МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ТАШКЕНТСКИЙ ФИНАНСОВЫЙ ИНСТИТУТ

Ш.Ш. БАБАДЖАНОВ, А.Н. НАИМОВ, А.Р. ХАШИМОВ

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

Рекомендовано Министерством высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан в качестве учебника

Рецензенты: *канд.физ.-мат.наук, доц.* **О. Абдуллаев;**
канд.физ.-мат.наук, и.о.доц. **Н.К.Очилова**

Б 12 Математика для экономистов: Учебник /Ш.Ш. Бабаджанов, А.Н. Наимов, А.Р. Хашимов; – Т.: 2019. – 1232 с.

В учебнике излагаются основы линейной алгебры, элементы аналитической геометрии, традиционные разделы математического анализа, вводный курс теории дифференциальных и разностных уравнений в тесной связи с различными экономическими приложениями. Рассмотренные примеры, экономические модели и упражнения прикладного характера отвечают требованиям по внедрению зарубежного опыта преподавания математики бакалаврам - экономистам.

Учебник предназначен бакалаврам всех направлений области образования «Экономика», он написан в соответствии с требованиями государственного образовательного стандарта.

§1. Матрицы и действия над ними

Ключевые слова: *матрица, матрица норм расхода, технологическая матрица, прямоугольная матрица, квадратная матрица, порядок квадратной матрицы, нулевая матрица, вектор – строка, вектор – столбец, транспонирование матриц, диагональная матрица, скалярная матрица, правая (или верхняя) треугольная матрица, левая (или нижняя) треугольная матрица, симметрическая матрица, кососимметрическая матрица, линейные операции над матрицами, умножение матриц, ступенчатая матрица, каноническая матрица.*

1. Введение

Планирование производства должно основываться на надлежащим образом упорядоченной системе информации, с помощью которой просто и сжато, описываются зависимости, имеющие место в материальном производстве. Эту упорядоченную систему информации можно наглядно представить в виде соответствующей таблицы.

Пример 1. Рассмотрим систему информации о взаимных поставках продукции отраслей материального производства. Если через $i = 1,2,\ldots,6$ обозначить, соответственно, номера отдельных отраслей, то таблица взаимных поставок продукции принимает следующий вид:

Таблица 1

Отрасль	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	v_{11}	v_{12}	v_{13}	v_{14}	v_{15}	v_{16}
2	v_{21}	v_{22}	v_{23}	v_{24}	v_{25}	v_{26}
3	v_{31}	v_{32}	v_{33}	v_{34}	v_{35}	v_{36}
4	v_{41}	v_{42}	v_{43}	v_{44}	v_{45}	v_{46}
5	v_{51}	v_{52}	v_{53}	v_{54}	v_{55}	v_{56}
6	v_{61}	v_{62}	v_{63}	v_{64}	v_{65}	v_{66}

В таблице через v_{ij} $(i=1,2,\ldots,6;\ \ j=1,2,\ldots,6)$ обозначены объемы поставок продукции из i - й отрасли в j - ю отрасль. Так, например, v_{11}, $v_{12},\ldots,v_{16}$ обозначают поставки продукции отрасли 1 всем отраслям материального производства, v_{21}, $v_{22},\ldots$, v_{26} - поставки отрасли 2 всем отраслям материального производства и т.д.

Пример 2. Подобным же образом планирование на предприятии обосновывают, пользуясь нормами как системой информации. Если, например, на предприятии производятся четыре продукта 1, 2, 3, 4 и для их производства используются материалы 1, 2, 3, то система норм материальных затрат, которая представляет собой основу плана снабжения, может быть представлена в виде таблицы:

Таблица 2

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{matrix},$$

где a_{ij} $(i=1,2,3;\ \ j=1,2,3,4)$ есть норма расхода i - го материала на производство j - го продукта. Так, норма расхода материала 1 на единицу продукта 1, 2, 3, 4, соответственно, равна, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}; норма расхода материала 2 на единицу продукта, соответственно, составляет a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, норма расхода материала 3 на единицу продукта, соответственно, составит a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34} .

Таблица 1 и 2 - частные случаи так называемых матриц, рассматриваемых математикой. Они находят широкое применение в экономических исследованиях, особенно в планировании производства, значительно облегчают работу, связанную с планированием, снижают трудоемкость этой работы, позволяют быстро разработать разные варианты плана и, кроме того, облегчают изучение зависимостей между разными экономическими показателями.

Многие обозначения при использовании матриц очень компактны, при этом без потери в наглядности и содержательности. Теперь рассмотрим так называемую **технологическую матрицу.** Для этой цели рассмотрим следующий пример, который является обобщением задачи, рассмотренной в примере 2.

Пример 3. Пусть на предприятии производятся n видов продукции и для их производства используются m видов ресурсов (т.е. материалов $1,2,\ldots,m$). Предположим, что для производства одной единицы j-го вида продукции расходуется a_{ij}, единиц i - го вида ресурса, т.е. a_{ij} - норма расхода i-го ресурса на производство j-й продукции. Тогда система норм материальных затрат, которая представляет собой основу плана снабжения, может быть представлена в виде следующей матрицы (таблицы)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

которая называется **матрицей норм расхода. Технологической** же ее называют вот почему. Рассмотрим какой-нибудь, например, j- й, столбец A_j этой матрицы. Этот столбец полностью описывает расход ресурсов на производство 1 единицы j- й продукции. Говоря абстрактно, для получения 1 единицы j- й продукции надо «смешать» a_{1j} единиц 1- го ресурса, a_{2j} единиц 2-го и т.д. Такое «смешивание» вполне правильно назвать **технологией** переработки ресурсов. Таким образом, j- й столбец матрицы A описывает j- ю технологию переработки ресурсов. Всего предприятие располагает n технологиями.

Остановимся теперь на содержательном смысле строк матрицы норм расхода (или технологической). Как можно увидеть, элементы i- й строки описывают расход i- го ресурса на единицу каждой продукции или при единичной интенсивности каждой технологии.

Позже, каждый раз по мере необходимости вернемся к технологической матрице для ее более глубокого усвоения.

Упражнение

В условиях примера 2 предположим, что предприятие на одну следующую неделю временно приостановило выпуск продукции 4 вида. Какое представление будет иметь технологическая матрица в этом случае?

Следует отметить, что основное внимание исследователей с момента зарождения теории финансов как науки (20-30-е годы XX - го столетия) и по настоящее время направлено на совершенствование методологии прогнозирования, разработку новых методов, применяемых при прогнозировании различных финансовых показателей. Одними из таких являются коллокационные модели - модели, построенные на базе методов коллокации. Коллокационные модели обладают большой универсальностью и позволяют решать задачи прогнозирования, используя при этом самую разнообразную информацию об объекте (в частности, при прогнозировании характеристик ценных бумаг использовать информацию о курсах, ценах, объемах продаж, индексов и т.д.). Основное достоинство коллокационных моделей в том, что методика прогноза по любой из них сводится к простейшим матричным операциям.

Приведенные и перечисленные примеры не исчерпывают всех приложений матриц, однако они в определенной степени помогли нам показать важность и полезность матриц.

Теперь приступим к изучению матриц.

2. Основные определения

Определение. Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, расположенных строками и столбцами и записывается так:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Понятие матриц впервые введено в работах английских математиков У.Гамильтона (1805 – 1865) и А. Кели (1821 – 1895). В настоящее время матрицы служат важным аппаратом математического исследования, в частности, экономико-математического моделирования. Выше мы попытались это объяснить.

Каждая матрица имеет определенные размеры, т.е. определенное количество строк и столбцов. В приведенной выше матрице A имеется m строк и n столбцов. Значит, эта матрица размера $m \times n$.

Определение. В матрице (1) числа a_{ij} называются ее **элементами (**первый индекс означает номер строки, второй – номер столбца, на пересечении которых стоит элемент; $i = 1,2,\ldots,m;\quad j = 1,2,\ldots,n$).

Употребляется также сокращенное обозначение матриц. Например, пишут $A = (a_{ij})_{mn}$. Это значит, что матрица состоит из элементов a_{ij}, причем $i = 1,2,\ldots,m;\quad j = 1,2,\ldots,n$.

Определение. Матрица называется **прямоугольной**, если $m \neq n$. Если же $m = n$, то матрица называется **квадратной,**[1] а число n - ее **порядком.**[2]

Определение. Матрицы называются **равными**, если у них одинаковое число строк и столбцов и все соответствующие элементы совпадают.

Определение. Матрица называется **нулевой** (или **нуль - матрицей**), если все ее элементы равны нулю.

Нулевую матрицу обозначают символом Θ. Например, следующие матрицы

[1] Следует иметь в виду, что матрицы не имеют какой-либо геометрической интерпретации. Термины «квадратная» и «прямоугольная» матрицы являются просто удобной характеристикой вида расположения и количества элементов матрицы.

[2] Иногда термин «порядок матрицы» употребляют по отношению не только к квадратной, но и к прямоугольной матрице (например, порядка $m \times n$). Однако мы термин «порядок» будем употреблять только относительно квадратных матриц. Что же касается прямоугольных матриц, то по отношению к ним указывается число строк и столбцов или же при необходимости употребляется слово «размерность».

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

являются, соответственно, нулевой матрицей 3-го порядка, нулевой матрицей размера 3×4 и нулевой матрицей размера 2×3.

Определение. Матрица, состоящая из одной строки (т.е. матрица размера $1 \times n$) или из одного столбца (т.е. матрица размера $m \times 1$), называется, соответственно, **вектор – строкой** или **вектор – столбцом.**

Вектор – столбцы и вектор – строки также называют просто **векторами**. Элементы векторов будем называть их **компонентами**.

Замечание. В дальнейшем, если отдельно не отмечено, всегда будем считать вектор заданным в виде вектора – столбца, хотя часто для экономии места компоненты вектора будут записываться в строку.

Эти понятия, связанные с определением вектора, несколько дополним в п.4.

Определение. Матрица A', которая получается из матрицы A, заменой в ней местами строк и столбцов, называется **транспонированной** относительно матрицы A.

Таким образом, для матрицы (1) транспонированной служит матрица

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{i1} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{i2} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1j} & a_{2j} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{mj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{m2} & \dots & a_{in} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Определение. Операция перехода к матрице A', транспонированной относительно матрицы $\boldsymbol{A}$, называется **транспонированием** матрицы A. Для матрицы размера $m \times n$ транспонированной является матрица размера $n \times m$.

Транспонированной относительно матрицы A', очевидно, служит матрица A, т. е. $(A')' = A$.

Определение. Главной диагональю квадратной матрицы называется воображаемая прямая, соединяющая ее элементы, у которых оба индекса одинаковы (т.е. $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$). Эти элементы называются **диагональными.**

Определение. Квадратная матрица, у которой все элементы вне главной диагонали равны нулю, называется **диагональной** и записывается так**:**

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_{\boldsymbol{nn}} \end{pmatrix}.$$

Определение. Если все элементы α_{ii} диагональной матрицы равны между собой, то матрицу называют **скалярной.** Такая матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha \end{pmatrix}.$$

Определение. В случае если $\alpha = 1$, скалярная матрица называется единичной и обозначается буквой E, т.е.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Иногда для записи элементов единичной матрицы используется **символ Кронекера**

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & при \quad i = j, \\ 0 & при \quad i \neq j. \end{cases}$$

При помощи этого символа можно написать

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij}).$$

Определение. Квадратная матрица называется **треугольной**, если все элементы, стоящие выше (или ниже) главной диагонали, равны нулю. При этом матрица

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

где $b_{ij}=0$ при $i>j$, называется **правой (**или **верхней) треугольной** матрицей, а матрица

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

где $c_{ij}=0$ при $i<j$, называется **левой (**или **нижней) треугольной** матрицей.

Определение. Симметрической матрицей называется квадратная матрица A, для которой $A=A'$.

Ясно, что симметрическая матрица симметрична относительно диагонали, т.е. отражение от главной диагонали не изменяет матрицу. Симметрическая матрица n-го порядка не может, состоять из произвольных n^2 элементов, так как $a_{ij}=a_{ji}$, но выше или ниже главной диагонали ее элементы произвольны. Число элементов, стоящих выше главной диагонали, равно $\frac{n^2-n}{2}$. Элементы главной диагонали также произвольны. Таким образом, общее число произвольных элементов в симметрической матрице $\boldsymbol{n}$-го порядка равно

$$\frac{n^2-n}{2}+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Пример 4. Следующая матрица - симметрическая:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 5 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определение. Кососимметрической матрицей называется квадратная матрица A, для которой $A = -A'$.

Очевидно, что элементы кососимметрической матрицы элементы симметрично расположены относительно ее главной диагонали, равны по величине и противоположны по знаку, т.е. $a_{ij} = -a_{ji}$.

Ясно, что все элементы главной диагонали являются нулями: $a_{ii} = 0$. Число произвольных элементов в кососимметрической матрице $\boldsymbol{n}$-го порядка равно

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

Пример 5. Следующая матрица является кососимметрической:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Действия над матрицами

Основные операции над матрицами следующие: умножение матриц на число, сложение матриц, умножение матриц.

3.1. Линейные операции над матрицами

Определение. Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ **на число** λ называется матрица, элементы которой получаются из соответствующих элементов матрицы A на число λ**:**

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1j} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2j} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{ij} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mj} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример 6. Найти матрицу $2A$ для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение

В соответствии с определением получим

$$2A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 10 & 6 & -2 \\ 2 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определение. Матрица $-A = (-1) \cdot A$ называется **противоположной** матрице A**.**

Определение. Суммой двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинаковой размерности $\boldsymbol{m \times n}$ называется матрица $\boldsymbol{C}$ такой же размерности, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц A и B, т.е.

$$A + B = C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1j} + b_{1j} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2j} + b_{2j} & \dots & a_{2n} + b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \dots & a_{ij} + b_{ij} & \dots & a_{in} + b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mj} + b_{mj} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Аналогично определяется **разность** матриц:

$$A-B=C=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1j}-b_{1j} & \dots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \dots & a_{2j}-b_{2j} & \dots & a_{2n}-b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}-b_{i1} & a_{i2}-b_{i2} & \dots & a_{ij}-b_{ij} & \dots & a_{in}-b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \dots & a_{mj}-b_{mj} & \dots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример 7. Найти сумму и разность матриц

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение

В соответствии с определением получим

$$A+B=\begin{pmatrix} 3+4 & 1-1 & 0+2 & 2-2 \\ 1-3 & 4+0 & 3+4 & 1+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A-B=\begin{pmatrix} 3-4 & 1+1 & 0-2 & 2+2 \\ 1+3 & 4-0 & 3-4 & 1-0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Упражнение

Найти матрицу $3A+7B+E$, где E - единичная матрица второго порядка, а

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Отметим одно **интересное свойство матриц.**

Любая квадратная матрица может быть выражена как сумма симметрической и кососимметрической матриц:

$$A=A+\frac{A'}{2}-\frac{A'}{2}=\frac{A+A'}{2}+\frac{A-A'}{2}.$$

Далее

$$\left(\frac{A+A'}{2}\right)'=\frac{A+A'}{2} \quad \text{и} \quad \left(\frac{A-A'}{2}\right)'=-\frac{A-A'}{2}.$$

Если

$$A_s=\frac{A+A'}{2} \quad \text{и} \quad A_a=-\frac{A-A'}{2},$$

то матрица A_s является симметрической и A_a является кососимметрической.

Таким образом, мы выразили квадратную матрицу A в виде суммы симметрической и кососимметрической матриц.

