
aytib beriitg. ^H

2. Iqtisodiy dinamikaning mehnat resurslari hajmi eksponensial funksiya ^H
bo 'Igan modeli uchun asosiy differensial tcnglamani yozing. <^fl

3. Jamlama iste'mol funksionalini yozing. ^*M*

4. Statsionar yechimning mavjudligi haqidagi teoremani aytib bering. ^*M*

5. O'zgaruvchi jamg'arish normali model uchun mos Gamilton H
funksiyasini va yordamchi o'zgaruvchilar uchun qovushma sistemani fl
yozing. S

6. Balanslangan o'sishning optimal rejimini topish uchun tenglamani •
yozing fl

7. Magistralga qo 'nish va undan tushish momentlari uchun formulalarni •
yozing. •

8. Maksimum prinsipini qanoatlantiradigan boshqarishning optimalligini isbotlang.

9. Optimal trayektoriyalar tasvirini chizing.

10. Magistral teoremasini aytib bering.

11. Iqtisodiy dinamikaning mehnat resurslari hajmi chiziqli-botiq bo'lgan modeli uchun 2-10 savollargajavob bering.

13-bob. IQTISODIY DINAMIKANING ISHLAB CHIQARISH QUWATIGA ASOSLANGAN MODELLARINI O'RGANISH

Awalgi boblarda iqtisodiy dinamika modellari o'rganildi va ishlab chiqahlgan mahsulotni (milliy daromadni) kapital xarajatga va iste'molga optimal taqsimlash masalasi yechildi. Unda ICHF dan foydalanildi, ularga neoklassik shartlar (5-bobdagi 1° -5° -neoklassik shartlarga qarang) qo'yildi. Har bir ko'rilgan holda mos asosiy differensial tenglama yoki differensial tenglamalarning asosiy sistemasi chiqarildi. Ularda qurollanganlik $k(t)$ yoki qurollanganliklar £,(/) va $k_2(t)$ (ikki sektorli iqtisodiy jarayon uchun) noma'lum funksiya sifatida ishtirok etdilar. Jon boshiga is'temolni maksimallashtirish masalasini yechib, optimal jamg'arish normasini (s; $0 < s < 1$) va balanslangan o'sishning optimal rejimini (k; $k = const$) topdik. Shundan keyin model trayektoriyasini, ya'ni $L(t), K(t), Y(t), C(f)$ funksiyalarni topish mumkin bo'ldi.

A.A. Petrov va uning shogirdlari iqtisodiy dinamikaning modellarini o'rganish uchun boshqacha yondashishni taklif etishdi (qarang: IleTpoB A.A., IIocneJiOB *VL.T.*, LUaHaHHH A.A. Onur MaTeMaTHHecKoro MOflejiH-poBaHHH 3KOHOMHKH. —M.: "3HeproaTOMH3flaT", 1996). Quyidabizshu yondashishning mohiyatiga to'xtalamiz va ba'zi masalalami hal qilamiz.

Ishlab chiqansh imkoniyatlari ishlab chiqarish *quwati* -birbirlik vaqt davomida maksimal ishlab chiqarilgan *mahsulot miqdori* bilan oichanadi. Ishlab chiqarish quwatini M bilan belgilaymiz. Ishlab chiqarish imkoniyatlari ICHF bilan tavsiflanadi. Bn funksiya bir birlik vaqt davomida maksimal ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori 7 bilan ishlab chiqarish quwati M va foydalanilayotgan (foydalanilgan) ishchi kuchi R orasidagi bog'lanishni beradi. Mos ICHFni $Y = F(M,R)$ deb belgilaymiz. Shu ICHF uchun quyidagi xossalar qabul qilinadi:

a) agar M- 0 yoki $R = 0$ bo'lsa, $7 = 0$ boiadi, agar hech bo'lmasa bitta ishlab chiqarish faktori bo'lmasa, ishlab chiqarish mumkin emas;

b) $R > R'$ boisa, 7=A/boiadi,bundai?*=^*(A/)-q«vvatnitoiiqishga tushirish uchun zarur bo'lgan ishchi kuchi miqdori; agar $M < M^*$ bo'lsa, 7=Mbo'ladi, bundaA/*= $M'(R)$ - ishchi kuchi miqdori R quwat$M'(R)$ ni to'liq ishga tushirib yuboradi;

v) $\frac{\partial Y}{\partial M} > 0$, agar $M > 0$; $\frac{\partial Y}{\partial R} > 0$, agar $R < R^*$ bo'lsa. Ma'nosi – ishlab chiqarish faktorlari noldan farqli limit unumdorlikka ega;

g) $\frac{\partial^2 Y}{\partial M^2} < 0$, agar $M > 0$; $\frac{\partial^2 Y}{\partial R^2} < 0$, agar $R < R^*$ – ishlab chiqarish faktorlarining kamayuvchi limit unumdorligi qonuni, $\frac{\partial^2 Y}{\partial M \partial R} \geq 0$;

d) $F(\lambda M, \lambda R) = \lambda F(M, R), \lambda > 0$ – ishlab chiqarish masshtabini oshirishdan samaradorlik yo'q.
Yuqoridagi d) xossaga ko'ra quyidagi tengliklarni yozish mumkin:

$$Y = M\ f(x),\ x = R/M,\ f(x) = F(1, x),\ \ f(0) = 0,\ \ f(x^*) = 1,\ x^* = R^*/M.$$

Quyidagi formulalar o'rinli:

$$\frac{\partial Y}{\partial R} = f'(x) > 0; \quad \frac{\partial Y}{\partial M} = f(x) - x \cdot f'(x) > 0; \quad 0 \leq x < x^*;$$

$$M\frac{\partial^2 Y}{\partial R^2} = f''(x) < 0; \quad 0 \leq x < x^*.$$

Shunday qilib, $f(x)$ funksiya uchun $0 \leq x < x^*$ yarim intervalda quyidagi munosabatlar o'rinli;

$$f(0) = 0,\ \ f(x^*) = 1,\ \ f'(x) > 0,\ \ f''(x) < 0, \quad 0 < \frac{x f'(x)}{f(x)} < 1,$$

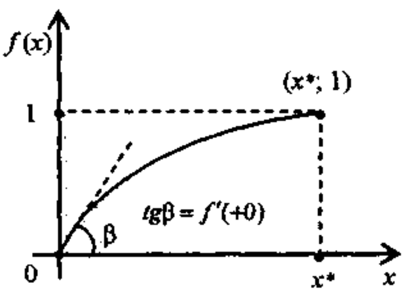
$$\lim_{x \to +0} f(x) = \begin{cases} f'(+0) & \text{- chekli son} \\ +\infty . & \end{cases}$$

