16-mavzu. Matematik dasturlashning dastlabki tushunchalari

Reja:

1. Matematik dasturlashning iqtisodiyotdagi roli.
2. Matematik dasturlash nima bilan shug'ullanadi?
3. Iqtisodiy masalalarning matematik modelini tuzishga doir misollar.

Tayanch iboralar:

Dasturlash, chiziqli dasturlash, model, modellashtirish, matematik model, Iqtisodiy matematik model, chegaraviy shartlar, maqsad funktsiya.

1. Matematik dasturlashning iqtisodiyotdagi roli

Inson faoliyatining turli sohalarida shunday holatlar bo'ladiki, mavjud bo'lgan bir necha variantlar ichidan birini tanlashga to'g'ri keladi. Agar variant yagona bo'lsa, shubhasiz o'sha tanlanadi. Biroq variantlar ko'p bo'lsa, ularning ixtiyoriysi tanlanmaydi, balki ma'lum ma'noda eng yaxshisi, eng samaralisini tanlash maqsadga muvofiq bo'ladi. Odatda bunday variantlar optimal deb ataladi. Optimal so'zi aslida lotincha bo'lib, eng yaxshi (mavjud imkoniyatlar doirasida undan yaxshisi yo'q) eng ma'qul, eng samarali kabi ma'noni anglatadi. Matematik dasturlash fani iqtisodiy masalalarning matematik modelini tuzish, tuzilgan matematik modelning optimal echimini topish va topilgan echimni iqtisodiy tahlil etish bilan shug'ullanadi.

Matematik dasturlash oliy matematika elementlari, chiziqli algebra va geometriyaning ko'plab tasdiq va natijalariga tayanadi. Ayniqsa, chiziqli funktsiya, chiziqli tenglik va tengsizliklar hamda ularning xossalaridan keng ko'lamda foydalaniladi. Shu tufayli ularning ayrim xossa va xususiyatlarini eslatib o'tish o'rinlidir.

Ushbu, $x_1, x_2, ..., x_n$ noma'lumlarga nisbatan chiziqli bo'lgan, ya'ni noma'lumlar faqat o'zining birinchi darajasi bilan qatnashgan

$$z=c_1x_1+c_2x_2+...c_nx_n$$

ko'rinishdagi funktsiya chiziqli funktsiya deb ataladi. Bu yerda $c_1, c_2,...c_n$ - berilgan o'zgarmas, haqiqiy sonlardir.

Shuningdek,

$c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n=k$ munosabat chiziqli tenglik,

$c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n \leq k$ munosabat esa chiziqli tengsizlik deb ataladi. Bu yerda *k*-tayin o'zgarmas son.

Quyidagi tenglamalar sistemasini qaraylik:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2 \\ ------------------------ \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

,

,

bu yerda a_{ij}, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$ - o'zgarmas sonlar. Algebra kursida bu sistema qisman o'rganilgan bo'lib, asosan, $n=m$ bo'lgan holda sistemani echishning turli usullari qaralgan. Gauss-Jordan usuli, determinantlar usuli shular jumlasidandir. Biroq $m<n$ bo'lganda, ya'ni tengliklar soni noma'lumlar sonidan kichik bo'lgan hol sistema echimini izlash nuqtan nazaridan qiziqish uyg'otmagan. Holbuki, bu holda sistemaning echimi cheksiz ko'p bo'lib, ular orasidan ma'lum bir maqsadga muvofig'ini tanlash imkoniyati tug'iladi. Sistemaning bunday xususiyatlari mazkur kursda etarlicha o'rganiladi.

Shuningdek, quyidagi tengsizliklar sistemasini qaraylik:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ ------------------------ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Bu yerda tengsizlik ishorasi aniqlik uchun bir tomonlama qilib olindi, aslida esa ular turlicha bo'lishi mumkin. Umuman olganda (1) tengsizliklar sistemasini qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami: bo'sh to'plam, yagona nuqta, chegaralangan soha va chegaralanmagan sohadan iborat bo'lishi mumkin.

Ma'lumki biror X to'plam qavariq deyiladi, agar u o'zining ixtiyoriy ikki nuqtasi bilan birga ularni tutashtiruvchi kesmani ham o'z ichiga olsa, ya'ni ixtiyoriy $x_1 \in X, x_2 \in X$ va $0 \le \lambda \le 1$ uchun $x(\lambda) = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ ham X ga tegishli bo'lsa.

Qavariq to'plamlar va ularga oid natijalar xususida kursimizda batafsil to'xtalamiz.

2. Matematik dasturlash nima bilan shug'ullanadi?

Bu tajribani o'ziga xos shakli bo'lib, u ob'yektni uning modelida tadqiqot qilishdan iboratdir. Modellashtirishning qisqa klassifikatsiyasi bo'yicha *fizik modellashtirish* va *matematik modellashtirishga* ajratish mumkin.

Model

O'rganilayotgan ob'yektning, jarayonning yoki hodisaning muxim hususiyatlarini, hossalarini aks ettiruvchi yordamchi ob'yekt.

Iqtisodiy – matematik model.

Iqtisodiy jarayon yoki ob'ektni tadqiq etish va boshqarish maqsadida amalga oshirilgan matematik ifodasi bo'lib, echilayotgan iqtisodiy masalaning matematik yozuvini bildiradi.

Modellashtirish

Inson faoliyatining turli sohalarida shunday holatlar bo'ladiki, mavjud bo'lgan bir necha variantlar ichidan birini tanlashga to'g'ri keladi. Agar variant yagona bo'lsa, shubhasiz o'sha tanlanadi. Biroq variantlar ko'p bo'lsa, ularning ixtiyoriysi tanlanmaydi, balki ma'lum ma'noda eng yaxshisi, eng samaralisini tanlash maqsadga muvofiq bo'ladi. Odatda bunday variantlar optimal deb ataladi. Optimal so'zi aslida lotincha bo'lib, eng yaxshi (mavjud imkoniyatlar doirasida undan yaxshisi yo'q) eng ma'qul, eng samarali kabi ma'noni anglatadi. Matematik dasturlash fani iqtisodiy masalalarning matematik modelini tuzish, tuzilgan matematik modelning optimal yechimini topish va topilgan echimni iqtisodiy tahlil etish bilan shug'ullanadi.

3. Iqtisodiy masalalarning matematik modelini tuzishga doir misollarni ko'rib chiqamiz

1) Korxonaning sof foydasi haqida masala.

Faraz qilaylik, korxona stol va stul ishlab chiqaradi. Bir dona stol ishlab chiqarish uchun 0,75 m^3 yog'och, 0,3 kg metall, bir dona stul ishlab chiqarish uchun 0,35 yog'och, 0,1 kg metall zarur bo'lsin. Bir dona stoldan keladigan sof foyda 10 000 so'm, bir dona stuldan keladigan sof foyda 3000 so'mni tashkil etsin. Zahirada 100 m^3 yog'och, 400 kg metall bo'lsa, korxona eng ko'p foyda olishi uchun qanqadan stol va stul ishlab chiqarishi kerak? Masalaning matematik modelini tuzamiz.

Ishlab chiqarilishi zarur bo'lgan stollar sonini x_1, stullar sonini esa x_2 deb belgilaylik.

	stol	Stul	Zaxira
Yog'och	$0{,}75x_1$ m^3	$0{,}3x_2$ m^3	100 m^3
Metal	$0{,}35x_1$ kg	$0{,}1x_2$ kg	400 кг
Foyda	10000 x_1 so'm	$3000x_1$ so'm	

x_1 dona stol va x_2 dona stul ishlab chiqarish uchun zarur bo'ladigan yog'och miqdori 100 m^3 dan, metall miqdori esa 400 kg dan oshmasligi kerak, ya'ni

$$0{,}75x_1 + 0{,}3x_2 \le 100$$
$$0{,}35x_1 + 0{,}1x_2 \le 400$$

Bu holda korxonaning sof foydasi $F = 10000x_1 + 3000x_2$ ga teng bo'ladi. Ko'rilayotgan iqtisodiy masalaning matematik modeli quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{cases} 0{,}75x_1 + 0{,}3x_2 \le 100 \\ 0{,}35x_1 + 0{,}1x_2 \le 400 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$
$$F_{max} = 10000x_1 + 3000x_2$$

Umumiy holda, korxonaning sof foydasi haqidagi iqtisodiy masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0,$$

$$F_{\max} = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

2) Ovqatlanish ratsioni (dieta) haqidagi masala.

Odam organizmi normal faoliyat ko'rsatishi uchun bir sutka davomida 2 litr suv, 300 gr oqsil, 500 gr uglevod, 20 gr yog', 0,1 gr vitamin zarur bo'lsin. 1kg go'sht tarkibida 300gr suv, 500 gr oqsil, 300 gr uglevod, 100 gr yog', 0,05 gr vitamin bo'lsin, 1kg kartoshka tarkibida 500gr suv, 300 gr oqsil, 200 gr uglevod, 0,03 gr vitamin bo'lsin, 1kg piyoz tarkibida 700gr suv, 200 gr oqsil, 150 gr uglevod, 0,02 gr vitamin bo'lsin. 1kg go'sht 9000 so'm, 1kg kartoshka 750 so'm, 1 kg piyoz 800 so'm bo'lsa, organizm uchun kerakli moddalarni o'z ichiga oluvchi ovqat tayyorlash uchun mahsulotlardan eng kam sarf harajat qilib, qanchadan olish kerak?

Masalaning matematik modelini tuzaylik.

Sotib olinishi zarur bo'lgan go'sht birligi miqdorini x_1, kartoshka birligi miqdorini x_2, piyoz birligi miqdorini x_3 orqali belgilaylik.

$$\begin{cases} 300x_1 + 500x_2 + 700x_3 \ge 2000 \\ 500x_1 + 300x_2 + 200x_3 \ge 300 \\ 300x_1 + 200x_2 + 150x_3 \ge 500 \\ 100x_1 \ge 20 \\ 0{,}05x_1 + 0{,}03x_2 + 0{,}02x_3 \ge 0{,}1 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{cases}$$

$$F_{\min} = 9000x_1 + 750x_2 + 800x_3$$

Umumiy holda, dieta haqidagi iqtisodiy masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \ge b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \ge b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \ge b_m \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0,$$

$$F_{\min} = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

3) Iste'mol savati masalasi.

Faraz qilaylik, kishi organizmi uchun bir sutkada *n* xil $A_1, A_2, ..., A_n$ ozuqa moddalari kerak bo'lsin, jumladan A_1 ozuqa moddasidan b_1 miqdorda, A_2 ozuqa moddasidan b_2 miqdorda, A_3 ozuqa moddasidan b_3 miqdorda va hokazo, A_n dan b_n miqdorda zarur bo'lsin va ularni *m* ta $B_1, B_2, ..., B_m$ mahsulotlar tarkibidan olish mumkin bo'lsin, har bir V_i mahsulot tarkibidagi A_j ozuqa moddasining miqdori a_{ij} birlikni tashkil qilsin.

Masalaning berilgan parametrlarini quyidagicha jadvalga joylashtirish mumkin.

ozuqa moddalari / mahsulotlar	A_1	A_2	...	A_n	Mahsulot bahosi
B_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	C_1
B_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	C_2
...	...	...	...	...	...
B_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	C_m
ozuqa moddaning minimal normasi	b_1	b_2	...	b_n	

Masalaning iqtisodiy ma’nosi: iste’mol savatiga qanday mahsulotlardan qanchadan kiritish kerakki, natijada: a) odam organizmi qabul qiladigan ozuqa moddasi belgilangan minimal normadan kam bo’lmasin; b) iste’mol savatining umumiy bahosi minimal bo’lsin.

Iste’mol savatiga kiritiladigan i - mahsulotning miqdorini x_i bilan belgilaymiz. U holda masalaning a) sharti quyidagi tengsizliklar sistemasi orqali ifodalanadi.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{m1}x_m \geq b_1 , \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{m2}x_m \geq b_2 , \\ \text{---------------------------------} \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{mn}x_m \geq b_n . \end{cases} \qquad (2)$$

Masalaning iqtisodiy ma’nosiga ko’ra hamma noma’lumlar manfiy bo’la olmaydi, ya’ni:

$$x_i \geq 0, x_2 \geq 0, ... , x_m \geq 0. \qquad (3)$$

Masaladagi b) shart uning maqsadini ifodalaydi. Demak, masalaning maqsadi iste’mol savatiga kiritiladigan mahsulotlarning umumiy bahosini minimallashtirishdan iborat bo’lib, uni quyidagi chiziqli funktsiya ko’rinishida ifodalash mumkin:

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_mx_m \rightarrow min. \qquad (4)$$

Shunday qilib «iste’mol savati» masalasining matematik modelini

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{m1}x_m \geq b_1 , \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{m2}x_m \geq b_2 , \\ \text{--------------------------------} \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{mn}x_m \geq b_n , \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0, \dots , x_m \geq 0,$$
$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_mx_m \rightarrow min.$$
ko'rinishida bo'lishi mumkin.

4) Optimal bichish masalasi

Faraz qilaylik korxonada m xil mahsulotlar tayyorlash (bichish) kerak bo'lsin, hamda har bir i-mahsulotdan a_i miqdorda tayyorlash rejalashtirilgan bo'lsin. Bu mahsulotlarni tayyorlash uchun n xil xomaki materiallar mavjud bo'lib, har bir j-xomaki materialning uzunligi b_j birlikni tashkil qilsin. Xomaki materiallardan tayyor mahsulot ishlab chiqarish uchun l xil bichish usullarini qo'llash mumkin bo'lsin hamda har bir j-xomaki materialni k-usul bilan bichganda xosil bo'ladigan i-mahsulot miqdori a_{ijk}, chiqindi esa S_{jk} birliklarni tashkil qilsin deb faraz qilamiz.

Masalaning berilgan parametrlarini quyidagi jadvalga joylashtiramiz:

Tayyorlanadigan mahsulot turlari	Xomaki mahsulotlar va ularni kesish usullari													Tayyor mahsulotlarni i/ch rejasi
	B_1				B_2				...	B_n				
	1	2	...	l	1	2	...	l	...	1	2	...	l	
A_1	a_{111}	a_{112}	...	a_{11l}	a_{121}	a_{122}	...	a_{12l}	...	a_{1n1}	a_{1n2}	...	a_{1nl}	a_1
A_2	a_{211}	a_{212}	...	a_{21l}	a_{221}	a_{222}	...	a_{22l}	...	a_{2n1}	a_{2n2}	...	a_{2nl}	a_2
. . .	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
A_m	a_{m11}	a_{m12}	...	a_{m1l}	a_{m21}	a_{m22}	...	a_{m2l}	...	a_{mn1}	a_{mn2}	...	a_{mnl}	a_m
Chiqindilar	C_{11}	C_{12}	...	C_{1l}	C_{21}	C_{22}	..	C_{2l}	..	C_{n1}	C_{n1}	...	C_{nl}	

Xomaki materiallarni qaysi usul bilan bichganda hosil bo'lgan tayyor mahsulotlar miqdori rejadagiga teng bo'ladi, sarf qilingan xom ashyo materiallar miqdori ularning zahirasidan oshmaydi hamda hosil bo'lgan chiqindilarning umumiy miqdori minimal bo'ladi?

k-usul bilan bichiladigan j-xomaki materiallar miqdorini x_{jk} bilan belgilaymiz.

Ushbu belgilashlarda optimal bichish masalasining matematik modeli quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1l} = b_1 , \\ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2l} = b_2 , \\ \text{-------------------------} \\ x_{n1} + x_{n2} + \dots + x_{nl} = b_n , \end{cases} \qquad (5)$$

$$\begin{cases} a_{111}x_{11} + a_{112}x_{12} + \dots + a_{1nl}x_{nl} = a_1 , \\ a_{211}x_{11} + a_{212}x_{12} + \dots + a_{2nl}x_{nl} = a_2 , \\ \text{-----------------------------------} \\ a_{m11}x_{11} + a_{m12}x_{12} + \dots + a_{mnl}x_{nl} = a_m , \end{cases} \qquad (6)$$

$$x_{jk} \geq 0, (j=1, \dots , n; \ k=1, \dots , l) \qquad (7)$$

$$Y = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} C_{jk}\, x_{jk} \to min. \qquad (8)$$

Bu yerda (5) shart mavjud xomaki materiallarning hammasi kesilishi kerakligini, (6) shart tayyor mahsulotlar ishlab chiqarish bo’yicha rejani to’la bajarish zarurligini ko’rsatadi.

Masalaning iqtisodiy ma’nosiga ko’ra undagi noma’lumlarning manfiy bo’laolmasligi (7) shart orqali ifodalanadi. (8) shart masalaning maqsadidan iborat bo’lib, u homaki materiallarni kesishdan hosil bo’ladigan chiqindilarni eng kam (minimal) bo’lishini ta’minlaydi.

Endi optimal bichish masalasining eng sodda holi bilan tanishamiz.

Deylik, uzunligi L bo’lgan xomaki materiallardan uzunliklari Δ_i $(i=\overline{1,m})$ bo’lgan m xil detallarning har biridan a_i miqdorda tayyorlash kerak bo’lsin. Bundan tashqari xomaki materiallarni n $(j = \overline{1,n})$ usul bilan kesish hamda har bir j-usul bilan kesilgan xomaki materialdan a_{ij} miqdorda i-detal tayyorlash va c_j miqdorda chiqindi hosil qilish mumkin ekanligi aniqlangan bo’lsin.

Xomaki materiallardan qanchasini qaysi usul bilan kesganda tayyorlangan detallar miqdori rejadagiga teng bo’ladi va hosil bo’lgan chiqindilarning umumiy miqdori eng kam (minimal) bo’ladi.

Masalaning ma’lum parametrlarini quyidagi ko’rinishdagi jadvalga joylashtiramiz:

Tayyorlanadigan detallarning uzunliklari	Kesish usullari				Detallar ishlab chiqarish rejasi
	1	2	...	n	
Δ_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	a_1
Δ_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	a_2
. . .	...	...	...	...	...
Δ_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	a_m
Chiqqindilar miqdori	c_1	c_2	...	c_n	

j-usul bilan kesiladigan xomaki materiallar miqdorini x_j bilan belgilaymiz. U holda masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = a_1 , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = a_2 , \\ \text{--------------------------------} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_m = a_m , \end{cases} \qquad (9)$$

$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \dots , x_n \geq 0, \qquad (10)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow min. \qquad (11)$$

Bu yerda (9) shart har bir tayyor mahsulot bo'yicha reja to'liq bajarilishi kerakligini, (10) shart noma'lumlarning nomanfiyligini va (11) shart chiqindilarning umumiy miqdori minimal bo'lishini ko'rsatadi.

1-misol. Uzunligi 110 sm. bo'lgan po'lat xipchinlardan uzunliklari 45 sm, 35 sm va 50 sm bo'lgan xomaki mahsulotlar tayyorlash kerak bo'lsin. Talab qilingan xomaki mahsulotlar miqdori mos ravishda 40, 30 va 20 birlikni tashkil qilsin. Po'lat xipchinlarni kesish yo'llari va ularga mos keluvchi xomaki mahsulotlar va chiqindilar miqdori quyidagi jadvalda keltirilgan.

Xomaki mahsulotlar uzunligi	Kesish usullari						Xomaki mah-sulotlar i/ch rejasi
	1	2	3	4	5	6	
45 sm.	2	1	1	-	-	-	40
35 sm.	-	1	-	3	1	-	30
50 sm.	-	-	1	-	1	2	20
Chiqindilar	20	30	15	5	25	10	

Har bir kesish usuli bo'yicha qancha po'lat xipchinlar kesilganda tayyorlangan xomaki mahsulotlar miqdori rejadagiga teng bo'ladi va chiqindilarning umumiy miqdori minimal bo'ladi?

Yechish. j - usul bilan kesiladigan po'lat xipchinlar sonini x_j bilan belgilaymiz. U holda uzunligi 45 sm bo'lgan xomaki mahsulotlardan ja'mi

$$2x_j + x_2 + x_3$$

miqdorda tayyorlanadi. Rejaga ko'ra bunday mahsulotlar soni 40 taga teng bo'lishi kerak, ya'ni

$$2x_j + x_2 + x_3 = 40 .$$

Xuddi shuningdek, uzunliklari 35 sm. va 50 sm. bo'lgan xomaki mahsulotlarni ishlab chiqarish rejasini to'la bajarilishidan iborat shartlar mos ravishda

$$x_2 \quad + 3x_4 + x_5 = 30$$

va

$$x_3 \qquad + x_5 + 2x_6 = 20$$

tenglamalar orqali ifodalanadi.

Iqtisodiy ma'nosiga ko'ra belgilangan noma'lumlar manfiy bo'la olmaydi, demak

$$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0, \ldots, x_6 \geq 0 .$$

Rejadagi xomaki mahsulotlarni ishlab chiqarishda hosil bo'lgan chiqindilarning umumiy miqdorini quyidagi chiziqli funktsiya ko'rinishida ifodalaymiz.

$$Y = 20x_1 + 30x_2 + 15x_3 + 5x_4 + 25x_5 + 10x_6.$$

Masalaning shartiga ko'ra bu funktsiya minimum qiymatni qabul qilishi kerak, ya'ni

$$Y = 20x_1 + 30x_2 + 15x_3 + 5x_4 + 25x_5 + 10x_6 \to min.$$

Shunday qilib, quyidagi chiziqli dasturlash masalasiga ega bo'lamiz.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 40, \\ x_2 + 3x_4 + x_5 = 30, \\ x_3 + x_5 + 2x_6 = 20, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0,\ \ x_5 \geq 0, x_6 \geq 0,$$

$$Y = 20x_1 + 30x_2 + 15x_3 + 5x_4 + 25x_5 + 10x_6 \to min.$$

Hosil bo'lgan ifoda optimal bichish masalasining matematik modelidan iborat bo'ladi.

2-misol. Konditer fabrikasi uch turdagi A, V, S karamellarni ishlab chiqarish uchun uch xil xom ashyo: shakar, qiyom va quruq mevalar ishlatadi. 1 tonna karamel turlarini ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan xom ashyolar miqdori (me'yori), xom ashyolarning zahirasi hamda 1 tonna karamelni sotishdan olinadigan daromad quyidagi jadvalda keltirilgan.

Xom ashyo turlari	1 tonna mahsulotga xom ashyo sarfi (t.hisobida)			Xom ashyo zahirasi (tonna)
	A	B	C	
shakar	0,8	0,5	0,6	800
qiyom	0,4	0,4	0,3	600
quruq mevalar	-	0,1	0,1	120
1 t karamel sotishdan olinadigan daromad(shartli birlik)	108	112	126	

Fabrikaga maksimal foyda keltiruvchi karamel ishlab chiqarish rejasini toping.

Yechish: Konditer fabrikasida *A* turdagi karameldan x_1 miqdorda, B turdagi karameldan x_2 miqdorda va C turdagi karameldan x_3 miqdorda ishlab chiqarilsin deb belgilaymiz. U holda fabrikada ishlab chiqariladigan barcha karamellar uchun

$$0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}6x_3$$

miqdorda shakar sarf qilinadi. Bu miqdor shakarning zahirasidan, ya'ni 800 tonnadan oshmasligi kerak. Demak,

$$0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}6x_3 \le 800$$

tengsizlik o'rinli bo'lishi kerak. Xuddi shunday yo'l bilan mos ravishda qiyom va quruq mevalar sarfini ifodalovchi quyidagi tengsizliklarni hosil qilish mumkin:

$$0{,}4x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}3x_3 \le 600,$$

$$0{,}1x_2 + 0{,}1x_3 \le 120.$$

Fabrika ishlab chiqargan *A* karameldan $108x_1$, *V* karameldan - $112x_2$, S karameldan - $126x_3$ birlik va ja'mi

$$108x_1 + 112x_2 + 126x_3$$

birlik daromad oladi. Bu yig'indini *Y* bilan belgilab uni maksimumga intilishini talab qilamiz. natijada quyidagi funktsiyaga ega bo'lamiz:

$$Y = 108x_1 + 112x_2 + 126x_3 \rightarrow max$$

Shunday qilib, berilgan masalaning matematik modelini quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}6x_3 \le 800, \\ 0{,}4x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}3x_3 \le 600, \\ 0{,}1x_2 + 0{,}1x_3 \le 120, \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0, \end{cases}$$

$$Y = 108x_1 + 112x_2 + 126x_3 \rightarrow max.$$

3-misol. Odam organizmi uchun bir sutkada *A* ozuqa moddasidan 12 birlik, *B* ozuqa moddasidan esa 16 birlik kerak bo'lsin. Bu ozuqa moddalarni P_1, P_2 mahsulotlar tarkibidan olish mumkin bo'lsin.

Bir birlik P_1, P_2 mahsulotlar tarkibidagi *A* va *B* ozuqa moddalarining miqdori, mahsulotlar bahosi quyidagi jadvalda keltirilgan:

Mahsulotlar / Ozuqa moddalari	Bir birlik mahsulotlar tarkibidagi turli ozuqa moddalarining miqdori		Ozuqa moddalarining minimal normasi
	P_1	P_2	
A	0,2	0,2	12
B	0,4	0,2	16
Mahsulotlar bahosi	2	4	

Bir kunlik ovqatlanish rejasini qanday tuzganda odam organizmi kerakli ozuqa moddalarni minimal normadan kam qabul qilmaydi hamda sarf qilingan harajatlar eng kam (minimal) bo’ladi?

Yechish: 1 sutkada ovqatlanish uchun sarf qilinadigan P_1 mahsulot miqdorini x_1 bilan, P_2 mahsulot miqdorini esa x_2 bilan belgilaymiz.

U holda odam organizmi A ozuqa moddasidan hammasi bo’lib

$$0{,}2x_1 + 0{,}2x_2$$

miqdorda qabul qiladi. Shartga ko’ra bu miqdor minimal norma 12 dan kam bo’lmasligi kerak, ya’ni

$$0{,}2x_1 + 0{,}2x_2 \geq 12.$$

Xuddi shunday yo’l bilan B ozuqa moddasi uchun

$$0{,}4x_1 + 0{,}2x_2 \geq 16$$

tengsizlikni hosil qilamiz.

Masalaning iqtisodiy ma’nosiga ko’ra masaladagi noma’lumlar manfiy bo’lmasligi kerak, ya’ni

$$x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0.$$

Masalaning maqsadi ovqatlanish uchun sarf qilingan harajatlarni minimallashtirishdan iborat.

1 sutkada sarf qilingan P_1 mahsulot uchun $2x_1$ birlik, P_2 mahsulot uchun $4x_2$ birlik va ja’mi

$$Y=2x_1 + 4x_2$$

miqdorda harajat sarf qilinadi. x_1 va x_2 noma’lumlarning shunday qiymatlarini topish kerakki, ular Y funktsiyaga eng kichik (minimum) qiymat bersin, ya’ni

$$Y = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow min$$

shart bajarilsin.

Shunday qilib, berilgan masalaning matematik modelini quyidagi ko’rinishda yozish mumkin.

$$\begin{cases} 0{,}2x_1 + 0{,}2x_2 \geq 12, \\ 0{,}4x_1 + 0{,}2x_2 \geq 16, \\ x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0, \end{cases}$$
$$Y = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow min.$$

Nazorat savollari

1. Matematik dasturlashning predmeti nimadan iborat?
2. Iqtisodiy masalaning matematik modeli nima va u qanday tuziladi?
3. Chiziqli dasturlash masalasining chegaralovchi shartlari qanday ko’rinishda bo’lishi mumkin?
4. Ishlab chiqarishni rejalashtirish masalasidagi noma’lumlar, asosiy shartlar va maqsad funktsiya qanday ma’noni bildiradi?
5. «Iste’mol savati» masalasidagi noma’lumlar, asosiy shartlar va maqsad funktsiya qanday ma’noni bildiradi?
6. «Optimal bichish» masalasidagi noma’lumlar, asosiy shartlar va maqsad funktsiya qanday ma’noni bildiradi?

17-mavzu. Chiziqli dasturlash masalasining umumiy qo'yilishi va uning turli formada ifodalanishi

Reja:

1. Chiziqli dasturlash masalasining umumiy qo'yilishi
2. Chiziqli dasturlash masalasining turli formada ifodalanishi

Tayanch iboralar:

chegaraviy shartlar, maqsad funktsiya, joiz reja, bazis yechim (reja), aynigan(xos) bazis reja, aynimagan bazis reja, optimal reja, qo'shimcha o'zgaruvchi, vektorlarning qavariq kombinatsiyasi, qavariq to'plam, qavariq to'plamning burchak nuqtasi.

Chiziqli dasturlash masalasi umumiy holda quyidagicha ifodalanadi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \geq (\leq)\, b_1 \, , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \geq (\leq)\, b_2 \, , \\ ----------------------------------- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \geq (\leq)\, b_m \, , \end{cases} \qquad (1)$$

$$x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0, ... , x_n \geq 0, \qquad (2)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \rightarrow min(max). \qquad (3)$$

(1) va (2) shartlarni qanoatlantiruvchi noma'lumlarning shunday qiymatlarini topish kerakki, ular (3) chiziqli funktsiyaga minimal (maksimal) qiymat bersin. Masalaning (1) va (2) cheklamalari uning **chegaraviy shartlari** deb, (3) chiziqli funktsiya esa masalaning **maqsadi** yoki **maqsad funktsiyasi** deb ataladi.

Masaladagi barcha cheklamalar shartlar va maqsad funktsiya chiziqli ekanligi ko'rinib turibdi. Shuning uchun ham (1) - (3) masala **chiziqli dasturlash** masalasi deb ataladi.

Konkret masalalarda (1) shart tenglamalar sistemasidan, «$\geq$» yoki «$\leq$» ko'rinishdagi tengsizliklar sistemasidan yoki aralash sistemadan iborat bo'lishi mumkin. Lekin ko'rsatish mumkinki, (1)-(3) ko'rinishdagi masalani osonlik bilan quyidagi ko'rinishga keltirish mumkin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \, , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \, , \\ -------------------------------- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \, , \end{cases} \qquad (4)$$

$$x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0, ... , x_n \geq 0, \qquad (5)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \rightarrow min. \qquad (6)$$

(4)-(6) ko'rinish chiziqli dasturlash masalasining kanonik ko'rinishi deb ataladi. Bu masala vektorlar yordamida quyidagicha ifodalanadi:

$$P_1x_1 + P_2x_2 + \dots + P_nx_n = P_0 \;, \qquad (7)$$

$$X \geq 0 \;, \qquad (8)$$

$$Y = C'X \to min. \qquad (9)$$

bu yerda

$$P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \quad \dots, \quad P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

$C = (c_1, c_2, \dots , c_n)$ - vektor - qator.
$X = (x_1, x_2, \dots , x_n)$ - vektor - ustun.
(4)-(6) masalaning matritsa ko'rinishdagi ifodasi quyidagicha yoziladi:

$$AX = P_0, \qquad (10)$$

$$X \geq 0, \qquad (11)$$

$$Y = C'X \to min, \qquad (12)$$

bu yerda $C = (c_1, c_2, \dots , c_n)$ -qator vektor, $A = (a_{ij})$ - (4) sistema koeffitsientlaridan tashkil topgan matritsa; $X = (x_1, x_2, \dots , x_n)$ va $R_0=(b_1, b_2, \dots , b_n)$ - ustun vektorlar.

(4)-(6) masalani yig'indilar yordamida ham ifodalash mumkin:

$$\sum_{j=1} a_{ij}\, x_j = b_i, \qquad (i=1, \dots , m) \qquad (13)$$

$$x_j \geq 0, \qquad (j=1, \dots , n) \qquad (14)$$

$$Y = \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j \to min. \qquad (15)$$

1-ta'rif. Berilgan (4)-(6) masalaning joiz yechimi yoki rejasi deb, uning (4) va (6) shartlarini qanoatlantiruvchi $X=(x_1, x_2, \dots , x_n)$ vektorga aytiladi.

2-ta'rif. Agar joiz rejalar to'plamiga tegishli bo'lgan X^0 vektorning n-m ta koordinatasi (n – noma'lumlar soni, m – tenglamalar soni) nolga teng bo'lib, qolgan m ta koordinatalariga mos kelgan shart vektorlar(masalan, P_{n+1}, $P_{n+2}, \dots, P_{n+m}$ vektorlar) chiziqli erkli bo'lsa, u holda X^0 joiz reja bazis(asosiy) reja deyiladi.

3-ta'rif. Agar $X=(x_1, x_2, \dots , x_n)$ bazis rejadagi musbat koordinatalar soni m ga teng bo'lsa, u holda bu reja aynimagan bazis reja, aks holda aynigan bazis reja deyiladi.

4-ta'rif. Chiziqli funktsiya (6) ga eng kichik qiymat beruvchi $X=(x_1, x_2, \dots , x_n)$ bazis reja masalaning optimal rejasi yoki optimal yechimi deyiladi.

Chiziqli dasturlash masalasi ustida quyidagi teng kuchli almashtirishlarni bajarish mumkin.

1. *maxY* ni *minY* ga aylantirish. Har qanday chiziqli dasturlash masalasini kanonik ko'rinishga keltirish uchun (1) tengsizliklar sistemasini tenglamalar sistemasiga va *maxY* ni *minY* ga aylantirish kerak. *maxY* ni *minY* ga keltirish

uchun, *maxY* ni teskari ishora bilan olish, ya'ni *-maxY=minY* yoki *maxY=-minY* ko'rinishda olish etarlidir.

Haqiqatdan ham, har qanday $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funktsiyaning minimumi teskari ishora bilan olingan shu funktsiya maksimumining qiymatiga teng, ya'ni

$$minf(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ va } - max[f(x_1, x_2, \dots, x_n)],$$
$$maxf(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ va } - min[f(x_1, x_2, \dots, x_n)]$$

ifodalar noma'lumlarning bir xil qiymatlaridagina o'zaro teng bo'lishini ko'rsatish mumkin.

2. Tengsizliklarni tenglamaga aylantirish. *n* noma'lumli

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \le b \qquad (16)$$

chiziqli tengsizlikni qaraymiz. Bu tengsizlikni tenglamaga aylantirish uchun uning kichik tomoniga nomanfiy o'zgaruvchini, ya'ni $x_{n+1} \ge 0$ ni qo'shamiz.

Natijada $n+1$ noma'lumli chiziqli tenglamaga ega bo'lamiz:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + x_{n+1} = b \qquad (17)$$

(16) tengsizlikni tenlamaga aylantirish uchun qo'shilgan x_{n+1} o'zgaruvchi <u>qo'shimcha</u> o'zgaruvchi deb ataladi.

(16) tengsizlik va (17) tenglamaning yechimlari bir xil ekanligi quyidagi teoremada ko'rsatilgan.

1-teorema. Berilgan (16) tengsizlikning har bir $X=(\alpha_1, \alpha_2,\dots,\alpha_n)$ yechimiga (17) tenglamaning faqat bitta

$$Y_0 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1})$$

yechimi mos keladi va aksincha, (17) tenglamaning har bir Y_0 yechimiga (16) tengsizlikning faqat bitta X_0 yechimi mos keladi.

Teorema isboti. Faraz qilaylik, X_0 (16) tengsizlikning yechimi bo'lsin. U holda $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n \le b$ munosabat o'rinli bo'ladi. Tengsizlikning chap tomonini o'ng tomonga o'tkazib hosil bo'lgan ifodani α_{n+1} bilan belgilaymiz

$$0 \le b - (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n) = \alpha_{n+1}.$$

Endi $Y_0 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1})$ vektorni (17) tenglamaning yechimi ekanligini ko'rsatamiz.

$$a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\dots+a_n\alpha_n+\alpha_{n+1}=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\dots+a_n\alpha_n+(b-a_1\alpha_1-a_2\alpha_2-\dots-a_n\alpha_n)=b.$$

Endi agar Y_0 (17) tenglamani qanoatlantirsa, u holda u (16) tengsizlikni ham qanoatlantirishini ko'rsatamiz.

Shartga ko'ra:

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n + \alpha_{n+1} = b,$$
$$\alpha_{n+1} \ge 0.$$

Bu tenglamadan $\alpha_{n+1} \ge 0$ sonni tashlab yuborish natijasida

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n \le b$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Bundan ko'rinadiki, $X_0 = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T$ (16) tengsizlikning yechimi ekan.

Shunday yo'l bilan chiziqli dasturlash masalasining cheklamalaridagi tengsizliklarni tenglamalarga aylantirish mumkin. Bunda shunga e'tibor berish kerakki, sistemadagi turli tengsizliklarni tenglamalarga aylantirish uchun ularga bir-birlaridan farq qiluvchi nomanfiy o'zgaruvchilarni qo'shish kerak. Masalan, agar chiziqli dasturlash masalasi quyidagi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \text{--------------------------------} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \qquad (18)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0, \qquad (19)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to max \qquad (20)$$

ko'rinishda bo'lsa, bu masaladagi tengsizliklarning kichik tomoniga $x_{n+1} \ge 0$, $x_{n+2} \ge 0, \ldots, x_{n+m} \ge 0$ qo'shimcha o'zgaruvchilar qo'shish yordamida tenglamalarga aylantirish mumkin. Bu o'zgaruvchilar $Y=C'X$ ga 0 koeffitsient bilan kiritiladi. Natijada berilgan (18)-(20) masala quyidagi ko'rinishga keladi.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \qquad + x_{n+2} = b_2, \\ \text{--} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \qquad\qquad + x_{n+m} = b_m, \end{cases} \qquad (21)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0, x_{n+1} \ge 0, \ldots, x_{n+m} \ge 0, \qquad (22)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + O(x_{n+1} + \ldots + x_{n+m}) \to max \qquad (23)$$

Xuddi shuningdek,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ge b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_m \ge b_2, \\ \text{--------------------------------} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ge b_m, \end{cases} \qquad (24)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0, \qquad (25)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to min. \qquad (26)$$

ko'rinishda berilgan chiziqli dasturlash masalasini kanonik ko'rinishga keltirish mumkin. Buning uchun qo'shimcha $x_{n+1} \geq 0,\ x_{n+2} \geq 0,\ ...,\ x_{n+m} \geq 0$ o'zgaruvchilar tengsizliklarning katta tomonidan ayriladi. Natijada quyidagi masala hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1\ , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \quad - x_{n+2} = b_2\ , \\ \text{---} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n - x_{n+m} = b_m\ , \end{cases} \qquad (27)$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, ...,\ x_n \geq 0, \qquad x_{n+1} \geq 0, ...,\ x_{n+m} \geq 0, \qquad (28)$$

$$Y = c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n+O(x_{n+1}+...+x_{n+m}) \rightarrow min. \qquad (29)$$

Endi chiziqli dasturlash masalasi yechimlarining xossalari bilan tanishamiz. Buning uchun eng avval qavariq kombinatsiya va qavariq to'plam tushunchasini eslatib o'tamiz.

5-ta'rif. $A_1, A_2, ..., A_n$ vektorlarning qavariq kombinatsiyasi deb

$$\alpha_i \geq 0, \qquad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1,\ i = \overline{1,n}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi

$$A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + ... + \alpha_n A_n$$

vektorga aytiladi. n - o'lchovli fazodagi har bir $A = (a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n)$ vektorga koordinatalari $(a_1,\ a_2,\ ...\ ,a_n)$ bo'lgan nuqta mos keladi. Shuning uchun bundan keyin $A =(a_1, a_2, ... ,a_n)$ vektorni n - o'lchovli fazodagi nuqta deb qaraymiz.

6-ta'rif. Agar n - o'lchovli vektor fazodagi C to'plam o'zining ixtiyoriy A_1 va A_2 nuqtalari bilan bir qatorda bu nuqtalarning qavariq kombinatsiyasidan iborat bo'lgan $A = \alpha_1 A_1+\alpha_2 A_2$ $(\alpha_1>0,\ \alpha_2>0,\ \alpha_1+\alpha_2=1)$ nuqtani ham o'z ichiga olsa, ya'ni $A_1, A_2 \in C \Rightarrow A \in C$ bo'lsa, bu to'plam qavariq to'plam deb ataladi.

2-teorema. Chiziqli dasturlash masalasining mumkin bo'lgan rejalaridan tashkil topgan to'plam qavariq to'plam bo'ladi.

Isboti. Chiziqli dasturlash masalasining ixtiyoriy ikkita mumkin bo'lgan rejasining qavariq kombinatsiyasi ham reja ekanligini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, X_1 va X_2 berilgan chiziqli dasturlash masalasining mumkin bo'lgan rejalari bo'lsin. U holda

$$AX_1 = P_0\ , \quad X_1 \geq 0, \qquad (30)$$

va

$$AX_2 = P_0\ , \quad X_2 \geq 0, \qquad (31)$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi. Endi x_1 va x_2 rejalarning qavariq kombinatsiyasini tuzamiz.

$$X = \alpha x_1+(1-\alpha)x_2\ ,\ 0 \leq \alpha \leq 1,$$

hamda uni reja ekanligini ko'rsatamiz:

$$AX = A[\alpha x_1+(1-\alpha)x_2] = \alpha Ax_1+(1-\alpha)Ax_2$$

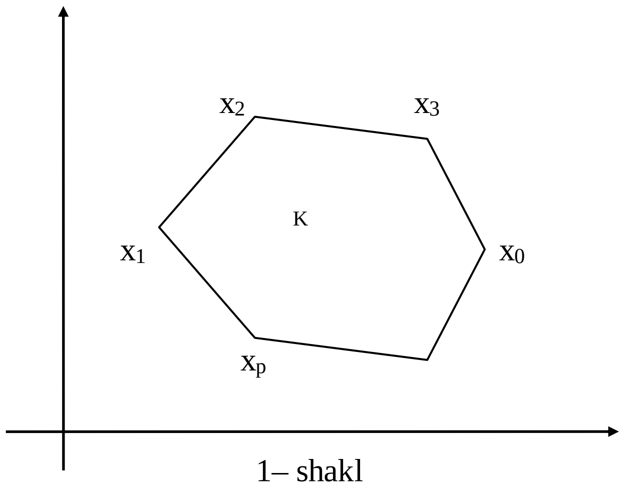
Endi (1.43) va (1.44) tenglamalarni inobatga olib topamiz:

$$AX = \alpha R_0+(1-\alpha)R_0 = P_0$$

Bu munosabat X vektor ham reja ekanligini ko'rsatadi.

3-teorema. Chiziqli dasturlash masalasining maqsad funktsiyasi o'zining optimal qiymatiga shu masalaning rejalaridan tashkil topgan qavariq to'plamning burchak nuqtasida erishadi. Agar chiziqli funktsiya K qavariq to'plamning birdan ortiq burchak nuqtasida optimal qiymatga erishsa, u shu nuqtalarning qavariq kombinatsiyasidan iborat bo'lgan ixtiyoriy nuqtada ham o'zining optimal qiymatiga erishadi.

Isboti. Deylik, X_0 nuqta chiziqli funktsiyaga ekstremum qiymat beruvchi nuqta bo'lsin. Agar X_0 nuqta burchak nuqta bo'lsa, u holda teorema o'z-o'zidan isbot qilingan bo'ladi. Faraz qilaylik, X_0 nuqta K qavariq to'plamning ichki nuqtasi, $x_1, x_2, \ldots, x_r$ nuqtalar esa uning burchak nuqtalari bo'lsin (1-shakl):



1– shakl

X_0 nuqta chiziqli funktsiyaga minimum qiymat beruvchi nuqta bo'lganligi sababli

$$Y(X_0) \le Y(X)$$

tengsizlik ixtiyoriy $X \in K$ uchun o'rinli bo'ladi. X_0 nuqta ichki nuqta bo'lganligi uchun uni burchak nuqtalarning qavariq kombinatsiyasi orqali ifodalash mumkin:

$$X_0 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_i, \quad \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \ge 0 \quad (i = \overline{1, p}) \qquad (32)$$

$Y(X)$ chiziqli funktsional bo'lganligi sababli

$$Y(X_0) = Y(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_r X_r) = \alpha_1 Y(X_1) + \\ + \alpha_2 Y(X_2) + \ldots + \alpha_p Y(X_p) = m, \qquad (33)$$

bu yerda m har qanday $X \in K$ uchun funktsiyaning minimal qiymati.

(33) tenglikdagi har bir $Y(X_i)$ ni

$$\min Y(X_i) = Y(X_m)$$

bilan almashtirib quyidagi tengsizlikni hosil qilamiz:

$$Y(X_0) \geq \alpha_1 Y(X_m) + \alpha_2 Y(X_m) + \dots + \alpha_p Y(X_m) =$$
$$Y(X_m)(\alpha_p + \dots + \alpha_p) = Y(X_m) \quad ,$$

ya'ni

$$Y(X_0) \geq Y(X_m).$$

Bu tengsizlikni (33) tenglik bilan solishtirib quyidagiga ega bo'lamiz

$$Y(X_0) = Y(X_m) = m.$$

Demak, X_m burchak nuqtada chiziqli funktsiya o'zining minimal qiymatiga erishar ekan.

Endi maqsad funktsiya o'zining minimal qiymatiga X_1, X_2, ... , X_r nuqtalarda erishsin, ya'ni

$$Y(X_1) = Y(X_2) = \dots = Y(X_r) = m$$

shart o'rinli bo'lsin deb faraz qilamiz. Bu nuqtalarning qavariq kombinatsiyasidan iborat bo'lgan X nuqtani qaraymiz.

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_r X_r$$
$$\alpha_i \geq 0 \ (i = \overline{1,p}),$$
$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$$

U holda

$$Y(X) = Y(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_r x_r) = \alpha_1 Y(X_1) + \alpha_2 Y(X_2) + \dots +$$
$$+ \alpha_p Y(X_p) = m\,(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r) = m$$

Demak, maqsad funktsiya X nuqtada ham minimum qiymatga erishar ekan. Shu bilan teorema isbot qilindi.

4-teorema. Agar k ta o'zaro chiziqli bog'liq bo'lmagan $P_1, P_2, \dots, P_k$ vektorlar berilgan bo'lib, ular uchun

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 + \dots + P_k x_k = R_0 \qquad (34)$$

tenglik barcha $x_i \geq 0$ lar uchun o'rinli bo'lsa, u holda

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$$

vektor K qavariq to'plamning burchak nuqtasi bo'ladi.

Isboti. Ma'lumki (34) tenglikni qanoatlantiruvchi nomanfiy koordinatali $X=(x_1, x_2, \dots, x_k)$ vektor chiziqli dasturlash masalasining rejasi bo'ladi. Deylik X burchak nuqta bo'lmasin. U holda X rejani X_1 va X_2 burchak nuqtalarning qavariq kombinatsiyasi orqali ifodalash mumkin, ya'ni

$$X = \alpha_1 X_1 + (1-\alpha_1) X_2,$$
$$0 \leq \alpha_1 \leq 1.$$

X vektorning n-k ta komponentasi nolga teng bo'lib, X_1 va X_2 vektorlarning koordinatalari musbat va $0 \leq \alpha_1 \leq 1$ tengsizlik o'rinli bo'lganligi sababli X_1 va X_2 vektorlarning ham n-k ta koordinatasi noldan iborat bo'ladi, ya'ni

$$X_1 = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_k^{(1)}, 0, 0 \dots 0),$$
$$X_2 = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_k^{(2)}, 0, 0 \dots 0).$$

X_1 va X_2 vektorlar chiziqli dasturlash masalasining rejalari, shuning uchun

$$AX_1 = P_0,$$

$$AX_2 = P_0$$

tengliklar o'rinli bo'ladi. Bu shartlarni quyidagi formada ¸zamiz:

$$P_1x_1^{(1)} + P_2x_2^{(1)}+... + P_kx_k^{(1)} = P_0$$
$$P_1x_1^{(2)} + P_2x_2^{(2)}+... + P_kx_k^{(2)} = P_{0,}$$

Ma'lumki, P_0 vektorning o'zaro chiziqli bog'liq bo'lmagan $P_1, P_2, ..., P_k$ vektorlar orqali faqat bitta ¸yilmasini topish mumkin. Shuning uchun

$$x_i = x_i^{(1)} = x_i^{(2)}$$

Demak, X vektorni K to'plamning ixtiyoriy ikkita nuqtasining qavariq kombinatsiyasi orqali ifodalash mumkin emas ekan. Bundan X nuqta K to'plamning burchak nuqtasi bo'ladi degan xulosa kelib chiqadi. Shu bilan teorema isbot qilindi.

5-teorema. Agar $X=(x_1, x_2, ... , x_n)$ burchak nuqta bo'lsa, u holda musbat x_i larga mos keluvchi vektorlar o'zaro chiziqli erkli vektorlar sistemasini tashkil qiladi (teoremani isbotsiz qabul qilamiz).

Yuqorida keltirilgan teoremalardan quyidagi xulosalarni chiqarish mumkin.

1-xulosa. K to'plamning har bir burchak nuqtasiga $P_1, P_2, ..., P_n$ vektorlar sistemasidan m ta o'zaro chiziqli erkli vektorlar sistemasi mos keladi.

2-xulosa. $X=(x_1, x_2, ... , x_n)$ K to'plamning burchak nuqtasi bo'lishi uchun musbat x_i koordinatalar

$$P_1x_1 + P_2x_2 + ... + P_nx_n = P_0$$

yoyilmada o'zaro chiziqli bog'liq bo'lmagan P_i vektorlarning koeffitsi-entlaridan iborat bo'lishi zarur va etarli.

3-xulosa. Chiziqli dasturlash masalasi bazis yechimlaridan tashkil topgan to'plam K qavariq to'plamning burchak nuqtalar to'plamiga mos keladi va aksincha, har bir bazis echim K to'plamning biror burchak nuq-tasiga mos keladi.

4-xulosa. Chiziqli dasturlash masalasining optimal yechimini K to'plamning burchak nuqtalari orasidan qidirish kerak.

Nazorat savollari

1. Chiziqli dasturlash masalasining chegaralovchi shartlari qanday ko'rinishda bo'lishi mumkin?
2. Ishlab chiqarishni rejalashtirish masalasidagi noma'lumlar, asosiy shartlar va maqsad funktsiya qanday ma'noni bildiradi?
3. «Iste'mol savati» masalasidagi noma'lumlar, asosiy shartlar va maqsad funktsiya qanday ma'noni bildiradi?
4. «Optimal bichish» masalasidagi noma'lumlar, asosiy shartlar va maqsad funktsiya qanday ma'noni bildiradi?
5. Umumiy ko'rinishdagi chiziqli dasturlash masalasini qanday shakllarda ifodalash mumkin?
6. Chiziqli dasturlash masalasining joiz yechimi nima?
7. Chiziqli dasturlash masalasining bazis yechimini ta'riflang.
8. Aynigan va aynimagan bazis yechimlar nima?
9. Chiziqli dasturlash masalasining optimal yechimi nima?

