ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

УРГАНЧ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

“ИҚТИСОДИЁТ” КАФЕДРАСИ

Б.Эгамов, А.Ражабов

ИҚТИСОДИЙ МАТЕМАТИКА

ФАНИ БЎЙИЧА

МАЪРУЗА ВА АМАЛИЙ МАШҒУЛОТЛАР МАТНЛАРИ

Урганч – 2017

Маъруза мавзулари

1-МАВЗУ. ҲОДИСАЛАР ВА УЛАРНИНГ ТУРЛАРИ

1.1. Комбинаторика элементлари.
1.2. Ҳодисалар ва уларнинг турлари.
1.3. Ҳодисалар устида амаллар.
1.4. Эҳтимолнинг ҳар хил таърифлари.

Таянч иборалар: *ўрин алмаштиришлар, ўринлаштиришлар, гуруҳлашлар, элементар ҳодисалар фазоси, тасодифий ҳодиса, муқаррар ҳодиса, мумкин бўлмаган ҳодиса, биргаликда бўлмаган ҳодиса, тенг имкониятли ҳодиса, ҳодисалар устида амаллар, эҳтимоллик, Колмогоров аксиомалари, классик таъриф, геометрик таъриф, нисбий частота, статистик таъриф*

1.1. *Ta'rif.* (*n ta turli elementni k tadan o'rinlashtirish (qaytarilmaydigan tanlashlar)-tartiblangan joylashtirish*) n ta turli elementning k ta turli elementlaridan tuzilgan yoki tartibi bilan, yoki elementi bilan farq qiladigan kombinatsiyalarga o'rinlashtirish deyiladi va mumkin bo'lgan barcha o'rinlashtirishlar soni

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-(k-1)) \qquad (1)$$

formula bilan topiladi.

Agar o'rinlashtirishda $k=n$ bo'lsa, o'rinlashtirishlar soni *o'rin almashtirishlar* (*faqat tartibi bilan farq qiladigan kombinatsiyalar*) soniga teng bo'ladi va bu son

$$P_n = n! = n(n-1)(n-2)...1 \qquad (2)$$

formula bilan aniqlanadi.

Agar o'rinlashtirishda kombinatsiyalar hech bo'lmaganda bitta elementi bilan farq qilsa, ularni n ta elementni k tadan *gruppalash* deyiladi va ularning soni

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (3)$$

formula bilan aniqlanadi.

Gruppalashning ba'zi xossalarini keltirib o'tamiz.

0 ning faktoriali 1 ga teng, ya'ni $0!=1$ deb qabul qilingan.

1-xossa. $C_n^0 = C_n^n = 1$.

2-xossa. $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$.

3-xossa. $C_n^k = C_n^{n-k}$.

4-xossa. $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$.

5-xossa. $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$.

1-eslatma. Agar 2-ta'rifda keltirilgan n ta elementni k tadan o'rinlashtirishda tanlashlar qaytariladigan bo'lsa, ya'ni n ta turli elementdan bittalab olingan element fiksirlangandan so'ng yana o'rniga qaytarib qo'yilib bu jarayon takrorlansa, tanlab olishlar soni

$$N = n^k \qquad (4)$$

formula bilan aniqlanadi.

2-eslatma. Yuqorida gruppalash formulasi (5) da n ta elementning barchasi turli deb faraz qilindi. Agar ba'zi elementlar takrorlansa, u holda takrorlanadigan kombinatsiyalar soni boshqa formula yordamida hisoblanadi. Masalan, n ta element ichida i element n_i $(i = \overline{1,k})$ marta takrorlansa, u holda o'rin almashtirishlar soni

$$P_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!} \qquad (5)$$

formula bilan aniqlanadi, bu erda $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$.

Misollar.

1. 1, 2, 3, 4 raqamlaridan foydalanib har bir raqam bir marta qatnashadigan nechta to'rt xonali son tuzish mumkin.

Yechish. $P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

2. 25 ta xodimdan boshliq va uning o'rinbosarini necha xil usulda saylash mumkin.

Yechish. $A_{25}^2 = 25 \cdot 24 = 600$.

3. 25 ta talabadan 3 ta delegatni necha xil usulda saylash mumkin.

Yechish. $C_{25}^3 = \frac{25!}{3! \cdot 22!} = \frac{23 \cdot 24 \cdot 25}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 2300$.

n та элементдан m $(0 < m \le n)$ тадан танлашда иккита схема мавжуд: қайтарилмайдиган ва қайтариладиган танлашлар. Биринчи схемада олинган элементлар қайта олинмайди (орқага қайтарилмайди), иккинчи схемада эса ҳар бир олинган элемент ҳар қадамда ўрнига қайтарилади.

1. Қайтарилмайдиган танлаш схемаси.

Гуруҳлашлар сони: n та элементдан m $(0 < m \le n)$ тадан гуруҳлашлар сони қуйидаги формула орқали ҳисобланади:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Ўринлаштиришлар сони: n та элементдан m $(0 < m \le n)$ тадан ўринлаштиришлар сони қуйидаги формула орқали ҳисобланади:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Ўрин алмаштиришлар сони: n та элементдан n тадан ўринлаштириш ўрин алмаштириш дейилади ва у қуйидагича ҳисобланади:

$$P_n = n!$$

2. Қайтариладиган танлаш схемаси.

Қайтариладиган гуруҳлашлар сони: n та элементдан m $(0 < m \le n)$ тадан қайтариладиган гуруҳлашлар сони қуйидаги формула орқали ҳисобланади:

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m.$$

Қайтариладиган ўринлаштиришлар сони: n та элементдан $m\ (0<m\le n)$ тадан қайтариладиган ўринлаштиришлар сони қуйидаги формула орқали ҳисобланади:

$$\overline{A}_n^m = n^m.$$

Қайтариладиган ўрин алмаштиришлар сони: k хил n та элементдан иборат тўпламда 1-элемент n_1 марта, 2-элемент n_2 марта, …, k-элемент n_k марта қайтарилсин ва $n_1+n_2+...+n_k=n$ бўлсин, у ҳолда n та элементдан иборат ўрин алмаштиришлар $P_n(n_1,n_2,...,n_k)$ орқали белгиланади ва у қуйидагича ҳисобланади:

$$P_n(n_1,n_2,...,n_k)=\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}.$$

1.18-мисол. Абонент телефон номерини тераётганда охирги иккита рақамни эслай олмади. У бу рақамлар ҳар хил эканлигини эслаб, уларни таваккалига терди. Керакли рақамлар терилганлик эҳтимолини топинг.

Ечиш. Охирги икки рақамни $A_{10}^2=90$ та усул билан териш мумкин, демак мумкин бўлган жами элементар ҳодисалар сони 90 га тенг. Бу элементар ҳодисалар ягона мумкин бўлган ва тенг имкониятли. $A=\{$телефон номери тўғри терилган$\}$ ҳодисасини киритамиз. A ҳодиса фақат битта элементдан иборат бўлади (чунки керакли телефон номери битта бўлади). Шунинг учун, классик таърифга кўра

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{1}{A_{10}^2}=\frac{1}{10\cdot 9}=\frac{1}{90}\approx 0.011.$$

1.2. Ҳодисалар ва уларнинг турлари.

Эҳтимоллар назариясининг асосий тушунчаларидан бири ***тажриба*** ва тажриба натижасида кузатилиши мумкин бўлган ***ҳодиса*** тушунчаларидир.

Ҳодиса дейилганда рўй бериши ёки рўй бермаслиги мумкин бўлган ҳар қандай воқеани тушунамиз.

Тажриба ҳодисани рўёбга келтирувчи шартлар мажмуи (комплекси) S нинг бажарилишини таъминлашдан иборатдир.

Биз қизиққан ҳодисанинг рўй бериши ёки рўй бермаслиги ўтказилаётган тажрибанинг шартлар комплекси S га боғлиқдир. Шунинг учун бу шартлар олдиндан келишиб олинади.

1.1-мисол. Мерган тўртта соҳага ажратилган нишонга қарата ўқ узади. Ўқ узилиши – тажриба. Нишоннинг тайин соҳасига ўқ тегиши – ҳодиса.

1.2-мисол. Қутида рангли шарлар бор. Қутидан таваккалига битта шар олинади. Қутидан шар олиниши тажриба ҳисобланади. Тайин рангли шар чиқиши – ҳодиса.

Таъриф. Тажрибанинг ҳар қандай натижаси ***элементар ҳодиса*** дейилади ва ω орқали белгиланади.

Таъриф. Тажриба натижасида рўй бериши мумкин бўлган барча элементар ҳодисалар тўплами ***элементар ҳодисалар фазоси*** дейилади ва Ω орқали белгиланади.

Таъриф. Агар элементар ҳодисалар фазоси чекли ёки саноқли сондаги элементар ҳодисалардан ташкил топган бўлса, у ҳолда бу фазо саноқли (ёки дискрет) тўплам дейилади.

Таъриф. Агар элементар ҳодисалар фазоси саноқсиз сондаги элементар ҳодисалардан ташкил топган бўлса, у ҳолда бу фазо узлуксиз (ёки континуум) тўплам дейилади.

1.12-мисол. Катакдан таваккалига танланган қуённинг жинсини аниқлаш тажрибаси учун элементар ҳодисалар фазосини тузинг.

Ечиш. Бу тажрибада элементар ҳодисалар фазоси қуйидагича бўлади:

$$\Omega=\{E,\ U\},$$

бу ерда E қуённинг эркак, U қуённинг урғочи эканлигини билдиради.

1.13-мисол. Агар Шавкат лаҳзали лотерея чиптасидаги учта рақамни таваккалига танласа, бу тажрибанинг элементар ҳодисалар фазосини тузинг.

Ечиш. Бу тажрибанинг элементар ҳодисалар фазоси қуйидагича бўлади:

$$\Omega=\{000,\ 001,\ 002,\ \ldots,\ 998,\ 999\}.$$

1.14-мисол. Биттаси қизил ва биттаси яшил рангда бўлган бир жуфт ўйин соққасини ташлаш тажрибасидаги элементар ҳодисалар фазосини тузинг.

Ечиш. Бу тажрибанинг элементар ҳодисалар фазоси Ω қуйидагича бўлади:

$$\Omega=\begin{array}{llllll}\{(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6)\\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6)\\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6)\\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6)\\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6)\\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6)\}\end{array}$$

Ω тўпламни қуйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$\Omega=\{(x,\ y):\ 1\le x\le 6,\ 1\le y\le 6\ \},$$

бу ерда x қизил рангдаги ўйин соққасида тушган очкони, y эса яшил рангдаги ўйин соққасида тушган очкони билдиради.

1.15-мисол. Ўйин соққасини ташлаш тажрибасининг элементар ҳодисалар фазосини тасвирланг ва $\{1,\ 2\}$ ҳодисани изоҳланг.

Ечиш. Тажрибанинг элементар ҳодисалар фазоси қуйидагича:

$$\Omega=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}.$$

$\{1,\ 2\}$ ҳодиса 1 ёки 2 очко тушганлигини билдиради.

1.16-мисол. Иккита ўйин соққасини ташлаш тажрибасидаги элементар ҳодисалар фазосини тузинг, сўнгра тушган очколар йиғиндиси 7 га тенг бўлган A ҳодисанинг элементларини кўрсатинг.

Ечиш. Бу тажрибанинг элементар ҳодисалар фазоси

$$\Omega=\{(x,\ y):\ x,\ y=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\ \}$$

ва

$$A=\{(1,6),\ (6,1),\ (2,5),\ (5,2),\ (4,\ 3),\ (3,4)\}.$$

Биз кузатадиган ҳодисаларни қуйидаги уч турга ажратиш мумкин: муқаррар, рўй бермайдиган ва тасодифий ҳодисалар.

Таъриф. *Тасодифий ҳодиса* (ёки *ҳодиса*) деб, тажриба натижасида рўй бериши олдиндан аниқ бўлмаган ҳодисага айтилади.