13.1-§. Iqtisodiy dinamikaning ishlab chiqarish quvvati chiziqli yaroqsizlangan modeli

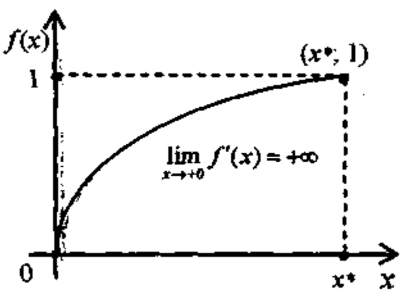
Iqtisodiy sistemaning (iqtisodiy dinamikaning) shunday modelini ko'ramizki, unda ishlab chiqaruvchilar majmuasi o'zaro *mukammal* raqobatda bo'ladi, bir jinsli mahsulot ishlab chiqaradi va ishlab chiqarish faktorlaridan biri sifatida bir jinsli ishchi kuchidan foydalanadi. Bu modelda ishchi kuchi eksponensial qonun bo'yicha berilgan va ishlab chiqarish quvvatining chiziqli yaroqsizlanishi e'tiborga olingan. Shunday qilib, quyidagi munosabatlar bilan tavsiflanadigan iqtisodiy dinamika modelini ko'ramiz:

$$\left.\begin{aligned}&\dot{M}=I-\mu M,\quad 0\le\mu\le 1,\\&\dot{R}^s=\lambda_p R^s\ \left(R^s=R_0e^{\lambda_p t}\right),\quad t\ge 0,\ R_0\ge 0,\\&F(M,R)=J+C,\quad x=\frac{R}{M},\\&R\le R^s,\end{aligned}\right\}\qquad(13.1)$$

bunda R^s – taklif qilingan ishchi kuchi miqdori, R – foydalanilgan ishchi kuchi miqdori, I – vaqtning bir birligida yaratiladigan quvvat, $J=bI$ – b vaqtda J birlik pulga (fondga) aylanadigan mahsulotdan foydalanish zarur, $F(M,R)=J+C$ – *ishlab chiqarish* va *mahsulotni taqsimlash balansi* tenglamasi. Ushbu



13.1-chizma



13.2- chizma

$$\dot{M}=I-\mu M \qquad (13.2)$$

differensial tenglama ishlab chiqarish quvvatining vaqt o'tishi bilan yangi quvvat kiritilishi hisobiga ortib borishini ifodalaydi, unda ishlab chiqarish quvvati $M(t)$ ning chiziqli yaroqsizlangani e'tiborga olingan. $F(M,R)$ – neoklassik ICHF, bu funksiya uchun *quyidagi munosabatlar o'rinli:*

$$F(M,R)=M\,f(x),\quad f(x)=F(1,\ x),\quad x=R/x,\quad f(0)=0\,.$$

Ishlab chiqariladigan mahsulot miqdori ishlab chiqarish quvvati bilan chegaralangan, ya'ni $F(M,R^s)=M;\ R\ge R^*$. Shuning uchun $M=M\,f(x^*)$ va $f(x^*)=1;\ x^*=R^*/M$, bunda R^* – *ishchi kuchining quvvatni to'liq ta'minlash uchun zarur miqdori.*

Ish bilan band bo'lganlar uchun jon boshiga iste'mol miqdorini o'rganamiz. Uni $\omega = C/R$ deb belgilaymiz. Eksponensial balanslangan o'sish trayektoriyasining mavjudligi masalasi quyidagi teorema bilan yechiladi.

13.1-teorema. *Agar* (13.1) *ob'ekt uchun ushbu*

$$b(\lambda_p+\mu)+x^* f'(x^*)<1 \tag{13.3}$$

tengsizlik bajarilsa, unda eksponensial balanslangan o'sish trayektoriyalari majmuasida $\omega(x)$ *ko'rsatkich* $([0;x^*])$ *maksimal qiymatga erishadigan trayektoriya mavjud, unda x miqdor (statsionar nuqta) quyidagi tenglamaning yechimi bo'ladi:*

$$f(x)=b(\lambda_p+\mu)+x f'(x). \tag{13.4}$$

Agar x_0 nuqta (13.4) tenglamaning yechimi bo'lsa, unda $x<x_0\le x^*$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Yuqoridagi (13.3) tengsizlik *ishlab chiqarishning samaradorligi sharti* deyiladi.

Misol sifatida Kobb-Duglas funksiyasini ko'ramiz:

$F(M,R)=a_0M^{\alpha}R^{1-\alpha}$, $a_0>0$, $0<\alpha<1$. Unda $f(x)=a_0x^{1-\alpha}$, $x=R/M$.

$f(x^*)=1$ tenglikka ko'ra $x^*=a_0^{1/(\alpha-1)}$. (13.4) tenglama ushbu

$$x_0=\left[\frac{b(\lambda_p+\mu)}{a_0\alpha}\right]^{1/(1-\alpha)}$$

yechimga ega. Samaradorlik sharti soddalashtirilgandan keyin

$$\lambda_p+\mu<\frac{\alpha}{b}$$

ko'rinishga keladi. Ravshanki, $x_0<x^*$ tengsizlik o'rinli. Haqiqatan ham,

$$x_0=\left[\frac{b(\lambda_p+\mu)}{a_0\alpha}\right]^{1/(1-\alpha)}<\left[\frac{b\cdot\alpha/b}{a_0\alpha}\right]^{-1/(1-\alpha)}=a_0^{1/(1-\alpha)}=x^*.$$

13.2-§. Iqtisodiy dinamikaning ishlab chiqarish quvvati va ishchi kuchi chiziqsiz-yaroqsizlangan modeli

Iqtisodiy dinamika modellarida asosan ishlab chiqarish quvvati chiziqli yaroqsizlangan hollar ko'riladi. Aslida ishlab chiqarish quvvatigina emas, balki ishchi kuchi ham "yaroqsizlanadi" (stanoklar eskiradi, sinadi va h., ishchilar kasal bo'ladi, nafaqaga chiqadi yoki vafot etadi). Biz ishlab chiqarish quvvati va ishchi kuchi majmuyining chiziqsiz yaroqsizlanishiga oid model bilan shug'ullanamiz.

