I.HABIBULLAYEV

IQTISODIY MATEMATIK USULLAR VA MODELLAR

Toshkent - 2012

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
DAVLAT SOLIQ QO‘MITASI

SOLIQ AKADEMIYASI

I.HABIBULLAYEV

IQTISODIY MATEMATIK USULLAR VA MODELLAR

O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi tomonidan iqtisodiy yo‘nalishidagi oliy o‘quv yurtlari talabalari uchun o‘quv qo‘llanma sifatida tavsiya etilgan

«TAFAKKUR-BO‘STONI»

Toshkent - 2012

UDK: 512+51(075)
H97

Iqtisodiy matematik usullar va modellar: o'quv qo'llanma / **Habibullayev I.**; O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi. -Toshkent : «Tafakkur-Bo'stoni», 2012. 112 b.

KBK 22.12z73+22.172z7

Bozor iqtisodiyoti sharoitida firmalarning raqobatbardosh mahsulotlar ishlab chiqarishi uchun xomashyo materiallarini tanlash, tarmoqlararo mahsulot ayrboshlashda o'zaro manfaatdorlikka erishish, ishlab chiqarishni optimallashtirish, tovar va mahsulotlarga soliqlarni ilmiy asoslangan holda joriy etish hamda ishlab chiqarishni bashoratlash va boshqarish masalalari dolzarb masallalardan hisoblanib, ularni yechimini topishda iqtisodiy matematik usullar va modellardan foydalanish katta samara beradi.

Ushbu masalalardan kelib chiqib, mazkur o'quv qo'llanma amaliyotda sinalgan tarmoqlararo balans modeli, iste'mol tanlovi modeli, ishlab chiqarish va uni optimallashtirish modellari, soliqlarni o'zgarishi bilan soliq yukini taqsimlash va qo'shimcha tushumlarni aniqlash modeli hamda ekonometrik modellar va iqtisodiy matematik usullarni o'z ichiga qamrab olgan.

O'quv qo'llanma **"GIDROINGEO Instituti"** Davlat korxonasi homiyligida chop etildi.

Taqrizchilar: Iqtisod fanlari doktori, professor O. Abdullayev
Fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent B.Po'latov

ISBN – 978-9943-362-34-5

MUNDARIJA

KIRISH

Bozor iqtisodiyoti, ayniqsa, vaqtinchalik yuzaga keladigan moliyaviy-iqtisodiy inqiroz sharoitida iqtisodiy jarayonlarni tahlil qilish, bashoratlash va boshqarish bo'yicha qarorlar qabul qilishda hamda ularni amaliyotga joriy etishda iqtisodiy-matematik modellardan foydalanish muhim o'rin tutadi. Jumladan, ko'p tarmoqli ishlab chiqarish jarayonlarida tarmoqlararo munosabatlarni modellarini qo'llash, tarmoqlar orasidagi iqtisodiy aloqalarni samaradorligini aniqlash imkonini beradi. Raqobatbardosh bozor sharoitida iste'molchilarning o'z daromad va jamg'armalariga qarab iste'mol uchun tayyor mahsulot yoki ishlab chiqarish uchun xomashyo mahsulotlarini tanlash holati yuzaga keladi. Bunday sharoitda iste'mol tanlovi modellaridan foydalanish tanlovni samarali o'tkazish masalalarini yechishda yordam bersa, iqtisodiy ko'rsatkichga ta'sir etuvchi omillardan birining o'zgarishi natijasida uning o'zgarish darajasini aniqlashda elastiklik nazariyasini qo'llash, talab va taklif tamoyiliga asoslangan holda tovar va mahsulotlarning narxi o'zgarganda iste'molchilarning ularga bo'lgan munosabatini aniqlash imkoniyatini beradi.

Ishlab chiqarish jarayonlarini mikro va makro darajada tahlil etish va uni boshqarishda ishlab chiqarish modellarini qo'llash yordamida moddiy ishlab chiqarish qonuniyatlari, taqsimoti va iste'molni o'rganish hamda iqtisodiyotda optimallashtirish masalalari yechiladi. Iqtisodiyotda yuzaga keladigan o'zgarishlarni miqdor va sifat jihatidan tahlil qilish esa dinamik modellarga asoslanib amalga oshiriladi.

Barcha iqtisodiy tadqiqotlar iqtisodiy o'zgaruvchilar orasidagi o'zaro bog'lanishlarni o'rganish natijasida amalga oshiriladi. O'zaro bog'lanishlarni tasavvur va tahlil qilish asosini esa iqtisodiy-statistik usullar va ekonometrik modellar tashkil etadi.

Iqtisodiy matematik modellarni qo'llab iqtisodiy jarayonlarni bashoratlash va rejalashtirish ishlab chiqarish jarayonlarini tashkil etishni optimal usullarini tanlash, ishlab chiqarishda ichki va tashqi resurslardan samarali foydalanish, iqtisodiy jarayonlarni kelgusidagi yo'nalishini aniqlash masalalarini hal etishda ilmiy asoslangan yechimlarni topish imkoniyatini yaratib beradi. Shu sababli iqtisodiy yo'nalishdagi oliy ta'lim muassasalari talabalariga iqtisodiyotda modellashtirish masalalari bo'yicha bilimlarni berish va ularda amaliy ko'nikmalar hosil qilish ta'lim sohasidagi dolzarb masalalardan biri hisoblanadi.

Iqtisodiy matematik modellarni tuzish yo'llari talabalarning iqtisodiyot nazariyasi, oliy matematika va informatika fanlaridan olgan bilimlariga asoslanib, matritsalar algebrasi, differensial hisobi, ehtimollar nazariyasi, matematik programmalashtirish, statistika usullaridan foydalangan holda yoritib berilgan.

Ushbu o'quv qo'llanma Soliq akademiyasida I.Habibullaev, fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent R.Kenjayev, pedagogika fanlari nomzodi, dotsent B.Otaniyozovlarning mazkur fandan o'qigan ma'ruza materiallari asosida tayyorlangan.

I Bob. IQTISODIY-MATEMATIK USULLAR VA IQTISODIYOTDA MODELLASHTIRISH

1.1. Iqtisodiyotda modellashtirish tushunchasi. «Iqtisodiy-matematik usullar va modellar» fanining predmeti va vazifalari

Hozirgi paytda iqtisodiy fan va amaliyot amaliy matematika yutuqlaridan tobora kengroq foydalanmoqda, ularni ilmiy tadqiqotlar qurolidan murakkab xo'jalik masalalarini samarali hal qilishning muhim vositasiga aylantirmoqda.

Zamonaviy iqtisodiyot nazariyasi ham mikro, ham makro darajada tabiiy, zaruriy element sifatida matematik modellar va usullarni o'z ichiga oladi. Matematikadan iqtisodiyotda foydalanish iqtisodiy o'zgaruvchilar va obyektlarning eng muhim, ahamiyatli bog'lanishlarini ajratishga va formal tasvirlashga, iqtisodiyot nazariyasining qoidalari, tushunchalari va xulosalarini aniq va lo'nda bayon qilishga imkon beradi.

Model — bu shunday moddiy yoki xayolan tasavvur qilinadigan obyektki, qaysiki tadqiqot jarayonida haqiqiy obyektning o'rnini shunday bosadiki, uni bevosita o'rganish haqiqiy obyekt haqida yangi bilimlar beradi. Modellarni qurishda tadqiq qilinayotgan hodisani belgilovchi muhim omillar aniqlanadi va qo'yilgan masalani yechish uchun muhim bo'lmagan qismlar chiqarib tashlanadi.

Bir tomondan, modellar oson o'rganiladigan bo'lishi kerak, shuning uchun ular juda murakkab bo'lmasligi kerak — binobarin, ular albatta faqat soddalashtirilgan nusxalar bo'ladi. Biroq, ikkinchi tomondan, modellarni o'rganishdan olingan xulosalarni haqiqiy obyektlarga ham qo'llash lozim, demak, model o'rganilayotgan haqiqiy obyektning muhim tomonlarini aks ettirishi kerak.

Modellashtirish — deganda modellarni qurish, o'rganish va qo'llash jarayoni tushuniladi. Modellashtirish jarayoni quyidagi uch elementni o'z ichiga oladi:

1) subyekt (tadqiqotchi);

2) tadqiqot obyekti;

3) o'rganuvchi subyekt bilan o'rganilayotgan obyektning munosabatlarini vositalovchi model.

Ilmiy izlanishlar shuni ko'rsatadiki, modellashtirish qadimgi zamonlardayoq qo'llanila boshlangan va asta-sekin ilmiy bilimlarning, qurilish va arxitektura, astronomiya, fizika, kimyo, biologiya va, nihoyat, ijtimoiy fanlar kabi tobora yangi sohalarini qamrab ola boshladi. Birinchi matematik modellar F.Kene (1758 y., iqtisodiy jadval), A.Smit (klassik makroiqtisodiy model), D.Rikardo (xalqaro savdo modeli) tomonidan ishlatilgan. XX asr zamonaviy fanning amalda barcha sohalarida modellashtirish usuliga katta muvaffaqiyat va obro'-e'tibor keltirdi.

Turli iqtisodiy hodisalarni o'rganish uchun ularning *iqtisodiy modellar* deb ataluvchi soddalashtirilgan formal tasvirlaridan foydalaniladi. Iste'mol tanlovi modellari, firma modellari, iqtisodiy o'sish modellari, tovar va moliya bozorlaridagi muvozanat modellari va boshqa ko'p modellar iqtisodiy modellarga misol bo'ladi.

Iqtisodiy-matematik model — bu iqtisodiy obyektlar yoki jarayonlarni tahlil qilish yoki boshqarish maqsadida ularning matematik tasvirlanishi, ya'ni iqtisodiy masalaning matematik yozuvi. Iqtisodiy obyektning matematik modeli — bu uning funksiyalar, tenglamalar, tengsizliklar, mantiqiy munosabatlar, grafiklar majmuasi ko'rinishidagi aks ettirilishi. Bunday aks ettirish o'rganilayotgan obyekt elementlarining munosabatlari guruhlarini model elementlarining shunga o'xshash munosabatlariga birlashtiradi.

Iqtisodiy-matematik modelllarni amaliyotda qo'llash usullari *iqtisodiy-matematik usullar* deb ataladi. Iqtisodiy-matematik usullar (IMU) iqtisodiyotni o'rganish uchun birlashtirilgan iqtisodiy va matematik fanlarning uyushmasidir. Bu tushuncha fanga XX asrning 60-yillarida akademik V.S.Nemchinov tomonidan kiritilgan. IMU iqtisodiyot, matematika va kibernetikaning tutashishida hosil bo'ldi.

«Iqtisodiy-matematik usullar va modellar» fanining predmeti:

- makroiqtisodiyot (xalq xo'jaligi) va uning tarmoqlarida kechayotgan iqtisodiy jarayonlarni modellashtirish asoslarini o'rganish;
- aniq iqtisodiy tizim misolida modellashtirish masalasini qo'yish va iqtisodiy ma'nosini tushunish;
- iqtisodiy masalalarni yechish usullarini, shuningdek kompyuterda hisoblash tajribalarini o'tkazish va ularning natijalarini tahlil qilishni o'rganishdan iborat.

«Iqtisodiy-matematik usullar va modellar» fanining vazifalari:

- iqtisodiy jarayonlarning matematik modellarini qurish va ularni yechish usulini tanlash;
- matematik modellarni tahlil qilish asosida iqtisodiy jarayon qonuniyatlari haqidagi bilimlarni chuqurlashtirish;
- makro- va mikroiqtisodiyotda qo'llanilayotgan turli matematik modellarni o'rganishdan iborat.

1.2. Iqtisodiy-matematik modellarning tasnifi

Modellashtirish va modellar o'zining turli sohalardagi tadbiqlariga qarab, moddiy va abstrakt kabi sinflarga bo'linadi.

Moddiy modellar asosan o'rganilayotgan obyekt va jarayonni geometrik, fizik, dinamik yoki funksional tavsiflarini ifodalaydi. Masalan, obyektning kichiklashtirilgan maketi (masalan, litsey, kollej, universitet) va turli xil fizikaviy, kimyoviy va boshqa xildagi maketlar bunga misol bo'la oladi. Bu modellar yordamida turli xil texnologik jarayonlarni optimal boshqarish, ularni joylashtirish va foydalanish yo'llari o'rganiladi. Umuman olganda, moddiy modellar tajribaviy xarakterga ega bo'lib, texnika fanlarida keng qo'llaniladi.

Ammo moddiy modellashtirishdan iqtisodiy maslalarni yechish uchun foydalanishda ma'lum chegaralanishlar mavjud. Masalan, iqtisodiyotni biror sohasini o'rganish bilan butun iqtisodiy obyekt haqida xulosa chiqarib bo'lmaydi. Ko'pgina iqtisodiy masalalar uchun esa moddiy modellar yaratish qiyin bo'ladi va ko'p xarajat talab etadi.

Abstrakt (ideal) modellar inson tafakkurining mahsuli bo'lib, ular tushunchalar, gipotezalar va turli xil qarashlar sistemasidan iborat. Iqtisodiy tadqiqotlarda, boshqarish sohalarida, asosan, abstrakt modellashtirishdan foydalaniladi.

Ilmiy bilishda abstrakt modellar ma'lum tillarga asoslangan belgilar majmuidan iborat. O'z navbatida, belgili abstrakt modellar matematik va logik tillar shaklidagi matematik logik modellarni ifodalaydi.

Matematik modellashtirish turli xil tabiatli, ammo bir xil matematik bog'lanishlarni ifodalaydigan voqea va jarayonlarga asoslangan tadqiqot usulidir.

Hozirgi paytda matematik modellashtirish iqtisodiy tadqiqotlarda, amaliy rejalashtirishda va boshqarishda yetakchi o'rin egallib, kompyuterlashtirish bilan chambarchas bog'langan.

Iqtisodiy-matematik modellar turli asoslarga ko'ra tasniflanadi.

Amaliy maqsadga ko'ra iqtisodiy-matematik modellar iqtisodiy jarayonlarning umumiy xususiyatlari va qonuniyatlarini tadqiq qilishda ishlatiladigan *nazariy-analitik modellarga* va tayinli iqtisodiy masalalarni yechishda qo'llaniladigan *amaliy modellar* (iqtisodiy tahlil, bashoratlash, boshqarish modellari)ga bo'linadi.

Iqtisodiy-matematik modellar iqtisodiyotning turli tomonlari (xususan, uning ishlab chiqarish-texnologik, ijtimoiy, hududiy tuzilmalari)ni va uning alohida qismlarini tadqiq qilish uchun mo'ljallanishi mumkin. Modellarni tadqiq qilayotgan iqtisodiy jarayonlar va muammolar mazmuni bo'yicha tasniflashda butun iqtisodiyot modellari (*makroiqtisodiy modellar*)ni va uning quyi tizimlari — tarmoqlar, hududlar va hokazolarning modellari, ishlab chiqarish, iste'mol, daromadlarni shakllantirish va taqsimlash, mehnat resurslari, baholarni shakllantirish, moliyaviy aloqalar va shu kabilar modellarining majmualari (*mikroiqtisodiy modellar*)ni ajratib ko'rsatish mumkin.

Tuzilmaviy modellar obyektlarning ichki tuzilishi, tarkibiy qismlari, ichki parametrlarini, ular orasidagi o'zaro bog'liqliklarni ifodalaydi. Iqtisodiyot yo'nalishdagi tadqiqotlarda ko'proq tuzilmaviy modellar qo'llaniladi, chunki quyi tizimlarning o'zaro bog'liqliklari rejalashtirish va boshqarish uchun katta ahamiyatga ega. O'ziga xos tuzilmaviy modellar sifatida tarmoqlararo aloqalar modellarini olish mumkin.

Funksional modellar iqtisodiy boshqarishda keng qo'llaniladi, bunda obyektning holati («chiqish»)ga «kirish»ni o'zgartirish yo'li bilan ta'sir ko'rsatiladi. Iste'molchilarning tovar-pul munosabatlari sharoitidagi xatti-harakatlari modeli bunga misol bo'la oladi. Aynan bir obyekt bir vaqtning o'zida ham tuzilmaviy, ham funksional model bilan tasvirlanishi mumkin. Masalan, alohida tarmoq tizimini rejalashtirish uchun tuzilmaviy modeldan foydalaniladi, iqtisodiyot yo'nalishda esa har bir tarmoq funksional model bilan ifodalanishi mumkin.

Determinirlangan modellar model o'zgaruvchilari orasidagi qat'iy funksional bog'lanishlar borligini nazarda tutadi. *Stoxastik modellar* tadqiq qilinayotgan ko'rsatkichlarga tasodifiy ta'sirlarning borligiga yo'l qo'yadi hamda ularni tasvirlash uchun ehtimollar nazariyasi va matematik statistikaning vositalaridan foydalanadi.

Statik modellarda barcha bog'lanishlar vaqtning tayinli payti yoki davriga tegishlidir. *Dinamik modellar* iqtisodiy jarayonlarning vaqt bo'yicha o'zgarishini tavsiflaydi. Qaralayotgan vaqt davrining uzunligiga qarab bashoratlash va rejalashtirishning qisqa muddatli (bir yilgacha), o'rta muddatli (5 yilgacha), uzoq muddatli (10-15 va undan ko'proq yilgacha) modellari farqlanadi. Iqtisodiy-matematik modellarda vaqtning o'zi uzluksiz, yoki diskret ravishda o'zgarishi mumkin.

Iqtisodiy jarayonlarning modellari matematik bog'lanishlarning shakli bo'yicha juda xilma-xildir. Ayniqsa tahlil va hisoblashlar uchun eng qulay bo'lib, shu tufayli keng tarqalgan *chiziqli modellar* sinfini ajratib ko'rsatish muhimdir. Chiziqli va *chiziqli bo'lmagan modellar* orasidagi farqlar nafaqat matematik nuqtai nazardan, balki nazariy-iqtisodiy jihatdan ham muhimdir, chunki iqtisodiyotdagi ko'p bog'lanishlar aniq chiziqli bo'lmagan tabiatga ega. Ishlab chiqarish o'sganda resurslardan foydalanish samaradorligi, ishlab chiqarish ko'payganda yoki daromadlar o'sganda aholi talabi va iste'molining o'zgarishi va h.k.

Iqtisodiyot modellari fazoviy omillar va shartlarni o'z ichiga olishiga qarab *fazoviy* va *nuqtaviy* modellar farqlanadi.

Shunday qilib, iqtisodiy-matematik modellarning umumiy tasnifi o'ndan ortiq asosiy belgilarni o'z ichiga oladi. Iqtisodiy-matematik tadqiqotlarning rivojlanishi bilan qo'llanilayotgan modellarni tasniflash muammosi murakkablashadi. Yangi turlar, ayniqsa, aralash turlardagi modellarning va ularni tasniflash yangi belgilarining paydo bo'lishi bilan bir qatorda har xil turdagi modellarning murakkabroq qurilmalarga birlashishi jarayoni amalga oshadi.

Iqtisodiy-matematik usullardan matematik iqtisodiyotda va ekonometrikada qo'llaniladigan usullarni alohida ajratib ko'rsatish lozim. *Matematik iqtisodiyot* — iqtisodiy fanning iqtisodiy jarayonlar matematik modellarining xossalari va yechimlarini tahlil qilish bilan shug'ullanadigan bo'limidir. Matematik iqtisodiyotda tayinli formal chiziqlilik, qavariqlik, monotonlik va shu kabi bog'liqliklar, kattaliklar o'zaro bog'liqligining konkret formulalariga asoslangan nazariy modellar tadqiq qilinadi. Matematik iqtisodiyotning vazifasi model yechimining mavjudligi, uning nomanfiyligi, statsionarligi shartlari, boshqa xossalarning borligi haqidagi muammoni o'rganishdir.

Ekonometrika — iqtisodiyotdagi miqdoriy qonuniyatlar va o'zaro bog'liqliklarni matematik statistika usullari yordamida tadqiq qiluvchi fan. Bu usullarning asosi — korrelyatsiyaviy-regressiyaviy tahlil. Ekonometrika empirik ma'lumotlarni o'rganish asosida iqtisodiy bog'liqliklar va modellarni statistik baholash va tahlil qilish bilan shug'ullanadi.

1.3. Iqtisodiy-matematik modellashtirish bosqichlari

Modellashtirish jarayonining asosiy bosqichlari turli sohalarda, shu jumladan, iqtisodiyotda ham o'ziga xos xususiyatlarga ega bo'ladi. Iqtisodiy-matematik modellashtirish bitta siklining bosqichlari ketma-ketligi va mazmunini tahlil qilaylik.

Iqtisodiy muammoning qo'yilishi va uni sifat jihatdan tahlil qilish. Bu bosqich modellashtiriladigan obyektning eng muhim xususiyatlari va xossalarini ajratib, ularni ikkinchi darajalilaridan abstraksiyalashni; obyektning tuzilmasi va uning elementlarini bog'lovchi asosiy bog'lanishlarni o'rganishni; obyektning holati va rivojlanishini tushuntiruvchi, (hech bo'lmaganda dastlabki) gipotezalarni shakllantirishni o'z ichiga oladi.

Matematik modelni qurish. Bu bosqich iqtisodiy muammoni formallashtirish, uni tayinli matematik bog'lanishlar va munosabatlar (funksiyalar, tenglamalar, tengsizliklar va h.k.) ko'rinishida ifodalash bosqichidir. Odatda avval matematik modelning asosiy qurilmasi (turi) aniqlanadi, so'ngra bu qurilmaning tarkibiy qismlari (o'zgaruvchilar va parametrlarning aniq ro'yxati, bog'lanishlar shakli) aniqlashtiriladi.

Modelni matematik tahlil qilish. Bu bosqichning maqsadi modelning umumiy xossalarini aniqlashdan iborat. Bu yerda tadqiqotning sof matematik usullari qo'llaniladi. Modelning analitik tadqiqotida yechimning mavjudligi, yagonaligi, yechimga qaysi o'zgaruvchilar (noma'lumlar) kirishi mumkinligi, ular orasidagi munosabatlar, bu o'zgaruvchilar qaysi doirada va qanday dastlabki shartlarga bog'liq ravishda o'zgarishi, ularning o'zgarishining yo'nalishlari va shu kabi masalalar oydinlashtiriladi. Modelning analitik tadqiqoti empirik (sonli) tadqiqotiga nisbatan shunisi bilan afzalki, bunda olinayotgan xulosalar model tashqi va ichki parametrlarining har xil tayinli qiymatlarida o'z kuchini saqlaydi.

Shunga qaramay, murakkab iqtisodiy obyektlarning modellari juda katta qiyinchilik bilan analitik tadqiqotlarga keltiriladi. Analitik usullar bilan modelning umumiy xossalarini aniqlashning ilojisi bo'lmaydigan hamda modelni soddalashtirish maqsadga muvofiq bo'lmagan natijalarga olib keladigan hollarda tadqiqotning sonli usullariga o'tiladi.

Dastlabki ma'lumotlarni tayyorlash. Modellashtirish axborot tizimiga qat'iy talablar qo'yadi. Shu bilan birga axborot olishning haqiqiy imkoniyatlari amalda qo'llash uchun mo'ljallangan modellarning tanlanishini chegaralab qo'yadi. Bunda nafaqat (aniq muddatlarda) axborot tayyorlashning amaldagi imkoniyati, balki tegishli axborot massivlarini tayyorlashning sarf-xarajatlari ham e'tiborga olinadi. Bu sarf-xarajatlar qo'shimcha axborotdan foydalanish samarasidan oshishi kerak emas.

Sonli yechish. Bu bosqich masalani sonli yechish uchun algoritmlarni ishlab chiqish, EHMlarda dasturlar tuzish va bevosita hisoblashlar o'tkazishni o'z ichiga oladi. Bu bosqichdagi qiyinchiliklar, birinchi navbatda, iqtisodiy masalalarning katta hajmi, juda katta axborot massivlarini qayta ishlash zaruriyatidan kelib chiqadi.

Sonli usullar bilan o'tkaziladigan tadqiqot analitik tadqiqot natijalarini jiddiy to'ldirishi mumkin, ko'pgina modellar uchun esa u amalga oshiriladigan birdan-bir tadqiqot bo'ladi. Sonli usullar bilan yechish mumkin bo'lgan iqtisodiy masalalar sinfi analitik tadqiqot qilish mumkin bo'lgan masalalar sinfidan ancha kengroq.

Sonli natijalar tahlili va ularning tatbiqi. Siklning bu yakunlovchi bosqichida modellashtirish natijalarining to'g'riligi va to'laligi, ularning amalda qo'llanish darajasi haqida muammo ko'tariladi.

Tekshirishning matematik usullari modellarning noto'g'ri tuzilishini aniqlashi va shu bilan to'g'ri bo'lishi mumkin bo'lgan modellar sinfini toraytiradi. Model vositasida olinadigan nazariy xulosalar va sonli natijalarning formal bo'lmagan tahlili, ularni mavjud bilimlar va haqiqatdagi faktlar bilan solishtirish iqtisodiy masala qo'yilishining, qurilgan matematik modelning, uni axborot bilan va matematik ta'minlashning kamchiliklarini payqashga imkon beradi.

Takrorlash va nazorat uchun savollar:

1. Model va iqtisodiy model nima?
2. Iqtisodiy-matematik model nima, modellashtirish deganda nimani tushunasiz va u qanday elementlarni o'z ichiga oladi?
3. Modellashtirishni qo'llashning tarixi haqida nima bilasiz va iqtisodiy-matematik usullar deb nimaga aytiladi?
4. «Iqtisodiy-matematik usullar va modellar» fanining predmeti nimadan iborat?
5. «Iqtisodiy-matematik usullar va modellar» fanining vazifalari nimadan iborat?
6. Nazariy-analitik, amaliy, makroiqtisodiy va mikroiqtisodiy modellar nima?
7. Funksional, tuzilmaviy, determinirlangan va stoxastik modellar nima?
8. Statik, dinamik, chiziqli, chiziqli bo'lmagan, fazoviy va nuqtaviy modellar haqida nima bilasiz?
9. Matematik iqtisodiyotning ekonometrikadan farqi nimada?
10. Modellashtirishning qaysi bosqichlarini bilasiz va modellashtirishning birinchi ikkita bosqichining mohiyati nimada?
11. Modellashtirishning so'nggi to'rtta bosqichi nimaga mo'ljallangan?

II Bob. IQTISODIYOTDA CHIZIQLI MODELLAR

2.1. Ko'ptarmoqli iqtisodiyotda balans munosabatlari

Matritsalar algebrasining elementlaridan foydalanish ko'p iqtisodiy masalalarni yechishning asosiy usullaridan biridir. Bu masala ma'lumotlar bazalarini yaratish va ulardan foydalanishda juda dolzarb bo'lib qoldi. Ular bilan ishlashda deyarli barcha axborot matritsa ko'rinishida saqlanadi va qayta ishlanadi.

Ko'ptarmoqli xo'jalik faoliyatining makroiqtisodiyoti alohida tarmoqlar orasidagi balansni talab qiladi. Har bir tarmoq, bir tomondan ishlab chiqaruvchi bo'lib, ikkinchi tomondan esa boshqa tarmoqlar ishlab chiqargan mahsulotni iste'molchisi bo'ladi. Bunday hollarda tarmoqlar orasidagi bog'lanishlarni har xil turdagi mahsulotlarni ishlab chiqarish va iste'mol qilish orqali hisoblashning ancha murakkab masalasi paydo bo'ladi. Birinchi marta bu muammo matematik model ko'rinishida 1936 yilda AQSHdagi 1929–1932 yillar iqtisodiy depressiyasining sabablarini tahlil qilib ko'rishga uringan mashhur amerikalik iqtisodchi V.Leontevning asarlarida bayon etildi. Bu model matritsalar algebrasiga asoslanib, matritsalar tahlilining apparatidan foydalanadi.

Soddalik uchun xo'jalikning ishlab chiqarish sohasi har biri o'zining bir jinsli mahsulotini ishlab chiqaruvchi p ta tarmoqdan iborat deb hisoblaymiz. Har bir tarmoq o'zining ishlab chiqarishini ta'minlash uchun boshqa tarmoqlarning mahsulotiga muhtoj (ishlab chiqarish iste'moli). Odatda ishlab chiqarish jarayoni ma'lum bir vaqt davrida qaraladi; ko'p hollarda bunday birlik sifatida bir yil olinadi.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

x_i — i nchi tarmoq jami mahsulotining hajmi (uning yalpi ishlab chiqarishi);

x_{ij} — i nchi tarmoq mahsulotining j nchi tarmoqda x_j hajmdagi mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarflanadigan hajmi;

y_i — i nchi tarmoq mahsulotining noishlab chiqarish sohasida o'zlashtirish (iste'mol) uchun mo'ljallangan hajmi, yoki yakuniy iste'mol mahsuloti. Unga fuqarolarning shaxsiy iste'moli, ijtimoiy ehtiyojlarni qondirish, davlat institutlarini ta'minlash va hokazolar kiradi.

Turli sanoat tarmoqlari bog'liqligining balans tamoyili shundan iboratki. i nchi tarmoq yalpi ishlab chiqarishi ishlab chiqarish va noishlab chiqarish sohalaridagi iste'mol hajmlarining yig'indisiga teng bo'lishi kerak. Eng sodda holda balans munosabatlari

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} + y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (2.1)$$

ko'rinishga ega.

(2.1) tenglamalar *balans munosabatlari* deb ataladi. Har xil tarmoqlar mahsuloti har xil o'lchovga ega bo'lgani uchun bundan keyin qiymat balansini nazarda tutamiz.

2.2. Ko'ptarmoqli iqtisodiyot chiziqli modeli — Leontev modeli

V.Leontev tomonidan ikkinchi jahon urushidan oldingi davrdagi AQSH iqtisodiyotini tahlil qilish asosida quyidagi muhim fakt aniqlandi: uzoq vaqt davomida $a_{ij} = x_{ij}/x_j$ kattaliklar juda kam o'zgaradi va o'zgarmas sonlar sifatida qaralishi mumkin. Bu hodisani shunday tushunish kerakki, ishlab chiqarish texnologiyasi ancha uzoq vaqt davomida bir xil darajada turadi va, demak, j nchi tarmoqda x_j hajmdagi mahsulotni ishlab chiqarish uchun i nchi tarmoq mahsulotining iste'mol qilinadigan hajmi texnologik konstanta (o'zgarmas son)dan iborat bo'ladi.

Bunda a_{ij} sonlar bevosita (to'g'ri) xarajatlar koeffitsiyentlari deb ataladi. Ko'rsatilib o'tilgan faktga asosan

$$a_{ij} = x_{ij}/x_j, \quad x_{ij} = a_{ij}x_j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n \qquad (2.2)$$

ga ega bo'lamiz. U holda (2.1) tenglamalarni

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + y_n \end{cases} \qquad (2.3)$$

tenglamalar sistemasi ko'rinishida yozish mumkin.

Ishlab chiqarilgan mahsulot hajmlarining ustun-vektori (yalpi ishlab chiqarish vektori), yakuniy iste'mol mahsuloti hajmlarining ustun-vektori (yakuniy iste'mol vektori) va bevosita xarajatlar koeffitsiyentlari matritsasi

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (2.4)$$

larni kiritamiz. U holda (2.3) tenglamalar sistemasi matritsa shaklida

$$\bar{x} = A\bar{x} + \bar{y} \qquad (2.5)$$

ko‘rinishga ega.

Odatda bu munosabat *chiziqli tarmoqlararo balans tenglamasi* deb ataladi. Bu tenglama (2.4) matritsa ko‘rinishdagi ifodalanishning tavsifi bilan birga **Leontev** *modeli* deb nomlanadi.