Одатда, ҳодисалар лотин алифбосининг бош ҳарфлари $A, B, C, ...$ лар билан белгиланади.

Таъриф. Тажриба натижасида албатта рўй берадиган ҳодисага *муқаррар ҳодиса* дейилади ва у Ω орқали белгиланади.

Таъриф. Умуман рўй бермайдиган ҳодисага *мумкин бўлмаган ҳодиса* дейилади ва у $\varnothing$ орқали белгиланади.

1.3-мисол. Тажриба номерланган куб(ўйин соққаси)ни ташлашдан иборат бўлсин. Бу тажриба учун қуйидаги ҳодисаларни киритамиз:

$A=\{$5 рақам тушиши$\}$;

$B=\{$жуфт рақам тушиши$\}$;

$C=\{$7 рақам тушиши$\}$;

$D=\{$бутун рақам тушиши$\}$.

Бу ерда A ва B ҳодисалар тасодифий, C ҳодиса мумкин бўлмаган, D ҳодиса эса муқаррар ҳодисалар бўлади.

Таъриф. *Биргаликда бўлмаган ҳодисалар* деб, битта тажрибада бирининг рўй бериши қолганларининг рўй беришини йўққа чиқарадиган ҳодисаларга айтилади.

1.6-мисол. Деталлар солинган қутидан таваккалига битта детал олинди. Бунда стандарт детал чиқиши ностандарт детал чиқишини йўққа чиқаради. “Стандарт детал чиқди” ва “ностандарт детал чиқди” ҳодисалари биргаликда эмас.

1.7-мисол. Танга ташланди. Танганинг гербли томони тушиши рақамли томони тушишини йўққа чиқаради. “Гербли томон тушди” ва “рақамли томон тушди” ҳодисалари биргаликда эмас.

Таъриф. Агар тажриба натижасида бир нечта ҳодисалардан биттаси ва фақат биттасининг рўй бериши муқаррар ҳодиса бўлса, у ҳолда бу ҳодисалар *ягона мумкин бўлган ҳодисалар* дейилади.

1.8-мисол. Иккита пул-буюм лотереяси сотиб олинган. Қуйидаги ҳодисаларнинг биттаси ва фақат биттаси албатта рўй беради: “ютуқ биринчи билетга чиқди, иккинчисига чиқмади”, “ютуқ биринчи билетга чиқмади, иккинчисига чиқди”, “ютуқ иккала билетга чиқди”, “ютуқ иккала билетга ҳам чиқмади”. Булар ягона мумкин бўлган ҳодисалар.

1.9-мисол. Мерган нишонга қарата ўқ узди. Қуйидаги иккита ҳодисадан бири албатта рўй беради: ўқнинг нишонга тегиши, ўқнинг нишонга тегмаслиги. Булар ягона мумкин бўлган ҳодисалар.

Таъриф. Агар бир нечта ҳодисалардан ҳеч бирини бошқаларига нисбатан рўй бериши мумкинроқ дейишга асос бўлмаса, улар *тенг имкониятли ҳодисалар* дейилади.

1.10-мисол. Танга ташлаганда гербли томон тушиши ва рақамли томон тушиши тенг имкониятли ҳодисалар.

1.11-мисол. Ўйин соққаси ташлаганда у ёки бу сондаги очколар тушиши тенг имкониятли ҳодисалардир.

1.3. Ҳодисалар устида амаллар.

Таъриф. A ва B *ҳодисалар йиғиндиси* деб, A ва B ҳодисаларнинг камида биттаси (яъни ёки A, ёки B, ёки A ва B биргаликда) рўй беришидан иборат бўлган $C = A \cup B\ (C = A + B)$ ҳодисага айтилади.

Таъриф. A ва B *ҳодисалар кўпайтмаси* деб, A ва B ҳодисаларнинг иккаласи ҳам (яъни A ва B биргаликда) рўй беришидан иборат бўлган $C = A \cap B\ (C = A \cdot B)$ ҳодисага айтилади.

Таъриф. A ҳодисадан B *ҳодисанинг айирмаси* деб, A ҳодиса рўй бериб, B ҳодиса рўй бермаслигидан иборат бўлган $C = A \setminus B\ (C = A - B)$ ҳодисага айтилади.

Таъриф. A ҳодисага *қарама-қарши* $\overline{A}$ ҳодиса фақат ва фақат A ҳодиса рўй бермаганда рўй беради (яъни $\overline{A}$ ҳодиса A ҳодиса рўй бермаганда рўй беради). $\overline{A}$ ни A учун тескари ҳодиса деб ҳам аталади.

Таъриф. Агар A ҳодиса рўй беришидан B ҳодисанинг ҳам рўй бериши келиб чиқса, у ҳолда A ҳодиса B ҳодисани *эргаштиради* дейилади ва $A \subseteq B$ кўринишда ёзилади.

Таъриф. Агар $A \subseteq B$ ва $B \subseteq A$ бўлса, у ҳолда A ва B ҳодисалар *тенг (тенг кучли)* ҳодисалар дейилади ва $A = B$ кўринишида ёзилади.

Ҳодисалар устидаги амаллар қуйидаги хоссаларга эга:

$$A + B = B + A,\ \ A \cdot B = B \cdot A;$$

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C;$$

$$(A + B) + C = A + (B + C),\ \ (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C);$$

$$A + A = A,\ \ A \cdot A = A;$$

$$A + \Omega = \Omega,\ \ A \cdot \Omega = A\ \ A + \varnothing = A,\ \ A \cdot \varnothing = \varnothing;$$

$$A + \overline{A} = \Omega,\ \ A \cdot \overline{A} = \varnothing;$$

$$\overline{\varnothing} = \Omega,\ \ \overline{\Omega} = \varnothing,\ \ \overline{\overline{A}} = A;$$

$$A - B = A \cdot \overline{B};$$

$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ ва $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ - де Морган қонунлари.

1.4-мисол. A, B ва C - ихтиёрий ҳодисалар бўлсин. Бу ҳодисалар орқали қуйидаги ҳодисаларни ифодаланг:

$D = \{$учала ҳодиса рўй берди$\}$;

$E = \{$бу ҳодисаларнинг камида биттаси рўй берди$\}$;
$F = \{$бу ҳодисаларнинг бирортаси ҳам рўй бермади$\}$;
$G = \{$бу ҳодисаларнинг фақат биттаси рўй берди$\}$.

Ечиш. Ҳодисалар устидаги амаллардан фойдаланамиз:

$$D = A \cdot B \cdot C;$$
$$E = A + B + C;$$
$$F = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C};$$
$$G = A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C.$$

1.5-мисол. а) Ифодани соддалаштиринг: $(A + B) \cdot (A + \overline{B})$;
б) Формулани исботланг: $A + B = A + \overline{A} \cdot B$.

Ечиш. а) Юқоридаги хоссалардан фойдаланамиз:
$(A + B) \cdot (A + \overline{B}) = A \cdot A + A \cdot \overline{B} + B \cdot A + B \cdot \overline{B} = A + A \cdot (\overline{B} + B) + \varnothing = A + A \cdot \Omega = A + A = A.$
Демак, $(A + B) \cdot (A + \overline{B}) = A$ экан.
б) $A + B = (A + B) \cdot \Omega = A \cdot \Omega + B \cdot \Omega = A \cdot \Omega + B \cdot (A + \overline{A}) = A \cdot \Omega + A \cdot B + A \cdot \overline{B} = \Omega \cdot A + A \cdot \overline{B} =$
$= A + A \cdot \overline{B}$.

Элементар ҳодисалар фазоси чексиз бўлсин: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...\}$. S эса Ω нинг барча қисм тўпламларидан ташкил топган ҳодисалар алгебраси бўлсин. Ҳар бир $\omega_i \in \Omega$, $i = 1,2,...$ элементар ҳодисага $p(\omega_i)$ сонни мос қўямиз. $p(\omega_i)$ - элементар ҳодисанинг эҳтимоли дейилади. Демак, Ω да қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи сонли $p(\omega_i)$ функция киритамиз:

1. $\forall \omega_i \in \Omega,\ P(\omega_i) \geq 0;$
2. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p(\omega_i) = 1.$

У ҳолда $A \in \Omega$ ҳодисанинг эҳтимоли йиғинди шаклида ифодаланади:

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i).$$

Эҳтимолни бундай аниқлаш Колмогоров аксиомаларини қаноатлантиради:

1. $P(A) = \sum\limits_{\omega_i \in A} P(\omega_i) \geq 0$, чунки ҳар бир $P(\omega_i) \geq 0$.
2. $P(\Omega) = \sum\limits_{\omega_i \in \Omega} p(\omega_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} p(\omega_i) = 1.$
3. Агар $A \cdot B = \varnothing$ бўлса, у ҳолда

$$P(A + B) = \sum_{\omega_i \in A+B} p(\omega_i) = \sum_{\omega_i \in A} p(\omega_i) + \sum_{\omega_i \in B} p(\omega_i) = P(A) + P(B).$$

Бундай аниқланган $\{\Omega, S, P\}$ учлик эҳтимолликлар фазоси (ёки дискрет эҳтимолликлар фазоси) дейилади.

Агар $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ – чекли фазо ва тажрибадаги барча элементар ҳодисалар тенг имкониятли, яъни

$$p(\omega_1) = p(\omega_2) = ... = p(\omega_n) = \frac{1}{n}$$

бўлса, у ҳолда A ҳодисанинг эҳтимоли қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$P(A)=\sum_{\omega_i\in A}p(\omega_i)=\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}_{m}=\frac{m}{n},$$

бу ерда m A ҳодисага тегишли элементар ҳодисалар сони.

1.17-мисол. Симметрик танга икки марта ташланганда камида бир марта "герб" тушиши эҳтимолини топинг.

Ечиш. Бу тажрибанинг элементар ҳодисалар фазоси

$$\Omega=\{GG,\ GR,\ RG,\ RR\}.$$

A ҳодисани белгилаб оламиз:

$$A=\{\text{камида битта герб}\}=\{GG,\ GR,\ RG\}.$$

A ҳодисанинг эҳтимоли уни ташкил этувчи элементар ҳодисалар эҳтимолларининг йиғиндисига тенг, шунинг учун

$$P(A)=P(GG)+P(GR)+P(RG)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

1.4. Эҳтимолнинг ҳар хил таърифлари.

Ω чекли n та ягона мумкин бўлган ва тенг имкониятли элементар ҳодисалардан ташкил топган бўлсин.

Таъриф (классик таъриф). A ҳодисанинг эҳтимоли деб, A ҳодисага қулайлик яратувчи элементар ҳодисалар сони k нинг тажрибадаги барча элементар ҳодисалар сони n га нисбатига айтилади:

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{k}{n}.$$

Классик эҳтимоллик қуйидаги хоссаларга эга:

1. $P(\varnothing)=0.$
2. $P(\Omega)=1.$
3. $0\le P(A)\le 1.$
4. Агар $A\cdot B=\varnothing$ бўлса, у ҳолда $P(A+B)=P(A)+P(B).$
5. $\forall A,B\in\Omega$ учун $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B).$

Классик таърифдан фойдаланиб ҳодисанинг эҳтимолини ҳисоблашда комбинаторика элементларидан фойдаланилади. Шунинг учун комбинаториканинг баъзи элементларини келтирамиз. Комбинаторикада қўшиш ва кўпайтириш қоидаси деб аталувчи икки муҳим қоида мавжуд.

$A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ ва $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_m\}$ чекли тўпламлар берилган бўлсин.

<u>Қўшиш қоидаси:</u> агар A тўплам элементлари сони n та ва B тўплам элементлари сони m та бўлиб, $A\cdot B=\varnothing$ (A ва B тўпламлар кесишмайдиган) бўлса, у ҳолда $A+B$ тўплам элементлари сони $n+m$ та бўлади.

