GULCHEHRA
SHADMANOVA

IQTISODIY MATEMATIK USULLAR VA MODELLAR

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

GULCHEHRA SHADMANOVA

«IQTISODIY MATEMATIK USULLAR VA MODELLAR»

FANIDAN

DARSLIK

Bilim sohasi: 600000 - Ijtimoiy fanlar, biznes va huquq
Ta'lim sohasi: 640000 -Biznes va boshqaruv
Ta'lim yo'nalishi:
5340100–Iqtisodiyot(Suv xojaligida)
5340200–Menejment (Suv xojaligida)

Toshkent - 2013

Ushbu darslik iqtisodiy-matematik modellarni tuzishning umumiy qoidalarini, shuningdek suv xojaligi iqtisodiyoti va uni boshqarish masalalarini yechishda ishlatiladigan matematik modellarni o'z ichiga olgan. Darslik bakalavriatning 5340100–Iqtisodiyot(Suv xojaligida) va 5340200–Menejment (Suv xojaligida) ta'lim yo'nalishlari talabalari uchun mo'ljallangan.

Учебник охватывает общую концепцию построения экономико-математических моделей, а также математические методы, которые используются при решении экономических задач и задач управления в водном хозяйстве. Учебное пособие предназначено для студентов следующих направлений бакалавриата: 5340100–Экономика (в водном хозяйстве), 5340200 – Менеджмент (в водном хозяйстве).

The textbook contains the general concept of construction of economic-mathematical models, and also those mathematical methods which are used at the solution of economic problems and problems of a water management. The textbook is intended for students of the following directions of a bachelor degree: 5340100 - Economics (in a water management), 5340200 - Management (in a water management).

Muallif: **G.Shodmonova**, iqtisod fanlari nomzodi, dotsent
Taqrizchilar: **B.Berkinov**, iqtisod fanlari doktori, professor,
C.C. Mirzaev, texnika fanlari nomzodi, dotsent

MUNDARIJA

Содержание

The maintenance(CONTENTS)

KIRISH

O'zbekiston Respublikasi iqtisodiyotida chuqur islohotlar amalga oshirilayotgan ekan, bozor iqtisodiyoti sharoitida yuqori bilimga ega bo'lgan kadrlarni tayyorlash davr talabi bo'lib qolmoqda.

Amaliyot shuni ko'rsatmoqdaki, zamonaviy usullarning joriy qilinishi xalq xo'jaligining turli tarmoqlarida yangi zaxiralarni topishga, ishlab chiqarishni ilmiy tashkil qilishga, mehnat, moddiy va moliyaviy, pul buyum resurslarini iqtisod qilishga imkon beradi.

Ma'lumki mavjud resurslar sharoitida bitta maqsadga erishishning bir necha yollari mavjud. Bu yollar ichida eng muqobilini orttirilgan tajriba yoki bir necha variantlar asosida tanlanadi. Bu holatda iqtisodiy-matematik usullarni qollamagan iqtisodchi u tanlagan variant eng yaxshisi ekanligini isbotlab bera olmaidi. Iqtisodiy-matematik usullar va axborot texnologiyalari resurslardan *foydalanish samaradorligininig barcha mumkin bo'lgan variantlar ichidan eng* yaxshi variantini tanlashga imkon beradi.

Iqtisodiy-matematik usullar va axborot texnologiyalari yordamida respublika, viloyat, tuman fermer xo'jaliklari mehnat, moddiy va moliyaviy, pul buyum resurslaridan samarali foydalanishning, shuningdek ular orasidagi transport-iqtisodiy aloqalarning solishtirma bahosini berish mumkin.

Iqtisodiy-matematik usullar iqtisodiy nazariyaning o'zida qo'llanilib va rivojlantirilib kelinmoqda. Bizga ma'lumki, zamonaviy iqtisodiy nazariya ham yuqori darajada formallashtirilishi bilan katta yutuqlarga erishib kelmoqda. Ular u yoki bu iqtisodiy nazariyaning to'g'rilik kriteriyasi bo'lib emas balki iqtisodiy matematik usullarning qo'llanilishi, iqtisodiy nazariya amal qilish sohasini *chuqurlashtirishga*, ayrim hollarda nafaqat kategoriyalar va omillar orasidagi miqdoriy bog'lanishlarni balki ular tarkibini ham aniqlashga yordam beradi.

Miqdoriy tahlil *sohasida matematika katta rol o'ynaydi. Xalq xo'jaligi* alohida olingan tarmoqlari va sohalari orasidagi mutanosibliklarni aniq ishlab chiqishning optimal uyg'unligini tanlash yoki biror bir korxonani uning manfaatidan kelib chiqib joylashtirish va hokazolarga har qanday urinish miqdoriy tahlilni ya'ni iqtisodiy matematik va statistik usullarni qo'llash zarurligini ko'rsatadi.

Matematik va statistik usullar iqtisodiy izlanishlarda kuchli miqdoriy tahlil vositalaridir. Bu usullarni masalaga kiritilgan jarayonlar, shartlar, cheklanishlarni chuqur o'rganish orqali to'g'ri uyg'unlashtirish zarurdir. Iqtisodiy jarayonlar u yoki bu qonuniyatlarini ma'lum miqdoriy baholashlarsiz iqtisodiy matematik usullarni qo'llash mumkin emas.

Oliy o'quv yurtlarida malakali iqtisodchilarni tayyorlashda matematika va matematik usullarni o'rgatishdan maqsad, talabalarga iqtisodiy jarayonlarni modellashtirish hamda bu modellarni zamonaviy axborot texnologiyalaridan foydalanish orqali yechish ketma-ketliklarini o'rgatishdan iboratdir.

«Iqtisodiy- matematik usullar va modellar » fani iqtisodiy ob'yekt, hodisa va jarayonlarni modellashtirish, zamonaviy axborot texnologiyalari yordamida modellarning eng yaxshi yechimlarini olish hamda olingan yechimni tahlil qilishdan iboratdir.

Darslikda iqtisodchilar uchun zarur bo'lgan matematik modellashtirish bo'yicha bilimlar asoslari keltirilgan. Darslik «Iqtisodiy – matematik usullar va modellar» fani uchun tuzilgan dastur asosida yozilgan bo'lib, unga fan bo'yicha tuzilgan ma'ruzalar matni asos qilib olindi. Unda iqtisodiy-matematik usullar va modellarning nazariy tushunchalari, ularga doir amaliy topshiriqlar berilgan.

Iqtisodiy-matematik usullar iqtisodiy hisoblashlarda qishloq va suv xo'jaligini eng samarali rivojlantirish rejalarini tanlash hamda o'zgaruvchilar, tarmoqlar orasidagi muhim bog'lanishlarni tahlil qilish uchun ishlatiladi. Ulardan eng asosiylari qishloq xo'jalik korxonalarining optimal joylashuvi va ixtisoslashuvi, tayyor mahsulotlarni tashishning optimal rejasi, resurslardan samarali foydalash masalasi, iste'molning optimal rejasini, ishlab chiqarishga ta'sir etuvchi omillarni tahlil qilish, muvozanat hajmi va narxini aniqlash, iqtisodiy o'sishni tahlil qilish, ekonometrik modellar yordamida prognoz qilish va h.k. Berilgan mavzularni yaxshiroq tushunish uchun elementar masalalarni yechish jarayoni hamda oxirgi sonli yechimlar keltirilgan.

I bob. Iqtisodiyotda matematik modellashtirish

1.1. Modellashtirish ilmiy bilish usuli sifatida

Modellashtirish qadim zamonlardan boshlab ilmiy izlanishlarda qo'llanilib kelingan va asta sekinlik bilan ilmiy bilishning barcha yangi sohalarida: texnik loyihalash, qurilish, arxitektura, astronomiya, fizika, kimyo, biologiya va nihoyat ijtimoiy fanlarda shu jumladan, iqtisodiyotda ham ishlatilmoqda. XX asrlarda modellashtirish usullari zamonaviy fanlarning barcha sohalarida amaliy tan olinib, muvaffaqiyatlarga erisha boshladi. Lekin modellashtirish metodologiyasi uzoq vaqtlar alohida, fanlarga bog'liqsiz ravishda rivojlandi. Yagona tushuncha va atamalar tizimi yo'q edi. Asta sekinlik bilan modellashtirishning ahamiyati ilmiy bilishning universal usuli sifatida tan olina boshladi.

Model – bu shunday moddiy yoki ongli ravishda tasvirlangan obyekt bo'lib, uni bevosita o'rganish jarayonida u obyekt asl nusxasining o'rnini bosadi va obyekt to'g'risida yangi bilimlar beradi.

Modellashtirish deganda modelni tuzish, o'rganish va qo'llash jarayonlari tushuniladi. U abstraktsiya, taqqoslash, gipoteza kabi tushunchalar bilan bog'lanishga ega. Modellashtirish jarayoni abstaktsiya va o'xshatish, natijaviy xulosalar qilish va ilmiy farazlar qilishni ham o'z ichiga oladi.

Modellashtirishning asosiy xususiyati, obyektlarni ular o'rnini bosuvchilari yordamida bevosita bilish usuli ekanligidadir. Model, tadqiqotchi va obyekt o'rtasida hamda uni qiziqtirgan o'rganilayotgan obyekt yordamida bilishning o'ziga xos vositasi sifatida ishtirok etadi. Modellashtirish usulining xuddi shu xususiyati bilish usullarining abstraktsiya, o'xshatish, gipoteza, kabi tushuncha va kategoriyalaridan foydalanishning o'ziga xos shakllarini aniqlaydi.

Modellashtirish usulini qo'llashning zarurligi, ko'pchilik obyektlarni bevosita tadqiqot qilish umuman mumkin emasligi yoki ko'p vaqt va vositalarni talab qilishi bilan aniqlanadi.

Modellashtirish jarayoni uch elementni o'z ichiga oladi: 1) subyekt (tadqiqotchi), 2) tadqiqot obyekti, 3) o'rganayotgan subyekt va o'rganilayotgan obyekt o'rtasidagi munosabatni anglatuvchi model.

Aytaylik shunday bir A obyekt mavjud bo'lsin. Biz haqiqatda boshqa bir B obyektni –A obyekt modelini topamiz. Modelni tuzish bosqichi obyekt-asl nusxa haqida ayrim bilimlarning mavjudligini talab qiladi. Modelning bilish uchun xizmat qilish imkoniyati obyekt-asl nusxaning biron-bir muhim belgilarini aks ettirishi bilan shartlanadi. Model va asl nusxaning zarur va yetarli darajada o'xshashligi to'g'risidagi masala aniq tahlilni talab qiladi. Ko'rinib turibdiki, model asl nusxa bilan aynan bir xil bo'lganda(u holda u asl nusxa bo'lmaydi) va asl nusxadan judayam katta farq qilganda ham o'zining ma'nosini yo'qotadi.

Shunday qilib, modellashtirilayotgan obyektni bir tomonini o'rganish boshqa tomonini aks ettirishning bahosidan voz kyechish orqali amalga oshiriladi. Shuning uchun har qanday model asl nusxani qat'iy cheklangan ma'noda o'rnini bosa oladi. Bundan kelib chiqadiki, bitta obyekt uchun izlanayotgan obyektning ma'lum bir tomonlariga e'tibor qaratilgan bir nechta «ixtisoslashgan» modellarni tuzish mumkin.

Modellashtirish jarayonining ikkinchi bosqichida model mustaqil tadqiqot obyekti sifatida shakllanadi. Bunday tadqiqot shakllaridan biri «modelli» tajribani o'tkazishdan iborat bo'lib, unda modelning amal qilish shartlari ongli ravishda o'zgaradi va uning «xulq-atvori» to'g'risidagi ma'lumotlar tizimlashtiriladi. Bu bosqichning oxirgi natijasi R model to'g'risidagi bilimlar to'plami hisoblanadi.

Uchinchi bosqichda bilimlarni modeldan asl-nusxaga o'tkazish amalga oshiriladi, ya'ni obyekt to'g'risida S bilimlar to'plami shakllanadi. Bilimlarni o'tkazishning bu jarayoni ma'lum bir qoida bo'yicha bo'ladi. Model to'g'risidagi bilimlar obyekt - asl nusxaning modelni tuzish paytida o'z aksini topmagan yoki o'zgartirilgan xususiyatlarini hisobga olgan holda o'zgartirilishi kerak. Agar natija asl nusxa va modellarning yaqinlashish belgisi bilan zarur bog'lanishga ega bo'lsa u holda ayrim natijalarni yetarli asoslar bilan modeldan asl nusxaga o'tkazish mumkin. Agar modelli izlanishlarning biron-bir natijasi asl nusxaning modeldan farqi bilan bog'liq bo'lsa, u holda bu natijani obyektga o'tkazib bo'lmaydi.

To'rtinchi bosqich – model yordamida olinadigan bilimlar va ularning ishlatilishini ob'yekt nazariyasi, uni o'zgartirish yoki ulami boshqarishni umumlashtirish uchun amaliy tekshirishdan iborat.

Modellashtirish mohiyatini tushunish uchun obyekt to'g'risidagi bilimlarning birdan-bir manbai modellashtirish emasligini esdan chiqarmaslik kerak. Modellashtirish jarayoni bilishning eng umumiy jarayonidir. Bu holat nafaqat modelni tuzish bosqichida, balki bilishning bir qancha vositalari asosida olinadigan tadqiqot natijalarini umumlashtirishning tugallanish bosqichida ham hisobga olinadi.

Modellashtirish - siklik jarayondan iborat. Bu degan so'z, to'rt bosqichli siklning orqasidan ikkinchi, uchinchi va h.k. bosqichlar takrorlanishi mumkin degani. Bunda tadqiqot qilinayotgan obyekt to'g'risidagi bilimlar kengayadi va aniqlashtiriladi, dastlabki model esa, sekin-asta rivojlantiriladi. Modellashtirishning birinchi siklidan keyingi obyekt to'g'risidagi bilimning yetarli emasligini va model tuzishdagi kamchiliklarni keyingi sikllarda to'g'rilash mumkin. Shunday qilib, modellashtirish metodologiyasi zamiriga o'z-o'zini rivojlantirishning katta imkoniyatlari qo'yilgan.

1.2. Iqtisodiyotda matematik modellashtirish usullarini qo'llashning o'ziga xos xususiyatlari

Iqtisodiyot fanlariga matematikaning kirib kelishi ma'lum bir qiyinchiliklarni yengish bilan bog'liq bo'lgan. Bunga, qisman matematikaning bir necha asrlar davomida asosan fizika va texnika fanlari talabiga mos ravishda rivojlanib kelishi sabab bo'ldi. Lekin asosiy sabab iqtisodiy fanlarga xos bo'lgan iqtisodiy jarayonlarning tabiati bilan bog'liqdir.

Iqtisodiy fanlar o'rganadigan ko'pchilik obyektlar, *murakkab tizim* sifatida kibernetik tushuncha bilan tavsiflanadi.

Bir-biri bilan o'zaro ta'sirda bo'luvchi va bir butunlikni hosil qiluvchi, elementlar majmuasi tizimning eng ko'p tarqalgan tushunchalaridan biridir. Har qanday tizimning muhim sifatlaridan biri, tizimga kiruvchi elementlarning boshqa bittasiga o'xshamagan xossalarining mavjud bo'lishidir. Shuning uchun tizimlarni o'rganishda bu elementlarni alohida keyin o'rganish uchun ularni elementlarga bo'lish usulidan foydalanish yetarli emas. Iqtisodiy izlanishlardagi murakkabliklardan biri, alohida element sifatada qarash mumkin bo'lgan (tizimdan tashqarida) iqtisodiy obyektning mavjud emasligidadir.

Tizimlarning murakkabligi unga kiruvchi elementlarning miqdori bilan, ular orasidagi bog'lanish, shuningdek tizimlar va muhit orasidagi o'zaro munosabatlar orqali aniqlanadi. Mamlakat iqtisodiyoti barcha belgilari orqali juda murakkab tizimdan iboratdir. U katta hajmdagi elementlarni birlashtirib, ichki bog'lanishlar va boshqa tizimlar bilan bog'lanishlarning ko'pligi (tabiiy muhit, boshqa mamlakatlar iqtisodiyoti va shu kabilar) bilan farqlanadi. Xalq xo'jaligida tabiiy, texnologik, ijtimoiy jarayonlar, obyektiv va subyektiv omillar o'zaro harakatda bo'ladi.

Iqtisodiyotning murakkabligi tufayli, uni ayrim hollarda modellashtirib, matematik vositalar bilan o'rganib bo'lmaydi deb qaraladi. Lekin bunday nuqtai nazar noto'g'ridir. Obyektni har qanday tabiati va murakkabligida modellashtirish mumkin. Ana shu murakkab obyektlar modellashtirish uchun katta qiziqish uyg'otadi; modellashtirish faqat shu yerda boshqa izlanish usullari bilan olib bo'lmaydigan natijalarni berishi mumkin.

Har qanday iqtisodiy obyekt va jarayonni matematik modellashtirishning potentsial imkoniyati, hozirgi iqtisodiy va matematik bilimlar, mavjud axborot va hisoblash texnikasi darajasida modellashtirishni muvaffaqiyatli amalga oshirish mumkinligini bildirmaydi albatta.

1.3. Iqtisodiy kuzatishlar va o'lchamlarning xususiyatlari

Matematik modellashtirishning iqtisodiyotda uzoq vaqtlardan beri amaliyotda qo'llanilishiga, ishlab chiqilgan modellarni aniq va sifatli axborot bilan ta'minlash, asosiy to'siq bo'lib kelmoqda. Dastlabki axborotning aniq va to'liqligi, uni yig'ish va qayta ishlash imkoniyatlari ko'pincha amaliy modellarning turlarini tanlashni talab qiladi. Boshqa tomondan, iqtisodiyotni modellashtirish bo'yicha izlanish axborotlar tizimiga yangi talablarni qo'ymoqda.

Modellashtirilayotgan obyektlar va modellar vazifasiga bog'liq ravishda ularda ishlatiladigan dastlabki axborotlar mutlaqo turli tavsif va kelib chiqish manbalariga ega. Ularni ikki toifaga bo'lish mumkin: obyektlarning o'tmishdagi rivojlanishi va hozirgi holati hamda obyektlarning ichki parametrlari va tashqi sharoitlarda kutiladigan o'zgarishlarni o'z ichiga olgan istiqboldagi prognozi to'g'risidagi ma'lumotlar. Ikkinchi toifa axborotlar modellashtirish yordamida bajarilishi mumkin bo'lgan mustaqil izlanish natijalaridan iborat bo'ladi.

Iqtisodiy kuzatishlar usuli va bu kuzatish natijalaridan foydalanish iqtisodiy statistika usullari orqali ishlab chiqiladi. Shuning uchun iqtisodiy jarayonlarni modellashtirish bilan bog'liq iqtisodiy kuzatishlarning faqat o'ziga xos muammolarini belgilash yetarli.

Iqtisodiyotda ko'p jarayonlar ommaviydir; ular atigi bir yoki bir necha kuzatishlar asosida ma'lum bo'lmaydigan qonuniyatlar orqali ko'rsatiladi. Shuning uchun iqtisodiyotda modellashtirish ommaviy kuzatishlarga tayanmog'i lozim.

Yana bir boshqa muammo, iqtisodiy jarayonlarning dinamikligi natijasida vujudga keladigan ular parametrlarining va tuzilmali munosabatlarning o'zgaruvchanligi muammosidir. Shuning uchun iqtisodiy jarayonlarni doimiy kuzatuv ostiga olmoq, yangi ma'lumotlarning doimiy oqimiga ega bo'lish zarur. Iqtisodiy jarayonlarni kuzatish va empirik ma'lumotlarni qayta ishlash odatda ko'p vaqt talab qiladi shuning uchun matematik modellarni tuzishda dastlabki axborotni eskirishini hisobga olib yangilab turish talab qilinadi.

Iqtisodiy jarayonlar va hodisalarning miqdoriy munosabatlarini bilish iqtisodiy o'lchamlarga tayanadi. O'lchamlarning aniqligi modellashtirish vositasida oxirgi natijalarni miqdoriy tahlil qilish aniqligini ham yetarli darajada oldindan aniqlaydi. Shuning uchun matematik modellashtirishdan samarali foydalanishning zaruriy sharti iqtisodiy o'lchagichlarni takomillashtirishdan iboratdir. Matematik modellashtirishni qo'llash ijtimoiy-iqtisodiy rivojlanishning turli nuqtai-nazar va hodisalarni o'lchash hamda miqdoriy solishtirish, olinadigan ma'lumotlarni ishonchliligi va to'liqligini, ularni ko'zda tutilgan va texnik buzilishlardan saqlash muammolarini keskinlashtirdi.

Modellashtirish jarayonida «birlamchi» va «ikkilamchi» iqtisodiy o'lchagichlarning o'zaro ta'siri paydo bo'ladi. Xalq xo'jaligining har qanday modeli iqtisodiy o'lchagichlarning ma'lum bir tizimi (mahsulotlar, resurslar, elementlar va h.k.)ga tayanadi. Shu bilan bir vaqtda yangi (ikkilamchi) iqtisodiy o'lchagichlarini- ya'ni turli tarmoqlar mahsulotlariga iqtisodiy asoslangan narx, turli sifatli tabiiy resurslar samaradorlik bahosi, mahsulotlarning ijtimoiy foydaliligini o'lchagichlarini yaratish xalq xo'jaligini modellashtirishning muhim natijalaridan biridir. Lekin bu ikkilamchi o'lchagichlar yetarli asoslanmagan birlamchi o'lchagichlarning ta'sirini sinab ko'rib, ular xo'jalik modellari uchun birlamchi o'lchagichlarga o'zgartirishlar kiritish(yangilash)maxsus uslubiyatini ishlab chiqishni talab qiladi.

Iqtisodiyotni modellashtirishga «qiziqish»lar nuqtai nazaridan hozirgi vaqtda intellektual faoliyat natijalarini baholash (ayniqsa ilmiy-texnik ishlanmalar, informatika industriyasi sohasida), ijtimoiy-iqtisodiy rivojlanishning umumlashgan ko'rsatkichlarini, teskari aloqa samarasini o'lchash (xo'jalik va ijtimoiy mexanizmlarini ishlab chiqarish samaradorligiga ta'siri) iqtisodiy o'lchagichlarni rivojlantirishning eng dolzarb muammolaridan biri sanaladi.

1.4. Iqtisodiy rivojlanishda tasodifiylik va noaniqlik

Iqtisodiyotni rejalashtirish metodologiyasi uchun iqtisodiy rivojlanishning noaniqligi tushunchasi muhim ahamiyatga ega. Iqtisodiy prognozlash va rejalashtirish bo'yicha izlanishlarda iqtisodiy jarayonlarning xususiyalariga *asoslangan «haqiqiy»* va *bu jarayonlar haqidagi mavjud* axborotlarning to'liqmasligi va noaniqligi bilan bog'liq bo'lgan «axborot»dan iborat ikki turdagi noaniqlikni aniqlash mumkin. Haqiqiy noaniqlikni iqtisodiy rivojlanish turli variantlarining obyektiv mavjudligi va ular ichidan samarali variantini ongli ravishda tanlab olish mumkinligi bilan aralashtirmaslik kerak. Gap birdan bir *optimal variantni aniq tanlashning* mumkin emasligi to'g'risida borayapti.

Iqtisodiyotning rivojlanishida noaniqlikni keltirib chiqaruvchi ikkita asosiy sabab mavjud. Birinchidan, rejalashtirilayotgan va boshqarilayotgan yo'l, shuningdek ta'sodifiy omillarning ta'siri va har qanday vaqtda kishilar bilimining cheklangan bo'lganligidan bu jarayonlarga tashqi ta'sirni oldindan aniq aytib bo'lmasligi. Bu ayniqsa ilmiy-texnik rivojlanishni, jamiyat talabini, iqtisodiy xulq-atvorni prognoz qilish uchun xosdir. Ikkinchidan, alohida xoxish-istaklarga ega bo'lgan mustaqil iqtisodiy subyektlarning ko'pligi tufayli, umumdavlat rejalashtirish va boshqaruvi hamma jihatlarni o'z ichiga ololmaganligi. Obyektiv jarayonlar va iqtisodiyotning xulq-atvori to'g'risidagi to'liq va aniq bo'lmagan axborotlar haqiqiy noaniqlikni ko'paytiradi.

Iqtisodiyotni modellashtirish bo'yicha izlanishlarning birinchi bosqichlarida asosan *determinlashgan modellar qo'llanilgan*. Bu modellarda barcha parametrlar aniq deb faraz qilinadi. Lekin determeninlashgan turdagi modellarni, birdan bir mumkin bo'lgan yechimga ega «tanlash darajasiga» ega bo'lmagan modellar bilan mexanik ravishda aynan tenglashtirib, noto'g'ri tushunmaslik kerak. Qat'iy determenlashgan modellarning klassik turlaridan biri, mumkin bo'lgan variantlar to'plami ichidan iqtisodiy rivojlanishning eng yaxshi variantini aniqlashda qo'llaniladigan, xalq-xo'jaligini optimallash modelidir.

Qat'iy determinlashgan modellarni ishlatish orqali yig'ilgan tajriba natijasida stoxastika va noaniqlikni hisobga oluvchi iqtisodiy jarayonlarni modellashtirishning eng rivojlangan metodologiyasini muvaffaqiyatli qo'llash imkoniyatlari yaratildi. Bu yerda izlanishning ikkita asosiy yo'nalishini ajratib olish mumkin. Birinchidan, determinlashgan modellarni ishlatish metodikasi rivojlantiriladi: olinadigan yechimlarning turg'unligi va ishonchliligini o'rganish; noaniqlik chegarasini ajratib olish; ko'p variantli hisoblarni va uning dastlabki ma'lumotlari bilan modelli tajribalar o'tkazish; modelga qo'shimcha imkoniyatlar kiritish; iqtisodiy yechimlarning ehtimolli va ko'zda tutilmagan holatlarga moslashtirishni kuchaytiruvchi yo'llarni qo'llash. Ikkinchidan ehtimollar nazariyasi va matematik statistikaga asoslangan ekonometrika, o'yinlar nazariyasi va statistik yechimlar, ommaviy xizmat nazariyasi, stoxastik programmalash, tasodifiy jarayonlar nazariyasi kabi iqtisodiy jarayonlarni stoxastik va noaniqligini bevosita aks ettiruvchi matematik apparatlardan foydalanuvchi modellar keng tarqalmoqda.

1.5. Modellar adekvatligini tekshirish

Iqtisodiy jarayonlar va hodisalarning murakkabligi va iqtisodiy tizimlarning yuqorida aytib o'tilgan boshqa xususiyatlari nafaqat matematik modellarni tuzishni balki ular adekvatligini, olinadigan natijalarning haqiqiyligini tekshirishni ham qiyinlashtiradi.

Tabiiy fanlarda modellashtirish va bilishning boshqa ixtiyoriy shakllari natijalari to'g'riligining yetarli shartlari izlanish natijalarining kuzatilgan dalillar bilan ustma-ust tushishidir. Bu yerda "tajriba" toifasi "haqiqiylik" toifasi bilan ustma-ust tushadi. Iqtisodiyotda va boshqa ijtimoiy fanlarda "amaliyot – haqiqiylik kriteriyasi" deb tushuniladigan tamoyil voqelikni passiv tasvirlash va tushuntirish uchun ishlatiladigan oddiy deskriptiv modellarda (oldingi rivojlanish tahlili, boshqarib bo'lmaydigan iqtisodiy jarayonlarni qisqa muddatli prognozi va h.k.) yuqori darajada qo'llanishga ega .

Lekin iqtisodiy fanlarning asosiy masalasi iqtisodiyotni prognozlashtirish va boshqarishning ilmiy usullarini ishlab chiqishdan iborat. Shuning uchun iqtisodiyotning keng tarqalgan model turlaridan biri, iqtisodiy voqelikni qaytadan tuzish uchun ishlatiladigan iqtisodiy jarayonlarni boshqarish va tartibga solish modellardir. Bunday modellarga normativ modellar deyiladi. Agar voqelikni tasdiqlaydigan faqat normativ modellarni ko'zda tutayotgan bo'lsak, u holda ular yangi sifat ijtimoiy-iqtisodiy masalalarni yechish vositasi bo'lib xizmat qila olmaydi.

Iqtisodiyotning normativ modellarining to'g'riligini tekshirish xususiyati shundaki, ular qoidaga binoan prognozlashtirish va boshqarishning amalda qo'llanilib kelayotgan usullari bilan "raqobatda" bo'ladilar.

Vaziyat, uzoq muddatli prognoz va rejalashtirish modellarining to'g'riligini tekshirish paytida, yanada qiyinlashadi. 10-15 va undan ko'p yillik hodisalarning ro'y berishini, ya'ni model dastlabki shartlari to'g'riligini sustlik bilan kutish mumkin emasku.

Belgilangan murakkablashtiruvchi holatlarga qaramasdan, modellarning dalillar va aniq iqtisodiy voqelik bilan mos kelishi modellarni rivojlantirish yo'nalishini aniqlovchi muhim mezonlardan biri bo'lib qolmoqda. Voqelik va model orasidagi aniqlanadigan farqlarni har tomonlama tahlil qilish, boshqa usullar bilan olingan natijalar bilan model bo'yicha olingan natijalarni solishtirish modellarni o'zgartirish yo'llarini ishlab chiqishga yordam beradi.

Modellarni tekshirishda mantiqiy tahlilga, shu bilan birga matematik modellashtirishning o'zining vositalariga ham yetarli ahamiyat beriladi. Modeldagi yechimning mavjudligini isbotlash, undagi o'zgaruvchilar va parametrlar orasidagi bog'lanish to'g'risidagi statistik gipotezaning to'g'riligini tekshirish, miqdorlar o'lchamini solishtirish va h.k. lar kabi modellar to'g'riligini tekshirishning formallashgan yo'llari "to'g'ri" modellar sinfini toraytirishga imkon beradi. Model dastlabki shartlarining ichki bir-biriga qarama-qarshi emasligi undan kelib chiqadigan natijalar yordamida ketma ket solishtirish yo'li bilan, shuningdek "raqobatda" bo'ladigan modellar natijalari bilan tekshiriladi.

Iqtisodiyotda matematik modellarning adekvatlik muammolarining hozirgi holatini baholab, shuni tan olish kerakki, modellashtirilayotgan obyektning obyektiv xususiyatlari, hamda ularni bilish xususiyatlarini hisobga oluvchi, modellar to'g'riligini tekshirishning amaliy metodikasi majmuini tuzish, avvalgidek iqtisodiy-matematik izlanishlarning eng dolzarb masalalaridan biri bo'lib qolmoqda.

1.6. Iqtisodiy-matematik modellarning tasniflanishi

Iqtisodiy jarayonlar va hodisalarning matematik modelini qisqacha iqtisodiy-matematik modellar deb atash mumkin. Buday modellar quyidagi turli asoslar bo'yicha tasniflanadi.

Maqsadi bo'yicha iqtisodiy-matematik modellar iqtisodiy jarayonlarning umumiy xossalari va qonuniyatlarini tadqiqot qilishda foydalanadigan nazariy-analitik va aniq iqtisodiy masalarni yechishda qo'llaniladigan(iqtisodiy tahlil modellari, prognozlash, boshqarish) amaliy modellarga bo'linadi.

Iqtisodiy-matematik modellar iqtisodiyotni har tomonlama va uning ayrim tarmoqlarini tadqiqot qilishga mo'ljallangan bo'lishi mumkin. Izlanayotgan iqtisodiy jarayonlar bo'yicha va mazmunli muammolar bo'yicha modellarni tasniflashda butun xalq-xo'jaligi, uning qismlari-tarmoqlar, hududlar va boshqalar, ishlab chiqarish, iste'mol, daromadni hosil qilish va taqsimlash, mehnat resurslari, narxni shakllantirish, moliyaviy aloqalar va shunga o'xshash modellar majmuasini ajratish mumkin.

Modellashtirish metodologiyasi va texnikasining eng ko'p xususiyatlari bilan bog'liq iqtisodiy-matematik modellar sinfining tasnifiga to'xtalib o'tamiz.

Matematik modellarning umumiy tasnifiga asosan ular funktsional va tizimli, shuningdek, ular o'rtasidagi (tizimli- funktsional) shakllarni o'z ichiga oladi. Iqtisodiyot miqyosidagi izlanishlarda prognozlashtirish va boshqarish uchun tizim osti bo'laklari orasidagi o'zaro bog'lanish katta ahamiyatga ega bo'lsa ham ko'proq tizimli modellar qo'llaniladi. Tizimli modellarning turlaridan biri tarmoqlararo bog'lanish modelidir. "Kirish"ni o'zgartirish yordamida "chiqish" obyektning xulq atvoriga ta'sir qilganda funktsional modellardan iqtisodiyotni tartibga solishda keng qo'lanilmoqda. Tovar-pul munosabatlari sharoitida iste'molchilarning xulq-atvori modelini misol qilib olish mumkin. Bitta obyektning o'zini bir vaqtning o'zida tizimli va funktsional model orqali ifodalash mumkin. Misol uchun, alohida tarmoq tizimlarini rejalashtirish uchun tizimli modellar ishlatiladi, iqtisodiyot miqyosida esa har bir tarmoq funktsional model *ko'rinishida ifodalanishi mumkin.*

Yuqorida deskriptiv va normativ modellar orasidagi farqlar ko'rsatib o'tilgan edi. Deskriptiv modellar bu qanday kelib chiqadi degan savolga javob beradi yoki bularning hammasining kelgusida rivojlanish ehtimolligi qanday, ya'ni ular faqat kuzatilgan natijalarni tushuntiradi yoki ehtimolli prognozni beradi. Normativ modellar bu qanday bo'lishi kerak degan savolga javob beradi, ya'ni maqsadga muvofiq faoliyatni taxmin qiladi. Normativ modellarga, iqtisodiy rivojlanish maqsadi, u yoki bu usullar orqali ularga erishishning imkoniyat va vositalarini ifodalovchi, optimal dasturlashni misol qilib olish mumkin.

Iqtisodiyotni modellashtirishda diskriptiv yondashuvni qo'llash iqtisodiyotdagi turli bog'lanishlarni tajriba yo'li bilan aniqlash, ijtimoiy guruhlar iqtisodiy xulq-atvorining statistik qonuniyatlarini o'rnatish, o'zgarmas shartlarda yoki tashqi ta'sirlarsiz o'tadigan biron bir jarayonlar rivojining ehtimolli yo'llarini o'rganish zarurligini tushuntiradi. Deskriptiv modellarga statistik ma'lumotlarni qayta ishlash asosida tuzilgan ishlab chiqarish funktsiyalari va iste'molchi talabi funktsiyasini misol qilib olish mumkin.

Iqtisodiy–matematik model deskriptiv yoki normativligi nafaqat uning matematik tuzilishidan, balki bu modelni ishlatilish tasnifidan ham bog'liq. Misol uchun, tarmoqlararo balans modeli o'tgan davr mutanosibligi tahlili uchun ishlatilsa u deskriptiv model bo'ladi. Lekin bu matematik model, ishlab chiqarish xarajatlarining normativ rejalari asosida jamiyatning oxirgi talabini qondiruvchi iqtisodiyotni rivojlantirishning balanslashgan hisoblari uchun ishlatilsa, normativ model bo'ladi.

Ko'pchilik iqtisodiy-matematik modellar deskriptiv yoki normativ modellar belgilarini o'zlarida uyg'unlashtirgan. Murakkab tizimning normativ modeli xususiy deskriptiv modellardan iborat alohida bloklarni birlashtirsa, yuqoridagi holatga misol bo'la oladi. Misol uchun, tarmoqlararo balans modeli daromadning o'zgarishi bilan iste'molchilar xulq-atvorini ifodalovchi xaridor talabi funktsiyasini o'z ichiga olishi mumkin. Shunga o'xshash misollar iqtisodiy jarayonlarni modellashtirishga deskriptiv va normativ yondashuvning samarali uyg'unligi tendentsiyasini tasniflaydi. Deskriptiv yondashuv imitatsiya modellashtirishda keng qo'llaniladi.

Sabab-oqibat bog'lanishlarini aks ettirish tavsifi bo'yicha tasodif va noaniqlikni hisobga oluvchi qat'iy determinlashgan modellar mavjud. Ehtimollik qonunlarini ifodalovchi va ifodalash uchun ehtimollik qonunlarini qo'llab bo'lmaydigan noaniqlikni farqlash zarur. Ikkinchi tur noaniqlik modellashtirish uchun judayam murakkabdir.

Vaqt omilini aks ettirish usuli bo'yicha iqtisodiy-matematik modellar statik va dinamik modellarga bo'linadi. Statik modellarda barcha bog'lanishlar bir vaqt yoki vaqt oralig'iga qarashli bo'lishi kerak. Dinamik modellar iqtisodiy jarayonning vaqt bo'yicha o'zgarishini tavsiflaydi. Qaralayotgan davrning davomiyligi bo'yicha vaqtlar qisqa muddatli(bir yilgacha), o'rta muddatli(5 yilgacha), uzoq muddatli(10-15 va undan ko'p yilgacha) prognozlashtirish va rejalashtirishga bo'linadi. Iqtisodiy matematik modellarda vaqtning o'zi uzluksiz yoki diskret ravishda o'zgarishi mumkin.

Iqtisodiy jarayonlarning modeli matematik bog'lanishlar shakli bo'yicha judayam turli-tumandir. Ayniqsa tahlil va hisoblash uchun juda qulayligi uchun keng qo'llanilib kelayotgan *chiziqli modellar sinfini* ajratish muhimdir. Chiziqli va chiziqli bo'lmagan modellar orasidagi farq nafaqat matematik nuqtai-nazardan, balki nazariy-iqtisodiy munosabatlar tufayli ham mavjud, chunki iqtisodiyotdagi bog'lanishlarning ko'pchiligi chiziqli bo'lmagan tavsifga ega: ishlab chiqarish oshganda resurslardan foydalanish samaradorligi, ishlab chiqarish oshganda aholi talabi va iste'molining o'zgarishi, daromad oshganda aholi talab va iste'molining o'zgarishi va boshqalar. "Chiziqli iqtisodiyot" nazariyasi "Chiziqsiz iqtisodiyot" nazariyasidan tubdan farq qiladi. Tizim osti bo'laklari (tarmoqlar, korxonalar)ning ishlab chiqarish imkoniyatlari to'plami qavariq yoki qavariq emas deb taxmin qilinadimi yo'qmi, iqtisodiy tizim osti bo'laklarini prognozlash va mustaqil xo'jalik yuritish uyg'unlashtirish imkoniyatlari to'g'risidagi xulosalardan bevosita bog'liqdir.

Modelga kiritilgan ekzogen va endogen o'zgaruvchilarning nisbati bo'yicha ular ochiq va yopiq turlarga bo'linadi. To'liq ochiq modellar mavjud emas, model hech bo'lmaganda bitta endogen o'zgaruvchiga ega bo'lishi kerak. Ekzogen o'zgaruvchilarni o'z ichiga olmagan umuman yopiq iqtisodiy-matematik modellar judayam kam. Deyarlik ko'p *iqtisodiy-matematik modellar* oraliq model bo'lib, ular ochiqlik(yopiqlik) shartlari bilan farqlanadilar.

Iqtisodiyot miqyosidagi modellar uchun ularni agregirlangan va detallashtirilgangan modellarga bo'lish muhimdir.

Iqtisodiyot modellari fazoviy faktorlar va shartlarni o'z ichiga oladimi yoki yo'qmi shunga qarab bu modellar fazoviy va nuqtali modellarga ajratiladi.

Shunday qilib, iqtisodiy-matematik modellarlarning umumiy tasnifi o'ndan ko'p asosiy belgilarni o'z ichiga oladi. Iqtisodiy-matematik izlanishlarning rivojlanishi bilan qo'llaniladigan modellarni tasniflash muammolari murakkablashadi. Modellarning yangi turlari va ularni tasniflashning yangi belgilarining paydo bo'lishi bilan birga turli xildagi modellar integratsiyasi amalga oshiriladi.

1.7. Iqtisodiy-matematik modellashtirish bosqichlari

Modellashtirish jarayoni asosiy bosqichlari yuqorida ko'rib o'tildi. Turli fan sohalarida shu jumladan iqtisodiyotda ham ular o'ziga xos bo'lgan jihatlarga egadir. Quyida iqtisodiy-matematik modellashtirishning bitta sikli bosqichlari ketma-ketligi va tarkibi tahlil qilinadi.

1. *Iqtisodiy masalaning qo'yilishi va uni sifatli tahlil qilish*. Bu yerda masala mohiyatini qabul qilinadigan farazlar va javoblari talab qilinadigan savollar orqali aniq ifodalash kerak. Bu bosqich, modellashtirilayotgan obyektning muhim xususiyatlari va ikkinchi darajadagi abstraktsiyani; obyekt tuzilishini va uni elementlarini bog'laydigan asosiy bog'lanishlarni o'rganish; gipoteza, tushintiradigan xulq-atvor va obyekt rivojlanish ifodasini o'z ichiga oladi.

2. *Matematik modelni tuzish*. Bu - iqtisodiy masalani aniq matematik bog'lanishlar va munosabatlar (funktsiya,tenglama, tengsizlikva h.k.) ko'rinishida ifodalash. Odatda avvalo matematik modelning asosiy turi aniqlanadi, keyin uning qismlari (o'zgaruvchilar va parametrlarning aniq ro'yxati, bog'lanish shakli) aniqlashtiriladi. Shunday qilib, model tuzish o'z navbatida bir necha bosqichlarga bo'linadi. Agar model qancha ko'p dalillarni hisobga olsa, u shuncha yaxshi "ishlaydi" va yaxshi natijalar beradi, deb o'ylash xato bo'lar edi. Xuddi shunday fikrni modelning murakkabligi, ya'ni unda ishlatiladigan matematik bog'lanishlar shakli(chiziqli yoki chiziqsiz), tasodif va noaniqlik omillarini hisobga olish va boshqalar uchun ham aytish mumkin. Modelning juda murakkab va katta bo'lishi izlanish jarayonini qiyinlashtiradi. Nafaqat axborot va matematik ta'minotning aniq imkoniyatlarini, balki olinadigan samara bilan modellashtirishga sarf qilinadigan xarajatlarni solishtirishni ham hisobga olish kerak (model murakkablashuvi bilan samaraga nisbatan xarajatlar oshishi mumkin).

Matematik modellarning muhim xususiyatlaridan biri- turli ko'rinishdagi masalalarni yechish uchun ulardan foydalanishning potentsial imkoniyatidir. Shuning uchun yangi iqtisodiy masalani yechish kerak bo'lganda model "kashf" qilishga intilmaslik kerak; avvalo bu masalani yechish uchun ma'lum *bo'lgan modellarni qo'llab ko'rish zarur.*

Model tuzish jarayonida iqtisodiy va matematik ikkita ilmiy bilish tizimi solishtiriladi. Haqiqatan ham, matematik masalalarning yaxshi o'rganilgan sinfiga qarashli modellarni olishga intilish kerak. Ko'pincha bunga, modellashtirilayotgan obyektning mavjud tuzilishini buzmaydigan modelning dastlabki shartlarini soddalashtirish orqali erishiladi. Biroq iqtisodiy masalani ifodalashda oldindan ma'lum bo'lmagan matematik tuzilmaga kelib qolish holatlari ham bo'ladi. XX asrning o'rtalarida iqtisodiy fan va amaliyotning talabi, matematik programmalashtirish, o'yinlar nazariyasi, funktsional analiz, hisoblash matematikasini rivojlantirishga, imkon berdi. Iqtisodiy fanlarning istiqbolda rivojlanishi matematikaning yangi bo'limini yaratish uchun muhim sabab bo'lishi to'liq ehtimolga ega.

3. *Modelni matematik tahlil qilish.* Bu bosqichning maqsadi modelning umumiy xossalarini tushuntirishdan iborat. Bu yerda izlanishning sof matematik usullari qo'llaniladi.

Ifodalangan model yechimining mavjudligini isbotlash eng muhim jihatlardan biridir. Matematik masalaning yechimga ega emasligini isbotlash mumkin bo'lsa, u holda modelning dastlabki varianti bo'yicha navbatdagi ishlar zaruriyati yo'qoladi, bunday holda iqtisodiy masalaning qo'yilishini yoki uni matematik ifodalash usulini o'zgartirish kerak bo'ladi. Modelni tahliliy o'rganishda: yagona yechim shumi, yechimga qaysi o'zgaruvchilar kiradi, ular orasidagi munosabat qanaqa bo'ladi, ular qaysi oraliqda va qaysi dastlabki shartlardan bog'liq ravishda o'zgaradi, ular o'zgarishining tendentsiyasi qanaqa kabi savollarga javoblar aniqlanadi. Modelni tahliliy o'rganishni empirik o'rganish bilan taqqoslaganda bunda modelning ichki va tashqi parametrlari turli haqiqiy qiymatlarida olinadigan xulosalar o'zining kuchini yo'qotmasligi kabi imkoniyatlari mavjud.

Modelning umumiy xossalarini bilish juda muhim ahamiyatga ega bo'lib, tadqiqotchilar o'xshash xossalarni isbotlash uchun ko'pincha ongli ravishda dastlabki modelni ideallashtirishga harakat qilishadi. Shundayam murakkab iqtisodiy obyektlar modelini qiyinchilik bilan tahliliy o'rganish mumkin. Modelning umumiy xossalarini analitik usullar bilan tushuntirib bo'lmaydigan hollarda modelni soddalashtirish mumkin bo'lmagan yechimlarga olib keladi, bunday holda izlanishning sonli usullariga o'tiladi.

4. *Dastlabki ma'lumotlarni tayyorlash.* Modellashtirish axborotlar tizimiga qat'iy talablar qo'yadi. Shu bilan birga axborot olishning aniq imkoniyatlari amaliyotda foydalanish uchun mo'ljallangan modellarni tanlashni chegaralaydi. Bunda nafaqat axborot tayyorlash printsipial imkoniyati, balki mos axborot massivlarini tayyorlashga sarf xarajatlar ham e'tiborga olinadi. Bu xarajatlar qo'shimcha axborotlardan foydalanish samarasidan oshib ketmasligi kerak.

Axborotlarni tayyorlash jarayonida ehtimollar nazariyasi, nazariy va matematik statistika usullaridan foydalaniladi. Tizimli iqtisodiy-matematik modellashtirishda bir modelda foydalanilgan dastlabki axborot, boshqa modellarning yechimi natijasidan iborat bo'ladi.

5. *Sonli yechimni hosil qilish.* Bu bosqich masalani sonli yechish uchun algoritmlarni ishlab chiqishni, EHM uchun programmalar tuzishni va bevosita hisoblar olib borishni o'z ichiga oladi. Bu bosqichning qiyinchiligi eng avvalo iqtisodiy masalalarning katta hajmdaligi, va katta hajmdagi axborotlarni qayta ishlash zarurligidadir.

Odatda iqtisodiy-matematik modellashtirish bo'yicha hisoblar ko'p variantli tavsifga ega. Hozirgi zamon yangi EHMlari tufayli ayrim shartlarni bir qancha o'zgartirishlar va modelning "xulq-atvorini" o'rganish orqali "modelga oid" ko'p sonli tajribalarni o'tkazish mumkin. Sonli usullar bilan o'tkaziladigan izlanishlar analitik o'rganish natijalarini to'ldirishi mumkin, ko'pchilik modellar uchun esa, u birdan-bir *amalga oshirilishi kerak bo'lib* hisoblanadi. Sonli *usullar bilan* yechish mumkin bo'lgan iqtisodiy masalalar sinfi tahliliy tekshirish qulay bo'lgan masalalar sinfiga nisbatan yetarli darajada kengroqdir.

6. *Sonli natijalar tahlili va ularning qo'llanilishi.* Siklning bu oxirgi bosqichida modellashtirish natijalarining to'g'riligi va to'liqligi, amaliy qo'llanilish darajasi haqidagi masala turadi.

Tekshirishning matematik *usullari modelning noto'g'ri tuzilganligini aniqashi mumkin* va shuningdek potentsial to'g'ri modellar sinfini toraytiradi. Model vositasida olinadigan nazariy xulosalar va sonli natijalarni norasmiy tahili, ularni voqelikning mavjud bilim va dalillari bilan solishtirish hm q'y'lgan iqisodiy masalaning axborot va matematik ta'minoti bilan tuzilgan matematik modeli kamchiliklarini topishga imkon beradi.

Bosqchlarning o'zaro bog'lanishi. Modellashtirishning bitta siklining bosqchlari *orasidagi bog'lanish izlanish jarayonida modellashtirishning* oldingi bosqchlarida aniqangan kamchiliklar tufayli qaytadigan bog'lanishga e'tibor beramiz.

Modelni tuzish bosqichidayoq masalaning qo'yilishi noto'g'ri yoki judayam murakkab matematik modelga olib keladi. Shuning uchun dastlabki masalaning qo'yilishi o'zgartiriladi. Keyin modelni matematik tahlili (3-bosqich)da *masalaning* qo'yilishidagi ozroq o'zgartirish qiziqarli tahliliy natija beradi

Modellashtirishning oldingi bosqichlariga eng ko'p qaytish zarurligi dastlabki axborotni tayyorlash paytida vujudga keladi (4-bosqich). Kerakli axborotning yo'qligi yoki uni tayyorlashga ketgan xarajatlar juda kattaligi aniqlashib qoladi. U holda masalaning qo'yilishiga va uni ifodalanishiga qaytish kerak bo'ladi, ularni shunday o'zgartirish kerakki, mavjud axborotga moslashsin.

Madomiki iqtisodiy-matematik masalalar o'zining tuzilishi bilan murakkab, katta o'lchamga ega ekan, u holda EHM uchun tanish bo'lgan algoritm va programmalar ko'pincha dastlabki ko'rinishda masalani yechishga imkon bermaydi. Agar qisqa muddatda yangi algoritm va programmalarni tuzish mumkin bo'lmasa, dastlabki masalaning qo'yilishi va model soddalashtiriladi: shartlar olib tashlanadi yoki umumlashtiriladi, faktorlar soni kamaytiriladi, chiziqsiz munosabatlar chiziqlisi bilan almashtiriladi, modelning determinligi kuchaytiriladi va h.k.

Modellashtirishning o'rtasidagi bosqichlarida kamchiliklarni tuzatib bo'lmasa, ular keyingi sikllarda olib tashlanadi. Lekin har bir siklning natijalari to'liq mustaqil qiymatga ega. Izlanishni oddiy model tuzishdan boshlab, tezlik bilan kerakli natijalarni olish mumkin, keyin aniqlangan matematik bog'lanishli yangi shartlarni qo'shib, undan ko'ra yaxshiroq modelni tuzishga o'tish mumkin.

Iqtisodiy-matematik modellashtirishni yetarli miqdorda rivojlanishi va murakkablashuvi uning alohida bosqichlari izlanishning ixtisoslashgan sohalarida ajralib turadi, nazariy-analitik va amaliy modellar orasidagi farq kattalashadi, abstraktsiya va ideallashtirish darajasi bo'yicha modellar tabaqalanadi.

Iqtisodiy modellar matematik tahlil nazariyasi hozirgi zamon matematikasining asosiy tarmog'i- iqtisodiy matematikada rivojlanib kelmoqda. Iqtisodiy matematika doirasida o'rganiluvchi modellar iqtisodiy voqelik bilan bevosita aloqani yo'qotayapti; ularda judayam ideallashtirilgan iqtisodiy obyektlar va holatlar bilan ish ko'rilayapti. Bunday modellarni tuzishda asosiy tamoyil nafaqat voqelikka yaqinlashish, balki matematik isbotlashlar yordamida ko'p sonli tahliliy natijalarni olishdir. Bu modellarning iqtisodiy nazariya va amaliyotdagi bahosi shundaki, ular amaliy turdagi modellar uchun nazariy asos bo'lib xizmat qiladi.

Tadqiqotning yetarli darajada mustaqil sohalari iqtisodiy axborotlarni tayyorlash va qayta ishlash, hamda iqtisodiy masalaning matematik ta'minoti(ma'lumotlar bazasi va axborotlar bankini, iqtisodchi foydalanuvchilar uchun modellar va servis programmalarni tuzishning avtomatlashtirilgan dasturlari)ni *ishlab chiqishdan iboratdir.* Modellardan *amaliy foydalanish* bosqichida iqtisodiy tahlil, rejalashtirish, boshqarishning mos sohalaridagi mutaxassislar yetakchi rolni o'ynashlari kerak. Iqtisodchi-matematiklarning asosiy ish doirasi iqtisodiy masalalarni rasmiylashtirish va iqtisodiy-matematik modellashtirish jarayonini sintez qilish bo'lib qoladi.

1.8. Modellar turlari

Iqtisodiyotda ishlatiladigan modellarni modellashtirayotgan ob'yektga xos xususiyatlari, modellashtirish maqsadi va modellashtirish vositasi kabi belgilarga qarab quyidagi sinflarga: mikro va makroiqtisodiy, nazariy va amaliy, optimal va muvozanat, statik va dinamik modellarga ajratish mumkin.

Makroiqtisodiy modellar iqtisodiyotni bir butun deb qarab,umumlashtirilgan *moddiy va moliyaviy ko'rsatkichlarni: yalpi milliy mahsulot, iste'mol,* investitsiya, ish bilan bandlik, foiz stavkalari, pulning miqdori va boshqalarni o'zaro bog'lagan holda tasvirlaydi.

Mikroiqtisodiy modellar iqtisodiyotnig tuzilmali va funksional tashkil etuvchilarining o'zaro ta'sirini ifodalaydi. Mikroiqtisodiy modellashtirish iqtisodiy – matematik nazariyaning asosiy qismini tashkil qiladi.

Nazariy modellar formal shart – sharoitlarda deduksiya *xulosalari yordamida* iqtisodiyotning umumiy xossalarini va unga xos bo'lgan elementlarni o'rganishga imkon byeradi.

Amaliy modellar aniq iqtisodiy ob'yektning amal qiluvchi parametrlarini baholashga va amaliy qarorlar qabul qilish uchun tavsiyalarni ifodalashga imkon byeradi. Amaliy modellarga, birinchi navbatda, iqtisodiy o'zgaruvchilarning sonli qiymatlari bilan ish ko'radigan va *mavjud kuzatishlar asosida statistik* mazmunli baholashga yordam beruvchi *ekonometrik modellar* kiradi.

Bozor iqtisodini modellashtirishda *muvozanat modellari* asosiy o'rinni egallaydi. Ular iqtisodiyotni mavjud holatidan chiqarishga intiluvchi barcha natija beruvchi kuchlar nolga teng bo'lgan holatini ifodalaydi. Bozorsiz iqtisodiyotda bitta parametr bo'yicha muvozanatsizlik (misol, taqchillik) boshqa faktorlar orqali («qora» bozor, navbatda turishlar va h. k.) orqali kompensatsiyalanadi. Muvozanat modellari aniq ifodalanadigan modellardir. Uzoq vaqtlar modellashtirishga *optimallashtirishga* asoslangan normativ yondoshish ustunlik qilib keldi. Bozor iqtisodi nazariyasida optimallashtirish, asosan, mikrodarajada (iste'molchi foydaliligi yoki firmaning foydasini maksimallashtirish) qo'llaniladi.

Statik modellarda iqtisodiy ob'yektning holati aniq bir vaqt yoki biror bir davr uchun ifodalanadi.

Dinamik modellar o'zgaruvchilarning vaqt bo'yicha bog'lanishini o'z ichiga oladi. Statik modellarda, odatda, bir qator miqdorlarning qiymatlari belgilangan bo'lib, ular dinamik o'zgaruvchilar hisoblanadi: ularga misol qilib, kapital resurslar, baho va hokazolarni olish mumkin. Dinamik model statik qatorning oddiy yig'indisidan iborat bo'lmasdan, balki iqtisodiyotdagi kechayotgan jarayonlarni aniqlovchi kuchlarni va ularning o'zaro ta'sirini tasvirlaydi.

Determinlashgan modellar model o'zgaruvchilari orasidagi qat'iy funksional bog'lanishni taxmin qiladi. *Stoxastik modellar* izlanayotgan ko'rsatkichga tasodifiy ta'sirni mavjud deb faraz qiladi va ularni tasvirlashga ehtimollar nazariyasi va matematik statistika vositalarini qo'llaydi.

Tayanch so'z va iboralar

Modellashtirish, model, modellashtirish usuli, modellashtirish jarayoni, obyekt, iqtisodiy jarayonlar, tizim, iqtisodiy obyekt, iqtisodiy jarayonlar, ehtimollar nazariyasi, matematik statistika, gipoteza, adekvatlik, iqtisodiy-matematik modellar, deskriptiv va normativ modellar, dinamik modellar, matematik bog'lanishlar, ekzogen va endogen o'zgaruvchilar, makroiqtisodiy modellar, mikroiqtisodiy modellar, nazariy modellar, amaliy modellar, ekonometrik modellar, muvozanat modellari, statik modellarda, dinamik modellar, determinlashgan modellar, stoxastik modellar, optimizatsiya modellari.

I bobga doir savollar

1. Obyekt modelining ta'rifini keltiring.
2. Modellarning qaysi turlarini bilasiz?
3. Matematik modellashtirish ta'rifini ayting.
4. Obyektni modellashtirish deganda nimani tushunasiz?
5. Modellashtirish bosqichlarini ayting.
6. Iqtisodiyotda ishlatiladigan modellarni tahlil qilishning qaysi matematik usullarini bilasiz?
7. Nima uchun iqtisodiyotda matematikani qo'llash zarur?
8. Model va modellashtirish tushunchalari nima?
9. Iqtisodiy hodisalarning modellari qanday tuziladi?
10. Statik modellar bilan dinamik modellarning farqi nimada?
11. Muvozanat modeli va optimitzasiya modellarining farqi nimada?
12. Aytaylik, sizda daromad va iste'mol orasidagi chiziqli bog`lanishni asoslab berish uchun empierik ma'lumotlar mavjud bo'lsin. Bunday masala iqtisodiy matematikaga oidmi yoki ekonometrikagami?
13. Modelning adekvatligi nima?
14. Qanday adekvatlik kriteriylarini bilasiz?
15. Modelning qanday o'zgaruvchilari ekzogen, qanday o'zgaruvchilari endogen deb aytiladi?

IQTISODIY MASALALARNI YECHISHDA OPTIMIZATSIYA MODELLARIDAN FOYDALANISH

2.1. Cheklanishga ega bo`lgan shartli ekstremum masalalari

$y = f(x_1, x_2)$ funksiyaning x_1, x_2 erkli o'zaruvchilarning $g(x_1, x_2) = 0$ tenglama ko'rinishidagi shartni qanoatlantiruvchi lokal maksimumi(minimumi)ni topish talab qilinsin, ya'ni

$$g(x_1, x_2) = 0 \qquad (2.1.1)$$

sharti bajarilganda

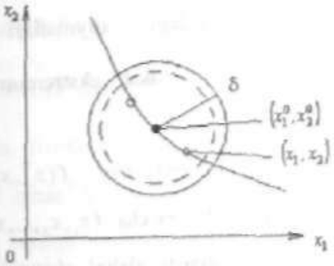
$$f(x_1, x_2) \to \max(\min) \qquad (2.1.2)$$

bo'lsin.

(2.1.1) va (2.1.2) masala shartli lokal maksimum (minimum) masalasi deb aytiladi. Bu yerda shartli atamasi x_1 ва x_2 erkli o'zgaruvchilar (2.1.1) shartni (cheklanishni) qanoatlantirganligi uchun ishlatiladi. Ikkita (*maksimum va minimum*) atamasi o'rniga ularning umumlashgan atamasi *ekstremum* so'zi ishlatilishi mumkin.

(2.1.1) va (2.1.2) masalada $f(x_1, x_2)$ funksiyaning shartli ekstrimumini maqsad funksiya deb atashadi, chunki uning maksimizatsiya (yoki minimizatsiya) si qandaydir maqsadning formal ifodasidan iborat (misol, sarf-xarajatlarni o'zgartirmasdan ishlab *chiqarish* hajmini maksimallashtirish) $g(x_1, x_2)$ funksiyasini esa cheklanish beradigan yoki *bog'lanish funksiyasi* deb atashadi.

(2.1.1) tenglamada $g(x_1, x_2)$ funksiya nolinchi darajali chiziqli tenglamadan iboratdir yoki $g(x_1, x_2) = \tau$ bo'lib, bu yerda $\tau = 0$. Shuning uchun shartli lokal maksimum (minimum) uchun masalani quyidagicha ifodalash mumkin: $y = g(x_1, x_2)$ funksiya darajasi nolinchi chizig'i nuqtalari orasidan shunday bir (x_1^0, x_2^0)nuqtani topish kerakki, bu nuqtada $y = f(x_1, x_2)$ funksiyaning $f(x_1^0, x_2^0)$ xususiy qiymati o'zining $f(x_1, x_2)$ xususiy qiymatidan bu chiziqdagi (x_1^0, x_2^0) nuqtaga yaqin boshqa (x_1, x_2) nuqtalarida katta (kichik) bo'lsin (2.1- rasm).



2.1-rasm.

(x_1^0, x_2^0) nuqta $f(x_1, x_2)$ funksiyaning *shartli lokal maksimumi (minimumi)* deyiladi, $f(x_1^0, x_2^0)$ qiymat esa $f(x_1, x_2)$ funksiyaning $g(x_1, x_2)$ cheklanishlar mavjud bo'lgandagi *shartli lokal maksimumi (minimumi)* deb aytiladi.

Agar $f(x_1, x_2)$ funksiyaning $f(x_1^0, x_2^0)$ qiymati $g(x_1, x_2) = 0$ chiziqning barcha (x_1, x_2) nuqtalarida katta (kichik) bo'lsa, u holda $f(x_1^0, x_2^0)$ qiymat $f(x_1, x_2)$ funksiyaning $g(x_1, x_2) = 0$ cheklanishlar mavjud bo'lgandagi *shartli global maksimum (minimum)i* deb aytiladi, (x_1^0, x_2^0) nuqta esa $f(x_1, x_2)$ funksiyaning shartli global maksimum (minimum) nuqtasidan iboratdir.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ erkli o'zgaruvchilardan iborat bo'lgan $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ funksiyaning shartli maksimum (minimum) masalasi quyidagicha ifodalanadi: ushbu

$$\begin{array}{c} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{array} \qquad (2.1.3)$$

shartlarda

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max \quad (f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \min) \qquad (2.1.4)$$

bo'ladi (odatda, $m < n$).

Agar $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyaning $f(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ xususiy qiymatlari (2.1.3) tenglamalarni qanoatlantiruvchi va $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ nuqtalarga yaqin $(x_1, x_2, ..., x_n)$ nuqtalardagi qiymatlari bilan solishtirilganda $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyaning lokal ekstremumi uchun masalasiga ega bo'lamiz.

Agar $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funkisyaning $f(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ qiymati (2.1.3) tenglamalarni qanoatlantiruvchi barcha $(x_1, x_2, ..., x_n)$ nuqtalardagi qiymatlari bilan solishtirilsa, u holda shartli global ekstremum uchun masala hosil bo'ladi.

Shartli ekstremum nazariyasi makro va mikroiqtisodiy nazariyada keng qo'llaniladi. Bu nazariya masalalarida, odatda, lokal shartli ekstremum, global shartli ekstremum ham hisoblanadi.

1- misol. $x_1 + x_2 - 1 = 0$ (2.1.5)

shart asosida $y = x_1^2 + x_2^2$ (2.1.6)

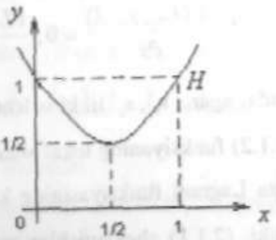
funksiya ekstremumi aniqlansin.

Yechish. (2.1.6) funksiyaning ekstremumi butun $0x_1, x_2$ tekislikdamas, balki faqat (2.1.5) -chiziqda qidiriladi.

Masalani quyidagi yo'l bilan yechamiz. (2.1.5) tenglamadan x_2 o'zgaruvchini x_1 orqali quyidagicha ifodalaymiz: $x_2 = 1 - x_1$ va bu ifodani (2.1.6) funksiyaga qo'yamiz. U holda (2.1.5) va (2.1.6) masala ikki o'lchovli (2.1.5) funksiya ekstremumi $y = 2x_1^2 - 2x_1 + 1$ bitta x_1 o'zgaruvchidan iborat shartsiz ekstremum masalasiga kelib qoladi.

Masalani shartsiz ekstremumga yechish uchun funksiyaning birinchi tartibli hosilasini olamiz: $y' = 4x_1 - 2$ va uni nolga tenglashtiramiz: $4x_1 - 2 = 0$. Bundan $x_1^0 = \frac{1}{2}$ hosil bo'ladi.

x_1^0 nuqta orqali x_1 o'zgaruvchi (chapdan o'ngga) o'tganda y' birinchi hosila ishorasini minusdan plusga o'zgartiradi, shuning uchun x_1^0 kritik nuqta $y=2x_1^2-2x_1+1$ funksiyaning lokal minimumi hisoblanadi. 2.2 – rasmda H funksiya chizig'idan ko'rinib turibdiki $y=2(x_1^0)-2x_1^0+1=\frac{1}{2}$ lokal minimum global minimumi ham hisoblanadi. Funksiyaning boshqa lokal va global ekstremumlari mavjud emas. Yoki x_1^0 nuqtadan farqli $y'=4x_i-2$ hosilani nolga tenglashtiradigan boshqa nuqta yo'q.



2. 2-rasm.

2.2. Shartli ekstremum masalalarini yechishning Lagranj usuli

Lagranj usulining mohiyati

$$L(x_1,x_2,\lambda)=f(x_1,x_2)+\lambda g(x_1,x_2) \qquad (2.2.1)$$

funksiyani hosil qilishdan iboratdir. Bu funksiya uchta x_1, x_2, λ o'zgaruvchidan iborat bo'lib, (2.1.1) va (2.1.2) ikki o'lchovli shartli ekstremum masalalarini uchta x_1, x_2, λ erkli o'zgaruvchili $L(x_1,x_2,\lambda)$ funksiyaning absolut ekstremumi masalasiga olib kelishdan iboratdir.

$L(x_1,x_2,\lambda)$ Lagranj funksiyasi (2.1.1) cheklanish funksiyasini λ yangi erkli o'zgaruvchiga (Lagranj ko'paytuvchisi deb aytiladi va u albatta birinchi darajada qatnashishi kerak) ko'paytmasi va (2.1.2) maqsad funksiyaning yig'indisini o'zida namoyon qiladi. (2.1.2) funksiyaning lokal shartli ekstremumi (2.1.1) cheklanishlar asosidagi analitik shaklda bo'lishi zarur shartlardan biridir.