10. Chiziqli dasturlash masalasida qanday teng kuchli almashtirishlarni bajarish mumkin?

11. Chiziqli dasturlash masalasi yechimlaridan tashkil topgan to'plam qanday to'plam bo'ladi?

12. Yechimlardan tashkil topgan qavariq ko'pburchakning burchak nuqtasi bilan bazis yechim orasida qanday bog'lanish bor?

13. Maqsad funktsiya o'zining optimal qiymatiga qanday nuqtada erishadi?

14. Chiziqli dasturlash masalasining joiz rejasining mavjud emaslik shartlari qanday?

18-mavzu. Chiziqli dasturlash masalasining geometrik talqini. Grafik usul

Reja:

1. Grafik usul.

2. Grafik usul yordami bilan iqtisodiy masalalarni yechish va yechimni tahlil qilish.

Tayanch iboralar:

gipertekislik, gipertekisliklar oilasi, sath tekisliklari, aktiv shartlar, passiv shartlar, yechimlar ko'pburchagi.

Quyidagi ko'rinishda yozilgan chiziqli dasturlash masalasini ko'ramiz:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le a_i \quad (i = \overline{1,m}), \qquad (1)$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,n}), \qquad (2)$$

$$Y = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max\ (min). \qquad (3)$$

Ushbu chiziqli dasturlash masalasining geometrik talqini bilan tanishamiz.

Ma'lumki, n ta tartiblashgan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sonlar n-ligi (birlashmasi) n o'lchovli fazoning nuqtasi bo'ladi. Shuning uchun (1)-(3) chiziqli dasturlash masalasining rejasini n o'lchovli fazoning nuqtasi deb qarash mumkin. Bizga ma'lumki, bunday nuqtalar to'plami qavariq to'plamdan iborat bo'ladi. Qavariq to'plam chegaralangan (qavariq ko'pburchak), chegaralanmagan (qavariq ko'p qirrali soha) bo'lishi, bitta nuqtadan iborat bo'lishi yoki bo'sh to'plam bo'lishi ham mumkin.

Koordinatalari

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = a$$

tenglamani qanoatlantiruvchi ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) nuqtalar to'plami gipertekslik deb ataladi. Shu sababli

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = Y$$

ko'rinishida yozilgan maqsad funktsiyani Y ning turli qiymatlariga mos keluvchi o'zaro parallel **gipertekisliklar** oilasi deb qarash mumkin.

Har bir gipertekislikning ixtiyoriy nuqtasida Y funktsiya bir xil qiymatni qabul qiladi (demak, o'zgarmas sathda saqlanadi). Shuning uchun ular «sath tekisliklari» deyiladi. Geometrik nuqtai nazardan chiziqli dasturlash masalasini quyidagicha ta'siflash mumkin:

(1) va (2) shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlar ko'pburchagiga tegishli bo'lgan shunday $X^*=(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ nuqtani topish kerakki, bu nuqtada Y maqsad funktsiyaga maksimum(minimum) qiymat beruvchi (3) gipertekisliklar oilasiga tegishli bo'lgan gipertekislik o'tsin. Jumladan, $n=2$ da (1)-(3) masala quyidagicha talqin qilinadi:

(1)-(2) shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlar ko'pburchagiga tegishli bo'lgan shunday $X^*=(x_1^*, x_2^*)$ nuqtani topish kerakki, bu nuqtada Y maqsad funktsiyaga eng katta (eng kichik) qiymat beruvchi va (3) sath chiziqlar oilasiga tegishli bo'lgan chiziq o'tsin.

Chiziqli dasturlash masalasining geometrik talqiniga hamda 2-§ da tanishgan chiziqli dasturlash masalasi yechimining xossalariga tayanib masalani ba'zi hollarda grafik usulda yechish mumkin.

Ikki o'lchovli fazoda berilgan quyidagi chiziqli dasturlash masalasini ko'ramiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \text{--------------------} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \end{cases} \tag{4}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \tag{5}$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 \to max. \tag{6}$$

Faraz qilaylik, (4) sistema (5) shartni qanoatlantiruvchi yechimlarga ega bo'lsin. hamda yechimlardan tashkil topgan to'plam chekli bo'lsin. (4) va (5) tengsizliklarning har biri

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i, \ (i=1,\ldots,m)$$

$x_1=0, x_2=0$ chiziqlar bilan chegaralangan yarim tekisliklarni ifodalaydi.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i \quad (i=1,\ldots,m) \tag{7}$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi yarim tekislik $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ to'g'ri chiziqning qaysi tomonida yotishini aniqlash uchun O(0;0) koordinata boshini mo'ljal nuqta deb qarash mumkin. Agar $x_1=0, x_2=0$ qiymatlarni (7) tengsizlikka qo'yganda $0 \le b_i$ tengsizlik hosil bo'lsa, u holda qidirilayotgan yarim tekislik $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ to'g'ri chiziqning ostida (koordinata boshi tomonida) yotadi, aks holda u bu to'g'ri chiziqning yuqorisida yotuvchi yarim tekislikdan iborat bo'ladi.

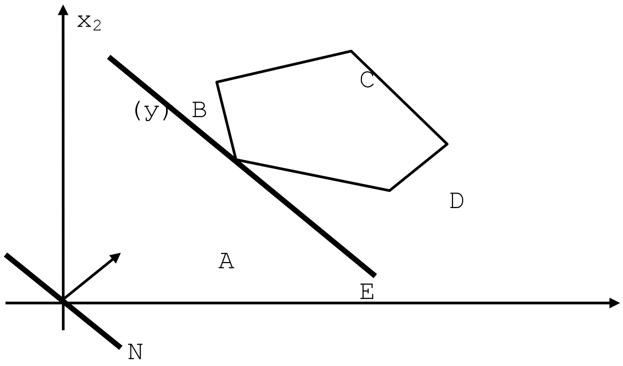
Chiziqli funktsiya (4) ham ma'lum bir o'zgarmas $C_0=const$ qiymatda

$$c_1x_1 + c_2x_2 = C_0$$

sath to'g'ri chiziqlar oilasiga tegishli bo'lgan to'g'ri chiziqni ifodalaydi. Yechimlardan tashkil topgan qavariq to'plamni hosil qilish uchun

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2 = b_1,\ a_{21}x_1+a_{22}x_2 = b_2,...,a_{m1}x_1+a_{m2}x_2 = b_m, \quad x_1=0,\ x_2=0,$$
to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan ko'pburchakni yasaymiz.

Faraz qilaylik bu ko'pburchak ABCDE beshburchakdan iborat bo'lsin (1-shakl)



1-shakl

Chiziqli funktsiyani ixtiyoriy o'zgarmas C_0 songa teng deb olamiz.

Natijada

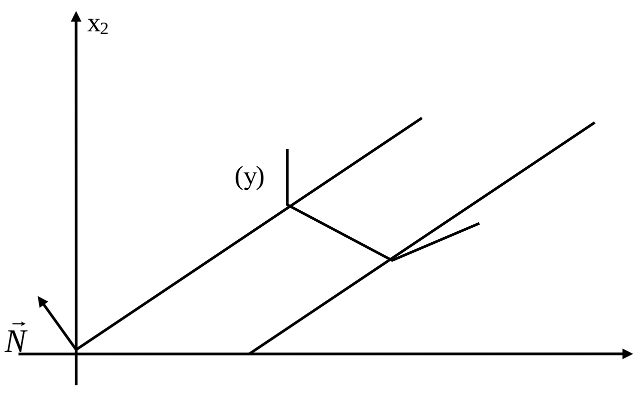
$$c_1x_1 + c_2x_2 = C_0 = const$$

to'g'ri chiziq hosil bo'ladi. bu to'g'ri chiziqni $\vec{N}(c_1, c_2)$ vektor yo'nalishida yoki unga teskari yo'nalishida o'ziga parallel surib borib qavariq ko'pburchakning chiziqli funktsiyaga eng katta yoki eng kichik qiymat beruvchi nuqtalarni aniqlaymiz.

1-shakldan ko'rinib turibdiki, chiziqli funktsiya o'zining minimal qiymatiga qavariq ko'pburchakning *A* nuqtasida erishadi. *S* nuqtada esa, u o'zining maksimal (eng katta) qiymatiga erishadi. Birinchi holda $A(x_1, x_2)$ nuqtaning koordinatalari masalaning chiziqli funktsiyasiga minimal qiymat beruvchi optimal yechimi bo'ladi. Uning koordinatalari *AB* va *AE* to'g'ri chiziqlarni ifodalovchi tenglamalar orqali aniqlanadi.

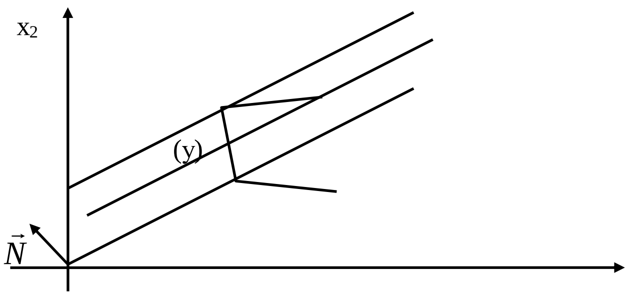
Agar yechimlardan tashkil topgan qavariq ko'pburchak chegaralanmagan bo'lsa, ikki hol bo'lishi mumkin.

1-hol. $c_1x_1 + c_2x_2 = C_0$ to'g'ri chiziq $\vec{N}$ vektor bo'yicha yoki unga qarama-qarshi yo'nalishda siljib borib har vaqt qavariq ko'pburchakni kesib o'tadi. Ammo na minimal, na maksimal qiymatga erishadi. Bu holda chiziqli funktsiya quyidan va yuqoridan chegaralanmagan bo'ladi (2-shakl)

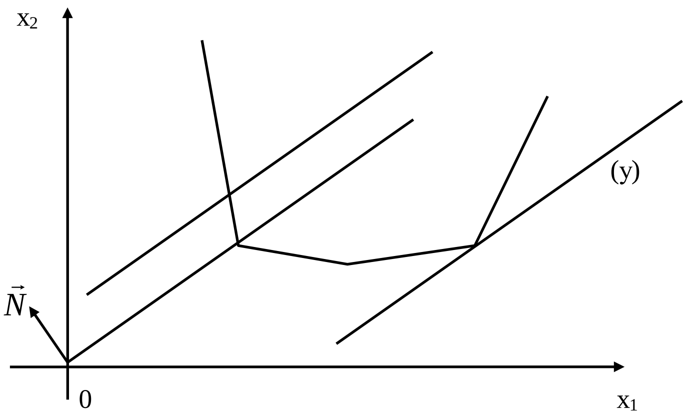


2 - shakl

$s_1x_1 + s_2x_2 = S_0$ to'g'ri chiziq $\vec{N}$ vektor bo'yicha siljib borib qavariq ko'pburchakning birorta burchak nuqtasida o'zining minimal yoki maksimum qiymatiga erishadi.



3-shakl



4- shakl

Bunday holda chiziqli funktsiya yuqoridan chegaralangan, quyidan esa chegaralanmagan (3-shakl) yoki quyidan chegaralangan, yuqoridan esa chegaralanmagan (4-shakl) bo'lishi mumkin.

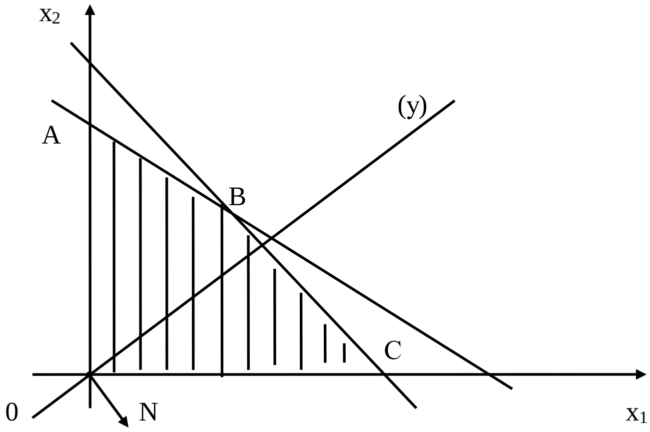
1-misol. Masalani grafik usulda yeching.

$$4x_1 + 3x_2 \le 12\ ,$$
$$3x_1 + 4x_2 \le 12\ ,$$
$$x_1 \ge 0,\quad x_2 \ge 0,$$
$$Y = 2x_1 - 5x_2 \to max.$$

Yechish. Yechimlardan tashkil topgan qavariq ko'pburchak yasash uchun koordinatalar sistemasida

$$4x_1 + 3x_2 = 12 \quad (L_1),$$
$$3x_1 + 4x_2 = 12 \quad (L_2),,$$
$$x_1 = 0,\quad x_2 = 0$$

chiziqlar yasaymiz (5-shakl).



5 - shakl

Berilgan tengsizliklarni qanoatlantiruvchi yechim shtrixlangan OABC to'rtburchakni tashkil qiladi. Endi koordinatalar boshidan $\vec{N}=(2,5)$ vektorni yasaymiz va unga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziq

$$2x_1 - 5x_2 = const$$

tenlama orqali ifodalanadi. Uni $\vec{N}$ vektor yo'nalishida o'ziga parallel siljitib boramiz. Natijada chiziqli funktsiyaga maksimal qiymat beruvchi $C(3;0)$ nuqtani topamiz. Bu nuqtaning koordinatalari $x_1=3$, $x_2=0$ masalaning optimal yechimi bo'ladi va $Y_{max}=2\cdot3-5\cdot0=6$ bo'ladi.

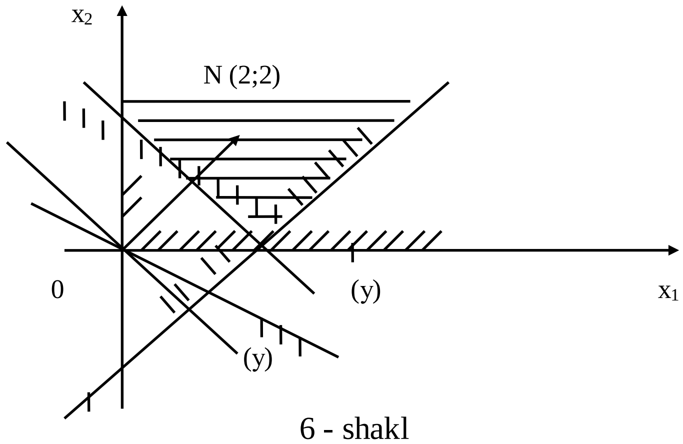
2-misol. Berilgan chiziqli dasturlash masalasini grafik usulda yeching.

$$x_1 + 2x_2 \geq 3,$$
$$x_1 - x_2 \leq 2,$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$
$$Y = 2x_1 + 2x_2 \rightarrow max.$$

Yechish. Yechim ko'pburchagini hosil qilamiz. Uning uchun koordinatalar sistemasida

$$x_1 + 2x_2 = 3,$$
$$x_1 - x_2 = 2,$$
$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0$$

to'g'ri chiziqlar yasaymiz (6-shakl).



6 - shakl

Shakldan ko'rinadiki, yechimlar ko'pburchagi yuqoridan chegaralanmagan. Koordinata boshidan $\vec{N}$ (2:2) vektorni yasaymiz va unga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Bu chiziq

$$2x_1 + 2x_2 = const$$

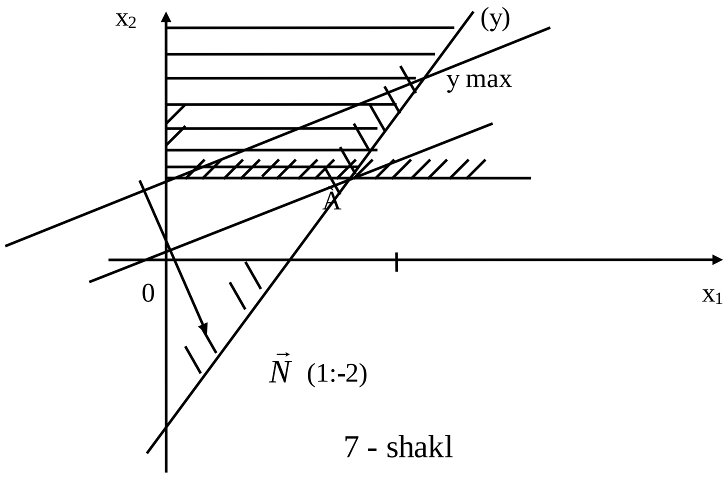
tenglama orqali ifodalanadi.

Shakldan ko'rinadiki, masalada maqsad funktsiyaning maksimum qiymati yuqoridan chegaralanmagan ekan.

3-misol. Masalani grafik usulda yeching.

$$2x_1 - x_2 \le 4,$$
$$x_1 \ge 0,$$
$$x_2 \ge 1,$$
$$Y = x_1 - 2x_2 \to max.$$

Masalani yuqoridagi usul bilan yechib quyidagi shaklga ega bo'lamiz (7-shakl):



7 - shakl

Shakldan ko'rinadiki, yechimlar to'plami chegaralanmagan, lekin optimal yechim mavjud va u A nuqta koordinatalaridan iborat.

2. Grafik usul yordami bilan iqtisodiy masalalarni yechish va yechimni tahlil qilish.

Buni quyidagi iqtisodiy masala misolida ko'ramiz.

Deylik, korxonada ikki xil bo'yoq ishlab chiqarilsin. Bu bo'yoqlarni ishlab chiqarish uchun 2 xil xom ashyodan foydalanilsin. Xom ashyolarning zahirasi berilgan va ular 6 va 8 birlikni, ikkinchi bo'yoqqa bo'lgan talab 2 birlikni tashkil qiladi va u birinchi bo'yoqqa bo'lgan talabdan 1 birlikka katta.

Har bir bo'yoq birligini ishlab chiqarish uchun kerak bo'lgan xom ashyolar miqdori (normasi) hamda korxonaning har bir bo'yoqdan oladigan daromadi quyidagi jadvalda keltirilgan:

Xom ashyolar / bo'yoqlar	1	2	Bo'yoqlar bahosi (shartli birlik)
I	1	2	3
II	2	1	2
Xom ashyo zahirasi(t)	6	8	

Masalaning iqtisodiy ma'nosi:

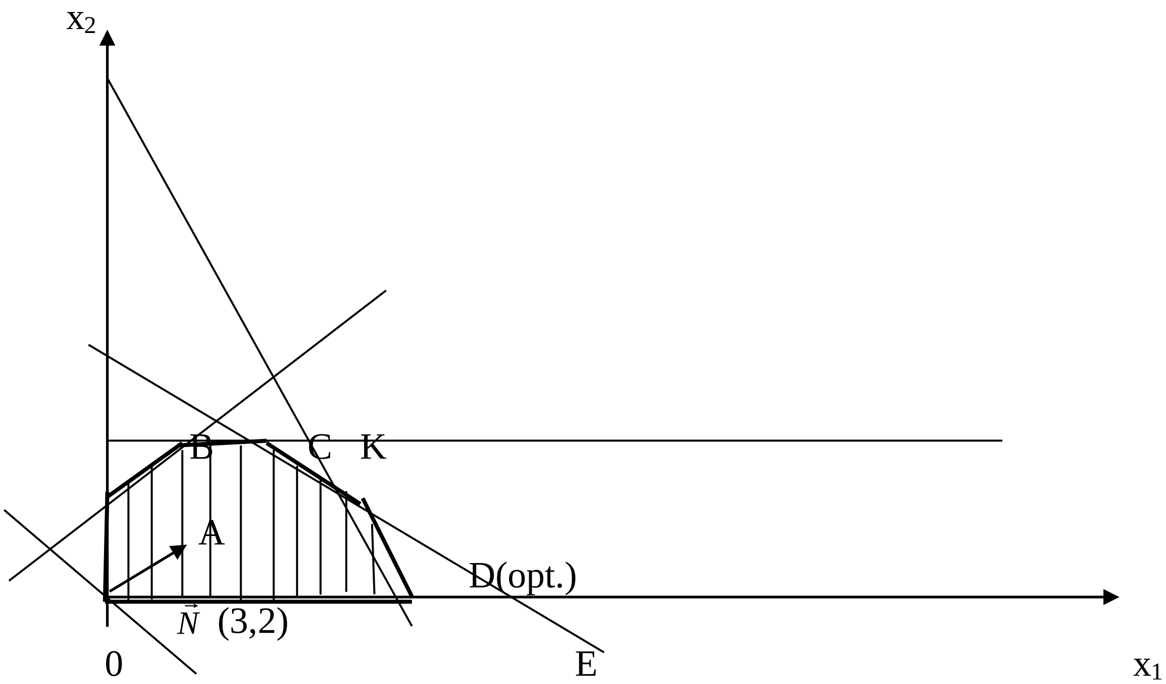
Har bir bo'yoqdan qancha ishlab chiqarilganda ularga sarf qilingan xom ashyolar miqdori ularning zahiralaridan oshmaydi hamda talab bo'yicha shartlar ham bajariladi?

Masaladagi noma'lumlarni belgilaymiz: x_1 – ishlab chiqarishga rejalashtirilgan I – bo'yoq miqdori; x_2 – II – bo'yoq miqdori;

U holda masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$x_1 + 2x_2 \le 6, \qquad (8)$$
$$2x_1 + x_2 \le 8, \qquad (9)$$
$$-x_1 + x_2 \le 1, \qquad (10)$$
$$x_2 \le 2, \qquad (11)$$
$$x_1 \ge 0, \qquad (12)$$
$$Y = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow max \qquad (13)$$

Masalani grafik usulda yechamiz hamda $D\left(3\frac{1}{3};1\frac{1}{3}\right)$ optimal nuqta ekanligini aniqlaymiz.



8 – shakl.

Demak, optimal yechim quyidagicha bo'ladi:

$$x_1 = 3\frac{1}{3}; \quad x_2 = 1\frac{1}{3}; \quad Y_{\max} = 12\frac{2}{3}.$$

Bundan ko'rinadiki, korxona birinchi bo'yoqdan $3\frac{1}{3}$ birlik, ikkinchisidan $1\frac{1}{3}$ birlik ishlab chiqarishi kerak. Bu holda uning oladgan daromadi $12\frac{2}{3}$ birlikka teng bo'ladi.

Endi grafik yordamida iqtisodiy masala yechimini tahlil qilish mumkin ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun optimal *D* nuqtaga qaraymiz.

Bu nuqta $2x_1+x_2=8$ va $x_1+2x_2=6$ to'g'ri chiziqlarning kesishgan nuqtasi ekanligidan berilgan iqtisodiy masalaning (8) va (9) chegaralovchi shartlari D nuqtada tenglamaga aylanishini ko'rsatadi. Bu esa bo'yoq ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan ikkala xom ashyoning ham kamyob (defitsit) ekanligini ko'rsatadi. Optimal nuqta bilan bog'liq bo'lgan shartlar aktiv shartlar. Unga bog'liq bo'lmagan shartlar esa passiv shartlar deb ataladi. Biz ko'rayotgan masalada mahsulotlarga bo'lgan talabga qo'yilgan $x_1+x_2 \leq 1$ va $x_2 \leq 2$ shartlar optimal nuqtaga bog'liq emasligini va shu sabali bu shartlar passiv shartlar ekanligini aniqlaymiz.

Passiv shartlarga mos keluvchi resurslar kamyob bo'lmaydi va ularning ma'lum darajada o'zgarishi optimal yechimga ta'sir qilmaydi. Aksincha, aktiv shartlarga mos keluvchi resurslarni bir birlikka oshirilishi optimal yechimning o'zgarishiga olib keladi.

Masalan, 1-xom ashyo zahirasini bir birlikka oshirilishi optimal yechimga qanday ta'sir ko'rsatishini ko'rish uchun uni 7 ga teng deb olamiz. U holda *CD* kesma o'ziga parallel ravishda yuqoriga ko'tariladi va *DCK* uchburchak hosil bo'ladi. Endi K nuqta optimal nuqtaga aylanadi.

Bu nuqtada $x_2=2$ va $2x_1+x_2=8$ to'g'ri chiziqlar kesishadi. Shuning uchun endi masalaning (9) va (11) shartlari aktiv shartlarga, (8) va (10) shartlari esa passiv shartlarga aylanadi. K nuqtaning koordinatalari $x_2= 2, x_1=3$. Demak, yangi optimal yechim

$$x_1 = 3, \quad x_2 =2, \quad Y_{max} =13$$

bo'ladi.

Optimal yechimda 1-xom ashyoga doir (1) chegaraviy shart

$$x_1 + 2x_2 = 3+2*2=7$$

ga teng bo'ladi. Demak, 1-xom ashyoning eng ko'p mumkin bo'lgan zahirasi 7 ga teng bo'lishi kerakligini ko'rsatadi.

Xuddi shunday yo'l bilan 2-xom ashyolar bir birlikka oshirish optimal yechimni qanday o'zgartirishini ko'rsatish mumkin.

Bundan tashqari kamyob bo'lmagan xom ashyolar miqdorini, optimal yechimga ta'sir qilmagan darajada, qanchalik kamaytirish mumkinligini ham ko'rsatish mumkin.

Yuqoridagi 8-shaklda *BC* kesma $x_2 = 2$ chiziqli, ya'ni masalaing 4 shartini ifodalaydi. Bu - passiv shart. Maqsad funktsiya qiymatini o'zgar-tirmagan holda passiv shartni qanchalik o'zgartirish mumkin ekanligini aniqlash uchun *BC* kesmani o'ziga parallel pastga to *D* nuqta bilan kesishguncha siljitamiz. Bu nuqtada $x_2 = 1\frac{1}{3}$ bo'ladi.

Demak, ikkinchi bo'yoqqa bo'lgan talabni optimal yechimga ta'sir qilmasdan $1\frac{1}{3}$ gacha kamaytirish mumkin ekan.

Shunday yo'l bilan masalaning optimal yechimiga ta'sir etmasdan uning (10) - passiv shartning o'ng tomonini qanchaga kamaytirish mumkin ekanligini ko'rsatish mumkin.

Nazorat savollari

1. Chiziqli dasturlash masalasining geometrik talqini qanday?
2. Chiziqli dasturlash masalasi yechimlarining qanday xossalariga asosan grafik usulni qo'llash mumkin?
3. Chiziqli dasturlash masalasi rejalaridan tashkil topgan to'plam qanday bo'lishi mumkin?
4. Qanday holda chiziqli dasturlash masalasi birdan ortiq optimal yechimga ega bo'lishi mumkin?
5. Iqtisodiy masalani grafik usulda yechganda xom ashyolarning kamyob yoki kamyob emasligini qanday aniqlash mumkin?
6. Passiv va aktiv chegaralovchi shartlar nima?
7. Aktiv shartlarni (kamyob xom ashyolarni) bir birlikka oshirganda optimal yechim qanday o'zgaradi?

8. Optimal yechimni o'zgartirmagan holda passiv shartlarni qanchalik o'zgartirish mumkin?

19-mavzu. Chiziqli dasturlashda ikkilanish nazariyasi

Reja:

1. Ikkilanish nazariyasining asosiy tushunchalari. Qo'shma masalalar va ularning iqtisodiy talqini. Simmetrik va simmetrik bo'lmagan qo'shma masalalar.
2. Ikkilanish nazariyasining asosiy teoremalari va ularning iqtisodiy talqini

Tayanch iboralar

Ikkilangan masala; simmetrik qo'shma masalalar; simmetrik bo'lmagan qo'shma masalalar; ikkilamchi baholar; optimal yechim bahosi; tanqis (kamyob) xom-ashyo; notanqis xom-ashyo; shartli optimal yechim.

Har bir chiziqli dasturlash masalasiga unga nisbatan ikkilangan masala deb ataluvchi boshqa masalani mos qo'yish mumkin. Berilgan masaladagi maqsad funktsiya va noma'lumlarga qo'yilgan chegaraviy shartlar orqali ikkilangan masalaning maqsad funktsiyasini va chegaraviy shartlarini to'la aniqlash mumkin.

Berilgan masala va unga ikkilangan masalalar birgalikda o'zaro ikkilangan (qo'shma) masalalar deb ataladi. Agar berilgan masala yoki unga ikkilangan masalalardan birortasi yechimga ega bo'lsa, ularning ikkinchisi ham optimal yechimga ega bo'ladi.

O'zaro qo'shma masalalarni ko'z oldiga keltirish va ularning iqtisodiy ma'nolarini tahlil qilish uchun quyida ishlab chiqarishni rejalashtirish masalasini ko'ramiz.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ - \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \qquad (1)$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad \ldots, \quad x_n \ge 0, \qquad (2)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow max \qquad (3)$$

Masalaning (1) sharti mahsulot ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan m xil xom ashyoning har biri chegaralangan ekanligini va ularni me'yorida sarf qilish kerakligini ko'rsatadi. Bu yerda: x_j $(j=1,...,n)$ ishlab chiqariladigan j-mahsulot miqdori, b_i $(i=1,...,m)$ i-xom ashyoning zahirasi, a_{ij} koeffitsientlar j-mahsulot birligini ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan i-xom ashyo miqdori (normasi) ni ko'rsatadi. Y-maqsad funktsiya bo'lib u ishlab chiqarilgan mahsulotlarning pul qiymati maksimum bo'lishi kerakligini ko'rsatadi, bu yerda C_j - j-mahsulot birligining bahosidir. Masalani vektor formada quyidagicha yozish mumkin:

$$AX \leq B, \qquad (4)$$
$$X \geq 0, \qquad (5)$$
$$Y = C'X \longrightarrow max \qquad (6)$$

Faraz qilaylik, korxona ma'lum bir sabablarga ko'ra mahsulot ishlab chiqarishni to'xtatgan bo'lsin. Shu sababli korxona xom ashyo va boshqa ishlab chiqarish vositalarini sotmoqchi bo'ladi. Korxona bu xom ashyolarni sotishdan olgan tushumining mahsulot ishlab chiqarib uni sotishdan olgan tushumidan kam bo'lmasligiga harakat qiladi. Ikkinchi tomondan xom ashyo sotib oluvchi korxona esa ularni kam xarajat sarf qilib sotib olishga harakat qiladi. Ikkilangan masala xom ashyolarni sotuvchi va ularni sotib oluvchi korxonalar maqsadini amalga oshirishi kerak. Buning uchun xom ashyolarning W_1, W_2, ... W_n narxini shunday belgilash kerakki sotuvchi korxona zarar ko'rmasin hamda sotib oluvchi korxonaning sarf qilgan harajatlari minimal bo'lsin.

Matematik nuqtai nazardan ikkilangan masalani quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{cases} a_{11}W_1 + a_{21}W_2 + \ldots a_{m1}W_m \geq c_1, \\ a_{12}W_1 + a_{22}W_2 + \ldots a_{m2}W_m \geq c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}W_1 + a_{2n}W_2 + \ldots a_{mn}W_n \geq c_n, \end{cases} \qquad (7)$$

$$W_1 \geq 0, W_2 \geq 0, \ldots, W_m \geq 0, \qquad (8)$$
$$F = b_1W_1 + b_2W_2 + \ldots + b_mW_m \longrightarrow \min \qquad (9)$$

Ikkilangan masaladagi (7) cheklamalar mahsulot birligini ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan barcha xom ashyolarning pul qiymati mahsulot bahosidan kam bo'lmaslik kerakligini ko'rsatadi. (9) shart esa maqsad funktsiya bo'lib, u barcha xom ashyolarning bahosi minimal bo'lishi kerakligini ko'rsatadi.

Ikkilangan masala matritsa formada quyidagicha yoziladi:

$$WA \leq C, \qquad (10)$$
$$W \geq 0, \qquad (11)$$
$$F = WB \longrightarrow min \qquad (12)$$

(1)-(3) va (7)-(9) masalalar "o'zaro simmetrik bo'lgan qo'shma masalalar" deyiladi. Bu masalalarning har birida chegaraviy shartlar tengsizliklardan iborat bo'ladi, hamda noma'lumlarning manfiy bo'lmasligi talab qilinadi. Simmetrik bo'lmagan qo'shma masalalar umumiy holda quyidagicha qo'yiladi:

Berilgan masala

$$AX = B, \qquad (13)$$
$$X \geq 0, \qquad (14)$$
$$Y = C'X \longrightarrow max(min) \qquad (15)$$

Ikkilangan masala

$WA \geq S \; (WA \leq S)$ (16)

$F = WB \longrightarrow min(max)$ (17)

Bu masalalardan ko'rinadiki, agar berilgan masaladagi cheklamalar tenglama ko'rinishida bo'lsa, u xolda ikkilangan masaladagi chegaraviy shartlar tengsizlik ko'rinishida bo'ladi, ularning "≥" yoki "≤" ko'rinishida bo'lishi berilgan masaladagi maqsad funktsiyasining mos ravishda $Y \to max$ yoki $Y \to min$ ko'rinishda bo'lishiga bog'liq bo'ladi. Agar berilgan masalada maqsad funktsiyasi $Y \to max$ ko'rinishida bo'lsa, ikkilangan masalada u $F \to min$ bo'ladi va aksincha, agar berilgan masalada maqsad funktsiya $Y \to min$ ko'rinishda bo'lsa, u xolda ikkilangan masalada $F \to max$ ko'rinishda bo'ladi.

Yukoridagilardan xulosa qilib, o'zaro ikkilangan (qo'shma) masalalarning matematik modellarini quyidagi ko'rinishda ifodalash mumkin.

Simmetrik bo'lmagan qo'shma masalalar:

	Berilgan masala	Ikkilangan masala
1.	$AX = B,$	$WA \leq S,$
	$X \geq 0,$	$F = WB \longrightarrow max$
	$Y = CX \longrightarrow min$	
2.	$AX = B,$	$WA \geq S,$
	$X \geq 0,$	$F = WB \longrightarrow min$
	$Y = CX \longrightarrow max$	

Simmetrik qo'shma masalalar:

	Berilgan masala	Ikkilangan masala
3.	$AX \geq B,$	$WA \leq S,$
	$X \geq 0,$	$W \geq 0,$
	$Y = CX \longrightarrow min$	$F = WB \longrightarrow max$
4.	$AX \leq B,$	$WA \geq S,$
	$X \geq 0,$	$W \geq 0,$
	$Y = CX \longrightarrow max$	$F = WB \longrightarrow min$

Qo'shma masalalar orasida yana quyidagi bog'lanishlar mavjud.

1. Berilgan masaladagi texnologik koeffitsientlardan tashkil topgan matritsa

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ko’rinishda bo’lsa, ikkilangan masaladagi matritsa

ko’rinishda, ya’ni A matritsaga transponirlangan matritsa bo’ladi.

2. Ikkilangan masaladagi noma’lumlar soni berilgan masaladagi cheklamalarning soniga teng. Ikkilangan masaladagi cheklamalar soni berilgan masaladagi noma’lumlar soniga teng bo’ladi.

3. Ikkilangan masala maqsad funktsiyasidagi koeffitsientlar berilgan masaladagi ozod hadlardan iborat bo’ladi. Ikkilangan masaladagi ozod xadlar esa berilgan masala maqsad funktsiyasi koeffitsientlaridan iborat bo’ladi.

4. Agar berilgan masaladagi x_j noma’lum musbat bo’lsa ($x_j \geq 0$)u xolda ikkilangan masaladagi j-cheklama "≥"ko’rinishdagi tengsizlikdan iborat bo’ladi. Agar x_j noma’lum musbat ham, manfiy ham qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo’lsa, u holda ikkilangan masaladagi j-cheklama tenglamadan iborat bo’ladi.

5. Agar berilgan masaladagi i-cheklama tengsizlikdan iborat bo’lsa, ikkilangan masaladagi W_i noma’lum musbat bo’ladi, ya’ni $W_i > 0$.

Agar (1)-(3) masaladagi i-cheklama tenglamadan iborat bo’lsa, W_i musbat ham, manfiy ham bo’lishi mumkin.

1-misol. Berilgan masalaga ikkilangan masala tuzing.

$$-x_1+3x_2-5x_3 \leq 12,$$
$$2x_1-x_2+4x_3 \leq 24,$$
$$3x_1+x_2+x_3 \leq 18,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,$$
$$Y=2x_1+x_2+3x_3 \longrightarrow max.$$

Yechish. Masaladagi barcha cheklamalar "≤" ko’rinishdagi tengsizliklardan iborat, demak, berilgan masalaga simmetrik qo’shma masalalarni xosil qilamiz:

Berilgan masala	Ikkilangan masala
$-x_1+3x_2-5x_3 \leq 12,$	$-W_1+2W_2+3W_3 \geq 2,$
$2x_1-x_2+4x_3 \leq 24,$	$3W_1-W_2+W_3 \geq 1,$
$3x_1+x_2+x_3 \leq 18,$	$-5W_1+4W_2+W_3 \geq 3,$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,$	$W_1 \geq 0,\ W_2 \geq 0,\ W_3 \geq 0,$
$Y=2x_1+x_2+3x_3 \longrightarrow max.$	$F=12W_1+24Wx_2+18W_3 \longrightarrow min.$

2-misol. Berilgan masalaga ikkilangan masala tuzing.

$$x_1-x_2+4x_3 \leq 12,$$
$$x_1+3x_2-2x_3=13,$$
$$x_1+5x_2-6x_3 \leq 11,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,$$

$$Y=4x_1+x_2+4x_3. \longrightarrow max$$

Yechish. Berilgan masaladagi ikkinchi shart tenglamadan, 1-shart hamda 3-shart tengsizliklardan iborat. Shuning uchun, ikkilangan masalani tuzishda yuqoridagi 5-punktda keltirilgan qoidaga rioya qilamiz va quyidagi masalalarga ega bo'lamiz:

Berilgan masala	Ikkilangan masala
$x_1-x_2+4x_3\le 12,$	$W_1+W_2+W_3\ge 4,$
$x_1+3x_2-2x_3=13,$	$-W_1+3W_2+5W_3\ge 1,$
$x_1+5x_2-6x_3\le 11,$	$4W_1-2W_2-6W_3\ge 4,$
$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0,$	$W_1\ge 0,\ W_3\ge 0,$
$Y=4x_1+x_2+4x_3 \rightarrow max.$	$F=12W_1+13Wx_2+11W_3 \rightarrow min.$

2. Ikkilanish nazariyasining asosiy teoremalari va ularning iqtisodiy talqini

Ikkilanish nazariyasida berilgan masalaning ixtiyoriy X joiz rejasi hamda ikkilangan masalaning ixtiyoriy *W* joiz rejasi uchun

$$Y(X) \le F(W) \qquad (18)$$

tengsizlik, ya'ni

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i W_i$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bunday tengsizlik ikkilanish nazariyasining **asosiy tengsizligi** deb ataladi.

Bu tengsizlik ixtiyoriy mumkin bo'lgan ishlab chiqarish rejasi hamda xom ashyolarning ixtiyoriy mumkin bo'lgan baholari uchun ishlab chiqarilgan mahsulot bahosi sarf qilingan xom ashyolar bahosidan oshmasligini ko'rsatadi.

1-teorema. Agar qo'shma masalalardan birortasi optimal yechimga ega bo'lsa, u xolda ikkinchisi ham yechimga ega bo'ladi hamda bu masalalardagi chiziqli funktsiyalarning ekstremal qiymatlari o'zaro teng bo'ladi, ya'ni

$$Y_{min}=F_{max} \qquad (19)$$

Agar bu masalalardan birining chiziqli funktsiyasi chegaralanmagan bo'lsa, u holda ikkinchi masala hech qanday yechimga ega bo'lmaydi.

Isbot. Teoremani simmetrik bo'lmagan qo'shma masalalar uchun isbotlaymiz. Berilgan masala optimal yechimga ega va uni simpleks usul bilan topish mumkin deb faraz qilamiz. Umumiylikni buzmasdan optimal yechimdagi bazis vektorlar birinchi m ta $P_1, P_2, \dots , P_m$ vektorlardan iborat deb qabul qilamiz. Shu vektorlarning koordinatalaridan tuzilgan matritsani *B* bilan belgilaymiz. Oxirgi simpleks jadval dastlabki simpleks jadvaldagi $P_1, P_2, \dots , P_m$ $P_{m+1}, \dots , P_n$ vektorlarning bazis vektorlar buyicha yoyilmasini o'z ichiga oladi, ya'ni dastlabki simpleks jadvaldagi har bir vektor P_j uchun oxirgi simpleks jadvalda quyidagi munosabatlarni qanoatlantiruvchi X_j vektor mos keladi:

$$P_j=BX_j \text{ yoki } B^{-1}P_j=X_j \qquad (20)$$

$\overline{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_m,X_{m+1},\ldots,X_n)$ bilan oxirgi simpleks jadvalning elementlaridan tashkil topgan matritsani belgilaymiz. Simpleks jadvalning dastlabki m ta vektori bazis vektorlardan iborat bo'lganligi sababli $\overline{X}$ matritsa quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$X=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots\ldots & x_{1m+1} & \ldots\ldots & x_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots\ldots & x_{2m+1} & \ldots\ldots & x_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \ldots\ldots & x_{mm+1} & \ldots\ldots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

Optimal echim $X^0=V^{-1}b$ vektordan iborat bo'lib, quyidagi munosabatlar o'rinli bo'ladi:

$$A=B\overline{X},\ B^{-1}A=\overline{X}, \qquad (21)$$
$$b=BX^0,\ B^{-1}b=X^0, \qquad (22)$$
$$y_{min}=C^0X^0, \qquad (23)$$
$$\Delta=C^0\,\overline{X}\text{ -C}\leq 0, \qquad (24)$$

bu yerda $C^0=(c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_m)$- optimal echimga mos keluvchi C - vektorning koordinatalaridan tuzilagan vektor - qator. Endi

$$W^0=C^0B^{-1} \qquad (25)$$

formula orqali aniqlanuvchi W^0 ni ikkilangan masalaning rejasi ekanligini ko'rsatamiz. (16), (21), (24), (25) munosabatlarga asosan

$$W^0A - C = C^0B^{-1}A - C = C^0\overline{X} - C\leq 0.$$

Demak,

$$W^0A - C \leq 0,$$

yoki

$$W^0A \leq S,$$

Shunday qilib (25) shartni kanoatlantiruvchi W^0 vektorni ikkilangan masalaning rejasi bo'ladi. Bu rejadagi ikkilangan masala chiziqli funktsiyasining qiymati $Z(W^0)= W^0b$ ga teng.

(25) va (22) ga asosan

$$Z(W^0)= W^0b= C^0B^{-1}b= C^0X^0=Y(X^0)=Y_{min} \qquad (26)$$

Bundan ko'rinadiki, ikkilangan masala chiziqli funktsiyasining W^0 rejadagi qiymati berilgan masalaning chiziqli funktsiyasining optimal qiymatiga teng ekan.

Endi W^0 reja ikkilangan masalaning optimal rejasi ekanligini ko'rsatamiz. (3.13) va (3.14) shartlarni kanoatlantiruvchi ixtiyoriy n o'lchovli W vektorlar uchun quyidagi munosabatlar o'rinli bo'ladi:

$$WAX=Wb=Z(W) \qquad (27)$$
$$WAX \leq CX=Y(X) \qquad (28)$$

(27) va (28) dan

$$Z(W) \leq Y(X) \qquad (29)$$

tengsizliklar xosil bo'ladi.

Bu tengsizlik ixtiyoriy W va X lar uchun bajariladi. Demak, (16) va (17) chiziqli funktsiyalarning optimal qiymatlari uchun ham

$$\max F(W) \leq \min Y(X) \qquad (30)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Ikkinchi tomondan W^0 reja uchun (26) tenglik o'rinlidir. Demak, W^0 da ikkilangan masalaning chiziqli funktsiyasi uzining maksimal qiymatiga erishadi.

Xuddi shunday yo'l bilan, agar ikkilangan masala optimal yechimga ega bo'lsa, burilgan masala ham optimal echimga ega bo'lishini va qo'shma masalalarning optimal echimlari uchun

$$\max F(W) = \min Y(X)$$

tenglik o'rinli bo'lishini isbot qilish mumkin.

Teoremani ikkinchi kismini isbotlash uchun berilgan masalaning chiziqli funktsiyasi quyidan chegaralanmagan deb faraz qilamiz. U xolda (29) ga asosan

$$F(W) \leq -\infty$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu ifoda ma'noga ega bo'lmaganligi sababli ikkilangan masala yechimga ega bo'lmaydi.

Xuddi shuningdek ikkilangan masalaning chiziqli funktsiyasi yukoridan chegaralanmagan deb faraz qilsak, (29) ga asosan

$$Y(X) \geq +\infty$$

tengsizlikni xosil qilamiz. Bu tengsizlik ham ma'noga ega bo'lmagani sababli, berilgan masala yechimga ega bo'lmaydi.

Isbot qilingan teorema simmetrik qo'shma masalalar uchun ham o'rinli bo'lib, unga asosan o'zaro qo'shma masalalardan ixtiyoriy birining yechimini topib, u orqali ikkinchisining yechimini aniqlash mumkin.

Keltirilgan ikkilanish nazariyasining 1-teoremasi iqtisodiy nuqtai nazardan shunday talqin qilinadi:

Agar tashkaridan belgilangan C_j bahoda sotilgan mahsulotning pul mikdori W_i ichki baho asosida o'lchangan xarajatlar (xom ashyolar) mikdoriga teng bo'lsa, ya'ni

$$\sum_{j=1}^{n} C_j X_j = \sum_{i=1}^{m} b_i W_i$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u xolda mahsulotning mumkin bo'lgan ishlab chiqarish rejasi hamda xom ashyolarning mumkin bo'lgan baholari optimal bo'ladi. Bundan ko'rinadiki, ikkilangan baholar sarf qilingan xarajatlar va ishlab chiqarilgan mahsulotlarning pul mikdorini o'zaro teng bo'lishini ta'minlovchi vosita bo'lib xizmat qiladi.

Xulosa. Agar berilgan masala yechimga ega bo'lsa, u xolda ikkilangan masalaning yechimi $W^0=B^{-1}\ C^0$ formula orqali topiladi. Xuddi shuningdek, agar ikkilangan masala optimal yechimga ega bo'lsa, u xolda berilgan masalaning optimal yechimi

$$X^0=b^0B^{-1}$$

formula orqali topiladi.

Misol. Berilgan va unga ikkilangan masalani yeching.

Berilgan masala

$$x_1+3x_2-x_3+2x_5=7,$$
$$-2x_2+4x_3+x_4=12,$$
$$-4x_2+3x_3+8x_5+x_6=10,$$
$$x_j\geq 0,\ j=1,6,$$
$$Y=x_2-3x_3+2x_5 \longrightarrow min$$

Yechish. Masalada quyidagi belgilashlar kiritamiz va ikkilangan masalani tuzamiz.

$$C=(0,\ 1,\ -3,\ 0,\ 2,\ 0),$$
$$b=(7,\ 12,\ 10)^{T,}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -4 \\ -1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

bu yerda, A^T - A matritsaga nisbatan transponirlangan matritsa.

Ikkilangan masala:

$$W_1 \le 0,$$
$$3W_1-2W_2-4W_3 \le 1,$$
$$-W_1+4W_2+3W_3 \le -3,$$
$$W_2 \le 0,$$
$$2W_1+8W_3 \le 2,$$
$$W_3 \le 0,$$
$$F=7W_1+12W_2+10W_3 \longrightarrow max$$

Berilgan masalani simpleks jadvalga joylashtirib, uni simpleks usul bilan yechamiz.

I.

B.v.	C	P_0	0	1	-3	0	2	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_1	0	7	1	3	-1	0	2	0
P_4	0	12	0	-2	4	1	0	0
P_6	0	10	0	-4	3	0	8	1
Δ_j		0	0	-1	3	0	-2	0

II .

B.v.	C	P_0	0	1	-3	0	2	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_1	0	10	1	5/2	0	1/4	2	0
P_3	-3	3	0	-1/2	1	1/4	0	0
P_6	0	1	0	-5/2	0	-3/4	8	1
Δ_j		-9	0	1/2	0	-3/4	-2	0

III.

B.v.	C	P_0	0	1	-3	0	2	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_1	1	4	2/5	1	0	1/10	4/5	0
P_4	-3	5	1/5	0	1	3/10	2/5	0
P_6	0	11	1	0	0	-1/2	10	1
Δ_j		-11	-1/5	0	0	-8/10	-12/5	0

III iteratsiyadan sung berilgan masalaning optimal echimi

$$X= (0, 4, 5, 0, 0, 11)$$

topiladi. Bu echimdagi chiziqli funktsiyaning qiymati

$$Y_{min}=-11$$

Oxirgi simpleks jadvaldan:

$C^0=(1, -3, 0)$ - vektor kator va teskari B^{-1} matritsani aniqlaymiz.

$$B^{-1}=(P_1,P_{4,}P_6)=\begin{pmatrix}2/5 & 1/10 & 0\\ 1/5 & 3/10 & 0\\ 1 & -1/2 & 1\end{pmatrix}$$

va (3.17) formula yordamida ikkilangan masalaning yechimini topamiz:

$$W^0=(W_1,W_2,W_3)=(1,-3,0)\begin{pmatrix}2/5 & 1/10 & 0\\ 1/5 & 3/10 & 0\\ 1 & -1/2 & 1\end{pmatrix}=(-1/5,-4/5,0).$$

Shunday qilib, ikkilangan masalaning optimal yechimi:

$$W^0=(-1/5,\ -4/5,\ 0),$$

bo'lib, unga mos keluvchi chiziqli funktsiyaning qiymati

$$F_{max}=-11$$

bo'ladi. Oxirgi simpleks jadvaldan ko'rinadiki ikkilangan masala yechimini hisoblab o'tirmaslik ham mumkin. Bu jadvalda B^{-1} matritsani tashkil qiluvchi P_1, P_4, P_6 vektorlarga mos keluvchi $m+1$ – katorning (Δ_1, Δ_4, Δ_6,) elementlari W^0 vektorning (ikkilangan masala yechimining) elementlarini beradi. $m+1$ - katorning P_0 vektorga mos kelgan elementi esa optimal yechimga mos keluvchi Y_{min} va F_{max} funktsiyalarning qiymatini beradi.