Chiziqli tarmoqlararo balans tenglamasidan ikki maqsad uchun foydalanish mumkin. Yalpi ishlab chiqarish vektori $\bar{x}$ ma’lum bo‘lgan birinchi, eng sodda holda yakuniy iste’mol vektori $\bar{y}$ ni hisoblash talab qilinadi. Ikkinchi holda rejalashtirish maqsadlari uchun chiziqli tarmoqlararo balans tenglamasidan masalaning quyidagi shaklida foydalaniladi: T vaqt davri (masalan, bir yil) uchun yakuniy iste’mol vektori $\bar{y}$ ma’lum bo‘lib, yalpi ishlab chiqarish vektori $\bar{x}$ ni aniqlash talab qilinadi. Bu yerda A matritsasi ma’lum va $\bar{y}$ vektori berilgan (2.5) chiziqli tenglamalar sistemasini yechish zarur.

Shu bilan birga, (2.5) sistema berilgan masalaning amaliy tabiatidan kelib chiqadigan qator xususiyatlarga ega; eng avvalo A matritsa hamda $\bar{x}$ va $\bar{y}$ vektorlarning barcha elementlari nomanfiy bo‘lishi kerak.

2.3. Leontev modelining samaradorligi

Agar nomanfiy komponentali ixtiyoriy $\bar{y}$ vektor uchun (2.5) tenglamaning yechimi — barcha elementlari nomanfiy bo‘lgan $\bar{x}$ vektor mavjud bo‘lsa, u holda hamma elementlari nomanfiy bo‘lgan A matritsa

samarador deb ataladi. Bu holda Leontev modeli ham samarador deb ataladi.
(2.5) sistemani E birlik matritsadan foydalanib,

$$(E-A)\bar{x}=\bar{y}$$

ko'rinishda qayta yozamiz.

Agar $(E-A)^{-1}$ teskari matritsa mavjud bo'lsa, u holda (2.5) tenglamaning

$$\bar{x}=(E-A)^{-1}\bar{y}$$

yagona yechimi ham mavjud bo'ladi. $(E-A)^{-1}$ matritsa *to'la xarajatlar matritsasi* deb ataladi.

A matritsa samaradorligining bir nechta mezoni mavjud. Ulardan ikkitasini keltiramiz.

1. $(E-A)^{-1}$ matritsa mavjud bo'lib, uning elementlari nomanfiy bo'lganda va faqat shundagina A matritsa samarador bo'ladi.

2. Agar elementlari nomanfiy bo'lgan A matritsaning ixtiyoriy ustuni (satri) bo'yicha elementlari yig'indisi birdan oshmasa:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \le 1 \quad \text{yoki} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \le 1,$$

hamda hech bo'lmaganda bitta ustun (satr) uchun bu yig'indi birdan qat'iy kichik bo'lsa, u holda bunday matritsa samarador bo'ladi.

2.4. Neyman modeli

Leontev modelining umumiy ko'rinishi bo'lgan Neyman modeli bilan tanishamiz. $(C\ ,\ K\ )$ juftlik bilan tasvirlanadigan iqtisodiyotni ko'rib chiqaylik, bu yerda C — tovarlar fazosi, K esa — tovarlarning ma'lum bir miqdorlarini o'sha tovarlarning boshqa miqdorlariga qayta ishlovchi ishlab chiqarish jarayonlarining to'plami. Tovar (mahsulot) deganda ham ishlab chiqarishning birlamchi omillari (yer, mehnat) va xomashyo (neft, ko'mir), ham ishlab chiqarishning yakuniy mahsulotlari, xizmatlar va shunga o'xshashlar tushuniladi.

Tovarlarning jami soni p ta bo'lsin, u holda C fazo p o'lchovli fazoning nomanfiy oktanti bo'ladi. Ishlab chiqarish jarayonlari K to'plamining negizida *bazis jarayonlar* deb ataluvchi chekli sondagi

$Q_1, \ldots, Q_m$ jarayonlar yotadi. Har bir bazis jarayon C ga tegishli bo'lgan vektorlarning $Q_j = (A_j, B_j)$ juftligidan iborat. Mazmun jihatidan Q_j jarayonning ma'nosi quyidagicha: u $A_j = (a_{ij})$ vektorni sarflab, $B_j = (b_{ij})$ vektorni chiqaradi, ya'ni A_j vektorni B_j vektorga qayta ishlaydi. Ma'nosi bo'yicha barcha A_j, B_j vektorlar nomanfiydir. $A = (A_1, \ldots, A_m)$, $B = (B_1, \ldots, B_m)$ belgilashlar kiritib, qaralayotgan model texnologiyasi nomanfiy A, B matritsalar juftligi bilan berilishiga kelamiz; A matritsa *xarajatlar matritsasi*, B matritsa esa *ishlab chiqarish matritsasi* deb ataladi.

Bazis jarayonlarni kombinatsiya qilib yangi jarayonlarni olish mumkin. Masalan, z_j ($j = 1, 2, \ldots, m$) nomanfiy sonlarni olib, yangi $z_1 Q_1 + \ldots + z_m Q_m$ ishlab chiqarish jarayonini aniqlaymiz, bunda xarajatlar $\sum_{j=1}^{m} z_j A_j$ vektor, ishlab chiqarish esa $\sum_{j=1}^{m} z_j B_j$ vektor bo'ladi; hosil qilingan ishlab chiqarish jarayonini qisqacha qilib (AZ, BZ) orqali belgilaymiz. $Z = (z_j)$ vektor-ustuni *jadalliklar vektori* deb ataladi. Jarayonlarning hosil qilingan kengroq to'plamini K orqali belgilaymiz.

$Q_1, \ldots, Q_m$ bazis jarayonlar umuman olganda haqiqiy tarmoqlar, korxonalarga mos kelgan bir paytda har bir $(X, Y) \in K$ element shu tarmoqlar, korxonalarning birgalikdagi faoliyatining tayinli holatini tasvirlovchi ma'lum bir fiktiv jarayon ekanligini ko'rish mumkin. Bunda X xarajatlar vektori, Y esa ishlab chiqarish vektori bo'ladi.

Avvalroq ko'rib chiqilgan Leontev modeli haqiqatan Neyman modelining $m = n$, $B = E$ dagi xususiy holidir. Neyman modelining asosiy farqi shundan iboratki, har qanday bazis jarayon bittadan ortiq mahsulot chiqarishi mumkin. Neyman modeli chiziqli ekanligi ham ravshan.

2.5. Xarajatlar koeffitsiyentlarini hisoblash

Leontev modelining qo'llanilishini murakkab bo'lmagan misollarda ko'rib chiqaylik.

1-misol. 2.1-jadvalda ma'lum bir vaqt oralig'i uchun sanoatning beshta tarmog'i orasidagi balans ma'lumotlari keltirilgan. Yakuniy iste'mol vektori, yalpi ishlab chiqarish vektori va bevosita xarajatlar koeffitsiyentlari matritsasi topilsin hamda bu matritsa yuqorida keltirilgan mezonlarga muvofiq samarador ekanligi aniqlansin.

2.1-jadval

T/r	Tarmoq	Iste'mol					Yakuniy mahsulot	Yalpi ishlab chiqarish, pul bir.
		1	2	3	4	5		
1	Stanoksozlik	15	12	24	23	16	10	100
2	Energetika	10	3	35	15	7	30	100
3	Mashinasozlik	10	5	10	10	10	5	50
4	Avtomobil sanoati	10	5	10	5	5	15	50
5	Uglevodorodlarni qazib olish va qayta ishlash	7	15	15	10	3	50	100

Yechish. 2.1-jadvalda balansning tarkibiy qismlari (2.4) munosabatlarga muvofiq keltirilgan: x_{ij} — birinchi beshta ustun, y_i — oltinchi ustun, x_i — oxirgi ustun $(i, j = 1, 2, 3, 4, 5)$. (2.2) va (2.4) formulalarga asosan

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 50 \\ 50 \\ 100 \end{pmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 5 \\ 15 \\ 50 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0,15 & 0,12 & 0,48 & 0,46 & 0,16 \\ 0,10 & 0,03 & 0,70 & 0,30 & 0,07 \\ 0,10 & 0,05 & 0,20 & 0,20 & 0,10 \\ 0,10 & 0,05 & 0,20 & 0,10 & 0,05 \\ 0,07 & 0,15 & 0,30 & 0,20 & 0,03 \end{pmatrix}$$

ga ega bo'lamiz.

A matritsaning barcha elementlari musbat, biroq ularning uchinchi va to'rtinchi ustunlardagi yig'indilari birdan katta ekanligini ko'rish qiyin emas. Binobarin, samaradorlik ikkinchi mezonining shartlari bajarilmagan va A matritsa samarador emas. Bu samarador emaslikning iqtisodiy sababi 3- va 4-tarmoqlarning ichki iste'moli ularning yalpi ishlab chiqarishiga nisbatan haddan tashqari katta ekanligidadir.

2-misol. 2.2-jadval ma'lum bir vaqt oralig'i uchun sanoatning uchta tarmog'i balansining ma'lumotlarini o'z ichiga oladi. Agar tarmoqlar bo'yicha yakuniy iste'mol mos ravishda 60, 70 va 30 shartli pul birligigacha ko'paytirilsa, har bir mahsulot turi bo'yicha yalpi ishlab chiqarish hajmini topish talab qilinadi.

2.2-jadval

№	Tarmoq	Iste'mol			Yakuniy mahsulot	Yalpi ishlab chiqarish
		1	2	3		
1	Uglevodorodlarni qazib olish va qayta ishlash	5	35	20	40	100
2	Energetika	10	10	20	60	100
3	Mashinasozlik	20	10	10	10	50

Yechish. Yalpi ishlab chiqarish va yakuniy iste'mol vektorlarini hamda bevosita xarajatlar koeffitsiyentlari matritsasini yozaylik. (2.2) va (2.4) formulalarga asosan

$$\bar{x}=\begin{pmatrix}100\\100\\50\end{pmatrix},\ \bar{y}=\begin{pmatrix}40\\60\\10\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}0{,}05 & 0{,}35 & 0{,}40\\0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}40\\0{,}20 & 0{,}10 & 0{,}20\end{pmatrix}$$

ga ega bo'lamiz.

A matritsa samaradorlikning ikkala mezonini qanoatlantiradi. Yakuniy iste'molning berilgan hajmda ko'payishida yakuniy iste'molning yangi vektori

$$\bar{y}_*=\begin{pmatrix}60\\70\\30\end{pmatrix} \qquad (2.6)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Balans munosabatlarini qanoatlantiruvchi yangi yalpi ishlab chiqarish vektori $\bar{x}_*$ ni A matritsa o'zgarmaydi degan taxminda topish talab qilinadi. Bu holda noma'lum $\bar{x}_*$ vektorning x_1, x_2, x_3 komponentalari matritsa shaklida

$$\bar{x}_*=A\bar{x}_*+\bar{y}_* \quad \text{yoki} \quad (E-A)\bar{x}_*=\bar{y}_* \qquad (2.7)$$

ko'rinishda bo'lgan tenglamalar sistemasidan topiladi.

Bu sistemaning matritsasi

$$E - A = \begin{pmatrix} 0{,}95 & -0{,}35 & -0{,}40 \\ -0{,}10 & 0{,}90 & -0{,}40 \\ -0{,}20 & -0{,}10 & 0{,}80 \end{pmatrix}$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

(2.7) chiziqli tenglamalar sistemasining o'ng tomonning berilgan (2.6) vektorida (masalan, Gauss usuli bilan) yechish yangi $\overline{X}_*$ vektorni tarmoqlararo balans tenglamalarining yechimi sifatida beradi:

$$\overline{x}_* = \begin{pmatrix} 152{,}1 \\ 135{,}8 \\ 92{,}5 \end{pmatrix}.$$

Shunday qilib, yakuniy iste'mol vektori komponentalarining berilgan hajmda ko'payishini ta'minlash uchun mos yalpi ishlab chiqarishlarni oshirish zarur: 2.2-jadvalda ko'rsatilgan dastlabki ma'lumotlarga nisbatan uglevodorodlarni qazib olish va qayta ishlashni 52,1 % ga, energetika darajasini 35,8 % ga va mashinasozlik ishlab chiqarishini 41,5 % ga oshirish zarur.

Takrorlash va nazorat uchun savollar:

1. Har xil turdagi mahsulotlarni ishlab chiqarish va iste'mol qilish orqali tarmoqlar orasidagi bog'lanishlarni hisoblash masalasining qo'yilishi qanday hamda balans munosabatlari nima?
2. Tarmoqlararo balansning matematik modeli kim tomonidan va qachon bayon etilgan?
3. Tarmoqlararo balans modelini tuzishda matematikaning qanday qismlaridan foydalanilgan?
4. Tarmoqlararo balans munosabatlarining matematik ifodasi qanday ko'rinishda ifodalaniladi?
5. Bevosita (to'g'ri) xarajatlar koeffitsiyentlari qanday ifodalanadi va uning iqtisodiy ma'nosi nimadan iborat?
6. Chiziqli tarmoqlararo balans tenglamasi qay usulda ifodalanadi?
7. Leontev modeli qanday ko'rinishda ifodalanadi?
8. Qanday matritsa samarador deb ataladi?
9. To'la xarajatlar matritsasi nima va matritsa samaradorligining qanday mezonlarini bilasiz?
10. Neyman modeli haqida nima bilasiz, xarajatlar matritsasi, ishlab chiqarish matritsasi, jadalliklar vektori nima?

III Bob. IQTISODIY TAHLILDA ELASTIKLIK

3.1. Elastiklik tushunchasi va uning xossalari

Iqtisodiyotda differensial hisobni qo'llanilishining eng muhim yo'nalishi uning yordamida elastiklik tushunchasining kiritilishidir. Elastiklik koeffitsiyenti tadqiq qilinayotgan iqtisodiy ko'rsatkichga ta'sir qiluvchi boshqa omillar o'zgarmas bo'lganda shu ko'rsatkich bog'liq bo'lgan iqtisodiy omilning birlik nisbiy o'zgarishi natijasida ushbu ko'rsatkichning nisbiy o'zgarishini ko'rsatadi.

y kattalik x ga bog'liq bo'lsin va bu bog'liqlik $y = f(x)$ funksiya bilan tasvirlansin. Bu funksiyaning y'_x hosilasi x vaqtda o'tilgan y yo'l o'zgarishining oniy tezligi kattaligini beradi, ishlab chiqarish funksiyasining hosilasi limit mehnat unumdorligini beradi va h.k. Biroq iqtisodiyotda bu ko'rsatkich o'lchov birligining tanlanishiga bog'liq bo'lgani uchun noqulaydir.

Masalan, agar biz shakarga talabning P narxdan olingan funksiyasi Qni ko'rib chiqsak, u holda har bir (so'mlarda hisoblanadigan) P narxda

$$Q'_P = \lim_{\Delta P \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta P}$$

hosilaning qiymati shakarga talab kilogrammlarda yoki sentnerlarda o'lchanishiga bog'liq bo'lishini ko'ramiz. Birinchi holda hosila kg/so'm birligida, ikkinchi holda esa s/so'm birligida o'lchanadi, shunga mos ravishda uning narx bir xilda bo'lgandagi qiymati talab kattaligi o'lchovining birligiga bog'liq ravishda turlicha bo'ladi.

Shuning uchun funksiya o'zgarishining argument o'zgarishiga ta'sirchanligini o'lchash uchun iqtisodiyotda x va y o'zgaruvchilar absolyut o'zgarishlari (Δx va Δy)ning bog'liqligi emas, balki ularning nisbiy yoki protsentli o'zgarishlarining bog'liqligi o'rganiladi. Boshqacha qilib aytganda, iqtisodiyotda quyidagicha savollarni berish juda qulay: agar tovar narxi 1% ga oshsa, unga bo'lgan talab necha foizga o'zgaradi? Agar tovar narxi 1% ga oshsa, tovar taklifi necha foizga o'zgaradi? va h.k. Bunday savollar va ularga javoblar «funksiyaning argument bo'yicha elastikligi» yoki nisbiy hosila degan yangi tushunchani kiritadi.

$y = f(x)$ *funksiyaning elastikligi* deb y va x o'zgaruvchilar nisbiy o'zgarishlarining nisbati limitiga aytiladi. Agar y o'zgaruvchining x o'zgaruvchi o'zgargandagi o'zgarishi elastikligini $E_x(y)$ orqali belgilasak, u holda, hosila ta'rifidan foydalanib,

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y}\right) \Big/ \left(\frac{\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{y}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{y}$$

Yoki

$$E_x(y) = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{x}{y} \tag{3.1}$$

ni olamiz.

Endi elastiklikning xossalarini keltiramiz.

1. Elastiklik — qiymati y va x kattaliklar qaysi birliklarda o'lchanganligiga bog'liq bo'lmagan o'lchovsiz kattalik: $E_{\alpha x}(by) = E_x(y)$.

2. O'zaro teskari funksiyalarning elastikliklari — o'zaro teskari kattaliklar:

$$E_x(y) = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{x}{y} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}\cdot\frac{y}{x}} = \frac{1}{E_y(x)}.$$

Masalan, talab kattaligining narx bo'yicha elastikligi narxning talab kattaligi bo'yicha elastikligiga teskari kattalikdir:

$$E_P(Q) = \frac{1}{E_Q(P)}.$$

3. Ayni bitta x argumentga bog'liq bo'lgan ikkita $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar ko'paytmasining elastikligi elastikliklar yig'indisiga tengdir:

$$E_x(uv) = E_x(u) + E_x(v).$$

4. Ayni bitta x argumentga bog'liq bo'lgan ikkita $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar bo'linmasining elastikligi elastikliklar ayirmasiga tengdir:

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v).$$

5. Ikkita $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar yig'indisining elastikligi

$$E_x(u+v)=\frac{uE_x(u)+vE_x(v)}{u+v}$$ formula orqali topilishi mumkin.

Barcha nuqtalarda cheksiz elastiklikka ega bo'lgan funksiya *tamomila elastik funksiya*, barcha nuqtalarda nolga teng elastiklikka ega bo'lgan funksiya esa *tamomila noelastik funksiya* deb ataladi.

3.2. Iqtisodiyotda elastiklikning turlari

Iqtisodiyotda elastiklikning bir nechta turi mavjud.

Talabning narx bo'yicha (to'g'ri) elastikligi

$$E_p(q)=\left(\frac{dq}{q}\right)\Big/\left(\frac{dp}{p}\right)=\frac{dq}{dp}\cdot\frac{p}{q}$$

biror-bir tovarga talabning shu tovar narxi bir foizga o'zgargandagi (foizlarda ifodalangan) nisbiy o'zgarishini ko'rsatadi va iste'molchilarning mahsulot narxlari o'zgarishiga ta'sirchanligini tavsiflaydi. Agar talabning narx bo'yicha elastikligi absolyut qiymati bo'yicha birdan katta bo'lsa, u holda talab *elastik talab* (talab elastikligi cheksiz katta bo'lganda *tamomila elastik talab*) deb ataladi. Agar talabning narx bo'yicha elastikligi absolyut qiymati bo'yicha birdan kichik bo'lsa, u holda talab *noelastik talab* (talab elastikligi nolga teng bo'lganda *tamomila noelastik talab*) deb ataladi. Nihoyat, agar talabning narx bo'yicha elastikligi absolyut qiymati bo'yicha birga teng bo'lsa, u holda *birlik elastikli talab* haqida gapiriladi.

Talabning daromad bo'yicha elastikligi

$$E_I(q)=\left(\frac{dq}{q}\right)\Big/\left(\frac{dI}{I}\right)=\frac{dq}{dI}\cdot\frac{I}{q}$$

biror-bir tovarga talabning shu tovar iste'molchilarining daromadi bir foizga o'zgargandagi (foizlarda ifodalangan) nisbiy o'zgarishini tavsiflaydi. Talabning daromad bo'yicha musbat elastikligi normal (sifatli) tovarlarni, manfiysi esa kam ahamiyatli (sifatsiz) tovarlarni tavsiflaydi.

Talabning narx bo'yicha kesishuvchi elastikligi

$$E_{p_j}(q_i)=\left(\frac{dq_i}{q_i}\right)\Big/\left(\frac{dp_j}{p_j}\right)=\frac{dq_i}{dp_j}\cdot\frac{p_j}{q_i}$$

tovarlarning biriga talabning (iste'molda uning o'rnini bosuvchi yoki to'ldiruvchi) boshqa tovar narxi bir foizga o'zgargandagi (foizlarda ifodalangan) nisbiy o'zgarishini tavsiflaydi. Talabning narx bo'yicha kesishuvchi elastikligining musbat ishorasi tovarlarning o'rnini bosuvchi ekanligi, manfiy ishorasi esa to'ldiruvchi ekanligi haqida dalolat beradi.

Resurslarning narx bo'yicha elastikligi

$$E_{p_j}(R_i) = \left(\frac{dR_i}{R_i}\right) \Big/ \left(\frac{dp_j}{p_j}\right) = \frac{dR_i}{dp_j} \cdot \frac{p_j}{R_i}$$

biror-bir resurs (masalan, mehnat)ga talabning shu resurs narxi (mos ravishda, ish haqi) bir foizga o'zgargandagi (foizlarda ifodalangan) nisbiy o'zgarishini tavsiflaydi.

Bitta resursni boshqasi bilan almashtirishning elastikligi

$$E_{R_j}(R_i) = \left(\frac{dR_i}{R_i}\right) \Big/ \left(\frac{dR_j}{R_j}\right) = \frac{dR_i}{dR_j} \cdot \frac{R_j}{R_i}$$

biror resurs (masalan, kapital) miqdorining boshqa resurs (masalan, mehnat) miqdori bir foizga o'zgarganda ishlab chiqarish o'zgarmasligi shartidagi (foizlarda ifodalangan) zaruriy o'zgarishini tavsiflaydi.

3.3. Talab elastikligini belgilovchi omillar

Talab elastikligini aniqlaydigan omillarni ko'rib chiqaylik.

- *Tovarning o'rnini bosish mumkinligi qanchalik yuqori bo'lsa, talabning narx bo'yicha elastikligi shunchalik yuqori bo'ladi.* Tovarning o'rnini bosish mumkinligi odatda o'rnini bosuvchi tovarlarning mavjudligi va miqdori bilan tavsiflanadi. Iste'molchilarda ushbu tovar iste'molini boshqa tovarlar iste'moli bilan almashtirishning imkoniyati qanchalik ko'p bo'lsa, shu tovarga talabning elastikligi shunchalik yuqori bo'ladi.
- *Iste'molchi daromadidagi ushbu tovarga sarf-xarajatlarning nisbiy miqdori qanchalik yuqori bo'lsa, talabning narx bo'yicha elastikligi shunchalik yuqori bo'ladi.* Masalan, iste'molchining gugurtga bo'lgan talabi uning narxi bir necha barobar ortgan taqdirda ham deyarli o'zgarmaydi, bu hol shu talabning past elastikligi haqida dalolat beradi.

- *Tovarga bo'lgan subyektiv zarurat qanchalik past bo'lsa, talabning narx bo'yicha elastikligi shunchalik yuqori bo'ladi.* Odatda zeb-ziynat buyumlariga talab birinchi zarurat buyumlariga bo'lgan talabdan elastikroq deb hisoblanadi. Bu unchalik to'g'ri emas, chunki bu yerda hal qiluvchi omil sifatida ushbu tovarga bo'lgan subyektiv zarurat xizmat qiladi, u esa moda, an'analar yoki boshqa sabablarga ko'ra ayrim zeb-ziynat buyumlariga yetarlicha yuqori bo'lishi va ushbu tovarga talab elastikligining past bo'lishiga olib kelishi mumkin. Bunga misol sifatida 8 mart yoki 1 oktabrda gullarga bo'lgan talab xizmat qilishi mumkin.
- *Vaqt oralig'i qanchalik katta bo'lsa, talabning narx bo'yicha elastikligi shunchalik yuqori bo'ladi.* Boshqacha aytganda, talabning uzoq muddatli elastikligi qisqa muddatli elastikligidan yuqoriroq deb faraz qilinadi. Bu, odatda, uzoq muddatli vaqt oralig'ida iste'molchilar odatlarini o'zgartirib, ushbu tovarga ko'proq o'rinbosarlar topishlari mumkinligi bilan asoslanadi.

3.4. Elastiklik va soliq siyosati

Hukumat biror-bir tovarlarga u yoki bu soliqlarni joriy qilayotganida quyidagi savollarning javobiga ega bo'lishi kerak:

1. Qaysi tovarlarga soliq joriy qilish kerak?
2. Kimdan soliq olish lozim — ishlab chiqaruvchilardanmi yoki iste'molchilardanmi?
3. Budjetga qo'shimcha tushum miqdori qanday bo'ladi?
4. Asosiy soliq yuki kimning zimmasiga tushadi?
5. Agar soliq olinayotgan bo'lsa, budjet kamomadini qoplash uchun soliq stavkasini oshirish kerakmi?

Asosiy soliq yuki soliqqa tortilayotganlarning zimmasiga tushishi hamda soliq stavkasi qanchalik katta bo'lsa, budjetga soliqlardan keladigan tushum shunchalik katta bo'lishi ayondek tuyuladi. Mufassalroq iqtisodiy tahlil soliq yukining miqdori formal soliq to'lovchilar bilan emas, balki talab va taklif elastikliklarining kattaligi bilan aniqlanishini ko'rsatadi. Xuddi shunga o'xshash, soliqqa tortilayotgan tovar narxining ko'payishiga teng kuchli bo'lgan soliq stavkasining oshirilishi elastiklikka bog'liq ravishda budjetga soliq tushumlarining oshishiga ham, kamayishiga ham olib kelishi mumkin.

Ushbu savollarni hal qilish uchun talab va taklif tamoyiliga asoslangan soliq olishning mufassalroq modelini ko'rib chiqaylik. Dastlab soliq ishlab chiqaruvchilardan olinadi deb faraz qilamiz (3.1-rasm) hamda soddalik uchun mahsulot birligidan olinadigan t soliq o'zgarmas va ishlab chiqarish hajmiga bog'liq emas deb hisoblaymiz (agar soliq ishlab chiqarishning yoki sotish hajmining foizlarida aniqlansa, bunday bo'lmaydi). Bu holda soliqning joriy qilinishi taklif chizig'i S ning yuqoriga soliq stavkasining t miqdoriga parallel siljishiga olib keladi.

3.1-rasmdan ko'rinib turganidek, soliq joriy qilinganida tovarning bozor narxi p^e dan p^c gacha oshadi, bu narx endi ishlab chiqaruvchilarning narxi p^P dan soliq miqdori t ga farq qiladi, sotish hajmi esa q^e dan q^t gacha kamayadi. Budjetga soliq tushumlarining umumiy T miqdori t soliq stavkasining q^t sotish hajmiga ko'paytmasi sifatida aniqlanadi:

$$T = t \cdot q^t.$$

Bir vaqtning o'zida shu ifodaning o'zi soliq yukining miqdorini ham aniqlaydi, bu yukning

$$T_c = q^t \cdot (p^c - p^e)$$

qismi iste'molchilar zimmasiga, boshqa

$$T_p = q^t \cdot (p^e - p^p)$$

qismi esa ishlab chiqaruvchilar zimmasiga tushadi.

Bu qismlarning yig'indisi budjetning soliq tushumlariga tengligini

$$T_c + T_p = T = q^t \cdot (p^c - p^P),$$

bu qismlarning nisbati esa talab va taklif elastikliklarining nisbatiga teskari proporsional ekanligini

$$\frac{T_c}{T_p} = \frac{p^c - p^e}{p^e - p^p} = -\frac{E^S}{E^D}$$

ko'rsatish qiyin emas, bunda

$$E^D=\left(\frac{q^t-q^e}{q^e}\right)\Bigg/\left(\frac{p^c-p^e}{p^e}\right);\qquad E^S=\left(\frac{q^t-q^e}{q^e}\right)\Bigg/\left(\frac{p^p-p^e}{p^e}\right).$$

Bu munosabatni tahlil qilib, soliq yukining kattarog‘i soliq yukidan qochishga imkoniyati kamroq bo‘lgan elastikligi kichikroq iqtisodiy agent zimmasiga tushishini ko‘ramiz. Xususan, agar talab elastikligi nolga teng bo‘lsa, u holda soliq yukining hammasi iste'molchilar zimmasiga tushadi, chunki soliq miqdoridan (demak, narxning kattaligidan ham) qat’iy nazar iste’molchilar xarid hajmini o‘zgartirishmaydi (3.2-rasm).

Biror-bir tovarga talab tamomila elastiklik bilan tavsiflangan holda esa ishlab chiqaruvchilar yutqazadi, chunki iste’molchilar talab darajasini pasaytirish va o‘rnini bosuvchi tovarlarni iste’mol qilish yo‘li bilan soliqdan qochadilar. Bu holda soliq yukining hammasi ishlab chiqaruvchilar zimmasiga tushadi (3.3-rasm).

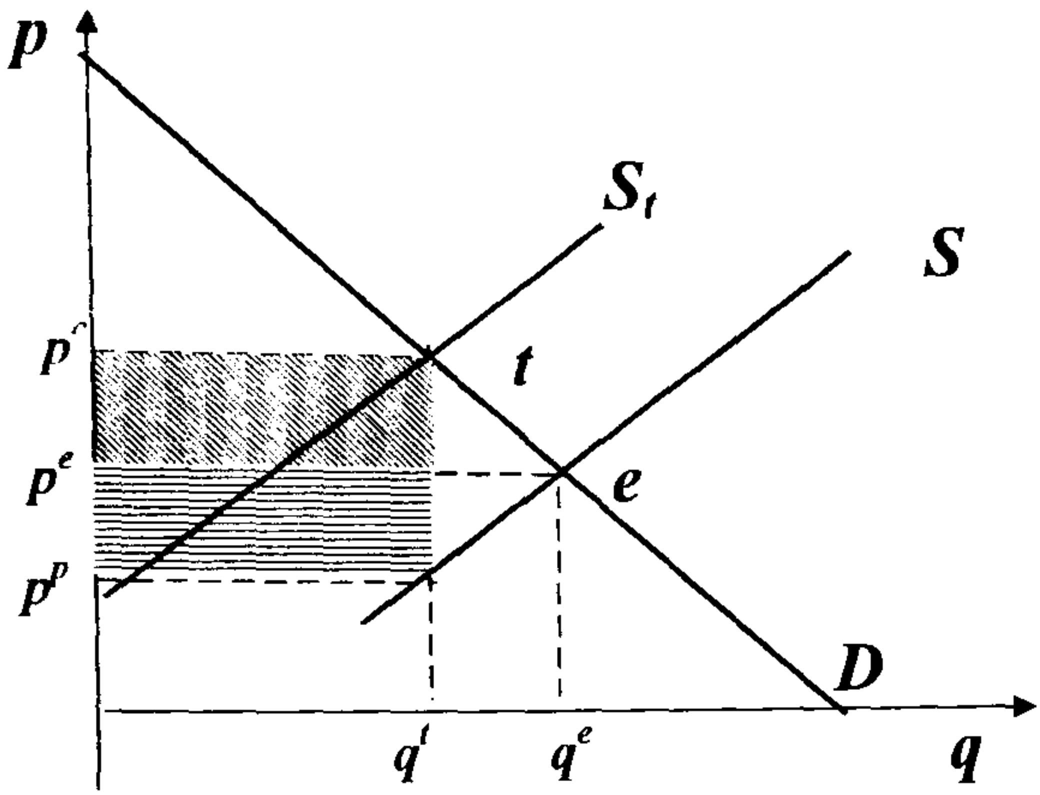
Soliq formal ravishda iste’molchilardan olinadigan holda ham soliq yukining qayta taqsimlanishi yuqoridagiga o‘xshash ravishda amalga oshiriladi. Masalan, xaridor biror-bir xaridga pul to‘layotganda qo‘shimcha patta bo‘yicha ma’lum bir pul miqdorini yoki xarid pulidan foizni davlatga to‘laydi. Bu holda soliqning joriy qilinishi talab chizig‘i D ning chapga siljishiga olib keladi (3.4-rasm).