$f(x_1,x_2)$, $g(x_1,x_2)$ funksiyalar uzluksiz va x_1,x_2 o'zgaruvchilar bo'yicha 1-tartibli uzluksiz xususiy hosilaga ega bo'lsin; (x_1^1,x_2^0) nuqta (2.1.1) cheklanishlar mavjud bo'lgandagi (2.1.2) funksiyaning shartli lokal ekstremum nuqtasi bo'lsin va $grad(x_1^0,x_2^0)\neq 0$ bo'lsin. U holda shunday bir λ_0 yagona son mavjud bo'lib, (x_1^0,x_2^0,λ^0) uch o'lchovli nuqta quyidagi uch noma'lumli uchta tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi (har doim $\frac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial\lambda}=g(x_1,x_2)$ bo'lishi kerak):

$$\frac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial x_1}=0,\ \frac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial x_2}=0,\ \frac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial\lambda}=0 \qquad (2.2.2)$$

Boshqacha aytganda, agar (x_1^0,x_2^0) ikki o'lchovli nuqta (2.1.1) cheklanishlar mavjud bo'lganda (2.1.2) funksiyaning lokal shartli ekstremum nuqtasi bo'lsa, u holda (x_1^0,x_2^0,λ^0) nuqta Lagranj funksiyasining kritik nuqtasidan iborat bo'ladi. Bundan kelib chiqadiki, (2.1.1) cheklanishlar orqali (2.1.2) funksiyaning lokal ekstremum nuqtasini topish uchun avvalambor Lagranj funksiyasining kritik nuqtasini topish kerak ekan, ya'ni (2.1.2) tenglamalar sistemasining barcha yechimlarini aniqlash kerak. Undan keyin Lagranj funksiyasi kritik nuqtalarini λ oxirgi koordinatani yo'qotish orqali qisqartirish kerak. Keyin har bir qisqartirilgan kritik nuqtani (2.1.1) cheklanishlar mavjud bo'lganda bu nuqta (2.1.2) funksiyaning haqiqatan ham lokal shartli ekstremumi bo'ladimi yoki bo'lmaydimi predmet sohasi bo'yicha tahlil qilish kerak. Bu yerda, (2.1.1) cheklanishlar mavjud bo'lganda (2.1.2) funksiyaning lokal shartli ekstremumi bo'lishining yetarli sharti keltirilmaydi. «Qisqartirilgan» kritik nuqtani tahlil qilishda, odatda, ko'rinarli bo'lgan geometrik talqin ishlatiladi.

2-misol. (2.1.5) va (2.1.6) masalani Lagranj usulidan foydalanib yechilsin.

Masalani yechish uchun Lagranj funksiyasi tuziladi:

$$L(x_1,x_2,\lambda)=x_1^2+x_2^2+\lambda(x_1+x_2-1),$$

bundan x_1,x_2,λ o'zgaruvchilar bo'yicha 1-tartibli xususiy hosilalari olinadi:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda = 0, \ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 + \lambda = 0, \ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 1 = 0. \ (2.2.3)$$

(2.2.3) ning birinchi ikkita tenglamasidan $-2x_1 = \lambda = -2x_2$, ya'ni $x_1 = x_2$ lar kelib chiqadi. Uchinchi tenglamadan foydalanilsa, $x_1^0 = x_2^0 = \frac{1}{2}$ hosil bo'ladi. Shunday qilib, (2.2.3) tenglamalar sistemasi Lagranj funksiyasiga yagona kritik nuqtani beruvchi yagona $\lambda^0 = -2x_1^0 = -2x_2^0$ yechimga ega ekan. Kritik $(x_1^0, x_2^0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ nuqta (2.1.6) funksiyaning berilgan (2.1.5) cheklanishlardagi shartli lokal minimumidan iboratdir yoki bevosita (2.1.5) tenglamani qanoatlantiruvchi (x_1, x_2), (x_1^0, x_2^0) nuqtada $f(x_1, x_2) > f(x_1^0, x_2^0) = \frac{1}{2}$ ekanligini tekshirib korish mumkin.

(2.1.3) va (2.1.4) umumiy masalada, Lagranj funksiyasining shartli ekstremumi

$$L(x_1, ... x_n, \lambda_1, ..., \lambda_n) = f(x_1, ..., x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, ..., x_n) +$$
$$+ \lambda_2 g_2(x_1, ..., x_n) + ... + \lambda_m g_m(x_1, ..., x_n)$$

korinishda boladi. Bundan

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, ..., \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0, \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0, ..., \frac{\partial L}{\partial \lambda_m} = 0 \qquad (2.2.4)$$

(2.2.2) sistema esa $n + m$ ta $x_1, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_m$ noma'lumli $n + m$ ta tenglamalar sistemasi ko'rinishida yoziladi.

Lagranj funksiyasining $n + m$ o'lchovli $(x_1^0, ..., x_n^0, \lambda_1^0, ..., \lambda_m^0)$ kritik nuqtasi «qisqartirish» operatsiyasidan keyin n- o'lchovli $(x_1^0, ..., x_n^0)$ nuqtasi ko'rinishiga keladi.

x_1 va x_2 ikki o'zgaruvchili holatga qaytamiz. Lokal shartli ekstremumning zaruriy shartini kengaytirilgan ko'rinishda quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial g(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} = 0, \qquad (2.2.5)$$

$$\frac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial \lambda}=\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}+\lambda\frac{\partial g(x_1,x_2,\lambda)}{\partial x_2}=0, \qquad (2.2.6)$$

$$\frac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial \lambda}=g(x_1,x_2)=0; \qquad (2.2.7)$$

$$\text{grad } f(x_1,x_2)=\left[\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1},\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right],$$

$$\text{grad } g(x_1,x_2)=\left[\frac{\partial g(x_1,x_2)}{\partial x_1},\frac{\partial g(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right]$$

lardan iborat ekan. (2. 2.5) va (2.2.6) larni

$$\text{grad } f(x_1,x_2)+\lambda \text{ grad } g(x_1,x_2)=0 \qquad (2.2.8)$$

vektor ko'rinishda yozish mumkin. *Lagranj funksiyasining* (x_1^0,x_2^0,λ^0) kritik nuqtasi *uchun*

$$\text{grad } f(x_1^0,x_2^0)+\lambda \text{ grad } g(x_1^0,x_2^0)=0 \qquad (2.2.9)$$

hosil qilinadi, ya'ni (x_1^0,x_2^0) nuqtada Lagranj funksiyasi

$$\text{grad } f(x_1^0,x_2^0)=-\lambda \text{ grad } g(x_1,x_2) \qquad (2.2.10)$$

dan iborat.

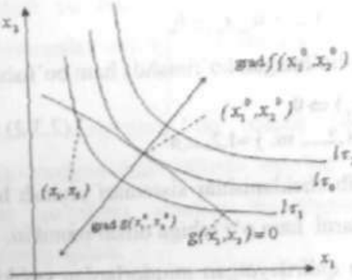
(x_1^0,x_2^0) nuqtada $f(x_1,x_2)$ va $g(x_1,x_2)$ **funksiyalarning** $f(x_1^0,x_2^0)$ va $g(x_1^0,x_2^0)$ chiziq darajalari kesishadi.

Endi (2.1.1) cheklanishlar mavjud bo'lganda (2.1.2) funksiyaning zaruriy shartini geometrik shaklda ko'rsatamiz. $f(x_1,x_2), g(x_1,x_2)$ funksiyalar uzluksiz va x_1, x_2 o'zgaruvchilar bo'yicha 1- tartibli xususiy hosilaga ega bo'lsin. (x_1^0,x_2^0) nuqta (2.1.1) cheklanishlar mavjud bo'lganda (2.1.2) funksiyaning shartli lokal ekstremum *nuqtasi* bo'lsin va

$$\text{grad } f(x_1^0,x_2^0)\neq 0, \ \text{grad } g(x_1,x_2)\neq 0$$

bo'lsin. U holda (x_1^0,x_2^0) nuqtadan chiquvchi grad $f(x_1^0,x_2^0)$ va grad $g(x_1^0,x_2^0)$ gradientlar bitta chiziqqa joylashgan bo'lib, bu (x_1^0,x_2^0) nuqtani o'z ichiga olgan $f(x_1,x_2)$ va $g(x_1,x_2)$ funksiyalar darajasi chizig'i bu nuqtada kesishadi, degan so'z bilan ekvivalentdir.

2.3-rasmdagi (x_1^0,x_2^0) nuqta shartli lokal maksimum nuqtasidan iboratdir, agar (x_1,x_2) nuqta $g(x_1,x_2)$ funksiyaning nolinchi to'plam darajasiga qarashli bo'lsa va (x_1^0,x_2^0) nuqta bilan ustma - ust tushmasa, geometrik talqin asosida $\tau_1 < \tau_0 < \tau_2$ (grad $f(x_1^0,x_2^0)(x_1^0,x_2^0)$ nuqtada funksiyaning tezlik bilan o'sish yo'nalishini ko'rsatadi) bo'lganligi uchun $f(x_1^0,x_2^0) = \tau_0 > \tau_1 = f(x_1,x_2)$ bo'ladi.



2. 3-rasm

2.3-rasmda ko'rsatilgan holda $\lambda^* = 2$. $f(x_1,x_2)$ funksiyaning gradiyenti *grad* $f(x_1^0,x_2^0)$ shimoli sharqqa qaragan, $g(x_1,x_2)$ cheklanishlar gradienti janubi-g'arbga qaragan. $f(x_1,x_2)$ maqsad funksiya darajasi chiziglari iqtisodiy nazariyada uchraydigan daraja chiziqlariga o'xshaydi.

2.3. Matematik programmalashtirish (ChP) masalasining qo'yilishi

Matematikaning asosiy bo'limlaridan biri matematik programmalashtirish bo'limi, matematik modellarning son qiymatini topish bilan shug'ullanadi.

«Programmalashtirish» atamasi ketma-ket yaqinlashish algoritmidan foydalanishni ko'rsatadi, ya'ni programma mumkin bo'lgan rejadan boshlab, uni eng yaxshi yechim hosil bo'lguncha yangilanib boradi.

Matematik programmalashtirish masalasi quyidagicha ifodalanadi.

$x_1, x_2, ..., x_n$ *o'zgaruvchilar* berilgan bo'lib, bu o'zgaruvchilar turli xil sonli qiymatlarni qabul qiladi. Bu noma'lumlarga ma'lum bir shartlar qo'yilib, *cheklanishlar sistemasi* hosil bo'ladi. Cheklanishlar sistemasi deganda tenglama yoki tengsizliklar sistemasi tushuniladi. Ma'lumki ular chiziqli ko'rinishga ega (ya'ni bunda o'zgaruvchilar birinchi darajada qatnashadi):

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ &.. \\ &a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rn}x_n = b_r, \\ &a_{r+11}x_1 + a_{r+12}x_2 + ... + a_{r+1n}x_n \le b_{r+1} \\ &.. \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \ge b_m \end{aligned} \qquad (2.3.1)$$

lekin ular chiziqli bo'lmagan ko'rinishda ham bo'lishi mumkin:

$$\begin{aligned} &q_i(x_1, x_2, ..., x_n) \Leftrightarrow 0; \\ &x_j \ge 0; \quad i = 1,2,..., m; \; j = 1,2,...,n \end{aligned} \qquad (2.3.2)$$

Shunday qilib cheklanishlar sistemasi aralash holda(chiziqli va chiziqli bo'lmagan) ifodalarni ham o'z ichiga olishi mumkin.

Undan keyin qidirilayotgan miqdorlardan tashkil topgan, mezon (foyda, xarajat, tannarx)ni ifodalovchi funktsiya tuziladi. Uni masalaning maqsad funktsiyasi yoki funktsionali deb atashadi. U ko'pincha chiziqli ko'rinishda bo'ladi:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max \ (\min), \qquad (2.3.4)$$

O'zgaruvchilarning cheklanishlar sistemasini qanoatlantiruvchi shunday qiymatini topish talab qilinadiki, natijada maqsad funktsiya eng katta yoki eng kichik qiymat qabul qilsin.

Agar qidirilayotgan $x_1, x_2, ..., x_n$ o'zgaruvchilarga nisbatan cheklanishlar sistemasi va maqsad funktsiya chiziqli bo'lsa, u holda chiziqli programmalashtirish masalasi hosil bo'ladi; agar bironta bir chiziqli bo'lmagan ifoda mavjud bo'lsa, u holda chiziqli bo'lmagan programmalashtirish masalasi hosil bo'ladi. Bu ikkala turdagi masalalarni yechish usullari mavjud.

O'zgaruvchilarning har qanday sonli qiymatlari to'plami masalaning rejasi deb aytiladi; cheklanishlar sistemasini qanoatlantiruvchi rejaga mumkin bo'lgan reja deb aytiladi. Maqsad funktsiyani maksimallashtiradigan (minimallashtiradigan) mumkin bo'lgan rejaga *optimal* reja deb aytiladi. Ma'lumki, masalada mumkin bo'lgan yechimlar cheksiz ko'p bo'lib, yechilish algoritmi bu yechimlar ichidan optimal rejani topishga qaratilgan. O'zgaruvchilarning bironta bir manfiy bo'lmagan qiymatlar to'plamiga javob bermaydigan chiziqli va chiziqli bo'lmagan cheklanishlar sistemasi *birgalikda bo'lmagan* deb aytiladi va bunday masalalar yechimga ega bo'lmaydi. *Birgalikda bo'lgan* sistemalar esa hech bo'lmaganda bitta mumkin bo'lgan yechimga ega bo'ladi.

Iqtisodiy rejalarni tuzishning bir necha tur variantlari bo'lishi mumkin. Matematik programmalashtirish mavjud bo'lgan hamma variantlarda oldindan qo'yilgan shartlar bajarilganda rejaning optimal variantini topishga xizmat qiladi.

Chiziqli programmalashtirish masalasini ifodalashning bir necha variantlari mavjud bo'lib , ularning ikki turi ko'p qo'llaniladi.

Minimallashtirish masalasidan maksimizatsiya masalasiga o'tish uchun kriteriya funktsiyasi ishorasini o'zgartirish kerak, ya'ni minimallashtirish funktsiyasi $f(x)=(c,x)$ maksimum funktsiyasi masalasiga ekvivalent b o'lgan $f(x)=-(c,x)$ yoki $\min z=\max(-z)$ bilan almashtiriladi.

Har qanday tengsizlik ko'rinishdagi cheklanishni qo'shimcha manfiy bo'lmagan qo'shimcha o'zgaruvchilarni qo'shish orqali tenglama ko'rinishga aylantirish mumkin.

$a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n\le a$ shart

quyidagi ikkita cheklanishga ekvivalentdir:

$a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n+x_{n+1}=a$

$x_{n+1} \geq 0$.

x_{n+1} o'zgaruvchilarga qo'shimcha o'zgaruvchilar deyiladi. Bu ko'rinishda ifodalangan masalaga standart chiziqli programmalashtirish masalasi deb aytiladi.

Chiziqli programmalashtirish masalasining kanonik ko'rinishi quyidagicha bo'ladi: $\max(c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n) = z$ (2.3.5)

maqsad funktsiya va

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \qquad (2.3.6)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2$$

....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, ... n. \qquad (2.3.7)$$

cheklanishlardan iboratdir.

Bu masala matritsa ko'rinishida quyidagicha yoziladi:

$$\max(c, x), \ Ax = b, \ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0.$$

bu erda $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$; $A=\begin{bmatrix} a_{11}...a_{1n} \\ --- \\ a_{m1}...a_{mn} \end{bmatrix}$; $b=\begin{bmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}$ ko'rinishdagi matritsalardan iborat.

1-misol. Fermer xojaligida ikkita qishloq xo'jalik ekinlari: paxta va bug'doyni birgalikda ekishning optimal varianti topilsin, buning natijasida maksimum foyda olinsin. Bularni yetishtirish uchun xo'jalikda 200 ga ekin maydoni, 55 odam- kunidan iborat mehnat resurslari , 32 t. mahalliy o'g'it mavjud bo'lsin. Paxtaning rega bo'yicha hosildorligi 25 s, bug'doyniki esa 20 s. Paxtadan olinadigan foyda -4.5 sh.b; bugdoydan -6 sh.b.

Agar paxtaning ishlab chiqarish hajmini x_1 bilan, bug'doynikini x_2 bilan belgilasak va 1 s hosil uchun ketgan xarajatlar 1-jadvalda keltirilgandek bo'lsa, masalaning matematik modeli tuzilsin.

1 -jadval

Ishlab chiqarish resurslari	O'lchami	1 s uchun ketgan xarajatlar		Mavjud i/ch resurslari
		Paxta	Bug'doy	
Yer maydoni	Ga	0.05	0.5	200
Mehnat xarajatlari	Odam-kun	1.6	0.36	55
Mahalliy o'g'itlar	T.	6.25	0.625	32

Yuqoridagi shartlarni etiborga olsak, bu masalani quyidagicha ifodalash mumkin.

Yer maydoni bo'yicha

$0{,}05x_1 + 0{,}5x_2 \le 200$

Mehnat xarajatlari bo'yicha

$1{,}6x_1 + 0{,}36x_2 \le 55$

Mahalliy o'q'itlar bo'yicha

$6{,}25x_1 + 0{,}36x_2 \le 32$ (2.3.8)

Agar qidirilayotgan maksimumni C bilan belgilasak, maqsad funktsiyaning ko'rinishi

$$C = 4{,}5x_1 + 6x_2 \to \max \qquad (2.3.9)$$

bo'ladi.

Ishlab chiqarish hajmi manfiy bo'lmasligi kerak, ya'ni $x_1,\ x_2 \ge 0$.

Demak berilgan masalani yechish, (2.3.9) funksiyani (2.3.8) shartlar asosida yechishga keltiriladi.

2-misol. Iqtisodiy nazariyada chiziqli programmalashtirish masalasi ko'pincha shartli ekstremum masalasiga keltiriladi. Misol uchun iste'molchining bozordagi ratsional xulq-atvori masalasini chiziqli programmalashtirish masalasi ko'rinishida ifodalasak,

$$p_1x_1 + p_2x_2 \le D, \qquad (2.3.10)$$

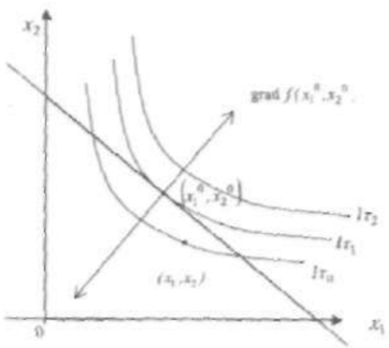
$$x_1 \ge 0, x_2 \le 0 \qquad (2.3.11)$$

shartlarda $\quad U(x_1,x_2)\to \max \qquad (2.3.12)$

bo'ladi.

(x_1,x_2)- iste'mol qilinadigan to'plam, (x_1- birinchi mahsulot birligi soni, x_2- ikkinchi mahsulot birligi soni), p_1- birinchi mahsulot bir-birligining bozor narxi, p_2- ikkinchi mahsulot bir birligi bozor narxi, D- bu mahsulotlarni sotib olish uchun individning daromadi, $U(x_1,x_2)$ – individning foydalilik funksiyasi.

$U(x_1,x_2)$ foydalilik funksiyasining x_1,x_2 o'zgaruvchilar bo'yicha 1-tartibli xususiy hosilasi mos ravishda birinchi va ikkinchi mahsulotlarning eng ko'p foydaliligi deb aytiladi. 2.4-rasimdagi shtirixlangan uchburchak



2.4-rasm.

(x_1,x_2) iste'mol qilinadigan tovarlar to'plamidan iborat bo'lib, individ uchun ma'qul, ammo faqat (x_1^0,x_2^0) iste'mol qilinadigan to'plamda iste'molchi o'zining $u(x_1,x_2)$ foydalilik funksiyasini maksimallashtiradi. (x_1^0,x_2^0) nuqtada budjet chizig'i $p_1x_1+p_2x_2=D$ va befarqlik chizig'i kesishadi. $p_1x_1+p_2x_2=D$ bo'lganligi uchun (x_1^0,x_2^0) ChPMning optimal yechimi quyidagi shartli global ekstremum masalasi bilan ustma-ust tushadi:

$$p_1x_1+p_2x_2-D=0 \qquad (2.3.13)$$

shart bajarilganda

$$u(x_1, x_2) \to \max. \qquad (2.3.14)$$

Shunday qilib iste'molchining bozordagi hulq atvori masalasi ChPM (2.3.10) (2.3.12) ko'rinishida hamda (2.3.13) (2.3.14) shartli ekstremum masalasi ko'rinishida tasvirlanishi mumkin ekan. Matematika nuqtai nazaridan bular turli xil masalalar, lekin ular bir xil yechimga egadir: (x_1^0, x_2^0) – iste'mol to'plami $u(x_1, x_2)$ foydalilik funksiyasini maksimallashtiradi va $p_1x_1 + p_2x_2 \le D$ budjet cheklanishlarini xuddi $p_1x_1^0 + p_2x_2^0 = D$ tenglama kabi qanoatlantiradi. 2.6–rasmda, shuningdek, (x_1^0, x_2^0) nuqtada $u(x_1, x_2)$ foydalilik funksiyasi va $p_1x_1 + p_2x_2 \le D$ cheklanish funksiyasi gradiyentlari ko'rsatilgan: grad $u(x_1^0, x_2^0)$ va (p_1, p_2), bu gradiyentlar (x_1^0, x_2^0) nuqtalardan o'tuvchi bitta to'g'ri chiziqda yotadi, eslatib o'tilganidek, bu befarqlik chizig'i va byudjet chizig'ining (x_1^0, x_2^0) nuqtalardagi kesishishuviga ekvivalentdir. Yuqoridagilardan kelib chiqadiki, iste'molchining bozordagi xulq atvori masalasini (2.3.13)-(2.3.14) ko'rinishidagi shartli ekstremum masalasidek yechish mumkin ekan.

Chiziqli programmalashtirish masalasining qaralgan masalalari statik va bir qadamli, ya'ni bu yerda rejalashtirishning bir bosqichi uchun optimal yechim olinadi.

Bu masalalardan tashqari chiziqli programmalashtirish masalasi ko'p qadamli masalalarni ham o'z ichiga oladi. Bu masalalarda optimal yechim bir nechta bosqich uchun ketma-ket topiladi. Bunday masalalarni o'rganish, ularni yechish usullarini ishlab chiqish bilan shug'ullanuvchi bo'limiga *dinamik programmalashtirish* deb aytiladi.

3-misol. Dinamik programmalashtirishning quyidagi masalasini qaraymiz. Masalani yechish uchun dastlabki ma'lumotlar jadvalda keltirilgan.

2 -jadval

Dekadalar	1 bosh mol uchun kunlik talab				
	Ozuqa birligi, kg	Protein,g	Kaltsiy,g	Fosfor, g	Karotin, mg

1	5,8	520	25	12	35
2	5.9	550	26	13	35
3	6,0	580	27	14	35
4	6,1	593	28	15	40
5	6.2	606	29	16	43
6	6,3	620	30	17	45
7	6,6	640	31	18	48
8	6,8	660	33	19	50
9	7,0	680	35	20	52

Chorva mollarining har bir dekada boshidagi ozuqa moddalariga bo'lgan talabi

Mollarning har bir dekadadagi ozuqa moddalariga bo'lgan talabini qondirishning shunday ratsionini tuzish kerakki, natijada uning tannarxi minimal bo'lsin.

Matematik programmalashtirish masalalarining tasnifi

Matematik programmalashtirish masalalari maqsad funktsiyasi va shartlarning turlariga qarab tasniflanadi. Agar maqsad funktsiya va shartlar chiziqli bo'lsa (ularning tarkibidagi x lar darajaga ko'tarilmasa) bunday masalalar chiziqli programmalashtirish masalalari bo'ladi. Yuqorida keltirilgan masalalar chiziqli masalalardir.

Agar maqsad funktsiya yoki bo'lmasa bironta shart chiziqli bo'lmasa ham bu masala chiziqli bo'lmagan programmalashtirish masalasidir. Quyida chiziqli bo'lmagan programmalashtirish masalalari keltirilgan.

1-misol .

$z=(x_1^2-3)+(x_2^2-4)$ maqsad funktsiyaning qiymatini

$$\begin{aligned} &3x_1+2x_2\geq 7 \\ &10x_1-x_2\leq 8 \qquad x_1,x_2\geq 0 \\ &-10x_1-x_2\leq 12 \end{aligned}$$

shartlar asosida topilsin. Bu yerda maqsad funktsiya chiziqli bo'lmagan.

2-misol.

$z=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2$ maqsad funktsiyaning minimum qiymatini

$$6x_1 + 3,7x_3 \ge 4,9$$
$$4x_1 + 4,3x_2 \ge 11,4$$
$$9x_2 + 3,7x_3 \ge 10,1$$
$$6x_3 + 4,6x_3 \ge 9,8$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$$

shartlar asosida topilsin. Bu yerda maqsad funktsiya chiziqlimas.

3-misol. $z = 3x_1 + 4x_2$ maqsad funktsiyaning maksimum qiymatini

$$x_1 + x_2 \le 25$$
$$x_1 + x_2 \ge 4$$
$$x_1 + x_2 \ge 0$$

shartlar asosida toping. Bu yerda *shartlar chiziqlimas.*

4-Misol. $Z = x_1 x_2$ maqsad funktsiyaning quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi maksimal qiymati topilsin:

$$x_1^2 + 2x_2 + x_2^2 - 2x_1 \ge 14$$
$$2x_1 + x_2 \le 10$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Bu yerda maqsad funktsiya va cheklanishlar chiziqli emas.

Chiziqli bo'lmagan programmalashtirish masalalarining turlari juda ko'p. Ularning ko'plarining yechish usullari ishlab chiqilmagan. Maqsad funktsiya chiziqli bo'lmagan masalalarni yechish ko'proq ishlab chiqilgan. Ularning ichida eng ko'p tarqalganlari maqsad funktsiya kvadratik va separabl bo'lgan masalalardir. (Separabl deb shunday funktsiyaga aytiladiki, u funktsiyani boshqa funktsiyalarning yig'indisi sifatida ifodalash mumkin.)

Chiziqli bo'lmagan masalalarni yechish ko'p qiyinchiliklar tug'diradi. Ko'p hollarda separabl cheklanishga ega bo'lgan masalalarning optimal yechimini topish ishlab chiqilgan.

Keltirilgan chiziqli va chiziqli bo'lmagan programmalashtirishga doir misollarni statik yoki bir qadamdan iborat ya'ni faqat bitta bosqich rejasi uchun optimal yechim hosil qiluvchi deb atash mumkin. Matematik programmalashtirish bu masalalardan tashqari ko'p qadamli ya'ni optimal yechimi ketma ket bir necha bosqichlar uchun topiladigan masalalarni ham yechish bilan shug'ullanadi. Bunday masalalarni yechish bilan shug'ullanuvchi matematik programmalashtirish bo'limiga dinamik programmalashtirish deyiladi

II bobga doir topshiriqlar

Berilgan shartlarda funksiyaning:

1) Shartli ekstremum qiymatini oddiy usul bilan aniqlang;

2) Lagranj usuli orqali aniqlang.

Masala yechimini grafikda ko'rsating.

1. $x_1 + x_2 - 2 = 0;\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ y = x_1^2 + 2x_2$.

2. $2x_1 - x_2 = 0;\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ y = (1 - x_1) \cdot x_2$.

3. $x_1 + x_2 - 3 = 0;\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ y = 3x_1^2 + 4x_2$.

4. $x_1 + x_2 - 3 = 0;\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ y = x_1 + 2x_2 \to \max$.

Quyidagi chizihli programmalashtirish masalalarini yeching:

5. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ 0 \leq x_1 \leq 6 \\ 0 \leq x_2 \leq 5 \end{cases}$ cheklanishlarda $Z = 2x_1 + 5x_2 \to \max$ qiymatni aniqlang.

6. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 6 \\ -x_1 + x_2 \leq 4 \\ -2x_1 + x_2 \leq 0 \\ 0 \leq x_1 \leq 6 \\ x_2 \geq 2 \end{cases}$ cheklanishlarda $Z = x_1 - 3x_2 \to \min$ qiymatni aniqlang.

7. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ 3x_1 - x_2 \leq 0 \\ x_1 - x_2 \geq 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$ cheklanishlarda $Z = x_1 - 2x_2 \to \min$ qiymatni aniqlang.

8. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 8 \\ x_1 - 6x_2 \le 3 \\ 2x_1 - x_2 \ge 0 \\ x_1 + 2x_2 \ge 2 \\ 0 \le x_1 \le 4, \ x_2 \ge 0 \end{cases}$ cheklanishlarda $Z = 2x_1 + 4x_2 \to \max$ qiymatni aniqlang.

Chiziqli va chiziqli bo'lmagan programmalashtirish masalalarini MS EXCEL dasturidagi "*Поиск решения*" dasturi orqali yechish mumkin.

Tayanch so'z va iboralar

Lokal maksimumi, lokal minimumi, ekstremum, bog'lanish funksiyasi, shartli lokal maksimumi (minimumi), shartli global maksimum (minimum)i, Lagranj usuli, kritik nuqtalar, matematik programmalashtirish , cheklanishlar sistemasi, maqsad funktsiyasi, chiziqli bo'lmagan programmalashtirish, optimal reja, birgalikda bo'lmagan, kanonik ko'rinish, foydalilik funksiyasini , iste'molchi, hulq atvori masalasi, iste'mol to'plami, dinamik programmalashtirish,.

II bobga doir savollar

1. Qanday masala shartli ekstremum masalasi deyiladi?
2. Shartli va absalut ekstremum masalalarni solishtiring.
3. Lagranj funksiyasining ko'rinishini yozing.
4. Lokal shartli ekstremum uchun zaruriy shartni yozing (analitik shakli).
5. Lokal shartli ekstremum uchun zaruriy shartni ko'rsating (geometrik shakli).
6. Matematik programmalashtirish masalasi ko'rinishini yozing.
7. Chizihli programmalashtirish masalasi qanday yoziladi?
8. Yechim turlari va ularning tariflarini ayting.
9. ChP masalasi qanday tasniflanadi?

III BOB

OPTIMIZATSIYA MASALALARINI YECHISH USULLARI

3.1. Chiziqli programmalash masalasini grafik usulda yechish

Chiziqli programmalash masalasining mumkin bo'lgan yechimlari to'plami qavariq ko'p burchakni tasvirlaydi, masalaning optimal yechimi esa yechimlar ko'p burchagi uchlaridagi bironta nuqtada yotadi.

Chiziqli programmalashtirish masalasining standart shaklini $n=2$ bo'lgan, y'ani ikki o'lchovli holatini qaraymiz.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max$$

Bunday ko'rinishga o'zgaruvchilar soni n tenglamalar soni m dan 2 taga ko'p bo'lgan, y'ani $n-m=2$ bo'lgan kanonik masalani ham keltirish mumkin.

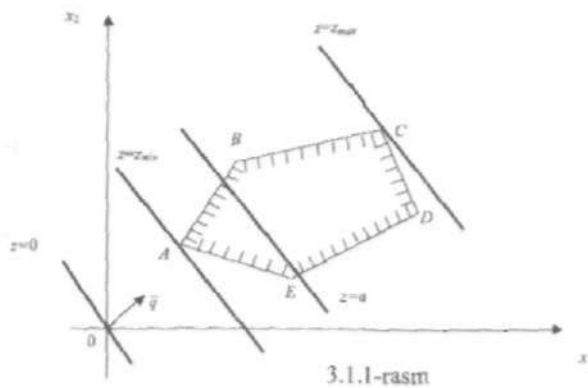
Cheklanishlar sistemasining geometric ifodasi ABCDE ko'p burchakdan iborat bo'lsin (3.1.1-rasm.). Bu ko'p burchakning nuqtalari ichidan shunday nuqtani topish kerakki, natijada $z = c_1x_1 + c_2x_2$ chiziqli funksiya максимал (yoki минимал) qiymat qabul qilsin.

Z chiziqli funksiyaning *daraga chizig'i* deb ataluvchi chizigni qaraymiz, ya'ni funksiya bu chiziqning atrofida bir xil o'zgarmas a qiymatni: $z=a$ ni qabul qiladi, ya'ni

$$c_1x_1 + c_2x_2 = a \qquad (3.1.1)$$

z chiziqli funksitaning chiziq daragasini qaraymiz. Bu chiziq atrofida funksiya bir xil o'zgarmas qiymat qabul qiladi, ya'ni $z=a$ yoki:

$$c_1x_1 + c_2x_2 = a \ .$$



3.1.1-rasm

Yechimlar ko'pburchagi ichidan Z funksiya chizig'i eng katta(agar chiziqli funksiya maksimumga intilsa) yoki eng kichik (agar chiziqli funksiya minimumga intilsa) daraga bilan o'tuvchi nuqtani topish kerak.

(3.1.1) funksiyaning chiziq daragasi tenglamasi to'g'ri chiziq tenglamasidan iborat. a ning turli darajalarida chiziq darajasi parallel, chunki ularning burchak koeffisientlari c_1 va c_2 munosabatlari orqali aniqlanadi va bundan kelib chiqadiki ular teng. Shunday qilib, Z funksiyaning chiziq **darajasi** koordinata o'qlariga nisbatan burchak asosida joylashgan " parallellard**an" iborat** bo'ladi.

Chiziq darajasining muhim xossalarida**n biri** shundan iboratki, chiziqlarni parallel bir tomonga silgitganda daraga faqat **o'sadi**, boshqa tomonga silgitganda kamayadi.

Uchta chiziq daragasi berilgan bo'lsin:

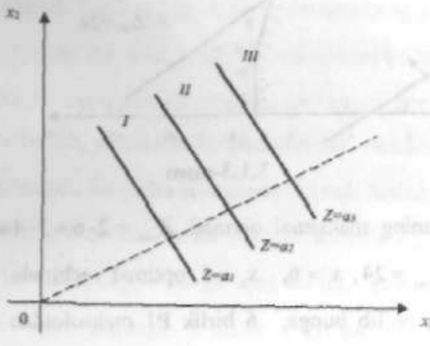
$$z = c_1x_1 + c_2x_2 = a_1 \qquad \text{(I)}$$

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 = a_2 \qquad \text{(II)}$$

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 = a_3 \qquad \text{(III)}$$

II chiziq I va III orasida joylashgan. U holda $a_1 < a_2 < a_3$ yoki $a_1 > a_2 > a_3$.

Haqiqatan ham, shtrixlangan chiziq (chiziqlar darajasiga perpendikulyar 3.1.2-rasm) darajasi chiziqli funksiyadan iborat, demak uni bir tomonga silgitsak o'sadi, boshqa tomonga kamayadi. O'sish yo'nalishini aniqlash uchun ikkita chiziq darajasini chizib ulardan qaysi birining darajasi kattaligini aniqlash mumkin. Misol uchun koordinata boshidan o'tuvchi bironta chiziqni olsak, ya'ni $z = c_1x_1 + c_2x_2$ ozod hadsiz chiziqli funksiya, bu nolinchi darajaga mos keladi. Boshqa chiziqni ixtiyoriy o'tkazish mumkin, misol uchun u cheklanishlar sistemasi yechimlari to'plamidan o'tgan bo'lsin. Keyin chiziqli funksiyaning o'sish yo'nalishini aniqlab(uni $\overline{q}$ vector deb belgilaymiz), funksiyaning maksimal yoki minimal qiymat qabul qiluvchi nuqtasini aniqlaymiz, xuddi 3.1.1-rasmdagi C yoki A nuqtaga o'xshash.



3.1.2-rasm

1. Quyidagi masalani grafik usulda yeching:

$Z = 3x_1 + 3x_2 \to \max$

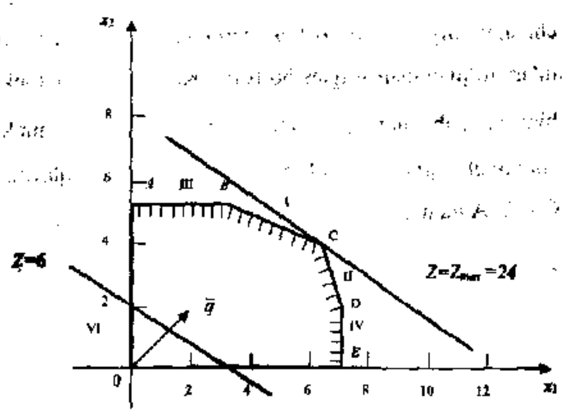
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 \le 16 \\ x_2 \le 5 \\ 3x_1 \quad\quad \le 21 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

Yechish. 3.1.3-rasmda *yechimlar ko'pburchagi ifodalangan.* Ma'lumki, agar $Z = 0$ bo'lsa $2x_1 + 3x_2 = 0$ chiziq daragasi koordinata boshidan o'tadi. Misol uchun $Z = 6$ bo'lsa $2x_1 + 3x_2 = 6$ chiziq daragasi grafikda yasaladi.

Uning joylashuvi chiziqli funksiyaning o'sish yo'nalishini ko'rsatadi(3.1.3-rasmdagi $\overline{q}$ -вектор). Qaralayotgan masala maksimumni qidirish uchun ekan, u holda optimal yechim I va II chiziqlarning kesishmasida turgan C burchak nuqtada, ya'ni C nuqtaning koordinatalari quyidagi tenglamalar sistemasini yechish orqali aniqlanadi: $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 18 \\ 2x_1 + x_2 = 16 \end{cases}$,

bu erdan, $x_1 = 6, x_2 = 4$, ya'ni $C(6;4)$.



3.1.3-rasm

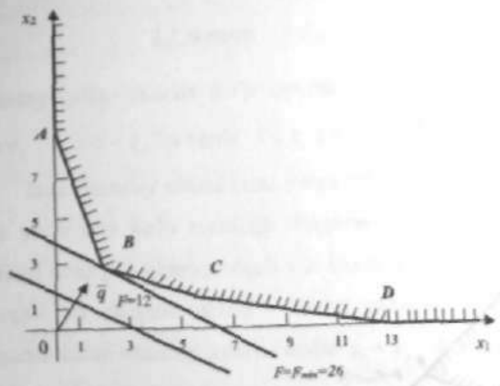
Chiziqli funksiyaning maksimal qiymati $Z_{max} = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4 = 24$ dan iborat. Shunday qilib $Z_{max} = 24$, $x_1 = 6$, $x_2 = 4$, optimal yechimda maksimal foyda 24 sh.b. ga teng bo'lib bunga, 6 birlik P1 mahsulotdan va 4 birlik P2 mahsulotdan etishtirish orqali, erishish mumkin.

2. Quyidagi masalani grafik usulda eching:

$$F = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \min:$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$



3.1.4-rasm

Yechish. Yechimlar ko'p burchagi o'zida cheklanmagan ko'p burchakli sohani aks ettiradi(3.1.4-rasm). Chiziq daragasining joylashuviga qarab, misol uchun $Z=12$, yoki $4x_1+6x_2=12$, $\overline{q}$ vektorning yo'nalishi topiladi (bu vector chiziqli funksiyaning o'sish yo'nalishini ko'rsatadi. Ma'lumki, minimum nuqtasi – bu B *nuqta bo'lib, yechimlar ko'pburchagiga «kirish» yoki chiziq daragasini* $\overline{q}$ *vector yo'nalishi bo'yicha siljitganda* chiziqli funksiya qiymati ko'payady.

B (2;3) nuqtaning koordinatalarini topamiz, u holda $Z_{min}=4\cdot2+6\cdot3=26$.

Shunday qilib, $Z_{min}=26$ ga teng bo'lib, optimal yechim $x_1=2$, $x_2=3$ bo'ladi, ya'ni agar ratsionga 2 birlik I ozuqadan va 3 birlik II ozuqadan qo'shilsa, uning minimal narxi 26 sh.b ga teng bo'ladi.

Qaralgan masalalarda chiziqli funksiya maksimum va minimumga bitta nuqtada erishdi, shunday qilib masala birdan bir optimal yechimga ega bo'ladi.

2.3. Quyidagi masalani grafik usulda yeching:

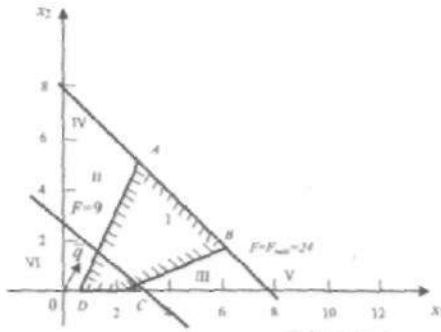
a) $Z=3x_1+3x_2\rightarrow\max$

$$\begin{cases}x_1+x_2\ge4,\\2x_1-x_2\ge1,\\x_1-2x_2\le1.\end{cases}$$

$x_1\ge0, x_2\ge0.$

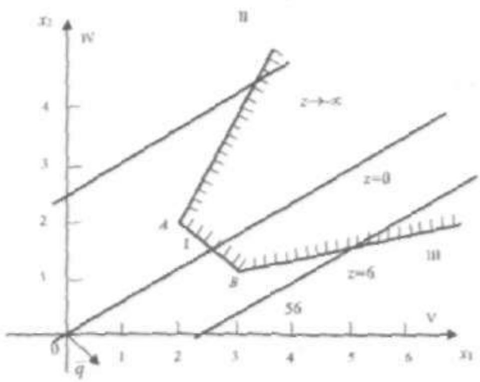
б) $F=2x_1-3x_2+1\rightarrow min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8, \\ 2x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$



3.1.5-rasm

Yechish. 1) Masalaning geometric yechimi 3.1.5-rasmda ko'rsatilgan, bundan ko'rinib turibdiki, chiziq daragasi maksimal daraga $ABCD$ yechimlar ko'pburchagi AB chegara chizig'i bilan ustma–ust tushadi, ya'ni $x_1 + x_2 = 8$ chizig'i bilan. Bundan kelib chiqadiki, barcha AB kesmada $Z = 3x_1 + 3x_2$ chiziqli funksiya $3(x_1 + x_2) = 3 \cdot 8 = 24$ ga teng bo'lgan birdan-bir maksimal qiymatni qabul qiladi. Bundan masalaning cheksiz ko'p optimal yechimlari mavjud ekanligini ko'rish mumkin, (bu yechimlarni AB kesmadagi nuqtalarning koordinatalari orqali hosil qilish mumkin). Bu erda bazis yechimlar $A(3;5)$ va $B(6;2)$ nuqtalarda joylashgan. AB kesmaning nuqtalari $x_2 = 8 - x_1$ tenglama orqali beriladi, bu erda $3 \le x_1 \le 6$ oraliqda bo'ladi.



3.1.6-rasm

Shunday qilib, cheksiz ko'p optimal yechimlar to'plamida $Z_{max}=24$ bo'lib $x_1=c$, $x_2=8-c$, bu yerda $3\le x_1\le 6$ oraliqda joylashgan.

Izoh. Bunday masalalarni geometric yechganda chiziq daragasi haqiqatan ham yechimlar ko'p burchagi chegarasi bilan ustma-ust tushadimi yoki bu grafikni noto'g'ri chizish orqali yuz berdimi, aniqlab olish kerak. Agar chiziq daragasi va chegara chizig'i o'zaro parallel bo'lsa ya'ni chiziq daragasi o'zgaruvchilari oldidagi koeffisientlar $x_1+x_2=8$ chegara chizig'i $Z=3x_1+3x_2$ koeffisientlariga proportsional bo'lsa, bu savolga javob to'g'ri bo'ladi.

2) Masalani geometric usulda yechish 2.5.6-rasmda ko'rsatilgan. Bundan ko'rinib turibdiki, chiziq daragasini chiziqli funksiyaning kamayish yo'nalishi bo'yicha joylashtirilsa (ya'ni $\overline{q}$ vektorning yo'nalishiga teskari), bu holda u hamma vaqt yechimlar ko'p burchagini kesib o'tadi, bundan kelib chiqadiki, chiziqli funksiya cheksiz kamayadi.

Shunday qilib, chiziqli funksiyaning optimali yo'q, ya'ni $Z_{min}=-\infty$.

Chiziqli programmalashtirish masalasini geometric usul bilan yechishda masalaning sharti bir-biri bilan qarama-qarshi bo'lishi mumkin, ya'ni cheklanishlar sistemasining mumkin bo'lgan yechimlar sohasi bo'sh to'plamni tashkil qiladi. Ma'lumki, bunday masalalarning optimal yechimi mavjud emas va bunday masalalarda chiziq darajasini yasash ma'noga ega emas.

Qaralgan holatlardan tashqari mumkin bo'lgan yechimlar sohasi ko'p burchak bilan chegaralangan bo'lsa ikkita holat bo'lishi mumkin: mumkin bo'lgan yechimlar sohasi ochiq va mumkin bo'lgan yechimlar sohasi mavjud emas.

Qaralgan chiziqli programmalashtirish masalasini geometric usul bilan yechish juda ko'p afzalliklarga ega. U oddiy, ko'rinarli, javobni tez va osonlik bilan olishga yo'rdam beradi.

3.2. Chiziqli programmalashtirish masalasini simpleks usuli bilan yechish

Simpleks usuli har qanday chiziqli programmalashtirish masalasining optimal yechimini topishga xizmat qiluvchi eng universal usullardan biridir.

Bu usulning o'ziga xos xususiyati shundan iboratki, bunda masalaning shartiga kiritiladigan turli xil miqdorlarning bir xil o'lchamda berilishi talab qilinmaydi, ya'ni ishlab chiqarish resurslari va xarajat koeffitsiyentlari masalani yechishda o'zlariga xos bo'lgan o'lchamlarda: gektarda, odam-kuni, traktor-smenada, sentnerda, so'mda v.h.larda ishlatiladi. Bu masalaning shartiga ishlab chiqarish natijasiga u yoki bu darajada ta'sir qiluvchi turli omillarni kiritishga imkon beradi. Bir masalaga turli miqdorlarni kiritish imkoni simpleks usuli bilan yechiladigan masalalar doirasini kengaytiradi.

Iqtisodiyot sohasida bu usul bilan ko'p masalalarni yechish mumkin. Ulardan eng asosiylari-qishloq va suv xo'jaligi korxonalarining optimal ixtisoslashuvini, chorva mollarini oziqlantirish uchun optimal ratsion hisoblash, ishlab chiqarishni joylashtirishning optimal rejasini tuzish va boshqalar.

<u>Simpleks usuli algoritmi.</u> Quyidagi chiziqli programmalashtirish masalasini yechish talab qilinsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (3.2.1)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \qquad (3.2.2)$$

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n. \qquad (3.2.3)$$

Bu masalani kanonik shaklga keltirib olinadi. Ya'ni tengsizliklar sistemasini tenglamalar sistemasiga keltiramiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \end{cases} \qquad (3.2.4)$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m} \geq 0 \qquad (3.2.5)$$

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max. \qquad (3.2.6)$$

Masalani standart shaklga keltiramiz, buning uchun tenglamalar sistemasini qo'shimcha o'zgaruvchilarga nisbatan echamiz:

$$\begin{cases} x_{n+1} = b_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) \\ x_{n+2} = b_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n+m} = b_m - (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n) \end{cases} \qquad (3.2.7)$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m} \geq 0 \qquad (3.2.8)$$

$$Z = 0 - (c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n) \rightarrow \max. \qquad (3.2.9)$$

Simpleks usuli algoritmi

Masalani bu usul bilan yechish uchun simpleks jadval deb ataluvchi jadvalni tuzamiz: uning umumiy ko'rinishi 1-simpleks jadval keltirilgan:

1-simpleks jadval

Bazis o'zgaruvchilar	Ozod hadlar	Bazis bo'lmagan o'zgaruvchilar					
		$-x_1$	$-x_2$	...	$-x_k$	...	$-x_n$
x_{n+1}	b_1	a_{12}	...	a_{1k}	...	a_{1n}	a_{1n}
x_{n+2}	b_2	a_{22}	...	a_{2k}	...	a_{2n}	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_1	$b_1 \rightarrow$	a_{12}	...	a_{1k}	...	a_{1n}	a_{1n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{n+m}	b_m	a_{m2}	...	a_{mk}	...	a_{mn}	a_{mn}
Z	$Z^0 = 0$	$-c_2$	...	$-c_k$	...	$-c_n$	$-c_n$

↑

Bu jadvalda asosiy ustun va asosiy qatorlar topiladi.

Quyidagi ta'riflarni kiritamiz.

1-ta'rif: *Asosiy ustun* deb chiziqli funksiya qatorining eng kichik manfiy elementi turgan ustuniga aytiladi.

2-ta'rif: *Simpleks munosabat* deb ozod hadlaming mos keluvchi hal qiluvchi ustun elementlariga musbat nisbatiga aytiladi.

3- ta'rif: *Asosiy qator* deb eng kichik simpleks munosabatga ega bo'lgan qatorga aytiladi.

4- ta'rif: Simpleks jadvalning *asosiy elementi deb* hal qiluvchi ustun va hal qiluvchi qator kesishmasida turgan elementga aytiladi. Jadvaldan masalaning tayanch yechimni topamiz:

$x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ bo'lganligi uchun

$x_{n+1} = b_1, \quad x_{n+2} = b_2, ..., \quad x_{n+m} = b_m$ bo'ladi.

Maqsad funksiya qiymati esa, yuqoridagilarga asosan $Z^0 = 0$ bo'ladi.

Agar tuzilgan simpleks jadval optimal bo'lmasa u holda navbatdagi jadval tuziladi.

Navbatdagi simpleks jadvalni tuzish qoidasi quyidagicha bo'ladi:

Buning uchun avvalo quyidagi munosabatlarni aniqlaymiz:

1) $x_l \leftrightarrow x_k$ ekanligini, bu erda x_l –asosiy qator elementlari, x_k –asosiy ustun elementlari, ularning joylari almashtiriladi;

2) asosiy element o'rniga uning teskarisi $a'_{lk} = \dfrac{1}{a_{lk}}$ yoziladi. a'_{lk} –to'ldirilayotgan jadval elementi, a_{lk} -avvalgi jadval elementi;

3) Asosiy ustun elementlari(asosiydan tashqari) asosiy elementga bo'linadi va teskari ishora bilan olinadi:

4) $a'_{ik} = -\dfrac{a_{ik}}{a_{lk}}, \quad i \neq l; \quad c'_k = \dfrac{c_k}{a_{lk}}$

5) Asosiy qator elementlari (asosiydan tashqari) asosiy elementga bo'linadi:

6) $a'_{lj} = \dfrac{a_{lj}}{a_{lk}}, \quad j \neq k; \quad b'_l = \dfrac{b_l}{a_{lk}}$

7) Qolgan barcha elementlar «to'rt burchak» usuli bo'yicha topiladi:

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij}a_{lk} - a_{ik}a_{lj}}{a_{lk}}$$

$$b'_i = \frac{b_i a_{lk} - b_l a_{ik}}{a_{lk}}; \quad c'_j = \frac{-c_j a_{lk} + c_k a_{lj}}{a_{lk}}, \quad i \neq l; \quad j \neq k;$$

$$Z' = Z^0 - \frac{c_k b_l}{a_{lk}}.$$

Yuqoridagi munosabatlarga asosan ikkinchi simpleks jadvalni tuzamiz:

2-simpleks jadval

Bazis o'zgaruvchilar	Ozod hadlar	Bazis bo'lmagan o'zgaruvchilar					
		$-x_1$	$-x_2$	...	$-x_k$	...	$-x_n$
x_{n+1}	b'_1	a'_{11}	a'_{12}	...	$\vdots$	...	a'_{1n}
x_{n+2}	b'_2	a'_{21}	a'_{22}	...	$\vdots$	...	a'_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_l	$\dfrac{b_l}{a_{lk}}$	$\dfrac{a_{l1}}{a_{lk}}$	$\dfrac{a_{l2}}{a_{lk}}$	...	$\dfrac{1}{a_{lk}}$	...	$\dfrac{a_{ln}}{a_{lk}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{n+m}	b'_m	a'_{m1}	a'_{m2}	...	$-\dfrac{a_{mk}}{a_{lk}}$	...	a'_{mn}
Z	Z'	a'_{11}	a'_{12}	...	$\vdots$	...	a'_{1n}

Yechimni iqtisodiy-matematik tahlili

Agar chiziqli funksiya qatori barcha elementlari manfiy bo'lmasa(ya'ni $c_j' \geq 0, \quad j = \overline{1,n}$), u holda bu jadval bo'yicha aniqlangan yechim optimal yechim deb aytiladi. Aks holda, navbatdagi simpleks jadval tuziladi va jarayon davom ettiriladi. Barcha c_j' lar musbat bo'lmaguncha bu jarayon davom ettiriladi. Agar biron-bir simpleks jadvalda biron bir simpleks munosabat mavjud bo'lmasa, bu masala yechimga ega bo'lmaydi.

Misol. ***Optimal almashlab ekishni tashkil etish masalasini simpleks usuli bilan yechish.***

Masalaning qo'yilishi. Qishloq xo'jalik yerlarining hosildorligini oshirishning asosiy masalalaridan biri xo'jalikda almashlab ekishni tashkil qilishdir. Bu masalaning matematik modeli bizga xo'jalikda almashlab ekishni optimal rejalashtirishni dalada tajriba qilib o'tirmasdan, bir tomondan resurslarni, boshqa tomondan vaqtni tejashga yordam beradi. Masalani oddiy ravishda bayon qilish uchun biz xo'jalikda almashlab ekishni iqtisodiy matematik modelini tuzish natijasida berilgan tavsiya asosida tashkil qilingan almashlab ekishni qarab chiqamiz. Shunday qilib, xo'jalik quyidagi qishloq xo'jalik mahsulotlarini: paxta, kuzgi bug'doy, bahorgi bug'doy, kuzgi arpa, qand lavlagi, ko'p yillik o'tlar yetishtiradi.

Xo'jalikda oltita almashlab ekish dalasi tashkil qilingan bo'lib, almashlab ekish dalasidagi ekinlarning ulushi 3.2.1-jadvalda keltirilgan. 3.2.2-jadvalda har bir almashlab ekish dalasining 1 gektaridan olinadigan qishloq xo'jalik mahsulotlari va sarf qilinadigan resurslar normasi keltirilgan. Almashlab ekishni rejalashtirish natijasida xo'jalikda eng ko'p mahsulot yetishtirilsin.

Obyekt va matematik modelning belgilari orasida munosabatlar o'rnatish uchun quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

a_{ij} -1ga yer uchun i-turdagi resursning j-turdagi ekin uchun sarf qilingan normasi. Obekt va matematik modelning belgilari orasida munosabatlar o'rnatish uchun quyidagi belgilashlarni kiritamiz: Q_t - t – ekinlar guruhidagi mahsulot ishlab chiqarishdagi zarur bo'lgan minimal o'lcham.

v_{jk} - k-almashlab ekishdagi j-ekinning ulushi, bu yerda

$$\sum_j v_{jk} = 1 \qquad 0 \le v_{jk} \le 1 \qquad (3.2.1\text{-jadval})$$

k-almashlab ekishlar soni (k=1,2,...7)

j-ekinlar turi (j=1,2,...,12), j_t -ekinlar guruhi to'plami

i-resurslar turi (i=1,2,3), t-ekinlar guruhi indeksi

x_k - k-almashlab ekish uchun ajratilgan ekin maydoni.

(3.2.1), (3.2.6) masala almashlab ekishni optimal tashkil qilish masalasi-obektning matematik modelidan iboratdir.

Matematik nuqtai nazardan bu masala chiziqli programmalashtirish masalasiga kiradi. Bu masalani yechishning eng ko'p tarqalgan usullaridan biri, simpleks usuli hisoblanadi. (3.2.1), (3.2.6) modelga 3.2.2-jadval malumotlarini qo'yib, masalaning sonli ko'rinishini hosil qilamiz.

3.2.1-jadval

Ekinlar	Almashlab ekish dalalari						
	k / j	I	II	III	IV	V	VI
Paxta	1	0,2	0,125	-	0,1	0,25	-
Kuzgi bug'doy	2	0,2	0,125	0,15	0,1	-	0,25
Bahorgi bug'doy	3	0,1	0,125	0,15	0,1	-	0,2
Kuzgi arpa	4	0,1	0,125	0,15	0,1	0,25	-
Qand lavlagi	5	0.1	0.125	-	0.1	0.25	0.2
Ko'p yillik o'tlar:							
Xashak	6	0.05	0.08	0.15	0.1	-	0.2
Ko'k ozuqa	7	0.05	0.08	0.15	0.1	-	0.2
Pichan	8	0.05	0.08	0.15	0.1	-	-
Don uchun	9	0.05	0.08	0.15	0.1	-	-
Dam beril-gan yer	10	0.1	0.125	-	0.1	0.25	-

C_{jk} - k-almashlab ekishdagi 1ga j- tur ekinni ekish **samaradorligi.**

B_i -i-turdagi resurslarning hajmi.

B_{jk} -k-almashlab ekishdagi i-ekinning hosildorligi.

U holda cheklanish tengsizliklari quyidagicha bo'ladi. Almashlab ekish dalalari uchun ajratilgan ekin maydoni bo'yicha:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{17}x_6 \le B_1 \qquad (3.2.1)$$

Texnikadan foydalanganlik uchun sarf qilingan harajatlar bo'yicha:

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{27}x_6 \le B_2 \qquad (3.2.2)$$

Ishchi kuchlaridan foydalanishda sarf qilingan harajatlar bo'yicha:

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + ... + a_{37}x_6 \le B_3 \qquad (3.2.3)$$

Yetishtiriladigan mahsulotning maksimum miqdori :

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_6x_6 \to \max \qquad (3.2.4)$$

bo'ladi. Shunday qilib almashlab ekishni tashkil qilish masalasining ko'rinishi umumiy holda quyidagicha bo'ladi.

Shunday $x_1, x_2, ..., x_n$ larni topish kerakki, natijada maqsad funktsiya

$$Z = \sum_K \sum_j c_{jk}\gamma_{jk}x_k \qquad (3.2.5)$$

maksimal bo'lsin va quyidagi tengsizliklarni qanoatlantirsin.

$$\sum_K \sum_j f_{jk}\gamma_{jk}x_k \le B_i\,(i = 1,......,I),$$

$$\sum_K \sum_{j\in J_t} b_{jk}\gamma_{jk}x_k \begin{pmatrix}\ge\\ =\end{pmatrix} Q_t\,(t = 1,......,T), \qquad (3.2.6)$$

$$x_k \ge 0,$$

3.2.2-jadval

Ko'rsatkichlar	K j	Almashlab ekish dalalari						Resurs hajmi
		I	II	III	IV	V	VI	
1ga almashlab ekish dalasiga sarf qilingan: haydaladigan yer	1	1	1	1	1	1	1	2270
Texnika xarajatlari (t.s)	2	1,42	1,36	1,52	1,26	2,21	1,7	4120
Mehnat xarajatlari (o.-s.)	3	16,3	15,1	17,4	13,7	29,3	16	45300
1ga almashlab ekish dalasida yetishtirilgan mahsulot narxi (sh.b)		87,7	90,5	89,6	84,4	155	74	-

Modelga 3.2.2-jadval ma'lumotlarini qo'yib quyidagilarni hosil qilamiz.

Shunday $x_1, x_2, ..., x_n$ nomalumlarni topish kerakki, natijada

$$Z = 87{,}7x_1 + 90{,}5x_2 + 89{,}6x_3 + 84{,}4x_4 + 155x_5 + 74x_6 \to \max \quad (3.2.7)$$

bo'lsin va quyidagi cheklanish sistemalarini qanoatlantirsin:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 2270$$

$$1{,}42x_1 + 1{,}36x_2 + 1{,}52x_3 + 1{,}26x_4 + 2{,}21x_5 + 1{,}69x_6 \leq 4120 \qquad (3.2.8)$$

$$16{,}38x_1 + 15{,}14x_2 + 17{,}39x_3 + 13{,}70x_4 + 29{,}27x_5 + 16{,}1x_6 \leq 45300$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Obektning model bilan yaqinlik darajasi Fisher kriteriyasi orqali tekshiriladi. Modelda obektning elementlari va matematik miqdorlar orasidagi munosobatlar o'rnatishning malum qonuniyatlari ishlatilgan bo'lgani uchun modelning mos kelishini tekshirishga zaruriyat qolmaydi.

Agar modelga qo'shimcha omillar kiritilsa, modelda obekt to'liqroq tasvirlangan bo'ladi.

Masala yechimining tahlili.

Yuqorida keltirilgan obektning modeli uchun berilgan sonli misol simpleks usulida yechilgan iteratsiyalar soni 3 ta. Interatsiyaning 3-chi qadamida optimal reja hosil qilingan. Bu reja bo'yicha quydagilar hosil qilingan.

1. Almashlab ekish dalasi uchun optimal ekin maydoni .

$x_4 = 1357{,}9$ga 4-almashlab ekish dalasi maydoni;

$x_5 = 912$ ga 5-almashlab ekish dalasi maydoni;

2. Ishchi kuchlari va ekin maydonlari to'liq ishlatilgan.

3. 1548 birlik texnika ishlatilmasdan qolayapti.

4. Qishloq xo'jalik mahsulotlarini sotishdan kelgan tushum 255980.5 sh.b ni tashkil qiladi.

3.2.1 - jadvaldan foydalanib, almashlab ekish dalalarining optimal variantini aniqlaymiz:

paxta uchun ajratilgan ekin maydoni

$$0{,}1 \cdot 1357 + 0{,}25 \cdot 913 = 363{,}95 \quad \text{ga.}$$

Xuddi shuningdek boshqa ekinlar uchun ajratilgan ekin maydonlarini ham hisoblash mumkin.

3.3. Chiziqli programmalashtirish masalasini taqsimot usuli bilan yechish

Taqsimot usuli bilan o'zgaruvchilari bir xil o'lchov birligida berilgan chiziqli programmalashtirish masalasining ko'plab masalalarini yechish mumkin. Bunday masalalarni simpleks usulida ham yechish mumkin, lekin taqsimot usuli yechish jarayonini ancha osonlashtiradi. Taqsimot usuli bilan ko'pincha yuklarni tashish bilan bog'liq bo'lgan masalalar yechilganligi uchun, buni transport masalasi deb ham atashadi. Transport masalasining mohiyati eng kam transport xarajati sarf qilib, ma'lum bir yuklarni ishlab chiqarish punktidan iste'mol punktiga yetkazishdir.

Masalani bu usul bilan yechish quyidagi bosqichlardan iborat:

1). Dastlabki ma'lumotlarni yig'ish;

2). Dastlabki matritsani tuzish;

3). Dastlabki o'rinli rejani topish;

4). Topilgan rejani optimallikka tekshirish;

5). Optimal reja topilguncha yechimni yangilab borish.

Transport masalasining matematik modeli quyidagidan iborat: m ta ishlab chiqarish korxonasi va undagi mahsulot zaxirasi a_i va n ta iste'mol korxonalari va ulardagi mahsulotga bo'lgan talab b_j bo'lsin hamda har bir yonalish bo'yicha tashilayotgan yuklarning narxi c_{ij} aniq bo'lsin u holda tashilayotgan yuklarning miqdori $(x_{11}, x_{12}, ..., x_{ij}, ..., x_{mn})$ larni aniqlash kerak.

Transport masalasining matematik modeli esa, quyidagicha bo'ladi:

A) Zaxiralar bo'yicha cheklanish:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i = 1,2,...m. \; (3.3.1)$$

b) Talablar bo'yicha cheklanish.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_j \qquad j = 1,2,...n \qquad (3.3.2)$$

v) Ishlab chiqarilgan mahsulotlar zaxirasi unga bo'lgan talabga teng bo'lsin.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (3.3.3)$$

g) o'zgaruvchilar miqdori manfiy bo'lmasligi kerak. $x_{ij} \geq 0$; Mahsulot tashishning shunday rejasini tuzish kerakki, u holda transport xarajati eng kam miqdorda sarf qilinsin:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \qquad (3.3.4)$$

Transport masalasini jadval ko'rinishida ham ifodalash mumkin (3.3.1-jadval).

3.3.1-jadval

Resurs iste'molchilari / Resurs manbalari	1	2	...	j	...	n	Mavjud resurslar
1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	...	x_{1j} c_{1j}	...	x_{1n} c_{1n}	a_1
2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	...	x_{2j} c_{2j}	...	x_{2n} c_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...	...	...
i	x_{i1} c_{i1}	x_{i2} c_{i2}	...	x_{ij} c_{ij}	...	x_{in} c_{in}	a_i
...	...	...	...	...	...	...	...
m	x_{m1} c_{m1}	x_{m2} c_{m2}	...	x_{mj} c_{mj}	...	x_{mn} c_{mn}	a_m
Resurslarga bo'lgan talab	b_1	b_2	...	b_j	...	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i$ / $\sum_{j=1}^{n} b_j$

Masalaning qo'yilishida ikki hol bo'lishi mumkin: agar (3) shart bajarilsa, transport masalasi yopiq, bajarilmasa ochiq deb yuritiladi.

Yopiq masala m,n o'zgaruvchilarga ega, ya'ni band bo'lgan kataklar soni $m+n-1$ bo'lishi kerak.

Transport masalasining *mumkin bo'lgan yechimlari* deb shunday x_{ij} $(i=1,2,...,m,\ j=1,2,...n)$ yechimlar majmuasiga aytiladiki, bular uchun barcha cheklanishlar bajarilishi kerak. Maqsad funktsiya minimal(maksimal) qiymatga erishuvi mumkin bo'lgan yechimga *optimal yechim* deb aytiladi. *Bazis yechimlar* esa x_{ij} noldan farqli $m+n-1$ dan ko'p bo'lmagan mumkin bo'lgan yechimlardan iborat bo'lib, qolganlari nolga tengdir. Masalaning matritsa ko'rinishida x_{ij} lar noldan farqli bo'lgan kataklarga *band* kataklar deb aytiladi, qolganlari esa, *bo'sh* kataklar deb aytiladi.

Transport masalasining aniq tayanch yechimining tuzilishi va uning yechilish usuli tanlanishi muhimdir.

Dastlabki rejani tuzishning quyidagi usullari mavjud:

1. *Eng kichik xarajat,*
2. *Shimoli-g'arb burchak usuli,*
3. *Approksimatsiya usullari.*

Iqtisodiy masalalarini yechishda ko'p qo'llaniladigani *eng kichik xarajat va approksimatsiya usullaridir.*

Eng kichik xarajat usulining algoritmi quyidagicha:

Matritsa kataklarida joylashgan c_{ij} lar ichidan eng kichigini topamiz va shu katakka a_i ni olib borib qo'yamiz agar $a_i \le b_j$ shart bajarilsa, yoki b_j ni qo'yamiz, agar $b_j \le a_i$ shart bajarilsa . Undan keyin navbatdagi eng kichik c_{ij} ni topib a_i, b_j lar dan biri olib borib qo'yiladi va barcha yuklar taqsimlanmaguncha jarayon davom ettiriladi.

Approksimatsiya usulining algoritmi esa quyidagichadir: har bir satr va ustundan eng kichik c_{ij} hamda ularning ayirmasi $\mu_i(\mu_j)$ topiladi. Ana shu ayirmalarning eng kattasi hisoblangan R_μ ajratib olinadi va uning qaysi qator yoki ustunga tegishli ekanligi tekshiriladi hamda eng kichik c_{ij} joylashgan katakka mumkin bo'lgan yuk olib borib qo'yiladi. O'sha ustun masala yechimini topishni davom ettirishda boshqa qatnashmaydi.

Approksimatsiya usuli bilan masala tayanch yechimini topishda quyidagi holatlarga duch kelish mumkin. Agar bir nechta bir xil R_μ ayirmalar mavjud bo'lsa, $c_{ij}^{\min}$ *minimal qiymat turgan* kataklarga asosiy e'tibor qaratiladi. Agar $c_{ij}^{\min}$ kataklar bir qancha bo'lsa, yechim uchun eng katta miqdorli yukni olib borish mumkin bo'lgan katak olinadi.

Bu usullar bilan tanishish uchun quyidagi jadval ko'rinishida berilgan masalani shu usullar bilan yechish jarayonini ko'rib chiqamiz.

3.3.2 – jadval

Iste'mol korxona. / I/ch korx.	1	2	4	Yuklar zaxirasi, a_i
1	1 x_{11}	5 x_{12}	8 x_{13}	100
2	6 x_{21}	15 x_{22}	7 x_{23}	200
3	24 x_{31}	2 x_{32}	18 x_{33}	300
Yuklarga bo'lgan talab b_j	120	90	390	280

Jadvalda keltirilgan masalaning matematik modeli tuziladi keyin uni approksimatsiya usuli bilan tayanch yechimi aniqlanadi.