Shunday qilib, ko'rish mumkinki, optimal yechimda qo'shma masalalar maqsad funktsiyalarning qiymatlari o'zaro teng bo'ladi, ya'ni

$$Y_{min}=Y(X^0)=F(W^0)=F_{max}=-11.$$

2-teorema. Berilgan masalaning bazis yechimi X^0 va ikkilangan masalaning bazis yechimi W^0 optimal yechimi bo'lishi uchun quyidagi tengliklarning bajarilishi zarur va etarlidir.

$$x_j^0\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}w_i^0-C_j\right)=0,\ j=\overline{1,n} \qquad (31)$$

$$W_i^0\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}x_j^0-b_i\right)=0,\ i=\overline{1,m} \qquad (32)$$

Isboti. Teoremani (1)-(3) va (7)-(9) ko'rinishdagi berilgan qo'shma masalalar uchun isbotlaymiz. X^0 va W^0 vektorlar mos ravishda berilgan va unga ikkilangan masalaning optimal yechimi bo'lsin deb faraz qilamiz. U xolda quyidagi munosabatlar o'rinli bo'ladi:

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j^0\le b_i,\ i=\overline{1,m} \qquad (33)$$

$$x_j^0\ge 0,\ (j=\overline{1,n}) \qquad (34)$$

$$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}W_i^0\ge C_j,\ j=\overline{1,n} \qquad (35)$$

$$W_i^0 \geq 0, (i = \overline{1, m}) \qquad (36)$$

(33) tengsizlikning ikki tomonini W_i^0ga ko'paytiramiz va quyidagiga ega bo'lamiz:

$$W_i^0 \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j^0 \leq W_j^0 b_i, (i = \overline{1, m}) \qquad (37)$$

Bu tengsizlikning ikki tomonini *i* indeks bo'yicha summalaymiz:

$$\sum_{i=1}^{m} W_i^0 \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 \leq \sum_{i=1}^{m} W_i^0 b_i$$

yoki

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 W_i^0 \leq \sum_{i=1}^{m} W_i^0 b_i \qquad (38)$$

Xuddi shuningdek (35) tengsizlikning ikki tomonini $x_j^0 \geq 0$ga ko'paytirib j indeks bo'yicha summalaymiz va quyidagi tengsizlikni hosil qilamiz.

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^0 \sum_{i=1}^{m} a_{ij} W_i^0 \geq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^0$$

yoki

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j^0 W_i^0 \geq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^0 . \qquad (39)$$

Yuqoridagi 1-teoremaga asosan qo'shma masalalarning optimal yechimlari uchun

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^0 = \sum_{i=1}^{m} b_i W_i^0$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Demak (38) va (39) dan quyidagi munosabatlardan xosil qilish mumkin.

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^0 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j^0 W_i^0 ,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} W_i^0 x_j^0 = \sum_{i=1}^{m} W_i^0 b_i .$$

Bu tengliklarni quyidagi ko'rinishda ifodalaymiz:

$$\sum_{i=1}^{m} W_i^0 (b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0) = 0, \qquad (40)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^0 (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} W_i^0 - C_j) = 0. \qquad (41)$$

Bu munosabatlardan (33), (34), (35) va (36) shartlarni inobatga olib quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$W_i^0 (b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0) = 0 ,$$

$$x_j^0 (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} W_i^0 - C_j) = 0.$$

Shu bilan, teorema shartlarining zarurligi isbotlandi. Ularning etarliligini isbotlash uchun qo'shma masalalarning ixtiyoriy X^1 va W^1 bazis yechimlarini ko'ramiz va ular ustida yuqoridagidek almashtirishlar bajarib

$$\sum_{i=1}^{m} W_i^1 b_i = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j^1$$

tenglikni hosil qilamiz.

Demak, 1-teoremaga asosan X^1 va W^1 rejalar mos ravishda berilgan va ikkilangan masalaning optimal yechimi bo'ladi. Shu bilan teorema isbot qilindi. Ushbu teoremadan quyidagi xulosalarni chiqarish mumkin.

1. Agar

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 < b_i$$

tengsizlik ixtiyoriy $i = \overline{1,m}$ uchun bajarilsa, u holda $W_i^0=0$ bo'ladi.

2. Agar

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 = b_i$$

tenglik ixtiyoriy $i = \overline{1,m}$ uchun bajarilsa, u xolda $W_i^0>0$ bo'ladi.

3. Agar

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} W_i^0 > C_j, \ j = \overline{1,n}$$

tengsizlik bajarilsa, u xolda $x_j^0 = 0$ bo'ladi.

4. Agar

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} W_i^0 = C_j, \ i = \overline{1,n}$$

tenglik bajarilsa, u xolda $x_j^0 > 0$ bo'ladi.

Bu xulosalardan ko'rinadiki, ikkilangan baholarga xom-ashyolarning kamyob (defitsit) ekanligini baholovchi o'lchov (kattalik) deb qarash mumkin.

Ishlab chiqarishda to'la ishlatiladigan xom ashyo **kamyob xom-ashyo** deb ataladi. Bunday xom ashyolarning ikkilamchi bahosi musbat ishorali bo'ladi. Kamyob xom ashyolarning ishlab chiqarishga sarf qilingan hajmini bir birlikka oshirish natijasida korxona daromadini oshirish mumkin.

Ishlab chiqarishda to'la ishlatilmaydigan xom ashyolar **kamyob bo'lmagan (ortiqcha) xom-ashyo** deb ataladi. Bunday xom ashyolarning ikkilamchi bahosi 0 ga teng bo'ladi.

Mahsulot ishlab chiqarishda kamyob bo'lmagan xom ashyolarni oshirib sarf qilish natijasida korxona daromadini oshirib bo'lmaydi.

Deylik, xom ashyolarning b_i zahirasi o'zgaruvchan bo'lsin. X^0 optimal rejani o'zgartirmagan holda xom ashyolar sarfini qanchalik o'zgartirish mumkin, hamda b_i ning o'zgarishi maqsad funktsiyaning ekstremal qiymatiga qanday ta'sir etadi?- degan savol tug'ilishi mumkin. Bu savolga ikkilanish nazariyasining 3-teoremasi javob beradi.

3-teorema. Optimal baho W_i^0 ning qiymati i - xom ashyoning b_i zahirasi bir birlikka o'zgarganda maqsad funktsiya Y_{max} ning o'zgargan miqdorini ko'rsatadi, ya'ni

$$W_i^0 = \frac{\partial Y_{\max}}{\partial b_i}$$

Agar ∂b_i ni Δb_i ga, ∂Y_{max} ni ΔY_{max} ga almashtirsak, u holda

$$W_i^0 = \frac{\Delta Y_{\max}}{\Delta b_i}$$

yoki

$$\Delta Y_{max} = W_i^0 \Delta b_i$$

Bundan, agar $\Delta b_i=1$ bo'lsa, u holda $\Delta Y_{max} = W_i^0$ bo'ladi, ya'ni ikkilangan masalaning optimal yechimi kamyob xom ashyolar miqdorini bir birlikka oshirib sarf qilinganda maqsad funktsiyaning qancha miqdorga o'zgarishini ko'rsatadi.

Misol. quyida keltirilgan masalaning va unga ikkilangan masalaning yechimini toping hamda ikkilanish nazariyasining asosiy teoremalarining o'rinli ekanini tekshiring.

$$\begin{gathered} x_1+2x_2+x_3 \le 18, \\ 2x_1+x_2+x_3 \le 16, \\ x_1+x_2 \le 8, \\ x_2+x_3 \le 6, \\ x_j \ge 0,\ (j=1,\ 2,\ 3) \\ Y = 3x_1+4x_2+2x_3. \longrightarrow max \end{gathered}$$

Yechish. Masalaga ikkilangan masalani tuzamiz:

$$\begin{gathered} W_1+2W_2+W_3 \ge 3, \\ 2W_1+W_2+W_3+W_4 \ge 4, \\ W_1+W_2+W_4 \ge 2, \\ W_1 \ge 0,\ W_2 \ge 0,\ W_3 \ge 0,\ W_4 \ge 0, \\ F=18W_1+16W_2+8W_3+6W_4. \longrightarrow min \end{gathered}$$

Berilgan masalani kanonik ko'rinishga keltiramiz va simpleks usul bilan yechamiz.

$$\begin{gathered} x_1+2x_2+x_3+x_4=18, \\ 2x_1+x_2+x_3+x_5=16, \\ x_1+x_2+x_6=8, \\ x_2+x_3+x_7=6, \\ x_j \ge 0,\ (j=1,\ 2,\ \ldots,7) \\ Y = 3x_1+4x_2+2x_3. \longrightarrow max \end{gathered}$$

I.

B.v.	C	P_0	3	4	2	0	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_4	0	18	1	2	1	1	0	0	0
P_5	0	16	2	1	1	0	1	0	0
P_6	0	8	1	1	0	0	0	1	0
P_7	0	6	0	1	1	0	0	0	1
	Δ_j	0	-3	-4	-2	0	0	0	0

II.

B.v.	C	P_0	3	4	2	0	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_4	0	6	1	0	-1	1	0	0	-2
P_5	0	10	2	0	0	0	1	0	-1
P_6	0	2	1	0	-1	0	0	1	-1
P_2	4	6	0	1	1	0	0	0	1
	Δ_j	24	-3	0	2	0	0	0	4

III.

B.v.	C	P_0	3	4	2	0	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_4	0	4	0	0	0	1	0	-1	-1
P_5	0	6	0	0	2	0	1	-2	1
P_1	3	2	1	0	-1	0	0	1	-1
P_2	4	6	0	1	1	0	0	0	1
	Δ_j	30	0	0	-1	0	0	3	4

IV.

B.v.	C	P_0	3	4	2	0	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_4	0	4	0	0	0	1	0	-1	-1
P_3	2	3	0	0	1	0	1/2	-1	1/2
P_1	3	5	1	0	0	0	1/2	0	-1/2
P_2	4	3	0	1	0	0	-1/2	1	1/2
	Δ_j	33	0	0	0	0	1/2	2	3/2

Simpleks usulning 4-bosqichida masalaning optimal yechimi topildi

$$X^0=(5;\ 3;\ 3;\ 4)$$

$$Y(X^0)=33.$$

Ikkilangan masalani yechimi

$$W^0=(0;\ 1/2;\ 2;\ 3/2)$$

$$F(W^0)=33.$$

Demak, optimal yechim uchun 1-teorema o’rinli bo’lyapti:

$$Y_{max}=Y(X^0)=F\ (W^0)=F_{min}=33.$$

Berilgan masalaning yechimini uning shartlariga qo’yganda 1-shart qat’iy tengsizlikka aylanadi, ikkinchi, uchinchi va to’rtinchi shartlar esa tenglamaga aylanadi:

$$5+2*3+3=14<18$$
$$2*5+3+3=16=16$$
$$5+3=8=8$$
$$3+3=6=6$$

Shuning uchun ikkilangan masalada W_i^0=0 hamda $W_2^0 \neq 0, W_3^0 \neq 0, W_4^0 \neq 0$

Endi ikkilangan masalaning

$$W^0=(0;\ 1/2;\ 2;\ 3/2)$$

optimal yechimini uning shartlariga qo'ysak, undagi barcha shartlar ayniyatga aylanadi:

$$0+2.1/2+2=3=3$$
$$2.0+1/2+2+3/2=4=4$$
$$0+1/2+3/2=2=2$$

Shuning uchun berilgan masalaning optimal yechimidagi barcha x_j^0 kordinatalar musbat. Bu yukoridagi 2-teoremaning o'rinli ekanini ko'rsatadi.

Oxirgi simpleks jadvaldan ko'rish mumkinki,

$$\Delta_4 = W_1^0 = 0, \Delta_5 = W_2^0 = 1/2, \Delta_6 = W_3^0 = 2, \Delta_7 = W_4^0 = 3/2.$$

Demak, 3-teoremaga asosan masalaning I-shartidagi ozod hadning o'zgarishi maqsad funktsiyaga ta'sir etmaydi. Agar II-shartdagi ozod hadni bir birlikka oshirsak, maqsad funktsiya

$W_2^0 = 1/2$ mikdorga oshadi.

Xuddi shuningdek, berilgan masalaning II va IV-shartlaridagi ozod hadlarni bir birlikka oshirsak, maqsad funktsiya mos ravishda 2 va 3/2 birlikka oshadi.

Nazorat savollari

1. Berilgan va unga ikkilangan masalalarning umumiy qo'yilishi va turli shaklda yozilishini ko'rsating.
2. Berilgan va unga ikkilangan masalalarning iqtisodiy ma'nosini izohlang.
3. Berilgan va unga ikkilangan masalalarning maqsad funktsiyalari orasidagi bog'lanish qanday?
4. Berilgan va unga ikkilangan masalalardagi chegaralovchi shartlar orasida qanday bog'lanish bor?
5. Simmetrik va nosimmetrik qo'shma masalalar orasidagi farq qanday?
6. Ikkilanish nazariyasining 1-asosiy teoremasi qanday?
7. Ikkilanish nazariyasining 2-asosiy teoremasini ta'riflang va uning ma'nosini izohlang.
8. Ikkilanish nazariyasining 3-asosiy teoremasi ta'riflang va uning ma'nosini izohlang.

20-mavzu. Simpleks usul

Reja:

1. Chiziqli dasturlash masalasining bazis yechimi va uni topish usullari
2. Bazis yechimning optimallik sharti. Chekli optimal yechimning mavjud bo'lmaslik sharti. Yangi bazis yechimga o'tish qoidasi
3. Chiziqli dasturlash masalasini yechish uchun simpleks usul

Tayanch iboralar:
Ajratilgan o'zgaruvchilar; ajratilmagan o'zgaruvchilar; bazis; bazis o'zgaruvchi; bazis yechim; umumiy yechim; nomanfiy bazis yechim; nazorat tenglama; aniqlovchi koeffitsient; 0-tenglama; X-tenglama; 0-tenglamalar sistemasi; X-tenglamalar sistemasi; simpleks usul; simpleks jadval; optimallik mezoni; optimal yechimning mavjud emaslik mezoni.

Vektor formada yozilgan chiziqli dasturlash masalasini ko'ramiz:

$$P_1x_1 + P_2x_2 + ... + P_nx_n = P_0 \text{,} \quad (1)$$

$$X \geq 0 \text{ ,} \quad (2)$$

$$Y = CX \to \min \text{ .} \quad (3)$$

Bu masala chiziqli dasturlash masalasining kanonik ko'rinishidan iborat. Agar masala bunday ko'rinishda berilmagan bo'lsa, u holda I bobda ko'rsatilgan chiziqli almashtirishlarni bajarib uni shunday ko'rinishga keltirish mumkin. Berilgan (1)-(3) masalaning optimal yechimi mavjud bo'lishi uchun (1) sistema birgalikda hamda bittadan ortiq nomanfiy yechimga ega bo'lishi va demak, (1) sistemaning r rangi noma'lumlar soni n dan kichik bo'lishi kerak, ya'ni $r<n$. Bu yerda $r>n$ ma'noga ega emasligini hamda $r=n$ bo'lganda sistema yagona yechimga ega bo'lishi va optimal yechimni tanlash uchun imkoniyat bo'lmasligini aytib o'tish o'rinli. Deylik, $r=m$ $(m<n)$ tenglik o'rinli bo'lsin. U holda n ta $P_1, P_2, ..., P_n$ vektorlar sistemasi m ta o'zaro chiziqli bog'liq bo'lmagan vektorlar sistemasini o'z ichiga oladi. Bunday vektorlar sistemasi **bazis** deb ataladi. Berilgan $P_1, P_2, ..., P_n$ vektorlar sistemasida bir necha bazis mavjud bo'lishi mumkin, lekin ularning umumiy soni C_n^m dan oshmaydi, hamda har bir bazis m ta o'zaro chiziqli bog'liq bo'lmagan vektorlar sistemasidan iborat bo'ladi.

Bazisga kiruvchi vektorlar **bazis vektorlar**, ularga mos keluvchi o'zgaruvchilar esa **bazis o'zgaruvchilar** bo'lishini I bobda ko'rgan edik.

Deylik, $P_1, P_2, ..., P_n$ vektorlar tarkibidagi bitta bazis birinchi m ta $P_1, P_2, ..., P_m$ vektorlarni o'z ichiga olsin. Bu holda bu vektorlarga mos keluvchi $x_1, x_2, ..., x_m$ o'zgaruvchilar bazis o'zgaruvchilar hamda $x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n$ o'zgaruvchilar esa erkli o'zgaruvchilar bo'ladi. Bunday farazda (1) sistemani Jordan-Gauss usulini qo'llab quyidagi ko'rinishga keltirish mumkin:

$$x_i = b_i - \sum_{j=1}^{n-m} a_{ij} x_{m+j}, \qquad (i = 1,2,...,m) \qquad (4)$$

Bu tenglik $x_1,x_2,...,x_m$ bazis o'zgaruvchilarning erkli $x_{m+1}, x_{m+2},...,x_n$ o'zgaruvchilar orqali ifodasini ko'rsatadi. (4) ko'rinishdagi ifoda (2.1) sistemaning **umumiy yechimi** yoki uning $x_1,x_2,...,x_m$ bazisga nisbatan **aniqlangan formasi** deb ataladi. (4) ko'rinishdagi sistema *X*- tenglamalar sistemasi deb ham ataladi.

Agar $P_1, P_2, ..., P_n$ vektorlar sistemasi boshqa bazisga ham ega bo'lsa, u holda (1) sistemani boshqa bazis o'zgaruvchilarga nisbatan aniqlangan formasini ham topish mumkin.

(4) tenglikdagi x_{m+j} $(j=1,2,...,n)$ erkli o'zgaruvchilarga aniq qiymatlar berib, bazis o'zgaruvchilarning mos qiymatlarini topish va demak, berilgan (1) sistemaning aniq bir xususiy yechimini topish mumkin.

Erkli o'zgaruvchilarga 0 qiymat berib topiladigan xususiy yechim **bazis yechim** deb ataladi. (4) sistemaga mos keluvchi bazis yechim:

$x_1=b_1, x_2=b_2,..., x_m=b_m, x_{m+1}=0, x_{m+2}=0,..., x_n=0$

yoki

$$X=(b_1, b_2,..., b_m,0,0,...,0).$$

Berilgan n ta $P_1, P_2, ..., P_n$ vektorlar sistemasidagi bazislar soni C_n^m dan oshmasligini va har bir bazisga aniq bir bazis echim mos kelishini nazarga olib, (1) sistemadagi bazis echimlar soni C_n^m dan oshmaydi deb xulosa qilish mumkin.

Agar (1) sistemaning bazis yechimidagi barcha o'zgaruvchilar nomanfiy qiymatlarni qabul qilsa, bunday bazis yechim (1) – (3) masalaning **bazis yechimi** bo'ladi. Matematik dasturlashda bazis yechim **bazis reja** deb ham ataladi (bazis reja haqida ayrim tushuncha va tasdiqlar I bobda keltirilgan).

Bazis reja $r=m$ tadan ortiq musbat komponentalarni o'z ichiga ola olmaydi. Agar undagi musbat komponentalar soni m ga teng bo'lsa, bunday bazis reja **aynimagan reja**, agar m dan kichik bo'lsa, u **aynigan bazis reja** bo'ladi.

Agar (1)-(3) chiziqli dasturlash masalasining yechimlar (rejalar) to'plami bo'sh bo'lmasa, u holda bu rejalar ichida kamida bittasi bazis reja bo'lishini isbotlash mumkin.

Endi chiziqli dasturlash masalasining bazis yechimini topish usullari bilan tanishamiz. Buning uchun quyidagi ko'rinishda yozilgan chiziqli dasturlash masalasiga murojaat qilamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ---------------- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{5}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0, \tag{6}$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min . \tag{7}$$

Yuqorida ta'kidlaganimizdek, agar bu masala optimal yechimga ega bo'lsa, u holda uning kamida bitta bazis yechimi mavjud bo'ladi va u (5) sistemaning nomanfiy yechimlaridan biri bo'ladi. Demak, berilgan masalaning aniq bir bazis rejasini topish uchun (5) sistemaning nomanfiy bazis yechimini topish kerak.

Quyida (5) sistemaning nomanfiy bazis yechimini topish usuli bilan tanishamiz.

Bu usulning algoritmi quyidagidan iborat.

1. (5) sistemadagi tenglamalarning chap tomonidan barcha elementlar o'ng tomonga o'tkazilib 0 – tenglamalar sistemasi tuziladi:

$$\begin{cases} 0 = \ b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n, \\ 0 = \ b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \cdots - a_{2n}x_n, \\ -------------------- \\ 0 = \ b_m - a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 - \cdots - a_{mn}x_n. \end{cases} \tag{8}$$

2. Berilgan sistemaning birgalikda emaslik va nomanfiy yechimini mavjud emaslik shartlari tekshiriladi:

a) agar (8) sistemadagi kamida bitta tenglama

$$0 = b + 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n$$

ko'rinishda bo'lib, $b \neq 0$ bo'lsa, berilgan tenglamalar sistemasi birgalikda bo'lmaydi.

b) agar (8) sistemada kamida bitta tenglama

$$0 = b + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n$$

ko'rinishda bo'lib b, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ lar bir xil ishorali bo'lsa, berilgan sistema nomanfiy yechimga ega bo'lmaydi.

Agar yuqoridagi a) va b) shartlardan birortasi bajarilsa, yechish jarayoni to'xtatiladi, aks holda sistemani yechish davom ettiriladi.

3. Agar (8) tenglamalar sistemasida

$$0 = 0 + 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \ldots + 0\cdot x_n$$

ko'rinishdagi tenglama qatnashsa, bunday tenglamalarni, noma'lumlarning ixtiyoriy qiymatlari qanoatlantirgani uchun, o'chirib tashlanadi.

4. Qolgan 0 – tenglamalarni o'zaro qo'shib, nazorat tenglama (n.t.) deb ataluvchi tenglama tuziladi. Nazorat tenglama ikki xil vazifani bajaradi:

1)ajratilishi kerak bo'lgan noma'lum nazorat tenglamadan tanlanadi;

2)har bir qadamdan keyin hosil bo'lgan nazorat tenglama qolgan 0 – tenglamalar yig'indisiga teng ekanligiga asoslanib, hisoblashlar to'g'ri olib borilayotganini tekshirib borish mumkin.

5. Nazorat tenglamadan koeffitsienti eng kichik bo'lgan noma'lum (masalan, x_k) ajratilishi kerak bo'lgan noma'lum sifatida tanlanadi.

6. Tanlangan x_k noma'lum

$$\min_{a_{ik}<0} \frac{b_i}{|a_{ik}|} = \frac{b_l}{b_{lk}}.$$

shartni qanoatlantiruvchi *l*-tenglamadan ajratilib, yangi sistemaning birinchi tenglamasi tuziladi. Har bir tenglamaga mos keluvchi $b_i/|a_{ik}|$ ($a_{ik}<0$) nisbat *i*-tenglamada x_k noma'lum bo'yicha hisoblangan aniqlovchi koeffitsient (A.K.) deb ataladi.

7. Topilgan x_k noma'lumning qiymatini eski sistemaning qolgan tenglamalariga va nazorat tenglamaga qo'yish uchun bu tenglamalarga qo'shimcha tenglama tuziladi.

8.Har bir tenglamani, shu jumladan nazorat tenglamani o'zining qo'shimchasi bilan qo'shib yangi sistemaning qolgan tenglamalari va nazorat tenglamasi hosil qilinadi. Agar hosil bo'lgan yangi sistema uchun yuqoridagi a) va b) mavjud emaslik mezonlari bajarilmasa, yuqoridagi 4-8 punktlarda qilingan ishlar yana takrorlanadi. Shunday yo'l bilan sistemani yechish hamma **0**-tenglamalar **x**-tenglamaga (noma'lumi ajratilgan tenglamaga) aylanguncha, ya'ni nazorat tenglama **0=0** ko'rinishga kelguncha takrorlanadi. So'ngra sistemaning nomanfiy yechimi (haqiqiy yoki bazis) yoziladi.

Hosil bo'lgan x- tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishda bo'lsin deb faraz qilamiz:

$$\begin{cases} x_1 = b_1^1 + a_{1m+1}^1 x_{m+1} + a_{1m+2}^1 x_{m+2} + \ldots + a_{1n}^1 x_n, \\ x_2 = b_2^1 + a_{2m+1}^1 x_{m+1} + a_{2m+2}^1 x_{m+2} + \ldots + a_{2n}^1 x_n, \\ ---------------------- \\ x_m = b_m^1 + a_{mm+1}^1 x_{m+1} + a_{mm+2}^1 x_{m+2} + \ldots + a_{mn}^1 x_n, \end{cases} \tag{9}$$

bu yerda $x_1, x_2, \dots, x_m$ – bazis o'zgaruvchilar, $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ – erkli o'zgaruvchilar. Erkli o'zgaruvchilarni 0 ga tenglab berilgan sistemaning nomanfiy (haqiqiy yoki bazis) yechimi yoziladi:

$$X = (b_1^1, b_2^1, \dots, b_m^1, 0, 0, \dots, 0) \qquad (10)$$

1-misol. Sistemaning nomanfiy bazis yechimini toping.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 5, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.$$

Yechish. Berilgan tenglamalar sistemasini 0-tenglamalar sistemasiga aylantiramiz va nazorat tenglama tuzamiz.

$$\left\{\begin{array}{l} 0 = 1 - x_1 - \underline{2x_2} + x_3 + x_4, \\ \begin{cases} 0 = 2 + x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4, \\ -2x_2 = -1 + x_1 - x_3 - x_4, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 = 5 - x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4, \\ -5x_2 = -\frac{5}{2} + \frac{5}{2}x_1 - \frac{5}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_4, \end{cases} \\ \begin{cases} н.т. 0 = 8 - x_1 - 9x_2 - 3x_3 + x_4, \\ -9x_2 = -\frac{9}{2} + \frac{9}{2}x_1 - \frac{9}{2}x_3 - \frac{9}{2}x_4, \end{cases} \end{array}\right. \left| \begin{array}{l} 1/2 \\ 2/2 = 1 \\ \\ 5/5 = 1 \\ \\ \\ \\ \end{array}\right.$$

Nazorat tenglamadan eng kichik koeffitsientli noma'lumni, ya'ni x_2 ni tanlaymiz. 0-tenglamalar sistemasidagi har bir tenglama uchun $b_i/|a_{i2}|$ $(a_{i2}<0)$ nisbatlarni, ya'ni aniqlovchi koeffitsientlarni hisoblaymiz.

Aniqlovchi koeffitsientlar ichida eng kichigiga mos kelgan 1-tenglamadan x_2 ni ajratib x – tenglamaga aylantiramiz:

$$\mathbf{x}_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathbf{x}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{x}_3 + \frac{1}{2}\mathbf{x}_4$$

Bu tenglamadan foydalanib eski sistemaning har bir qolgan tenglamalariga hamda nazorat tenglamaga qo'shimcha tenglama tuzamiz va ularni mos tenglamalar tagiga yozamiz.

Har bir tenglamani va nazorat tenglamani o'zining qo'shimchasi bilan qo'shib yangi sistemani hosil qilamiz.

$$\left\{\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4, \\ \frac{1}{2}x_3 = \frac{1}{8} + \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_4, \end{array}\right. \\
0 = 1 + 2x_1 - 4x_3 - 2x_4, \\
\left\{\begin{array}{l} 0 = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}x_1 - \frac{7}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4, \\ -\frac{7}{2}x_3 = -\frac{7}{8} - \frac{7}{4}x_1 + \frac{7}{4}x_4, \end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{l} н.т. \quad 0 = \frac{7}{2} + \frac{7}{2}x_1 - \frac{15}{2}x_3 - \frac{7}{2}x_4, \\ \qquad -\frac{15}{2}x_3 = -\frac{15}{8} - \frac{15}{4}x_1 + \frac{15}{4}x_4, \end{array}\right.
\end{array}\right.
\left|\begin{array}{c} \text{—} \\ \\ 1/4 \\ \\ 5/7 \\ \\ \\ \end{array}\right|$$

Yangi sistemaning nazorat tenglamasidan eng kichik koeffitsientli x_3 noma'lumni tanlaymiz va sistemadagi tenglamalarda bu noma'lum uchun aniqlovchi koeffitsient hisoblaymiz. Aniqlovchi koeffitsientlar ichida eng kichigi 2-tenglamaga mos kelgani uchun x_3 ni 2-tenglamadan ajratib x-tenglamaga aylantiramiz.

$$x_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_4$$

Topilgan x_3 ning qiymatini boshqa tenglamalarga va nazorat tenglamaga qo'yish uchun ularga qo'shimcha tenglamalar tuzamiz. Har bir tenglamani va nazorat tenglamani o'zining qo'shimchasi bilan qo'shib yangi sistemani hosil qilamiz.

Endi nazorat tenglamadan x_1 ni tanlab uning ustida yuqoridagi ishlarni bajarib quyidagi sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l} x_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_4, \\ \frac{1}{2}x_1 = \frac{5}{4} - 2x_2 - \frac{1}{2}x_4, \end{array}\right. \\
\quad x_2 = \frac{5}{8} - \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_4, \\
\left\{\begin{array}{l} \quad 0 = \frac{13}{8} - \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_4, \\ -\frac{1}{4}x_1 = -\frac{5}{8} + x_1 + \frac{1}{4}x_4, \end{array}\right.
\end{array}
\begin{array}{l} \left|\begin{array}{c} \text{—} \\ \\ \\ 5/2 \end{array}\right| \\ \left|\begin{array}{c} 13/2 \\ \\ \end{array}\right| \end{array}$$

$$\begin{cases} н.т. \quad 0 = \frac{13}{8} - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_4, \\ -\frac{1}{4}x_1 = -\frac{5}{8} + x_2 + \frac{1}{4}x_4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{2} - 4x_2 - x_4, \\ x_3 = \frac{3}{2} - 2x_2 - x_4, \\ 0 = 1 + x_2 + \frac{1}{2}x_4, \\ н.т. 0 = 1 + x_2 + \frac{1}{2}x_4, \end{cases}$$

Hosil bo'lgan yangi sistemada b) mavjud emaslik sharti bajariladi. 3-tenglamada ozod had bilan noma'lumlar oldidagi koeffitsientlar bir xil ishorali bo'lganligi sababli sistema nomanfiy yechimga ega bo'lmaydi.

Yuqoridagi usul bilan chiziqli tengsizliklar sistemasining ham nomanfiy yechimini topish mumkin. Lekin bunda tengsizliklarning kichik tomoniga $x_{m+1} \geq 0$, $x_{m+2} \geq 0$, …, $x_{m+n} \geq 0$ qo'shimcha o'zgaruvchilar qo'shib tenglamalar sistemasini hosil qilish kerak bo'ladi.

2-misol. Berilgan tengsizliklar sistemasining nomanfiy bazis yechimini toping.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 \leq 2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Yechish. Sistemadagi birinchi tengsizlikga x_5 ni, ikkinchisiga x_6 ni qo'shib quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + x_6 = 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0. \end{cases}$$

Hosil bo'lgan tenglamalar sistemasini yuqoridagi algoritm asosida yechamiz.

$$I \quad qadam \begin{cases} 0 = 2 - x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5, \\ \begin{cases} 0 = 5 - 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - x_6, \\ -2x_1 = -4 + 4x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 2x_5, \end{cases} \\ \begin{cases} н.т. 0 = 7 - 3x_1 - 3x_2 - x_3 - x_5 - x_6, \\ -3x_1 = -6 + 6x_2 - 6x_3 + 3x_4 + 3x_5, \end{cases} \end{cases} \quad \left| \begin{array}{c} A.K.(x_1) \\ \hline 2 \\ 5/2 \\ \\ \\ \\ \end{array} \right|$$

$$|A.K.(x_3)|$$

$$II \quad qadam \begin{cases} \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5, & -- \\ 2x_3 = \frac{2}{7} + \frac{6}{7}x_2 + \frac{6}{7}x_4 + \frac{4}{7}x_5 - \frac{2}{7}x_6, \end{cases} \\ 0 = 1 + 3x_2 - 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 - x_6, & |1/7 \quad | \\ \begin{cases} н.т. 0 = 1 + 3x_2 - 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 - x_6, \\ -7x_3 = -1 - 3x_2 - 3x_4 - 2x_5 + x_6, \end{cases} \end{cases}$$

$$III \quad qadam \begin{cases} x_3 = \frac{1}{7} + \frac{3}{7}x_2 + \frac{3}{7}x_4 + \frac{2}{7}x_5 - \frac{1}{7}x_6, \\ x_1 = \frac{16}{7} - \frac{8}{7}x_2 - \frac{1}{7}x_4 - \frac{3}{7}x_5 - \frac{2}{7}x_6, \end{cases}$$

N.T. $\quad 0 = 0$

Javob. Bazis echim: $x_1 = 16/7$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1/7$,
$x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$.

2. Bazis yechimning optimallik sharti. Chekli optimal yechimning mavjud bo'lmaslik sharti. Yangi bazis yechimga o'tish qoidasi

Deylik, kononik ko'rinishdagi (5)-(7) chiziqli dasturlash masalasining optimal yechimini topish kerak bo'lsin. Masalaning optimal yechimi uning bazis yechimlaridan biri bo'lib, unda (7) maqsad funktsiya minimal qiymatga erishadi. Demak, optimal yechimni bazis yechimlar ichidan qidirish kerak.

Faraz o'ilaylik, 1-§ da tanishgan usul bilan (5) sistema $x_1, x_2, \ldots, x_m$ bazis o'zgaruvchilarga nisbatan aniqlangan quyidagi ko'rinishga keltirilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} x_1 = b_{10} + b_{11}x_{m+1} + b_{12}x_{m+2} + \ldots + b_{1n-m}x_n, \\ x_2 = b_{20} + b_{21}x_{m+1} + b_{22}x_{m+2} + \ldots + b_{2n-m}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m = b_{m0} + b_{m1}x_{m+1} + b_{m2}x_{m+2} + \ldots + b_{mn-m}x_n, \end{cases} \qquad (11)$$

Bu sistema x- tenglamalar sistemasi deyiladi. Bu sistemadan foydalanib (2.7) maqsad funktsiyani erkli o'zgaruvchilarning funktsiyasi, ya'ni

$$Y = c_{00} + \sum_{j=1}^{n-m} c_{0j} x_{m+j} \qquad (12)$$

ko'rinishida ifodalash mumkin. (11) ifodadagi erkli o'zgaruvchilarni 0 ga tenglab, $x_1=b_{10}$, $x_2=b_{20},\ldots,x_m=b_{m0}$ bazis yechimni topamiz. Bu bazis yechimdagi (12) maqsad funktsiyaning qiymati $Y=c_{00}$ bo'ladi.

Topilgan bazis yechimni optimal yechim bo'lishini tekshirish hamda, agar bu bazis yechim optimal yechim bo'lmasa, boshqa bazis yechimga o'tish qoidasi bilan tanishish uchun (11) sistemani va (12) funktsiyani quyidagi ko'rinishdagi jadvalga joylashtiramiz.

Bazis o'zgaruvchilar	B_0	Erkli o'zgaruvchilar					
		x_{m+1}	x_{m+2}	…	x_{m+s}	…	x_n
x_1	b_{10}	b_{11}	b_{12}	…	b_{1s}	…	b_{1n-m}
x_2	b_{20}	b_{21}	b_{22}	…	b_{2s}	…	b_{2n-m}
…	…	…	…	…	…	…	…
x_k	b_{k0}	b_{k1}	b_{k2}	…	b_{ks}	…	b_{kn-m}
…	…	…	…	…	…	…	…
x_m	b_{m0}	b_{m1}	b_{m2}	…	b_{ms}	…	b_{mn-m}
Y	c_{00}	c_{01}	c_{02}	…	c_{0s}	…	c_{0n-m}

Bunday jadval **simpleks* jadval** deb ataladi. Simpleks jadvalning bir necha turlari mavjud bo'lib, ularning ba'zilari bilan keyingi paragraflarda tanishamiz.

Agar V_0 vektorning barcha elementlari uchun

$$b_{i0}>0 \ (i=1,\ldots,m)$$

shart o'rinli bo'lsa, u holda

$$X_0=(b_{10},b_{20,\ldots},b_{m0},0,0,\ldots,0)$$

vektor berilgan masalaning bazis rejalaridan biri bo'ladi. Bu rejaga maqsad funktsiyaning

$$Y(X_0)=c_{00}$$

qiymati mos keladi. Agar (12) yoyilmadagi $c_{01},c_{02},\ldots,c_{0n-m}$ elementlarning barchasi nomanfiy bo'lsa, ya'ni

$c_{0j} \geq 0$ $(j=1,2,\ldots,n\text{-}m)$ shart o'rinli bo'lsa, u holda topilgan X_0 bazis reja **optimal reja** bo'ladi. Optimal rejadagi maqsad funktsiyaning eng kichik qiymati

$$Y_{min} = Y(X_0) = c_{00}$$

bo'ladi.

Agar c_{0j} $(j=1,..,n\text{-}m)$ koeffitsientlardan kamida bittasi manfiy ishorali bo'lsa, u holda topilgan bazis reja optimal reja bo'lmaydi. Uni optimal rejaga yaqinroq bo'lgan, ya'ni

$$Y(X_1) \leq Y(X_0)$$

shartni qanoatlantiruvchi boshqa X_1 bazis reja bilan almashtirish kerak bo'ladi. Bunday jarayonni amalga oshirish uchun quyidagi ishlarni bajarish kerak:

1) $$\min_{c_{0j}<0} c_{0j} = c_{OS}$$

shartni qanoatlantiruvchi ustunga mos keluvchi x_{m+s} noma'lum tanlanadi, ya'ni bazisga kiritilishi kerak bo'lgan noma'lum belgilanadi. Bu yerda ikki xil vaziyat ro'y berishi mumkin:

a) x_{m+s} erkli o'zgaruvchiga mos keluvchi ustundagi elementlarning barchasi musbat, ya'ni $b_{is} \geq 0$ $(i=1,2, \ldots,m)$. Bunday shart bajarilganda maqsad funktsiya chekli minimum qiymatga ega bo'lmaydi va berilgan masalaning chekli optimal yechimi mavjud bo'lmaydi .

b) x_{m+s} erkli o'zgaruvchiga mos keluvchi ustundagi elementlar ichida kamida bittasi manfiy ishorali bo'lsin deylik . U holda bazisga x_{m+s} o'zgaruvchi kiritilib,

$$\min_{b_{is}<0} \frac{b_{i0}}{b_{is}} = \frac{b_{k0}}{b_{ks}} \qquad (13)$$

shartni qanoatlantiruvchi qatordagi x_k o'zgaruvchi bazisdan chiqariladi . So'ngra topilgan x_{m+s} no'malumning qiymati boshqa tenglamalar va maqsad funktsiyasiga qo'yib chiqiladi. Natijada yangi bazis reja topiladi. Agar yangi bazis reja optimal reja bo'lsa, u holda masalani yechish to'xtatiladi. Aks holda, agar imkoniyat bo'lsa, yuqoridagi yo'l bilan yangi bazis yechimga o'tiladi. Bazis rejalarni almashtirish jarayoni berilgan masalaning optimal yechimi topilguncha yoki undagi maqsad funktsiyaning chekli minimum qiymati mavjud emasligi aniqlanguncha takrorlanadi.

Ixtiyoriy chiziqli dasturlash masalasining bazis rejasini topish va bu rejani boshqa bazis rejalarga almashtira borib, optimal yechimni topish jarayonini jadval ko'rinishda ham tasvirlash mumkin .Buning uchun :

1) chizikli almashtirishlarni ko'llab, berilgan chiziqli dasturlash masalasi quyidagi ko'rinishga keltiriladi,

$$\begin{cases} 0 = b_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ 0 = b_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = b_m + a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n, \end{cases} \tag{14}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0, \tag{15}$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min . \tag{16}$$

2) (14) sistemaning birgalikda emaslik va uning nomanfiy yechimining mavjud emaslik shartlari tekshiriladi (1-§ da tanishgan a) va b) shartlarning bajarilishi tekshiriladi). Agar bu shartlar bajarilmasa (14)-(16) masala quyidagi cimileks jadval deb ataluvchi jadvalga joydashtiriladi.

Bazis o'zgaruvchilar (X_{baz})	B	x_j					
		x_1	x_2	…	x_k	…	x_n
0	b_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1k}	…	a_{1n}
0	b_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2k}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…
0	b_l	a_{l1}	a_{l2}	…	a_{lk}	…	a_{ln}
…	…	…	…	…	…	…	…
0	b_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mk}	…	a_{mn}
N.T.	S_0	S_1	S_2	…	S_k	…	S_n
Y	c_0	c_1	c_2	…	c_k	…	c_n

3) jadvalning m+1 –qatoriga nazorat tenglama (N.T.)deb ataluvchi va dastlabki m ta tenglamalar yig'indisidan iborat bo'lgan tenglama joydashtirilgan .

Bunda

$$S_0 = \sum_{i=1}^{m} b_i; \quad S_1 = \sum_{i=1}^{m} a_{i1}; \quad S_2 = \sum_{i=1}^{m} a_{i2}; \ \ldots \quad S_n = \sum_{i=1}^{m} a_{in};$$

Jadvalning oxirgi m+2-qatoriga maqsad funktsiya

$Y=c_0+c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n$

ko'rinishda yozilgan.

4) nazorat tenglamadagi

$$\max_j S_j = S_k$$

shartni qanoatlantiruvchi ustunga mos keluvchi no'malum belgilanadi . Belgilangan no'malum

$$\min_{a_{ik}<0} \frac{b_i}{|a_{ik}|} = \frac{b_l}{|a_{lk}|}$$

shartni qanoatlantiruvchi tenglamadan ajratiladi. So'ngra Jordan-Gauss usulini qo'llab ajratilgan (bazis) o'zgaruvchi boshqa tenglamalardan, N.T. dan va maqsad funktsiyadan yo'q qilinadi, ya'ni simpleks jadval almashtiriladi.

Bu jarayon nazorat tenglama (N.T.) 0=0 ko'rinishga kelguncha takrorlanadi. So'nggi holatda (14)-(16) sistema bazis o'zgaruvchilarga nisbatan aniqlangan shaklga, ya'ni x- tenglamalar sistemasi ko'rinishiga keladi. Bu holda simpleks jadval 1-jadval ko'rinishga keladi. Demak, bu bosqichda masalaning boshlang'ich bazis yechimi topiladi;

5) topilgan bazis rejada jadvalning Y qatoridagi barcha hadlar $s_{0j} \geq 0$ (j=1,2,…,n-m) bo'lsa, u holda topilgan bazis reja optimal reja bo'ladi. Agar birorta $s_{0j}<0$ (j=1,2,..,m) bo'lsa, u holda topilgan bazis reja optimal reja bo'lmaydi. Uni optimal rejaga yaqinroq bo'lgan boshqa rejaga almashtirish uchun yuqorida keltirilgan usul bilan simpleks jadval almashtiriladi;

6) masalaning javobini (optimal yechimni) yozish uchun erkli o'zgaruvchilar 0 ga, bazis o'zgaruvchilar esa ozod hadlarga tenglashtiriladi. Topilgan no'malumlarning qiymatidan foydalanib Y_{min} , so'ngra (agar zarur bo'lsa) Y_{max} ning qiymati topiladi.

Misol. Masalaning bazis yechimlaridan birini toping va uni optimal yechimga aylantiring:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,5}),$$

$$Y = -x_1 + x_2 \to \min .$$

Yechish. Masalaning shartlaridagi tenglamalar sistemasini 0- tenglamalar sistemasiga aylantiramiz:

$$\begin{cases} 0 = 2 + 2x_1 - x_2 - x_3, \\ 0 = 2 - x_1 + 2x_2 - x_4, \\ 0 = 5 - x_1 - x_2 - x_5, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,5}),$$

$$Y = -x_1 + x_2 \to \min .$$

Hosil bo'lgan masalani quyidagi simpleks jadvalga joylashtiramiz va yuqorida tanishgan iteratsion jarayonni bajaramiz.

Baz. o’zgar. (X_{baz})	B	x_j					
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A. K.
0	2	2	-1	-1	0	0	2
0	2	-1	2	0	-1	0	-
0	5	-1	-1	0	0	-1	-
N.t.	9	0	0	-1	-1	-1	
Y	0	-1	1	0	0	0	
x_3	2	2	-1	-1	0	0	-
0	2	-1	2	0	-1	0	2
0	5	-1	-1	0	0	-1	5
N.t.	7	-2	1	0	-1	-1	
Y	0	-1	1	0	0	0	
x_3	6	0	3	-1	-2	0	-
x_1	2	-1	2	0	-1	0	-
0	3	0	-3	0	1	-1	1
N.t.	3	0	-3	0	1	-1	
Y	-2	0	-1	0	1	0	
x_3	9	0	0	-1	-1	-1	
x_1	4	-1	0	0	-1/3	-2/3	
x_2	1	0	-1	0	1/3	-1/3	
N.t.	0	0	0	0	0	0	
Y	-3	0	0	0	2/3	1/3	

Oxirgi bosqichda topilgan x-tenglamalar sistemasini va Y maqsad funktsiyani quyidagi ko’rinishda yozish mumkin

$$x_3 = 9 - x_4 - x_5,$$
$$x_1 = 4 - \frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5,$$
$$x_2 = 1 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5,$$
$$Y = -3 + \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5.$$

Bu yerda x_1, x_2, x_3 lar ajratilgan bazis o’zgaruvchilar, x_4 va x_5 lar esa erkli o’zgaruvchilardir. Erkli o’zgaruvchilarga 0 qiymat berib, masalaning bazis rejasini topamiz .

X_0=(4;1;9;0;0) , $Y(X_0)$=-3.

Erkli o'zgaruvchilar maqsad funktsiya Y da musbat koeffitsentlar bilan qatnashgani uchun topilgan bazis reja optimal reja bo'ladi. Optimal reja quyidagicha yoziladi:

X_{opt}=(4;1;9;0;0) , Y_{min} =-3.

3. Chiziqli dasturlash masalasini yechish uchun simpleks usul

Dantsig yaratgan simpleks usul har bir tenglamada bittadan ajratilgan no'malum (bazis o'zgaruvchi) qatnashishi shartiga asoslangan. Boshqacha aytganda, ChD masalasida m ta o'zaro chiziqli erkli vektorlar mavjud deb qaraladi. Umumiylikni buzmagan holda bu vektorlar birinchi m ta $P_1, P_2, \ldots, P_m$ vektorlardan iborat bo'lsin, deylik. U holda masala quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{cases} x_1 + a_{1m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ x_2 + a_{2m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ ------------------ \\ x_1 + a_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (17)$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0, \qquad (18)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min. \qquad (19)$$

(18) sistemani vektor shaklida yozib olaylik:

$$P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots + P_mx_m + P_{m+1}x_{m+1} + \ldots + P_nx_n = P_0, \quad (20)$$

bu yerda

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, P_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}, P_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1m+1} \\ a_{2m+1} \\ \ldots \\ a_{mm+1} \end{pmatrix}, \ldots, P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

P_1, P_2, …, P_m vektorlar sistemasi m-o'lchovli fazoda o'zaro chiziqli erkli bo'lgan birlik vektorlar sistemasidan iborat. Ular m o'lchovli fazoning bazisini tashkil qiladi. Ushbu vektorlarga mos keluvchi $x_1, x_2, \ldots, x_m$ o'zgaruvchilarni ***«bazis o'zgaruvchilar»*** deb ataladi.

x_{m+1}, $x_{m+2}, \ldots$, x_n – bazis bo'lmagan (erkli) o'zgaruvchilar. Agar erkli o'zgaruvchilarga 0 qiymat bersak, bazis o'zgaruvchilar ozod hadlarga teng bo'ladi. Natijada X_0 =($b_1, b_2, \ldots, b_m$, 0,…, 0) yechim hosil bo'ladi. Bu yechim boshlang'ich joiz yechim bo'ladi. Ushbu yechimga $x_1P_1+x_2P_2+\ldots+x_mP_m = P_0$ yoyilma mos keladi. Bu yoyilmadagi P_1, P_2, …, P_m vektorlar o'zaro erkli bo'lganligi sababli topilgan joiz yechim bazis yechim bo'ladi.