Пример 8.

$$A=\begin{pmatrix}2 & -4 & 7\\ 3 & 1 & 9\\ 8 & 6 & 9\end{pmatrix},\qquad \frac{A+A'}{2}=\begin{pmatrix}2 & -\frac{1}{2} & \frac{15}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{15}{2}\\ \frac{15}{2} & \frac{15}{2} & 9\end{pmatrix},\qquad \frac{A-A'}{2}=\begin{pmatrix}0 & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{7}{2} & 0 & \frac{3}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0\end{pmatrix},$$

$$A=\frac{A+A}{2}+\frac{A-A'}{2}.$$

Упражнение

Следующую квадратную матрицу

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 5 & 9\\ -5 & 11 & 6 & 0\\ -2 & 7 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 9 & 7\end{pmatrix}$$

выразить в виде суммы симметрической и кососимметрической матриц.

Легко проверить, что операции сложения и умножения матрицы на число обладают следующими свойствами:

1^0. $A+B=B+A$;

2^0. $A+(B+C)=(A+B)+C$;

3^0. $A+\Theta=A$;

4^0. $A+(-A)=\Theta$;

5^0. $1\cdot A=A$;

6^0. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$;

7^0. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$;

8^0. $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$;

здесь A, B и C матрицы, α и β - числа, Θ - нулевая матрица.

3.2. Умножение матриц

Произведение $A \cdot B$ (в дальнейшем, просто AB) матрицы A на матрицу B определяется в предположении, что число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Пусть даны матрица A размерности $m \times p$ и матрица B размерности $p \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pn} \end{pmatrix}$$

или в сокращенной записи

$$A = (a_{ij}), \qquad B = (b_{jk}),$$

где $i = 1,2,\dots,m;\quad j = 1,2,\dots,p;\quad k = 1,2,\dots,n$.

Определение. Произведением двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{jk})$ заданных в определенном порядке (A - первая, B- вторая), называется следующая матрица $C = (c_{ij})$, элементы которой определяются по следующему правилу:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{ip}b_{pk},$$

где $i = 1,2,\dots,m;\quad k = 1,2,\dots,n.$

Таким образом, произведение AB имеет смысл только в том случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Правило умножения матриц. Чтобы получить элемент, стоящий в i -й строке и k -м столбце произведения двух матриц, нужно элементы i -й строки первой матрицы умножить на соответствующие элементы k -го столбца второй и полученные произведения сложить.

Пример 9. Умножить матрицу A на матрицу B, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение

1. Элемент первой строки и первого столбца новой матрицы $C = AB$ представляет собой сумму произведений элементов 1-й строки матрицы A на элементы 1-го столбца матрицы B, а именно:

$$c_{11} = 3\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 1 = 6.$$

2. Элемент первой строки и второго столбца новой матрицы представляет собой сумму произведений элементов 1-й строки матрицы A на элементы 2-го столбца матрицы B:

$$c_{12} = 3\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 1\cdot 0 = 2.$$

3. Элемент первой строки и третьего столбца определяется так:

$$c_{13} = 3\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 = -1.$$

4. Элемент второй строки и первого столбца новой матрицы получается последовательным умножением элементов 2-й строки матрицы A на элементы 1-го, 2-го и 3-го столбцов матрицы B и суммированием получаемых произведений:

$$c_{21} = 2\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot 1 = 6;$$

$$c_{22} = 2\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 2\cdot 0 = 1;$$

$$c_{23} = 2\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 2\cdot 1 = 1.$$

5. Аналогично получаются элементы 3-й строки матрицы C:

$$c_{31} = 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 1 = 8;$$

$$c_{32} = 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 3\cdot 0 = -1;$$

$$c_{33} = 1\cdot(-1) + 2\cdot 1 + 3\cdot 1 = 4.$$

Итак,

$$C = AB = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Пример 10. Умножить матрицу A на матрицу B, если

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 8 & 1\\ 1 & -4 & 0 & 3\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -3\\ 0 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}.$$

Решение

Имеем

$$AB=\begin{pmatrix}3\cdot 2+2\cdot 1+8\cdot 0+1\cdot 3 & 3\cdot(-1)+2\cdot(-3)+8\cdot 1+1\cdot 1\\ 1\cdot 2+(-4)\cdot 1+0\cdot 0+3\cdot 3 & 1\cdot(-1)+(-4)\cdot(-3)+0\cdot 1+3\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 0\\ 7 & 14\end{pmatrix}.$$

Замечание. Следует иметь в виду, что умножение матриц некоммутативно (не обладает свойством перестановочности), т.е. $AB\neq BA$.

Пример 11

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix};$$

$$AB=\begin{pmatrix}19 & 22\\ 43 & 50\end{pmatrix};\qquad BA=\begin{pmatrix}23 & 34\\ 31 & 46\end{pmatrix}.$$

Как видим, в результате перестановки умноженных матриц A и B получены различные результаты. **Необходимо поэтому указывать, как умножаются матрицы (слева или справа).**

В отдельных случаях произведение матриц в противоположном порядке вообще невозможно. Например,

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 4 & 3 & 0\end{pmatrix};$$

$$AB=\begin{pmatrix}19 & 13 & 7\\ 46 & 31 & 19\end{pmatrix};\qquad BA \text{ - не существует.}$$

Определение. В тех случаях, когда $AB=BA$, матрицы A и B называются **коммутативными (перестановочными).**

Так, например, единичная матрица E перестановочна с любой квадратной матрицей A того же порядка, причем

$$AE=EA=A.$$

Следует заметить, что единичная матрица среди всех квадратных матриц данного порядка играет в операции умножения такую же роль, как число единица при умножении чисел.

Пример 12

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 5 & 3 & 2\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix}; \qquad E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 5 & 3 & 2\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 5 & 3 & 2\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 5 & 3 & 2\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix},$$

т.е. $AE=EA=A$.

Упражнения

1. Умножить матрицы:

$$a)\ \begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}; \quad б)\ \begin{pmatrix}3 & 5\\ 6 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix}; \quad в)\ \begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

2. Вычислить $AB-BA$, если

$$a) \qquad A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ -4 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix};$$

$$б) \qquad A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 3 & -2 & 4\\ -3 & 5 & -1\end{pmatrix}.$$

3. Выполнить действие:

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}^2.$$

Можно проверить, что умножение матриц обладает следующими свойствами:

1^0. $A(BC) = (AB)C$;

2^0. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$;

3^0. $C(A+B) = CA + CB$;

4^0. $(A+B)C = AC + BC$,

где A, B и C матрицы, λ - число.

При этом предполагается, что все написанные произведения матриц имеют смысл.

Имеет место следующее правило транспонирования произведения двух матриц:

$$(AB)' = B' \cdot A'.$$

Определение. Ступенчатой матрицей называется матрица, обладающая тем свойством, что если в какой-либо из ее строк первый отличный от нуля элемент стоит на k-м месте, то во всех следующих строках на первых k местах стоят нули.

Пример 13

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определение. Канонической матрицей называется матрица, у которой в начале главной диагонали стоят подряд несколько единиц (число которых может равняться нулю), а все остальные элементы равны нулю.

Пример 14

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь мы прервем изучение матриц для того, чтобы изложить некоторые аспекты теории определителей, которые нам понадобятся для дальнейшего изложения теории матриц.

4. Линейная комбинация векторов

В этом пункте понятия, связанные с определением вектора (см. п.2), несколько дополним.

Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, под словом «вектор» будем понимать вектор-столбец.

Определение. Вектор Y называется **линейной комбинацией векторов** $X_1, X_2, \ldots, X_n$, если имеет место равенство

$$Y = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_n X_n,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ числовые коэффициенты.

Числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ называются **коэффициентами линейной комбинации.**

Очевидно, что компоненты вектора Y представляют собой линейные комбинации соответствующих компонент векторов $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Определение. Векторы $X_1, X_2, \ldots, X_n$ называются **линейно зависимыми,** если существует равная нулевому вектору (нулю) линейная комбинация

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_n X_n = \Theta,$$

где не все коэффициенты λ_j равны нулю.

Заметим, что если некоторые из векторов $X_1, X_2, \ldots, X_n$ линейно зависимы, то и все они линейно зависимы, так как остальные векторы можно включить в имеющуюся зависимость с нулевыми коэффициентами,

Определение. Векторы $X_1, X_2, \ldots, X_n$, не являющиеся линейно зависимыми, называются **линейно независимыми.** Иначе говоря, векторы $X_1, X_2, \ldots, X_n$ называются **линейно независимыми**, если равенство

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_n X_n = \Theta$$

возможно лишь в случае, когда все коэффициенты λ_j равны нулю.

Между понятиями линейной комбинации и линейной зависимости существует следующая связь.

Теорема. Для того чтобы векторы $X_1, X_2, \ldots, X_n$ были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы один из них был линейной комбинацией остальных.

Доказательство. Пусть векторы $X_1, X_2, ..., X_n$ линейно зависимы. По определению это означает существование чисел $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ не равных одновременно нулю, и таких, что

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_n X_n = \theta.$$

Для простоты записи предположим, что ненулевым является первый коэффициент λ_1. Умножив обе части предыдущего равенства на число $-\dfrac{1}{\lambda_1}$, получим

$$-X_1 + \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) X_2 + \cdots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right) X_n = \theta,$$

или

$$X_1 = \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) X_2 + \cdots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right) X_n,$$

а это соотношение означает, что вектор X_1, является линейной комбинацией остальных векторов.

Обратно, пусть, например, вектор X_1 является линейной комбинацией остальных, т.е.

$$X_1 = \mu_2 X_2 + \mu_3 X_3 + \cdots + \mu_4 X_n.$$

Перенеся X_1 в правую часть равенства, получим

$$\theta = (-1) X_1 + \mu_2 X_2 + \mu_3 X_3 + \cdots + \mu_4 X_n,$$

это означает линейную зависимость векторов.

Пример 15. Доказать, что векторы

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

линейно независимы.

Решение

Равенство $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 = \Theta$ равносильно совокупности следующих числовых равенств:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 + \lambda_3 \cdot 0 = 0, \\ &\lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1 + \lambda_3 \cdot 0 = 0, \\ &\lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 + \lambda_3 \cdot 1 = 0, \end{aligned}$$

откуда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Упражнения

1. Найти линейную комбинацию $2A_1 - A_2 + 3A_3$ следующих векторов:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

2. Найти вектор X из уравнения $A_1 + 2A_2 + 3A_3 + 4X = \theta$, где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

3. Найти вектор X из уравнения $3(A_1 - X) + 2(A_2 + X) = 5(A_3 + X)$**,** где

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Даны векторы:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 15 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Будет ли вектор A_4 линейной комбинацией векторов A_1, A_2, A_3?

Вопросы для самопроверки

1. Что называется технологической матрицей?
2. Что называется матрицей?
3. Какая матрица называется прямоугольной?
4. Какая матрица называется квадратной?
5. Что представляет собой нулевая матрица?
6. Какая матрица называется диагональной?
7. Что представляет собой скалярная матрица?
8. Что представляет собой единичная матрица?
9. Какая матрица называется (правой (или верхней), левой (или нижней)) треугольной матрицей?
10. Какая матрица называется симметрической?
11. Какая матрица называется кососимметрической?
12. Что называется транспонированием матрицы?
13. Каким образом квадратная матрица может быть выражена с помощью симметрической и кососимметрической матриц?
14. Какими свойствами обладают операции сложения и умножения матрицы на число? Перечислите их.
15. Что называется произведением двух матриц?
16. Сформулируйте правило умножения двух матриц.
17. Когда матрицы называются коммутативными (перестановочными)?
18. Какими свойствами обладает умножение матриц? Перечислите их.
19. Приведите правило транспонирования произведения двух матриц.
20. Какая матрица называется ступенчатой?
21. Какая матрица называется канонической?
22. Что называется линейной комбинацией векторов? Что называется коэффициентами линейной комбинации?
23. Когда векторы $X_1, X_2, ..., X_n$ называются линейно зависимыми и линейно независимыми?
24. Приведите теорему, устанавливающую связь между понятиями линейной комбинации и линейной зависимости векторов.

§2. Теория определителей

Ключевые слова: *определитель, элементы определителя, главная диагональ, побочная диагональ, порядок определителя, перестановка, инверсия (беспорядок), транспонирование определителя, минор, алгебраическое дополнение, теорема Лапласа, формула разложения определителя.*

Часто в математике бывает полезно охарактеризовать объект, определяемый многими параметрами, с помощью одной величины. Определитель – пример такого рода. Он вводится только для квадратных матриц. Существуют разные, но, естественно, эквивалентные способы определения определителя. Мы рассмотрим один из этих способов.

1. Понятия определителя n - го порядка

Пусть дана квадратная матрица n - го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

По определенным правилам сопоставим матрице A некоторое число, которое называют определителем (детерминантом) n - го порядка и обозначим одним из следующих символов:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A| = \det A = \Delta. \qquad (1)$$

Элементы матрицы A, ее диагонали, строки и столбцы называют, соответственно элементами, диагоналями, строками и столбцами определителя

$|A|$, т.е. горизонтальные ряды в определителе (1) называются **строками**, вертикальные **столбцами**, числа a_{ij} - **элементами определителя** (первый индекс означает номер строки, второй – номер столбца, на пересечении которых стоит элемент; $i = 1,2,...,n$; $j = 1,2,...,n$). **Порядок определителя** - это число строк и столбцов.

Воображаемая прямая, соединяющая элементы определителя, у которых оба индекса одинаковы (т.е. $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$) называется **главной (первой) диагональю**, другая диагональ – **побочной (второй).**

Определение. Определителем (детерминантом)[1] матрицы A называется число, являющееся алгебраической суммой $\boldsymbol{n}!$ ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$) членов, каждый из которых – произведение n элементов, взятых только по одному из каждой из $\boldsymbol{n}$ строк и из каждого из n столбцов, взятых со знаком плюс или минус.

Для выведения правила выбора знаков для членов определителя требуются новые понятия и определения.

Определение. Всякое расположение чисел $1,2,...,n$ называется их **перестановкой.**

Количество возможных перестановок равно $n!$.

При $n = 2$ возможны лишь две перестановки - либо 1,2, либо 2,1. В данном случае число перестановок равно $1 \cdot 2 = 2!$.

При $n = 3$ число возможных перестановок будет равно 6

(1, 2, 3; 1, 3, 2; 2, 3, 1; 2, 1, 3; 3, 2, 1; 3, 1, 2),

т.е. $1 \cdot 2 \cdot 3 = 3!$.

Определенное утверждение можно сделать при любом значении n.

Если это утверждение справедливо для числа элементов n, то оно справедливо и для числа элементов $n + 1$.

[1] Лет сто пятнадцать назад казалось, что определители важнее матриц, из которых они получаются, и была опубликована четырехтомная «История определителей» Мура (T. Muir). Направление развития математики, однако, меняется, и сейчас теория определителей достаточно далека от основных проблем линейной алгебры.

Предположим, что наше утверждение уже доказано для n, т.е. n элементов дают $n!$ перестановок. Рассмотрим все перестановки из $n+1$ элементов $a_1, a_2,..a_n, a_{n+1}$. Тогда перестановок, у которых на первом месте стоит элемент a_1, будет (по предположению) $n!$ перестановок, у которых на первом месте стоит элемент a_2, тоже будет $n!$. Поступая аналогично со всеми $n+1$ элементами, получим, что число перестановок будет

$$n!(n+1) = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n(n+1) = (n+1)!.$$

Рассмотрим произвольную перестановку n чисел

$$a_1, a_2, \ldots, a_n.$$

Выберем в ней два числа a_i и a_j. Если окажется, что большее из этих чисел расположено впереди (левее) меньшего, то числа a_i и a_j образуют инверсию (беспорядок).

Определение. Инверсией (беспорядком) в перестановке называют такое положение, при котором большее число стоит впереди (левее) меньшего. В противном случае числа инверсии (беспорядка) не образуют.