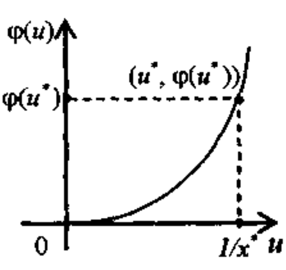
Iqtisodiy dinamikaning modeli quyidagi munosabatlar bilan tavsiflansin, deylik:

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{M} = I - \mu R\,\varphi\left(\frac{M}{R}\right), \quad 0 \le \mu \le 1, \\
&\dot{R}^s = \lambda_p R^s \ \left(R^s = R_0 e^{\lambda_p t}\right), \quad t \ge 0, \ \ R_0 \ge 0, \\
&F(M,R) = J + C, \quad x = \frac{R}{M}, \\
&R \le R^s, \\
&J = b \cdot I,
\end{aligned}\right\} \tag{13.5}$$

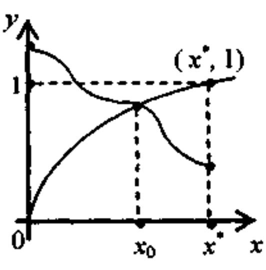
bunda $\varphi(u) = \varphi(1/x)$ funksiya $(0;\, 1/x^*)$ intervalda aniqlangan, ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi va quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$\varphi(0)=0,\ \varphi(u)>0,\ \varphi'(u)>0,\ \varphi''(u)>0,\ u \in \left(0; \frac{1}{x^*}\right),\ \lim_{u \to +0} \varphi'(u) = 0. \tag{13.6}$$

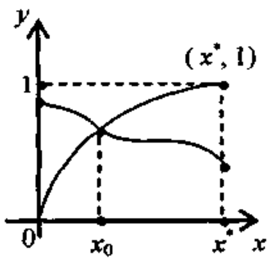
Shu (13.6) shartlarga ko'ra $\varphi(u)$ funksiya qavariq, grafigi koordinata boshidan abssissa o'qiga urinib chiqadi va koordinata tekisligining I choragida joylashgan. Bunda $\varphi(0)=0$ tenglik $M=0$ bo'lganda $\varphi(M/R)=0$ dan kelib chiqadi (13.3-chizma), ya'ni $u=0$ bo'lganda $M=0$ bo'ladi.



13.3-chizma



13.4a- chizma



13.4б - chizma

(13.5) obyekt uchun ham (13.1) obyektdagidek iqtisodiy o'sish trayektoriyasi boshlang'ich shart $M(0) = M_0$ va $I(t)$, $t \ge 0$ funksiya bilan aniqlanadi. Demak, (13.5) model uchun ishchi kuchi $R^s(t)$ dan qanchalik darajada foydalanilganligiga va ishlab chiqarilgan mahsulotni $J(t)$ va $C(t)$ ga qanday taqsimlanganligiga bog'liq bo'lgan o'sish trayektoriyalarini o'rganamiz. Ular, odatda, quyidagi shartlar bilan ajralib turadi: to'liq bandlik sharti $R \le R'$ va $x = const$, $M f(x) = J + C$. Ravshanki, $R_0 = x M_0$, $\dot{M}(t) = \lambda_p M(t)$. Shuning uchun (13.5) ning birinchi tenglamasi ushbu

$$\lambda_p M(t) = I(t) - \mu R(t) \cdot \varphi\left(\frac{M(t)}{R(t)}\right)$$

ko'rinishda yoziladi. (13.5) da balans tenglamasi quyidagi

$$M(t) f(x) = b \lambda_p M(t) + \mu b R(t) \varphi\left(\frac{1}{x}\right) + C$$

ko'rinishni oladi. Shu tenglikning ikki tomonini $M(t)$ ga bo'lamiz:

$$f(x) = b\left[\lambda_p + \mu x \varphi\left(\frac{1}{x}\right)\right] + \frac{C}{M}.$$

Bundan $\frac{C}{M} = \frac{C}{R} \cdot \frac{R}{M} = x \cdot \omega(x)$ ekanini hisobga olib, quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$f(x) = b\left[\lambda_p + \mu x \varphi\left(\frac{1}{x}\right)\right] + x \omega(x), \quad x - \text{parametr.} \qquad (13.7)$$

Bunda $\omega(x)$ – ish bilan band bo'lganlar uchun jon boshiga is'temol miqdori (jon boshiga is'temol funksiyasi).

Masala parametr x ning $0 < x \le x^*$ yarim intervaldagi qiymatlari ichidan jon boshiga is'temol $\omega(x) = C/R$ funksiyasiga maksimal qiymat beradiganini topishdan iborat. Quyidagi teorema bu masalaning yechimini beradi.

13.2-teorema. *Agar* (13.5) *obyekt uchun ushbu*

$$b \lambda_p + b \mu \varphi'\left(\frac{1}{x^*}\right) + x^* f(x^*) < 1 \qquad (13.8)$$

tengsizlik bajarilsa, unda balanslangan eksponensial o'sish trayektoriyalari majmuasida (13.1-*teorema bilan taqqoslang*) *jon boshiga iste'mol funksiyasi* $\omega(x)$ *ga maksimal qiymat beradigan trayektoriya mavjud.*

Isbot. (13.7) bo'yicha $\omega(x)$ ni differensiallaymiz:

$$f'(x) = b \mu \cdot \left[\varphi\left(\frac{1}{x}\right) + x \varphi'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right] + \omega(x) + x \frac{d\omega(x)}{dx}, \qquad (13.9)$$

bunda shtrix ′ $f'(x)$ da x bo'yicha, $\varphi'(1/x)$ da $\varphi(u)$ dan u bo'yicha hosilani, ya'ni $\frac{d\varphi}{du} = \varphi'_u(u) \frac{du}{dx}$ ni anglatadi. $\omega(x)$ funksiyaning statsionar nuqtasini topish uchun $\frac{d\omega(x)}{dx}=0$ tenglamani yechish lozim. $d\omega(x)/dx=0$ ni qanoatlantiradigan x nuqtada $f'(x)$ uchun formulaga egamiz:

$$f'(x)=\omega(x)+b\,\mu\cdot\left[\varphi\left(\frac{1}{x}\right)-x\,\varphi'\left(\frac{1}{x}\right)\right] \qquad (13.10)$$

Endi (13.9) ning ikki tomonini yana differensiallaymiz:

$$f''(x)=\frac{d\omega}{dx}+\frac{d\omega}{dx}+x\frac{d^2\omega}{dx^2}+b\,\mu\cdot\left[\frac{\varphi'(1/x)}{x^2}-\frac{\varphi'(1/x)}{x^2}-\frac{\varphi''(1/x)}{x^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right].$$

Bundan $d\omega(x)/dx=0$ ekanini hisobga olsak, ((13.6) ga qarang) quyidagi natijaga kelamiz:

$$\frac{d^2\omega}{dx^2}=\frac{1}{x}\left[f''(x)-\frac{b\,\mu}{x^3}\cdot\varphi''\left(\frac{1}{x}\right)\right]<0,\quad 0<x<x^*.$$