Bu masala matematik modelining kengaytirilgan ko'rinishi quyidagichadir.

1. Ishlab chiqarish korxonalari uchun:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 100$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 200$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 300$$

2. Iste'mol korxonalari uchun:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 120$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 90$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 390$$

3. Maqsad funksiyasining ko'rinishi:

$$z = 1 \cdot x_{11} + 5 \cdot x_{12} + 8 \cdot x_{13} + 6 \cdot x_{21} + 15 \cdot x_{22} + 7 \cdot x_{23} + 24 \cdot x_{31} + 2 \cdot x_{32} + 18 \cdot x_{33} \to \min$$

O'zgaruvchilar manfiy bo'lmasligi kerak, ya'ni

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33} \geq 0$$

Masalaning matritsasiga ayirmalarni hisoblash uchun qo'shimcha satr va ustun kiritiladi. Avvalo birinchi ayirma hisoblanadi. Birinchi satrdagi c_{11}, c_{12}, c_{13} ning qiymatlaridan, ya'ni 1, 5, 8 dan ikkita eng kichigini tanlab olamiz.

$c_{11}=1, c_{12}=5$ va ularning ayirmasi $\mu=4$ topiladi. Ustun bo'yicha $\mu=6-1=5$ ni topamiz. Xuddi shunday yo'l bilan qolgan satr va ustunlar ham hisoblanadi. Keyin hamma ayirmalar ichidan eng kattasi tanlanadi. Demak ayirmalar (5, 3, *1*, 4, *1*, *16*) *ning eng kattasi 16 soni* 3-qatorga tegishlidir. Shuning uchun bu qatordagi c_{ij} larning eng kichigi turgan katakka (x_{32}) mumkin bo'lgan yuk olib borib qo'yiladi ($x_{32}=90$). 2- ustundagi c_{ij} ning qiymatlari masalani yechishda boshqa qatnashmaydi va yangi ayirmalar topiladi. Barcha yuklar to'liq taqsimlanmaguncha algoritm takrorlanaveradi.

3.3.3-jadval

Iste'mol korxonalari / I/ch korxonalari	1	2	4	Yuklar zaxirasi, a_i	Qatorlar ayirmasi, μ_i
1	1 100	5	8	100	4 7 -
2	6 20	15	7 180	200	1 1 1
3	24	2 90	18 210	300	16 6 6
Yuklarga bo'lgan talab, b_j	120	90	390	600	
Ustunlar ayirmasi, μ_j	5 5 18	3 - -	1 1 11		

Dastlabki reja tuzildi. Shu tuzilgan rejani optimallik bo'yicha tekshirish kerak. Agar tuzilgan reja optimal bo'lmasa, optimallikkacha davom ettirish kerak. Rejani optimallikkacha yetkazish uchun potentsiallar usulidan foydalaniladi.

Buning uchun 3.3.3-jadvalga yana bittadan satr va ustun α_i va β_j ($i=1,2,....,m;\ j=1,2,...,n$) larni hisoblash uchun qo'shiladi.

Ular quyidagi formula asosida topiladi.

$$\alpha_i + c_{ij} \le \beta_j, \qquad (3.3.5)$$

Yuqoridagi shartlar hamma band bo'lgan kataklar uchun bajariladi. Bu shartlarni barcha $x_{ij} = 0$ bo'lgan kataklar uchun yozish mumkin. Birinchi potentsialga ixtiyoriy qiymat beriladi. Qulaylik uchun va manfiy potentsiallar bo'lmasligi uchun ularning birinchisiga eng katta c_{ij} dan kattaroq bo'lgan qiymat beriladi.

Minimum qiymatga yechiladigan masalalar band bo'lgan kataklar uchun $\alpha_i + c_{ij} \ge \beta_j$ shart bajarilganda optimal hisoblanadi.

Masala optimal bo'lmasa, uni optimallashtirish kerak. Buning uchun optimallik sharti bajarilayotgan kataklarga ko'pburchak chiziladi.

Ko'pburchakni chizish va rejani quyidagicha yangilash mumkin:

I. ko'pburchakning tomonlari to'g'ri burchak bo'yicha kesishishi va jadvalning qator va ustunlari bo'yicha joylashishi kerak;

II. ko'pburchakning uchi dastlabki berilgan bitta kattakdan tashqari band bo'lgan katakda bo'lishi kerak;

III. berilgan katakda yotgan ko'pburchakning uchiga (+) ishorasi qo'yiladi, keyinchalik ishora (-)ga almashadi;

IV. manfiy uchli kataklarda joylashgan barcha yuklarning ichidan eng kichik x_{min} tanlab olinadi va u manfiy ishorali kataklardagi x_{min} yukdan ayriladi va musbat ishorali kataklardagi x_{min} yukka qo'shiladi.

-	2 10	 1	+tekshirilayotgan katak
+	3 22	7 8	-yangilanayotgan reja

2 2	1 8	
3 30	7	yangilangan reja

Rejani yangilash $\sum_{ij} = \alpha_i + c_{ij} - \beta_j$ soni absolyut qiymati bo'yicha eng katta bo'lgan bo'sh katakdan boshlanadi. Har bir yangilanishdan keyin maqsad funktsiyaning qiymati quyidagi formula bo'yicha hisoblanadi.

$$z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}, \quad (3.3.6)$$

$$z = \sum_{j=1}^{n}\beta_j b_j - \sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_i \quad (3.3.7)$$

Agar reja to'g'ri yangilangan bo'lsa, har safar maqsad funktsiyaning qiymati kichiklashib boradi.

Potentsiallar usuli bilan masalani maksimumga yechish.

Dastlabki tayanch yechimni maksimal element usulidan foydalanib birinchi navbatda eng katta qiymatli c_{ij} lar uchun to'ldiriladi;

Agar bo'sh kataklar uchun quyidagi munosabat $\alpha_i + c_{ij} \leq \beta_j$, bajarilsa reja optimal hisoblanadi.

Har bir yangilanishdan keyin maqsad funktsiyaning qiymati o'sishi kerak;

Boshqa barcha amallar masalani minimumga yechgandek yechiladi.

Masalani approksimatsiya usuli bilan maksimumga yechish.

Har bir qator va ustun bo'yicha C_{ij} ning eng katta qiymati aniqlanadi;

Ularning ayirmasi μ_i μ_j topiladi;

Barcha ayirmalar ichidan eng katta R_{μ} tanlanadi;

Eng katta ayirma tegishli bo'lgan qator yoki ustundagi eng katta C_{ij} turgan katakka talab qilingan yukni olib borib joylashtiriladi;

Agar R_{μ} eng katta ayirmalar bir nechta bo'lsa u holda eng katta qiymatli c_{ij}^{max} bo'lganlarga asosiy e'tibor beriladi.

Buzilgan masalalar. Agar to'ldirilgan kataklar soni $m+n-1$ dan ko'p bo'lsa , u holda reja noto'g'ri tuzilgan bo'ladi va yangi yechimlarni qidirish kerak bo'ladi. Agar band bo'lgan kataklar soni $m+n-1$ dan kam bo'lsa , u holda reja buzilgan bo'ladi.

Buzilgan rejali masalalarda yopiq ko'pburchakni qurish hamda rejani yaxshilash mumkin bo'lmaydi. Potentsiallar usulini qo'llaganda bu holatda barcha kataklar uchun α_i, β_j, larni hisoblab bo'lmaydi.

Buzilgan rejalar qoida bo'yicha barcha zaxiralar yig'indisi (a_i) talablar yig'indisi (b_j) ga teng bo'lganda va aksincha, ayrim zaxiralar va talablar bir biriga teng bo'lgan holda yuz beradi. Misol uchun:

$a_1 = b_1, a_2 = b_2; a_1 = b_1 + b_2, b_1 = a_1 + a_2$ va hokazo.

Reja buzilgan holda uni quyidagicha yaxshilash mumkin. Buning uchun bo'sh kataklardan birini shartli ravishda band deb hisoblanadi va unga $x_{ij} = 0$ qo'yiladi. Nollar soni va band bo'lgan kataklar soni birgalikda $m+n-1$ ga teng bo'lishi kerak.

3.3.4.-jadval

Iste'mol korxonalari / Ishlab chiqarish korxonalari	Potentsiallar α_i \ β_j	B_1	B_2	B_3	Yuklar zaxirasi, a_i
		12	11	10	
A_1	110	2 100 -	1 200 +	8 (0)	300
A_2	-6	6 +	5	16 - 100	100
A_3	8	7	3 -(0)	2 100 +	100
A_4	0	21	25	10 100	100
Yuklarga bo'lgan talab, b_j		100	200	300	600

Buzilgan masalani to'g'rilash

Bu holda shartli band bo'lgan va nol katakni boshqa band bo'lgan kataklar bilan yopiq ko'pburchak tashkil qilmaydigan deb qabul qilish kerak. (3.3.4-jadval).

Bundan tashqari nolni shunday katakka qo'yish kerakki rejani yangilash paytida ko'pburchakda (+) belgisi bo'lsin. Misol uchun (2-1) katak optimal bo'lmasa va (3-2) katakda nol turgan bo'lsa ko'p burchak qurish paytida oxirgisiga (-) belgisi qo'yiladi va yukni qayta taqsimlab bo'lmaydi. Bu holda nolinchi katak sifatida (1-3) katakni olish kerak.

Transport masalasining ochiq modeli. Agar yuklar zaxirasi va ularga bo'lgan talab bir biriga teng bo'lmasa ya'ni $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$ *bo'lsa* transport masalasi ochiq deb aytiladi.

3.3.5.-jadval

Iste'mol korxonalari / Ishlab chiqarish korxonalari	Potentsiallar β_j / α_i	B_1	B_2	B_3	Yuklar zaxirasi, a_i
		12,6	12,9	20	
A_1	10.0	2.6 280	2,9 840	10,0 80	1200
A_2	10,1	2,5	2,7	4,1	390
A_3	15,2	2,8	3,0	4,8 280	280
A_4	29.0	0	420	0	420
Yuklarga bo'lgan talab b_j		670	1260	360	2290 / 2290

Masalani yopiq ko'rinishga olib kelish

Bunday masalani yechish uchun qo'shimcha ishlab chiqarish korxonasi va iste'mol korxonalarini qo'shish orqali uni yopiq masala ko'rinishiga olib kelinadi ya'ni a_{m+1} yoki b_{n+1} .

$$a_{m+1}=\sum_{j=1}^{n}b_j-\sum_{i=1}^{m}a_i;\qquad b_{n+1}=\sum_{i=1}^{m}a_i-\sum_{j=1}^{n}b_j. \qquad (3.3.8)$$

Bunday holda qo'shimcha punktlarda yuklarni tashish narxini nolga teng deb olinadi. (3.3.5-jadval).

Shunga e'tibor berish kerakki, masalani minimum yoki maksimumga yechish paytida qo'shimcha korxona katagi c_i $n+1$ (i = 1, 2, ..., *m)* =0 bo'ladi yoki c_j,$m+1$ (j=1, 2,..., *n)* oxirgi navbatda to'ldiriladi.

Masalani optimal reja matritsasidan foydalanib yechish variantlari. Bu holda quyidagilarni topish mumkin: yangi optimal yechimni(optimal rejada maqsad funksiya qiymati bu holda o'zgarmaydi); maqsad funktsiya qiymatini o'zgartirish orqali yangi yechimni topish mumkin.

Hosil qilingandandan tashqari optimal yechim mavjud bo'lish sharti biror bir bo'sh katak uchun quyidagi tenglik: $\alpha_i+c_{ij}=\beta_j$ yoki

$$\sum ij=(\alpha_i+c_{ij})-\beta_j=0 \qquad (3.3.9)$$

shart bajarilishini talab qiladi.

(3.3.9) shartni bajarilishi bilan yangi alternativ yechimni hosil qilish uchun bo'sh katakka reja ulushini ko'chirish orqali yangi sikl quriladi.

Masala yechimining oxirida qo'shimcha shartlarni hisobga olish kerak bo'lsa optimal rejaga o'zgartirish kiritish zarurati tug'ilishi mumkin. Bunday holda qo'shimcha cheklanishlar orqali masalani qaytadan yechish shart bo'lmaydi, o'zgartirish kiritish esa optimal reja matritsasida olib boriladi.

Aytaylik quyidagi optimal yechim hosil qilingan bo'lsin (3.3.6- jadval). Jadvalda maqsad funktsiya qiymati minimal, Z = 129100. (2-3) kataklar uchun $\sum ij$ = 10 + 3 - 13 == 0, bu hech bo'lmaganda yana bitta optimal yechim mavjud degani (3.3.7- jadval).

Bu optimal yechimda ham maqsad funktsiya qiymati 129100 (Z=129100) ga teng.

Optimal yechim tahlili (3.3.6-jadval) shuni ko'rsatadiki, yana eng kamida

5 ta optimal yechim hosil qilish mumkin. 3.3.5-jadvalni hisobga olmaganda).

3.3.6-jadval

Iste'mol korxonalari / Ishlab chiqarish korxonalari	Potentsiallar	B_1	B_2	B_3	Yuklar zaxirasi, a_i
	β_j / α_i	12	11	13	
A_1	10	2 13000	3	5	13000
A_2	10	2 2000	1 7300 -	3 +	9300
A_3	8	4 12000	8	9	12000
A_4	7	7	+ 2700	- 6 5500	8200
Yuklarga talab b_j,		27000	10000	5500	42500 42500

Optimal reja (1-variant)

Bo'sh kataklarni tahlil qilamiz:

$\sum 12 = 10+3-11= 2$ $\qquad \sum 33 = 8 + 9-13 = 4,$

$\sum 13 = 10+5-13=2$ $\qquad \sum 41 = 7+7-12= 2,$

$\sum 32 = 8+8-11= 5$ $\qquad \sum 43= 7+6-13=0.$

Agar rejani (1-2) katakka joylashtirsak transport xarajatlari 3600(1800*2) ga oshadi, (1-3)-da 11000 ga (2 • 5500), (3-2) - da 9000 ga (1800 • 5), (3-3) - da 22000 ga (5500 • 4), (4-3) - da 4000 ga (2000 • 2).

Masala yechimining natijalariga o'zgartirish kiritish paytida ishlab chiqarish va iste'mol korxonalari o'rtasida resurslarni qayta taqsimlash zarurati tug'lishi mumkin. Misol uchun A_2 korxonasida zaxira 9200 ni, A_3 da esa 12100 ni tashkil qiladi. Bunday holda yuklar band bo'lgan kataklar o'rtasida qayta taqsimlanadi. Demak (2-1) katakda 1900, (3-1) katakda esa 12100 bo'ladi. Masala minimum qiymat uchun echilayotganda maqsad funksiya qiymati

$[(c_{31}-c_{21})*100]$ yoki $[(\alpha_2-\alpha_3)*100]$ ga teng bo'lib, *200 (100*2)* ni tashkil qiladi.

3.3.7-jadval

Iste'mol korxonalari / Ishlab chiqarish korxonalari	Potentsiallar	B_1	B_2	B_3	Yuklar zaxirasi, a_i
	β_j / α_i	12	11	13	
A_1		2 13000	3	5	13000
A_2	10	2 2000	1 1800	3 5500	9300
A_3	8	4 12000	8	9	12000
A_4	7	7	4 8200	6	8200
Yuklarga talab b_j		27000	10000	5500	42500 42500

Optimal reja (2-variant)

Band bo'lgan va band bo'lmagan kataklar orasida yuklarni qayta taqsimlaganda, ya'ni yangi yo'nalishni tashkil qilganda ham maqsad funktsiyaning qiymati oshadi. Agar (2-2) katakda yuk miqdori 1700 ga teng bo'lsa , (3-2)da esa 100 bo'lsa , maqsad funktsiya qiymati $[(c_{32}-c_{22})\cdot 100]$ ga, yoki $700\cdot[(8-1)\cdot 100]$ ga oshadi.

Band bo'lgan yo'nalishlardagi talab va taklif $[(c_{32}-c_{22})\cdot 100]$ ni bir vaqtda bir birlikka oshirganda maqsad funktsiya qiymati $\beta_j-\alpha_i$ farqga, ya'ni C_{ij} ga o'zgaradi. Misol uchun, agar A_4 korxonada yuk zaxirasi 8201 bo'lsa , B_2 korxonasida talab - 10001 , u holda maqsad funktsiya qiymati 4 birlikka oshgan bo'ladi (11-7).

3.4. Ikkilangan baho asosida iqtisodiy-matematik tahlil qilish

Ikkilangan masalaning qo'yilishi. Iqtisodiyotda cheklangan yer, mehnat, pul-buyum resurslari va ishlab chiqarish fondlaridan yuqori iqtisodiy samara olish zarur. Bu yerda optimizatsiya masalalarini iqtisodiy-matematik tahlil qilish muhim ahamiyatga ega. Asosiy e'tibor resurslardan samarali foydalanishga qaratiladi.

Ikkilangan baho asosida resurslarni *bir-birlikka oshirish yoki kamaytirish* orqali maqsad funktsiya qiymatini o'zgartirish mumkin. *Har qanday chiziqli* programmalashtrish masalasiga, unga o'zaro *ikki yoqlama bo'lgan boshqa bir* chiziqli programmalashtirish masalasi to'g'ri *keladi. Berilgan to'g'ri masala* bilan unga nisbatan ikkilangan masala *o'rtasida bevosita bog'lanish mavjud,* ya'ni birining yechimidan ikkinchisinikini *topish mumkin.* Berilgan to'g'ri masala va unga *nisbatan o'zaro* ikkilangan bo'lgan masala ham biron-bir *iqtisodiy jarayonni ifoda etadi.*

Masalan, resurslardan foydalanish masalasini ko'rib chiqaylik. Biror bir korxona miqdori b_i $(i=\overline{1,m})$ birlikka teng bo'lgan *m* turdagi resurslarga ega bo'lib, bu resurslardan n turdagi mahsulot *ishlab chiqarish uchun* foydalanadigan bo'lsin: j- birlik mahsulot ishlab chiqarish uchun i -turdagi resursdan a_{ij} birlik sarflansin. Mahsulot birligining narxi c_j birlikka teng bo'lsin. Korxonaning eng ko'p daromad olish masalasini ta'minlaydigan rejasini tuzishning matematik modeli qurilsin. j-turdagi mahsulot birligining miqdorini x_j bilan belgilasak, qo'yilgan masalaning matematik modeli quyidagicha bo'ladi:

Maqsad funktsiya

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max \qquad (1)$$

va cheklanish tengsizliklari

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{n2}x_n \le b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n \le b_1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m
\end{cases}
$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 + \ldots + x_n \ge 0.$$

Endi (1)-(2) masalaga ikkilangan masalaning matematik modelini tuzamiz. Buning uchun $u_1, u_2, \ldots, u_m$ orqali i - turdagi resurs birligining narxini belgilaymiz. U holda sarf qilingan umumiy resursning narxi

$$Z = b_1u_1 + b_2u_2 + \ldots + b_mu_m \to \min \quad \text{bo'ladi.} \qquad (3)$$

Har bir j birlik mahsulot ishlab chiqarish uchun sarf bo'lgan resursning narxi, ishlab chiqarilgan mahsulot narxidan oshib ketmasligi kerak.

Masalaning matematik modeli:

$$
\begin{cases}
a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + a_{i1}u_i + \ldots + a_{m1}u_m \ge c_1 \\
a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{i2}u_i + \ldots + a_{m2}u_m \ge c_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + \ldots + a_{ij}u_i + \ldots + a_{mj}u_m \ge c_j \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \ldots + a_{in}u_i + \ldots + a_{mn}u_m \ge c_n
\end{cases}
\qquad (4)
$$

Bu (3)-(4) masalani quyidagicha talqin qilish mumkin: miqdori b_i-ga teng bo'lib, mahsulot birligining narxi c_j - ga teng bo'lganda resurs birligining narxi u_i - ni umumiy sarf eng kam bo'ladigan qilib tanlash kerak. Boshqacha aytganda (3)-funktsiyaning (4) cheklanish shartlarini qanoatlantiradigan eng kichik qiymati topilsin.

To'g'ri va ikkilamchi masalalarni taqqoslasak, ular uchun ushbu umumiylikni ko'rish mumkin:

1).To'g'ri masalada *funktsional maksimumga intilsa, ikkilamchi* masalada esa minimumga intiladi.

2).To'g'ri masalaning hamma shartlari kichik yoki teng ($\leq$), ikkilamchisiniki esa katta yoki teng ($\geq$) belgisi bilan ifodalanadi.

3).To'g'ri masalada n ta noma'lum va m ta cheklanish sistemasi mavjud bo'lsa, ikkilamchi masalada m ta noma'lum va n ta cheklanishlar bo'ladi.

4).*To'g'ri masalaning ozod* hadlari ikkilamchi masalada maqsad funktsiyani koeffitsiyentlari sifatida qatnashsa, ikkilamchi masalaning ozod hadlari to'g'ri masalaning funktsionalida koeffitsiyent bo'lib qatnashadi.

5).Ikkala masaladagi tengsizliklar koeffitsiyentlaridan tuzilgan matritsalar o'zaro transponirlangan bo'lib, birining satrlari ikkinchisining ustuni sifatida qatnashadi.

Misol. Xo'jalikda 100 ga yaylovni o'zlashtirish kerak. Buning uchun xo'jalik 9000 sh. b. da pul va 350 o. k. ajratgan. 1ga yerni yuzaki o'zlashtirish uchun 20 sh. b. moddiy pul-buyum vositalari, tubdan o'zlashtirish uchun esa 100 sh. b. pul-buyum vositalari xarajat qilinadi, qo'shimcha mehnat xarajatlari esa, mos ravishda 0.5 va 4 o. k. ni tashkil etadi.

Maqsad funktsiyaning koeffitsiyentlari sifatida 1ga yerdan chiqadigan ko'k ozuqaning miqdori qatnashadi; bu yerda ham yuzaki o'zlashtirishdan 100 s tubdan o'zlashtirishdan 300 s ko'k ozuqa olish mumkin. Maksimal miqdorda ozuqa olish yo'llarini topish kerak.

x_1 orqali yuzaki o'zlashtiriladigan yerlarini, x_2 orqali tubdan o'zlashtiriladigan yerlarni belgilaymiz.

Avvalo to'g'ri masalaning iqtisodiy matematik-modelini tuzamiz.

Maqsad funktsiya

$$Z = 100X_1 + 300X_2 \rightarrow \max$$

Cheklanishlar:

Ekin maydoni bo'yicha: $X_1 + X_2 \leq 100$

Pul-buyum vositalari bo'yicha: $20X_1 + 100X_2 \leq 9000$

Qo'shimcha mehnat sarflari bo'yicha: $0.5x_1 + 4x_2 \leq 350$

manfiy bo'lmaslik sharti: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

1. To'g'ri masalaning dastlabki simpleks jadvali.

T/b raqami	Bazis o'zga-ruvchi	C_i baho	Resurs hajmi	100 X_1	300 X_2	0 X_3	0 X_4	0 X_5
1	x_3	0	100	1	1	1	0	0
2	x_4	0	9000	20	100	0	1	0
3	x_5	0	350	0,5	4	0	0	0
m+1	$Z_j - C_j$		0	-100	-300	0	0	0

Bazis o'zgaruvchi (x), resurs hajmi (B), (a) o'zgaruvchilar oldidagi texnik-iqtisodiy koeffitsiyentlar, (C) maqsad funktsiyaning koeffitsiyentlaridan iborat. Yechish jarayonida simpleks jadvalining barcha ko'rsatgichlari o'zining son qiymati va iqtisodiy ma'nosini o'zgartiradi. Bazis bo'lmagan o'zgaruvchilar oldidagi koeffitsiyent ishlab chiqarish resurslarining sarf qilinish normasidan o'rnini bosish koeffitsiyentiga aylanadi, bu koeffitsiyent kelgusida optimal yechimni iqtisodiy tahlil qilishda va uni tuzatishda ishlatiladi. Ishlab chiqarish resurslari, ularni iste'mol qilish me'yoriga qarab mahsulotni ishlab chiqarishda asosiy bazis o'zgaruvchining qiymati bo'lib qoladi, bu o'z navbatida ishlab chiqarish hajmi, qo'shimcha o'zgaruvchilarning hisoblanganiga teng.

Yechim natijalari quyidagi oxirgi simpleks jadvalida keltirilgan

2. To'g'ri masalaning oxirgi simpleks jadvali

T/b raqami	Bazis o'zga-ruvchi	C_i baho	Resurs hajmi	100 x_1	300 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5
1	x_1	100	14.285	1	0	1.143	0	-0.286
2	x_4	0	142.862	0	0	-8.570	1	22.857
3	x_2	300	85.862	0	1	-0.143	0	0.286
m+1	$Z_j - C_j$		27142.7	0	0	71.4	0	57.151

100 ga yaylovda 14.3 ga yerni sirtdan va 87.5 ga yerni tubdan o'zlashtirish kerak. Bunday holda mehnat resurslari to'liq ishlatilayapti. Pul-buyum vositalari esa, to'liq ishlatilmasdan 142.8 birlik ortib qolayapti. Yetishtirilgan ko'k ozuqaning miqdori 27170 s bo'layapti.

Optimal reja bo'yicha $U_1 = 71.4$ va $U_2 = 57.151$ larni hosil qildik. *O'zgaruvchilarning bu qiymatlari ikkilangan masalaning* shartlarini qanoatlantiradi. Bularni dastlabki tengsizliklarga qo'yib tekshirib ko'rish mumkin. $71{,}4 + 0{,}5 \cdot 57{,}151 = 100$, $74{,}4 + 4 \cdot 57{,}151 = 300$

Endi ikkilangan masalaning iqtisodiy-matematik modelini tuzamiz. Buning uchun U_1, U_2, U_3 orqali mos ravishda yerdan foydalanish, pul-buyum vositalari va mehnat resurslari bahosini belgilaymiz.

U holda maqsad funktsiya: $Z_1 = 100U_1 + 9000U_2 + 350U_3 \rightarrow \min$

cheklanish tengsizliklari:

$$U_1 + 20U_2 + 0.5U_3 \geq 100$$

$$U_1 + 100U_2 + 4U_3 \geq 300$$

$$U_1 \geq 0,\ U_2 \geq 0,\ U_3 \geq 0$$

3.Ikkilangan masalaning dastlabki simpleks jadvali

T/b raqami	Bazis o'zga-ruvchi	C_i bahosi	Resurs hajmi	Bazis bo'lmagan o'zgaruvchilar						
				U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	Y_1	Y_2
1	Y_1	0	100	1	20	0.5	-1	0	1	0
2	Y_2	0	300	1	100	4	0	-1	0	1
m+1	$Z_j - C_j$		0	-100	-9000	-350	0	0	0	0

4. Ikkilangan masalaning oxirgi simpleks jadvali

T/b raqami	Bazis o'zgaruv-chi	C_i bahosi	Resurs hajmi	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5
1	U_1	100	71.4	1	8.57	0	1.143	-0.143
2	U_3	350	57.151	0	22.857	1	0.286	0.286
M+1	$Z_j - C_j$		27142.7	0	142.86	0	14.28	85.714

Maqsad funktsiya to'g'ri masalaning maqsad funktsiyasining maksimum qiymatiga teng bo'lgan minimum qiymatini qabul qildi. To'g'ri va ikkilangan masalalarning oxirgi simpleks jadvalidan ko'rinib turibdiki, bular bir xil ma'lumotlardan iborat. Demak, ikkilangan masalani alohida yechishga ehtiyoj yo'q. $(m+1)$ qatorning bazis bo'lmagan o'zgaruvchilari X_3 oldidagi koeffitsiyentlar ikkilangan masalaning U_1 va U_2 bazis o'zgaruvchilari qiymatiga teng. Ikkilangan baho shuni ko'rsatadiki, zaxiradagi mos resurslarni bir birlikka o'zgartirish bilan maqsad funktsiyaning qiymati o'zgarar ekan. a_{ij} o'rnini bosish koeffitsiyentlari va oxirgi simpleks jadvalni ikkilangan bahosi boshlang'ich shartlarni o'zgarishi bilan optimal yechimning ham o'zgarishini ko'rsatadi (2-jadval). Sirtdan o'zlashtiriladigan yaylovda hosildorlikni 100 dan to 120 s/ga gacha o'sishi bilan maqsad funktsiyaning qiymati 27428 s gacha o'zgaradi, bu holda to'g'ri masalaning cheklanishlari va optimal yechim xuddi shunday o'zgarmasdan qoladi. Ikkilangan masalada esa yaylovni sirtdan o'zlashtirish bahosida bitta cheklanish o'zgaradi:

$$U_1 + 20U_2 + 0.5U_3 \geq 100 \quad \text{o'rniga}$$

$$U_1 + 20U_2 + 0.5U_3 \geq 120 \text{ bo'ladi.}$$

Resursning minimal narxi maksimum foyda bilan mos keladi. Ikkilangan masalaning yechimlari natijasini o'zgargan cheklanishga qo'ysak, yaylovdan foydalanish bahosi U_1 ning yangi qiymatini hosil qilamiz.

$$U_1 + 20 \cdot 0 + 0.5 \cdot 57{,}151 = 120$$

U_1 = 91.4 ya'ni sirtdan o'zlashtirilgan yaylovda hosildorlikni oshishi birlik cheklangan resurs 1 ga yaylov maydonini bahosining oshishiga olib keladi. Tubdan o'zlashtirishda hosildorlikni 400 s/ga oshirish paytida cheklangan resurs -mehnat resurslari hisoblanadi. U holda mehnat resurslari bahosi U_3 = 082,2 ga teng bo'ladi.

$$71{,}4 + 100 \cdot 0 + 4U_3 = 400$$

$$U_3 = 82.2\,.$$

Bundan kelib chiqadiki ikkilangan baho sistemasi maqsad funktsiya koeffitsiyentlarining o'zgarishiga aniq chegarada sezilarli ta'sir ko'rsatar ekan.

Ikkilangan baho resurs hajmini o'zgarishiga ma'lum miqdorda barqarorlikka egadir. Misol uchun o'zlashtiriladigan yaylovni miqdorini 110 ga o'zgartirsak,

$$X_1 + X_2 \leq 110$$

$$20X_1 + 100X_2 \leq 9000$$

$$0.5X_1 + 4X_2 \leq 350$$

o'zgargan cheklanish sistemasini hosil qilamiz.

Bu tenglamalar sistemasini yechsak $x_1 = 25{,}7$ ga $x_2 = 84{,}3$ ga hosil bo'ladi. O'zlashtiriladigan yaylov maydonini o'zlashtirish bilan yangi optimal yechimni hosil qildik, ya'ni o'zlashtirilgan yaylovda yetishtirilgan ozuqaning miqdori 27857 s ga oshadi. Ikkilangan baho tuzilmasi avvalgicha qoladi.

Har qaysi ikkilangan masalalar formal ravishda chiziqli programmalashtirish masalasining mustaqil masalalari hisoblanadi va alohida yechiladi. Bu holda birini yechish ikkinchisini yechishga olib keladi.

Ikkilangan masalaning optimal yechimni o'zgartirishda ishlatilishi

Ikkilangan baho- iqtisodiy-matematik tahlilning asosiy uskinalaridan biri bo'lib hisoblanadi. Tahlilning vazifasi, shunday shart qidirilishi kerakki, natijada dastlabki ma'lumotlarni nisbatan o'zgartirish orqali olingan yechimni optimalligini saqlab qolishdir, chunki cheklangan resurslarning ikkilangan bahosi maqsad funktsiya koeffitsiyentlarini o'zgarishiga resurs hajmiga nisbatan judayam ta'sirchandir.

Iqtisodiy -matematik tahlil jarayonida masalaning bir necha yechimlar variantini hosil qilish, dastlabki ma'lumotlarning xatosini topish, yer yoki boshqa resurslardan foydalanish samaradorligini oshiruvchi loyihaning qo'shimcha shartlarini o'rganish, olingan yechimning iqtisodiy samaradorligini qidirish (tadqiq qilish) mumkin.

Optimal yechimni iqtisodiy-matematik tahlil qilishning asosiy maqsadi resurslardan foydalanishning samaradorligini ifodalovchi va berilgan nisbiy kriteriyadagi bir-birining o'mini bosuvchi resurslarni xarakterlovchi bazis bo'lmagan o'zgaruvchilar koeffitsiyentini ikkilangan baholashdan iboratdir.

Yuqorida qaralgan misolda U_1, U_3 o'zgaruvchilar cheklangan yer va mehnat resurslaridan foydalanish bahosini ifodalaydi. 100 ga yerdan 14,3 ga pichanzorni sirtdan o'zlashtirish, 85,7 ga yerni esa tubdan o'zlashtirish maqsadga muvofiq bo'lib, bunga ajratilgan mehnat resurslari to'liq ishlatilgan. Pul-buyum resurslari esa, to'liq ishlatilmagan. Optimal yechimda ular ko'pchilikni tashkil qilganligi uchun ularning bahosi nolga teng. Pul-buyum vositalarining yanada oshishi ko'k ozuqani yetishtirishning optimal rejasiga ta'sir qilmaydi. O'zlashtirilgan pichanzorlar maydonini 1 ga (x_3) ga oshirish orqali ko'k ozuqa yetishtirish esa 71,4 s ga oshadi, (x_1) pichanzorlar maydonini sirtdan o'zlashtirishni 1,143 ga oshirish orqali (x_2) tubdan o'zlashtirish 0,143 ga kamayadi. x_2 ni 0,143 ga ga kamaytirish orqali mehnat resurslari 0,572 odam kuniga qisqarib (0,143 • 4), ularni 1,143 ga ($1,143 \cdot 0,5 = 0,572$ odam-kuni) maydondagi sirtdan o'zlashtirishga qo'shimcha ishlar uchun jalb qilish mumkin.

Bundan kelib chiqadiki, ikkilangan baho 71,4 - bu pichanzorlardan samarali foydalanish bahosidir. Bu miqdor agar pichanzorlar maydoni 1gektarga oshganda, maqsad funktsiya qiymati qanchaga oshishini ko'rsatadi.

O'zlashtirish maydonini (100ga) yana 1ga o'zgartirish orqali to'g'ri masalaning oxirgi simpleks jadvalidagi x_3 (+1,143; -8,570; -0,143) bazis bo'lmagan o'zgaruvchilar oldidagi koeffitsiyentlar (x_1 va x_2) pichanzorlar maydonining turlicha o'zgarishini, to'liq ishlatilmagan pul buyum vositalari qiymati (x_4) ni ifodalaydi.

Mehnat resurslarini 1 odam-kuniga oshirish orqali ham optimal yechim o'zgaradi . To'g'ri masalaning oxirgi simpleks jadvalidagi x_5 ustun o'zgaruvchilari shuni ko'rsatadiki, mehnat resurslari fondini oshirish orqali 0,286 ga maydonda tubdan o'zlashtirish va shuncha maydonda sirtdan o'zlashtirishni *kamaytirish maqsadga* muvofiqdir. To'liq ishlatilmagan pul-buyum vositalari 22,855 gektarga qisqaradi [20 • (-0,286) + 100 • 0,286]. Maqsad funktsiyaning qiymati 57,151 s ko'k ozuqani tashkil qiladi. 57,151 – bu ko'k ozuqani yetishtirishning optimal rejasini tuzishdagi mehnat resurslari samaradorligining bahosidir.

Biroq ikkilangan bahoda, resurs hajmining ixtiyoriy o'zgarishlarimas, balki nisbatan ko'p bo'lmagan ayrim o'zgarishlari to'g'risida, so'z boradi. O'zgarishlar jiddiy bo'lganda baholash o'zgacha bo'lib qolishi mumkin. *Shuning uchun ikkilangan baho, optimal rejada o'zgaruvchilarning* manfiymasligi shartini buzmaydigan o'zgarish chegarasida va masalaning ma'lum shartlarida resurs hajmlari kam aylanish samaradorligini o'lchaydi. Turli resurslarning o'sishi bir xil samara bermaydi va ikkilangan baho ishlab chiqarish samaradorligi oshishini ushlab turuvchi tor joylarni ko'rsatishga imkon beradi va qanday resurslar eng taqchil qaysilari taqchilrok, qaysilari taqchil emasligini ko'rsatib beradi.

Bizning misolimizda pichanzorlarni o'zlashtirish usulini tanlashda ular maydoninig *1 gektarga o'sishi* ko'k ozuqaning 71,4 s ga oshishiga, mehnat resurslarining 1 odam-kuniga oshishi 57,2 s ga, pul buyum vositalarining ko'payishidan o'sish bo'lmasligini ko'rsatadi.

O'tkazilgan tahlil *asosida quyidagi xulosa kelib chiqadi: ko'k ozuqani* yetishtirishni ko'paytirish uchun pichanzorlarni sirtdan o'zlashtirishga ko'proq e'tibor berish kerak ekan, chunki tubdan o'zlashtirish ko'p samara bermas ekan.

Iqtisodiy -matematik masalalarni oxirgi simpleks jadval asosida yechish

Agar loyihani o'zgartirish *talab qilinsa, ikkilangan baho* va bir- birining o'rnini bosuvchi koeffitsiyentlar hosil qilingan yechimga o'zgartirishlar kiritishga yordam beradi. Optimal rejani o'zgartirish quyidagi hollarda mumkin bo'ladi: bazis yechimga kirgan o'zgaruvchining qiymati *oshib* borganda, bazisga bazis bo'lmagan, asosiy yoki qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritiladi.

Kiritiladigan o'zgarishlar bazis o'zgaruvchilar qiymatlarining o'zgarishiga olib keladi. Ular bazis o'zgaruvchilarga kiritilgan bir birining o'rnini bosuvchi koeffitsiyentlarning ko'paytmasi qiymatiga teng miqdorga o'zgaradi, lekin bu holda bir birining o'rnini bosuvchi koeffitsiyentlarning ishorasini hisobga olish kerak. Agar bir birining o'rnini bosuvchi koeffitsiyentlar ishorasi musbat bo'lsa bazis o'zgaruvchilari qiymati kamayadi, manfiy bo'lsa oshadi. Kiritiladigan o'zgartirishlar miqdori bazisdagi o'zgaruvchilar qiymatidan oshmasligi kerak, aks holda chiziqli programmalashtirish masalasidagi o'zgaruvchilarning manfiy bo'lmaslik sharti $(x_j \geq 0)$ buziladi. Bazis yechimga kiruvchi asosiy o'zgaruvchilar qiymati optimal yoki uni o'zgartirishdan keyin musbat bo'lishi kerak. Qo'shimcha o'zgaruvchilar uchun manfiy bo'lmaslik sharti zarur emas. Qo'shimcha o'zgaruvchining manfiy qiymati berilgan resursning yetishmasligini bildiradi va resursni taxmin qilingan oshirish miqdoriga teng kuchlidir.

Resurslar o'zgarmaganda bazisga kiruvchi o'zgaruvchilarning mumkin bo'lgan maksimal qiymati bazis o'zgaruvchilarning eng kichik bo'linmasiga va bir birining o'rnini bosuvchi mos koeffitsiyentlarga teng bo'lib, ularning kiritilishi bazis o'zgaruvchilar qiymatini kamaytiradi.

Misol. 200 ga haydaladigan yerga ikkita ekinni–sotiladigan bug'doy va ozuqa uchun arpani joylashtirish kerak. Bug'doyning hosildorligi 10 s/ga, arpaniki-20 s/ga. Bu ekinlarni yetishtirish uchun sarf qilinadigan mehnat resurslari 1250 odam-kun, mexanizatsiya bilan bajariladigan ish-250 odam-kun. 1s bug'doyni yetishtirish uchun qo'lda bajariladigan va mexanizatsiya yordamida bajariladigan ishlar mos ravishda 0,3 va 0,6 o.-k., arpa uchun - 0,4 va 0,03 o.-k. ga teng. 1 s bug'doy narxi - 7 sh.b., arpa esa to'lig'icha mollarga ozuqa uchun ishlatiladi.

Yalpi bug'doy yetishtirishni x_1, arpani – x_2, deb belgilab bug'doy va arpa ekinlarining optimal maydonlarini topish kerakki natijada tovar mahsulotining narxi maksimal bo'lsin.

Maqsad funktsiya $Z = 7X_1 \rightarrow \max$

Shartlar: 1) yerdan foydalanish bo'yicha

$0{,}1X_1 + 0{,}05X_2 \le 200;$

2) mexanizatsiya vositalariga bo'lgan talabning qondirilishi bo'yicha

$0{,}6X_1 + 0{,}3X_2 \le 250$

3) ishchi kuchlariga bo'lgan talabning qondirilishi bo'yicha

$0{,}3X_1 + 0{,}4\,X_2 \le 1250;$

4) o'zgaruvchilarning manfiy bo'lmaslik sharti $X_1 \ge 0,\ X_2 \ge 0$.

Masala modeli yechimining birinchi va oxirgi simpleks jadvalini (1, 2-jadvallar) keltiramiz

Birinchi sipmpleks jadval

№	Bazis o'zgaruvchilar	c_i baholar	Ozod had	Bazis bo'lmagan o'zgaruvchilar				
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	x_3	0	200	0,1	0,05	1	0	0
2	x_4	0	250	0,06	0,03	0	1	0
3	x_5	0	1250	0,3	0,4	0	0	0
$Z_j - C_j$			0	7	0	0	0	0

Oxirgi simpleks jadval

№	Bazis o'zgaruvchilar	c_j baho	Ozod had	Bazis bo'lmagan o'zgaruvchilar				
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	x_1	7	2000	1	0,5	10	0	0,
2	x_4	0	130	0	0	-0,6	1	0
3	x_5	0	650	0	0,25	-3	0	1
$Z_j - C_j$			14000	0	3,5	70	1	0

2-jadvalni tahlil qilish orqali 200ga yerni bug'doy (X_1) yetishtirishda foydalanish uchun ajratish maqsadga muvofiq bo'lib, u holda mexanizatsiya vositalari (x_4) va mehnat resurslari (x_5) to'liq ishlatilmasdan qoladi.

Yechimda x_2 -ozuqa uchun donni ifodalovchi o'zgaruvchi qatnashmaydi, ammo mollarni oziqlantirishda manba bo'lib xizmat qiluvchi donlardan (x_2) kontsentratsiya tayyorlash maqsadga muvofiq bo'lardi. Hosil qilingan yechimga o'zgartirish kiritish uchun taxmin qilingan o'zgarishlarning mumkin bo'lgan chegarasini o'rnatamiz 2000 : 0,5 = 4000, 650:0,25=2600.

Eng kichik bo'linuvchi 2600. Aytaylik, mollarni oziqlantirish uchun 1000 s konsentratlar talab qilinadi. Hisob–kitob qilish usuli 3-jadvalda keltirilgan. Agar yechimga x_2=1000 s o'zgaruvchini kiritsak, tovar uchun don yetishtirish va tovar mahsulot narxi pasayadi, to'liq ishlatilmagan qo'l mehnati oshadi.

Ozuqa uchun donga talabni hisobga olgan holda o'zgar qilingan optimal yechim (x_2 =1000s).

3-jadval

Bazis o'zgaruvchilar	Bazis o'zgaruvchilar qiymati	x2 oldidagi koeffitsiyent	x_2 oldidagi koeffitsyentni 1000s ga ko'paytirish	x_2 -arpa hosildorligini 1000s ga oshirish uchun optimal rejaning hisoblangan varianti
x_1	2000	0,5	500	2000-(+500) =1500
x_4	130	0	0	130
x_2	650	-0,25	-250	650 - (-250) =900
x_5	0	-1	-1000	0-(-1000) =1000
	14000	3,5	3500	14000 - (13500) =10500

Tayanch so'z va iboralar

Chiziqli programmalash masalasi, mumkin bo'lgan yechimlar, optimal yechim, yechimlar ko'p burchagi, daraga chizig'i, chiziq daragasi, koordinata o'qlari, chiziqli funksiya, o'sish yo'nalishi, optimal yechim, simpleks usuli, simpleks jadvali, asosiy ustun, simpleks munosabat, asosiy qator , asosiy element, almashlab ekish, optimal ekin maydoni. Taqsimot usuli, transport masalasi, ishlab chiqarish korxonasi, iste'mol korxonalari, maxsulotga bo'lgan talab, yuklarning narxi, transport masalasining matematik modeli, optimal yechim, bazis yechimlar, band bo'lgan kataklar, bo'sh kataklar, eng kichik xarajat, approksimatsiya usuli, tayanch yechim, dastlabki reja, ko'pburchak, potentsiallar usuli, buzilgan rejalar, ochiq transport masalasi, yopiq transport masalasi, band bo'lgan kataklar, yuklar, ikkilangan masala, optimizatsiya masalasi, chiziqli programmalashtrish masalasi, то'g'ri masala, maqsad funktsiya, bazis o'zgaruvchi, resurs hajmi, resurslarining sarf qilinish normasi, iqtisodiy-matematik model, bazis bo'lmagan o'zgaruvchilar.

III bobga doir savollar

1. Grafik usul bilan qanday turdagi ChPM ni yechish mumkin?
2. Yechimlar sohasini hosil qilish yo'lini tushuntiring.
3. Optimal yechim qanday topiladi.
4. Simpleks usuli bilan qanday masalalarni yechish mumkin?
5. Simpleks usulini jadval usuli bilan ketma-ket yechish usulini tushuntiring.
6. Simpleks usuli bilan topilgan yechim qachon optimal deb aytiladi?
7. Olingan yechimni iqtisodiy tahlil qilishni tushuntiring.
8. Optimal almashlab ekish deganda nima tushuniladi?
9. Chiziqli programmalashtirish masalasida optimal reja nima?
10. Taqsimot usuli bilan yechiladigan masalalar turini ayting.
11. Transport masalasi mohiyatini tushuntirig.
12. Transport masalasi iqtisodiy-matematik modeli ko'rinishini qanday?
13. Transport masalasi tayanch yechimini topishning qanday usullarini mavjud?
14. Eng kichik element usuli bilan masalani qanday yechish mumkin?
15. Approksimatsiya usuli algoritmi qanday?
16. Yechimni optimallikka tekshirish usuli qanday nomlanadi?
17. Ikkilangan masalaning qo'yilishini ifodalang.
18. To'g'ri masala nimani aks ettiradi?
19. Ikkilangan masala nimani aks ettiradi?
20. Ikkala masalani bir-biri bilan solishtiring.
21. Berilgan masalaga ikkilangan masalaning matematik modelini tuzish uchun misol keltiring.
22. Optimal yechimni o'zgartirishda ikkilangan masalani ishlatilishi.
23. Oxirgi simpleks jadvaldan foydalanib iqtisodiy masalani yechish yo'lini tushuntiring.

IV bob. ISTE'MOL TALABI MODELLARI

4.1. Foydalilik funksiyasi. Iste'molchining bozordagi xulq-atvori masalasi

Tovarlar va xizmatlar turli kishilar, guruhlar tomonidan iste'mol qilinib, ularning ehtiyoji qondiriladi.

Iste'mol 2 turga bo'linadi: ishlab chiqarish iste'moli va shaxsiy iste'mol. Ishlab chiqarish iste'molida ishlab chiqarish vositalari (kapital) va ishchi kuchidan foydalanilib unumlik iste'mol qilinadi. Shaxsiy iste'mol jarayonida esa, iste'mol buyumlaridan foydalanib ular yo'qotiladi va ular o'rniga yangisini ishlab chiqarish zarurati paydo bo'ladi.

Iqtisodiyotning doimiy va bosh muommosi ehtiyojlarning cheksizligi va iqtisodiy resurslarning cheklanganligidadir.

Aytaylik, iste'molchi noz-ne'matlarni sotib olishga to'liq sarf qiladigan D daromadga ega bo'lsin. Iste'molchi narx, daromad va o'zining nimani afzal ko'rishini hisobga olib, ma'lum miqdordagi noz-ne'matlarni sotib oladi uning bozordagi bu xulq-atvorining matematik modelini *iste'molchi talabining matematik modeli* deb aytiladi.

Iste'mol to'plami – bu (x_1, x_2) vektordan iborat bo'lib, x_1 koordinata birinchi noz-ne'matning miqdor birligi, x_2 -ikkinchi noz-ne'matning miqdor birligidan iborat.

Iste'mol nazariyasining predmetini bitta iste'molchining xulq-atvori tashkil qilib, bunga iste'molchi shaxsiy budjetining ratsional taqsimlanishi nuqtayi nazaridan qaraladi.

Bu muammoni birinchi marotaba Shveytsariyalik iqtisodchi Leon Valras (1834 - 1910) ishlab chiqqan. Avvalo, ikki turdagi noz-ne'matlardan iborat bo'lgan model qaraladi. Iste'molchining talabi afzallik munosabati orqali xarakterlanadi. Afzallik munosabatining mohiyati quyidagidan iborat. Iste'molchiga ikki tovardan bittasi ma'qul yoki ularning ikkalasining ham farqi bo'lmasligi mumkin. Afzallik munosabatini ko'rish uchun quyidagi belgilashlar kiritiladi: $x=(x_1,x_2)$ tovarlar assortimentining iste'mol rejasi, bu yerda x_i - i- turdagi mahsulotning (i=1,2) miqdori, $X \in R_+^n$ - n o'lchovli vektor fazo, $x \in X$.

Afzallik munosabati tranzitiv, ya'ni agar $X=(x_1,x_2)$ to'plam $U=(u_1,u_2)$ to'plamdan afzalroq bo'lsa, va o'z navbatida $U=(u_1,u_2)$ to'plam $Z=(z_1,z_2)$ to'plamdan afzalroq bo'lsa, u holda $X=(x_1,x_2)$ to'plam $Z=(z_1,z_2)$ to'plamdan afzal bo'ladi.

Iste'mol to'plami $X=(x_1,x_2)$ da $U(x_1,x_2)$ funksiya aniqlangan bo'lsa, bu funksiya *iste'molchining foydalilik funksiyasi* deb aytiladi. (x_1,x_2) dagi $U(x_1,x_2)$ ning qiymati bu to'plam uchun individ iste'mol bahosiga teng. Agar individ berilgan (x_1,x_2) to'plamni iste'mol qilsa, (x_1,x_2) to'plamning iste'mol bahosi $U(x_1,x_2)$ ning *individ talabini qondirilish darajasi* deb aytiladi. Har bir iste'molchi o'zining foydalilik funksiyasiga ega. Agar X to'plam U to'plamdan afzalroq bo'lsa, u holda $U(x) \supset U(y)$ bo'ladi.

Agar X to'plamda $U(x_1,x_2)$ foydalilik funksiyasi bo'lsa, $f(U(x))$ qat'iy qavariq funksiya bo'lsa, *u* holda $f(U(x))$ ham X to'plamda foydalilik funksiyasi bo'ladi.

Foydalilik funksiyasi quyidagi xossalarga ega:

1) Doimiy ravishda bir mahsulotni iste'mol qila turib, boshqa bir turdagi mahsulotni iste'mol qilish oshib borsa, bu hol istemol bahosining oshishiga olib keladi, ya'ni.

agar $x_1^2 > x_1^1$ bo'lsa, $U(x_1^2,x_2) > U(x_1^1,x_2)$,

agar $x_2^2 > x_2^1$ bo'lsa, $U(x_1,x_2^2) > U(x_1,x_2^1)$.

1') $\dfrac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_1} = U_1' > 0$, $\dfrac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_2} = U_2' > 0$ bo'lsin.

1') xossadan 1) xossa kelib chiqadi.

Birinchi darajali xususiy hosila mahsulotlarning *eng kop foydaliligi* deb aytiladi. U_1' - birinchi mahsulotning eng ko'p foydaliligi, U_2' - ikkinchi mahsulotning eng ko'p foydaliligi. Eng ko'p foydalilik uchun $M_1U(x_1,x_2)$, $M_2U(x_1,x_2)$ belgilari ham ishlatiladi.

2)agar har qanday mahsulotni iste'mol qilish hajmi oshsa, u holda uning eng ko'p foydaliligi kamayadi (bu xossa eng ko'p *foydalilikning kamayish qonuniyati* deb aytiladi).

2') $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_1^{\,2}} = U_{11}'' < 0$, $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_2^{\,2}} = U_{22}'' < 0$ bo'lsin.

2') xossadan 2) xossa kelib chiqadi.

3) agar ikkita mahsulotdan birortasining miqdori oshsa, unda har bir mahsulotning eng ko'p foydaliligi ham oshadi. U holda miqdori o'zgarmaydigan mahsulot deyarlik taqchil bo'lgan bo'ladi. Shuning uchun, uning har bir qo'shimcha birligi samarali iste'mol qilinadi. Bu xossa barcha turdagi mahsulotldar uchun ham bajarilavermaydi. Misol uchun agar mahsulotlar bir-birining o'rnini to'liq bossa bu xossa bajarilmaydi, lekin bu holat befarqlik chizig'iining pastga qavariqligini ta'minlaydi.

3') $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} = U_{12}'' = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_1} = U_{21}'' \quad > 0$ bo'lsin.

3') xossadan 3) xossa kelib chiqadi.

Birinchi(ikkinchi) mahsulotning eng ko'p foydaliligi deganda

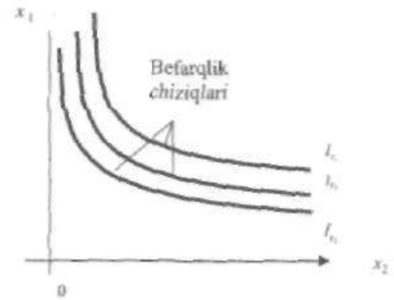
$M_1U(x_1,x_2) = U(x_1+1,x_2) - U(x_1,x_2)$ $(M_2U(x_1,x_2) = U(x_1,x_2+1) - U(x_1,x_2))$

$M_1U(x_1,x_2) = U(x_1,x_2) - U(x_1-1,x_2)$ $(M_2U(x_1,x_2) = U(x_1,x_2) - U(x_1,x_2-1))$

farq tushuniladi.

Individning talabini bir xil darajada qanoatlantiruvchi (x_1,x_2) iste'mol to'plamlarini birlashtiruvchi chiziq *befarqlik chizig'i* deb ayitiladi. Befarqlik chizig'i foydalilik funksiyasi darajasi chizig'i sifatida ham qaraladi. Befarqlik chiziqlari to'plamiga *befarqlik chiziqlari kartasi* deb ham aytiladi.

Har xil darajadagi talablarni qondirishga mos keluvchi befarqlik chiziqlari o'zaro kesishmaydi. Agar I_{τ_3} befarqlik chizig'i I_{τ_2} chizig'idan yuqorida joylashgan bo'lsa, u holda $\tau_3 > \tau_2$. Yuqorida joylashgan befarqlik chizig'i talabni qondirishning yuqori darajasiga mos keladi.



4.1- rasm

1)-3 shartlardan kelib chiqadiki, befarqlik chizig'i kamayuvchi va koordinata boshiga nisbatan qavariqdir. Buni tushunish uchun $U(x_1, x_2)$ funksiyaning differensialini qaraymiz:

$$dU(x_1,x_2) = U_1^{'}dx_1 + U_2^{'}dx_2 = 0 \Rightarrow \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{U_1^{'}}{U_2^{'}} < 0 \qquad (4.1.1)$$

hosilasi manfiy, shuning uchun ham kamayuvchi. $x_2(x_1)$ning ikkinchi tartibli hosilasi

$$d\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right) / dx_1 = -\frac{U_{11}^{''} \cdot U_2^{'} - U_1^{'} \cdot U_{21}^{''}}{(U_2^{'})^2} > 0$$

bundan befarqlik chizig'ining pastga qavariqligi kelib chiqadi.

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{U_1^{'}}{U_2^{'}}$$

bundan

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -tg\varphi \approx -tg\alpha = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$$

ni yozish mumkin.

(1) ga asosan $-\dfrac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \approx \dfrac{U_1'}{U_2'}$ kelib chiqadi.

$-\dfrac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$ munosabat agar individ ozining talabini qondirilish darajasini ozgartirmasdan, bir maxsulotni iste'mol qilishni bir birlikka kamaytirib(oshirib), ikkinchi mahsulotni iste'mol qilishni qanchaga oshirishi(kamaytirishi)ni korsatadi. Bu jarayon 4.2-rasmdagi grafikda ko'rsatilgan.

Shuning uchun $-\dfrac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$ munosabatni (x_1, x_2) iste'mol toplamida bir tovarni ikkinchi tovar bilan *almashtirish normasi* deb aytiladi.

Foydalilik funksiyasiga quyidagi funksiyani misol qilib olish mumkin:

$$U(x_1, x_2) = a_1 \log(x_1 - \bar{x}_1) + a_2 \log(x_2 - \bar{x}_2),$$

bu yerda

$$a_1 > 0, a_2 > 0, x_2 > \bar{x}_2 \geq 0, x_1 > \bar{x}_1 \geq 0.$$

Haqiqatan ham,

birinchi tartibli hosilasi $U_1' = \dfrac{a_1}{x_1 - \bar{x}_1} > 0$, $U_2' = \dfrac{a_2}{x_2 - \bar{x}_2} > 0$ bo'ladi ;

ikkinchi tartibli hosilasi $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} = -\dfrac{a_1}{(x_1 - \bar{x}_1)^2} < 0,\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} = -\dfrac{a_2}{(x_2 - \bar{x}_2)^2} < 0$

bo'ladi.

Bu funksiya uchun uchinchi xossa bajarilmaydi.

4.2. Iste'molchi talabining modeli

Bu model bilan tanishish uchun iste'molchining bozordagi ratsional xulq atvori masalasini qaraymiz. Bu masalada iste'molchi (x_1, x_2) iste'mol toplamidan shunday bir (x_1^0, x_2^0) toplamni tanlaydiki, bu to'plam berilgan byudjet cheklanishlarida uning foydalilik funksiyasini maksimallashtiradi.

Byudjet cheklanishi deganda, uning mahsulotlarga sarf qilinadigan pul mablag'i daromad mablag'idan oshmasligi kerakligi tushuniladi, ya'ni $p_1x_1 + p_2x_2 \le D$ bolib, bu yerda p_1, p_2 lar birinchi va ikkinchi mahsulotlarning bir birligining mos ravishda bozor narxlaridan iborat. p_1, p_2, D miqdorlar berilgan.

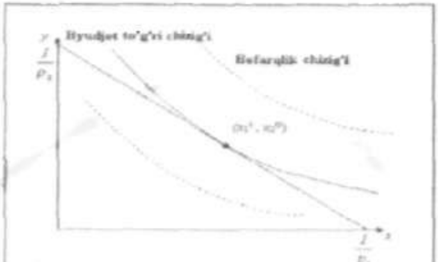
Iste'mol tovarlarini tanlash masalasi quyidagicha ifodalanadi:

$$p_1x_1 + p_2x_2 \le D,$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

shartlarda $u(x_1, x_2) \to \max$ bo'ladi.

Mumkin bo'lgan toplam budjet chizig'i va koordinata o'qlari bilan chegaralangan uchburchakdan iborat boladi.



4.2-rasm

Bu toplamda foydalilikning maksimal darajasi bilan befarqlik chizig'ida yotuvchi nuqtani topish talab qilinadi. Bu nuqtani qidirish jarayonini grafikda bu chiziqlar umumiy nuqtaga ega bolguncha foydalilikning eng yuqori darajasiga ketma-ket o'tish orqali ko'rsatish mumkin.

4.3. Iste'molchining bozordagi optimal xulq - atvori masalasini yechish

Bu masalaning yechimi hisoblanuvchi (x_1^0, x_2^0) to'plamni iste'molchi uchun optimal yoki iste'molchining *lokal bozor muvozanati* deb atash qabul qilingan. Foydalilik funksiyasini maksimallashtiradigan (x_1^0, x_2^0) toplam, byudjet cheklanishlarini $p_1x_1 + p_2x_2 = D$ tenglamaga aylantirishi kerak. Grafikda masalaning (x_1^0, x_2^0) yechimi byudjet chizigining ustida yotgan bolib (3.2 - rasm), byudjet chizig'ini koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini birlashtirish orqali hosil qilish mumkin.

Bu $\left(0, \dfrac{D}{p_2}\right)$ va $\left(\dfrac{D}{p_1}, 0\right)$ nuqtalarda barcha daromad bitta mahsulotga sarf qilinadi. Shunday qilib, iste'mol tovarlarini tanlash masalasini shartli ekstremum masalasi bilan almashtirish mumkin:

$$p_1x_1 + p_2x_2 = D,$$

$$U(x_1, x_2) \to \max.$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ sharti (x_1^0, x_2^0) optimal nuqtada avtomatik ravishda bajariladi deb, hisoblaymiz.

Bu masalani yechish uchun Lagranjning shartli ekstremum usulini qo'llab, Lagranj funksiyasini tuzamiz:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = U(x_1, x_2) + \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - D),$$

bu funksiyaning x_1, x_2, λ o'zgaruvchilar bo'yicha 1-tartibli xususiy hosilalarini topib, ularni nolga tenglashtiramiz:

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} = U_1' - \lambda p_1 = 0, \quad \frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} = U_2' - \lambda p_2 = 0,$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda} = p_1x_1 + p_2x_2 - D = 0.$$

Hosil qilingan uch noma'lumli uchta tenglamalar sistemasidan λ ni yo'qotib, x_1, x_2 noma'lumlardan iborat ikkita tenglamalar sistemasi hosil qilinadi:

$$U_1' - \lambda p_1 = U_2' - \lambda p_2; \quad \frac{U_1'}{U_2'} = \frac{p_1}{p_2}; \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = D.$$

Bu sistemaning (x_1^0, x_2^0) yechimi Lagranj funksiyasining qisqartirilgan kritik nuqtasidan iborat. (x_1^0, x_2^0) yechimni tenglamaning chap tomoniga qo'ysak, $\frac{U_1'(x_1^0, x_2^0)}{U_2'(x_1^0, x_2^0)} = \frac{p_1}{p_2}$ hosil bo'ladi. Bu, individning (x_1^0, x_2^0) nuqtadagi $U_1'(x_1^0, x_2^0)$ va $U_2'(x_1^0, x_2^0)$ lokal bozor muvozanati $\frac{U_1'(x_1^0, x_2^0)}{U_2'(x_1^0, x_2^0)}$ eng ko'p foydalilik nisbati, mahsulotlarning bozor narxlari p_1 va p_2 larning nisbati $\frac{p_1}{p_2}$ ga teng, degan so'z. $\frac{U_1'(x_1^0, x_2^0)}{U_2'(x_1^0, x_2^0)}$ nisbat, birinchi mahsulot ikkinchisi bilan almashtirilishining eng katta normasidan iboratdir. Bu natija iqtisodiy nazariyada katta ahamiyatga ega.

Misol. Ikkita iste'mol tovarlarini tanlashning oddiy masalasini qaraymiz. x_1 va x_2 tovarlar narxi p_1 va p_2 bo'lsin.

$$\begin{aligned} &U(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 \to \max, \\ &p_1 x_1 + p_2 x_2 \le D, \\ &x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

Yuqoridagiga asosan, $\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2}$, $p_1 x_1 + p_2 x_2 = D$ hosil bo'ladi. Birinchi shartdan qaralayotgan masalada ikkala mahsulot uchun sarf qilinayotgan pul bir xil bo'lishi kerak, ya'ni $p_2 x_2 = p_1 x_1$; $x_2 p_2 + x_1 p_1 = \frac{D}{2}$, u holda talab funksiyasi $x_1 = \dfrac{D}{2p_1}; x_2 = \dfrac{D}{2p_2}$ ko'rinishni oladi.

Shunday qilib, har bir mahsulotga xarajat iste'molchi umumiy daromadining yarmini tashkil qiladi. Kerak bo'lgan mahsulot miqdorini aniqlash uchun unga sarf qilinadigan pulni uning narxiga bo'lish kerak ekan.

Tovarlar to'plamini quyidagi sinflarga bo'lish mumkin:

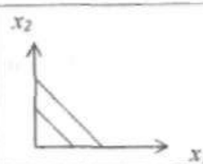
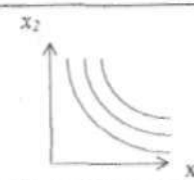
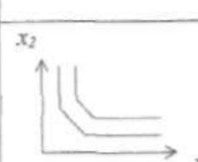
a) Arzon va qimmatbaho tovarlar;

b) Bir-birining o'rnini bosuvchi;

c) Bir- birining o'rnini to'ldiruvchi.

4.1 - jadvalda foydalilik funksiyalarining turlari va grafiklari keltirilgan:

4.1.- jadval

N	Funksiyalar nomi	Funksiya turi	Grafigi
1	Bir-birini o'rnini to'liq bosuvchi funksiyalar	$U = b_1 x_1 + b_2 x_2$	
2	Foydalilik funksiyasining klassik bo'lmagan turi	$U = x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2}$ $(b_1 + b_2 \le 1)$	
3	Bir-birining o'rnini to'liq to'ldiruvchi funksiyalar	$U = \min\left(\dfrac{x_1}{b_1}, \dfrac{x_2}{b_2}\right)$	
4	Bir-birining o'rnini bosuvchi va to'ldiruvchi funksiyalarning aralash turi	$U = U_1 + U_2$ $\begin{cases} x_1 \ge b_1 u_1 + c_1 u_2 \\ x_2 \ge b_2 u_2 + c_2 u_2 \end{cases}$	

1-ta'rif. Agar $\frac{\partial x_2^0}{\partial k} > 0$ **bo'lsa, X_2 tovar** qimmatbaho deyiladi, va aksincha, agar $\frac{\partial x_2^0}{\partial k} \leq 0$ bo'lsa, X_2 arzon tovar deyiladi. Bundan kelib chiqadiki, narx-navo oshganda arzon tovarga talab ko'payadi.

2-tarif. Agar $\left(\frac{\partial x_1^0}{\partial p_1}\right)_{comp} > 0$ bo'lsa, 1- va 2-tovarlar bir-birining *o'rnini bosuvchi* deb aytiladi, ya'ni daromad o'zgarishini qoplash paytida, 2-tovarning narxi oshganda, 1-tovarga talab oshadi.

Bunga kofe va choyni misol qilish mumkin.

3-tarif. Agar $\left(\frac{\partial x_1^0}{\partial p_2}\right)_{comp} < 0$ bo'lsa, 1 va 2-tovarlar bir-birining o'rnini to'ldiruvchi deyiladi, ya'ni 1-tovarga talab oshsa, 2-tovarga ham oshadi. Misol choy bilan shakar.

IV bobga doir topshiriqlar

4.1-topshiriq. Don birjasida talab va taklif quyidagi ma'lumotlar bilan xarakterlanadi:

T/r	Talab (Sh.b)	Narx (Sh.b)	Taklif ((Sh.b))	Mo'lchilik (+) Taqchillik (-)
1	85	3,40	72	
2	80	3,70	73	
3	75	4,00	75	
4	70	4,30	77	
5	65	4,60	79	
6	60	4,90	81	

Bu ma'lumotlar uchun quyidagilarni bajaring:

1. ***XOY*** koordinatalar sistemasida talab va taklifni X, 1 bushelning narxini Y bilan belgilab, talab va taklif egri chiziqlarini chizing.

2. Bozoridagi talab va taklifning muvozanat miqdorini aniqlang va muvozanat narxini toping.

3. Bu savdoda nima uchun 3,2 va 4,9 muvozanat narxi bo'la olmaydi, tushuntiring.

4. Mo'lchilik narxni oshiradimi yoki kamaytiradimi, tushuntirib bering.

5. Hukumat narxni, aytaylik, 3,7 deb belgiladi. Hukumatning bu tadbiri qanday ta'sir qildi?

6. Qonun orqali narxning belgilanishi uning muvozanat funksiyasi mexanizmini yo'q qiladi. Shuni isbot qiling.

4.2-topshiriq. Iste'mol tovarlarini tanlash masalasini mahsulotlar narxi $p_1 = 10$, $p_2 = 2$ va daromad $D = 60$ bo'lganda quyidagi foydalilik funksiyalari uchun yeching.