<u>Кўпайтириш қоидаси:</u> A ва B тўпламлардан тузилган барча (a_i,b_j) жуфтликлар тўплами $C=\{(a_i,b_j): i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}\}$ нинг элементлари сони $n\cdot m$ та бўлади.

A ҳодиса n та боғлиқсиз тажрибаларда m марта рўй берсин. m сон A ҳодисанинг частотаси (рўй беришлар сони), $\frac{m}{n}$ муносабат эса A ҳодисанинг нисбий частотаси дейилади ва $W(A)$ билан белгиланади, демак $W(A)=\frac{m}{n}$.

Таъриф. Агар тажрибалар сони етарлича кўп бўлиб, бу тажрибаларда A ҳодисанинг нисбий частотаси бирор ўзгармас сон атрофида тебранса, бу сонга A ҳодисанинг *статистик эҳтимоли* дейилади.

1.19-мисол. 10000 та тарвуздан 34 таси ташиш пайтида ёрилган. Ёрилган тарвузларнинг нисбий частотасини топинг.

Ечиш. Масаланинг шартига кўра ҳаммаси бўлиб $n=10000$ та тарвуз бор, улардан $m=34$ таси ёрилган. Демак, ёрилган тарвузларнинг нисбий частотаси $W(A)=\frac{m}{n}=\frac{34}{10000}=0{,}0034$ га тенг.

Ҳодисанинг эҳтимолини классик таърифга кўра Ω - элементар ҳодисалар фазоси чекли бўлгандагина ҳисоблашимиз мумкин. Агар Ω чексиз тенг имкониятли элементар ҳодисалардан ташкил топган бўлса, геометрик эҳтимолдан фойдаланамиз.

Ўлчовли бирор G соҳа берилган бўлиб, у D соҳани ўз ичига олсин. G соҳага таваккалига ташланган X нуқтани D соҳага тушиши эҳтимолини ҳисоблаш масаласини кўрамиз. Бу ерда X нуқтанинг G соҳага тушиши муқаррар ва D соҳага тушиши тасодифий ҳодиса бўлади. $A=\{X\in D\}-X$ нуқтанинг D соҳага тушиши ҳодисаси бўлсин.

Таъриф. A ҳодисанинг геометрик эҳтимоли деб, D соҳа ўлчовини G соҳа ўлчовига нисбатига айтилади, яъни

$$P(A)=\frac{mes\{D\}}{mes\{G\}},$$

бу ерда mes орқали узунлик, юза, ҳажм белгиланган.

1.20-мисол (учрашув ҳақидаги масала). Икки дўст соат 9 билан 10 орасида учрашишга келишишди. Биринчи келган киши дўстини 15 дақиқа давомида кутишини, агар шу вақт мобайнида дўсти келмаса, у кетиши мумкинлигини шартлашиб олишди. Агар улар соат 9 билан 10 орасида ихтиёрий моментда келишлари мумкин бўлса, бу икки дўстнинг учрашиши эҳтимолини топинг.

Ечиш. Биринчи киши келган моментни x, иккинчисиники y бўлсин: $0\le x\le 60,\ 0\le y\le 60$. У ҳолда уларнинг учрашишлари учун $|x-y|\le 15$ тенгсизлик бажарилиши керак. Демак, $\Omega=\{(x,y):0\le x\le 60,\, 0\le y\le 60\}$, $A=\{(x,y):|x-y|\le 15\}$. x ва y ларни Декарт координаталар текислигида тасвирлаймиз. У ҳолда

$$P(A)=\frac{mes\{A\}}{mes\{G\}}=\frac{60^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot 45\cdot 45}{60^2}=\frac{7}{16}.$$

Назорат саволлари

1. *Элементар ҳодисалар фазосига таъриф беринг.*
2. *Тасодифий ҳодиса тушунчасини таърифланг.*
3. *Ҳодиса турларини айтинг.*
4. *Тенг имкониятли ҳодисалар деб нимага айтилади?*
5. *Ҳодисалар устида қандай амаллар бажарилади?*
6. *Ҳодисанинг эҳтимоли деганда нимани тушунасиз?*
7. *Колмогоров аксиомаларини келтиринг.*
8. *Классик эҳтимоллик хоссаларини айтинг.*
9. *Ҳодисанинг нисбий частотаси деганда нимани тушунасиз?*
10. *Ҳодисанинг статистик ва геометрик эҳтимолига таъриф беринг.*

2-МАВЗУ. ШАРТЛИ ВА ТЎЛА ЭҲТИМОЛ. БАЙЕС ФОРМУЛАСИ

2.1. Шартли эҳтимоллик. Ҳодисалар тўла гуруҳи.
2.2. Тўла эҳтимол
2.3. Байес формуласи.

Таянч иборалар: *шартли эҳтимоллик, ҳодисалар тўла гуруҳи, тўла эҳтимол, Байес формулалари, боғлиқсиз тажриба, Бернулли схемаси, энг эҳтимолли сон, Муавр-Лапласнинг локал ва интеграл теоремалари, Пуассон теоремаси*

2.1. Шартли эҳтимоллик. Ҳодисалар тўла гуруҳи.

A ва B ҳодисалар бирор тажрибадаги ҳодисалар бўлсин.

Таъриф. B ҳодисанинг A ҳодиса рўй бергандаги *шартли эҳтимоли* деб,

$$\frac{P(A\cdot B)}{P(A)} \quad (P(A)\neq 0)$$

нисбатга айтилади. Бу эҳтимолни $P(B/A)$ орқали белгилаймиз.

Шартли эҳтимоллик ҳам Колмогоров аксиомаларини қаноатлантиради:

1. $P(B/A)\geq 0.$
2. $P(\Omega/A)=\dfrac{P(\Omega\cdot A)}{P(A)}=\dfrac{P(A)}{P(A)}=1.$
3. Агар $B\cdot C=\varnothing$ бўлса, у ҳолда

$$P((B+C)/A)=\frac{P((B+C)\cdot A)}{P(A)}=\frac{P(B\cdot A+C\cdot A)}{P(A)}=\frac{P(B\cdot A)+P(C\cdot A)}{P(A)}=$$

$$=\frac{P(B\cdot A)}{P(A)}+\frac{P(C\cdot A)}{P(A)}=P(B/A)+P(C/A),$$

чунки $B\cdot C=\varnothing$ эканлигидан, $(B\cdot A)\cdot(C\cdot A)=B\cdot A\cdot A\cdot C=B\cdot C\cdot A=\varnothing\cdot A=\varnothing.$

1.21-мисол. Идишда 3 та оқ ва 7 та қора шар бор. Таваккалига кетма-кет биттадан 2 та шар олинади. Биринчи шар оқ рангда бўлса, иккинчи шарнинг қора рангда бўлиши эҳтимолини топинг.

Ечиш. Бу мисолни икки усул билан ечиш мумкин: $A=\{$биринчи шар оқ рангда$\}$, $B=\{$иккинчи шар қора рангда$\}$. A ҳодиса рўй берганидан сўнг идишда 2 та оқ ва 7 та қора шар қолади. Шунинг учун

$$P(B/A)=\frac{7}{9}.$$

Шартли эҳтимоллик формуласидан фойдаланиб, ҳисоблаймиз:

$$P(A)=\frac{3}{10},\quad P(AB)=\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}=\frac{7}{30}.$$

Шартли эҳтимоллик формуласига кўра: $P(B/A)=\dfrac{P(A\cdot B)}{P(A)}=\dfrac{7/30}{3/10}=\dfrac{7}{9}$.

Шартли эҳтимоллик формуласидан ҳодисалар кўпайтмаси эҳтимоли учун ушбу формула келиб чиқади:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B).$$

Бу тенглик кўпайтириш қоидаси (теоремаси) дейилади. Бу қоидани n та ҳодиса учун умумлаштирамиз:

$$P(A_1\cdot A_2\cdot ...\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)...\cdot P(A_n/A_1A_2...A_{n-1}).$$

Агар $P(A/B)=P(A)$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда A ҳодиса B ҳодисага боғлиқ эмас дейилади ва $A\perp B$ орқали белгиланади.

Агар $A\perp B$ бўлса, у ҳолда формулани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$P(A\cdot B)=P(B)\cdot P(A/B)=P(B)\cdot P(A).$$

A ва B ҳодисалар ўзаро боғлиқ эмас дейилади, агар $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$ муносабат ўринли бўлса.

Лемма. Агар $A\perp B$ бўлса, у ҳолда $A\perp \overline{B}$, $\overline{A}\perp B$ ва $\overline{A}\perp \overline{B}$ бўлади.

Таъриф. Агар тажриба натижасида бир нечта ҳодисалардан биттаси ва фақат биттасининг рўй бериши муқаррар ҳодиса бўлса, у ҳолда тажрибанинг бу ҳодисалари тўплами ҳодисалар тўла гуруҳини ташкил этади дейилади.

1.22-мисол. Мерган нишонга қарата 2 та ўқ узади. $A_1=\{$нишонга битта ўқ тегиши$\}$, $A_2=\{$нишонга иккита ўқ тегиши$\}$ ва $A_3=\{$нишонга тегмаслик$\}$ ҳодисалар тўла группа ташкил қилади.

Теорема. Тўла гуруҳ ташкил этувчи $A_1, A_2, ..., A_n$ ҳодисаларнинг эҳтимоллари йиғиндиси бирга тенг: $P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1.$

2.2. Тўла эҳтимол

$A_1, A_2, ..., A_n$ жуфт-жуфти билан биргаликда бўлмаган ҳодисалар тўла гуруҳини ташкил этсин, яъни $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i=\Omega$ ва $A_i\cdot A_j=\varnothing,\ i\neq j$. У ҳолда $A_1+A_2+...+A_n=\Omega$ эканлигини ҳисобга олиб, B ни

$$B=B\Omega=B(A_1+A_2+...+A_n)=BA_1+BA_2+...+BA_n$$

кўринишда ёзамиз. $A_i\cdot A_j=\varnothing,\ i\neq j$ эканлигидан $(B\cdot A_i)\cdot(B\cdot A_j)=\varnothing,\ i\neq j$ экани келиб чиқади. B ҳодисанинг эҳтимолини ҳисоблаймиз:

$$P(B)=P(BA_1+BA_2+...+BA_n)=P(BA_1)+P(BA_2)+...+P(BA_n).$$

Кўпайтириш қоидасига кўра $P(B\cdot A_i)=P(A_i)\cdot P(B/A_i),\ i=\overline{1,n}$ бўлади. Бу тенгликдан

$$P(B)=P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)+...+P(A_n)P(B/A_n).$$

Агар $B\subset\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$ бўлса, у ҳолда

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B/A_i)$$

тенглик ўринли бўлади. Бу тенглик <u>тўла эҳтимол формуласи</u> дейилади.

1.23-мисол. Деталлар партияси уч ишчи томонидан тайёрланади. Биринчи ишчи барча деталларнинг 25% ни, иккинчи ишчи 35% ни, учинчиси эса 40% ни тайёрлайди. Бу учала ишчи тайёрлаган деталларнинг сифатсиз бўлиш эҳтимоллари мос равишда 0,05, 0,04 ва 0,02 га тенг бўлса, текшириш учун партиядан олинган деталнинг сифатсиз бўлиши эҳтимолини топинг.