Agar x_0 nuqta $d\omega(x)/dx=0$ tenglamaning yechimi bo'lsa, $x=x_0$ da $\omega(x)$ funksiya mahalliy maksimumga erishadi. (13.10) tenglamani $\omega(x)$ ga nisbatan yechamiz va $\omega(x)$ uchun topilgan ifodani (13.7) ga qo'yamiz:

$$f(x)=b\,\lambda_p+b\,\mu\,\varphi'\left(\frac{1}{x}\right)+x\,f'(x). \qquad (13.11)$$

Shu tenglama musbat x_0, $0<x_0\leq x^*$ yechimga ega. Bu tasdiq quyidagi mulohazalardan kelib chiqadi. Birinchidan, $f(x)$ funksiya $0<x\leq x^*$ da botiq va $f(0)=0$, $f(x^*)=1$. Ikkinchidan, $0<x<x^*$ intervalda $\psi(x)=b\,\lambda_p+b\,\mu\,\varphi'(1/x)+x\,f'(x)$ funksiya musbat. (13.8) ga ko'ra $\varphi(x^*)<f(x^*)=1$. Shuning uchun (13.11) tenglama musbat x_0, $0<x_0<x^*$ yechimga ega (13.4a,b-chizmalar). Shu x_0 son balanslangan eksponensial o'sishning izlangan trayektoriyasidan iborat bo'lib, unda jon boshiga is'temol funksiyasi $\omega(x)$ maksimal qiymatga erishadi. (13.8) tengsizlik ishlab chiqarishning *samaradorlik sharti* deyiladi.

Misol. Faraz etaylik, $\varphi(u)=u^2$ va $F(M,R)=a_0M^{\alpha}R^{1-\alpha}$, $a_0>0$, $0<\alpha<1$ (Kobb-Duglas ICHF). $\varphi(u)$ funksiya uchun (13.6) shartlar bajariladi. (13.11) tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$a_0x^{1-\alpha}=b\,\lambda_p+\frac{2\,b\,\mu}{x}+a_0(1-\alpha)\,x^{1-\alpha}.$$

Bu holda $f(x)=a_0x^{1-\alpha}$ va $f(x^*)=1$ dan $x^*=a_0^{1/(\alpha-1)}$. Topilgan x^* ni e'tiborga olsak, ishlab chiqarish samaradorligi sharti

$$b\lambda_p + 2b\mu a_0^{\frac{1}{1-\alpha}} < \alpha$$

ko'rinishga keladi.

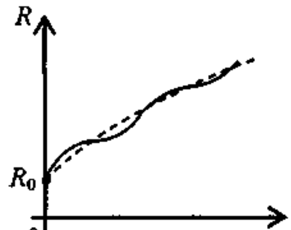
Agar $a_0 = 1$ bo'lsa, $x^* = 1$ bo'ladi va samaradorlik sharti soddagina ko'rinishga keladi, ya'ni

$$\lambda_p + 2\mu < \frac{\alpha}{b}.$$

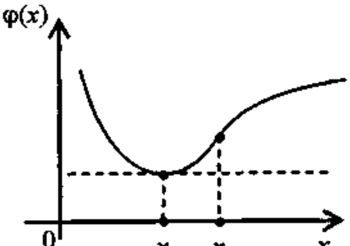
13.3-§. Iqtisodiy dinamikaning ishchi kuchi chiziqli-botiq, ishlab chiqarish quvvati chiziqli yaroqsizlangan modeli

Avvalgi ikki paragrafda iqtisodiy dinamika modellarida ishchi kuchi eksponensial qonun $R^s = R_0 e^{\lambda_p t}$ bilan o'zgargan hol ko'rildi. Aslida ishchi kuchi o'zgarishining tezligi faqat ishchi kuchigagina emas, balki ishlab chiqarish quvvatiga ham bog'liq. Bu bog'lanish R va M larga nisbatan chiziqli yoki chiziqsiz bo'lishi mumkin. Biz bog'lanish chiziqli bo'lgan holni ko'ramiz.

Faraz etaylik, $\dot{R} = \lambda_p R + \nu M$, $\lambda_p > 0$, $\nu > 0$, R – foydalanilayotgan (yoki foydalanilgan) ishchi kuchi. Ishchi kuchi o'sishining eksponensial qonuni model o'rganilayotgan butun vaqt oralig'ida o'rinli bo'lmaydi. Odatda $R=R(t)$ egri chiziq S-simon ko'rinishga ega bo'ladi va vaqt o'tishi bilan barqarorlashadi (13.5-chizma) (qarang: Р.Фостер. Обновление производства: атакующие выигрывают. Москва. Прогресс. 1987, гл.4). Shuning uchun $R=R(t)$ funksiya botiq bo'lishini, ya'ni $\ddot{R}(t) < 0$ tengsizlikni ta'minlaydigan shartni topish kerak.



13.5-chizma



13.6 - chizma

13.1-lemma. *Agar $F(M, R^*)$ ICHF ning izokvantalarida* $\frac{dM}{dR} < -\frac{\lambda_p}{\nu} < 0$ *tengsizlik o'rinli bo'lsa, unda $\ddot{R}(t) < 0$ tengsizlik ham o'rinli bo'ladi.*

Isbot. Neoklassik IChF uchun izokvantalar $F(M, R^*) = C$, $C = const$ tenglama bilan tavsiflanadi. Bundan

$$\frac{dM}{dR} = -\frac{\partial F}{\partial R} : \frac{\partial F}{\partial M} < 0$$

kelib chiqadi. Endi $\ddot{R}(t)$ ni hisoblaymiz:

$$\ddot{R} = \lambda_p \dot{R} + \dot{M} = \dot{R}\left(\lambda_p + \nu \frac{\dot{M}}{\dot{R}}\right) = \dot{R}\left(\lambda_p + \nu \frac{dM}{dR}\right).$$

Shartga ko'ra $\frac{dM}{dR} < -\frac{\lambda_p}{\nu}$ bo'lgani uchun $\ddot{R}(t) < 0$ bo'ladi.

Agar $F(M, R^*)$ Kobb-Duglas ICHF, ya'ni $F(M,R) = a_0 M^{\alpha} R^{1-\alpha}$, $a_0 > 0$, $0 < \alpha < 1$. bo'lsa,

$$\frac{dM}{dR} = -\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{M}{R}$$

bo'ladi. Shu sababli $R(t)$ ning botiqligi ushbu

$$-\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{M}{R} < -\frac{\lambda_p}{\nu} \qquad \text{yoki} \qquad \frac{M}{R} > \frac{\lambda_p \alpha}{(1-\alpha)\nu}$$

tengsizlik bilan ta'minlanadi.