Dantsig usulida simpleks jadval quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

Bazis vekt.	C_{baz}	P_0	s_1	s_2	…	s_m	s_{m+1}	…	s_k	…	s_n
			P_1	P_2	…	P_m	P_{m+1}	…	P_k	…	P_n
P_1	s_1	b_1	1	0	…	0	a_{1m+1}	…	a_{1k}	…	a_{1n}
P_2	s_2	b_2	0	1	…	0	a_{2m+1}	…	a_{2k}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
P_l	s_l	b_l	0	0	…	0	a_{lm+1}	…	a_{lk}	…	a_{ln}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
P_m	s_m	b_m	0	0	…	1	a_{mm+1}	…	a_{mk}	…	a_{mn}
$\Delta_j=Z_j-s_j$	…	$U_0=\sum_{i=1}^{m} s_j b_j$	$\Delta_1=0$	$\Delta_2=0$	…	$\Delta_m=0$	$\Delta_{m+1}=\sum_{i=1}^{m} a_{im+1} s_i - s_{m+1}$	…	$\Delta_k=\sum_{i=1}^{m} a_{ik} s_i - s_k$	…	$\Delta_n=\sum_{i=1}^{m} a_{in} s_i - s_n$

Jadvaldagi C_{baz} bilan belgilangan ustun $x_1,x_2,\ldots,x_m$ bazis o'zgaruvchilarning chiziqli funktsiyadagi koeffitsientlardan tashkil topgan vektor, ya'ni

$$C_{baz}=(c_1,c_2,\ldots,c_m) \qquad (21)$$

Jadvalda har bir P_j vektorning ustiga x_j noma'lumning chiziqli funktsiyadagi koeffitsienti c_j yozilgan. m+1- qatorga esa $x_1,x_2,\ldots,x_m$ bazis o'zgaruvchilardagi chiziqli funktsiyaning qiymati

$$Y_0=\sum_{i=1}^{m} b_i c_i \qquad (22)$$

hamda bazis yechimning optimallik mezonini baholovchi son

$$\Delta_j = Z_j - c_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} c_i - c_j$$

$$(i=1,\ldots,m;\ \ j=1,\ldots,n) \quad (23)$$

yozilgan. Bazis o'zgaruvchilarga mos keluvchi P_1, P_2, …, P_m vektorlar bazis vektorlar deb belgilangan. Bu vektorlar uchun $\Delta_j=Z_j-s_j=0$ $(j=1,\ldots,m)$ bo'ladi. Agar barcha ustunlarda $\Delta_j \le 0$ bo'lsa, u holda

$$X=(x_1,x_2,\ldots,x_m) = (b_1,b_2,\ldots,b_m)$$

yechim optimal yechim bo'ladi. Bu echimdagi chiziqli funktsiyaning qiymati Y_0 ga teng bo'ladi.

$$\max_{Z_j-c_j\succ 0}(Z_j-c_j)=Z_k-c_k=\Delta_k$$

shartni qanoatlantiruvchi P_k vektorni bazisga kiritib, bazisdan

$$\min_{a_{ik}>0}(b_i / a_{ik}) = b_l / a_{lk} \tag{24}$$

shartni qanoatlantiruvchi P_l vektorni chiqarish kerak bo'ladi. Bu holda a_{lk} element hal qiluvchi element sifatida belgilandi. Shu element joylashgan *l*-qatordagi P_l vektor o'rniga u joylashgan ustundagi P_k vektor bazisga kiritiladi. P_l vektorning o'rniga P_k vektorni kiritish uchun simpleks jadval quyidagi formulalar asosida almashtiriladi.

$$\begin{cases} b_i' = b_i - (b_l / a_{lk}) \cdot a_{ik}, \\ b_l' = b_l / a_{lk}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{ij}' = a_{ij} - (a_{lj} / a_{lk}) \cdot a_{ik}, \\ a_{lj}' = a_{lj} / a_{lk}. \end{cases}$$

Simpleks jadval almashgandan so'ng yana qaytadan $\Delta_j \le 0$ baholar aniqlanadi. Agar barcha j lar uchun $\Delta_j \le 0$ bo'lsa, optimal yechim topilgan bo'ladi. Aks holda topilgan bazis reja boshqa bazis reja bilan almashtiriladi. Bunda quyidagi teoremalarga asoslanib ish ko'riladi:

1- teorema. Agar $X=(x_1,x_2,\dots,x_m)$ bazis reja uchun $\Delta_j=Z_j-s_j\le 0$ $(j=1,\dots,n)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda bu reja optimal reja bo'ladi.

2- teorema. Agar X_0 bazis rejada tayin bir j uchun $\Delta_j=Z_j-s_j>0$ shart o'rinli bo'lsa, u holda X_0 optimal reja bo'lmaydi va shunday X_1 rejani topish mumkin bo'ladiki, uning uchun

$$Y(X_1)<Y(X_0)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Agar tayin bir j uchun $\Delta_j=Z_j-s_j>0$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda 2- teoremaga asosan bu bazis rejani ham yangi bazis rejaga almashtirish kerak bo'ladi. Bu jarayon optimal reja topilguncha yoki masaladagi maqsad funktsiyaning quyidan chegaralanmagan ekanligi aniqlanguncha takrorlanadi.

Masalaning optimal yechimining mavjud bo'lmaslik sharti quyidagicha:

Agar tayin j uchun $\Delta_j=Z_j-s_j>0$ tengsizlik o'rinli bo'lib, bu ustundagi barcha elementlar $a_{ij}\le 0$ $(i=1,\dots,m)$ bo'lsa, u holda masalaning maqsad funktsiyasi chekli ekstremumga ega bo'lmaydi.

Faraz qilaylik, simpleks jadvalda optimallik sharti $(\Delta_j\le 0,\ j=1,\dots,n)$ bajarilsin. Bu holda bu echim

$$(X_0=B^{-1}P_0) \tag{25}$$

formula orqali topiladi. Bu yerda $B=(P_1, P_2, \dots, P_m)$ matritsa bazis vektorlardan tashkil topgan matritsadir.

(1)-(3) masala uchun V matritsa m o'lchovli O'_m , birlik matritsadir, ya'ni $B=O'_m$.

$BB^{-1}=O'_m$ bo'lganligi sababli B^{-1} matritsa ham birlik matritsadir. Demak $X_0=P_0=(b'_{10}, b'_{20}, \ldots, b'_{m0}, 0, \ldots, 0)$ optimal yechim bo'ladi.

1-misol. Masalani simpleks usul bilan yeching

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 + 3\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 - 2\mathbf{x}_5 = 7 \\ -2\mathbf{x}_2 + 4\mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4 = 12 \\ -4\mathbf{x}_2 + 3\mathbf{x}_3 + 8\mathbf{x}_5 + \mathbf{x}_6 = 10 \end{cases}$$

$x_j \geq 0$, $(j=1, 2,\ldots, 6)$

$Y = x_2 - 3x_3 + 2x_5 \rightarrow \min.$

Yechish. Belgilashlar kiritamiz va simpleks jadvalni to'ldiramiz:

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_5 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$C' = (0;\ 1;\ -\ 3;\ 0;\ 2)$$

i	Bazis vekt.	C_{baz}	P_0	0	1	-3	0	2	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_1	0	7	1	3	-1	0	-2	0
2	P_4	0	12	0	-2	4	1	0	0
3	P_6	0	10	0	-4	3	0	8	1
Δ_j			0	0	-1	3	0	-2	0
1	P_1	0	10	1	5/2	0	1/4	-2	0
2	P_3	-3	3	0	-1/2	1	1/4	0	0
3	P_6	0	1	0	-5/2	0	-3/4	8	1
Δ_j			-9	0	1/2	0	-3/4	-2	0
1	P_2	1	4	2/5	1	0	1/10	-4/5	0
2	P_3	-3	5	1/5	0	1	3/10	-2/5	0
3	P_6	0	11	1	0	0	-1/2	6	1
Δ_j			-11	-1/5	0	0	-4/5	-8/5	0

Simpleks usulning I bosqichida bazisga R_3 vektor kiritilib R_4 vektor chiqarildi, II bosqichida R_2 kiritildi va R_1 chiqarildi. Simpleks jadval (7) formulalar asosida almashtirilib borildi. III bosqichda optimal yechim topildi:

$$X = (0;\ 4;\ 5;\ 0;\ 0;\ 11)\ Y_{min} = -\ 11.$$

Nazorat savollari:

1. Bazis nima?
2. Bazis vektorlar va bazis o’zgaruvchilar nima?
3. Chiziqli tenglamalar sistemasining umumiy yechimi yoki bazis o’zgaruvchilarga nisbatan aniqlangan formasi qanday?
4. Chiziqli tenglamalar sistemasining bazis yechimi deganda qanday yechimni tushunamiz?
5. Chiziqli tenglamalar sistemasining nomanfiy bazis yechimi nima?
6. 0- tenglama va 0- tenglamalar sistemasini ta’riflang.
7. Chiziqli tenglamalar sistemasining birgalikda bo’lmaslik sharti qanday?
8. Chiziqli tenglamalar sistemasining nomanfiy yechimi qachon mavjud bo’lmaydi?
9. Nazorat tenglama nima?
10. Aniqlovchi koeffitsient nima va u qanday topiladi?
11. Simpleks jadval nima va uning qanday ko’rinishlarini bilasiz?
12. Chiziqli dasturlash masalasining optimal rejasi (yechimi) nima?
13. Optimal yechimning mavjud emaslik sharti qanday?
14. Bazis yechimlar qanday qoida asosida almashtiriladi?
15. Simpleks (Dantsig) usulining g’oyasi qanday?
16. Dantsig usulida optimallik mezoni qanday?
17. Dantsig usulida optimal yechimning mavjud emaslik mezoni qanday?

21-mavzu. Sun'iy bazis usuli

Reja:

1. Sun'iy bazis usuli
2. Xos chiziqli dasturlash masalasi. Tsikllanish va undan qutilish usuli
3. «To'g'rilash» usuli

Tayanch iboralar:

sun'iy bazis, sun'iy bazis usuli, kengaytirilgan masala, xos chiziqli dasturlash masalasi, xos reja (yechim).

Agar masalaning shartlarida o'zaro erkli bo'lgan m ta birlik vektorlar (bazis vektorlar) qatnashmasa, ular sun'iy ravishda kiritiladi. Masalan, quyidagi ko'rinishdagi masala berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1 , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2 , \\ \text{--------------------------------} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

$$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0, \ \ldots, \ x_n \ge 0, \qquad (2)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max. \qquad (3)$$

Bu masalaga $x_{n+1} \ge 0$, $x_{n+2} \ge 0$, …, $x_{n+m} \ge 0$ qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritilsa, quyidagi kengaytirilgan masala hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 , \\ \text{--------------------------------} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m. \end{cases} \qquad (4)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ \ldots, \ x_n \ge 0, \ \ldots, x_{n+m} \ge 0, \qquad (5)$$

$$Y = - \ c_1x_1 - \ c_2x_2 - \ \ldots - \ c_nx_n + 0(x_{n+1} +,\ldots+ x_{n+m}) \to \min. \qquad (6)$$

U holda P_{n+1}, P_{n+2},…, P_{n+m} vektorlar bazis vektorlar va $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$ o'zgaruvchilar «bazis o'zgaruvchilar» deb qabul qilinadi.

Agar berilgan masala quyidagi ko'rinishda bo'lsa,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 , \\ \text{--------------------------------} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (7)$$

$$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0,\ \dots,\ \ x_n \geq 0, \qquad (8)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n) \to \min. \qquad (9)$$

Unga sun'iy $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ o'zgaruvchilar kiritilib ushbu kengaytirilgan masala hosil qilinadi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \text{---------------------------------} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m. \end{cases} \qquad (10)$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \dots,\ x_n \geq 0,\ x_{n+1} \geq 0, \dots,\ x_{n+m} \geq 0, \qquad (11)$$

$$Y = +\ c_1x_1 +\ c_2x_2 -\ \dots -\ c_nx_n + M(x_{n+1} + \dots + x_{n+m}) \to \min. \qquad (12)$$

bu yerda: M – etarlicha katta musbat son.

Sun'iy bazis o'zgaruvchilarga mos keluvchi $P_{n+1}, P_{n+2}, \dots, P_{n+m}$ vektorlar «sun'iy bazis vektorlar» deb ataladi.

Berilgan (7)-(9) masalaning optimal yechimi quyidagi teoremaga asoslanib topiladi.

Teorema. Agar kengaytirilgan (10)-(12) masalaning optimal yechimida sun'iy bazis o'zgaruvchilari nolga teng bo'lsa, ya'ni

$$x_{n+i} = 0 \ (i=1,\dots,m)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda bu yechim berilgan masalaning ham optimal yechimi bo'ladi.

Agar kengaytirilgan masalaning optimal yechimida kamida bitta sun'iy bazis o'zgaruvchi noldan farqli bo'lsa, u holda masala yechimga ega bo'lmaydi.

2-misol. Masalani sun'iy bazis usuli bilan yeching

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 + 3\mathbf{x}_2 + 2\mathbf{x}_3 + 2\mathbf{x}_4 = 3 \\ 2\mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4 = 3 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \qquad (j=1, 2, \dots, 4)$$

$$Z = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4) \to \max.$$

Yechish. Masalaga sun'iy $x_5 \geq 0$ $x_6 \geq 0$ o'zgaruvchilar kiritamiz va uni normal ko'rinishga keltiramiz.

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 + 3\mathbf{x}_2 + 2\mathbf{x}_3 + 2\mathbf{x}_4 + \mathbf{x}_5 = 3 \\ 2\mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4 + \mathbf{x}_6 = 3 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \qquad (j=1, 2, \dots, 6)$$

$$Z = -5x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 + M(x_5 + x_6)) \to \min.$$

Hosil bo'lgan masalani simpleks jadvalga joylashtirib, uni simpleks usul bilan echamiz.

Shunday qilib simpleks usul bo'yicha 4-ta qadamdan iborat yaqinlashishda optimal yechim topildi. $\Delta_j \leq 0$. Optimal yechim X=(1;0;1;0;0;0)

Y_{min}=-9.

I	Bazis vekt.	C_{baz}	P_0	-5	-3	-4	1	M	M
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1 2	P_5 P_6	M M	3 3	1 2	3 2	2 1	2 1	1 0	0 1
Δ_j			6M	3M+5	5M +3	3M+4	3M-1	0	0
1 2	P_2 P_6	-3 M	1 1	1/3 4/3	1 0	2/3 -1/3	2/3 -1/3	1/3 -2/3	0 1
Δ_j			M-3	4/3M+ 4	0	- 1/3M+2	-1/3M-3	-5/3M-1	0
1 2	P_2 P_1	-3 -5	3/4 3/4	0 1	1 0	3/4 -1/4	3/4 -1/4	1/2 -1/2	-1/4 3/4
Δ_j			-6	0	0	3	-2	1-M	-3-M
1 2	P_3 P_1	-4 -5	1 1	0 1	4/3 1/3	1 0	1 0	2/3 -1/3	-1/3 2/3
Δ_j			9	0	-4	0	-5	-1-M	-2-M

Kengaytirilgan masalaning optimal yechimidagi sun'iy o'zgaruvchilar 0 ga teng (x_5=0, x_6=0). Shuning uchun (3-teoremaga asosan) berilgan masalaning optimal yechimi

X=(1;0;1;0); Z_{min}=-9; Z_{max}=9; bo'ladi.

2. Xos chiziqli dasturlash masalasi.

Agar R_i bazis vektorlarga mos keluvchi birorta x_i =0 bo'lsa, ya'ni

$$P_0=x_1P_1+x_2P_2+\ldots+x_mP_m$$

yoyilmadagi x_i lardan kamida bittasi nolga teng bo'lsa, chiziqli dasturlash masalasi **xos chiziqli dasturlash masalasi** deyiladi va P_i bazis vektorlarga mos keluvchi bazis reja – **xos reja** bo'ladi.

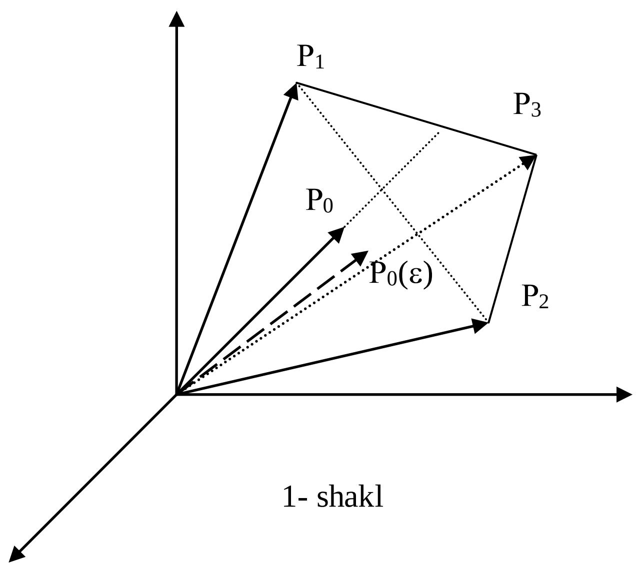
Yuqorida, simpleks usulni asoslash jarayonida chiziqli dasturlash masalalarini xosmas deb faraz qilgan edik. Bu farazga ko'ra simpleks usulning har bir iteratsiyasidan so'ng chiziqli funktsiyaning qiymati kamaya borishini va chekli sondagi iteratsiyadan so'ng u o'zining optimal qiymatiga erishishi mumkinligini ko'rsatgan edik.

Agar masalaning bazis rejasi xos reja bo'lsa,

$$\theta = \frac{x_k}{x_{lk}} = 0$$

bo'lishi mumkin. U holda bir bazis rejadan ikkinchisiga o'tganda, chiziqli funktsiyaning qiymati o'zgarmaydi. Ba'zan bunday masalalarni yechish jarayonida tsikllanish holati, ya'ni ma'lum sondagi iteratsiyadan so'ng oldingi iteratsiyalardan birortasiga qaytish holati ro'y berishi mumkin. Tsikllanish holati ro'y bergan masalalarda optimal reja hech qachon topilmaydi. Tsikllanish odatda, bazis rejadagi birdan ortiq $x_i=0$ bo'lgan holatlarda ro'y berishi mumkin. Birdan ortiq vektorlar uchun $\theta=0$ bo'lganda bazisdan chiqariladigan vektorni to'g'ri aniqlash tsikllanish holatini oldini olishda katta ahamiyatga egadir. Bundan ko'rinadiki, xos masalalarni yechishga moslashtirilgan usullar masalaning optimal yechimini topishga ishonch bildirib bazisdan chiqariladigan vektorni tanlashning yagona yo'lini ko'rsatishi kerak.

Xos chiziqli dasturlash masalasining geometrik tasvirini 1-shakldan ko'rish mumkin. Bunda P_0 vektor P_1, P_2, P_3 vektorlardan tuzilgan qavariq konusning sirtida yotibdi. Shuning uchun P_0 vektor P_1, P_2, P_3 vektorlarning qavariq kombinatsiyasi sifatida ifodalab bo'lmaydi, lekin uni P_1 va P_2 vektorlarning qavariq kombinatsiyasi orqali ifodalash mumkin. P_0 ni P_1, P_2, P_3 vektorlarning qavariq kombinatsiyasi orqali ifodalash uchun $x_1P_1+x_2P_2+x_3P_3$ yoyilmadagi P_3 vektorning koeffitsienti $x_3=0$ bo'lishi kerak.



1- shakl

Agar P_3 vektorni siljitib P_1, P_2, P_3 vektorlardan tashkil topgan qavariq konusning ichiga kiritsak, u holda uni P_1, P_2, P_3 vektorlarning qavariq kombinatsiyasi orqali ifodalash mumkin bo'ladi. P_3 vektorni qavariq konusning ichiga siljitish uchun ixtiyoriy kichik $\varepsilon>0$ son olib, P_1, P_2, P_3 vektorlarning

$$\varepsilon P_1+\varepsilon^2 P_2+\varepsilon^3 P_3$$

kombinatsiyasini tuzamiz va uni masalaning

$$x_1P_1+x_2P_2+x_3P_3 =P_0$$

cheklamalarining o'ng tomoniga qo'shib yozamiz:

$$x_1P_1+x_2P_2+x_3P_3 =P_0 +\varepsilon P_1+\varepsilon^2 P_2+\varepsilon^3 P_3= P_0(\varepsilon) \qquad (13)$$

Hosil bo'lgan $P_0(\varepsilon)$ vektor P_1, P_2, P_3 vektorlardan tashkil togan qavariq konusning ichida yotadi (2.1- shakl). Demak, P_0 ni P_1, P_2, P_3 vektorlarning qavariq kombinatsiyasi orqali ifodalash mumkin.

Xuddi shuningdek, umumiy holda berilgan masalaning

$$x_1P_1+x_2P_2+\ldots+x_mP_m+\ldots+x_nP_n = P_0 \qquad (14)$$

cheklamalarini quyidagicha yozish mumkin:

$$x_1P_1+x_2P_2+\ldots+x_mP_m+\ldots+x_nP_n =$$
$$P_0+\varepsilon P_1+\varepsilon^2 P_2+\ldots+\varepsilon^m P_m+\ldots+\varepsilon^n P_n = P_0(\varepsilon) \qquad (15)$$

Faraz qilaylik, $P_1, P_2, \ldots, P_m$ bazis vektorlar bo'lib, ular B matritsani tashkil qilsin. U holda

$$\overline{X} = B^{-1}P_0 \geq 0 \qquad (16)$$

berilgan masalaning yechimi va

$$\overline{X}(\varepsilon) = B^{-1}P_0(\varepsilon) \geq 0 \qquad (17)$$

o'zgartirilgan (2.41) chegaralovchi shartli masalaning yechimi bo'ladi.

$$\overline{X_j} = B^{-1}P_j \qquad (18)$$

tenglik o'rinli bo'lgani uchun (17) ni ushbu ko'rinishda ifodalash mumkin.

$$\overline{X}(\varepsilon) = B^{-1}P_0 + \varepsilon B^{-1}P_1 + \varepsilon^2 B^{-1}P_2 + \ldots + \varepsilon^m B^{-1}P_m + \ldots + \varepsilon^n B^{-1}P_n =$$
$$= \overline{X} + \varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2 + \ldots + \varepsilon^m X_m + \ldots + \varepsilon^n X_n. \qquad (19)$$

Demak, $\overline{b_i}(\varepsilon)$ quyidagicha aniqlanadi:

$$\overline{b_i}(\varepsilon) = \overline{b_i} + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon^j a_{ij} \qquad (20)$$

$$\overline{b_i}(\varepsilon) = \overline{b_i} + \varepsilon^i + \sum_{j=m+1}^{n} \varepsilon^j a_{ij} \qquad (21)$$

ε ni shunday kichik son deb qabul qilish mumkinki, $\overline{b_i}(\varepsilon) > 0$ tengsizlik barcha $i=1,2,\ldots,m$ lar uchun o'rinli bo'ladi. Bazisdan chiqariladigan P_l vektorni aniqlash uchun

$$\theta_0 = \frac{b_l(\varepsilon)}{a_{lk}} = \min_i \frac{\overline{b_i}(\varepsilon)}{a_{ik}} = \frac{b_l + \varepsilon^i + \sum_{j=m+1}^{n} \varepsilon^j a_{ij}}{a_{lk}} > 0 \qquad (22)$$

qiymatni barcha $a_{lk}>0$ lar uchun hisoblaymiz. (21) ga asosan $\frac{b_i(\varepsilon)}{a_{ik}}$

nisbat $i=l$ da minimumga erishadi, chunki $b_l(\varepsilon)$ ε^j ni o'z ichiga oluvchi birdan-bir o'zgaruvchidir. (19) va (22) ga asosan θ_0 (20) dagi ε^j oldidagi koeffitsientdan foydalanib aniqlanadi.

Simpleks jadval bo'yicha ishlash jarayonini quyidagicha tartiblash mumkin.

Agar

$$\theta_0 = \min_i \frac{\overline{b_i}}{a_{ik}}, \qquad (a_{ik} > 0)$$

qiymat, bitta $i=l$ indeks uchun o'rinli bo'lsa, u holda P_l bazisdan chiqariladi. Agar θ minimum qiymatga bir nechta i indekslarda erishisa, u holda hamma i indekslar uchun $j=l$ da a_{ij}/a_{ik} nisbat hisoblanadi. Bu nisbatlarning minimumiga mos keluvchi vektorni bazisdan chiqariladi. Agar θ minimum qiymatga bir nechta i indekslarda erishsa, u holda xuddi shunday nisbatni $j+1$ ustun uchun hisoblanadi va bu nisbatning minimum qiymatiga mos keluvchi vektor bazisdan chiqariladi.

Masalan, agar $P_1, P_2, \ldots, P_m$ bazis vektorlar uchun

$$\theta_0 = \frac{b_1}{a_{1k}} = \frac{b_2}{a_{2k}},$$

bo'lsa, u holda $\frac{a_{11}}{a_{1k}}$; $\frac{a_{21}}{a_{2k}}$ nisbatlar hisoblanib, ular o'zaro solishtiriladi.

Bunda

$$\min_j \left(\frac{a_{i1}}{a_{ik}}\right) = \frac{a_{21}}{a_{2k}}, \qquad (i = 1,2)$$

bo'lsa, P_2 vektor bazisdan chiqariladi. Agar

$$\min_i \left(\frac{a_{i1}}{a_{ik}}\right) = \frac{a_{11}}{a_{1k}}, \qquad (i = 1,2)$$

bo'lsa, bazisdan P_1 vektor chiqariladi. Agar

$$\frac{a_{11}}{a_{1k}} = \frac{a_{21}}{a_{2k}}$$

tenglik o'rinli bo'lsa, $\frac{a_{12}}{a_{1k}}$ va $\frac{a_{22}}{a_{2k}}$ nisbatlar hisoblanib, ular o'zaro solishtiriladi.

Yuqoridagidek nisbatlarni solishtirish tengsizlik hosil bo'lguncha davom ettiriladi. (21) ga asosan albatta birorta j uchun tengsizlik hosil qilishi kerak.

Bazisga kiritiladigan P_k tanlangandan so'ng, simpleks jadval ma'lum yo'l bilan almashtiriladi. Natijada topilgan yangi $\overline{X}(\varepsilon)$ bazis reja etarli darajada kichik ε uchun xosmas reja bo'ladi.

Amalda xos chiziqli dasturlash masalasi juda kam uchraydi. Quyida biz keltiradigan masala Amerika matematigi Bil tomonidan tuzilgan.

Bu masala xos masala bo'lib, uni yuqorida keltirilgan «to'g'rilash» usulini qo'llamay echganda tsikllanish holati ro'y beradi. Simpleks usulning 7-iteratsiyasidan so'ng 2-iteratsiyaga qaytish holati ro'y beradi. Agar yuqorida ko'rgan «to'g'rilash» usulini qo'llamasak, bu tsikllanish holati cheksiz ravishda takrorlanishi mumkin, demak masalaning optimal echimini topish imkoniyati bo'lmaydi.

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x_1 - 60x_2 - \frac{1}{25}x_3 + 9x_4 + x_5 = 0, \\ \frac{1}{2}x_1 - 90x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 3x_4 + \quad + x_6 = 0, \qquad (I) \\ x_3 + \quad + x_7 = 1, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \qquad (j = \overline{1,7})$$

$$Y = -\frac{3}{4}x_1 + 150x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 6x_4 \to \min .$$

3. «To'g'rilash» usuli

Endi masalaga «to'g'rilash» usulini qo'llab yechamiz. Eng avval berilgan masalani quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x_1 - 60x_2 - \frac{1}{25}x_3 + 9x_4 + x_5 = 0 + \frac{1}{4}\varepsilon - 60\varepsilon^2, \\ \frac{1}{2}x_1 - 90x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 3x_4 + \quad + x_6 = 0 + \frac{1}{2}\varepsilon - 90\varepsilon^2, \qquad (II) \\ x_3 + \quad + x_7 = 1, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \qquad (j = \overline{1,7})$$

$$Y = -\frac{3}{4}x_1 + 150x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 6x_4 \to \min .$$

Bu yerda ε kichik musbat son bo'lib, uni shunday tanlash mumkinki, natijada tenglamalarning o'ng tomoniga ε ning faqat birinchi va ikkinchi darajasini qo'shish yetarli bo'lsin. (II) masalani simpleks jadvalga joylashtirib yechamiz:

I.

Baz. vek.	C_{baz}	P_0	-3/4	150	-1/50	6	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_5	0	$0+(1/4)\varepsilon-60\varepsilon^2$	1/4	-60	-1/25	9	1	0	0
P_6	0	$0+(1/2)\varepsilon-90\varepsilon^2$	1/2	-90	-1/50	3	0	1	0
P_7	0	1	0	0	1	0	0	0	1
		0	3/4	-150	1/50	-6	0	0	0

II.

P_1	-3/4	$\varepsilon-240\varepsilon^2$	1	-240	-4/25	36	4	0	0
P_6	0	$30\varepsilon^2$	0	30	3/50	-15	-2	1	0
P_7	0	1	0	0	1	0	0	0	1
		0	0	30	7/50	-33	-3	0	0

III.

P_1	-3/4	ε	1	40	8/25	-84	-12	8	0
P_2	150	ε^2	0	1	1/500	-1/2	-1/15	1/30	0
P_7	0	1	0	0	1	0	0	0	1

		0	0	0	2/25	-18	-1	-1	0

IV.

P_1	-3/4	$160\varepsilon^2+\varepsilon$	1	-160	0	-4	-4/3	8/3	0
P_3	-1/50	$500\varepsilon^2$	0	500	1	-250	-100/3	50/3	0
P_7	0	1	0	-500	0	250	100/3	-50/3	1
		0	0	-40	0	2	-1	-7/3	0

V.

P_1	-3/4	$160\varepsilon^2+\varepsilon+2/125$	1	-168	0	0	-4/5	12/5	2/125
P_2	-1/50	$500\varepsilon^2+1$	0	0	1	0	0	0	1
P_4	6	1/250	0	-2	0	1	2/15	-1/15	-1/250
		$-1/125-130\varepsilon^2-3/4\varepsilon$	0	-39	0	0	7/5	-11/5	-1/125

VI.

P_1	-3/4	$160\varepsilon^2+\varepsilon+1/25$	1	-180	0	6	0	2	1/25
P_3	-1/50	$500\varepsilon^2+1$	0	0	1	0	0	0	1
P_5	0	3/100	0	-15	0	15/2	1	-1/2	-3/100
		$-130\varepsilon^2-3/4\varepsilon-1/20$	0	-15	0	-21/2	0	-3/2	-1/20

Shunday qilib, yuqoridagi «to'g'irlash» usulini qo'llab masalani yechganda 6- bosqichda optimal yechim topiladi.

$$X(\varepsilon) = (160\varepsilon^2 + \varepsilon + 1/25;\ 500\varepsilon^2 + 1;\ 0;\ 3/100)$$

$$Y_{\min}(\varepsilon) = -130\varepsilon^2 - (3/4)\varepsilon - 1/20$$

Berilgan masalani yechimini topish uchun $\varepsilon=0$ deb qabul qilamiz.

Javob: X_0=(1/25; 0; 1; 0; 3/100), $Y_{min}(X_0)$=-1/20.

Quyidagi xos masalani to'g'rilash usulini (ε- usulni) qo'llab yeching:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - 2x_4 - 3x_5 + 4x_6 = 0, \\ x_2 + 4x_3 - 3x_4 - 2x_5 + x_6 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 1, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \qquad (j = \overline{1,7})$$

$$Y = x_3 - x_4 + x_5 + x_6 \to \max.$$

Nazorat savollari:

1. Sun'iy bazis usuli qachon qo'llaniladi?
2. Sun'iy o'zgaruvchi va qo'shimcha o'zgaruvchilar nima va ularning farqi nimadan iborat?

3. Sun’iy bazis usulida optimal yechimning mavjud emaslik sharti qanday?
4. Chiziqli dasturlash masalasining xos masalasi qanday?
5. Tsikllanish nima va u qachon ro’y berishi mumkin?
6. «To’g’rilash» usuli qachon qo’llaniladi?

22-mavzu. Transport masalasi

Reja:
1. Transport masalasining matematik modeli va xossalari
2. Transport masalasining boshlang'ich bazis rejasini topish usullari
3. Transport masalasining optimal yechimini topish uchun potentsiallar usuli
4. Xos transport masalasi va uni to'g'rilashning ε - usuli
5. Ochiq modelli transport masalasi

Tayanch so'z va iboralar

Transport masalasi, yopiq modelli transport masalasi, "band katakchalar", "bo'sh katakchalar", "shimoliy g'arb burchak" usuli, "minimal xarajatlar" usuli, xarajatlar matritsasi, potentsiallar, potentsial tenglama, yopiq kontur, xos transport masalasi, xos bazis yechim, tsikllanish, ε-usul, ochiq modelli transport masalasi.

Transport masalasi chiziqli dasturlash masalalari ichida nazariy va amaliy nuqtai nazardan eng yaxshi o'zlashtirilgan masalalardan biri bo'lib, undan sanoat va qishloq xo'jalik mahsulotlarini tashishni optimal rejalashtirish ishlarida muvaffaqiyatli ravishda foydalanilmoqda.

Transport masalasi maxsus chiziqli dasturlash masalalari sinfiga tegishli bo'lib, uning chegaralovchi shartlaridagi koeffitsientlardan tuzilgan (a_{ij}) matritsaning elementlari 0 va 1 raqamlardan iborat bo'ladi va har bir ustunda faqat ikkita element 0 dan farqli, qolganlari esa 0 ga teng bo'ladi. Transport masalasini yechish uchun uning maxsus xususiyatlarini nazarga oluvchi usullar yaratilgan bo'lib, quyida biz ular bilan tanishamiz.

1. Transport masalasining matematik modeli va xossalari

Faraz qilaylik, $A_1, A_2, \ldots A_m$ punktlarda bir xil mahsulot ishlab chiqarilsin. Ma'lum bir vaqt oralig'ida har bir $A_i(i=1,m)$ punktda ishlab chiqariladigan mahsulot miqdori a_i birlikka teng bo'lsin. Ishlab chiqariladigan mahsulotlar B_1, B_2, ..., B_n punktlarda iste'mol qilinsin hamda har bir $B_j(j=1,n)$ iste'molchining ko'rilayotgan vaqt oralig'ida mahsulotga bo'lgan talabi $b_j(j=1,n)$ birlikka teng bo'lsin.

Bundan tashqari A_1, A_2, ..., A_m punktlarda ishlab chiqariladigan mahsulotlarning umumiy miqdori B_1 ,B_2 ,..., B_n punktlarning mahsulotga bo'lgan talablarining umumiy miqdoriga teng, ya'ni

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

tenglik o'rinli bo'lsin deb faraz kilamiz . Deylik, har bir ishlab chiqarish punkti A_i dan hamma iste'mol qiluvchi punktga mahsulot tashish imkoniyati mavjud, hamda A_i punktdan B_j punktga mahsulotni olib borish uchun sarf qilinadigan xarajat C_{ij} pul birligiga teng bo'lsin.

x_{ij} bilan rejalashtirilgan vaqt oralig'ida A_i punktdan B_j punktga olib boriladigan mahsulotning umumiy miqdorini belgilaymiz.

Transport masalasining berilgan parametrlarini va belgilangan noma'lumlarni quyidagi jadvalga joylashtiramiz.

1-jadval.

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	. . .	B_n	Taklif miqdori
A_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	. . .	C_{1n} X_{1n}	a_1
A_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}		C_{2n} X_{2n}	a_2
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
A_m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	. . .	C_{mn} X_{mn}	a_m
talab miqdori	b_1	b_2	. . .	b_n	

Masalaning iqtisodiy ma'nosi: yuk tashishning shunday rejasini tuzish kerakki: 1) har bir ishlab chiqarish punktidagi mahsulotlar to'la taqsimlansin ; 2) har bir iste'molchining mahsulotga bo'lgan talabi to'la qanoatlantirsin va shu bilan birga sarf qilinadigan yo'l xarajatlarining umumiy qiymati minimal bo'lsin.

Masalaning birinchi shartini quyidagi tenglamalar sistemasi orqali ifodalash mumkin:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m, \end{cases} \qquad (1)$$

Masalaning ikkinchi sharti esa quyidagi tenglamalar sistemasi ko'rinishida ifodalanadi:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1, \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n. \end{cases} \qquad (2)$$

Masalaning iqtisodiy ma'nosiga ko'ra noma'lumlar manfiy bo'lmasligi kerak, ya'ni

$$x_{ij} > 0 \, (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}). \qquad (3)$$

i-ishlab chiqarish punktidan *j*-iste'mol qiluvchi punktga rejadagi x_{ij} birlik mahsulotni etkazib berish uchun sarf qilinadigan yo'l xarajati $c_{ij}\, x_{ij}$ pul birligiga teng bo'ladi.

Rejadagi barcha mahsulotlarni tashish uchun sarf qilinadigan umumiy yo'l xarajatlari

$$Y = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \ldots +$$
$$c_{2n}x_{2n} + \ldots + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \ldots + c_{mn}x_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

funktsiya orqali ifodalanadi. Masalaning shartiga ko'ra bu funktsiya minimumga intilishi kerak, ya'ni

$$Y = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to min \qquad (4)$$

(1) - (4) munosabatlar birgalikda transport masalasining matematik modeli deb ataladi.

Transport masalasining matematik modelini quyidagi yig'indi ko'rinishida ham yozish mumkin.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, (i = \overline{1,m}) \qquad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, (j = \overline{1,n}) \qquad (6)$$

$$x_{ij} \geq 0, (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}) \qquad (7)$$

$$Y = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to min \qquad (8)$$

Masaladagi har bir a_i ,b_j va c_{ij} nomanfiy sonlar, ya'ni:

$a_i \geq 0$, $b_j \geq 0$, $c_{ij} \geq 0$.

Agar (5.5.) - (5.8.) masalada

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_i = A \qquad (9)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, ya'ni ishlab chiqarilgan mahsulotlar yig'indisi unga bo'lgan talablar yig'indisiga teng bo'lsa, u holda bu masalani yopiq modelli transport masalasi deb aytamiz.

1-teorema. Har kanday yopiq modelli transport masalasi yechimga ega.

Isbot. Shartga ko'ra $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_i = A > 0$, u holda

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{A} (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$$

berilgan transport masalasining rejasi bo'ladi. Haqiqatdan ham,

$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{A} \geq 0$, chunki $a_i \geq 0$, $b_j \geq 0$, $A > 0$.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{A} = \frac{a_i}{A} \sum_{j=1}^{n} b_j = a_i,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{A} = \frac{b_j \sum a_i}{A} = b_j.$$

Demak, $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{A}$ transport masalasining hamma shartlarini qanoatlantiradi. Shuning uchun bu miqdor masalaning rejasi bo'ladi.

2-teorema. Transport masalasinng shartlaridan tuzilgan matritsaning r(A) rangi m+n-1 ga teng.

Isbot. Haqiqatdan ham, bu matritsa kengaytirilgan holda quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 1 & ... & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ . & . & . & ... & . & . & . & ... & . & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ . & . & . & ... & . & . & . & ... & . & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

Bu matritsaning ixtiyoriy qatori (masalan, 1-qatori) qolgan qatorlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat ekanligini ko'rsatish mumkin. Buning uchun *m+1, m+2, ..., m+n* qatoridan o'zaro qo'shib, natijasidan *2, 3, ..., (m+n)* qatorlarni ayirsak 1-qatorni hosil qilamiz. Demak, *r(A)=n+m-1*. Endi *2, 3, ..., (m+n)* - qatorlar o'zaro chiziqli bog'liq bo'lmagan sistemani tashkil qilishini ko'rsatamiz. Buning uchun ixtiyoriy $\alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_m, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ sonlar olib ularga mos ravishda *2, 3, ..., m, (m+n)* - qatorlarni ko'paytirib o'zaro qo'shamiz va natijasini 0=(0,0...0…0,0,... 0) ga tenglaymiz. Natijada quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} 0\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 + ...0\cdot\alpha_m + 1\cdot\beta_1 + 0\cdot\beta_2 + ... + 0\cdot\beta_n = 0, \\ 0\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 + ...0\cdot\alpha_m + 0\cdot\beta_1 + 1\cdot\beta_2 + ... + 0\cdot\beta_n = 0, \\ .... \\ 0\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 + ...0\cdot\alpha_m + 0\cdot\beta_1 + 0\cdot\beta_2 + ... + 1\cdot\beta_n = 0. \end{cases} \qquad (10)$$

va

$$\begin{cases} 1\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 + ...0\cdot\alpha_m + 1\cdot\beta_1 + 0\cdot\beta_2 + ... + 0\cdot\beta_n = 0, \\ 0\cdot\alpha_2 + 1\cdot\alpha_3 + ...0\cdot\alpha_m + 1\cdot\beta_1 + 1\cdot\beta_2 + ... + 0\cdot\beta_n = 0, \\ .... \\ 0\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 + ...1\cdot\alpha_m + 1\cdot\beta_1 + 0\cdot\beta_2 + ... + 0\cdot\beta_n = 0. \end{cases} \qquad (11)$$

(10) sistemadan $\beta_1=0, \beta_2=0, ..., \beta_n=0,$ (12)

(11) sistemadan

$$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_1 = 0, \\ \alpha_3 + \beta_1 = 0, \\ .... \\ \alpha_m + \beta_1 = 0. \end{cases}$$

tengliklar kelib chiqadi. Bundan (12) ga asosan $\alpha_2 = \alpha_3 = ... \alpha_n = 0$ bo'ladi. Demak, A matritsaning *m+n-1* ta qatori o'zaro chiziqli bog'liq bo'lmagan sistemani tashkil qiladi va demak *r(A)=m+n-1* bo'ladi.

3-teorema. Agar masaladagi barcha a_i va b_i lar butun sonlardan iborat bo'lsa, transport masalasining yechimi butun sonli bo'ladi.

Teoremaning isbotini transport masalasining boshlang'ich bazis rejalarini topish usullarida ko'rish mumkin.

4-teorema. Ixtiyoriy transport masalasining optimal rejasi mavjuddir.

Isbot. 1- teoremaga asosan masalaning kamida bitta rejasi mavjuddir. (5), (6) shartlardagi koeffitsentlar va barcha a_i, b_i lar musbat butun son bo'lganligi sababli x_{ij} ham yuqoridan chegaralangan bo'ladi va uning qiymati mos a_i, va b_j larning qiymatidan oshmaydi.

Shunday qilib, transport masalasi rejalaridan tashkil topgan to'plam bo'sh to'plam bo'lmaydi, u chegaralangan to'plam bo'ladi. Demak, transport masalasi optimal rejaga ega.

2. Transport masalasining boshlang'ich bazis rejasini topish usullari

Boshqa chiziqli dasturlash masalalari singari transport masalasini yechish jarayoni boshlang'ich bazis rejani topishdan boshlanadi. Transport masalasining bazis rejasini topish usullari ko'p bo'lib, quyida biz "shimoliy-g'arb burchak" usuli va "minimal harajatlar" usuli bilan tanishamiz.

1. Shimoliy-g'arb burchak usuli. Faraz qilaylik, transport masalasining shartlari quyidagi jadvalga joylashtirilgan bo'lsin.

a_i \ b_j	b_1	b_2	...	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}
...	...	...	...	...
a_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}

Shimoliy-g'arb burchak usulining g'oyasi quyidagilardan iborat. Eng avval shimoliy-g'arbda joylashgan katakchadagi x_{11} noma'lumning qiymatini aniqlaymiz, $x_{11}=\min(a_1,b_1)$. Agar $a_1 \le b_1$ bo'lsa $x_{11}=a_1$ va $x_{1j}=0,\ (j=\overline{2,n})$, agar $b_1 \le a_1$bo'lsa $x_{11}=b_1$ va $x_{i1}=0,\ (i=\overline{2,m})$ bo'ladi. Faraz qilaylik, birinchi hol bajarilsin. Bu holda 1-qadamdan so'ng masalaning yechimlaridan tashkil topgan matritsa quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

1-qadam

$$\begin{array}{ccccc|c}
x_{11}=a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
x_{21} & x_{22} & x_{23} & & x_{2n} & a_2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & & x_{mn} & a_m \\
\hline
b_1-a_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n &
\end{array}$$

Endi ikkinchi qatordagi birinchi elementning qiymatini topamiz:

Agar $a_2>b_1-a_1$ bo'lsa, $x_{21}=b_1-a_1$ va $x_{i1}=0,\ (i=\overline{3,m})$,

Agar $a_2<b_1-a_1$ bo'lsa, $x_{21}=a_2$ va $x_{2j}=0,\ (j=\overline{2,n})$.

Faraz qilaylik, yangi matritsa uchun ham 1-hol bajarilsin, u holda 2-qadamdagi yechimlar matritsasi quyidagigacha bo'ladi.

$$
\begin{array}{|cccccc|c}
x_{11}=a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & & 0 \\
x_{21}=b_1-a_1 & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2n} & & a_2-b_1+a_1 \\
0 & x_{32} & x_{33} & \dots & x_{3n} & & a_3 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots \\
0 & x_{m2} & x_{m3} & & x_{mn} & & a_m \\
\hline
0 & b_2 & b_3 & \dots & b_n & &
\end{array}
$$

Xuddi shunday yo'l bilan davom etib, har bir qadamda birorta x_{ij} ning qiymati topiladi. $x_{ij}=min(a_i,b_j)$ va a_i yoki b_j nolga aylantiriladi.

Bu jarayon barcha a_i va b_j lar nolga aylanguncha takrorlanadi. Ma'lumki, har bir x_{ij} ning qiymati a_i va b_j larning turli kombinatsiyalarini ayirish yoki qo'shish yordami bilan topiladi, shuning uchun a_i va b_j lar butun bo'lganda topilgan bazis reja butun sonli bo'ladi. Bundan tashqari, yuqoridagi 2-teoremaga asosan bazis yechimdagi noldan farkli x_{ij} noma'lumlar soni $m+n-1$ dan oshmaydi.

Misol. quyidagi transport masalasining boshlang'ich bazis yechimini toping.

b_j / a_i	3	6	2	1
4	2	5	9	5
2	8	3	5	8
3	7	3	1	4
3	5	9	7	2

1-qadam.

$$x_{11}=min(4,3)=3.$$

Shuning uchun $b'_1=0$ va $a_1=4-3=1$, $x_{21}=x_{31}=x_{41}=0$

2-qadam.

$$x_{12}=min(1,6)=1.$$

Bunda $a'_1=0$ va $b'_2=6-1=5$, $x_{13}=x_{14}=0.$

3-qadam.

$$x_{22}=min(2,5)=2.$$

Bunda $a'_2=0$ va $b'_2=5-2=3$, $x_{23}=x_{24}=0.$

4-qadam.

$$x_{32}=min(3,3)=3.$$

Bunda $a''_2=b''_2=0$ bo'ladi hamda $x_{33}=x_{34}=0,\ x_{42}=0.$

5-qadam.

$x_{43}=2,\ a'_4=3-2=1.$

6-qadam.

$$x_{44}=min\ (1,1)=1$$

Bunda $a'_4=b'_4=0$ bo'ladi va masalani yechish jarayoni tugaydi. Topilgan boshlang'ich bazis yechim quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

a_i \ b_j	3	6	2	1
4	2 3	5 1	9	5
2	8	3 2	5	8
3	7	3 3	1	4
3	5	9	7 2	2 1

Topilgan boshlang'ich bazis yechimdagi noldan farqli bo'lgan noma'lumlar soni 6 ta bo'lib, y $m+n-1=7$ dan kichik. Agar masalaning bazis rejadagi noldan farqli bo'lgan x_{ij} noma'lumlar soni $m+n-1$ dan kichik bo'lsa, bunday rejani xos reja deb ataymiz. Xos rejani to'g'rilash usullari bilan keyinroq tanishamiz.

II. Minimal xarajatlar usuli. Transport masalasining optimal yechimini topish uchun kerak bo'ladigan iteratsiyalar soni boshlang'ich bazis yechimini tanlashga bog'liqdir. Optimal yechimga yaqin bo'lgan bazis yechimni topish masalaning optimal yechimini topishni tezlashtiradi. Yuqoridagi «shimoliy-g'arb burchak» usuli transport masalasining bazis yechimini ixtiyoriy ravishda, transport harajatlarini nazarga olmagan holda aniqlaydi. Bunday usul yordami bilan topilgan ko'pgina bazis yechim optimal yechimdan yiroq bo'lib, optimal yechimni topish uchun juda ko'p iteratsiyalarni bajarishga to'g'ri keladi.

Adabiyotda transport masalasining boshlang'ich bazis yechimini topish uchun transport xarajatlarini nazarga oluvchi ko'p usullar ma'lum(ustundagi minimal element usuli, minimal xarajatlar usuli, ikki tomonlama tanlash usuli va hokazolar).Ularning hammasi transport xarajatlarini nazarga oluvchi usullaridir.

Minimal xarajatlar usulining g'oyasi quyidagilardan iborat:

1. Transport masalasi xarajatlaridan tashkil topgan matritsa belgilab olinadi, ya'ni

$$C=\begin{bmatrix} c_{11}c_{12}\ldots c_{1n} \\ c_{21}c_{22}\ldots c_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{m1}c_{m2}\ldots c_{mn} \end{bmatrix}.$$

Bu matritsaning minimal elementini topib belgilaymiz:

$$\min_{i,j} c_{ij} = c_{i_1 j_1}$$

U holda $x_{i_1 j_1}$ quyidagicha aniqlanadi

$$x_{i_1 j_1} = min(a_{i_1}\ b_{j_1}).$$

Bu yerda ikki hol bo'lishi mumkin:

1) $a_{i_1} < b_{j_1}$

2) $a_{i_1} > b_{j_1}$

Birinchi holda $x_{i_1 j_1} = a_{i_1}$ bo'lganda qatorning barcha $x_{i_1 j}$ $(j \neq j_1)$ elementlari 0 ga teng, ya'ni

$$x_{i_1 j} = 0,\ (j \neq j_1)$$

bo'ladi, bunday holda i_1 qator o'chiriladi deb aytamiz. Ikkinchi holda $x_{i_1 j_1} = b_{j_1}$ va j_1 ustunning barcha x_{ij_1} $(i \neq i_1)$ elementlari 0 ga teng, ya'ni

$$x_{ij_1} = 0,\ (i \neq i_1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi, bunday holda j_1 ustun o'chiriladi deb aytamiz.

2. Faraz qilaylik, C' matritsa C matritsaning i_1 qatorini (1-hol) yoki j_1 ustunini (2-hol) o'chirish natijasida hosil bo'lgan matritsa bo'lsin. Yangi matritsa uchun

$$a_i^{(1)} = \begin{cases} a_i, i \neq i_1 \\ a_i - x_{i_1 j_1}, \ \ i = i_1 \end{cases}, \qquad b_j^{(1)} = \begin{cases} b_j, j \neq j_1 \\ b_j - x_{i_1 j_1}, \ \ j = j_1 \end{cases}$$

bo'lsin.

Ma'lumki, C' matritsadagi ustun va qatorlar soni C matritsanikidan bittaga kam bo'ladi. Ikkinchi qadamda yuqoridagi C matritsa uchun bajarilgan ishlar C' matritsa va $a_i^{(1)}, b_j^{(1)}$ miqdorlar uchun bajariladi. Natijada rejalardan tashkil topgan $X=(x_{ij})$ matritsaning yana bir qatori yoki ustuni to'ldiriladi. Bu jarayon C matritsaning hamma qator va ustunlari o'chirilguncha, ya'ni X matritsaning hamma qator va ustunlari to'ldirilguncha takrorlanadi.

m ta ishlab chiqaruvchi punktni n ta iste'mol qiluvchi punktga bog'lovchi transport masalasining boshlang'ich bazis rejasini topish uchun minimal xarajatlar usulida $n+m-1$ ta qadamdan iborat ishlarni bajarish kerak bo'ladi.