Рассмотрим перестановку четырех первых чисел натурального ряда 3, 2, 1, 4. Здесь беспорядок образуют следующие пары чисел: 3 и 2, 3 и 1, 2 и 1. Значит, в данной перестановке число всех инверсий (беспорядков) три. В перестановке 2, 4, 3, 1 имеется четыре инверсии.

Для подсчета числа беспорядков воспользуемся следующим приемом. Определим количество чисел, стоящих впереди 1. Пусть их будет k_1. Вычеркнем единицу и определим количество чисел, стоящих впереди 2. Пусть их будет k_2. Вычеркнем двойку и определим количество чисел, стоящих впереди 3 и т.д.

Пример 1. Подсчитайте число инверсий в перестановке

2, 1, 4, 3, 5, 6.

Решение

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 0, \quad k_3 = 1, \quad k_4 = 0, \quad k_5 = 0. \quad k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 = 2.$$

Следовательно, в данной перестановке имеются две инверсии.

В общем случае число инверсий (t) равно:

$$t = \sum_{i=1}^{n-1} k_i \ .$$

Заметим, что впереди самого большого числа перестановки большее число стоять не может. Поэтому суммирование осуществляется до $n-1$.

Число инверсий может быть четным или нечетным.

Упражнение

Определить число инверсий в перестановках:

а) 2, 4, 3, 5, 1, 7, 6; в) 7, 5, 3, 6, 4, 2, 1;

с) 7, 4, 5, 3, 6, 2, 1, 8; d) 8, 6, 4, 2, 7, 5, 3, 1.

Правило. Если в одном из членов определителя расположить множители так, чтобы первые индексы возрастали, то перед этим членом пишется знак плюс, когда число инверсий, образованных перестановкой вторых индексов, четное. И наоборот, если число инверсий нечетное, то ставится знак минус.

Пример 2. Определить знак члена определителя пятого порядка:

$$a_{32}, \quad a_{41}, \quad a_{53}, \quad a_{24}, \quad a_{15} \ .$$

Решение

Расположим множители этого члена в порядке возрастания первых индексов: $a_{15}, \quad a_{24}, \quad a_{32}, \quad a_{42}, \quad a_{53}$.

Рассмотрим перестановку 5, 4, 2, 1, 3, составленную из вторых индексов, и определим число инверсий:

$$k_1 = 3, \quad k_2 = 2, \quad k_3 = 2, \quad k_4 = 1.$$

Число инверсий составит 3 + 2 + 2+1=8. Раз число инверсий четное, то перед этим членом определителя ставится знак плюс.

Упражнения

1. Выяснить какие из данных произведений являются членами определителя соответствующего порядка; указать при этом порядок определителя и знак члена:

а) $a_{34}a_{15}a_{23}a_{42}a_{51}$; в) $a_{15}a_{23}a_{34}a_{51}a_{42}$;

c) $a_{61}a_{52}a_{42}a_{33}a_{14}a_{25}$; d) $a_{53}a_{42}a_{31}a_{25}a_{34}a_{16}$.

2. Выбрать j и k так, чтобы произведение $a_{1j}a_{21}a_{32}a_{5k}a_{45}$ было отрицательным членом определителя пятого порядка.

Пример 3. Пользуясь определением определителя, вычислить

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 \end{vmatrix}.$$

Решение. Задача, очевидно, сводится к тому, чтобы записать сумму отличных от нуля членов данного определителя. В качестве первого сомножителя таких членов можно взять из первой строки a_{12} или a_{13}. Если берем a_{12}, то из второй строки можно взять a_{21} или a_{24}. Если берем a_{21}, то из третьей строки можно взять только $\boldsymbol{a}_{34}$, а из четвертой $\boldsymbol{a}_{43}$. Перебирая так все возможности и учитывая знаки соответствующих подстановок, получим:

$$\Delta = a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}.$$

Замечание. Вычислять более сложные определители путем непосредственного применения определения было бы весьма неудобно. Для этого применяются специальные методы (их рассмотрим ниже).

Упражнения

1. Найти члены определителя

$$\begin{vmatrix} 3x & 1 & 2 \\ x & x & 1 \\ 2 & x & 2x \end{vmatrix},$$

содержащие x^3 и x^2.

2. Пользуясь определением определителя, вычислить определители:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix}, \qquad \text{в) } \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2. Определители второго и третьего порядков

В приложениях часто встречаются определители второго и третьего порядков. Определители второго порядка вычисляются согласно определению по формуле

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12},$$

которая иллюстрируется следующей схемой:

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \circ \\ \circ & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \bullet \\ \bullet & \circ \end{vmatrix}.$$

Пример 4. Вычислить определитель второго порядка

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 9 \end{vmatrix}.$$

Решение

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = 3 \cdot 9 - 5 \cdot 2 = 18 - 10 = 8.$$

Упражнение

Вычислить определители второго порядка:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$; с) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$.

Для определителя третьего порядка соответствующая формула имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

При его вычислении часто удобно пользоваться правилом треугольников (правилом Саррюса), которое символически можно записать так:

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix}.$$

Пример 5. Вычислить определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 9 & 5 & 9 \\ -5 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 9 & 5 & 9 \\ -5 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 9 \cdot 1 + 2 \cdot 9 \cdot (-5) - 1 \cdot 5 \cdot (-5) - 3 \cdot 9 \cdot 1 - 2 \cdot 9 \cdot 1 =$$

$$= 15 + 9 - 90 + 25 - 27 - 18 = 49 - 135 = -86.$$

Упражнение

Вычислить определители третьего порядка:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}; \qquad \text{в)} \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}; \qquad \text{c)} \begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix};$$

$$\text{d)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \qquad \text{e)} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}; \qquad \text{f)} \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

3. Свойства определителей

Определение. Транспонированием определителя называется такое преобразование, при котором его строки делаются столбцами с тем же самым номером. Транспонирование есть поворот определителя около главной диагонали.

Свойство 1. Определитель не меняется при транспонировании, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доказательство этого свойства основывается на следующих рассуждениях. Всякий член определителя имеет вид $a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\cdots a_{n\alpha_n}$, где $\alpha_1,\alpha_2..\alpha_n$ перестановка вторых индексов. Знак члена определителя зависит от четности инверсий в перестановке вторых индексов. В транспонированном определителе члены состоят из тех же множителей, что и в исходном определителе, хотя они имеют иное расположение индексов, но четность инверсий в перестановке вторых индексов одинакова. Отсюда и вытекает свойства определителя не изменяться при транспонировании.

Следовательно, сроки и столбцы в определителе равноправны, и если выполняется некоторое свойство относительно строк, то такое же свойство существует и для столбцов. В дальнейшем такие два свойства будем формулировать одновременно.

Пример 6

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 12.$$

Свойство 2. Если хотя бы одна из строк (столбцов) определителя состоит только из нулей, то определитель равен нулю.

Доказательство. Каждый член определителя содержит множитель из этой строки, все элементы которой равны нулю. Следовательно, все члены определителя и он сам равны нулю.

Свойство 3. Если в определителе поменять местами две строки (столбца), то определитель изменит знак.

Доказательство. В результате этой операции изменится четность инверсий в перестановке вторых индексов. Все члены получат обратные знаки, следовательно, и определитель изменит свой знак на обратный.

Пример 7. Убедиться в справедливости свойства 3 для определителя

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

и определителя, получаемого из него перестановкой 1-й и 3-й строк.

Решение

Пользуясь правилом треугольников, получим

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 30 + 0 + 3 + 0 - 40 = -11.$$

Найдем теперь определитель, полученный данной перестановкой 1-й и 3-й строк:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 40 + 4 - 30 = 11.$$

Выполнение свойства 3 очевидно.

Свойство 4. Если в определителе имеются две одинаковые строки (столбцы), то определитель равен нулю.

Доказательство. Если в определителе одинаковые строки поменять местами, то по свойству 3 он должен изменить знак на обратный. Однако в данном случае этого не произойдет, все члены определителя останутся в точности такими же, как и были и по величине и по знаку, а это возможно лишь тогда, когда определитель равен нулю.

Свойство 5. Если все элементы некоторой строки (столбца) определителя умножить на какое-либо число, то сам определитель умножится на это число, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Это свойство можно перефразировать так:

Общий множитель элементов строки (столбцов) можно выносить за символ определителя.

Доказательство. Каждый член определителя содержит множитель из этой строки. Значит, его можно вынести за знак определителя.

Например, имеем определитель второго порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Умножим вторую строку определителя на число b. Получим

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ba_{21} & ba_{22} \end{vmatrix}.$$

Члены этого определителя $a_{11}ba_{22} - a_{12}ba_{21}$. Вынесем общий множитель за скобки $b(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$, тогда в скобках останутся члены исходного определителя. Значит

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ba_{21} & ba_{22} \end{vmatrix} = b \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Свойство 6. Если две строки (два столбца) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

Доказательство. Пусть две строки определителя пропорциональны, т.е. элементы одной получаются умножением элементов другой на коэффициент пропорциональности. После вынесения коэффициента пропорциональности за знак определителя по свойству 5, у определителя окажутся две одинаковые строки. А такой определитель (по свойству 4) равен нулю.

Свойство 7. Если все элементы некоторой строки (столбца) состоят из двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, в одном из которых элементами этой строки (столбца) являются первые слагаемые, во втором – вторые, а остальные элементы такие же, как и в данном определителе, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \dots & a_{in}+b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Каждый член данного определителя содержит множитель, и притом, только из той строки, элементы которой состоят из двух слагаемых. Раскрыв скобки в этом члене, получим два слагаемых: в одном вместо суммы множителем служит первое слагаемое элемента рассматриваемой строки, в другом – второе. Все первые и все вторые слагаемые образуют определители. У первого из них элементами указанной строки служат первые слагаемые, у второго – вторые слагаемые, а остальные элементы обоих определителей совпадают с элементами данного определителя.

Свойство 8. Определитель не изменится, если к элементам какой – ни будь строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженное на любое число λ, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+\lambda a_{j1} & a_{i2}+\lambda a_{j2} & \dots & a_{in}+\lambda a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (*)$$

Доказательство. В правой части равенства (*) элементы i-й строки состоят из двух слагаемых. Поэтому согласно свойству 7 справедливо равенство

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+\lambda a_{j1} & a_{i2}+\lambda a_{j2} & \dots & a_{in}+\lambda a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (**)$$

Но по свойству 4 второе слагаемое правой части этого равенства равно нулю, так как две строки определителя (i-я и j-я) одинаковы. Тогда, из равенства (**) следует равенство (*).

Замечание. Перечисленные свойства широко используются для упрощения вычисления определителей.

4. Миноры и алгебраические дополнения. Свойство 9 (теорема Лапласа)

Для того чтобы сформулировать последнее свойство определителей требуются новые понятия и определения.

Определение. Если в определителе n-го порядка выделить некоторый элемент, например, a_{ij}, и вычеркнуть строку и столбец, в которых этот элемент находится (i-я строка и j-й столбец), то в результате останется определитель $(n-1)$-го порядка. Этот оставшийся определитель называется **минором** элемента a_{ij} и обозначается символом M_{ij}.

Пример 8. Для определителя 4-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Выделим элемент a_{32} и вычеркнем 3-ю строку и 2-й столбец, в которых находится этот элемент. Получим минор элемента a_{32}

$$M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Очевидно, количество миноров $(n-1)$ - го порядка будет столько, сколько элементов содержит определитель, т.е. $n \cdot n$.

Если в миноре $(n-1)$ - го порядка выбрать какой-либо элемент и вычеркнуть строку и столбец, в которых он находится, то получим минор $(n-2)$ - го порядка. Аналогично, можно говорить о минорах $(n-3)$ - го, $(n-4)$ - го порядка и т.д., минором 1-го порядка являются сами элементы определителя.

Определение. Алгебраическим дополнением элемента называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$. Алгебраическое дополнение обозначается символом A_{ij}.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Пример 9. Дан определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Выделим элемент 5 и вычеркнем строку и столбец, в которых он находится. Получим

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Алгебраическое дополнение этого элемента

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot M_{22}=(+1)\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=6-3=3.$$

Упражнение

Вычислить алгебраические дополнения элементов a_{12}, a_{13} и a_{31} для определителя

а) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 5 & -1 & -2\\ 0 & 4 & 3\end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ -2 & 3 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -6\\ 4 & -4 & 0 & 2\end{vmatrix}$; с) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ 3 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & -5\end{vmatrix}$.

Теперь приведем последнее свойство определителей (без доказательства).

Свойство 9 (теорема Лапласа). Определитель равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения, т.е.

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}$$

или то же самое

$$\Delta=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}.$$

Определение. Эта формула называется **формулой разложения определителя** Δ по элементам i-й строки.

Очевидно, также имеет место **формула разложения определителя Δ** по элементам $\boldsymbol{j}$-го столбца:

$$\Delta=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}.$$

Следствие. Сумма произведений всех элементов некоторой строки (некоторого столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (или другого столбца) равна нулю.

Пример 10. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Разложим его по элементам первой строки. Имеем

$$\Delta = 2A_{11} + A_{12} + 3A_{13} = 2(-1)^{1+1} \cdot M_{11} + (-1)^{1+2} \cdot M_{12} + (-1)^{1+3} \cdot M_{13} =$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(9-8) - (15-2) + 3(20-3) = 2 - 13 + 51 = 40.$$

Читатель может самостоятельно разложить определитель по другим строкам и столбцам определителя и убедится, что во всех случаях искомая величина будет равна 40.

Нетрудно заметить, что если у определителя какая-либо строка или столбец содержит нулевые элементы, то разложение удобнее осуществлять именно по этой строке или столбцу.

Пример 11. Пусть дан определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Вычислить такой определитель весьма просто, если разложить его по элементам второй строки:

$$\Delta = 0 \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 25 - 21 = 4.$$

Пользуясь свойствами определителя, можно превращать некоторые элементы какой-либо строки или столбца в нули, что существенно упрощает вычисления.

Пример 12. Дан определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Пользуясь свойством 8, прибавим к элементам первой строки соответствующие элементы третьей строки, умноженные на -1. От этого определитель не изменится:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Как видим, среди элементов 1-й строки появился один нулевой. Теперь прибавим к элементам 2-го столбца соответствующие элементы третьего столбца, умноженные на -2. Получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель также равноценен исходному. Но его 1-я стока и 2-й столбец содержит по два нулевых элемента. Разложив, например, этот определитель по элементам 2-го столбца, имеем:

$$\Delta = 0 \cdot A_{12} + (-1) \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{32} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (0+3) = -3.$$

Упражнения

1. Вычислить определители

а) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; с) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$.

2. Разложить следующие определители:

а) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ - по элементам второго столбца;

в) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ - по элементам третьей строки;

с) $\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}$ - по элементам второго столбца.

3.Пользуясь свойствами определителей, включая разложение по строке или по столбцу доказать тождество:

$$\begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3 .$$

4. Пользуясь теоремой Лапласа, вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; с) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 3 & 0 \\ 7 & 1 & 3 & 5 \\ 8 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}$.

5. Вычислить определитель порядка $\boldsymbol{n}$, элементы которого заданы условием: $a_{ij} = \min(i, j)$.

Вопросы для самопроверки

1. Что представляет собой определитель (детерминант) матрицы A?

2. Что называется главной (первой) диагональю определителя?

3. Что называется побочной (второй) диагональю определителя?

4. Что называется перестановкой чисел?

5. Что называется инверсией (беспорядком) в перестановке?

6. Приведите прием подсчета числа инверсий (беспорядков) в перестановке.

7. Как определяется знак члена определителя n - го порядка?

8. Как вычисляются определители второго порядка?

9. С помощью какого правила можно вычислить определители третьего порядка?

10.Что такое транспонирование определителя? Докажите, что определитель не изменяется при транспонировании.

11. Чему равен определитель, если все элементы одной из его строк (или одного из его столбцов) равны нулю? Докажите это утверждение.