Endi *iqtisodiy dinamikaning modeli* quyidagi munosabatlar bilan tavsiflansin:

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{M} = I - \mu M, \quad 0 \le \mu \le 1, \\
&\dot{R} = \lambda_p R + \nu M, \quad \lambda_p > 0, \quad \nu > 0, \\
&F(M,R) = J + C, \quad x = \frac{R}{M}, \\
&R \le R^s, \\
&J = b \cdot I,
\end{aligned}\right\} \qquad (13.12)$$

Agar ishchi kuchi $R(t)$ uchun 13.1-lemmaning sharti bajarilsa, unda $R(t)$ ni chiziqli-botiq ishchi kuchi deyiladi. Chiziqlilik $\dot{R}$ ning R va M ga chiziqli bog'liqligini, botiqlik $R(t)$ ning botiqligini anglatadi.

(13.12) obyekt uchun (13.5) obyektdagidek iqtisodiy o'sish trayektoriyasi boshlang'ich shart $M(0) = M_0$ va $I(t)$, $t \ge 0$ funksiya bilan aniqlanadi.

Bu (13.12) obyekt uchun ishchi kuchi $R^s(t)$ dan qanchalik darajada foydalanilganiga va ishlab chiqarilgan mahsulotni $J(t)$ va $C(t)$ ga qanday taqsimlanganligiga bog'liq bo'lgan o'sish trayektoriyalari majmuasi mavjud ekanini anglatadi.

Iqtisodiy o'sish trayektoriyalari ichida balanslangan o'sish (noeksponensial) trayektoriyalarini o'rganamiz. Ular, odatda, avvalgi paragrafdagidek shartlar bilan ajralib turadi: to'liq bandlik sharti $R \leq R^s$ va $x = const$, $M f(x) = J + C$, $\dot{R}^s = \lambda_p R^s + \nu M$, $x = \dfrac{R(t)}{M(t)}$. Bundan

$$M(t) = \frac{1}{x}R(t),\ \dot{M}(t) = \frac{1}{x}\dot{R}(t) = \frac{1}{x}\left[\lambda_p R(t) + \nu M(t)\right] =$$

$$= \lambda_p \frac{R(t)}{x} + \frac{1}{x}\nu M(t) = \lambda_p M(t) + \frac{\nu}{x}M(t) = \left(\lambda_p + \frac{\nu}{x}\right)M(t).$$

Shunday qilib, ushbu

$$\dot{M}(t) = \left(\lambda_p + \nu/x\right)\cdot M(t)$$

tenglikka egamiz. $\dot{M}(t)$ uchun topilgan ifodani (13.12) sistemaning birinchi tenglamasiga qo'yamiz:

$$\left(\lambda_p + \nu/x\right)\cdot M(t) = I - \mu\cdot M$$

Bundan $I(t) = \left(\lambda_p + \mu + \nu/x\right)\cdot M(t)$. Balans tenglamasidan foydalansak,

$$M(t) f(x) = b\left(\lambda_p + \mu + \frac{\nu}{x}\right)M(t) + C(t)$$

yoki

$$f(x) = b\left(\lambda_p + \mu + \frac{\nu}{x}\right)\frac{C(t)}{M(t)}.$$

Ushbu $\omega(x) = \dfrac{C(t)}{M(t)}$ belgilash kiritamiz, u, ma'lumki, ishlab chiqarish bilan band bo'lganlar uchun jon boshiga iste'mol miqdorini anglatadi.

$$\frac{C}{M} = \frac{C}{R}\cdot\frac{R}{M} = x\cdot\omega(x)$$

ifodadan foydalanib quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$f(x) = b\left(\lambda_p + \mu + \frac{\nu}{x}\right) + x\,\omega(x). \qquad (13.13)$$

Endi $\omega(x)$ funksiyaning $0 \le x < x^*$ yarim intervalda mahalliy maksimumini izlaymiz. Tekshirishlar natijasini keltiramiz.

13.3-teorema. *Agar* (13.12) *ob'ekt uchun ushbu*

$$b\left(\lambda_p + \mu\right) + \frac{2b\nu}{x^*} + x^* f'(x^*) < 1 \tag{13.14}$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, unda balanslangan o'sish trayektoriyalari majmuasida (13.2-*teorema bilan taqqoslang*) *jon boshiga iste'mol funksiyasi* $\omega(x)$ *ga maksimal qiymat beradigan trayektoriya mavjud.*

Isbot. (13.13) tenglikning ikki tomonini differensiallaymiz:

$$f'(x) = -\frac{b\nu}{x^2} + \omega(x) + x\frac{d\omega}{dx} \tag{13.15}$$

statsionar nuqtada $d\omega(x)/dx = 0$ bo'lgani uchun shu nuqtada

$$f'(x) = -\frac{b\nu}{x^2} + \omega(x) \tag{13.16}$$

tenglama hosil bo'ladi. Endi (13.15) ni yana differensiallaymiz:

$$f''(x) = -\frac{2b\nu}{x^3} + \frac{d\omega}{dx} + \frac{d\omega}{dx} + \frac{d^2\omega}{dx^2}.$$

Bundan $d\omega(x)/dx = 0$ ni e'tiborga olib, statsionar nuqtada

$$f''(x) = \frac{2b\nu}{x^3} + \frac{d^2\omega}{dx^2} \qquad \text{yoki} \qquad \frac{d^2\omega}{dx^2} = f''(x) - \frac{2b\nu}{x^3} < 0$$

tengsizlikka kelamiz. Shunday qilib, $\frac{d^2\omega}{dx^2} < 0$. Demak, statsionar nuqtada $\omega(x)$ – jon boshiga iste'mol mahalliy maksimumiga erishadi. Statsionar nuqtani topish uchun (13.16) tenglamani $\omega(x)$ ga nisbatan yechamiz va (13.13) ga qo'yamiz

$$f(x) = b\left(\lambda_p + \mu\right) + \frac{2b}{x} + x f'(x), \quad f(0) = 0, \quad f(x^*) = 1. \tag{13.17}$$

Bu tenglama quyidagi xossalarga ega: uning chap tomonidagi funksiya $y = f(x)$ botiq, grafigi koordinata boshidan $f'(+0) > 0$ burchak koeffitsiyent bilan chiqadi va $f(x^*) = 1$. (13.17) tenglamaning o'ng tomoni esa, $x > 0$ da musbat, ammo qavariqligi haqida hech nimani aytib bo'lmaydi. Shunga qaramasdan (13.14) tengsizlik bajarilganda $0 < x \le x^*$ da $y = f(x)$ va $y = b(\lambda_p + \mu) + 2b\nu / x + x f'(x)$ funksiyalar grafiklari o'zaro albatta kesishadi (13.4a,b-chizmalar). Demak, (13.17) tenglama musbat x_0, $0 < x_0 \le x^*$ yechimga ega. (13.14) shart iqtisodiy dinamikaning (13.12) modeli uchun *ishlab chiqarish samaradorligi sharti* deyiladi.