1) $U = x_1 \cdot x_2 \to \max;$

2) $U = x_1^{0.5} \cdot x^{0.4} \to \max;$

3) $U = (x_1 - 1)^{\frac{1}{4}} \cdot (x_2 - 3)^{\frac{3}{4}} \to \max;$

4) $U = 5(4 - x_1)^2 + (20 - x_2)^2 \to \min.$

Har bir masala uchun mumkin bo'lgan to'plamni va befarqlik chizig'ini chizing.

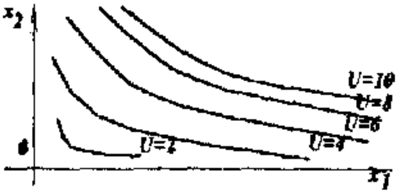
4.3 – topshiriq. a) x_1Ox_2 koordinata sistemasida foydalilik funksiyasi to'plamini hosil qiling. Foydalilik funksiyasi ko'rinishi $U = ax + \frac{1}{2}x'Bx$ dan iborat. Bu yerda $a = (k\ k)$; $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$; $x' = (x_1\ x_2)$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$,

$b_{11} = 1 \quad b_{12} = k$
$b_{21} = k \quad b_{22} = k - 1.$

b) x_1Ox_2 tekisligida byudjet chizig'ini hosil qiling. $D = 4,6,8,10$ lar uchun $D = 3x_1 + 4x_2$ ni hisoblang.

v) Iste'mol bozorida iste'molchi $(20+k)$ budjet bilan x_1 va x_2 tovarlarni olishi kerak, 1-tovarning narxi 3 sh.b., 2- niki 4 sh.b. ekanligi ma'lum. Ikkala tovarni sotib olishning optimal rejasini toping.

Eslatma. Bu masalaning echilishi ilovada keltirilgan.



k - talabaning jurnal bo'yicha tartib raqami.

g) grafikda taqriban $10 = 3x_1 + 4x_2$ befarqlik chizig'i uchun optimal bo'lgan nuqtani toping.

d) masalani yechilishiga ilova

Echilishi: Bu masalaning 1-variant uchun yechilish ketma-ketligi keltirilgan.

Bu erda x_1 - 1-tovar, x_2 - 2-tovar, byudjet 10 sh.b ga teng.

1-qadam. Foydalilik funksiyasi ko'rinishi:

$$U = [11]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}[x_1 x_2]\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 + x_2 + \frac{1}{2}\left[x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2\right].$$

2-qadam. $10 = 3x_1 + 4x_2$ byudjet chizig'ini hosil qiling.

3-qadam. *AB* da shunday $M(x_1^*, x_2^*)$ni topish kerakki, natijada foydalilik funksiyasi U maksimum qiymatga ega bo'lsin.

Buning uchun shunday U ni topish kerakki, u holda

$x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2 + +2x_1 + 2x_2 - 2U = 0$ bo'lsin.

Egri chiziq optimal yechimga $10 = 3x_1 + 4x_2$ chiziqdagi faqat bitta $M(x_1^*, x_2^*)$ nuqtada erishadi. $10 = 3x_1 + 4x_2$ tenglamadan $x_2 = (10 - 3x_1)\frac{1}{4}$ ni topib, bu qiymatni egri chiziq tenglamasiga qo'yganimizda

$x_1^2 + (10-3x_1)^2 \frac{1}{16} + 6x_1(10-3x_1)\frac{1}{4} + 2x_1 + 2(10-3x_1)\frac{1}{4} = 0$ hosil bo'ladi, buni ixchamlaganda, $47{x_1}^2 - 188x_1 + (32U - 180) = 0$ ko'rinishga keladi. Bu tenglama 1 ta ildizga ega bo'lgani uchun shunday U ni topish kerakki, natijada diskriminant

$d = 0$ bo'lsin: $d = 188^2 - 4 \cdot 47 \cdot (32U - 180) = 0$, bundan $U = \frac{23}{2}$;

$U^* = \frac{23}{2}$ bo'lganda biz uning foydalilik funksiyasini hosil qilamiz:

$$\frac{23}{2} = U = x_1 + x_2 + \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2\right),$$

bu $10 = 3x_1 + 4x_2$ byudjet chizig'iga teguvchi grafikka ega.

Endi $\frac{23}{2} = x_1 + x_2 + \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2\right)$ va $10 = 3x_1 + 4x_2$ egri chiziqning $x^* = \left(x_1^*, x_2^*\right)$ urinish $M\left(x_1^*, x_2^*\right)$ nuqtasini topamiz. Buning uchun quyidagi kvadrat tenglamani yechamiz:

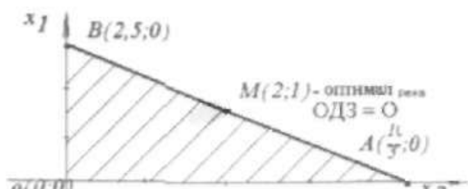
$$47x_1^2 - 188x_1 + \left(32 \cdot \frac{23}{2} - 180\right) = 0;$$

$$47x_1^2 - 188x_1 + 188 = 0; \text{ bundan } x_1^* = \frac{188 + 0}{2 \cdot 47} = 2.$$

$x_2 = (10 - 3x_1)\frac{1}{4} = (10 - 3 \cdot 2)\frac{1}{4} = 1$ dan foydalanib x_2^* ni topamiz.

Shunday qilib $x^* = (2,1)$ birinchi va ikkinchi tovarni iste'mol qilishning optimal rejasi hisoblanadi, chunki iste'molchi byudjetdan chetga chiqmaydi.

$10 = 3x_1 + 4x_2$, $x_1 = 2$, $x_2 = 1$: $10 = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1$



Foydalilik funksiyasini hosil qilishga doir uslubiy ko'rsatma.

$$a = (a_1, a_2),\ B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\ x' = (x_1, x_2);\quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

uchun foydalilik funksiyasini hosil qiling. Foydalilik funksiyasining ko'rinishi

$$U = ax + \frac{1}{2}x'Bx = (a_1\ a_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x_1\ x_2)\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

bu yerda $(a_1\ a_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a_1x_1 + a_2x_2$

$$[x_1 x_2]\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = [(x_1b_{11} + x_2b_{21})(x_1b_{12} + x_2b_{22})]\cdot$$

$$[(x_1b_{11} + x_2b_{21})(x_1b_{12} + x_2b_{22})]\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1(x_1b_{11} + x_2b_{21}) +$$

$$+ x_2(x_1b_{12} + x_2b_{22}) = x_1^2b_{11} + x_2^2b_{22} + x_1x_2(b_{21} + b_{12})$$

Ya'ni $U = a_1x_1 + a_2x_2 + \frac{1}{2}\left(x_1^2b_{11} + x_2^2b_{22} + x_1x_2(b_{21} + b_{12})\right)$

Tayanch so'z va iboralar

Tovarlar va xizmatlar, iste'mol, ishlab chiqarish iste'moli, shaxsiy iste'mol, iste'molchi talabining matematik modeli, iste'mol to'plami, afzallik munosabati, iste'molchining foydalilik funksiyasi, individ talabini qondirilish darajasi, foydalilik funksiyasi, eng kop foydalilik, befarqlik chizig'i, byudjet cheklanishi, iste'mol tovarlarini tanlash, arzon va qimmatbaho tovarlar, bir-birining o'rnini bosuvchi tovarlar, bir- birining o'rnini to'ldiruvchi tovarlar.

IV bobga doir savollar

1. Afzallik munosabati nimani anglatadi?
2. Foydalilik funksiyasi qanday xossalarga ega?
3. Eng ko'p foydalilik nima va qanday ifodalanadi ?
4. Iste'mol nazariyasi masalalari modellarini ifodalang.
5. Qaysi modellashtirish usullarini iste'mol nazariyasi masalalarida qo'llash mumkin?
6. Iste'molchining talabi qachon optimal bo'ladi? Model ko'rinishini yozing.
7. Talab funksiyasi nima?
8. Tovar qachon eng qimmat va eng arzon tovar deb aytiladi?
9. Tovarlar qachon bir-birining o'rnini bosuvchi va bir-birining o'rnini to'ldiruvchi deb aytiladi?
10. Iste'mol tovarlarini tanlash masalasidagi byudjet cheklanishi, nima uchun optimal nuqtada tenglama ko'rinishida bo'ladi?

V bob. ISHLAB CHIQARISHNI MODELLASHTIRISH

5.1. Ishlab chiqarish funksiyalari tushunchasi

Ishlab chiqarish funktsiyalari qaralayotgan obyekt yoki jarayonning iqtisodiy va texnologik bog'lanishlarining matematik ifodasidan iboratdir. Bunda ishlab chiqarishning natijaviy ko'rsatkichi o'zida ma'lum ishlab chiqarish resurslari xarajatlari funktsiyasini aks ettiradi. Qishloq xo'jalik ishlab chiqarishda bunday ko'rsatkichlarga: hosildorlik, mahsuldorlik, tannarx, rentabellik, foyda va x.k.lar kiradi. Ma'lumki hosildorlik qishloq xo'jaligini rivojlantirishning asosiy ko'rsatkichlaridan biridir. Shuning uchun ham qishloq xo'jalik ishlab chiqarishini rejalashtirish uchun avvalambor hosildorlikni rejalashtirish kerak.

Iqtisodiyotda matemaik modellashtirishning rivojlanishi bilan miqdoriy tahlil qilish usullari keng qo'llanila boshlandi. Qishloq xo'jaligida ham ishlab chiqarish funktsiyalari sifatida, ishlab chiqarish, qishloq xo'jalik ekinlari hosildorligi kabi ko'rsatkichlarni ularni aniqlaydigan omillari orqali ifodalash mumkin.

Ma'lumki, hosildorlik, yerning unumdorligi, iqlim, urug' sifati, agrotexnika kabi bir necha omillardan bog'liqdir. Agar bu omillarni mos ravishda $x_1, x_2, ..., x_n$ orqali belgilasak, u holda hosildorlikni funktsiya sifatida undan bog'liq bo'lgan argumentlar ko'rinishida umumiy holda quydagicha $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ifodalash mumkin. Lekin bunday yozuv bog'lanishning umumiy tasnifini beradi xolos. Rejalashtirish va tahlil uchun eng birinchi navbatda miqdoriy bog'lanish kerak. Miqdoriy munosabatlarda ifodalangan bog'lanishning esa shaklini bilish zarur.

Shunga o'xshash bog'lanishlarni chorvachilik uchun ham yozish mumkin. Mollarning mahsuldorligi oziqlanish, mollarning nasli, ularni saqlash usuli va boshqalar xuddi shuningdek funktsiyaning omillaridan iborat bo'lishi mumkin.

Nihoyat alohida olingan xo'jalik rivoji ham bog'liq bo'lmagan va o'zaro bog'liq omillar (argumentlar) orqali aniqlanadi. Shunday qilib ishlab chiqarish funksiyalariga quyidagicha tarif berish mumkin.

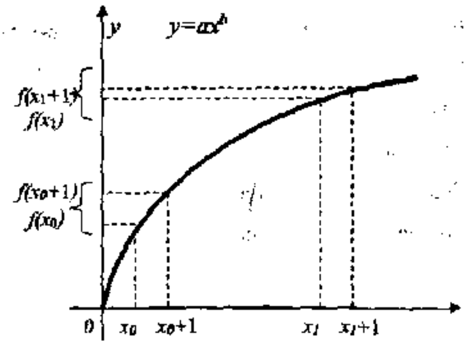
Ishlab chiqarish funksiyalari bu shunday funksiyaki, unda erkli o'zgaruvchilar sarf qilinadigan yoki ishlatiladigan resurslar qiymatlari hajmini qabul qiladi, erksiz o'zgaruvchi esa, ishlab chiqariladigan mahsulot qiymati hajmini qabul qiladi.

$$y = f(x) \qquad (5.1.1)$$

(1) formulada x ($x \geq 0$) va y($y \geq 0$) lar sonli miqdorlardir, ya'ni $f(x)$ funksiya bitta x o'zgaruvchidan iborat bo'lgan funksiyadir. Shuning uchun ishlab chiqarish funksiyasi bir resursli yoki omilli deyiladi, uning aniqlanish sohasi manfiy bo'lmagan haqiqiy sonlar to'plamidan iboratdir. $y = f(x)$ ifoda agar resurs x birlikda sarf qilinsa yoki ishlatilsa, mahsulot $y = f(x)$ birlikda ishlab chiqariladi, degan so'z. f belgi erkli o'zgaruvchi x va erksiz o'zgaruvchi y larni bir biriga bog'laydi. Mikroiqtisodiy nazariyada agar resurs x miqdorda sarf qilinsa yoki ishlatilsa, u holda y mahsulot ishlab chiqarishning mumkin bo'lgan maksimal hajmidan iborat bo'ladi.

Misol. Ishlab chiqarish funksiyasi $f(x) = a \cdot x^b$ ko'rinishida bo'lsin, bu yerda x sarf qilinayotgan resurs miqdori (o'g'it miqdori bo'lsin), $f(x)$ esa yetishtiriladigan mahsulot hajmi (sotishga tayyorlangan paxta miqdori). a va b lar ishlab chiqarish funksiyalarining parametrlari. Bu yerda a va b lar musbat bo'lib, $b \leq 1$.

$f(x) = a \cdot x^b$ ishlab chiqarish funksiyasining grafigi 5.1-rasmda berilgan.



5.1-rasm

$f(x)$ grafikdan ko'rinib turibdiki, x resursning miqdorini oshirish bilan y ishlab chiqarish hajmi ortadi, lekin qo'shimcha har bir birlik resurs y ishlab chiqariladigan mahsulot hajmining o'sishiga kam miqdorda ta'sir qiladi.

Ishlab chiqarish funksiyalari ko'p sohalarda ishlatilishi mumkin. «Xarajat-ishlab chiqarish» tamoyilini mikro va makroiqtisodiy darajada ham amalga oshirish mumkin. Avvalo mikroiqtisodiy darajada qaraymiz. Yuqorida qaralgan $f(x) = a \cdot x^b$ ishlab chiqrish funksiyasi alohida olingan korxona (firma)ning yil davomida sarflanadigan yoki ishlatiladigan x resursi bilan shu korxona (firma)ning yillik mahsulot ishlab chiqarishi Y orasidagi bog'lanishini ifodalashda ishlatilishi mumkin. Bu yerda ishlab chiqarish tizimi sifatida alohida olingan korxona (firma) ishtirok etganligi uchun biz mikroiqtisodiy ishlab chiqarish funksiyasini hosil qildik. Mikroiqtisodiy ishlab chiqarish tizimi sifatida tarmoqlar, tarmoqlararo ishlab chiqarish majmualari qatnashishi mumkin. Mikroiqtisodiy ishlab chiqarish funksiyasi asosan tahlil, rejalashtirish va shuningdek, prognoz masalalarini yechishda qo'llaniladi.

Ishlab chiqarish funksiyasi mamlakat miqyosida yillik mehnatning sarfi va shu mamlakatda yillik mahsulotni ishlab chiqarish orasidagi bog'lanishni ifodalashi mumkin. Bu yerda ishlab chiqarish tizimi sifatida butun bir mamlakat qatnashayotganligi uchun makroiqtisodiy daraja va makroiqtisodiy ishlab chiqarish funksiyasiga ega bo'lamiz. Bu yerda ham ishlab chiqarish funksiyasi tahlil, rejalashtirish va bashorat masalalarini yechishda qo'llaniladi.

Sarf qilinadigan yoki ishlatiladigan resurs tushunchasining to'g'ri talqini, shuningdek, ularning o'lchamini tanlash ishlab chiqarish tizimlarining xarakteri va ko'lamiga, ishlab chiqarish funksiyalari orqali yechiladigan masalalarining xususiyatiga (analitik, rejaga asoslangan, prognozli) shuningdek, mavjud bo'lgan daslabki ma'lumotlarga bog'liqdir. Mikroiqtisodiy darajada xarajat va ishlab chiqarish natural va qiymat birliklarida o'lchanishi mumkin. Yillik mehnat sarflari odam-soatlarda yoki ish haqiga to'lanadigan so'mda o'lchanishi mumkin; mahsulot ishlab chiqarish esa donalab yoki boshqa natural o'lchamda (tonna, metr va hokazo) o'lchanishi mumkin. Ma'lumki makroiktisodiy darajada xarajat va ishlab chiqarish qiymat ko'rsatgichlarida o'lchanadi va sarflanadigan yoki ishlatiladigan resurslar hajmi va ishlab chiqariladigan mahsulotlarni ularning narxiga ko'paytmasining yig'ilgan miqdorini o'zida ifoda etadi.

Bir necha o'zgaruvchilarning ishlab chiqarish funksiyasi deganda – $x_1, x_2, ..., x_n$ erkli o'zgaruvchilar sarf qilinadigan yoki ishlatiladigan resurslar hajmi qiymatlarini qabul qilib, funksiyaning qiymatlari esa ishlab chiqarish *hajmi miqdori ma'nosini anglatadi:*

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (5.1.2)$$

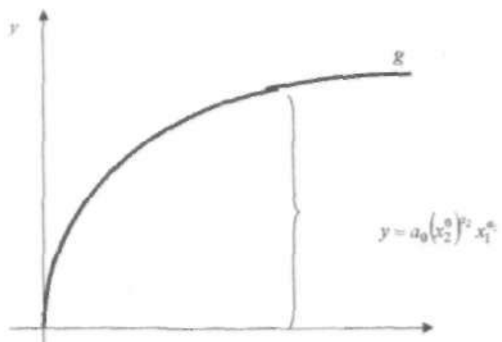
(5.1.2) formulada $y(y \geq 0)$ – skalyar, x-esa vektor miqdor, $x_1, x_2, ..., x_n$ - vektorning koordinatlari, ya'ni $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyasi ko'p resursli yoki ko'p omilli ishlab chiqarish funksiyasi deb aytiladi. (2) ni $f(x_1, x_2, ..., x_n, a)$ deb yozilsa to'g'riroq bo'ladi, bu yerda a-ishlab chiqarish funksiyasining vektor parametrlari.

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0$ ning ma'nosi, ko'p faktorli ishlab chiqarish funksiyasi $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ning aniqlanish sohasi n-o'lchovli x vektorlar to'plamidan iborat bo'lib. barcha $x_1, x_2, ..., x_n$ koordinatlar manfiy bo'lmagan sonlardan iborat, degani.

Bir turdagi mahsulot ishlab chiqaruvchi alohida olingan korxona uchun $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ishlab chiqarish funksiyasi ishlab chiqarish hajmini turli mehnat faoliyatlari bo'yicha mehnat, turli xil xom ashyolar, energiya, asosiy kapital sarflari bilan bog'laydi. Bunday turdagi ishlab chiqarish funksiyasi korxona (firma) ning ishlab turgan texnologiyasini xarakterlaydi. Butun bir mamlakat uchun ishlab chiqarish funksiyalarini tuzish paytida Y yillik ishlab chiqarish miqdori sifatida odatda o'zgarmas, joriy bo'lmagan baholarda hisoblanadigan mamlakat mahsulotlari majmui olinadi, resurs sifatida, odatda, bahoda ifodalangan asosiy kapital ($x_1 = K$ -yil davomida ***ishlatiladigan asosiy kapital***), mehnat($x_2 = L$ -yil davomida ***sarflanadigan mexnatning*** birlik miqdori) olinadi. Shunday qilib ikki faktorli $f(x_1, x_2)$ yoki Y= $f(K,L)$ ishlab chiqarish funksiyasi tuziladi. Ikki faktorli ishlab chiqarish funksiyasidan uchta faktorliga o'tiladi. Uchinchi faktor sifatida, ayrim hollarda, ishlatiladigan tabiiy resurslar kiritiladi.

$Y = f(x_1, x_2)$ ishlab chiqarish funksiyasining parametrlari va uning xarakteristikasi f t vaqtga bog'liq bo'lmasa (lekin resurs hajmi va ishlab chiqarish hajmi t vaqtga bog'liq bo'lishi, ya'ni davriy qatorlar ko'rinishida berilishi mumkin) bunday ishlab chiqarish funksiyasi statik deb aytiladi. Misol uchun $x_1(0), x_1(1), ..., x_1(T)$; $x_2(0), x_2(1), ..., x_2(T)$; $y(0), y(1), ..., y(T)$ $y(t) = f(x_1(t), x_2(t))$. Bu yerda t yil tartibi, $t = 0,1,...,T$; 1,2,...,T yillarni o'z ichiga olgan t=0 vaqt oralig'idagi boshlang'ich yil.

1-misol Alohida olingan hudud yoki butun mamlakat miqyosida masalalarni modellashtirish uchun (ya'ni makroiqtisodiy shuningdek, mikroiqtisodiy darajadagi masalani yechish uchun) ko'pincha $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$ ko'rinishdagi ishlab chiqarish funksiyasidan foydalaniladi. Bu yerda a_0, a_1, a_2 lar ishlab chiqarish funksiyasining parametrlari. a_0, a_1, a_2 lar musbat o'zgarmaslar bo'lib, $a_1 + a_2 = 1$ bo'ladi. Bu keltirilgan funksiya Kobb-Duglasning ishlab chiqarish funksiyasi deb aytiladi. Bu funksiyani 1929 yilda amerikalik ikki iqtisodchi qo'llash uchun taqdim qilgan. Kobb-Duglas funksiyasi o'zining tuzilishi oddiyligi bilan turli nazariy va amaliy masalalarni yechishda qo'llanilib kelmoqda. Bu funksiya *multiplikativ* ishlab chiqarish funksiyalari sinfiga kiradi. 5.2-rasmda Kobb-Duglas funksiyasi grafigi keltirilgan: G chizig'idan ko'rinib turibdiki, birinchi turdagi resurs sarf-xarajatlarini oshirish bilan y ishlab chiqarish ham o'sadi, lekin birinchi resursning har bir qo'shimcha birligi Y ishlab chiqarishning kam miqdorda o'sishini ta'minlaydi. Bu holatni quyidagicha izohlash mumkin. Agar ishchi xodimlarning soni va malakasi o'zgarmasdan, ularga xizmat qiladigan dastgohlar soni ikki marotiba oshirilsa, albatta y ishlab chiqarishni ikki marotabaga oshirmaydi.



5.2- rasm.

2-misol. Chiziqli ishlab chiqarish funksiyasi ko'rinishi: $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$ (ikki omilli) va $y = a_0 + a_1x_1 + ... + a_nx_n$ (ko'p omilli) dan iborat. Bu funksiya esa *additiv* ishlab chiqarish funksiyalari sinfiga kiradi. Multiplikativ ishlab chiqarish funksiyalaridan additivga o'tish logarifmlash operatsiyasi orqali amalga oshiriladi. Ikki faktorli multiplikativ ishlab chiqarish funksiyasi $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$ uchun additivga o'tish: $\ln y = \ln a_0 + a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2$ ko'rinishda bo'ladi.

$\ln y = w$, $\ln x_1 = v_1$, $\ln x_2 = v_2$ belgilashlarni kiritsak, quyidagi additiv ishlab chiqarish funksiyasi hosil bo'lasi: $w = \ln a_0 + a_1 v_1 + a_2 v_2$.

Agar $y = a_0 K^{a_1} L^{a_2}$ Kobb-Duglassning ishlab chiqarish funktsiyasida ko'rsatkichlar darajasi $a_1 + a_2 = 1$ bo'lsa, u holda uni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin.

$$\frac{Y}{L} = \frac{a_0 K^{a_1} L^{a_2}}{L} = \frac{a_0 K^{a_1}}{L^{1-a_2}} = \frac{a_0 K^{a_1}}{L^{a_1}} = a_0 \left(\frac{K}{L}\right)^{a_1} \quad \text{ya'ni}$$

$$\frac{Y}{L} \approx a_0 \left(\frac{K}{L}\right)^{a_1}; \quad \frac{Y}{L} = Z \quad \text{va} \quad \frac{K}{L} = K$$ kasrlar mos ravishda mehnat unumdorligi va mehnatning kapital bilan ta'minlanganligi deb aytiladi.

Yangi belgilardan foydalanib, $Z = a_0 K^{a_1}$ ni hosil qilamiz, ya'ni ikki faktorli Kobb-Duglassning ishlab chiqarish funktsiyasidan bir faktorli ishlab chiqarish funktsiyasini hosil qildik. $0 < a_1 < 1$ bo'lganligi uchun oxirgi formuladan mehnat unumdorligi Z uning kapital bilan qurollanganligiga nisbatan sekin o'sar ekan. Lekin bu xulosa Kobb-Duglasning statik ishlab chiqarish funktsiyalari uchun mavjud texnologiya va resurslar ramkasida to'g'ri.

Agar 1) t vaqt ishlab chiqariladigan mahsulot hajmiga ta'sir qiluvchi mustaqil o'zgaruvchi miqdor sifatida shakllansa; 2) ishlab chiqarish funktsiyasi parametrlari va uning f xarakteristikasi t vaqtdan bog'liq bo'lsa, u holda ishlab chiqarish funktsiyasi *dinamik* deb aytiladi.

5.2. Ishlab chiqarish funksiyalarining xossalari

Ishlab chiqarish funksiyalariga nisbatan iqtisodiy asoslarga ega bo'lgan quyidagi taxminlar qilinadi:

1.Biron-bir resurs ishlatilmasdan qolsa ishlab chiqarish mavjud bo'lmaydi, yani

$$\begin{cases} f(0,x_2)=0, \\ f(x_1,0)=0 \end{cases}$$

2. Resurslar xarajatini oshirish bilan mahsulot ishlab chiqarish kamaymaydi, yani $Y=f(x_1,x_2)$ kamaymaydigan funksiya. Buni matematik ifodsi quyidagicha:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \geq 0 \qquad (i=1,2).$$

3. Boshqa turdagi resurslar miqdorini oshirmasdan bitta resurs sarf-xarajatini oshirishdan har bir qo'shimcha i –turdagi birlik resurs hisobiga ishlab chiqarish miqdori oshmaydi, ya'ni

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \leq 0 \qquad (i=1,2).$$

4. Ishlab chiqarish funksiyasi bir jinslidir, ya'ni

$$f(tx_1,tx_2)=t^p f(x_1,x_2) \qquad (5.2.1)$$

bu yerda t ≥1 bo'lib, kengaytirish masshtabi deb aytiladi.

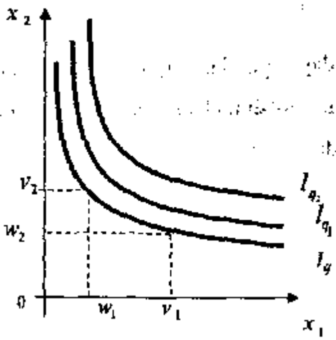
(5.1.3) formulaning ma'nosi resurslar xarajatini t marotibaga oshirilsa, mahsulot ishlab chiqarish hajmi ham $t^p > t$ marotiba oshishi mumkin demakdir. $p<1$ bo'lsa, ishlab chiqarish masshtabini oshirishdan ishlab chiqarish samaradorligi pasayadi. $p=1$ bo'lsa, ishlab chiqarish masshtabini oshirishdan o'zgarmas samaradorlikka ega bo'linadi.

$y=a_0x_1^{a_1}x_2^{a_2}$ $a_1+a_2=1$ funksiya uchun 1-4 xossa bajariladi.

$y=a_0+a_1x_1+a_2x_2$ $(a_0>0, a_1>0,\ a_2>0)$ ishlab chiqarish funksiyasi uchun 1-xossa $(a_0=0)$ bo'lganda bajariladi va 4-xossa bajarilmaydi.

$q=f(x_1,x_2)$ (q > 0 - haqiqiy son) darajadagi l_q chiziqlar to'plamiga mos keluvchi $y=f(x_1,x_2)$ ishlab chiqarish funksiyasi ishlab chiqarish funksiyasining *izokvantasi* deb aytiladi. Boshqacha aytganda shunday darajadagi nuqtalar to'plamiki, unda ishlab chiqarish o'zgarmas bo'lib, u p ga teng.

Bitta I_q izokvantga qarashli bo'lgan turli (v_1,v_2) va (w_1,w_2) to'plam sarflanadigan (ishlatiladigan) resurslari (ya'ni $q=f(v_1,v_2)=f(w_1,w_2)$) bir turdagi p ishlab chiqarish hajmini beradi. Izokvant – bu OX_1X_2 ikki o'lchovli tekislikning musbat qismida joylashgan chiziqdir.



5.3-rasm

5.3-rasmda lq_1 ва lq_2 Kobba –Duglas ishlab chiqarish funksiyalarining izokvantlari berilgan. Rasmdan ko'rinib turibdiki, lq_1 ga nisbatan «shimoli sharqroqda» joylashgan lq_2 ga katta ishlab chiqarish hajmi mos keladi (ya'ni $q_2 > q_1$). Agar ishlatiladigan asosiy kapital miqdori oshsa ya'ni $(x_1 = K \to \infty)$, 5.3 – rasmdan ko'rinib turibdiki, mehnat xarajatlari cheksiz kamayadi (ya'ni $x_2 = L \to +0$). Xuddi shunday $(x_2 = L \to +\infty)$ bo'lsa, u holda $(x_1 = K \to +0)$ bo'ladi.

Ishlab chiqarish funksiyalarining marjinal va o'rtacha qiymatlari

$Y = f(x) = f(x_1, x_2)$ ishlab chiqarish funksiyasi berilgan bo'lsin.

$A_i = \dfrac{f}{x_i}$ – miqdor i– resursning o'rtacha samaradorligi yoki i-resurs bo'yicha o'rtacha ishlab chiqarish deb aytiladi.

$M_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ – miqdor i– resursning marjinal (eng katta) samaradorligi yoki i-resurs bo'yicha eng ko'p ishlab chiqarish deb aytiladi.

Eng kop ishlab chiqarish ko'rsatkichi sarf qilinadigan boshqa resurslar hajmini o'zgartirmasdan i-turdagi resurs hajmini bir birlikka oshirganda ishlab chiqarish hajmi qancha birlikka oshishini ko'rsatadi.

5.1-Misol. $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$ ishlab chiqarish funksiyasi uchun A_1, A_2, M_1 va M_2 larni aniqang.

$$A_1 = \frac{y}{x} = \frac{f(x)}{x_1} = a_0 x_1^{a_1 - 1} \cdot x_2^{a_2};$$

$$A_2 = \frac{y}{x} = \frac{f(x)}{x_1} = a_0 x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2 - 1};$$

$$M_1 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = a_1 \cdot A_1;$$

$$M_2 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = a_2 \cdot A_2$$

$$\frac{M_1}{A_1} = a_1 \le 1 \Rightarrow M_1 \le A_1; \quad \frac{M_2}{A_2} = a_2 \le 1 \Rightarrow M_2 \le A_2.$$

$y = f(x)$ ishlab chiqrish funksiyasi uchun $M_i \le A_i$ $(i = 1,2)$ bajariladi, ya'ni i-turdagi resursning *eng kop samaradorligi o'rtacha samaradorlikdan* katta emas.

5.2-misol. $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 (a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0)$ additive ishlab chiqarish funksiyasi uchun A_1, A_2, M_1 va M_2 larni aniqlang.

Masalani yechish.

$$A_1 = \frac{y}{x_1} = \frac{f(x)}{x_1} = \frac{a_0}{x_1} + a_1 + a_2 \frac{x_2}{x_1}$$

$$A_2 = \frac{y}{x_2} = \frac{f(x)}{x_2} = \frac{a_0}{x_{21}} + a_1\frac{x_1}{x_2} + a_2;$$

$$M_1 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = a_1, \quad M_2 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = a_2;$$

$$\frac{M_1}{A_1} \le 1 \Rightarrow M_1 \le A_1; \quad \frac{M_2}{A_2} \le 1 \Rightarrow M_2 \le A_2.$$

$Y = f(x)$ $x = (x_1, x_2)$ funksiya ishlab chiqarish funksiyasi bo'lsin.

Eng kop ishlab chiqarish M_i ning o'rtacha ishlab chiqarish miqdori

A_i ga nisbati i-resurs bo'yicha *ishlab chiqarishning elastikligi* deb aytiladi.

$$E_i = \frac{M_i}{A_i} = \frac{x_i}{f(x_1, x_2)} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

$E_1 + E_2 = E_x$ *ishlab chiqarishning elastikligi* deb aytiladi.

Δx_i ning kam miqdorda aylanishidan quyidagi taqribiy tenglamani hosil qilamiz:

$$E_i = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right) / \left(\frac{\partial f(x)}{x_i}\right) \approx \left(\frac{\Delta_i f(x)}{f(x)}\right) / \left(\frac{\Delta x_i}{x_i}\right)$$

E_i miqdor, agar boshqa turdagi resurslar hajmini o'zgartirmasdan i-turdagi resurs bir foizga oshirilsa, Y ishlab chiqarishning necha foizga, **o'zgarishini** ko'rsatadi.

5.3-misol. Kobba-Duglas funksiyasi uchun E_1, E_2, E_x larni hisoblang.

$$E_1 = a_1, E_2 = a_2;$$

$$E_x = E_1 + E_2 = a_1 + a_2;$$

5.4-misol.

$$E_1 = \frac{x_1}{f(x)}\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = \frac{a_1 x_1}{a_1 x_1 + a_2 x_2}; \quad E_2 = \frac{x_1}{f(x)}\frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = \frac{a_2 x_2}{a_1 x_1 + a_2 x_2};$$

$$E_x = E_1 + E_2 = 1.$$

$Y = f(x)$, $x = (x_1, x_2)$ funksiya ishlab chiqarish funksiyasi bo'lsin. i-turdagi resursni j-turdagi resurs bilan almashtirishning eng katta normasi deb quyidagi ifodaga aytiladi:

$$R_{ij} = -\frac{dx_j}{dx_i} \qquad (i, j = 1,2) \qquad (5.2.2)$$

bu yerda i –almashtiriladigan resurs, j –almashadigan.

Y ishlab chiqarish ozgarmas bo'lsin. U holda uning differensiali nolga teng bo'ladi:

$$0 = dy = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} dx_2.$$

Bundan birinchi differensial dx_j ni topsak,

$$dx_j = -\frac{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}} dx_i \qquad (\mathrm{i, j = 1,\ 2}) \qquad \mathbf{(5.2.3)}$$

hosil bo'ladi. Uni dx_i ga bolib quyidagini **hosil qilamiz:**

$$\frac{dx_j}{dx_i} = -\frac{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}} \qquad (\mathrm{i, j = 1,\ 2}) \qquad \mathbf{(5.2.4)}$$

(5.2.2), (5.2.3), (5.2.4) lar asosida quyidagi hosil bo'ladi:

$$R_{ij} = -\frac{dx_j}{dx_i} = \frac{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}} > 0 \qquad (i \neq j, i = 1,2) \qquad \mathbf{(5.2.5)}$$

Ikki omilli ishlab chiqarish funksiyasi uchun quyidagi tenglik **orinliligini** korish qiyin emas:

$$R_{12} = \frac{E_1}{E_2} \frac{x_2}{x_1}.$$

Y ishlab chiqarish o'zgarmas bo'lganda quyidagi hosil qilinadi:

$$R_{12} = -\frac{dx_2}{dx_1} \approx \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \qquad (5.2.6)$$

R_{12} *resurslarning o'rnini bosish* normasi, birinchi resurs sarfi bir birlikka kamayganda ikkinchi resurs sarfining (ishlab chiqarish ozgarmas bo'lganda) qancha birlikka o'sishini ko'rsatadi.

5.5-misol. Kobb-Duglas funksiyasi uchun R_{12} va R_{21} larni toping.

Yechish:

$$R_{12} = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right) / \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right) = \frac{a_1}{a_2} \frac{x_2}{x_1};\ R_{21} = \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right) / \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right) = \frac{a_2}{a_1} \frac{x_1}{x_2}.$$

5.6-misol. $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 (a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ a_2 > 0)$ funksiyasi uchun R_{12} va R_{21} larni toping.

Misol yechimi:

$$R_{12} = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right) / \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right) = \frac{a_1}{a_2};\ R_{21} = \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right) / \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right) = \frac{a_2}{a_1}.$$

5.7-misol. $f = 2x_1 + 3x_2$ berilgan bo'lsin.

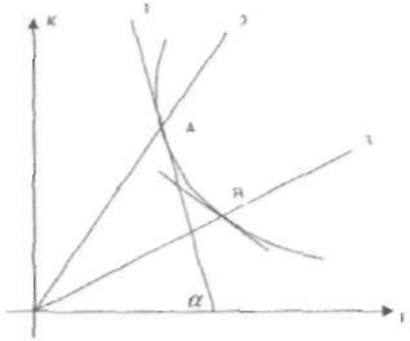
Bu yerda R_{ij} ni topadigan bo'lsak:

$$R_{ij} = \frac{\partial f}{\partial x_1} : \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{2}{3}$$ hosil bo'ladi.

Bundan kelib chiqadiki, 1 resursning 2 birligi 2 resursning 3 birligining o'rnini bosadi.

Faktorlarning o'rnini bosish elastikligi. CES ishalb chiqarish funktsiyasi.

Kobb–Duglass ishlab chiqarish funktsiyasini turli yo'nalishlarda umumlashtirish odat tusiga kirgan. Bunday umumlashtirishga CES (*constant* elasticity of substitution) o'rnini bosishning o'zgarmas elastiklik funktsiyasi kiradi.

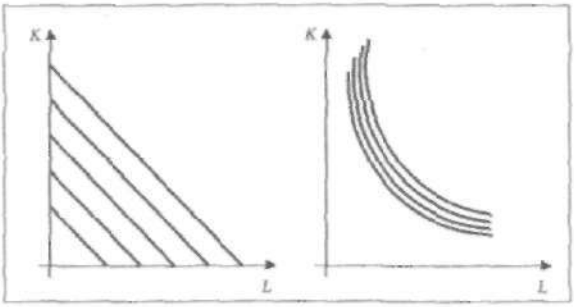


5.5-rasm

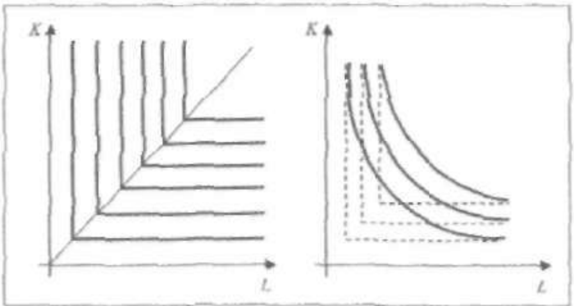
O'rnini bosishning elastikligi σ - ishlab chiqarish funktsiyalari izokvantalarining «egriligi» o'lchamidan iborat. Aniqroq qilib aytganda «egrilik» $\frac{1}{\sigma}$ miqdorni o'lchamini ko'rsatadi. Mehnatning kapitalni o'rnini bosish elastikligi

$$\sigma_{LK} = d\ln\left[\frac{K}{L}\right] / d\ln\left(\frac{Y_L'}{Y_K'}\right)$$

$\left(\frac{K}{L}\right)$ kapital bilan qurollantirish mehnatni kapital bilan almashtirishning eng katta normasi: $\left(MRS_{KL} = -\frac{dK}{dL} = \frac{Y_L'}{Y_K'}\right)$ni 1% ga o'zgartirganda uning qancha % ga o'zgarishini ko'rsatadi. Agar ishlab chiqarish funktsiyalari izokvantlardan bittasini KL tekisligida (5.5-rasm) uni 1 soni bilan belgilasak, u holda A nuqtadagi almashtirishning eng katta normasi bu izokvantning hosil qilgan tangens burchagidan iborat. Izokvant bo'yicha A nuqtadan V nuqtaga o'tganda urinma egilishi o'zgaradi, shuningdek $\left(\frac{K}{L}\right)$munosabat ham o'zgaradi. Bu munosabat har bir koordinata boshidan o'tuvchi to'g'ri chiziq bo'yicha o'zgarmas (misol 2 va 3 to'g'ri chiziqlar) $\frac{1}{\sigma}$ miqdor daraja chiziqi tangens burchagini $\left(\frac{K}{L}\right)$ munosabatning birlik hisobdagi o'zgarishiga nisbatan o'zgarishini ko'rsatadi. Ma'lumki o'tish paytida daraja chizig'i qancha ko'p egilsa, aytaylik A nuqtadan B nuqtaga o'tishda, daraja chizig'i shuncha ko'p «egri» bo'ladi. a-d rasmlarda $y = aK + bL + c$ (chiziqli), ishlab chiqarish funktsiyasi, Kobb-Duglas ishlab chiqarish funktsiya, $y = \min(aK, bL)$ o'rnini bosishning cheksiz elastikligiga ega bo'lgan ishlab chiqarish funktsiyasi (Leontev funktsiyasi) va CES ishlab chiqarish funktsiyalarining daraja chiziqlari berilgan.



a-rasm b-rasm



c-rasm d-rasm

Chiziqli ishlab chiqarish funktsiyasi nolinchi «egrilikka» va mos ravishda cheksiz o'rnini bosishning elastikligiga ega. Kobb-Duglas funktsiyasi 1 ga teng bo'lgan o'rnini bosishning elastikligiga ega. Leontev funktsiyasi o'rnini bosishning nolinchi elastikligiga ega, unda resurslar berilgan proportsiyada ishlatilishi kerak lekin ular bir birining o'rnini bosmasliklari kerak. *Iqtisodiyotda* resruslarning bir birining o'rnini bosish darajasi turlicha bo'lishi mumkin va shunga mos ravishda o'rnini bosish elastikligi ham turlicha bo'ladi.

5.8-misol. $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 (a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ a_2 > 0)$ funksiyasi uchun R_{12} va R_{21} larni toping.

Misol yechimi:

$$R_{12} = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right) / \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right) = \frac{a_1}{a_2};\ R_{21} = \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right) / \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right) = \frac{a_2}{a_1}$$

5.9-misol. $f = 2x_1 + 3x_2$ berilgan bo'lsin.

Bu yerda R_{ij} ni topadigan bo'lsak:

$$R_{ij} = \frac{\partial f}{\partial x_1} : \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{2}{3}$$

hosil bo'ladi.

Bundan kelib chiqadiki, 1 resursning *2 birligi 2 resursning* 3 birligining *o'rnini bosadi.*

Ishlab chiqarishni optimallashtirish tushunchasi

Firmaning aniq bir davrdagi (misol uchun, ma'lum bir yil uchun) *R daromadi (tushumi)* deb firma ishlab chiqargan umumiy mahsulot *hajmi* y *ni* p_0 (bozor) narxiga ko'paytmasiga aytiladi.

Firmaning S *xarajati* deb, firmaning ma'lum bir davrdagi barcha turdagi xarajatlari $C = p_1x_1 + p_2x_2$ ga aytiladi, bu yerda x_1 va x_2 – lar firmaning sarf qiladigan (ishlatadigan) resurslari hajmi (*ishlab chiqarish omillari*), p_1 va p_2 lar resurslarning bozor bahosi (ishlab chiqarish omili).

Firmaning ma'lum bir davrdagi *PR foydasi* **deb firmaning *R* daromadi** va C xarajatlari orasidagi farqqa aytiladi:

$$PR = R - C$$

yoki

$$PR(x_1, x_2) = p_0 f(x_1, x_2) - (p_1 x_1 + p_2 x_2).$$

Oxirgi tenglama firmaning sarf qilinadigan (ishlatiladigan) resurslari atamasi orqali ifodalangan foydasidan iboratdir. $y = f(x_1, x_2)$ -firmaning ishlab chiqarish funksiyasidan iboratdir. Firma tomonidan ishlab chiqariladigan mahsulotning umumiy hajmi Y ning sarf qilinadigan (ishlatiladigan) resurslar hajmi x_1 va x_2 lar orqali ifodasidir.

Firmalar nazariyasida agar firma bozor sharoitida faoliyat ko'rsatayotgan bo'lsa, u p_0, p_1 va p_2 bozor narxlariga ta'sir o'tkaza olmaydi, balki bu narxlar bilan «kelishadi».

Firmaning asosiy *maqsadi* sarf qilinadigan (ishlatiladigan) resurslarini ratsional taqsimlash orqali foydani *maksimallashtirishdan* iboratdir. Aniq bir davrdagi foydani maksimallashtirish masalasi *PR→max* dan iboratdir.

Bunday maksimallashtirish masalasining qo'yilishi qanday aniq vaqt oralig'i (uzoq muddatli yoki qisqa muddatli) qaralishiga bog'liqdir.

Uzoq muddatli oraliqda firma sarf xarajatlar fazosidan ixtiyoriy $X = (x_1, x_2)$ vektorni erkin tanlashi mumkin. Shuning uchun ham bunday holatda foydani maksimallashtirish masalasi $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ shartlarda

$$p_0 f(x_1, x_2) - (p_1 x_1 + p_2 x_2) = PR(x_1, x_2) \to \max$$

dan iboratdir.

Qisqa muddat oralig'ida firma o'zi sarf qiladigan (ishlatadigan) resurslar hajmining qat'iy cheklanganligini hisobga olishi kerak. Buni quyidagicha ifodalash mumkin:

$g(x_1, x_2) \leq b$ (bu cheklanishlar bir nechta bo'lishi mumkin.)

Qisqa muddat uchun chiziqli programmalashtirish maslasi:

$$g(x_1, x_2) \leq b, \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

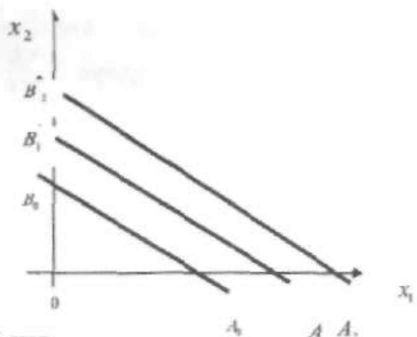
shartlar bajarilganda

$$p_0 f(x_1, x_2) - (p_1 x_1 + p_2 x_2) = PR(x_1, x_2) \to \max$$

dan iboratdir.

$z = p_1 x_1 + p_2 x_2$ ishlab chiqarish xarajatlari funksiyasi darajasini ifodalovchi chiziqqa *izokostlar* deb aytiladi.

Izokost $0X_1X_2$ tekisligining musbat qismida joylashgan to'g'ri chiziq kesmalaridan iborat. Shunday qilib, izokostlar A_0B_0, A_1B_1, A_2B_2,... (4.4.- rasmga qarang.) kesmalardir. A_0B_0, A_1B_1, A_2B_2 kesmalar paralelldir.



5.6-rasm

A_0B_0 kesmadan «shimoli–sharqroqda» joylashgan A_1B_1 kesma sarf xarajatlarning katta qismiga mos keladi. Haqiqatan ham A_2B_2 kesma uchun C ishlab chiqarish xarajatlari C_2 ga teng, A_1B_1 kesma uchun C ishlab chiqarish xarajatlari C_1 ga teng, A_0B_0 kesma uchun C ishlab chiqarish xarajatlari C_0 ga teng, u holda $C_0 < C_1 < C_2$. Buning teskarisi ham o'rinli. A_0B_0 kesma uchun quyidagini yozish mumkin:

$$C_0 = p_1 x_1 + p_2 x_2, \; x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0,$$

A_1B_1 kesma uchun

$$C_1 = p_1x_1 + p_2x_2,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

A_2B_2 kesma uchun

$$C_2 = p_1x_1 + p_2x_2,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 .$$

5-bobga doir topshiriqlar

1-*topshiriq*.

Berilgan *ishlab chiqarish funksiyalari uchun* quyidagilarni bajarish kerak:

a) *i*-turdagi resursning eng ko'p samaradorligini hisoblang:

$$M_i = \frac{\partial y}{\partial x_i} \qquad (i=1,2);$$

b) *i*-turdagi resursning o'rtacha samaradorligini hisoblang:

$$A_i = \frac{y}{x_i} \qquad (i=1,2);$$

v) i - turdagi resursni ishlab chiqarishning elastiklik **koeffitsientini** hisoblang:

$$E_i = \frac{\chi_i}{\gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial \chi_i} \qquad (i=1,2).$$

g) *i* – turdagi resursni *j*- turdagi resurs bilan almashtirishning eng katta normasini $R_{ij} = \frac{\partial Y}{\partial X_i} \Big/ \frac{\partial Y}{\partial X_j}$ toping:

1. $\gamma = \chi_1^{0,5}\chi_2^{0.2}$
2. $\gamma = (2,5)^{\chi_1\chi_2}$
3. $\gamma = (\chi_1^{0,22} + 2,5)\chi_2^{0.25}$
4. $\gamma = (\chi_1 + k)^{0,5}\chi_2^{0,02}$
5. $\gamma = 2,3^{\chi_1\chi_2}$
6. $\gamma = \sqrt{(3\chi_1 + 5)\chi_2}$
7. $\gamma = \chi_1^{\frac{1}{2}} + 2,7\chi_2^{\frac{1}{3}}$
8. $\gamma = (3\chi_1 + k)^{0,5}/(2\chi_2)$
9. $\gamma = \chi_2(\chi_1 + k)$
10. $\gamma = (3\chi_1 + k)^{0,05}\chi_2$

2-topshiriq.

Fermer xo'jaliklaridagi yalpi mahsulotni **ishlab chiqarish funksiyasi Kobb-Duglass** funksiyasi orqali modellashtirilgan:

$$Y = b \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2},$$

bu yerda y - yalpi mahsulot narxi (sh.b.);

x_1 - barcha vositalar narxi; x_2 - ishchilar soni (odam.soat).

b, a_1, a_2 larni topish kerak.

5.1-jadval

Y	2,8	2,9	3,1	3,8	5,1	7,1
x_1	0,7	0,8	0,8	0,9	1,3	8,2
x_2	38+k	43+k	48+k	50+k	68+k	73+k

5.1- jadvaldan:

a) x_1, x_2 larning unumdorligini;

b) elastiklik koeffitsientini;

d) samaradorlik masshtabini aniqlash kerak;

Tayanch so'z va iboralar

Ishlab chiqarish funktsiyalari, matemaik modellashtirish, miqdoriy tahlil qilish, erkli o'zgaruvchilar, erksiz o'zgaruvchi, bir resursli, ishlab chiqarish *funksiyalarining parametrlari, ishlab chiqarish tizimi, multiplikativ* ishlab chiqarish funksiyalari, additiv ishlab chiqarish funksiyalari, ishlab chiqarish funksiyasining izokvantasi, eng ko'p ishlab chiqarish, ishlab chiqarishning elastikligi, resurslarning o'mini bosish normasi, Ishlab chiqarishni optimallashtirish, izokost.

V bobga doir savollar

1. Ishlab chiqarish funkiyasi nima?
2. Ishlab chiqarish funksiyalarining qaysi xossalari mavjud?
3. Eng ko'p ishlab chiqarish, o'rtacha ishlab chiqarish qanday aniqlanadi?
4. Eng ko'p ishlab chiqarish va o'rtacha ishlab chiqarish orasida qanday bog'lanish mavjud?
5. i-resurs bo'yicha ishlab chiqarishning elastikligini tushuntiring.
6. Bir resursni ikkinchisi bilan almashtirishning eng katta normasini aniqlashning ifodasi qanday, ma'nosini tushunturing.

7. Ishlab chiqarish funksiyalarining qanday turlari mavjud?

8. Izokvanta nima? Uning iqtisodiy ma'nosini ayting.

9. Ishlab chiqarishni optimallashtirish nima?

10. Izokost nima? Uning iqtisodiy ma'nosini tushuntiring.

VI bob. IQTISODIY DINAMIKA VA UNI MODELLASHTIRISH

6.1. Iqtisodiy dinamika ko'rsatkichlari

Iqtisodiyot fani yechadigan masalalar vaqt omilini hisobga olgan holda statik va dinamik masalalarga bo'linadi. Statika iqsodiy obyektlar holatini biror bir aniq vaqt oralig'ida qarab, ular parametrlarining vaqt bo'yicha o'zgarishini hisobga olmay o'rganadi. Dinamik masalalarda esa, o'zgaruvchilarning o'zaro bog'lanishi nafaqat vaqt bo'yicha, balki ular bog'lanishlarining vaqt bo'yicha o'zgarishini ham aks ettiradi. Masalan investitsiya dinamikasi asosiy kapital miqdori dinamikasini aniqlaydi, bu esa o'z navbatida ishlab chiqarish hajmi o'zgarishining muhim omili hisoblanadi.

Iqtisodiy dinamika vaqt bo'yicha uzluksiz yoki diskret bo'lgan holatda qaralishi mumkin. Uzluksiz vaqt modellashtirish uchun qulay bo'lib, differensial hisob va differensial tenglamalarni qo'llashga imkon beradi. Diskret vaqt ham qo'llanilish uchun qulaydir, ma'lumki statistik ma'lumotlar diskret bo'lib, ular aniq bir vaqt oralig'iga qarashli bo'ladi. Diskret vaqt uchun tenglamalar ayirmasi ishlatiladi. E'tibor beradigan bo'lsak, ko'pchilik tanish bo'lgan iqtisodiy dinamik modellar uzluksiz va diskret holatlarda qaralgan. Ikkala variantda ham modellarning murakkablik darajasi esa bir xil bo'lib, ular uchun bir xil natijalar olish mumkin.

Iqtisodiy obyektning o'sishini xarakterlaydigan ko'rsatkichlarga *absolut o'sish, o'sish surati, qo'shimcha o'sish ko'rsatkichlari* kiradi.

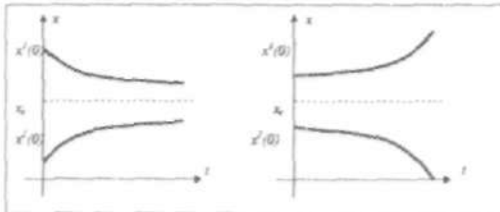
Agar vaqtdan bog'liq bo'lgan $A(t)$ miqdor berilgan bo'lsa, u holda 0 va 1 vaqt oralig'idagi absolut o'sish $\nabla A(1) = A(1) - A(0)$ ga teng, o'sish surati $\eta_1 = \frac{A(1)}{A(0)}$, qo'shimcha o'sish sur'ati $\alpha_1 = \eta_1 - 1 = \frac{A(1) - A(0)}{A(0)}$ formulalar orqali ifodalanadi.

Agar qo'shimcha o'sish sur'ati α vaqt bo'yicha o'zgarmas bo'lsa, u holda $A(t)$ dinamik ko'rsatkich $A(t) = A(0)(1+\alpha)^t$ ko'rinishda ifodalanadi.

Agar $A(t)$ vaqtning uzluksiz funksiyasidan iborat bo'lsa, uning doimiy sur'atdagi o'sishi $A(t) = A(0) * e^{\lambda t}$ ko'rinishda yoziladi. Bu yerda $e \approx 2,72$ – natural lagorifimga asoslangan. λ - uzluklsiz o'sish surati. $\lambda(t) = \frac{dA(t)}{A(t) * dt}$ orqali hisoblanadi.

Iqtisodiyotda dinamik muvozanat tushunchasi. Muvozanatning oddiy modeli.

Iqtisodiy nazariyada muvozanat eng asosiy tushunchalardan hisoblanib, bunda obyekt o'zining holatini tashqi ta'sirsiz saqlaydi. Iqtisodiy dinamika masalalari muvozanat holatiga kelish va shuning bilan birga tashqi ta'sir ostida bu holatdan boshqa holatga o'tishni ifodalashni ham o'z ichiga oladi. Oddiy iqtisodiy sistemani muvozanat holatida va bu sistemaning harakatini uzluksiz hamda diskret holatlarda qaraymiz. Birinchi holatda sistemaning dinamikasi differensial tenglama bilan ifodalansa, ikkinchisida tenglamalar ayirmasi yordamida ifodalanadi. Differensial tenglama ko'rsatgichning o'zgarishini harakat tezligi x_t' bilan bog'laydi, x ko'rsatkichning o'zgarish tezligi x_e muvozanat qiymatidan chetga chiqish miqdoriga proportsionaldir. Boshqacha so'z bilan aytganda ko'rsatgich muvozanat qiymatidan qancha ko'p chetga chiqsa, u shunchalik unga tezroq qaytib kelishga intiladi. Agar tenglamada x ning vaqt bo'yicha faqat birinchi hosilasi qatnashib, bog'lanish chiziqli bo'lsa, bu chiziqli differensial tenglamadir. Aytaylik uning ko'rinishi quyidagicha bo'lsin: $x_t' = k(x - x_e)$, bu yerda k-koeffitsient. Bu tenglamada kx_e - ozod had; usiz tenglama $x_t' = kx$ bir jinsli deyiladi va uning umumiy yechimi $x = ce^{kt}$. Dastlabki bir jinsli bo'lmagan tenglama $x = x_e$ xususiy yechimga ega (agar x miqdor muvozant holatida tursa) uning umumiy yechimi esa, xususiy yechimlar yig'indisidan iboratdir, ya'ni $x = x_e + ce^{kt}$. Agar $t = 0$ da x miqdor $x(0)$ga teng bo'lib, c=x(0)-$c = x(0) - x_e$ $x(t) = x_e + (x(0) - x_e)e^{kt}$ bolsa u holda $e^{kt} \to 0$ va muvozanat barqaror bo'ladi. Ya'ni $x(t)$ x_e dan chetga chiqsa, u yana shu holatga kelishga harakat qiladi. $k>0$ bo'lganda $e^{kt}\to\infty$, bundan $x(t)\to\infty$ kelib chiqadi (agar boshlang'ich holat muvozanat holati bilan ustma- ust tushmasa).



6.1-rasm.

6.2. Bozorning girdobsimon modeli

Bu model bozorda, vaqt bo'yicha kechikishlar mavjud bo'lgan holda odatdagi talab va taklif egri chiziqlari orqali ifodalanuvchi tovarlar hajmi bilan narxning barqarorligini tekshirishga imkon beradi.

Bozorning girdobsimon modeli birinchi bo'lib L.Valras tomonidan iqtisodiy modelda narxni aniqlash uchun ishlatilgan bo'lib, istemolchi va ishlab chiqaruvchi bozor narxiga mos narxda turgan holda takomillashgan raqobatning mavjudligini taxmin qilgan. Bu jarayonni L.Valras quyidagicha tasvirlagan: bozor - bu auksioner bo'lib, tovarlarga narx belgilaydi; bundan keyin narx qo'yish jarayoni ishtirokchilari "shartli" tovar sotishadi, tovar sotilganligini auksionerga xabar beradi, auksioner shartni tekshiradi: talab $\begin{bmatrix} < \\ > \end{bmatrix}$ taklif. Agar bu shart bajarilsa, u holda auksioner dastlabki narxni o'zgartiradi, agar narx muvozanatda bo'lmasa, bu tovarning narxini ko'tarish(tushirish) kerak; talab = taklif bo'lsa, tovarni sotish yakunlanadi.

Aytaylik don tayyorlaydigan fermer joriy davrda tovar taklifini o'tgan davrdagi narx asosida belgilasin. Shuning uchun taklif funksiyasiga 1 vaqt birligida kechikish kiritiladi. Haqiqatan ham ishlab chiqarish hajmi to'g'risida joriy bahoni hisobga olib qaror qabul qilinadi, lekin ishlab chiqarish sikli ma'lum bir davomiylikka ega bo'ladi va bu qarorga mos keluvchi taklif bozorda berilgan siklning oxirida namoyon bo'ladi.

Talab egri chizig'i tovarga bo'lgan talab hajmining tovar shu paytdagi narxiga bog'liqligini ifodalaydi.

Modelni tuzish uchun quyidagi belgilashlar kiritiladi:

t-vaqt, $S(p)$ - taklif qonuni, $D(p)$ - talab qonuni, $P(t)$ – t vaqtdagi tovar narxi, ε-xato.

Quyidagilar faraz qilinadi:

- bozorda faqat bitta tovar(don) mavjud;
- vaqt: $t = 0,1,2,...$;
- tovarga talab $D(p) = C - Ep_t$, bu erda P_t t vaqtdagi tovar narxi
- taklif: $S(p) = A + Bp_{t-1}$ P_{t-1} t-1 vaqtdagi tovar narxi; muvozanatlik sharti: $D_t(p_t) = S_t(p_{t-1})$ bo'ladi.
- boshlang'ich narx ixtiyoriy olinadi, yani t=0 bo'lganda $P(0) = P_0$ deb olamiz.

Talab va taklif funksiyasi chiziqli:

$$S(p) = A + Bp_{t-1},\ D(p) = C - Ep_t. \qquad (6.2.1)$$

Muvozanatlik shartiga asosan

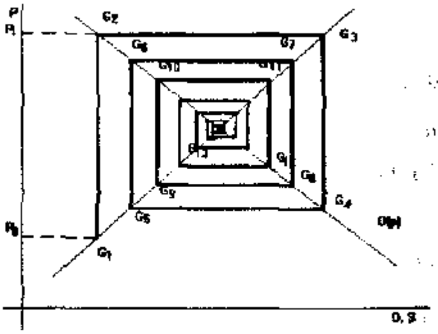
$$D(p_t) = S(p_{t-1}), ёки\ C - Ep_t = A + Bp_{t-1}. \qquad (6.2.2)$$

Muvozanat narxi va muvozanat hajmini hisoblash

Narxni "savdolashishning" grafik jarayoni quyidagidan iborat.

1. Narxni savdolashishni P_0 dan boshlaymiz. P_0G_1 kesmani o'tkazamiz. G_1 $S(p_0)$ ni ko'rsatadi. Bu taklifga G_2 mos keladi va u $D(P_1)$ talab hajmini ko'rsatadi, bu yerda birinchi savdolashish davri $D(P_1) > S(P_0)$ bo'ladi, chunki $|p_1 - p_0| > \varepsilon$.

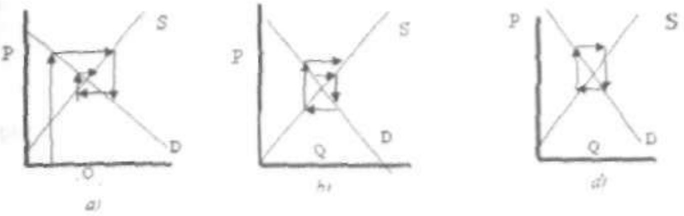
2.Savdolashish jarayoni G_3 nuqtadan boshlanadi, bu yerda $S(P_1)$ - P_1 narx bo'yicha taklif hajmi, G_4 nuqta esa P_2 ($p_0 < p_2 < p_1$) narx bo'yicha talab hajmi $D(P_2)$ ni ko'rsatadi, chunki $(P_2 - P_1) > \varepsilon$.



6.2-rasm

3. Savdolashish jarayoni $(P_k - P_{k-1}) \le \varepsilon$ bo'lguncha davom etadi. $P^* = P_k$ narx muvozanat narxi bo'ladi (yani $P_k = P_{k-1} + \varepsilon$), kelishuv hajmi esa: talab $D(P^*)$, taklif $S(P^*)$ bo'ladi. Bahoning va ishlab chiqarish hajmining xulq atvorini boshlang'ich nuqta muvozanat nuqtasi bilan ustma-ust tushmagan vaqtdan boshlab o'rganish zarur. Bu masalani avvalo grafik usulda yechish mumkin. Agar taklif egri chizig'i talab egri chizig'idan tikroq joylashgan bo'lsa, bunday bozorda muvozanat barqaror bo'ladi

(6.3 *a*-rasm). Agar talab egri chizig'i taklif egri chizig'iga nisbatan tikroq joylashgan bo'lsa, bozorda muvozanat barqaror bo'lmaydi (6.3 *b*-rasm). Agar talab va taklif egri chiziqlari bir xil joylashsa bozorda narx muvozanat narxi atrofida aylanib yuradi.



6.3-rasm

$$D(p_t) = S(p_{t-1}) \text{ ёки } C - Ep_t = A + Bp_{t-1}$$

muvozanatlik shartiga asosan, muvozanat narxi p^* va ishlab chiqarishning muvozanat hajmi Q^* larni topiladi. Ular yuqoridagi formulaga asosan quyidagi tenglamani *qanoatlantiradi:*

$$Q^* = C - Ep^* = A + Bp^*.$$

Bu yerdan

$$p^* = \frac{C-A}{B+E}, \quad Q^* = \frac{BC+AE}{B+E}.$$

(6.2.2) formulada p_t ni p_{t-1} orqali ifodalanib, $p_t = \frac{C-A}{E} - \frac{B}{E}p_{t-1}$ hosil qilinadi. Bu formulani ketma-ket qo'llash orqali quyidagi hosil bo'ladi:

$$p_1 = \frac{C-A}{E} - \frac{B}{E}\cdot p_0; \quad p_2 = \frac{C-A}{E} - \frac{B}{E}\cdot\left[\frac{C-A}{E} - \frac{B}{E}\right]\cdot p_0$$

Yoki umumiy ko'rinishda

$$p_1 = \frac{C-A}{E}\cdot\left[1 - \frac{B}{E} + \left[\frac{B}{E}\right]^2 + \ldots + (-1)^{t-1}\left[\frac{B}{E}\right]^{t-1}\right] + (-1)^t\left[\frac{B}{E}\right]^t\cdot p_0.$$

Katta qavs ichidagi ifoda geometrik progressiya yig'indisini beradi:

$$S_n = a_1\cdot(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) = a_1\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Agar $|q| < 1$ bo'lsa u holda $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$ bo'ladi.

Girdobsimon model uchun $q = -\frac{B}{E}$, $a_1 = \frac{C-A}{E}$. Bundan t vaqtdagi p_t narx uchun

$$p_t = \frac{C-A}{E} \cdot \frac{1-(-1)^t \left[\frac{B}{E}\right]^t}{1+\frac{B}{E}} + (-1)^t \left[\frac{B}{E}\right]^t \cdot p_0 \qquad (10)$$

bo'ladi. Ko'rinib turibdiki $\frac{B}{E} < 1$ da $\left[\frac{B}{E}\right]^t \to 0$ bo'lganligi uchun $p_t \to \frac{C-A}{E} = p^*$ bo'ladi. Taklif chizig'i talab chizig'iga nisbatan tikroq bo'lsa, muvozanat barqaror bo'ladi. Agar $\frac{B}{E} > 1$ bo'lsa, u holda $\left[\frac{B}{E}\right]^t \to \infty$, ya'ni talab taklifga nisbatan tikroq bo'lsa, muvozanat barqaror emas.

$\frac{B}{E} = 1$, bo'lsa p_t ning qiymati muvozanat miqdori atrofida aylanadi. Bu holatlar grafiklarda berilgan:

6.3. Errou-Gurvitsning bozor modeli

Bu model amerikalik ekonomistlar K.Errou (Nobel mukofoti sovrindori) va L. Gurvits tomonidan ishlab chiqilgan. Bu model ham umumiy muvozanat nazariyasiga asoslanadi.

Quyidagicha faraz qilinadi:

- savdolashish jarayonida n-ta korxona qatnashadi $(i=\overline{1,n})$;
- korxona faqat bitta resurs ishlatadi;
- i-chi korxona faqat i-turdagi mahsulotni ishlab chiqaradi;

- bu mahsulotlarning istemolchisi faqat bitta;
- savdolashish auksioner orqali amalga oshiriladi.

Quyidagi belgilashlar kiritiladi:

t- vaqt intervali, Y_i^s - i - korxona tomonidan taklif qilingan i-tovar hajmi;

Y_i^d - i - tovarga istemolchi talabining hajmi;

L_i^d - i - korxonaning resursga bo'lgan talab hajmi;

L^s - korxona uchun resurs hajmi;

$Y_i^s = F_i(L_i^d)$ - i-korxonaning ishlab chiqarish funksiyasi, bu yerda ($Y_i^s = C_i(L_i^d)^{a_i}$, $a_i < 1$).