3.4-rasmni ishlab chiqaruvchilardan soliq olinishi vaziyatini tasvirlovchi 3.1-rasm bilan solishtirishda shuni payqash mumkinki, soliq yuki iste’molchilar bilan ishlab chiqaruvchilar orasida avvalgi holdagiga o‘xshab ularning elastikliklariga teskari proporsional ravishda taqsimlanadi.

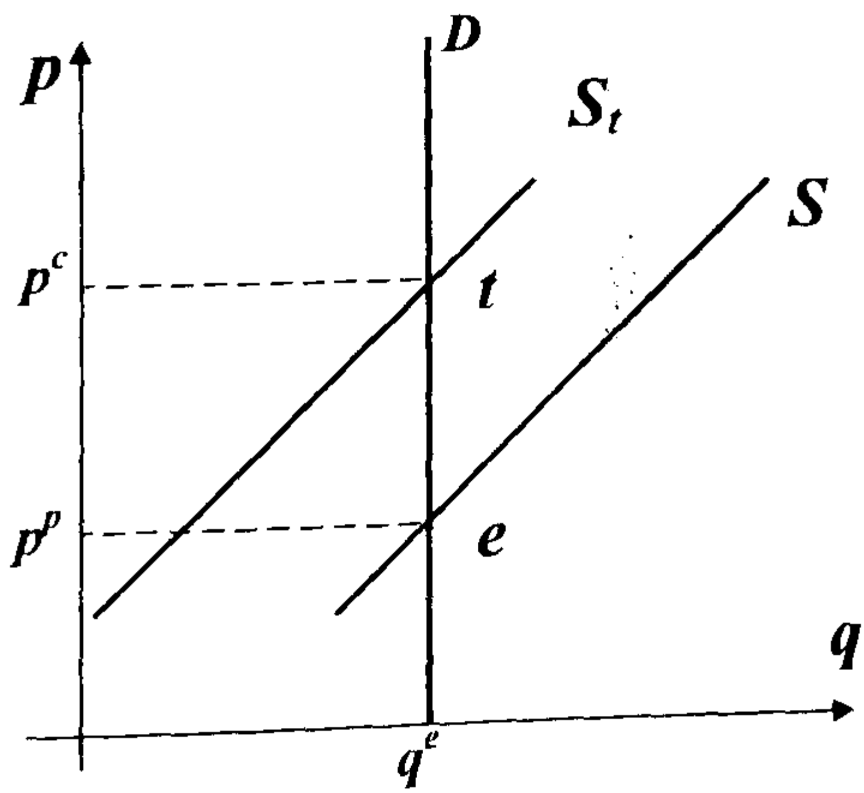
Shunday qilib, formal va haqiqiy soliq to‘lovchilar aynan bir xil emas. Formal soliq to‘lovchi kim bo‘lishidan qat’iy nazar, ayniqsa talab va taklif elastikliklarining farqi ancha katta bo‘lganda, haqiqiy soliq to‘lovchi bo‘lib elastikligi kichikroq iqtisodiy agent maydonga chiqadi.

Soliq stavkasi miqdorining soliq tushumi miqdoriga ta’siri masalasi qaralganda

$$E_t(T)=\frac{t}{T}\cdot\frac{dT}{dt}=1-\frac{\dfrac{t}{p^c}}{\dfrac{1}{|E^D|}+\dfrac{1}{E^S}}$$



3.1-rasm.

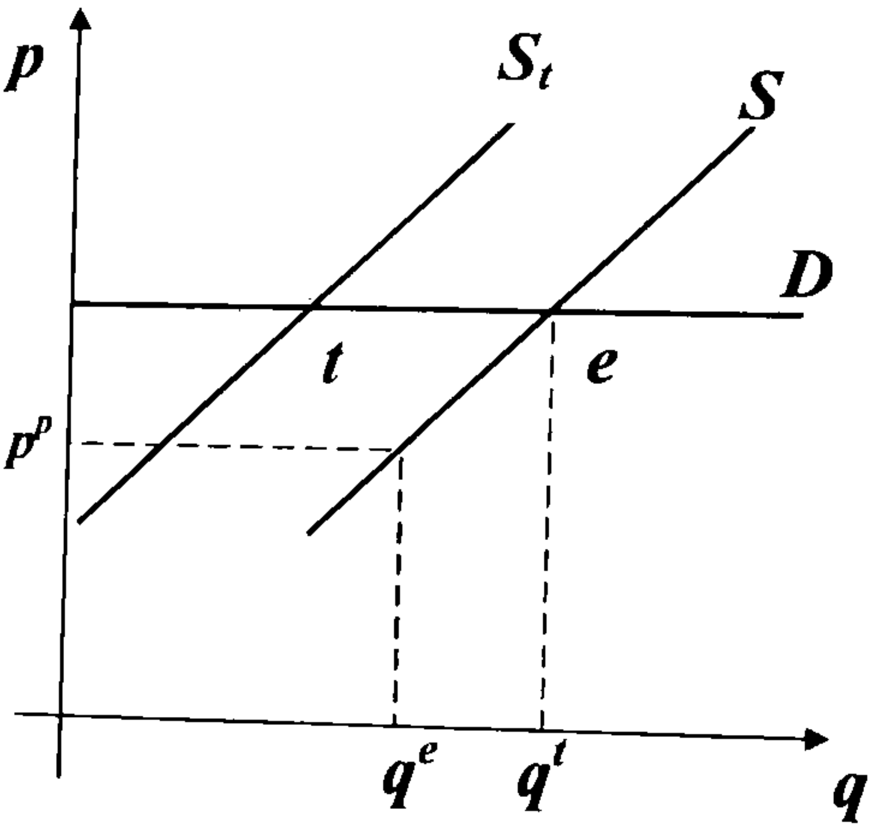


3.2-rasm.

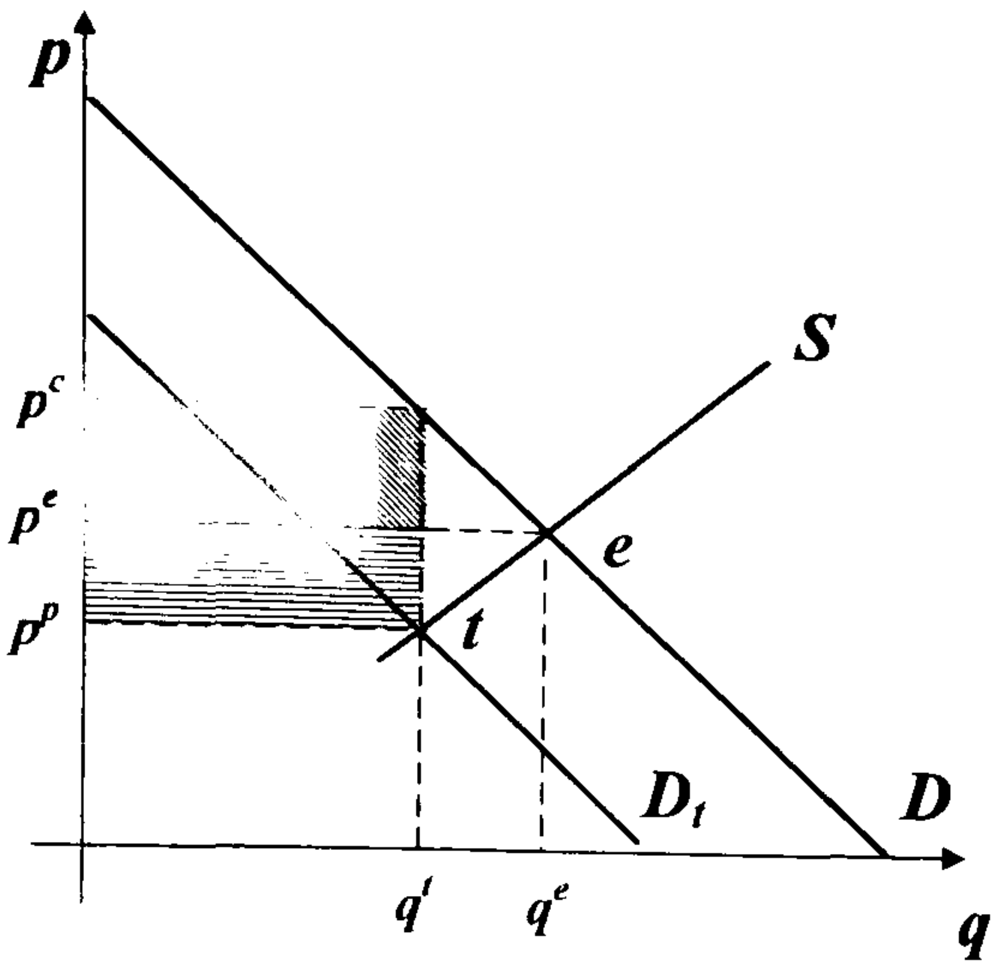
formulani olish mumkin. Bu formuladan ko'rinadiki, soliq stavkasining tovar narxidagi ulushi talab va taklif elastikliklariga teskari kattaliklar yig'indisidan kichikroq bo'lib turgandagina soliq stavkasi oshishi bilan soliq tushumi o'sib boradi.

Bu holat noelastik talabli (yoki taklifi noelastik bo'lgan) tovarlarga (tovar narxidan ancha yuqori bo'lgan) yuqori soliq stavkalari joriy qilishga imkon beradi. Bunga misol sifatida spirtli ichimliklar va tamaki mahsulotlariga aksizlarni keltirish mumkin.

Shunday qilib, talab elastikligi ishlab chiqaruvchilar, tadbirkorlar, o'yingoh, kinoteatr va boshqa muassasalarning egalari, davlat siyosatini ishlab chiquvchilar va boshqa iqtisodiy subyektlar tomonidan narx bo'yicha qarorlar qabul qilinishida muhimdir.



3.3-rasm.



3.4-rasm.

Takrorlash va nazorat uchun savollar:

1. Funksiyaning elastikligi deb nimaga aytiladi va uning iqtisodiyotda qo'llanilishi nima bilan asoslanadi?
2. Elastiklikning qaysi xossalarini bilasiz?
3. Talabning daromad bo'yicha elastikligi va talabning narx bo'yicha kesishuvchi elastikligi qanday formula bilan ifodalanadi?
4. Resurslarning narx bo'yicha elastikligi va bitta resursni boshqasi bilan almashtirishning elastikligi haqida nima bilasiz?
5. Talab elastikligini aniqlaydigan omillarning mohiyati nimada?
6. Hukumat biror-bir tovarlarga u yoki bu soliqlarni joriy qilayotganida qaysi savollarning javobiga ega bo'lishi kerak hamda asosiy soliq yuki birinchi qarashda kimning zimmasiga tushishi kerak?
7. Soliq formal ravishda ishlab chiqaruvchilardan olinadigan soliq olish modelida asosiy soliq yuki zimmasiga tushadigan iqtisodiy agent qanday aniqlanadi?
8. Soliq formal ravishda iste'molchilardan olinadigan soliq olish modelida asosiy soliq yuki zimmasiga tushadigan iqtisodiy agent qanday aniqlanadi?
9. Soliq stavkasi miqdorining soliq tushumi miqdoriga ta'sirini tasvirlovchi formula qanaqa va uning mohiyati nimada?

IV Bob. ISTE'MOL TANLOVI MODELLARI

4.1. Foydalilik funksiyasi va uning xossalari

Iste'molchi tovarlar (mahsulotlar)ni sotib olishga butunlay sarflaydigan I daromadga ega bo'lsin, ya'ni I kattalik ushbu iste'molchining daromadi emas, balki xarajatidir. Narxlar tuzilmasi, daromadi va shaxsiy manfaatlarini hisobga olgan holda iste'molchi ma'lum miqdordagi tovarlarni sotib oladi, uning bunday xatti-harakatlarining matematik modeli *iste'mol tanlovi modeli* deb ataladi.

Ikkita tovardan iborat iste'mol to'plamlarini ko'rib chiqaylik. *Iste'mol to'plami* (qisqacha *to'plam*) — x_1 koordinatasi birinchi tovar miqdoriga, x_2 koordinatasi esa ikkinchi tovar miqdoriga teng bo'lgan $(x_1,\ x_2)$ vektor.

Iste'molchining *tanlovi* afzallik munosabati bilan tavsiflanadi, uning mohiyati quyidagicha. Iste'molchi har bir 2 ta to'plam haqida yo ularning biri ikkinchisiga nisbatan kerakroq, yo ularning ikkalasi ham iste'molchi uchun baribir ekanligini aytishi mumkin deb hisoblanadi. Afzallik munosabati tranzitivdir, va'ni agar $A=(a_1,\ a_2)$ to'plam $B=(b_1,\ b_2)$ to'plamga nisbatan, B to'plam esa $C=(c_1,\ c_2)$ to'plamga nisbatan afzalroq bo'lsa, u holda A to'plam C to'plamga nisbatan afzalroq bo'ladi.

Iste'molchining foydalilik funksiyasi deb $(x_1,\ x_2)$ iste'mol to'plamlari majmuasida aniqlangan shunday $u(x_1, x_2)$ funksiyaga aytiladiki, uning $(x_1,\ x_2)$ iste'mol to'plamidagi $u(x_1, x_2)$ qiymati iste'molchining bu to'plam uchun iste'mol bahosiga teng bo'ladi. $(x_1,\ x_2)$ to'plamning $u(x_1, x_2)$ iste'mol bahosini iste'molchi ushbu $(x_1,\ x_2)$ to'plamni sotib olgan yoki iste'mol qilgandagi iste'molchi ehtiyojlarini qondirish *darajasi* deb atash qabul qilingan. Har bir iste'molchi, umuman olganda, o'zining foydalilik funksiyasiga ega bo'ladi. Agar A to'plam B to'plamdan afzalroq bo'lsa, u holda $u(A) > u(B)$ bo'ladi.

Iste'molchining tovarlarga bo'lgan talabini aniqlovchi foydalilik funksiyasida X-vektorning koordinatalari manfiy bo'lmagan qiymatlarni qabul qilsin va $u(x)$ funksiya o'suvchi yoki hech bo'lmaganda tovarlar soni o'sishi bilan, kamayuvchi bo'lmasin: ya'ni $x_i \le x_{i+1}$ bo'lganda

$$u(x_i) \le u(x_{i+1})$$

bo'lsin. Agar $u(x)$ differensiallanuvchi bo'lsa, bu shartni quyidagicha yozish mumkin:

$$u_i(x) = u_i' \ge 0, \qquad i = 1,2,\ldots n.$$

Ushbu ifodaga asosan

$$u(x) = c$$

shartni qanoatlantiruvchi x -vektorlar to'plamini befarqlik sirti deyiladi. Befarqlik sirti — bu iste'molchi uchun bir xil foydalilikka ega bo'lgan iste'mol rejasi vektorlaridan tashkil topgan to'plamdir.

Foydalilik funksiyasi differensiallanuvchi bo'lib, argumentlarning kichik o'zgarishlari bo'yicha afzallik funksiyasining o'zgarishi to'la differensial orqali ifodalanadi:

$$du(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i=1}^{n} u_i dx_i$$

Befarqlik sirtida yotuvchi nuqtalarda yuqoridagi ifoda nolga teng bo'ladi, ya'ni

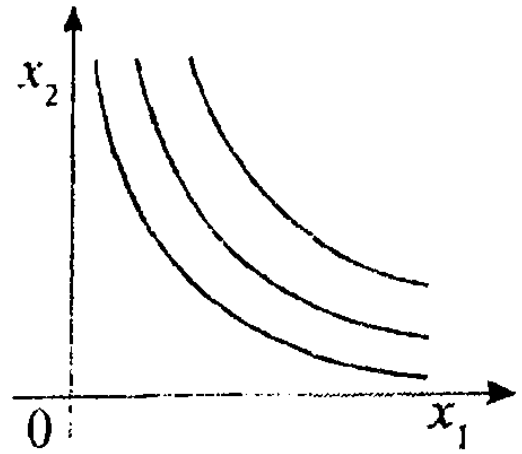
$$\sum_{i=1}^{n} u_i dx_i = 0$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Agar i va j - mahsulotlardan boshqasi o'zgarmasa, u holda yuqoridagidan $u_i dx_i + u_j dx_j = 0$ kelib chiqadi. Bundan esa

$$\frac{dx_i}{dx_j} = -\frac{u_i(x)}{u_j(x)}$$

o'rinli bo'ladi. $-\dfrac{u_i(x)}{u_j(x)}$ miqdorni i va k - mahsulotlarni *ekvivalent almashtirshi koeffitsiyenti* deyiladi va bu koeffitsiyent manfiy bo'ladi.

Agar ikkita mahsulot qaralayotgan bo'lsa, befarqlik chiziqlarini tekislikda quyidagicha tasvirlash mumkin:

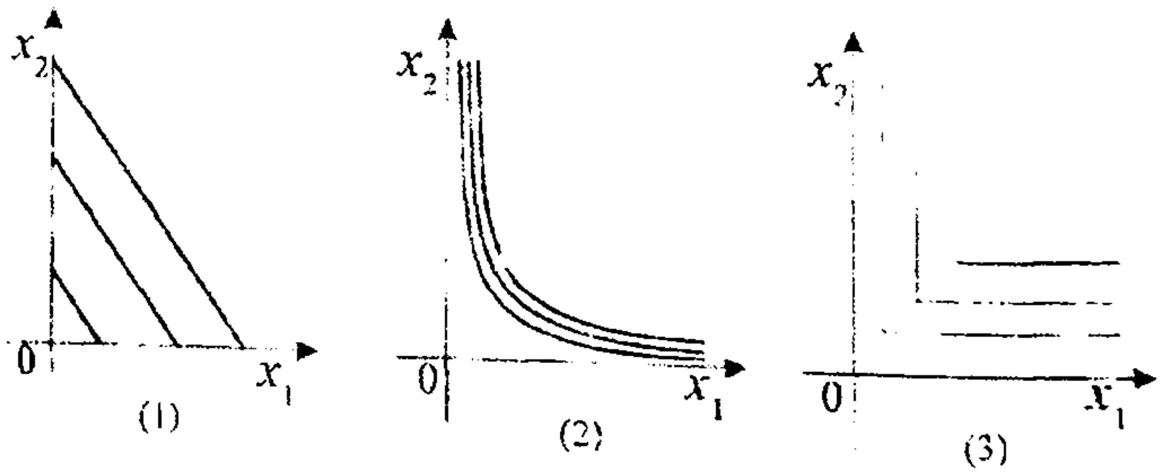


Quyidagi ta'riflarni kiritamiz.

Agar ikkita mahsulotdan biriga bo'lgan talabning ortishi ikkinchisiga bo'lgan talabning pasayishiga olib kelsa, u holda bu mahsulotlarni *o'zaro almashinuvchi* mahsulotlar deyiladi.

Agar ikki mahsulotdan biriga bo'lgan talabning ortishi proporsional ravishda ikkinchi mahsulotga bulgan talabning oritishiga olib kelsa, u holda bu mahsulotlarni o'zaro to'ldiruvchi deyiladi.

Mahsulotlar soni ikkita bo'lgan holda iqtisodiyot nazariyasida va amaliyotda quyidagi funksiyalar qo'llaniladi.



Foydalilik funksiyalarning befarqlik chiziqlari

1. Mahsulotlarni o'zaro to'la almashtirish asosidagi foydalilik funksiyasi:

$$u = b_1 x_1 + b_2 x_2, \qquad b_1, b_2 \geq 0$$

2. Neoklassik foydalilik funksiyasi:

$$u = x_1^{b_1} x_2^{b_2}, \text{ bu yerda } 0 \leq b_1 + b_2 \leq 1$$

3. Mahsulotlarni o'zaro to'la to'ldirish asosidagi foydalilik funksiyasi:

$$u = \min\left(\frac{x_1}{b_1}, \frac{x_2}{b_2}\right) \qquad b_1, b_2 > 0$$

2-ko'rinishdagi foydalilik funksiyalar mikroiqtisodiyot nazariyasida, 1 va 3-ko'rinishdagi funksiyalar chiziqli iqtisodiyotda, jumladan, chiziqli dasturlashda o'rganiladi.

Foydalilik funksiyasi quyidagi xossalarga ega:

1. Mahsulotlardan birining iste'moli ikkinchisining iste'moli o'zgarmas bo'lganda ortishi iste'mol bahosining o'sishiga olib keladi, ya'ni

a) agar $x_1^2 > x_1^1$ bo'lsa, u holda $u(x_1^2, x_2) > u(x_1^1, x_2)$ bo'ladi yoki,

boshqacha aytganda, $\dfrac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} = u_1' > 0$ o'rinli;

b) agar $x_2^2 > x_2^1$ bo'lsa, u holda $u(x_1, x_2^2) > u(x_1, x_2^1)$ bo'ladi yoki,

boshqacha aytganda, $\dfrac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} = u_2' > 0$ o'rinli.

Birinchi tartibli xususiy hosilalar mahsulotlarning *limit foydaliliklarini* beradi: u_1' birinchi mahsulotning limit foydaliligi, u_2' esa ikkinchi mahsulotning limit foydaliligi.

2. Har bir mahsulotning limit foydaliligi uni iste'mol qilish hajmi o'sganda kamayadi (limit foydalilikning bu xossasi *limit foydalilikning kamayish qonuni* deb ataladi), ya'ni

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = u''_{11} < 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = u''_{22} < 0.$$

3. Har bir mahsulotning limit foydaliligi boshqa mahsulot miqdori o'sganda ortadi, ya'ni

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = u''_{12} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} = u''_{21} > 0.$$

Bu holda miqdori fiksirlangan mahsulot nisbatan kamyob bo'lib qoladi. Shuning uchun uning qo'shimcha miqdori ko'proq ahamiyatga ega bo'ladi va samaraliroq iste'mol qilinishi mumkin. Bu xossa barcha tovarlar uchun ham o'rinli bo'lavermaydi: agar tovarlar iste'molda to'la-to'kis bir-birining o'rnini bosishi mumkin bo'lsa, 3-xossa bajarilmaydi.

Birinchi mahsulotni dx_1 ga kamaytirilsa, foydalilik oldingi darajaga chiqishi uchun ikkinchi mahsulotni dx_2 ga orttirish kerak. Shu tariqa, birinchi mahsulot ikkinchisiga almashtiriladi.

$u = const$, bo'lganda $-\frac{dx_2}{dx_1} = m$ ifoda *almashtirishning limit normasi* deyiladi.

$\frac{dx_2}{dx_1}$ taqriban $\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$ ga tengligi ma'lum. $-\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$ bo'linmani birinchi mahsulotni ikkinchi mahsulotga almashtirish normasi deyiladi. Bu birinchi mahsulot iste'moli bir birlikka o'zgarsa (kamaysa yoki ko'paysa), ikkinchi mahsulot iste'moli qanchaga o'zgarish kerakligini ko'rsatadi. Bunda iste'molning umumiy foydaliligining o'zgarmasligi talab qilinadi.

Agar $u(x_1, x_2)$ iste'mol funksiyasida x_1 va x_2 mahsulotlarning iste'moli mos ravishda dx_1 va dx_2 larga o'zgarsa va bitta befarqlik chizig'ida yotsa, u holda

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2=0$$

o'rinli bo'ladi. Bundan almashtirishning limit normasi uchun quyidagi formulani olamiz.

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}/\frac{\partial u}{\partial x_2}=m.$$

Ushbu ifoda almashtirishning limit normasi limit foydaliliklarning nisbati bilan aniqlanishini ko'rsatadi.

Foydalilik funksiyasiga misol sifatida

$$u(x_1,x_2)=a_1\ln(x_1-x_1^*)+a_2\ln(x_2-x_2^*)$$

funksiya xizmat qiladi, bu yerda: $a_1>0$, $a_2>0$, $x_1>x_1^*\geq 0$, $x_2>x_2^*\geq 0$.

Haqiqatan,

$$u_1'=\frac{a_1}{x_1-x_1^*}>0,\qquad u_2'=\frac{a_2}{x_2-x_2^*}>0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}=-\frac{a_1}{(x_1-x_1^*)^2}<0,\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=-\frac{a_2}{(x_2-x_2^*)^2}<0$$

ga ega bo'lamiz, ya'ni foydalilik funksiyasining 1- va 2-xossalari bajariladi. 3-xossa bajarilmaydi, chunki $u(x_1,x_2)$ funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalari nolga teng.

4.2. Iste'mol tanlovi masalasi, uning yechimi va xossalari

Iste'mol tanlovi masalasi (iste'molchining bozordagi ratsional xatti-harakati masalasi) iste'molchining foydalilik funksiyasiga berilgan budjet cheklovida maksimal qiymat beruvchi $(x_1^0,\ x_2^0)$ iste'mol to'plamini tanlashdan iborat.

Budjet cheklovi mahsulotlarga pul xarajatlari pul daromadidan oshmasligini, ya'ni $p_1x_1+p_2x_2\leq I$ ekanligini anglatadi, bu yerda p_1 va

p_2 — mos ravishda birinchi va ikkinchi mahsulotlar bir birligining bozor narxlari, I esa — iste'molchining birinchi va ikkinchi mahsulotlarni sotib olish uchun sarflashga tayyor bo'lgan daromadi. p_1, p_2 va I kattaliklar berilgan bo'ladi.

Formal ravishda iste'mol tanlovi masalasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$p_1x_1 + p_2x_2 \le I,$$
$$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0$$

shartlarda

$$u(x_1, x_2) \ (\max).$$

Iste'mol tanlovi masalasining yechimi bo'luvchi (x_1^0, x_2^0) to'plamni iste'molchi uchun *optimal yechim* yoki iste'molchining *lokal bozor muvozanati* deb atash qabul qilingan.

Ushbu qo'yilishda iste'mol tanlovi masalasi chiziqli bo'lmagan programmalash masalasi bo'ladi. Biroq, agar biror-bir (x_1, x_2) iste'mol to'plamida $p_1x_1 + p_2x_2 \le I$ budjet cheklovi qat'iy tengsizlik ko'rinishda bajarilsa, u holda biz mahsulotlardan birining iste'molini va shu tariqa foydalilik funksiyasini ko'paytirishimiz mumkin. Demak, foydalilik funksiyasiga maksimal qiymat beruvchi (x_1^0, x_2^0) to'plam budjet cheklovini tenglikka aylantirishi, ya'ni $p_1x_1^0 + p_2x_2^0 = I$ bo'lishi kerak.

Biz, shuningdek, (x_1^0, x_2^0) optimal nuqtada $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$ shartlar $u(x_1, x_2)$ funksiyaning xossalaridan kelib chiqib avtomatik ravishda bajariladi deb hisoblaymiz. Odatda, bu haqiqatan ham shunday. Ayni bir paytda, agar o'zgaruvchilarning nomanfiyligi shartlari masala shartiga oshkor holda qo'shilmasa, u holda ushbu masala matematik jihatdan ancha sodda holga keladi.

Demak, iste'mol tanlovi masalasini

$$p_1x_1 + p_2x_2 = I$$

shartda

$$u(x_1, x_2) \ (\max)$$

ko'rinishdagi shartli ekstremumni topish masalasi bilan almashtirish mumkin (chunki bu ikki masalaning $(x_1^0,\ x_2^0)$ yechimi bir xil).

Bu shartli ekstremumni topish masalasini yechish uchun Lagranj usulidan foydalanamiz.

$$L(x_1, x_2, \lambda) = u(x_1, x_2) + \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - I)$$

Lagranj funksiyasini yozib, uning x_1, x_2, λ o'zgaruvchilar bo'yicha birinchi tartibli xususiy hosilalarini topamiz va ularni nolga tenglaymiz:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = u_1' - \lambda \cdot p_1 = 0,\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = u_2' - \lambda \cdot p_2 = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = p_1 x_1 + p_2 x_2 - I = 0.$$

Hosil qilingan uch noma'lumli uchta tenglamalar sistemasidan λ noma'lumni yo'qotib, ikki x_1, x_2 noma'lumli

$$\frac{u_1'}{u_2'} = \frac{p_1}{p_2},$$

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = I,$$

ikkita tenglamalar sistemasini hosil qilamiz va undan iste'mol tanlovi masalasining $(x_1^0,\ x_2^0)$ yechimini topamiz.

Iste'mol tanlovi masalasi $(x_1^0,\ x_2^0)$ yechimining x_1^0 va x_2^0 koordinatalari p_1, p_2 va I parametrlarning funksiyalaridir:

$$x_1^0 = x_1^0(p_1, p_2, I),$$
$$x_2^0 = x_2^0(p_1, p_2, I).$$

Hosil qilingan funksiyalar birinchi va ikkinchi mahsulotga *talab funksiyalari* deb ataladi. Talab funksiyalarining muhim xossasi narxlar va daromadga nisbatan ularning nolinchi darajadagi bir jinsliligidir, ya'ni talab funksiyalarining qiymatlari narxlar va daromadning proporsional o'zgarishiga nisbatan invariantdir: ixtiyoriy $\alpha > 0$ son uchun

$$x_1^0(\alpha p_1, \alpha p_2, \alpha I) = x_1^0(p_1, p_2, I),$$
$$x_2^0(\alpha p_1, \alpha p_2, \alpha I) = x_2^0(p_1, p_2, I)$$

o'rinlidir. Bu barcha narxlar va daromad ayni bir xil martaga o'zgarsa ham, (birinchi yoki ikkinchi — farqi yo'q) mahsulotga talab kattaligi o'zgarmasligini anglatadi.

Ikkita tovarli bitta sodda iste'mol tanlovi masalasini yechaylik. Bu tovarlarning noma'lum miqdorlari x_1 va x_2 ga, ularning bozor narxlari esa mos ravishda p_1 va p_2 ga teng bo'lsin. Qaralayotgan masala

$$u(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 \ (\max) \qquad (4.1)$$

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \le I, \qquad (4.2)$$

$$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0 \qquad (4.3)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Biz aniqlaganimizdek, optimal nuqtada budjet cheklovi tenglik ko'rinishida bajarilishi kerak, binobarin, ikkala tovar o'ta zarur bo'lgani uchun (agar ulardan biri yo'q bo'lsa, foydalilik nolga teng bo'ladi) o'zgaruvchilarning nomanfiyligi shartlari avtomatik ravishda bajariladi. Demak, yechilayotgan matematik programmalash masalasi shartli ekstremumni topishning klassik masalasiga aylanadi. Ekstremumning zaruriy shartlarini yozib (ularga asosan tovarlar limit foydaliliklarining nisbatlari ularning bozor narxlari nisbatlariga teng bo'lishi kerak, budjet cheklovi esa tenglik ko'rinishida bajariladi),

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2},$$

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = I$$

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

Bundagi birinchi shart qaralayotgan masalada ikkala tovarga sarflanadigan pul miqdorlari bir xil, ya'ni $x_2 \cdot p_2 = x_1 \cdot p_1$ bo'lishi kerakligini anglatadi. Bu foydalilik funksiyasida x_1 va x_2

o'zgaruvchilarning «vaznlari» yoki daraja ko'rsatkichlari tengligidan kelib chiqadi. Demak, $x_2 \cdot p_2 = x_1 \cdot p_1 = \frac{I}{2}$ va talab funksiyalari

$$x_1 = \frac{I}{2 \cdot p_1}; \; x_2 = \frac{I}{2 \cdot p_2} \tag{4.4}$$

ko'rinishni oladi.

Shunday qilib, har bir tovarga sarf-xarajat iste'molchi umumiy daromadining yarmini tashkil etadi va har bir tovarning zaruriy miqdorini topish uchun shu tovarga sarflanadigan mablag'ni uning narxiga bo'lish lozim.

4.3. Iste'mol tanlovining umumiy modeli

Endi tovarlar soni ixtiyoriy va maqsad funksiyasi umumiy ko'rinishda bo'lgan iste'mol tanlovi masalasining xossalarini ko'rib chiqaylik.