Ечиш. $A_i = \{$детал $i-$ишчи томонидан тайёрланган$\}$ $i=\overline{1,3}$, $B=\{$текшириш учун олинган детал сифатсиз$\}$ ҳодисаларни киритамиз ва қуйидаги эҳтимолларни ҳисоблаймиз:

$$P(A_1)=\frac{25\%}{100\%}=0,25,\ \ P(A_2)=\frac{35\%}{100\%}=0,35,\ \ P(A_3)=\frac{40\%}{100\%}=0,4,$$

$P(B/A_1)=0,05,\ P(B/A_2)=0,04,\ P(B/A_3)=0,02.$ Тўла эҳтимол формуласига асосан, $P(B)=0,25\cdot 0,05+0,35\cdot 0,04+0,4\cdot 0,02=0,0345.$

2.3. Байес формуласи

A_i ва B ҳодисалар кўпайтмаси учун

$$P(A_i\cdot B)=P(B)\cdot P(A_i/B),$$
$$P(A_i\cdot B)=P(A_i)\cdot P(B/A_i)$$

тенгликлар ўринли. Бу тенгликлардан қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$P(B)\cdot P(A_i/B)=P(A_i)\cdot P(B/A_i),$$
$$P(A_i/B)=\frac{P(A_i)P(B/A_i)}{P(B)}.$$

Охирги тенглик Байес формуласи дейилади. Байес формуласи яна гипотезалар теоремаси деб ҳам аталади. Агар $A_1, A_2, ..., A_n$ ҳодисаларни гипотезалар деб олсак, у ҳолда $P(A_i)$ эҳтимоллик A_i гипотезанинг априор (“a priori” лотинча тажрибагача), $P(A_i/B)$ шартли эҳтимоллик эса апостериор (“a posteriori” тажрибадан кейинги) эҳтимоллиги дейилади.

1.24-мисол. 1.23-мисолда сифатсиз детал иккинчи ишчи томонидан тайёрланган бўлиши эҳтимолини топинг.

Ечиш. Байес формуласига кўра:

$$P(A_2/B)=\frac{0,35\cdot 0,04}{0,25\cdot 0,05+0,35\cdot 0,04+0,4\cdot 0,02}=\frac{28}{69}\approx 0,4.$$

Назорат саволлари

1. *Шартли эҳтимол таърифини келтиринг.*
2. *Тўла эҳтимол формуласи қандай ҳолларда қўлланилади?*
3. *Байес формуласи қандай ҳолларда қўлланилади?*
4. *Қандай тажрибалар боғлиқсиз дейилади?*

3-МАВЗУ. СИНОВЛАРНИНГ ТАКРОРЛАНИШИ

Режа:

3.1. Бернулли формуласи
3.2. Пуассон формуласи
3.3. Муавр-Лапласнинг локал ва интеграл теоремалари

3.1. Бернулли схемаси.

Агар бир неча тажрибалар ўтказилаётганида ҳар бир тажрибада бирор A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли бошқа тажриба натижаларига боғлиқ бўлмаса, бундай тажрибалар боғлиқсиз тажрибалар дейилади.

n та боғлиқсиз тажрибалар ўтказилаётган бўлсин. Ҳар бир тажрибада A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли $P(A)=p$ ва рўй бермаслиги эҳтимоли $P(\overline{A})=1-p=q$ бўлсин.

Масалан, 1) нишонга қарата ўқ узиш тажрибасини кўрайлик. Бу ерда $A=\{$ўқ нишонга тегди$\}$ ва $\overline{A}=\{$ўқ нишонга тегмади$\}$; 2) n та маҳсулотни сифатсизликка текширилаётганда $A=\{$маҳсулот сифатли$\}$ ва $\overline{A}=\{$маҳсулот сифатсиз$\}$ бўлади.

Бу каби тажрибаларда элементар ҳодисалар фазоси Ω фақат икки элементдан иборат бўлади: $\Omega=\{\omega_0,\ \omega_1\}=\{\overline{A},\ A\}$, бу ерда ω_0-A ҳодиса рўй бермаслигини, ω_1-A ҳодиса рўй беришини билдиради. Бу ҳодисаларнинг эҳтимоллари мос равишда p ва q $(p+q=1)$ лар орқали белгиланади.

n та боғлиқсиз тажрибалар ўтказилаётган бўлсин. Ҳар бир тажрибада A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли $P(A)=p$ ва рўй бермаслиги эҳтимоли $P(\overline{A})=1-p=q$ бўлсин.

Таъриф. Агар n та боғлиқсиз тажрибанинг ҳар бирида A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p га ва рўй бермаслиги эҳтимоли q га тенг бўлса, у ҳолда A ҳодисанинг m марта рўй бериш эҳтимоли қуйидаги ифодага тенг бўлади:

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m},\ m=0,1,\dots n..$$

Бу формула *Бернулли формуласи* дейилади.

$P_n(m)$ эҳтимолликлар учун $\sum_{m=0}^{n} P_n(m)=1$ тенглик ўринлидир.

Хоссалари:

1. $\sum_{m=0}^{n} P_n(m)=1.$

2. Агар $m_1\le m\le m_2$ бўлса, $P_n(m_1\le m\le m_2)=\sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m).$

3. n та боғлиқсиз тажрибада A ҳодисанинг камида бир марта рўй бериш эҳтимоли $P=1-q^n$ бўлади, чунки

$$P_n(0)+\underbrace{P_n(1)+...+P_n(n)}_{P}=1\Rightarrow P=1-P_n(0)=1-q^n.$$

4. Агар $P_n(m)$ эҳтимолликнинг энг катта қиймати $P_n(m_0)$ бўлса, у ҳолда m_0 қуйидагича аниқланади: $np-q\le m_0\le(n+1)p,$ m_0-энг эҳтимолли сон дейилади ва

а) агар $np-q$ каср сон бўлса, у ҳолда m_0 ягонадир;

б) агар $np-q$ бутун сон бўлса, у ҳолда m_0 иккита бўлади.

2.1-мисол. Икки тенг кучли шахматчи шахмат ўйнашмоқда. Қайси ҳодисанинг эҳтимоли катта: 4 та партиядан 2 тасида ютишми ёки 6 та партиядан 3 тасида ютиш (дуранг натижалар ҳисобга олинмайди)?

Ечиш. Биринчи ҳолда: $n=4,$ $m=2,$ $p=\frac{1}{2}$ ва Бернулли формуласига кўра

$$P_4(2)=C_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)^{4-2}=6\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2^2}=\frac{6}{16}.$$

Иккинчи ҳолда $n=6,$ $m=3,$ $p=\frac{1}{2}$ ва Бернулли формуласига кўра $P_6(3)=C_6^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1-\frac{1}{2}\right)^{6-3}=20\cdot\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{2^3}=\frac{5}{16}.$ $\frac{6}{16}>\frac{5}{16}\Rightarrow P_4(2)>P_6(3).$ Демак, 4 та партиядан 2 тасида ютиш эҳтимоли катта экан.

3.2. Пуассон формуласи

Агар n ва m лар катта сонлар бўлса, у ҳолда Бернулли формуласидан фойдаланиб, $P_n(m)$ эҳтимолликни ҳисоблаш қийинчилик туғдиради. Худди шундай, $p(q)$ эҳтимоллик жуда кичик қийматлар қабул қилса ҳам қийинчиликларга дуч келамиз. Шу сабабли, $n\to\infty$ да $P_n(m)$ учун асимптотик (тақрибий) формулалар топиш муаммосини туғдиради.

Таъриф (Пуассон). Агар $n\to\infty$ да A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p ҳар бир тажрибада чексиз камайса (яъни, $np\to\lambda>0$), у ҳолда

$$\lim_{n\to\infty}P_n(m)=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda},\quad m=1,2,...$$

Бу формула Пуассоннинг асимптотик формуласи дейилади.

2.4-мисол. Телефон станцияси 2000 та абонентга хизмат кўрсатади. Агар ҳар бир абонент учун унинг бир соат ичида қўнғироқ қилиши эҳтимоли 0,003 бўлса, бир соатнинг ичида 5 та абонент қўнғироқ қилиши эҳтимолини топинг.

Ечиш. $n=2000,$ $p=0,003,$ $m=5,$ $\lambda=np=2000\cdot0,003=6<10.$

Демак, Пуассон формуласига кўра $P_{2000}(5)=\frac{6^5}{5!}e^{-6}\approx 0,13.$

3.3. Муавр-Лапласнинг локал ва интеграл теоремалари

Агар p $(p\neq 0,\ p\neq 1)$ эҳтимол нол атрофидаги сон бўлмаса ва n етарлича катта бўлса, у ҳолда $P_n(m)$ эҳтимолликни ҳисоблаш учун Муавр-Лаплас локал теоремасидан фойдаланиш мумкин.

Теорема (Муавр-Лаплас). Агар n та боғлиқсиз тажрибада A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли $0<p<1$ бўлса, у ҳолда етарлича катта n ларда

$$P_n(m)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}},\quad x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$$

тақрибий формула ўринли. Бу ерда $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ функция Гаусс функцияси дейилади.

$\varphi(x)$ функция учун x аргумент қийматларига мос қийматлари жадвали тузилган (1-илова). Жадвалдан фойдаланаётганда қуйидагиларни эътиборга олиш керак:

1) $\varphi(x)$ функция жуфт функция, яъни $\varphi(-x)=\varphi(x)$;

2) агар $x\geq 4$ бўлса, $\varphi(x)=0$ деб олиш мумкин.

2.2-мисол. Нишонга битта ўқ узилганда ўқнинг нишонга тегиш эҳтимоли 0,7 га тенг. 200 та ўқ узилганда нишонга 160 та ўқ тегиши эҳтимолини топинг.

Ечиш. Бу ерда $n=200,\ m=160,\ p=0,7,\ q=1-p=0,3.$

$\sqrt{npq}=\sqrt{200\cdot 0,7\cdot 0,3}=\sqrt{42}\approx 6,48,\quad x=\frac{160-200\cdot 0,7}{\sqrt{42}}=\frac{20}{6,48}\approx 3,09.$ Агар $\varphi(3,09)\approx 0,0034$ эканлигини ҳисобга олсак, у ҳолда

$P_{200}(160)\approx\frac{1}{6,48}\cdot 0,0034\approx 0,0005.$

Агар n етарлича катта ва A ҳодиса n та тажрибада камида m_1 ва кўпи билан m_2 марта рўй бериш эҳтимоли $P_n(m_1\leq m\leq m_2)$ ни топиш талаб этилса, у ҳолда Муавр-Лапласнинг интеграл теоремасидан фойдаланиш мумкин.

Теорема (Муавр-Лаплас). Агар A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли $(0<p<1)$ ўзгармас бўлса, у ҳолда

$$P_n(m_1\leq m\leq m_2)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

тақрибий формула ўринли, бу ерда $x_i=\frac{m_i-np}{\sqrt{npq}},\quad i=1,2$.

Бу формуладан фойдаланилганда ҳисоблашларни соддалаштириш учун махсус функция киритилади:

$$\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dt.$$

Бу функция Лаплас функцияси дейилади.

1. $\Phi_0(x)$ функция тоқ функция.

2. $\Phi_0(-x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt=[t=-z]=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz=-\Phi_0(x).$

3. Агар $x\geq 5$ бўлса, у ҳолда $\Phi_0(x)=0,5$ деб ҳисоблаш мумкин.

Теоремадаги тенгликнинг ўнг қисмини $\Phi_0(x)$ функция орқали ифодалаймиз:

$$P_n(m_1\leq m\leq m_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{0} e^{-\frac{x^2}{2}}dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\Phi_0(x_2)-\Phi_0(x_1).$$

$\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt-$ Лапласнинг функцияси билан бир қаторда Гаусс функцияси деб номланувчи функциядан ҳам фойдаланилади:

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Бу функция учун $\Phi(-x)+\Phi(x)=1$ тенглик ўринли ва у $\Phi_0(x)$ функция билан

$$\Phi(x)=0,5+\Phi_0(x)$$

формула орқали боғланган.

2.3-мисол. Цех ишлаб чиқарган маҳсулотининг ўртача 96% сифатли. Базада маҳсулотни қабул қилиб олувчи цехнинг 200 та маҳсулотини таваккалига олиб текширади. Агар текширилган маҳсулотлардан сифатсизлари сони 10 тадан кўп бўлса, бутун маҳсулотлар партияси сифатсиз деб цехга қайтарилади. Маҳсулотлар партиясининг қабул қилиниши эҳтимолини топинг.