$P_i - i$ - tovarning narxi; W - resurs narxi, $U = U(Y_1^d, Y_2^d, ..., Y_n^d)$ foydalilik funksiyasi.

Errou-Gurvits modelida bozorning ishlash mexanizmi

i-korxona talab va taklifi bog'lanishining modeli quyidagi ishlab chiqarish funksiyasi orqali ifodalanadi:

$$Y_i^s = F_i(L_i^d) \geq Y_i^d \quad (i=1, n)$$

resursga talab modeli:

$$L_1^d + L_2^d + ... + L_n^d \leq L^s$$

mahsulot foydaliligini belgilovchi model quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$U(Y_1^d, Y_2^d, ..., Y_n^d) \to max U \ ,$$

$$(Y_1^d, Y_2^d, ..., Y_n^d) \in R_+^n.$$

Auksioner t vaqtda quyidagi narxlarni belgilaydi:

$P_i(t)$ - i- mahsulotning narxi, $W(t)$ -resurs narxi.

Auksioner talab uchun quyidagi narxini belgilaydi:

$$\frac{\partial u}{\partial y_i^d(t-1)}$$ (t-1) vaqtdagi talab narxi.

i-korxona ishlab chiqaradigan mahsulotiga sarf qilingan xarajatlar quyidagi vektor orqali ifodalanadi: $(L_i^d(t); Y_i^s(t))$,

ya'ni max→ $\Pi_i(t) = P_i(t)F_i(L_i^d(t)) - W(t)L_i^d(t)$

bajarilishi kerak. Bu birikmalar auksionerga ko'rib chiqish uchun taqdim qilinadi. Iste'molchining i-mahsulotga talabi quyidagicha: agar i-mahsulotga talab bo'lmasa yoki mahsulotning eng ko'p foydaliligi eng ko'p xarajatdan kam bo'lsa, istemolchi talab miqdori L_i^d ni o'zgartirmasdan qoldiradi. Aks holda istemolchi talabni quyidagicha o'zgartiradi:

β (eng ko'p foydalilik - eng ko'p xarajat)= $\beta(\frac{\partial U}{\partial Y_i^d(t-1)} - P_i(t))$ bo'ladi.

- Natijada iste'molchi talab miqdori $Y_i^d(t)$ ni ko'rsatadi,

ya'ni $Y_i^d(t) = \max\left\{\beta\left(\frac{\partial U}{\partial Y_i^d(t-1)} - P_i(t)\right) + Y_i^d(t-1),\, 0\right\}$,

bu erda β>0 – o'zgartirilishi mumkin bo'lgan miqdor.

-Auksioner, talab va taklif qoidasidan foydalanib, narxni quyidagicha o'zgartiradi: agar talab taklifdan katta bo'lsa , narx oshadi, agar talab taklifdan kichik bo'lsa, narx tushadi, agar talab 0 dan kichik bo'lsa va mos keluvchi narx nolga teng bo'lsa, u holda auksioner narxni tushira olmaydi.

Auksioner tasirining matematik modeli quyidagicha yoziladi:

$$P_i(t+1) = \max\left\{\alpha\left(Y_i^d(t) - Y_i^s(t)\right) + P_i(t), 0\right\},$$

$$W_t(t+1) = \max\left\{\gamma\left(L_1^d + \ldots + L_n^d - L^s\right) + W(t), 0\right\}.$$

$\alpha, \gamma > 0$ - o'zgartirish koeffitsientlari.

VI bobga doir topshiriqlar

1-topshiriq.

Iste'molchi daromadi $Y = C + I$ ga teng. Bu yerda C iste'mol, I – investitsiya. Iste'molning diskret qo'shimcha o'sish sur'ati 10%, investitsiyaniki

25%. Yil boshida ($t=0$) $C=500$, $I=150$. Y daromadning o'sish sur'ati 2-yilda nimaga teng?

2-topshiriq.

n yil davomida har yilning oxiriga kelib kreditorga bank λ ga teng bo'lgan so'mni to'lab boradi. Foiz stavkasi i ga teng, barcha pullar kreditorlar tomonidan bankka shu foizda o'tkaziladi. n- yilning oxirida uning pullari yig'indisi qancha bo'ladi? Agar $i=15\%$, $n=5$ bo'lganda yig'ilgan summa 100 ga teng bo'lishi uchun yillik to'lov qancha bo'lishi kerak?

3-topshiriq. $S_t = 20+1.2p_{t-1}$; $D_t = 420-1.4p_t; S_t = D_t$

ko'rinishdagi girdobsimon model berilgan. Agar dastlabki narx $P_0 = 40$ ga teng bo'lsa, muvozanat narxi, muvozanat hajmini aniqlang va talab, taklif chiziqlarini chizing.

4-topshiriq.

$S_t = 20+30p_{t-1}$; $D_t = 100-50p_t; S_t = D_t$ ko'rinishdagi girdobsimon model berilgan. Aytaylik $P_0 = 0{,}5$ ga teng bo'lsin. P_1, P_2, P_3, P_4 larni toping hamda ular qiymatlaridan foydalanib talab, taklif chiziqlarini chizing.

5-topshiriq.

Aytaylik girdobsimon modelda talab funksiyasi $D_t = \dfrac{3}{p_t}$; taklif funksiyasi esa, $S_t = 5p_{t-1}$, $P_0 = 1$ bo'lsin. Narxning va ishlab chiqarish hajmining o'zgarishini grafik tasvirlang. Muvozanat narxi va muvozanat ishlab chiqarish hajmi qanday? Muvozanat barqarormi?

Tayanch so'z va iboralar

Statik va dinamik masalalar, iqtisodiy dinamika, uzluksiz vaqt, diskret vaqt, absolut o'sish, o'sish surati, qo'shimcha o'sish, girdobsimon model, talab va taklif egri chiziqlari, muvozanat narxi, muvozanat hajmi, savdolashish jarayoni, muvozanat miqdori, auksioner, mahsulot foydaliligi.

VI bob uchun savollar

1. Qanday modellar dinamik modellar deb aytiladi, uning statik modellardan farqi nimada?

2. Qanday modellar uzluksiz va qanday modellar diskret dinamik modellar deb aytiladi?

3. O'sish suratlari turlarini ayting.

4. Muvozanatlik sharti nimadan iborat?

5. Muvozanatning oddiy modeli qanday ifodalanadi?

6. Bozor tushunchasi va uning turlarini ayting.

7. Bozorning girdobsimon modelini kim tuzgan va uning mohiyatini tushuntiring.

8. Muvozanat narxini topish qoidasini tushuntiring.

9. Qaysi hollarda muvozanat narxi mavjud bo'ladi?

10. Qaysi hollarda muvozanat narxi mavjud bo'lmaydi?

11. Errou - Gurvits modelining farazlarini ayting.

12. Bozorning Errou - Gurvits modelini ifodasini keltiring.

13. Bozorning Errou - *Gurvits modelida nima aniqlanadi?*

VII bob. MAKROIQTISODIY MASALALARNING MATEMATIK *MODELI*

7.1. Milliy daromadni aniqlashning Keyns modeli

Iqtisodiyotni xalq xo'jaligining bir qismi deb, tadqiqot obyekti sifatida qaralganda, unga ikki xil makro va mikro yondashuvni ajratib olish kerak.

Makro yondashuvda obyekt bir butun deb *olinib, uning ichki* bog'lanishlari, tuzilishi inkor etilib, faqat kiradigan va chiqadigan ma'lumotlari, ularning o'zaro bog'lanishlari o'rganiladi. Mikro yondashuvda esa, obyektning ichki *tuzilmasi, elementlari* orasidagi ichki bog'lanishlari o'rganiladi.

Makroiqtisodiy *tahlil deganda* xalq *xo'jaligi, uning* sektorini *o'rganishdagi* makro yondashuv tushuniladi. *Makroiqtisodiy tahlilda* ishlatiladigan modelga *makroiqtisodiy model* deb aytiladi. Makroiqtisodiy model ko'rsatkichlariga ijtimoiy mahsulot, milliy daromad va boshqalarning yig'indisi kiradi. Makroiqtisodiy *modellar xalq xo'jaligi* amal qilishi va uning *rivojlanishi* eng umumiy qonuniyatlarini nazariy tahlil qilishda ishlatiladi.

Angliyalik iqtisodchi Jon Keyns (1883-1946) zamonaviy makroiqtisodiy nazariyaning asoschilaridan biridir. Xalq xo'jaligini, ma'lum vazifani mustaqil *bajaruvchi, bitta umumlashgan omil - milliy daromad sifatida* qaraydi (bu yerda umumlashgan deganda, bitta omil - milliy daromadni ishlab chiqarish, taqsimlash va uni sarf qilish *tushuniladi*).

Iqtisodiy o'sish nazariyasining asosiy masalalaridan biri, milliy daromadni *aniqlash modelini tuzishdan iborat. Milliy daromadni aniqlashning bir qancha* modellari mavjud. Shulardan biri, J.Keynsning 1940 - yilda tuzgan milliy daromadni aniqlash modelidir.

Modelni tuzish uchun quyidagi farazlar qilinadi:

- Milliy daromadni aniqlashni $t \in (a,b)$ oraliq uchun qaraladi, bu yerda ishlab chiqarish quvvatining *darajasi* o'zgarmaydi, milliy daromad esa, (*I*) investitsiya talabining o'lchami bilan aniqlanadi:
- Investitsiya talabi *I* (a,b) oraliq'ida daromadga bog'liq emas;

- Talablar yig'indisi D (a,b) oraliqda quyidagicha aniqlanadi:

$$D = C + I \qquad (7.1.1)$$

bu yerda D-talablar yig'indisi, C-iste'mol talabi, I- investisiya talabi.

Aytaylik istemol talabi C quyidagicha aniqlansin:

$$C = c_1 Y + A \qquad (7.1.2)$$

bu yerda c_1, A- constanta, $0 < c_1 < 1$, Y-milliy daromad.

Teorema: Investitsiya talabi I ning ΔI miqdorga ozgarishi milliy daromad Y ni ΔY miqdorga quyidagicha ozgartiradi:

$$\Delta Y = \mu \Delta I \qquad (7.1.3)$$

bu yerda $\mu = 1/(1 - c_1)$ - multiplikator.

Investitsiyaning xarakteri, korxonaning daromadga bog'liq bo'lmagan ma'lum darajadagi uzoq muddatli kutish orqali aniqlanadi, deb faraz qilinadi.

Eslatma.

Iqtisodiyotda multiplikator kapital quyilmalarning oshishi orqali milliy daromadning o'sishiga olib keladigan ketma-ket harakatlarni aniqlaydi.

Teorema. Iqtisodiy o'sish nazariyasida multiplikator, I investitsiyaning ΔI miqdorga oshishi kapital quyilmalar yig'indisi Y milliy daromadni $\mu \Delta Y$ miqdorga oshirishini ko'rsatadi.

Teoremaning isboti. Aytaylik iste'mol va investitsiya yig'indisi sifatida aniqlanuvchi talablar yig'indisi quyidagi ko'rinishda bo'lsin:

$$D = C + I \qquad (7.1.4)$$

bu erda C- istemol talabi, I-investisiya talabi.

Istemol talabi C ni esa,

$$C = c_1 Y + A \ , (0 < c_1 < 1) \qquad (7.1.5)$$

ko'rinishida tasvirlash mumkin bo'lsin, bu erda Y- milliy daromad c_1- o'zgarmas son bo'lib, Y daromadning o'sishi bilan iste'molning o'sishini "istemolga egilish" proportsiyasi, deb aytiladi. A-o'zgarmas son esa "asosiy iste'mol" deb yuritiladi.

Y_e *orqali talab va taklifning tenglik shartiga javob beruvchi muvozanatdagi* milliy daromad belgilansa:

$$D = Y \qquad (7.1.6)$$

(7.1.4), (7.1.5) ni (7.1.6) ga asosan,

$$(c_1Y + A) + I = Y \quad (7.1.7)$$

hosil bo'ladi, bu yerdan Y topilib, uni Ye orqali belgilanadi.

Shunday qilib, (7.1.7) tenglamani yechish orqali

$$Y_e = 1/(1 - c_1) * (I + A) = 1/(1 - c_1) * I + A/(1 - c_1)$$

hosil qilinadi. Buning ikkala tomoni differensiallanganda:

$$dY = 1/(1 - c_1)dI + 0$$

hosil bo'ladi. Differensialni funksiyaga almashtirganda:

$$\Delta Y = 1/(1 - c_1) * \Delta I$$

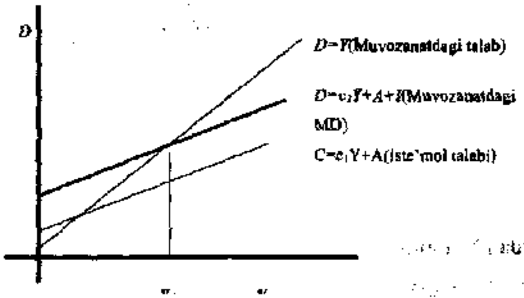
hosil bo'ladi.

Eslatma.

1.*(Daromadning o'sishi)=(μ)*(investitsiyaning o'sishi)* formulasi *hosil* bo'ladi.

2.Agar investitsiyaning o'sishi manfiy bo'lsa, u holda tovarlar zaxirasining qisqarganini ko'rish mumkin va iste'mol hamda investitsiya tovarlari tovarlar zaxirasi hisobiga qoplansa ham multiplikator formulasiga o'xshash formula hosil bo'ladi.

3. Grafikda E muvozanat nuqtasi va unga mos milliy daromadning muvozanat nuqtasi-Y_e uy xo'jaligi va korxonani ma'lum darajada qanoatlantiruvchi joriy faollik darajasini aks ettiradi, ammo mehnat bilan to'liq ta'minlanish darajasi bilan mos tushmaydi. Grafik tasvir muvozanatdagi milliy daromad Y_e milliy daromadning to'liq bandlikni ta'minlovchi Y_f qiymatidan hamma vaqt kichikligini ko'rsatuvchi Keyns nazariyasining markaziy qirrasini tushunishga yordam beradi. Shuning uchun davlat siyosatidining maqsadi I investitsyani oshirish orqali $Y_e = Y_f$ ga erishishdan iboratdir.



Multiplikator μ ning xossalari

Yuqorida hosil qilingan $\mu = 1/(1-c_1)$ formulada multiplikator **μ istemol** c_1 ga egilishdan bog'liq.

1. Agar iste'molga egilish $c_1 \to 1$ bo'lsa, u holda multiplikator $\mu \to \infty$.

2. Agar $0{,}5 < c_1 < 1$ bo'lsa, u holda $\mu > 2$ bo'ladi.

3. Agar $0 < c_1 < 0{,}5$ bo'lsa, u holda $1 < \mu < 2$ bo'ladi.

"Ekonomiks" kitobida ko'rsatilishicha davlat siyosatining maqsadlaridan biri c_1 istemolga egilishni kamaytirishni ta'minlaydigan soliq tizimini yaratish va shu bilan birga u μ ning ta'siri o'sishini barqarorlashtirmasin. Bu modeldagi multiplikator oddiy bo'lib, u ishlab chiqarishning oddiy modeliga asoslangan.

7.2. Milliy daromadning Xarrod-Domar modeli

1960-yilda iqtisodchilar E.Domar (Amerika) va R. Xarrod(Angliya) lar iqtisodiy rivojlanish nazariyasida milliy daromadni aniqlash modelini ishlab chiqdilar va bu model Xarrod-Domar modeli deb atala boshlandi. Bu model milliy daromadni aniqlashning Keyns modelining modifikatsiyasidan iborat bo'lib. (I) investisiya omili o'rniga kapital (K) va mehnat (L) ni kiritish orqali amalga oshirilgan.

1.Bu erda Keyns modelidagi (1), (2) farazlar ham ishlatiladi.

2. $y = F(K,L)$ chiziqli ishlab chiqarish funksiyasi bir jinsli, yani $F(xK, xL) = xF(K,L)$.

3. (a,b) oraliqda milliy daromadning jamg'arilish normasi: $(Y-C)/Y=S$ ko'rinishda bo'ladi, bu yerda C-o'zgarmas.

4. (a,b) oralig'ida kapital jamg'arilish o'sishi investitsiya talabiga teng, y'ani $I=dK/dt=K'$ deb faraz qilinadi.

5. Mehnat taklifi L ning o'sishi doimiy, ya'ni $L'/L=n$.

Quyidagi belgilashlarni kiritiladi:

$y=Y/L$ - mehnat unumdorligi, $x=K/L$ fond bilan ta'minlanganlik, $y=F(x,1)=f(x)$, $k=k(t)$, $L=L(t)$, $Y=Y(t)$.

Teorema. (1)-(5) farazlar bajarilganda, X fond bilan ta'minlanganlik $\frac{dx}{dt}=sf(x)-nx$ *qonuniyat boyicha ozgaradi.*

Isbot. $t\in(a,b)$ oraliqdagi ishlab chiqarish funksiyasi:

$$Y=F(K,L)=F(\frac{K}{L}\cdot L,1\cdot L)=LF(\frac{K}{L},1).$$

Bu yerdan $\frac{Y}{L}=F(\frac{K}{L},1)$ hosil bo'ladi.

$y=Y/L$, $x=K/L$ belgilashlardan foydalanib, $y=F(x,1)=f(x)$ hosil cilinadi, ya'ni $y=f(x)$. (7.1.8)

$x=K/L$ dan $\ln x=\ln K-\ln L$ kelib chiqadi.

Bu tenglik differensiallanganda:

$$\frac{d(\ln x)}{dt}=\frac{d(\ln K)}{dt}-\frac{d(\ln L)}{dt},$$

natijada

$$\frac{X'}{X}=\frac{K'}{K}-\frac{L'}{L} \qquad (7.1.9)$$

hosil bo'ladi. (9) tenglamadan quyidagi kelib chiqadi: $x'=\left(\frac{K'}{K}\right)x-\frac{L'}{L}x$

(5) farazdan foydalanilsa quyidagi hosil bo'ladi:

$$x' = \left(\frac{K'}{K}\right)x - nx \qquad (7.1.10)$$

Y milliy daromad quyidagicha aniqlanadi:

$$Y = C + I \qquad \textbf{(7.1.11)}$$

bu erda C- iste'mol, I- jamg'arma.

4- farazdan foydalanib, quyidagi hosil bo'ladi:

$$\frac{K'}{K}x = \frac{I}{K}x = \frac{I}{\frac{K}{X}} = \frac{I}{L} = \frac{Y}{L}\cdot\frac{I}{Y} = f(x)\frac{I}{Y},$$

Bu yerda $f(x) = \dfrac{Y}{L}$.

(4) farazni e'tiborga olganda

$$\frac{K'}{K}x = f(x)\frac{Y-C}{Y} = f(x)\cdot S \qquad \textbf{(7.1.12)}$$

hosil bo'ladi, bu yerda $S = \dfrac{Y-C}{Y}$;

(7.1.12) ni (7.1.10) ga qo'ysak $X' = Sf(x) - nX$ **(7.1.13)**

hosil bo'ladi.

Teoremadan quyidagilar kelib chiqadi.

1. Doimiy muvozanat (7.1.13) ga $X'=0$ bo'lganda erishiladi, ya'ni

$$x = const \qquad (7.1.14)$$

2. Ish bilan ta'minlanganlik surati quyidagicha aniqlanadi:

$$n = \frac{Sf(x^*)}{x^*}, \qquad (7.1.15)$$

bu yerda x^*- muvozanatlik munosabati. (7.1.15) munosabat (7.1.13), (7.1.14) lardan hosil bo'ladi.

3. $X \to X^*$ da X o'sish traektoriyasi barqarorlashadi.

4. $X - X^* \to \infty$ bo'lganda, X o'sish traektoriyasi barqaror bo'lmaydi.

7-bobga doir topshiriq

Iqtisodiyotning ish bilan to'liq ta'minlanganligining o'sish traektoriyasini chizing.

O'sish modeli quyidagi tenglama bilan ifodalanadi:

$$\frac{dx}{dt} = s \cdot f(x) - nx$$, bu yerda,

$x = K/L$ – fond bilan taminlanganlik (K–kapital, L–mehnat);

$y = Y/L$ – mehnat unumdorligi ($Y=F(K,L)$–i/ch.f.);

$\frac{dx}{dt}$ – fond bilan taminlanganlikning o'sish surati;

S – Milliy daromad yig'ilish meyori;

N – ishchi kuchi ish bilan taminlanganligi o'sishi;

$f(x)$ – mehnat unumdorligi funksiyasi.

($f' > 0, f'' < 0, f(0)=0, f'(0)=0$)

Variantlar tartibi	n	S	$X(0)=x_0$	α	$f(x)$
Jurnaldagi tartib raqami N	0,3	0,1	9,N	1,N	$x^{\frac{1}{2}}\alpha^{N}$

O'xshash misolni yechish

$x(0)=9,1$; $\alpha=1,1$; $S=0,1$; $n=0,3$ qiymatlar beriladi.

1-qadam. Matematik modelning ko'rinishi quyidagicha:

$$\frac{dx}{dt} = 0,1 \cdot x^{\frac{1}{2}}(1,2)^{1.0} - 0,3x \qquad (1)$$

Boshlang'ich shart $x(0)=9,1$

2-qadam. (1) ni yechamiz. Tenglamani quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$\frac{dx}{dt} = 0,12x^{\frac{1}{2}} - 0,3x \qquad (2)$$

(2) ifoda quyidagicha yoziladi:

$$\frac{dx}{0{,}12x^{\frac{1}{2}} - 0{,}3x} = dt \quad . \tag{3}$$

(3) ning ikkala tomoni integrallanadi:

$$\int \frac{dx}{\left(0{,}12x^{\frac{1}{2}} - 0{,}3x\right)} = \int dt = t - c \quad , \tag{4}$$

$$\int \frac{dx}{\left(0{,}4x^{\frac{1}{2}} - x\right)0{,}3} = t - c \quad . \tag{5}$$

3-qadam.

$$\int \frac{dx}{\left(0{,}4x^{\frac{1}{2}} - x\right)0{,}3} = \begin{pmatrix} x = z^r \\ dx = 2zdt \end{pmatrix} = \frac{1}{0{,}3}\int \frac{2zdz}{0{,}4z - z^2} =$$

$$= \frac{2}{0.3}\int \frac{dz}{0{,}4 - z}\begin{pmatrix} 0{,}4 - z = u \\ -dz = du \end{pmatrix} = -2ln|U| = -2ln|0{,}4 - z| =$$

$$= -\frac{20}{3}ln|0{,}4 - \sqrt{x}|$$

hisoblanadi.

4-qadam. Buni (4)ga qo'yganda quyidagi hosil bo'ladi:

$$-\frac{20}{3}ln|0,4-\sqrt{x}|=t-c,$$

$$c-\frac{20}{3}ln|0,4-\sqrt{x}|=t,$$

$$ln|0,4-\sqrt{x}|=3\frac{c-t}{20}.$$

$$0,4-\sqrt{x}=e^{3\frac{c-t}{20}}, \qquad (5)$$

$$\sqrt{x}=0,4-e^{3\frac{c-t}{20}} \qquad x=0,4-e^{3\frac{c-t}{20}}.$$

5-qadam. (5) ga $x(0)=0$ ni qo'yganda,

$$0=(0,4-e^{3\frac{c-0}{20}})^2=0,$$

$$0,4=e^{\frac{3}{20}c},$$

$$\frac{3c}{20}=ln0,4, \qquad (6)$$

$$c=\frac{20}{3}ln0,4$$ hosil bo'ladi.

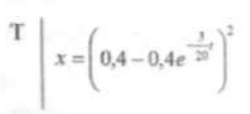
6-qadam. (5) ga (6) ni qo'yib, quyidagi hosil qilinadi:

$$x=\left(0,4-e^{\frac{3}{20}\left(\frac{20}{3}\ln 0,4-t\right)}\right)^2=\left(0,4-e^{\ln 0,4-\frac{3}{20}t}\right)^2=\left(0,4-0,4e^{-\frac{3}{20}t}\right)^2$$

ya'ni

$$x=\left(0,4-0,4e^{-\frac{3}{20}t}\right)^2. \qquad (7)$$

7-qadam: $x=\left(0,4-0,4e^{-\frac{3}{20}t}\right)^2$ ning grafigi hosil qilinadi:



0	0
1	1,114538
2	4,425439
3	9,890703
4	17,47637
5.	27,15508

Tayanch so'z va iboralar

Makro yondashuv, makroiqtisodiy tahlil, makroiqtisodiy model, iqtisodiy o'sish nazariyasi, milliy daromad, istemol talabi, investisiya talabi, multiplikator, iqtisodiy o'sish nazariyasi, o'sish traektoriyasi.

VII bobga doir savollar

1. Makroiqtisodiyot nimani o'rganadi?
2. Milliy daromadni aniqlash modeli kim tomonidan ishlab chiqilgan?
3. Milliy daromad modelini tuzishda qanday farazlar qilingan?
4. Iqtisodiy o'sishning asosiy masalalarini ayting.
5. Keyns modelini ko'rinishini keltiring.
6. Keyns modeli va Xarrod-Domar modellarining farqini ayting.
7. Multiplikator nima?
8. Multiplikatorning asosiy xossalari qanaqa?
9. Xarrod-Domar modelini ma'nosi va ifodalanishi qanaqa?

VIII bob. IQTISODIY MODELLAR VA STATISTIK USULLAR

8.1. Matematik statistika asoslari

Ushbu bobning maqsadi iqtisodiyotdagi miqdoriy qonuniyatlar va gipotezalarni *tadqiqot usullari(tekshirish, asoslash, baholash)ni statistik* ma'lumotlarni tahlil qilish asosida o'rganishdan iborat. Bu usullar iqtisodiy hodisalarni miqdoriy jihatdan o'rganuvchi fan-ekonometrikaning tarkibiy qismini tashkil qiladi. Ekonometrika iqtisodiyotdagi miqdoriy qonuniyatlarni iqtisodiy ma'lumotlarni qayta ishlashga moslashgan ehtimollar nazariyasi va matematik statistika usullari orqali o'rganadi .

Iqtisodiyotdagi qonuniytlar iqtisodiy ko'rsatkichlar bog'lanishlari, ular xulq atvorining *matematik modellari ko'rinishida ifodalanadi.* Bunday bog'lanishlar va modellar haqiqiy statistik ma'lumotolarni qayta ishlash yo'li bilan ichki mexanizmlar va tasodifiy omillarni hisobga olgan holda olinishi mumkin. Ayniqsa makroiqtisodiyotda ekonometrik tahlil muhimdir, chunki bu yerda miqdorlarning o'zaro bog'liqliklari ko'pincha aniq emas va ular o'zgaruvchandir. Ekonometrik tahlil qaralayotgan makroiqtisodiy modellarda bog'lanish shakllarini asoslashga va aniqlashga, makroiqtisodiy ko'rsatkichlarning o'zaro bog'lanish mexanizmlarini yaxshi tushunishga imkon beradi.

Iqtisodiy izlanishlarning asosiy elementi tahlil qilish va iqtiosdiy o'zgaruvchilarning *o'zaro bog'lanishini tuzishdan iboratdir.* Makroiqtisodiyotda bunday qat'iy funksional o'zaro bog'lanish mavjud emasligi bog'lanishlarni o'rganishda qiyinchilik tug'diradi. Birinchidan, ushbu o'zgaruvchilarga ta'sir etuvchi barcha asosiy omillarni aniqlash juda qiyin. Ikkinchidan, bunday ko'plab ta'sir etishlar tasodifiy, ya'ni tasodifiy miqdorni o'z ichiga oladi. Uchinchidan, iqtiosdchilar odatda, turli xil xatolarni o'z ichiga olgan statistik kuzatish ma'ulmotlarining cheklangan to'plamiga egadirlar.

Matematik statistika (ya'ni ma'lumotlar bilan ishlash va ularni tahlil qilish nazariyasi) va uni iqtisodda qo'llashdan iborat bo'lgan ekonometrika fani iqtisodiy modellar tuzishda va ularning paramaetrlarini baholashda, iqtisodiy ko'rsatkichlar va ulaming bog'lanish shakllari to'g'risidagi gipotezalarni tekshirishda, va nihoyat asoslangan iqtisodiy qarorlarni qabul qilish uchun imkoniyat yaratuvchi iqtisodiy tahlil va prognozlashning asosi bo'lib xizmat qiladi.

Har qanday ekonometrik tadqiqot nazariya (iqtisodiy model) va amaliyotni (statistik ma'lumotlar) birlashtirish orqali amalga oshiriladi. Nazariy modellardan kuzatilayotgan jarayonlarni tasvirlash va tushuntirish uchun foydalaniladi statistik ma'lumotlar esa, modellarni tuzish, asoslash maqsadida yig'iladi.

Iqtisodiy modelga tasodifiy miqdorni kiritish va iqtisodiy ma'lumotlar turlari

Odatda, iqtisodiy modelda hisobga olinmagan, miqdori oldindan ma'lum bo'lmagan va tasodifiy funksiya sifatida tasvirlangan barcha miqdorlar obyektga natijaviy ta'sir ko'rsatadi deb taxmin qilinadi. Modelni ifodalash uchun unga barcha hisobga olinmagan aniq omillarning ta'sirini o'zida jamlovchi tasodifiy parametr ε qo'shiladi(odatda additiv yo'l bilan).

Misol, talab funksiyasi modelida:

$$q = f(p, D) + \varepsilon \qquad (8.1)$$

(bu erda q – talab miqdori, p – narx, D– iste'molchining daromadi) ε o'zgaruvchi talab funksiyasida hisobga olinmagan barcha boshqa omillarning (boshqa tovarlar narxi, moda o'zgarishi, ob-havo va h.k.) ta'sirini aks ettiradi.

Ekonometrikada statistik ma'lumotlar empirik qonuniyatlarni aniqlash va asoslash uchun ishlatiladi. Tadqiqot olib borilayotgan iqtisodiy obyekt amal qilishini xarakterlaydigan aniq miqdoriy ma'lumotlarsiz qo'llanilayotgan iqtisodiy modelning amaliy muhimligini aniqlash mumkin emas.

Iqtisodiy ma'lumotlar odatda ikki turga bo'linadi: o'zaro kesishuvchi ma'lumotlar(cross-section data) va vaqtli qatorlar (time series). O'zaro kesishuvchi ma'lumotlar bir turdagi obyektlar (firma, mintaqa) uchun olingan iqtisodiy ko'rsatkichlar bo'yicha ma'lumotlardir. Bunda yoki barcha ma'lumotlar biror bir vaqtga tegishli yoki ularning vaqtga bog'liqligi ahamiyatsiz. *Vaqtli qatorlar* faqat bitta obyektga tegishli bo'lib, lekin ular har xil vaqtda olingan ma'lumotlar bo'lishi mumkin. Birinchi turga, ma'lum bir vaqtda aholi byudjetini tekshirish haqidagi ma'lumotlar kirsa, ikkinchisiga ma'lum bir davrda inflyasiya darajasining o'zgarishi haqidagi ma'lumotlar kiradi. Vaqtli qator ma'lumotlari ketma-ket qiymatlarining ma'lum bir bog'lanishlari va qonuniyatlari orqali xarakterlanadi, masalan, rivojlanish umumiy tendensiyasidan chetga chiqishlar ketma-ketligi o'zaro bog'langan bo'lishi mumkin; bu iqtisodiy ko'rsatkichlardagi bog'lanishlarda (vaqt bo'yicha) kechikishlar *qatnashishi mumkin. Bundan bog'lanishlarni tanlangan o'zaro kesishuvchi* ma'lumotlar bilan solishtirish uchun qayta ishlash va tahlil qilishning maxsus usullarini ishlab chiqish zarurligi talab qilinadi.

Iqtisodiy ma'lumotlarni yig'ishdan maqsad qarorlar qabul qilish uchun axborot bazasini yaratishdan iborat. Tabiiyki, ma'lumotlarni tahlil qilish va qarorlar qabul qilish qandaydir intuitiv (aniq bo'lmagan) yoki miqdoriy (aniq) iqtisodiy model asosida o'tkaziladi. Shuning uchun tegishli model uchun kerak bo'lgan ma'lumotlar yig'iladi.

Iqtisodiy ma'lumotlarni yig'ishning har xil usullari mavjud: so'rov, anketada qayd qilish, intervyu olish, rasmiy statistik hisobotdan olish va h.k. Ko'pchilik mamlakatlarda muhim ma'lumotlarni yig'ish, qayta ishlash, tarqatish va chop etish bilan shug'ullanadigan statistik tashkilotlar mavjud. Bu faoliyat bilan ayrim ixtisoslashgan davlat va xususiy agentliklar ham shug'ullanadi.

Iqtisodiy model bilan ishlash uchun yig'iladigan statistik ma'lumotlarni tayyorlashda *ikkita muammo kelib chiqadi. Birinchidan, model uchun kerakli* ma'lumotlar bo'lmasligi mumkin. Ikkinchidan (agar barcha ma'lumotlar bo'lsa), ularni aniq model uchun shunday to'g'ri tanlab olish kerakki, bunda ular baholashning umumiy uslubiy bazasiga ega bo'lsin. Kerakli ma'lumotlar bo'lmasa, ular kam hollarda mavjud bo'lganlari bo'yicha hisoblanadi. Masalan, agar inflyatsiya surati (INF) to'g'risidagi ma'lumotlar bo'lmasa, lekin yalpi ichki *mahsulot deflyatori (DEF) to'g'risida ma'lumotlar mavjud* bo'lsa, inflyatsiya (YaIM bo'yicha) quyidagicha hisoblanadi (%da):

$$INF = \left[\frac{DEF}{DEF_{-1}} - 1 \right] \cdot 100 \qquad (8.2)$$

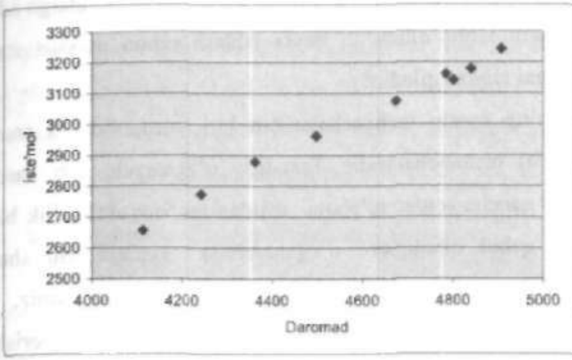
(-1 indeks o‘tgan yilni bildiradi).

Agar barcha ma’lumotlar mavjud bo‘lsa, u holda model uchun ularni ma’lum bir o‘zaro kelishilgan to‘plamga aylantirish zarur. Agar pul ko‘rinishida ifodalangan bo‘lsa, u holda ular barcha joyda bir xil joriy yoki fiksirlangan (biron bir yilga) pul birliklarida bo‘lishi kerak. Haqiqiy katta hajmli ko‘rsatkichlarga(ya’ni fiksirlangan bahoda) haqiqiy nisbiy ko‘rsatkichlar mos kelishi kerak(misol uchun foiz stavkalari inflyatsiya suratiga to’g’rilanishi zarur). Yechilayotgan masalaga mos ravishda umumlashtiruvchi ko‘rsatkichlar ham aniqlanadi: yalpi milliy mahsulot (YaMM), yalpi ichki mahsulot (YaIM), yalpi ichki yoki milliy jamg‘arma, deflyator IMM yoki YaIM va h.k. Masalan, agar so’z ichki ishlab chiqarish va unga ichki investitsiyalarning ta’siri to‘g‘risida borsa, umumlashtiruvchi ko‘rsatkichga ta’sir qiluvchi sifatida YaMM emas YaIM olinishi kerak.

To‘plangan ma’lumotlar turli: jadval, diagramma, grafik ko‘rinishida berilishi mumkin. Iqtisodiy modelni aniq ko‘rinishda ifodalab, masalan, umumiy iste’mol daromad o‘sishi bilan chiziqli o‘sadi deb taxmin qilib, tekshirilayotgan modelga shu iqtisodiy ko‘rsatkichlar bo‘yicha ma’lumotlar, ya’ni umumiy iste’mol va umumiy daromad bo‘yicha ma’lumotlarni yig‘ish kerak. Buni bironta davlatning milliy hisobdagi biror bir vaqt oralig‘idagi yillik ma’lumotlarini olib ko‘rish mumkin. Bu ma’lumotlar jadval ko‘rinishida berilishi mumkin: jadvalda AQShning, 1987 yildagi bahoda (mlrd. dollar) YaIM (daromad) va shaxsiy iste’mol xarajatlar hajmi bo‘yicha ma’lumotlar keltirilgan:

Daromad	3860	4114	4243	4362	4497	4674	4801	4840	4784	4907
Iste’mol	2533	2657	2772	2878	2961	3075	3141	3178	3161	3243

Bu ma’lumotlar koordinata tekisligida nuqta ko‘rinishida ham berilishi mumkin (tarqalish diagrammalari):



Tayyorlangan ma'lumotlar analitik (biror bir matematik model, misol $cons=a+bGDP+\varepsilon$ ko'rinishdagi tenglama) yoki grafik ko'rinishida (misol, *CONS GDR* tekisligidagi to'g'ri chiziq) bo'lishi mumkin. Bu erda *CONS* – iste'mol, *GDP*–YaIM (daromad). Bunda qator muammolar kelib chiqadi, bulardan asosiylari nazariy modellarni ma'lumotlar bilan mutanosibligini tekshirish, model parametrlarini baholash va model asosidagi taxmin(gipoteza) larni tekshirish.

8.2. Statistik usullar va tasodifiy o'zgaruvchi tushunchasi

Iqtisodiy obyektlarning tabiatini aniqlash, uning muhim o'zgaruvchilari orasidagi o'zaro bog'lanish mexanizmini ochish iqtisodiy izlanishning asosiy masalalaridan iboratdir. Bunday tushuncha berilgan obyektni boshqarish bo'yicha zarur choralarni ishlab chiqish va amalga oshirishga yordam beradi. Buning uchun adekvat masalaga, iqtisodiy ma'lumotlarning tabiati va xususiyatini hisobga oluvchi, o'rganilayotgan iqtisodiy obyekt yoki hodisa to'g'risida sifat va miqdor jihatidan tasdiqlash uchun asos bo'lib xizmat qiluvchi usullar kerak.

Har qanday iqtisodiy ma'lumotlar o'zida biror bir iqtisodiy obyektlarning miqdoriy tavsifini ifodalaydi. Ular barchasi ham tashqi nazoratga bo'ysunavermaydigan omillar to'plami ta'siri ostida shakllanadi. Nazorat qilinmaydigan omillar bir qancha qiymatlar to'plami ichidan tasodifiy qiymatni qabul qilishi mumkin. Iqtisodiy ma'lumotlarning stoxastik tabiati, ularga adekvat bo'lgan hamda ularni tahlil qilish va qayta ishlash uchun maxsus statistik usullarning zarurligini taqozo qiladi.

Statistik tahlilning asosiy tushunchalaridan biri, ehtimollik va tasodifiy miqdor (o'zgaruvchi) tushunchalaridir. Tasodifiy o'zgaruvchi deb, tasodifiy omillar ta'sirida bir qancha sonlar to'plami ichidan ma'lum ehtimollik bilan u yoki bu qiymatni qabul qiladigan o'zgaruvchiga aytiladi. Bu shunday o'zgaruvchiki, biz unga ma'lum bir qiymat qo'shib yoza olmaymiz, lekin ma'lum bir ehtimollik bilan qabul qiluvchi bir nechta qiymat berishimiz mumkin. Ayrim hodisalarning ehtimoli deb(misol uchun, ma'lum bir qiymatni qabul qilgan tasodifiy o'zgaruvchidan iborat hodisa) odatda berilgan voqea ro'y berishiga imkon beruvchi mumkin bo'lgan teng ehtimolli ro'y berishlarning umumiy sonidagi ulushi tushuniladi. "Teng ehtimolli ro'y berish" toifasi aniqlanmaydi, u intuitiv ravishda qabul qilinadi. Masalan, tangani otganda "gerbli" yoki "raqamli" tomoni tushushining ehtimoli teng (har birining ehtimoli 1/2), lekin tangani bir marta otgandagi "gerbli" tomonining tushish ehtimoli 1/2 ehtimollik bilan 0 yoki 1 ga teng.

Tasodifiy miqdor X ning (X_q) qiymatlar to'plami va u qabul qiladigan (P_q) ehtimolliklarining barchasini *tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni* deb aytiladi. $P(X)$ funksiya boshqa funksional bog'lanishlar kabi jadval, formula va grafik shaklida berilishi mumkin.

Masalan, o'yin kubigini otganda ochkolar sonining taqsimot qonuni quyidagi jadval ko'rinishida berilishi mumkin.

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Ma'lumki, barcha ehtimolliklar yigindisi birga teng bo'lishi kerak, shunday ekan, o'zgaruvchi bu qiymatlardan birontasini «bir» extimollik bilan qabul qiladi deb hisoblaymiz.

Tasodifiy miqdorlar diskret va uzluksiz turlarga bo'linadi. Diskret tasodifiy miqdorlar kuzatish natijalari chekli va sanoqli mumkin bo'lgan sonlar to'plamidan iborat. Uzluksiz tasodifiy miqdorning qiymati mumkin bo'lgan kontinium qiymatda yotadi. (Ularni sanash mumkin emas deb, tahmin qilinadi). Uzluksiz tasodifiy miqdorlar qiymati kesma, interval, nurda va h.k. da yotadi.

Bosh to'plam va tanlama to'plam tushunchalari

Bosh to'plam deganda bizni qiziqtiruvchi ko'rsatkichlarning barcha mumkin bo'lgan kuzatishlari, tasodifiy tajribasining barcha ro'y berishlari soni yoki X tasodifiy miqdorni amalga oshirishlarning barcha yig'indisi tushuniladi. Bosh to'plamga misol sifatida qaysidir mamlakatning barcha aholisining daromadi to'g'risidagi ma'lumotlar, biror-bir masala bo'yicha aholining ovoz berish natijasi to'g'risidagi ma'lumotlarni olish mumkin. Lekin ko'pincha biz bosh to'plamdan olingan mumkin bo'lgan kuzatishlarning bir qismi to'g'risidagi ma'lumotlarga ega bo'lamiz va bu qiymatlar to'plamini tanlama to'plam deb ataymiz. Shunday qilib tanlama to'plam deganda, bosh to'plamning bir qismini tashkil etuvchi kuzatishlar yig'indisini tushunamiz.

Masalan bizni har bir g'o'za ko'chatidan olinadigan hosilning o'rtacha og'irligi qiziqtirsin. Bu holda barcha g'o'za poyalar haqidagi ma'lumotlarni yig'ish juda ko'p mehnat va mablag' talab qiladi. Shuning uchun barcha g'o'za poyalarnimas, balki bir qismini tanlab olish (masalan, 1 ga ni) va ular haqida kerakli ma'lumotlarni yig'ib, xulosalar chiqarish mumkin. Bu yerda barcha g'o'za poyalar bosh to'plam bo'lsa, bizning tanlab olgan qismimiz esa, tanlama to'plamdan iborat bo'ladi.

Chiqarilgan xulosalarning to'la va aniqroq bo'lishi ko'p jihatdan tanlama to'plamning qanday tanlanishiga bog'liq. Shuning uchun tanlama to'plam obyektiv tuzilishi va iloji boricha bosh to'plamdagi ixtiyoriy element unga kiritilish imkoniyatiga ega bo'lishi kerak.

Tanlama to'plam olingandan keyin undan olingan ma'lumotlar quyidagi ko'rinishda yoziladi: $x_1, x_2, ..., x_n$.

Tanlama to'plamdagi elementlar soni n ga **tanlama hajmi deyiladi.**

Tanlamadagi x_i larga variantalar deyiladi.

Agar tanlama bosh to'plamning o'rganilayotgan belgilari va parametrlarini yetarlicha to'liq ifodalasa u ishonchli (reprezentativ) deb ataladi. Tanlamaning reprezentativligini ta'minlash uchun quyidagi tanlov usullari qo'llaniladi: oddiy tanlash (birinchi tasodifan uchragan obyekt ketma-ket tanlanadi), tipik tanlash (bosh to'plamda turli xildagi obyektlar reprezentativga proportsional ravishda tanlab olinadi), tasodifiy tanlash, masalan, tasodifiy sonlar jadvali orqali va h.k.

Diskret tasodifiy miqdorlar

Diskret tanlama ma'lumotlar bilan ishlash tartibini chorvachilikka ixtisoslashgan fermer xo'jaligining bozorda 10 kun davomida go'sht sotish hajmi misolida ko'rib chiqish mumkin.

Aytaylik, berilgan jadvalning birinchi qatorida sotish hajmi ko'rsatilgan bo'lsin. Kuzatish ma'lumotlari n=10 kuzatishdan iborat bo'lgan tanlamadan iborat bo'lsin. Tanlamadagi ma'lumotlarni tashkil etishning eng sodda usuli ularni o'sishi bo'yicha guruhlashtirishdir-ma'lumotlar bunda kattaligi bo'yicha tartibga tushadi, ya'ni ketma-ketlik ko'rinishida yozib boriladi: $x^{(1)}, x^{(2)},..., x^{(n)}$, bunda $x^{(1)} \le x^{(2)} \le,..., \le x^{(n)}$.

Kattaligi bo'yicha tartibga solingan ma'lumotlar ketma-ketligi jadvalning ikkinchi qatorida berilgan. Tanlamaning maksimal va minimal elementlari orasidagi farq $x^{(n)} - x^{(1)} = S$ tanlama ko'lami deyiladi.

$x^{(1)}, x^{(2)},..., x^{(n)}$	1,5,5,6,2,5,6,2,6,5					$n = 10$
$x^{(1)} \le x^{(2)} \le,..., \le x^{(n)}$	1,2,2,5,5,5,5,6,6,6					$S = 5$
$Z_1 \ne Z_2 \ne ..Z_k$	Z_k	1	2	5	6	$\sum$
Absolyut chastotalar	n_k	1	2	4	3	$10 = n$

Nisbiy chastotalar	ω_k	0.1	0.2	0.4	0.3	1
To'plangan chastotalar	Ω_i	0.1	0.3	0.7	1	-
Taqsimot funkiyasi	$F_k(z)$	0	0.1	0.3	0.7	-

Tanlamani tashkil etishning keyingi bosqichi chastotalarni sanashdir, bunda ular bilan birga tanlamaning har xil $Z_1, Z_2, ..., Z_k$ elementlari uchraydi, bu erda $k \le n$-tanlama tarkibida bo'lgan turli xil raqamlar soni. Ushbu tanlama 4 ta turli sonlarni o'z ichiga oladi: $Z_1 = 1, Z_2 = 2, Z_3 = 5, Z_4 = 6$.

Aytaylik, Z_j soni tanlamada n_j marta uchraydi, unda n_j soni Z_j tanlamaning elementi chastotasi yoki absolyut chastotasi deyiladi. Bu chastotalar jadvalning 4- qatorida keltirilgan. Ma'lumki, absolut chastota yig'indisi kuzatish chastotasiga teng: $\sum_{j=1}^{k} n_j = n$.

Absolut chastotalardan nisbiy chastotalarga o'tish oson bo'lib, ularni tanlama hajmi n ga bo'lishi kerar:

$$\omega_j = \frac{n_j}{n}.$$

Ma'lumki, nisbiy chastotalar yig'indisi birga teng, ya'ni

$$\sum_{j=1}^{k} \omega_j = 1.$$

(Z_j, ω_j) juftlik ketma-ketligiga tanlamaning statistik taqsimoti deyiladi. Odatda statistik taqsimot jadval ko'rinishida yoziladi, birinchi qator Z_j tanlamaning turli elementlaridan, ikkinchisi - ularning ω_j nisbiy chastotalardan iborat.

Kuzatishlar sonining cheksiz o'sishi natijasida Z_j nisbiy chastotalar qiymatlari $P_j = \Pr ob\{X = Z_j\}$ ehtimollikka intiladi, tanlamaning statistik taqsimoti esa, X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuniga o'tadi.

Sotish hajmining olingan statistik taqsimoti sotish hajmining eng katta ehtimolini aniqlash uchun va bundan tashqari, sotilgan go'shtning mos zahirasi uchun ham muhimdir.

Chastotalar bilan birga yig'ilgan chastotalar ham hisoblanadi:

$$\sum_{j=1}^{k} n_j = N_m$$

ular tanlamada berilgan miqdordan kichik va teng bo'lgan tanlamada necha marta uchrashini ko'rsatadi va yig'ilgan nisbiy chastotalar:

$$\sum_{j=1}^{k} \omega_j = \Omega_m$$

bular jadvalning beshinchi qatorida keltirilgan.

Yig'ilgan chastotalar o'rniga tanlab olingan taqsimot funksiyasi $F_n(x)$ hisoblanadi:

$$F_n(x) = \sum_{r_j < x} \omega_j = \frac{1}{n} \sum_{Z_j < x} n_j \qquad (8.3)$$

bunda tanlamaning faqat $Z_j < X$ tengsizlik bajariladigan elementlari uchun chastotalari yig'iladi. Tanlangan taqsimot funksiyasi jadvalning oxirgi qatorida berilgan.

Biror bir ehtimollikka oid tajriba o'tkaza turib, masalan, tangani N marta tashlab, bu tajribani ma'lum bir ro'y berish natijasini hisoblab, aytaylik, N_{gerb} gerbning tushish soni bo'lsa, bu tajribada, «gerb» tomoni tushishlar sonini umumiy soniga nisbatini olgan holda ro'y berish chastotasini aniqlashimiz va buni quyidagicha yozishimiz mumkin: $\frac{N_{герб}}{N}$.

$\nu(A_k)$ hodisa ro'y berishining nisbiy chastotasi deb, A_k hodisa ro'y berishi uchun olingan N_k tajribalar sonining umumiy tajribalar soni N ga nisbatiga aytiladi:

$$\nu(A_k) = \frac{N_k(A_k)}{N}. \qquad (8.4)$$

Yetarli darajada ko'p tajribalar o'tkazgandan so'ng shuni payqasl mumkinki, tajribalar soni kam bo'lganda, biror bir hodisaning ro'y berisl chastotasi tasodifiy bo'lganday bo'lib, tajribalar soni ko'paygan sari va ma'lum bir darajaga yetgandan keyin *uning qiymati barqarorlashadi va bu hola* hodisaning ehtimoli deb aytiladi. Rasmiy ravishda, agar ko'rsatilgan limi mavjud bo'lsa, A_k hodisaning ehtimoli $P(A_k)$ quyidagicha yoziladi:

$$P(A_k) = \lim_{n \to \infty} \frac{N_k(A_k)}{N}. \qquad (8.5)$$

Ehtimolni bunday ifodalash chastota barqaror bo'lganda ma'noga eg bo'ladi. Shunday qilib, *ingliz statistigi* Pirson, *tangani* 12000 *marta* tashlal «gerb» ning ro'y berish chastotasi taxminan 0,5069 ga , 24000 marotab tashlaganda esa, 0,5005 ga teng bo'lib, buning natijasida–klassik bo'lgan 0,5 ga yaqin natija olindi.

Endi navbatdagi o'yin kubigini tashlash, oddiy misolini ko'rib chiqamiz *Bu holda har qanday (X) ochkolar sonini tushish ehtimoli (P)* 1 dan 6 gacha bi xil bo'lib, u 1/6 ga teng. Aytaylik bosh to'plamga jadvalning yuqoridag taqsimlanishi mos kelsin, pastida esa uning ayrim tanlamalarining empiril taqsimlanishi berilsin.

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

x_i	1	2	3	4	5	6
w_i	0.16	0.17	0.17	0.16	0.17	0.17

Jadvaldan ko'rinib turibdiki, tanlamaning nisbiy chastotasi nisbiy chastot ya'ni bosh to'plam ehtimoliga yaqin.

Yuqorida ko'rilgan misolda, ya'ni yirik shoxli mollarni sotish hajmi bilan *ham shunday mulohaza yuritish mumkin.*

Agar $Z_k=k$ (sotilgan mollar soni)ni Z tasodifiy o'zgaruvchi qiymati sifatida qarasak, Z_k *ro'y berish qiymatlarining nisbiy* **chatotasi kuzatishlar** *soni* yetarlicha ko'p bo'lganda

$$\Pr ob\{Z = z_n\} = \lim_{n\to\infty} \frac{N_K\{Z = z_k\}}{N} \qquad (8.6)$$

ehtimolga intiladi.

Nisbiy yig'ilgan chastotalar esa,

$$\Pr ob\{Z < z\} = \sum_{\xi\pi r} \Pr ob\{Z = z_j\} = F_Z(z) = \lim_{N\to\infty} \frac{N\{Z < z_k\}}{N} \qquad (8.7)$$

ehtimolga intiladi.

Bunga Z diskret tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi deyiladi.

Uzluksiz tasodifiy miqdorlar. Gistogrammalar tuzish

Tarkibida uzluksiz tasodifiy miqdorlar mavjud bo'lgan tanlamalar soni ko'p bo'lganda, ularning elementlari qiymatlar intervallari bo'yicha guruhlanadi. Buning uchun uning barcha qiymatlarini o'z ichiga olgan *tanlamalar intervali* bir biri bilan *kesishmaydigan k ta* intervallarga bo'linib, ularning uzunligi hisoblashga qulay bo'lishi uchun bir xil qilib olinadi va hohlagan interval soniga bo'linadi:

$$\Delta x = \frac{S}{k} = \frac{x^{(n)} - x^{(1)}}{k} \qquad (8.8)$$

Bundan keyin qisman intervallar tanlangandan so'ng, j intervalga **tushuvchi** n_j tanlamaning elementlari miqdori ya'ni chastotalar aniqlanadi.

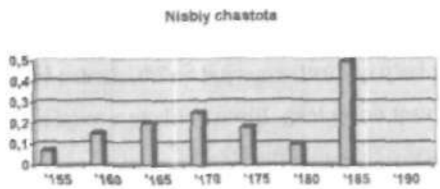
Chastotalar bilan birgalikda nisbiy chastotalar, yig'ilgan chastotalar va yig'ilgan nisbiy chastotalar hisoblanadi. Olingan natijalar jadval ko'rinishida yoziladi, birinchi qatorda ketma - ket intervallar chegaralari, ikkinchisida– unga mos *chastotalar(absolyut, nisbiy, yig'ilgan va yig'ilgan nisbiy)* turadi. Xuddi "nuqtali" tanlamadagiday yig'ilgan chastotalar qiymatlari bo'yicha interval bo'yicha guruhlangan tanlama uchun tanlangan taqsimot funksiyasini tuzish mumkin. Tanlamani aniq tasavvur qilish uchun ko'pincha uning grafigi –

chastota va nisbiy chastotalarining gistogrammasidan foydalaniladi. Bu gistogrammalarning har biri j - intervaldagi tanlamaning o'sishi bo'yicha joylashgan $\frac{n_j}{\Delta x}$ yoki $\frac{\omega_j}{\Delta x}$ *qiymatlarni qabul qiluvchi ayrim- ayrim o'zgarmas* funksiyani o'zida aks ettiradi. Bu funksiya eni Δx va balandligi $\frac{n_j}{\Delta x}(\frac{\omega_j}{\Delta x})$ bo'lgan, unga mos intervallardan tuzilgan to'rtburchaklardan tashkil topgan pog'onali shakl ko'rinishida beriladi. j – to'rtburchakning maydoni $\Delta x \cdot \left(\frac{n_j}{\Delta x}\right)$ (yoki ω_j) ga teng, barcha pog'onali shaklning maydoni esa tanlama hajmiga (chastotalar gistogrammasi uchun) yoki birga (nisbiy chastotalar gistogrammasi uchun) teng.

Misol sifatida taqsimot gistogrammasini oliygoh talabalarig bo'yining *balandligi bo'yicha ko'rib* chiqamiz.

Bo'yi h	155-160	160-165	165-175	170-775	175-180	180-185	185-195
n_k / n	0.07	0.15	0.20	0.25	0.18	0.10	0.05

Gistogrammada ko'rsatilgan har bir ustunning balandligi bo'y balandigi mos intervalga tushuvchi odamlar soniga proportsionaldir. Faraz qilaylik, ko'rikdan o'tkazish uchun tanlangan 1000 ta studentdan 250 tasining bo'yi 170 dan 175 sm ($170 \le h \le 175$) gacha oraliqda.



U holda gistogrammadagi intervalga mos kelgan ustunning balandligi

$$\frac{h_j}{n\Delta h}=\frac{\frac{n(170\le h\le 175)}{n}}{\Delta h}=\frac{250}{1000\cdot 5}=0.05$$ ga teng, bu ustun maydoni esa

$\frac{n_j}{n}=0.25$ ga teng.

Xuddi yuqoridagi misolga o'xshash agar talaba bo'yining balandligi sifatida H tasodifiy miqdorning qiymati sifatida qaralsa, u holda etarli darajadagi kuzatishlar sonida h_k ni qiymatlarining nisbiy chastotasi $h\le H<h+\Delta h$ intervalda yuqoridagi ko'rsatilgan intarvalga boylarining qiymati tushish ehtimoli $\Pr ob\{h\le H<h+\Delta h\}$ ga intiladi, yig'ilgan nisbiy chastotalar esa h ning haqiqiy funksiyasi hisoblanuvchi $\Pr ob\{H<h\}$ ga intiladi va u H uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $F_H(h)$ deb aytiladi.

Agar Δh interval uzunligini nolga intiltirsa har bir aniq intervalga tushish ehtimoli ham nolga intiladi. Biroq bu ehtimolning intervalga nisbati bu holda ehtimolning zichligi deb ataluvchi o'zgarmas miqdorga intiladi. Ehtimolning zichligini, uning birlik uzunligi hisobida, tasodifiy miqdor H ning h nuqtani o'z ichiga olgan cheksiz kichik intervalga tushish ehtimolini amalga oshiruvchi sifatida izohlash mumkin:

$$f(h)=\lim_{\Delta h\to 0}\frac{\Pr ob\{h\le H<h+\Delta h\}}{\Delta h}.$$

Agar tasodifiy miqdor uzluksiz bo'lsa, ya'ni biror intervaldagi ixtiyoriy qiymatni qabul qilsa, u holda uning uchun ayrim haqiqiy qiymatni qabul qiluvchi ehtimollikni aniqlash mumkin bolmaydi. Shunday ekan har qanday chekli intervalda cheksiz ko'p qiymatlar mavjud bo'lib,ulardan birontasining tushish ehtimoli hamma vaqt nolga teng. Biroq berilgan x miqdordan kichik bo'lgan qiymatni qabul qiluvchi ehtimollik sifatida aniqlanuvchi $F_x(x)$ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi:

$$F_x(x)=\Pr ob\{X<x\},$$

O'zining ma'nosini uzluksiz tasodifiy miqdor uchun ham saqlaydi.

8.3. O'rtacha qiymat, matematik kutish

Aytaylik, yirik shoxli mollarni sotish tanlama hajmi 10 kun mobaynida: $\{x_k\}=\{1,5,5,6,2,5,6,2,6,5\}$ bo'lsin. Bu tanlama uchun bir kun ichida sotish hajmininig o'rtacha qiymatini barcha tanlama ma'lumotlarini qo'shib, ularning soniga bo'lish orqali hosil qilamiz:

$$\overline{X}=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}X_k=\frac{1+5+5+6+2+6+5}{10}=4.3$$

Agar bu tenglikning o'ng qismidagi yig'ingdiga qarasak, bu yerda undagi ko'p sonlar qaytarilayotganini ko'ramiz. Shu bilan birga tanlamadagi umumiy ma'lumotlar soniga bo'lingan qaytarilish soni tanlamada mos qiymatlar *vujudga kelishi chastotasidir. Shunday qilib , o'ratacha qiymatni quyidagicha* ham aniqlash mumkin.

$$\overline{X}=\sum_{\{X_i\}}X_k-W_k=10{,}1+20{,}2+50{,}4+60{,}3=4{,}3 \qquad (8.9)$$

Bunda jamlash tasodifiy miqdorning turli qiymatlari bo'yicha olib boriladi, ushbu misolda $\{X_k\}=\{1,2,5,6\}$ og'irlik sifatida tanlamada uchraydigan bu qiymatlar chastotasi ishtirok etadi. (bunda og'irlik birga teng).

Deyarlik ko'p kuzatishlar soni n doirasida X_k qiymatlarning W_k chastotalari tegishli $P_k=\Pr ob\{X=x_k\}$ ehtimollikka o'tadi va X diskret tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan $\{X_k\}$ qiymatlar jadvali va ularga tegishli $P_k=\Pr ob\{X=x_k\}$ ehtimolliklar ko'rinishida berilishi mumkin .

X	X_1	X_2	...	X_n
P	P_1	P_2	...	P_n

Matematik kutish yoki bunday tasodifiy miqdorning o'rtacha qiymati *(bosh to'plam bo'yicha) X tasodifiy miqdorning barcha mumkin bo'lgan roy* berishlari o'lchangan yig'indisi orqali aniqlanadi, bu erda og'irlik sifatida bu ro'y berishlarning extimolligi ishtirok etadi, og'irliklar yig'indisi birga teng bo'ladi.

$$M[X] = X_1P_1 + X_2P_2 + ... + X_nP_n = \sum_k X_kP_k \qquad (8.10)$$

Bu X tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikasidan iborat bo'lib, u X ning barcha miqdorlariga mos keladi. O'rtacha qiymatning yana boshqa bir ifodalanishi: $M[X] \equiv < X > \equiv m_X \equiv \mu$ dan iborat.

Uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutishi quyidagicha aniqlanadi:

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x) dx \qquad (8.11)$$

Matematik kutishning xossalari:

Har qanday o'zgarmas ***a, b, c*** sonlar uchun quyidagilar o'rinli:

$$M[c] = c$$

$$M[X + b] = M[X] + b$$

$$M[aX] = aM[X]$$

$$M[aX + b] = aM[X] + b$$

Bu xossalar matematik kutish ta'rifidan kelib chiqadi. Agar X va Y tasodifiy miqdorlar bo'lsa, u holda yangi tasodifiy $(X+Y), (X-Y), (X \cdot Y), \left(\frac{X}{Y}\right)$ miqdorlarni aniqlash mumkin. Har qanday X va Y tasodifiy miqdor uchun

$$M[X+Y] = M[X] + M[Y] \qquad (8.12)$$

bo'ladi.

Matematik kutish (kutilgan, yoki o'rtacha qiymat) ko'pincha tasodifiy natijani xarajat va tushum bilan solishtirish paytida hisoblanadi, masalan, lotoreyada kutilgan yutuq yoki aksiyadan kutilgan daromad va boshqalarda.

Biz tasodifiy miqdor bilan ish olib borganda, uning faqat o'rtacha qiymatinigina aniqlash yetarli bo'lmasdan, balki o'rtacha qiymat atrofida uning tarqalish o'lchamini ham kiritishimiz kerak. Masalan, go'sht sotish hajmini tanlash uchun nafaqat o'rtacha sotilish hajmini, balki kundan kunga qanday o'zgarishi mumkinligini bilish kerak.

Bunday o'lchamlardan biri dispersiya bo'lib, u tasodifiy miqdorning o'rtacha qiymatidan o'rtacha kvadratik og'ishmasi orqali aniqlanadi.

Kuzatishlar soni n yetarli darajada ko'p bo'lganda X_k qiymatlarning ω_k chastotalari tegishli $P_k = \Pr ob\{X = x_k\}$ ehtimollikka o'tadi va tasodifiy miqdorning o'rtacha qiymatdan og'ishmasini tahlil qilish uchun yangi $Z = (X - \mu)^2$ tasodifiy miqdorni kiritish foydali bo'ladi, bu qiymat X ning o'rtacha qiymat $\mu \equiv M[X]$ dan kvadratik og'ishmasini ifodalaydi.

Bu tasodifiy miqdorni jadval ko'rinishida ham berish mumkin:

Z	$(X_1-\mu)^2$	$(X_2-\mu)^2$	...	$(X_n-\mu)^2$
P	P_1	P_2	...	P_n

Bunday tasodifiy miqdorning matematik kutishi

$$M|Z| = Z_1P_1 + Z_2P_2 + ... + Z_nP_n = \sum_k Z_kP_k \equiv$$
$$\sum_k (X_k - \mu)^2 P_k = M\{(X - M[X])^2\} \qquad (8.13)$$

dastlabki tasodifiy miqdor X ning $\mu \equiv M[X]$ o'rtacha qiymatdan o'rtacha og'ishmasini xarakterlaydi va X tasodifiy miqdorning dispersiyasi deb aytiladi va σ^2 yoki $D(X)$ orqali belgilanadi.

8.3. Kovariatsiya va dispersiya

Tanlama kovariatsiya. Tanlama kovariatsiya ikki o'zgaruvchi o'rtasidagi bog'lanishning o'lchami hisoblanadi. Bu tushunchani oddiy misol orqali ko'rsatish mumkin. Jadvalda tanlama O'zbekistonda paxta etishtirish misolida keltirilgan. Tanlama kovariatsiya ko'rsatkichi berilgan bog'lanishni bir xil sonda ifodalashni talab qiladi. Uni hisoblash uchun biz avvalo paxta hosildorligi va unga sarf qilinadigan suv miqdorini olamiz. x orqali suv sarfini va y orqali hosildorlikni belgilaymiz. Shunday qilib, biz, $\overline{X}$ va $\overline{y}$ ni aniqlaymiz, bu tanlama uchun ular mos ravishda 6.3 va 26,4ga teng.

8.1-jadval

Yillar	Suv sarfi, ming m^3/ga(x)	Hosildorlik, s/ga (y)
1	7,0	27,6
2	7,0	31,2
3	6,4	29,3
4	7,8	30,2
5	7,0	27,6
6	7,5	29,1
7	4,8	26,7
8	2,6	29,4

Paxta hosildorligi va suv sarfi

Undan keyin har bir yil uchun x va y miqdorlarning o'rtachadan og'ishmasini hisoblab ularni ko'paytiramiz. Birinchi yil uchun u $(x-\bar{x})(y-\bar{y})$ ga teng. Bu amalni barcha yillar uchun bajarib, ularning o'rtacha qiymatini olamiz, mana shunga tanlama kovariatsiya deb aytiladi.

Yuqoridagi misol uchun amalga oshirilgan hisoblashlar barcha tanlamalar uchun 8.2-jadvalda keltirilgan.

8.2-jadval

Kuzatishlar	x	Y	$(x-\bar{x})$	$(y-\bar{y})$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
1	7,0	27,6	0.7	1.2	0.84
2	7,0	31,2	0.7	4.8	3.36
3	6,4	29,3	0.1	2.9	0.29
4	7,8	30,2	1.5	3.8	5.7
5	7,0	27,6	0.7	1.2	0.84
6	7,5	29,1	1.2	2.7	3.24
7	4,8	26,7	-1.5	0.3	-0.45
8	2,6	9,4	-3.7	-17	62.9
Yig'indisi	50.1	211.1	-0.3	-0.1	76.72
O'rtachasi	6.3	26.4			9.6

X va Y ikkita o'zgaruvchilar bo'yicha n ta kuzatishlar mavjud bo'lganda ular orasidagi tanlama kovariatsiya quyidagi formula orqali ifodalanadi:

$$\operatorname{cov}(x,y)=\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})(y_1-\bar{y})+...+(x_n-\bar{x})(y_n-\bar{y})] \quad (8.14)$$

quyidagi belgilashlar kiritiladi: $Cov\ (x,y)$ - tanlama kovariatsiyasi, $pop\cdot Cov\ (x,y)$ bosh to'plamdagi X va Y lar kovariatsiyasi, $Var\ (x)$ -tanlama dispersiyasi, $pop\cdot Var\ (x)$ bosh to'plam uchun dispersiya.