Iste'molchining $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (x_i — i-nchi tovar miqdori) foydalilik maqsad funksiyasi, $\bar{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ narxlar vektori va I daromad berilgan bo'lsin. Budjet chekiovi va nomanfiylik cheklovlarini yozib,

$$\bar{p}\,\bar{x} \le I,$$
$$\bar{x} \ge 0$$

shartlarda

$$u(\bar{x}) \; (\max)$$

ko'rinishdagi masalani olamiz, bu yerda $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\bar{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $\bar{p}\,\bar{x} = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$.

Avvalgidek, o'zgaruvchilarning nomanfiyligi maqsad funksiyasi va budjet cheklovining xossalari bilan ta'minlanadi deb hisoblaymiz. Bu holda Lagranj funksiyasini yozib, uni shartsiz ekstremumga tekshirish mumkin.

$L(\bar{x}, \lambda) = u(\bar{x}) + \lambda(\bar{p}\,\bar{x} - I)$ Lagranj funksiyasi ekstremumining zaruriy shartlari — xususiy hosilalarning nolga tengligi:

barcha $i=\overline{1,n}$ uchun $L'_i = u'_i + \lambda p_i = 0$ (4.5)

va

$$L'_\lambda = \overline{p}\,\overline{x} - I = 0.$$

Bu yerdan barcha i, j lar uchun $\overline{x}^0$ lokal bozor muvozanati nuqtasida (4.5) shartlardagi ikkinchi qo‘shiluvchilarni o‘ng tomonga olib o‘tib, i-nchi tenglikni j-nchi tenglikka bo‘lishdan hosil bo‘ladigan

$$\frac{u'_i}{u'_j} = \frac{p_i}{p_j} \qquad (4.6)$$

tenglik bajarilishi kelib chiqadi. Demak, optimal nuqtada ixtiyoriy ikkita tovar limit foydaliliklarining nisbati ularning bozor narxlarining nisbatiga teng. (4.6) tenglikni

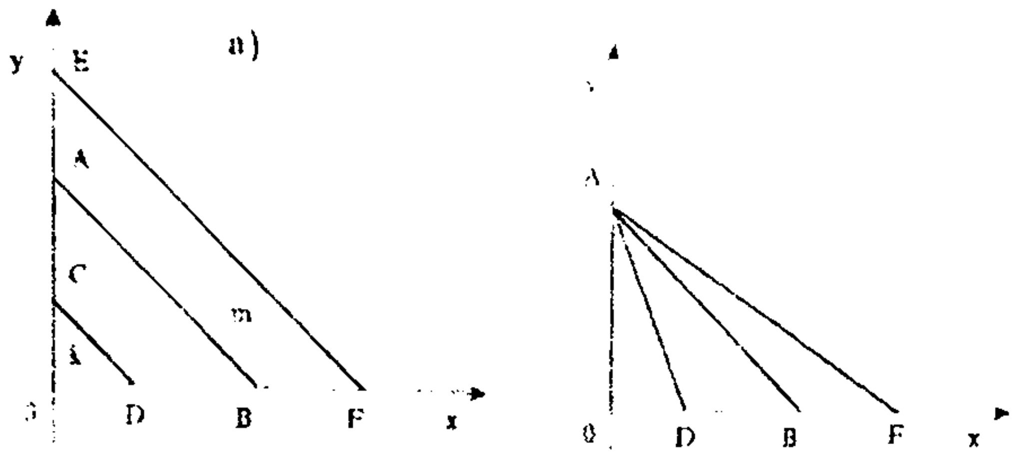
$$\frac{u'_i}{p_i} = \frac{u'_j}{p_j}$$

ko‘rinishda ham qayta yozish mumkin.

Ushbu tenglik qo‘shimcha pul xarajati birligiga to‘g‘ri keluvchi qo‘shimcha foydalilik optimal nuqtada barcha tovarlar bo‘yicha bir xil ekanligini anglatadi. Agar bunday bo‘lmaganda, kamida bitta pul birligini iste’molchining farovonligi (foydalilik funksiyasining qiymati) o‘sadigan qilib qayta taqsimlash mumkin bo‘lar edi. Agar ba’zi i, j lar uchun $\frac{u'_i}{p_i} > \frac{u'_j}{p_j}$ o‘rinli bo‘lganda, pulning ma’lum miqdorini i-nchi tovardan j-nchi tovar uchun qayta taqsimlash mumkin bo‘lar edi, bunda farovonlik darajasi oshardi.

Har bir iste’molchinnng afzallik munosabatlari befarqlik chiziqlar yordamida, iste’mol imkoniyatlari esa budjet chegaralashlar orqali ifodalanadi.

Umumiy ko‘rinishdagi $p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n = I$ tenglama bilan aniqlanadigan to‘g‘ri chiziqni budjet chizig‘i deb ataladi. Ikki xil iste’mol tovarlari uchun budjet chizig‘ining grafigi quyidagi ko‘rinishga ega.



Budjet chizig'ining daromad va tovar bahosi har xil bo'lgandagi o'zgarishi

Chizmadan ko'rinadiki, oila AB budjet chizig'idan pastda joylashgan (masalan, k nuqtasi) xohlagan variant bilan ko'rsatilgan tovarlarni sotib olish mumkin, ammo m nuqtadagi variantdan foydalanish mumkin emas, chunki budjet chegaralangan.

Agar daromad kamaysa, budjet chizig'i, baho o'zgarmaganda, AB chizig'iga parallel ravishda pastdan o'tadi: CD chizig'i. Bunda oila ozroq tovar sotib olishiga to'g'ri keladi. Daromad ko'payganda esa, baho o'zgarmas bo'lganda, ko'proq tovar sotib olish imkoniyat paydo bo'ladi va EF budjet chizig'i AB chizig'iga parallel ravishda yuqoridan ko'tariladi. Agar daromad va baho proporsional ravishda bir xil o'zgarsa budjet chizig'i o'zgarmaydi.

Agar oila daromadi o'zgarmasdan, x_1 va x_2 tovarlarga baho kamaysa, ko'proq tovar sotib olinishi mumkin bo'ladi, shuning uchun budjet chizig'i o'ngga siljiydi, va aksincha, x_1 va x_2 tovarlarga baho ko'tarilsa, tovar sotib olish imkoniyati pasayadi va budjet chizig'i chapga siljiydi, masalan, b)-rasmdagi AD budjet chizig'i tovarlar bahosini ortishi, AF esa tovarlar bahosini kamayishi tufayli hosil bo'ldi. Demak, daromad va bahoni o'zgarishi budjet chizig'i holatini o'zgartiradi.

4.4. Tovarlar bir-birining o'rnini bosishi. Kompensatsiya samaralari

Agar talab funksiyasi $x_i = \frac{I}{np_i}$ ko'rinishda bo'lsa, u holda i-nchi tovarga talab ixtiyoriy j-nchi tovar narxiga bog'liq emas. Umuman olganda, narxlarning kesishuvchi talab funksiyalari tovarlarning bir-birining o'rnini bosish va bir-birini to'ldirish kabi xossalarini tavsiflaydi. Agar i-nchi tovarning narxi oshib, unga talab kamayganda j-nchi tovarga talab oshsa, bu tovarlar bir-birining o'rnini bosadi. Aksincha, agar j- nchi tovarga talab ham kamaysa, ular bir-birini to'ldiradi.

Ta'kidlash joizki, haqiqatdagi bir-birining o'rnini bosish i-nchi tovarning narxi o'sganda farovonlikning umumiy pasayishi tufayli buzilishi mumkin: j-nchi tovar iste'molda i-nchi tovarning o'rnini bosishi mumkin, lekin unga talab oshmasligi mumkin, chunki iste'molchining umumiy farovonligi pasaygan. Bu buzilishni yo'qotish uchun *narxning kompensatsiyalangan o'zgarishi*, ya'ni iste'molchiga farovonligining avvalgi darajasini ushlab turishga imkon beruvchi daromadining oshishini taqozo qiluvchi o'zgarishi tushunchasidan foydalaniladi.

Kompensatsiya samaralarini formal ravishda tahlil qilish uchun ikkita masalani ko'rib chiqaylik.

Avval (4.1) – (4.3) masalani tovarlarning $p_1 = 10$, $p_2 = 2$ narxlari va iste'molchining $I = 60$ daromadi bilan yechamiz. U holda (4.4) formulaga asosan, $x_1 = \frac{60}{2\cdot 10} = 3$, $x_2 = \frac{60}{2\cdot 2} = 15$ va $u(x_1, x_2) = 45$ bo'ladi.

Endi p_2 2 dan 7 ga o'zgarsin. Kompensatsiyaning zaruriy miqdori qanday? Iste'molchiga avvalgi optimal to'plamni xarid qilish uchun qo'shimcha $(7-2)\cdot 15 = 75$ pul birligi zarur. Biroq iste'molning avvalgi tarkibi yangi narxlarda optimal bo'lmaydi, chunki bu holda

$$x_1 = \frac{60+75}{2\cdot 10} = 6{,}75, \quad x_2 = \frac{60+75}{2\cdot 7} \approx 9{,}64 \quad \text{va} \quad u(x_1, x_2) \approx 65$$

bo'ladi.

Iste'molchi farovonligining avvalgi darajasini ushlab turishi uchun qo'shimcha M pul birligi olsin. U holda yangi narxlarda uning birinchi va ikkinchi tovarga bo'lgan talabi mos ravishda $x_1 = \dfrac{60+M}{2\cdot 10}$ va $x_2 = \dfrac{60+M}{2\cdot 7}$ ga teng bo'ladi. $x_1 \cdot x_2$ maqsad funksiyasi $\dfrac{(60+M)^2}{10\cdot 7\cdot 4}$ ga teng bo'lib, bu ifoda boshlang'ich $u(x_1, x_2) = 45$ qiymatga teng bo'lishi kerak. Bu yerdan $M \approx 52{,}25$ kelib chiqadi, bu esa 75 dan ancha kam.

Endi (4.1) – (4.3) masalani umumiyroq ko'rinishda yechamiz.

$$x_i = \frac{I}{2p_i}\,;\ \frac{\partial x_i}{\partial p_i} = -\frac{I}{2p_i^2}\,;\ \frac{\partial x_i}{\partial I} = \frac{1}{2p_i}\,;\ \frac{\partial x_i}{\partial p_j} = 0\ \ (i, j = \overline{1,2})$$

ekanligi ravshan.

p_1 narx endi z marta ($z > 1$) oshsin va bunda iste'molchi zaruriy kompensatsiyani oladi. Daromadning yangi miqdorini I^* orqali, talabnikini esa x_1^* va x_2^* orqali belgilaylik.

$$x_1^* = \frac{I^*}{2zp_1}\cdot\ x_2^* = \frac{I^*}{2p_2}$$

ekanligi, kompensatsiya sharti esa

$$\frac{(I^*)^2}{4zp_1p_2} = \frac{I^2}{4p_1p_2}$$

ko'rinishda bo'lishi ravshan, bu yerdan

$$I^* = \sqrt{z}\cdot I\,;\ x_1^* = \frac{x_1}{\sqrt{z}}\,;\ x_2^* = x_2\sqrt{z}$$

kelib chiqadi.

Demak, birinchi tovarga bo'lgan talab kompensatsiyali holda $\sqrt{z}$ martaga kamayadi (kompensatsiyasiz holdagi z marta emas), ikkinchi tovarga bo'lgan talab esa $\sqrt{z}$ marta oshadi. Ikkinchi tovar narxi o'sgan holda vaziyat tamomila simmetrik bo'ladi.

Shunday qilib, $i=1$, $j=2$ da yoki $i=2$, $j=1$ da $\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial p_j}\right)_{comp} > 0$ bo'ladi. *comp* indeksi talabning kesishuvchi xususiy hosilasi farovonlikning avvalgi darajasini ushlab turishga zarur bo'lgan daromad kompensatsiyasida hisoblanishini anglatadi. Kompensatsiya sharti «daromad samarasi»ni yo'qotib, faqat «o'rnini bosish samarasi»ni qoldiradi, bu esa tovarlar bir-birining o'rnini bosishi va bir-birini to'ldirishi tushunchalarini yanada aniqroq ta'riflashga va bu tavsiflarni baholashga imkon beradi.

i-nchi va j-nchi tovarlar $\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial p_j}\right)_{comp} > 0$ va $\left(\dfrac{\partial x_j}{\partial p_i}\right)_{comp} > 0$

bo'lganda (bu ikki shart teng kuchli) *bir-birining o'rnini bosuvchi* hamda $\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial p_j}\right)_{comp} < 0$ va $\left(\dfrac{\partial x_j}{\partial p_i}\right)_{comp} < 0$ bo'lganda *bir-birini to'ldiruvchi* deb ataladi.

Endi bu xususiy hosilalarni qaralayotgan masala uchun p_1 z marta o'sganda hisoblaymiz. Bu holda orttirmalar

$$\Delta x_1 = \frac{x_1}{\sqrt{z}} - x_1;\ \Delta x_2 = x_2\sqrt{z} - x_2;\ \Delta p_1 = z p_1 - p_1$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu yerdan

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right)_{comp} = \lim_{z\to 1}\frac{x_1(1-\sqrt{z})}{p_1\sqrt{z}\cdot(z-1)} = \lim_{z\to 1}\left(-\frac{x_1}{p_1\sqrt{z}(1+\sqrt{z})}\right) =$$

$$= -\frac{x_1}{2}p_1 = -\frac{I}{4p_1^2},$$

$$\left(\frac{\partial x_2}{\partial p_1}\right)_{comp} = \lim_{z\to 1}\frac{x_2(\sqrt{z}-1)}{p_1\sqrt{z}\cdot(z-1)} = \lim_{z\to 1}\frac{x_2}{p_1\sqrt{z}(\sqrt{z}+1)} = \frac{x_2}{2p_2} = \frac{I}{4p_1p_2}$$

ekanligi kelib chiqadi.

Oxirgi kattalik musbat va bu qaralayotgan masalada tovarlar bir birining o'rnini bosishi haqida dalolat beradi.

Takrorlash va nazorat uchun savollar:

1. Iste'mol tanlovi modeli deb nimaga aytiladi va iste'mol to'plami nima?
2. Iste'molchi tanlovining mohiyati nimada, iste'molchining foydalilik funksiyasi deb nimaga aytiladi va iste'molchi ehtiyojlarini qondirish darajasi nima?
3. Foydalilik funksiyasi qanday xossalarga ega, mahsulotning limit foydaliligi deb nimaga aytiladi?
4. Iste'mol tanlovi masalasi, budjet cheklovi, iste'molchining lokal bozor muvozanati nima?
5. Iste'mol tanlovi masalasini qaysi masala bilan almashtirish mumkin va nima uchun?
6. Iste'mol tanlovi masalasini yechish uchun Lagranj usuli qanday qo'llaniladi, talab funksiyasi deganda nimani tushuniladi?
7. Tovarlar soni ixtiyoriy va maqsad funksiyasi umumiy ko'rinishda bo'lgan iste'mol tanlovi masalasining xossalari to'g'risida nimalarni bilasiz?
8. Narxning kompensatsiyalangan o'zgarishi nima va u qaysi maqsad uchun ishlatiladi?
9. Kompensatsiya samaralari haqida nima bilasiz, qaysi shartlarda tovarlar bir-birining o'rnini bosuvchi, qaysilarida esa bir-birini to'ldiruvchi bo'ladi?
10. Iste'molchi farovonligining avvalgi darajasini ushlab turishi uchun qo'shimcha pul birligi miqdori qanday aniqlaniladi?

V Bob. ISHLAB CHIQARISH MODELLARI

5.1. Ishlab chiqarish funksiyasi haqida tushuncha

Har qanday iqtisodiy ishlab chiqarish jarayonini hamda butun xalq xo'jaligi, moddiy ishlab chiqarish sohasi, iqtisodiy hudud, ishlab chiqarish birlashmasi yoki alohida korxona bo'lishidan qat'i nazar har qanday ishlab chiqarish birligining ishlab chiqarish texnologiyasini modellashtirish moddiy ishlab chiqarish qonuniyatlari, taqsimoti va iste'mol asosida amalga oshiriladi. Bu maqsadga erishishda ishlab chiqarish funksiyalari muhim rol o'ynaydi.

Ishlab chiqarish funksiyasi ishlab chiqarish faoliyati natijalarining ularni taqozo etgan ko'rsatkich-omillarga bog'liqligining iqtisodiy-matematik ifodasidir. Iqtisodiy sharoitlarda ishlab chiqarish jarayoni natijasi ko'p sonli turli, ya'ni iqtisodiy, ijtimoiy, texnik, tabiiy omillarning ta'siri bilan aniqlanadi. Bu omillarning hammasini ham ishlab chiqarish funksiyasida hisobga olish mumkin emas, chunki omillarning ba'zilari miqdoriy jihatdan ifodalanmaydi, boshqalarining ta'siri esa amalda juda kichik. Shuning uchun ishlab chiqarish funksiyasi o'rganilayotgan ko'rsatkichga hal qiluvchi ta'sir ko'rsatadigan omillarni o'z ichiga oladi.

Ishlab chiqarish funksiyasi deb $x_1, \ldots, x_n$ erkli o'zgaruvchilari sarflanadigan yoki foydalaniladigan resurslar (ishlab chiqarish omillari) hajmlarining qiymatlarini qabul qiladigan (o'zgaruvchilar soni n resurslar soniga teng), funksiyaning qiymati esa ishlab chiqarish hajmlari kattaligini anglatadigan

$$y = f(\bar{x}, \bar{a}) = f(x_1, \ldots, x_n, \bar{a})$$

funksiyaga aytiladi. Bu yerda $\bar{a}$ — ishlab chiqarish funksiyasi (ICHF) parametrlarining vektori.

1-misol. f ICHFni $f(x, a, b) = ax^b$ ko'rinishda olaylik, bu yerda x — sarflanayotgan resurs (masalan, ish vaqti) miqdori, $f(x, a, b)$ — ishlab chiqarilayotgan mahsulot hajmi (masalan, jo'natilishga tayyor bo'lgan muzlatgichlar soni). $a > 0$ va $0 < b \leq 1$ kattaliklar — f ICHFning parametrlari, parametrlar vektori ikki o'lchovli (a, b) vektor bo'ladi.

$y = ax^b$ funksiyaning xossalaridan sarflanayotgan resurs miqdori x o'sganda ishlab chiqarish hajmi y ning o'sishi, biroq bunda resursning har bir qo'shimcha birligi ishlab chiqarilayotgan mahsulot hajmi y ning tobora kamroq o'sishini berishi kelib chiqadi. Ushbu holat (x kattalik o'sganda y hajmning o'sishi va y hajm o'sishining kamayishi) iqtisodiyot nazariyasining *kamayuvchi samaradorlik qonuni* deb ataluvchi asosiy qoidasini aks ettiradi. $y = ax^b$ ICHF bir faktorli ishlab chiqarish funksiyalari keng sinfining tipik vakili bo'ladi.

ICHFlar turli qo'llanilish sohalariga ega bo'lishi mumkin. «Xarajatlar – ishlab chiqarish» tamoyili ham mikro, ham makroiqtisodiy darajada amalga oshirilishi mumkin.

Alohida korxona (firma), tarmoq, tarmoqlararo ishlab chiqarish majmuasi mikroiqtisodiy darajada ishlab chiqarish tizimi sifatida qatnashishi mumkin. Bu holda ishlab chiqarish funksiyalari asosan tahlil va rejalashtirish masalalarini, shuningdek, bashoratlash masalalarini yechish uchun quriladi va ishlatiladi.

Makroiqtisodiy darajada esa ishlab chiqarish tizimi sifatida hudud yoki butun mamlakat (aniqrog'i, hudud yoki mamlakatning xo'jalik tizimi) qatnashadi. Bu holda ishlab chiqarish funksiyalari uchchala ko'rinishdagi (tahlil, rejalashtirish va bashoratlash) masalalarni yechish uchun quriladi va faol ishlatiladi.

Ishlab chiqarish funksiyalari statik i dinamik ishlab chiqarish funksiyalariga bo'linadi. *Statik ishlab chiqarish funksiyalarida* vaqt o'rganilayotgan bog'lanishning asosiy tavsiflarini o'zgartiradigan omil sifatida hisobga olinmaydi. *Dinamik ishlab chiqarish funksiyalari* vaqt omilini o'z ichiga oladi: ularda vaqt natijaga ta'sir qiluvchi mustaqil o'zgaruvchi sifatida qaralishi mumkin; parametrlar va ko'rsatkich-omillar vaqtning funksiyalari sifatida qaralishi mumkin.

2-misol. Alohida hudud yoki butun mamlakatni modellashtirish uchun (ya'ni makroiqtisodiy, shuningdek mikroiqtisodiy darajadagi masalalarni yechish uchun) $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$ ko'rinishdagi ICHF ko'p ishlatiladi, bu yerda a_0, a_1, a_2 — ICHF parametrlari. Bular musbat o'zgarmas sonlardir (ko'pincha a_1 va a_2 lar $a_1 + a_2 = 1$ shartni qanoatlantiradi). Yuqorida keltirilgan ko'rinishdagi ICHF 1929 yilda uni ishlatishni taklif etgan ikkita amerikalik iqtisodchilar nomlari bo'yicha *Kobb-Duglasning ishlab chiqarish funksiyasi* (KDICHF) deb ataladi.

P.Duglas va D.Kobb statistik ma'lumotlar asosida qayta ishlash sanoatidagi ishlab chiqarilgan mahsulot va unga ta'sir etuvchi kapital va mehnat xarajatlarining bog'lanishini aks ettiruvchi matematik modelni qurishdi. KDICHF o'zining sodda tuzilishi tufayli turli-tuman nazariy va amaliy masalalarni yechish uchun faol ishlatiladi. KDICHFning tatbiqlarida $x_1 = K$ ishlatilayotgan asosiy kapital hajmiga, $x_2 = L$ esa mehnat xarajatlariga teng bo'lganda KDICHF adabiyotlarda ko'pincha ishlatiladigan

$$Y = a_0 K^{a_1} L^{a_2}$$

ko'rinishini oladi.

Bu yerda $a_0 > 0,\ a_1, a_2 \geq 0,\ a_1 + a_2 = 1.$

AQSHning 1899–1922 yillardagi iqtisodiy holati bo'yicha statistik ma'lumotlari asossida a_0, a_1, a_2 parametrlarning son qiymatlari topilib, KDICHF $Y = 1{,}01 K^{0{,}25} L^{0{,}75}$ ekanligi aniqlangan.

1960-1985 yillar davridagi sobiq SSSR iqtisodiyoti bo'yicha ma'lumotlar asosida a_0, a_1, a_2 parametrlarning son qiymatlari hisoblangan va KDICHF $Y = 1{,}022 K^{0{,}5382} L^{0{,}4618}$ ko'rinishga ega bo'lgan.

Yuqoridagi parametrlar vaqt bo'yicha qatorlar (resurslar va ishlab chiqarish hajmining yillar davomida o'zgarishi) asosida aniqlanganligi uchun KDICHF dinamik xarakterga ega bo'lib, uning yordamida makroiqtisodiyotni bashoratlash masalasini yechish mumkin. Agar KDICHFning parametrlari T_0 vaqt davomidagi ma'lumotlar bo'yicha baholangan bo'lsa, bashoratlash davrini T_0 /3 davrgacha olish tavsiya etiladi.

5.2. Ishlab chiqarish funksiyalarining ko'rinishlari va xossalari

Ishlab chiqarish funksiyalari qator xossalarga ega, bu xossalarning ba'zilari ICHFlarning hammasi uchun ham bajarilavermaydi. Bu xossalarni ikki faktorli ICHF uchun ko'rib chiqamiz. $f(x) = f(x_1, x_2)$ ICHF $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ uchun aniqlangan.

1-xossa. Resurslarning kamida bittasi yo'q bo'lsa, ishlab chiqarish bo'lmaydi:

$$f(0, x_2) = f(x_1, 0) = 0.$$

Masalan, ishlab chiqarishga jalb etilgan mehnat resurslarisiz mahsulot yetishtirib bo'lmaydi.

2-xossa. Resurslardan kamida bittasining sarfi ko'paysa, ishlab chiqarish hajmi o'sadi:

$$x_1 \leq z_1, x_2 \leq z_2 \Rightarrow f(x_1, x_2) \leq f(z_1, z_2).$$

Mehnat resurslaridan birortasining sarfini ko'paytirilsa mahsulot ishlab chiqarish hajmi ko'payadi. Bunday ishlab chiqarish jarayoniga mos keluvchi ishlab chiqarish funksiyasi $f(x_1, x_2) \geq 0$, $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \geq 0,\ i = \overline{1,n}$ shartni qanoatlantiradi.

3-xossa. Resurslardan bittasining sarfi ikkinchi resurs miqdori o'zgarmas bo'lganda ko'paysa, ishlab chiqarish hajmi o'sadi:

$$x_1 > 0, x_2 > 0 \Rightarrow \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} > 0,\ \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} > 0.$$

4-xossa. Resurslardan bitta (i-chi)sining sarfi ikkinchi resurs miqdori o'zgarmas bo'lganda ko'paysa, i-chi resursning har bir qo'shimcha birligiga mos keluvchi ishlab chiqarish hajmi oshishining kattaligi o'smaydi (*kamayuvchi samaradorlik qonuni*):

$$x_1 > 0, x_2 > 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} \leq 0,\ \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} \leq 0.$$

5-xossa. Resurslardan bittasining sarfi ko'payganda ikkinchi resursning limit samaradorligi oshadi:

$$x_1 > 0, x_2 > 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \geq 0.$$

6-xossa. ICHF $p > 0$ darajali bir jinsli funksiyadir:

$$f(tx_1, tx_2) = t^p \cdot f(x_1, x_2).$$

$p>1$ da ishlab chiqarish salmog'i $t>1$ marta o'sganda ishlab chiqarish hajmi t^p $(>t)$ marta oshadi, ya'ni ishlab chiqarish salmog'ining o'sishidan uning samaradorligi ortishiga ega bo'lamiz. $p<1$ da ishlab chiqarish salmog'ining o'sishidan uning samaradorligi kamayishiga ega bo'lamiz. $p=1$ da ishlab chiqarishning salmog'i o'sganda uning samaradorligi o'zgarmas bo'lishiga ega bo'lamiz.

5.3. Ishlab chiqarish funksiyasining o'rtacha va limit qiymatlari

$A_i = \dfrac{f(x)}{x_i}$, $(i=1,2)$ *i-resursning o'rtacha samaradorligini* anglatadi va u resurslardan foydalanish samaradorligini aniqlashda qo'llaniladi.

Uchinchi xossadan kelib chiqqan holda $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = M_i$ ifodani yozish mumkin, ushbu miqdor *i- resursning limit samaradorligi* deyiladi. Limit samaradorlik X_i- resurs miqdorining o'zgarishi boshqa resurslarning hajmi o'zgarmaganda mahsulot ishlab chiqarish hajmining qanchaga o'zgarishini ko'rsatadi.

$$R_{i,j} = -\frac{dx_j}{dx_i} = \frac{\partial f(x)/\partial x_i}{\partial f(x)/\partial x_j} \qquad (i=1,2),$$

ifoda resurslarni almashtirish limit normasi deyiladi. Bu norma ishlab chiqarish o'zgarmagan holda i-resursni j –resurs bilan *almashtirishning limit normasini* ifodalaydi.

Masala.

$y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$ KDICHF uchun resurslarning o'rtacha A_1 , A_2, va limit M_1 va M_2 samaradorliklarini toping.

Masalaning yechimi.

$$A_1 = \frac{y}{x_1} = \frac{f(x)}{x_1} = a_0 x_1^{a_1 - 1} x_2^{a_2}; \qquad A_2 = \frac{y}{x_2} = \frac{f(x)}{x_2} = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2 - 1};$$

$$M_1 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = a_1 \cdot A_1; \qquad M_2 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = a_2 \cdot A_2;$$

$$\frac{M_1}{A_1} = a_1 \le 1 \Rightarrow M_1 \le A_1; \qquad \frac{M_2}{A_2} = a_2 \le 1 \Rightarrow M_2 \le A_2.$$

Bundan ko'rinadiki i-resursning limit samaradorligi o'rtacha samaradorligidan farq qilib, odatda

$$M_i \le A_i, \qquad (i = 1,2)$$

tengsizlik barcha ishlab chiqarish funksiyalari uchun bajariladi.

i-resursning limit samaradorligini uning o'rtacha samaradorligiga nisbati ishlab chiqarish hajmini *i-resurs xarajatlari bo'yicha elastikligi* deyiladi va y quyidagicha yoziladi:

$$E_i = \frac{M_i}{A_i} = \frac{x_i}{f(x)} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \qquad (i = 1,2).$$

Bunda E_i i-resurs xarajatlari 1 foizga o'zgarganda (qolgan resurslar o'zgarmay qolganda) ishlab chiqarish hajmi y qancha foizga o'zgarishini ko'rsatadi.

$E_1 + E_2 = E_x$ yig'indi *ishlab chiqarish elastikligi* deyiladi.

Misol sifatida Kobb – Duglas funksiyasi uchun har bir resurs bo'yicha mehnat unumdorligini va resurslarni almashtirish limit normasini hisoblaymiz. Kobb-Duglas funsiyasi quyidagi ko'rinishga ega bo'lsin:

$$y = x_1^{0,75} \cdot x_2^{0,25}.$$

Bu funksiya uchun mehnatning limit unumdorligi

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 0,75 x_1^{-0,25} x_2^{0,25},$$

kapitalning limit unumdorligi

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 0{,}25 x_1^{0,75} x_2^{-0,75}$$

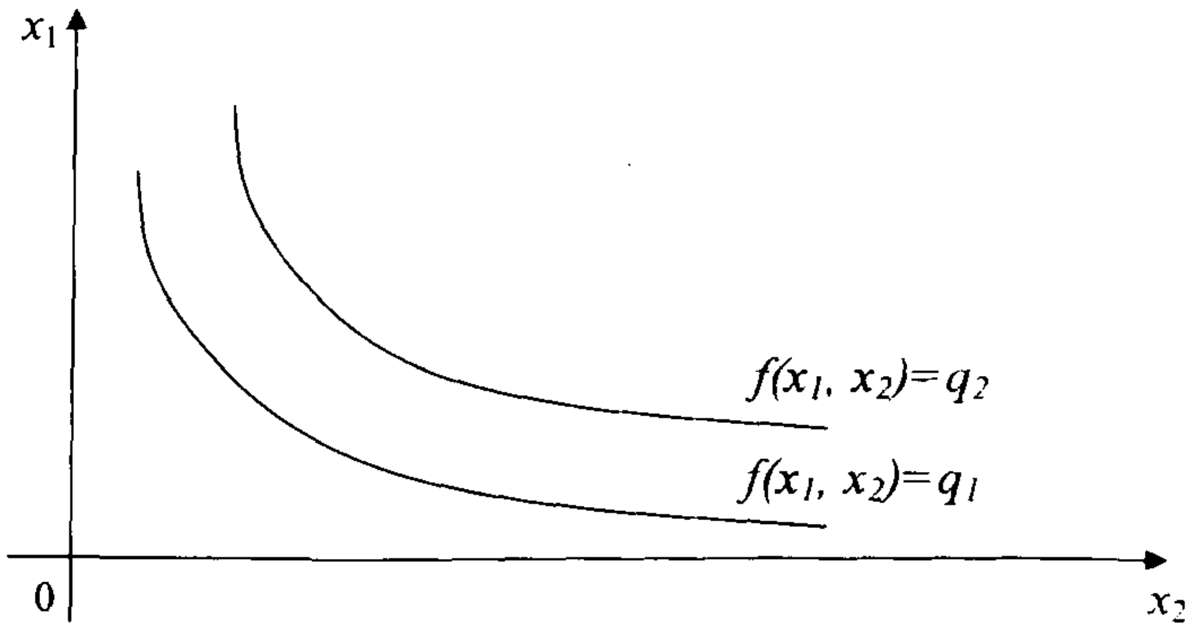
bo'ladi.