Misol ko'ramiz. $F(M,R) = a_0 M^\alpha R^{1-\alpha}$, $a_0 > 0$, $0 < \alpha < 1$ bo'lsin. Unda $f(x) = a_0 x^{1-\alpha}$. $f(x^*) = 1$ tenglikka ko'ra $x^* = a_0^{1/(\alpha-1)}$. Endi (13.14) tengsizlik

$$b\left(\lambda_p + \mu\right) + 2b\,\nu\, a_0^{1/(\alpha-1)} < \alpha \qquad (13.18)$$

ko'rinishini oladi. Bu samaradorlik shartidir. Endi (13.17) ning o'ng tomonini $\varphi(x)$ deb belgilasak,

$$\varphi(x) = b\left(\lambda_p + \mu\right) + \frac{2b\,\nu}{x} + a_0(1-\alpha)\,x^{1-\alpha} > 0$$

ifodaga ega bo'lamiz. Ravshanki, $\lim\limits_{x\to+0} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$. Bundan $\varphi(x)$ funksiya $(0;+\infty)$ da global minimumga ega ekani kelib chiqadi, ammo $x \in (0; x^*]$. Hisoblashlar ko'rsatadiki, $\varphi'(x) = 0$ tenglamaning yechimi:

$$x_1 = \left(\frac{2b\nu}{a_0(1-\alpha)^2}\right)^{\frac{1}{2-\alpha}} > 0,$$

$\varphi''(x) = 0$ tenglamaning yechimi (13.6-chizma).

$$x_2 = \left(\frac{4b\,\nu}{a_0\alpha(1-\alpha)^2}\right)^{\frac{1}{2-\alpha}} > 0$$

va $x_1 < x_2$ bo'ladi. (13.18) shart bajarilganda $0 < x_1 < x_2 < x^*$ va $0 < x_0 \le x^*$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Agar $\nu = 0$ bo'lsa, 13.1-§ dagi natijalar chiqadi, samaradorlik sharti $\lambda_p + \mu < \frac{\alpha}{b}$ ko'rinishda bo'ladi va $x_0 = \frac{b\cdot(\lambda_p + \mu)}{a_n\alpha} < x^*$ tengsizlik bajariladi.

13-bobga oid masalalar

I. Quyidagi neoklassik IChF uchun (13.1) modelga oid samaradorlik sharti yozilsin va x^* son $f(x^*) = 1$ shartdan topilsin. (13.4) tenglamaning yechimi x_0 topilsin. x_0 va x^* sonlar taqqoslansin:

1. $F(M,R)=\sqrt{MR}$.　　2. $F(M,R)=\sqrt[3]{MR^2}$.

3. $F(M,R)=\sqrt[4]{M^3R}$.　　4. $F(M,R)=\sqrt[5]{MR^4}$.

5. $F(M,R)=\dfrac{2MR}{M+R}$.　　6. $F(M,R)=\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{M}+\sqrt{R}\right)^2$.

7. $F(M,R)=\dfrac{4MR}{\left(\sqrt{M}+\sqrt{R}\right)^2}$.　　8. $F(M,R)=\dfrac{\sqrt{2}MR}{\sqrt{M^2+R^2}}$.

II. I bo'limda berilgan neoklassik IChF uchun $\varphi(u)=u^2$ bo'lganda (13.5) ga oid samaradorlik sharti yozilsin va x^* son $f(x^*)=1$ shartdan topilsin. (13.11) tenglamaning yechimi x_0 topilsin. x_0 va x^* sonlar taqqoslansin.

III. I bo'limda berilgan neoklassik IChF uchun (13.12) modelga oid samaradorlik sharti yozilsin va x^* son $f(x^*)=1$ shartdan topilsin. (13.17) tenglamaning yechimi x_0 topilsin. x_0 va x^* sonlar taqqoslansin.

Eslatma. Agar (13.4), (13.11) va (13.17) tenglamalarni analitik usul bilan yechishning iloji bo'lmasa, tenglamalarni taqribiy yechish usullaridan foydalanilsin.

13-bobga oid nazorat savollari

1. A.A. Petrov va shogirdlarining iqtisodiy dinamika modellarini o'rganish uchun o'ziga xos yondashishi nimadan iborat?

2. A.A. Petrov bo'yicha ICHF xossalarini keltiring.

3. Iqtisodiy dinamikaning mehnat resurslari hajmi eksponensial bo'lganda ishlab chiqarish quvvati chiziqli yaroqsizlanadigan modeli tavsifini keltiring.

4. Eksponensial balanslangan o'sish trayektoriyasining mavjudligi haqidagi teoremani aytib bering.

5. Ishlab chiqarishning samaradorlik sharti nimadan iborat?

6. Iqtisodiy dinamikaning mehnat resurslari (ishchi kuchi) va ishlab chiqarish quvvati chiziqsiz-yaroqsizlangan modeli tavsifini keltiring.

7. 13.2-§ da ko'rilgan model uchun 4 va 5 savollarga javob bering.

8. Iqtisodiy dinamikaning ishchi kuchi chiziqli-botiq funksiya bo'lganda ishlab chiqarish quvvati chiziqli yaroqsizlangan modeli tavsifini bering.

9. 13.2-§ da ko'rilgan model uchun 4 va 5 savollarga javob bering.

10. 13.2-, 13.2- va 13.3-paragraflarda ko'rilgan modellarga misollar keltiring.

ADABIYOTLAR

1. Кристофер Даугерти. Введение в эконометрику. М.: Инфра – М, 1977.

2. Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. Эконометрика. Начальный курс. Академия народного хозяйства при Правительстве Российской Федерации. – М.: "Дело", 1998.

3. Шодиев Т.Ш. и др. Эконометрика. Главная редакция концерна "Шарк", 1999.

4. Nasritdinov G. Ekonometrika (o'quv qo'llanma). O'zMU, Iqtisodiyot fakulteti kichik bosmaxonasi. – T., 2005

5. Шалабанов А.К., Роганов В.А. Эконометрика. Учебно-методическое пособие. Казань, 2004. Академия управления «ТИСБИ».

6. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. Учебник. – М.: «ДИС», 1998.

7. Фостер Р. Обновление производства: атакующие выигрывают. – М.: «Прогресс», 1987.

8. Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А. Опыт математического моделирования экономики. – М.: Энергоатомиздат, 1996.