Misol. Berilgan transport masalasining bazis rejasini minimal xarajatlar usulidan foydalanib toping.

b_j / a_i	5	9	9	7
11	7	8 3	5 1	3 7
11	2 5	4 6	5	9
8	6	3	1 8	2

1. $\min\limits_{i,j} c_{ij} = c_{33} = 1$

$x_{33} = min\ (a_3, b_3) = min\ (8,9) = 8.$

Bu holda $x_{3j}=0,\ (j \neq 3)$ bo'ladi. Boshqacha aytganda 3-qator o'chiriladi va yangi C' matritsa hosil bo'ladi. Bu matritsada

$a_3^1 = 8-8=0,$

$b_3^1 = 9-8=1$

bo'lib, C^I matritsa quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$C^I = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. C^I matritsadagi elementlar ichida eng kichigini topamiz, ya'ni

$$\min_{i,j} c_{ij} = c_{21} = 2.$$

U holda $x_{21}=min\ (a_2, b_1)=min\ (11,5)=5$. Demak, $x_{21}=b_1=5$.
Shuning uchun $x_{i1}=0\ (i\neq 2)$ bo'ladi, ya'ni 1-ustun o'chriladi. Natijada yangi

$$C^{II} = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

matritsa hosil bo'ladi. Bu matritsa uchun $b_1^{(1)}=5\text{-}5=0,\ a_2^{(1)}=11\text{-}5=6$.

3. C^{II} matritsaning eng kichik elementi $\min_{i,j} c_{ij} = c_{14} = 3$.

Shuning uchun $x_{14}=min\ (a_1,\ b_4)=min\ (11,7)=7$. Bu yerda 4-ustun o'chiriladi va $a_1^{(1)}=a_1\text{-}x_{14}=11\text{-}7=4$ bo'ladi. Natijada yangi

$$C^{III} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

matritsa hosil bo'ladi.

4. C^{III} matritsaning elementlari orasida eng kichigi topiladi

$$\min_{i,j} c_{ij} = c_{22} = 4$$

Bu holda,

$$x_{22}=min(a_2^{(1)},b_2)=min(6,9)=6.$$

Natijada 2-qator o'chiriladi va $b_2$ning qiymati

$$b_2^{(1)}=b_2\text{-}x_{22}=9\text{-}6=3$$

ga o'zgaradi va yangi S^{IV} matritsa-qator hosil bo'ladi:

$$C^{IV}=(8,5).$$

Shunday yo'l bilan 5-qadamda $x_{13}=1$ topilib, 3-ustun o'chiriladi. osil bo'lgan X matritsa quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$X=\begin{pmatrix} 0317 \\ 5600 \\ 0080 \end{pmatrix}.$$

Bu matritsa berilgan transport masalasining bazis yechimidir.

2-Misol.

b_i / a_i	80	120	70	130
100	10	7	6	8
150	6	8	13	11
150	8	10	12	5

Bu masalaning transport xarajatlaridan tuzilgan matritsa

$$C=\begin{pmatrix} 10 & 7 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 13 & 11 \\ 8 & 10 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$

dan iborat.

1. $min\ c_{ij}=c_{34}=5,$
$c_{34}=min(150,\ 130)=130.$

Demak, 4-ustun o'chiriladi va a_4 ning qiymati $150\text{-}130=20$ ga o'zgaradi. Jadvalda bu holni quyidagicha ko'rsatish mumkin.

a_i \ b_i	80	120	70	130
100	10	7	6	8
150	6	8	13	11
20	8	10	12	$\underline{5}$ 130

2. S matritsaning 4-ustunini o'chirish natijasida hosil bo'lgan

$$S^I=\begin{pmatrix} 10 & 7 & 6 \\ 6 & 8 & 13 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

matritsaning elementlari ichida eng kichigini $minc_{ij}=c_{21}=6$, unga mos keluvchi bazis o'zgaruvchi

$$x_{21}=min(180,80)=80$$

ni aniqlaymiz. Bu holda 1-ustun o'chiriladi va a_2 ning qiymati $150\text{-}80=70$ ga o'zgaradi

a_i \ b_i	0	120	70	0
100	10	7	6	8
70	$\underline{6}$ 80	8	13	11
20	8	10	12	$\underline{5}$ 130

3. C^I matritsaning 1-ustunini o'chirish natijasida quyidagi

$$C^{II}=\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 13 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

matritsaga ega bo'lamiz. Bu matritsaning C^{II}_{ij} elementlari orasida eng kichigini topamiz:

$$min\ c_{ij}''=c_{12}''=c_{13}''=6,$$

Demak, $x_{13}=min(100,70)=70.$

Bu holda S matritsaning 3-ustuni o'chiriladi va a_1 ning qiymati 100-70=30 ga o'zgaradi:

b_j / a_i	80	120	70	130
100	10	7	6 70	8
150	6 80	8	13	11
150	8	10	12	5 130

4. Endi, C matritsaning 1, 3, 4-ustunlarini o'chirish natijasida C^{III} =*(7, 8, 10)* - vektor-ustunga ega bo'lamiz.

Bu vektorning har bir komponentlarini o'sish tartibida qarab chiqib, ularga mos keluvchi x_{ij} larni aniqlaymiz:

b_j / a_i	80	120	70	130
100	10	7 30	6 70	8
150	6 80	8 70	13	11
150	8	10 20	12	5 130

Berilgan masalaning bazis yechimi:

$$X=\begin{bmatrix} 0 & 30 & 70 & 0 \\ 80 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 130 \end{bmatrix}$$

matritsadan iborat bo'ladi.

3. Transport masalasining optimal yechimini topish uchun potentsiallar usuli

Potentsiallar usuli transport masalasini yechish uchun qo'llangan birinchi aniq usul bo'lib, u 1949 yilda rus olimlari L.V.Kantorovich va M.K.Gavurin tomonidan yaratilgan. Bu usulning asosiy g'oyasi transport masalasiga moslashtirilgan simpleks usuldan iborat bo'lib, birinchi marta chiziqli dasturlash masalalarini yechish usullariga bog'liq bo'lmagan holda tasvirlashgan. Keyinroq, xuddi shunga o'xshash usul Amerika olimi Dantsig tomonidan yaratildi. Dantsing usuli chiziqli dasturlashning asosiy g'oyalariga asoslangan bo'lib, Amerika adabiyotida bu usul modifitsirlangan taqsimot usuli deb yuritiladi.

Potentsiallar usuli yordami bilan boshlang'ich bazis rejadan boshlab, optimal yechimga yaqinroq bo'lgan yangi bazis rejalarga o'tib borib, chekli sondagi iteratsiyadan so'ng masalaning optimal yechimi topiladi. Har bir iteratsiyada topilgan bazis reja optimal reja ekanini tekshirish uchun har bir ishlab chiqaruvchi (A_i) va iste'mol qiluvchi (B_j) punktga uning potentsiali deb ataluvchi u_i va v_j miqdor mos qo'yiladi. Bu potentsiallar shunday tanlanadiki, bunda o'zaro bog'langan A_i va B_j punktlarga mos keluvchi potentsiallar yig'indisi c_{ij} ga (A_i dan B_j ga birlik mahsulotni tashish uchun sarf qilinadigan transport xarajatiga) teng bo'lishi kerak.

5-teorema. Agar $X^*=(x_{ij}^*)$ reja transport masalasining optimal rejasi bo'lsa, u holda unga

$$u_i^*+v_j^*=c_{ij} \quad (x_{ij}^*>0), \qquad (13)$$

$$u_i^*+v_j^*\le c_{ij} \quad (x_{ij}^*=0) \qquad (14)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $n+m$ ta u_i^* va v_j^* potentsiallar mos kelishi zarur va etarlidir.

Isbot. **Etarliligi**. Faraz qilaylik, $X^*=(x_{ij}^*)$ reja uchun (13), (14) shartlar o'rinli bo'lsin. U holda ixtiyoriy $X`=(x_{ij}`)$ reja uchun

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x'_{ij} \ge \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(u_i^*+v_j^*)x'_{ij} = \sum_{i=1}^{m}u_i^*\sum_{j=1}^{n}x'_{ij}+\sum_{j=1}^{n}v_j^*\sum_{i=1}^{m}x'_{ij} =$$

$$=\sum_{i=1}^{m}a_iu_i^*+\sum_{j=1}^{n}b_jv_j^* = \sum_{i=1}^{m}u_i^*\sum_{j=1}^{n}x_{ij}^*+\sum_{j=1}^{n}v_j^*\sum_{i=1}^{m}x_{ij}^* =$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(u_i^*+v_j^*)x_{ij}^* = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}c_{ij}x_{ij}^*.$$

Demak, X* rejadagi chiziqli funktsiyaning qiymati uning ixtiyoriy $X`$ rejadagi qiymatidan kichik bo'lyapti. Shuning uchun X^* reja optimal bo'ladi.

Zarurligi. Berilgan

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+...+x_{1n}=a_1, \\ .... \\ x_{m1}+x_{m2}+...+x_{mn}=a_m. \end{cases} \qquad (15)$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+...+x_{m1}=b_1, \\ .... \\ x_{1n}+x_{2n}+...+x_{mn}=b_n, \end{cases} \qquad (16)$$

$$x_{ij}\ge 0, \qquad (17)$$

$$Y=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij} \longrightarrow \min \qquad (18)$$

transport masalasiga ikkilangan masalani hosil qilish uchun (15) sistemadagi har bir tenglamaga potentsiallar deb ataluvchi $u_1, u_2, \dots, u_m$ sonlarni, (16) sistemadagi har bir tenglamaga esa $v_1, v_2, \dots, v_n$ sonlarni mos qo'yamiz. U holda, ikkilangan masala quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$u_i+v_j\le c_{ij} \quad (i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n) \qquad (19)$$

$$f=\sum_{j=1}^{n}b_jv_j+\sum_{i=1}^{m}a_iu_i \longrightarrow \max. \qquad (20)$$

Shartga ko'ra $X^*=(x_{ij}^*)$ reja (15)-(18) masalaning optimal rejasi bo'lganligi sababli, ikkilanish nazariyasiga doir asosiy teoremaga asosan ikkilangan masala ham optimal

$$z^* = (\bar{u}^*, \bar{v}^*),$$

$$Y_{min} = f_{max}$$

yechimga ega bo'ladi, ya'ni

$$\sum_{i=1}^{m} a_i u_i^* + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j^* = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}^*,$$

$$x_{ij}^* \geq 0.$$

Ikkilanish nazariyasidan ma'lumki, agar ikkilangan masalaning optimal yechimidagi i-komponenta musbat bo'lsa, berilgan masalaning optimal yechimi i-shartni tenglikka aylantiradi va aksincha, berilgan masalaning optimal yechimidagi *i*-komponenta nolga teng bo'lsa, ikkilangan masalaning i- sharti tengsizlikdan iborat bo'ladi.

Demak,

$$\begin{cases} u_i^* + v_j^* = c_{ij}, x^*_{ij} > 0, \\ u_i^* + v_j^* \leq c_{ij}, x_{ij}^* = 0. \end{cases} \qquad (21)$$

(5.19) ga asosan boshlang'ich bazis reja optimal yechim bo'lishi uchun quyidagi shartlar bajarilishi kerak:

a) har bir to'ldirilgan (mahsulot taqsimlangan) katakcha uchun

$$u_i + v_j = c_{ij} \qquad (22)$$

b) har bir bo'sh (mahsulotlar taqsimlanmagan) katakcha uchun

$$u_i + v_j \leq c_{ij}\ . \qquad (23)$$

Agar kamida bitta bo'sh katakcha uchun (23) shart bajarilmasa, topilgan bazis reja optimal yechim bo'lmaydi va

$$\max_{\Delta_{ij}>0} \Delta_{ij} = \max_{\Delta_{ij}>0} (u_i + v_j - c_{ij}) = \Delta_{kl}, \quad \lfloor \Delta_{ij} = (u_i + v_j - c_{ij}) \rfloor$$

shartni qanoatlantiruvchi *(k,l)* katakchani to'ldirilgan katakchaga aylantirish kerak bo'ladi.

Shunday qilib, potentsiallar usulining algoritmi quyidagidan iborat:

1. Yuqoridan ko'rilgan usullarning biridan foydalanib, boshlang'ich bazis reja topiladi.

2. Topilgan rejani optimal reja ekanligini tekshirish uchun potentsiallar sistemasi tuziladi. Buning uchun (19) formuladan foydalanib, har bir to'ldirilgan katakcha uchun (22) ko'rinishda potentsial tenglamalar tuziladi. Ma'lumki, transport masalasining rejasidagi 0 dan farqli bo'lgan o'zgaruvchilar soni *n+m-1* ta. Demak, potentsial tenglamalar sistemasi *n+m* ta noma'lumli *n+m-1* tenglamalar sistemasidan iborat bo'ladi. Bu sistemada noma'lumlar soni tenglamalar sonidan ortiq bo'lgani sababli potentsiallarning son qiymatini topish uchun ulardan ixtiyoriy bittasiga aniq bir qiymat, masalan nol qiymat berib, qolganlarini birin-ketin topish mumkin.

Faraz qilaylik, u_i ma'lum bo'lsin, u holda (19) dan v_j topiladi:

$$v_j = c_{ij} - u_i$$

Agar v_j ma’lum bo’lsa, u holda u_i quyidagicha topiladi:

$$u_i=c_{ij}-v_j$$

Barcha potentsiallarning son qiymatini aniqlab bo’lgach, hamma bo’sh katakchalar uchun

$$\Delta_{ij}=(u_i+v_j-c_{ij})$$

hisoblanadi. Agarda barcha i va j lar uchun

$$\Delta_{ij}\leq 0,\ (i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,\ n)$$

o’rinli bo’lsa, topilgan boshlang’ich bazis reja optimal reja bo’ladi.

3. Agar *i* va *j* larning kamida bir qiymati uchun $\Delta_{ij}>0$ bo’lsa, boshlang’ich bazis reja almashtiriladi. Buning uchun

$$\max_{\Delta_{ij}>0} \Delta_{ij}= \Delta_{lk}$$

shartni qanoatlantiruvchi (l,k) katakcha to’ldiriladi (x_{lk} noma’lum bazisga kiritiladi). $x_{lk}=\theta$ deb faraz qilib (l,k) katakchaga θ kiritiladi. So’ngra soat strelkasi bo’yicha (l,k) katakchadan boshlab harakat qilib, to’ldirilgan katakchalarga tartib bilan *(-)* va *(+)* ishoralari qo’yilib boriladi. Natijada yopiq *K* kontur hosil bo’ladi

$$K=K^{-1}\cup K^{+}\ ,$$

bu yerda K^{-1} ,K^{+} -(-) va (+) ishorali katakchalarni o’z ichiga oluvchi yarim konturlar.

Quyidagi formula orqali θ ning son qiymati topiladi.

$$\theta=\min_{x_{ij}\in k^-} x_{ij}=x_{pq} \tag{24}$$

4. Yangi bazis reja hisoblanadi:

$$\left.\begin{aligned} &x'_{lk}=\theta,\\ &x'_{pq}=0,\\ &x'_{ij}=x_{ij}, агар \quad x_{ij}\notin K,\\ &x'_{ij}=x_{ij}+\theta, агар \quad x_{ij}\in K^{+},\\ &x'_{ij}=x_{ij}-\theta, агар \quad x_{ij}\in K^{-}.\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Yangi bazis rejadagi to’ldirilgan katakchalar soni *n+m-1* ta bo’lganligi uchun (24) shartni qanoatlantiruvchi katakchalar birdan ortiq bo’lsa, ulardan bittasini bo’sh katakchaga aylantirib, qolgan katakchalardagi taqsimotni 0 ga teng deb qabul qilinadi. Topilgan yangi bazis reja uchun yana qaytadan potentsiallar sistemasi topiladi va yangi rejaning optimal reja bo’lishlik sharti tekshiriladi. Agar yangi bazis reja optimal reja bo’lmasa, u holda yana qaytadan 3, 4 punktlarda qilingan ishlar takrorlanadi. Jarayon optimal yechim topilguncha, ya’ni barcha bo’sh katakchalar uchun

$$\Delta_{ij}=u_i+v_j-c_{ij}\leq 0$$

shart bajarilguncha takrorlanadi.

Misol. Berilgan transport masalasini potentsiallar usuli bilan yeching.

1-jadval.

b_i	200	200	100	100	250	u_i

a_i						
100	10 $100-\theta$	7 8	4 9	1 11	4 5	0
250	2 $100+\theta$	7 $150-\theta$	10 -5	6 -2	11 -12	-8
200	8 -8	5 $50+\theta$	3 100	2 $50-\theta$	2 -3	-10
300	11 3	8 11	12 5	16 50	13 250	4
v_i	10	15	13	12	9	$\theta=50$

1. Boshlang'ich bazis rejani «shimoliy-g'arb burchak» usuli bilan topamiz.

2. Har bir to'ldirilgan katakcha uchun potentsial tenglama tuzib, quyidagi sistemani hosil qilamiz:

$$u_1+v_1=10, \qquad u_3+v_3=3,$$
$$u_2+v_1=2, \qquad u_3+v_4=2,$$
$$u_2+v_2=7, \qquad u_4+v_4=16,$$
$$u_3+v_2=5, \qquad u_4+v_5=15.$$

Bu sistemadagi noma'lumlar soni tenglamalar sonidan bittaga ko'p. Shuning uchun ixtiyoriy bir potentsialni (masalan, u_1 ni) 0 ga teng deb qabul qilib, qolganlarini birin-ketin topish mumkin.

$u=(0, -8, -10, 4),$
$v=(10, 15, 13, 12, 9).$

3. Har bir bo'sh katakcha uchun

$$\Delta_{ij}=u_i+v_j-c_{ij}$$

ni hisoblab uni bo'sh katakchaning pastki o'ng burchagiga yozamiz:

$$\max_{\Delta ij>0} \Delta_{ij}= \Delta_{42}=11$$

bo'lganligi sababli (1,4) katakchaga (yoki (4,2) katakchaga) θ son kiritamiz va (1,1), (2,1), (2,2),(3,2), (3,4) katakchalarni o'z ichiga oluvchi yopiq K konturini tuzamiz.

$$K=K^- \cup K^+,$$

bu yerda (1,1), (2,2), (3,4) $\in K^-$ va (2,1), (3,2) $\in K^+$.

4. θ ning son qiymatini topamiz.

$$\theta=\min_{xij\in k-} x_{ij}=x_{34}=50.$$

Yangi bazis rejani aniqlaymiz va ularni jadvalga joylashtiramiz.

2-jadval

b_i / a_i	200	200	100	100	250	u_i
100	10 50-θ	7 $\boxed{8}$	4 $\boxed{9}$	1 50+θ	4 $\boxed{-6}$	0
250	2 150+θ	7 100-θ	10 $\boxed{-10}$	6 $\boxed{-13}$	11 $\boxed{-21}$	-8
200	8 $\boxed{-8}$	5 100	3 100	2 $\boxed{-11}$	2 $\boxed{-14}$	-10
300	11 $\boxed{14}$	8 $\boxed{22}$	12	16 50-θ	13 250	15
v_i	10	15	13	1	-2	θ=50

Yuqoridagi usul bilan potentsiallar sistemasini tuzib va uni yechib *u=(0, -8, -10, 15), v=(10, 15, 13, 1, -2)* ekanini topamiz.

Barcha bo'sh kataklar uchun $\Delta_{ij}=u_i+v_j-c_{ij}$ ni hisoblab chiqamiz.

2-jadvaldan ko'rinadiki, max $\Delta_{ij}=\Delta_{42}=22$.

Shuning uchun (4.2) katakcha θ ni kiritib, jadvalda ko'rsatilgan yopiq K konturni tuzamiz va $\theta=\min\limits_{x_{ij}\in K} x_{ij}=x_{44}=50$ ekanini aniqlaymiz.

So'ngra (23) formula orqali yangi bazis rejani topib jadvalga joylashtiramiz va yuqoridagi ishlarni takrorlaymiz.

3-jadval

b_i / a_i	200	200	100	100	250	u_i
100	10 0-θ	7 $\boxed{8}$	4 $\boxed{9}$	1 100	4 θ $\boxed{16}$	0
250	2 200+θ	7 50-θ	10 $\boxed{-5}$	6 $\boxed{-13}$	11 $\boxed{1}$	-8
200	8 $\boxed{-8}$	5 100	3 100	2 $\boxed{-11}$	2 θ $\boxed{8}$	-10
300	11	8 50+θ	12	16	13 250-θ	-7
v_i	10	15	13	1	20	θ=0

4-jadval

b_i / a_i	200	200	100	100	250	u_i
100	10 [-16]	7 [-8]	4 [-7]	1 100	4 0	0
250	2 200	7 50	10 [-5]	6 [3]	11 [1]	8
200	8 [-8]	5 100-θ	3 100	2 [5]	2 θ [8]	6
300	11 [-8]	8 50+θ	12 [-6]	16 [-6]	13 250-θ	9
v_i	-6	-1	-3	1	4	θ=100

5-jadval

b_i / a_i	200	200	100	100	250	u_i
100	10 [-16]	7 [-8]	4 [1]	1 100-θ	4 0+θ	0
250	2 200	7 50-θ	10 [3]	6 θ [3]	11 [1]	8
200	8 [-16]	5 [-8]	3 100	2 [-3]	2 100	-2
300	11 [-8]	8 150+θ	12 θ 2	16 [-6]	13 150-θ	9
v_i	-6	-1	5	1	4	θ=50

6-jadval

b_i / a_i	200	200	100	100	250	u_i
100	10 [-13]	7 [-8]	4 [1]	1 50	4 50	0
250	2 200	7 [-11]	10 [0]	6 50	11 [-2]	5
200	8 [-13]	5 [-8]	3 100-θ	2 [-3]	2 100+θ	-2
300	11 [-5]	8 100	12 θ [2]	16 [-6]	13 100-θ	9
v_i	-3	-1	5	1	4	θ=100

7-jadval

a_i \ b_i	200	200	100	100	250	u_i
100	10 $\boxed{-13}$	7 $\boxed{-6}$	4 θ $\boxed{1}$	1 50	4 50-θ	0
250	2 200	7 $\boxed{-1}$	10 $\boxed{0}$	6 50	11 $\boxed{-2}$	5
200	8 $\boxed{-11}$	5 $\boxed{-8}$	3 0-θ	2 $\boxed{-3}$	2 200+θ	-2
300	11 $\boxed{-7}$	8 200	12 100	16 $\boxed{-8}$	13 $\boxed{-2}$	7
v_i	-3	1	5	1	4	$\theta=0$

8-jadval

a_i \ B_i	200	200	100	100	250	u_i
100	10 $\boxed{-13}$	7 $\boxed{-7}$	4 0	1 50	4 50	0
250	2 200	7 $\boxed{-2}$	10 $\boxed{-1}$	6 50	11 $\boxed{-2}$	5
200	8 $\boxed{-11}$	5 $\boxed{-7}$	3 $\boxed{-1}$	2 $\boxed{-3}$	2 200	-2
300	11 $\boxed{-6}$	8 200	12 100	16 $\boxed{-7}$	13 $\boxed{-1}$	8
v_i	-3	0	4	1	4	

8-jadvalda keltirilgan reja optimal yechim bo'ladi, chunki barcha bo'sh katakchalar uchun

$$\Delta_{ij}=(u_i+v_j-c_{ij})\leq 0.$$

Shunday qilib, sakkizinchi tsiklda quyidagi optimal yechimga ega bo'ldik:

$x_{14}=50,\quad x_{15}=50,$

$x_{21}=200,\quad x_{24}=50,$

$x_{35}=200,\quad x_{42}=200,\quad x_{43}=100,$

$$y_{min}=50+4\cdot 50+2\cdot 200+6\cdot 50+2\cdot 200+8\cdot 200+12\cdot 100=4150.$$

4. Xos transport masalasi va uni to'g'rilashning ε - usuli

Transport masalasining bazis rejasidagi musbat komponentlar soni $k<n+m-1$ bo'lsa, bu reja xos reja bo'ladi. Bunday rejani to'g'rilash uchun unga $n+m-1-k$ ta nol element kiritish mumkin. Kiritilgan nol elementlarga mos vektorlar o'zaro chiziqli bog'liq bo'lmagan vektorlar bo'lishi kerak. Bunga erishish uchun quyidagi **ε** usulni qo'llanish mumkin.

ε usul. Shimoliy g'arb burchak usuli bilan boshlang'ich bazis rejasi topishni eslaymiz. Agar 1-qadamda

$$x_{21}=b_1-a_1=a_2$$

bo'lsa, x_{31} ham, x_{22} ham musbat son bo'la olmaydi. Har vaqt bunday vaziyat ro'y berganda bazis rejadagi bazis o'zgaruvchilar soni kamaya boradi. Bunday hol odatda, transport masalasidagi bir necha a_i ning yig'indisi (hammasi emas) bir necha b_j ning yig'indisiga teng bo'lganda bajarilishi mumkin. Ana shunday hol o'rinli bo'lgan transport masalasini xos transport masalasi deb aytamiz.

Xos holatining oldini olish uchun a_i va b_j lardan tuzilgan xususiy yig'indilarning o'zaro teng bo'lmasligiga erishish, buning uchun esa a_i va b_j larning qiymatining biror kichik songa o'zgartirish kerak. Masalan, etarlicha kichik ε>0 sonni olib, a_i va b_j larni quyidagicha o'zgartiramiz:

$$\overline{a_i}=a_i+\varepsilon,\quad (i=\overline{1,m})$$
$$\overline{b_j}=b_j,\quad (i=\overline{1,n})$$
$$\overline{b_n}=b_n+m\varepsilon,$$
$$\varepsilon>0.$$

ε yetarlicha kichik son bo'ganligi sababli hosil bo'lgan masalaning X(ε) optimal rejasi ε=0 da berilgan masalaning optimal yechimi bo'ladi.

ε usulni quyidagi masalaga qo'llaymiz:

b_i / a_i	1	3	3	2	5
3	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}
4	c_{31}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{25}
7	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	c_{35}

transport masalasi uchun «shimoliy-g'arb burchak» usuli bilan bazis reja tuzsak, u xos reja bo'ladi, mahsulot taqsimlangan kataklar soni 6 ta (masala xosmas bo'lishi uchun ular 7 ta bo'lishi kerak) ya'ni

b_i / a_i	1	3	3	2	5
3	c_{11} 1	c_{12} 2	c_{13}	c_{14}	c_{15}
4	c_{31}	c_{22} 1	c_{23} 3	c_{24}	c_{25}
7	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34} 2	c_{35} 5

ε usulni qo'llanilganda esa ushbu jadval hosil bo'ladi:

a_i \ b_i	1	3	3	2	5+3**ε**
3+**ε**	c_{11} 1	c_{12} 2+**ε**	c_{13} 0	c_{14}	c_{15}
4+**ε**	c_{31}	c_{22} 1 - **ε**	c_{23} 3	c_{24} 2**ε**	c_{25}
7+**ε**	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34} 2-2**ε**	c_{35} 5+3**ε**

Topilgan bazis rejada $x_{24}=2\varepsilon>0$. **ε** usul 0 qiymatli ikki o'zgaruvchidan qaysi birini bazisga kiritish kerakligini ko'rsatib beradi. Agar **ε** usul qo'llanilmaganda edi x_{24} va x_{33} o'zgaruvchilardan qaysi birini bazisga kiritish kerakligini tanlash kerak bo'lardi. **ε** usul ana shunday tanlash muammosini hal qiladi.

5. Ochiq modelli transport masalasi

Ba'zi transport masalalarida ishlab chiqarilgan mahsulotlar yig'indisi $\sum_i a_i$ ularga bo'lgan talablar yigindisi $\sum_j b_j$ dan kichik (katta) bo'lishi mumkin. Bunday masalalar ochiq modelli transport masalasi deyiladi.

Agar $\sum_i a_i < \sum_j b_j$ bo'lsa, mahsulotga bo'lgan hamma talabni qanoatlantirib bo'lmaydi. Lekin bu holda ham mahsulotlarni kam xarajat sarf qilib taqsimlash rejasini aniqlash mumkin. Buning uchun masalaga mahsulot zahirasi

$$a_{m+1}= \sum_j b_j - \sum_i a_i > 0$$

birlikni tashkil qiluvchi soxta m+1 ta'minotchi kiritiladi. Bu punktdan barcha iste'mol qiluvchi punktlarga mahsulotni tashish uchun sarf qilinadigan transport xarajatlari $c_{m+1,j}=0$, $j=\overline{1,n}$ deb qabul qilinadi.

Agar $\sum_i a_i > \sum_j b_j$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda n+1 -soxta iste'mol qiluvchi punkt kiritilib, bu punktga mahsulotni tashish uchun sarf qilinadigan transport xarajatlari $c_{i,n+1}=0$, $i=\overline{1,m}$ deb qabul qilinadi. Bu punktning masulotga bo'lgan talabi

$$b_{n+1}= \sum_i a_i - \sum_j b_j > 0 \text{ bo'ladi.}$$

Misol. Quyidagi ochiq modelli transport masalasini yching.

a_i \ b_i	3	3	3	2	2
4	3	2	1	2	3
5	5	4	3	1	1

7	*0*	*2*	*3*	*4*	*5*

Bu masalada $\sum_i a_i = 16 > \sum_j b_j = 13.$ Shuning uchun talabi $b_6=16\text{-}13=3$ bo'lgan soxta iste'mol qiluvchi punkt kiritib, masalani quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$a_i \backslash b_i$	3	3	3	2	2	3
4	3	2	1	2	3	0
5	5	4	3	1	1	0
7	0	2	3	4	5	0

Bu masalani potentsial usuli bilan echib, 7-tsiklda optimal yechimni topamiz:

$a_i \backslash b_i$	3	3	3	2	2	3
4	3	2 1	1 3	2	3	0
5	5	4	3	1 2	1 2	0 1
7	0 3	2 2	3	4	5	0 2

ya'ni: $x_{12}=1,\ x_{13}=3,$
$x_{24}=2,\ x_{25}=2,\ x_{26}=1$
$x_{31}=3,\ x_{32}=2,\ x_{36}=2,$
$Y_{min}=1\cdot2+1\cdot3+1\cdot2+1\cdot2+1\cdot0+0\cdot3+2\cdot2+2\cdot0=13.$

Demak, ishlab chiqarilgan mahsulotlarni eng kam harajat sarf qilib taqsimlash uchun 2-ta'minotchi punktda 1 birlik va 3- ta'minotchi punktda 2 birlik mahsulot ortib qolishi kerak ekan.

Nazorat savollari:

1. Transport masalasining matematik modeli qanday va u qanday formalarda yoziladi?
2. Yopiq va ochiq modelli transport masalalariga izoh bering.
3. Transport masalasi yechimi mavjud bo'lishining zarur va etarlilik sharti nimadan iborat?
4. Transport masalasi shartlaridan tuzilgan matritsaning rangi nimaga teng?
5. Transport masalasi yechimidagi 0 dan farqli o'zgaruvchilar soni nechta?
6. Qaysi holda transport masalasining yechimi butun sonli bo'ladi?
7. "Shimoliy g'arb burchak" usulining g'oyasi qanday?
8. "Minimal xarajatlar" usulining g'oyasi qanday?
9. Potentsiallar nima va u qanday ma'noga ega?

10. Potentsial tenglama nima va u qanday yoziladi?
11. Transport masalasi bazisechimining optimallik sharti nimadan iborat?
12. Brundo usuli qanday usul?
13. Xos transport masalasi qanday?
14. Xos bazis yechim deb qanday yechimga aytiladi?
15. Tsikllanish nima va u qanday hollarda ro’y berishi mumkin?
16. ε-usulning ma’nosi nimadan iborat?
17. Ochiq modelli transport masalasini qanday yo’l bilan yopiq modelli masalaga aylantirish mumkin?
18. Soxta ta’minotchining mahsulot zahirasi nimaga teng bo’ladi?
19. Soxta iste’molchining mahsulotga bo’lgan talabi qancha bo’ladi?

23-mavzu. Butun sonli dasturlash

Reja:

1. Iqtisodiy masalalar
2. Butun sonli dasturlash masalasining qo'yilishi, turlari va geometrik talqini
3. Butun sonli dasturlash masalasini yechishning Gomori usuli

Tayanch iboralar:

Butun sonli dasturlash; to'la butun sonli dasturlash; qisman butun sonli dasturlash; Bul o'zgaruvchili dasturlash; kesuvchi tenglama; Gomori usuli

1. Iqtisodiy masalalar

O'zgaruvchilariga butun sonli bo'lishlik sharti qo'yilgan chiziqli dasturlash masalalari katta axamiyatga egadir. Bunday masalalar butun sonli dasturlash masalalari deb ataladi. Butun sonli dasturlash masalalariga sayyoh xaqidagi masala, optimal jadval tuzish, ratsional bichish, transport vositalarini marshrutlarga optimal taqsimlash, bo'linmaydigan maxsulotlar ishlab chiqaruvchi korxonaning ishini optimal rejalashtirish masalalari misol bo'la oladi. Bu masalalarning ba'zilari bilan tanishamiz:

1) Sayyoh haqidagi masala. Faraz qilaylik, P_0 shaxarda yashovchi sayyoh n ta $P_1, P_2,..., P_n$ shaharlarda bir martadan bo'lib, minimal vaqt ichida P_0 shaharga qaytib kelishi kerak bo'lsin. Bu masalaning matematik modelini tuzish uchun savdogarning P_i shahardan P_j shaharga borishi uchun sarf qilgan vaqtini t_{ij}, $(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,n})$ bilan hamda uning har bir P_i shahardan P_j shaharga borish variantining xarakteristikasini x_{ij} bilan belgilaymiz. Agar savdogar P_i shahardan P_j ga borsa, $x_{ij} = 1$, bormasa $x_{ij} = 0$ bo'ladi (Soddalik uchun P_i va P_j shaharlar faqat bir marshrut yordami bilan bog'langan deb faraz qilamiz). Bu holda masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad (i=\overline{1,n}) \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad (j=\overline{1,n}) \qquad (2)$$

$$x_{ij} = 0, ёки \quad x_{ij} = 1 \qquad (3)$$

$$y = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_{ij} \to \min \qquad (4)$$

2) Optimal joylashtirish masalasi. Faraz qilaylik, m ta $A_1, A_2,..., A_m$ punktlarda bir xil mahsulotlar ishlab chiqaruvchi korxonalarni joylashtirish kerak bo'lsin. Har bir korxonaning ishlab chiqarish quvvatini bildiruvchi x_i $(i=\overline{1,m})$ butun sonli qiymatlarni qabul qiladi. Har bir A_i punktda maxsulot ishlab chiqarish uchun sarf qilingan harajat ishlab chiqarilgan mahsulot miqdoriga bog'liq bo'lib, u $f_i\ (x_i)$ funktsiya orqali ifodalanadi. Soddalik uchun bu funktsiyani chiziqli deb qabul qilamiz, ya'ni

$$f_i\,(x_i) = s_i\,x_i.$$

Bundan tashqari *n* ta punktda bu mahsulot iste'mol qilinadi. har bir iste'mol qiluvchi punktning mahsulotga bo'lgan talabi ma'lum va ular $b_1,b_2,...,b_n$ birliklarni tashkil qiladi deb faraz qilamiz. Har bir A_i ishlab chiqaruvchi punkt har bir B_j iste'mol qiluvchi punkt bilan bog'langan bo'lib yo'l harajatlari matritsasi $C = (c_{ij})$ dan iborat bo'lsin.

A_i punktdan B_j punktga yuboriladigan mahsulot miqdorini x_{ij} bilan belgilaymiz. U holda masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = x_i, \quad (i = \overline{1,m}) \qquad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j, \quad (j = \overline{1,n}) \qquad (6)$$

$$x_{ij} \geq 0, (i=1,m; j=1,n) \qquad (7)$$

x_i – butun son, *(8)*

$$y = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min . \qquad (9)$$

3) Taqsimot masalasi. Berilgan *n* ta ishni bajarish uchun *m* ta uskunlardan foydalanish mumkin. *i*-uskunaning *(i=1,...,m)* *j*-ishni *(j=1,...,n)* bajarishdagi mehnat unumdorligini C_{ij} bilan belgilaymiz. Har bir uskunada faqat bitta ishni bajarish mumkinligini hamda har bir ish faqat bitta uskunada bajarilishini nazarga olgan holda maksimal mehnat unumdorligini ta'minlovchi uskunalarni ishlarga tahsimlash rejasini aniqlaymiz.

Masaladagi noma'lumlarni $x_{ij}(i=1,...,m;\ j=1,...,n)$ bilan belgilaymiz. Bu yerda x_{ij} – *j*-ishni *i*-uskunada bajarishni baholovchi son bo'lib, agar *j*-ish *i*-uskunada bajarilsa $x_{ij}=1$, agar *j*-ish *i*-uskunada bajarilmasa $x_{ij}=0$ bo'ladi.

Har bir uskunani faqat bitta ishni bajarishda qo'llanishi

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad (i = \overline{1,m}), \qquad (10)$$

tenglik orqali ifodalanadi.

Har bir ishni faqat bitta uskunada bajarilishi

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \qquad (j = \overline{1,n}), \qquad (11)$$

tenglik orqali ifodalanadi. Bu yerda

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{agar} \quad j - ish \quad i - uskunada \quad \text{bajarilsa,} \\ 0, & \text{agar} \quad \text{j} - ish \quad \text{i} - uskunada \quad \text{bajarilmas a} \end{cases} \qquad (12)$$

Shunday qilib, masala (10)-(12) shartlarni qanoatlantiruvchi hamda

$$Y = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij} \qquad (13)$$

funktsiyaga maksimal qiymat beruvchi x_{ij} noma'lumlarning qiymatini topishga keltirildi. Bu masala ham butun sonli dasturlash masalasi bo'ladi.

Misol. Sexda qo'shimcha uskuna o'rnatishga qaror qabul qilinib, uning uchun 19/3 m^2 maydon ajratildi. Bu uskunani sotib olish uchun tsex 10 ming so'm pul sarf qilishi mumkin. Tsex o'z imkoniyatidan kelib chiqib 2 turdagi uskuna sotib olishi mumkin. 1-turdagi uskunaning bahosi 1000 so'm, II-turdagisining bahosi esa, 3000 so'm turadi.

I va II tur uskunaning o'rnatilishi oqibatida har smenada tsex mos ravishda 2 va 4 birlik mahsulot ko'proq ishlab chiqaradi. I tur uskunani o'rnatish uchun 2 m^2, II tur uskuna uchun esa 1 m^2 maydon kerak.

Qaysi uskunadan qanchadan sotib olinganda sexda ishlab chiqarilgan qo'shimcha mahsulotlarning miqdori maksimal bo'ladi?

Yechish._Tsex I-tur uskunadan x_1 dona, II-tur uskunadan x_2 dona sotib olsin, deylik. U holda masalani shartlari quyidagi tengsizliklar sistemasi orqali ifodalanadi.

$$2x_1+x_2\le 19/3,$$
$$x_1+3x_2\le 10,$$
$$x_1\ge 0, \quad x_2\ge 0, \quad x_1, x_2\text{-butun.}$$

Masalaning maqsadi ishlab chiqarilgan qo'shimcha mahsulotlar miqdorini maksimal qilishdan iborat bo'lib, u quyidagi funktsiya ko'rinishida yoziladi.

$$Y=2x_1+4x_2\to max$$

Shunday qilib, berilgan masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinishga ega bo'ldi.

$$\begin{cases} 2x_1+x_2\le 19/3 \\ x_1+3x_2\le 10 \end{cases} \qquad (14)$$

$$x_1\ge 0, \quad x_2\ge 0,$$

(15)

$$x_1, x_2\text{-butun,} \qquad (16)$$

$$Y=2x_1+4x_2\to max \qquad (17)$$

2. Butun sonli dasturlash masalasining qo'yilishi, turlari va geometrik talqini

Butun sonli dasturlash masalasini umumiy holda quyidagi ko'rinishda ifodalash mumkin:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad (i=\overline{1,m}) \qquad (18)$$

$$x_j\ge 0, \quad \text{бутун}, \quad (j=\overline{1,n}), \qquad (19)$$

$$Y=\sum_{j=1}^{m} c_j x_j \to \min \qquad (20)$$

yoki vektor formada

$$AX=b, \quad (21)$$
$$X\geq 0 \quad \text{va butun} \quad (22)$$
$$u=CX \rightarrow min \quad (23)$$

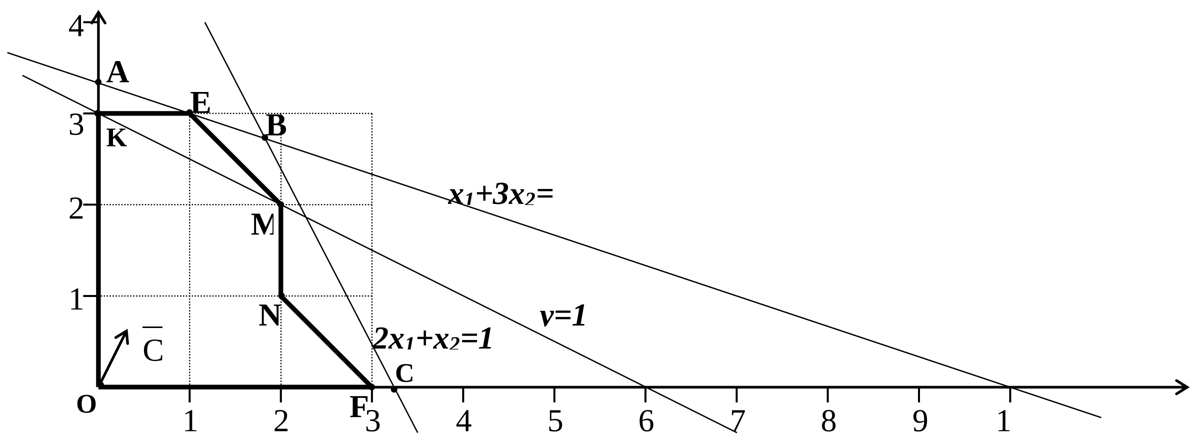
Butun sonli dasturlash masalalaridagi noma’lumlarning hammasi uchun butun bo’lishlik sharti qo’yilsa, bunday masalalar **to’la butun sonli dasturlash** masalalari deb ataladi.

Noma’lumlarning ma’lum bir qismi uchun butun bo’lishlik sharti qo’yilgan masalalar **qisman butun sonli** dasturlash masalalari deb ataladi.

Agar butun sonli dasturlash masalasidagi noma’lumlar faqat 0 yoki 1 qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo’lsa, u holda bu masala **Bul dasturlash masalasi** deb ataladi.

Butun sonli dasturlash masalasining geometrik talqini bilan tanishamiz. Buning uchun (14) – (17) masalani grafik usulda yechish jarayonini tasvirlaymiz.

Eng avval masalaning (14) va (15) shartlarini qanoatlantiruvchi yechimlar to’plamidan iborat bo’lgan qavariq *OABC* ko’pburchakni yasaymiz (1-shakl).



1-shakl.

OABC ko’pburchakning nuqtalari ichida berilgan butun sonli dasturlash masalasining yechimi bo’laoladigan nuqtani topish uchun bu ko’pburchakni *OKEMNF* ko’pburchak bilan almashtiramiz. *OKEMNF* ko’pburchak koordinatalari butun sonlardan iborat bo’lgan nuqtalarni o’z ichiga oladi va uning burchak nuqtalarining koordinatalari butun sonlardan iborat bo’ladi.

Endi (17) funktsiyaga maksimum qiymat beruvchi nuqtani *OKEMNF* ko’pburchakning burchak nuqtalari ichida qidiramiz. Bu ko’pburchakning nuqtalari ichida (17) funktsiyaga maksimum qiymat beruvchi nuqta berilgan masalaning optimal yechimini aniqlaydi. Bunday nuqtani topish uchun *Y* ga ixtiyoriy, masalan, 12 qiymat beramiz va

$$2x_1+4x_2=12$$

to’g’ri chiziqni yasaymiz. Bu chiziqni $\overline{C}(2;4)$ vektor yo’nalishida *OKEMNF* ko’pburchakning shu yo’nalishidagi chetki nuqtasi bilan kesishguncha siljitib boramiz. Ana shu burchak nuqtaning koordinatalari berilgan masalaning yechimini aniqlaydi, maqsad funktsiyaning shu nuqtadagi qiymati esa maksimal bo’ladi.

Shakldan ko’rinadiki, bunday nuqta *E(1;3)* dan iborat. Demak berilgan masalaning yechimi:

$$x_1=1, \quad x_2=3,$$
$$Y_{max}=14$$

bo’ladi.

Misol. Berilgan butun sonli dasturlash masalasini grafik usulda yeching.

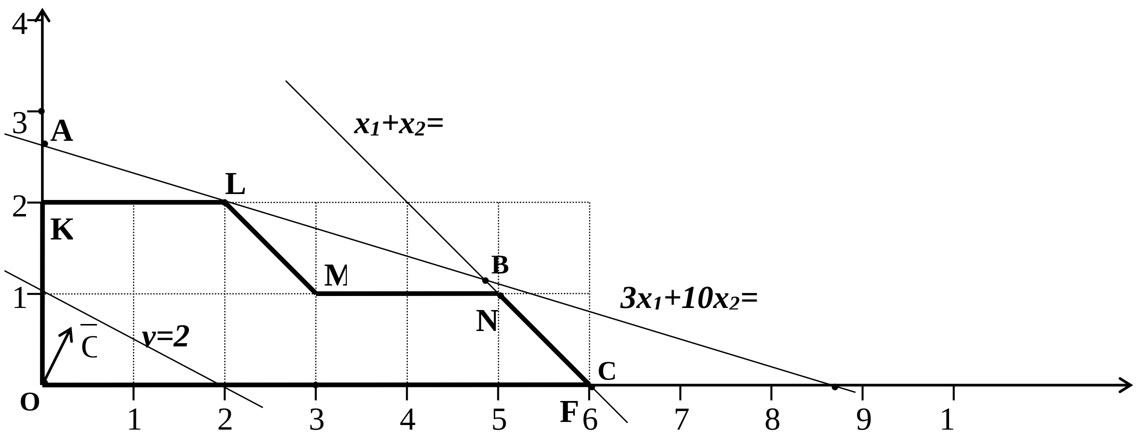
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6, \\ 3x_1 + 10x_2 \le 26, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \tag{25}$$

$$x_1,\ x_2\text{-butun}, \tag{26}$$

$$Y = x_1 + 2x_2 \to max \tag{27}$$

Yechish. Masaladagi (24) tengsizliklar sistemasining (25) shartni qanoatlantiruvchi nomanfiy yechimlarini o’z ichiga oluvchi *OABC* ko’pburchak yasaymiz (2-shakl).



2-shakl.

OABC ko’pburchakni *OKLMNF* ko’pburchak bilan almashtiramiz. Bu ko’pburchak koordinatalari butun sonlardan iborat bo’lgan 16 ta nuqtani o’z ichiga oladi. Shu nuqtalar ichida (2) funktsiyaga maksimum qiymat beruvchi nuqtani topish kerak. Buning uchun Y ga ixtiyoriy, masalan, 2 qiymat beramiz va

$$x_1+2x_2=2$$

to’g’ri chiziqni yasaymiz. Bu chiziqni $\overline{C}(1;2)$ vektor yo’nalishida surib borib N(5;1) nuqta shu yo’nalishdagi eng chetki nuqta ekanligini aniqlaymiz. Demak, bu nuqtaning koordinatalari berilgan masalaning yechimini aniqlaydi:

$$x_1=5, \quad x_2=1,$$
$$Y_{max}=7.$$

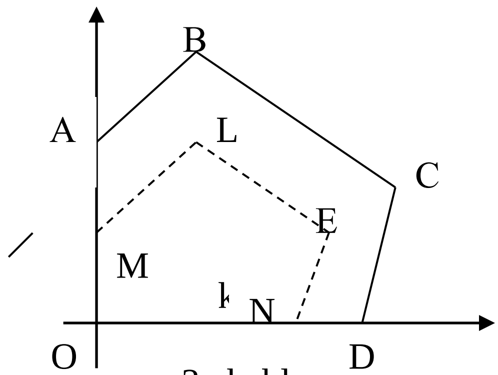
3. Butun sonli dasturlash masalasini yechishning Gomori usuli

Butun sonli dasturlash masalasi chiziqli dasturlash masala-sidan qo'shimcha (3) yoki (19) ko'rinishdagi shartlar bilan farq qiladi. Bu shartlarning qatnashishi butun sonli dasturlash masalasini yechish jarayonini qiyinlashtiradi. Natijada chiziqli dasturlash masalasini yechish uchun qo'llaniladigan usullarni butun sonli dasturlash masalalariga qo'llash mumkin bo'lmay qoladi.

Butun sonli dasturlash masalalarni yechish uchun uning xususiyatlarini e'tiborga oluvchi usullar yaratilgan bo'lib, ulardan amerika olimi R.Gomori yaratgan usul optimal yechimni beruvchi eng aniq usul hisoblanadi. R.Gomori to'liq butun sonli va qisman butun sonli dasturlash masalalarni yechish usulini yaratgan. Quyida uning faqat to'liq butun sonli dasturlash masalalarni yechish uchun mo'ljallangan 1-algoritmi bilan tanishamiz.

Bu usulning g'oyasi quyidagidan iborat. Berilgan butun sonli dasturlash masalasida noma'lumlarning butun bo'lishlik shartiga e'tibor bermasdan, ularning oddiy chiziqli dasturlash masalasi sifatida simpleks usulidan foydalanib yechamiz. Agar yechim butun sonlardan iborat bo'lsa, u butun sonli dasturlash masalasining ham yechimi bo'ladi. Aks xolda noma'lumlarning butun bo'lishlik shartini e'tiborga oluvchi va «kesuvchi tenglama» deb ataluvchi qo'shimcha tenglama tuziladi. Bu tenglama asosiy tenglamalar sistemasiga qo'shib yoziladi va bazis yechim almashtiriladi. Buning uchun noma'lumni kesuvchi tenglamadan ajratiladi va uning qiymatini boshqa tenglamalarga qo'yib chiqiladi. Bunday ishlar masalaning butun sonli yechimi topilguncha yoki uning mavjud emasligi aniqlanguncha takrorlanadi. Har bir bosqichda tuzilgan qo'shimcha tenglama kesuvchi tenglama deb atalishiga sabab bu tenglama yordamida berilgan (18)–(20) masalaning rejalaridan tashkil topgan qavariq to'plamining kasr sonli rejalarini o'z ichiga olgan qismini kesib boradi. Kesish jarayoni K to'plamining faqat butun sonli rejalarini o'z ichiga olgan qismi K` topilguncha yoki bunday qism mavjud emasligi aniqlanguncha takrorlanadi. Buning geometrik tasvirini quyidagi shaklda (3-shakl) ifodalash mumkin.