Resurslarni almashtirish limit normasi

$$\frac{\partial y / \partial x_1}{\partial y / \partial x_2} = (0{,}75 x_1^{-0,25} \cdot x_2^{0,25}) / (0{,}25 x_1^{0,75} \cdot x_2^{-0,75}) = 3 x_1^{-1} x_2^{-1} = 3 x_2 / x_1 .$$

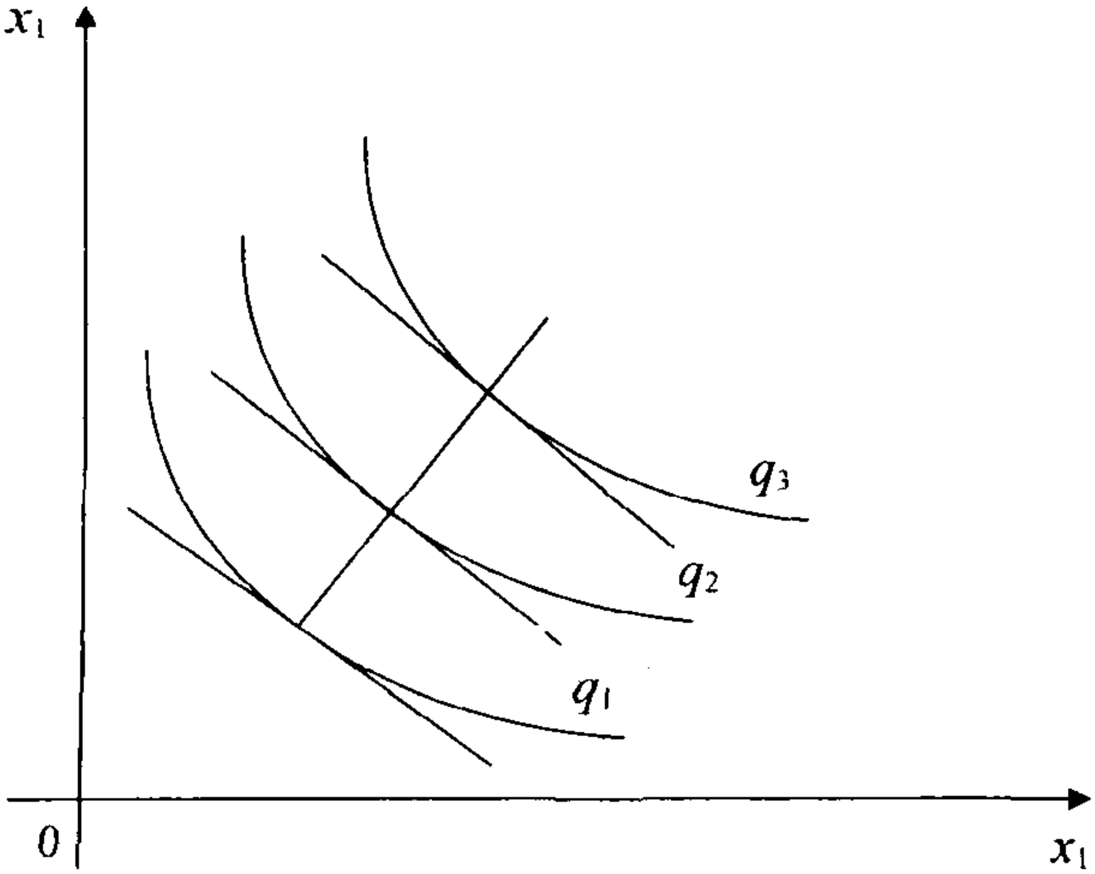
Ishlab chiqarish funksiyasining izokvanta, izoklina va izokostalari.

$y = f(x_1, x_2)$ ICHFning $q = f(x_1, x_2)$ $(q > 0)$ sathdagi l_q to'plami (chizig'i) *ishlab chiqarish funksiyasining izokvantasi* deb ataladi. Boshqacha qilib aytganda, l_q chiziq — ICHF o'zgarmas q qiymatga teng bo'lgan nuqtalar to'plami (5.1-rasm).



5.1.-rasm. Ishlab chiqarish funksiyasining «Izokvanta»si

Sarflanadigan (foydalaniladigan) resurslarning aynan bir l_q izokvantaga tegishli bo'lgan turli (v_1, v_2) va (w_1, w_2) (ya'ni $q = f(v_1, v_2) = f(w_1, w_2)$ bo'lgan) to'plamlari bir xil q ishlab chiqarish hajmini beradi. Aynan bir ICHFning izokvantalari kesishmaydi. Izokvantalar oilasining har birida o'tkazilgan urinmalar o'zaro parallel bo'ladigan nuqtalar to'plami *ishlab chiqarish funksiyasining izoklinasi* deb ataladi. Mos parallel urinmalar esa *ishlab chiqarish funksiyasining izokostasi* deb ataladi (5.2.-rasm).



5.2.-rasm. Ishlab chiqarish funksiyasining «Izoklina» va «Izokosta»lari

5.4. Xarajatlar funksiyasi. O'rtacha va limit xarajatlar

Yuqoridagi-rasmlarda izoklinada yotgan, hamda izokvantalar va izokostalarning kesishgan nuqtalari berilgan ishlab chiqarishga erishish uchun minimal xarajatga ega resurslarni ifodalaydi. Agar ishlab chiqarish miqdori y^* ga mos keladigan bunday nuqta koordinatalari $(L^*, K^*) = (x_1^*, x_2^*)$ bo'lsa, u holda ishlab chiqarish xarajatlarining o'zgaruvchi qismi

$w_1x_1^* + w_2x_2^*$ ni topish mumkin. Bunga o'zgarmas xarajatlar (w_0) qo'shilsa, *umumiy ishlab chiqarish xarajatlari* kelib chiqadi.

Ishlab chiqarilgan mahsulotning bir birligiga to'g'ri keladigan ishlab chiqarish xarajatlarini *o'rtacha xarajat* S deyiladi. Agar ishlab chiqarish funksiyasi

$$y = Ax_1^{b_1} x_2^{b_2}$$

va xarajatlar funksiyasi

$$w = w_1x_1 + w_2x_2 + w_0$$

berilgan bo'lsa, o'rtacha xarajat uchun quyidagi formulani keltirib chiqarish mumkin:

$$C = \frac{w}{y} = (w_1 \cdot \frac{b_1 + b_2}{b_1} \cdot \left(\frac{y}{Q}\right)^{\frac{1}{b_1 + b_2}} + w_0) / y$$

bu yerda $Q = A \cdot \left(\frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{w_1}{w_2}\right)^{b_2}$.

Limit xarajat (LC) deb umumiy xarajatlarning ishlab chiqarish bo'yicha hosilasiga (dw/dy) aytiladi. Yuqoridagi ishlab chiqarish va xarajat funksiyalari uchun

$$LC = \frac{dw}{dy} = \frac{w_1}{b_1 \cdot Q} \cdot \left(\frac{y}{Q}\right)^{\frac{1}{b_1 + b_2} - 1}$$

Takrorlash va nazorat uchun savollar:

1. Ishlab chiqarish funksiyasi nima va undan qanday maqsadda foydalaniladi?
2. Ishlab chiqarish funksiyalarining qo'llanilish sohalari haqida nima bilasiz, statik va dinamik ishlab chiqarish funksiyalari nima?
3. Kobb-Duglas ishlab chiqarish funksiyasi haqida nima bilasiz?
4. Ishlab chiqarish funksiyalari qanday xossalarga ega?
5. O'rtacha samaradorlik deganda nimani tushunasiz va u qanday aniqlaniladi?
6. Resurslarning limit samaradorligi nima va u qanday aniqlaniladi?
7. Almashtirishning limit normasi nima va u qanday aniqlaniladi?
8. Ishlab chiqarish funksiyalarining izokvantalari, izoklinalari va izokostalari nima?
9. Xarajatlar funksiyasi deganda nimani tushunasiz?
10. O'rtacha va limit xarajat nima, ular qanday hisoblanadi?

VI Bob. IQTISODIYOTDA OPTIMALLASHTIRISH MASALALARI

6.1. Asosiy tushunchalar

Firmaning ma'lum bir vaqt davridagi (masalan, tayinli yildagi) *daromadi* deb firma ishlab chiqarayotgan mahsulot umumiy y hajmining shu mahsulotning p_0 (bozor) narxiga bo'lgan $I = p_0 y$ ko'paytmasiga aytiladi.

Firmaning *xarajatlari* deb firmaning ma'lum bir vaqt davridagi barcha sarf-xarajatlar uchun $C = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ umumiy to'lovlariga aytiladi, bu yerda x_i — firma sarflayotgan (foydalanayotgan) resurslar (ishlab chiqarish omillari) hajmi, p_i — bu resurslar (ishlab chiqarish omillari)ning bozor narxlari ($i = \overline{1, n}$).

Firmaning ma'lum bir vaqt davridagi *foydasi* deb firmaning olgan daromadi bilan ishlab chiqarish xarajatlari orasidagi $PR = I - C$ ayirmaga aytiladi. Firma olgan foydaning sarflanayotgan (foydalanilayotgan) resurslar orqali ifodasi

$$PR(x_1, \dots, x_n) = p_0 f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda $y = f(x_1, \dots, x_n)$ — firmaning ishlab chiqarish funksiyasi, u firma ishlab chiqarayotgan mahsulotning umumiy y hajmini sarflanayotgan (foydalanilayotgan) resurslarning x_i hajmlari orqali ifodalaydi.

Firmaning asosiy maqsadi sarflanayotgan (foydalanilayotgan) resurslarni optimal taqsimlash yo'li bilan foydani maksimallashtirishdan iborat. Ma'lum bir vaqt davrida foydani maksimallashtirish masalasi formal ravishda

$$PR \to \max$$

ko'rinishda bo'ladi.

Maksimallashtirish masalasining *bunday qo'yilishi firma o'zining* foydasini maksimallashtirayotgan davrdan oldin tayinli (uzoq muddatli yoki qisqa muddatli) vaqt oralig'ining *qaysi biri kelishiga bog'liq bo'ladi.* Umumiyatga zarar yetkazmagan holda bundan keyin ikki omilli holni ko'rib chiqamiz.

Foydani maksimallashtirish masalasi uzoq muddatli vaqt oralig'i holida quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0 \qquad (6.1)$$

shartlarda

$$p_0 f(x_1, x_2) - (p_1 x_1 + p_2 x_2) = PR(x_1, x_2) \to \max . \qquad (6.2)$$

Qisqa muddatli vaqt oralig'i holida firma u sarflayotgan (foydalanayotgan) resurslar hajmining albatta paydo bo'ladigan va umuman olganda chiziqli bo'lmagan

$$g(x_1, x_2) \leq b$$

tengsizlik ko'rinishida formal ravishda yozilishi mumkin bo'lgan cheklovlarini hisobga olishi kerak. Binobarin, foydani maksimallashtirish masalasi qisqa muddatli vaqt oralig'i holida quyidagi ko'rinishdagi matematik programmalash masalasi bo'ladi:

$$g(x_1, x_2) \leq b,$$

$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0$$

shartlarda

$$p_0 f(x_1, x_2) - (p_1 x_1 + p_2 x_2) = PR(x_1, x_2) \to \max .$$

Odatda $f(0, x_2) = f(x_1, 0) = 0$ (ya'ni resurslardan kamida bittasi sarflanmaganda (foydalanilmaganda) ishlab chiqarilayotgan mahsulot hajmi nolga teng) bo'lgani uchun resurslar sarfining $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ bo'lgan (x_1, x_2) *vektorlari iqtisodiy jihatdan* ma'noga ega bo'ladi. Shuning uchun uzoq muddatli vaqt oralig'i holida foydani maksimallashtirish masalasi $x_1 > 0$ va $x_2 > 0$ dagi global absolyut maksimumni topishning oddiy masalasi bo'ladi.

Global absolyut maksimum nuqtalarini faqat

$$\frac{\partial PR(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0, \; \frac{\partial PR(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0$$

yoki

$$p_0 \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = p_1, \; p_0 \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = p_2 \qquad (6.3)$$

tenglamalar sistemasini qanoatlantiradigan $(x_1,\ x_2)$ nuqtalar orasidan qidirish lozimligi ma'lum.

(6.1)–(6.2) foydani maksimallashtirish masalasining yechimi bo'lmish resurslar sarfining (x_1^0, x_2^0) vektori firmaning *(uzoq muddatli vaqt oralig'i holidagi) lokal bozor muvozanati* deb ataladi. Bu vektor uchun (6.3) sistemadagi birinchi tenglamani ikkinchi tenglamaga hadma-had bo'lish yo'li bilan

$$\frac{\dfrac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2}} = \frac{p_1}{p_2} \qquad (6.4)$$

munosabatni olamiz, ya'ni firmaning (x_1^0, x_2^0) lokal bozor muvozanati *nuqtasida birinchi resurs limit unumdorligining ikkinchi resurs limit unumdorligiga nisbati bu resurslar bozor narxlarining nisbatiga teng.*

x_1^0 va x_2^0 lar (6.3) tenglamalar sistemasining yechimi sifatida hosil qilingani uchun ular (p_0, p_1, p_2) narxlarning funksiyalari, ya'ni

$$x_1^0 = d_1(p_0, p_1, p_2), \; x_2^0 = d_2(p_0, p_1, p_2) \qquad (6.5)$$

bo'ladi.

Bu ifodalar *resurslar (xarajatlar)ga talab funksiyalari* deb ataladi. Ularning x_1^0 va x_2^0 qiymatlari resurslar sarfining (foydalanishning) optimal tanlovini ishlab chiqarilayotgan mahsulot narxi va resurslar narxlarining funksiyalari sifatida ifodalaydi.

(6.5) funksiyalarni $y = f(x_1, x_2)$ ishlab chiqarish funksiyasiga qo'yib, *ishlab chiqarish taklifi funksiyasi* deb ataluvchi

$$y^0 = f(d_1(p_0, p_1, p_2), d_2(p_0, p_1, p_2)) = s(p_0, p_1, p_2)$$

ifodani olamiz.

6.2. Ishlab chiqarish hajmini maksimallashtirish yoki xarajatlarni minimallashtirishga qaratilgan optimallashtirish masalalari

Resurslar (omillar)ni xarid qilishga xarajatlar cheklanganda ishlab chiqarilayotgan mahsulot hajmini maksimallashtirishning

$$p_1x_1 + p_2x_2 \le V \tag{6.6}$$

$$x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0 \tag{6.7}$$

Shartlarda

$$f(x_1, x_2) \to \max \tag{6.8}$$

masalasini ko'rib chiqaylik.

Bu masalaning (x_1^0, x_2^0) yechimi (6.6) cheklashni tenglikka aylantirgani uchun ushbu masalaning o'rniga undan soddaroq bo'lgan

$$p_1x_1 + p_2x_2 = V,$$

$$x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0$$

shartlarda

$$f(x_1, x_2) \to \max$$

shartli ekstremumni topish masalasini ko'rib chiqish mumkin.

$p_1x_1 + p_2x_2$ yig'indi ishlab chiqarish xarajatlariga teng bo'lgani uchun V ni C ga almashtirish va qat'iy belgilab qo'yilgan C ishlab chiqarish xarajatlarida ishlab chiqarilayotgan mahsulot hajmini maksimallashtirishning

$$p_1x_1 + p_2x_2 = C, \tag{6.9}$$

$$x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0 \tag{6.10}$$

shartlarda

$$f(x_1, x_2) \to \max \tag{6.11}$$

masalasiga formal ravishda o'tish maqsadga muvofiqdir.

(6.9) – (6.11) masalani

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - C)$$

Lagranj funksiyasi yordamida yechamiz.

Lagranj funksiyasi uchun

$$\frac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial x_1}=0, \quad \frac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial x_2}=0, \quad \frac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial \lambda}=0$$

yoki

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}=\lambda p_1, \quad \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}=\lambda p_2, \quad C-p_1x_1-p_2x_2=0 \qquad (6.12)$$

tenglamalar sistemasini yozamiz.

Lagranj funksiyasining (6.12) sistemani qanoatlantiruvchi va so'nggi koordinatasi (Lagranj ko'paytuvchisi) λ^0 siz olingan $(x_1^0, x_2^0, \lambda^0)$ kritik nuqtasi, ya'ni (x_1^0, x_2^0) *nuqta berilgan qat'iy belgilab qo'yilgan* C *ishlab chiqarish* xarajatlarida ishlab chiqarishni maksimallashtirishning (6.9) – (6.11) masalasining yechimi bo'ladi. $(x_1^0, x_2^0, \lambda^0)$ nuqtani (6.12) sistemaning birinchi ikki tenglamasiga qo'yib, ikkita ayniyat olamiz. Birinchi ayniyatni ikkinchisiga hadma-had bo'lib, (6.4) ifodani olamiz.

Iqtisodiyot «Oltin qoidasi»

«Oltin qoida»ni bir resursli firmaning iqtisodiyoti uchun ko'rib chiqaylik. Firma rahbari qo'shimcha foyda olish uchun yana bir ishchini ishga olishni mo'ljalladi. Bunday masalani hal etish uchun oddiy qoida mavjud: qo'shimcha ishchini shunday paytda olish kerakki, bu ishchidan keladigan foyda ishchiga to'lanadigan ish haqidan ko'p bo'lsin.

Bu oddiy qoida iqtisodiy jihatdan o'ta muhim bo'lib, uni iqtisodiyot «oltin qoidasi» deyiladi.

Faraz qilaylik, firma bitta mahsulot ishlab chiqaradi va uning miqdorini u deb belgilaylik. Buning uchun faqat bitta resursdan foydalaniladi. Bunay holatda firma sarflangan resurs miqdori x ga bog'liq bo'lgan ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi orasidagi bog'lanishni ifodalovchi $u = G'(x)$ ishlab chiqarish funksiyasi bilan tavsiflanadi.

r - resurs birligi narxi va v – ishlab chiqarilgan mahulot birligi narxi bo'lsin. Natijada x ning funksiyasi bo'lgan daromad $-W$ quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$W(x) = vG'(x) - px.$$

Nihoyat firma masalasiga kelamiz:

$$x \geq 0, \text{ bo'lganda } W(x) \to \max.$$

Ishlab chiqarish funksiyasi $W(x)$ ni nulga tenglab

$$G'(x) = r / v \tag{6.13}$$

ifodani olamiz.

6.3. Iqtisodiyotda ko'p mezonli optimallashtirish masalalari

Optimallashtirishning odatdagi (bir mezonli) masalasi $z = f(X)$ funksiyaga ekstremal qiymat beruvchi $X \in D$ ni topishdan iborat. Bu yerda D — joiz yechimlar sohasi, $f(X)$ optimallik yagona mezonining qabul qilinayotgan X yechimga bog'liqligini aks ettiradi. Yechimlarni qabul qiluvchi shaxs (YQSH)ning vazifasi D to'plamni aniqlovchi shartlarni berishdan va $f(X)$ maqsad funksiyasini tasvirlashdan iborat.

Ko'p mezonli optimallashtirish masalalarida vaziyat boshqacha — bir nechta $z_1 = f_1(X)$, ... , $z_m = f_m(X)$ maqsad funksiyalari mavjud bo'lib, ular o'zlarining maksimal qiymatlariga joiz yechimlar sohasining turli nuqtalarida erishishi mumkin. Bu holda YQSH nafaqat D joiz sohani tasvirlashi va maqsad funksiyalarini berishi kerak, balki yakuniy yechim tamoyilini ham ko'rsatishi kerak. Shuning uchun ko'p mezonli masalalarni yechishda subyektiv omilning, YeQSh bilimlari va oldindan ko'ra bilishining ahamiyati bir mezonli masalalarga nisbatan oshadi.

Masala. Ikki turdagi mahsulotni ishlab chiqarish uchun uch turdagi resurs sarflanadigan bo'lsin. A –xarajatlar normasi matritsasi, Q – resurslar bahosi, P –mahsulotlarni sotuvdagi bahosi va B –resuslar zahirasi ma'lum bo'lib, ular quyidagicha bo'lsin:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = (1,1,4), \quad P = (17, 12), \quad B = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 39 \end{pmatrix}.$$

Agar X birlikdagi mahsulotni ishlab chiqarish rejalashtirilayotgan bo'lsa, u holda talab qilinadigan resurslar bahosi QAXga, taxmin qilinayotgan tushum PXga va u holda daromad W = PX - QAX ga teng bo'ladi.

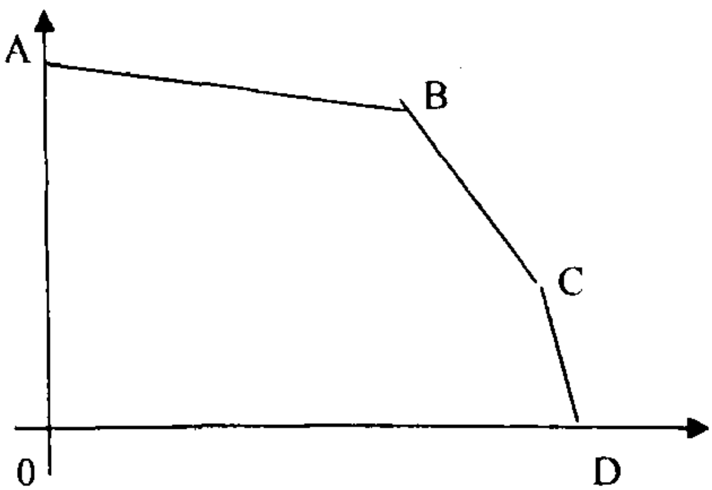
Agar xohlasa bir paytning o'zida maksimum tushum va daromadga erishish mumkin. Bunday holatda ikkita maqsad funksiyali masala hosil bo'ladi:

$$PX \to \max,$$
$$(P - QA)X \to \max,$$
$$AX \le B,\ X \ge 0.$$

Agar ko'rsatkichlarni qiymatlarini o'rniga qo'ysak:

$$z_1 = 17x_1 + 12x_2 \to \max,$$
$$z_2 = 3x_1 + 5x_2 \to \max,$$
$$x_1 + 2x_2 \le 20,$$
$$x_1 + x_2 \le 15,$$
$$3x_1 + x_2 \le 39,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Hosil bo'lishi mumkin bo'lgan to'plamni grafik ko'rinishda tasvirlaymiz. Bunda quyidagi OABCD besh burchakka ega bo'lamiz. (Eslatma, chiziqli funksiya o'zining ekstremum nuqtasiga hosil bo'lgan to'plamning burchaklaridagi nuqtalardan birida erishadi).



Demak ikkala funksiya maksimum qiymatlarga A,B,C,D nuqtalardan birida erishadi. Nuqtalarning koordinatalari qiymatlarini berib quyidagi jadvalni tuzamiz.

Ko'pburchakning uchlari	A(0,10)	B(10,5)	C(12,3)	D(13,0)
z_1 funksiyasi	120	230	240	221
z_2 funksiyasi	50	55	51	39

Jadvaldan ko'rinib turibdiki, z_1 =240 maksimum qiymatga erishganda, unga mos kelgan optimal yechim C(12,3) nuqtada; z_2 =55 maksimal qiymatga mos keluvchi optimal yechim B(10,5) nuqtada joylashadi. Bu holatda *ma'qul yechimni YQSH* tanlaydi.

Takrorlash va nazorat uchun savollar:

1. Firmaning daromadi va xarajatlarini qanday tushunasiz va ular formal ravishda qanday ifodalanadi?
2. Firmaning foydasini qanday tushunasiz va u formal ravishda qanday ifodalanadi?
3. Firmaning asosiy maqsadi nimadan iborat va u formal ravishda qanday ifodalanadi?
4. Foydani maksimallashtirish masalasi uzoq muddatli vaqt oralig'i holida qanday ko'rinishda bo'ladi, u qanday yechiladi, foydani maksimallashtirish masalasining qisqa muddatli vaqt oralig'i uchun ko'rinishi qanday?
5. Firmaning lokal bozor muvozanati deb nima ataladi, u uchun qanday munosabat o'rinli?
6. Resurslar(xarajatlar)ga *talab* va *ishlab chiqarish taklifi* funksiyalari qanday ifodalanadi?
7. Resurslar(omillar)ni xarid qilishga xarajatlar cheklanganda ishlab *chiqarilayotgan mahsulot hajmini maksimallashtirish masalasi* haqida nima bilasiz?
8. Qat'iy belgilab qo'yilgan ishlab chiqarish xarajatlarida ishlab *chiqarilayotgan mahsulot hajmini maksimallashtirish masalasi* qanday yechiladi?
9. Iqtisodiyot «Oltin qoidasi» deganda nimani tushunasiz va u formal ravishda qanday ko'rinishga ega?
10. Bir mezonli va ko'p mezonli optimallashtirish masalalari deganda nimani tushunasiz?

VII Bob. IQTISODIYOT DINAMIKASI MODELLARI

7.1. Iqtisodiy modellar turlari

Iqtisodiyot fani va amaliyotida yechiladigan masalalar vaqt omiliga bog'liq ravishda statik va dinamik masalalarga bo'linadi. Statika iqtisodiy obyektlarning ma'lum bir sanaga yoki davrga tegishli bo'lgan holatlarini ularni ifodalovchi ko'rsatkichlarning o'zgarishini vaqtga bog'lamagan holda o'rganadi.

Dinamik masalalarda o'zgaruvchilarning vaqtga bog'liqligidan tashqari ularning o'zaro vaqt bo'yicha bog'liklari aks ettiriladi. Masalan, investitsiya dinamikasi ishlab chiqarish hajmining o'zgarishini asosiy omili bo'lgan asosiy kapital hajmining dinamikasini aniqlaydi.

Iqtisodiyot dinamikasida vaqt uzluksiz yoki diskret qaralishi mumkin. Vaqtning uzluksiz holda olinishi modellashtirish uchun qulay, chunki unda differensial hisobi aparati va differensial tenglamalar qo'llanadi. Vaqtning diskret holda olinishi amalda tadbiq etish uchun qulay, chunki statistik ma'lumotlar doimo diskret holda bo'ladi va aniq vaqt birligiga tegishli bo'ladi.

Diskret vaqt uchun chekli ayirmali tenglamalar apparati qo'llanishi mumkin. Aytish joizki ma'lum iqtisodiyot dinamikasining ko'p modellari uzluksiz va diskret variantlarda mavjud bo'ladi. Ikkala holatlarda ham o'xshash natijalar olinishi mumkin va modellarning murakkablik darajasi taxminan bir xilda bo'ladi.

7.2. Iqtisodiyotda dinamik muvozanat

Iqtisodiyot nazariyasida muvozanat tushunchasi muhim hisoblanadi, ya'ni obyektning shunday holatiki tashqi ta'sir bo'lmaganda uni saqlanishi tushuniladi. Iqtisodiyot dinamikasi masalasi xuddi jarayonlarni muvozanat holatiga qaytishi kabi, tashqi kuch ta'sirida o'sha holatning o'zgarish jarayonlarini tavsiflashni o'z ichiga oladi. Oddiy iqtisodiy tizimning muvozanat holatini ko'rib chiqaylik va bunday tizimning uzluksiz va diskret holatlaridagi harakatini tasvirlaymiz. Birinchi holda tizimning dinamikasi differensial tanglamalar yordamida, ikkinchi holatda esa chekli ayirmali tenglama bilan yoziladi. Differensial tenglama ko'rsatkichning (qaralayotgan tizim bitta $x(t)$ ko'rsatkich yoki shunchaki x bilan ifodalansin) o'zgarishini uning harakat tezligi x'_t yoki $\dot{x}$ bilan bog'laydi. x ko'rsatkichining o'zgarish tezligini uning muvozanat qiymati x_e dan og'ish kattaligiga proporsional deb olaylik. Boshqacha aytganda, ko'rsatkich muvozanat qiymatidan qanchalik uzoqlikka og'ishsa, u shunchalik tez unga qaytishga harakat qiladi.

Agar tenglamada x ning vaqt bo'yicha birinchi tartibli hosilasi ishtirok etsa va bog'lanish esa chiziqli bo'lsa, u holda bu chiziqli differensial tenglama bo'ladi.

Masalan, u quyidagi ko'rinishga ega bo'lsin:

$$\frac{dx}{dt} = k(x - x_e) \tag{7.1}$$

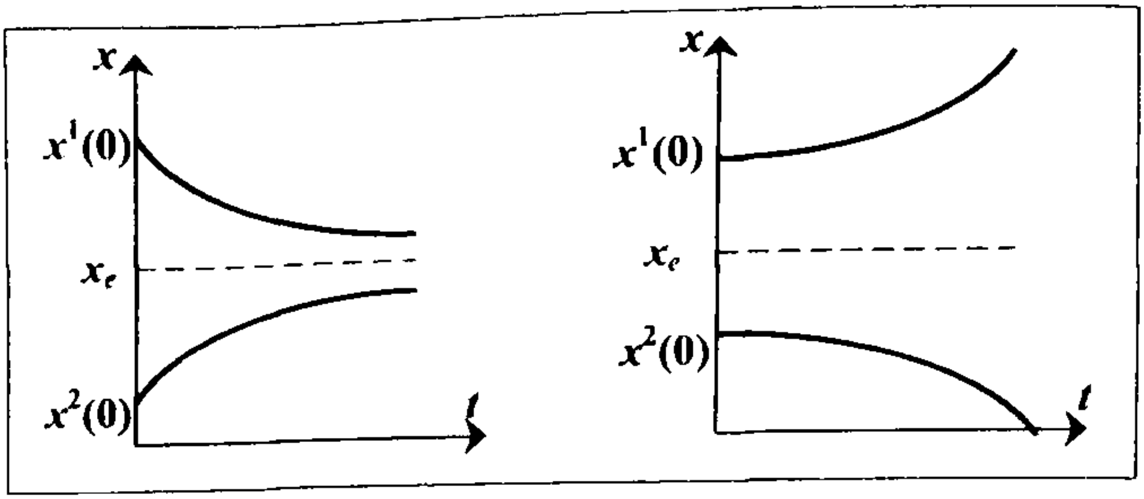
bu yerda k- koefitsiyent. Bu tenglamada kx_e – ozod had; ozod hadsiz $\frac{dx}{dt} = kx$ tenglama bir jinsli deyiladi va uning umumiy yechimi $x = ce^{kt}$ dan iborat.

Berilgan bir jinsli bo'lmagan tenglama $x = x_e$ xususiy yechimga ega (agar x kattalik muvozanat holatda bo'lsa) uning umumiy yechimi ixtiyoriy xususiy yechim bilan bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi yig'indisidan iborat, ya'ni

$$x = x_e + ce^{kt} \tag{7.2}$$

t = o da x ning qiymati $x(0)$ bo'lishini hisobga olsak, $c = x(0) - x_e$ va $x(t) = x_e + (x(0) - x_e)e^{kt}$ hosil bo'ladi. Bu yechim berilgan (7.1) tenglamani yechimini qonoatlantirishini tekshirib ko'rish mumkin.

Agar k < 0 bo'lsa, u holda $e^{kt} \to 0$ munosabat o'rinli va muvozanat turg'un holatda, ya'ni $x(t)$ kattalikning qiymati x_e qiymatidan og'ishganda, u yana shu qiymatni olishga intiladi. k > 0 bo'lganda esa $e^{kt} \to \infty$ va mos ravishda $x(t) \to \infty$ (agar boshlang'ich holat muvozant holat bilan ustma-ust tushmasa). Tizim 7.1a-rasmda ko'rsatilganidek x_e holatga qaytadi. Uning k > 0 bo'lgandagi holati 7.1b-rasmda ko'rsatilgan va k koeffitsiyent -2 < k < 0 bo'lganda muvozanat turg'un bo'lgan holat, va k > 0 yoki k < -2 bo'lganda turg'un bo'lmagan holat yuz beradi.