12. Почему определитель меняет знак, если в нем поменять местами две строки (или два столбца)?

13. Почему определитель равен нулю, если в нем имеются две одинаковые строки или два одинаковых столбца?

14. Как изменится определитель, если все элементы некоторой его строки (или столбца) умножить на какое-либо число?

15. Почему определитель равен нулю, если две его строки (или два столбца) пропорциональны?

16. Чему равен определитель, у которого все элементы какой-либо строки (или столбца) представляют собой сумму двух слагаемых?

17. Изменится ли определитель, если к элементам какой-либо его строки (или столбца) прибавить произведение соответствующих элементов другой строки (или столбца) на какое-либо постоянное число? Докажите это утверждение.

18.Что называется минором элемента определителя?

19. Что называется алгебраическим дополнением элемента определителя и как определяется его знак?

20. Как вычисляются определители с помощью алгебраических дополнений их элементов?

§3. Обратная матрица. Ранг матрицы

Ключевые слова: *неособенная матрица, особенная матрица, присоединенная матрица, обратная матрица, ортогональная матрица, ранг матрицы, минор k - го порядка матрицы, окаймляющий минор, ступенчатая матрица, каноническая матрица, характеристическое или вековое уравнение матрицы, характеристический многочлен матрицы, главные миноры, след матрицы, собственные значения или характеристические числа матрицы.*

Теперь, после изложения теории определителей продолжим дальнейшее изучение матриц.

1. Некоторые определения

Определение. Квадратная матрица называется **невырожденной** или **неособенной**, если ее определитель не равен нулю, и **вырожденной** или **особенной**, если ее определитель равен нулю.

Пример 1. Даны матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 4 & -1\\ 5 & 0 & 0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -5 & 10\end{pmatrix},\qquad E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Установить, какие из них являются неособенными.

Решение

Вычислим определители данных матриц.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 4 & -1\\ 5 & 0 & 0\end{vmatrix}=10-60=-50.\quad |B|=\begin{vmatrix}1 & -2\\ -5 & 10\end{vmatrix}=10-10=0.\quad |E|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1.$$

Следовательно, матрицы A и E - неособенные, а матрица B - особенная.

Замечание. Определитель единичной матрицы любого порядка, очевидно, равен единице.

Определение. Присоединенной к квадратной матрице A называется матрица $\overline{A}$ того же порядка, элементами которой являются алгебраические дополнения соответствующих элементов определителя матрицы A', транспонированной относительно матрицы A.

Таким образом, если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{i1} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{i2} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1j} & a_{2j} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{nj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{m2} & \dots & a_{in} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

то

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{i1} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{i2} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1j} & A_{2j} & \dots & A_{ij} & \dots & A_{nj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{m2} & \dots & A_{in} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

найти присоединенную матрицу.

Решение

Найдем матрицу A', транспонированную относительно матрицы A:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим элементы присоединенной матрицы:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -10,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -15, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -20, \ A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -10, \ A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4.$$

Следовательно, матрица $\overline{A}$, присоединенная к матрице A, имеет вид

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -10 \\ -5 & -15 & 1 \\ -20 & -10 & 4 \end{pmatrix}.$$

Упражнения

1. Найти присоединенную матрицу для матрицы второго порядка A, если:

$a)$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $ad - bc \neq 0$; $b)$ $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $c)$ $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Найти присоединенную матрицу для матрицы третьего порядка A, если:

$a)$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$; $b)$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; $c)$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Определитель произведения двух матриц

Отметим одно интересное свойство.

Если A и B - квадратные матрицы одного и того же порядка, то $|AB| = |BA| = |A| \cdot |B|$.

Пример 3. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно вычислить, что

$$AB = \begin{pmatrix} 17 & 21 & 11 \\ 27 & 33 & 18 \\ 20 & 34 & 19 \end{pmatrix}; \qquad BA = \begin{pmatrix} 17 & 13 & 16 \\ 32 & 29 & 25 \\ 28 & 23 & 23 \end{pmatrix}.$$

Несмотря на то, что полученные матрицы различны, их определители равны: $|AB| = |BA| = -120$. С другой стороны, $|A| \cdot |B| = -3 \cdot 40 = -120$.

Упражнение

Вычислить $|AB|$ и $|BA|$, если

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$b)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Обратная матрица

Определение. Обратной матрицей для квадратной матрицы A порядка n называется квадратная матрица того же порядка, которая, будучи умноженной как справа, так и слева на данную матрицу, дает единичную матрицу.

Обозначим для матрицы A обратную ей матрицу A^{-1}. Тогда, по определению, имеем

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

Пример 4

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E;$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Определение. Нахождение обратной матрицы для данной матрицы называется **обращением данной матрицы.**

Существуют несколько методов обращения матриц.

Теорема. Для того чтобы матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы она была неособенной, т.е. ее определитель был отличен от нуля.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что матрица A имеет обратную A^{-1}, т.е. $A \cdot A^{-1} = E$. Тогда, согласно утверждению об определителе произведения двух матриц, имеем $|A| \cdot |A^{-1}| = |E| = 1$, откуда $|A| \neq 0$.

Достаточность. Теперь предположим, что $|A| \neq 0$. Построим присоединенную матрицу

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{i1} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{i2} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1j} & A_{2j} & \dots & A_{ij} & \dots & A_{nj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{m2} & \dots & A_{in} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

к квадратной матрице A.

Рассмотрим произведение матриц A и $\overline{A}$:

$$A\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{i1} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{i2} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1j} & A_{2j} & \dots & A_{ij} & \dots & A_{nj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{m2} & \dots & A_{in} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Вычисляя общий элемент матрицы $A\overline{A}$ по правилу умножения матриц, получим, что он равен $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn}$.

Известно, что сумма произведений элементов некоторой строки определителя на их алгебраические дополнения равна определителю (свойство 9 определителей - теорема Лапласа), а сумма произведений элементов некоторой строки на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки равна нулю (следствие теоремы Лапласа), т.е.

$$\sum_{s=1}^{n} a_{is}A_{js} = \delta_{ij}|A|,$$

где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & при \quad i \neq j, \\ 0 & при \quad i = j. \end{cases}$$

Поэтому в результате перемножения матриц A и $\overline{A}$ будет получена скалярная матрица

$$\begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix} = |A| \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$A\overline{A} = |A|E. \tag{*}$$

Аналогичным путем устанавливается равенство

$$\overline{A}A = |A|E. \tag{**}$$

Таким образом, мы установили основное свойство присоединенной матрицы $\overline{A}$, выражаемое равенствами (*) и (**).

Из равенств (*) и (**) следует, что матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \overline{A},$$

или

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots & \frac{A_{i1}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{i2}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1j}}{|A|} & \frac{A_{2j}}{|A|} & \dots & \frac{A_{ij}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nj}}{|A|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{m2}}{|A|} & \dots & \frac{A_{in}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix} \tag{***}$$

является обратной для матрицы A.

Действительно, в силу (*)

$$AA^{-1} = A \cdot \frac{1}{|A|} \overline{A} = \frac{1}{|A|} A \cdot \overline{A} = E,$$

а из равенства (**) следует, что построенная матрица A^{-1} обладает также свойством

$$A^{-1}A = E\,.$$

Теорема доказана.

Равенство (***) дает возможность вычисления обратной матрицы.

Упражнения

1. Для данной матрицы A ее обратная матрица A^{-1} является **единственной.**

2. Особенная матрица не имеет обратной.

Пример 5. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

найти обратную матрицу.

Решение

Так как определитель матрицы

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0\,\text{,}$$

то матрица $\boldsymbol{A}$ неособенная.

Составим присоединенную матрицу

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

В данном случае

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1; \qquad A_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3; \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3; \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2; \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Разделив все элементы матрицы $\overline{A}$ на $|A| = 5$, получим обратную матрицу

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Пример 6. Найти обратную матрицу для треугольной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение

Данная матрица неособенная, т.е. ее определитель отличен от нуля:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Составим присоединенную матрицу

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Разделив все элементы матрицы $\overline{A}$ на $|A| = 2$, получим

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Замечание. Легко увидеть, что матрица обратная неособенной треугольной матрице, всегда представляет собой также треугольную матрицу того же типа. Это обстоятельство может быть использовано при вычислении обратной матрицы для заданной треугольной.

Упражнение

Найти обратные матрицы A^{-1}, если:

$a)\ A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $ad-bc\neq 0$; $\quad b)\ A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $\quad c)\ A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$;

$d)\ A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$; $e)\ A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; $f)\ A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Замечание. Вычисление обратной матрицы по формуле (***) очень трудоемко, особенно для матриц высокого порядка. Поэтому равенство (***) важно лишь в теоретическом отношении, а на практике пользуются другими методами численного нахождения обратной матрицы. Один из этих методов мы рассмотрим п. 4.4.

Свойства обратных матриц. Легко проверить, что:

1) $\left|A^{-1}\right| = |A|^{-1}$;

2) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;

3) $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$;

4) $(A')^{-1} = \left(A^{-1}\right)'$.

Для проверки, например, третьего равенства достаточно рассмотреть произведение

$$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = (AE)A^{-1} = AB^{-1} = E,$$

откуда

$$B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}.$$

Для проверки четвертого равенства рассмотрим произведение

$$A'\left(A^{-1}\right)' = \left(A^{-1}A\right)' = E' = E,$$

откуда

$$\left(A^{-1}\right)' = (A')^{-1}.$$

Для квадратных матриц введем одно определение, которое связанно с операциями транспонирования и обращения.

Квадратная матрица ***A*** называется ортогональной, если

$A \cdot A' = A'A = E$,

т.е. если транспонированная матрица обратна исходной. Отсюда, в частности, следует, что **каждая ортогональная матрица обратима.**

Так как $(A')' = A$, то из $A \cdot A' = A'A = E$ вытекает, что **обратная матрица к ортогональной матрице есть ортогональная матрица.**

Очевидно, что если A **ортогональная матрица, то** $|A| = \pm 1$**.**

Далее, если матрицы $A,\ B$ ортогональны, то

$$A' = A^{-1}, \quad B' = B^{-1}$$

и, значит,

$$(AB)' = B'A' = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}.$$

Иными словами, **произведение ортогональных матриц есть ортогональная матрица.**

Упражнения

1. Покажите, какие из приведенных ниже матриц ортогональны:

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ -0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix};\ b)\ A = \begin{pmatrix} \sin 2 & 0 & \cos 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos 2 & 0 & \sin 2 \end{pmatrix};\ c)\ A = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{6}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

2. Определите такие a, b, c, чтобы матрица $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1}{2} & c \end{pmatrix}$ оказалась ортогональной.

3. При каком условии диагональная матрица является ортогональной?

4. Покажите, что любая ортогональная матрица второго порядка может быть представлена в виде

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

5. Пусть $AB = BA$ и T - ортогональная матрица, тогда матрицы TAT' и TBT' коммутативны. Покажите это.

4. Ранг матрицы

4.1. Ранг матрицы. Вычисление ранга матрицы методом окаймления

В матричном исчислении важное значение имеет понятие ранга матрицы. Сначала, прежде чем вводить понятие ранга матрицы введем понятие минора k - го порядка матрицы.

Ранее отмечалось, что определитель порядка n может иметь миноры различных порядков: $(n-1)$, $(n-2)$, $(n-3)$ и т.д.

Аналогично обстоит дело и с минорами матриц.

Пусть дана матрица A размерностью $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Определение. Выделим в ней произвольно k строк и k столбцов. Тогда получим квадратную матрицу k-то порядка. Определитель этой матрицы называется **минором k - го порядка матрицы A**.

Выбирая всевозможными способами по k строк и k столбцов, получаем всевозможные миноры k-го порядка матрицы A. Очевидно, что максимальный порядок минора может равняться меньшему числу из m и n.

Но миноры могут быть и других порядков: $(k-1)$-го, $(k-2)$-го, $(k-3)$-го и т.д. вплоть до миноров 1-го порядка (каждый отдельный элемент матрицы A).

Определение. Рангом матрицы A называется наибольшее из порядков миноров, отличных от нуля и обозначается $rangA$ или $r(A)$.

Таким образом, ранг матрицы определяется максимальным порядком минора, отличного от нуля. Если матрица A имеет ранг r, то это означает, что существует в этой матрице минор порядка r, отличный от нуля, а всякий минор порядка большего, чем r, равен нулю (в противном случае именно он определял бы ранг матрицы).

Пусть выделенное из матрицы A максимальное количество произвольных k строк и k столбцов (предположим, что $n<m$ и поэтому $k=n$) составляет следующую квадратную матрицу:

$$A_1=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если определитель, составленный из элементов этой матрицы, не равен нулю, то это означает, что матрица A размерностью $m\times n$ имеет ранг, равный n. Если же этот определитель равен нулю, то ранг матрицы A меньше n.

Выделим в матрице элемент a_{ij} и вычеркнем строку и столбец, в которых он находится. Получим минор $(n-1)$-го порядка.

Количество миноров этого порядка, естественно, равно количеству элементов матрицы, т.е. $n\times n$. Если среди этих элементов имеется хотя бы один, отличный от нуля, то ранг матрицы равен $n-1$. Если же все миноры этого порядка равны нулю, то тогда надлежит рассмотреть все миноры $(n-2)$-го порядка и т.д.

Практический способ вычисления ранга матрицы (исходя из вышеизложенного) состоит в следующем: в заданной матрице выбираем минор 2-го порядка, не равный нулю. Если такого минора нет, то ранг матрицы будет равен единице (если, конечно, матрица не нулевая, т.е. не все ее элементы равны нулю; нулевая матрица имеет ранг 0).

Затем находим значение миноров, окаймляющих выбранный.

Определение. Минором, окаймляющим данный минор, называется минор высшего порядка по отношению к данному, если этот минор высшего порядка содержит данный минор.

Если найдется минор, отличный от нуля, то продолжаем окаймление дальше, если же такого минора не окажется, то ранг равен 2 и т.д.

Пример 7. Найти ранг матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение

Находим минор 2-го порядка, не равный нулю, например, минор, составленный из элементов, расположенных в левом верхнем углу матрицы:

$$M=\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}=-16\neq 0.$$

Окаймляем его. Возможны четыре варианта окаймления, но во всех случаях эти миноры 3-го порядка оказываются равными нулю:

$$M_1=\begin{vmatrix} 0 & 4 & 10 \\ 4 & 8 & 18 \\ 10 & 18 & 40 \end{vmatrix}=0; \qquad M_2=\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 7 \\ 10 & 18 & 17 \end{vmatrix}=0;$$

$$M_3=\begin{vmatrix} 0 & 4 & 10 \\ 4 & 8 & 18 \\ 1 & 7 & 17 \end{vmatrix}=0; \qquad M_4=\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 7 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix}=0.$$

Ранг матрицы равен 2, так как наивысший порядок минора, отличного от нуля, равен 2.

Пример 8. Найти ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение

Левый верхний минор 2-го порядка равен нулю

$$M = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Возьмем другой минор 2-го порядка, например,

$$M = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Окаймляем его и получим минор 3-го порядка:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Продолжим окаймление. Здесь возможны два варианта, определить которые рекомендуется читателю. В обоих случаях миноры 4-го порядка окажутся равными нулю. Значит, матрица A имеет ранг 3, т.е. $r(A) = 3$.

Упражнения

1. Найти ранг следующих матриц:

$$a)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 7 \\ -1 & -3 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & -1 \\ 7 & 9 & 7 & 1 \end{pmatrix}; \quad b)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad c)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

2. Найти ранг следующих матриц, в которых участвуют буквенные элементы:

$$a)\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}; \qquad b)\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ a & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \qquad c)\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Такое вычисление ранга является, вообще громоздким, так как приходится часто рассматривать большое число миноров матрицы. Существуют более эффективные способы вычисления ранга матрицы, основанные на приведении матрицы к ступенчатому или каноническому виду. Их мы рассмотрим в п. 4.3.