Ечиш. Бу ерда $n=200,\ p=0,04$ (маҳсулотнинг сифатсиз бўлиш эҳтимоли), $q=0,96,\ m_1=0,\ m_2=10$ ва маҳсулотлар партиясининг қабул қилиниши эҳтимоли $P_{200}(0\leq m\leq 10)$ ни ҳисоблаймиз:

$x_1=\frac{0-200\cdot 0,04}{\sqrt{200\cdot 0,04\cdot 0,96}}\approx -2,89,\quad x_2=\frac{10-200\cdot 0,04}{\sqrt{200\cdot 0,04\cdot 0,96}}\approx 0,72,$

$P_{200}(0\leq m\leq 10)=\Phi_0(0,72)-\Phi_0(-2,89)=0,26424+0,49807=0,7623.$ Агар $\Phi(x)$ функциядан фойдалансак, $P_{200}(0\leq m\leq 10)=\Phi(0,72)-\Phi(-2,89)=$
$=0,7642-(1-\Phi(2,89))=0,7642-(1-0,998074)=0,7623.$

Назорат саволлари

5. *Бернулли теоремаси қандай ҳолларда қўлланилади?*
6. *Энг катта эҳтимолли сон қандай топилади?*
7. *Пуассон формуласи қандай ҳолларда қўлланилади?*
8. *Муавр-Лапласнинг локал теоремаси қандай ҳолларда қўлланилади?*
9. *Муавр-Лапласнинг интеграл теоремаси қандай ҳолларда қўлланилади?*

4-МАВЗУ. ТАСОДИФИЙ МИҚДОРЛАР.

1-машғулот

4.1. Тасодифий миқдорлар ва уларнинг турлари
4.2. Дискрет тасодифий миқдорларнинг тақсимот қонунлари
4.3. Дискрет тасодифий миқдорларнинг сонли характеристикалари

Таянч иборалар: *тасодифий миқдор, дискрет тасодифий миқдор, узлуксиз тасодифий миқдор тақсимот қонуни, тасодифий миқдорларнинг боғлиқсизлиги, математик кутилиш, дисперсия, ўртача квадратик четланиш*

4. 1. *Тасодифий миқдорлар ва уларнинг турлари*

Эҳтимоллар назариясининг муҳим тушунчаларидан бири тасодифий миқдор тушунчасидир.

Таъриф. Тажриба натижасида у ёки бу қийматни қабул қилиши олдиндан маълум бўлмаган миқдор тасодифий миқдор дейилади.

Тасодифий миқдорлар лотин алифбосининг бош ҳарфлари $X, Y, Z, \ldots$ (ёки грек алифбосининг кичик ҳарфлари ξ (кси), η (эта), ζ (дзета),…) билан, қабул қиладиган қийматлари эса кичик ҳарфлар $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots, z_1, z_2, \ldots$ билан белгиланади.

Амалиётда асосан 2 хилдаги тасодифий миқдорлар билан иш кўрилади:Дикрет ва узлуксиз.

Тасодифий миқдорларга мисоллар келтирамиз: 1) $X-$таваккалига олинган маҳсулотлар ичида сифатсизлари сони; 2) $Y-n$ та ўқ узилганда нишонга текканлари сони; 3) $Z-$асбобнинг бетўхтов ишлаш вақти; 4) $U-$ $[0, 1]$ кесмадан таваккалига танланган нуқтанинг координаталари; 5) $V-$бир кунда туғиладиган чақалоқлар сони ва ҳ.к.

Таъриф. Агар тасодифий миқдор чекли ёки саноқли сондаги қийматлар қабул қилса, бундай тасодифий миқдор дискрет тасодифий миқдор дейилади.

Таъриф. Чекли ёки чексиз оралиқдаги барча қийматларни қабул қилиши мумкин бўлган миқдорга узлуксиз тасодифий миқдор дейилади.

Энди тасодифий миқдорни қатъий таърифини келтирамиз .

Таъриф. Ω элементар ҳодисалар фазосида аниқланган X сонли функция тасодифий миқдор дейилади, агар ҳар бир ω элементар ҳодисага $X(\omega)$ сонни мос қўйса, яъни $X = X(\omega),\ \omega \in \Omega.$.

Масалан, тажриба тангани 2 марта ташлашдан иборат бўлсин. Элементар ҳодисалар фазоси $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\},\ \omega_1 = GG,\ \omega_2 = GR,\ \omega_3 = RG,\ \omega_4 = RR$ бўлади. $X-$герб чиқишлари сони бўлсин, у ҳолда X тасодифий миқдор қабул қиладиган қийматлари: $X(\omega_1) = 2,\ X(\omega_2) = 1,\ X(\omega_3) = 1,\ X(\omega_4) = 0.$

4.2. Дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунлари

X – дискрет тасодифий миқдор бўлсин. X тасодифий миқдор $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ қийматларни мос $p_1, p_2, ..., p_n, ...$ эҳтимоллар билан қабул қилсин:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

Юқоридаги жадвал дискрет тасодифий миқдор тақсимот қонуни жадвали дейилади. Дискрет тасодифий миқдор тақсимот қонунини $p_i = P\{X = x_i\}$, $i = 1, 2, ..., n, ...$ кўринишда ҳам ёзиш мумкин.

$\{X = x_1\}, \{X = x_2\}, ...$ ҳодисалар биргаликда бўлмаганлиги учун улар тўла гуруҳни ташкил этади ва уларнинг эҳтимоллари йиғиндиси бирга тенг бўлади, яъни

$$\sum_i p_i = \sum_i P\{X = x_i\} = 1.$$

Таъриф. X тасодифий миқдор <u>дискрет тасодифий миқдор</u> дейилади, агар $x_1, x_2, ...$ чекли ёки саноқли тўплам бўлиб, $P\{X = x_i\} = p_i > 0$ $(i = 1, 2, ...)$ ва $p_1 + p_2 + ... = 1$ тенглик ўринли бўлса.

Таъриф. X ва Y дискрет тасодифий миқдорлар <u>боғлиқсиз</u> дейилади, агар $A_i = \{X = x_i\}$ ва $B_i = \{Y = y_j\}$ ҳодисалар $\forall i = 1, 2, ..., n$ ва $\forall j = 1, 2, ..., m$ да боғлиқсиз бўлса, яъни $P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\}$, $n, m \le \infty$.

3.1-мисол. 10 та лотерея билетида 2 таси ютуқли бўлса, таваккалига олинган 3 та лотерея билетлари ичида ютуқлилари сони X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини топинг.

Ечиш. X тасодифий миқдорни қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Бу қийматларнинг мос эҳтимоллари эса

$$p_1 = P\{X = 0\} = \frac{C_2^0 \cdot C_8^3}{C_{10}^3} = \frac{56}{120} = \frac{7}{15};$$

$$p_2 = P\{X = 1\} = \frac{C_2^1 \cdot C_8^2}{C_{10}^3} = \frac{56}{120} = \frac{7}{15};$$

$$p_3 = P\{X = 2\} = \frac{C_2^2 \cdot C_8^1}{C_{10}^3} = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}.$$

X тасодифий миқдор тақсимот қонунини жадвал кўринишида ёзамиз:

X	0	1	2
P	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$

$$\sum_{i=1}^{3} p_i = \frac{7}{15} + \frac{7}{15} + \frac{1}{15} = 1.$$

а) Биномиал тақсимот қонуни.

Таъриф. X дискрет тасодифий миқдор биномиал қонун бўйича тақсимланган дейилади, агар у $0,1,2,...,n$ қийматларни

$$p_m = P\{X = m\} = C_n^m p^m q^{n-m}$$

эҳтимол билан қабул қилса, бу ерда $0 < p < 1, \quad q = 1 - p, \quad m = 0,1,...,n.$

Биномиал қонун бўйича тақсимланган X дискрет тасодифий миқдор тақсимот қонуни қуйидаги кўринишга эга:

$X = m$	0	1	2	$\ldots$	m	$\ldots$	n
$p_m = P\{X = m\}$	q^n	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	$\ldots$	$C_n^m p^m q^{n-m}$	$\ldots$	p^n

Ньютон биномига асосан $\sum_{m=0}^{n} p_m = (p+q)^n = 1.$ Бундай тақсимотни $Bi(n, p)$ орқали белгилаймиз.

Унинг тақсимот функцияси қуйидагича бўлади:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & agar\ x \le 0; \\ \sum_{m<x} C_n^m p^m q^{n-m}, & agar\ 0 < x \le n; \\ 1, & agar\ x > n. \end{cases}$$

б) геометрик тақсимот қонуни.

Таъриф. Агар X тасодифий миқдор $1,2,...,m,...$ қийматларни

$$p_m = P\{X = m\} = q^{m-1} p$$

эҳтимол билан қабул қилса, у геометрик қонун бўйича тақсимланган тасодифий миқдор дейилади, бу ерда $p = 1 - q \in (0,1).$

Геометрик қонун бўйича тақсимланган тасодифий миқдорларга мисол сифатида қуйидагиларни олиш мумкин: сифатсиз маҳсулот чиққунга қадар текширилган маҳсулотлар сони; герб томони тушгунга қадар ташланган тангалар сони; нишонга теккунга қадар отилган ўқлар сони ва ҳ.к.

Геометрик қонун бўйича тақсимланган X дискрет тасодифий миқдор тақсимот қонуни қуйидаги кўринишга эга:

$X = m$	0	1	2	$\ldots$	m
$p_m = P\{X = m\}$	p	qp	$\ldots$	$q^m p$	$\ldots$

$$\sum_{m=1}^{\infty} q^{m-1} p = p \sum_{m=1}^{\infty} q^{m-1} = p \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1,$$

чунки p_m эҳтимоллар геометрик прогрессияни ташкил этади: $p, qp, q^2 p, q^3 p, \ldots$ Шунинг учун юқоридаги тақсимот геометрик тақсимот дейилади ва $Ge(p)$ орқали белгиланади.

Унинг тақсимот функцияси қуйидагича бўлади:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & agar\ \ m < 1; \\ \sum_{m<x} q^{m-1} p, & agar\ \ 1 \le m \le x \end{cases}$$

в) Пуассон тақсимот қонуни

Таъриф. Агар X тасодифий миқдор $0,1,2,...,m,...$ қийматларни

$$p_m = P\{X = m\} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

эҳтимол билан қабул қилса, у Пуассон қонуни бўйича тақсимланган тасодифий миқдор дейилади, бу ерда λ бирор мусбат сон.

Пуассон қонуни бўйича тақсимланган X дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни қуйидаги кўринишга эга:

$X = m$	0	1	2	…	m	…
$p_m = P\{X = m\}$	e^{-a}	$\frac{\lambda}{1!} e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$	…	$\frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$	…

Тейлор ёйилмасига асосан, $\sum_{m=0}^{\infty} p_m = e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$ Бу тақсимотни $\Pi(\lambda)$ орқали белгилаймиз. Унинг тақсимот функцияси қуйидагича бўлади:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & agar\ m \le 0; \\ \sum_{m<x} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, & agar\ 0 < m \le x \end{cases}$$

4.3. Дискрет тасодифий миқдорларнинг сонли характеристикалари.

А) Дискрет тасодифий миқдорнинг математик кутилиши ва хоссалари.

X дискрет тасодифий миқдор тақсимот қонуни берилган бўлсин:

$$\{p_i = P\{X = x_i\},\ i = 1, 2, ..., n, ...\}$$

Таъриф. X тасодифий миқдорнинг математик кутилиши деб, $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ қатор йиғиндисига айтилади ва MX орқали белгиланади.