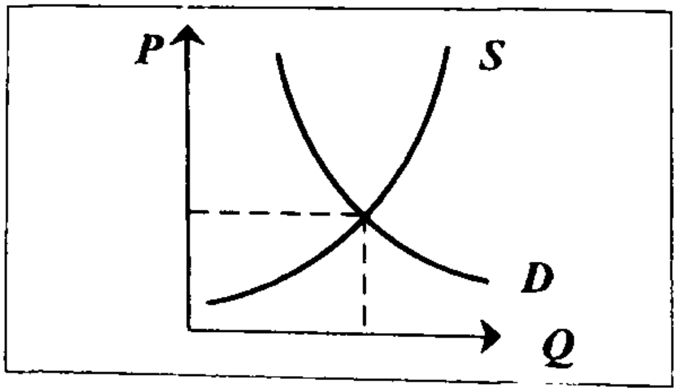


7.1a-rasm 7.1b-rasm

7.3. Muvozanatning oddiy modeli

Diskret yondashuv asosida amalga oshiriladigan makroiqtisodiyot dinamikasi modeli misolini ko'rib chiqaylik. Bunday holatda model o'ta umumlashgan bo'lib, abstrakt xarakterga ega bo'ladi. Shu bilan birga uning yechimi aniq ko'rinishda topilishi mumkin, ammo bundan uning parametrlari nisbatlarining xususiy holatlari uchun muhim bo'lgan xususiyatlari kelib chiqadi. Bu modelda diskret va uzluksiz dinamik modellashtirishning sodda apparatini namoyish etish, makroiqtisodiyot dinamikasininng muhim kategoriya va muammolarini tasvirlash qulay.

O'rgimchak to'risimon model. Bu model odatdagi talab va taklif egri chiziqlari bilan ifodalanuvchi bozordagi baho va mahsulotlarning miqdorlari turg'unligini vaqt bo'yicha kechikish mavjud bo'lganda tadqiq qilish imkonini beradi. Bunday holatning tasviri 7.2-rasmda keltirilgan.



7.2 –rasm. Talab va taklif egri chizig'i

Ishlab chiqaruvchi (fermer) joriy davrda mahsulotga bo'ladigan taklifni o'tgan davrdagi tovar bahosiga asosan aniqlagan bo'lsin, ya'ni $Q^S(t) = S_t(p_{t-1})$ taklif funksiyasida bir vaqt birligi davriga teng bo'lgan kechikkan davr kirib keladi. Haqiqatda, ishlab chiqarish hajmi haqidagi qaror joriy bahoni hisobga olgan holda qabul qilinadi va bozorda bu qarorga mos keluvchi taklif ishlab chiqarish sikli tugagandan so'ng yuzaga keladi.

Talab egri chizig'i mahsulot hajmiga bo'lgan talabni aynan shu davrdagi tovar narxiga bog'liqligini tavsiflaydi, ya'ni $Q^D(t) = D_t(p_t)$. Shunday qilib baho dinamikasini quyidagi tenglamalar sistemasi orqali ifodalash mumkin:

$$\{Q_t^S = S_t(p_{t-1}),\quad Q_t^D = D_t(p_t),\quad Q_t^D = Q_t^S,\} \qquad (7.3)$$

yoki bitta tenglama bilan quyidagicha ifodalash mumkin:

$$D_t(p_t) = S_t(p_{t-1}). \qquad (7.4)$$

Ushbu tenglamadan joriy davrdagi baho qiymati P_t -ni avvalgi vaqt holatida ma'lum bo'lgan R_{t-1} ning qiymati bo'yicha aniqlash mumkin.

Xususiy hol sifatida talab va taklif funksiyalari chiziqli bo'lgan o'rgimchaksimon modelni ko'rib chiqamiz.

$$D(p) = A - Bp_t,\quad S(p) = C + Ep_{t-1},\quad D(p) = S(p) \qquad (7.5)$$

Bu yerda taklif funksiyasi o'suvchi bo'lgani uchun E ≥ 0; talab funksiyasi kamayuvchi bo'lgani uchun esa $B \geq 0$; $A > C > 0$, ya'ni $D(0) > C(0) > 0$ (bahoning nol qiymatida talab taklifdan yuqori bo'ladi). Bunday tizimning dinamikasini ifodalovchi tenglama quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$D(p_t) = C(p_t) \text{ yoki } A - Bp_t = C + Ep_{t-1}$$

Avval muvozanat baho p^* va muvozanat ishlab chiqarish hajmi Q^* ni topamiz. Ular quyidagi tenglamalarni qanoatlantirishlari kerak:

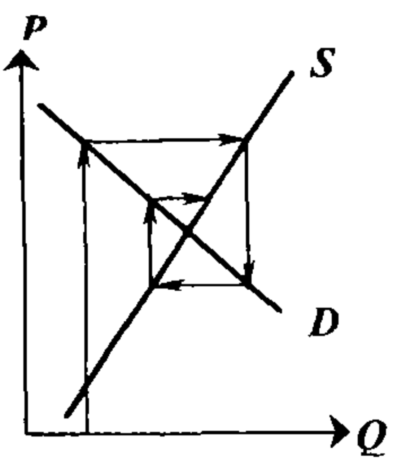
$$Q^* = A - Bp^* = C + Ep^*,$$

bundan

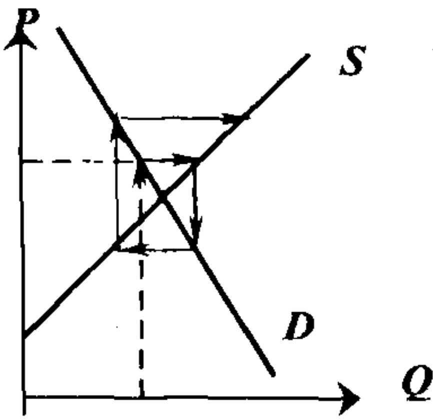
$$p^* = (A - C)/(B + E) \text{ va } Q^* = (AE - BC)/(B + E) \qquad (7.6)$$

kelib chiqadi.

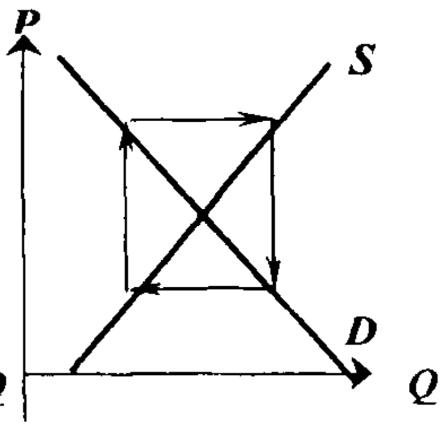
Boshlang'ich nuqta muvozanat nuqta bilan ustma-ust tushmagan holatda baho va ishlab chiqarish hajmi munosabatlarini ko'rib chiqaylik. Ushbu masalani «o'rgimchak to'ri» deb nomlangan grafik usulida yechish mumkin. Avvalo muvozanat nuqtasi bilan ustma-ust tushmaydigan boshlang'ich tovar hajmi va bahosini berib, ketma-ket mos ravishda talab va taklif chiziqlarini gorizontal va vertikal to'g'ri chiziqlar bilan birlashtirib boramiz.



7.3a-rasm.



7.3_b-rasm.



7.3v-rasm.

Rasmdagi birinchi chizmadan ko'rinadiki, agar taklif chizig'i (D) talab chizig'i (S)ga nisbatan ko'proq og'ishgan bo'lsa u holda bozorda muvozanat turg'un bo'ladi (7.3a-rasm). Agar talab chizig'i (S) taklif chizig'i (D)ga nisbatan ko'proq og'ishgan bo'lsa u holda bozorda muvozanat turg'un bo'lamaydi (7.3b-rasm). Va nihoyat talab va taklif chiziqlarining og'ishliklari bir xil bo'lganda bozorda baho o'zgarmas ampletudada doimiy ravishda tebranib turadi (7.3v-rasm).

Endi modelni tahlil qilib ko'ramiz. p_t ni p_{t-1} orqali ifodalab quyidagi rekkurent munosabatini olamiz.

$$p_t = \frac{A-C}{B} - \frac{E}{B} p_{t-1}$$

Ushbu munosabatni ketma-ket qo'llab quyidagilarni topamiz:

$$p_1 = \frac{A-C}{B} - \frac{E}{B} \cdot p_0; \; p_2 = \frac{A-C}{B} - \frac{E}{B} \cdot \left(\frac{A-C}{B} - \frac{E}{B} \right) p_0$$

Umumiy holda

$$p_t = \frac{A-C}{B} \cdot \left(1 - \frac{E}{B} + \left(\frac{E}{B}\right)^2 + \dots + (-1)^{t-1}\left(\frac{E}{B}\right)^{t-1} \right) + (-1)^t \left(\frac{E}{B}\right)^t \cdot p_0 \quad (7.7)$$

Qavs ichidagi ifodalar geometrik progressiya yig'indisini beradi. Agar $|q| < 1$, bo'lsa, u holda $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$ bo'ladi. O'rgimchak to'risimon model uchun $q = -\frac{E}{B}$, $a_1 = \frac{A-C}{B}$.

Bundan ixtiyoriy t vaqtda P_t uchun quyidagiga ega bo'lamiz:

$$p_t = \frac{A-C}{B} \cdot \frac{1-(-1)^t\left(\frac{E}{B}\right)^t}{1+\frac{E}{B}} + (-1)^t\left(\frac{E}{B}\right)^t \cdot p_0 \qquad (7.8)$$

Ma'lumki $\frac{E}{B} < 1$ $\left(\frac{E}{B}\right)^t \to 0$ va $p_t \to \frac{A-C}{E+B} = p^*$ bo'lganda, ya'ni taklif chizig'i talab chizig'iga nisbatan ko'proq og'ishgan bo'lsa, muvozanat turg'un bo'ladi. Agar $\frac{E}{B} > 1$ bo'lsa, ya'ni talab chizig'i o'ta og'ishgan bo'lsa, u holda $\left(\frac{E}{B}\right)^t \to 0$ va jarayon muvozanat nuqtasidan uzoqlashadi *(muvozanat turg'un bo'lmaydi)*. $\frac{E}{B} = 1$ bo'lganda, ya'ni B=E holatda P_t qiymati muvozanat qiymati atrofida ketma-ket takrorlanadi.

Demak, tizimning muvozanat holatda bo'lishida asosan bahoning uncha katta bo'lmagan o'zgarishga ta'sir etuvchi o'tgan davrdagi omillar muhim rol o'ynaydi.

Quyidagi masalalarning yechimlarini toping.

1-masala. Faraz qilaylik vaqt bo'yicha kechikish taklif funksiyasida emas talab funksiyasida qatnashsin:

$$D_t = A - Bp_t;\ S_t = C + Ep_{t-1};\ D_t = S_t$$

Muvozanat nuqtaga intilish sharti qanday bo'ladi? Ushbu jarayonni grafik ko'rinishda tasvirlang.

2-masala. Talab va taklif funksiyalari $D(t)=4-4p(t)$, $S(t)=8-4p(t-1)$ ko'rinishda bo'lsin. p(t) narx uchun formulani va boshlang'ich narx $p_0 = 4$ bo'lganda ixtiyoriy t uchun talab va taklif miqdorini toping.

Yechish. Muvozanat nuqtada talab va taklifning tengligi shartidan foydalanib $4-4p(t)= \ 8-4p(t-1)$ tenglikni yozish mumkin. Bundan $p(t)=-1-p(t-1)$ rekkurent tenglama kelib chiqadi. Muvozanat nuqtada

(7.6)ga asosan $p^{*}=\dfrac{A-C}{B+E}=\dfrac{4-8}{4+4}=-0{,}5$,

va (7.8)ga asosan

$$p_t=\frac{A-C}{B}\cdot\frac{1-(-1)^t\left(\dfrac{E}{B}\right)^t}{1+\dfrac{E}{B}}+(-1)^t\left(\frac{E}{B}\right)^t\cdot p_0=$$

$$=\frac{4-8}{4}\cdot\frac{1-(-1)\left(\dfrac{4}{4}\right)^t}{1+\dfrac{4}{4}}+(-1)^t\left(\frac{4}{4}\right)^t\cdot 4=-0{,}5+4{,}5(-1)^t$$

rekkurent formula hosil bo'ladi. Bundan ko'rinadiki vaqt o'tishi bilan narxning tebranishi muvozanat qiymatdan 4,5 birlikka teng bo'lgan chastota bilan yuz beradi. Talab uchun formula quydagi ko'rinishda bo'ladi:

$$D(t)=4-4p(t)=4-4(-0{,}5+4{,}5(-1)^t)=6-18(-1)^t.$$

Taklif uchun esa formula quydagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$S(t)=8-4p(t-1)=8-4(-0,5+4,5(-1)^{t-1})=6+18(-1)^{t-1}.$$

7.4. Baho muvozanatining EVANS modeli

Modelda bitta tovar bozori qaralib, vaqt omili uzluksiz deb hisoblanadi. D(t), S(t), p(t) – mos ravishda t vaqtda tovarga talab, taklif va shu tovarning narxi bo'lsin. Talab ham taklif ham bahoning chiziqli funksiyasi hisoblansin, ya'ni $D(p)=A-Bp,\quad A,B>0-$ talab bahoning ko'tarilishi bilan kamayadi, $S(p)=C+Ep,\quad C,E>0$ - taklif esa bahoning ko'tarilishi bilan ko'payadi. Tabiyki A >C, ya'ni bahoning nol qiymatida talab taklifdan yuqori bo'ladi.

Asosiy mushohada shundan iboratki, baho talab bilan taklifning o'zaro nisbatlariga bog'liq ravishda o'zgaradi deb qaraladi:

$$\Delta p=\gamma(D-S)\Delta t,$$

bunda $\gamma>0$, ya'ni bahoning ko'tarilishi talabning taklifga nisbatan yuqori bo'lishiga va shu jarayonning davom etish davriga proporsional. Shunday qilib quyidagi differensial tenglamani olamiz:

$$dp/dt=\gamma(D-S).$$

Bu tenglamaga talab va taklifni narxga chiziqli bog'liqligini qo'yib $p(0)=p_0$ boshlang'ich shart bilan

$$dp/dt=-\gamma((B+E)p-A+C) \tag{7.9}$$

chiziqli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamani hosil qilamiz. Ushbu tenglama $p^*=(A-C)/(B+E)>0$ (statsionar) turg'un nuqtaga ega . Ko'rinib turibdiki $p^*>p$ bo'lganda dp/dt>o va $p^*<p$ bo'lganda, dp/dt<o. Bundan kelib chiqadiki

$$\lim_{t\to\infty} p(t)=p^*.$$

$p_0<p^*$ bo'lganda o'tarilib p^* ga intiladi, $p_0>p^*$ bo'lganda mahsulot bahosi pasayib p^* ga intiladi. p^* muvozanat baho bo'lganda talab va taklif teng bo'ladi:

$$D(p) = S(p) \to A - Bp = C + Ep \to p^* = (A - C)/(B + E).$$

Bir jinsli bo'lmagan chiziqli differensial tenglamalarni yechishning umumiy qoidasiga asosan (7.9) tenglamaning yechimini quyidagicha yozish mumkin:

$$p(t) = p_0 e^{-\gamma(B+E)t} + (A - C)/(B + E)\left[1 - e^{-\gamma(B+E)t}\right].$$

Bundan yana ko'rish mumkinki vaqt o'tishi bilan tovar bahosi r* ga intiladi, ya'ni $t \to \infty$ bo'lganda $\lim p(t) = p^*$ bo'ladi.

7.5. Iqtisodiy o'sishning bir sektorli SOLOU modeli

Iqtisodiyot doimo bir butunlikda qaralib, unda ham ishlab chiqarish, ham noishlab chiqarish sohalarida iste'mol qilinadigan yagona universal mahsulot ishlab chiqariladi. Uning ishlab chiqarish sohasi iste'mol qilish investitsiya sifatida qaralishi mumkin.

SOLOU modelida iqtisodiyotning holati 5 ta o'zgaruvchi orqali ifodalanadi, ya'ni: Y- yakuniy mahslot, L – mehnat resurslari hajmi, K – ishlab chiqarish fondlari, I – investitsiya, C – noishlab chiqarishdagi iste'mol hajmi. Barcha o'zgaruvchilar o'zaro bog'liq bo'lib vaqt bo'yicha o'zgarib boradi, ya'ni ular t – vaqtning funksiyalaridir.

Vaqt uzluksiz deb faraz qilinib, K va L – ko'rsatkichlar mos ravishda ishlab chiqarish fondi va mehnat resurslarining yillik o'rtacha qiymatlari deb qaraladi. Y,C,I kattaliklarning qiymatlarini ularning yil davomida jamlangan hajmlari deb olish mumkin. Resurslari esa (ishlab chiqarish va mehnat resurslari) to'liq ishlatiladi deb faraz qilinadi.

Yillik yakuniy mahsulot har bir vaqt birligida o'rtacha yillik fondlar va mehnatning funksiyasidan iborat, ya'ni Y=F(K,L). Shunday qilib F(K,L) – butun iqtisodiyotning ishlab chiqarish funksiyasini ifodalaydi.

Yakuniy mahslot noishlab chiqarishdagi iste'molga va investitsiyaga sarflansin, ya'ni Y=C+I. Yakuniy mahsulotning investitsiyaga sarflanadigan ulushi (ρ)ni jamg'arish me'yori deb ataladi, u holda I= ρY S=(1- ρ)Y. Jamg'arish me'yorini o'zgarmas deb qabul qilamiz:
$\rho = \text{const}, 0 < \rho < 1$.

Investitsiya ishga yaroqsiz holga kelgan fondlarni tiklash va ularni ko'paytirish maqsadida ishlatilsin deb olaylik. Agar fondlarni yaroqsiz holatga kelish o'zgarmas koeffitsent μ (o<μ<1) bo'yicha yuz bersa, u holda

$$K = K(t+\Delta t) - K(t) = \rho Y\Delta t - \mu K\Delta t$$

bo'ladi, shuning uchun

$$dK/dt = \rho Y - \mu K.$$

Agar mehnat resurslarining o'sishi mavjud mehnat resrslariga proporsional deb hisoblasak, ya'ni $\Delta L = vL\cdot\Delta t$ bo'lsa, u holda $dL/dt = vL$ differensial tenglama hosil bo'ladi va uni yechish natijasida $L = L_0 e^{v\cdot t}$ ifodani olamiz, bu yerda $L_0 = L(0)$ t=o bo'lganda kuzatuv boshidagi mehnat resrslari.

Shunday qilib SOLOU modeli quyidagi tenglamalar sistemasi orqali yoziladi:

$$\left.\begin{aligned} &C = (1-\rho)Y; \\ &Y = F(K,L); \\ &L = L_0 e^{v\cdot t} \end{aligned}\right\} \qquad (7.10)$$

$$dK/dt = \rho Y - \mu K, K(0) = K_0.$$

F(K,L) funksiyasi ishlab chiqarish funksiyasiga qo'yilgan talablarni qanoatlantiradi. Chiziqli bir jinsli deb hisoblanadi, ya'ni

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K,L).$$

Funksiyani bir jinsligidan foydalanib va o'rtacha mehnat unumdorligini $y = Y/L$ va o'rtacha fondlar bilan qurollanganligini $k = K/L$ bilan belgilasak

$y = Y/L = F(K,L)/L = F(K/L,1) = F(k,1)$ ni hosil qilamiz.

Oxirgi funksiyani $f(k)$ deb hisoblasak $y = f(k)$ ni olamiz.

Endi k dan t bo'yicha hosilani topamiz:

$$dk/dt = d(K/L)/dt = (K'L - KL')/L^2 = K'/L - K(L'/L^2) =$$
$$= (\rho Y - \mu K)/L - Kv/L = \rho y - (\mu + v)k.$$

Demak:

$$dk/dt = \rho f(k) - (\mu + v)k, \qquad k(0) = k_0 = K_0 / L_0. \qquad (7.11)$$

(7.10) modelni makroko'rsatkichlari to'lig'icha (7.11) tenglama va $L = L_0 e^{v \cdot t}$ mehnat resurslari dinamikasi yordamida aniqlanadi. (7.11) – tenglama boshlang'ich shartga ega bo'lgan, o'zgaruvchilari ajraladigan tenglama, shuning uchun u yagona yechimga ega.

7.6. Bozor munosabatlarini modellashtirishning ikki sektorli modeli

Faraz *qilaylik, iqtisodiyotda ikki tarmoq* o'z *mahsulotlarini ichki va* tashqi bozor uchun ishlab chiqarish jarayonida o'zaro tovar ayriboshlash orqali munosabatda bo'lsin. Ya'ni har bir tarmoq o'z mahsulotini ishlab chiqarish uchun ikkinchi tarmoqning mahsulotidan foydalanadi. Masalan, mashinasozlik va energetika sanoatlari va boshqalar. Iqtisodiyyotda yuz beradigan bunday holatlarda har bir tarmoq qancha hajmda mahsulot ishlab chiqarsa ham ichki, ham tashqi bozor talabini qondira oladi, degan masala dolzarb masala sifatida qaraladi.

Iqtisodiyotda bunday masalalarni hal etish uchun quyidagi tenglamalar sistemasidan iborat modellar qo'llaniladi:

$$\begin{cases} x_1 = a_{12}x_2 + b_1 \\ x_2 = a_{21}x_1 + b_2 \end{cases} \qquad (7.12)$$

bu yerda x_1, x_2 - mahsulotlarni ishlab chiqarish rejasi, a_{12}, a_{21}, b_1, b_2 - manfiy bo'lmagan parametrlar. a_{12} - 1 so'mlik ikkinchi mahsulotni ishlab chiqarish *uchun birinchi* mahsulotning sarfi, a_{21} - 1 so'mlik birinchi mahsulotni ishlab chiqarish uchun ikkinchi mahsulotning sarfi, b_1, b_2 - birinchi va ikkinchi mahsulotlarning tashqi bozorga chiqariladigan qismi.

(7.12) tenglamalar sistemasi *ikki tarmoqli ishlab chiqarish modeli* deb ataladi va u quyidagi yechimga ega:

$$x_1 = \frac{b_1 + a_{12} \cdot b_2}{1 - a_{12} \cdot a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2 + a_{21} \cdot b_1}{1 - a_{12} a_{21}} \tag{7.13}$$

Ushbu yechim modelning parametrlari $a_{12} \cdot a_{21} \neq 1$, $a_{12} < 1$, $a_{21} < 1$ shartlarni qanoatlantirgan hollarda yagona bo'ladi.

Masala. O'zaro hamkorlikda faoliyat ko'rsatuvchi ikki tarmoqda mahsulot ishlab chiqarish va ularning *mahsulotlarini ichki iste'mol* va tashqi bozorga taqsimlanishi masalasini ko'rib chiqaylik. Birinchi tarmoqda 1 so'mlik mahsulot ishlab chiqarish uchun ikkinchi tarmoqning 0,3 so'mlik mahsuloti sarflansin, ikkinchi tarmoqda 1 so'mlik mahsulot ishlab chiqarish uchun esa birinchi tarmoqning 0,5 so'mlik mahsuloti sarflansin. Shu bilan birga birinchi tarmoq 3 mln. so'mlik mahsulot, ikkinchi tarmoq esa 5 mln. so'mlik mahsulotni tashqi bozor uchun ishlab chiqarish rejalashtirilgan bo'lsin. Bunday rejani bajarish uchun har bir tarmoq qanchadan mahsulot ishlab chiqarishi kerak?

Masalaning yechimi.

Masalaning shartiga ko'ra $b_1 = 3000000$; $b_2 = 5000000$ va $a_{12} = 0,5$; $a_{21} = 0,3$; $a_{12} \cdot a_{21} = 0,5 \cdot 0,3 \neq 1$. Berilgan ma'lumotlarni (7.12) sistemaga qo'yib, quyidagi ko'rinishdagi ikki tarmoqli ishlab chiqarish modeliga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} x_1 = 0,5x_2 + 3000000 \\ x_2 = 0,3x_1 + 5000000 \end{cases}$$

Ushbu model parametrlari yechimning yagonalik shartlarini qanoatlantiradi. Yagona yechim quyidagidan iborat bo'ladi:

$$x_1 = \frac{3000000 \ \ + 0,5 \cdot 5000000}{1 - 0,5 \cdot 0,3} = 6,471 \text{ mln.so'm},$$

$$x_2 = \frac{5000000 \ \ + 0,3 \cdot 3000000}{1 - 0,5 \cdot 0,3} = 6,941 \text{ mln.so'm}.$$

Demak birinchi tarmoq korxonasi 6,471 mln. so'mlik mahsulot ishlab chiqarib, 3 mln so'mlik mahsulotni tashqi bozorga chiqaradi, 3,471 mln.so'mlik mahsulotni ichki iste'molga sarflaydi. Ikkinchi tarmoq korxonasi 6,941 mln.so'mlik mahsulot ishlab chiqarib, 5 mln. so'mlik mahsulotni tashqi bozorga chiqaradi, 1,941 mln. so'mlik mahsulotni ichki iste'mol uchun sarflaydi.

Takrorlash va nazorat uchun savollar:

1. Iqtisodiyotda yechiladigan masalalar vaqt omiliga bog'liq ravishda qanday turkumlanadi?
2. Iqtisodiyotda muvozanat deganda nima tushuniladi?
3. Iqtisodiy tizimning uzluksiz holatlardagi harakati qanday tenglama bilan tasvirlanadi va uning yechimi qanday ko'rinishga ega bo'ladi hamda ularni grafik ko'rinishda tasvirlang?
4. O'rgimchaksimon model deganda qanday model tushuniladi va unda baho dinamikasi qanday tenglamalar sistemasi bilan ifodalanadi?
5. O'rgimchaksimon modelda muvozanat narx va muvozanat ishlab chiqarish hajmi qanday topiladi?
6. O'rgimchaksimon modelni grafik usulda tasvirlab bering?
7. Baho muvozanati Evans modeli vaqtga nisbatan qanday xususiyatga ega?
8. SOLOU modelida iqtisodiyotning holati nechta ko'rsatkich orqali ifodalanadi va ularga qanday shartlar qo'yiladi?
9. Bozor munosabatlarini modellashtirishning ikki sektorli modeli iqtisodiyotning qanday masalalarini hal etishga qaratilgan va u qanday ifodalanadi?
10. Bozor munosabatlarini modellashtirishning ikki sektorli modelining yechimi va uning parametrlari haqida nima deya olasiz?

VIII Bob. IQTISODIY-STATISTIK USULLAR VA EKONOMETRIK MODELLAR

8.1. Iqtisodiy o'zgaruvchilarning o'zaro munosabatlari. Chiziqli va korrelyatsion bog'lanishlar

Iqtisodiy ko'rsatkichlarning o'zaro bog'lanishlarini o'rganish muammosi iqtisodiy tahlilning muhim muammolaridan biri hisoblanadi. Har qanday iqtisodiy siyosat iqtisodiy o'zgaruvchilarni boshqarishdan iborat va bu o'zgaruvchilar iqtisodiyotda siyosatni hal etishda qabul qilinadigan yechimlarni ifodalovchi ko'satkichlarga qay darajada ta'sir etishini aniqlab beruvchi bilimlarga asoslanishi zarur. Masalan, bozor iqtisodiyoti sharoitida inflyatsiyani sur'atini bevosita boshqarish mumkin emas, lekin unga budjet-soliq va kredit-pul siyosati orqali ta'sir etish mumkin. Shuning uchun, jumladan, pul taklifi (emissiyasi) bilan baho darajasi orasidagi o'zaro bog'lanishni o'rganish kerak. Iqtisodiy modellarni ularning o'zgaruvchilarga haqiqiy statistik ma'lumotlarni qo'llab statistik tahlil qilmasdan tuzish, tekshirish va takomillashtirish mumkin emas.

Barcha iqtisodiy tadqiqotlar sohasi ma'lum bir ma'noda iqtisodiy o'zgaruvchilar orasidagi o'zaro bog'lanishlarni o'rganish ko'rinishida tasavvur qilinishi mumkin va ularni tahlil qilish asosini statistika usullari va ekonometrika tashkil etadi.

Iqtisodiy o'zgaruvchilarning o'zaro bog'lanishini ikki o'zgaruvchi bo'lgan holatda ko'rib chiqamiz. O'zgaruvchilarni x va y deb belgilaymiz. Faraz qilaylik o'zgaruvchilar qiymatlarining qatori berilgan bo'lsin. Ularni koordinata tizimiga joylashtirib, chiziq bilan birlashtirilsa grafik ko'rinishida tasvirlanadi.

Agar o'zgaruvchilarning qiymatlari haqiqiy statistik ma'lumotlar bo'lsa, hech qachon chiziqli, kvadratik, ekspanensial va h.k ko'rinishida oddiy chiziqlarni hosil qilish mumkin emas. Sababi, ma'lumotlarni o'lchashdagi xatoliklar, e'tiborga olinmagan qiymatlar yoki tasodifiy omillar ta'sirida ko'zda tutilmagan chetlanishlar vujudga keladi. Lekin bunday tasodifiy holatlar o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish chiziqli emas yoki boshqa turdagi bog'lanish emas degan xulosaga olib kelmaydi.

O'zgaruvchilarning tasodifiy omillar ta'siri e'tiborga olinadigan holatdagi bog'lanishlari statistik bog'lanish deyiladi. Bunday bog'lanishda bir o'zgaruvchining o'zgarishi ikkinchi o'zgaruvchining ham o'zgarishiga olib keladi. x va y o'zgaruvchilari orasidagi o'zaro bog'lanishni ikki turini ko'rish mumkin.

Birinchi holatda ikki o'zgaruvchidan qaysi biri o'zgaruvchi, qaysi biri o'zgarmas ekanligi noma'lum bo'lishi mumkin. Bunday holatda o'zgaruchilar teng kuchli bo'lib, statistik bog'lanish korrelyatsion turdagi bog'lanish deyiladi. Bu turdagi bog'lanishni o'rganish va baholash uchun juft korrelyatsiya koeffitsiyentlari qiymatlari topiladi.

Boshqa bir holatda ikkala o'rganiluvchi o'zgaruvchilar o'zaro teng kuchli emas, ulardan biri mustaqil, ikkinchisi esa birinchisiga bog'liq. Agar shunday bo'lsa, o'zaruvchilardan birining o'zgarishi ikkinchi o'zgaruvchining o'zgarishiga olib keladi. Masalan, daromadni ortishi iste'molni ko'payishiga, foiz stavkalarining kamayishi investitsiyani ko'payishiga, valyuta kursini ortishi eksport hajmini kamayishiga sabab bo'ladi. Bunday holatda $y = f(x)$ regressiya tenglamasi baholanadi.

Regressiya tenglamasi – bu o'zgaruvchilar orasidagi statistik bog'lanishning formulasi. Agar bu formula chiziqli bo'lsa, chiziqli regressiya to'g'risida so'z yuritiladi. Ikki o'zgaruvchi orasidagi statistik bog'lanish formulasi juft regressiya deyiladi, bir nechta o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish esa ko'p omilli regressiya deyiladi. Masalan, Keyps tomonidan sof foyda (C)ni daromad' (Y_d)ga bog'lanishini ifodalovchi quyidagi formula taklif etilgan:

$$C = C_0 + bY_d \qquad (8.1)$$

bu yerda $C_0 > 0$ doimiy iste'mol qiymat, $0<b<1$ – iste'molga moyillik limiti.

O'zgaruvchilar orasidagi bog'lanishni ifodalovchi formulani tanlash regressiya tenglamasining xususiyatidan kelib chiqib amalga oshiriladi.