Kovariatsiyani hisoblashning asosiy qoidalari

Kovariatsiyaning ta'rifidan bevosita kelib chiqadigan bir nechta muhim qoidalar mavjud bo'lib ular quyidagilardir :

1-qoida. Agar $y=v+w$ bo'lsa, u holda $Cov\ (x,y)=Cov\ (x,v)+Cov\ (x,w)$ bo'ladi.

2- qoida. Agar $y = a\cdot z$ bo'lsa, u holda $Cov\ (x,y)= aCov\ (x,z$ bo'ladi, bu yerda *a*- o'zgarmas.

3 –qoida. Agar $y=a$ bo'lsa, u holda $Cov\ (x,y)=0$ bo'ladi, bu yerda *a*- o'zgarmas.

Bu qoidalar bajarilishini misolda tekshirib ko'ramiz.

8.3-jadval

Oila	Oila daromadi(x)	Oziq-ovqat, kiyinish (y)	Oziq-ovqatga xarajat (v)	Kiyinishga xarajat (w)	Ikkinchi tanlama: oilaning oziq-ovqat, kiyinishga xarajati (z)
1	3000	1100	850	250	2200
2	2500	850	700	150	1700
3	4000	1200	950	250	2400
4	6000	1600	1150	450	3200
5	3300	1000	800	200	2000
6	4500	1300	950	350	2600
Yig'indi	23300	7050	5400	1650	14100
O'rtacha	3883	1175	900	275	2350

1-qoida bajarilishining isboti

Oltita oila(uy xo'jaligi) bo'yicha ularning yillik daromadi (x) va oziq-ovqat(v), kiyinishi (y) ga xarajatlar bo'yicha ma'lumotlar, 8.3-jadvalda keltirilgan.

y v va w ning yig'indisidan iborat. Jadvalda ko'rsatilgan z ning qiymatini hozircha hisobga olinmaydi.

8.4-jadvalda $(x-\overline{x})$, $(y-\overline{y})$, $(v-\overline{v})$ va $(w-\overline{w})$ qiymatlar har bir oila uchun hisoblanadi. Bundan har bir oila uchun quyidagilarni hosil qilish mumkin: $(x-\overline{x})(y-\overline{y})$, $(x-\overline{x})(v-\overline{v})$ va $(x-\overline{x})(w-\overline{w})$.

$Cov\,(x,y)$ $(x-\overline{x})(y-\overline{y})$ larning o'rtacha qiymati sifatida olinadi va u 266250 ga teng. Shunga o'xshash $Cov\,(x,y)$ 157500 ga teng va $Cov\,(x,w)$ 108750 ga teng. Biz $Cov\,(x,y)$ $Cov\,(x,v)$ va $Cov\,(x,w)$ larning yig'indisidan iborat ekanligini tekshirib ko'rdik.

8.4-jadval

Oilalar	$(x-\overline{x})$	$(y-\overline{y})$	$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$	$(v-\overline{v})$	$(x-\overline{x})(v-\overline{v})$	$(w-\overline{w})$	$(x-\overline{x})(w-\overline{w})$
1	-883	-75	66250	-50	44167	-25	22083
2	-1383	-325	449583	-200	276667	-125	172917
3	117	25	2917	50	5833	-25	-2917
4	2117	425	899583	250	529167	175	370416
5	-583	-175	102083	-100	57333	-75	43750
6	617	125	77083	50	30833	75	46250
Yig'indi			1597500		945000		652500
O'rtacha			266250		157500		108750

Shunday bo'lishi kerakligini osonlik bilan ko'rsatish mumkin. i- oilani qaraymiz. $(x-\overline{x})(y-\overline{y})$ - bu uning $\mathrm{Cov}\,(x,y)$ ga qo'shgan hissasi.

$y_i = v_i + w_i$ va $\overline{y} = \overline{v} + \overline{w}$ ekan, u holda

$$(x-\overline{x})(y-\overline{y}) = (x_i-\overline{x})(v_i + w_i - \overline{v} - \overline{w}) = (x_i-\overline{x})(v_i-\overline{v}) + (x_i-\overline{x})(w_i-\overline{w}),$$

shunday qilib, i- oilaning $\mathrm{Cov}\,(x,y)$ *ga qo'shgan hissasi* $\mathrm{Cov}\,(x,v)$ *va* $\mathrm{Cov}\,(x,w)$ larning yig'indisidan iboratdir. Bu barcha oilalar uchun ham to'g'ridir.

2- qoidani isbotlash

8.3-jadvalning oxirgi ustuni (z) 6 ta oiladan ikkinchi to'plam uchun oziq-ovqat va kiyinishga xarajatlarni o'z ichiga olgan. Z ning har bir kuzatish natijasi y ning ikki barobar qiymatini aks ettiradi. Ikkinchi oila to'plami uchun X ning miqdorlari qiymati xuddi avalgisidek deb taxmin qilinadi. $Cov\ (x,z)$ ni hisoblash uchun $(x-\bar{x})$, shuningdek $(z-\bar{z})$ ning qiymatlari kerak bo'ladi. (8.5-jadval).

8.5-jadval

Oilalar	$(x-\bar{x})$	$(z-\bar{z})$	$(x-\bar{x})(z-\bar{z})$
1	-883	-150	132500
2	-1383	-650	899167
3	117	50	5833
4	2117	850	1700167
5	-583	-350	204167
6	617	250	154167
Yig'indi			3195000
O'rtacha			532500

8.5-jadvaldan ko'rish mumkinki, $Cov\ (x,z)$ 532500 ga teng bo'lib u $Cov\ (x,y)$ ning ikki barobar qiymatiga teng. Shunday qilib biz $Cov\ (x,2y)$ ning $2Cov\ (x,y)$ bilan mos tushishini tekshirib ko'rdik. Buni osongina tekshirib ko'rish mumkin. Birinchi oilani qaraymiz. $z_1 = 2y_1$ va $\bar{z} = 2\bar{y}$ ga teng ekan, $(x_1-\bar{x})(z_1-\bar{z})$ esa $(x_1-\bar{x})(2y_1-2\bar{y})$ ga teng bo'lib, bundan kelib chiqadiki, u $2(x_1-\bar{x})(y_1-\bar{y})$ ga teng u holda birinchi oilaning $Cov\ (x,z)$ miqdorga hissasi $Cov\ (x,y)$ ning hissasining ikki barobariga teng. Bu boshqa barcha oilalar uchun ham to'g'ri. $(x-\bar{x})\cdot(z-\bar{z})$ o'rtacha qiymat $(x-\bar{x})(y-\bar{y})$o'rtacha qiymatining ikki barobariga teng. Shunday qilib $Cov\ (x,z) = 2\operatorname{cov}(x,y)$ bo'ladi. Umumlashtirib, agar $z = ay$ (va bu yerdan $\bar{z} = a\bar{y}$) bo'lsa, u holda

$Cov\ (x,z) = 2\cov(x,y) =$

$$\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})(z_i-\bar{z})=\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})(ay_i-a\bar{y})=\frac{a}{n}\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=aCov(x,y) \quad (8.15)$$

hosil bo'ladi.

3-qoida bajarilishining isboti

Aytaylik, tanlamada har bir oila ikkitadan yoshi katta odamga ega, faraz qilaylik bilmasdan umumiy daromad (x) bilan oiladagi yoshi kattalar soni (a) larning kovariatsiyasini hisoblamoqchi bo'ldingiz. Haqiqatan ham, $a_1 = a_2 = ... = a_6 = 2$ ga teng. Shunday qilib, $\bar{a} = 2$. Bundan har bir oila uchun $(a-\bar{a}) \approx 0$ bo'ladi, bundan kelib chiqadiki, $(x-\bar{x})(a-\bar{a}) = 0$. Shuning uchun ham $Cov\ (x,a) = 0$ bo'ladi.

Bunday holdagi jadvalning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi.

8.6-jadval

Oilalar	x	a	$(x-\bar{x})$	$(a-\bar{a})$	$(x-\bar{x})(a-\bar{a})$
1	3000	2	-883	0	0
2	2500	2	-1383	0	0
3	4000	2	117	0	0
4	6000	2	2117	0	0
5	3300	2	-583	0	0
6	4500	2	617	0	0
Yig'indi	233000	12			
O'rtacha	3883	2			

Bu asosiy qoidalardan foydalanib, kovariatsiyaning murakkabroq ifodalarini soddalashtirish mumkin. Agar biron bir y o'zgaruvchi uchta o'zgaruvchi (U,V,W) yig'indisidan iborat bo'lsa u holda

$$\cov(x,y) = \cov(x,u+v+w) = \cov(x,u) + \cov(x,v+w)$$

yana 1- qoidadan foydalanib,

$$\cov(x,y) = \cov(x,u) + \cov(x,v) + \cov(x,w) \qquad (8.16)$$

hosil bo'ladi.

Boshqa misol, agar $y = a + bz$, bo'lsa

bu yerda a va b o'zgarmas, z esa o'zgaruvchi u holda 1,3 va 2 qoidalarga asosan

$$\operatorname{cov}(x,y)=\operatorname{cov}(x,a)+\operatorname{cov}(x,bz)=0+\operatorname{cov}(x,bz)=b\operatorname{cov}(x,z) \quad (8.17)$$

hosil bo'ladi.

Topshiriq

1.1. Aytaylik ayrim davlatlarda har bir individning daromadi quyidagi formula orqali hisoblansin:

$$u=10000+500s+200t\ ,$$

bu yerda s – individning bilim olgan yillar soni; t – mehnat staji (yillarda); x – individning yoshi. Besh kishidan iborat bo'lgan tanlama uchun (jadvalda keltirilgan) $\operatorname{cov}(x,y), \operatorname{cov}(x,s), \operatorname{cov}(x,t)$ larni hisoblang va uning

$$\operatorname{cov}(x,y)=500\operatorname{Cov}(x,s)+200\operatorname{Cov}(x,t)$$ ga teng ekanligini tekshirib ko'ring, nimaga shunday ekanligini tushuntirib bering.

Individ	Yoshi(yillar)	Bilim olgan yillar soni	Mehnat staji	Daromadi
1	18	11	1	15700
2	29	14	6	18200
3	33	12	8	17600
4	35	16	10	20000
5	45	12	5	17000

Tanlama dispersiya

Shu paytgacha «dispersiya» atamasi nazariy dispersiya ma'nosida ishlatilib kelingan (ya'ni butun bo'sh to'plamga tegishli bo'lgan). n ta kuzatish $x_1,\dots,x_n$ lardan iborat bo'lgan tanlama dispersiya tanlamadagi o'rtacha kvadratik chetlanishdek aniqlanadi:

$$\operatorname{var}(x)=\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^2 .$$

Quyidagilarni belgilab olamiz:

1. Shu yo'l bilan aniqlangan tanlama dispersiya nazariy dispersiya s^2 ning siljigan bahosini o'zida namoyon qiladi va u quyidagicha ifodalanadi

$$\frac{1}{n-1}\sum(x_i-\bar{x})^2,$$

Bu σ^2 siljimagan bahodan iborat. Bundan kelib chiqadiki, $Var(x)$ miqdorning kutilgan qiymati $[(n-1)/n]\sigma^2$ ga teng, ko'rinib turibdiki u manfiy siljishga ega. Agar tanlama o'lchami p ko'payib borsa, u holda $(p-1)/p$ 1 ga intiladi, shunday qilib, $Var(x)$ miqdorning matematik kutishi σ^2 ga intilishini kuzatamiz.

2. X o'zgaruvchining nazariy dispersiyasi pop.var(x) orqali yoki σ_x^2 orqali belgilanadi. Tanlama dispersiya hamma vaqt var(x) ko'rinishida belgilanadi. Nima uchun tanlama dispersiya nazariy dispersiya qiymatini o'rtacha kamaytiradi? Sababi shundaki, u haqiqiy qiymatdan emas balki, o'rtacha tanlamadan o'rtacha kvadratik chetlanish sifatida hisoblanadi.

Dispersiyani hisoblash qoidasi

Dispersiyani hisoblashning oddiy qoidalari mavjud bo'lib, u xuddi kovariatsiyani hisoblash qoidasiga o'xshaydi. Bu qoidalarni tanlama va nazariy dispersiyalar uchun ham ishlatish mumkin.

Dispersiyani hisoblashning 1-qoidasi

Agar $y = v + w$ bo'lsa, u holda

$Var(y) = Var(v) + Var(w) + 2Cov(v,w)$ bo'ladi.

Dispersiyani hisoblashning 2-qoidasi

Agar $y = az$ bo'lsa, u holda $\mathrm{var}(y) = a^2\,\mathrm{var}(z)$ bo'ladi, bu yerda a o'zgarmas.

Dispersiyani hisoblashning 3-qoidasi

Agar $y = a$ bo'lsa, u holda $\mathrm{var}(y) = 0$ bo'ladi, bu yerda a o'zgarmas.

Dispersiyani hisoblashning 4-qoidasi

Agar $y = v + a$ bo'lsa, u holda $\text{var}(y) = \text{var}(v)$ bo'ladi, bu yerda a o'zgarmas.

Birinchidan, x o'zgaruvchining dispersiyasi x ning ikkita miqdori orasidagi kovariatsiyasi sifatida qaralishi mumkin:

$$\text{var}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x}) = Cov(x,x).$$

Bu tenglikni hisobga olgan holda dispersiyani hisoblash qoidasini keltirib chiqarish uchun tanlama kovariatsiyani hisoblash qoidasidan foydalanishimiz mumkin. Bundan tashqari, *tanlama kovariatsiyasi munosabatidan foydalanib* var(x) ni ifodalashning boshqa formulasini hosil qilishimiz mumkin:

$$\text{var}(x) = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right] - x^{-2}.$$

1 -qoidaning isboti

Agar $y = v + w$ bo'lsa, u holda

$Var(y) = Cov(y,y) = Cov(y,[v+w]) = Cov(y,[v+w],v) + Cov(y,[v+w],w)$
kovariatsiyaning 1-qoidasiga asosan,

$Cov(v,v) + Cov(w,v) + Cov(v,w) + Cov(w,w) = Var(v) + Var(w) + 2\ Cov(v,w)$

2 -qoidaning isboti

Agar $y = az$ bo'lsa , bu yerda a o'zgarmas, u holda kovariatsiya 2-qoidasini ikki marotiba ishlatish orqali, quyidagini hosil qilamiz:

$Var(y) = Cov(y,y) = Cov(y,az) = aCov(y,z) = aCov(az,z) = a^2\text{cov}(z,z) = a^2\text{var}(z)$

3 -qoidaning isboti

Agar $y=a$ bo'lsa, u holda kovariatsiyaning 3-qoidasiga asosan: $Var(y) = Cov(a,a) = 0$ bo'ladi, bu yerda a o'zgarmas,

Haqiqatan ham, agar y – o'zgarmas bo'lsa, u holda uning o'rtacha qiymati ham o'sha o'zgarmasdan iboratdir va $(y - \bar{y})$ barcha kuzatishlar uchun nolga teng bo'ladi. Bundan kelib chiqadiki, $Var(y) = 0$.

4-qoidaning isboti

Agar $y = v + a$ bo'lsa, bu yerda a o'zgarmas, u holda kovariatsiyaning 1-qoidasiga asosan va dispersiyaning 1 va 3 qoidasidan foydalanib quyidagini hosil qilish mumkin:

$$Var\ (y) = \text{var}(v + a) = \text{var}\ (v) + \text{var}(a) + 2\,\text{cov}(v, a) = \text{var}(y).$$

Nazariy dispersiya ham shu qoidaga bo'ysinadi.

Topshiriq

1.1-topshiriq ma'lumotlaridan foydalanib, Var (y), Var (s), Var (t) larni hisoblang va $Var\ (y)\ = 250000\ Var\ (s) + 40000\ Var\ (t) + 200000 Cov\ (s,\ t)$ ekanligini tekshirib ko'ring.

VIII bobga doir topshiriqlar

1. X tasodifiy miqdor ikkita shoshqol toshni otish natijasida tushgan katta va kichik sonlar orasidagi farq *sifatida aniqlanadi*. Agar ular o'zaro teng bo'lsa, u holda X nolga teng bo'ladi. X uchun ehtimollar taqsimotini aniqlang. Jadvalda mumkin bo'lgan 36 ta ro'y berishlar va unga mos ehtimollar taqsimoti keltirilgan.

Qizil / *Yashil*	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1		1	2
5	4			1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

2. Bo'sh kataklarni to'ldiring:

X ning qiymati	0	1	2	3	4	5
Chastota	6	10		6	4	2
Ehtimollik		10/36		6/36	4/36	2/36

3. Quyida berilgan jadvalda $E(X^2)$ ni X ning 1–topshiriqda

X	X^2	p	X^2p
0	0		
1	1	10/36	10/36
2	4		
3	1		
4	6	4/36	64/36
5	2	2/36	50/36
Jami			

aniqlangan qiymatlari uchun hisoblari keltirilgan. Bo'sh kataklarni to'ldiring.

4. X bosh to'plam dispersiyasini aniqlash formulasi keltirilgan.

$$\sigma_x^2 = M[X] - (M[X])^2$$

Bo'sh kataklarni to'ldiring:

X	P			
0	6/36	−1.9444	3.7087	0.6301
1	10/36	−0.9444	0.8919	0.2477
2	8/36	0.0556	0.0031	0.0007
3	6/36	1.0556	1.1143	0.1857
4	4/36	2.0556	4.2255	0.4695
5	2/36	3.0556	9.3367	0.5187
Jami				2.0525

5. $E(X) = 7$, bundan kelib chiqadiki, $2E(X) + 3 = 17$.

X	p	Y	Yp
2	1/36	7	7/36
3	2/36	9	18/36
4	3/36	11	33/36
5	4/36	13	52/36
6	5/36	15	75/36
7	6/36	17	102/36
8	5/36	19	95/36
9	4/36	21	84/36
10	3/36	23	69/36
11	2/36	25	50/36
12	1/36	27	27/36
Jami			612/36=17

6. Berilgan diskret tasodifiy miqdorning ehtimolini, o'rtacha qiymatini va dispersiyasini aniqlang:

x_i	p_i	$x_i-\mu$	$(x_i-\mu)^2$	$(x_i-\mu)^2\cdot p_i$
0	0.1			
1	0.3			
2	0.25			
3	0.2			
4	0.15			

Bu erda μ-o'rtacha qiymat.

Tayanch so'z va iboralar
Reprezentativ, statistik ma'lumotlar, ehtimollar nazariyasi, matematik statistika usullari, *iqtisodiy ko'rsatkichlar, matematik modellar,* tasodifiy *omillar,* ekonometrik tahlil, iqtisodiy ma'lumotlar, o'zaro kesishuvchi ma'lumotlar, tashqi nazoratga bo'ysunmaydigan omillar, tasodifiy o'zgaruvchi, diskret va uzluksiz, Uzluksiz tasodifiy miqdor, bosh to'plam, tanlama to'plam, absolut chastota, kuzatishlar soni, gistogramma, o'rtacha qiymat, matematik kutish, tanlama kovariatsiya, dispersiya.

VIII bobga doir savollar

1. Iqtisodiy ma'lumotlar va ularning turlari.
2. Iqtisodiyotda tasodifiy hodisalarga misol keltiring.
3. *Tasodifiy miqdorga ta'rif bering*
4. Tasodifiy miqdor va tasodifiy hodisalar orasida qanday bog'lanish mavjud?
5. Tasodifiy o'zgaruvchanlikning tasodifiy bo'lmagan (deterministik) o'zgaruvchanlikdan farqi nimada? Siz tasodifiy miqdorlarning qanday turlarini bilasiz? Misol keltiring.

6. *Diskret tasodifiy miqdorning asosiy ehtimollik tavsifini sanab bering va unga ta'rif bering.*

7. Quyidagi miqdorlardan qaysi biri katta: Prob $(a<X<b)$ yoki Prob$(a\leq X\leq b)$?

8. Diskret va *uzluksiz tasodifiy* miqdorni Prob$(a\leq x<b)$ intervalga tushish ehtimolligini qanday hisoblash kerak?

a) taqsimot funksiyasi yordamida;

b) uzluksiz tasodifiy *miqdor* uchun ehtimolning zichligi yordamida yoki diskret tasodifiy miqdor uchun ehtimollik funksiyasi yordamida?

9. Tasodifiy miqdorning o'rtacha qiymatini qanday tavsiflash mumkin?.

10.Matematik kutishga ta'rif bering.

11. *Tasodifiy miqdor taqsimlanishining asosiy tavsiflarni sanab chiqing* va ularni ta'riflab bering. Ularning o'zaro bog'liqligi qanaqa?

12. Diskret va uzluksiz tasodifiy *miqdor* uchun matematik kutishni hisoblashning farqi nimada?

13. Matematik kutish ta'rifidan kelib chiqqan holda asosiy xossalarini isbotlang.

14. Diskret va uzluksiz tasodifiy miqdor uchun dispersiyaga ta'rif bering.

15. Dispersiya ta'rifidan kelib chiqqan holda asosiy xossalarini isbotlang.

X bob. EKONOMETRIK MODELLAR

Makroiqtisodiyot, mikroiqtisodiyot va ekonometrika zamonaviy iqtisodiy ta'limning asosini tashkil qiladi. Agar makro- va mikroiqtisodiyotning asosiy tamoyillari ancha ilgari ya'ni XVIII asrlarda kiritilgan bo'lsa, ekonometrika esa, iqtisodiy bilimlarning yangi va kuchli rivojlanib borayotgan yo'nalishlaridan biridir. Shuning uchun ham *iqtisodiyot bo'yicha* Nobel mukofotiga sazovor bo'layotganlarning aksariyat ko'pchiligi ekonometrik tahlil, prognozlarning yangi usullarini, iqtisodiy tizimlarning matematik modellarini yaratganliklari uchun olishdi. Ekonometrika bo'yicha qilingan ishlar XIX asrning oxiri XX asrning boshlarida paydo bo'lgan. 1897 yilda iqtisodiy *nazariya matematiklar maktabi* asoschilaridan biri V.Paretoning turli mamlakatlardagi aholi daromadlarini statistik o'rganishga bag'ishlangan ishining natijasi e'lon qilindi. Bu ishda Pareto egri chizig'i $y = A(x-a)^{-\alpha}$ berilgan bo'lib, bunda $y -$ x dan katta bo'lgan daromadga ega kishilar soni; a - eng kam daromad; Aва α lar esa statistik usullar orqali aniqlanadigan parametrlardir.

XX asrning boshlarida ingliz statistigi Gukerning bir necha ishlari e'lon qilingan bo'lib, bu ishlarda u Pirson va uning maktabi ishlab chiqqan korrelyatsiya-regressiya usullarida iqtisodiy ko'rsatkichlar orasidagi bog'lanishni aniqlashda, xususan tovar birjasidagi bankrotliklar sonining donning narxiga bog'liqligini o'rgangan. 2003 yilda amerikalik iqtisodchi Robert Ingl va ingliz iqtisodchisi Klayv Greyndjerlar matematik modellar asosida iqtisodiy vaqtli qatorlarni tahlil qilish usulini ishlab chiqishgan bo'lib, bu usul YaIM o'zgarish tendentsiyasini, iste'mol bahosini, foiz stavkalarini va h.k. larni yaqin kunlar, bir haftaga shuningdek bir yil oldinga prognoz qilishga imkon beradi. Ikkinchi nobel mukofoti sovrindori britaniyalik Klayv Greyndjer ham bu mukofotni iqtisodiyotda vaqtli qatorlarni tahlil qilganligi uchun olgan. Bu yo'nalish amaliy iqtisodiy masalalar yo'nalishi tadqiqotchilari uchun yangi imkoniyatlarni taqdim etadi. Sabab-oqibat bog'lanishlarini tushuntirishda ekonometrik usullar turli xil gipotezalar va aniq iqtisodiy hodisalarning bir-biriga mos kelishini tekshirishga, turli sharoitlar va shartlarda iqtisodiy subyektlarning istiqboldagi rivojlanish prognozlarini amalga oshirishga yordam beradi.

Ekonometrika–iqtisodiyotdagi miqdoriy qonuniyatlar va o'zaro boq'lanishlarni matematik statistika usullari orqali o'rganuvchi fandir. Bu usullarning asosini korrelyatsiya-regressiya tahlilllari tashkil qiladi.

Keyingi yillarda matematik statistika va uning amaliy elementlari nazariyasini rivojlantirish bo'yicha ko'plab ishlar qilingan.

Ekonometrik modellar va usullar hozirgi vaqtda nafaqat iqtisodiyotda yangi bilimlar olish uchun kuchli instrument, balki prognozlashda, bank ishida, biznesda amaliy qarorlar qabul qilish uchun keng qo'llanilib kelayotgan vositalardan biridir.

9.1. Ekonometrik tahlilning asosiy masalalari

Iste'mol nazariyasi, *ishlab* chiqarish nazariyasi, bozor nazariyalarida talabning, iste'molning funksiyalari qo'llanilib, bu funksiyalarning koeffitsientlari berilgan, o'zgaruvchilar esa, daromad va iste'moldan iborat. Ekonometrika talab va iste'molning koeffisentlarini daromad va xarajatlar haqidagi eksperimental ma'lumotlarga asoslangan holda baholashga imkon beradi. Ko'rinib turibdiki, koeffitsientlarni baholash statistik xarakterga ega. Ekonometrik bo'lmagan modelda, misol uchun X va Y o'zgaruvchilar uchun

$$F(x,y)=0 \qquad (9.1.1)$$

bo'lsin. Bunday farazning qabul qilinishiga sabab, nazariyachilarni faqat doimiy (tasodifiy bo'lmagan) bog'lanishlar qismi qiziqtirib kelgan, chunki doimiy bo'lmagan (tasodifiy) qismi doimiy qismiga nisbatan juda kichik bo'lib, ayrim hollarda etiborga olmasa ham bo'ladi. Ekonometrikaning asosiy masalasi (9.1.1) farazning to'g'riligini tekshirishdir. Shuning uchun ekonometrika X va Y larning bog'lanishini quyidagi ko'rinishda:

$$F(x, y, \varepsilon) = 0 \qquad (9.1.2)$$

qadiradi, bu erda ε-tasodifiy miqdor bo'lib, u ehtimollik qonuniga bo'ysinadi. O'rganilayotgan (9.1.2) munosabat quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$Y = f(x) + \varepsilon \qquad (9.1.3)$$

bu erda $f(x)$ - doimiy qismi; ε - doimiy bo'lmagan qismi;

Ekonometrik masalalarni yechishda regressiya, korrelyatsiya, kovariatsiya, dispersiya tahlillari ishlatiladi.

9.2 Iqtisodiy ma'lumotlardagi chiziqli statistik bog'lanish tahlili

Iqtisodiy izlanishlardagi asosiy masalalardan biri, o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanishni tahlil qilishdir. O'zgaruvchilar orasidagi bog'lanishning eng oddiy turi chiziqli bog'lanish bo'lib, mana shu bog'lanishning tarkibini, uning parametrlarini baholash matematik statistikaning asosiy yo'nalishlaridan biridir.

Ikkita x, y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish masalasini va ular orasidagi quyidagi ikkita munosabatni qaraymiz.

1. x, y o'zgaruvchi o'zaro chiziqli bog'lanishga egami?
2. x, y o'zgaruvchilarning bog'lanish formulasi qanaqa?

Birinchi holda X va Y ikkalasi teng huquqli bo'lib, ularda erkli va erksiz o'zgaruvchi tushunchasi mavjud emas.

Ikkinchi holda esa, bir o'zgaruvchining ikkinchisiga bog'liqligi, ya'ni ular bog'lanishining formulasi talab qilinadi. Aytaylik bog'lanish formulasi chiziqli $y = a + bx$ ko'rinishda bo'lib, bu formulaning baholanishi y'ani a, b noma'lum parametrlarni aniqlash kerak bo'ladi. Bu yerda x-erkli, y-erksiz o'zgaruvchi.

Bunday masalalarni yechish uchun matematik statistika maxsus usullari mavjud. 1-holda x, y miqdorlarning korrelyatsiya koeffitsienti, 2-holda esa chiziqli regressiya koeffitsientlari, a va b lar hamda ularning standart xatolari, t–statistikani aniqlash, bu qiymatlar orqali x, y miqdorlar orasida bog'lanish mavjud yoki mavjud emasligini tekshirdan iboratdir.

x, y lar orasida chiziqli bog'lanish mavjud deb faraz qilamiz. Agar x o'zgaruvchi o'zining o'rtacha qiymatidan katta qiymat qabul qilsa, bog'lanish musbat bo'ladi u holda y o'zgaruvchining qiymati ham o'zining o'rtacha qiymatidan katta bo'lishi kerak. Agar x o'zgaruvchi o'zining o'rtacha qiymatidan kichik qiymat qabul qilsa, u holda y ning qiymati ham o'zining o'rtacha qiymatidan kichik bo'ladi.

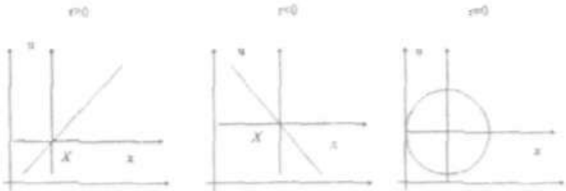
9.3. Korrelyatsiya koeffitsienti.

Chiziqli bog'lanish darajasining o'lchami sifatida korrelyatsiya koeffitsienti ishlatiladi. X va Y o'zgaruvchilar orasidagi korrelyatsiya koeffitsienti

$$r(x,y)=\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}} \qquad (9.3.1)$$

formula orqali aniqlanadi.

Korrelyatsiya koeffitsienti formulasidan ko'rinib turibdiki, korrelyatsiya koeffitsientining miqdori X va Y miqdorlar birlik o'lchamidan bog'liq emas, shuning uchun bu miqdor beo'lchov miqdor deb ataladi. Uning miqdori -1 va $+1$ orasida o'zgaradi. -1 qiymatni chiziqli manfiy bog'lanish natijasida $+1$ qiymatni chiziqli musbat bog'lanish natijasida qabul qiladi. Korrelyatsiya koeffitsientining 0ga yaqin qiymati o'zgaruvchilar orasida bog'lanish yo'qligini bildiradi.



9.1-rasm. Korrelyatsiya bog'lanishlari turlari.

Korrelyatsiya koeffitsientining suratidagi miqdor

$\text{cov}(x,y) = \frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ kovariatsiya ko'rsatkichini beradi. Bu ko'rsatkich ham korrelyatsiya koeffitsientidek X va Y miqdorlar orasidagi chiziqli bog'lanish darajasini xarakterlaydi, lekin bu o'lchamga ega bo'lib, X va Y larning birlik o'lchamidan bog'liq. Statistik tahlilda kovariatsiya ko'rsatkichi korrelyatsiya koeffitsientini hisoblashda oraliq element sifatida ishlatiladi.

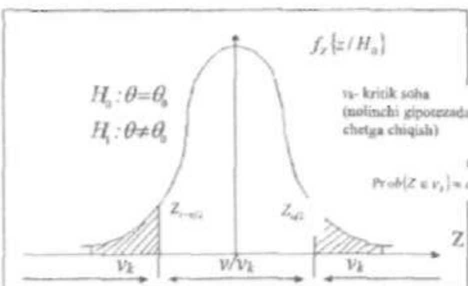
Shy paytgacha berilgan tanlama bo'yicha chiziqli bog'lanish darajasini baholash uchun hisoblanadigan X va Y miqdorlar tanlama korrelyatsiya koeffitsienti to'g'risida so'z yuritdik. Bunda taqsimot qonuni uchun X va Y miqdorlar chiziqli bog'lanish darajasining haqiqiy ko'rsatkichi sifatida nazariy korrelyatsiya koeffitsienti ρ_{xy} hisoblanadi.

Bosh tó'plam uchun $\rho_{xy} = \frac{\text{cov}(x,y)}{\sigma(x)\sigma(y)}$ ga teng.

Korrelyatsiya koeffitsientining bosh to'plamda nolga tengligi qaralayotgan miqdorlarda chiziqli bog'lanish mavjud emasligini ko'rsatadi. Lekin bu ular orasida umuman bog'lanish mavjud emas degan so'zni bildirmaydi. $r(x,y)$ bosh to'plam uchun nolga teng bo'lsa, u tanlama to'plamda nolga teng bo'lmasligi mumkin. Aksincha, u albatta haqiqiy qiymatidan chetga chiqadi, lekin bu chetga chiqishlar qancha ko'p bo'lsa berilgan tanlama hajmida u shunchalik kam ehtimollikka ega. Shunday qilib, X va Y miqdorlar korrelyatsiya koeffitsientining har bir aniq qiymatida bosh to'plam uchun tanlangan korrelyatsiya koeffitsienti tasodifiy miqdor hisoblanadi. Bundan kelib chiqadiki uning ixtiyoriy funksiyasi ham tasodifiy miqdor hisoblanadi va jadvalli tahlil uchun qulay bo'lgan shunday funksiyani ko'rsatish talab qilinadiki, bu funksiya ma'lum bo'lgan biron bir taqsimotga ega bo'lsin. Tanlangan korrelyatsiya koffitsienti r uchun shunday funksiyalardan biri t–statistika hisoblanib u quyidagi formula orqali hisoblanadi: $t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$ bu n-2 erkinlik darajasiga ega bo'lgan Styudent taqsimotidan iboratdir. Erkinlik darajasi soni kuzatishlar sonidan 2 ta kam, tanlangan korrelyatsiya koeffitsienti formulasiga X va Y larning tanlangan o'rtacha qiymatlari kirar ekan, hisoblash uchun tasodifiy miqdorlar kuzatishlaridan bog'liq bo'lgan ikkita chiziqli formula ishlatiladi. Korrellyatsiya koeffitsienti uchun nolinchi gipoteza tekshirib ko'riladi, ya'ni uning bosh to'plamda nolga tengligi. Agar tanlangan korellyatsiya koeffitsienti nol qiymatdan juda ko'p chetga chiqsa bu gipoteza rad qilinadi.

Bu yerda "ko'p chetga chiqish", "kam ehtimolli hodisa" so'zlarining ma'nosi aynan nimani anglatishini tushinish muhimdir. Kam ehtimolli hodisada shunday hodisaga ehtimollik berish kerakki, bu statistikada "muhimlik darajasi" deb ayitiladi. Ko'p hollarda 1% va 5% muhimlik darajasi beriladi. Agar ayrim ko'rsatgichlar uchun uning haqiqiy qiymati nolga tengligi to'g'risidagi gipoteza tekshirilayotgan bo'lsa, u holda bu gipoteza berilgan tanlama bo'yicha *ko'rsatkichning bahosi mos ravishda* 1% va 5% lardan kam bo'lsa, u holda bu gipoteza rad qilinadi.

9.2-rasmda korrelyatsiya koeffitsienti uchun nolinchi gipotezani tekshirish berilgan bo'lib, bundan statistik gipotezalarni tekshirish uchun umumiy sxema sifatida foydalanilish mumkin. Bu yerda H_0 –korrelyatsiya koeffitsientining haqiqiy qiymati nolga tengligi to'g'risidagi gipoteza, unga alternativ H_1 –u nolga teng emas degan gipoteza.



9.2-rasm. Korrelyatsiya koeffitsienti uchun nolinchi gipotezani tekshirish.

Agar nolinchi gipoteza to'g'ri bo'lsa f_t-funksiya Styudent taqsimoti ehtimolligining zichlik funksiyasidan iborat. Shtrixlangan soha–tanlangan korrelyatsiya koeffitsienti qiymatidan absolyut qiymat bo'yicha katta bo'lgan sohadir. Agar ohirgisi shu sohaga tushsa, H_0 rad qilinadi. α - muhimlik darajasiga teng bo'lgan shtrixlangan maydonga Z ning qiymati H_0 bajarilgan holda tushadi.

Nolinchi gipotezani tekshirishni aniq misolda qarab chiqamiz. Aytaylik, fermer xo'jaligida yetishtirilgan bahorgi bug'doyning hosildorligi va unga beriladigan suvning miqdori to'g'risidagi 1991-2000 yillar uchun olingan ko'rsatkichlardan iborat ma'lumotlar hamda ular uchun -0,227 ga teng bo'lgan korrelyatsiya koeffitsienti berilgan bo'lsin. Ko'rinib turibdiki, bog'lanish teskari, lekin uning muhimlik darajasi qanday? H_0 gipotezani tekshirib ko'ramiz. Buning uchun t–statistikani hisoblaymiz $t=\frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$. Bizning misolimizda t–statistika -0,66 ga teng. $\alpha = 0,05$ muhimlik darajasini beramiz, ya'ni 5%. Kritik soha ikkita bir xil sohadan iborat bo'lib, ularning qiymati 0,025 ga teng. t–statistikaning qiymati taqsimlanishning o'ng «dumi»ga tushadigan ehtimollik jadvalini qaraymiz (Ilovalarga qarang). Faqat o'ng «dumi»ga ya'ni bir tomonlama kritik sohaga tushish ehtimolligi $\frac{\alpha}{2}$ ga teng, bizning holda u 0,025. Jadvaldan kritik qiymatni topganimizda *u 2,306 ga teng. Biz nolinchi* gipotezani faqat $|t| > 2,306$ bo'lgandagina rad qilgan bo'lar edik, bizning holda $|t| = 0,66$. Demak, korrelyatsiya koeffitsientining haqiqiy qiymati nolga tengligini istisno qilib bo'lmaydi. Shunday qilib, mavjud ma'lumotlar asosida fermer xo'jaligida yetishtirilgan bahorgi bug'doy hosildorligi va beriladigan suv orasidagi statistik muhim bo'lgan chiziqli bog'lanish mavjudligi to'g'risidagi xulosani berish mumkin emas ekanligini ko'rdik.

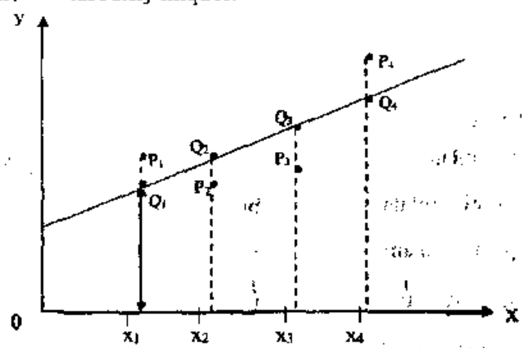
9.4. Chiziqli regressiya tahlili

Iqtisodiy tahlilning muhim masalalaridan biri iqtisodiy ko'rsatkichlar o'zaro bog'lanishini o'rganish masalasidir. Iqtisodiy o'zgaruvchilarni haqiqiy statistik ma'lumotlardan foydalanib statistik tahlil qilmasdan ularning modellarini qurish, tekshirish yoki yaxshilash mumkin emas.

Iqtisodiy o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanishni o'rganishni ikkita o'zgaruvchi misolida qaraymiz. Bu hol juda oddiy bo'lib, uni grafik ko'rinishda ham ifodalash mumkin. Bog'lanishlarni ekonometrik tahlil qilish o'zgaruvchilarning chiziqli bog'lanishini baholash hisoblanadi. Agar bir qancha kuzatish nuqtalari sohasi mavjud bolsa, bu sohada barcha to'g'ri chiziqlar ichidan kuzatish nuqtalariga yaqin bo'lgan to'g'ri chiziqni o'tkazish mumkin bo'ladi. Aytaylik, ikki o'zgaruvchi orasida quyidagi bog'lanish mavjud bo'lsin:

$$Y = \alpha + \beta x + \varepsilon \qquad (9.4.1)$$

Bu yerda $\alpha + \beta x$ -tasodifiy bo'lmagan qismi, x tushuntiradigan o'zgaruvchi sifatida qatnashadi, α va β lar esa, aniqlanishi kerak bo'lgan noma'lum parametrlardir, ε – tasodifiy miqdor.



9.3-rasm

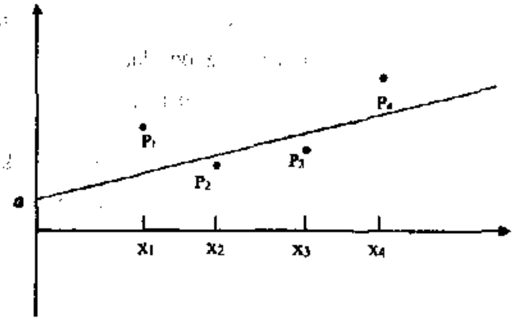
P nuqtalar o'zgaruvchilarning haqiqiy qiymatini aks ettiruvchi nuqtalardir. Bu yerda α, β va Q nuqtalarning hamda tasodifiy hadning haqiqiy qiymatlari noaniqdir.

Regressiya tahlilining asosiy masalasi α, β parametrlarning bahosini va Q nuqtalar bo'yicha o'tadigan to'g'ri chiziqning holatini aniqlashdan iboratdir.

Ko'rinib turibdiki ε ning qiymati qancha kichik bo'lsa, masalani yechish shunchalik oson bo'ladi. Haqiqatan ham agar tasodifiy had qatnashmaganda edi, unda P nuqta Q nuqta bilan ustma ust tushgan bo'lardi va to'g'ri chiziqning holati aniq bo'lgan bo'lardi. Bu holda bu chiziqni chizish va α, β ning qiymatini aniqlash oson bo'lgan bo'lardi.

Parametrlarni baholashning eng kichik kvadratlar usuli

Aytaylik X va Y lar uchun 4 ta kuzatish natijalari berilgan bo'lib, bular orqali α, β parametrlarning qiymatini aniqlash kerak bo'lsin.

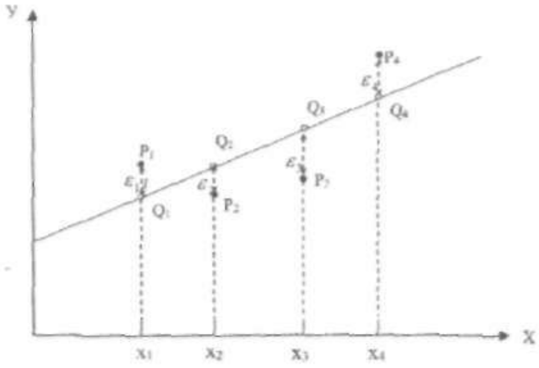


9.4-rasm

9.4-rasmda to'g'ri chiziqning Y o'qi bilan kesishish nuqtasi α ning bahosini bildiradi va *a* bilan belgilangan, to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyenti esa, β ning bahosini anglatadi va u *b* bilan belgilangan. Birinchi qadam har bir kuzatishning xatosini aniqlashdan iboratdir:

$$\varepsilon_1 = y_1 - \hat{y}_1,\ \varepsilon_2 = y_2 - \hat{y}_2,\ \varepsilon_3 = y_3 - \hat{y}_3,\ \varepsilon_4 = y_4 - \hat{y}_4.$$

Regressiya chizig'ini shunday chizishimiz kerakki, natijada bu xatolar minimum bo'lsin (9.5-rasm).



9.5-rasm

Qo'yilgan masalani yechishning usullaridan biri xatolar kvadratlarining yig'indisini minimallashtirishdan iboratdir:

$$S = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2 \to \min$$

buni $S(a,b) = \sum_i \varepsilon_i^2 \to \min$ ko'rinishda yozish mumkin.

yoki: $S(a,b) = \sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2 \to \min$.

Oliy matematikadan ma'lumki, biror bir funksiyaning ekstremal nuqtalarini topish uchun uning birinchi tartibli hosilasi nolga tenglashtiriladi:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum_{i=2}^{n} (y_i - a - bx_i) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)x_i = 0 \end{array} \right.$$
$$\frac{\partial S}{\partial b} = 0$$

Bu sistemada qavslarni ochib, o'xshash hadlarni ixchamlashtirgazda quyidagi tenglamalar sistemasi hosil qilinadi.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum y_i = na + b\sum x_i \\ \sum x_i y_i = a \sum x_i + b\sum x_i^2 \end{array} \right.$$

Bu tenglamalar sistemasidagi $\sum y_i$, $\sum x_i$, $\sum x_i y_i$, $\sum x_i^2$ yig'indilarni topib, tenglamalar sistemasini a,b noma'lumlarga nisbatan yechganda bu noma'lumlarni topish mumkin yoki bu noma'lumlarni quyidagi formulalar orqali ham aniqlash mumkin:

$$b = \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\operatorname{var}(x)}$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

bu yerda

$$\operatorname{cov}(x,y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$$\operatorname{var}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Matematik statistikada parametrlarni baholash **sifati α va β miqdorlarning** siljimaslik miqdori bilan xarakterlanadi va u

$M(a)=a$, $M(b) = b$ bo'ladi.

Bu erda M(ξ) ξ-tasodifiy miqdorning matematik kutishi.

a va *b ning asoslanganligi:*

$\lim\limits_{n\to\infty} var(a)=0$,

$\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{var}(b)=0$.

Bu baholashlarning sifati, ular qaysi usul bilan hosil qilinganligidan bog'liq. Bu yerda a va b baholarni hosil qilish uchun eng kichik kvadratlar usulidan foydalanildi. Matematik statistika kursida eng kichik kvadratlar usuli asosida olingan baholar siljimagan va asosli baholar deyiladi. Demak a va b lar siljimagan va asosli baholardir. Regresssiya tahlilning boshqa muhim masalasi, tanlangan model tanlama modelga teskari emasligini, yani undan ko'p chetga chiqmasligini tekshirishdan iborat. Bunday masalaga modelning adekvatligini tekshirish masalasi deyiladi. Matematik statistikada bu masalani yechish uchun juda ko'p usullar mavjud.

Eng kichik kvadratlar usuli bo'yicha regressiya tenglamasi parametrlarini baholashga doir misollar

1-misol

Jarayon ketma-ketligini ko'rsatish uchun ikkita kuzatishdan iborat oddiy misol qaraladi: rasmda ko'rsatilganidek , kuzatish natijalari $x=1$ bo'lganda $y=3$, va $x=2$ bo'lganda $y=5$ bo'ladi .

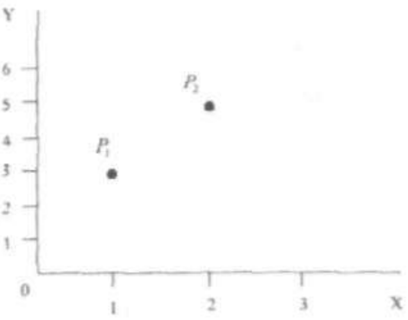
$\hat{y}=a+bx$ tenglamaning a va b koeffitsiyentlarini baholaymiz.

Ko'rinib turibdiki, mavjud bo'lgan ikkita kuzatish natijalari asosida aniq moslikni o'rnatish mumkin. Regressiya usulidan foydalanib, ikki nuqta orqali regressiya chizig'i o'tkaziladi.

Agar $x=1$ bo'lsa, u holda regressiya tenglamasiga mos keluvchi $y=(a+b)$ hosil qilinadi. Agar $x=2$ bo'lsa, u holda $y=a+2b$ bo'ladi. Bunga asosan 9.1-jadval hosil qilinadi.

9.1-jadval

x	Y	$\hat{y}$	ε
1	3	$a+b$	$3-a-b$
2	5	$a+2b$	$5-a-2b$



y_1 ning qiymati (y ning P_1 nuqtadagi qiymati) $(a+b)$ ga teng , y_2 niki $\hat{y}_2=a+2b$ ga teng. Bundan kelib chiqadiki, $(y_1-\hat{y}_1)$ orqali aniqlanuvchi ε_1 qoldiq birinchi kuzatish uchun $(3\text{-}a\text{-}b)$ ga teng, $(y_2-\hat{y}_2)$ orqali aniqlanuvchi ε_2 qoldiq esa ikkinchi kuzatish uchun $(5\text{-}a\text{-}2b)$ ga teng. Bundan ,

$$S=\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2=(3-a-b)^2+(5-a-2b)^2=\left(9+a^2+b^2-6a-6b+2ab\right)+$$
$$\left(25+a^2+4b^2-10a-20b+4ab\right)=2a^2+5b^2+6ab-16a-26b+34.$$

kelib chiqadi.

Endi a va b larning shunday qiymati tanlanadiki, u holda S ning qiymati minimal bo'lsin. Buning uchun differentsial hisob qo'llanilib a va b larning qiymati topiladi, ular quyidagi munosabatlarni qanoatlantiradi:

$$\frac{\partial S}{\partial a}=0; \quad \frac{\partial S}{\partial b}=0;$$

va $\quad \dfrac{\partial S}{\partial a}=4a+6b\text{-}16; \quad \dfrac{\partial S}{\partial b}=10b+6a-26.$

Shunday qilib, $2a+3b\text{-}8=0$ va $3a+5b\text{-}13=0$ lar hosil bo'ldi. Bu ikki tenglamani birgalikda yechganda, $a=1$ *va* $b=2$ qiymatlar hosil bo'ladi. Bundan, regressiya tenlamasi quyidagi ko'rinishga keladi: $\hat{y}=1+2x$.

To'g'ri xulosaga ega bo'lish uchun, quyidagi qoldiqlar hisoblanadi:

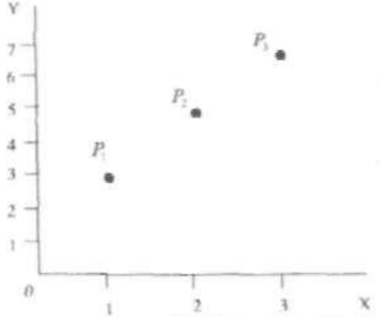
$\varepsilon_1=3-a-b=3-1-2=0;$

$\varepsilon_2=5-a-2b=5-1-4=0.$

Shunday qilib, ikkala qoldiq ham nolga teng, bu degan so'z, regressiya chizig'i ikkala nuqtadan aniq o'tadi, bu oldindan ma'lum edi. Agar bizda bor yo'g'i ikkita kuzatish natijasi mavjud bo'lsa u holda to'g'ri chiziqni shu ikki nuqtadan o'tkazish kerak bo'ladi va regressiya tahlilini o'tkazib o'tirishga ehtiyoj bo'lmaydi.

2-misol. 1-misoldagi ma'lumotlarga uchinchi kuzatish natijasini qo'shamiz: $x = 3$ bo'lganda $y= 6$. Rasmda ko'rsatilgan uchta kuzatish natijasi bitta to'g'ri chiziqda yotmaydi, shuning uchun aniq moslikni o'rnatish qiyin. Bunday holatda to'g'ri chiziqning holatini hisoblash uchun eng kichik kvadratlar usuli bo'yicha olingan regressiya tenglamasini ishlatamiz. Buning uchun standart tenglama quyidagi ko'rinishda qidiriladi: $\hat{y}=a+bx$.

X ning 1, 2, 3 ga teng bo'lgan qiymatlarida, y ning hisoblangan qiymatlari mos ravishda $(a + b)$, $(a + 2b)$ va $(a + 3b)$ ga teng bo'lib, ular 9.2-jadvalda keltirilgan.



Uchta kuzatish natijasiga doir misol

9.2-jadval

X	y	$\hat{y}$	ε
1	3	$a+b$	$3-a-b$
2	5	$a+2b$	$5-a-2b$
3	6	$a+3b$	$6-a-3b$

Bundan,

$$S=\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2=(3-a-b)^2+(5-a-2b)^2+(6-a-3b)^2=$$
$$(9+a^2+b^2-6a-6b+2ab)+(25+a^2+4b^2-10a-20b+4ab)+$$
$$(36+a^2+9b^2-12a-36b+6ab)=3a^2+14b^2+12ab-28a-62b+70$$

kelib chiqadi.

$\partial S/\partial a=0$ va $\partial S/\partial b=0$ shart

$6a+12b\text{-}28=0$ va $12a+28b\text{-}62=0$ ni beradi .

Bu tenglamani yechish orqali, $a=1{,}67$ va $в=1{,}5$ ni hosil qilamiz. Bulardan regressiya tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi: $\hat{y}=1{,}67+1{,}50x$.

Regressiya tenglamasini izohlash

Quyidagi misol asosida regressiya tenglamasini izohlayiniz. Regressiya modelining ko'rinishi $y = \alpha + \beta x + \varepsilon$ ko'rinishda berilgan bo'lib, bu model bo'yicha quyidagi $\hat{y} = 43,2 + 0,037x$ regressiya bahosi olingan bo'lsin.

Bu regressiya bahosi paxta hosildorligi (y) va unga solinadigan o'g'it orasidagi bog'lanishni aniqlash natijasida olingan natijadan iborat bo'lib, uni quyidagicha tushuntirish mumkin: x oldidagi koeffitsiyent shuni ko'rsatadiki, agar x bir birlikka oshsa (kamaysa, koeffitsient oldidagi ishora minus bo'lganda), u holda $y = 0,037$ birlikka oshar (kamayar) ekan. *Shunday qilib,* hosil qilingan regressiya tenglamasida, agar solinadigan o'g'it miqdori 1 birlikka oshsa u holda paxta hosildorligi *0,037* s/ga oshar ekan deyish mumkin. Tenglamadagi o'zgarmas had (43,2) haqida nima deyish mumkin? Bu had $x = 0$ bo'lganda y ning prognozlash darajasini bildiradi. Bu ayrim hollarda aniq ma'noni anglatadi, ayrim hollarda ma'noga ega emas. Agar $x = 0$ x ning tanlama qiymatlaridan yetarli darajada uzoqda bo'lsa, u holda so'zma-so'z izoh noaniq natijalarga olib kelishi mumkin.

Regressiya tenglamasiga izoh berishda uchta narsani eslash muhim. Birinchidan a α ning b β ning bahosidangina iborat. Ikkinchidan, regressiya tenglamasi tanlama uchun umumiy qoidani ifodalaydi. Bunda har bir alohida olingan kuzatish tasodiflar ta'sirida bo'ladi. Uchinchidan, izohning ishonchliligi tenglamaning to'g'ri tanlanganligidan ham bog'liq.

Baholashning sifati: R^2 koeffitsiyent

Regressiya tahlilining maqsadi, erksiz o'zgaruvchi y ning xulq atvorini tushuntirishdan iborat. y ning berilgan tanlamalari ayrim kuzatishlarda nisbatan past, ayrimlarida nisbatan yuqori bo'ladi. Nima uchun shundayligini ko'rsatamiz. Har qanday tanlamada y qiymatlarining tarqalishini tanlama dispersiya $\text{var}(y)$ yordamida jamlab ifodalash mumkin. Bu dispersiya miqdorini hisoblay olish kerak.

Bir o'zgaruvchili regressiya tahlilida y ning xulq–atvorini y ning regressiya bog'lanishini unga mos tanlangan erkli o'zgaruvchi x ning qiymati bo'yicha aniqlash yo'li bilan tushuntirishga harakat qilamiz. Regressiya tenglamasini tuzgandan keyin y_i ning qiymatini har bir kuzatishda 2 ta qismga ya'ni $\hat{y}_i$ va ε_i larga bo'lamiz.

$$y_i = \hat{y} + \varepsilon_i \qquad (1)$$

$\hat{y}_i$ miqdor i - kuzatishdagi y ning hisoblangan qiymati bo'lib, bu qiymat y ning berilgan kuzatishdagi x qiymati bo'yicha prognozlangan qiymatidir. U holda ε_i - qoldiq y miqdorning haqiqiy va prognozlashgan qiymati orasidagi farqdan iborat bo'ladi. Bu y ning shunday qismiki, buni regressiya tenglamasi orqali tushuntirib bo'lmaydi. (1) dan foydalanib, y ning dispersiyasini yoyib yozamiz:

$$\mathrm{var}(y) = \mathrm{var}(\hat{y} + \varepsilon) = \mathrm{var}(\hat{y}) + \mathrm{var}(\varepsilon) + 2\,\mathrm{cov}(\hat{y}, \varepsilon) \qquad (2)$$

$\mathrm{cov}(\hat{y}_i, \varepsilon)$ nolga teng bo'lishi kerak, bundan

$$\mathrm{var}(y) = \mathrm{var}(\hat{y}) + \mathrm{var}(\varepsilon) \qquad (3)$$

$\mathrm{var}(y)$ni ikkita qismga bo'lish mumkin ekan: $\mathrm{var}(\hat{y})$ regressiya tenglamasi orqali tushuntiriladi, $\mathrm{var}(\varepsilon)$- tushuntirilmaydigan qismi. (3) ga muvofiq $\mathrm{var}(\hat{y})/\mathrm{var}(y)$ y dispersiyasining regressiya tenglamasi orqali tushuntirilgan qismi. Bu munosabat determinatsiya koeffitsiyenti sifatida ma'lum va R^2 bilan belgilanadi

$$R^2 = \frac{\mathrm{var}(\hat{y})}{\mathrm{var}(y)} \qquad (4)$$

bu $R^2 = 1 - \dfrac{\mathrm{var}(\varepsilon)}{\mathrm{var}(y)}$ bilan bir xil . R^2 koeffitsiyentning maksimal qiymati birga teng. Bu regressiya chizig'i barcha kuzatishlarga mos kelganda yuz beradi, ya'ni $\hat{y} = y_i$ barcha i lar uchun barcha qoldiqlar nolga teng. U holda $\text{var}(\hat{y}) = \text{var}(y)$, $\text{var}(\varepsilon) = 0$ va $R^2 = 1$.

Agar tanlamada y va x orasida ko'rinarli bog'lanish mavjud bo'lmasa u holda R^2 nolga yaqin bo'ladi.

R^2 koeffitsiyentni hisoblashga misol

R^2 koeffitsiyentni hisoblash regressiyani hisoblash dasturida amalga oshiriladi, shunday ekan bu misol tushuntirish uchun keltirilgan. Regressiya tenglamasining ko'rinishi quyidagicha $\hat{y} = 1{,}67 + 1{,}5x$ bo'lgan, x va y uchun uchta kuzatish natijasidan iborat oddiy misoldan foydalanamiz (kuzatish natijalari 9.3-jadvalda keltirilgan). Jadvalda shuningdek har bir kuzatish uchun $\hat{y}_i$ va ε_i lar hamda $\text{var}(y)$, $\text{var}(\hat{y})$ va $\text{var}(\varepsilon)$ larni hisoblash uchun kerak bo'ladigan boshqa ma'lumotlar ham berilgan ($\bar{\varepsilon}$ ning nolga tengligi ko'rinib turibdi, chunki $\text{var}(\varepsilon) = (1/n)\sum \varepsilon_i^2$).

9.3- jadval

Kuzatishlar	x	y	$\hat{y}$	ε	$y-\bar{y}$	$y-\hat{y}$	$(y-\bar{y})^2$	$(y-\hat{y})^2$	ε^2
1	1	3	3,1667	-0,1667	-1,6667	-1,5	2,7778	2,25	0,0278
2	2	5	4,6667	0,3333	0,3333	0,0	0,1111	0,00	0,1111
3	3	6	6,1667	-0,1667	1,3333	1,5	1,7778	2,25	0,0278
Yig'indi	6	14	14	0			4,6667	4,50	0,1667
O'rtacha	2	4,7	4,7	0			1,5556	1,50	0,0556

jadvaldan ko'rinib turibdiki, $\mathbf{var}(\mathbf{y}) = 1{,}5556$, $\text{var}(\hat{y}) = 1{,}50$ va $\text{var}(\varepsilon) = 0{,}0556$. $\text{var}(y) = \text{var}(\hat{y}) + \mathbf{var}(\varepsilon)$ ekanligini ko'rinib turibdi. Bu qiymatlar asosida R^2 koeffitsiyentni hisoblaymiz:

$$R^2 = \frac{Var(\hat{y})}{Var(y)} = \frac{1{,}5000}{1{,}5556} = 0{,}96;$$

$$R^2 = 1 - \frac{Var(\varepsilon)}{Var(y)} = 1 - \frac{0{,}0556}{0{,}5556} = 0{,}96;$$

9.5. Ko'p o'zgaruvchili chiziqli regressiya modeli

Agar ekonometrik model bir nechta bog'liq bo'lmagan $x_1, x_2, \ldots, x_m$ o'zgaruvchilardan va bitta bog'liq bo'lgan y o'zgaruvchidan iborat bo'lsa, yani

$$Y = f(\alpha, x) + \varepsilon$$

bu yerda α-parametrlar vektori, ε- tasodifiy xato. Bu funksiya berilgan bosh to'plam uchun y o'zgaruvchini x erkli o'zgaruvchilar vektori orqali bog'laydi. U holda bu modelni ham bir o'lchovli regressiya modelidek o'rganish mumkin. Regressiya modeliga misol sifatida quyidagi oddiy model olinadi:

$$Y = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i X_i + \varepsilon_i$$

bu yerda $x_1, x_2, \ldots, x_m$ lar erkli o'zgaruvchilar, $y_1, y_2, \ldots, y_m$ lar erksiz o'zgaruvchilar, $\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2}, \ldots, \varepsilon_{im}$ - modelning doimiy bo'lmagan qismi.

Aytaylik ($x_1, x_2, \ldots, x_m$), $i = 1, 2, \ldots, m$ - lar m ta kuzatilayotgan miqdorlardan iborat erkli o'zgaruvchilar vektori bo'lsin.

($y_1, y_2, \ldots, y_p$) - vektor p-tajribadagi Y o'zgaruvchilarning qiymatini aks ettirsin. U holda regressiya modelining standart holdagi umumiy ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$Y_i = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k + \varepsilon_i \,, \quad i = \overline{1, p} \qquad (9.6.1)$$

bu modelda $x_i = 1$, $i = \overline{1, p}$ deb faraz qilamiz, yani ε_i-ozod had.

Eng kichik kvadratlar usulining parametrlari bahosi $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m)$ lardan iborat. Vektor $(\acute{\varepsilon}_1, \acute{\varepsilon}_2, \ldots, \acute{\varepsilon}_m)$ lar shunday bo'lishi kerakki, kvadratlar yig'indisi minimum bo'lsin:

$$S = \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{p} (Y_i - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k)^2 \qquad (9.6.2)$$

(1) regressiya modeli matritsa ko'rinishida quyidagicha bo'ladi:

$$Y = XA + E \qquad (9.6.3)$$

bu yerda:

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ . \\ . \\ Y_p \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} X_{11} & . & X_{1m} \\ . & . & . \\ X_{p1} & . & X_{pm} \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \mathrm{M} \\ \alpha_m \end{bmatrix}; \quad E = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \mathrm{M} \\ \varepsilon_p \end{bmatrix}.$$

(2) tenglama matritsa ko'rinishida quyidagicha bo'ladi:

$$S = E'E = (Y - XA)'(Y - XA)$$

bu yerda E' - E ning transponirlangan matritsasidan iborat.

Minimallashtirish shartidan kelib chiqib, regressiya qoldiqlarining yig'indisi

$$\frac{\partial S}{\partial \varepsilon_i} = 0; \quad i = 1,2,\ldots,m$$

$$\frac{\partial S}{\partial \varepsilon_i} = -2(x'y - x'xA) = 0$$

normal tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

bu yerdan $(x'x)A = x'y$ kelib chiqadi, ya'ni

$$A = (x'x)^{-1}x'y \qquad (9.6.4)$$

bo'lib, bu yerda $(x'x)^{-1}$ - $x'x$ ga teskari matritsa.

Ko'p o'zgaruvchili regressiya tahlilida eng kichik kvadratlar usuli bo'yicha regressiya tahlili regressiya modelida bitta o'zgaruvchi o'rniga bir nechta erkli o'zgaruvchilar qatnashgan hol uchun umumlashtiriladi. Bu yerda ikkita yangi masala qaraladi. Ulardan biri turli xil erkli o'zgaruvchilarning ta'sirini chegaralash masalasi bilan bogliq. Bu masala multikolleniarlik nomi bilan ma'lum. Boshqa masala erkli o'zgaruvchilarning umumlashgan tushuntirish qobilyatini ularning alohida olingan eng yuqori ta'siri bilan qarama – qarshiligini baholashdan iborat.

Ko'p o'zgaruvchili regressiya tahlili ikki o'zgaruvchili regressiya tahlilining rivojidan iborat bo'lib, uni erksiz o'zgaruvchi bittadan ko'p erkli o'zgaruvchi bilan taxminiy bog'lanishga ega bo'lganda qo'llash mumkin. Lekin bu yerda ikkita yangi muammo bilan to'qnash kelinadi. Birinchidan, berilgan erkli o'zgaruvchining erksiz o'zgaruvchiga ta'sirini baholashda uning va boshqa erkli o'zgaruvchilarning ta'sirini aniqlash muammolarini yechishga to'g'ri keladi. Ikkinchidan, modelning xususiyatlari muammosini ham yechish kerak. Ko'pincha bir necha o'zgaruvchi erksiz o'zgaruvchiga ta'sir ko'rsatadi, boshqa tomondan, ayrim o'zgaruvchilar modelga to'g'ri kelmasligi mumkin, deb taxmin qilinadi. Shu o'zgaruvchilardan qaysi birini regressiya tenglamasiga qo'shish mumkin, qaysilarini olib tashlash kerakligini hal qilish kerak. Ko'p hollarda ikkita erkli o'zgaruvchi qatnashgan hol bilan chegaralaniladi.

Talablar yig'indisi faktorining oziq-ovqatga ta'siri misolini qaraymiz. Dastlabki modelga talabga narx o'zgarishining ta'sirini qo'shish orqali uni kengaytiramiz va bog'lanish quyidagi ko'rinishda deb faraz qilamiz:

$$y = \alpha + \beta_1 x + \beta_2 p + \varepsilon,$$

Bu yerda y – oziq-ovqatga xarajatlar miqdori, x –shaxsiy daromad, p– oziq-ovqat narxi. Oziq-ovqatga xarajatlar daromadga va narxga ta'sir qilmaydi deb faraz qilinadi. Agar narx jahon bozorida aniqlangan bo'lsagina bu holat yuz berishi mumkin.

Agar model xususiyati to'g'ri bo'lganda ham, prognoz qilingan o'zgarish va hosil qilingan natija orasida farq kuzatiladi. Eng birinchi navbatda β_1 va β_2 lar tanlamada xatolar ta'siridan xoli bo'lmaydi. Undan tashqari, oziq-ovqatga xarajatlarning haqiqiy darajasi nafaqat iqtisodiy bog'lanish orqali, balki u yoki bu yil uchun tasodifiy had bo'yicha aniqlangan, bundan kelib chiqadiki bu davr ichida nafaqat iqtisodiy tarkib shuningdek tasodifiy tarkib o'lchamining ham o'sishi mavjud.

9.6. Ko'p o'zgaruvchili regressiya koeffitsiyentlarini izohlash

Xuddi juft regressiyadagidek, bu yerda ham regressiya koeffitsiyentlarining qiymatlarini shunday tanlaymizki, natijada parametrlarning noma'lum haqiqiy qiymatlari uchun optimal baholarni olish niyatida kuzatish natijalariga eng yaxshi moslik ta'minlasin. Bizga ma'lumki, optimal moslikni baholash S ni minimallashtirishdan, ya'ni chetlanish kvadratlari yig'indisi:

$$S = \varepsilon_1^2 + \ldots + \varepsilon_n^2$$

bo'lsin. Bu yerda ε_i i -kuzatishdagi qoldiq, y haqiqiy qiymat va quyidagi regressiya tenglamasi bo'yicha prognozlanadigan $\hat{y}$ qiymat orasidagi farqdan iborat:

$$\hat{y}_i = a + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i};$$

$$\varepsilon = y_i - \hat{y}_i = y_i - a - b_1 x_{1i} - b_2 x_{2i} \quad \textbf{(9.6.5)}$$

Yuqoridagi tenglamadan foydalansak:

$S = \sum \varepsilon^2 = \sum (y_i - a - b_1 x_{1i} - b_2 x_{2i})^2$ ni hosil qilamiz.