Bu shaklda K qavariq to'plam OAVSD ko'pburchak orqali ifodalangan. Bu ko'pburchakning burchak nuqtalari kesuvchi tenglamalar yordami bilan kesib borish natijasida OMLEN qavariq ko'pburchak hosil bo'ladiki, uning burchak nuqtalarining koordinatalari butun sonlarlar iborat bo'ladi.



3-shakl

Kesuvchi tenglamalar quyidagicha tuziladi:

1. Faraz qilaylik, (18)-(20) masaladagi noma'lumlarning butun bo'lishlik shartini tashlab yuborishdan hosil bo'lgan masala yechilgan va uning optimal yechimi X=($x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_m, ... x_n$) bo'lsin. Oxirgi simpleks jadvaldagi bazis vektorlar $P_1, P_2, ..., P_i, ..., P_m$ lardan iborat deylik. Bu xolda bu simpleks jadvalining ko'rinishi quyidagicha bo'ladi

$$\overline{X} = \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 & ... & 0 & ... & 0 & x_{1,m+1} & ... & x_{1j} & ... & x_{1n} \\ x_2 & 0 & 1 & ... & 0 & ... & 0 & x_{2,m+1} & ... & x_{2j} & ... & x_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ x_i & 0 & 0 & ... & 1 & ... & 0 & x_{i,m+1} & ... & x_{ij} & ... & x_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ x_m & 0 & 0 & ... & 0 & ... & 1 & x_{m,m+1} & ... & x_{mj} & ... & x_{mn} \end{vmatrix}$$

Agar barcha x_i lar butun sonlar bo'lsa, topilgan yechim butun sonli dasturlash masalasining yechimi bo'ladi.

2. Faraz qilaylik, ba'zi x_i lar kasr sonlardan iborat bo'lsin hamda ba'zi x_{ij} lar ham kasr sonlar bo'lsin (aks xolda masala butun sonli yechimga ega bo'lmaydi). x_i va x_{ij} larning butun qismlarini mos ravishda $| x_i|$ va $| x_{ij}|$ bilan belgilaymiz. U holda bu sonlarning kasr qismlari q_i, q_{ij} lar quyidagicha aniqlanadi:

$$\begin{cases} q_i = x_i - \left| x_i \right|, \\ q_{ij} = x_{ij} - \left| x_{ij} \right|. \end{cases} \qquad (28)$$

Faraz qilaylik, ba'zi $q_i \neq 0$ bo'lsin. U xolda $\overline{X}$ matritsaning $\max\limits_{q_i \neq 0} q_i = q_k$ tenglikni qanoatlantiruvchi k qatori uchun kesuvchi tenglama tuziladi. Buning uchun avval

$$q_{k1}x_1 + q_{k2}x_2 + ... + q_{kn}x_n \geq q_k \qquad (29)$$

tengsizlik tuziladi, so'ngra uni (-1) ga ko'paytirib x_{n+1} qo'shimcha o'zgaruvchi kiritish natijasida quyidagi tenglama hosil qilinadi.

$$-q_{k1}x_1 - q_{k2}x_2 - ... - q_{kn}x_n + x_{n+1} = -q_k \qquad (30)$$

Bunday tuzilgan tenglama **kesuvchi tenglama** deyiladi.

3. Kesuvchi tenglamani simpleks jadvalining m+2 qatoriga joylashtiramiz. Bu tenglamadagi x_{n+1} o'zgaruvchiga mos keluvchi P_{n+1} vektor bazis vektor bo'ladi.

Bazisdan P_{n+1} vektor chiqarilib, uning o'rniga

$$\min_{q_{kj}<0}\left(\frac{\Delta_j}{q_{kj}}\right) = \frac{\Delta_l}{q_{kl}}$$

shartni qanoatlantiruvchi P_l vektor kiritiladi va oddiy simpleks usuldagi formulalar yordamida simpleks jadval almashtiriladi. Agar hosil bo'lgan simpleks jadvaldagi barcha $x`_i$ lar butun sonli (ya'ni xamma $q`_i = 0$) bo'lsa, topilgan yechim berilgan butun sonli dasturlash masalasining yechimi bo'ladi. Aks xolda yuqoridagi 2-3 punktlarda qilingan ishlarni yana takrorlaymiz, umuman bu ishlar berilgan masalalarning butun sonli yechimi topilguncha yoki masalalarning butun sonli yechimi mavjud emasligi aniqlanguncha takrorlanadi. Agar $max\ q_i = q_k \quad q_i \neq 0$ shartni qanoatlantiruvchi *k*- qatordagi barcha x_{ij} lar butun sonli(demak barcha $q_{kj}=0$) bo'lsa, u holda berilgan masala butun sonli yechimga ega bo'lmaydi.

Misol. quyidagi chiziqli dasturlash masalasini butun sonli yechimini toping.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 3 \end{cases},$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ \textit{бутун},$$

$$y = 8 - 3x_1 - x_2 \rightarrow min.$$

Yechish. Masalaning normal holga keltiramiz:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 3 \end{cases},$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, butun,,$$

$$y = 8 - 3x_1 - x_2 \rightarrow min$$

Bu masalani noma'lumlarning butun bo'lishlik shartiga e'tibor bermasdan simpleks usul yordami bilan yechamiz.

Buning uchun x_3 va x_4 qo'shimcha o'zgaruvchilarga mos keluvchi P_3 va P_4 vektorlarni bazis vektorlar deb qabul qilib, sipleks jadvalni to'ldiramiz va simpleks jarayonni amalga oshiramiz.

I.

B.v.	C	P_o	-3	-1	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4
P_3	0	6	2	3	1	0
P_4	0	3	2	-3	0	1
		8+0	3	1	0	0

II.

B.v.	C	P_o	-3	-1	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4
P_3	0	3	0	6	1	-1
P_1	-3	3/2	1	-3/2	0	½
		7/2	0	11/2	0	-3/2

III.

B.v.	C	P_o	-3	-1	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4
P_2	-1	1/2	0	1	1/6	-1/6
P_1	-3	9/4	1	0	1/4	1/4
		3/4	0	0	11/12	-7/12

Shunday qilib 3 – bosqichda masalaning optimal yechimi topildi, lekin bu yechim butun sonli emas. Yechimni butun sonli yechimga aylantirish uchun oxirgi simpleks jadvalning birinchi qatoriga nisbatan kesuvchi tenglama tuzamiz. Buning uchun, eng avval, quyidagi tengsizlikni hosil qilamiz

$$\frac{1}{6}x_3 - \frac{1}{6}x_4 \geq \frac{1}{2}.$$

Bu tengsizlikni ikki tomonini (-1) ga ko'paytirib, x_5 qo'shimcha o'zgaruvchi kiritamiz va quyidagi tenglamani hosil qilamiz

$$-\frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{6}x_4 + x_5 = -\frac{1}{2}.$$

Uni simpleks jadvalning 4- qatoriga joylashtiramiz.

B.v.	C	P_o	-3	-1	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_2	-1	1/2	0	1	1/6	-1/6	0
P_1	-3	9/4	1	0	1/4	1/4	0
Δ_j		3/4	0	0	-11/12	-7/12	0
P_5	0	-1/2	0	0	-1/6	1/6	1

Bazisdan P_5 ni chiqarib, uning o'rniga P_3 ni kiritamiz. natijada simpleks jadval almashadi va quyidagi ko'rinishga keladi:

B.v.	C	P_o	-3	-1	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_6
P_2	-1	0	0	1	0	0	0
P_1	3	3/2	1	0	0	1/2	0
P_3	0	3	0	0	1	-1	0
Δ_j		7/2	0	0	0	-3/2	
P_6	0	-1/2	0	0	0	-1/2	1

Endi simpleks jadvalning 2 qatoriga nisbatan kesuvchi tenglamani tuzamiz. Buning uchun avval quyidagi tengsizlikni tuzib olamiz:

$$\frac{1}{2}x_4 \geq \frac{1}{2}.$$

Bu tengsizlikning ikki tomonini (-1) ko'paytirib topamiz:

$$-\frac{1}{2}x_4 \le -\frac{1}{2}.$$

Tengsizlikning kichik tomoniga x_6 qo'shimcha o'zgaruvchi kiritamiz va quyidagi kesuvchi tenglamani tuzamiz:

$$-\frac{1}{2}x_4 + x_6 = -\frac{1}{2}.$$

Bu tenglamani simpleks jadvalning 5-qatoriga joylashtiramiz. So'ngra bazisdan P_6 ni chiqarib, uning o'rniga P_4 ni kiritamiz.

B.v.	C	P_o	-3	-1	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_6
P_2	-1	0	0	1	0	0	0
P_1	-3	1	1	0	0	0	1
P_3	0	4	0	0	1	0	1
P_4	0	1	0	0	0	1	-2
Δ_j		8-3=5	0	0	0	0	-3

Hosil bo'lgan simpleks jadvaldagi P_0 vektorning koordinatalari butun sonlardan iborat. Demak, butun sonli dasturlash masalasining yechimi topilgan va u X=(1;0;4;1) bo'lib, bu yechimdagi maqsad funktsiyaning qiymati Y_{min}=5 bo'ladi.

Nazorat savollari:

1. Butun sonli dasturlash masalasi qanday qo'yiladi?
2. Butun sonli dasturlash masalalarining qanday turlari mavjud?
3. Butun sonli dasturlash masalasining geometrik talqini qanday?
4. Qanday iqtisodiy masalalarning matematik modellari butun sonli dasturlash masalasiga misol bo'la oladi?
5. Sayyoh xaqidagi masalaning matematik modelini yozing.
6. Sanoat korxonalarini optimal joylashtirish masalasining matematik modeli qanday?
7. Taqsimot masalasining matematik modelini yozing.
8. R.Gomori usulining g'oyasi qanday?
9. Kesuvchi tenglama nima va u qanday tuziladi?
10. Masalaning butun sonli yechimga ega bo'lmaslik sharti qanday?
11. Butun sonli yechimning optimallik sharti qanday?

24-mavzu. Chiziqsiz dasturlash masalalari

Reja:

1. Chiziqsiz dasturlash masalalarining qo'yilishi va turlari
2. Chiziqsiz dasturlash masalalarining geometrik talqini. Grafik usul
3. Shartsiz optimallashtirish masalasi
4. Shartlari tenglamalardan iborat bo'lgan shartli ekstremum masalasi va uni yechish uchun Lagranj usuli

Tayanch iboralar:

Chiziqsiz dasturlashlash; shartsiz optimallashtirish masalasi; mahaliy optimal yechim; global optimal yechim; separabel dasturlash masalasi; statik masalalar; gipertekislik; gipersirt; statsionar nuqta; Gesse matritsasi; n-o'lchovli gradient; musbat aniqlangan matritsa; manfiy aniqlangan matritsa; noaniq matritsa; egar nuqta; Nyuton-Rafson usuli; Lagranj ko'paytuvchilari; Lagranj funktsiyasi

1. Chiziqsiz dasturlash masalalarining qo'yilishi va turlari

Ma'lumki, matematik dasturlash masalasi deganda umumiy holda

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\{\le,=,\ge\}\, b_i,\ i = \overline{1,m}$$

munosabatlarni qanoatlantiruvchi va $Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funktsiyani maksimumga (minimumga) aylantiruvchi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ noma'lumlarning qiymatlarini topish masalasi nazarda tutiladi. Bu masala shartlarini qisqacha bunday yozish mumkin:

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\{\le,=,\ge\}\, b_i,\ i = \overline{1,m}, \tag{1}$$

$$Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max(\min), \tag{2}$$

bu yerda $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ va $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ berilgan funktsiyalar, b_i, $(i = 1,\ldots,m)$ lar o'zgarmas sonlar. (1) cheklamalar masalaning **chegaraviy shartlari**, $Z=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ funktsiya esa **maqsad funktsiyasi** deb ataladi. (1) dagi har bir cheklama uchun $\le,=,\ge$ belgilardan faqat bittasi o'rinli bo'ladi.

Ayrim chiziqsiz dasturlash masalalarida $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o'zgaruvchilarning ba'zilariga yoki hammasiga manfiy bo'lmaslik sharti qo'yilgan bo'ladi. Ba'zi masalalarda esa noma'lumlarning bir qismi (yoki hammasi) butun bo'lishligi talab qilinadi.

(1), (2) masaladagi hamma $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funktsiyalar chiziqli bo'lsa hamda barcha o'zgaruvchilarning nomanfiy bo'shligi talab qilinsa, bu masala chiziqli dasturlash masalasi bo'ladi.

(1), (2) masalada m=0 bo'lsa, ya'ni chegaraviy shartlar qatnashmasa, u **shartsiz optimallashtirish masalasi** deyiladi. Bu holda masala quyidagicha yoziladi:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max(\min),$$

$$(x_1, x_2,...,x_n) \in E_n, \qquad (3)$$

bu yerda $(x_1, x_2,....x_n)$-n o'lchovli vektor (nuqta) E_n – n o'lchovli Evklid fazosi, ya'ni vektorlarni qo'shish, songa ko'paytirish va ikki vektorning skalyar ko'paytmasi amallari kiritilgan n o'lchovli
$X=(x_1, x_2,...,x_n)$ vektorlar (nuqtalar) to'plami.

Faraz qilaylik, (1) sistema faqat tenglamalar sistemasidan iborat bo'lib, noma'lumlarga nomanfiy bo'lishlik sharti qo'yilmasin hamda m < n bo'lib, $g_i(x_1, x_2,....x_n)$ va $f(x_1, x_2,...,x_n)$ funktsiyalar uzluksiz va kamida ikkinchi tartibli xususiy hosilaga ega bo'lsin. Bu holda chiziqsiz dasturlash masalasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$g_i(x_1, x_2,....x_n) = b_i, \ (i = \overline{1,m}) \qquad (4)$$
$$Z = f(x_1, x_2,...,x_n) \rightarrow \max(\min).$$

Bunday masala cheklamalari tenglamalardan iborat bo'lgan **shartli maksimum (minimum) masalasi** deyiladi. (4) ko'rinishdagi masalalarni differentsial hisobga asoslangan klassik usullar bilan yechish mumkin bo'lgani uchun ularni **optimallashtirishning klassik masalalari** deyiladi.

Agar (1) sistemadagi hamma cheklamalarlar tengsizliklardan iborat bo'lsa hamda ularning ba'zilariga «≤», ba'zilariga esa «≥», belgilar mos kelsa, bu tengsizliklarni osonlik bilan bir xil ko'rinishga keltirish mumkin. Bundan tashqari

$$f(x_1, x_2,...,x_n) \rightarrow \max$$

shartni

$$-f(x_1, x_2,...,x_n) \rightarrow \min$$

ko'rinishida yozish mumkin. Shuning uchun, umumiylikni buzmasdan, shartlari tengsizlikdan iborat bo'lgan chiziqsiz dasturlash masalasini quyidagicha yozish mumkin:

$$g_i(x_1,x_2,....x_n) \le b_i, \ (i = 1,m) \qquad (5)$$

$$x_j \ge \overline{0\ (j}=1,n) \qquad (6)$$
$$Z = f(x_1, x_2,...,x_n) \rightarrow \min. \qquad (7)$$

Noma'lumlarning nomanfiylik sharti qatnashmagan masalalarga bunday shartni osonlik bilan kiritish mumkin.

Ba'zi hollarda masalaning (1) shartidagi ayrim cheklamalar tenglamalardan, ayrimlari esa tengsizliklardan iborat bo'lishi mumkin. Bunday masalalarni shartlari aralash belgili bo'lgan minimum masalasi ko'rinishiga keltirib¸ zish mumkin:

$$g_i(x_1,x_2,....x_n)\text{O'}\ b_i, \qquad (i=\overline{1,m_1}) \qquad (8)$$

$$g_i(x_1,x_2,....x_n) = b_i, \qquad (i = \overline{m_1+1,m}) \qquad (9)$$

$$Z = f(x_1, x_2,...,x_n) \rightarrow \min. \qquad (10)$$

Bunda (8), (9) cheklamalar chegaraviy shartlardan iborat bo'lib, noma'lumlarning nomanfiy bo'lishlik shartini ham o'z ichiga oladi.

Endi quyidagi ko'rinishda berilgan masalani ko'ramiz:

$$g_i(X) = g_i(x_1,x_2,....x_n) \le b_{i,} \; i = 1,m \qquad (11)$$

$$X = (x_1,x_2,....x_n) \in G \subset E_n , \qquad (12)$$

$$Z(X) = f(x_1, x_2,...,x_n) \rightarrow \max(\min). \qquad (13)$$

Bu masala chekli o'lchovli chiziqsiz dasturlash masalasining umumiy ko'rinishidan iborat bo'lib, bunda $f(x_1, x_2,...,x_n)$ - maqsad funktsiyasi, $g_i(x_1,x_2,....x_n)$ - chegaraviy funktsional, G - masalaning aniqlanish sohasi, G to'plamning nuqtalari masalaning rejalari deb, (11) shartlarni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami esa masalaning **joiz rejalar to'plami** deb ataladi.

Chiziqsiz dasturlashda **mahalliy** va **global** optimal reja tushunchasi mavjud bo'lib, ular quyidagicha ta'riflanadi.

Faraz qilaylik, X^* nuqta (11) - (13) masalaning joiz rejasi va uning kichik ε atrofidagi (ε ixtiyoriy kichik musbat son) nuqtalar to'plami $\varepsilon(X^*) \in G$ dan iborat bo'lsin.

Agar

$$f(X^*) \le f(X) \qquad [f(X^*) \ge F(X)] \qquad (14)$$

munosabat ixtiyoriy $X \in \varepsilon(X^*)$ uchun o'rinli bo'lsa, X* reja maqsad funktsiyaga mahalliy minimum (maksimum) qiymat beruvchi mahalliy optimal reja deb ataladi.

1. Agar

$$f(X^*) \le f(X) \qquad [f(X^*) \ge F(X)]$$

tengsizlik ixtiyoriy $X \in G$ uchun o'rinli bo'lsa, X* reja maqsad funktsiyaga global (absolyut) minimum (maksimum) qiymat beruvchi **global optimal reja** yoki **global optimal yechim** deb ataladi.

Yuqoridagi (5)-(7) va (10) masalalarni yechish uchun chiziqli dasturlashdagi simpleks usulga o'xshagan universal usul kashf qilinmagan.

Bu masalalar $g_I(x_1,x_2,....x_n)$ va $f(x_1, x_2,...,x_n)$ funktsiyalar ixtiyoriy chiziqsiz funktsiyalar bo'lgan hollarda juda kam o'rganilgan. Hozirgacha eng yaxshi o'rganilgan chiziqsiz dasturlash masalalari $g_i(x_1,x_2,....x_n)$ va $f(x_1, x_2,...,x_n)$ funktsiyalar qavariq (botiq) bo'lgan masalalardir. Bunday masalalar **qavariq dasturlash masalasi** deyiladi. Qavariq dasturlash masalalarining asosiy xususiyatlari shundan iboratki, ularning har qanday mahalliy optimal yechimi global yechimdan iborat bo'ladi.

Iqtisodiy amaliyotda uchraydigan ko'p masalalarda $g_i(x_1,x_2,....x_n)$ funktsiyalar chiziqli bo'lib, $f(x_1, x_2,...,x_n)$ maqsad funktsiyasi kvadratik formada ya'ni

$$f(x_1,x_2,....,x_n)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}d_{ij}x_ix_j$$

ko'rinishda bo'ladi. Bunday masalalar **kvadratik dasturlash masalalari** deb ataladi. Chegaraviy funktsiya yoki maqsad funktsiyasi, yoki ularning har ikkisi ham n ta funktsiyalarning yig' indisidan iborat, ya'ni

$$g_I(x_1,x_2,....x_n) = g_{il}(x_1)+g_{i2}(x_2)+.........g_{in}(x_n) \qquad (15)$$

va

$$f(x_1,x_2,....x_n) = f_1(x_1)+f_2(x_2)+.........f_n(x_n) \qquad (16)$$

ko'rinishda bo'lgan masalalar **seperabel dasturlash masalalari** deb ataladi. Kvadratik va seperabel dasturlash masalalarini yechish uchun simpleks usulga asoslangan taqribiy usullar yaratilgan.

Chiziqsiz dasturlash masalasini, jumladan, kvadratik dasturlash masalasini taqribiy yechish usullaridan biri gradient usulidir. Gradient usulini har qanday chiziqsiz dasturlash masalasini yechishga qo'llash mumkin. Lekin bu usul masalaning mahalliy optimal yechimlarini topishini nazarga olib uni qavariq (botiq) dasturlash masalalarini yechishga qo'llash maqsadga muvofiqdir.

Chiziqsiz dasturlashga oid ishlab chiqarishni rejalashtirish va resurslarni boshqarishdagi muqim masalalardan biri **stoxastik dasturlashdir.**

Bu masaladagi ayrim parametrlar noaniq yoki tasodifiy miqdorlardan iborat bo'ladi.

Chegaraviy shartlari haqida to'liq ma'lumot bo'lmagan optimallashtirish masalalarini stoxastik masalalar deb ataladi. Stoxastik masalalarni yechish uchun maxsus stoxastik dasturlashda aktiv va passiv usullar mavjud bo'lib, ularning 1-si masala noaniqliq va riskka (tavakkalchilikka) asoslanganda, 2-si esa masaladagi parametrlar tasodifiy miqdor bo'lganda optimal yechimni topish usulidir.

Yuqorida qayd etilgan har qanday chiziqli va chiziqsiz dasturlash masalalarini hamda barcha parametrlari vaqtga bog'liq ravishda o'zgarmaydigan masalalar **statik masalalar** deb ataladi. Bunday masalalar rejalashtirilayotgan davr davomida ishlab chiqarish ham, iste'mol ham, resurslar ham o'zgarmas deb qaraladigan iqtisodiy masalaning matematik modellaridan iborat bo'ladi.

Parametrlari o'zgaruvchan miqdor bo'lib, ular vaqtning funktsiyasi deb qaralgan masalalar **dinamik dasturlash masalalari** deyiladi. Bunday masalalarni yechish usullarini o'z ichiga olgan matematik dasturlashning tarmoqi **dinamik dasturlash** deb ataladi. Dinamik dasturlash usullarini faqat dinamik dasturlash masalalarini yechishda emas, balki ixtiyoriy chiziqsiz dasturlash masalalarini yechishda ham qo'llash mumkin.

2. Chiziqsiz dasturlash masalalarining geometrik talqini. Grafik usul

Chiziqli dasturlash masalalarining xossalaridan bizga ma'lumki, birinchidan, uning joiz rejalari to'plami, ya'ni masalaning chegaraviy shartlarini va noma'lumlarning nomanfiylik shartlarini qanoatlantiruvchi $X=(x_1, x_2,...,x_n)$ nuqtalar to'plami qavariq bo'ladi. Ikkinchidan, $f(x_1, x_2,...,x_n)$ maqsad funktsiyasini berilgan qiymatga erishtiradigan $X=(x_1, x_2,...,x_n)$ nuqtalar to'plami n-o'lchovli fazoning gipertekisligini tashkil qiladi. Bundan tashqari, maqsad funktsiyaning turli qiymatlariga mos keluvchi gipertekisliklar o'zaro parallel bo'ladi. Uchinchidan, maqsad funktsiyaning mumkin bo'lgan rejalari to'plamidagi mahalliy minimumi (maksimumi) global (absolyut) minimumdan (maksimumdan) iborat bo'ladi. To'rtinchidan, agar maqsad funktsiya chekli optimal qiymatga ega bo'lsa, joiz rejalar to'plamini ifodalovchi qavariq ko'pburchakning kamida bir uchi optimal yechimni beradi. Mumkin bo'lgan rejalar ko'pburchagining uchlari (burchak nuqtalari) bazis yechimni ifodalaydi. Bazis yechimdagi hamma noma'lumlar qat'iy musbat bo'lgan holdagi yechim **xosmas bazis yechim** va agar ulardan kamida bittasi nolga teng bo'lsa, **xos bazis yechim** deyiladi.

Ixtiyoriy bazis yechimdan boshlab boshqa bazis yechimga o'tib borib, chekli sondagi qadamdan so'ng funktsiyaga ekstremum qiymat beruvchi bazis yechim topiladi.

Bazis yechim optimal yechim bo'lishi uchun maqsad funktsiyaning bu yechimdagi qiymati boshqa bazis yechimdagi qiymatlaridan kam (ko'p) bo'lmasligi kerak.

Chiziqsiz dasturlash masalalarida esa yuqoridagi chiziqli dasturlashga doir xossalarning ayrimlari (yoki hammasi) bajarilmaydi.

Masalan, chiziqsiz dasturlash masalasining mumkin bo'lgan rejalar to'plami qavariq to'plam bo'lmasligi ham mumkin. Buni chegaraviy shartlari

$$\begin{cases} (x_1 - 1)x_2 \le 1, \\ x_1 + x_2 \ge 3{,}5, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

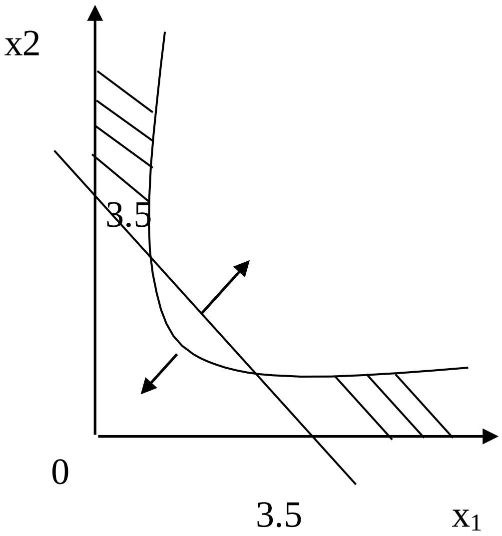
munosabatlardan iborat bo'lgan masalada ko'rish mumkin. Masalaning rejalar to'plami ikkita alohida qismlarga ajratilgan bo'lib, ularning birortasi ham qavariq emas (1 – shakl).

Agar joiz rejalar to'plami qavariq bo'lmasa, maqsad funktsiya chiziqli bo'lgan holda ham masalaning global optimal yechimidan farq qiluvchi mahalliy yechimlari mavjud bo'ladi. Masalan, chegaraviy shartlari chiziqli va maqsad funktsiyasi chiziqsiz bo'lgan quyidagi masalani ko'ramiz:

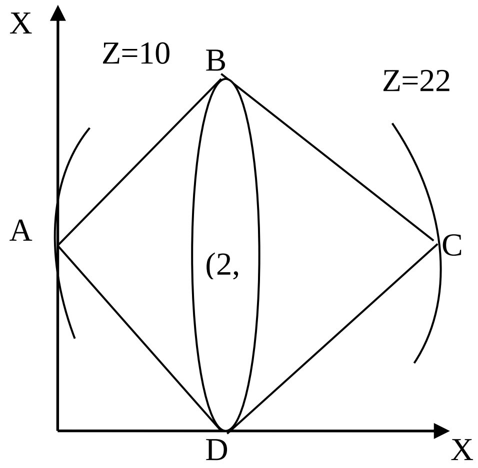
$$\begin{gathered} x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 - x_2 \ge -2, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 - 3x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{gathered}$$

$$Z = f(x_1, x_2,) = 25(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \max.$$

Bu masalaning chegaraviy shartlarini qanoatlantiruvchi nuqtalari to'plami qavariq ABCD to'rtburchakdan iborat bo'ladi (2- shakl). Masaladagi maqsad funktsiya markazi (2,2) nuqtadan iborat bo'lgan elipslar oilasidan iborat.



1-shakl



2 – shakl

Z=4 da ellips B va D nuqtalardan o'tadi, A nuqtada Z=100 va C nuqtada Z=226 bo'ladi. Bundan ko'rinadiki, A nuqtada maqsad funktsiyaning qiymati unga yaqin bo'lgan B va D nuqtalardagi qiymatidan kichik. Demak, A nuqtada maqsad funktsiya mahalliy minimumga erishadi. C nuqtada Z =f (x_1, x_2,) funktsiya eng katta Z=226 qiymatga erishadi. Maqsad funktsiyaning C nuqtadagi qiymati ABCD to'rtburchakka tegishli hamma nuqtalardagi qiymatidan katta bo'ladi. Demak, Z =f (x_1, x_2,) funktsiya C nuqtada global maksimumga erishadi.

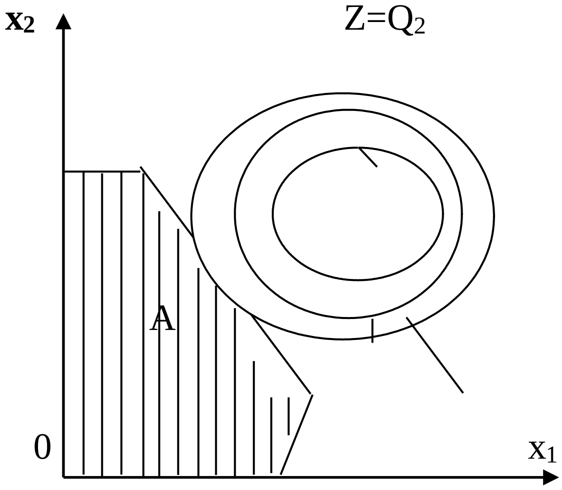
Bu masalaning optimal yechimi joiz rejalar to'plami C uchining koordinatalaridan iborat bo'ldi. Lekin umumiy holda, chiziqsiz dasturlash masalasining maqsad funktsiyasiga optimal qiymat beruvchi nuqta joiz rejalar to'plamining burchak nuqtasi bo'lishi shart emas. Ayrim hollarda optimal reja joiz rejalar to'plamining ichki nuqtasidan ham, chegaraviy nuqtasidan ham iborat bo'lishi mumkin. Masalan, 3-shaklda tasvirlangan masaladagi Z=f (x_1, x_2,) maqsad funktsiya minimum qiymatga mumkin bo'lgan rejalar to'plamining chegaraviy nuqtasida erishadi.

Umumiy holda (8) - (10) ko'rinishda berilgan chiziqsiz dasturlash masalasini ko'ramiz va bu masalaning geometrik talqini bilan tanishamiz.

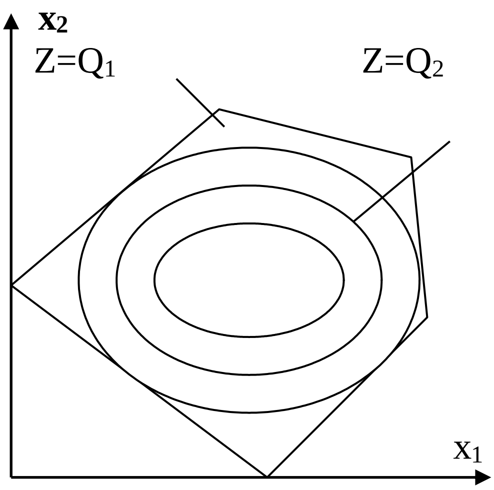
Masaladagi (8), (9) cheklamalarni qanotlantiruvchi nuqtalar to'plami Evklid fazosida joiz rejalar to'plamini beradi. Bu to'plamning nuqtalari orasidan maqsad funktsiyaga minimum qiymat beruvchi nuqtani topish kerak. Buning uchun joiz rejalar to'plamining eng past saviyali f(x_1, x_2,...,x_n)=Q gipersirti bilan kesishgan nuqtasini topish kerak. Bu nuqta berilgan (8) - (10) masalaning optimal yechimini beradi.

(8)-(10) masalaning optimal yechimini geometrik talqinidan foydalanib topish uchun quyidagi ishlarni bajarish kerak:

1. Masalaning (8), (9) chegaraviy shartlarini qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamini, ya'ni joiz rejalar to'plamini yasash kerak (agar bu to'plam bo'sh bo'lsa, masala yechimga ega bo'lmaydi).
2. $f(x_1, x_2,...,x_n)=Q$ gipersirtni yasash kerak.



3-shakl



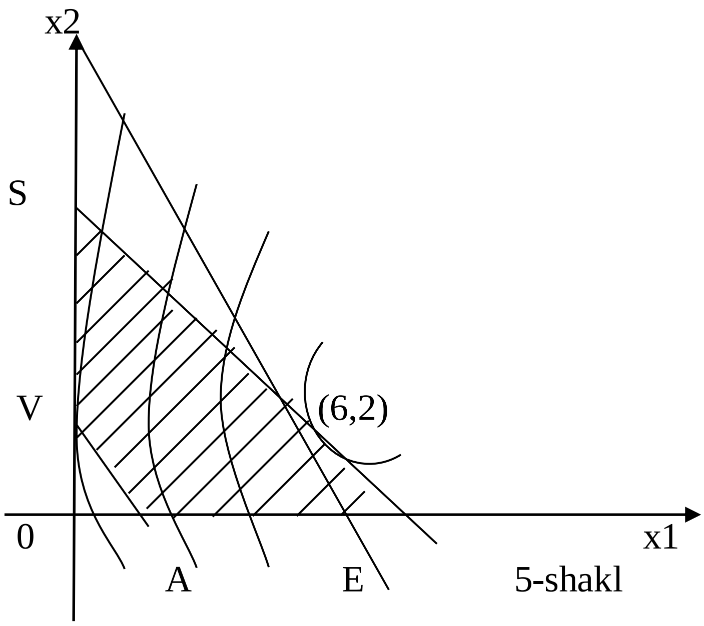
4-shakl

3. Q ning qiymatini o'zgartirib borib, eng past saviyali gipersirt topiladi yoki uning quyidan chegaralanmaganligi aniqlanadi.
4. Mumkin bo'lgan rejalar to'plamining eng past saviyali gipersirt bilan kesishgan nuqtasi aniqlanadi va maqsad funktsiyaning bu nuqtadagi qiymati topiladi.

Quyidagi masalalarni geometrik talqinidan foydalanib yechamiz:

1-misol.

$$x_1 + x_2 \le 8,$$
$$2x_1 + x_2 \le 15,$$
$$x_1 + x_2 \ge 1,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$$
$$Z = f(x_1, x_2,) = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \max(\min).$$



5-shakl

Masalaning chegaraviy shartlarini qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami ABCDE beshburchakdan iborat bo'ladi (5 - shakl). Agar Z=Q (Q>0) deb qabul qilsak, $(x_1 - 6)^2 + (x_2 - 2)^2 = Q$ tenglama markazi M (6.2) nuqtada va radiusi $\sqrt{Q}$ ga teng bo'lgan aylanani ifoda etadi.

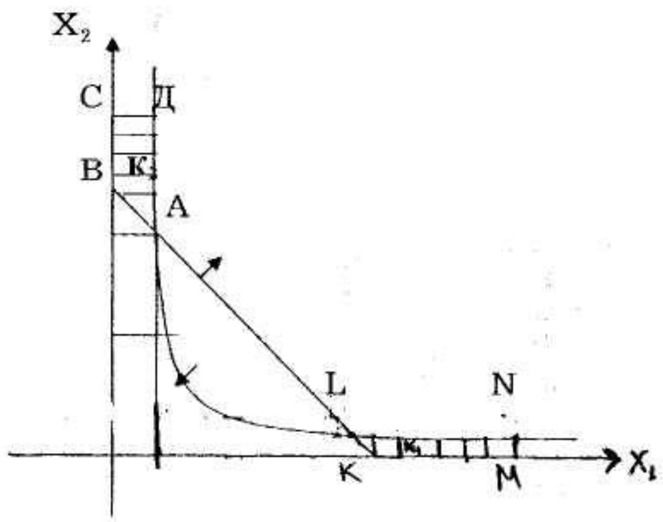
Q ning qiymatini orttirib yoki kamaytirib borish natijasida Z ning qiymati ham ortib yoki kamayib boradi. M nuqtadan turli radiusli aylanalar (parallel gipersirtlar) o'tkazib borib, Z funktsiyaga eng kichik yoki eng katta qiymat beruvchi nuqtani topish mumkin.

2 – misol.

$$
\begin{aligned}
&x_1 \cdot x_2 \le 4,\\
&x_1 + x_2 \ge 5,\\
&x_1 \le 7,\\
&x_2 \le 6,\\
&x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\\
&Z = x_1^2 + x_2^2 \to \max(\min).
\end{aligned}
$$

Bu masalaning mumkin bo'lgan rejalar to'plami qavariq to'plam bo'lmaydi, aksincha, ikkita ayrim K_1 va K_2 qismlardan iborat bo'ladi (6 - shakl). Maqsad funktsiya o'zining minimal qiymati Z=17 ga A(1,4) va L(4,1) nuqtalarda erishadi. $D(\frac{2}{3};6)$ va $N(7;\frac{4}{7})$ nuqtalarda esa funktsiya mahalliy maksimum qiymatlarga erishadi:

$$Z(D) = \frac{328}{9}, Z(N) = \frac{2417}{49}.$$



6-shakl

Xuddi shuningdek, N nuqta $x_1=7$ to'qri chiziq va $x_2=4/x_1$ egri chiziqning kesishgan nuqtasi bo'lgani uchun uning x_1^0, x_2^0 koordinatalari bu tenglamalarni qanoatlantirish kerak, ya'ni

$$\begin{cases} x_1^0 = 7, & x_1^0 = 7, \\ x_2^0 = \dfrac{4}{x_1^0}, & x_2^0 = \dfrac{4}{7}, \\ Z^0 = x_1^{0^2} + x_2^{0^2} & Z^0 = \dfrac{2417}{49}. \end{cases}$$

3-misol. $x_1+x_2 \le 6,$

$x_1-x_2 \le 1,$

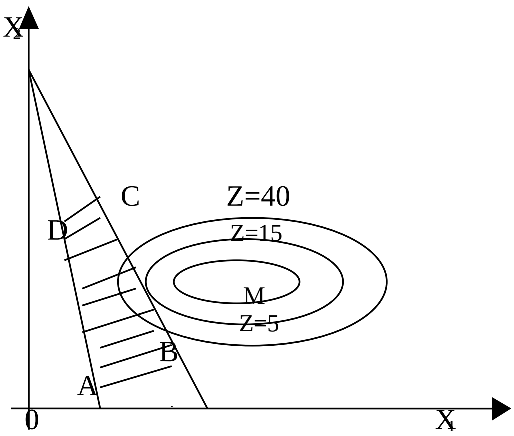
$2x_1+x_2 \ge 6,$

$0{,}5x_1-x_2 \ge -4,$

$x_1 \ge 1,\ x_2 \ge 0,$

$Z=100(x_1-3{,}5)^2+(x_2-4)^2 \to \min.$

Masalaning rejalaridan tashkil topgan to'plam ABCD to'rtburchakdan iborat (7.7-shakl).



7- shakl.

Z ga ixtiyoriy Q (Q≥0) qiymat beramiz. Natijada $10(x_1-3{,}5)^2+ +20(x_2-4)^2=Q$ tenglama markazi M(3,5;4) nuqtada bo'lgan ellipsni ifodalaydi. Q ning qiymatini o'zgartirib borib,ellip sni o'ziga paralel ravishda siljitib borish mumkin. Natijada 7.7-shakldan ko'rish mumkinki,ellipsning qavariq to'plam ABCD ga uringan $E(x_1^*, x_2^*)$ nuqtasi optimal nuqta bo'ladi. Bu nuqtadagi Z funktsiyaning qiymatini Z^* bilan belgilaymiz. x_1^*, x_2^*, Z^*_1 noma'lumlar quyidagi shartlarni qanoatlantirishi kerak:

$x_1^* + x_2^* = 6,$

$Z^*=10(x_1^* -3{,}5)^2+20(x_2^*-4)^2.$

Bundan tashqari $10(x_1^*-3{,}5)^2+20(x_2^*-4)^2$ ellipsning (x_1^*, x_2^*) nuqtadagi urinmasi oqish burchagining tangensi esa -1 ga teng, chunki bu urunma $x_1+x_2=6$ to'g'ri chiziq bilan ustma – ust tushadi. Bu to'g'ri chiziq og'ish burchagining tangensi esa – 1 ga teng. Ikkinchi tomondan,

$$Z^{*}=10(x_1^{*}-3{,}5)^2+20(x_2^{*}-4)^2.$$

Ellipsga urunma oqish burchagining tangensini

$$\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{-20(x_1-3{,}5)}{40(x_2-4)}$$

formula orqali topish mumkin. Demak,

$$\frac{-(x^{*}_1-3{,}5)}{2(x^{*}_2-4)}=-1,$$

ya'ni

$$x^{*}_2-4=0{,}5(x^{*}_1-3{,}5).$$

Shunday qilib, masalaning optimal yechimi quyidagi sistemaning yechimidan iborat bo'ladi:

$$\left.\begin{array}{r} x_1^{*}+x_2^{*}=6, \\ x_2^{*}-4=0{,}5(x_1^{*}-3{,}5), \\ Z^{*}=10(x_1^{*}-3{,}5)^2+20(x_2^{*}-4) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} x_1^{*}=2{,}5, \\ x_2^{*}=3{,}5, \\ Z^{*}=15. \end{array}$$

3. Shartsiz optimallashtirish masalasi

Faraz qilaylik, shartsiz ekstremum masalasining yechimini topish talab qilingan bo'lsin, ya'ni $f(X)=f(x_1,x_2,...,x_n)$ funktsiyaning maksimumini (minimumini) $X=(x_1,x_2,...,x_n)\in E_n$ nuqtalarda qidirish kerak bo'lsin.

$f(X)$ funktsiya birinchi tartibli hosilalari bilan birgalikda uzluksiz bo'lsa, uning ekstremumi quyidagi tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi:

$$\partial f(X)/\partial x_j=0, \quad j=\overline{1,n} \qquad (17)$$

Demak, berilgan $f(X)$ funktsiya X_0 nuqtada ekstremumga ega bo'lishi uchun bu nuqta (17) sistemaning yechimi bo'lishi kerak.

Haqiqatan, agar $f(X)$ funktsiya X_0 nuqtada mahalliy maksimumga erishsa, shunday $\varepsilon>0$ con mavjud bo'ladiki, ixtiyoriy $X\in\varepsilon(X_0)$ nuqta uchun ($\varepsilon(X_0)$ X_0 nuqtaning kichik ε atrofidagi nuqtalar to'plami) $f(X)\le f(X_0)$ tengsizlik bajariladi. $X\in\varepsilon(X_0)$ nuqtada $X=X_0+hl_j$, $0<|h|<\varepsilon$ ko'rinishda yozamiz, bu yerda l_j ($j=\overline{1,n}$) birlik vektorlar. U holda $0<|h|<\varepsilon$ shartni qanoatlantiruvchi h uchun

$$f(X_0+hl_j)-f(X_0)\le 0,\ j=\overline{1,n} \qquad (18)$$

o'rinli bo'ladi. Bundan

$$\frac{f(X_0+hl_j)-f(X_0)}{h}\le 0,\ h>0, \qquad (19)$$

va

$$\frac{f(X_0+hl_j)-f(X_0)}{h}\ge 0,\ h<0. \qquad (20)$$

(19) va (20) tengsizliklardan h→+0 va h→-0 da limitga o'tib mos ravishda $\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_j} \le 0,$ va $\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_j} \ge 0,$ tengsizliklarni hosil qilish mumkin. Bulardan esa

$$\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_j} = 0, j = \overline{1,n} \qquad (21)$$

tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi. Xuddi shunday yo'l bilan X_0 nuqta f(X) funktsiyaga mahalliy minimum beruvchi nuqta bo'lgan holda ham (21) tengliklar X_0 nuqtada $f(X_0)$ funktsiya mahalliy maksimum yoki minimumga ega bo'lishi uchun, shu nuqtada undan n ta x_1, x_2, ... , x_n noma'lumlar bo'yicha olingan xususiy hosilalar 0 ga teng bo'lishi kerakligini ko'rsatadi. Lekin bundan (17) shartni qanoatlantiruvchi har qanday nuqta ham funktsiyaga mahalliy minimum yoki maksimum qiymat beradi degan xulosa kelib chiqmaydi. Masalan, bir argumentli f (x) funktsiya uchun f'(x)=0 shart egilish nuqtasida ham o'rinli bo'lib, bu nuqtada funktsiya ekstremumga ega bo'lmasligi mumkin. Xuddi shuningdek, ikki argumentli $f(x_1, x_2)$ funktsiya uchun $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0,$ $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$ shartlar egilish nuqtasida ham bajarilib, bu nuqtada funktsiya ekstremumga ega bo'lmasligi mumkin.

(17) sistemaning yechimlarini **statsionar nuqtalar** deb ataymiz. Berilgan f(X) funktsiya ekstremumga erishadigan nuqta statsionar nuqta bo'ladi, lekin har qanday statsionar nuqtada ham funktsiya ekstremumga erishavermaydi. Demak, (17) shart funktsiya ekstremumining mavjudligi uchun zaruriy shart, lekin u etarli shart emas. Quyidagi teorema statsionar nuqtaning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalari uzluksiz bo'lgan n o'zgaruvchili uzluksiz $f(X)=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funktsiyaning ekstremum nuqtasi bo'lishi uchun etarlilik shartini ko'rsatadi.

Teorema. X_0 statsionar nuqta ekstremum nuqta bo'lishi uchun shu nuqtada **Gesse matritsasi** deb ataluvchi

$$H[X_0] = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_1 \partial x_2} \dots \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_2 \partial x_1} \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_2^2} \dots \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_n \partial x_1} \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_n \partial x_2} \dots \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

matritsa musbat aniqlangan (bu holda X_0 - minimum nuqta) yoki manfiy aniqlangan (bu holda X_0 - maksimum nuqta) bo'lishi etarlidir.

Isboti. Teylor teoremasiga asosan, 0<θ<1 da

$$f(X_0+h)-f(X_0)= \nabla f(X_0)h+1/2\, h'H[X_0+\theta h]\cdot h, \qquad (22)$$

bu yerda $h=(h_1, h_2, ..., h_n)$ n o'lchovli vektor ustun, h' esa n o'lchovli vektor qator va $|h_j|$ $(j=\overline{1,n})$ etarli darajada kichik son, $H[X_0+\theta h]$ - Gesse matritsasining $X_0+\theta h$ nuqtadagi qiymati. $\nabla f(X_0)=\left(\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(X_0)}{\partial x_2}, ... \frac{\partial f(X_0)}{\partial x_n}\right)'$ - **n o'lchovli gradient** deb ataluvchi vektor.

X_0 nuqta statsionar nuqta bo'lganligi uchun bu nuqtada (21) o'rinli bo'ladi, demak, bu holda

$$\nabla f(X_0)=0. \qquad (23)$$

(7.22) va (7.23) dan

$$f(X_0+h)-f(X_0)= 1/2\, h'H[X_0+\theta\, h]\cdot h. \qquad (24)$$

Faraz qilaylik, X_0 minimum nuqta bo'lsin. U holda

$$f(X_0+h)>f(X_0)$$

tengsizlik ixtiyoriy $h\neq 0$ uchun o'rinli bo'ladi, demak, bu holda

$$1/2\, h'H[X_0+\theta\, h]\cdot h>0.$$

$f(X)$ funktsiyaning ikkinchi tartibli hosilasi uzluksiz bo'lgani uchun $1/2\, h'Hh$ miqdor X_0 va $X_0+\theta\, h$ nuqtalarda bir xil ishorali bo'ladi va $h'H[X_0]h$ kvadratik formadan iborat bo'ladi. Shuning uchun bu formaning (jumladan $h'H[X_0+\theta\, h]\cdot h$ formaning) musbat bo'lishi $H[X_0]$ ning musbat aniqlangan matritsa bo'lishiga boqliq.

Demak, X_0 statsionar nuqta minimum nuqta bo'lishi uchun shu nuqtadagi Gesse matritsasi ($H[X_0]$) musbat aniqlangan bo'lishi etarli ekan. Xuddi shunday yo'l bilan X_0 statsionar nuqtaning maksimum nuqta bo'lishi uchun $H[X_0]$ ning manfiy aniqlangan bo'lishi etarli ekanligini ko'rsatish mumkin.

1-misol. Berilgan funktsiya ekstremumga tekshirilsin:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_3 + x_2x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

Yechish. Funktsiya ekstremumi mavjudligining zaruriy sharti:

$$\nabla f(X_0)=\left(\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(X_0)}{\partial x_2}, \frac{\partial f(X_0)}{\partial x_3}\right)'=0$$

Bundan $\partial f/\partial x_1=0$, $\partial f/\partial x_2=0$, $\partial f/\partial x_3=0$.

Bu tenglamalarda tuzilgan sistemaning yechimi $X_0=(1/2, 2/3, 4/3)$ statsionar nuqta bo'ldi. Etarlik shartining bajarilishni tekshirish uchun Gesse matritsasini X_0 nuqtada tuzamiz:

$$H[X_0]=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Bu matritsaning bosh minorlari mos ravishda - 2, 4, -6. Ma'lumki, agar matritsaning bosh minorlaridan tuzilgan sonlar ketma-ketligi ishora almashinuvchi bo'lsa, berilgan matritsa manfiy aniqlangan bo'ladi. Bundan ko'rinadiki, $H[X_0]$ matritsa manfiy aniqlangan ekan. Demak, X_0 nuqtada $f(x_1, x_2, x_3)$ funktsiya maksimumga erishadi. Yuqorida keltirilgan misolda $f(x_1, x_2, x_3)$ni $-f(x_1, x_2, x_3)$ ga almashtirib, X_0=(1/2,2/3,4/3) nuqtani minimum nuqta ekanligini ko'rsatish mumkin.

Agar H[X_0] noaniq matritsa bo'lsa, X_0 nuqta egilish nuqta bo'ladi, ya'ni bu nuqtada funktsiya ekstremumga erishmaydi. Buni quyidagi misolda ko'rsatamiz.

2-misol.

$$f(x_1,x_2) = 8x_1x_2 + 3x_2^2$$

funktsiya ekstremumga tekshirilsin.