Демак, $MX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i.$

Математик кутилишнинг маъноси шуки, у тасодифий миқдор ўрта қийматини ифодалайди. Ҳақиқатан ҳам $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ эканлигини ҳисобга олсак, у ҳолда

$$MX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i}{\sum_{i=1}^{\infty} p_i} = x_{ўртача}.$$

Математик кутилишнинг хоссалари:

1. Ўзгармас соннинг математик кутилиши шу соннинг ўзига тенг, яъни

$$MC = C.$$

2. Ўзгармас кўпайтувчини математик кутилиш белгисидан ташқарига чиқариш мумкин, яъни $M(CX) = CMX$.

3. Йиғиндининг математик кутилиши математик кутилишлар йиғиндисига тенг, яъни

$$M(X+Y)=MX+MY.$$

4. Агар $X\perp Y$ бўлса, у ҳолда $M(X\cdot Y)=MX\cdot MY$.

3.2-мисол. X дискрет тасодифий миқдор тақсимот қонуни берилган бўлса, X тасодифий миқдорнинг математик кутилишини топинг.

X	500	50	10	1	0
P	0,01	0,05	0,1	0,15	0,69

Ечиш. $MX=500\cdot 0{,}01+50\cdot 0{,}05+10\cdot 0{,}1+1\cdot 0{,}15+0\cdot 0{,}69=8{,}65$.

Б) Дискрет тасодифий миқдорнинг дисперсияси ва хоссалари.

Таъриф. X тасодифий миқдорнинг дисперсияси деб, $M(X-MX)^2$ ифодага айтилади.

Дисперсия DX белгиланади. Демак, $DX=M(X-MX)^2$.

Агар X дискрет тасодифий миқдор бўлса,

$$DX=\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-MX)^2\cdot p_i.$$

Тасодифий миқдорнинг дисперсиясини ҳисоблаш учун қуйидаги формула қулайдир:

$$DX=M(X^2)-(MX)^2.$$

Дисперсиянинг хоссалари:

1. Ўзгармас соннинг дисперсияси нолга тенг, яъни $DC=0$.

2. Ўзгармас кўпайтувчини квадратга кўтариб, дисперсия белгисидан ташқарига чиқариш мумкин, яъни $D(CX)=C^2DX$.

3. Агар $X\perp Y$ бўлса, $D(X+Y)=DX+DY$.

3.3-мисол. X дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни берилган:

X	-1	0	1	2
P	0,2	0,1	0,3	0,4

MX ва DX ларни ҳисобланг.

Ечиш. $MX=-1\cdot 0{,}2+0\cdot 0{,}1+1\cdot 0{,}3+2\cdot 0{,}4=0{,}9$;

$DX=(-1)^2\cdot 0{,}2+1^2\cdot 0{,}3+2^2\cdot 0{,}4-(0{,}9)^2=1{,}29.$

В) Ўртача квадратик четланиш.

Таъриф. X тасодифий миқдорнинг <u>ўртача квадратик тарқоқлиги</u> (<u>стандарт четлашиши</u>) деб дисперсиядан олинган квадрат илдизга айтилади:

$$\sigma_X=\sqrt{DX}$$

Дисперсиянинг хоссаларидан ўртача квадратик тарқоқликнинг хоссалари келиб чиқади:

1. $\sigma_C=0$.

2. $\sigma_{CX}=|C|\sigma_X$.

Биномиал тақсимотнинг сонли характеристикалари:

$$MX = np, \quad DX = npq.$$

Геометрик тақсимотнинг сонли характеристикалари:

$$MX = \frac{1}{p}, \quad DX = \frac{q}{p^2}.$$

Пуассон тақсимотининг сонли характеристикалари:

$$MX = \lambda, \quad DX = \lambda.$$

Назорат саволлари

1. *Тасодифий миқдор деганда нимани тушунасиз?*
2. *Тақсимот қонуни деганда нимани тушунасиз?*
3. *Боғлиқсиз тасодифий миқдорларга таъриф беринг.*
4. *Биномиал тақсимот қонунини ёзинг.*
5. *Геометрик тақсимот қонунини ёзинг.*
6. *Пуассон тақсимот қонунини ёзинг.*
7. Дискрет тасодифий миқдорнинг математик кутилиши деганда нимани тушунасиз?
8. Дискрет тасодифий миқдор математик кутилишининг хоссаларини айтинг.
9. Дискрет тасодифий миқдорнинг дисперсияси деганда нимани тушунасиз?
10. Дискрет тасодифий миқдор дисперсиясининг хоссаларини айтинг.
11. *Ўртача квадратик четланишга таъриф беринг*

5-МАВЗУ. ТАСОДИФИЙ МИҚДОРЛАР ЭҲТИМОЛЛАРИНИНГ ТАҚСИМОТ ФУНКЦИЯЛАРИ

Режа:

5.1. Тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси
5.2. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг зичлик (дифференциал) функцияси
5.3. Узлуксиз тасодифий миқдорларнинг сонли характеристикалари
5.4. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг тақсимот функциялари

Таянч иборалар: *узлуксиз тасодифий миқдор, тақсимот функция, зичлик функция, текис тақсимот, кўрсаткичли тақсимот, нормал тақсимот*

5.1. Тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси.

Таъриф. Агар тасодифий миқдорнинг қабул қиладиган қийматлари бирор ораликдан иборат бўлса, у ҳолда бундай тасодифий миқдор узлуксиз типдаги тасодифий миқдор дейилади.

Демак, дискрет тасодифий миқдор бир-биридан фарқли алоҳида қийматларни, узлуксиз тасодифий миқдор эса бирор ораликдаги ихтиёрий қийматларни қабул қилар экан.

Узлуксиз тасодифий миқдор учун дискрет тасодифий миқдор каби тақсимот қаторини қуриб бўлмайди, чунки узлуксиз тасодифий миқдор чекли ёки чексиз ораликнинг ҳар бир қийматини қабул қилиши мумкин ва бундай қийматлар сони саноқсиз. Шу сабаб, узлуксиз тасодифий миқдорларни тасвирлашда ва ўрганишда тақсимот ҳамда зичлик функцияларидан фойдаланилади.

Дискрет ва узлуксиз тасодифий миқдорлар тақсимотларини беришнинг универсал усули уларнинг тақсимот функцияларини беришдир. Тақсимот функция $F(x)$ орқали белгиланади.

Таъриф. X тасодифий миқдорнинг $F(x)$ тақсимот функцияси $\forall x \in R$ сон учун қуйидагича аниқланади:

$$F(x) = P\{X < x\} = P\{\omega : X(\omega) < x\}..$$

Тақсимот функция қуйидаги хоссаларга эга:

1. $F(x)$ функция чегараланган: $0 \le F(x) \le 1$.

2. $F(x)$ камаймайдиган функция, яъни агар $x_1 < x_2$ бўлса, у ҳолда $F(x_1) \le F(x_2)$.

3. $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1.$

4. $F(x)$ функция чапдан узлуксиз, яъни $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$.

Дискрет тасодифий миқдор тақсимот функцияси қуйидагича ифодаланади:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i .$$

3.4-мисол. 3.1-мисолдаги X тасодифий миқдорнинг тақсимот функциясини топамиз:

X	0	1	2
P	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$

Ечиш. Агар $x \le 0$ бўлса, $F(x) = P\{X < 0\} = 0$,

агар $0 < x \le 1$ бўлса, $F(x) = P\{X < 1\} = P\{X = 0\} = \frac{7}{15}$,

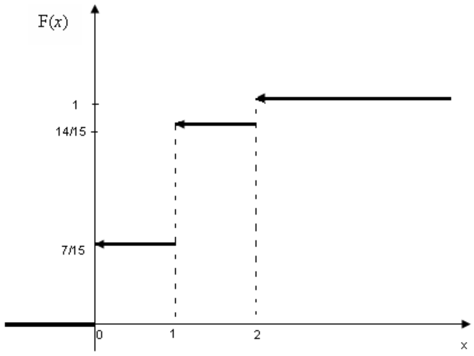
агар $1 < x \le 2$ бўлса, $F(x) = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = \frac{7}{15} + \frac{7}{15} = \frac{14}{15}$,

агар $x > 2$ бўлса, $F(x) = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} = \frac{7}{15} + \frac{7}{15} + \frac{1}{15} = 1.$

Демак,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \le 0, \\ 7/15, & \text{агар } 0 < x \le 1, \\ 14/15, & \text{агар } 1 < x \le 2, \\ 1, & \text{агар } x > 2. \end{cases}$$

$F(x)$ тақсимот функция графиги қуйидаги расмда келтирилган:



Таъриф. Агар X тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси ихтиёрий нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда $X -$ узлуксиз тасодифий миқдор дейилади.

Агар $F(x)$ тақсимот функция узлуксиз тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси бўлса, тақсимот функциянинг 1-4 хоссаларидан қуйидаги натижаларни келтириш мумкин:

Натижа. X тасодифий миқдорнинг $[a;b)$ оралиқда ётувчи қийматни қабул қилиш эҳтимоли тақсимот функциянинг шу оралиқдаги орттирмасига тенг:

$$P\{a \le X < b\} = F(b) - F(a)$$

Натижа. X узлуксиз тасодифий миқдорнинг тайин битта қийматни қабул қилиш эҳтимоли нолга тенг:

$$P\{X = x_i\} = 0.$$

5.2. *Узлуксиз тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси.*

Узлуксиз тасодифий миқдорни асосий характеристикаси зичлик функция ҳисобланади.

Таъриф. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг <u>зичлик функцияси</u> деб, шу тасодифий миқдор тақсимот функциясидан олинган биринчи тартибли ҳосилага айтилади.

Узлуксиз тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси $f(x)$ орқали белгиланади. Демак,

$$f(x) = F'(x).$$

Зичлик функция қуйидаги хоссаларга эга:

1. $f(x)$ функция манфий эмас, яъни

$$f(x) \geq 0.$$

2. X узлуксиз тасодифий миқдорнинг $[a;b]$ оралиққа тегишли қийматни қабул қилиши эҳтимоли зичлик функциянинг a дан b гача олинган аниқ интегралига тенг, яъни

$$P\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f(x)dx.$$

3. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси зичлик функция орқали қуйидагича ифодаланади:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

4. Зичлик функциядан $-\infty$ дан $+\infty$ гача олинган хосмас интеграл бирга тенг:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

3.5-мисол. X тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси $f(x) = \dfrac{a}{1+x^2}$ тенглик билан берилган. Ўзгармас a параметрни топинг.

Ечиш. Зичлик функциянинг 4-хоссасига кўра $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{a}{1+x^2}dx = 1$, яъни

$$a \cdot \lim_{\substack{d \to +\infty \\ c \to -\infty}} \int_c^d \frac{1}{1+x^2}dx = a \cdot \lim_{\substack{d \to +\infty \\ c \to -\infty}} arctgx \Big|_c^d = a \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = a \cdot \pi = 1.$$ Демак, $a = \dfrac{1}{\pi}$.

5.3. Узлуксиз тасодифий миқдорларнинг сонли характеристикалари

А) Узлуксиз тасодифий миқдорнинг математик кутилиши ва хоссалари.

Таъриф. X узлуксиз тасодифий миқдорнинг математик кутилиши деб

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx$$

тенглик билан аниқланувчи MX сонга айтилади.

Математик кутилишнинг хоссаларини қараб чиқамиз:

1. Ўзгармас миқдорнинг математик кутилиши шу миқдорнинг ўзига тенг:

$$MC = C.$$

2. Ўзгармас кўпайтувчини математик кутилиш белгисидан ташқарига чиқариш мумкин:

$$M(CX) = CMX.$$

3. Тасодифий миқдорлар йиғиндисининг математик кутилиши шу миқдорлар математик кутилишларининг йиғиндисига тенг:

$$M(X+Y) = MX + MY.$$

4. Боғлиқсиз тасодифий миқдорлар кўпайтмасининг математик кутилиши шу миқдорлар математик кутилишларининг кўпайтмасига тенг:

$$M(X \cdot Y) = MX \cdot MY.$$

Б) Узлуксиз тасодифий миқдорнинг дисперсияси ва хоссалари.