4.2. Основные свойства ранга матрицы

Рассмотрим теперь те свойства ранга матрицы, которые упрощают его вычисление.

Свойство 1. При транспонировании матрицы ее ранг не меняется.

Свойство 2. Ранг матрицы не меняется при перестановке ее столбцов (или строк).

Свойство 3. Ранг матрицы не меняется при умножении всех элементов ее столбца (или строки) на отличное от нуля число.

Свойство 4. Ранг матрицы не изменится, если к одному из ее столбцов (или строк) прибавить другой столбец (соответственно, строку), умножив его (ее) на некоторое число.

Свойство 5. Ранг матрицы не изменится, если удалить из нее столбец, равный нулю.

Свойство 6. Ранг матрицы не изменится, если удалить из нее столбец, являющийся линейной комбинацией других столбцов.

В формулировках свойств 5 и 6, разумеется, столбцы можно заменить строками.

4.3. Элементарные преобразования матрицы. Простейший метод вычисления ранга матрицы

Определение. Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие преобразования:

1) перестановка двух любых столбцов (или строк);

2) умножение столбца (или строки) на отличное от нуля число;

3) прибавление к одному столбцу (или строке) линейной комбинации остальных столбцов (или строк).

Как было отмечено в п. 4.2, при элементарных преобразованиях матрицы ее ранг не меняется.

Определение. Две матрицы называются **эквивалентными**, если одна из них получается из другой с помощью конечного множества элементарных преобразований.

Эквивалентные матрицы не являются, вообще говоря, равными, но их ранги равны. Если матрицы A и B эквивалентны, то это записывается так: $A \sim B$.

Любая матрица при помощи элементарных преобразований только строк приводится к ступенчатой. Ранг ступенчатой матрицы равен числу ее ненулевых строк.

При помощи элементарных преобразований строк и столбцов любую матрицу можно привести к канонической. Ранг канонической матрицы равен числу единиц на ее главной диагонали.

Простейший метод вычисления ранга матрицы с числовыми элементами состоит в приведении ее элементарными преобразованиями к ступенчатой или канонической матрице.

Пример 9. Найти ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Решение

При помощи элементарных преобразований приводим эту матрицу к ступенчатому виду.

Из второй строки вычтем первую и переставим эти строки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Теперь из второй и третьей строк вычтем первую, умноженную, соответственно, на 2 и 5:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \end{pmatrix},$$

из третьей строки вычтем вторую; получим ступенчатую матрицу

$$
B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

которая эквивалентна матрице A, так как получена из нее с помощью конечного множества эквивалентных преобразований.

Очевидно, что ранг матрицы B равен двум, а, следовательно, и $r(A)=2$.

Матрицу B легко привести к канонической. Вычитая первый столбец, умноженный на подходящие числа, из всех последующих, обратим в нуль все элементы первой строки, кроме первого, причем элементы остальных строк не изменяются. Затем, вычитая второй столбец, умноженный на подходящие числа из последующих, обратим в нуль все элементы второй строки, кроме второго, и получим каноническую матрицу

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Упражнение

При помощи элементарных преобразований найти ранги следующих матриц:

$$
a)\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 3 & -9 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & -5 & 7 & 2 & -7 \end{pmatrix}; \qquad b)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix};
$$

$$
c)\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & -1 & -3 \\ 1 & 4 & 1 & 5 & 11 \\ -1 & -4 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix}; \qquad d)\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ -8 & -5 & -12 & 5 & 1 \\ 8 & 9 & 13 & -7 & 3 \end{pmatrix}.
$$

Замечание. Процедура вычисления ранга матрицы методом элементарных преобразований позволяет решить и другую задачу: выделить из системы столбцов (строк) этой матрицы базис, а также найти выражения всех столбцов (строк) через базисные. Это мы покажем на примере в п. 5.2.

Сейчас покажем применения элементарных преобразований к отысканию обратной матрицы.

4.4. Применение элементарных преобразований к отысканию обратной матрицы

Легко проверить, что всякое элементарное преобразование квадратной матрицы A эквивалентно умножению последней на неособенную матрицу специального вида, представляющую собой результат применения соответствующего элементарного преобразования к единичной матрице того же порядка, что и данная матрица A. При этом, если преобразование производится над столбцами матрицы A, то ее следует умножить справа на матрицу специального вида, а если преобразование производится над строками, то умножить слева.

Так, например, перестановка двух столбцов матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

эквивалентна умножению этой матрицы справа на матрицу, полученную из единичной матрицы того же порядка перестановкой соответствующих столбцов, т.е.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Прибавление к третьему столбцу матрицы A линейной комбинации первых двух столбцов эквивалентно умножению матрицы A справа на матрицу вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что эта матрица получена из единичной матрицы того же порядка, что и матрица A, прибавлением к третьему столбцу линейной комбинации первых двух столбцов.

Выполним указанное умножение:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \alpha a_{11} + \beta a_{12} + a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \alpha a_{21} + \beta a_{22} + a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \alpha a_{31} + \beta a_{32} + a_{33} \end{pmatrix}.$$

Любую неособенную матрицу A путем элементарных преобразований только столбцов (или только строк) можно привести к единичной матрице E. Если совершенные над матрицей A элементарные преобразования в том же порядке применить к единичной матрице E, то в результате получится обратная матрица A^{-1}.

Действительно, пусть в результате одинаковых элементарных преобразований, совершенных над столбцами матриц A и E в равенстве

$$A^{-1}A = E,$$

матрица A превратилась в единичную, а матрица E- в некоторую $\tilde{E}$. Указанным преобразованиям отвечает умножение матриц A и E справа на матрицу $\tilde{E}$, т.е. $\left(A^{-1}A\right)\tilde{E} = E\tilde{E}$. Учитывая, что $A\tilde{E} = E$, имеем $A^{-1} = \tilde{E}$, т.е. обратная матрица A^{-1} представляет собой преобразованную единичную матрицу.

Удобно совершать элементарные преобразования над матрицами A и E одновременно, записывая обе матрицы рядом через черту.

Отметим еще раз, что при отыскании канонического вида квадратной матрицы с целью нахождения ее ранга можно пользоваться преобразованиями строк и столбцов. В случае, когда одновременно надо найти обратную матрицу (если она существует), в процессе преобразований следует использовать только строки или только столбцы.

Пример 10. Методом элементарных преобразований найти обратную матрицу для матрицы

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 5 & 2 & 4\\ 7 & 3 & 2\end{pmatrix}.$$

Решение

Поменяем местами первый и второй столбцы:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 5 & 4 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 7 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right).$$

К третьему столбцу прибавим первый, а ко второму – первый, умноженный на -2:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 6 & 1 & -2 & 1\\ 3 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1\end{array}\right).$$

Из первого столбца вычтем удвоенный второй, а из третьего – умноженный на 6 второй:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -6\\ 0 & 1 & 0 & 5 & -2 & 13\\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right).$$

Прибавим третий столбец к первому и второму:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -8 & -5 & -6\\ 0 & 1 & 0 & 18 & 11 & 13\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right).$$

Умножим последний столбец на -1:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -8 & -5 & 6\\ 0 & 1 & 0 & 18 & 11 & -13\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1\end{array}\right).$$

Полученная справа от вертикальной черты квадратная матрица является обратной к данной матрице A. Итак,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & -5 & 6 \\ 18 & 11 & -13 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Упражнение

Методом элементарных преобразований найти обратную матрицу для следующих матриц:

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ b)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix};\ c)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & -8 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. Теорема о базисном миноре. Необходимое условие равенства нулю определителя

5.1. Теорема о базисном миноре

Определение. Пусть дана матрица A ранга r. Тогда по определению ранга эта матрица содержит отличный от нуля минор r-го порядка. Всякий такой минор будем называть **базисным минором** матрицы A.

Ясно, что у данной матрицы может быть несколько базисных миноров. Выберем и зафиксируем один из них. Столбцы и строки матрицы, на пересечении которых расположены элементы выбранного нами базисного минора, назовем **базисными столбцами и строками.**

Для любого базисного минора имеет место следующая важная теорема.

Теорема *(теорема о базисном миноре).* Всякий столбец матрицы является линейной комбинацией ее базисных столбцов; сами базисные столбцы линейно независимы.

Замечание. Теореме о базисном миноре можно придать также следующий вид. Пусть, например, $A^{\wedge}$ означает матрицу, полученную из данной матрицы A вычеркиванием всех строк, не входящих в число базисных. Тогда каждая строка матрицы A является линейной комбинацией строк матрицы $A^{\wedge}$:

$$\begin{aligned} a_{i1} &= \lambda_{i1}a_{11} + \lambda_{i2}a_{21} + \cdots + \lambda_{ir}a_{r1}, \\ a_{i2} &= \lambda_{i1}a_{12} + \lambda_{i2}a_{22} + \cdots + \lambda_{ir}a_{r2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{in} &= \lambda_{i1}a_{1n} + \lambda_{i2}a_{2n} + \cdots + \lambda_{ir}a_{rn}. \end{aligned} \qquad (i = 1,2,\ldots,m).$$

Составив матрицу из коэффициентов этих линейных зависимостей $\Lambda = (\lambda_{ij})$, легко найдем, что

$$A = \Lambda A^{\Lambda}.$$

Таким образом, получаем следующую форму теоремы о базисном миноре:

Пусть A^{Λ} - матрица, составленная из базисных строк матрицы A. Тогда существует матрица Λ, удовлетворяющая соотношению $\Lambda A^{\Lambda} = A$.

Применяя те же соображения к матрице A' и транспонируя полученное равенство, установим существование матрицы M такой, что $A^{\Lambda}M = A$(здесь A^{Λ}- матрица, составленная из базисных столбцов матрицы A).

Пример 11. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

найти базис системы строк и выразить небазисные строки через базисные – небазисные строки представить как линейную комбинацию базисных строк.

Решение

Эту задачу мы будем решать, используя процедуру вычисления ранга матрицы методом элементарных преобразований.

Подвергаем матрицу A элементарным преобразованиям. В получаемых матрицах справа от каждой строки пишем ее выражение через A_1, A_2, A_3, A_4, A_5- строки исходной матрицы A. Итак имеем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 + A_1 \\ A_3 \\ A_4 - 2A_1 \\ A_5 - A_1 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{25}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 + A_1 \\ A_3 - (A_2 + A_1) \\ A_4 - 2A_1 \\ A_5 - A_1 + \frac{3}{2}(A_2 + A_1) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{28}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 + A_1 \\ A_3 - A_2 - A_1 \\ A_4 - 2A_1 - (A_3 - A_2 - A_1) \\ A_5 + \frac{3}{2}A_2 + \frac{1}{2}A_1 + \frac{25}{2}(A_3 - A_2 - A_1). \end{matrix}$$

После всех преобразований четвертая строка матрицы $\boldsymbol{A}$ превратилась в нулевую. Значит, строки A_1, A_2, A_3, A_5 образуют базис системы строк. Тем самым ранг матрицы A равен 4. Далее, из равенства

$$A_4 - 2A_1 - (A_3 - A_2 - A_1) = 0$$

находим выражение вектора $\boldsymbol{A}_4$ через базисные векторы:

$$A_4 = A_1 - A_2 + A_3.$$

Другими словами, последнее соотношение представляет тот факт, что четвертая строка (вектор A_4) является линейной комбинацией базисных строк (базисных векторов A_1, A_2, A_3, A_5).

Упражнение

Методом элементарных преобразований выделить в матрице базисные строки, и найти выражения небазисных строк через базисные, т.е. небазисные строки представить как линейную комбинацию базисных строк.

$$a)\begin{pmatrix}5 & 2 & -3 & 1\\ 4 & 1 & -2 & 3\\ 1 & 1 & -1 & -2\\ 3 & 4 & -1 & 2\end{pmatrix};\quad b)\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 4 & 5 & 6\\ 4 & 5 & 6 & 7\end{pmatrix};\quad c)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1\\ 1 & 3 & 6 & 10 & 2\\ 1 & 4 & 10 & 20 & 1\end{pmatrix}.$$

5.2. Необходимое условие равенства нулю определителя

В качестве следствия из теоремы о базисном миноре приведем следующее утверждение.

Теорема *(необходимое условие равенства определителя нулю).* Если определитель равен нулю, то его столбцы (и строки) линейно зависимы.

Замечание. Обратное утверждение, т.е. достаточность условия линейной зависимости строк или столбцов определителя для его равенства нулю, можно получить из свойств определителя.

Это утверждение можно сформулировать так:

Если столбцы (строки) определителя линейно зависимы, то данный определитель равен нулю.

Объединяя эти результаты, получаем:

Определитель равен нулю тогда и только тогда, когда его столбцы (или строки) линейно зависимы.

Стоит заметить, что согласно теореме (необходимое условие равенства определителя нулю) из линейной зависимости строк определителя следует линейная зависимость его столбцов.

6. Характеристический многочлен матрицы

С каждой квадратной матрицей связаны два многочлена: характеристический и минимальный. Эти многочлены играют большую роль в различных вопросах теории матриц и задач, в том числе экономических, где используются теория матриц. Ниже вводится понятие характеристического многочлена, и приводятся самые простые его свойства. Введение понятия минимального многочлена матрицы и изучения его свойства выходит за рамки данного курса.

Определение. Характеристическим или вековым уравнением матрицы $A=(a_{ij})$ называется уравнение вида

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Левая часть этого уравнения называется **характеристическим многочленом матрицы** A**.**

Очевидно, степень этого многочлена равна n.

Характеристическое уравнение матрицы A можно записать в сокращенном виде

$$|A-\lambda E|=0,$$

где $\boldsymbol{E}$ - единичная матрица того же порядка, что и матрица A.

Обозначим характеристический многочлен через $\varphi(\lambda)$**.** Тогда

$$\varphi(\lambda)=|A-\lambda E|=(-1)^n\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\dots+p_k\lambda^{n-k}+\dots+p_n.$$

Можно показать, что коэффициенты характеристического многочлена следующим образом выражаются через элементы матрицы A:

$$p_k=(-1)^{n-k}S_k,$$

где S_k- сумма всех **главных миноров**, т.е. миноров симметрично расположенных относительно главной диагонали, порядка k матрицы A. В частности,

$$p_1=(-1)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn}),\quad p_n=|A|.$$

Определение. Сумма диагональных элементов $a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn}$ называется **следом матрицы** A и обозначается через SpA, т.е.

$$SpA=a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn}.$$

Определение. Корни характеристического многочлена называются **собственными значениями** или **характеристическими числами**[1] **матрицы** A**.**

---

[1] Термин «собственное значение» широко используется в инженерных и физических задачах. В математической и экономической литературе чаще пользуются термином «характеристическое число».

Определение. Совокупность всех собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, где каждое число фигурирует столько раз, какова его кратность как корня характеристического многочлена, называется **спектром матрицы** A**.**

Согласно формулам Виета произведение корней характеристического многочлена равно свободному члену, т.е.

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n = |A|.$$

Отсюда следует, что
матрица A тогда и только тогда имеет хотя бы одно собственное значение, равное нулю, когда она вырождена $(|A| = 0)$.

Пример 12. Найти собственные значения матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение

Составим характеристическое уравнение матрицы A:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислив определитель третьего порядка, получим

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0, \qquad (\lambda+1)^3 = 0.$$

Откуда имеем $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Упражнение

Найти собственные значения следующих матриц:

$a)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};\quad b)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};\quad c)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix};\quad d)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 18 \\ 2 & 2 \end{pmatrix};$

$e)\ A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix};\quad f)\ A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix};\quad g)\ A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{pmatrix}.$

Замечание. Численное нахождение собственных значений матрицы высокого порядка представляет значительные технические трудности. Практически удобные методы решения таких задач рассматриваются в книгах по вычислительным методам линейной алгебры.