9. Петров А.А. Математическое моделирование экономического развития. Серия мат., киб-ка. Изд. «Знание», Москва, 1984.

10. Cobb C.W., Douglas P.H. A Theory of Production. – American Economic Review, v.18., N1, 1928.

11. Shell K. Optimal Programs of Capital Accumulation for an Economy in Which There is Exglnous technical Change. – In: Essays on the Theory of Optimal Economic Growth. New York – London, 1967, p.1-30

12. Канторович Л.В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. – М.: Из-во АН СССР, 1959.

13. Немчинов В.С. Экономико-математические методы и модели. – Москва, «Мысль», 1965.

14. Иванилов Ю.П., Лотов А.В. Математические модели в экономике. – М.: «Наука», 1979.

15. Лотов А.В. Введение в экономико-математическое моделирование. – М.: «Наука», 1984.

16. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. – М.: «Наука», 1984.

17. ra6acoB P. KnpujuioBa O.M. MeTOflu onniMHimuHH. Haa-Bo BIT, 1981, MHHCK.

18. noHTparHH JI.C, EOJITHHCKHH B.I\, TaMKpejiHflae P.B., MumeHKo *E.Q>*. MaTeMaTHiecKaa Teopna onxHMaJibHUx npoueccoB. — M.: «HayKa», 1983.

19. EOJITHHCKHH BT. MaTeMaTHMecKHe MeToau oiiTHMajibHoro ynpaBJieHHH. — M.: «Hayxa», 1969.

20. BapKOHOB H.B. HpOH3BOflCTBeHHbie <t>yHKIIHH B MOfleJIflX aKOHOMHHecKoro pocTa. — Hain-Bo Mry, MocKBa, 1981.

21. TepexoB JUL IIpoH3BOflCTBeHHue (pymainH. — M.: «CraTHCTHKa», 1974.

22. Bucuiaa MateMaraKa *nun* SKOHOMHCTOB. Iloa peaaiaiHeH npo<J>. H.III.KpeMepa (KOJIJI. aBT. npocj). H.III.KpeMep, aou. B.A.nyrKo, aou. H.M. TpaniHH, JIOII. M.H.OpHflMaH). — MocKBa, "EaHKH H 6Hpxii", H3fl-e o6MflHHeHHe "IOHHTH", 1977.

23. HacpHTflHHOB T. HcnOJILlOBaHHe TeopHH flH^^PCHUHaJILHLIX ypaBHeHHft B HCCJieflOBaHHH flByXCeKTOpHUX MOflejiett SKOHOMHHeCKOH HHHaMHKH". //MaTepHaJiLi Mexfl. KOH<P. «JjH(J)4>epeHUHaJiLHi>ie ypaBHeHH H HX npHJioxeHHH* B «Tpyaax HHCnnyra MaTeMaraKH H KOMiiMOTepHLix TexHOJioratt*. — Amxa6aT, HJIUM, 1995.

24. HacpHTflHHOB T. OflHoceKTOpHaa Mo^eJiL SKOHOMiraecKoro pocTa c JiHHeftHo-BorHyruM o&beMOM TpynoBux pecypcoB. //Y36. xypHan **«IIpo6jieMU HH(J)opMaTHKH H 3HepreTHKH», H3fl-BO «<I>AH» AH PY3,** JV°3, 1997.

25. HacpHTaHHOB *T.* OflHoceKropHaa MOflejit 3KOHOMHMecKoro pocTa c HeJiHHettHOH 4>yHKUHeft Bbi6biTHH npoH3BoflcTBeHHUX pecypcoB. //Y36. xypHaji *npo6jieMM HH(popMaTHKH H 3HepreTHKH», HSA-BO «OAH» AH PY3, N°6, 1997.

26. HacpHTflHHOB T. OflHoceicropHaa MOfleJib 3KOHOMirqecKoro pocTa c nepeMeHHoft HOPMOH HaKonjieHHfl. //YsS. xypHaji «npo6jieMia **HH4)OpMaTHKH H 3HepreTHKH», H3fl-BO «<DAH» AH PY3, N°4, 1998.**

27. HacpHTflHHOB T. nocTpoeHHe MaracTpajieft AJW eraTHiecKHX npoH3BOflCTBeHHUX <t>ymoiHH. //TesHcu flOKn. Ha Pecny6aHKaHCKOH HayqHOH KOH^)., SKOHOMHMecKHH 4>aKyjiLTeT HYYs, Majiaa THnorpatpiiH. T., 2002.

28. HacpHTflHHOB T., HiHMyxaMefloB A. npHMeHeHHe MeTOfla JiHHe-apiiiauHH fljifl nocTpoeHHa MaracTpanefl o6o6meHHbix npoH3-**BOflCTBeHHUX (JyHKUHH. //Y36. XypHaK «npo6jieMLI HH<J)OpMaTHKH H** 3HepreTHKH», HSA-BO «OAH» AH PY3, N°6, 2002.

29. HacpHTflHHOB T., HniMyxaMefloB A. 3KOHOMHMecKHtt aHajiH3 Ta6jiHiiu 3KOHOMHMecKHX noKaaarerfeii. //Y36. xypHan *IIpo6jieMLi **HH<^OpMaTHKH H 3HepreTHKH», H3fl-BO «<I>AH» AH PY3, M°2, 2005.**

30. HacpHTflHHOB T. PemeHHe sanara noTpe6HTejiLCKoro BLiSopa npH aaaaHHOM HejiHHeftHOM 6iozpKeTHOM orpaHHieHHH. //MaTepHaroi *HaymoA* KOH<p. "CHpaaqniHOBCKHe iTeHHfl", nocBfliueHHoft naMHTH axan. CX-CnpaxuHHOBa (r.TannceHT, 8 Man 2006r.) T., 2006.

31. Arrow K.J., Chenery H.B., Minas B.C., Solow R. Capital-Labor substition and Economic Efficiency. Review of Economics and Statistics, v.45, N2, 1961.