8.2. Ekonometrik modellar

Ekonometrika – iqtisodiy jarayonlarning miqdoriy tomonlarini iqtisodiyot nazariyasi, tahlili, statistika va matematik-statistikaning usullari asosida talqin qilishning nazariy natijalar to'plami, usullari va yo'llarini birlashtiruvchi fan.

Ekonometrika kuzatuv natijalariga asoslangan iqtisodiy jarayonlarning turli bog'lanishlari va qonuniyatlarini ekonometrik modellar va ularning o'xshashligini tahlil qiluvchi usullar orqali talqin qilishga o'rgatuvchi kursdir.

«Ekonometrika» so'zi ekonomika va metrika (o'lchov) so'zlaridan kelib chiqqan bo'lib, u Nobel mukofoti sovrindori Norvegiya iqtisodchi olimi R.Frish tomonidan kiritilgan.

Ekonometrikada ehtimollar nazariyasi va matematik statistikada o'rganiladigan korrelyatsion va regression tahlil, davriy qatorlar tahlili, bir jinsli tenglamalar tizimi, hamda boshqa usullar qo'llaniladi. Ekonometrikaning asosida iqtisodiy modellar yotadi. Bu modellar iqtisodiy jarayonlarni bashoratlash, tahlil qilish kabi tadqiqotlar olib borish uchun xizmat qiladi.

8.3. Chiziqli bo'lmagan regressiya va korrelyatsiya

Chiziqli bo'lmagan regressiya.

Iqtisodiy jarayonlarda chiziqli bo'lmagan munosabatlar mavjud bo'lib, ular chiziqli bo'lmagan funksiyalar orqali ifodalanadi.

Chiziqli bo'lmagan regressiya ikki sinfga bo'linadi: birinchisi tahlil qilinishi kerak bo'lgan o'zgaruvchilarga nisbatan chiziqli bo'lmagan, lekin baholanishi kerak bo'ladigan parametrlarga nisbatan chiziqli regressiya, ikkinchisi baholanadigan parametrlarga nisbatan chiziqli bo'lmagan regressiya.

Quyidagi funksiyalar ularda qatnashuvchi mavhum o'zgaruvchilarga nisbatan chiziqli bo'lmagan regressiyaga misol bo'la oladi:

- turli darajadagi polinomlar:

$$y = a + bx + cx^2 + e,$$

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + e;$$

- teng tomonli giperbola - $y = a + b / x + e.$

Baholanadigan parametralarga nisbatan chiziqli bo'lmagan regressiyaga quyidagi funksiyalarni kiritish mumkin:

- darajali $y = ax^b e;$

- ko'rsatkichli $y = ab^x e;$

- eksponensial $y = e^{a+bx}e$.

Yuqoridagi barcha regressiya funksiyalarida qo'shiluvchi va ko'paytma ye tasodifiy kattalik X ni tasodifiy kattalik y ga regressiya xatoligini bildiradi.

Birinchi sinf chiziqli bo'lmagan regressiyalar.

Chiziqli bo'lmagan regressiya ularda ishtirok etuvchi o'zgaruvchilar bo'yicha chiziqli regressiya kabi kichik kvadratlar usuli bilan aniqlanadi, chunki bu funksiyalar parametrlari bo'yicha chiziqlidir.

Misol uchun quyidagi ko'rinishda yoziluvchi ikkinchi tartibli parabolada

$$y = a + a_1x + a_2x^2 + e,$$

$x = x_1$, $x^2 = x_2$ o'zgaruvchilarni almashtirib, parametrlari kichik kvadratlar usulini aniqlanadigan ikki omilli chiziqli regressiya tenglamasini hosil qilamiz.

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + e;$$

Mos ravishda, uchinchi tartibli polinom uchun

$$y = a + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + e,$$

$x = x_1$, $x^2 = x_2$, $x^3 = x_3$ o'zgaruvchilarni almashtirib quyidagi ko'rinishdagi uch omilli chiziqli regressiya tenglamasini olamiz:

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + e,$$

va hokazo.

Shunday qilib ixtiyoriy darajadagi polinom chiziqli regressiya ko'rinishiga keltirilishi mumkin. Iqtisodiy tadqiqotlarda asosan ikkinchi darajali polinom, ayrim hollarda uchinchi darajali polinomlar qo'llaniladi.

Ikkinchi darajali parabola parametrlarini aniqlash uchun kichik kvadratlar usulini qo'llash quyidagi normal tenglamalar tizimiga olib keladi:

$$\begin{cases} na_0 + a_1\sum x + a_2\sum x^2 = \sum y, \\ a_0\sum x + a_1\sum x^2 + a_2\sum x^3 = \sum xy, \\ a_0\sum x^2 + a_1\sum x^3 + a_2\sum x^4 = \sum x^2 y. \end{cases}$$

Tizim a_0, a_1, a_2 – uch noma'lumli uchta tenglamalardan iborat. Uning yechimini Kramer formulasi yordamida aniqlash mumkin.

1-misol.

Kuzatuv natijalari jadvaldagi ma'lumotlardan iborat bo'lsin.

x	-2	-1	0	1	2
y	4,8	0,4	-3,3	-0,8	3,2

Bog'lanish $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ ko'rinishida bo'lganda, kichik kvadratlar usuli yordamida a_0, a_1, a_2 parametrlarni aniqlang.

Yechimi

Yordamchi jadval tuzamiz va normal tenglamalar tizimini hosil qilish uchun kerak bo'ladigan hisoblashlarni amalga oshiramiz.

№	x	y	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y
1	-2	4,8	4	-8	16	-9,6	19,2
2	-1	0,4	1	-1	1	-0,4	0,4
3	0	-3,3	0	0	0	0	0
4	1	-0,8	1	1	1	-0,8	-0,8
5	2	3,2	4	8	16	6,4	12,8
$\sum$	0	4,3	10	0	34	-4,4	31,6

Koeffitsiyentlarni hisoblash natijalariga ko'ra normal tenglamalar tizimi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{cases} 5a_0 + 0a_1 + 10a_2 = 4{,}3, \\ 0a_0 + 10a_1 + 0a_2 = -4{,}4, \\ 10a_0 + 0a_2 + 34a_2 = 31{,}6. \end{cases}$$

Tizimni Kramer usuli bilan yechib

$a_0 = -2{,}42$, $a_1 = -0{,}44$, $a_2 = 1{,}64$ ekanligini topamiz. Shunday qilib, y ga chiziqli bo'lmagan regressiya tenglamasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$y = -2{,}42 - 0{,}44x + 1{,}64x^2.$$

Ikkinchi sinf chiziqli bo'lmagan regressiya. Ikkinchi sinf chiziqli bo'lmagan regressiya

$$y = ax^b e, \quad y = ax^b + e$$

ko'rinishidagi funksiyalar bilan ifodalanadi. Ushbu funksiyalar iqtisodiy tadqiqotlarda asosan talabni narxga nisbatan elastikligini o'rganishda qo'llaniladi. Bu funksiyada y - talab hajmi; x -narx; e-tasodifiy xatolik.

Chiziqli bo'lmagan korrelyatsiya. Chiziqli bo'lmagan regressiya tenglamasi chiziqli bog'lanish kabi korrelyatsiya ko'rsatkichi (yoki korrelyatsiya indeksi – R) bilan to'ldiriladi.

$$R = [1 - \sigma^2_{кол} / \sigma^2_y] \tag{8.2}$$

bu yerda σ^2_y - natijaviy belgi (y)ning umumiy dispersiyasi; $\sigma^2_{кол}$ - $y = f(x)$ regressiya tenglamasidan aniqlanuvchi qoldiq dispersiya.

$$\sigma_y = [\Sigma(y - \bar{y})^2 / n], \quad \sigma^2_{кол} = [\Sigma(y - y_x)^2 / n]$$

bo'lganligi sababli

$$R = \sqrt{[1 - (\Sigma(y - y_x)^2 / \Sigma(\bar{y} - y)^2]} \tag{8.3}$$

Korrelyatsiya indeksining qiymati [0,1] oralig'ida ($0 \leq R \leq 1$) o'zgaradi. Bu qiymat qanchalik bir soniga yaqin bo'lsa, o'rganilayotgan ko'rsatkichlar orasidagi bog'lanish kuchi shunchalik zich va topilgan regressiya tenglamasining o'rganilayotgan jarayonni aks ettirish darajasi yuqori bo'ladi.

2 – misol.

Birinchi misolda berilgan ma'lumotlar asosida korrelyatsiya indeksi hisoblansin.

Birinchi misolda olingan $y = 2,42 - 0,44x + 1,64x^2$ regressiya tenglamasiga x parametrining -2,-1,0,1,2 qiymatlarini qo'yib y_x ning qiymatlarini topamiz.

Natijada quyidagiga ega bo'lamiz:

$$y_1 = -2,42 - 0,44 \cdot (-2) + 1,64 \cdot (-2)^2 = 5,02 .$$

Xuddi shu tartibda y_2, y_3, y_4, y_5 larning qiymatlari topiladi. Hisoblash natijalari jadvalda keltirilgan.

№	x	y	y_x	$y - y_x$	$(y - y_x)^2$	$y - \bar{y}$	$(y - \bar{y})^2$
1	-2	4,8	5,02	-0,22	0,0484	3,94	15,5236
2	-1	0,4	-0,34	0,74	0,5476	-0,46	0,2116
3	0	-3,3	-2,42	-0,88	0,7744	-4,16	17,3056
4	1	-0,8	-1,22	0,42	0,1764	-1,66	2,7556
5	2	3,2	3,26	-0,06	0,0036	2,34	5,4756
Σ	0	4,3	-	-	1,5504	-	41,272

(8.3) formula yordamida korrelyatsiya indeksini hisoblaymiz.

$$R = \sqrt{1 - (1,5504 / 41,272} = 0,981.$$

Korrelyatsiya indeksining 1ga yaqin bo'lganligi x va y kattaliklar orasidagi bog'lanish juda yuqori ekanligini ko'rsatadi.

8.4. Ko'p omilli regressiya va korrelyatsiya

Ko'p omilli regressiya ikki va undan ortiq o'zaro bog'liq bo'lmagan o'zgaruvchili natijaviy belgining $y = f(x_1, x_2, ..., x_k)$ ko'rinishdagi regressiyani anglatadi.

Regressiya tenglamasida tasodifiy kattalik y faqat $x_1, x_2, ..., x_k$ o'zaro bog'liq bo'lmagan o'zgaruvchilarning qiymatlariga bog'liq bo'lmasdan y ga ta'sir etuvchi qator boshqa omillarga ham bog'liq. Shuning uchun quyidagi ko'rinishdagi ifodadan foydalanamiz:

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_k) + e,$$

bu yerda e - natijaviy belgining regressiya tenglamasi orqali topiladigan qiymatini uning nazariy qiymatidan farqini ifodalovchi tasodifiy kattalik. Tasodifiy xatolikni statistik tahlil qilish ekonometrikaning asosiy masalalaridan biri hisoblanadi.

Natijaviy belgi y ni qator $x_1, x_2, ..., x_k$ omillarga bog'liqligini o'rganishda ikki x va y o'zgaruvchilarning juft korrelyatsiyasini o'rganishdagi quyidagi masalalar yechiladi:

- regressiya ko'rinishini aniqlash;
- parametrlarni baholash;
- agar x va y o'zgaruvchilar tasodifiy miqdorlar bo'lsa, ular orasidagi bog'lanish zichligini topish.

Biroq bu masalalar bilan bir qatorda ko'p omilli regressiya va korrelyatsiyani tavsiflovchi qator masalalarni ko'rib chiqish zarur.

Bunday masalalarga o'zaro ichki bog'lanishda bo'lgan $x_1, x_2, ..., x_k$ omillardan y ga ta'sir etuvchi muhum omillarni tanlab olish masalasi kiradi.

Omillarni tanlab olish bir nechta bosqichlarda amalga oshiriladi. Avval o'rganilayotgan jarayonlar bilan bog'liq bo'lgan omillar nazariy izlanishlar (iqtisodiyot nazariyasi, mutaxassis xulosasi va boshqalar) asosida tanlab olinadi. Bunda ko'p omilli regressiya va korrelyatsiyani tuzish uchun miqdoriy jihatdan o'lchash mumkin bo'lgan omillar olinadi. So'ngra matematik statistika usullarini qo'llab tanlab olingan omillarni o'rganilayotgan ko'rsatkichga ta'sirining muhimligi tekshirib chiqiladi. Bunday tekshirish odatda juft korrelyatsiyalar matritsasini, xususiy korrelyatsiyani, regressiya koeffitsiyentlarini turli kriteriyalar asosida tahlil qilish va boshqa usullarni o'z ichiga oladi.

Omillarni tanlash va chiziqli ko'p omilli korrelyatsion va regression bog'lanishlarni tuzish usullari

Ko'p omilli chiziqli korrelyatsion bog'lanish. $y, x_1, x_2, ..., x_k$ o'zgaruvchilar tasodifiy kattaliklar bo'lganda ko'p omilli chiziqli bog'lanishni tuzish uchun omillarni tanlashni ko'rib chiqaylik.

Bog'lanishni eng sodda shakli bo'lib, chiziqli bog'lanish xizmat qiladi, ya'ni

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_p x_p \qquad (8.4)$$

ko'rinishidagi bog'lanish.

Ko'p hollarda bunday bog'lanish iqtisodiyotda yuzaga keladigan o'zaro bog'lanishlarni ifodalaydi. (8.4) ko'rinishidagi bog'lanishni tuzish uchun boshlang'ich ma'lumotlar jadval ko'rinishida beriladi.

№	Ma'lumotlar olingan omillar					
	x_1	x_2	x_3	...	x_k	y
1	x_{11}	x_{21}	x_{31}	...	x_{k1}	y_1
2	x_{12}	x_{22}	x_{32}	...	x_{k2}	y_2
3	x_{13}	x_{23}	x_{33}	...	x_{k3}	y_3
...	...	...	...	...	...	...
N	x_{1n}	x_{2n}	x_{3n}	...	x_{kn}	y_n

Aytish kerakki, barcha o'zgaruvchilarni (8.4) tenglamaga kiritish shart yoki shunday o'zgaruvchilar borki, ular y kattalikka sezilarli ta'sir etmaydi, ularni (8.4) tenglamaga kiritish shart emasligini aniqlash talab etiladi. Birinchi holatda $p = k$, ikkinchi holatda esa $p < k$.

Bu masalani yechish uchun ko'p hollarda juft korrelyatsiya koeffitsiyentlaridan tuzilgan jadvaldan foydalaniladi. Bunday jadvalning unsurlari barcha k omillar uchun juft korrelyatsiya koeffitsiyetlaridan iborat bo'ladi. Jadval quyidagi ko'rinishga ega:

	y	x_1	x_2	x_3	...	x_k
y	1	r_{yx_1}	r_{yx_2}	r_{yx_3}	...	r_{yx_k}
x_1	r_{x_1y}	1	$r_{x_1x_2}$	$r_{x_1x_3}$	...	$r_{x_1x_k}$
x_2	r_{x_2y}	$r_{x_2x_1}$	1	$r_{x_2x_3}$	...	$r_{x_2x_k}$
x_3	r_{x_3y}	$r_{x_3x_1}$	$r_{x_3x_2}$	1	...	$r_{x_3x_k}$
...	...	...	...	...	...	...
x_k	r_{x_ky}	$r_{x_kx_1}$	$r_{x_kx_2}$	...	...	1

Jadval kataklarida juft korrelyatsiya koeffitsiyentlari yozilgan, masalan, $r_{3,1}$ - x_3 va x_1 o'zgaruvchilar orasidagi juft korrelyatsiya koeffitsiyenti va h.k. $r_{i,j}$ va $r_{j,i}$ hamda $r_{x_i,y}$ va r_{y,x_i} koeffitsiyentlar ustma-ust tushadi, chunki y va x_i o'zgaruvchilari orasidagi bog'lanish zichligi x_i va y orasidagi bog'lanish zichligi bilan bir xil, x_i va x_j lar uchun ham xuddi shunday.

Shuning uchun jadval soddalashtirilgan simmetrik shaklda (uchburchak shaklda) yoziladi.

	y	x_1	x_2	x_3	...	x_k
y	1	r_{yx_1}	r_{yx_2}	r_{yx_3}	...	r_{yx_k}
x_1	-	1	r_{yx_2}	$r_{x_1x_3}$	...	$r_{x_1x_k}$
x_2	-	-	1	$r_{x_2x_3}$	...	$r_{x_2x_k}$
x_3	-	-	-	1	...	$r_{x_3x_k}$
...	...	...	...	...	...	...
x_k	-	-	-	-	...	1

Bu jadval ma'lumotlari bo'yicha taxminan y ga qanday omillar ko'proq qaysilari esa kamroq ta'sir etishini hamda omillar orasidagi o'zaro bog'lanishni aniqlash mumkin.

3-misol.

Quyidagi jadval hosil qilingan bo'lsin:

	y	x_1	x_2	x_3
y	1	0,6	0,5	0,7
x_1	-	1	0,04	0,03
x_2	-	-	1	0,1
x_3	-	-	-	1

Jadvaldagi juft korrelyatsiya koeffitsiyentlari asosida x_1, x_2, x_3 omillar y omil bilan sezilarli darajada bog'langan (mos ravishda korrelyatsiya koeffitsiyentlari, 0,6;0,5;0,7) degan xulosani qilish mumkin. x_1, x_2, x_3 omillar orasidagi bog'lanish zichligi esa uncha katta emas (korrelyatsiya koeffitsiyentlari 00,4;00,3;0,1).

Bunday ma'lumotlar (8.4) tenglamani tuzish uchun juda qulay imkoniyat yaratadi.

4-misol.

Quyidagi jadvalni ko'rib chiqaylik.

	y	x_1	x_2	x_3	x_4
y	1	0,65	0,6	0,5	0,03
x_1	-	1	0,5	0,9	0,3
x_2	-	-	1	0,3	0,2
x_3	-	-	-	1	0,2
x_4	-	-	-	-	1

Jadvaldagi ma'lumotlarga asosan y va x_4 omillar orasidagi juft korrelyatsiya koeffitsiyenti qiymati uncha katta emas, shuning uchun x_4 omilni (8.4) tenglamaga kiritish maqsadga muvofiq emas. x_1 va x_3 o'zgaruvchilari orasidagi juft korrelyatsiya koeffitsiyenti yuqori darajada (korrelyatsiya koeffitsiyenti 0,9), bu esa ularning korrelyatsion bog'lanishi yuqoriligini ko'rsatadi. Bunday holatda x_1 va x_2 o'zgaruvchilarni bir paytning o'zida (8.4) tenglamaga kiritilmasdan har birining tadqiqotdagi o'rnini muhimligiga va tadqiqotchining fikriga qarab bittasi kiritiladi.

Odatda muhim omillarni tanlab olish uchun juft korrelyatsiya jadvalini tahlil qilishdan tashqari xususiy korrelyatsiya koeffitsiyentlari hisoblanadi.

x_2 o'zgarmas bo'lganda y va x_1 omillar orasidagi xususiy korelyatsiya koeffitsiyentini hisoblaymiz. U holda y va x_1 omillar orasidagi xususiy korrelyatsiya koeffitsiyenti quyidagiga teng bo'ladi:

$$r_{yx_1(x_2)} = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} r_{x_1 x_2}}{\sqrt{1 - r_{yx_2}^2}\sqrt{1 - r_{x_1 x_2}^2}} \tag{8.5}$$

Agar faqat bitta omil o'zgarmas bo'lsa, u holda koeffitsiyent birinchi tartibli xususiy korrelyatsiya koeffitsiyenti deyiladi. Agar 2 ta omil o'zgarmas deb olinsa, u holda ikkinchi tartibli xususiy korrelyatsiya koeffitsiyenti deyiladi va h.k. Bunday holatda juft korrelyatsiya koeffitsiyentini nolinchi tartibli deyish mumkin.

Ikkinchi tartibli xususiy korrelyatsiya koeffitsiyentlarini birinchi tartibli xususiy korrelyatsiya koeffitsiyentlari orqali quyidagicha ifodalash mumkin.

$$r_{yx_1(x_2x_3)} = \frac{r_{yx_1(x_2)} - r_{yx_3(x_2)} r_{x_1x_3(x_2)}}{\sqrt{1 - r_{yx_3(x_2)}^2}\sqrt{1 - r_{x_1x_3(x_2)}^2}} \tag{8.6}$$

Xuddi shunday, k-tartibli xususiy korrelyatsiya koeffitsiyentini $k-1$ tartibli xususiy korrelyatsiya koeffitsiyenti orqali ifodalash mumkin.

Omillar juft va xususiy korrelyatsiya koeffitsiyentlari asosida dastlabki tanlab olingandan so'ng (8.4) tenglamaning $a_0, a_1, \ldots, a_p$ parametrlarining qiymatlari aniqlanadi. Ular odatda kichik kvadratlar usuli bilan hisoblanadi.

(8.4) tenglama chiziqli bog'lanishda bo'lgan holda normal tenglamalar tizimi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\begin{cases} a_0 n + a_1\sum x_{1i} + a_2\sum x_{2i} + \ldots + a_p\sum x_{pi} = \sum y_i, \\ a_0\sum x_{1i} + a_1\sum x_{1i}^2 + a_2\sum x_{1i}x_{2i} + \ldots + a_p\sum x_{1i}x_{pi} = \sum x_{1i}y_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0\sum x_{pi} + a_1\sum x_{1i}x_{pi} + a_2\sum x_{pi}x_{2i} + \ldots + a_p\sum x_{pi}^2 = \sum x_{1i}y_i. \end{cases}$$

Bunday tenglamalar tizimining yechimini Kramer teoremasi, Gauss usuli va boshqa usullar bilan aniqlash mumkin.

y omili va $x_1, x_2, \ldots, x_p$ omillar to'plami orasidagi bog'lanish chiziqli bo'lgan holda ular orasidagi bog'lanish zichligini topish uchun *ko'p omilli korrelyatsiya koeffitsiyenti* - R qo'llaniladi.

Bu koeffitsiyent [0,1] oralig'ida o'zgaradi, juft korrelyatsiya koeffitsiyentidan farqli o'laroq u har doim mutlaq miqdor sifatida olinadi. Agar R=0 bo'lsa, y omili va $x_1, x_2, \ldots, x_p$ omillar to'plami orasida korrelyatsion bog'lanish bo'lmaydi. Agar R=1 bo'lsa u holda bog'lanish funksional bo'ladi.

Korrelyatsiya koeffitsiyenti quyidagi ko'rinishdagi ifoda orqali hisoblanadi:

$$R = \sqrt{\frac{a_1 r_{yx_1}\sigma_{x_1} + a_2 r_{yx_2}\sigma_{x_2} + \ldots + a_p r_{yx_p}\sigma_{x_p}}{\sigma_y}}, \qquad (8.7)$$

bu yerda a_0 – (8.4) tenglamaning regressiya koeffitsiyenti, r_{yx_i} – juft korrelyatsiya koeffitsiyenti, σ_{x_i} - x_i omilning o'rtacha kvadratik chetlanishi, σ_y - y omilning o'rtacha kvadratik chetlanishi.

Odatda R – korrelyatsiya koeffitsiyenti tahlil qilinmasdan uning kvadrati *umumiy (ko'p omilli) determinatsiya koeffitsiyenti* deb ataluvchi R^2- tahlil qilinadi.

Masalan, ko'p omilli korrelyatsiya koeffitsiyenti R=0,7 bo'lsa, u holda ko'p omilli determinatsiya koeffitsiyenti R^2=0,49, ya'ni 49% o'zgaruvchanlik (variatsiya) tenglamaga kiritilgan omillarga bog'liq, 51 foizi esa boshqa omillar bilan tavsiflanadi.

Ko'p omilli regressiya

Agar chiziqli ko'p omilli regressiya koeffitsiyentlari omillarning ta'sir etish ko'rsatkichi sifatida qaraladigan bo'lsa, u holda (8.4) tenglamadagi regressiya koeffitsiyentlarini to'g'ridan-to'g'ri o'zaro taqqoslash imkoniyati bo'lmasligi mumkin. Chunki ularning son qiymatlari har bir omilning tanlab olingan o'chov birliklariga bog'liq.

Regessiya koeffitsiyentlarini taqqoslash imkoniyatini hosil qilish uchun, regressiya koeffitsiyentlarini standart - bir xil o'lchovga keltirib olinadi.

Buning uchun barcha o'zgaruvchilar o'lchovsiz, standartashtirilgan o'lchov birliklariga keltirib olinadi va u quyidagicha amalga oshriladi:

$$t_y = (y - \bar{y})/\sigma_y, \quad t_{x_i} = (x_i - \bar{x}_i)/\sigma_{x_i} \qquad (8.8)$$

bu yerda y va x_i- mos omillarning berilgan o'lchovdagi (natural holatdagi) qiymatlari; $\bar{y}$ va $\bar{x}_i$ - y va x_i omillarning o'rtacha qiymatlari; t_y va t_{x_i} – standartlashtirilgan mashtabdagi omillarning mos qiymatlari.

Ozod had a_0 standartlashtirilgan chiziqli ko'p omilli regressiya tenglamasida qatnashmaydi, ya'ni (8.4) tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$t_y = \beta_1 t_{x_1} + \beta_2 t_{x_2} + \ldots + \beta_p t_{x_p}. \qquad (8.9)$$

Tenglamaning barcha o'zgaruvchilari taqqoslama o'lchov birliklarida ifodalangan $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ koeffitsiyentlar standartlashtirilgan masshtabdagi regressiya koeffitsiyentlari deb ataladi.

Ularni aniqlash uchun yangidan normal tenglamalar tizimini yechish shart emas. a_i koeffitsiyentlaridan β_i koeffitsiyentlarga o'tish va aksini bajarish quyidagi formula orqali amalga oshiriladi:

$$\beta_i = a_i \sigma_{x_i} / \sigma_y, \qquad (8.10)$$

bu yerda σ_{x_i}, σ_y – mos ravishda o'rta kvadratik chetlanishlar.

5- misol.

$y = 2 + 4x_1 + 6x_2 + 14x_3$ regressiya tenglamasi berilgan bo'lib, $\sigma_{x_1} = 4$, $\sigma_{x_2} = 2$, $\sigma_{x_3} = 6$, $\sigma_y = 4$ bo'lsin.

Berilgan tenglamani standartlashtirilgan ko'rinishda yozing va qaralayotgan omillarni y omiliga ta'sirini taqqoslang.

Yechimi.

(8.10) formula yordamida standartlashtirilgan masshtabdagi regressiya tenglamasining koeffitsiyentlarini hisoblaymiz.

$$\beta_1 = a_1\sigma_{x_1} / \sigma_y = 4 \cdot 4 / 4 = 4,$$
$$\beta_2 = a_2\sigma_{x_2} / \sigma_y = 6 \cdot 2 / 4 = 3,$$
$$\beta_3 = a_3\sigma_{x_3} / \sigma_y = 14 \cdot 6 / 4 = 21.$$

Shunday qilib, tenglama standartlashtirilgan masshtabda quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$t_y = 4t_{x_1} + 3t_{x_2} + 21t_{x_3}.$$

Regressiya koeffitsiyentlarining 4,3,21 qiymatlari har bir o'zgaruvchining o'zgarishini y omilini o'zgarishiga ta'sirini ko'rsatadi. Barcha koeffitsiyentlar taqqoslama o'lchov birliklarida ifodalangan. $|\beta_i|$ regressiya koeffitsiyentlari qanchalik katta bo'lsa, mos omil natijaviy omilga shunchalik kuchli ta'sir ko'rsatadi. Shunday qilib y natijaviy omilga eng katta ta'sir ko'rsatuvchi omil x_3, x_1 va x_2 omillar taxminan bir xilda ta'sir etadi.

Amalda ko'proq quyidagi ko'rinishdagi standartlashtirilgan tenglama qo'llaniladi:

$$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + ... + \beta_p x_p + \beta_{p+1} t, \qquad (8.11)$$

bu yerda $\mathscr{y}, x_i$ - y va x_i omillarning standartlashtirilgan ko'rinishi.

6- misol.

Firmaning 14 yil davomida mahsulotlar tayyorlash uchun kerak bo'ladigan jamlovchi materiallar, mehnat resurslari va ishlab chiqarish vositalari bo'yicha ma'lumotlari berilgan. Mavjud ma'lumotlarni va juft korrelyatsiya koeffitsiyentlari matritsasi har tomonlama tahlil qilingandan so'ng regressiya tenglamasiga kiritiladigan quyidagi omillar tanlab olingan:

y – mahsulot qiymati, pul birligida;

x_1 – bitta mahsulotga sarf bo'ladigan jamlovchi materiallar, pul birligida;

x_2 – ishlab chiqarilgan mahsulot, pul birligida;

x_3 – moddiy aylanma vositalar, pul birligida;

x_4 – mehnatning fondi jamg'armasi, pul birligida.

Tenglamaga vaqt omili (t) ni kiritib masalani kompyuter dasturlari yordamida yechilsa, quyidagi ko'rinishdagi regressiya tenglamani olamiz:

$$y = 70{,}6 + 1{,}19x_1 - 0{,}89x_2 + 1{,}43x_3 + 0{,}18x_4 - 2{,}77t. \qquad (8.12)$$

Hosil bo'lgan tenglamada regressiya koeffitsiyentlarining iqtisodiy ma'nosini ko'rib chiqaylik.

a_1=1,19 koeffitsiyent jamlovchi materiallarga xarajat bir birlikka ortganda, sotiladigan mahsulot narxi o'rtacha 1,19 pul birligiga ortishini ko'rsatadi. a_2 =-0,89 koeffitsiyent ishlab chiqarish 1 pul birligiga ortishi bilan mahsulot qiymati o'rtacha 0,89 pul birligiga pasayadi. Qolgan koeffitsiyentlar ham xuddi shunday iqtisodiy ma'noga ega.

Ko'p omilli regressiya modeli standartlashtirilgan masshtabda quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$y = 0{,}135\, x_1 - 1{,}276\, x_2 + 2{,}134\, x_3 + 0{,}139\, x_4 - 0{,}693\, t.$$

Koeffitsiyentlarni mutlaq qiymatlari bo'yicha taqqoslaganda, natijaviy ko'rsatkich (mahsulot narxi)ga ko'proq moddiy aylanma vositalar (x_3) ta'sir etadi, undan keyin mahsulot ishlab chiqarish (x_2), jamlovchi materiallar sarfi va mehnatning fondi jamg'armasi (x_4) omillari deyarli birdek ta'sir etishini aytish mumkin.

Takrorlash va nazorat uchun savollar:

1. Iqtisodiy o'zgaruvchilarningo'zaro munosabatlari deganda nimani tushunasiz?
2. Bog'lanishlar qanday holatlarda statistik va qanday holatlarda korrelyatsion deyiladi?
3. Regressiya tenglamasi deganda nimani tushuniladi, uni izohlab bering?
4. Ekonometrika qanday fan, unda qanday usullar qo'llaniladi?
5. Chiziqli bo'lmagan regressiya nimani anglatadi va u qanday funksiyalar bilan ifodalanadi?
6. Chiziqli bo'lmagan korrelyatsiya deganda nimani tushunasiz va u qanday ifodalanadi?
7. Ko'p omilli regressiya deganda nimani tushunasiz va u qanday ifodalanadi?
8. Ko'p omilli regressiya va korrelyatsiyani o'rganishda qanday masalalar yechiladi?
9. Ko'p omilli regressiyada juft va xususiy korrelyatsiya koeffitsiyentlari nimani anglatadi. Xususiy korrelyatsiya koeffitsiyenti qanday tartibda ifodalanadi?
10. Regressiya koeffitsiyentlarini taqqoslash uchun qanday ishlar amalga oshiriladi?