Таъриф. X тасодифий миқдорнинг дисперсияси деб, шу тасодифий миқдор ва унинг математик кутилиши орасидаги айирма квадратининг математик кутилишига айтилади:

$$DX = M(X - MX)^2 \ = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx - (\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx)^2.$$

Кўпинча DX белгилаш ўрнига σ^2 белгилаш ишлатилади.

Дисперсиянинг хоссалари:

1. Ўзгармас соннинг дисперсияси нолга тенг:

$$DC = 0.$$

2. Ўзгармас кўпайтувчини дисперсия белгисидан ташқарига квадратга ошириб чиқариш мумкин:

$$D(CX) = C^2 DX.$$

3. Боғлиқсиз тасодифий миқдорлар йиғиндисининг дисперсияси тасодифий миқдорлар дисперсияларининг йиғиндисига тенг:

$$D\left(X+Y\right) = DX + DY.$$

4. Боғлиқсиз тасодифий миқдорлар айирмасининг дисперсияси шу тасодифий миқдорлар дисперсияларининг йиғиндисига тенг:

$$D\left(X-Y\right) = DX + DY.$$

В) Ўртача квадратик четланиш.

Таъриф. X тасодифий миқдорнинг ўртача квадратик тарқоқлиги (стандарт четлашиши) деб дисперсиядан олинган квадрат илдизга айтилади:

$$\sigma_X = \sqrt{DX}$$

Дисперсиянинг хоссаларидан ўртача квадратик тарқоқликнинг хоссалари келиб чиқади:

1. $\sigma_C = 0.$
2. $\sigma_{CX} = |C|\sigma_X.$

Дисперсия ва ўртача квадратик четланишлар тасодифий миқдор қийматларининг математик кутилмасидан ўртача четланиш даражасини характерлайди: дисперсия ёки ўртача квадратик четланиш қанча катта бўлса, тасодифий миқдорнинг қийматларини сочилиш даражаси шунча катта бўлади.

Агар $Y = \varphi(X)$ бўлса, у ҳолда Y тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси $MY = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)p(x)dx$ формула ёрдамида ҳисобланади.

Текис тақсимотнинг сонли характеристикалари:

$$MX = \frac{a+b}{2}, \quad DX = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Кўрсаткичли тақсимотнинг сонли характеристикалари:

$$MX = \frac{1}{\lambda}, \quad DX = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Нормал тақсимотнинг сонли характеристикалари:

$$MX = a, \quad DX = \sigma^2.$$

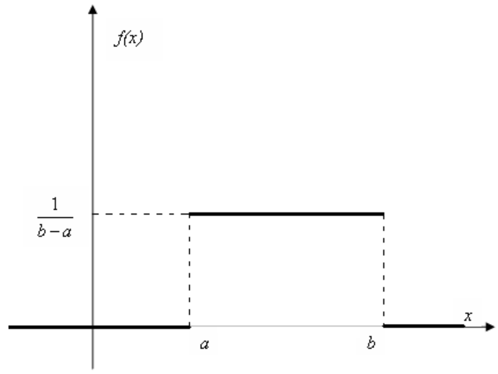
5.4. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг тақсимот функциялари.

Таъриф. Агар X узлуксиз тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & агар \quad x \in [a,b], \\ 0, & агар \quad x \notin [a,b] \end{cases}$$

кўринишда берилган бўлса, у $[a;b]$ оралиқда текис тақсимланган тасодифий миқдор дейилади.

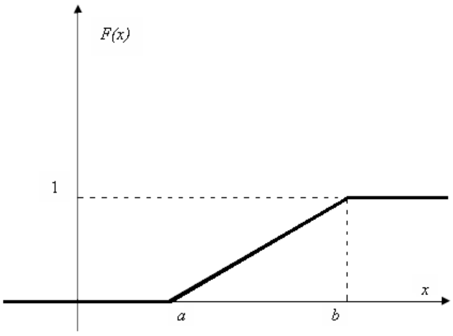
Бу тасодифий миқдор зичлик функциясининг графиги қуйидаги расмда берилган:



$[a;b]$ оралиқда текис тақсимланган X тасодифий миқдор $X \sim R[a,b]$ кўринишда белгиланади. $X \sim R[a,b]$ учун тақсимот функция қуйидагича бўлади:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & агар \quad x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & агар \quad a \le x \le b, \\ 1, & агар \quad x > b. \end{cases}$$

$F(x)$ тақсимот функциянинг графиги қуйидаги расмда келтирилган.

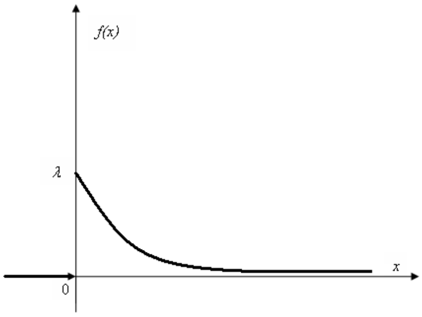


Таъриф. Агар X узлуксиз тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & агар \quad x\geq 0,\\ 0, & агар \quad x<0\end{cases}$$

кўринишда берилган бўлса, X тасодифий миқдор <u>кўрсаткичли қонун бўйича тақсимланган</u> тасодифий миқдор дейилади, бу ерда λ бирор мусбат сон.

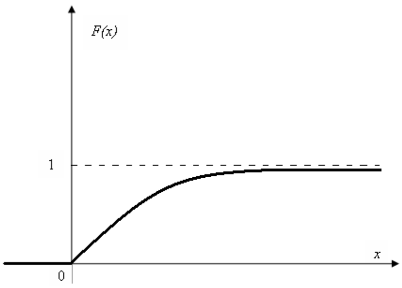
λ параметрли кўрсаткичли тақсимот $E(\lambda)$ орқали белгиланади. Унинг графиги қуйидаги расмда келтирилган.



$E(\lambda)$ учун тақсимот функция қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$F(x)=\begin{cases}0, & агар \quad x<0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & агар \quad x\geq 0.\end{cases}$$

Унинг графиги қуйидаги расмда келтирилган.



Нормал тақсимот эҳтимоллар назариясида ўзига хос ўрин тутади. Нормал тақсимотнинг хусусияти шундан иборатки, у лимит тақсимот ҳисобланади. Яъни бошқа тақсимотлар маълум шартлар остида бу тақсимотга интилади. Нормал тақсимот амалиётда энг кўп қўлланиладиган тақсимотдир.

Таъриф. X узлуксиз тасодифий миқдор <u>нормал қонун бўйича тақсимланган</u> дейилади, агар унинг зичлик функцияси қуйидаги кўринишга эга бўлса

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x\in R.$$

a ва $\sigma > 0$ параметрлар бўйича нормал тақсимот $N(a,\sigma)$ орқали белгиланади. $X \sim N(a,\sigma)$ нормал тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси

$$F(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Агар нормал тақсимот параметрлари $a = 0$ ва $\sigma = 1$ бўлса, у стандарт нормал тақсимот дейилади. Стандарт нормал тақсимотнинг зичлик функцияси қуйидаги кўринишга эга:

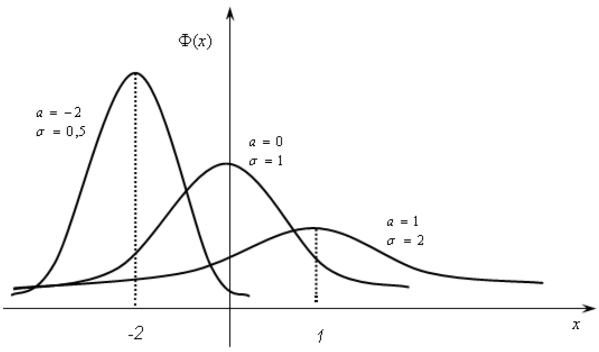
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Тақсимот функцияси

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

кўринишга эга ва у Лаплас функцияси дейилади.

Қуйидаги расмда a ва σ ларнинг турли қийматларида нормал тақсимот графигининг ўзгариши тасвирланган:



$X \sim N(a,\sigma)$ тасодифий миқдорнинг (α,β) интервалга тушиш эҳтимолини ҳисоблаймиз. Аввалги мавзулардан маълумки,

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left[\frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma} = \text{t} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{\alpha-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Лаплас функциясидан фойдаланиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \Phi_0\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Нормал тақсимот функциясини Лаплас функцияси орқали қуйидагича ифодаласа бўлади:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt = P\{-\infty < X < x\} = \Phi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{-\infty-a}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) + \Phi_0(+\infty) = \Phi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) + \frac{1}{2}.$$

Агар Лаплас функцияси $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ бўлса, у ҳолда $F(x)=\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$ ва охирги формулани қуйидагича ёзса бўлади:

$$P\{\alpha < X < \beta\}=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Амалиётда кўп ҳолларда нормал тасодифий миқдорнинг a га нисбатан симметрик бўлган интервалга тушиш эҳтимолини ҳисоблашга тўғри келади.

Узунлиги $2l$ бўлган $(a-l,a+l)$ интервални олайлик, у ҳолда

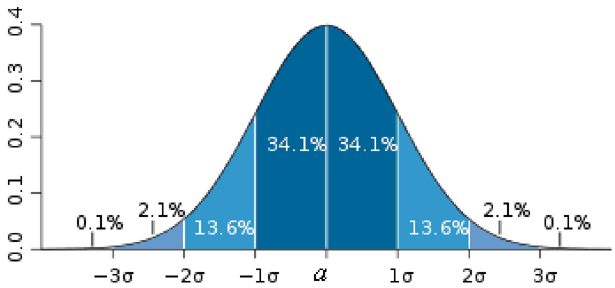
$$P\{a-l\le X\le a+l\}=P\{|X-a|\le l\}=$$

$$\Phi_0\left(\frac{a+l-a}{\sigma}\right)-\Phi_0\left(\frac{a-l-a}{\sigma}\right)=2\Phi_0\left(\frac{l}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{l}{\sigma}\right)-1.$$

Демак,

$$P\{|X-a|\le l\}=2\Phi_0\left(\frac{l}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{l}{\sigma}\right)-1.$$

$l=3\sigma$ деб олсак, $P\{|X-a|\le 3\sigma\}=2\Phi_0(3)$ бўлади. $\Phi_0(x)$ функциянинг қийматлари жадвалидан $\Phi_0(3)=0,49865$ ни топамиз. У ҳолда $P\{|X-a|\le 3\sigma\}\approx 0,9973$ бўлади. Бундан қуйидаги муҳим натижага эга бўламиз: Агар $X \sim N(a,\sigma)$ бўлса, у ҳолда унинг математик кутилмасидан четланишининг абсолют қиймати ўртача квадратик тарқоқлигининг учланганидан катта бўлмайди. Бу қоида "уч сигма қоидаси" дейилади.



3**.6-мисол.** Деталларни ўлчаш жараёнида $\sigma=10$ мм параметрли нормал тақсимотга бўйсунувчи тасодифий хатоликларга йўл қўйилди. Боғлиқсиз 3 марта детални ўлчаганда ҳеч бўлмаса битта ўлчаш хатолигининг абсолют қиймати 2 мм дан катта бўлмаслиги эҳтимолини баҳоланг.

Ечиш.

$$P\{|X-a|\le 2\}=2\Phi_0\left(\frac{2}{10}\right)\approx 2\cdot 0,07926=0,15852.$$

Битта тажрибада (ўлчашда) хатоликнинг 2мм дан ошиши эҳтимоли $P\{|X-a|>2\}=1-P\{|X-a|<2\}\approx 0,84148.$ Тажрибаларимиз боғлиқсиз бўлганлиги учун учала тажрибада хатоликнинг 2мм дан ошиши эҳтимоли $0,84148^3\approx 0,5958$ бўлади. Қидирилаётган эҳтимол 1-0,5958=0,4042.