Minimum uchun birinchi tartibda zarur shart, yani $\partial S / \partial a = 0$, $\partial S / \partial b_1 = 0$ va $\partial S / \partial b_2 = 0$, lar quyidagilarni beradi:

$$\begin{aligned} \partial S / \partial a &= -2\sum (y_i - a - b_1 x_{1i} - b_2 x_{2i}) = 0; \\ \partial S / \partial b_1 &= -2\sum x_{1i}(y_i - a - b_1 x_{1i} - b_2 x_{2i}) = 0; \\ \partial S / \partial b_2 &= -2\sum x_{2i}(y_i - a - b_1 x_{1i} - b_2 x_{2i}) = 0. \end{aligned} \quad (9.6.6)$$

Bundan kelib chiqib, uchta a, b_1, b_2 noma'lumli uchta tenglama hosil qilindi: birinchi tenglamani a miqdor ifodalari uchun b_1, b_2 lar va x va y lar uchun kuzatish ma'lumotlari orqali qayta guruhlash mumkin:

$$a = \bar{y} - b_1 \bar{x}_1 - b_2 \bar{x}_2. \quad (9.6.7)$$

Bu ifodani va boshqa ikkita tenglamadan foydalanib, ayrim o'zgartirishlar orqali b_1 uchun quyidagi ifodani hosil qilish mumkin.

$$b_1 = \frac{Cov(x_1, y)Var(x_2) - Cov(x_2 y)Cov(x_1, x_2)}{Var(x_1)Var(x_2) - \{Cov(x_1, x_2)\}^2} \cdot \textbf{(9.6.7')}$$

b_2 uchun shunga o'xshash ifodani yuqoridagi tenglamada x_1 va x_2 larning o'rnini almashtirish orqali hosil qilish mumkin.

Bu muhokamadan maqsad ikki asosiy holatni ajratib olishdan iborat. Birinchidan, regressiya koeffitsiyentini hisoblash qoidalari bitta va bir necha o'zgaruvchili regressiyada bir-biridan farq qilmaydi. Ikkinchidan, bu yerda ishlatiladigan formula har xildir, shuning uchun bir necha o'zgaruvchili regressiyada bitta o'zgaruvchili regressiya uchun olingan ifodalarni ishlatishga harakat qilmaslik kerak. Shuni ham etiborga olish kerakki, ikkita erkli o'zgaruvchili regressiyaning formulasini hisoblash, bitta o'zgaruvchiga nisbatan ko'p mehnat talab qiladi, shuning uchun bu holda kompyuterdan foydalanish maqsadga muvofiqdir.

Yuqoridagi misolda faqat ikki erkli o'zgaruvchi mavjud edi. Bu o'zgaruvchilar soni ikkitadan oshgandan keyin ularning geometrik ko'rinishini berish qiyin, lekin algebraik hisobni rivojlantirish mumkin. Faraz qilaylik, y o'zgaruvchi k ta $x_1,...,x_k$ erkli o'zgaruvchilar bilan ma'lum bo'lmagan haqiqiy bog'lanish orqali bog'langan:

$$y = \alpha + \beta_1 x_1 + ... + \beta_k x_k + \varepsilon.$$

Berilgan y, $x_1,...,x_k$ larning n to'plam kuzatish natijalari uchun eng kichik kvadratlar usulidan foydalanib tenglamani baholaymiz:

$$\hat{y} = a + b_1 x_1 + ... + b_k x_k.$$

Bu yana farqlar kvadratlarining yig'indisini minimallashtirishni bildiradi, i – kuzatishdagi chetlanishlar esa quyidagi ko'rinishda ifodalanadi.

$$\varepsilon_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - a - b_1 x_{1i} - ... - b_k x_{ki}. \qquad (9.6.8)$$

Bu tenglama (9.6.5)ning umumlashgan tenglamasidan iboratdir. Endi $a, b_1,..., b_k$ lar shunday tanlanadiki, bu holda S chetlanishlar kvadrati yig'indisi $\sum \varepsilon_i^2$ lar minimum qiymatga olib kelsin. Birinchi tartibli (k + 1) shartlar $\partial S / \partial a = 0$, $\partial S / \partial b_1 = 0$, ..., $\partial S / \partial b_k = 0$ ni hosil qilinadi, bu esa (k + 1) noma'lumlarni topish uchun (k + 1) tenglamalarni beradi. Bu tenglamalarning birinchisidan (9.6.7) ga o'xshash tenglamani hosil qilish mumkinligini osonlik bilan ko'rsatish mumkin.:

$$a = \bar{y} - b_1\bar{x}_1 - b_2\bar{x}_2 - ... - b_k\bar{x}_k.$$

$b_1, b_2, ... b_k$ lar uchun ifoda juda murakkab bo'ladi. Hisoblarni algebraik matritsa yordamida olib borish maqsadga muvofiqdir. Yechimlarni aniqlashda kompyuterdan foydalanish qulayroqdir.

Bir necha o'zgaruvchili regressiya tahlili erkli o'zgaruvchilar ta'sirini chegaralaydi bu bilan ularning korrelirlanishiga ham imkoniyat beradi. Regressiya koeffitsiyenti y miqdorga har bir x o'zgaruvchini ta'sirini unga boshqa barcha x o'zgaruvchilarning o'zgarmaslik holatidagi bahosini beradi.

9.7. Ko'p o'lchovli regressiya koeffitsiyentlarining xossalari

Xuddi juft regressiya tahlilidagidek, regressiya koeffitsiyenti maxsus ko'rinishdagi tasodifiy o'zgaruvchi sifatida qaralishi kerak, tasodifiy komponentlar modelda tasodifiy hadning mavjudligi shartiga asoslangan. Regressiyaning har bir koeffitsiyenti tanlamadagi y va erkli o'zgaruvchilarning funksiyasi sifatida hisoblanadi, y esa o'z navbatida erkli o'zgaruvchilar va tasodifiy had yordamida aniqlanadi. Bu yerdan regressiyaning koeffitsiyenti erkli o'zgaruvchilar va tasodifiy had yordamida aniqlanishi kelib chiqadi.

Biz, Gauss-Markov sharti bajariladi, deb hisoblaymiz, ya'ni: 1) ixtiyoriy kuzatishda ε ning matematik kutish nolga teng; 2) barcha kuzatishlar uchun nazariy dispersiyasining taqsimoti bir xil; 3) uning qiymatlarining nazariy kovariatsiyasi ixtiyoriy ikki kuzatishda nolga teng; 4) ε ning taqsimoti ixtiyoriy tushuntiradigan o'zgaruvchining taqsimotidan bog'liq emas. Birinchi uchta shart juft regressiya tahliliga o'xshaydi. Bu yerda, to'rtinchi shartning erkli o'zgaruvchilar stoxastikmas degan kuchaytirilgan varianti qo'llaniladi.

Yana ikkita amaliy talab mavjud. Birinchidan, regressiya chizig'ini o'tkazish uchun yetarli miqdorda ma'lumotlar talab qilinadi, bu degan so'z qancha kuzatish natijalari mavjud bo'lsa, shuncha parametrlarni baholash kerak.

Ikkinchidan, erkli o'zgaruvchilar orasida qat'iy chiziqli bog'lanish bo'lishi mumkin emas.

Siljimaslik

b_1 β_1 ning siljimagan bahosi ekanligini ikkita tushuntiradigan o'zgaruvchi uchun ko'rsatamiz. Isbotlashni ixtiyoriy sondagi tushuntiradigan o'zgaruvchi uchun matritsali algebradan foydalanib, judayam oson umumlashtirish mumkin. Tenglamadan ko'rinib turibdiki, b_1 x_1, x_2 larning funktsiyasidan iborat va y ham o'z navbatida x_1, x_2 va ε lar orqali aniqlanadi. Bundan kelib chiqadiki, b_1 miqdor tanlamada haqiqatan ham x_1, x_2 va ε lardan bog'liq ekan:

$$b_1 = \frac{Cov(x_1,y)Var(x_2) - Cov(x_2 y)Cov(x_1,x_2)}{Var(x_1)Var(x_2) - \{Cov(x_1,x_2)\}^2} =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\{Cov(x_1,\{\alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon\})Var(x_2) -$$
$$- Cov(x_2,\{\alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon\})Cov(x_1,x_2)\} =$$
$$= \frac{1}{\Delta}\{[\beta_1 Var(x_1) + \beta_2 Cov(x_1,x_2) + Cov(x_1,\varepsilon)]Var(x_2) -$$
$$- [\beta_1 Cov(x_1,x_2) + \beta_2 Var(x_2) + Cov(x_2,\varepsilon)]Cov(x_1,x_2)\} =$$
$$= \frac{1}{\Delta}\{\beta_1\Delta + Cov(x_1,\varepsilon)Var(x_2) - Cov(x_2\varepsilon)Cov(x_1,x_2)\} =$$
$$\beta_1 + \frac{1}{\Delta}\{Cov(x_1,\varepsilon)Var(x_2) - Cov(x_2,\varepsilon)Cov(x_1,x_2)\},$$

Bu yerda Δ $Var(x_1)Var(x_2) - \{Cov(x_1,x_2)\}^2$ ga teng. Bu yerdan b_1 miqdor ikkita: β_1 ning haqiqiy qiymati va xatolardan iborat bo'lgan qismlardan iborat. Matematik kutishga o'tish orqali :

$$E(b_1) = \beta_1 + \frac{1}{\Delta}\{Var(x_2)E[Cov(x_1,\varepsilon)] - Cov(x_1,x_2)E[Cov(x_2,\varepsilon)]\} = \beta_1$$

ni hosil qilamiz. Farazga ko'ra, Gauss-Markovning to'rtinchi sharti bajariladi.

Ko'p o'zgaruvchili regressiya koeffitsiyentlarining aniqligi

Gauss-Markov teoremasida ko'p o'zgaruvchili regressiya tahlili uchun, xuddi juft regressiyadagidek odatdagi eng kichik kvadratlar usuli eng samarali chiziqli bahoni berlishi shu ma'noda isbotlanadiki, o'sha tanlangan ma'lumotlar asosida kichik dispersiyalar bilan Gauss-Markov sharti bajarilganda boshqa siljimagan baholarni olib bo'lmaydi. Bu yerda teorema isbotlanmaydi lekin regressiya koeffitsiyentlarining mumkin bo'lgan aniqligini tartibga soladigan faktorlari tekshiriladi. Umumiy holda aytish mumkinki, regressiya koeffitsiyenti, yuqori aniqlikka erishishi uchun quyidagilar bajarilishi kerak:

1) tanlamadagi kuzatishlar soni qancha ko'p bo'lsa;
2) tushuntiruvchi o'zgaruvchilarda tanlama dispersiyasi qancha katta bo'lsa;
3) tasodifiy hadning nazariy dispersiyasi qancha kam bo'lsa;
4) tushuntiruvchi o'zgaruvchilar orasida bog'lanish qancha kam bo'lsa.

Birinchi uchta shart bilan juft regressiya tahlilida tanishilgan. Faqat to'rtinchi shart yangi. Avvalo, ikkita erkli o'zgaruvchi bo'lgan hol bilan tanishib, keyin umumiy holga o'tiladi.

Ikkita erkli o'zgaruvchili regressiya

Aytaylik haqiqiy bog'lansh quyidagi ko'rinishda bo'lsin:

$$y = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon,$$

va regressiya tenglamasi quyidagi ko'rinishda olingan bo'lsin

$$\hat{y} = a + b_1 x_1 + b_2 x_2,$$

Kerakli ma'lumotlardan foydalanib, ehtimolli taqsimotning nazariy dispersiyasi b_1 quyidagicha ifodalanadi:

$$pop.\operatorname{var}(b_1) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{nVar(x_1)} \times \frac{1}{1 - r_{x_1,x_2}^2}, \qquad (9.7.1)$$

bu yerda σ_ε^2 - i miqdorning nazariy dispersiyasi. b_2 miqdorning nazariy dispersiyasi uchun xuddi shunga o'xshash ifodani $Var(x_1)$ ni $Var(x_2)$ga almashtirish orqali hosil qilish mumkin.

Oxirgi tenglamadan ko'rish mumkinki, xuddi juft regressiyadagidek n va $Var(x_i)$ miqdorlar katta bo'lishi, σ_ε^2 miqdor esa kichik bo'lishi maqsadga muvofiq. Lekin endi $\left(1-r_{x_1,x_2}^2\right)$ had hosil bo'ldi, chunki x_1 va x_2 lar orasida kuchsiz korrelyatsiya mavjud bo'lishi kerak.

Buni quyidagi misol orqali tushunib olish mumkin. Faraz qilaylik haqiqiy bog'lanish quyidagi ko'rinishda bo'lsin:

$$y = 2 + 3x_1 + x_2 + \varepsilon. \qquad (9.7.2)$$

va x_1 va x_2 lar orasida quyidagicha qat'iy bo'lmagan chiziqli bog'lanish mavjud bo'lsin:

$$x_2 = 2x_1 - 1, \qquad (9.7.3)$$

hamda x_1 miqdor har bir kuzatishda bir birlikka oshsin deb faraz qilamiz. U holda x_2 ikki birlikka oshadi, y esa 9.4-jadvalda ko'rsatilganidek besh birlikka oshadi.

9.4-jadval

Taqribiy qiymatlar			*Taqribiy qiymatlar*		
x_1	x_2	y	x_1 *ning ko'payishi*	x_2 *ning ko'payishi*	*y ning ko'payishi*
10	19	51	1	2	5
11	21	56	1	2	5
12	23	61	1	2	5
13	25	66	1	2	5
14	27	71		2	5
15	29	76	1	2	5

Bu ma'lumotlarni ko'rish orqali quyidagi xulosalarga kelish mumkin:

1) y miqdor (9.7.2) tenglama orqali aniqlanadi;

2) x_2 miqdor bu holatga aloqador emas, y miqdor esa quyidagi bog'lanish orqali aniqlanadi:

$$y = 1 + 5x_1 + \varepsilon;$$

3) x_1 miqdor bu holatga aloqador emas, y miqdor quyidagi bog'lanish orqali aniqlanadi:

$$y = 3{,}5 + 2{,}5x_2 + \varepsilon.$$

Lekin masala bu imkoniyatlar bilan chegaralanmaydi. Har qanday bog'lanish, (2) va (3) o'rtacha o'lchangan shartdan iborat bo'lib, ifodalangan ma'lumotga mos keladi. (1) shartni (2) shartning o'rtacha o'lchami sifatida 0,6 koeffitsiyent va (3)ni 0,4 koeffitsiyent bilan qarash mumkin.

Bu holat uchun regressiya tahlili yoki boshqa ixtiyoriy usulni qo'llaganda bu imkoniyatlar o'rtasidagi farqni o'rnatish qiyin, va olingan baho tasodifiy hadga nisbatan juda ta'sirchan bo'lib, sezilarli xatolarga ega bo'ladi. Regressiya koeffitsiyentining dispersiyasi katta bo'ladi, ko'rinib turibdiki boshqa usulda ham shunday natija bo'lishi mumkin.

Agar haqiqiy (9.7.3) bog'lanish qat'iy bo'lganda, u holda baholash paytida barcha ehtimolli bog'lanishlar orasidagi farqni umuman o'rnatib bo'lmaydi, chunki ularning har biri ma'lumotlarga bir xilda mos keladi. Hattoki regressiya koeffitsiyentini ham hisoblab bo'lmaydi, chunki (9.6.7') tenglamaning surat va maxraji nolga teng bo'ladi.

Agar x_1 va x_2 lar orasida qat'iy bo'lmagan chiziqli bog'lanish mavjud bo'lsa va bu bog'lanish musbat bo'lsa u holda korrelyatsiya koeffitsiyenti $r_{x_1x_2}$ birga yaqin bo'ladi, agar bog'lanish teskari bo'lsa, minus birga yaqin bo'ladi va bu ikkala holda ham $r^2_{x_1x_2}$ birga yaqin bo'ladi. Natijada ikkinchi hadning maxraji (9.7.1) tenglamada nolga yaqin bo'ladi, b_1 va b_2 larning nazariy dispersiyasi katta sondan iborat bo'ladi. Limit holatida dispersiyaning qat'iy chiziqli bog'lanishida cheksizlikka intiladi.

Shunga e'tibor berish kerakki, agar x_1 va x_2 lar orasida qat'iy bo'lmagan chiziqli bog'lanish mavjud bo'lsa, bundan avtomatik ravishda b_1 va b_2 larning qiymatlari katta nazariy dispersiyaga ega bo'lishi kelib chiqmaydi. Dispersiyalar juft regressiya tahlilida n dan va σ_ε^2 dan ham bog'liq bo'ladi. Agar n katta, σ_ε^2 esa kichik bo'lsa, u holda qat'iy bo'lmagan chiziqli bog'lanishga qaramasdan b_1 va b_2 larning nazariy dispersiyasi katta bo'lmasligi mumkin. Agar ma'lumotlar hajmi katta (n katta) bo'lsa, tasodifiy faktor esa nisbatan ahamiyatsiz (σ_ε^2 kichik) bo'ladi, u holda x_1 va x_2 arning y miqdorga ta'sirini chegaralash mumkin bo'ladi.

Umumiy hol

Umumiy hol uchun regressiya koeffitsiyentlarining dispersiyasi ifodasini matritsali algebradan foydalanib hisoblash mumkin.

Bu yerda Monte-Karlo usuli bo'yicha o'tkazilgan tajriba asosida muhim holat ko'rsatiladi. (4) shartga asosan mumkin qadar erkli o'zgaruvchilar zich bog'lanishga ega bo'lmasligi kerak. Buni tekshirish uchun, ko'p o'zgaruvchili regressiya uch marotiba baholanadi. Birinchi holatda, erkli o'zgaruvchilar o'zaro zich bog'lanishga ega bo'lmasa, regressiyani baholash natijasi ishonchli bo'ladi.

Ikkinchi holatda, erkli o'zgaruvchilar orasida o'zaro zich bog'lanish mavjud bo'lsa, regressiya natijasida xatolar bo'ladi. Uchinchi holatda, erkli o'zgaruvchilar orasida o'zaro zich korrelyatsiya mavjud bo'lsayu, lekin tasodifiy hadning dispersiyasi kam bo'lsa, regressiyani baholash natijasi ancha yaxshilanadi.

Bundan kelib chiqadiki, o'zgaruvchilar orasidagi o'zaro zich korrelyatsiya qanoatlantirmaydigan natijaga olib kelishi mumkin, lekin bu o'z-o'zidan sodir bo'lmaydi. Bu tasodifiy hadning dispersiyasidan ham bog'liq ekan.

Faraz qilamiz, ayrim davlatlarda kishilarning ish haqi y o'qish muddati(S), ish staji(X), yoshi(A), shuningdek tasodiflar orqali aniqlanadi. Asosiy ish haqi 10000(sh.b.)dan iborat bo'lib, minimal 10 yildan oshiq muddatga har bir yil uchun *1500(sh.b.)* qo'shiladi, har bir ishlagan yili uchun 500 va har bir yashagan yili uchun 25(sh.b.)qo'shiladi. Bundan tashqari, ε tasodifiy miqdor ham mavjud:

$$y = 10000 + 1500(S-10) + 500X + 25A + \varepsilon . \qquad (9.7.4)$$

Bu tenglamani soddalashtirib quyidagi holga keltiriladi:

$$y = -5000 + 1500S + 500X + 25A + \varepsilon . \qquad (9.7.5)$$

9.5–jadvalning birinchi to'rtta ustuni taxmin qilgan 20 individ to'g'risidagi tanlangan ma'lumotlardan tashkil topgan. O'qish muddati, ish staji va yoshlari uchun sonlar ixtiyoriy ravishda olingan. ε ning miqdori nolinchi matematik kutishga va birlik dispersiyaga ega bo'lgan 20 ta normal taqsimlangan tasodifiy sondan iborat bo'lib, ular 2000 ga ko'paytirilgan. (9.7.5) tenglama natijasida olingan y ning qiymatlari beshinchi ustunda ko'rsatilgan. O'qish 6 yoshdan boshlanadi, deb faraz qilib, quyidagi tengsizlikni hosil qilish mumkin:

$$X \le A - S - 5. \qquad (9.7.6)$$

9.5- jadvalda $(A–S–5)$ miqdor ko'rsatilgan bo'lib, X uchun ma'lumotlar unga mos keladi, lekin A, S va X lar orasida bog'lanish juda kuchsiz. Kishilarning ko'pchiligi o'zining ish qobiliyatini yoshi o'tishi bilan boshqa mashg'ulotlar bilan shug'ullanadi.

9.5-jadval

Individ	S	X	A	ε	y	$A-S-5$	X'	y'	y''
1	10	20	45	-1740	19385	30	28	23385	24951
2	10	5	23	1880	14955	8	6	15455	13763
3	10	19	36	760	21160	21	17	20160	19476
4	11	15	50	1300	21550	34	28	28050	26880
5	11	16	42	1880	22430	26	21	24930	23238
6	11	8	30	640	16890	14	10	17890	17314
7	11	4	21	3520	17545	5	4	17545	14377
8	12	10	34	-3540	15310	17	15	17810	20996
9	12	8	27	1720	19395	10	8	19395	17847
10	12	18	38	2680	25630	21	19	26130	23710
11	13	6	25	-5220	12905	7	6	12905	17603
12	13	10	46	2840	23490	28	25	30990	28434
13	14	10	38	-1100	20850	19	16	23850	24840
14	14	2	22	-340	17210	3	2	17210	17516
15	15	8	32	1000	23300	12	9	23800	22900
16	16	5	49	20	22745	28	23	31745	31727
17	16	4	28	-780	20920	7	6	21920	22622
18	17	7	33	3140	27965	11	8	28465	25639
19	18	3	27	-380	23795	4	3	23795	24137
20	19	3	32	40	25840	8	6	27340	27304

y', S, X va A orasidagi regressiyani baholab, quyidagi natijani olamiz:

$$\hat{y} = -4063 + 1409S + 481X + 50A. \qquad (9.7.7)$$

$$\text{s.o.} \quad (4140) \quad (280) \quad (175) \quad (88)$$

Tajriba S va A lar uchun o'sha ma'lumotlar va ε ning o'sha qiymatlari uchun, lekin X ning$(A - S - 5)$ ko'rsatkich bilan yaxshi mos kelgan boshqa ma'lumotlari to'plami uchun takrorlangan. Bu ma'lumotlar 9.7 –jadvalda X' sifatida belgilangan, natijaviy qiymat y esa, y' sifatida belgilangan. Tengsizlik deyarlik tenglamaga aylanib borayotgan ekan, bu holda erkli o'zgaruvchilar orasida qat'iy bo'lmagan bog'lanishni kuzatish mumkin. y', X' va A lar orasida regressiyani baholab, quyidagi hosil qilinadi:

$$\hat{y} = -7524 + 781S - 207X' + 664A \qquad (9.7.8)$$

$$\text{s.o.} \quad (4204) \, (529) \quad (538) \quad (476)$$

Regressiya bahosining natijasi haqiqatan ham endi yomon.

Nihoyat tajriba S, A va X' larning o'sha qiymatlarini saqlab takrorlangan, lekin tasodifiy son 2000 o'rniga 200ga ko'paytirib ε ni qiymatlari hosil qilingan. y ning natijaviy qiymatlari 9.7.1–jadvalda y^{T} sifatida ko'rsatilgan. y^{*}, S, A va X' Lar orasidagi regressiyani baholab, quyidagini hosil qilamiz:

$$\hat{y} = -5252 + 1428S + 429X' + 89A \,. \qquad (9.7.8')$$

s.o. (420) (53) (54) (48)

A ning koeffitsiyentidan tashqari, erkli o'zgaruvchilar orasidagi qat'iy bo'lmagan bog'lanish mavjudligiga qaramasdan, bu natijalar to'liq qanoatlantiruvchi natijalardir.

Darhaqiqat, bitta natijalar to'plamiga ko'p e'tibor bermaslik kerak. Hisoblarning 3 ta varianti ham S, A, X va X' lar uchun o'sha ma'lumotlardan foydalanish orqali yana 9 marotiba bajarilgan, lekin ε miqdorni hosil qilish uchun turli xil tasodifiy sonlar ishlatilgan. Tajriba natijalari 9.6-jadvalda umumlashtirilgan.

9.6-jadval

	Birinchi variant (kuchsiz bog'lanish)				***Ikkinchi variant (tig'is bog'lanish)***				***Uchinchi variant (tig'is bog'lanish, kuchsiz σ_r^2)***			
	O'zgarmas	S	X	A	*O'zgarmas*	S	X	A	*O'zgarmas*	S	X	A
1	-4063	1409	481	50	-7524	781	-207	664	-5252	1428	429	89
2	-4905	1560	508	3	-8093	892	-218	636	-5309	1439	428	86
3	-9718	1812	597	33	-3147	2790	1684	-971	-4815	1629	618	-75
4	2584	935	347	53	3947	1744	1193	-609	-4105	1524	569	-38
5	-3754	1485	334	43	-4106	1998	854	-327	-4911	1550	535	-10
6	-7628	1591	637	15	-2595	2051	1168	-522	-4759	1555	567	-30
7	-8812	1712	754	-8	-4986	1590	679	-74	-4999	1509	518	15
8	-7760	1791	636	-26	-3701	2128	1034	-446	-4870	1563	553	-22
9	-1326	1281	533	3	-722	1288	547	-27	-4572	1479	509	20
10	-8910	1847	835	-97	-7361	985	-28	476	-5236	1449	447	70

Jadvalni ko'zdan kechirganda S va X oldidagi koeffitsiyentlarga e'tiborni qaratish kerak. A oldidagi koeffitsiyent va o'zgarmas har qaysi holatda ishonchlimas, chunki A oldidagi koeffitsiyentning haqiqiy qiymati nolga yaqin, o'zgarmasnikiga sabab esa, $S = 0, X = 0, A = 0$ shart bilan aniqlanuvchi nuqtaning tanlama oralig'idan juda uzoqdaligidir.

Birinchi variantda S va X oldidagi koeffitsiyentlar butunlay kerakli oraliqda joylashgan. Ikkinchi variantda ular ishonchsiz, uchinchisida esa, judayam yaxshi. Tajriba natijalari 9.7-jadvalda umumlashtirilgan.

Bu yerda tizimli ravishda haqiqiy qiymatdan yuqori yoki past koeffitsiyentlar tendensiyasini tasniflaydigan siljish kuzatilmasligini ko'rish mumkin, hattoki natijalar juda aniqmas bo'lgan ikkinchi variantda ham. Ikkinchi variantda S va X oldidagi koeffitsiyentlarning o'rtacha qiymati mos ravishda 1624 va 671 ga teng bo'lib, bu haqiqiy qiymatdan uncha uzoq emas.

9.8. Regressiya koeffitsiyentlarining standart xatolari

Ko'p o'zgaruvchili regressiya koeffitsiyentlarining standart xatolari xuddi juft regressiyadagiday ma'noga ega bo'lib, regressiya koeffitsiyenti standart og'ishmasining uning haqiqiy qiymati atrofidagi taqsimotidan iboratdir. Xuddi juft regressiyadagiday standart xato uchun taqsimot dispersiyasi ifodasi asosida σ_ε^2 ni siljimagan bahoga almashtirib va kvadrat ildizdan chiqarish orqali formula chiqarish mumkin. Shunday qilib bog'lanishni asoslash xuddi avvalgidek, modelni to'g'ri tanlash (xususiyati) dan va tasodifiy had uchun Gauss-Markov shartining bajarilishidan bog'liq.

9.7-jadval

Tasodifiy had dispersiyasi	*Erkli o'zgaruvchilar orasidagi chiziqli bog'lanish*	
	Kuchsiz bog'lanish	*Tig'is bog'lanish*
Past	Ishonchli	maqbul
Yuqori	Maqbul	Ishonchsiz

Misol uchun, agar faqatgina ikkita erkli o'zgaruvchi mavjud bo'lsa, u holda regressiya koeffitsiyenti b_1 ning nazariy dispersiyasi (9.7.1) tenglama bilan ifodalanadi. Bu holda σ_ε^2 miqdorning siljimagan bahosi $\mathrm{var}(\varepsilon)$ ni qoldiqlar tanlama dispersiyasini o'zida aks ettiruvchi $n/(n-3)$ ko'paytma orqali hosil qilinishini ko'rsatish mumkin. Bundan ,

$$s.o.(b_1)=\sqrt{\frac{s_e^2}{nVar(x_1)}\times\frac{1}{1-r_{x_1x_2}^2}}=\sqrt{\frac{[n/(n-3)]Var(\varepsilon)}{nVar(x_1)}\times\frac{1}{1-r_{x_1x_2}^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{Var(\varepsilon)}{(n-3)Var(x_1)}\times\frac{1}{1-r_{x_1x_2}^2}} \qquad (9.8.1)$$

kelib chiqadi. Shunga o'xshash ifodani b_2 standart xatosi uchun indekslarni almashtirish orqali hosil qilish mumkin.

Erkli o'zgaruvchilar soni ikkitadan oshgandan keyin matritsali algebradan foydalanib, standart xatoni va shuningdek regressiya koeffitsiyentining o'zini ko'rsatish qulayroq bo'ladi.

Yuqorida regressiya koeffitsiyentining deyarlik ishonchli bahosini olishga yordam beruvchi to'rtta shart ishlab chiqilgan bo'lib, bunda uchinchi va to'rtinchi shart bevosita Monte-Karlo usuli bo'yicha olingan tajribalar asosida tekshirilgan. Har bir shart regressiya koeffitsiyentining dispersiyasi uchun (9.7.1) tenglama ko'rinishida berilgan ifodalarda aks ettirilgan va har biri o'z navbatida (9.8.1)munosabatlarda aks etgan.

Xususiy holda ikkita tushuntiradigan o'zgaruvchi o'rtasida zich bog'lanish birga yaqin bo'lgan $r_{x_1x_2}^2$ qiymatni hosil qilishga olib keladi, bundan esa, standart xatoning nisbatan katta bo'lishi va avval kuzatilgan regressiya koeffitsiyentining ehtimoli aniqmasligini aks ettiradi. Misol uchun S, X^* va A orasida zich bog'lanish kuzatilgan (9.7.8) tenglamadagi standart xato bu bog'lansh kuchsiz bo'lgan (9.7.7) tenglamadagi standart xatodan ancha ko'p.

Bundan tashqari, (9.7.7) va (9.7.8) tenglamalardagi standart xatolarni solishtirish maqsadga muvofiqdir. Ulardan birinchisida i miqdor tasodifiy soni 2000ga ko'paytirish orqali hosil qilingan. Ikkinchisida esa bu son 200ga ko'paytirilgan. Natijada regressiya bahosi ularning xatosi kamligi to'g'risida guvohlik beruvchi (9.7.8') tenglamada ham aniqroq bo'lgan edi. Regressiya koeffitsiyenti 10 barobar aniq ekan, standart xato esa oldingi o'lchamidan $\frac{1}{10}$ ni tashkil qiladi.

t-testlar va ishonch oraliqlari

Ko'p o'zgaruvchili regressiya uchun t-testlar juft regressiyadagidek bajariladi. Kritik daraja t ixtiyoriy haqqoniylik darajasida $(n - k - 1)$ga teng bo'lgan erkinlik darajasidan bog'liq ekanligi aniq, bu yerda n kuzatishlar soni, k –baholangan parametrlar soni. Ishonch oralig'i xuddi juft regressiyadagidek ko'rsatilgan erkinlik darajasiga nisbatan aniqlanadi.

Misol. Uy-joyga xizmatlar va mavjud bo'lgan shaxsiy daromadlar, xizmatlar narxi orasidagi chiziqli va logarifmik regressiya tenglamalari quyidagi ko'rinishdan iborat (qavs ichida standart xatolar ko'rsatilgan):

$$\hat{y} = -43{,}4 + 0{,}181x - 0{,}137p; \qquad R^2 = 0{,}99;$$
$$(48{,}4)\ (0{,}009)\ (0{,}421)$$

$$\log\hat{y} = -1{,}60 + 1{,}18\log x - 0{,}34\log p; \qquad R^2 = 0{,}99;.$$
$$(1{,}75)\ (0{,}05)\ (0{,}31)$$

Mos kelgan t-testlarni bajaring va o'zingizning xulosalaringizni bering.

9.8-jadval

	S_e	$\sqrt{Var(\log p)}$	$r_{\log x, \log p}$	*S.o. narx elastikligi*
Oziq-ovqat	0,018	0,056	0,85	0,121
Uy-joy	0,031	0,043	-0,89	0,314
Dori-darmon	0,037	0,155	-0,96	0,160
Dam olish	0,037	0,060	-0,27	0,128

9.9. Multikollinearlik

Multikollinearlik – bu tushuncha, tushintiradigan o'zgaruvchilar orasidagi qat'iy bo'lmagan chiziqli bog'lanishida regressiyaning ishonchsiz bahosiga olib keluvchi muammolarni ifodalashda ishlatiladi. Bunaqa bog'lanish albatta qanoatlantirmaydigan bahoni berishi shart emas. Agar boshqa barcha shartlar qulaylik tug'dirsa, ya'ni agar kuzatishlar soni va tushintiradigan o'zgaruvchilar tanlama dispersiyasi katta bo'lsa, tasodifiy had dispersiyasi esa, kam bo'lsa ham natijada yaxshi bahoni olish mumkin.

Shunday qilib, multikollinearlik qat'iy bo'lmagan bog'lanishlar va bitta yoki undan ko'p yomon shartlar uyg'unligidan kelib chiqishi mumkin, bu esa hodisaning ko'rinishimas balki uning ifodalanish darajasi masalasidir. Agar barcha erkli o'zgaruvchilar absolyut korrelirlangan bo'lmasagina, har qanday regressiyaning bahosi undan ma'lum darajada ziyon ko'radi. Bu muammo, regressiya bahosining natijasiga jiddiy ta'sir qilganda, ko'rib chiqiladi.

Ma'lumotlar qaysidir davr davomida olingan bir qator kuzatishlardan tashkil topgan bo'lsa, bu muammo vaqtli qatorlar regressiyasida oddiy hol sanaladi. Agar ikkita yoki undan ko'p o'zgaruvchi vaqtinchalik trend orqali ifodalangan bo'lsa, u holda ular zich korrelirlangan bo'ladi va bu multikollinearlikka olib keladi.

Bunday holda nima qilish kerak

Multikollinearlikni yumshatishda ishlatiladigan usullar ikkita toifaga bo'linadi: birinchi toifaga regressiya bahosini ishonchligini ta'minlaydigan to'rtta shartni bajarilish darajasini oshirishga uriniladigan; tashqi axborotdan foydalanish ikkinchi toifaga. Agar boshidan boshlab bevosita olish mumkin bo'lgan ma'lumotlardan foydalanilsa, u holda ko'rinib turibdiki, kuzatish *natijalari sonini* ko'paytirish kerak. Agar *vaqtli qator ma'lumotlaridan* foydalanilayotgan bo'lsa, buni har bir vaqt oralig'i davomiyligini qisqartirish orqali olish mumkin.

Agar o'zaro kesishuvchi ma'lumotlardan foydalanilayotgan va tadqiqotning rejalashtirish bosqichida bo'lsa, u holda regressiya bahosini oshirish va *tanlamalar o'lchamini oshirish asosiga multikollinearlik muammosini* kuchsizlantirishi mumkin. Regressiya koeffitsiyentlari standart chetlanishi $\sqrt{n}$ miqdorga teskari proportsional bo'lganligi uchun bunday yondashuv yengillik bermaydi.

Keyin, σ_ε^2 miqdorni kamaytirish mumkin. Tasodifiy had regressiya tenglamasiga *aniq kiritilmagan* y *miqdorga ta'sir qiluvchi* barcha o'zgaruvchilarning umumlashgan samarasini o'z ichiga olgan. Agar muhim o'zgaruvchi tushirib qoldirilgan va bu ε ga ta'sir qilayotgan bo'lishi mumkin deb taxmin qilinayotgan bo'lsa hamda bu o'zgaruvchini regressiya tenglamasiga qo'shish kerak bo'lsa u holda σ_ε^2 miqdorni qisqartirish mumkin bo'ladi.

Agar yangi o'zgaruvchi tenglamaga qo'shilgan, biroq u bir yoki bir necha *o'zgaruvchi bilan chiziqli bog'lanishga* ega bo'lsa, u holda uning qo'shilishi multikollinearlik muammosini yanayam chuqurlashtiradi.

Nihoyat, eng oddiy usuldan foydalanish haqida. Agar qo'shimcha ma'lumotlar olish imkoniyati mavjud bo'lsa, u holda erkli o'zgaruchilar o'zaro *kuchsiz bog'lanishga* ega bo'lgan tanlamalarni olishga harakat qilish kerak bo'ladi.

Tashqi axborotning foydali bo'lishi mumkin bo'lgan ikki turi mavjud: *nazariy cheklanish* va tashqi empirik baho. *Nazariy cheklanish* koeffitsiyentlar orasida biroz bog'lanishlarni o'zida taxmin qiladi. Buni misol asosida tushuntirish mumkin.

Vaqtli qatorlar ma'lumotlarini ishlatish orqali ishlab chiqarish *funktsiyalarini tuzishda*, kapital va *mehnat resurslari xarajatlarini o'zgarishi* bilan bir qatorda mahsulot ishlab chiqarish texnik progressga ta'sir ko'rsatishi mumkinligini hisobga olish kerak. Agar agregirlangan ma'lumotlar bilan ish ko'rilayotgan bo'lsa, u holda *texnik progressni miqdoriy* baholash mumkin emas, bu yerda tenglamaga Kobb-Duglas funktsiyasidan foydalanish orqali eksponentsial vaqtinchalik trendni qo'shish hammasidan oson. Uning ko'rinishini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$Y = AK^{\alpha} L^{\beta} e^{rt} \varepsilon,$$

bu yerda K –kapital va L –mehnat; t – vaqt; r – texnik progress tufayli qo'shimcha ishlab chiqarish surati. Aytaylik bu munosabatni berilgan ma'lumotlar bo'yicha baholab, quyidagi baho hosil qilingan bo'lsin:

$$\underset{(1,38)}{\log \hat{Y} = 2{,}81} - \underset{(0,34)}{0{,}53} \log K + \underset{(0,14)}{0{,}91} \log L + \underset{(0,021)}{0{,}047}t; \quad R^2 = 0{,}97; \quad F = 189{,}8. \qquad (9.9.1)$$

Bu natijadan ko'rinib turibdiki, kapital xarajatlari bo'yicha mahsulot ishlab chiqarish elastikligi manfiy, bu degan so'z kapital xarajatlari oshishi bilan ishlab chiqarish pasaygan. Tenglama bir yilda texnik progress hisobiga qo'shimcha ishlab chiqarish surati 4,7% ekanligini ko'rsatayapti, bu esa qaralayotgan davr uchun to'g'ri kelmaydigan bahodan iboratdir. Bu yerda muammo multikollinearlik bilan bog'liq deb taxmin qilish mumkin, chunki $\log K$ va t orasidagi korrelyatsiya koeffitsiyenti 0,997 $\log K$ ning standart xatosi tenglamada t miqdorsiz 5 marotiba katta.

Bu yerdan ko'lam ta'sirini o'zgarmas miqdor deb qarab, tenglamani uchta o'zgaruvchi o'rniga vaqtinchalik trenddan iborat bo'lgan ikkita erkli o'zgaruvchili tenglama ko'rinishida qaytadan yozish va kapital xarajatlar o'rniga tushuntiradigan o'zgaruvchi sifatida mehnatni kapital bilan qurollantirish bilan almashtirish imkonini beruvchi cheklanish kiritish istagi tug'iladi. Bu ko'rsatkich xuddi avvalgidek vaqt bilan zich bog'lanishga ega (korrelyatsiya koeffitsiyenti 0,96). Eksponentsial vaqtinchalik trendli tenglamani baholab, quyidagini hosil qilamiz:

$$\log(\hat{Y}/L) = \underset{0,03)}{-0{,}11} + \underset{(0,15)}{0{,}11} \log(K/L) + \underset{(0,006)}{0{,}006}t; \quad R^2 = 0{,}65; \quad F = 19{,}5. \qquad (9.9.2)$$

α va r miqdorlarning bahosi, ahamiyatsiz darajada noldan farq qilsa ham, endi deyarlik avvalgiga nisbatan haqiqatga yaqin, standart xatolar esa (9.9.1) tenglamaga nisbatan ancha kam. r miqdorning ahamitsiz bo'lsa ham noldan farq qilishi fakti Ch. Kobba va P. Duglaslarning qaralayotgan davrda omillarning umumiy unumdorligini oshirish samarasi juda past degan xulosalarini tasdiqlaydi. Ko'rinib turibdiki, buning asoslanganligi kiritilgan cheklanishlarning to'g'riligidan bog'liq, shuning uchun avvalo cheklanishlarni statistik tekshirib ko'rish kerak.

Nihoyat, tashqi bahoni qo'llash kerak. Faraz qilamiz, quyidagi tenglamadan talab funktsiyasi sifatida foydalanilsin:

$$y = \alpha x^{\beta} p^{\gamma} \varepsilon \qquad (9.9.3)$$

lekin bu yerda multikolliniarlik muammosi mavjud, shaxsiy daromad va narx aniq ifodalangan vaqtinchalik trenddan iborat, bundan kelib chiqadiki, ular zich bog'lanishga ega. Faraz qilamiz, x va y lar uchun boshqa tanlamadan hosil bo'lgan o'zaro kesishuvchi statistik ma'lumotlar mavjud. Agar o'tkazilgan tahlilda barcha uy xo'jaliklari bu tovarga bir xil narxda pul to'lashdi, deb faraz qilsak, u holda modelning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$\log y' = \log \alpha' + \beta' \log x + \varepsilon' \qquad (9.9.4)$$

y' ning x' dan bog'liqligining regressiya bahosida β_1' uchun b_1' bahoni hosil qilib, uni (9.9.3) tenglamaga qo'yamiz. Endi $(\log y - b_1 \log x)$ ga teng bo'lgan $\tilde{\log} y$ yangi o'zgaruvchi aniqlanadi. Bu daromadni o'zgarishini tasvirlaydigan o'zgartirilgan talabga teng . Bundan keyin tenglamaning ko'rinishi quyidagidan iborat bo'ladi:

$$\tilde{\log} y = \log \alpha + \beta_2 \log p + \varepsilon.$$

Har bir kuzatish uchun $\tilde{\log} y$ ni hisoblab, uni $\log p$ dan regressiya bog'liqligini baholash mumkin, chunki bu yerda faqat bitta erkli o'zgaruvchi mavjud, multikolliniarlik avtomatik ravishda olib tashlanadi.

Bu usulni qo'llaganda hisobga olish kerak bo'lgan ikkita muammo tug'ilishi mumkin. Birinchidan, β_1' miqdorning bahosi tanlama xatolarining ta'siridan xoli emas. Ikkinchidan, vaqtinchalik qator va o'zaro kesishuvchi tanlama holatlarida daromad oldidagi koeffitsiyent bir xil ma'noga ega deb faraz qilinadi, lekin bunday bo'lmasligi ham mumkin. Ko'pchilik tovarlar uchun talabning daromad bo'yicha oz muddatli va ko'p muddatli elastikligi ancha farq qilishi mumkin. Buning sabablaridan biri, xarajatlar xarakteri inertsiya ta'sirida buzilishi mumkin bo'lib, qisqa muddatda daromadga ta'siri bo'lishi mumkin. Boshqa bir sababi shundaki, daromad darajasining o'zgarishi sarf xarajatlarga bevosita shuningdek bilvosita ta'sir ko'rsatishi mumkin, bunda bilvosita ta'sir bevositaga nisbatan ancha sekin bo'ladi. Odatda birinchi yaqinlashish sifatida vaqtinchalik qatorlar uchun regressiya, ayniqsa tanlamalarning katta bo'lmagan davrlari uchun qisqa muddatli elastiklik ko'rsatkichlarini beradi, shu bilan bir vaqtda har tomonlama tanlama ma'lumotlaridan foydalangan regressiya sifatida uzoq muddatli elastiklik ko'rsatkichini beradi.

9.10. Baholash sifati: R^2 determinatsiya koeffitsiyenti

Xuddi juft regressiyadagidek R^2-determinatsiya koeffitsiyenti ham regressiya bilan tushuntirilgan y ning dispersiyasining ulushini aniqlaydi va u $\mathrm{var}(\hat{y})/\mathrm{var}(y)$ miqdor, $\{1 - Var(\varepsilon)/Var(y)\}$ miqdor yoki y va $\hat{y}$ orasidagi korrelyatsiya koeffitsiyenti kvadrati sifatida aniqlanadi. Bu koeffitsiyent regressiya tenglamasidagi avval kiritilgan tushuntiradigan o'zgaruvchilarni saqlab unga yana bitta o'zgaruvchini qo'shgandayam hech qachon kamaymaydi. Buni ko'rsatish uchun y ning x_1 va x_2 dan bog'lanishining regressiya bog'lanishi baholangan va quyidagi regressiya tenglamasi hosil qilingan deb faraz qilinadi:

$$\hat{y} = a + b_1 x_1 + b_2 x_2. \qquad (9.10.1)$$

keyin, y ning faqat x_1 dan bog'liqligining regressiya bog'lanishi baholangan va quyidagi tenglama hosil qilingan deb hisoblaymiz:

$$\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}_1 x_1 \qquad (9.10.2)$$

Bu tenglamani quyidagi ko'rinishda qaytadan yozish mumkin:

$$\hat{y} = a + \hat{b}_1 x_1 + 0 \cdot x_2 \qquad (9.10.3)$$

Agar (9.10.1) va (9.10.3) tenglamalarni solishtirsak, birinchining koeffitsiyentlari y, x_1 va x_2 larning ma'lumotlari asosida eng kichik kvadratlar usuli bilan eng yaxshi bahoni ta'minlash orqali osongina hisoblangan. Lekin

(9.10.3) tenglamada x_2 ning oldidagi koeffitsiyent ixtiyoriy ravishda nolga teng deb qabul qilingan va baholash optimal bo'lmaydi, agar baholash xuddi shunday bo'lganda tasodif tufayli b_2 miqdor nolga teng bo'lib qolmasa. Bundan kelib chiqadiki, R^2 koeffitsiyent odatda (9.10.1)da (9.10.3)ga nisbatan yuqori bo'ladi va u hech qachon past bo'lmaydi. Albatta, agar yangi o'zgaruvchi haqiqatan ham bu tenglamaga qarashli bo'lmasa, u holda R^2 koeffitsiyentning o'sishi, ehtimol, sezilarli bo'lmaydi.

R^2 koeffitsiyent dispersiyaning ulushini o'lchar ekan, uni tushuntiradigan erkli o'zgaruvchilar bilan birgalikda yechish mumkin bo'ladi, u holda har bir erkli o'zgaruvchining hissasini aniqlash mumkin bo'ladi va shunday qilib uning nisbiy muhimlik o'lchamini hosil qilish mumkin. Agar buni amalga oshirish mumkin bo'lganda edi, juda qulay bo'lgan bo'lardi. Baxtga qarshi, agar erkli o'zgaruvchilar korrelirlangan bo'lsa, ularning tushuntirish imkoniyati yopiladi va bunday yoyib yozish mumkin bo'lmaydi.

F-testlar

Erksiz o'zgaruvchining dispersiyasini «tushuntiradigan» va «tushuntirmaydigan» larga bo'lib, F – statistikani hosil qilish mumkin:

$$F = \frac{ESS/k}{RSS/(n-k-1)},$$

bu yerda ESS – tushintirilgan chetlanishlar kvadratlarining yig'indisi; RSS – kvadratlar summasi qoldig'i (tushuntirilmagan); k – tushuntirishda ishlatilgan erkinlik darajasi soni. Bu statistika yordamida tushuntirilgan kvadratlar yig'indisi haqiqatan ham tasodifiy ravishda olingandan kattaligini aniqlash mumkin bo'lgan F – testni o'tkazish mumkin. Buning uchun 1-ilovalardagi kataklardan F – k –erkinlik darajasiga mos keluvchi va shu bilan birgalikda ($n - k - 1$) erkinlik darajasiga mos keluvchi kritik darajani topish kerak bo'ladi.

F- va t-statistika orasidagi bog'lanish

Faraz qilaylik, bir nechta tushuntiradigan o'zgaruvchilardan iborat bo'lgan regressiya *baholangan bo'lsin, keyin, o'zgaruvchilardan birontasini tushirib,* hisob takrorlansin. Tushintirilgan kvadratlar summasi orasidagi farqdan foydalanib, olib tashlangan erkli o'zgaruvchining qo'shimcha hissasi uchun F – testni o'tkazish mumkin. Bunday testning, bu o'zgaruvchi uchun boshlang'ich regressiyada $\beta=0$ degan gipoteza uchun, ikki tomonlama t–test bilan ekvivalentligini ko'rsatish mumkin.

Boshqacha so'z bilan aytganda, t – testlar boshqa barcha o'zgaruvchilar tenglamaga kiritib bo'lingan deb, har bir o'zgaruvchining qo'shimcha hissasini samarali tekshirishni ta'minlaydi.

Agar erkli o'zgaruvchilarning tushuntirish qobiliyati ko'rinmasa, u holda har birini tushuntirishga qo'shishda qo'shimcha hissa uncha katta bo'lmasligi mumkin. Bundan t – testning har bir o'zgaruvchi uchun ahamiyatsiz ekanligini ko'rish mumkin, shu bilan bir vaqtda xuddi F – testdek tenglama uchun ham to'liq ahamiyatga egadir.

Misol uchun, yana Monte-Karlo usuli bo'yicha (y) daromadning (S) bilim olish davomiyligi, (X') ish staji va (A) yoshidan regressiya bog'liqligi bahosini qaraymiz:

$$\hat{y} = 7524 + 781S - 207X' + 664A; \qquad R^2 = 0{,}84.$$
$$(\text{s.o.}) \quad (4202)\ (529)\ (538)\ (476)$$

16 erkinlik darajasida t–test, koeffitsiyentlarning birontasi ham 5% haqqoniylik darajasida noldan ahamiyatli farq qilmasligini ko'rsatayapti. Lekin shunga qaramasdan R^2 0,84 ga teng va unga mos F – test 1% haqqoniylik darajasida ahamiyatga ega. Regressiya bahosining natijalaridan, erkli o'zgaruvchilarning har birining ta'siri ajralib turishi ko'rinmasa ham, birgalikda tushuntiradigan qobiliyati yuqoriligi ko'rinib turibdi. Qaralayotgan modelda S, X' va A lar orasida chiziqli bog'lanish qat'iyligidan, tasodifiy hadning dispersiyasi esa kattaligidan multikollinearlik darajasi yuqoriligi kuzatilganidan ajablanmasa ham bo'ladi.

Avtokorrelyatsiya va u bilan bog'liq faktorlar

Shu paytgacha ε tasodifiy hadning qiymati har qanday kuzatishda uning *boshqa barcha kuzatishlardagi qiymatidan* bog'liq bo'lmagan ravishda aniqlanadi deb taxmin qilinardi. Boshqacha so'z bilan aytganda Gauss-Markovning uchinchi sharti qanoatlantiriladi, ya'ni $i \neq j$ *da* $pop.\operatorname{cov}(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$.

Odatda avtokorrelyatsiya faqat vaqtinchalik qatorlardan foydalanilgan regressiya tahlilida uchraydi. Tasodifiy had ε regressiya tenglamasida regressiya tenglamasiga kiritilmagan erksiz o'zgaruvchining ta'sirida bo'ladi. Agar har qanday kuzatishdagi ε ning qiymati uning avvalgi kuzatish qiymatidan bog'liq bo'lmasa, u holda ε da «yashiringan» har qanday o'zgaruvchining qiymati ham oldingi kuzatishdagi qiymati bilan korrelirlangan bo'lmasligi kerak. Misol uchun, oylik ma'lumotlar asosida muz qaymoqqa bo'lgan talab tenglamasi baholanayotgan bo'lib, ε da «yashiringan» ob-*havoning holati birdan* bir *muhim omil* bo'lib *hisoblansin*. Bunda bir necha ketma-ket kuzatishlar mavjud bo'lib, issiq havolar muz qaymoqqa bo'lgan talabni oshiradi hamda bu holatda ε musbat bo'ladi bundan keyin teskari holatdan iborat bo'lgan ketma-ket kuzatish natijalari hamda yana qator issiq oylar va hokazo.

Agar misolda kuzatishlar oylar bo'yichamas, balki yillar bo'yicha bo'lsa, u holda avtokorrelyatsiya umuman bo'lmasligi mumkin.

Bu yerda faqat musbat avtokorrelyatsiya bilan tanishildi. Avtokorrelyatsiya manfiy bo'lgan hol ham bo'lishi mumkin. Yuqoridagi misolda tasodifiy hadning ketma-ket qiymatlari orasidagi korrelyatsiya manfiy. Bu holatda bitta *kuzatishdagi musbat qiymatlar* uning orqasidan keyingisida manfiy qiymanlar, *hamda* teskari*si* bo'*lishi mumkin*.

Ko'p o'zgaruvchili chiziqli regressiyaga misol

Quyida paxta yetishtirishga ixtisoslashtirilgan tuman fermer xo'jaliklari uchun yalpi mahsulot narxi, yerning ball boniteti(X_2) va solinadigan mineral o'g'itlar(X_3) to'g'risidagi statistik ma'lumotlar 9.9-jadvalda keltirilgan.

9.9-jadval

Xo'ja-liklar №	Yalpi mahsulot narxi(m.so'm/ha) Y	Yerning ball boniteti X_1	Solinadigan mineral o'g'it, s. X_2
1	375	60	3.4
2	350	53	3.1
3	360	54	3.2
4	600	61	4.0
5	420	55	3.5
6	280	46	2.5
7	390	58	3.7
8	410	52	3.6
9	350	51	3.3

Eng kichik kvadratlar usuli (EKKU)dan foydalanib ekonometrik model tuzilsin:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_x x_2$$

Yechish:

1-qadam. EKKU dan foydalanib regressiyaning tanlama modeli hosil qilingan: $y = -240 + 1{,}53x_1 + 163x_2$.

2-qadam. Modelning taxlili:

Yalpi mahsulot narxiga tasir qiluvchi faktorlar:

- yerning ball boniteti (X_1)
- solinadigan o'g'it miqdori (X_2)

Y ga eng ko'p ta'sir qiluvchi faktor X_2 dan iborat bo'lib, uning ta'siri X_1 ning ta'siridan deyarlik 100 barobar ko'pdir.

9.11. Chiziqli model orqali prognoz qilish.

Aytaylik, X va Y lar quyidagi tenglama orqali:

$$Y = \alpha + \beta x$$

chiziqli bog'langan va bular tasodifiy miqdorlardan iborat bo'lsin.

$< x_1, x_2, ..., x_n >$ tanlamalar orqali nazariy modelning $y = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$ baholarini hosil qildik. $x_q \in < x_1, x_2, ..., x_n >$ davrda $y_q = y(x_q)$ model orqali prognozni qidirishdan iborat.

Bu masalani yechish uchun quyidagilarni bajarish kerak:

1. $y_q = y(x_q) = x_q\hat{\beta} + \hat{\alpha}$ ni hisoblash.
2. $$S_p = \sqrt{S^2\left[\frac{1}{n} + \frac{\sum (x_k - \bar{x})^2}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}\right]},$$

ni hisoblash kerak, bu yerda

$$S^2 = \frac{1}{n-2}\sum_i \left(y_i - \hat{y}_i\right)^2$$ ga teng.

3. t-styudent taqsimlash jadvali orqali t_{n-2}^{α} ni hisoblash kerak, bu erda α ni $100\% * (1 - 2\alpha)$ orqali aniqlash mumkin.

Ishonch oralig'ini berilgan $100\% * (1 - 2\alpha)$ orqali qidirganimizda qidirilayotgan Y_q miqdor aniqlanadi:

$$\hat{y}_q - t_{n-2}^{\alpha} \cdot S_p \le Y_q \le y_q + t_{n-2}^{\alpha} \cdot S_p$$

Ekonometrik modelga misol.

Shaharning 10 ta savdo shahobchalarini kuzatish orqali mol go'shtining lahm joyiga bo'lgan talab qonuni tekshirilgandagi kuzatish natijasi quyidagi 9.10-jadvalda keltirilgan.

9.10-jadval

Kuzatish tartibi	I	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Sotib ol. mah.(kg)	Y_i	25	30	20	25	15	10	20	35	40	30
1kg. ning narxi(sh.b.)	X_i	3	2.5	3.5	3	4	4.5	3.7	2.5	2.3	2.7

Yechish.

1-qadam. *Talab qonunining modelini tanlash:*

$$Y = \alpha + \beta x.$$

<u>2-qadam.</u> Kuzatishlar jadvali orqali va (7) formulaga asosan eng kichik kvadratlar usulidan foydalanib α, β-koeffitsientlarni baholaymiz:

$$\hat{\beta} = -12.1\ ,\ \hat{\alpha} = 63.5.$$

<u>3-qadam.</u> Tanlangan modelning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$y = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x = 63.5 - 12.1x\ .$$

<u>4-qadam.</u> Eng kichik kvadratlar usuli orqali baholaymiz ya'ni $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ baholarni topamiz. Statistikadan ma'lumki, α, β larni eng kichik kvadratlar usuli bilan baholashda quyidagi sifatlariga e'tibor beriladi:

\# siljimaslik (ya'ni $M(\hat{\alpha}) = \alpha$, va $M(\hat{\beta}) = \beta$).

\# asoslanganlik ya'ni $n \to \infty$ da $var(\hat{\alpha}) = 0$ va $var(\hat{\beta}) = 0$.

<u>5-qadam.</u> Determinatsiya koeffitsienti orqali modelning adekvatligini baholash: $R^2 = 0.938$ y'ani Y X dan 94% chiziqli bog'langan va uning ko'rinishi $2.5 \le X \le 4;\ 10 \le Y \le 40$ oraliqda $Y = 63.5 - 12.1x$ bo'ladi.

<u>6-qadam.</u> Hosil qilingan model orqali prognoz qilish:

Agar mol go'shtining laxm joyining 1kg ni 5 sh.b dan oladigan bo'lsa, qancha go'sht sotib olish kerak?

Regressiya tenglamasidan y ning prognoz qiymati:

$Y = 63.5 - 12.1 \cdot x = 63.5 - 12.1 \cdot 5 = 3$ ni hosil qilamiz.

Bundan ko'rinib turibdiki, bu narx bilan 3 kg sotib olish mumkin bo'ladi. Demak, bu narx yuqori bo'lganligi uchun, sotib olinadigan go'shtning miqdori kam bo'layapdi.

E s l a t m a. Tushuntiradigan o'zgaruvchi x ning berilgan qiymatlari orqali y ning prognoz qiymatini topish uchun Excel ning statistik funksiyalaridan foydalanish mumkin.

IX bobga doir topshiriqlar

1-topshiriq.

Quyida keltirilgan regressiya tahlili (x) erkli va (y) erksiz o'zgaruvchilarga nisbatan berilgan ma'lumotlar asosida keltirilgan.

$$n = 10, \ \sum x = 0, \ \sum x = 55, \ \sum y = 55, \ \sum x^2 = 385, \ \sum x \cdot y = 220$$

a) Regressiya tenglamasi parametrlari a va b larni aniqlang.

b) y ni $x = 20$ bo'lgandagi bahosini toping.

d) Korrelyatsiya koeffitsiyentini aniqlang.

e) Determinatsiya koeffitsiyentini aniqlang.

2-topshiriq.

O'zbekistonning har bir aholisi oliy ma'lumotga ega bo'lsin, deyik. Aholining yillik ish haqi (U ming.so'mda) va bilim olish muddati (X yil) orasidagi bog'lanish quyidagicha:

$$\hat{y} = 360{,}6 + 8x_i$$

a) *Bilim olish muddatining ish haqiga ta'siri qanday?*

b) *Doimiy koeffitsiyenti qanday interpretatsiya qilish mumkin?*

v) 10-yil bilim olgan kishining ish haqi darajasini oldindan aytib bering.

3-topshiriq.

9.11.1-jadvalda 16 ta *fermer* xo'jaligi bo'yicha 1ha yerga solinadigan organik o'g'itlar va kartoshkaning hosildorligi to'g'risidagi ma'lumotlar keltirilgan. Bu ma'lumotlardan foydalanib kartoshka hosildorligining solinadigan o'g'itdan bog'likligining korrelyatsiya va regressiya modellarini tuzing.

9.11.1-jadval

Fermer xo'jalik / Ko'rsatkich	1	2	3	4	5	6	7	8
Kartoshka hosildorligi 1ga, s	179	129	187	143	246	129	207	156
Solingan o'g'it 1ga, kg	5.9	4.1	9.4	6.6	12.6	3.4	9.9	7.1

Fermer xo'j. soni / Ko'rsatkichlar	9	10	11	12	13	14	15	16
Kartoshka hosildorligi 1ga, s	253	131	262	167	201	135	218	156
Solingan o'g'it 1ga kg	12.1	4.6	13.2	7.6	10.6	5.3	11.2	7.1

4-topshiriq.

Jadvalda don ekinlari yetishtirishga ixtisoslashtirilgan 20 ta fermer xo'jaligi bo'yicha bug'doy hosildorligi va unga sarf qilinadigan mehnat xarajatlari haqidagi ma'lumotlar keltirilgan. Bu ma'lumotlardan foydalanib bug'doy hosildorligining unga sarf qilinadigan mehnat xarajatlaridan bog'liqligining korrelyatsiya-regressiya modellarini tuzing.

9.11.2-jadval

Fermer xo'j.soni / Ko'rsatkichlar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Hosildorlik, 1ga, s	24.1	24.8	23.8	28.1	26.2	26.8	27.2	41.4	24.1	31.8
Mehnat xar., 1ga, o.s.	21.5	26.3	36.2	32.3	18.8	23.5	30.1	29.5	20.6	25.3

Davomi

Fermer xo'j. soni / Ko'rsatkichlar	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Hosildorlik, 1ga, s	24.1	36.8	38.1	23.4	36.3	26.2	28.5	24.2	23.7	43.5
Mehnat xarajat., 1ga, o.s.	20.5	26.7	27.2	21.5	26.8	24.6	21.9	23.1	22.4	26.4

5-topshiriq.

Paxta yetishtirishga ixtisoslashtirilgan tuman fermer xo'jaliklari uchun paxta hosildorligi, yerning ball boniteti(X_2) va solinadigan mineral o'g'itlar (X_3) to'g'risidagi ma'lumotlar 9.11.3-jadvalda keltirilgan.

Bu ma'lumotlardan foydalanib, paxta hosildorligini yerning ball boniteti va beriladigan suv miqdoridan bog'likligining korrelyatsiya-regressiya modellarini tuzing.

9.11.3-jadval

Xo'ja-liklar №	Y hosildorlik s/ga	X_1 Yerning ball boniteti	X_2 Solinadigan mineral o'g'it s.	X_3 Beriladigan suv m kub.
1	35,5	60	3.5	7,0
2	25.5	63	3.2	7,0
3	27	54	3.4	6,4
4	35	61	3.6	7,8
5	32,5	65	3.5	7,0
6	30	56	3.8	7,5
7	37	68	3.7	4,8
8	33	62	3.9	2,6
9	38,5	67	3.1	2.5

6-topshiriq:

6.1. $COV(\hat{y},\varepsilon)$ nolga tengligini $\hat{y}=a+bx$ tenglikdan va $\varepsilon=y-a-bx$ kovariatsiya qoidasidan foydalanib isbotlang.

6.2. 9.3- jadvaldagi ma'lumotlardan foydalanib y va $\hat{y}$ orasidagi korrelyatsiya koeffitsiyentini hisoblang, shunda R^2 koeffitsiyentning qiymati korrelyatsiya koeffitsiyentining qiymatini kvadratga ko'targaniga tengligini ko'rish mumkin.

6.3. R^2 *koeffitsiyentning qiymati oziq-ovqatga va uy joyga* xarajatlarning shaxsiy daromaddan bog'liqligining regressiya bog'lanishi uchun mos ravishda 0,98 va 0,99 ga teng. Bu qiymatlar orqali qanday xulosalar qilish mumkin?

6.4. Ikkita x va y o'zgaruvchi orasidagi bog'lanish tenglama ko'rinishida berilgan. p ta kuzatishdan iborat tanlamadan foydalanib, y ning o'rtacha qiymatini hisoblab, uni x ning o'rtacha qiymatiga bo'lish orqali β baholangan. Bu bahoning xususiyatlarini tahlil qiling. Agar $\alpha=0$ deb faraz qilinsa, nima o'zgaradi?

6.5. Ikkita x va y o'zgaruvchi orasidagi bog'lanish tenglama ko'rinishida berilgan. p ta kuzatishdan iborat vaqtinchalik qatordan foydalanib β ni $COV(y,t)/COV(x,t)$ sifatida baholangan, bu yerda t –vaqt o'zgaruvchisi bo'lib, birinchi kuzatishda birga teng, ikkinchi kuzatishda ikkiga va h.k. Bu bahoning xususiyatlarini tahlil qiling.

6.6. Oziq-ovqatga xarajatlar bilan shaxsiy daromad va oziq-ovqatlar nisbiy narxi orasidagi logarifmik regressiyada R^2 koeffitsiyentning miqdori 0,9867 ga teng. F kriteriyaning taqriban 820,1 ga tengligini tekshiring va uning haqqoniyligini tekshiring.

6.7. Tanlangan tovar uchun mos regressiyada R^2 asosida F kriteriyaning to'g'ri hisoblanganligini tekshiring va uning haqqoniyligini ko'rsating.

7-Topshiriq

1. Paxta hosildorligiga solinadigan og'itning regressia bog'lanishining tenglamasi berilgan: $\hat{y} = 95{,}3 + 2{,}53t$.

Regressiyani baholash natijasini izohlash va ularni shunga o'xshash natija ya'ni talab funktsiyasi regressiya modeli bilan solishtiring. Bu holatda o'zgarmasning oddiy izoh ekanligiga e'tibor bering.

2. Kartoshka hosildorligining urug' navidan regressiya bog'lanishi quyidagi ko'rinishda baholangan:

$$\hat{y} = -27{,}6 + 0{,}178x.$$

Xuddi shuningdek kartoshka hosildorligiga solinadigan o'g'itning regressiya bog'lanishi quyidagi ko'rinishda:

$$\hat{y} = 48{,}9 + 4{,}84t.$$

Bu regressiya tenglamalarni iqtisodiy sharxini bering. Ular y o'zgaruvchi bo'yicha bir xil ma'lumotlar uchun har xil tushuntirishlarni taxmin qiladi. Ular qanday darajada bir-biri bilan mos tushadi?

3. Ikki kishi y o'zgaruvchining 25 ta kuzatish natijasi uchun $y = \alpha + \beta t + \varepsilon$ modeldan foydalanib vaqtga bog'liq trend tuzgan, bu yerda t –vaqtdan iborat bo'lib, 1 dan 25 gacha bo'lgan qiymatlarni qabul qiladi, ε_t–tasodifiy miqdor. Kishilarning birinchisi $\hat{y} = 6{,}70 + 1{,}79t$ tenglamani hosil qiladi. Ikkinchisi xato qilib, t va y orasidagi regressiyani quyidagicha baholaydi. $\hat{t} = -0{,}25 + 0{,}44y$.
U bu tenglamadan $\hat{y} = 0{,}57 + 2{,}27t$ ni hosil qiladi. Bu tenglama bilan birinchi kishi hosil qilgan tenglama orasidagi farqni tushuntirib bering.