Yechish. Ekstremum mavjudligining zaruriy shartiga ko'ra $\nabla f(X_0)=0$. Demak $\partial f/\partial x_1=0$, $\partial f/\partial x_2=0$, ya'ni $8x_2=0$, $8x_1+6x_2=0$ bo'lishi kerak. Bu tenglamalardan tuzilgan sistemani yechib, X_0=(0,0) statsionar nuqtani hosil qilamiz. Bu nuqtani ekstremal nuqta bo'lishlik shartini tekshirish uchun Gesse matritsasini tuzamiz

$$H=\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

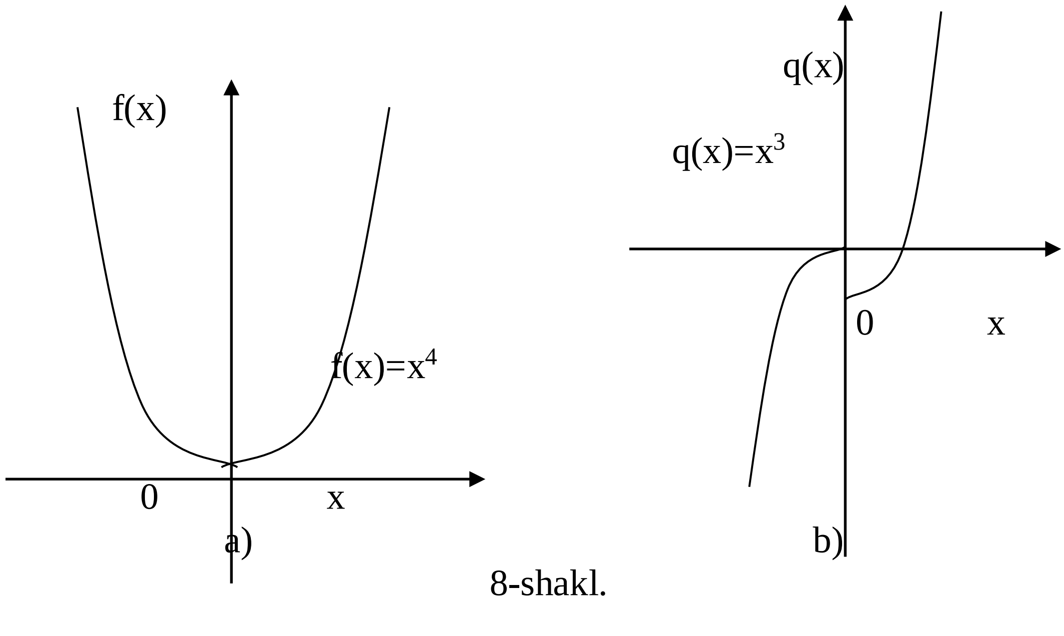
Bu matritsaning bosh minorlari: M_{11}=6>0, M_{22}=0. Matritsa determinanti esa -64<0. Demak Gesse matritsasining ishorasi aniqlanmagan. Bu holda X_0=(0,0) nuqta egilish nuqta bo'ladi.

Yuqorida ko'rilgan teoremadagi ekstremum mavjudligining etarlilik shartlari bir argumentli $f(x)$ funktsiya uchun quyidagicha bo'ladi. Faraz qilaylik, x_0 statsionar nuqta bo'lsin, u holda $f''(x_0)<0$ bo'lsa, x_0 statsionar nuqtada funktsiya maksumimga $f''(x^0)>0$ bo'lganda esa minimumga erishadi. Agar $f''(x_0)=0$ bo'lsa, yuqori tartibli hosilalarning x_0 nuqtadagi qiymatlarini tekshirish kerak. Bu holda quyidagi teorema o'rinlidir.

2-teorema. x_0 statsionar nuqtada $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)=0$, $f^{(n-1)}(x_0)=0$ va $f^{(n)}(x_0)\neq 0$ bo'lsa, bu nuqta a) n toq son bo'lganda egilish nuqta;

b) n juft son bo'lganda ekstremal nuqta bo'ladi hamda $f^{(n)}(x_0)<0$ da funktsiya maksimumga, $f^{(n)}(x_0)>0$ da minimumga erishadi.

Bu teoremaning isbotini o'quvchilarga mashq sifatida xavola qilamiz.



8-shakl.

3-misol.

1) $f(x) = x^4$ funktsiyaning ekstremumga tekshiring

$$f'(x) = 4x^3$$

bundan x=0 statsionar nuqta bo’ladi.

$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0; f^{(4)}(0) \neq 0.$

n=4 juft son. Demak, x=0 nuqta funktsiya uchun ekstremal nuqta bo’ladi.

$f^{(4)}(0) = 24 > 0$ bo’lgani uchun x=0 nuqtada berilgan funktsiya minimumga erishadi. (8 a-shakl).

2) $g(x)=x^3$,

$g'(x)=3x^2$, x=0 statsionar nuqta

$g'(0)=g''(0)=0$, $g'''(0)=6 \neq 0$

n=3 toq son. Demak, x=0 nuqta funktsiyaning egilish nuqtasi bo’ladi (8 b-shakl).

Agar E_n da aniqlangan f(X) funktsiya X^* nuqtada global (absolyut) maksimum (minimum)ga ega bo’lsa, u shu nuqtada mahalliy maksimum (minimumga) ega bo’ladi. Demak, X^* (17) sistemaning yechimi bo’lishi kerak. Shuning uchun f(X) funktsiyaga global maksimum (minimum) qiymat beruvchi nuqtani topish uchun (17) sistemaning amma yechimlarini topib, ularning har birida f(X) ning qiymatini hisoblab solishtiriladi. Shu qiymatlar orasida eng kattasi (eng kichigi) funktsiyaning global maksimumi (minimumi) bo’ladi.

Lekin noma’lumlar soni ko’p bo’lib, sistema yagona yechimga ega bo’lmasa, (17) sistemani yechish qiyin masala hisoblanadi va umuman (17) sistemani ixtioriy ko’rinishda bo’lgan hol uchun yechish sxemasining o’zi mavjud emas. Shunga ko’ra bu sistemani yechish uchun turli taqribiy usullarni qo’llash mumkin. Ulardan biri quyidagi Nyuton-Rafson usulidir. Bu usul chiziqsiz tenglamalar sistemasini sonli yechish usulidan iborat.

Faraz qilaylik, umumiy holda $\varphi_i(X) = 0,\ \ i = \overline{1,m}$ $X=(x_1, \ldots, x_n)$ tenlamalar sistemasi va ixtiyoriy X^k nuqta (ma’lum yaqinlashish) berilgan bo’lsin. U holda Teylor formulasiga ko’ra

$$\varphi_i(X) \approx \varphi_i(X^k) + [\nabla\varphi_i(X^k)]'(X - X^k), i = \overline{1,m}.$$

Demak, berilgan tenglamalar sismemasini quyidagi sistemaga almashtirish mumkin:

$$\varphi_i(X^k) + [\nabla\varphi_i(X^k)]'(X - X^k) = 0, i = \overline{1,m}$$

yoki matritsa formulada

$$A_k+V_k(X-X^k)=0.$$

Bu yerda barcha $\varphi_i(X^k)$lar o’zaro bog’liq emas deb faraz qilinsa, V_k maxsus matritsa bo’ladi. Bu holda yuqoridagi tenglamadan

$$X= X^k - B_k^{-1}A_K$$

hosil bo’ladi.

Nyuton-Rafson usulining g’oyasi quyidagidan iborat. Birinchi qadamda boshlang’ich nuqta X^0 beriladi. Agar X^k topilgan bo’lsa yuqoridagi tenglamadan foydalanib, yangi X^{k+1} nuqtaning koordinatalarini topiladi. $X^m \approx X^{m-1}$ bo’lganda hisoblash jarayoni to’xtatiladi va X^m sistemaning taqribiy yechimi bo’ladi.

Usulning yaqinlashishi boshlang'ich X^0 nuqtani tanlashga bog'liq. Agar bu nuqta noto'g'ri tanlansa, iteratsiyalash jarayoni uzoqlashuvchi bo'lishi ham mumkin. Nyuton usulining kamchiligi shundan iboratki, unda yaxshi boshlang'ich nuqtani tanlash yo'llari ko'rsatilmagan.

4. Shartlari tenglamalardan iborat bo'lgan shartli ekstremum masalasi va uni yechish uchun Lagranj usuli

Faraz qilaylik (2), (4) masalani yechish talab qilinsin, ya'ni $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)=b_i$ $i=\overline{1,m}$ tenglamalar sistemasini qanoatlantiruvchi va $Z=f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funktsiyaga maksimum (minimum) qiymat beruvchi $X=(x_1, x_2, ..., x_n)$ nuqtani topish kerak bo'lsin. $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ va $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funktsiyalar va ularning hammasi x_1, x_2, ..., x_n noma'lumlar bo'yicha olingan xususiy hosilalari uzluksiz deb faraz qilamiz. Noma'lumlarga nomanfiylik sharti qo'yilmaganda masalani Lagranjning aniqmas ko'paytiruvchilar usulini qo'llab yechish mumkin. Lagranj usulining g'oyasini quyidagi xususiy holda ko'ramiz. Faraz qilaylik, quyidagi masala berilgan bo'lsin

$$g(x_1, x_2)=b,$$
$$Z=f(x_1, x_2)\rightarrow \max(\min) . \qquad (25)$$

$g(x_1, x_2)$ va $f(x_1, x_2)$ funktsiyalar uzluksiz va differentsiallanuvchi funktsiyalar.

$X^0=(x_1^0, x_2^0)$ nuqta $g(x_1,x_2)=b$ tenglamani qanoatlantirib, $Z=f(x_1,x_2)$ funktsiyaga mahalliy maksimum (minimum) qiymat berish uchun qanday zaruriy shartni qanoatlantirish kerak ekanligini ko'ramiz.

$X^0=(x_1^0, x_2^0)$ nuqtada $\partial g(X^0)/dx_1$, $\partial g(X^0)/\partial x_2$ xususiy hosilalardan kamida biri noldan farqli, masalan, $\partial g(X^0)/\partial x_2 \neq 0$ bo'lsin. U holda oshkormas funktsiyalar haqidagi teoremaga asosan x_1^0 ning kichik $\varepsilon>0$ atrofi mavjud bo'ladiki, bu atrofda $g(x_1,x_2)=b$ tenglamani x_2 ga nisbatan yechish mumkin, ya'ni $x_2=\varphi(x_1)$, bu yerda φ funktsiya $(x_1^0, \varphi(x_1^0))$ nuqta atrofida uzluksiz differentsiallanuvchidir.

Har bir $(x_1, \varphi(x_1))$ nuqta masalaning joiz yechimlar to'plami G ga tegishli. Shuning uchun $f(x_1, x_2)$ funktsiyadan ham x_2 ni yuqotish mumkin, ya'ni

$$Z=F(x_1)=f(x_1, \varphi(x_1)), /x_1-x_1^0/<\varepsilon .$$

Lekin, X^0 nuqtada f funktsiya $g(x)=b$ shartni qanoatlantiruvchi mahalliy maksimumga (minimumga) ega bo'lsa, x_1^0 ning $\varepsilon_0(0<\varepsilon_0<\varepsilon)$ atrofidagi har qanday x_1 uchun $F(x_1) \leq F(x_1^0)$ $[F(x_1) \geq F(x_1^0)]$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu holda $F(x_1)$ funktsiya x_1^0 da shartsiz maksimum (minimum) ga erishadi.

$F(x_1)$ funktsiya x_1^0 ning ε_0 atrofida differentsiallanuvchi va x_1^0 da shartsiz ekstrimumga erishgani uchun

$$\frac{df(x_1^0)}{dx_1}=0$$

bo'ladi. F funktsiyani murakkab funktsiya sifatida differentsiallab, quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{dF}{dx_1}=\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\bullet\frac{d\varphi}{dx_1}=\frac{\partial f}{\partial x_1}-\frac{\partial f}{\partial x_2}\bullet\frac{\partial g/\partial x_1}{\partial g/\partial x_2},$$

bunda oshkormas funktsiyalarga doir teoremaga asosan:

$$\frac{d\varphi}{dx_1}=-\frac{\partial g/\partial x_1}{\partial g/\partial x_2}.$$

ekanligi nazarga olinadi. X^0 nuqtada $F(X^0)$ funktsiya ekstremumga erishishi uchun quyidagi munosabat o'rinli bo'ladi:

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1}-\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2}\bullet\frac{\partial g(X^0)/\partial x_1}{\partial g(x^0)/\partial x_2}=0.$$

Agar

$$\lambda=\frac{\partial g(X^0)/\partial x_1}{\partial g(X^0)/\partial x_2}\left(\frac{\partial g(X^0)}{\partial x_2}\neq 0\right)$$

belgilash kiritsak, X_0 nuqtaning ekstremal nuqta bo'lishi uchun quyidagi zaruriy shartlarni hosil qilamiz:

$$\begin{cases}\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1}-\lambda\frac{\partial g(X^0)}{\partial x_1}=0,\\ \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2}-\lambda\frac{\partial g(X^0)}{\partial x_2}=0,\\ g(X^0)=b\end{cases}\qquad(26)$$

Hosil bo'lgan sistema uchta noma'lumli uchta tenglamalar sistemasidan iborat. Bu sistemaning yechimidan iborat bo'lgan $X\in G$ nuqtada f funktsiya mahalliy maksimumga (minimumga) erishmasligi ham mumkin, lekin f funktsiyaga g(x)=b shart bajarilganda mahalliy maksimum (minimum) qiymat beruvchi nuqta albatta (26) sistemaning yechimi bo'lishi kerak. Demak, (25) masalaning yechimini topish uchun (26) sistemaning hamma yechimlarini topish kerak. Bu sistema X^0 nuqtaning tenglamalari berilgan (25) shaklda bo'lgan masala yechimi bo'lishining zaruriy shartlaridir. Bu shartlarni quyidagi formal usul bilan ham hosil qilish mumkin. Buning uchun

$$F(X,\lambda)=f(X)+\lambda(b-g(X))$$

funktsiyani tuzamiz. Bu funktsiyadan x_1, x_2 va λ lar bo'yicha xususiy hosilalar olib ularni 0 ga tenglaymiz:

$$\begin{cases}\partial F/\partial x_j=\partial f/\partial x_j-\lambda g\ \ /\partial x_j=0;\ j=1,2,3,...\\ \frac{\partial F}{\partial\lambda}=b-g(X)=0\end{cases}$$

Hosil bo'lgan sistema (26) sistemaning o'zidan iborat. Bu yerda F- Lagranj funktsiyasi, λ- Lagranj ko'paytuvchilari deb ataladi. Endi umumiy holni, ya'ni noma'lumlar soni n ta va tenglamalar soni m (m<n) ta bo'lgan (2), (4) masalani ko'ramiz. Bu masala uchun Lagranj funktsiyasi

$$F(X,\Lambda)=f(X)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(b-g_i(X))$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu yerda $X=(x_1,x_2,...x_n)$; $\Lambda=(\lambda_1,...\lambda_m)$. Mahalliy ekstremum mavjudligining zaruriy sharti

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(X,\Lambda)}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f(X)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i(X)}{\partial x_j} = 0 \\ \dfrac{\partial F(X,\Lambda)}{\partial x_j} = b_i - g_i(X) = 0 \end{cases} \qquad (27)$$

tenglamalar sistemasidan iborat. Agar f(X) funktsiya X_0 ($x_1^0, \dots, x_n^0$) nuqtada ekstremumga ega bo'lsa, shunday $\Lambda^0=(\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0)$ vektor mavjud bo'ladiki, uning uchun ($x_1^0, \dots, x_n^0, \lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0$) nuqta (27) sistemaning yechimi bo'ladi. Haqiqatdan ham X^* (2) – (4) masalaning ekstremum yechimi bo'lsin. U holda $g_i(X^*)=b_i$, $i=\overline{1,m}$. Bundan
$F(X^*, \Lambda)= f(X^*)$, demak,

$$\frac{\partial F(X^*,\Lambda)}{\partial x_j} = \frac{\partial f(X^*)}{\partial x_j} = 0, \; j=\overline{1,n}.$$

f(X) funktsiya X* nuqtada ekstremal qiymatga erishsa, bu nuqta (27) sistemaning yechimi bo'lishi kerak. Lekin (27) shart etarli emas. (27) sistemaning yechimi f(X) funktsiyaga ekstremum qiymat bermasligi ham mumkin.

Lagranj usulining amaliy ahamiyati shundan iboratki, bunda bir o'zgaruvchilarni boshqalari orqali ifodalash yoki hamma o'zgaruvchilarni o'zaro bog'liq emasligini nazarga olish talab qilinmaydi hamda shartli optimallashtirish masalasi shartsiz optimallashtirish masalasiga keltiriladi. Bu usulning kamchiligi (27) sistemaning yechish murakkabligi bilan bog'liq. Bundan tashqari shunday masalalar ham uchraydiki, ularning ekstremal rejalari mavjud bo'lishiga qaramay ularga mos keluvchi (27) sistema yechimga ega bo'lmaydi. Masalan, quyidagi masalani qaraylik,

$$x_1^2 + x_2^2 = 0,$$

$$Z = x_1 \to \min.$$

Bu masalaning aniqlanish sohasi yagona X=(0,0) nuqtadan iborat bo'lib, shu nuqtaning o'zi ekstremal nuqta bo'ladi. Lekin bu masala uchun mos bo'lgan (27) sistemaning yechib buni aniqlash qiyin. Haqiqatdan, Lagranj funktsiyasi $F(x_1,x_2,\lambda_1)=x_1+\lambda_1(x_1^2+x_2^2)$ dan x_1,x_2, λ_1 lar bo'yicha xususiy hosilalar olib ularni 0 ga tenglasak,

$$\begin{cases} 1+2x_1\lambda_1 = 0, \\ 2\lambda_1 x_2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = 0. \end{cases}$$

tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz. Bu sistemaning yechimi esa X=(0,0) nuqtani bermaydi.

Bunday hollarning oldini olish va Lagranj usulini kengroq qo'llashga imkon yaratish uchun Lagranj funktsiyasini quyidagi

$$F(X,\Lambda) = \lambda_0 f(x^0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - g_i(x)) \qquad (28)$$

ko'rinishda yozish maqsadga muvofiq ekanligi aniqlangan. Bu holda (27) sistemani yechishdagi formal qiyinchiliklar engillashadi va $\lambda_0 = 0$ da berilgan masala xos chegaraviy shartli bo'ladi. Yuqoridagi misolda bunga ishonch hosil qilish mumkin. Agar f(X) funktsiya X_0 nuqtada ekstremumga erishsa, u

$$\lambda_0 (\partial f(X^0)/\partial x_j) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \partial g_i(X^0)/\partial x_j = 0, \qquad j=\overline{1,n}$$

$$g_i(X^0)=b_i, \qquad i=\overline{1,m} \qquad (29)$$

tenglamalar sistemasini qanoatlantirish kerak. ($\lambda_i(i=\overline{1,m})$ lardan kamida bittasi noldan farqli). Bu m+n ta tenglamalar sistemasi shartli optimallashtirish masalasining yechimi mavjudligining zaruriy sharti hisoblanadi. Bu shartni (28) Lagranj funktsiyasining $x_j(j=\overline{1,n})$ va $\lambda_i(i=\overline{1,m})$ lar buyicha xususiy hosilalarni 0 ga tenglab hosil qilish mumkin. Umumiylikni buzmasdan (29) da λ_0 ni 0 yoki 1 ga teng deb qabul qilish mumkin. Bu o'rinda quyidagilarga e'tibor berish kerak:

1. Agar X^0 nuqtada Q=$\left(\frac{\partial gi}{\partial x_j}\right)$ matritsaning r (Q) rangi va Q_f=(Q/f) matritsaning rangi r(Q_f) [r(Q_f<m+1)] teng bo'lsa, ya'ni r(Q)=r(Q_f) bajarilsa, berilgan masala normal masala bo'ladi va λ_0=1 deb qabul qilish mumkin.
2. X_0 nuqtada r(Q_f) > r(Q) tengsizlik, bajarilganda (29) shartni qanoatlantiruvchi $\lambda_i(i=\overline{1,m})$ lar orasida 0 dan farqlilari bo'lishi uchun λ_0=0 deb qabul qilish mumkin.
3. Agar X_0 nuqtada r(Q_f) = r(Q) = m tenglik bajarilsa, $\lambda_i(i=\overline{1,m})$ bir qiymatli aniqlanadi.
4. X_0 nuqtada r(Q_f) > r(Q) yoki r(Q_f) = r(Q)<m tengsizliklar o'rinli bo'lganda esa $\lambda_i(i=\overline{1,m})$ lar ko'p qiymatli aniqlanadi.

Lagranj ko'paytuvchilari iqtisodiy ma'noga ega ekanini ko'rsatish uchun (7.4) tenglamalar sistemasining $b_i(i=\overline{1,m})$ ozod hadlari ma'lum bir intervalda o'zgaruvchan bo'lsin deb faraz qilamiz. U holda f(X) funktsiyaga ekstremal qiymat beruvchi nuqta ham o'zgaradi. Bu nuqtaning koordinatlari b(b_1, . . .,b_n) vektorning funktsiyasidan iborat, ya'ni $x_j(b)=x_j(b_1,b_2, . . .b_m)$, j=$\overline{1,n}$.

Buni nazarga olib tuzilgan Lagranj funktsiyasi ham b vektorining funktsiyasidan iborat bo'ladi, ya'ni

$$F(b)=f(X(b))+\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b)[b_i-g_i(X(b))]$$

Bu funktsiyadan b_i bo'yicha hosila olib

$$\frac{\partial F(b)}{\partial b_i} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)\frac{\partial x_j}{\partial b_i} + \sum_{i=1}^{m} [b_i - g_i(X(b))]\frac{\partial \lambda_i}{\partial b_i} + \lambda_i, i=\overline{1,m}.$$

ega bo'lamiz. Bundan (7.27) ga asosan

$$\frac{\partial F(b)}{\partial b_i} = \lambda_i, i=\overline{1,m}.$$

$F(X^*, \Lambda)=f(X^*)$ tenglik o'rinli bo'lganligi sababli

$$\partial f(X^*)/\partial b_i = \lambda_i, \ \ (i=\overline{1,m}).$$

Bu tenglikka asosan λ_i b_i ozod hadlarning (resurslaring) o'zgarishi maqsad funktsiyasiga qanday ta'sir ko'rsatishini bildiradi. λ_i ning miqdoriga qarab har bir b_i parametrni optimal yechimga qo'shgan hissasini aniqlash mumkin

$$\frac{\partial f(X)}{\partial b_i} \cong \frac{\Delta f}{\Delta b_i} = \lambda_i \ \text{ yoki } \ \Delta f = \lambda_i \Delta b_i$$

Agar $\Delta b=1$ bo'lsa $\Delta f=\lambda_i$, ya'ni b_i parametrni bir birlikka o'zgartirish natijasida maqsad funktsiyaning qiymati λ_i birlikka o'zgaradi.

Shunday qilib, λ_i larning $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ \ldots \ , \lambda_m^0$ qiymatlari ma'lum bo'lsa, masalaning har bir chegaraviy shartining optimal yechimi $f(X^0)$ ga qo'shgan hissasini aniqlash mumkin. Jumladan, $\lambda_i^0=0$ bo'lganda tegishli tenglama masala uchun ahamiyatsiz bo'ladi. Bunday tenglamani tashlab yuborish ham mumkin. Agar $\lambda_i^0>0$ bo'lsa, u holda

$$g_i(X)=b_i$$

tenglamadagi ozod hadni bir birlikka o'zgartirsak, $Z=f(X)$ funktsiyaning qiymati λ_i^0 miqdorga o'zgarishini ko'rsatadi.

Klassik optimallashtirish masalasi (2)-(4) uchun yaratilgan Lagranj usulini noma'lumlarga nomanfiylik sharti qo'yilgan hol uchun hamda shartlari tengsizliklardan iborat bo'lgan shartli optimallashtirish masalalari uchun ham umumlashtirish mumkin.

Faraz qilaylik, (2)-(4) masalada noma'lumlarga nomanfiylik sharti kiritilgan bo'lsin, ya'ni quyidagi masalani yechish talab qilinsin:

$$g_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)=b_i, \ i=\overline{1,.m}, \ m<n, \qquad (30)$$

$$x_j \geq 0, \ j=\overline{1,n}, \qquad (31)$$

$$Z=f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \to \max(\min) \qquad (32)$$

Bu yerda f va g_i funktsiyalar uzluksiz va birinchi tartibli uzluksiz hosilaga ega. Maqsad funktsiya $x_j \geq 0$ shart bajariladigan sohaning ichki nuqtalarida yoki chegarasida ekstremumga erishishi mumkin.

Ekstremum nuqtani X* bilan belgilaymiz. Agar X* mumkin bo'lgan rejalar to'plamining ichki nuqtasi bo'lsa, u holda ekstremum mavjudligining zaruriy sharti (29) dan iborat bo'ladi. Demak, birinchi qadamda (29) sistemaning $x_j \geq 0$ sohada yotuvchi hamma yechimlarini topib, ular uchun Z funktsiyaning qiymatini aniqlash, so'ngra $x_j \geq 0$ sohaning chegarasini tekshirish kerak. Chegarada kamida bitta $x_j=0$ bo'ladi. Faraz qilaylik faqat bitta x_j, masalan $x_k=0$ bo'lsin. bu holda m ta tenglamali va n-1 o'zgaruvchili masalani ko'ramiz. Bu masala uchun (29) sistemani yechib, $x_j \geq 0$ sohaning ichida yotuvchi hamma yechimlarini topamiz va har bir yechimdagi Z funktsiyaning qiymatini aniqlaymiz. har bir noma'lumni 0 ga tenglash mumkin bo'lganlik uchun n-1 o'zgaruvchili va m ta tenglamali sistemani yechish kerak. So'ngra 2 ta o'zgaruvchini 0 ga teng deb qabul qilamiz va n-2 o'zgaruvchili m ta tenglamali masalani yechamiz. Bunday masalalar soni C_n^2 ga teng.

Bundan so'ng 3 ta o'zgaruvchini 0 ga teng deb qabul qilamiz va hokazo, oxirida n-m ta noma'lumga 0 qiymat beramiz va m o'zgaruvchili m ta tenglamalar sistemasidan iborat masalani yechamiz va qolgan m ta noma'lumning qiymatlarini topamiz. Bu nuqtalarning har birida Z funktsiyaning qiymatini hisoblaymiz. U qiymatlar ichida eng kattasi Z funktsiyaning global maksimumini, eng kichigi esa global minimumini beradi. Endi no'malumlarga nomanfiylik shartlari qo'yilmagan, lekin chegaraviy shartlarning bazilari tengsizliklardan iborat bo'lgan quyidagi masalani ko'ramiz:

$$g_i(x_1,x_2,\dots,x_n)\le b_i, i=\overline{1,m_1},$$
$$g_i(x_1,x_2,\dots,x_n)\ge b_i, i=\overline{m_1+1,m_2},$$
$$g_i(x_1,x_2,\dots,x_n)=b_i, i=\overline{m_2+1,m},$$
$$Z=f(x_1,x_2,\dots,x_n)\to \max(\min)$$

Masaladagi tengsizliklarga $x_{si}(i=\overline{1,m_2})$ qo'shimcha o'zgaruvchilarni kiritib, quyidagi tenglamlar sistemasini hosil qilamiz:

$$g_i(x_1,x_2,\dots,x_n)+x_{si}=b_i,\ i=\overline{1,m_1},$$
$$g_i(x_1,x_2,\dots,x_n)-x_{si}=b_i,\ i=\overline{m_1+1,m_2},$$
$$g_i(x_1,x_2,\dots,x_n)=b_i,\ i=\overline{m_2+1,m},$$
$$x_{si}\ge 0,\ i=\overline{1,m_2},$$
$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)\to \max(\min)\ .$$

Berilgan masaladagi $g_i(x_1,x_2,\dots,x_n)\le b_i$ shart $x_{si}\ge 0$, $i=\overline{1,m}$ shartga, $g_i(x_1,x_2,\dots,x_n)\ge b_i$, shart esa $\chi_{si}\le 0$ $i=\overline{m_1+1,m_2},$ shartga teng kuchlidir.

Z funktsiyaning global ekstremumini topish uchun E_n fazodagi nomanfiy oktantning hamma ichki nuqtalarini ($x_{si}\ge 0$) va chegaraviy nuqtalarini (bunda ba'zi $x_{si}=0$) tekshirishimiz kerak bo'ladi: $x_{si}>0(i=1,m)$ bo'lgan holni ko'ramiz. Bu holda Lagranj funktsiyasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$F(X,X_s,\Lambda)=\lambda_0 f(X)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(b_i-x_{si}-g_i(X))+\sum_{i=m_1+1}^{m_2}\lambda_i(b_i+x_{si}-g_i(X))+\sum_{i=m_2+1}^{m}\lambda_i(b_i-g_i(X))$$

(7.29) ga asosan bu funktsiyadan x_i,λ_i va x_{si} lar bo'yicha olingan barcha xususiy hosilalar 0 ga teng bo'lishi kerak. Jumladan, bu funktsiyadan x_{si} lar bo'yicha olingan xususiy hosilalarni 0 ga tenglab, qo'yidagiga ega bo'lamiz:

$$-\lambda_i=0, i=\overline{1,m_1}$$
$$\lambda_i=0, i=\overline{m_1+1,m_2}\ .$$

Bundan ko'rinadiki, agar ekstrimal nuqtada $x_{si}>0(i=\overline{1,m_2})$ bo'lsa, unga tegishli $\lambda_i=0$ bo'ladi. Demak, tengsizlik ko'rinishidagi shartlarni ekstrimal nuqtalarni qidirish jarayonida tashlab yuborish mumkin. Boshqacha aytganda, f(X) funktsiya global maksimum yoki minumimga erishadigan nuqtada biror chegaraviy shart qat'iy tengsizliklardan iborat bo'lsa, bu shartga qaramaslik mumkin.

Nomanfiy oktantning chegaraviy nuqtalarida ba'zi $x_{si}=0$ bo'lishi mumkin bo'lganligi uchun bunday x_{si} ga tegishli shart tenglamadan iborat bo'ladi, demak, mos λ_1 0 dan farqli bo'lishi mumkin, lekin $\lambda_1^0\cdot x_{si}^0=0$ bo'ladi $(i=\overline{1,m_2})$. Bu holda f(X) funktsiyaning global ekstremumini qo'yidagi yo'l bilan topish kerak.

Eng avval (29) sistemani tengsizliklardan iborat shartlar tashlab yuborilgan hol uchun echamiz. Topilgan har bir yechim uchun Z funktsiyaning qiymatini topamiz. So'ngra, masalan, bitta tengsizlik kiritib, bu jarayonni takrorlaymiz. Bu ishni har bir tengsizlik uchun bajaramiz. Bunday masalalar soni m_2 ta bo'ladi. Keyin esa masalaga 2 tadan tengsizlik kiritib yechamiz (hammasi bo'lib C^2_n ta masala). Jarayon masalaga hamma tengsizliklar kiritulguncha davom ettiriladi. Hamma shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlar orasida Z ga eng katta (eng kichik) qiymat beruvchi yechim berilgan masalaning global maksimumi (minimumi) bo'ladi.

Yuqoridagi mulohazalardan shuni ko'rish mumkinki, agar X^* nuqta f(X) funktsiyaning global ekstremumi bo'lib, unga tegishli qo'shimcha o'zgaruvchilarning qiymatlari x_{si} va Lagranj ko'aytuvchilari $\Lambda^* = (\lambda_1^*, ..., \lambda_m^*)$ bo'lsa, $x_{si}^* = 0$ yoki $\lambda_i^* = 0 \;\; (i = \overline{1, m_2})$ ya'ni $\lambda_1^* \cdot x_{si}^* = 0$ bo'ladi.

Misol. Lagranj usulidan foydalanib, qo'yidagi chiziqsiz dasturlash masalasi yechilsin:

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$Z = x_1 x_2 \to \max.$$

Yechish. Lagranj funktsiyasini tuzamiz:

$$F(x_1, x_2, \lambda) = x_1 x_2 + \lambda(x_1 + x_2 - 1).$$

Bu funktsiyadan x_1, x_2 va λ lar bo'yicha xususiy xosilalar olib ularni nolga tenglaymiz. Natijada quyidagi sistemaga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} x_2 + \lambda = 0 \\ x_1 + \lambda = 0 \\ x_1 + x_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Sistemani yechish natijasida berilgan masalaning optimal yechimini aniqlaymiz:

$$\lambda^* = -\frac{1}{2}, x_1^* = x_2^* = \frac{1}{2}, Z = \frac{1}{4}.$$

Nazorat savollari

1. Chiziqsiz dasturlash masalasi qanday qo'yiladi?
2. Chiziqli va chiziqsiz dasturlash orasidagi farq nimadan iborat?
3. Shartsiz optimallashtirish masalasi nima?
4. Optimallashtirishning klassik masalasi nima?
5. Mahaliy va global optimal yechim deganda nimani tushunamiz?
6. Separabel dasturlash masalasi qanday yoziladi?
7. Statsionar nuqta nima?
8. Funktsiya ekstremumi mavjudligining zaruriy sharti nimadan iborat?
9. Gesse matritsasi qanday matritsa?
10. Funktsiya ekstremumi mavjudligining etarlilik sharti qanday?
11. Shartlari tenglamalardan iborat chiziqsiz dasturlash masalasini yechishda Lagranj usulining g'oyasi qanday?
12. Lagranj funktsiyasi nima va u qanday tuziladi?
13. Lagranj ko'paytuvchilarining iqtisodiy ma'nosi nima?

14. Noma’lumlarga nomanfiylik sharti qo’yilgan otimal-lashtirishning klassik masalasini yechish uchun Lagranj usulining g’oyasi nimadan iborat?
15. Shartlarida tengsizliklar qatnashgan, lekin noma’lumlarga nomanfiylik sharti qo’yilmagan chiziqsiz dasturlash masalasi Lagranj usuli bilan qanday yechiladi?

25-mavzu. Kvadratik dasturlash

Reja:

1. Kvadratik formalar va ularning kanonik ko'rinishi
2. Kvadratik dasturlash masalalari uchun Kun-Takker shartlari
3. Kvadratik dasturlash masalasini yechish uchun Barankin-Dorfman usuli
4. Kvadratik dasturlash masalalarini yechish uchun Bil usuli

Tayanch iboralar:

Kvadratik dasturlash, kvadratik forma, musbat aniqlangan kvadratik forma, manfiy aniqlangan kvadratik forma, nomusbat aniqlangan kvadratik forma, nomanfiy aniqlingan kvadratik forma, aniqmas kvadratik forma; kanonik ko'rinishdagi kvadratik forma, Kun-Takker shartlari

Kvadratik dasturlash masalasi chiziqsiz (qavariq) dasturlash masalasining xususiy holidan iboratdir. Uning matematik modelidagi chegaraviy shartlar chiziqli tenglama va tengsizliklardan, maqsad funktsiyasi umumiy holda chiziqli va kvadratik formalarning yig'indisidan iborat bo'ladi:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \{\le,=,\ge\} b_i,\ i=\overline{1,m}, \qquad (1)$$

$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,n}, \qquad (2)$$

$$z = f(x) = \sum_{j-1}^{n} C_j x_j + d_{11}x_1^2 + d_{12}x_1x_2 + \ldots + d_{nn}x_n^2 \to \max(\min) \qquad (3)$$

yoki matritsa formada:

$$AX\{\le,=,\ge\}B, \qquad (4)$$

$$X \ge 0, \qquad (5)$$

$$Z = C'X + X'DX \to \max(\min), \qquad (6)$$

bu yerda A *m*x*n* o'lchovli matritsa, *D n* o'lchovli kvadrat matritsa, *B m* o'lchovli, *X*, *C n* o'lchovli vektorlar. Shunday qilib, (1)-(3) yoki (4)-(6) ko'rinishda berilgan masalani **kvadratik dasturlash masalasi** deb ataymiz.

Bu masala chiziqli dasturlash masalasidan shunisi bilan farq qiladiki, uning maqsad funktsiyasida kvadratik forma $X'DX$ qatnashadi. Bu kvadratik formaga bog'liq ravishda *f(X)* maqsad funktsiya pastga yoki yuqoriga qavariq bo'lishi mumkin. Ana shunday hollar uchun, ya'ni kvadratik dasturlash masalasi yagona optimal (global) yechimiga ega bo'lgan hollar uchun masalani yechish usullari yaratilgan.

Kvadratik formalar va ularning xossalari va bu xossalarning *f(X)* maqsad funktsiyasiga ta'siri, kvadratik dasturlash masalasini yechish usullari keltiramiz.

Kvadratik formalar va ularning kanonik shakli quyidagicha bo'lsin. U holda

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_{ij} = d_{11}x_1^2 + d_{22}x_2^2 + \ldots + d_{nn}x_n^2 + 2d_{12}x_1x_2 + 2d_{13}x_1x_3 + \ldots + 2d_{n-1,n}x_{n-1} = X'DX \qquad (7)$$

ko'rinishdagi funktsiyaga kvadratik forma deyiladi, bu yerda

$$D=\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$X'=(x_1,x_2,...,x_n),(d_{ij}=d_{ji}), \quad i,j=\overline{1,n}$$

(3) kvadratik funktsiyaning pastga (yuqoriga) qavariq bo'lishi (7) kvadratik formaning pastga (yuqoriga) qavariq bo'lishligiga bog'liqdir. Bu esa o'z navbatida $X'DX$ formaning manfiy yoki musbat, nomanfiy yoki nomusbat aniqlanganligiga, yoki umuman, ishorasi aniqlanmaganligiga bog'liqdir.

1-ta'rif. $X=0$ dan boshqa barcha X lar uchun $X'DX<0$ o'rinli bo'lsa, $X'DX$ **manfiy aniqlangan kvadratik forma** deyiladi.

2-ta'rif. Agar $X'DX\le 0$ tengsizlik barcha $X\neq 0$ lar uchun to'g'ri bo'lsa va $X\neq 0$ mavjud bo'lib, uning uchun $X'DX=0$ tenglik bajarilsa, $X'DX$ **nomusbat aniqlangan kvadratik forma** deyiladi

Agar-$X'DX$ kvadratik forma nomusbat aniqlangan bo'lsa $X'DX$ kvadratik forma nomanfiy aniqlangan bo'ladi.

X ning ba'zi qiymatlari uchun $X'DX$ musbat, ba'zilari uchun manfiy qiymat qabul qilishi mumkin. U holda $X'DX$ aniqmas kvadratik forma deyiladi.

Kvadratik formani chiziqli almashtirishlar yordami bilan faqat noma'lumlarning kvadratlaridan tuzilgan formaga keltirish mumkin. Bunday ko'rinishdagi kvadratik forma **kanonik ko'rinishdagi kvadratik forma** deb ataladi.

(7)ni kanonik ko'rinishga keltirib, uning qanday aniqlangan ekanligini, shu bilan bir qatorda uning pastga yoki yuqoriga qavariq ekanligini aniqlash mumkin.

Haqiqatdan ham, agar kvadratik forma

$$Q(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{j=1}^{n} a_j x_j$$

ko'rinishga keltirilgan bo'lib, $a_i>0, j=\overline{1,n}$ bo'lsa, kvadratik forma musbat aniqlangan, $a_i<0, j=\overline{1,n}$ da esa manfiy aniqlangan bo'ladi.

Agar $a_j>0,(j=\overline{1,n_1})$ va $a_j<0,(j=\overline{n_1+1,n})$ bo'lsa, kvadratik formaning ishorasi aniqlanmagan bo'ladi.

1-misol. Berilgan $Q(x_1x_2x_3)=-3x_1^2+2x_1x_2-\frac{5}{4}x_2^2-x_2x_3+\frac{1}{2}x_1x_3-\frac{5}{4}x_3^2$ kvadratik forma kanonik ko'rinishga keltirilsin.

Yechish:

Berilgan kvadratik formaga mos keluvchi D matritsa

$$D=\begin{pmatrix} -3 & 1 & \frac{1}{4} \\ 1- & \frac{5}{4}- & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}- & \frac{1}{2}- & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

ko'rinishda bo'ladi. $Q(x_1x_2x_3)$ formadagi x_1 qatnashgan hadlarni ajratib yozamiz:

$$Q(x_1x_2x_3) = -3(x_1^2 - 2x_1\frac{4x_2 + x_3}{12}) - \frac{5}{4}x_2^2 - x_2x_3 - \frac{5}{4}x_3^2 .$$

Qavs ichidagi ifodani to'la kvadratga keltiramiz:

$$Q(x_1x_2x_3) = -3(x_1 - \frac{4x_2 + x_3}{12})^2 - x_2x_3 - \frac{5}{4}x_3^2 + \frac{(4x_2 + x_3)^2}{48}$$

yoki

$$Q(x_1x_2x_3) = -3(x_1 - \frac{4x_2 + x_3}{12})^2 - \frac{11}{12}x_2^2 - \frac{5}{6}x_2x_3 - \frac{59}{48}x_3^2 .$$

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$x_1' = x_1 - \frac{4x_2 + x_3}{12}$$
$$x_2' = x_2,$$
$$x_3' = x_3 .$$

Bulardan

$$x_1 = x_1' + \frac{1}{3}x_2' + \frac{1}{12}x_3'$$
$$x_2 = x_2' \qquad (8)$$
$$x_3 = x_3' .$$

U holda $Q(x_1, x_2, x_3)$ kvadratik forma quyidagi ko'rinishga keladi:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = -3x_1^2 + Q_1$$

bu yerda

$$Q_1 = -\frac{11}{12}x_2'^2 - \frac{5}{6}x_2'x_3' - \frac{59}{48}x_3'^2 .$$

Endi Q_1 formani o'zgartiramiz:

$$Q_1 = -\frac{11}{12}x_2'^2 - \frac{5}{6}x_2'x_3' - \frac{59}{48}x_3'^2 =$$
$$= -\frac{11}{12}(x_2'^2 + 2\cdot\frac{5}{11}x_2'x_3') - \frac{59}{48}x_3'^2 =$$
$$= -\frac{11}{12}(x_2' + \frac{5}{11}x_3')^2 - \frac{59}{48}x_3'^2 + \frac{25}{132}x_3'^2 =$$
$$= -\frac{11}{12}\left(x_2' + \frac{5}{11}x_3'\right)^2 - \frac{183}{176}x_3'^2$$

yana qaytadan belgilashlar kiritamiz

$$x_1'' = x_1', x_2'' = x_2' + \frac{5}{11}x_3', x_3'' = x_3' .$$

Bulardan

$$x_1' = x_1'' .$$
$$x_2' = x_2'' - \frac{5}{11}x_3'' \qquad (9)$$
$$x_3' = x_3'' .$$

Natijada quyidagiga ega bo'lamiz

$$Q_1 = -\frac{11}{12}x_2''^2 - \frac{183}{176}x_4''^2 ,$$

u holda

$$Q = -3x_1^{''2} - \frac{11}{12}x_2^{''2} - \frac{183}{176}x_3^{''2}.$$

x_1, x_2, x_3 noma’lumlarning qiymatlarini $x_1^{''}, x_2^{''}, x_3^{''}$ lar orqali ifodalash mumkin. Buning uchun (8) va (9) almashtirishlarga mos keluvchi matritsani o’zaro ko’paytirish kerak, ya’ni agar (8) almashtirishga

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matritsa, (9) almashtirishga

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{11} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matritsa mos kelsa u holda

$$C = C_1C_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{3}{44} \\ 0 & 1 & \frac{5}{11} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bo’ladi. Demak,

$$x_1 = x_1^{''} + \frac{1}{3}x_2^{''} - \frac{3}{44}x_3^{''}$$

$$x_2 = x_2^{''} - \frac{5}{11}x_3^{''}$$

$$x_3 = x_3^{''}.$$

Endi $D_1 = C'DC$ matritsani aniqlaymiz:

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{3}{44} & -\frac{5}{11} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{3}{44} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{11} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{11}{12} & -\frac{5}{12} \\ 0 & 0 & -\frac{183}{176} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & -\frac{3}{44} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{11} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{11}{12} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{183}{176} \end{pmatrix}.$$

D_1 matritsa $Q(x_1^{''}, x_2^{''}, x_3^{''})$ kvadratik formaga mos keladi

$$Q(x_1'', x_2'', x_3'') = -3x_1'' - \frac{11}{12}x_2'' - \frac{183}{176}x_3''.$$

Agar S matritsa xosmas matritsa bo'lsa, musbat (manfiy) aniqlangan forma musbat (manfiy) aniqlanganicha qoladi. $Q(x_1, x_2, x_3)$ formada koeffitsientlar manfiy va S xosmas matritsa $|C| = 1$ bo'lganligi sababli $Q(x_1, x_2, x_3)$ manfiy aniqlangan forma bo'ladi.

Endi kvadratik formani kanonik formaga keltirmasdan uning qanday aniqlangan forma ekanligini aniqlash mumkinmi?- degan savol tug'iladi. Bu savolga javob berish uchun quyidagi teoremalarni isbot qilamiz.

1-teorema. Agar

$$Q = (x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_i x_j,$$ kvadratik formadagi.

$$D_1 = d_{11}, D_2 = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix}, ..., D_n = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & ...d_{1n} \\ ... & ... & ... \\ d_{n1} & d_{n2} & ...d_{nn} \end{vmatrix} \quad (10)$$

determinantlar noldan farqli bo'lsa, $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ ni quyidagi ko'rinishga keltirish mumkin:

$$Q = a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + ... + a_n y_n^2,$$

bu yerda

$$a_i = \frac{D_i}{D_{i-1}}, i = \overline{1, n}.$$

Isbot. Teorema shartiga ko'ra $a_{11} = D_1 \neq 0$ bo'lgani sababli Q formada x_1 ni ajratib, uni quyidagi ko'rinishga keltirish mumkin:

$$Q = a_{11}x_1'^2 + Q(x_2', ..., x_n^1).$$

$D_2 \neq 0$ bo'lganligi uchun x_2' ning oldidagi koeffitsient noldan farqli. Shuning uchun uchburchakli almashtirishni bajarib, ikkinchi kvadratni ajratish mumkin. Faraz qilaylik, k ta kvadrat ajratilgan bo'lsin. U holda Q forma quyidagi ko'rinishga keltirilgan bo'ladi

$$Q = a_1 t_1^2 + a_2 t_2^2 + ... + a_k t_k^2 + Q_k(t_{k+1}, ..., t_n).$$

$D_{k+1} \neq \neq 0$ bo'lgani uchun uchburchakli almashtirishni yana bir marta bajarib, yana bir kvadratni ajratish mumkin. Shunday qilib, uchburchakli almashtirishni n marta bajarib $Q(x_1,...,x_n)$ formani kanonik ko'rinishga keltiriladi. (10) determinantlar uchburchakli almashtirishga nisbatan invariant bo'lganliklari uchun $a_i = \frac{D_i}{D_{i-1}}$ ni hosil qilib, D matritsani shunday diagonal ko'rinishga keltiramizki, u quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

$$a_{11} = d_{11}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & o \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix}, \quad ...,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & ... & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & ... & d_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ d_{n1} & d_{n2} & ... & d_{nn} \end{vmatrix},$$

bu yerda

$$a_1 = d_{11}, a_1 \cdot a_2 = D_2, a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = D_3, ..., a_1 \cdot a_2 ... a_n = D_n \; .$$

$a_1, a_2, ... a_n$ larning har biri noldan farqli bo'lganligi uchun

$$a_1 = d_{11}, a_2 = \frac{D_2}{D_1}, a_3 = \frac{D_3}{D_2}, ..., a_n = \frac{D_n}{D_{n-1}} \; .$$

Demak, teorema isbotlandi.

Shunday qilib, a_i koeffitsientlarning ishorasi D_i determinantlarning ishoralariga bog'liq ekan.

Kvadratik formaning ko'rinishini aniqlashda quyidagi hollar ro'y berishi mumkin:

1-hol. Agar $D_1, D_2, ... D_n$ determinantlarning har biri musbat bo'lsa, a_i koeffitsientlar ham musbat bo'lib, Q kvadratik forma musbat aniqlangan bo'ladi.

2-hol. Agar $1, D_1, D_2, ... D_n$ sonlar ketma ketligida ishoralar navbat bilan almashib kelsa, a_i koeffitsientlar manfiy bo'lib, Q forma manfiy aniqlangan bo'ladi.

3-hol. Agar D matritsaning rangi $r<n$ bo'lsa hamda $D_1, D_2, ... D_r$ determinantlar musbat ishorali bo'lib, qolganlari nolga teng bo'lsa, Q kvadratik forma nomanfiy aniqlangan bo'ladi.

4-hol. Agar D matritsaning rangi $r<n$ bo'lib, $1, D_1, D_2, ... D_n$ *q*atorda ishoralar almashib kelsa hamda $D_{r+1} = D_{r+2} = ... = D_n = 0$ bo'lsa Q kvadratik forma nomusbat aniqlangan bo'ladi.

5-hol. Agar $1, D_1, D_2, ... D_n$ sonlar ketma ketligida ishoralar almashmasa hamda manfiy ishorali D_i determinantlar mavjud bo'lsa, Q kvadratik formaning ishorasi aniqlanmagan bo'ladi.

2-misol. Kvadratik formaning ko'rinishi aniqlansin:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_1x_3 - x_2^2 + 2x_2\, x_3 - 4x_3^2$$

Yechish:

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3/2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3/2 & 1 & -4 \end{pmatrix}, D_1 = -2$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1, D_3 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3/2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3/2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -11/4$$

1. D_1, D_2 D_3 sonlar ketma ketligida ishoralar navbat bilan almashuvchi bo'lganligi sababli $Q(x_1, x_2, x_3)$ forma manfiy anqlangan bo'ladi

2-teorema. Nomanfiy $Z = X'DX$ kvadratik forma E_n Evklid fazosida qavariq funktsiyadir. Agar kvadratik forma musbat aniqlangan bo'lsa, u **qat'iy qavariq funktsiya** bo'ladi.

Isbot. Ixtiyoriy X_1,X_2 nuqtalar va λ sonni ($0 \le \lambda \le 1$) olib,

$$\hat{X} = \lambda X_2 + (1-\lambda) X_1$$

nuqtani tuzamiz va bu nuqtada $Z = X'DX$ kvadratik formaning qiymatini tekshiramiz:

$$\begin{aligned} \hat{X}'D\hat{X} &= (\lambda X_2 + (1-\lambda)X_1)'D(\lambda X_2 + (1-\lambda)X_1) = (X_1 + \lambda(X_2 - X_1))'D(X_1 + \\ &+ \lambda(X_2 - X_1)) = X_1'DX_1 + 2\lambda(X_2 - X_1)'DX_1 + \lambda^2(X_2 - X_1)'D(X_2 - X_1). \end{aligned} \qquad (11)$$

Teoremani shartiga ko'ra ixtiyriy X uchun $(X \neq \neq 0)$ $X'DX \geq \ge 0$. Shuning uchun

$$\lambda X'DX \ge \lambda^2 X'DX, \quad 0 \le \lambda \le 1 \qquad (12)$$

(9.10) ga asosan (9.9) dan quyidagi tengsizlikni hosil qilamiz:

$$\hat{X}'D\hat{X} \le X_1'DX_1 + 2\lambda(X_2 - X_1)'DX_1 + \lambda(X_2 - X_1)'D(X_2 - X_1), \qquad (13)$$

yoki

$$\hat{X}'\hat{D}X \le X_1'DX_1 + \lambda(X_2 - X_1)'DX_1 + \lambda(X_2 - X_1)'DX_2 \le \lambda X_2'DX_2 + (1-\lambda)X_1'DX_1. \qquad (14)$$

(14) tengsizlik $X'DX$ kvadratik formaning qavariq funktsiyasi ekanligini ko'rsatadi.