Теперь приведем без доказательства очень полезный и интересный результат, имеющий ряд важных следствий.

Теорема Кэли – Гамильтона. Любая квадратная матрица A является корнем своего характеристического многочлена, т.е. если

$$\varphi(\lambda) = |A - \lambda E| = 0, \text{ то } \varphi(A) = \Theta.$$

Замечание. Содержание теоремы следует понимать следующим образом: сначала вычисляется скалярный многочлен $\varphi(\lambda) = |A - \lambda E|$ и только после этого, исходя из него, образуется матрица $\varphi(A)$.

Теорема Кэли - Гамильтона имеет много важных следствий. Одно из них - это возможность записать при $k \geq n$ степени A^k матрицы A в виде линейных комбинаций матриц $E, A, A^2, \ldots, A^{n-1}$.

Пример 13. Положим

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 \text{ и } A^2 - 3A + 2E = \Theta.$$

Таким образом,

$$A^2 = 3A - 2E,$$

$$A^3 = A(A^2) = 3A^2 - 2A = 3(3A - 2E) - 2A = 7A - 6E,$$

$$A^4 = 7A^2 - 6A = 15A - 14E \text{ и т.д.}$$

В то же время, постоянная в $\varphi(\lambda)$ равна определителю матрицы A и здесь он отличен от нуля; поэтому матрица A невырожденная и A^{-1} можно записать как многочлен от A. Действительно, вследствие равенства

$$\varphi(A) = A^2 - 3A + 2E,$$

получаем

$$2E = -A^2 + 3A = A(-A + 3E) \text{ или } E = A\left[\frac{1}{2}(-A + 3E)\right].$$

Это означает, что

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}E = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Упражнение

Пусть A - матрица n-го порядка имеет характеристический многочлен

$$\varphi(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \cdots + p_k\lambda^{n-k} + \cdots + p_n.$$

Записать A^k как многочлен от A степени не выше $n-1$. Проделать то же самое для нескольких последующих степеней. В предположении, что матрица A невырожденная $p_n \neq 0$, записать A^{-1} как многочлен от A степени не выше $n-1$. Сформулируем этот факт как следствие теоремы Кэли - Гамильтона.

Следствие. Если A - матрица n-го порядка невырожденная, то существует многочлен $q(\lambda)$ степени не выше $n-1$ (его коэффициенты зависят от A), такой, что $A^{-1} = q(A)$.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определения вырожденной или особенной и невырожденной, или неособенной матриц.

2. Какая матрица называется присоединенной к квадратной матрице?

3. Дайте определение обратной матрицы к данной матрице.

4. Приведите теорему существования и единственности обратной матрицы.

5. Какие методы нахождения обратной матрицы к данной матрице Вы знаете?

6. Перечислите основные свойства обратных матриц.

7. Приведите определение и свойство ортогональных матриц.

8. Приведите пример ортогональной матрицы с размерами 2×2 не являющейся диагональной.

9. Что называется минором k - го порядка? Что называется рангом матрицы?

10. Какой минор называется окаймляющим?

11. Как вычисляется ранг матрицы?

12. Перечислите основные свойства ранга матрицы.

13. Что называется элементарным преобразованием матрицы?

14. Какие эффективные способы вычисления ранга матрицы Вы знаете?

15. Какая прямоугольная матрица называется ступенчатой и канонической?

16. Какая связь существует между рангом ненулевой матрицы и числом строк ее ступенчатого вида?

17. Какая связь существует между рангом ненулевой матрицы и числом единиц на главной диагонали ее канонического вида?

18. Сформулируйте теорему о базисном миноре. Прокомментируйте эту теорему.

19. Сформулируйте в виде утверждения следствие теоремы о базисном миноре.

20. Что называется характеристическим или вековым уравнением матрицы?

21. Дайте определение характеристического многочлена матрицы.

22. Каким образом коэффициенты характеристического многочлена выражаются через элементы матрицы?

23. Что называется следом матрицы?

24. Дайте определение собственного значения или характеристического числа матрицы.

25. Что называется спектром матрицы?

26. Когда матрица имеет хотя бы одно собственное значение, равное нулю?

27. Сформулируйте теорему Кэли – Гамильтона и ее следствия.

§4. Система векторов и ее ранг

Ключевые слова: *линейная комбинация векторов, линейно зависимые и линейно независимые вектора, базис системы векторов, ранг системы векторов.*

1. Теоремы о линейной зависимости векторов

Напомним некоторые определения и ранее доказанное одно утверждение (см. §1) и несколько дополним их.

Определение. Вектором мы называем матрицу, состоящую из одного столбца (вектор-столбец) или из одной строки (вектор-строка). Элементы этой матрицы называются **компонентами вектора**. Число компонент вектора - это его размерность; вектор размерности n называется n- мерным.

Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, под словом «вектор» будем понимать вектор-столбец.

Определение. Вектор Y называется **линейной комбинацией векторов** $X_1, X_2, ..., X_n$, если имеет место равенство

$$Y = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_n X_n,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ числовые коэффициенты.

1. Для того чтобы один из векторов некоторой их совокупности (системы) $X_1, X_2, ..., X_n$ был линейной комбинацией остальных, необходимо и достаточно, чтобы все векторы системы были линейно зависимы, т.е. чтобы выполнялось соотношение

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_n X_n = \theta,$$

где не все числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ равны нулю.

2. Если некоторые векторы системы линейно зависимы, то и все векторы этой системы линейно зависимы.

3. Если все векторы первой системы являются линейными комбинациями векторов второй системы, то всякая линейная комбинация векторов первой системы является также линейной комбинацией векторов второй системы.

Из этих трех утверждений первая доказана в п.4 §4, второе и третье читатель может проверить самостоятельно.

Теперь докажем основную теорему о линейной зависимости векторов.

Теорема Штейница. Если векторы $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ являются линейными комбинациями векторов $X_1, X_2, \ldots, X_n$, то в случае $k > n$ они линейно зависимы.

Доказательство. Согласно условию теоремы имеем

$$\begin{aligned} Y_1 &= \alpha_{11}X_1 + \alpha_{21}X_2 + \cdots + \alpha_{n1}X_n, \\ Y_2 &= \alpha_{12}X_1 + \alpha_{22}X_2 + \cdots + \alpha_{n2}X_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_k &= \alpha_{1k}X_1 + \alpha_{2k}X_2 + \cdots + \alpha_{nk}X_n. \end{aligned} \qquad (1)$$

Обозначим через A матрицу, составленную из коэффициентов написанных выше линейных зависимостей:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1k} & \alpha_{2k} & \cdots & \alpha_{nk} \end{pmatrix}.$$

Так как число столбцов этой матрицы равно n, то ее ранг $r = r(A)$ удовлетворяет неравенству $r \le n$. Ввиду условия теоремы $n < k$ имеем $r < k$.

Следовательно, после выделения в матрице A r базисных строк найдется хотя бы одна, не пропавшая в их число. Это строка линейно выражается через базисные строки согласно теореме о базисном миноре. Следовательно, строки матрицы A линейно зависимы. Пусть коэффициенты этой линейной зависимости будут $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ (в порядке номеров строк).

Умножив теперь первое из равенств (1) на λ_1, второе на λ_2 и т.д. и сложив почленно эти соотношения, в правой части после очевидных преобразований получим ноль. Это означает, что векторы $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ линейно зависимы. Теорема доказана.

Следствие. Всякая система n- мерных векторов, состоящая более чем из $\boldsymbol{n}$ векторов, линейно зависима.

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить, что всякий n- мерный вектор можно представить в виде линейной комбинации следующих n векторов размерности n:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \cdots \quad E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

именно,

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = y_1 E_1 + y_2 E_2 + \cdots + y_n E_n.$$

2. Ранг системы векторов и его связь с рангом матрицы

Рассмотрим систему k векторов

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}; \qquad X_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}; \quad \cdots \quad X_k = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Определение. Любая совокупность (подсистема) векторов из данной системы (2) **называется базисом этой системы**, если:

1) векторы этой совокупности (подсистемы) линейно независимы и

2) любой вектор из системы (2) является их линейной комбинацией.

Определение. Векторы, составляющие базис данной системы, **называются базисными.**

Данная система векторов может иметь, вообще говоря, различные базисы. При этом справедлива следующая теорема.

Теорема. Все базисы данной системы векторов состоят из одного и того же числа базисных векторов.

Доказательство. Предположим, что в системе векторов (2) имеются, по крайней мере, два базиса

$$X'_1, X'_2, ..., X'_{r_1} \tag{3}$$

$$X''_1, X''_2, ..., X''_{r_2} \tag{4}$$

с различным числом векторов $(r_1 \neq r_2)$.

Пусть для определенности $r_1 < r_2$. Все векторы совокупности (4) системы принадлежат системе (3) и в силу определения базиса являются линейными комбинациями векторов совокупности (4).

Тогда в силу теоремы Штейница - основной теоремы о линейной зависимости векторов векторы совокупности (4) линейно зависимы, чего быть не может, так как эти векторы образуют базис. Полученное противоречие показывает, что наше предположение о несправедливости теоремы не может иметь места. Теорема доказана.

Определение. Число базисных векторов данной системы векторов называется **рангом этой системы векторов.**

В частности, если все векторы системы линейно независимы, то ранг этой системы равен числу векторов системы. Ранг системы нулевых векторов считается равным нулю.

Пример 1. Найти ранг системы векторов

$$X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}; \qquad X_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решение

Прежде всего, видим, что эта система линейно зависима, поскольку вектор X_3 является линейной комбинацией первых двух векторов:

$$X_3 = 2X_1 - \frac{1}{3}X_2.$$

Однако векторы X_1 и X_2 линейно независимы, так как равенство

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

может быть только в случае, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Итак, все векторы системы линейно выражаются через векторы X_1, X_2:

$$X_1 = 1 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2,$$

$$X_2 = 0 \cdot X_1 + 1 \cdot X_2,$$

$$X_3 = 2 \cdot X_1 - \frac{1}{3} \cdot X_2,$$

а сами векторы X_1, X_2 линейно независимы.

Следовательно, они образуют базис данной системы. Этот базис состоит из двух векторов, поэтому ранг системы равен 2.

Замечание. В общем случае способ нахождения ранга системы векторов непосредственно по определению, как в данном примере, бесполезен. При поверхностном рассмотрении системы векторов, часто трудно заметить в ней какие - либо линейные зависимости, хотя фактически они имеют место.

Вычисление ранга системы векторов производится на основании следующей теоремы.

Теорема. Ранг системы вектор – столбцов (строк) равен рангу матрицы, составленной из этих столбцов (строк).

Следствие. В любой матрице ранг системы ее вектор – столбцов равен рангу системы ее вектор – строк.

Аналогично доказывается утверждение, относящееся к строкам.

Упражнение

Найти ранг следующих систем векторов:

$$a) \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$b)\quad A_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix},\quad A_4=\begin{pmatrix}1\\-3\\-3\end{pmatrix};$$

$$c)\quad A_1=\begin{pmatrix}3\\1\\-3\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}-5\\2\\-1\end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix}7\\3\\4\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}11\\10\\-1\end{pmatrix}.$$

Вопросы для самопроверки

1. Что называется линейной комбинацией векторов? Что называется коэффициентами линейной комбинации?

2. Когда векторы $X_1, X_2, ..., X_n$ называются линейно зависимыми и линейно независимыми?

3. Приведите теорему, устанавливающую связь между понятиями линейной комбинации и линейной зависимости векторов.

4. Сформулируйте теоремы Штейница - основной теоремы о линейной зависимости векторов и следствие из этой теоремы.

5. Что называется базисом данной системы векторов?

6. Что можно сказать о числе базисных векторов всех базисов данной системы векторов? Сформулируйте теорему.

7. Что называется рангом данной системы векторов?

8. На основании какой теоремы производится вычисление ранга данной системы векторов? Сформулируйте теорему.

9. Почему в общем случае не применяется способ нахождения ранга системы векторов непосредственно по определению?

§5. Системы линейных алгебраических уравнений. Основные понятия

Ключевые слова и словосочетания: *линейное уравнение, система линейных уравнений, основная матрица системы, расширенная матрица системы, решение системы, совместная (разрешимая) система, несовместная (неразрешимая) система, определенная система, неопределенная система, общее решение системы, частные решения системы, эквивалентные (равносильные) системы, элементарные преобразования системы линейных уравнений, теорема Кронекера–Капелли, базисные уравнения системы, базисная система.*

1. Введение

Чтобы иллюстрировать математически некоторые законы действительного мира, необходимо создать соответствующие **математические модели** относительно одной или большего числа рассматриваемых переменных. Целью модели может быть, например, определение расстояния от Земли до Солнца как функции времени; установление связи точки кипения воды с внешним давлением или выбор наилучшего пути очистки сырой нефти для получения авиационного и моторного топлива.

Модель будет состоять из одного или большего числа уравнений или неравенств. Они могут включать только переменные величины или же одновременно и переменные величины и их производные (что дает дифференциальное уравнение), или переменные величины, связанные иными способами (например, интегральные или интегро-дифференциальные уравнения). Совершенно не обязательно, чтобы все переменные точно определялись моделью. Они могут быть случайными величинами, и тогда могут быть найдены лишь их вероятностные распределения.

Математические построения, возникающие **в современной экономической теории,** в большей или меньшей степени отличаются от соответствующих построений в физических науках. Поэтому будет неудивительно, если попытки изучения свойств экономических систем путем формального применения того аналитического аппарата, который был удобным в физике, окажутся малопродуктивными. Глубокое проникновение в сущность экономических закономерностей может быть обеспечено лишь с учетом специфических требований к математическому аппарату, предъявляемых самой природой экономических систем. Такова общая точка зрения специалистов, работающих в области современной математической экономики.

Эта экономико-математическая специфика очень часто находит формальное выражение в свойствах **линейности соответствующих математических объектов**. Так, например, законы постоянной или убывающей продуктивности выражаются в форме линейности и т.д.

Линейность представляет собой весьма общее понятие: существуют алгебраические линейные уравнения, линейные обыкновенные дифференциальные уравнения, линейные дифференциальные уравнения в частных производных, линейные интегральные уравнения и др. Все линейные модели имеют свойства **аддитивности** и **гомогенности (однородности).**

Аддитивность означает, что если переменная величина x_1 производит эффект α_1 при ее одиночном использовании и переменная величина x_2 также производит эффект α_2 при одиночном использовании, то переменные величины x_1, x_2 при их совместном использовании производят эффект $\alpha_1 + \alpha_2$.

Пример 1. Пусть x_1 - количество продукции вида P_1 и x_2 - количество продукции вида P_2, которое выпускает фирма. Фирма, реализуя продукцию P_1, получает прибыль α_1 и, реализуя продукцию P_2, получает прибыль α_2. Естественно, при совместной реализации продукции фирма получает прибыль $\alpha_1 + \alpha_2$.

Гомогенность означает, что если переменная величина x_1 производит эффект α_1, то при любом действительном числе λ, переменная величина λx_1 производит эффект $\lambda\alpha_1$.

Пример 2. В условиях примера 1 предположим, что начиная с некоторого момента, фирма увеличивает выпуск продукции, например, P_1 в λ раз больше, т.е. стала выпускать продукцию вида P_1 в объеме λx_1. Ясное дело, что в этом случае фирма получает прибыль $\lambda \alpha_1$.

С математической точки зрения, линейные модели имеют серьезные преимущества, так как в случае нелинейных систем при применении математических методов почти всегда возникают трудности при аналитическом изучении. С линейными моделями легко работать и получать аналитические и численные решения, представляющие интерес. Эти факторы делают линейные модели наиболее широко применимыми математическим аппаратом в естественных и социальных науках.

Рассмотрим пример, который относится к социологии, а точнее к демографии.