4. Tadqiqotchi xizmatlarga talablar yig'indisi (y) bilan shaxsiy daromadlari yig'indisi (x) o'rtasidagi bog'lanishni berilgan ma'lumotlar asosida quyidagi model va vaqtli qator ma'lumotlari orqali o'rganayapti (ikkala miqdor ham milliard sh.b. da o'lchangan): $y = \alpha + \beta x + \varepsilon$.

1. Izlanuvchi odatdagi eng kichik kvadratlar usulidan foydalanib, regressiya tahlili orqali regressiya tenglamasini hosil qilgan. Kishilarni soliqlarni to'lamaslikka intilishlarini taxmin qilib, tadqiqotchi milliy hisob tizimida y va x ning miqdorlari kerakli darajada kamaytirilgan deb, kamaytirilgan bahoni aniqlashning ikkita alternativ usulini qo'llaydi.

2. Izlanuvchi har yili y ko'rsatkichga 90 mlrd. sh.b. x ko'rsatkichga 200 mlrd. sh.b. qo'shadi.

3. Izlanuvchi har yili y ning ham x ning ham qiymatini 10%ga oshiradi.

(2) va (3) o'zgartirishlarning regressiya bahosi natijasiga ta'sirini baholang.

5. Izlanuvchi n yil davomida har bir yil uchun olingan ish haqi yig'indisi (W), foydalar yig'indisi (P) va daromadlar yig'indisi (Y) to'g'risidagi ma'lumotlarga ega. Ta'rif bo'yicha

$$Y = W + P.$$

Odatdagi eng kichik kvadratlar usulidan foydalanib, regressiya tenglamasi hosil qilinadi:

$$\hat{W} = a_0 + a_1 Y;$$
$$\hat{\Pi} = b_0 + b_1 Y.$$

Regressiya koeffitsiyenti quyidagi munosabatlarni avtomatik ravishda qanoatlantirishini ko'rsating:

$$a_1 + b_1 = 1;$$
$$a_0 + b_0 = 0.$$

Nima uchun shunday bo'lishini tushuntiring.

Tayanch so'z va iboralar

Dispersiya, chiziqli bog'lanish, erkli, erksiz, standart xatolari, t-statistika, regressiya koeffitsientlari, erkinlik daraja, Styudent taqsimoti, muhimlik darajasi, nolinchi gipoteza, tushuntiradigan o'zgaruvchi, tushuntiriladigan o'zgaruvchi, noma'lum parametrlar, parametrlarni baholash, adekvatlik, *differentsial hisob, dispersiya, determinatsiya* koeffitsiyenti, *taqsimot, siljimagan* baho, tanlama dispersiyasi, multikollinearlik, vaqtinchalik qatorlar, avtokorrelyatsiya.

IX bobga doir savollar

1. Qanday modellarga ekonometrik modellar deyiladi?
2. *Ekonometrika fani nimani o'rganadi?*
3. Ekonometrik modellarning boshqa modellardan farqi.
4. Korrelyatsiya modelida bog'lanish turi qanaqa bo'ladi, korrelyatsiya koeffitsiyenti formulasi va uning qabul qiladigan qiymatlari qanaqa?
5. Eng kichik kvadratlar usuli va uning iqtisodiy ma'nosi.
6. Eng kichik kvadratlar usulidagi standart kvadratlar tenglamasi ko'rinishi.
7. Regressiya modeli qaysi iqtisodiy jarayonlarni ifodalashda qo'llaniladi?
8. Regressiya modelidan foydalanib prognoz qilish usulini tushuntiring.
9. *Bir faktorli va ko'p faktorli regressiya tahlillarini farqini va ma'nosini* tushuntiring.
10. Multikolleniarlik va avtokorrelyatsiya tushunchalari ma'nosi nima ular qachon mavjud bo'ladi?
11. Multikolleniarlikni yumshatadigan qanday usullar mavjud?
12. Avtokorrelyatsiya mavjud bo'lmasligi uchun nima qilish kerak?

X bob. TARMOQLARARO BOG'LIQLIKNI TAHLIL QILISH.

10.1.Tarmoqlararo tahlilning asosiy elementlari.

Xalq xo'jaligi bir biriga bog'liq tarmoqlarning murakkab tizimidan tashkil topgan. Misol uchun, qishloq va suv xo'jaligini rivojlantirish uning texnika bilan ta'minlanganligidan bog'liqdir. Traktor va kombaynlar va boshqa qishloq xo'jaligi texnikalari qishloq xo'jaligi korxonalarida muhim ishlab chiqarish resurslaridan biri hisoblanadi. Shu bilan birgalikda traktorlar traktor zavodida oxirgi mahsulot bo'lib hisoblanadi. Traktor zavodlarining ishlab chiqarish resurslari stanoklar, elektr energiyasi va h.k. lar bo'lib, ular o'z navbatida stanoklar ishlab chiqaradigan, metallurgiya sanoati, elektrostansiyalarning oxirgi mahsuloti hisoblanadi. Stanok, elektroenergiyalarni ishlab chiqarishda ham ularga mos tarmoqlar oxirgi mahsuloti bo'lgan resurslardan foydalaniladi.

Xuddi shuningdek, ishlab chiqarishdagi bog'lanishlar qishloq va suv xo'jaligi tarmoqlarida, hamda alohida olingan qishloq xo'jaligi korxonalarida ham mavjud. Dehqonchilikda paxta, don, kartoshka, lavlagi va boshqalar ularning ishlatilishiga qarab oxirgi mahsulot (oziq ovqatga ishlatish) xomashyo(qayta ishlashda), ishlab chiqarish vositasi (urug',yem-xashak)dan iborat bo'lishi mumkin. Chorvachilikda sut, go'sht oxirgi mahsulot, xomashyo va ozuqa bo'lishi mumkin. Barcha tarmqlararo ishlab chiqarish bo g'lanishini hisobga olish uchun birinchi va zarur shart-sharoit ilmiy asoslangan rejalashtirishdir. Lekin xalq xo'jaligidagi yuzlab va minglab tarmoqlar orasidagi o'zaro bo g'lanishni hisobga olish va ularni oddiy hisob usullarida miqdoriy ifodalash amalda mumkin emas. Bu masalani hal qilishning birdan-bir yo'li– matematik usullar va EHM. Xalq xo'jaligidagi tarmoqlararo bo g'lanishlarni o'rganish va rejalashtirish sohasida tarmoqlararo balans asosiy usullardan biri hisoblanadi.

Bu usulning asosiy qismi mahsulotni ishlab chiqarish va taqsimlashning tarmoqlar balanslari tizimidir.

Xalq xo'jaligi ko'pchilik tarmoqlari mahsulotlari asosan ishlab chiqarish is'temoliga ketadi, uning faqat ayrim qismlarigini shaxsiy iste'mol uchun, shuningdek zaxirani to'ldirishga va eksport uchun ishlatiladi. Misol uchun paxta qishloq xo'jaligi mahsuloti sifatida ishlab chiqarish iste'moliga, xomashyo sifatida yengil sanoatga, yog'-moy sanoatiga va ishlab chiqarish iste'moli sifatida qishloq xo'jaligining o'zida (urug' yoki mollarga ozuqa) ishlatiladi.

Paxtaning asosiy qismi eksport va zaxirani to'ldirishga jo'natiladi va sohaning xalq xo'jaligi tizimida oxirgi mahsulot bo'lib hisoblanadi. Agar alohida olingan korxona (fermer xo'jaligi) nuqtai nazardan paxta yetishtirish va uni taqsimlashni qarasak, u holda ishlab chiqarilgan paxtaning asosiysi (urug' va ozuqadan tashqari) oxirgi mahsulotni aks ettiradi.

Tarmoqlararo tahlil usuli mikromiqyosdagi tarmoqlarning o'zgaruvchilari va makro o'zgaruvchilar orasidagi o'zaro bog'lanishlar masalalarini yechishga xizmat qiladi. Bu usul amerikalik iqtisodchi, iqtisodiyot bo'yicha Nobel mukofoti sovrindori V. Leontev tomonidan ishlab chiqilgan.

Tarmoqlararo bog'lanish jadvali.

Quyidagi o'zgaruvchilar kiritiladi:

n- ishlab chiqarish tarmoqlari soni;

i- ishlab chiqarish tarmoqlari turi $(i=1,...,n)$;

x_{ij}- *i*- tarmoq mahsulotini bir yil davomida *j*- tarmoqqa sarf qilish.

Quyidagicha faraz qilinadi:

1) har bir tarmoqda bittadan texnologiya mavjud bo'lsin.

2) ishlab chiqarish xarajatlari normasi ishlab chiqariladigan mahsulot hajmiga bog'liq emas.

3) ishlab chiqarishda bir turdagi maqsulot boshqasi bilan almashtirilishiga yo'l qo'yilmaydi.

i-qator $x_{i1}, x_{i2},..., x_{in}$ lardan iborat boshqa tarmoqlar orqali ifodalanadigan jadvalni tuzamiz.

Agar *j*- ustunni qarasak, $x_{1j}, x_{2j},...,x_{nj}$ lar i- tarmoq (i=1,...,n) resurslarining *j*- tarmoqda iste'mol qilinishini ifodalaydi.

Tarmoqlar	1	2	...	n	Umumiy	Oxirgi mahsulot	Yalpi mahsulot
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	$\sum x_{1j}$	y_1	x_1
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	$\sum x_{2j}$	y_2	x_2
...	...	...	...	...	...	...	...
n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nn}	$\sum x_{nj}$	y_n	x_n
Umumiy	$\sum x_{i1}$	$\sum x_{i2}$	...	$\sum x_{in}$	$\sum\sum x_{ij}$	$\sum y_i$	$\sum x_i$

Sof mahsulot	v_1	v_2	...	v_n	$\sum v_i$		
Jami	x_1	x_2	...	x_n	$\sum x_i$		

Tarmoqlararo balansning birinchi bo'limi.

Bu bo'lim xalq xo'jaligi barcha tarmoqlarining xarajatlariga bag'ishlangan, (n+1)-qatorda $(\sum x_{ik},\ k = 1,2,...,n)$ - mos ustunlar yig'indisi turibdi. Tarmoqlararo jadvalning $(n+1, n+1)$ katagida esa, $\sum\sum x_{ij}$ ishlab chiqarish xarajatlari yig'indisi turibdi bu barcha tarmoqlarning ishlab chiqarish iste'molini bildiradi. Bu (bo'lim) oraliqda hosil qilingan hisoblar natijasini oraliq mahsulot deb ataymiz.

Tarmoqlararo balansning ikkinchi bo'limi.

Bu bo'lim xalq xo'jaligining oxirgi mahsulotiga bag'ishlangan. $(n+2)$ - ustun tarmoqlar mahsulotlarini oxirgi iste'moli bo'lib, ishlab chiqarish iste'moliga kirmaydi, buni shaxsiy yoki ijtimoiy iste'mol deb tushuniladi. Bularga asosiy fondning chiqib ketishi, yig'ilishi va zaxiralar oshishi, kishilar o'zlarining iste'moli, mudofaa xarajatlari, sog'liqni saqlash, ta'lim va boshqalar kiradi.

i- tarmoq mahsulot hajmini y_i deb belgilab, $(n+3)$-ustun i- tarmoqning yalpi mahsuloti

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i; \quad (i = 1,...,n) \qquad (10.1.)$$

ga teng. $\sum y_i$ va $\sum x_i$ miqdorlar oxirgi va yalpi mahsulotlar yig'indisini ifodalaydi. (10.1) ifodani yoyib yozganimizda

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + y_1 \\ x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + y_2 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n + y_n \end{aligned} \qquad (10.1')$$

hosil boladi.

Tarmoqlararo balansning uchinchi bo'limi.

Bu bo'lim barcha tarmoqlarning yalpi mahsulotlarini hisoblashga bag'ishlangan. $(n+2)$-qator sof mahsulot bo'lib, yalpi mahsulot bilan ishlab chiqarish xarajatlari $\sum x_{ij}$ orasilagi farqqa teng, yani

$$v_j = x_j - \Sigma x_i ,$$

bundan

$$x_i = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + v_j; \quad (j = 1,...,n) \qquad (10.2)$$

(10.1) va (10.2) dan kelib chiqadiki

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} x_j \Rightarrow \sum_i \left(\sum_j x_{ij} + y_i \right) = \sum_j \left(\sum_i x_{ij} + v_j \right) \Rightarrow$$

$$\sum_i \sum_j x_{ij} + \sum_i y_i = \sum_j \sum_i x_{ij} + \sum_j v_j \Rightarrow \sum_i y_i = \sum_j v_j$$

ya'ni oxirgi mahsulotlar yig'indisi sof mahsulotlar yig'indisiga teng.

Demak, tarmoqlararo balans jadvali quyidagilarni o'rganishga yordam beradi:

- resurslar oqimining tuzilishini;
- tarqatilish samaradorligini (multiplikatsiya);
- bevosita sarf xarajatlar koeffitsientlari bilan to'liq sarf xarajatlar koeffitsientlarini tuzish;

$a_{ij} = x_{ij} / x_j$ miqdor bevosita sarf xarajatlar koeffitsienti deb aytiladi. a_{ij} koeffitsiyent i-tarmoqning qancha miqdordagi mahsulotini j-tarmoqning 1 birlik mahsulotini ishlab chiqarishga sarf qilinishini ko'rsatadi. a_{ij} koeffitsient tarmoqlararo modellarda o'zgarmas bo'lib, j-chi tarmoqning x_j- mahsulotini ishlab chiqarishdagi x_{ij}, $(i = 1,...,n)$ xarajatlarni hisoblashga yordam beradi. Agar quyidagi formulaga

$$x_i = \sum_i x_{ij} + y_i \quad (i,j = 1,...,n) \;;$$

$x_i = a_{ij} x_j$ ni qo'ysak to'g'ridan to'g'ri sarf harajatlar koeffitsiyenti ta'rifiga muvofiq

$$x_i = \sum_j a_{ij} x_j + y_i; \quad i = 1,...,n \quad ; \qquad (10.3)$$

ni hosil qilamiz va uni matritsa ko'rinishida yozsak

$$X = Ax + Y \qquad (10.4)$$

bu yerda

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ --- \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{bmatrix}; \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}$$

lardan iborat.

(10.4) tenglamaga Leontyevning tarmoqlararo balans matematik modeli deyiladi. Agar (10.4) tenglamada a_i lar aniq bo'lsa (10.4) tenglamani xalq xo'jaligini tahlil qilish va rejalashtirish uchun ishlatish mumkin. Haqiqatan ham, agar Y orqali tarmoqlar tizimida oxirgi maqsulotni belgilasak, u holda tarmoqlarning yalpi maxsuloti X ni hisoblash mumkin.

Haqiqatan (10.4) dan

$$x = Ax + y \;\Rightarrow\; X - Ax = y \;\Rightarrow\; X(E - A) = Y \;\Rightarrow$$
$$X(E - A)(E - A)^{-1} = Y(E - A)^{-1} \;\Rightarrow X \cdot E = Y(E - A)^{-1} \;\Rightarrow$$
$$X = Y \cdot B \qquad (10.5)$$

ni hosil qilish mumkin, bu yerda $B = (E - A)^{-1}$, E- birlik matritsa.

Shunday qilib, to'g'ridan to'g'ri sarf harajatlar koeffitsiyenti asosida tarmoqlar mahsulotlarini oxirgi mahsulot orqali aniqlash imkonini beradi. Tarmoqlararo modelning ishlab chiqarishni rejalashtirishga qo'llash uchun ishlatilishiga sabab ham shunda.

(10.5) formulada B matritsa $(E - A)$ matritsaga teskari matritsadir. Biz bilamizki, barcha matritsaning ham teskarisi mavjud bo'lavermaydi. Matritsalar nazariyasidan malumki, agar matritsalarning elementlari manfiy bo'lmasa va ustunlar elementlarining yig'indisi birdan kichik bo'lsa, bunday matritsaga teskari matritsa mavjud bo'ladi va uning elementlari manfiy bo'lmaydi.

Bizning $(E-A)$ matritsa uchun barcha yuqoridagi talablar bajariladi. Misol uchun balanslar jadvalidan malumki, $x_{ij} \geq 0, x_j > 0$ bo'lganligi uchun

$$a_{ij} - x_{ij} / x_j \geq 0$$

bajariladi. Boshqa tomondan, (2) tenglamadan

$$x_j = \sum_i x_{ij} + v_j \Rightarrow x_j = \sum_i x_{ij}$$

ni hosil qilamiz, chunki barcha tarmoqlar uchun $j = \overline{1,n}$ ga teng. Musbat X_j lar uchun quyidagi tengsizlikni hosil qilamiz:

$$\sum_i x_{ij} / x_j < 1 \Rightarrow \sum a_{ij} < 1$$

tengsizlik hamma vaqt to'g'ridir. Ushbu

$$B = (E-A)^{-1}$$

matritsa to'liq xarajatlar matritsasi, deb v_{ij} koeffitsiyentlar esa to'liq xarajatlar koeffitsienti deb aytiladi. b_{ij} koeffitsiyentlar j -tarmoqning 1 birlik oxirgi mahsulotini ishlab chiqarish uchun i- tarmoqning yalpi ishlab chiqarishi qanday bo'lishini ko'rsatadi.

Quyidagi tenglik o'rinli ekanligini tekshirish qiyin emas:

$$B = E + A + A^2 + A^3 + \dots \qquad (10.5')$$

Haqiqatan ham, ikkala tomonini $(E-A)$ ga ko'paytirsak,

$$(E-A)B = (E-A)(E + A + A^2 + A^3 + \dots) = E + A + A^2 + A^3 + \dots - A - A^2 - \dots = E$$

ni hosil qilamiz.

Bu yerdan

$$(E-A)B = E,$$

$$B = (E-A)^{-1}E = (E-A)^{-1}$$

ni hosil qilamiz. (5') dan

$$b_{ij} > a_{ij} \ ; \ (i, j = 1, n)$$

kelib chiqadi.Ya'ni v_{ij} to'liq xarajatlar koeffitsiyenti j -tarmoqning 1 birlik oxirgi mahsulotini ishlab chiqarish uchun i- tarmoqning yalpi ishlab chiqarishi qanaqa bo'lishini ko'rsatib, a_{ij} j-tarmoqning 1 birlik yalpi mahsulotini ishlab chiqarish uchun to'g'ridan to'g'ri sarf xarajatlar koeffitsiyentidan kichik bo'lmaydi.

Shunday qilib, B to'liq sarf xarajatlar matritsasining qiymatini (10.5) tenglama -oxirgi mahsulot orqali tarmoqlarning yalpi ishlab chiqarishini aniqlab, keyin tarmoqlarning yalpi ishlab chiqarishi va to'g'ridan to'g'ri sarf harajatlar matritsasidan foydalanib, quyidagi formula orqali rejadagi tarmoqlararo balans tuziladi:

$$x_{ij} = a_{ij}x_j \quad (i, j = 1, n)$$

b_{ij} - multiplikasiya nuqtayi nazaridan, talabning tarqalish samaradorligini ko'rsatuvchi dastlabki manba oxirgi mahsulotga talab hisoblanadi.

(10.4) tenglamani teskari formula (10.5) orqali amaliyotda kompyutyerda yechish qiyin, chunki xatolarni yaxlitlash ko'payib boradi. Shuning uchun (10.4) tenglamani iteratsion usul bilan yechish osonroqdir.

Iteratsion formulani tuzamiz:

$$X^{(K+1)} = AX^{(K)} + Y, \qquad (10.6)$$

(10.6) ga $X^0 = Y$ ni dastlabki iteratsion qiymat sifatida qo'yib, oxirgi talab natijasi bo'lgan multiplikatsiya samaradorligini hisoblaymiz; boshqa dastlabki manfiy bo'lmagan qiymatlarni berib, hosil bo'lgan hatijani iqtisodiy baholay olish mumkin.

iteratsiya jarayoni

$$\left\| X^{(k+1)} - X^{(k)} \right\| \le \varepsilon$$

bajarilganda tugaydi, bu yerda $\| \; \|$ - matritsa normasi, $\varepsilon > 0$ - kichik miqdorlar. Bu usul *Yakobi iterasion usuli* deb aytiladi. Yakobi usulining Zeydel tomonidan modifikatsiya qilinganini Gauss -Zeydel usuli deb aytiladi.

1.Iteratsion usuldan tarmoqlararo tahlilda foydalanish quyidagi imkoniyatlarga ega: a) ular multiplikatsiya samaradorligini hisoblashga qulay;

б) teskari matritsani hisoblash uchun zarur bo'lgan, algebraik bilimlarni talab qilmaydi;

2. Gauss- Zeydel usulini qollashda asosiy tenglamalar sifatida quyidagilar qatnashadi:

$$X_1^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j^{(k)} + Y_1 ,$$

$$X_2^{(k+1)} = a_{21} X_1^{(k+1)} + \sum_{j=2}^{n} a_{2j} X_j^{(k)} + Y_2 ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} X_j^{(k+1)} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j^{(k)} + Y_i , \tag{10}$$

$$X_n^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj} X_j^{(k+1)} + \sum_{j=1}^{n} a_{nn} X_n^{(k)} + Y_n .$$

Bu usul iteratsiya davomida oldingi echimning yangi hosil qilingan $k+1$ tartibli iteratsion echimi bilan almashtirilishi bilan Yakobi usulidan farq qiladi. Agar tog'ridan-tog'ri sarf-xarajatlar koeffitsientlari matritsasini diagonal bo'yicha ikkiga bo'lsak:

$$A = E_1 + E_2 ,$$

bu yerda

$$
E_1 = \begin{bmatrix} 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ a_{21}\, 0 \ldots\ldots\ldots 0 \\ a_{31} a_{32}\, 0 \ldots\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{n,n-1}\, 0 \end{bmatrix} \qquad E_2 = \begin{bmatrix} a_{11} \;\; a_{12} \ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ 0 \;\; a_{22} \ldots\ldots\ldots a_{2n} \\ 0..0 \;\; a_{33} \ldots\ldots\ldots a_{3n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \ldots\ldots\ldots 0 \quad a_{nn} \end{bmatrix}
$$

Gauss-Zeydelning iteratsion formulasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$
X^{(k+1)} = E_1 X^{(k+1)}\; E_2 X^{(k)} + Y \qquad (10.7)
$$

bundan makrobalans formulasini hosil qilish mumkin:

$$
X^{(k+1)} = a^{(k)} X^{(k+1)} + Y, \qquad (10.8)
$$

$$
a^{(k)} = \Big(\sum_i \sum_j a_{ij} x_j^{(k)}\Big) / \sum_i x_i^{(k)},
$$

$$
Y = \sum_i Y_i, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots
$$

Mikrobalans tenglamasi:

$$
X_i^{(k+1)} = Z^{(k+1)} \sum_j a_{ij} X_j^{(k)} + Y_i \qquad \mathbf{(10.9)}
$$

boladi, bu yerda

$$
Z^{(k+1)} = X^{(k+1)} / X^{(k)} \qquad \mathbf{(10.10)}
$$

(10.8) dan quyidagini hosil qilamiz:

$$
X^{(k+1)} - a^{(k)} X^{(k+1)} = Y
$$

$$
X^{(k+1)} \left(1 - a^{(k)}\right) = Y
$$

$$
X^{(k+1)} = Y / \left(1 - a^{(k)}\right)
$$

Buni (10.10) tenglikka qo'ysak quyidagi hosil bo'ladi:

$$
Z^{(k+1)} = \frac{Y}{(1 - a^{(k)}) X^{(k)}} = \frac{\sum_i Y_i}{(1 - a^{(k)}) X^{(k)}} = \frac{\sum_i Y_i}{\left[1 - \sum_i \sum_j a_{ij} X_j^{(k)} / \sum_i X_i^{(k)}\right] * X^{(k)}} =
$$

$$=\frac{\sum_i Y_i}{\sum_i X_i^{(k)} - \sum_i \sum_j a_{ij} X_j^{(k)}}. \qquad (10.11)$$

(10.11) formula Z. mikrobalansning muvozanat multiplikatorini hisoblashga yordam beradi.

Ketma-ket umumlashtirish iterativ jarayonida makrobalans va mikrobalans(tarmoqlararo balans)ni qadam ba qadam yig'ish(agregirlash) usuli macro va mikro darajalarni bir-biriga bog'lash nuqtai nazaridan va yaqinlashish tezligi nuqtai nazaridan ham sezilarli imkoniyatlarga ega. Birinchidan, keltirilgan algoritmda mikrobalans tarmoqlararo bog'lanishning narx bo'yicha balansi bo'lishiga qaramasdan engilgina o'zgartirish kiritish orqali uni haqiqiy balans sifatida qo'llash mumkin bo'ladi. Ikkinchidan makrobalans qaralgan mikrobalansga nisbatan tarmoqlararo bog'lanish balansinig judayam past yig'ish(agregirlash) darajasi bolib ishlatilishi mumkin.

10.2. To'g'ridan-to'g'ri usul bilan muvozanatdagi ishlab chiharishni aniqlash

Tarmoqlararo balans jadvali mos kelgan ko'rinishga keltirilganda $(I-A)^{-1}$ teskari *matritsani hisoblash* interaktiv bajarish ketmaa-ketligi yordamisiz, yetakchi elementni tanlash yo'li bilan bevosita Gauss usulidan foydalanish orqali amalga oshirilgan bo'lib, ishlab chiharish hajmi hisobining tezligi va aniqligi nuqtai nazaridan ma'lum imkoniyatlarga ega. Qiymatdagi tarmohlararo balans uchun $0 \le a_{ij} \le 1 (i, j = 1,2,...,n)$ni hisobga olganda $(I-A)$ matritsa ustunlari elementlari yig'indisi absolyut qiymati qaralganda ular unchalik katta emasligini ko'rish mumkin, shuning uchun eng oddiy Gauss usulidan foydalanish maqsadga muvofiq. Yuqoridagilarni hisobga olganda aniq misollar asosida tarmoqlararo bog'lanish tahlilini amalga oshirish mumkin.

Muvozanat narxini aniqlash

Tarmohlararo balansni qatorlar bo'yicha qaraganda, tarmohlararo bog'lanishni tahlil qilish masalasi va tarmoqlar yalpi ishlab chiqarish hajmini aniqlash masalalari bilan tanishildi. Endi uni ustunlar bo'yicha qarab, taqsimlash samaradorligini narx bo'yicha tekshirilib va tarmohlararo bog'lanishning narx bo'yicha modeli tuziladi.

Muvozanat narxi modeli

Narx bo'yicha tarmoqlararo balans i –ustunini quyidagicha ifodalash mumkin:

$$x_{1i} + x_{2i} + \ldots + x_{ni} + v_i = x_i$$

bundan, $x_{ji} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} x_j$, $v_j = v_j x_j$ ifodani qo'llash orqali

$1 \cdot a_{1i} + 1 \cdot a_{2i} + \ldots + 1 \cdot a_{ni} + v_i = 1, i = 1, (i = 1,2,\ldots)$ hosil qilinadi.

Bu yerda v_i — birlik mahsulotga mos keluvchi ustama narx miqdori bo'lib, ustama narx ulushi deb aytiladi. Agar barcha mahsulotlar v_j ni v_i ga almashtirganda narxlar $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ni asosiy davr uchun birga teng deb olsak, u holda $P_1, P_2, \ldots, P_n$ narxlar quyidagi formula orqali ifodalanadi:

$$P_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} x_j + v_i. \qquad (10.12)$$

(10.12) sistemani matritsa ko'rinishida quyidagicha qaytadan yozish mumkin:

$$P = A'P + v \qquad (10.13)$$

bu yerda

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_n \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{n1} \\ a_{12}\, a_{22} \ldots a_{n2} \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ a_{1n}\, a_{2n} \ldots a_{nn} \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{bmatrix}.$$

A' matritsa A matritsaning transponirlangani, ya'ni ustun va qatorlar o'rinlari almashgan matritsadan iboratdir. (10.13)ni P ga nisbatan yechish orqali quyidagini hosil qilamiz:

$$P=(I-A')^{-1}\nu=\left[(I-A)^{-1}\right]'\nu=B'\nu. \qquad (10.14)$$

(10.12) va (10.13) tenglamalar ***muvozanat narxi modeli*** deb aytiladi. Ishlab chiqarish hajmi modeli va narx bo'yicha modelning bir-biriga mos kelishini hisobga olganda ularni ikkilangan model deb atashadi. (10.12), (10.13) va (10.14) lar asosida, har bir tarmoq iste'mol qiladigan resurslar tuzilmasi orqali ustama narx miqdorini o'zgartirganda narx tuzilmasi qanday o'zgarishini aniqlash mumkin.

X bobga doir topshiriqlar.

1-topshiriq.. Tarmoqlararo balans modeliga doir topshiriqlar.

O_1, O_2, O_3 – yengil sanoat, qishloq xo'jaligi va mashinasozlik tarmoqlarning oxirgi mahsulotlari: $y_1=200$; $y_2=40$; $y_3=30$ lar va tog'ridan-to'g'ri sarf-xarajatlar matritsasi berilgan $A=\begin{bmatrix}0{,}3 & 0{,}1 & 0\\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}1\\ 0{,}1 & 0 & 0{,}2\end{bmatrix}$.

Tarmoqlarning yalpi mahsulotlari x_1, x_2, x_3 ni topish kerak.

Tarmoqlararo bog'lanishning Leontev modelidan foydalanilganda:

1) X = YB

2) $B=(E-A)^{-1}$

E – birlik matritsa;

A – to'g'ridan to'g'ri sarf-xarajatlar matritsasi;

X – aniqlanishi kerak bo'lgan yalpi mahsulot vektori;

Y – ohirgi mahsulot vektori.

2-topshiriq. 1) To'liq sarf-xarajatlar matritsasini hisoblang.

$$X = YB \quad B=(E-A)^{-1}$$

Dastlabki ma'lumotlar:

$$\begin{pmatrix}0.02 & 0.03 & 0.09\\ & & \\ & & \end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix}235\\ \\ \end{bmatrix}$$

A = 0.01 0.05 0.06 Y = 194

0.01 0.02 0.04 167

E – birlik matritsa;

A – to'g'ridan to'g'ri sarf-xarajatlar matritsasi;

X – aniqlanishi kerak bo'lgan yalpi mahsulot vektori;

Y – oxirgi mahsulot vektori.

1-topshiriqni yechishga doir uslubiy ko'rsatma

Bu masalada y_1, y_2, y_3 lar berilgan x_1, x_2, x_3 ni topish kerak.

1-qadam. (E-A) ni hisoblaymiz.

$$E - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,3 & 0,1 & 0 \\ 0,2 & 0,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0 & 0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7 & -0,1 & 0 \\ -0,2 & 0,6 & -0,1 \\ -0,1 & 0 & 0,8 \end{bmatrix}$$

2-qadam. $\left[E - A\right]^{-1} = B$ ni topamiz, bu yerda

$$b_{ij} = \frac{A_{ij}}{\Delta} \qquad i, j = 1, \overline{3}$$

bo'lib, A'_{ij} - $(E - A)$ matritsaning algebraik to'ldiruvchisidan iborat.

$A'_{11} = 0,48$ $\qquad A'_{21} = 0,08$ $\qquad A'_{31} = 0,01$

$A'_{12} = 0,17$ $\qquad A'_{22} = 0,56$ $\qquad A'_{32} = 0,07$

$A'_{13} = 0,06$ $\qquad A'_{23} = 0,91$ $\qquad A'_{33} = 0,4$

3-qadam. B matritsani to'ldiramiz:

$$B = \begin{bmatrix} 0,48 & 0,08 & 0,01 \\ 0,17 & 0,56 & 0,07 \\ 0,06 & 0,91 & 0,4 \end{bmatrix},$$

$$X = B \cdot Y = \begin{bmatrix} 0,48 & 0,08 & 0,01 \\ 0,17 & 0,56 & 0,07 \\ 0,06 & 0,91 & 0,4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 200 \\ 40 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9603 \\ 58,5 \\ 60,4 \end{bmatrix}$$

Shunday qilib, oxirgi mahsulotning miqdori O_1, O_2, O_3 lar uchun: $x_1 = 9603;\ \ x_2 = 58.5;\ \ x_3 = 60.4$ lardan iborat bo'ladi.

Tayanch so'z va iboralar
Tarmoqlar, bog'lanish, tarmoqlararo bog'lanish tahlili, ishlab chiqarish tarmoqlari soni, ishlab chiqarish tarmoqlari turi, tarmoqlararo bog'lanish jadvali, umumiy mahsulot, oxirgi mahsulot, yalpi mahsulot, tarmoq mahsulot hajmi, ishlab chiqarish xarajatlari, to'liq xarajatlar matritsasi, muvozanat narxi modeli, muvozanat narxi.

X bobga doir savollar

1. Tarmoqlararo tahlilning asosiy masalalarini ayting.
2. Tarmoqlararo balans jadvalini chizing va bo'limlarini tushuntiring.
3. Tarmoqlararo balans jadvalining 1 va 2 bo'limlarining bir-biridan farqini tushuntiring.
4. V. Leontyevning tarmoqlararo balans modelini keltirib chiqarish yo'llarini tushuntiring.
5. V. Leontyevning tarmoqlararo balans modelida nima aniqlanadi.
6. To'g'ridan to'g'ri xarajatlarning matematik ifodasini tasniflang va ma'nosini tushuntiring.
7. To'liq sarf - xarajatlarning matematik ifodasini tasniflang va ma'nosini tushuntiring.
8. Narx bo'yicha tarmoqlararo balans modeli qanday ko'rinishda bo'ladi?
9. Muvozanat narxi modeli nima?

IZOHLAR

Adaptatsiya (adaptation) – tizimning haqiqiy sharoitga moslashuvi.

Additivlik(additivity) - obyektni bir necha bo'laklarga bo'lganda uning bo'laklarining yig'indisi miqdori qiymati unga mos kelgan butun obyekt miqdorlari qiymatiga teng bo'ladi.

Adekvatlik(adequacy) – model adekvatligi deganda modelning modellashtirilayotgan obyektga, jarayonga mos kelishi tushuniladi.

Agregirlangan (aggregation)– biron-bir belgi bo'yicha ko'rsatkichlarni umumlashtirish, kattalashtirishdan iborat bo'lib, matematika nuqtai nazaridan modelni o'zgaruvchilari va cheklanishlari soni kam bo'lgan modelga o'zgartirishdan iborat.

Algebraik to'ldiruvchi (co-factor) – **A** kvadratik matritsaning a_{ij} elementiga tegishli bo'lib, u a_{ij} ning elementlari minorini $(-1)^{i+j}$ga ko'paytirishdan hosil bo'ladi.

Alternativa(alternative)- masalaalar echimining mumkin bo'lgan variant.

Amortizatsiya(depreciation)-ishlab chiqarilgan mahsulotga eskirish bo'yicha mehnat vositalari qiymatining o'tkazilish jarayoni bo'lib, bu qiymatning mehnat vositalarini navbatdagi qayta ishlab chiqarilishiga aytiladi.

Analiz (analysis) – iqtisodiy tizimlar analizi har xil vositalar orqali amalga oshiriladi, shu jumladan iqtisodiy-matematik analiz.

Analog(analogue)- o'xshash predmet. *Modelni* modellashtirilayotgan tizimning analogi sifatida qarash mumkin.

Approksimatsiya (approximation)- biror bir matematik obyektni u yoki bu ma'noda dastlabkiga yaqin boshqasi bilan almashtirish, xususiy holda murakkab funksiyani juda oddiy funksiya orqali taqribiy ifodasi.

Asosiy ustun va asosiy qator(pivot column, pivot row)- chiziqli programmalashtirish masalasini simpleks usul bilan yechishda mumkin bo'lgan bazis echimni tanlashdagi algoritm elementlari.

Avtokorrelyatsiya (autocorrelation) - bitta tasodifiy jarayon X(t) ning t_1, t_2 vaqtlardagi korrelyatsiya bog'lanishidan iborat. Bu bog'lanishni xarakterlovchi funksiyaga avtokorrelyatsiyali funksiya deb ataladi.

baholashni o'tkazish belgisi, obyekt va voqealarni tasniflash.

baholashni amalga oshirishga asoslangan belgi orqali obyekt va voqealarni tasniflash.

Bazis yechim(basik *solution)-tenglamalar soniga teng bo'lgan, manfiy* bo'lmagan echim.

Befarqlik chizig'i(indifference curves)- ishlab chiqaruvchi va iste'molchi nuqtai nazaridan befarqlik holatini ifodalovchi nuqtalarning geometric o'rni.

Bir-birining o'rnini bosuvchi resurslar(input substitution)-turli resurslarning ishlatilish imkoniyati: a) ishlab chiqarishni berilgan darajaga etkazish uchun, b) optimumga erishish uchun.

Bir-birining o'rnini to'ldiruvchi resurslar(input complementarity)- ayrim resurslarning to'plamda ma'lum bir proporsiyada ishlatilish qobiliyati.

Blok(block)-alohida qaralayotgan tizimning bir bo'lagi. Iqtisodiyodni murakkab tizim sifatida bir-biri bilan bog'liq(sanoat, qishloq xo'jaligi, iste'mol sohasi va boshq.) bloklar sifatida modellashtirish mumkin.

Chiziq darajasi(contour line)-izlanayotgan funksiya qiymati uchun nuqtalar fazosi geometric o'rni bir xildir.

Chiziqli programmalashtirish(linear programming)- matematik programmalashtirish sohasi bo'lib, ozgaruvchilar orasida chiziqli bog'lanish mavjud bo'lgan ectremal masalalarni yechishning nazariyasi va usuliga bag'ishlangan.

Chiziqli algebra(linear algebra)-algebraning bo'limi hisoblanib, u o'z ichiga chiziqli tenglamalar, matritsalar, vector fazolarni o'z ichiga oladi.

Chiziqli funksiya(linear function)-$ax + b = y$ ko'rinishidagi funksiyadan iborat.

Ehtimolli model(probabilistic model)- model tarkibida tasodifiy elementlar qatnashadi.

Girdobsimon model(cobweb model)- dinamik modellarning oddiy turi bo'lib, raqobat bardosh bozorda narxning shakllanish jarayonini ko'rsatadi.

Ishlab chiqarishning elastiklik koeffitsienti(partial elasticity of production factors)- ishlab chiqarish funksiyalari ko'rsatkichidan iborat bo'lib, i-turdagi resursni sarf qilishni nisbatan bir birlikka o'zgarishi natijasida ishlab chaqarish natijasining nisbatan o'zgarishi tushuniladi.

Izokost(icocost)- *ishlab chiqarish* nazariyasida nuqtalarning geometric o'rni bo'lib, ular uchun ishlab chiqarish xarajatlari o'zgarmasdir.

Izokvanta(isoquant)- ishlab chiqarish nazariyasida nuqtalarning geometric o'rni bo'lib, omillarning turli xildagi uyg'unligi (birga qoshilishi) ishlab chiqariladigan mahsulotning bir xildagi miqdorini bildiradi.

Kibernetika (cubernetics)- boshqaruvning umumiy tamoyillari haqidagi fan bo'lib, maqsadga yo'naltirilgan harakatlarni axborotni qayta ishlash orqali tashkillashtirishdan iborat.

Korrelyatsiya tahlili(correlation analysis)-o'zgaruvchan miqdorlar orasidagi bo'g'lanishni o'rganadi.

Korrelyatsiya(correlation)- ikkita X va Y tasodifiy miqdorlar orasidagi o'zaro bog'lanishni xarakterlovchi miqdor.

Kriteriya(criterion)- alternativlarni taqqoslash(turli echimlarning *samaradorligi*),

Lag(lag, time-lag)- bitta iqtisodiy hodisaning uning boqealari bilan bog'liq bo'lgan boshqasi bilan solishtirganda vaqt bo'yicha orqada qolishi yoki otib ketishni ko'rsatuvchi iqtisodiy ko'rsatkich.

Logistik funksiya(logistic function)- biror-bir chegaraga intilishda avval sekinlik bilan o'sib keyin tezlik bilan, keyinchalik ozinig o'sishini sekinlashtiradigan funksiyaning egri chizig'i.

Logistik funksiya(logistic function)- biror-bir chegaraga intilishda avval sekinlik bilan o'sib keyin tezlik bilan, keyinchalik ozinig o'sishini sekinlashtiradigan funksiyaning egri chizig'i.

Makroiqtisodiy model(macroeconomic model)- xalq-xo'jaligining ishlab turishini bir butun deb aks ettiruvchi iqtisodiy-matematik model.

Matematik programmalashtirish(mathematical programming)- masalalarni *funksiyaning ekstremumi* uchun yechishning nazariya va usullarini tenglama va tengsizliklar ko'rinishidagi cheklanishlar orqali o'rganadi.

Matematik kutish(expected value)- X diskret tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlarini uning ehtimolligi ko'paytmasiga teng $\sum x \cdot P(x)$ uzluksiz tasodifiy miqdor uchun $\int x \cdot P(x)dx$ ga teng.

Matematik statistika(mathematical statistics)- statistic ma'lumotlarni qayta ishlash va tahlil qilish qoidalari va usullariga bag'ishlangan matematikaning bo'limi.

Mikroiqtisodiy model(microeconomic model)-xo'jalik tizimi bo'g'inlarini,uning asosiy qismlarining uzaro ta'sirining ishlashi va tuzilmasini aks ettiruvchi iqtisodiy-matematik model.

Milliy daromad(national income)-bu eng muhim makroiqtisodiy ko'rsatkichdan iborat bolib, xalq-xo'jaligining yutuqlarini bildiradi. Uning o'sishi ikki omildan: *mehnat unumdorligining o'sishi* va *moddiy ishlab chiqarishda band bo'lgan kishilar soni*.

Model parametrlarini baholash(parameter estimation)-modelning mavjud parametrlarining sonli qiymatlarini aniqlash.

Muvozanat(equilibrium)- turli yo'nalishlar bo'yicha o'zaro ta'sir etuvchi kuchlarni xarakterlovchi turli holatlarga tegishli bo'lib, o'zaro ta'sir shunday bekor qilinadiki, kuzatilayotgan tizim xususiyati o'zgarmaydi.

O'rnini bosishning eng katta normasi(marjinal rate of substitution-MRS)- ishlab chiqarish omillarining o'zaro bir-birining o'rnini bosa olish ta'sirida bo'lish nisbiy samaradorligini xarakterlovchi ishlab chiqarish ko'rsatkichi.

Ochiq model(open model)- transport masalasi tushunchalaridan bo'lib, ishlab chiqarish va iste'mol korxonalari soni bir-biriga teng emas.

Optimallik kriteriyasi(optimality criterion)- iqtisodiyot amal qilishining optimallik nazariyasi hisoblanib, u yoki bu iqtisodiy tizim uchun qo'llanilganda, uning sifatlarining mumkin bo'lgan shunday belgisiki u tizimning amal qilish variantlari ichida eng yaxshisi deb tan olinadi.

Prognozlash(forecasting,prognostique)-sifat va miqdor jihatdan xarakterlanuvchi ilmiy tekshirish tizimi bo'lib, xalq xo'jaligi yoki uning qismlarining rivojlanish tendensiyalarini aniqlash va bu rivojlanish maqsadiga erishishning optimal yo'llarini qidirishga yo'naltirilgan.

Regressiya modeli(regression model)- ekzogen(kiruvchi) va endogen(chiquvchi) o'zgaruvchilarni birlashtiruvchi regressiya tenglamasiga asoslangan.

Simpleks jadval(simplex table)- chiziqli programmalashtirish masalasini mumkin bo'lgan basis echimlarini tanlash vositasi bo'lgan matritsadan iborat.

Statistik modellashtirish(statistical modeling)- ehtimolli tizimlarning ichki o'zaro ta'siri noma'lum bo'lganda bu tizim xulq-atvori jarayonlarini tekshirish usulidir.

Taklif egri chizig'i(supply curve)-taklif qilingan tovar va uning narxi orasidagi munosabatning grafik tasviri(Tovar qancha ko'p bo'lsa narx shuncha past bo'ladi va narx qancha yuqori bo'lsa taklif ham ko'payadi).

Talab egri chizig'i(demand curve)- talab qilingan tovar va uning narxi orasidagi munosabatning grafik tasviri(narx qancha yuqori bo'lsa talab shuncha kamayadi).

Tanlama(sample)

Tanlama(sample)-kuzatishlarni o'z ichiga olgan bosh tanlamaning bir qismi.

Tanlash(choice,option)- iste'mol nazariyasida iste'molchining bir tovarlar to'plamini boshqa tovarlar to'plamiga nisbatan afzal ko'rish harakatiga aytiladi.

Tanlash(choice,option)- iste'mol nazariyasida iste'molchining bir tovarlar to'plamini boshqa tovarlar to'plamiga nisbatan afzal ko'rish harakatiga aytiladi.

Tasodifiy miqdor(random value)- hodisandan bog'liq u yoki bu qiymatni ma'lum ehtimollik bilan qabul qiluvchi miqdor.

Tayanch yechim(basic solution)-bazis echim.

To'g'ridan-to'g'ri sarf xarajatlar koeffitsienti(input-output coefficients)- }- tarmoqlararo balansda boshqa tarmoq birlik mahsulotini ishlab chiqarish uchun bir tarmoqning mahsuloti bevosita sarf xarajatlarining o'rtacha miqdori.

To'g'ridan-to'g'ri sarf xarajatlar koeffitsienti(input-output coefficients)- j-tarmoqlararo balansda boshqa tarmoq birlik mahsulotini ishlab chiqarish uchun bir tarmoqning mahsuloti bevosita sarf xarajatlarining o'rtacha miqdori.

To'liq sarf xarajatlar koeffitsienti(total input coefficients)- tarmoqlararo balansda j-tarmoq oxirgi mahsulotini birlik ishlab chiqarishga ozaro bog'langan ishlab chiqarishi i-mahsulotining o'rtacha xarajatlari.

Transport masalasi(transportation problem)- matematik programmalashtirish masalasi bolib, yuklarni ishlab chiqarish korxonalaridan iste'mol korxonalariga tashishning shunday rejasini tuzish kerakki, umumiy transport xarajati minimal bo'lsin.

Trend(trend)- iqtisodiy ko'rsatkichlarning uzoq vaqt oralig'ida o'zgarish tendensiyasidan iborat.

Vaqtinchalik, vaqtli qator(time-series)-ko'rsatkichlarning vaqt bo'yich o'zgarishini xarakterlovchi qiymatlarning ketma-ket qatori.

Yalpi mahsulot(total output, gross product) -xalq xo'jaligining mahsulot hajmini puldagi ifodasini bildiradi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Karimov I. A. Jahon moliyaviy-iqtisodiy inqirozi, O'zbekiston sharoitida uni bartaraf qilish yollari va choralari. T.2009
2. Karimov I. A. Yuksak ma'naviyat yengilmas kuch, T. 2009
3. Каримов И.А. Қишлоқ хўжалиги тарақиети – тўлиқ хает манбаи.Т.: Ўзбекистон, 1998.
4. Каримов И.А. Қишлоқ хўжалигида иқтисодий ислоҳотларни чукурлаштириш дастури 1998-2000йиллар.Т.: Ўзбекистон,1998йил.
5. Jumayev X.N., Otaniyozov B.va boshq. «Matematik programmalashtirish» T.: 2005.
6. Gulomov S., Maxmudov N., Ismoilov A.. «Bozor iqtisodiyoti modellari.
7. Гуломов С.С. Моделирование развития региональных агропромышленых комплексов. - Т.: Фан,1985.
8. Ходиев Б.Ю. Ўзбекистон иқтисодида тадбиркорлик ривожини эконометрик моделлаштириш. Т.:ТДИУ.2000.
9. Shodiyev T.Sh. va boshq. «Ishlab chiqarishni rejalashtirishda matematik usullar» T. 1995 TDIU 1995 y.
10. Shodiyev T.Sh. va boshq. «Ekonometrika» TDIU . T.: 2005.
11. Shodmonov M., Alimov R., Jo`rayev T. "Iqtisodiyot nazariyasi", Toshkent-2002.
12. Safayeva Q. «Matematik dasturlash», T., 2004.
13. Замков О.О. и др. Математические методы в экономике. М., изд-во ДИС, 1998.
14. Беркинов Б.Б. «Моделирование систем ведения сельского хозяйства» , Т. 1990г.
15. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М., Высшая школа, 1991.
16. Джамилев Н.И., Эйдельнант М.И. Сборник задач по математическому программированию. Т., Укитувчи, 1987.

17.Масагутова Р.В. Математика в задачах для экономистов. Т., Укитувчи, 1996.

18.Куба-Нива М. Математическая экономика на ПК. М., Финансы и статистика, 1991.

19.Гранберг А.Г.Статистическое моделирование и вроглозирование.- М.:Финансы и статистика,1990.

20.Михеева В.С. Математические методы в размешении сельскохозяйственного производства. М.: Экономика.1996.

21. Рамазанов А.Р. и др. Современное состояние орошаемого земледелия в Узбекистане. Аграрная наука. №10.2002.

22. Эконометрика: учебник / И.И.Елисеева, С.В.Курышева, Т.В.Костеева и др.; под ред.И.И.Елисеевой.- 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2007. -576с.

23. Под редакций С. Волкова «Экономика-математические методы и модели в землеустройстве», М:1991.

24. Волков С. «Экономика-математические методы и модели в землеустройстве», М: 2000.

25.Новиков Г.И. и др.«Сборник задач по вычислительной технике и программированию» , М. «Финансы и статистика», 1991

26.Новиков А.И. «Эконометрика», М. «Инфра-М»,2010

27. Под редакцией проф. Кремера Н.Ш. «Исследовани операций в экономике» М. «Юрайт», 2010

28. Холиков Б. Янги алмашлаб экиш тизимлари ва тупрок унумдорлиги. Т:2010.

29.Четыркин Е.М. «Статистические методы прогнозирования» - М. «Статистика», 1977 г.

30.Shodmonova G. «Iqtisodiy-matematik usullar va modellar» fanidan o'quv qo'llanma,Toshkent, 2007.

31.Shodmonova G., Abdullayev Z.S. «Yer tuzishda iqtisodiy-matematik usullar va modellar» fanidan o'quv qo'llanma,Toshkent, 2007.

32.Хазанова Л.Е. Математические методы в экономике www.веск-восток.de

33.Математические методы и исследование операций в экономике www.информатика.ru

34.Экономика и математические методы. www.bigmax.ru

35. Экономика и математические методы. 1989, Т. XXY вып.3. cyber.econ.pu.ru

36. Эконимика и математические методы-1996.- т. поискреферфтов.ru

37. Математические методы анализа экономики. http://www.shop4.ru

38.Полтерович, В.М.: Экономика и математические методы. 1999. management.edu.ru

Ilovalar

1-ilova

Durbin -Uatsonning d-statistikasi dl va du 1% muhimlik darajasi

n	k=1		k=2		k=3		k=4		k=5	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
15	0,81	1,07	0,7	1,25	0,59	1,46	0,49	1,7	0,39	1,96
16	0,84	1,09	0,74	1,25	0,63	1,44	0,53	1,66	0,44	1,9
17	0,87	1,1	0,77	1,25	0,67	1,43	0,57	1,63	0,48	1,85
18	0,9	1,12	0,8	1,26	0,71	1,42	0,61	1,6	0,52	1,8
19	0,93	1,13	0,83	1,26	0,74	1,41	0,65	1,58	0,56	1,77
20	0,95	1,15	0,86	1,27	0,77	1,41	0,68	1,57	0,6	1,74
21	0,97	1,16	0,89	1,27	0,8	1,41	0,72	1,55	0,63	1,71
22	1	1,17	0,91	1,28	0,83	1,4	0,75	1,54	0,66	1,69
23	1,02	1,19	0,94	1,29	0,86	1,4	0,77	1,53	0,7	1,67
24	1,04	1,2	0,96	1,3	0,88	1,41	0,8	1,53	0,72	1,66
25	1,05	1,21	0,98	1,3	0,9	1,41	0,83	1,52	0,75	1,65
26	1,07	1,22	1	1,31	0,93	1,41	0,85	1,52	0,78	1,64
27	1,09	1,23	1,02	1,32	0,95	1,41	0,88	1,51	0,81	1,63
28	1,1	1,24	1,04	1,32	0,97	1,41	0,9	1,51	0,83	1,62
29	1,12	1,25	1,05	1,33	0,99	1,42	0,92	1,51	0,85	1,61
30	1,13	1,26	1,07	1,34	1,01	1,42	0,94	1,51	0,88	1,61
31	1,15	1,27	1,08	1,34	1,02	1,42	0,96	1,51	0,9	1,6
32	1,16	1,28	1,1	1,35	1,04	1,43	0,98	1,51	0,92	1,6
33	1,17	1,29	1,11	1,36	1,05	1,43	1	1,51	0,94	1,59
34	1,18	1,3	1,13	1,36	1,07	1,43	1,01	1,51	0,95	1,59
35	1,19	1,31	1,14	1,37	1,08	1,44	1,03	1,51	0,97	1,59
36	1,21	1,32	1,15	1,38	1,1	1,44	1,04	1,51	0,99	1,59
37	1,22	1,32	1,16	1,38	1,11	1,45	1,06	1,51	1	1,59
38	1,23	1,33	1,18	1,39	1,12	1,45	1,07	1,52	1,02	1,58
39	1,24	1,34	1,19	1,39	1,14	1,45	1,09	1,52	1,03	1,58
40	1,25	1,34	1,2	1,4	1,15	1,46	1,1	1,52	1,05	1,58
45	1,29	1,38	1,24	1,42	1,2	1,48	1,16	1,53	1,11	1,58
50	1,32	1,4	1,28	1,45	1,24	1,49	1,2	1,54	1,16	1,59
55	1,36	1,43	1,32	1,47	1,28	1,51	1,25	1,55	1,21	1,59
60	1,38	1,45	1,35	1,48	1,32	1,52	1,28	1,56	1,25	1,6
65	1,41	1,47	1,38	1,5	1,35	1,53	1,31	1,57	1,28	1,61
70	1,43	1,49	1,4	1,52	1,37	1,55	1,34	1,58	1,31	1,61
75	1,45	1,5	1,42	1,53	1,39	1,56	1,37	1,59	1,34	1,62
80	1,47	1,52	1,44	1,54	1,42	1,57	1,39	1,6	1,36	1,62
85	1,48	1,53	1,46	1,55	1,43	1,58	1,41	1,6	1,39	1,63
90	1,5	1,54	1,47	1,56	1,45	1,59	1,43	1,61	1,41	1,64
95	1,51	1,55	1,49	1,57	1,47	1,6	1,45	1,62	1,42	1,64
100	1,52	1,56	1,5	1,58	1,48	1,6	1,46	1,63	1,44	1,65

2-ilova

Durbin -Uatsonning d-statistikasi dl va du 5% muhimlik darajasi

n	k=1		k=2		k=3		k=4		k=5	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
15	1,08	1,36	0,95	1,54	0,82	1,75	0,69	1,97	0,56	221
16	1,1	1,37	0,98	1,54	0,86	1,73	0,74	1,93	0,62	215
17	1,13	1,38	1,02	1,54	0,9	1,71	0,78	1,9	0,67	2,1
18	1,16	1,39	1,05	1,53	0,93	1,69	0,82	1,87	0,71	206
19	1,18	1,4	1,08	1,53	0,97	1,68	0,86	1,85	0,75	202
20	1,2	1,41	1,1	1,54	1	1,68	0,9	1,83	0,79	1,99
21	1,22	1,42	1,13	1,54	1,03	1,67	0,93	1,81	0,83	1,96
22	1,24	1,43	1,15	1,54	1,05	1,66	0,96	1,8	0,86	1,94
23	1,26	1,44	1,17	1,54	1,08	1,66	0,99	1,79	0,9	1,92
24	1,27	1,45	1,19	1,55	1,1	1,66	1,01	1,78	0,93	1,9
25	1,29	1,45	1,21	1,55	1,12	1,66	1,04	1,77	0,95	1,89
26	1,3	1,46	1,22	1,55	1,14	1,65	1,06	1,76	0,98	1,88
27	1,32	1,47	1,24	1,56	1,16	1,65	1,08	1,76	1,01	1,86
28	1,33	1,48	1,26	1,56	1,18	1,65	1,1	1,75	1,03	1,85
29	1,34	1,48	1,27	1,56	1,2	1,65	1,12	1,74	1,05	1,84
30	1,35	1,49	1,28	1,57	1,21	1,65	1,14	1,74	1,07	1,83
31	1,36	1,5	1,3	1,57	1,23	1,65	1,16	1,74	1,09	1,83
32	1,37	1,5	1,31	1,57	1,24	1,65	1,18	1,73	1,11	1,82
33	1,38	1,51	1,32	1,58	1,26	1,65	1,19	1,73	1,13	1,81
34	1,39	1,51	1,33	1,58	1,27	1,65	1,21	1,73	1,15	1,81
35	1,4	1,52	1,34	1,58	1,28	1,65	1,22	1,73	1,16	1,8
36	1,41	1,52	1,35	1,59	1,29	1,65	1,24	1,73	1,18	1,8
37	1,42	1,53	1,36	1,59	1,31	1,66	1,25	1,72	1,19	1,8
38	1,43	1,54	1,37	1,59	1,32	1,66	1,26	1,72	1,21	1,79
39	1,43	1,54	1,38	1,6	1,33	1,66	1,27	1,72	1,22	1,79
40	1,44	1,54	1,39	1,6	1,34	1,66	1,29	1,72	1,23	1,79
45	1,48	1,57	1,43	1,62	1,38	1,67	1,34	1,72	1,29	1,78
50	1,5	1,59	1,46	1,63	1,42	1,67	1,38	1,72	1,34	1,77
55	1,53	1,6	1,49	1,64	1,45	1,68	1,41	1,72	1,38	1,77
60	1,55	1,62	1,51	1,65	1,48	1,69	1,44	1,73	1,41	1,77
65	1,57	1,63	1,54	1,66	1,5	1,7	1,47	1,73	1,44	1,77
70	1,58	1,64	1,55	1,67	1,52	1,7	1,49	1,74	1,46	1,77
75	1,6	1,65	1,57	1,68	1,54	1,71	1,51	1,74	1,49	1,77
80	1,61	1,66	1,59	1,69	1,56	1,72	1,53	1,74	1,51	1,77
85	1,62	1,67	1,6	1,7	1,57	1,72	1,55	1,75	1,52	1,77
90	1,63	1,68	1,61	1,7	1,59	1,73	1,57	1,75	1,54	1,78
95	1,64	1,69	1,62	1,71	1,6	1,73	1,58	1,75	1,56	1,78
100	1,65	1,69	1,63	1,72	1,61	1,74	1,59	1,76	1,57	1,78

χ^2 taqsimot: χ^2 ning 5,1 va 0,1% muhimlik darajasidagi kritik qiymatlari

Erkinlik darajasi soni	5%	1%	0,10%
1	3,8415	6,6349	10,828
2	5,9915	9,2103	13,816
3	7,8147	11,3449	16,266
4	9,4877	13,2767	18,467
5	11,0705	15,0863	20,515
6	12,5916	16,8119	22,458
7	14,0671	18,4753	24,322
8	15,5073	20,0902	26,125
9	16,919	21,666	27,877
10	18,307	23,2093	29,588
11	19,6751	24,725	31,264
12	21,0261	26,217	32,909
13	22,362	27,6882	34,528
14	23,6848	29,1412	36,123
15	24,9958	30,5779	37,697
16	26,2962	31,9999	39,252
17	27,5871	33,4087	40,79
18	28,8693	34,8053	42,312
19	30,1435	36,1909	43,82
20	31,4104	37,5662	45,315
21	32,6706	38,9322	46,797
22	33,9244	40,2894	48,268
23	35,1725	41,6384	49,728
24	36,415	42,9798	51,179
25	37,6525	44,3141	52,618
26	38,8851	45,6417	54,052
27	40,1133	46,9629	55,476
28	41,3371	48,2782	56,892
29	42,557	49,5879	58,301
30	43,773	50,8922	59,703
40	55,7585	63,6907	73,402
50	67,5048	76,1539	86,661
60	79,0819	88,3794	99,607
70	90,5312	100,425	112,317
80	101,879	112,329	124,839
90	113,146	124,116	137,208
100	124,342	135,807	149,449

4-ilova

ν/ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
F taqsimot 1% muhimlik darajasidagi ν1 va ν2 erkinlik darajasidagi F kritik qiymatlari																			
1	4052	5000	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	98,5	99	99,2	99,25	99,3	99,33	99,36	99,37	99,39	99,4	99,42	99,43	99,45	99,46	99,47	99,47	99,48	99,49	99,5
3	34,1	30,8	29,5	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,35	27,2	27,05	26,87	26,69	26,6	26,5	26,41	26,32	26,22	26,13
4	21,2	18	16,7	15,98	15,52	15,21	14,98	14,8	14,66	14,5	14,37	14,2	14,02	13,93	13,84	13,75	13,65	13,56	13,46
5	16,3	13,3	12,1	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,1	9,89	9,72	9,55	9,47	9,38	9,29	9,2	9,11	9,02
6	13,8	10,9	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,1	7,98	7,87	7,72	7,56	7,4	7,31	7,23	7,14	7,06	6,97	6,88
7	12,3	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,47	6,31	6,16	6,07	5,99	5,91	5,82	5,74	5,65
8	11,3	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,67	5,52	5,36	5,28	5,2	5,12	5,03	4,95	4,86
9	10,6	8,02	6,99	6,42	6,06	5,8	5,61	5,47	5,35	5,26	5,11	4,96	4,81	4,73	4,65	4,57	4,48	4,4	4,31
10	10	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,2	5,06	4,94	4,85	4,71	4,56	4,41	4,33	4,25	4,17	4,08	4	3,91
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,4	4,25	4,1	4,02	3,94	3,86	3,78	3,69	3,6
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,5	4,39	4,3	4,16	4,01	3,86	3,78	3,7	3,62	3,54	3,45	3,36
13	9,07	6,7	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,3	4,19	4,1	3,96	3,82	3,66	3,59	3,51	3,43	3,34	3,25	3,17
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,7	3,66	3,51	3,43	3,35	3,27	3,18	3,06	3
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4	3,89	3,8	3,67	3,52	3,37	3,29	3,21	3,13	3,05	2,96	2,87
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,2	4,03	3,89	3,78	3,69	3,55	3,41	3,29	3,18	3,1	3,02	2,93	2,84	2,75
17	8,4	6,11	5,18	4,67	4,34	4,1	3,93	3,79	3,68	3,59	3,46	3,31	3,16	3,08	3	2,92	2,83	2,75	2,65
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,6	3,51	3,37	3,23	3,08	3	2,92	2,84	2,75	2,66	2,57
19	8,18	5,93	5,01	4,5	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,3	3,15	3	2,92	2,84	2,76	2,67	2,58	2,49
20	8,1	5,85	4,94	4,43	4,1	3,87	3,7	3,56	3,46	3,37	3,23	3,09	2,94	2,86	2,78	2,69	2,61	2,52	2,42
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,4	3,31	3,17	3,03	2,88	2,8	2,72	2,64	2,55	2,46	2,36
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,12	2,98	2,83	2,75	2,67	2,58	2,5	2,4	2,31
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,3	3,21	3,07	2,93	2,78	2,7	2,62	2,54	2,45	2,35	2,26
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,9	3,67	3,5	3,36	3,26	3,17	3,03	2,89	2,74	2,66	2,58	2,49	2,4	2,31	2,21
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13	2,99	2,85	2,7	2,62	2,54	2,45	2,36	2,27	2,17
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09	2,96	2,81	2,66	2,58	2,5	2,42	2,33	2,23	2,13
27	7,68	5,49	4,5	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15	3,06	2,93	2,78	2,63	2,55	2,47	2,38	2,29	2,2	2,1
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03	2,9	2,75	2,6	2,52	2,44	2,35	2,26	2,17	2,06
29	7,6	5,42	4,54	4,04	3,73	3,5	3,33	3,2	3,09	3	2,87	2,73	2,57	2,49	2,41	2,33	2,23	2,14	2,03
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,7	3,47	3,3	3,17	3,07	2,98	2,84	2,7	2,55	2,47	2,39	2,3	2,21	2,11	2,01
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,8	2,66	2,52	2,37	2,29	2,2	2,11	2,02	1,92	1,8
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,5	2,35	2,2	2,12	2,03	1,94	1,84	1,73	1,6
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47	2,34	2,19	2,03	1,95	1,86	1,76	1,66	1,53	1,38

5-ilova

F тақсимоти: 5% муҳимлик даражасидаги ν1 ва ν2 эркинлик даражаси билан F критик қийматлар

df	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	240,5	242	244	246	248	249	250	251	252	253,3	254,3
2	18,5	19	19,2	19,3	19,3	19,3	19,4	19,4	19,38	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	15,49	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,7	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6	5,96	5,91	5,86	5,8	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,5	4,46	4,43	4,4	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,1	4,06	4	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,7	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,3	3,27	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,5	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,9	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
10	4,96	4,1	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,7	2,66	2,62	2,58	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,2	3,09	3,01	2,95	2,9	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,4
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3	2,91	2,85	2,8	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,3
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,6	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,3	2,25	2,21
14	4,6	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,7	2,65	2,6	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,9	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,4	2,33	2,29	2,25	2,2	2,16	2,11	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
17	4,45	3,59	3,2	2,96	2,81	2,7	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,1	2,06	2,01	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,9	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
20	4,35	3,49	3,1	2,87	2,71	2,6	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,2	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,9	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,18	2,1	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87	1,81
22	4,3	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,4	2,34	2,3	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,8	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,2	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76
24	4,26	3,4	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,3	2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79	1,73
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,6	2,49	2,4	2,34	2,28	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,71
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	2,07	1,99	1,95	1,9	1,85	1,8	1,75	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,2	2,13	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73	1,67
28	4,2	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,7	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,1	2,03	1,94	1,9	1,85	1,81	1,75	1,7	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51
60	4	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,1	2,04	1,99	1,92	1,84	1,75	1,7	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,5	1,43	1,35	1,25

6-ilova

t таксимот: t критик қийматлар

Erkinlik darajasi soni	тестlar	Ahamiyatlilik darajasi					
	Ikki tomonlama	10%	5%	2%	1%	0.2%	0,1%
	Bir tomonlama	5%	2,5%	1%	0,5%	0,1%	0,05%
1		6,314	12,706	31,821	63,657	318,31	636,62
2		2,92	4,303	6,965	9,925	22,327	31,598
3		2,353	3,182	4,541	5,841	10,214	12,924
4		2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,61
5		2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,869
6		1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7		1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408
8		1,86	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9		1,833	2,262	2,821	3,25	4,297	4,781
10		1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11		1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12		1,782	2,179	2,681	3,055	3,93	4,318
13		1,771	2,16	2,65	3,012	3,852	4,221
14		1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,14
15		1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16		1,746	2,12	2,583	2,921	3,686	4,015
17		1,74	2,11	2,567	2,898	3,646	3,965
18		1,734	2,101	2,552	2,878	3,61	3,922
19		1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20		1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,85
21		1,721	2,08	2,518	2,831	3,527	3,819
22		1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23		1,714	2,069	2,5	2,807	3,485	3,767
24		1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25		1,708	2,06	2,485	2,787	3,45	3,725
26		1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27		1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,69
28		1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29		1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30		1,697	2,042	2,457	2,75	3,385	3,646
40		1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
60		1,671	2	2,39	2,66	3,232	3,46
120		1,658	1,98	2,358	2,617	3,16	3,373
		1,645	1,96	2,326	2,576	3,09	3,291