Endi $Z = X'DX$ kvadratik forma musbat aniqlangan deb faraz qilamiz. U holda ixtiyoriy $0 < \lambda < 1$ uchun

$$\lambda(X_2 - X_1)'D(X_2 - X_1) > \lambda^2(X_2 - X_1)'D(X_2 - X_1) \qquad (15)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Demak, (9.11) da $\le$ ishorani $<$ bilan almashtirish mumkin, ya'ni

$$\hat{X}'D\hat{X} < X_1'DX_1 + 2\lambda(X_2 - X_1)'DX_1 + \lambda(X_2 - X_1)'D(X_2 - X_1) \;. \qquad (16)$$

Bundan

$$\hat{X}'D\hat{X} < \lambda X_2'DX_2 + (1-\lambda)X_1'DX_1 \qquad (17)$$

(17) tengsizlik $Z = X'DX$ kvadratik formaning qat'iy qavariq ekanligini ko'rsatadi. Shu bilan teorema isbot bo'ldi.

Xuddi shunday mulohazalar yordamida quyidagi teoremani ham isbot qilish mumkin.

3–teorema. Nomusbat $Z = X'DX$ kvadratik forma E_n Evklid fazosida yuqoriga qavariq funktsiyadir. Agar kvadratik forma manfiy aniqlangan bo'lsa, u qat'iy **yuqoriga qavariq funktsiya** bo'ladi.

2. Kvadratik dasturlash masalalari uchun Kun-Takker shartlari

Kvadratik dasturlash masalasi ((1)-(3)) berilgan bo'lsin. Maqsad funktsiyaning minimumi qidiriladigan masalani uning maksimumi qidiriladigan maslaga keltirish mumkin bo'lgani sababli (3) ning o'rniga bundan keyin

$$Z = f(X) = c_1x_2 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + d_{11}x_1^2 + d_{12}x_1x_2 + ... + d_{nn}x_n^2 \to \max \qquad (18)$$

funktsiyani yoki matritsali formadagi

$$Z = f(x) = C'X + X'DX \to \max \qquad (19)$$

funktsiyani ko'ramiz.

Bundan keyin *f(X)* funktsiyani yuqoriga qavariq funktsiya, ya'ni $Z = X'DX$ kvadratik formani yuqoriga qavariq ($X'DX$ -manfiy aniqlangan forma) deb faraz qilamiz. Bu holda (1)-(2) shartlarni qanoatlantiruvchi rejalar to'plami qavariq to'plam bo'lgani uchun kvadratik dasturlash masalasi yagona (global) optimal yechimga ega bo'ladi.

Masalaning (1) shartlarini qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritish mumkin bo'lgani uchun (1)-(3) masalani quyidagi ko'rinishda ifodalaymiz:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i = \overline{1,m} \qquad (20)$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,n} \qquad (21)$$

$$Z = f(X) = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{kj}x_kx_j \to \max, \qquad (22)$$

yoki matritsa formada

$$AX=B, \qquad (23)$$

$$X\geq\geq 0, \qquad (24)$$

$$Z = f(X) = C'X + X'DX \to \max \qquad (25)$$

Bu masalaning yechimi optimal yechim bo'lishining zaruriy va etarlilik shartlarini aniqlaymiz. Buning uchun Lagranj funktsiyasini tuzamiz:

$$F(X,\Lambda) = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{kj}x_kx_j + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j), \qquad (26)$$

yoki matritsali formada

$$F(X,\Lambda) = C'D + X'DX + \Lambda'(B - AX) \;. \qquad (27)$$

F(X,Λ*)* funktsiyadan x_j $(j=\overline{1,n})$ λ_I $(i=\overline{1,m})$ bo'yicha xususiy hosilalar olamiz:

$$\frac{dF}{dx} = c_i + 2\sum_{k=1}^{n} x_kd_{kj} - \sum_{i=1}^{m}\lambda_ia_{ij}, \qquad (28)$$

yoki

$$\frac{\partial F}{\partial X} = C' + 2DX - A'\Lambda, \qquad (29)$$

$$\frac{dF}{\partial\lambda_i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{j.} \qquad (30)$$

$$\frac{dF}{d\Lambda} = B - AX. \qquad (31)$$

Endi (28)-(31) munosabatlarga asoslanib, Kun-Takkerning shartlarini yozamiz:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)_{X^0,\Lambda^0} \le 0, \qquad X_0' \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)_{X^0,\Lambda^0} = 0, \quad X^0 \ge 0,$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda_i}\right)_{X^0,\Lambda^0} \ge 0, \qquad \lambda_i^0 \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial \lambda_i}\right)_{x^0,\Lambda^0} = 0, \quad \lambda_i^0 \ge 0.$$

Bundan (28), (30) ga asosan:

$$c_j + 2\sum_{k=1}^{n} d_{kj} x_k^o - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 a_{ij} \le 0 \ , \qquad (32)$$

$$x_j^o (\ c_j + 2\sum_{k=1}^{n} d_{kj} x_k^o - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 a_{ij}) = 0 \ , \qquad (33)$$

$$x_j^o \ge 0, \ j = \overline{1,n}, \qquad (34)$$

$$b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 \ge 0, \qquad (35)$$

$$\lambda_i^0 (bi - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0) = 0, \qquad (36)$$

$$\lambda_i \ge 0, \quad i = \overline{1,m}. \qquad (37)$$

(32)-(37) shartlar matritsali formada quyidagicha ifodalanadi:

$$C' + 2DX^0 - A'\Lambda^0 \le 0, \qquad (38)$$

$$X^0 (C' + 2DX^0 - A'\Lambda^0) = 0, \qquad (39)$$

$$X^0 \ge 0, \qquad (40)$$

$$B - AX^0 \ge 0, \qquad (41)$$

$$\Lambda^0 (B - AX^0) = 0, \qquad (42)$$

$$\Lambda^0 \ge 0 \qquad (43)$$

Agar shunday Λ^0 vektor mavjud bo'lib, X^0, Λ^0 lar uchun (38)-(43) shartlar o'rinli bo'lsa, X^0 vektor berilgan kvadratik dasturlash masalasi (23)-(25) ning optimal yechimi bo'ladi.

Endi (38) tengsizlikni qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritish yordamida tenglamaga aylantiramiz

$$C' + 2DX^0 - A'\Lambda^0 + V^* = 0.$$

Bundan

$$V^* = A'\Lambda^0 - 2DX^0 - C'. \qquad (44)$$

Bu holda kvadratik dasturlash masalasi yechimining optimal yechim bo'lishlik sharti quyidagicha bo'ladi:

$$C'+2DX^*-A'\Lambda +V^*=0. \qquad (45)$$

$$X^*V^*=0,\ X^*\geq 0,\ V^*\geq\geq 0. \qquad (46)$$

Berilgan masaladagi (9.21) shartlar tenglama ko'rinishda bo'lganligi sababli Λ ga musbat bo'lishlik sharti qo'yilmaydi. Bundan tashqari, (41)-(42) shartlar ixtiyoriy bazis rejalar uchun o'rinli bo'lganligi sababli ularni tashlab yuborish mumkin. Demak, xulosa qilib shuni aytish mumkinki, quyidagi

$$AX=B \qquad (47)$$

$$\begin{cases} 2DX-A'\Lambda^0+V+C'=0, & (48)\\ X'V=0, & (49)\\ X\geq 0,\ V\geq 0. & (50)\end{cases}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi har qanday $X\geq 0$, $V\geq 0$ vektorlar berilgan (23)-(24) masalaning yechimini bildiradi. Agar bu (47)-(50) sistema yagona yechimga ega bo'lsa, berilgan kvadratik dasturlash masalasi ham yagona (global) optimal yechimga ega bo'ladi. Agar (47)-(50) sistema birgalikda bo'lmasa, berilgan kvadratik dasturlash masalasi ham yechimga ega bo'lmaydi. Shunday qilib, berilgan (23)-(25) kvadratik dasturlash masalasini yechimini (47)-(50) sistemaning yechimi orqali topish mumkin. Bu sistemaning yechimini topish masalasi quyidagicha quyiladi: (47)-(48) tenglamalar sistemasining shunday nomanfiy *($X\geq 0$, $\Lambda\geq 0$)* bazis yechimini topish kerakki, u *X'V* ko'paytmani nolga aylantirsin. Demak, xulosa qilib aytish mumkinki, agar kvadratik dasturlash masalasi ((23)-(25)) optimal yechimga ega bo'lsa, bu yechim (47)-(48) tenglamalar sistemasining bazis yechimlarining biridan iborat bo'ladi.

3-misol. Quyidagi kvadratik dasturlash masalasining yechimini Kun-Takker shartlaridan foydalanib toping:

$$x_1+2x_2\leq\leq 13,$$
$$2x_1+x_2\leq\leq 9,$$
$$x_1\geq\geq 0,\ x_2\geq\geq 0, \qquad (51)$$
$$Z=f(x)=-4x_1^2-6x_2^2+8x_1+44x_2+2x_1x_2\to\max.$$

Yechish. Lagranj funktsiyasini tuzamiz:

$$F(X,\Lambda)=-4x_1^2-6x_2^2+8x_1+44x_2+2x_1x_2+$$
$$+\lambda_1(13-x_1-2x_2)+\lambda_2(9-2x_1-x_2).$$

Bu funktsiyadan x_1, x_2, λ_1 va λ_2 lar bo'yicha xususiy hosilalar olamiz:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=-8x_1+8+2x_2-\lambda_1-2\lambda_2,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}=-12x_2+44+2x_1-2\lambda_1-\lambda_2,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1}=13-x_1-2x_2,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_2}=9-2x_1-x_2.$$

Endi Kun-Takker shartlarini yozamiz:

$$\begin{cases} -8x_1+8+2x_2-\lambda_1-2\lambda_2 \le 0, \\ -12x_2+44+2x_1-2\lambda_1-\lambda_2 \le 0, \\ 13-x_1-2x_2 \ge 0, \\ 9-2x_1-x_2 \ge 0, \end{cases} \qquad (52)$$

$$\begin{aligned} &\frac{dF}{dx_1}\cdot x_1 = 0, \\ &\frac{dF}{dx_2}\cdot x_2 = 0, \\ &\frac{dF}{d\lambda_1}\cdot \lambda_1 = 0, \\ &\frac{dF}{d\lambda_2}\cdot \lambda_2 = 0. \end{aligned} \qquad (53)$$

(52) sistemaning yechimlari orasidan (53) ni qanoatlantiruvchisini aniqlash kerak. (52) sistemaga o'zgaruvchilar kiritib, uni quyidagi tenglamalar sistemasiga keltiramiz:

$$\begin{cases} 8x_1-2x_2+\lambda_1+2\lambda_2-v_1=8, \\ -2x_1+12x_2+2\lambda_1+\lambda_2-v_2=44, \\ x_1+2x_2+v_3=13, \\ 2x_1+x_2+v_4=9 \end{cases} \qquad (54)$$

(53) ga asosan v_1, v_2, v_3, v_4 *q*o'shimcha o'zgaruvchilar quyidagi shartlarni qanoatlantirishi kerak:

$$x_1v_1 = 0,\ x_2v_2 = 0,\ \lambda_1v_3 = 0,\ \lambda_2v_4 = 0 \qquad (55)$$

(54) sistemaga w_1, w_2 sun'iy bazis o'zgaruvchilarni kiritb, uni quyidagi chiziqli dasturlash masalasi ko'rinishda ifodalaymiz:

$$\begin{cases} 8x_1-2x_2+\lambda_1+2\lambda_2-v_1+\omega_1=8, \\ -2x_1+12x_2+2\lambda_1+\lambda_2-v_2+\omega_2=44 \\ x_1+2x_2+v_3=13, \\ 2x_1+x_2+v_4=9, \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, \lambda_1\ge 0, \lambda_2\ge 0, \\ v_1\ge 0, v_2\ge 0, v_3\ge 0, v_4\ge 0, \end{cases} \qquad (56)$$

$$Z = M\omega_1 + M\omega_2 \to \min\ . \qquad (57)$$

(56)-(57) masalani simpleks jadvalga joylashtiramiz (1-jadval). Buning uchun quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$P_0=\begin{pmatrix}8\\44\\13\\9\end{pmatrix},\quad P_1=\begin{pmatrix}8\\-2\\1\\2\end{pmatrix},\quad P_2=\begin{pmatrix}-2\\12\\2\\1\end{pmatrix},\quad P_3=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix},P_4=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad P_5=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad P_6=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\quad P_7=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$P_8=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},P_9=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},P_{10}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

bu belgilashlarda hamma noma'lumlar simpleks jadvalga $x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, v_1, v_2, v_3, v_4, w_1, w_2.$ tartibda joylashtirilgan. Masalani simpleks usulda yechib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$x_1^* = 2, x_2^* = 4, v_3^* = 3, v_4^* = 1.$$

Topilgan yechim (56)-(57) masalaning bazis yechimi bo'ladi. Bu yechim (55) shartlarni qanoatlantiradi:

$$x_1 v_1 = 0, x_2 v_2 = 0, \lambda_1 v_3 = 0, \lambda_2 v_1 = 0,$$

shuning uchun u berilgan (51) kvadratik dasturlash masalasining yechimidan iborat. $x_2^* = 2, x_2^* = 4, Z = f(X^*) = 96.$

1-jadval

B.B.	c^b	P_0	0	0	0	0	0	0	0	0	M	M
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}
P_9	M	8	8	-2	1	2	-1	0	0	0	1	0
P_{10}	M	44	-2	12	2	1	0	-1	0	0	0	1
P_7	0	13	1	2	0	0	0	0	1	0	0	0
P_8	0	9	2	1	0	0	0	0	0	1	0	0
Δ		52M	6M	10M	3M	3M	-M	-M	0	0	0	0
P_9	M	$\frac{46}{3}$	$\frac{23}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{13}{6}$	-1	$-\frac{1}{6}$	0	0	1	
P_2	0	$\frac{11}{3}$	$-\frac{1}{6}$	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	0	$-\frac{1}{12}$	0	0	0	
P_7	0	$\frac{17}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	1	0	0	
P_8	0	$\frac{16}{3}$	$\frac{13}{6}$	0	$\frac{-1}{6}$	$-\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$	0	1	0	
Δ	0	$\frac{46}{3}M$	$\frac{23}{3}M$	0	$\frac{4}{3}M$	$\frac{13}{6}M$	-M	$-\frac{M}{6}$	0	0	0	

P1	0	2	1	0	$\frac{4}{23}$	$\frac{13}{46}$	$-\frac{3}{23}$	$-\frac{1}{46}$	0	0		
P2	0	4	0	1	$\frac{4}{46}$	$\frac{13}{92}$	$-\frac{3}{138}$	$-\frac{2}{23}$	0	0		
P7	0	3	0	0	$-\frac{13}{23}$	$-\frac{25}{46}$	$\frac{4}{23}$	$\frac{9}{46}$	1	0		
P8	0	1	0	0	$-\frac{45}{46}$	$-\frac{16}{23}$	$\frac{13}{46}$	$\frac{13}{92}$	0	1		
		0	0	0	0	0	0	0	0	0		

3. Kvadratik dasturlash masalasini yechish uchun Barankin-Dorfman usuli

Barankin-Dorfman usuli (23)-(25) masalaning yechimini (40)-(43) sistemasini yechish orqali topishga mo'ljallangan bo'lib, uning g'oyasi quyidagidan iborat. Eng avval (40)-(41) sistemaning ixtiyoriy bazis rejasi topiladi. Bu bazis reja asosida qator simpleks almashtirishlar bajarib $X'B$ ko'paytmaning bazis qiymati kamaytirib boriladi. Natijada $X'B=0$ tenglikka mos keluvchi bazis yechim topiladi. Faraz qilaylik, (40)-(43) sistemaning ixtiyoriy bazis yechimi topilgan bo'lsin. Bu holda bazis o'zgaruvchilar ozod o'zgaruvchilarning funktsiyasi sifatida ifoda qilinadi. Qulaylik uchun x_j, λ_r, v_i bazis o'zgaruvchilarni y_j bilan ($v_i = y_{i+n}$), ozod o'zgaruvchilarni esa t_k lar bilan belgilaymiz. U holda quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} y = x_1 = b_{10} + a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + ... + a_{1n}t_n, \\ y_2 = x_2 = b_{20} + a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + ... + a_{2n}t_n, \\ ...., \\ y_n = x_n = b_{no} + a_{n1}t_1 + a_{n2}t_2 + ... + a_{nn}t_n, \\ y_{n+1} = v_1 = b_{n+1,0} + a_{n+1,1}t_1 + a_{n+1,2}t_2 + ... + a_{n+1,n}t_n, \\ y_{n+2} = v_2 = b_{n+2,0} + a_{n+2,1}t_1 + ... + a_{n+2,n}t_n, \\ ...., \\ y_{2n+m} = \lambda_m = b_{2n+m,0} + a_{2n+m,1}t_1 + ... + a_{2n+m,n}t_n, \end{cases} \tag{58}$$

yoki

$$y_j = b_{j0} + \sum_{k=1}^{n} a_{jk}t_k, \quad j = \overline{1,2n+m}. \tag{59}$$

Agar y_j o'zgaruvchi ozod o'zgaruvchi t_k ga mos qo'yilgan bo'lsa, u quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$y_j = t_k = 0 + 0 \cdot t_1 + ... + 0 \cdot t_{k=1} + 1 \cdot t_k + 0 \cdot t_{k+1} + ... + 0 \cdot t_n \tag{60}$$

(59) belgilashlar yordamida noma'lumlarni quyidagi tartibda joylashtirish mumkin:

$$x_1, x_2, ..., x_n, v_2, ..., v_n, \lambda_1, ..., \lambda_m$$

Bu holda bazis yechim uchun quyidagi munosabatlar o'rinli bo'ladi:

$$y_j = b_{j0}, t_k = 0$$

$$T = X'V = \sum_{j=1}^{n} b_{j0} \cdot b_{n+j,0}. \qquad (61)$$

Endi faraz qilaylik, bazisga yangi $t_k = \theta_k > 0$ o'zgaruvchi kiritilsin. U holda, agar qolgan $t_h(h \neq k)$ o'zgaruchilarni nolga teng deb qaraganda bazis o'zgaruvchilarning qiymati quyidagiga teng bo'ladi:

$$y_j = b_{j0} + \theta_k a_{jk}$$

t_k o'zgaruvchining qiymati quyidagicha tanlanadi:

$$t_k = \theta_k = \min_{a_{JK}<0} \left\{ \frac{b_{j0}}{a_{jk}} \right\}.$$

Bunda yangi bazis yechim topilgan bo'ladi va bu yechim uchun $T = X'V$ quyidagi qiymatni qabul qiladi:

$$Tk = X'V = \sum_{j=1}^{n} (b_{j0} + \theta_k a_{jk})(b_{n+j,0} + \theta_k a_{n+j,k}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} b_{j0} b_{n+j,0} + \theta_k (\sum_{j=1}^{n} b_{j0} a_{n+j,k} + \sum_{j=1}^{n} a_{jk} b_{n+j,0}) + \theta_k^2 \sum_{j=1}^{n} a_{jk} a_{n+j,k} = T + \theta_k R_k, \qquad (62)$$

bu yerda

$$T = \sum_{j=1}^{n} b_{j,0} b_{n+j,o}, \qquad (63)$$

$$(64)$$

$$R_k = a_k + \theta_k \beta_k,$$

$$a_k = \sum_{j=1}^{n} b_{j,o} a_{n+j,k} + \sum_{j=1}^{n} a_{jk} b_{n+j,0}, \qquad (65)$$

$$\beta_k = \theta_k \sum_{j=1}^{n} a_{jk} a_{n+j,k} \quad . \qquad (66)$$

Simpleks almashtirishlar natijasida $T=X' V$ ning qiymati kamaya borishi kerak. Shuning uchun bazisga $R_k<0$ ga mos keluvchi t_k o'zgaruvchi kiritiladi. Agar manfiy R_k lar bir nechta bo'lsa, u holda bazisga $\min_{R_k<0} R_k \cdot \theta_k$ ga mos keluvchi t_k vektor kiritiladi.

Ma'lumki, β_k ifoda T dan t_k bo'yicha olingan ikkkinchi tartibli hosilidan iborat. T qavariq bo'lganligi sababli har doim $\beta_k > 0$ bo'ladi. Demak, R_k ishorasi a_k ning ishorasiga bog'liq bo'ladi. Shuning uchun $a_k \geq 0$ bo'lganda $\beta_k, \theta_k в a R_k$ larni hisoblamaslik mumkin. Agar barcha t_k lar uchun $T>0$, $R_k>0$ bo'lsa, Barankin-Dorfman usulini qo'llab bo'lmaydi.

4-misol.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 10,$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 6,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0,$$
$$Z = f(X) = 10x_1 - x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 \to \max$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix},$$

Bu masala uchun (40)-(43) sistema quyidagicha yoziladi:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 10,$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 6,$$
$$-2x_1 + 2x_2 - \lambda_1 - \lambda_2 + v_1 = -10,$$
$$2x_1 - 4x_2 - 2\lambda_1 - \lambda_2 + v_2 = 0,$$
$$-\lambda_1 + v_3 = 0,$$
$$-\lambda_2 + v_4 = 0,$$
$$x_j \ge 0, v_i \ge 0, \quad i = \overline{1,4}, \quad j = \overline{1,4}.$$

Bu sistemaning boshlang'ich bazis yechimini aniqlaymiz. Buning uchun birinchi tenglamadan x_3 ni, ikkinchisidan x_4 ni, to'rtinchisidan v_2, beshinchisidan v_4 ni ajaratamiz hamda uchinchi tenglamani λ_2 ga nisbatan yechamiz:

$$\begin{aligned} & x_3 = 10 - x_1 - 2x_2 \\ & x_4 = 6 - x_1 - x_2, \\ & \lambda_2 = 10 - 2x_1 + 2x_2 - \lambda_1 + v_1 \\ & v_2 = -2x_1 + 4x_2 + 2\lambda_1 + \lambda_2, \\ & v_3 = \lambda_1, v_4 = \lambda_2. \end{aligned} \tag{67}$$

λ_2 qiymatini v_2, v_4 larga mos keluvchi ifodalarga qo'yamiz.

Natijada quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} x_3 = 10 - x_1 - 2x_2 \\ x_4 = 6 - x_1 - x_2 \\ \lambda_2 = 10 - 2x_1 + 2x_2 - \lambda_1 + v_1, \\ v_2 = 10 - 4x_1 + 6x_2 + \lambda_1 + v_1, \\ v_3 = \lambda_1, \\ v_4 = 10 - 2x_1 + 2x_2 - \lambda_1 + v_1. \end{cases} \tag{68}$$

(68) sistemaga

$$x_1 = 0 + x_1 + 0 + ... + 0,$$
$$x_2 = 0 + 0 + x_2 + ... + 0,$$
$$v_1 = 0 + 0 + ... + v_1$$

tenglamalarni qo'shib to'ldiramiz va 9.2-jadvalga joylashtiramiz. Jadvalga bazisga kiritiladigan noma'lumni aniqlashga ko'maklashuvchi qo'shimcha qism kiritilgan. Bu qo'shimcha jadvalning $\alpha_k, \beta_k, \theta_k$ *ва* R_k elementlari yuqoridagi (59),(61),(63)-(66) formulalar orqali aniqlanadi.

2-jadval

y_j \ t_k	x_0	x_1	x_2	v_1	λ_1
x_1	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*
x_2	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*
x_3	*10*	*-1*	*-2*	*0*	*0*
x_4	*6*	*-1*	*-1*	*0*	*0*
v_1	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*
v_2	*10*	*-4*	*6*	*1*	*1*
v_3	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*
v_4	*10*	*-2*	*2*	*1*	*-1*
λ_2	*10*	*-2*	*2*	*1*	*-1*
α_k	*60*	*-22*	*12*	*6*	*4*
β_k		*2*			
θ_k		*2,5*			
R_k		*-17*			

(63) va (65) formulalarga ko'ra:

$$\alpha_0 = T_0 = 0\cdot 0 + 0\cdot 10 + 10\cdot 0 + 6\cdot 10 = 60,$$
$$\alpha_1 = 0\cdot 0 + 0\cdot(-4) + 10\cdot 0 + 6\cdot(-2) + 1\cdot 0 + 0\cdot 10 + (-1)\cdot 0 + (-1)\cdot 10 = -22,$$
$$\alpha_2 = 0\cdot 0 + 0\cdot 6 + 10\cdot 0 + 6\cdot 2 + 0\cdot 0 + 1\cdot 10 + (-2)\cdot 0 + (-!)\cdot 10 = 12,$$
$$\alpha_3 = 0\cdot 1 + 0\cdot 1 + 10\cdot 0 + 6\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 10 + 0\cdot 10 + 0\cdot 0 + 0\cdot 10 = 6,$$
$$\alpha_4 = 0\cdot 0 + 0\cdot 1 + 10\cdot 1 + 6\cdot(-1) + 0\cdot 0 + 0\cdot 10 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 = 4.$$

2-jadvaldan ko'rinadiki, α_k ning faqat bitta qiymati manfiy ($\alpha_1 = -22$). Demak, x_1 noma'lumni bazisga kiritish natijasida T ning qiymatini kamaytirish mumkin. Shuning uchun β_k, θ_k, R_k larni faqat x_1 ga mos keluvchi ustun uchun hisoblash kerak:

$$\beta_1 = 1\cdot 0 + 0\cdot(-4) + (-1)\cdot 0 + (-1)\cdot(-2) = 2,$$
$$\theta_1 = \min\left\{\frac{10}{1}, \frac{6}{1}, \frac{10}{4}, \frac{10}{2}, \frac{10}{2}\right\} = 2{,}5,$$
$$R_1 = \alpha_1 + \theta_1\beta_1 = -17,$$
$$T_1 = T_0 + \theta_1 R_1 = 60 - 17\cdot 2{,}5 = 17{,}5.$$

Bu yerda $T_1 \neq 0$. Shuning uchun x_1 noma'lumni bazisga kiritib, υ_1 ni bazisdan chiqaramiz.

Natijada 3-jadvalni hosil qilamiz.

3-jadvaldan (63),(65) formulalarga asosan $\alpha_k (k = \overline{0,4})$ ning qiymatlarini hisoblaymiz:

$$\alpha_0 = \frac{5}{2}\cdot 0 + 0\cdot 0 + \frac{15}{2}\cdot 0 + \frac{7}{2}\cdot 5 = \frac{35}{2},$$
$$\alpha_0 = \frac{5}{2}\cdot 0 + 0\cdot 1 + \frac{15}{2}\cdot 0 + \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right)\cdot 0 + 0\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot 5 = 3,$$

$$\alpha_1 = \frac{5}{2}\cdot 0 + 0\cdot 0 + \frac{15}{2}\cdot 0 + \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{2} + (-1) + \frac{3}{2}\cdot 0 + 1\cdot 0 + \left(-\frac{7}{2}\right)\cdot 0 + \left(-\frac{5}{2}\right)\cdot 5 = -16,$$
$$\alpha_3 = \frac{5}{2}\cdot 1 + 0\cdot 0 + \frac{15}{2}\cdot 0 + \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot 0 + 0\cdot 0 + \left(-\frac{1}{4}\right)\cdot 0 + \left(-\frac{1}{4}\right)\cdot 5 = 3,$$
$$\alpha_4 = \frac{5}{2}\cdot 0 + 0\cdot 0 + \frac{15}{2}\cdot 1 + \frac{7}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{4}\cdot 0 + 0\cdot 0 + \left(-\frac{1}{4}\right)\cdot 0 + \left(-\frac{1}{4}\right)\cdot 5 = 1.$$

3- jadval.

	x_0	υ_2	x_2	υ_1	λ_1
x_1	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
x_2	0	0	1	0	0
x_3	$\frac{15}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
x_4	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
υ_1	0	0	0	1	0
υ_2	0	1	0	0	0
υ_3	0	0	0	0	1
υ_4	5	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
λ_2	5	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
α_k	$\frac{35}{2}$	3	-16	3	1
β_k			$\frac{5}{2}$		
θ_k			$\frac{7}{5}$		
R_k			$-\frac{25}{2}$		

Bulardan ko'rinadiki, faqat bitta $\alpha_k(\alpha_2=-16)$ manfiy qiymatga ega. Shuning uchun bu yerda ham β_k,θ_k,R_k larni υ_2 ga mos keluvchi ustun uchun hisoblaymiz:

$$\beta_2=\frac{3}{2}\cdot 0+1\cdot 0+\left(-\frac{7}{2}\right)\cdot 0+\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot(-1)=\frac{5}{2},$$

$$\theta_2=\min\left(\frac{15/2}{7/2},\quad \frac{7/2}{5/2},\quad \frac{5}{1},\quad \frac{5}{1}\right)=\frac{7}{5}=1{,}4$$

$$R_2=\alpha_2+\theta_2\beta_2=-\frac{25}{2},$$

$$\mathrm{T}_2=\mathrm{T}_1+\theta_1R_1=17{,}5-\frac{35}{2}=0$$

$\mathrm{T}_2=0$ bo'lganligi sababli bazis o'zgaruvchilarning qiymatini (60) ga asosan topamiz:

$$x_1=\frac{5}{2}+0\cdot\frac{3}{2}=\frac{5}{2}+\frac{7}{5}\cdot\frac{3}{2}=\frac{23}{5},$$

$$x_2=\frac{7}{5},$$

$$x_3=\frac{15}{2}-\frac{7}{5}\cdot\frac{7}{2}=\frac{13}{5},$$

$$x_4=\frac{7}{2}-\frac{7}{5}\cdot\frac{5}{2}=0,$$

$$v_4=5-\frac{7}{5}=\frac{18}{5}$$

$$\lambda_2=5-\frac{7}{5}=\frac{18}{5},$$

$$v_1=v_2=v_3=0.$$

bu holda berilgan kvadratik dasturlash masalasining optimal yechimi quyidagidan iborat bo'ladi:

$$x_1^*=\frac{23}{5},x_2^*=\frac{7}{5},x_3^*=\frac{13}{5},x_4^*=0,\quad Z(X^*)=\frac{169}{5}.$$

4. Kvadratik dasturlash masalalarini yechish uchun Bil usuli

Faraz qilaylik, yuqoridagi (23)-(25) masala berilgan bo'lsin. Bu masalada $X'DX$ kvadratik forma manfiy aniqlangan, ya'ni $f(X)$ yuqoriga qavariq funktsiya deb faraz qilamiz.

$AX=B, X\geq 0$ sistema berilgan m ta o'zgaruvchiga nisbatan yechilgan bo'lsin. U holda bu sistemani quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{cases} x_1=b_1+a_{1,m+1}x_{m+1}+\ldots+a_{1n}x_n, \\ x_2=b_2+a_{2,m+1}x_{m+1}+\ldots+a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m=b_m+a_{m,m+1}x_{m+1}+\ldots+a_{mn},x_n, \end{cases} \qquad (69)$$

$$\begin{cases} x_1\geq 0, x_2\geq 0,\ldots x_n\geq 0, \\ b_1\geq 0, b_2\geq 0,\ldots,b_m\geq 0. \end{cases} \qquad (70)$$

Endi (69) ga asoslanib, masalaning maqsad funktsiyasini

$$f(X)=C'X+X'DX=cx_1+...+c_nx_n+\sum_{i,j=1}^{n}d_{ij}x_ix_j$$

formadan quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$f(x_{m+1},x_{m+2},...,x_n)=C_{00}^1+2\sum_{j=m+1}^{n}C_{oj}^1x_j+\sum_{i=m+1}^{n}\sum_{j=m+1}^{n}C_{ij}^1x_ix_j=$$

$$=(C_{00}^1+\sum_{j=m+1}^{n}C_{0j}^1x_1)\cdot 1+\sum_{i=m+1}^{n}(C_{io}^1+\sum_{j=m+1}^{n}C_{ij}^1x_j)x_i$$

yoki bundan

$$\begin{cases} f(X)=(C_{00}^1+C_{0m+1}^1x_{m+1}+...+C_{0n}^1x_n)\cdot 1+ \\ +(C_{m+1,0}^1+C_{m+1,m+1}^1,x_{m+1}+...+C_{m+1,n}^1x_n)x_{m+1}+ \\ +\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_{i0}^1+C_{i,m+1}^1x_{m+1}+...+C_{in}x_n)x_i^1+ \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ +(C_{n0}^1+C_{nm+1}^1x_{m+1}+...+C_{nn}^1x_n)x_n, \end{cases} \qquad (71)$$

(bu yerda barcha i va j lar uchun $C_{ij}^1=C_{ji}^1$). (71) dagi har bir x_j noma'lum oldidagi qavs ichida yozilgan ifoda $f(x)$ funktsiyadan

x_j noma'lum bo'yicha olingan xususiy hosilaning yarmiga teng bo'ladi, ya'ni masalan, $j=1$ da

$$C_{10}^1=C_{i,m+1}x_m+...+C_{1n}x_n=\frac{1}{2}\frac{\partial f(x_{m+1},...,x_n)}{\partial x_l}\ . \qquad (72)$$

Ma'lumki, $x_1,x_2,...,x_m$ bazis o'zgaruvchilar uchun

$$\frac{\partial f(x_{m+1},...,x_n)}{\partial x_j}=0,\quad j=\overline{1,m}$$

tenglik to'g'ridir. Shuning uchun berilgan masala rejasining optimalligini ko'rsatuvchi Kun-Takker shartlarini qo'yidagicha ifodalash mumkin:

$$\frac{\partial f(x_{m+1},...,x_n)}{\partial x_j}\le 0,\qquad \frac{\partial f(x_{m+1},...,x_n)}{\partial x_j}x_j=0$$

$$x_j\ge 0,\ j=\overline{m+1,n} \qquad (73)$$

Endi (9.62) da ozod o'zgaruvchilarning nolga tenglab,

$$X^{(0)}=(b_1,b_2,...,b_m,0,0,...,0)\quad (b_i\ge 0, i=\overline{1,m})$$

bazis yechimni hosil qilamiz. Agar

$$\frac{\partial f(x_{m+1}^{(0)},...,x_n^{(0)})}{\partial xj}\le 0$$

shart barcha j = m+1,…,n uchun o'rinli bo'lsa, topilgan

$$X^0=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},...,x_m^{(0)},x_{m+1}^{(0)},...,x_n^{(0)})$$

bazis yechim masalaning yechimi bo'ladi.

Faraz qilaylik,

$$\frac{\partial f\left(x_{m+1}^{(0)},...,x_n^{(0)}\right)}{\partial xj}>0$$

shartni qanoatlantiruvchi kamida bitta j, masalan, $j=m+1$ mavjud bo'lsin. U holda x_{m+1} noma'lumning qiymatini orttira borib, $f(x)$ funktsiyani qiymatini orttira borish mumkin, lekin x_{m+1} ning qiymatini cheksiz ravishda orttirish mumkin emas, chunki uning ma'lum qiymatlarida $x_1, x_2, ..., x_m$ noma'lumlardan birortasi yoki

$$\frac{\partial f\left(x_{m+1},...,x_n\right)}{\partial x_j}\left(j=\overline{m+1,n}\right)$$

ifoda nolga aylanishi mumkin. Bularning qaysi biri birinchi bo'lib nolga aylanishiga bog'liq ravishda x_{m+1} o'zgaruvchi qo'yidagi ikki usul bilan bazisga kiritiladi.

1-usul. x_{m+1} ning qiymati orttirib borilganda $x_1, x_2, ..., x_m$ noma'lumlardan birortasi, masalan x_k birinchi bo'lib nolga aylansin. Bunda x_k uchun

$$\theta=\min_{\substack{a_{i,m=1}<0\\ C_{m+1,m+1}<0}}\left\{\frac{b_i}{\left|a_{l,m+1}\right|},\frac{C_{m+1,0}}{\left|C_{m+1,m+1}\right|}\right\}=\frac{b_k}{\left|a_{k,m+1}\right|}$$

o'rinli bo'ladi. U holda

$$x_k=b_k+a_{k,m+1}x_{m+1}+a_{k,m+2}x_{m+2}+...+a_{kn}x_n$$

ifodadan x_{m+1} ni ajratamiz (x_k ning o'rniga x_{m+1} ni bazisga kiritamiz).

Topilgan x_{m+1} ning qiymatini (69) sistemaga qo'yamiz. Yuqorida ko'rgan almashtirishlarni bajarib, $f(x_k, x_{m+2}, ..., x_n)$ funktsiyani (71) ko'rinishda ifodalaymiz. Natijada yangi bazis yechim

$$X^{(1)}=(b_1^{'},b_2^{'},...,b_{k-1}^{'},b_{k+1}^{'},...,b_m^{'},b_{m+1}^{'},0,...,0)$$

topiladi.

2-usul. x_{m+1} noma'lumning qiymati orttirib borilganda $\frac{\partial f(x_{m+1},...,x_{n)}}{\partial x_{m+1}}$ ifoda birinchi bo'lib nolga aylansin, ya'ni quyidagi munosabat o'rinli bo'lsin:

$$\theta=\min_{\substack{a_{i,m=1}<0\\ C_{m+1,m+1}<0}}\left(\frac{b_i}{\left|a_{i,m+1}\right|},\frac{C_{m+1,0}}{\left|C_{m+1,m+1}\right|}\right)=\frac{C_{m+1,0}}{\left|C_{m+1,m+1}\right|}\quad . \qquad (74)$$

U holda x_{m+1} noma'lumni bazisga kiritish uchun yangi

$$U_1=\frac{1}{2}\frac{\partial f\left(x_{m+1},...,x_n\right)}{\partial x_{m+1}}=C_{m+1,0}+C_{m+1,m+1}x_{m+1}+...+C_{m+1,n}x_n \qquad (75)$$

o'zgaruvchi tanlaymiz hamda (75) dan x_{m+1} ni ajratib, yangi sistemaning birinchi tenglamasini tuzamiz:

$$x_{m+1}=\frac{C_{m+1,0}}{C_{m+1,m+1}}-\frac{C_{m+1,m+2}}{C_{m+1,m+1}}x_{m+2}-...-\frac{C_{m+1,n}}{C_{m+1,m+1}}x_n+\frac{u_1}{C_{m+1,m+1}}.$$

Topilgan noma'lumning qiymati masala shartlari (69) ga va maqsad funktsiyaga qo'yamiz va yangi sistema hosil qilamiz. Yangi sistemada $x_1, x_2, .., x_{m,} x_{m+1}$ o'zgaruvchilar ajratilgan (bog'liq) o'zgaruvchilar bo'lib, $u_1, x_{m+2}, ..., x_n$ lar esa ozod o'zgaruvchilar bo'ladi. ozod o'zgaruvchilarni nolga tenglab, yangi

$$X^{(1)} = (b_1, b_2, ..., b_m, b_{m+1}, 0, ..., 0)$$

bazis yechimini hosil qilamiz.

k-qadamda masala x_j va u_i noma'lumlarni o'z ichiga olishi mumkin. x_j u_i dan shunisi bilan farq qiladiki, x_j ning ishorasiga chegara qo'yiladi $\left(x_j \geq 0, j = \overline{1,n}\right)$, u_i ga esa bunday chegara qo'yilmaydi. Demak, u musbat ham, manfiy ham bo'lishi mukin. Bunday o'zgaruvchilar uchun Kun-Takkerning optimallik sharti $\frac{\partial f}{\partial u} = 0$ bo'ladi.

Masalaning bazis yechimida $u_i = 0$ bo'lishi kerak. Agar $u_i \neq 0$ bo'lsa, tegishli tenglama va u_i o'zgaruvchi masala shartlaridan o'chirib tashlanadi.

Algoritmning k-qadamida qo'yidagi ishlar bajariladi:

1. k-1-qadamda topilgan $X^{(k-2)}$ bazis yechim uchun optimallik shar-ti tekshiriladi. Agar x_j ozod o'zgaruvchilar uchun $\frac{\partial f}{\partial xj} \leq 0$ bo'lib, yangi kiritilgan barcha u_i o'zgaruvchilar uchun $\frac{\partial f}{\partial xj} = 0$ bo'lsa topilgan yechim optimal yechim bo'ladi.

2. Agar optimallik sharti bajarilmasa, u holda $\frac{\partial f}{\partial u} \neq 0$ shartni qanoatlantiruvchi kamida bitta u_i aniqlanadi. Bu yerda qo'yidagi 3 hol ro'y berishi mumkin:

a) $\frac{\partial f}{\partial u_i} < 0.$ Bu holda u_i ning qiymatini kamaytirish kerak. Natijada maqsad funktsiyaning qiymati ortadi.

b) $\frac{\partial f}{\partial u_i} > 0.$ Bu holda u_i ning qiymatini orttirish natijasida maqsad funktsiyaning qiymati ortadi.

v) $\frac{\partial f}{\partial u_i} = 0.$ Bu holda $\frac{\partial f}{\partial x_i} > 0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x_t noma'lum tanlanadi. Bu noma'lum yoki bazisga kiritiladi va uning qiymati

$$\theta = \min\left\{\frac{bi}{|a_{i,t}|}, \frac{Ct,_0}{|Ct,_t|}\right\}$$

formula orqali topiladi, yoki bo'lmasa, masalaning maqsad funktsiyasi yuqoridan chegaralanmagan ekanligi $a_{t,t} > 0 C_{t,t} > 0,$ (barcha j lar uchun) aniqlanadi. Agar k-qadamda yangi bazis yechim $X^{(k-1)}$ topilgan bo'lsa, k+1 qadamga o'tiladi. Maqsad funktsiyaning yuqoridan chegaralanmagan ekanligi aniqlingan bo'lsa, masalaning yechish jarayoni to'xtatiladi.

Taqqoslash uchun yuqorida Barankin-Dorfman usuli bilan yechilgan masalani ko'ramiz va uni Bill usuli bilan yechamiz.

5-misol. Quyidagi masala yechilsin:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 10,$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 6,$$
$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4},$$
$$Z = \max = f(X) = 10x_1 - x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2.$$

Yechich. Masala shartidagi birinchi tenglamadan x_3 ni, ikkinchisidan x_4 ni ajratamiz va f(x) maqsad funktsiyani (71) ko'rinishda yozamiz. Natijada berilgan masalani qo'yidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$\begin{aligned} &x_3 = 10 - x_1 - 2x_2, \\ &x_4 = 6 - x_1 - x_2 \\ &f(X) = (0 + 5\cdot x_1 + 0\cdot x_2)\cdot 1 + (5 + x_1 + x_2)\cdot x_1 + (0 + x_1 - 2x_2)\cdot x_2 \end{aligned} \qquad (76)$$

(76) dan ko'rish mumkinki,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f(X)}{\partial x_1} = 5 - x_1 + x_2,$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial f(X)}{\partial x_2} = 0 + x_1 - 2x_2,$$

Ozod o'zgaruvchilar (x_1,x_2) ga nol qiymat berib, boshlang'ich bazis yechimini aniqlaymiz:

$$X^{(0)} = (0;0;10;6),\ f(X^{(0)}) = 0$$

Endi

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f\left(X^{(0)}\right)}{\partial x_1} = 5 > 0$$

bo'lganligi sababli x_1 noma'lumni bazisga kiritamiz. Buning uchun

$$\theta = \min\left\{\frac{10}{2}, \frac{6}{1}, \frac{5}{1}\right\} = 5$$

sonni aniqlaymiz va

$$u_1 = 5 - x_1 + x_2 \quad (77)$$

belgilash kiritamiz. (77) dan x_1 ni ajratib, bazis o'zgaruvchilarni almashtiramiz:

$$x_1 = 5 + x_2 - u_1 \qquad (78)$$

Topilgan x_1 ning qiymatini masalaning shartlari va maqsad funktsiyaga qo'yamiz hamda (78) ni (76) sistemaga qo'shib yozamiz. Natijada qo'yidagilarni hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} &x_1 = 5 + x_2 + u_1, \\ &x_3 = 5 - 3x_2 + u_1, \\ &x_4 = 1 - 2x_2 + u_1, \\ &f(x_2, u_1) = (25 + 5x_2)*1 + (5 - x_2)*x_2 + (0 - u_1)*u_1 \end{aligned} \qquad (79)$$

(78)-(79) masaladagi x_2, u_1 ozod o'zgaruvchilarga nol qiymat berib, yangi bazis yechimni topamiz:

$$X^{(1)} = (5;0;5;1;0), \qquad f(X^{(1)}) = 25.$$

dan ko'rinadiki,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f\left(X^{(1)}\right)}{\partial x_2} = 5 > 0.$$

Demak, bazisga x_2 noma'lumni kiritish kerak.

$$\theta = \min\left\{\frac{5}{3}, \frac{1}{2}, 5\right\} = \frac{1}{2}$$

bo'lganligi sababli x_2 ni bazisga kiritib, bazisdan x_4 ni chiqarish kerak. Demak, $x_4 = 1 - 2x_2 + u_1$ tenglamadan x_4 ni x_2 ga almashtiramiz:

$$x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}u_1 \qquad (80)$$

Hosil bo'lgan (80) tenglamani yangi sistemaning birinchi tenglamasi deb qaraymiz. So'ngra topilgan x_2 ning qiymatini masalaning shartlari (78) ga va maqsad funktsiya (79) ga qo'yib, yangi sistemaning qolgan tenglamalari va maqsad funktsiyasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}u_1, \\ x_2 = \frac{11}{2} - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}u_1, \\ x_3 = \frac{7}{2} + \frac{3}{2}x_4 - \frac{1}{2}u_1, \end{cases} \qquad (81)$$

$$f(x_4, b_1) = \left(\frac{119}{4} - \frac{9}{4}x_4 + \frac{9}{4}u_1\right)\cdot 1 + \left(-\frac{9}{4} - \frac{1}{4}x_4 + \frac{1}{4}u_1\right)\cdot x_4 + \left(\frac{9}{4} + \frac{1}{4}x_4 - \frac{5}{4}u_1\right)\cdot u_1. \qquad (82)$$

Yangi bazis yechim. $u_1 = 0$ da

$$\frac{\partial f\left(X^{(2)}\right)}{\partial u_1} = \frac{9}{4} > 0.$$

Shuning uchun topilgan yechim bazis yechim bo'lmaydi. Demak, bazis yechimni optimallashtirish kerak. Buning uchun u_1 ni bazisga kiritamiz.

$$\theta = \min\left\{\frac{\frac{11}{2}}{\frac{1}{2}}, \frac{\frac{7}{2}}{\frac{1}{2}}, \frac{\frac{9}{4}}{\frac{5}{4}}\right\} = \frac{9}{5}$$ bo'lganligi sababli

$$u_2 = \frac{9}{4} + \frac{1}{4}x_4 - \frac{5}{4}u_1 \qquad (83)$$

yangi noma'lumni kiritamiz. (83) dan u_1 ni ajratib, yangi sistemaning birinchi tenglamasini tuzamiz:

$$u_1 = \frac{9}{5} + \frac{1}{5}x_4 - \frac{4}{5}u_2 \qquad (84)$$

(84)ni (81) va (82) ga qo'yib topamiz:

$$x_1 = \frac{23}{5} - \frac{3}{5}x_4 + \frac{2}{5}u_2,$$
$$x_2 = \frac{7}{5} - \frac{2}{5}x_4 - \frac{2}{5}u_2, \qquad (85)$$
$$x_3 = \frac{13}{5} + \frac{7}{5}x_4 + \frac{2}{5}u_2,$$
$$f(x_4, u_2) = \left(\frac{169}{5} - \frac{9}{5}x_4\right)\cdot 1 + \left(-\frac{9}{5} - \frac{1}{5}x_4\right)\cdot x_4 + \left(-\frac{4}{5}u_2\right)\cdot u_2. \qquad (86)$$

Yangi bazis yechim ($u_2 = 0$ da):

$$X^{(3)} = \left(\frac{23}{5}, \frac{7}{5}, \frac{13}{5}, 0\right),$$
$$f\left(X^{(3)}\right) = \frac{169}{5}.$$

(9.80)dan ko'rinadiki,

$$\frac{\partial f\left(X^{(3)}\right)}{\partial x_4} < 0, \left(\frac{\partial f\left(X^{(3)}\right)}{\partial u_2}\right)_{u_2=0} = 0, \qquad \frac{\partial f\left(X^{(2)}\right)}{\partial x_4}\cdot x_4 = 0.$$

Demak, $X^{(3)}$ uchun Kun-Takker shartlari bajariladi. Shuning uchun bu yechim optimal yechim bo'ladi. Shunday qilib, masalaning optimal yechimi:

$$X^* = \left(\frac{23}{5}, \frac{7}{5}, \frac{13}{5}, 0\right),$$
$$f\left(X^*\right) = \frac{169}{5}.$$

Bu yechimni Barankin-Dorfman usuli bo'yicha topilgan yechim bilan solishtirib, ularning bir xil ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin.

Nazorat savollari

1. Kvadratik dasturlash masalasi qanday qo'yiladi va u chiziqli dasturlash masalasidan nima bilan farq qiladi?
2. Kvadratik forma deganda nimani tushunasiz?
3. Kvadratik funktsiyaning pastga (yuqoriga) qavariq bo'lishligi nimaga bog'liq bo'ladi?
4. Qanday kvadratik forma manfiy (musbat) aniqlangan kvadratik forma deyiladi?
5. Aniqmas kvadratik forma qanday bo'ladi?
6. Kvadratik formaning kanonik ko'rinishi qanday bo'ladi?
7. Nomanfiy (nomusbat) kvadratik forma Evklid fazosida qanday funktsiyani ifodalaydi?
8. Kvadratik dasturlash masalasi uchun Kun-Takker shartlari qanday yoziladi?
9. Kvadratik dasturlash masalasini yechish uchun Barankin-Darfman usulining g'oyasi nima?
10. Bil usulining algoritmi qanday?