32. Phelps E.S. Golden Rules of Economic Growth. New York, 1966, p.24-30.

MUNDARUA

Kirish ... 3

1-bob. Chiziqli regression model

1.1-§. Korrelatsiyavaregressiyahaqidatushuncha ... 5
1.2-§. Juftiikregressiyavakorrelatsiyaning chiziqli modeli ... 8
1.3-§. Eng kichik kvadratlarusuli (EKKU) va chiziqli regressiyaning empiiik tenglamasi ... 9
1.4-§. Chiziqh regressiyaning asl to'g'ri chizig'i va uni qurishning geometrik usuli ... 13
1.5-§. Chiziqh regressiyaning empirik va asl tenglamalari orasidagi bog'lanish ... 16

2-bob. Chiziqli regressiya tcnglamasini tanlashning sifatini baholash usullari

2.1-§. Umumiybelgilashlar ... 23
2.2-§. Chiziqli regressiya tenglatnasini tanlashning sifatini baholash fonnulalari ... 24
2.3-§. Chiziqli regressiya tenglatnasini tanlash sifatini baholash usullarini qo'llanishgadoirmisollar ... 29

3-bob.Iqtisodiyotdajamlama,o'rtavamarjinalmiqdoriar

3.1-§. Iqtisodr>'otdajamlama,o'rtavamarjinalmiqdorlarta'rifi ... 40
3.2-§. Statistiko'rtamiqdorlarvaiqtisodiy masalalamiyechishning tengsizliklar usuli ... 43
3.3-§. Iqtisodiymasalalarniyechislmmgpozmomlar usuli ... 48

4-bob. Elastiklik tushunchasi va uning masalalarni analiz qilishda qo'lhinishi

4. l-§.Funksiyaelastikligiva uning geometrik ma'nosi ... 57

4.2-§. Elastiklikxossalarivaelementarrunksiyalarningelastikligi................61
4.3-§. Elastiklikintervalivauiringbozoriqtisodiyotigabog'liqligi................64

5-bob. Ishlab chiqarish funksb alari (ICHF) va ularn ing iqtisodiy jarayonlarni o'rganishda tutgan o'rni

5.1-§. Birvako'po'zgaruvchiliICHFhaqida.Eylerteoremalari....................68
5.2-§. Ikki faktorli ICHF.......................73
5.3-§. Ikkifaktorli neoklassikICHFuchunasosiy iqtisodiy-niatematik xarakteristikalar..78
5.4-§. Kobb-Duglas va Solou ICHF uchun o'rtacha mehnat unumdorligi xossalari...85

6-bob. Ishlab chiqarish fiinksiyalari bilan bog'langan masalalarning ekonometrik analizi

6.1-§. Iqtisodiyko'rsatkichlaro'zgarmasbo'Iganhollar..............................90
6.2-§. Funksional iqtisodiy ko'rsatkichlarholi..95
6.3-§. ICHFningizokvantalari,izoklinallarivaizokostalari..........................97
6.4-§. ICHFningmagistrallari. Chiziqlilashtirishusuli..............................102
6.5-§. ICHFko'rinishinimakroiqtisodiyL ,KvaYo'zgaruvchilarningstatistik qiymatlari bo'yicha aniqlash...107

7-bob. **ICHF uchun optimallashtirish masalalari**

7.1-§. Asosiy tushunchalarva masalalarning qo'yilishi.............................115
7.2-§. Foyd^nimaksimallashtirishmasalasi..116
7.3-§. Umunu'yxarajatlarniminimaUashtirishmasalasi..................................118
7.4-§. Iqtisodiyotda optimallashtirish masalalariniyechishningburchak koeffitsiyentlarnitenglashtirishusuli...120

8-bob. Umumlashgan statiklCHF

8.1-§. Umumlashgan statik ICHF haqida..........129
8.2-§. Umumlashgan ikki faktorli neoklassik ICHF uchun asosiy iqtisodiy - matematik xarakteristikalar..134
8.3-§. Umumlashgan iqtisodiy ko'rsatkichlaro'zgarmas bo'lgan hollar....137
8.4-§. Umumlashgan ICHF ning izokvantalari,izoklinallarivaizokostalari.. 140
8.5-§. Umumlashgan ICHF ningmagistrallari..........142

9-bob. Iqtisodiy dinamikaningmatematik modellari

9.l-§. Iqtisodiy dinamikaning modellari haqida 147
9.2-§. Iqtisodiy dinamikaning o'zgarmas jamg'ansh nonnali modeh. mehnat resurslari eksponensial funksiya 151
9.3-§. Iqtisodiy dinamikaning o 'zgarmas jamg'ansh normah modeli: mehnat resurslari hajmichiziqli-botiq funksiya 159
9.4-§. Iqtisodiy dinamikaning o'zgarmas jamg'arish normah modeh: mehnat resurelari hajmi chiziqsiz-bouq funksiya 171

10-bob. Iqtisodiy dinamikaning ishlab chiqansh resurslari chiziqsiz yaroqsizlangan modellari

10.1-§. Mehnat resurslari hajmi eksponensial funksiya 178
10.2-§. Mehnat resurslari hajmi chiziqli-botiq funksiya 182

11- bob. Iqtisodiy dinamikaning ikki sektorli modellari

11.1-§. Mehnat resurslari hajmlariyig'indisi o'zgarmas bo'lganikki sektorh model 188
11.2-§. Mehnat resurslari hajmlari yig'indisi eksponensial funksiya bo'lganikki sektorli model 197
11.3-§. Mehnat resurslari hajmlari yig'indisi chiziqli-botiqbo'lgan ikki sektorh model 200

12-bob. Iqtisodiy dinamikaning o'zgaruvchi jamg'arish normah modellari va magistral teoremalar

12. *l-§*. Iqtisodiy dinamikaning mehnat resurslari hajmi eksponensial funksiya bo'lgan modeli 208
12.2-§. Iqtisodiy dinamikaning mehnat resurslari hajmi chiziqli-botiq modeh 222

13-bob. Iqtisodiy dinamikaning ishlab chiqarish quwatiga asoslangan modellarini o'rganish

13. l-§. Iqtisodiy dinamikaning ishlab chiqarish quwati chiziqii yaroqsizlangan modeh 232

13.2-§. Iqtisodiy dinamikaningishlab chiqarish quwati va ishchikuchi chiziqsiz-yaroqsizlangan modeli 234
13.3-§. Iqtisodiy dinamikaning ishchikuchi chiziqli-botiq, ishlab chiqarish quwati chiziqliyaroqsizlangan modeli 238

Adabiyotlar 244

GAPPAR NASRITDINOV

EKONOMETRIKA. 1

O'quv qo'llanma

Muharrir *H. Teshaboyev*
Kompyuterda sahifalovchi *A.Ro'ziyev*

Bosishga ruxsat etildi 04.04.2008. Qog'oz bichimi 60x84'/$_{16}$.
Hisob-nashr tabog'i 15,75. Adadi 1000.
Buyurtma Ne 101.

«IQTISOD-MOLIYA» nashriyotida tayyorlandi.
100084, Toshkent, Kichik halqa yo'U ko'chasi, 7-uy.
Hisob-shartnoma 51-2008.

«Toshkent tezkor bosmaxonasi» MCHJ da chop etildi
100200. Toshkent, Radial tor ko'chasi 10 uy.