Пример 3. Предположим, что сравнивая начало и конец 1995 года, мы получили следующие данные:

а) из тех, кто в начале года проживали в городе К, 20% выехали, а 80% остались в нем;

б) из тех, кто в начале года не проживали в К, 10% переехали в К, а 90% остались там, где проживали, либо переехали в другой город (не в город К).

Следуя этой информации, ответим на два следующих вопроса:

1) если в начале года 3 млн. проживали в К, а 20 млн. вне его, то какая ситуация сложится к концу года?

2) если в конце года в К проживали 3 млн., а 20 млн. вне его, то какова была ситуация в начале года?

Несмотря на внешнее сходство вопросов, сложность ответа на них существенно различна.

Ответ на первый вопрос, в сущности, сводится к арифметике. Действительно, обозначив через x и y число людей, проживавших в конце года в К и вне его, соответственно, получим:

$x =$ население К в начале года - число уехавших + число приехавших =

$$=3-0{,}2\cdot 3+0{,}1\cdot 20=4{,}4$$

и аналогично подсчитаем население вне К

$$y=20-0{,}1\cdot 20+0{,}2\cdot 3=18{,}6.$$

Заметим, что второй расчет можно даже упростить, поскольку общая численность населения (23 млн.) предполагается неизменной. Итак, ответ на первый вопрос таков: $x=4{,}4$ млн., $y=18{,}6$ млн.

Обратимся теперь к ответу на второй вопрос. Пусть, по-прежнему, x и y обозначают искомые численности населения города К и всех прочих городов, но уже в начале года. Информацию о задаче мы должны записать через введенные неизвестные, что и приведет к соответствующей модели.

3 млн. населения К в конце года образовались из начальной численности (x), минус число уехавших $(0{,}2\cdot x)$ плюс число приехавших $(0{,}1\cdot y)$. Этот своеобразный баланс можно записать в виде уравнения

$$x-0{,}2x+0{,}1y=3,$$

которое после приведения подобных преобразуется к следующему

$$0{,}8x+0{,}1y=3.$$

Аналогичный баланс населения прочих штатов приводит ко второму уравнению

$$y-0{,}1y+0{,}2x=20.$$

Преобразовав его к виду $0{,}2x+0{,}9y=20$ и объединив с первым, мы получим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 0{,}8x+0{,}1y=3, \\ 0{,}2x+0{,}9y=20. \end{cases} \qquad (*)$$

Её можно рассматривать как линейную модель, которая должна позволить ответить на поставленный демографический вопрос. Однако для этого надо решить полученную систему.

Сделать это можно следующим образом. Заметим, что если второе уравнение системы умножить сначала на 4, а затем вычесть из первого, то члены с неизвестным х сократятся, и мы получим уравнение с одним неизвестным:

$$3{,}5y = 770.$$

Отсюда находим $y = 22$, а x можно найти с учетом неизменности всего населения страны: $x = 23 - 22 = 1$. Тем самым получен ответ и на второй вопрос.

Процедура решения системы, которую мы сейчас применили, называется **методом исключения Гаусса.** Конечно, можно было бы воспользоваться другим известным из элементарного курса математики **методом подстановки:** из любого уравнения выразить одно неизвестное через другое и подставить во второе уравнение; это также приведет к линейному уравнению с одним неизвестным. Однако метод исключения является более универсальным и распространяется на гораздо более общие системы, нежели рассмотренная. Он является основным методом решения систем линейных уравнений. С ним мы обстоятельно ознакомимся в следующем параграфе.

Обратим внимание на то, в чем проявляется линейность модели (*) (помимо внешних признаков). Если числа в задаче удвоить, соответственно, до 6 и 40, то и ответ также удвоится - **гомогенность (однородность) модели.**

Кроме того, если мы решим дополнительно задачу для 4 и 25 миллионов, то решение для случая 7 и 45 миллионов будет в точности суммой полученных двух решений (имеется ввиду, что 7 = 3+4, а 45 = 20+25) – **аддитивность модели.**

Рекомендуем самостоятельно убедиться в этих фактах.

Упражнение

В примере 3 постройте модель и попытайтесь дать ответ на следующий вопрос: каково должно быть распределение проживающих в начале года, чтобы оно не изменилось в конце года? Иначе говоря, каково должно быть соотношение в начале года между числом x, проживающих в городе К и числом y, проживающих вне его, чтобы к концу года значения x и y не изменились?

Наш следующий пример представляет собой простую **линейную модель производства.**

Пример 4. Рассмотрим фабрику, которая выпускает два вида продукции: кукурузу и минеральное удобрение. Для производства кукурузы используется как сама кукуруза (её посадка), так и удобрение. Производство удобрения использует только кукурузу (её стебли), так что удобрение не нужно для собственного воспроизводства. Таким образом, на фабрике два вида затрат ресурсов преобразуется в совпадающие с ними виды выпуска продуктов.

Предположим, что для выпуска одной тонны кукурузы необходимо затратить 0,1 тонны кукурузы и 0,8 тонны удобрения, а для производства одной тонны удобрения требуется 0,5 тонны кукурузы. Вопрос состоит в следующем: сколько кукурузы и удобрения должна выпустить фабрика, если она желает удовлетворить потребительский спрос на свою продукцию, который составляет 4 и 2 тонны, соответственно?

Покажем, что ответ можно получить путем решения некоторой системы линейных уравнений.

Для этого искомые объемы выпуска кукурузы и удобрения обозначим, соответственно, через x_1 и x_2. Тогда выпуск этого количества продукции потребует следующих затрат: $0{,}1x_1 + 0{,}5x_2$ - затраты кукурузы; $0{,}8x_1$- затраты удобрения. Эти затраты должны покрываться выпуском продукции каждого вида, так как иначе производство невозможно. Поэтому для продажи у фабрики останется кукурузы $x_1 - 0{,}1x_1 - 0{,}5x_2$ тонн, а удобрения $x_2 - 0{,}8x_1$ тонн. Тем самым мы выразили объем предложения фабрики по каждому виду продукции через введенные неизвестные x_1, x_2. По условию задачи, предложение продукции должно уравновесить спрос, что приводит нас к двум уравнениям

$$x_1 - 0{,}1x_1 - 0{,}5x_2 = 4,$$

$$-0{,}8x_1 + x_2 = 2.$$

Приведя подобные в первом уравнении, мы получаем следующую систему линейных уравнений - модель данной задачи:

$$\begin{cases} 0{,}9x_1 - 0{,}5x_2 = 4, \\ -0{,}8x_1 + x_2 = 2. \end{cases} \qquad (**)$$

Решим эту систему методом подстановки: из 2-го уравнения выразим x_2 через x_1, т.е. $x_2 = 2 + 0{,}8x_1$. Подставим это выражение в 1-ое уравнение системы

$$0{,}9x_1 - 0{,}5 \cdot (2 + 0{,}8x_1) = 4.$$

Отсюда $0{,}5x_1 = 5$, т.е. $x_1 = 10$. Остается найти x_2, подставив $x_1 = 10$ в $x_2 = 2 + 0{,}8x_1$. Это дает нам $x_2 = 10$. Итак, для удовлетворения спроса на свою продукцию фабрика должна выпустить по 10 тонн кукурузы и удобрения.

Несложные рассуждения, которые мы привели в этом примере, лежат в основе знаменитой модели В. Леонтьева «затраты – выпуск», которая будет рассмотрена в одном из следующих параграфах.

Упражнение

Предложите свой пример линейной модели производства, аналогичный примеру 4. Исследуйте модель, т.е. найдите её решение. Интересно, удается ли вам сразу выбрать такие числовые данные, чтобы:

а) производство действительно было бы возможным;

б) спрос можно было удовлетворить, т.е. модель имела решение, удовлетворяющее естественному требованию неотрицательности выпуска продукции (а, возможно, и требованию целочисленности)?

Еще раз кратко остановимся на вопросе адекватности линейных моделей реальным объектам и процессам, которые они описывают.

Безусловно, линейность является упрощающим предположением. Действительный мир и реальная экономика настолько сложны, что должны описываться нелинейными моделями. Не случайно, именно такими являются большинство теоретических моделей экономики. Так в примере 4 упрощающим отступлением от положений экономической теории является ***предпо-***

ложение о постоянстве удельных издержек используемых факторов по отношению к масштабу выпуска продукции: выпуск одной тонны кукурузы требует 0,8 тонны кукурузы, выпуск 2-х тонн $-0{,}8 \cdot 2$ тонны кукурузы, а x_1 тонн - $0{,}8 \cdot x_1$ тонн кукурузы.

Таким образом, независимо от объема выпуска удобрения удельные издержки кукурузы остаются в модели постоянными. В то же время, теоретически изменение объема выпуска должно сопровождаться изменением удельных издержек.

Почти все линейные модели сводятся к системам алгебраических линейных уравнений или неравенств, хотя первоначальная модель может состоять из системы обычных дифференциальных или линейных дифференциальных уравнений.

Ниже рассматриваются основные понятия и общая теория систем линейных алгебраических уравнений. Мы получим критерий для существования и единственности решения, а также изучим свойства решений. В последующих лекциях рассмотрим вопросы, связанные с методами нахождения решения систем линейных алгебраических уравнений.

Теоретический материал, изученный в §§1-4, является основой для изучения систем линейных алгебраических уравнений. В этом и в следующих параграфах мы ими воспользуемся.

2. Основные понятия

2.1. Матрицы системы

Определение. Уравнение относительно неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется **линейным**, если его можно записать в виде

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$- произвольно заданные числа, называемые **коэффициентами уравнения**, а $\boldsymbol{b}$ - произвольно заданное число, называемое **свободным членом уравнения.**

Система линейных алгебраических уравнений имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

Коэффициенты при неизвестных снабжены двумя индексами; первый индекс указывает номер уравнения, в котором содержится данный коэффициент, а второй - номер неизвестной, при которой стоит этот коэффициент. Заметим, что число уравнений в рассматриваемой системе, вообще говоря, не предполагается равным числу неизвестных.

Определение. Теперь сопоставим системе (1) две матрицы:
матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

которую будем называть **основной матрицей системы (1),** или просто **матрицей системы**, и матрицу

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

которую будем называть **расширенной матрицей системы (1).**

Ясно, что основная матрица системы (1) содержит $\boldsymbol{n}$ столбцов и $\boldsymbol{m}$ строк, а расширенная матрица той же системы содержит $\boldsymbol{n}+1$ столбцов и $\boldsymbol{m}$ строк.

2.2. Матричная форма записи системы

Используя понятие произведения матриц, систему (1) можно записать в виде

$$AX = B, \tag{1'}$$

где A - основная матрица системы,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - вектор-столбец из неизвестных,

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ - вектор-столбец из свободных членов.

Определение. Равенство (1') будем называть **системой линейных алгебраических уравнений в матричной форме.**

2.3. Решение системы

Определение. Решением системы (1) называется всякая совокупность чисел $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$, которая, будучи подставлена в систему (1) вместо неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$, превращает все уравнения системы в равенства (тождества).

Всякое решение системы нужно понимать как вектор-столбец

$$X = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}.$$

Пример 5. Система

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases}$$

имеет своим решением вектор-столбец

$$X = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Действительно, поставляя числа $\xi_1 = 5,\ \xi_2 = 2,\ \xi_3 = 4$ в последнюю систему вместо неизвестных x_1, x_2, x_3, получим верные числовые равенства.

Не всякая система линейных алгебраических уравнений имеет решение.

Пример 6. Система

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 + x_2 = 7 \end{cases}$$

не имеет ни одного решения, так как левые части уравнений этой системы при любых значениях неизвестных равны между собой, а правые не равны.

Система уравнений вида (1) называется **совместной,** или **разрешимой,** если она имеет хотя бы одно решение; система называется **несовместной,** или **неразрешимой,** если она не имеет решений.

Совместная система может иметь одно решение или много решений.

Определение. Если система совместна, то будем говорить, что **система определенная,** если она имеет единственное решение, и **неопределенная,** если она имеет более одного решения.

В дальнейшем будет показано, что неопределенная система имеет бесчисленное множество решений.

Определение. В случае, когда система неопределенная, каждое ее решение будем называть **частным решением данной системы**. Множество всех частных решений назовем **общим решением.**

Пример 7. Примером определенной системы может служить система

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 7 \\ x_1 + x_2 = 4, \end{cases}$$

ибо ее единственным решением является вектор - столбец

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Пример 8. Примером неопределенной системы может служить система

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 1 \\ 6x_1 - 2x_2 = 2 \end{cases}.$$

Ее частными решениями являются, например, векторы-столбцы

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что при любом $k \in R^1$ из $X = \begin{pmatrix} k \\ 3k-1 \end{pmatrix}$ можно найти другие частные решения.

Следовательно, вектор – столбец

$$X = \begin{pmatrix} k \\ 3k-1 \end{pmatrix}, \text{ где } k \in R^1$$

представляет общее решение данной системы.

Определение. Две системы линейных алгебраических уравнений называются **эквивалентными,** или **равносильными,** когда каждое решение первой системы, если оно существует, является решением второй, и наоборот.

Таким образом, в частности, **все несовместные системы эквивалентны.**

2.4. *Элементарные преобразования системы линейных алгебраических уравнений*

Определение. Элементарными преобразованиями системы называются следующие преобразования:

1) перестановка любых двух уравнений;

2) умножение обеих частей одного из уравнений на любое отличное от нуля число;

3) прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на любое число.

Легко проверить, следующее утверждение.

Предложение. Элементарные преобразования переводят данную систему уравнений в эквивалентную систему.

Доказательство. Пусть, например, обе части первого уравнения системы (1) умноженные на число λ, прибавлены к обеим частям второго уравнения:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\
(a_{21} + \lambda a_{11})x_1 + (a_{22} + \lambda a_{12})x_2 + \cdots + (a_{2n} + \lambda a_{1n})x_n = b_2 + \lambda b_1, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m.
\end{cases}
\tag{2}
$$

Пусть вектор-столбец

$$
\Xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}
$$

будет произвольным решением системы (1). Ясно, что этот вектор-столбец будет решением и системы (2). Последняя система отличается от системы (1) лишь вторым уравнением. Но вектор-столбец Ξ удовлетворяет и второму уравнению системы (2), так как оно выражается через второе и первое уравнение системы (1). Обратно, всякое решение системы (2) будет удовлетворять и системе (1).

Следовательно, системы уравнений (1) и (2) эквивалентны, т.е. они или обе несовместны, или же обе совместны и обладают одними и теми же решениями.

Ясно, что если к системе (1) будут несколько раз применены элементарные преобразования, то вновь полученная система уравнений остается эквивалентной исходной системе.

Может случиться, что после выполнения таких преобразований в рассматриваемой системе появится уравнение, все коэффициенты левой части которого равны нулю. Если и свободный член этого уравнения равен нулю, то уравнение удовлетворяется при любых значениях неизвестных, и поэтому, отбрасывая это уравнение, мы получим систему, эквивалентную исходной системе. Если же свободный член этого уравнения отличен от нуля, то уравнение не удовлетворяется никакими значениями неизвестных, а поэтому полученная нами система уравнений, а также и исходная система будут несовместными.

Системы линейных уравнений численно решаются точными и итерационными методами. Под точными методами подразумеваются такие, которые дают решение системы при помощи конечного числа элементарных арифметических операций. Итерационные методы дают возможность приближенного решения системы линейных уравнений. Итерационные методы мы рассматривать не будем.

3. Разрешимость системы линейных уравнений

В общей теории систем линейных алгебраических уравнений важную роль играет критерий совместности, связанный только с понятием ранга матрицы.

Пусть дана система (1) m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

или в матричной форме (1')

$$AX = B.$$

Имеет место следующая основная теорема о совместности, или разрешимости системы линейных уравнений.