Назорат саволлари

1. Узлуксиз тасодифий миқдор тушунчасига таъриф беринг.
2. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси деганда нимани тушунасиз?
3. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси хоссаларини айтинг.
4. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси деганда нимани тушунасиз?
5. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси хоссаларини айтинг.
6. Текис тақсимланган зичлик функция формуласини келтиринг.
7. Кўрсаткичли зичлик функция формуласини ёзинг.
8. Нормал зичлик функция формуласини ёзинг.
9. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг математик кутилиши деганда нимани тушунасиз?
10. Узлуксиз тасодифий миқдор математик кутилишининг хоссаларини айтинг.
11. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг дисперсияси деганда нимани тушунасиз?
12. Узлуксиз тасодифий миқдор дисперсиясининг хоссаларини айтинг.
13. Ўртача квадратик четланиш нима?

6-МАВЗУ. КАТТА СОНЛАР ҚОНУНИ. МАРКАЗИЙ ЛИМИТ ТЕОРЕМА

Режа:

6.1. Катта сонлар қонуни.
6.2. Чебишев тенгсизлиги ва теоремаси.
6.3. Марказий лимит теоремаси.

Таянч иборалар: *тасодифий миқдорлар йиғиндиси, катта сонлар қонуни, эҳтимоллик бўйича яқинлашиш, Чебишев тенгсизлиги, Чебишев теоремаси, Бернулли теоремаси, марказий лимит теоремаси*

6.1. Катта сонлар қонуни.

Эҳтимоллар назарияси ва унинг тадбиқларида кўпинча етарлича катта сондаги тасодифий миқдорлар йиғиндиси билан иш кўришга тўғри келади. Йиғиндидаги ҳар бир тасодифий миқдорнинг тажриба натижасида қандай қийматни қабул қилишини олдиндан айтиб бўлмайди. Шунинг учун катта сондаги тасодифий миқдорлар йиғиндисининг тақсимот қонунини ҳисоблаш бирмунча қийинчилик туғдиради. Лекин маълум шартлар остида етарлича катта сондаги тасодифий миқдорлар йиғиндиси тасодифийлик характерини йўқотиб борар экан. Амалиётда жуда кўп тасодифий сабабларнинг биргаликдаги таъсири тасодифга деярли боғлиқ бўлмайдиган натижага олиб келадиган шартларни билиш жуда муҳимдир. Бу шартлар “Катта сонлар қонуни” деб аталувчи теоремаларда келтирилади. Булар қаторига Чебишев ва Бернулли теоремалари киради.

Таъриф. $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ тасодифий миқдорлар ўзгармас сон A га эҳтимоллик бўйича яқинлашади дейилади, агар $\forall\varepsilon > 0$ учун

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{|X_n - A| < \varepsilon\right\} = 1$$

муносабат ўринли бўлса. Эҳтимоллик бўйича яқинлашиш $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} A$ каби белгиланади.

Таъриф. $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги мос равишда $MX_1, MX_2, ..., MX_n, ...$ математик кутилмаларга эга бўлиб, $\forall\varepsilon > 0$ сон учун $n \to \infty$ да

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

муносабат бажарилса, $X_1, X_2, ..., X_n$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги катта сонлар қонунига бўйсунади дейилади.

6.2. Чебишев тенгсизлиги ва теоремаси.

Теорема (Чебишев). Агар X тасодифий миқдор DX дисперсияга эга бўлса, у ҳолда $\forall\varepsilon > 0$ учун қуйидаги тенгсизлик ўринли:

$$P\left\{|X - MX| \ge \varepsilon\right\} \le \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

Бу тенгсизлик Чебишев тенгсизлиги дейилади.

Чебишев тенгсизлигини қуйидаги кўринишда ҳам ёзиш мумкин:

$$P\left\{|X-MX|<\varepsilon\right\}\geq 1-\frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

Чебишев тенгсизлиги ихтиёрий тасодифий миқдорлар учун ўринли. Хусусан, X тасодифий миқдор биномиал қонун бўйича тақсимланган бўлсин, яъни $P\{X=m\}=C_n^m p^m q^{n-m},\ \ m=0,1,...,n,\ \ q=1-p\in(0,1),$ у ҳолда $MX=a=np,$ $DX=npq$ ва Чебишев тенгсизлигидан

$$P\left\{|m-np|<\varepsilon\right\}\geq 1-\frac{npq}{\varepsilon^2};$$

n та боғлиқсиз тажрибаларда эҳтимоли $p=M\left(\frac{m}{n}\right)=a$, дисперсияси $D\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{qp}{n}$ бўлган ҳодисанинг $\frac{m}{n}$ частотаси учун,

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}\geq 1-\frac{qp}{n\varepsilon^2}.$$

X тасодифий миқдорнинг $[\varepsilon;+\infty)$ оралиққа тушиш эҳтимолини баҳолашни Марков тенгсизлиги беради.

Теорема(Марков). Манфий бўлмаган, математик кутилмаси MX чекли бўлган X тасодифий миқдор учун $\forall\varepsilon>0$ да

$$P\left\{X\geq\varepsilon\right\}\leq\frac{MX}{\varepsilon}$$

тенгсизлик ўринли.

Марков тенгсизлигидан Чебишев тенгсизлигини осонгина келтириб чиқариш мумкин.

Марков тенгсизлигини қуйидаги кўринишда ҳам ёзиш мумкин:

$$P\left\{X<\varepsilon\right\}\geq 1-\frac{MX}{\varepsilon}.$$

2.5-мисол. X дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни берилган:

$$\begin{cases} X: & 1 \quad 2 \quad 3 \\ P_X: & 0,3\ \ 0,2\ \ 0,5 \end{cases}$$

Чебишев тенгсизлигидан фойдаланиб, $P\left\{|X-MX|<\sqrt{7,6}\right\}$ эҳтимолни баҳоланг.

Ечиш. X тасодифий миқдорнинг сонли характеристикаларини ҳисоблаймиз:

$MX=1\cdot 0,3+2\cdot 0,2+3\cdot 0,5=2,2,\qquad DX=1^2\cdot 0,3+2^2\cdot 0,2+3^2\cdot 0,5-2,2^2=0,76.$

Чебишев тенгсизлигига кўра: $P\left\{|X-2,2|<\sqrt{7,6}\right\}\geq 1-\frac{0,76}{7,6}=0,9.$

Теорема(Чебишев). Агар боғлиқсиз $X_1,X_2,...,X_n,...$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги учун шундай $\exists C>0$ бўлиб, $DX_i\leq C,\ \ i=1,2,...$ тенгсизликлар ўринли бўлса, у ҳолда $\forall\varepsilon>0$ учун

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

муносабат ўринли бўлади.

Натижа. Агар $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ боғлиқсиз ва бир хил тақсимланган тасодифий миқдорлар бўлиб, $MX_i = a, DX_i = \sigma^2$ бўлса, у ҳолда $\forall\varepsilon > 0$ учун қуйидаги муносабат ўринли

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Бернулли теоремаси катта сонлар қонунининг содда шакли ҳисобланади. У нисбий частотанинг турғунлигини асослайди.

Теорема(Бернулли). Агар A ҳодисанинг битта тажрибада рўй бериши эҳтимоли p бўлиб, n та боғлиқсиз тажрибада бу ҳодиса m марта рўй берса, у ҳолда $\forall\varepsilon > 0$ учун

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

муносабат ўринли.

6.3. Марказий лимит теоремаси.

Марказий лимит теорема тасодифий миқдорлар йиғиндиси тақсимоти ва унинг лимити – нормал тақсимот орасидаги боғланишни ифодалайди. Бир хил тақсимланган тасодифий миқдорлар учун марказий лимит теоремани келтирамиз.

Теорема. $X_1, X_2, ..., X_n$ тасодифий миқдорлар боғлиқсиз, бир хил тақсимланган бўлиб, чекли $MX_i = a$ математик кутилма ва $DX_i = \sigma^2,\ i = \overline{1,n}$ дисперсияга эга бўлсин, $0 < \sigma^2 < \infty,$ у ҳолда $Z_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - M\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - na}{\sigma\sqrt{n}}$

тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни $n \to \infty$ да стандарт нормал тақсимотга интилади, яъни

$$F_{Z_n}(x) = P\{Z_n < x\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Демак, юқоридаги теоремага кўра етарлича катта n ларда $Z_n \sim N(0,1)$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ йиғинди эса қуйидаги нормал қонун бўйича тақсимланган бўлади: $S_n \sim N(na, \sqrt{n}\sigma).$ Бу ҳолда $\sum_{i=1}^{n} X_i$ тасодифий миқдор асимптотик нормал тақсимланган дейилади.

Таъриф. Агар X тасодифий миқдор учун $MX = 0,\ DX = 1$ бўлса, X тасодифий миқдор марказлаштирилган ва нормаллаштирилган (ёки стандарт) тасодифий миқдор дейилади.

Марказий лимит теоремаси ёрдамида етарлича катта n ларда тасодифий миқдорлар йиғиндиси билан боғлиқ ҳодисалар эҳтимолини ҳисоблаш мумкин. $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ тасодифий миқдорни стандартлаштирсак, етарлича катта n ларда

$$P\left\{\alpha \le \sum_{i=1}^{n} X_i \le \beta\right\} = P\left\{\frac{\alpha - na}{\sigma\sqrt{n}} \le \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - na}{\sigma\sqrt{n}} \le \frac{\beta - na}{\sigma\sqrt{n}}\right\} \approx \Phi\left(\frac{\beta - na}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - na}{\sigma\sqrt{n}}\right) \text{ ёки}$$

$$P\{\alpha \le S_n \le \beta\} \approx \Phi\left(\frac{\beta - MS_n}{\sqrt{DS_n}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - MS_n}{\sqrt{DS_n}}\right).$$

2.6-мисол. X_i боғлиқсиз тасодифий миқдорлар $[0, 1]$ оралиқда текис тақсимланган бўлса, $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i$ тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини топинг ва $P\{55 < Y < 70\}$ эҳтимолни ҳисобланг.

Ечиш. Марказий лимит теорема шартлари бажарилганлиги учун, Y тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси $f_Y(y) \approx \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-MY)^2}{2\sigma_y^2}}$ бўлади. Текис тақсимотнинг математик кутилмаси ва дисперсияси формуласидан

$$MX_i = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}, \quad DX_i = \frac{(1-0)^2}{12} = \frac{1}{12}$$

бўлади. У ҳолда $MY = M\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \sum_{i=1}^{100} MX_i = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50,$

$DY = D\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \sum_{i=1}^{100} DX_i = 100 \cdot \frac{1}{12} = \frac{25}{3}, \quad \sigma_Y = \frac{5\sqrt{3}}{3}, \quad \sigma_Y = \frac{5\sqrt{3}}{3},$ шунинг учун

$f_Y(y) \approx \frac{3}{5\sqrt{6\pi}} e^{-\frac{3(y-50)^2}{50}}$. Охирги формулага кўра

Назорат саволлари

1. *Эҳтимоллик бўйича яқинлашиш деганда нимани тушунасиз?*
2. *Чебишев тенгсизлигининг иккала кўринишини ёзиб беринг.*
3. *Чебишев теоремаси қандай ҳолларда қўлланилади?*
4. *Бернулли теоремаси қандай ҳолларда қўлланилади?*
5. *Катта сонлар қонуни деганда нимани тушунасиз?*
6. *Қандай лимит теорема марказий лимит теорема дейилади?*
7. *Бир хил тақсимланган тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги учун қандай шарт бажарилганда марказий лимит теорема ўринли бўлади?*
8. *Funksiya limitini ta'riflang.*
9. *Funksiya limitini xossalarini ayting.*