IX Bob. IQTISODIY JARAYONLARNI BASHORATLASH

9.1. Iqtisodiy jarayonlarni bashoratlash tushunchasi, iqtisodiy bashoratlarni tasniflanishi va bashoratlash bosqichlari

Bozor iqtisodiyoti sharoitida ho'jalik yurituvchi subyekt bo'ladimi yoki jismoniy shaxs bo'ladimi unda o'zining tadbirkorlik faoliyatini bashoratlash zaruriyati tug'iladi.

Menejerlar qisqa muddatli va uzoq muddatli rejalarni tuzishda ishlab chiqarish hajmi, sotish uchun chiqariladigan mahsulot hajmi, foiz stavkalari kabi muhim ko'rsatkichlarning qiymatlarini bashorat qilishga majburdirlar.

Bashorat deganda tizimni kelajakda bo'lishi mumkin bo'lgan holatini va shu holatni egallash uchun ketgan muddatni ilmiy asoslangan holda tasvirlash tushuniladi. Bashoratlarni ishlab chiqish jarayoni bashoratlash deb ataladi.

Bashoratlashning maqsadi tizimning o'tmishdagi va hozirgi ahvolini, o'zgarish qonuniyatlarini o'rganish va tahlil qilish asosida uning kelgusidagi rivojlanishini ilmiy asoslangan holda belgilab chiqish, sodir bo'ladigan vaziyatning xarakteri va mazmunini ochib berishdan iborat.

Bashoratlash hodisalar va jarayonlarning kelajakdagi mumkin bo'lgan rivojlanish yo'lini va natijasini belgilab beradi, ozmi-ko'pmi uzoqroq istiqbol uchun bu hodisa va jarayonlarni xarakterlovchi ko'rsatkichlarga baho beradi.

Bashoratlar bashorat qilinayotgan obyektlarga qarab ilmiy-texnikaviy, iqtisodiy, ijtimoiy va boshqalarga bo'linadi.

Bashoratlash obyektining miqyosiga qarab iqtisodiy bashoratlar alohida korxona va tashkilotlar (mikrodarajada) bashoratidan to mamlakat miqiyosida (makrodaraja) tarmoqlar rivojlanishning bashoratigacha bo'lgan yoki dunyo miqyosidagi qonuniyatlarni (global daraja) barcha darajalarini qamrab oladi.

Bashoratlash davri muddatiga qarab bashoratlar quyidagi guruhlarga bo'linadi:

- tezkor bashoratlar – bir oygacha;
- qisqa muddatli bashoratlar – bir yilgacha;
- o'rta muddatli bashoratlar – besh yilgacha;
- uzoq muddatli bashoratlar – o'n besh yildan yuqori.

Bozor iqtisodiyoti sharoitida ko'proq tezkor va *qisqa muddatli* bashoratlar muhim ahamiyatga ega.

Iqtisodiy jarayonlarni bashoratlash quyidagi bosqichlarda amalga oshiriladi:

- masalaning qo'yilishi va bashoratlash uchun zarur ma'lumotlarni yig'ish;
- yig'ilgan ma'lumotlarni birlamchi tahlil qilish;
- bashoratlashning mumkin bo'lgan modellarni aniqlash;
- ko'rilayotgan model parametrlarini baholash;
- tanlangan modelni o'xshashligi(addekvatligi)ni tekshirish;
- model ko'rsatkichlarini baholash;
- olingan bashorat natijalarini tahlil qilish.

9.2. Davriy qatorlar va iqtisodiy ma'lumotlarga qo'yiladigan talablar

Davriy qatorlar. Iqtisodiy tizimda yuz beradigan jarayonlar ma'lum bir ko'rsatkichlarining vaqtga bog'liq holda o'zgaruvchi qiymatlarini ketma-ket joylashuvidan hosil bo'lgan qator shaklida namoyon bo'ladi.

Ko'rsatkichlar qiymatini qatorda o'zgarib borishi o'rganilayotgan xodisaning dinamikasi haqidagi ma'lumotni beradi.

Biror bir ko'rsatkichni kuzatish natijasida olingan qiymatlarini o'sib borish yoki kamayib borish tartibida joylashuvidan hosil bo'lgan qatorlar dinamika qatorlari deyiladi. Har qanday dinamika qatorlari ikki unsurdan iborat bo'ladi, ular xronologik momentlar (sanalar), davrlar (yillar, oylar va hakozo) ro'yxatidan va o'rganilayotgan hodisaning soni, hajmi, miqdorini tavsiflovi darajalardan tashkil topadi.

Davriy qatorlarning alohida ko'rsatkichlari qatorning darajalari deyiladi.

Davriy qatorlar momentli, oraliq va hosilaviy qatorlarga bo'linadi.

Momentli qatorlar ko'rsatkichlarning aniq bir vaqt momentidagi qiymatlarini tavsiflaydi, bunday qatorlarga misol quyidagi jadvalda keltirilgan.

Firma ishchilarining soni

Sana	01.01	01.02	01.03	01.04	01.05	01.06	01.07	01.08	01.09
Ishchilar soni, 100 kishi hisobida	127	128	132	137	140	145	147	150	150

Oraliq qatorlari ko'rsatkichlar qiymatlarining ma'lum bir vaqt oralig'idagi qiymatini tavsiflaydi.

Firma ishchilarining ish haqi fondi

Oylar	Yanvar	Fevral	Mart	Aprel	May	Iyun	Iyul	Avgust	Sentabr
Ish haqi fondi, mln so'm hisobida	2 305	2 330	2 370	2 380	2 385	2 390	2 392	2.400	2 400

Hosilaviy qatorlar ko'rsatkichlarning o'rtacha va nisbiy qiymatlaridan tuziladi.

Firma ishchilarining o'rtacha ish haqi

Oylar	Yanvar'	Fevral	Mart	Aprel	May	Iyun	Iyul	Avgust	Sentabr
O'rtacha ish haqi, mln so'm hisobida	181 5	182.1	179 5	173 7	170 4	164 8	162.7	160.0	160 0

Qatorning darajalari determinerlangan yoki tasodifiy qiymatlar bo'lishi mumkin. Oyda, kvartalda, yilda kunlar soni haqidagi ketma-ket ma'lumotlar qatori determinerlangan qiymatlar qatoriga misol bo'lishi mumkin. Darajalari tasodifiy qiymatlarlardan iborat bo'lgan qatorlar bashoratlashda keng qo'llaniladi. Bunday qatorlarning har bir ko'rsatkichi diskret yoki uzluksiz qiymatlarga ega bo'lishi mumkin.

Davriy qatorlarning tarkibiy qismlari. Agar davriy qatorlarda iqtisodiy ko'rsatkichlarning o'zgarish tendensiyasi uzoq vaqt davom etsa, u holda jarayon o'zgarishida trend mavjud deyiladi. Trend deganda rivojlanishning umumiy yo'nalishi yoki davriy qatorlarning asosiy tendensiyasini aniqlovchi o'zgarish tushuniladi. Trend dinamika qatorining uzoq vaqt davomida ta'sir etuvchi tizimli tarkibiy qismlari qatoriga kiradi. Davriy qatorlarda ko'pincha iqtisodiy jarayonlarni ifodalovchi qatorlarning davriyligini ifodalovchi qismiga tegishli bo'lgan tebranish uchraydi.

Iqtisodiy ko'rsatkichlar davriy qatorlari darajalarining qiymatlari: trend, mavsumiy, davriy (sikllik) va tasodifiy qismlardan tashkil topadi.

Agar tebranish davri bir yildan oshmasa, u holda bunday tebranish mavsumiy deyiladi, agar bir yildan oshsa siklik (davriy) tebranish deb ataladi. Ko'proq mavsumiy o'zgarishlar sababi tabiat, iqlim (klimatik) sharoitlar bo'lsa, siklik (davriy) o'zgarishlarning sababi demografik sikllardan iborat bo'ladi.

Dinamika qatorining trend, mavsumiy va siklik tashkil etuvchilari mavsumiy yoki tizimli tashkil etuvchilar deb ataladi. Agar davriy qatordan muntazam tashkil etuvchilarni chiqarib tashlansa tasodifiy tashkil etuvchilar qoladi.

Iqtisodiy ma'lumotlarga qo'yiladigan talablar. Bashoratlashda qatorlarning yonma-yon kelgan darajalari oraliqlarini tanlash muhim ahamiyatga ega. Vaqt bo'yicha oraliqlar o'ta yiriklashtirib olinganda ko'rsatkichlar dinamikasining ayrim qonuniyatlarini soddalashtirishlarga olib kelishi mumkin. O'ta maydalashtirilganda esa hisoblash hajmi ko'payadi, jarayon dinamikasida muhim bo'lmagan qismlari paydo bo'ladi. Qator darajalari o'rtasidagi vaqt bo'yicha oraliq har bir jarayon uchun aniq tanlanishi zarur, ammo darajalar teng oraliqlarda olinishi maqsadga muvofiq hisoblanadi.

Haqiqatda rivojlanish jarayonini davriy qatorlar orqali ifodalashning muhim shartlaridan biri qator darajalarini taqqoslamaligini ta'minlashdan iborat. Buning uchun qator darajalari bir hil o'lchov birliklariga keltirilishi, davrlar miqiyosida olinganda esa aynan shu davrga tegishli bo'lishi kerak. Taqqoslamalik sharti ko'proq narx ko'rsatkichlari va narxlarning o'zgarishi, hududlarning almashinishi, korxona va tashkilotlarni yiriklashtirilishi yoki butunlay yo'q bo'lib ketishi natijasida buzilishi mumkin.

Iqtisodiy jarayonlar dinamikasini mukammal o'rganish uchun kuzatuv obyektlari darajasidagi ma'lumotlar to'liq bo'lishi, davriy qator yetarlicha uzunlikka ega bo'lishi, kuzatuv natijalari tushib qolmagan bo'lishi kerak.

Davriy qatorlar darajalarida anamal (mavhum) qiymatlar uchrashi mumkin. Bunday qiymatlar ma'lumotlarni yig'ish, yozib olish yoki uzatishda yo'l quyiladigan xatolar natijasida paydo bo'lishi mumkin. Bunday xatolar texnik xatolar yoki birinchi turdagi xatolar bo'lib ularni bartaraf etish zarur. Lekin anamal qiymatlar ham haqiqiy jarayonni ifodalashi mumkin, masalan, bozorda dollar kursining tebranishi yoki qimmatli qog'ozlar kursining tushib ketishi va boshqalar. Bunday anamal qiymatlar ikkinchi turdagi xatoliklar bo'lib, bartaraf etilmasdan balki ulardan haqiqiy holatni baholashda faydalaniladi. Davriy qatorlarda anamal darajalarni aniqlash uchun maxsus usullardan foydalaniladi(masalan Irvin usuli)[1].

9.3. Iqtisodiy jarayonlar dinamikasi asosiy ko‘rsatkichlari va ular yordamida bashoratlash

Iqtisodiy jarayonlar dinamikasini miqdoriy baholashda mutlaq qo‘shimcha o‘sish(kamayish), o‘sish(kamayish) sur’ati va qo‘shimcha o‘sish(kamayish) sur’ati kabi statistik ko‘rsatkichlardan foydalaniladi. Ular bazisli, zanjirli va o‘rtacha ko‘rsatkichlarga bo‘linadi.

Bazisli, zanjirli va o‘rtacha mutlaq qo‘shimcha o‘sish, o‘sish sur’ati va qo‘shimcha o‘sish sur’atlarini hisoblash formulalari quyidagi jadvallarda keltirilgan.

Ko‘rsatkich nomlari	*Mutloq qo‘shimcha o‘sish*	O‘sish sur’ati	Qo‘shimcha o‘sish sur’ati
Bazisli	$\Delta Y_t^б = Y_t - Y_б$	$T_t^б = Y_t / Y_б \cdot 100\%$	$K_t^б = T_t^б - 100\ \%$
Zanjirli	$\Delta Y_t^з = Y_t - Y_{t-1}$	$T_t^з = Y_t / Y_{t-1} \cdot 100\ \%$	$K_t^з = T_t^з - 100\%$
O‘rtacha	$\Delta \overline{Y_t} = (Y_n - Y_1)/(n-1)$	$\overline{T_t} = \sqrt[n-1]{Y_n / Y_1} \cdot 100$	$\overline{K} = \overline{T_t} - 100\ \%$

Formulalarda $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ davriy qatorlar darajalari; n — qator uzunligi; $Y_б$ - dinamika qatorida taqqoslash bazasi sifatida olingan daraja.

Qator dinamikasini o‘rtacha qo‘shimcha o‘sish orqali tasvirlash ikki chetki nuqtalarni birlashtiruvchi to‘g‘ri chiziqqa mos keladi. Bir qadam oldinga bashorat qiymatni topish uchun davriy qatorning oxirgi darajasiga o‘rtacha mutlaq qiymatni qo‘shimcha o‘sishini qo‘shish kifoya:

$$Y_{n+1} = Y_n + \Delta \overline{Y_t} \qquad (9.1)$$

[1] M.C. Krass, B.P. Chuprinov. Matematika dlya ekonomistov. Piter. Moskva, 2005. 405-407 betlar.

bu yerda: Y_n - davriy qator ko'rsatkichini n nuqtasidagi qiymati;

Y_{n+1} -ko'rsatkichning $n+1$ - nuqtadagi bashoratlangan qiymati;

$\Delta\bar{Y}$ - davriy qatorning o'rtacha qo'shimcha o'sish qiymati.

Qator o'zgarishi dinamikasini o'rtacha qo'shimcha o'sish sur'atini qo'llab tasvirlash uning ikki chetki nuqtalaridan o'tkazilgan va o'zgarish dinamikasi doimiy o'sish sur'atiga ega jarayonlar uchun xos bo'lgan ko'rsatkichli yoki eksponsial egri chiziq ko'rinishida ifodalashga mos keladi.

i - qadam oldinga bashorat qiymatini aniqlash quyidagi formula orqali amalga oshiriladi:

$$Y_{n+1} = Y_n \cdot \bar{T}_i \qquad (9.2)$$

bu yerda Y_{n+1} - ko'rsatkichning $n+1$ nuqtadagi bashorat qiymati, $\bar{T}$ – nisbiy qiymatlarda ifodalangan o'rtacha o'sish sur'ati.

1-misol.

Quyidagi jadvalda firma xizmatchilarining oylar bo'yicha ish haqi fondi pul birligida berilgan.

t	1	2	3	4	5
Y_t	252,0	253,0	254,2	255,3	256,5

Ish haqi fondining 6 oy bashorat qiymatini aniqlash uchun o'rtacha mutlaq qo'shimcha o'sishni qo'llash o'rinli ekanligini asoslang.

Yechimi:

Zanjirli mutlaq qo'shimcha o'sish qiymatlarini aniqlaymiz:

$$\Delta Y_2 = Y_2 - Y_1 = 253-252 = 1$$
$$\Delta Y_3 = Y_3 - Y_2 = 254{,}2-253{,}0 = 1{,}2$$
$$\Delta Y_4 = Y_4 - Y_3 = 255{,}3-254{,}2 = 1{,}1$$
$$\Delta Y_5 = Y_5 - Y_4 = 256{,}5-255{,}3 = 1{,}2$$

Zanjirli mutlaq qo'shimcha o'sish 1 dan 1,2 gacha o'zgaradi, ularning o'zgarishi bir xilda. Bu o'zgarish firma ish haqi fondining oylar bo'yicha dinamikasi chiziqli o'zgarishga ega ekanligini ko'rsatadi. Shuning uchun Y_6 ning bashorat qiymatini o'rtacha mutlaq qo'shima o'sish ($\Delta \overline{Y}$)ni qo'llab aniqlash o'rinli.

$$\Delta \overline{Y} = (Y_5 - Y_1)/(n-1) = (256,5 - 252)/(5-1) = 1,125 ,$$

$$Y_6 = Y_5 + \Delta \overline{Y} = 256,5 + 1,125 = 257,625 .$$

2-misol.

Firma xodimlarining oylar bo'yicha ish haqi fondi dinamikasi 5 oy davomida taxminan o'zgarmas o'sish sur'atlarida o'zgarib borgan. 1 oyda ish haqi fondi 252 pul birligini, 5 oyda esa – 256,5 pul birligini tashkil etgan. Firma xodimlarining 6 oy ish haqi fondini o'rtacha o'sish sur'atini qo'llab aniqlang.

Yechimi:

Misol shartiga asosan 5 oy davomida ish haqi fondi o'zgarmas o'sish sur'ati bilan o'zgarib borgan. Shuning uchun 6 oy ish haqi fondining bashorat qiymatini o'rtacha o'sish sur'atini qo'llab aniqlash mumkin.

O'rtacha o'sish sur'ati quyidagidan iborat:

$$\overline{T} = (y_n / y_1)^{1/(n-1)} \cdot 100\%,$$

$$\overline{T} = (y_5 / y_1)^{1/4} \cdot 100\% = (256,5/252)^{1/4} \cdot 100\% = 100,44\%$$

Shunday qilib, firma xodimlarining ish haqi fondining bashorat qiymati:

$$y_6 = y_5 \cdot \overline{T} = 256,5 \cdot 100,44\% = 257,6 \text{ pul birligiga teng.}$$

Iqtisodiy jarayonlarni bashoratlashda tuziladigan davriy qatorlarida iqtisodiy ko'rsatkichlarning anamal qiymatlarini uchrashi, ko'rsatkichlarni bashorat qiymatlarining aniqligiga ta'sir ko'rsatadi. Shuning uchun davriy qatorlar dastlabki tahlildan o'tkaziladi.

Iqtisodiy ko'rsatkichlar davriy qatorlarini dastlabki tahlili, qator darajalarida qaralayotgan iqtisodiy tizimning haqiqiy imkoniyatlariga mos kelmaydigan anamal qiymatlarni namoyon etish hamda trend mavjudligini aniqlashdan iborat.

Davriy qatorlarni dastlabki tahlildan o'tkazish uchun «Statistikaning umumiy nazariyasi» fanidan tanish bo'lgan usullar qo'llanadi, jumladan, qatorlarni tekislash, sirg'aniq o'rtachalar, eksponensial tekislash va boshqalar.

9.4. Iqtisodiy jarayonlarni bashoratlashda o'sish egri chizig'i modelini qo'llanishi

O'sish egri chizig'i modeli tavsifi. Davriy qatorlarni tekislashning kompleks analitik usullari aniq o'sish egri chiziqlarini tanlash va ularning parametrlarini aniqlashga olib keladi. O'sish egri chizig'i deganda berilgan dinamik qatorni approksimatsiya qiluvchi (ifodalochi) ma'lum bir funksiya tushuniladi.

O'sish egri chiziqlarini qo'llab bashoratlash quyidagi bosqichlarni o'z ichiga oladi:

- shakli davriy qator dinamikasiga mos keluvchi bir yoki bir nechta egri chiziqlar tanlash;
- tanlangan egri chiziq parametrlarini baholash;
- tanlangan egri chiziqni bashorat qilinayotgan jarayonga aynan o'xshashligini tekshirish va egri chiziqni uzil-kesil tanlash;
- nuqtaviy va oraliq bashorat qiymatlarni hisoblash.

O'sish egri chiziqlari odatda uchta sinf funksiyalaridan tanlab olinadi.

Birinchi sinfga o'sishning monoton xususiyatga ega bo'lgan va o'sish chegarasi bo'lmagan jarayonlarni ifodalash uchun qo'llaniladigan egri chiziqlar kiradi.

Ikkinchi sinfga o'rganilayotgan davrda o'sish chegarasi bo'lgan egri chiziqlar kiradi. Bunday egri chiziqlar to'yingan yoki to'lg'azilgan deb ataladi.

Agar to'lg'azilgan egri chiziqlar egilish nuqtasiga ega bo'lsa u holda ular uchinchi sinfga tegishli bo'ladi. Ularni S – shakldagi egri chiziqlar deb ataladi. Birinchi turdagi o'sish egri chiziqlariga quyidagi sinf polinomlarini keltirish mumkin:

$$y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots \qquad (9.3)$$

Ushbu polinomda $t = 0$ da a_0 qatorning boshlang'ich darajasi, a_1 - chiziqli qo'shimcha o'sish, a_2 - o'sish tezligi, a_3 - o'sish tezligining o'zgarishi deb ataladi.

Iqtisodiy tadqiqotlarda ko'p hollarda uchinchi tartibdan katta bo'lmagan polinomlar qo'llaniladi.

Birinchi darajali polinom $y_t = a_0 + a_1 t$ grafikda to'g'ri chiziq ko'rinishida tasvirlanadi va vaqt bo'yicha bir tekisda rivojlanuvchi jarayonlarni ifodalashda foydalaniladi.

Ikkinchi darajali polinom $y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ grafikda parabola ko'rinishida tasvirlanadi va jarayon rivojlanishi tekis tezlanuvchan bo'lgan hollarda foydalaniladi.

Uchinchi darajali $y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ polinomda qo'shimcha o'sish ishorasi bir yoki ikki marta o'zgarishi mumkin.

Polinomlar parametrlarini aniqlash kichik kvadratlar usulida amalga oshiriladi. To'g'ri chiziq koeffitsiyentlarini aniqlash uchun normal tenglamalar quyidagi ko'rinishga ega:

$$\begin{cases} \sum y_t = a_0 n + a_1 \sum t \\ \sum y_t \cdot t = a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 \end{cases}$$

Tenglamalar sistemasining koeffitsentlari a_0 va a_1 larni Kramer formulasi bo'yicha hisoblanadi.

Koordinata boshini dinamika qatorining o'rtasiga ko'chirish yo'li bilan normal tenglamalar sistemasini soddalashtirish va ko'rsatkichlar mutlaq qiymatlarini kamaytirish mumkin. Agar koordinata boshini ko'chirmasdan avval $t = 1, 2, 3, \cdots$ bo'lgan bo'lsa, u holda ko'chirgandan so'ng:

- qator elementlari soni juft bo'lgan holda,
-

$$t = \cdots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \cdots$$

- qator elemetlari soni toq bo'lgan holda,

$t = \cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$ qiymatlarni olamiz.

Ushbu holatda to‘g‘ri chiziqning koeffitsiyentlari quyidagi ifodadan topiladi:

$$a_0 = \sum y_t / n; \quad a_1 = \sum y_t \cdot t / \sum t^2. \tag{9.4}$$

Xuddi shu usulda ikkinchi tartibli polinom koeffitsiyentlari aniqlanadi:

$$a_0 = \sum y_t / n - \sum t^2 / n\{(n\sum y_t \cdot t^2 - \sum t^2 \sum y_t)/[n\sum t^4 - (\sum t^2)^2]\}$$

$$a_1 = \sum y_t \cdot t / \sum t^2;$$

$$a_2 = (n\sum y_t \cdot t^2 - \sum t^2 \cdot \sum y_t)/\{n\sum t^4 - (\sum t^2)^2\} \tag{9.5}$$

3-misol.

Firmaning ishlab chiqarish bo‘yicha 8 oylik ma’lumotlari asosida:

- $y_t = a_0 + a_1 t$ ... chiziqli trendning a_0 va a_1 koeffitsiyentlarini va bir oy oldinga bashorat ko‘rsatkichini;

- $y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ parabolik trendning a_0, a_1, a_2 koeffitsiyentlarini va bir oy oldinga bashorat ko‘rsatkichilarini hisoblang.

Yechimi.

Chiziqli va parabolik trendlarning koeffitsiyentlarini hisoblash uchun normal tenglamalar sistemasidan olingan ifodalardan foydalanamiz.

Kordinata boshi (t')ni ko‘chiramiz va zarur bo‘lgan hisoblashlarni amalga oshirib berilgan va hisoblangan ma’lumotlarni jadvalga kiritamiz.

1. Chiziqli trend

№	t'	y_t	$(t')^2$	$y_t \cdot t'$
1	-7	3423	49	-23961
2	-5	3321	25	-16605
3	-3	3210	9	-9630
4	-1	3122	1	-3122
5	1	3034	1	3034

6	3	2940	9	8820
7	5	2845	25	14225
8	7	2739	49	19173
jami	0	24634	168	-8066

Chiziqli trend koeffitsiyentlari qiymatini (9.4) formulani qo'llab hisoblaymiz.

$$\begin{cases} a_0 = \sum y_t / n = 24634/8 = 3079{,}25; \\ a_1 = \sum y_t \cdot t / \sum (t')^2 = -8066/168 = -48{,}01. \end{cases}$$

Shunday qilib, t=o da qator darajasining o'rtacha qiymati 3079,25 ni tashkil etadi, mahsulot ishlab chiqarishning o'rtacha oylik o'zgarishi - 48,01 ni tashkil etadi, ya'ni o'rtacha oylik ishlab chiqarish 48,01 ga kamayadi.

Hisoblangan koeffitsiyentlarni chiziqli trendga qo'yib quyidagiga tenglamaga ega bo'lamiz:

$$\hat{y}_t = 3079{,}25 - 48{,}01 \cdot t' \cdot$$

Hosil bo'lgan tenglamaga ko'ra 9 – oy uchun ko'rsatkichning bashorat qiymati quyidagiga teng bo'ladi:

$$y_9 = 3079{,}25 - 48{,}01 \cdot 9 = 2647{,}16 .$$

2. Parabolik trend

t	t'	y_t	$(t')^2$	$y_t t'$	$(t')^3$	$(t')^4$	$(y_t(t')^2$
1	-7	3423	49	-23961	-343	2401	167727
2	-5	3321	25	-16605	-125	625	83025
3	-3	3210	9	-9630	-27	81	28890
4	-1	3122	1	-3122	-1	1	3122
5	1	3034	1	3034	1	1	3034
6	3	2940	9	8820	27	81	26460
7	5	2845	25	14225	125	625	71125
8	7	2739	49	19173	343	2401	134211
Jami	0	24634	168	-8066	0	6216	517594

Parabolik trend koeffitsiyentlarini (9.5) formula bilan hisoblaymiz.

$$a_0 = 3077{,}05; \quad a_1 = -48{,}01; \quad a_2 = 0{,}105.$$

Natijada parabolik trend tenglamasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$y_t = 3077{,}05 - 48{,}01 \cdot t' + 0{,}105(t')^2.$$

9 oy uchun ko'rsatkichning bashorat qiymati quyidagiga teng:

$$y_t = 3077{,}05 - 48{,}01 \cdot 9 + 0{,}105 \cdot 9^2 = 2653{,}47.$$

Modellar aniqlik darajasini tavsifi. Modellar aniqligi darajasini bashoratlash xatoligining qiymati bo'yicha aniqlaniladi.

Bashoratning mutlaq xatoligi quyidagi formula yordamida aniqlaniladi:

$$\Delta_t = y_t - y_t, \tag{9.6}$$

Bu yerda y_t - ko'rsatkichning bashorat qiymati, y_t - haqiqiy qiymati.

Amaliyotda ko'proq bashoratning nisbiy xatoligi qo'llaniladi va u quyidagicha hisoblanadi:

$$\delta_t = 100\ (y_t - y_t) / y_t. \tag{9.7}$$

Modul bo'yicha o'rtacha mutlaq va nisbiy xatoliklar quyidagicha aniqlaniladi:

$$|\overline{\Delta_t}| = (\sum |y_t - y_t|) / n;$$

$$|\overline{\delta_t}| = (100 \sum |(y_t - y_t) / y_t|) / n. \tag{9.8}$$

Agar mutlaq va nisbiy xatoliklar nuldan katta bo'lsa, bunday holat bashorat qiymatining oshib ketganligidan, agar u nuldan kichik bo'lsa kamayib ketganligidan dalolat beradi.

4-misol.

Jadvalda yuk tashish hajmi va uning bashorat qiymati berilgan.

t	1	2	3	4	5	6	7
y_t	267	267	258	262	253	257	263
1-model bo'yicha boshorat	275	253	250	269	253	248	250
2-model bo'yicha bashorat	260	275	253	278	263	251	269

Ikki modelda hisoblangan bashorat qiymatlar uchun modul bo'yicha nisbiy xatolik va o'rtacha mutlaq xatolikni toping.

Yechimi.

(9.6) – (9.8) formulalar asosida hisoblangan modul bo'yicha nisbiy xatolik va modul bo'yicha o'rtacha mutlaq xatolik natijalarini jadval ko'rinishda ifodalaymiz.

t	y_t	Bashorat		Modul bo'yicha mutlaq xatolik		Modul bo'yicha nisbiy xatolik	
		1-model	2-model	1-model	2-model	1-model	2-model
1	267	275	260	8	7	2,996	2,545
2	267	253	275	14	8	5,243	3,162
3	258	250	253	8	5	3,101	2,0
4	262	269	278	7	16	2,672	5,948
5	253	253	263	0	10	0	3,953
6	257	248	251	9	6	3,502	2,419
7	263	250	269	13	6	4,943	2,4
O'rtacha xatolik				8,43	8,29	3,208	3,204

Bashorat natijasining xatoligi o'rtacha mutlaq va o'rtacha nisbiy xatolik qiymatlari bo'yicha ikkinchi modelda kichikroq bo'lgani uchun shu model haqiqatni to'la aks ettiradi deb hisoblanadi.

Takrorlash va nazorat uchun savollar:

1. Iqtisodiy jarayonlarni bashoratlash deganda nimani tushuniladi?
2. Bashoratlar qanday tasniflanadi?
3. Bashoratlash nechta bosqichda amalga oshiriladi?
4. Davriy qatorlar deganda nimani tushuniladi va iqtisodiy ma'lumotlarga qanday talablar qo'yiladi?
5. Davriy qatorlar qanday tarkibiy qismlardan iborat?
6. Iqtisodiy jarayonlar dinamikasini o'rganishda qanday ko'rsatkichlardan foydalaniladi?
7. Iqtisodiy jarayonlar dinamikasi ko'rsatkichlari yordamida bashoratlash mumkinmi, mumkin bo'lsa u qanday yo'llar bilan amalga oshiriladi? Misollar keltiring.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati

1. Karimov I.A. Jahon moliyaviy-iqtisodiy inqirozi, O'zbekiston sharoitida uni bartaraf etishning yo'llari va choralari. – T.: O'zbekiston, 2009 y.
2. Zamkov O.O., Tolstopyatenko A.V., Cheremnix Yu.N. Matematicheskie metodi v ekonomike. – M.: «Delo i Servis», 2004 g.
3. Krass M.S., Chuprinov B.P. Matematika dlya ekonomistov. – S-Pb., «Piter», 2005 g.
4. Malixin V.I. Matematika v ekonomike. – M: «INFRA-M», 2002 g.
5. Abdullaev O.M. Iqtisodiy matematika. O'quv qo'llanma. TDIU. – T: 2004 y.
6. Abdullaev O. M. Iqtisodiy – matematik usullar. O'quv qo'llanma. TDIU. –T: 2006 y.
7. Nasritdinov G. Ekonometrika. – T.: «Iqtisod-moliya» 2008 y.
8. Otaniyozov B. Chiziqli programmalash asoslari. – T.: «Ijod dunyosi», 2002 y.
9. Safaeva K. Matematik dasturlash. – T.: «Ibn Sino», 2004 y.
10. G'ofurov M., Xolmurodov M., Husanov Q. Iqtisodiy-matematik usullar va modellar. - T.: «AGNI», 2001 y.

I.HABIBULLAYEV

IQTISODIY MATEMATIK USULLAR VA MODELLAR

Muharrir: M.Saparov
Texnik muharrir: G‘.Shirinov
Musahhih: Z.Ostonov
Dizayner: D.O‘rinova

«TAFAKKUR-BO‘STONI» nashriyoti
Toshkent sh. Yunusobod 9-13.

Bosishga ruxsat etildi: 04. 06. 2012 y. Bichimi $60x84^{1}/_{16}$.
«Times New Roman» garniturasi. Shartli bosma tabog‘7,0.
Adadi 200 dona. Buyurtma № 08

«TAFAKKUR» nashriyoti bosmaxonasida chop etildi.
Toshkent sh., Chilonzor ko‘chasi 1.