Теорема *(Кронекера - Капелли).* Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы системы равен рангу основной матрицы этой системы, причем:

- если ранг совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение;

- если ранг системы r меньше числа неизвестных n, то система имеет бесконечно много решений.

Замечание. Иногда вместо того, чтобы находить условия, гарантирующие разрешимость системы линейных уравнений, находят условия, при которых она неразрешима.

Рассмотрим систему, записанную в виде матричного уравнения

$$AX = B. \tag{1'}$$

Отметим, что если вектор X удовлетворяет этой системе, то он должен удовлетворять также и соотношению

$$Y'AX = Y'B, \tag{3}$$

где Y - произвольный m-мерный вектор.

Если мы можем найти вектор Y такой, что

$$Y'A = 0, \qquad Y'B = 1,$$

то из (3) мы получим противоречие: «нуль равен единице» и, следовательно, система (1') не может иметь решений.

В противоположном случае система (1') действительно имеет решение.

4. Совместные системы

Исследуем вопрос о числе решений совместной системы линейных уравнений

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i, \qquad i = 1,2,\ldots,m \tag{1}$$

или в матричной записи

$$AX = B. \tag{1'}$$

Определение. Согласно теореме Кронекера - Капелли в этом случае ранг матрицы системы A и ранг ее расширенной матрицы $\widetilde{A} = \left(A \;\; \vdots \;\; B\right)$ совпадают. Их общее значение r будем называть **рангом данной системы.**

Определение. Зафиксируем далее какой-либо базисный минор матрицы $\widetilde{A}$. Уравнения, соответствующие базисным строкам, назовем **базисными уравнениями данной системы**.

Базисные уравнения образуют базисную систему. Неизвестные, отвечающие базисным столбцам, назовем базисными, а остальные - свободными.

Имеет место, следующее очевидное утверждение.

Теорема. Система линейных уравнений эквивалентна системе своих базисных уравнений.

Предположим для простоты записи, что в данной системе (1) базисными являются первые r уравнений. Как только что было доказано, система базисных уравнений

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i, \qquad i = 1, 2, ..., r \tag{4}$$

эквивалентна данной системе (1). Поэтому достаточно исследовать систему (4), в которой число уравнений r равно ее рангу.

Очевидно, что ранг матрицы системы не может превосходить числа ее столбцов, т.е. $r \le n$. Иначе говоря, ранг совместной системы не превосходит числа неизвестных. При этом могут быть два случая: либо $r = n$, либо $r < n$.

1°. Пусть $r = n$, т.е. число уравнений равно числу неизвестных. Поскольку определителем системы (4) в этом случае является базисный минор, то по теореме Крамера из §7 система (4), а, следовательно, и система (1) имеют единственное решение.

Вывод 1. Если ранг совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

2°. Пусть $r < n$. Перенесем в правую часть уравнений все члены, кроме тех, которые содержат базисные неизвестные $x_1, x_2, ..., x_r$. Тогда система (4) примет вид

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ir}x_r = b_i - a_{ir+1}x_{r+1} - \cdots - a_{in}x_n . \tag{4′}$$

Если свободным неизвестным $x_r, x_{r+1}, ..., x_n$ придать некоторые числовые значения $\xi_r, \xi_{r+1}, ..., \xi_n$, то систему (4) можно рассматривать как систему из r уравнений с r неизвестными $x_1, x_2, ..., x_r$. Поскольку определителем этой системы является базисный минор, к ней применимо правило Крамера, и поэтому система имеет единственное решение $x_1 = \xi_1,\ x_2 = \xi_2,\ ...,\ x_r = \xi_r$. Тогда вектор $\left(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_r, \xi_{r+1}, ..., \xi_n\right)'$, являющийся решением базисной системы (4), является также решением исходной системы (1) в силу их эквивалентности. Так как значения свободных неизвестных мы можем выбирать произвольно, то различных решений системы (1) будет бесконечно много.

Вывод 2. Если ранг системы r меньше числа неизвестных n, то система имеет бесконечно много решений, при этом r неизвестных, (базисных) линейно выражаются через $n-r$ свободных неизвестных.

Замечание. А также справедливы и утверждения, обратные выводам 1 и 2. Доказательство предоставляется читателю.

Проведенное выше исследование общей системы линейных уравнений позволяет сформулировать следующее правило.

Правило решения произвольной системы линейных уравнений

1. Вычисляя ранги основной и расширенной матриц системы, выясняют вопрос о ее совместности. Если система совместна, то находят какой-либо базисный минор порядка r.

2. Берется r уравнений, из коэффициентов которых составлен базисный минор; остальные уравнения отбрасывают. Неизвестные, коэффициенты которых входят в базисный минор, называют базисными и оставляют слева, а остальные $n-r$ неизвестных называют свободными, и переносят в правые части уравнений.

3. По правилу Крамера (§7) или методом Гаусса (§6) находят выражения базисных неизвестных через свободные. Полученные равенства представляют собой общее решение системы.

4. Придавая свободным неизвестным любые числовые значения, находят соответствующие значения базисных неизвестных. Тем самым находят частные решения исходной системы уравнений.

Пример 9. Исследовать систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$$

Решение

Выпишем расширенную матрицу данной системы

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & \vdots & 3 \\ 1 & 3 & -1 & \vdots & 1 \\ 3 & 4 & -1 & \vdots & 5 \end{pmatrix}.$$

Вычислим ранг основной матрицы системы. Очевидно, что минор второго порядка в левом верхнем углу

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0,$$

содержащий его минор третьего порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, ранг основной матрицы системы равен двум, т.е. $r(A) = 2$. Для вычисления ранга расширенной матрицы $r(\widetilde{A})$ рассмотрим окаймляющий минор

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, $r(\widetilde{A}) = 2$.

Таким образом, $r(\widetilde{A}) = 2 < 3 = n$ и поэтому, согласно теореме Кронекера - Капелли данная система линейных уравнений совместна и имеет бесконечно много решений. Отметим, что данная совместная система линейных уравнений содержит два независимых уравнения, за которые принимаем первые два уравнения системы, так как в них лежит базисный минор. Исходная система линейных уравнений эквивалентна системе своих базисных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

Пример 10. Исследовать систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 \qquad\quad = 3. \end{cases}$$

Решение

Расширенная матрица системы имеет вид

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 14 \\ 3 & 2 & 1 & \vdots & 10 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 2 & 3 & -1 & \vdots & 5 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 3 \end{pmatrix}.$$

Прибавим элементы второй строки к соответствующим элементам первой и четвертой строк, а затем разделим элементы первой строки на 4, а элементы четвертой строки на 5:

$$\tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & \vdots & 24 \\ 3 & 2 & 1 & \vdots & 10 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 2 & 3 & -1 & \vdots & 5 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 3 & 2 & 1 & \vdots & 10 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 3 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 3 \end{pmatrix}.$$

Вычтем из элементов третьей строки соответствующие элементы первой строки, а из элементов пятой строки вычтем элементы четвертой строки; после этого отбросим (вычеркнем) третью и пятую строки:

$$\tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 3 & 2 & 1 & \vdots & 10 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 3 & 2 & 1 & \vdots & 10 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 3 \end{pmatrix}; \qquad A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем определитель последней матрицы:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Следовательно, $r(A) = 3$. Ранг расширенной матрицы также равен 3, так как найденный определитель является минором матрицы $\tilde{A}$.

Итак, система совместна; ранги основной и расширенной матриц данной системы совпадают – равно 3 и это совпадает с числом неизвестных. Согласно теореме Кронекера-Капелли система имеет единственное решение.

Пример 11. Исследовать систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ -4x_1 - 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение

Ранг основной матрицы этой системы $r(A) = 2$, так как минор второго порядка

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0,$$

А окаймляющий его минор третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ранг расширенной матрицы $r(\tilde{A}) = 3$, так как

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 .$$

Таким образом, $r(A) = 2$, а $r(\widetilde{A}) = 3$. Поэтому система несовместна.

Пример 12. Исследовать систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2, \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4. \end{cases}$$

Решение

Вычислим ранг расширенной матрицы

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & \vdots & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & \vdots & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & \vdots & 4 \end{pmatrix}.$$

Прибавим к элементам второй строки соответствующие элементы третьей строки, а затем разделим все элементы второй строки на 3:

$$\widetilde{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & \vdots & 1 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 & \vdots & 6 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & \vdots & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & \vdots & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & \vdots & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & \vdots & 4 \end{pmatrix}.$$

Вычтем из элементов второй строки соответствующие элементы первой строки:

$$\widetilde{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & \vdots & 4 \end{pmatrix}.$$

Вычислим ранг основной матрицы. Очевидно, что

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно увидеть, что $r(A) = 2$, $r(\widetilde{A}) = 3$, т.е. $r(A) \neq r(\widetilde{A})$; следовательно, система несовместна.

Упражнения

Исследовать систему линейных уравнений и решить ее, если она совместна:

1. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 4, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 \qquad - x_4 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -2, \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 5, \\ 4x_1 - 8x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -3. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 + 9x_3 - 4x_4 = -8, \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 14. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 - 9x_5 = 2. \end{cases}$

Вопросы для самопроверки

1. Что называется линейным уравнением относительно неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$? Что называется коэффициентами линейного уравнения? Что называется свободным членом линейного уравнения?

2. Напишите вид систем m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Что называется основной матрицей или просто матрицей системы? Что называется расширенной матрицей системы?

3. Напишите матричную форму систем линейных алгебраических уравнений.

4. Что называется решением системы линейных алгебраических уравнений?

5. В каком случае система линейных алгебраических уравнений назы-

вается совместной или разрешимой, несовместной, или неразрешимой, определенной и неопределенной?

6. Что называется частным, общим решением систем линейных алгебраических уравнений? В каком случае эти понятия вводятся?

7. Когда две системы линейных алгебраических уравнений называются эквивалентными, или равносильными?

8. Что называется элементарными преобразованиями системы?

9. Численно, какими методами решаются системы линейных алгебраических уравнений? Что понимается под точными и итерационными методами?

10. Сформулируйте основную теорему о совместности, или разрешимости системы линейных уравнений, т.е. теорему Кронекера - Капелли.

11. Иногда вместо того, чтобы находить условия, гарантирующие разрешимость системы линейных уравнений, находят условия, при которых она неразрешима. Приведите такие условия.

12. Какие уравнения называются базисными уравнениями системы? Что называется базисной системой?

13. Как называются неизвестные, отвечающие базисным столбцам? А остальные неизвестные?

14. Какая связь имеется между системой линейных уравнений и системой ее базисных уравнений?

15. Какой вывод можно сделать, если ранг совместной системы равен числу неизвестных?

16. Какой вывод можно сделать, если ранг системы r меньше числа неизвестных n?

17. Приведите правило решения произвольной системы линейных уравнений. Что позволяет сформулировать это правило?

§6. Решения систем линейных алгебраических уравнений методами Гаусса и Гаусса - Жордана

Ключевые слова: *метод Гаусса, ступенчатая система, треугольная система, базисные неизвестные, свободные неизвестные, метод Гаусса – Жордана.*

Исторически первым наиболее распространенным точным методом решения системы линейных уравнений является метод Гаусса.

1. Метод Гаусса или метод последовательного исключения неизвестных

Сущность этого метода состоит в том, что посредством последовательных исключений неизвестных данная система превращается в ступенчатую (в частности, треугольную) систему.

Определение. Ступенчатой системой (или **системой ступенчатого вида**) называется система линейных уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad a_{kk}x_k + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}. \qquad (1)$$

Коэффициенты a_{ii} называются **главными**, или **ведущими**, элементами системы.

Например, система

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 3 \\ \quad 3x_2 - x_3 \qquad + x_5 = 5 \\ \qquad x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 1 \\ \qquad\qquad x_4 + x_5 = 6 \end{cases}$$

имеет ступенчатый вид.

Определение. Если $k = n$, то система (1) называется **треугольной.**

Ясно, что в этом случае она будет определенной.

Если же $k < n$, то система (1) будет неопределенной.

Действительно, рассмотрим базисный минор основной матрицы системы (1), который в нашем случае состоит из первых к основной матрице системы (1). Выделим в этом миноре произвольную строку. Элементы этой строки являются коэффициентами при k первых неизвестных $x_1, x_2, ..., x_k$ в одном из уравнений системы (1).

Определение. Эти k первых неизвестных $x_1, x_2, ..., x_k$ называют **базисными неизвестными** рассматриваемой системы уравнений.

Они могут быть выражены через $n-k$ остальных неизвестных, называемых **«свободными».**

Базисные неизвестные оставим в левых частях k уравнений, а члены, содержащее свободные неизвестные, перенесем вправо. Из полученной системы уравнений выразим базисные неизвестные через свободные.

Определение. Полученные выражения базисных неизвестных через свободные называются **общим решением** системы уравнений.

Придавая свободным неизвестным произвольные значения, можно получить частные решения системы уравнений. Следовательно, система (1) имеет бесчисленное множество решений.

Определение. Если в общем решении системы свободным неизвестным придавать нулевые значения, то такое решение называется **базисным.**

Пусть дана произвольная система линейных уравнений (1):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_m \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2}$$

Будем для определенности считать, что коэффициент $a_{11} \neq 0$. Если это не так, то надлежащим образом изменим нумерацию неизвестных. Преобразуем систему (2), включая неизвестное x_1 из всех уравнений, кроме первого.

Для этого обе части первого уравнения умножим на число $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ и вычтем из соответствующих частей второго уравнения, затем обе части первого уравнения, умноженные на число $\frac{a_{31}}{a_{11}}$, вычтем из соответствующих частей третьего уравнения и т.д.

Предполагая после этого, что $a_{22} \neq 0$, аналогичным способом исключим неизвестное x_2 из всех уравнений, кроме второго, и т.д.

В результате таких преобразований мы или получим совместную ступенчатую систему, эквивалентную системе (2), или придем к несовместной ступенчатой системе, в которой одно из уравнений имеет отличный от нуля свободный член, а все коэффициенты левой части равны нулю. В этом случае система (2) также является несовместной. Легко увидеть, что таким способом можно любую систему линейных уравнений привести к ступенчатому виду. Следовательно, решение любой системы сводится к решению ступенчатой системы.

Заметим еще раз, что в процессе приведения системы (2) к ступенчатому виду могут получаться уравнения вида $0 = 0$. Их можно отбрасывать, так как это, очевидно, приводит к системе уравнений, эквивалентной прежней.

При практическом решении системы линейных уравнений методом Гаусса удобнее приводить к ступенчатому виду не саму систему уравнений, а расширенную матрицу этой системы, выполняя все преобразования над ее строками. Последовательно получающиеся в ходе преобразования матрицы обычно соединяют знаком эквивалентности.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 \qquad - 6x_4 = 9, \\ \qquad 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение

Выпишем расширенную матрицу данной системы

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 & \vdots & 8 \\ 1 & -3 & 0 & -6 & \vdots & 9 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & \vdots & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 6 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

и произведем следующее элементарное преобразование над ее строками:

а) разделим элементы первой строки на 2, а затем из второй и четвертой строк вычтем первую:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \vdots & 4 \\ 1 & -3 & 0 & -6 & \vdots & 9 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & \vdots & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 6 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \vdots & 4 \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{13}{2} & \vdots & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & \vdots & -5 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{9}{2} & \frac{11}{2} & \vdots & -4 \end{pmatrix} \sim;$$

б) разделим элементы второй строки на $\left(-\frac{7}{2}\right)$, а затем из третьей и четвертой строк вычтем вторую умноженную, соответственно, на 2 и $\frac{7}{2}$:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{13}{7} & \vdots & -\frac{10}{7} \\ 0 & 2 & -1 & 2 & \vdots & -5 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{9}{2} & \frac{11}{2} & \vdots & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{13}{7} & \vdots & -\frac{10}{7} \\ 0 & 0 & \frac{3}{7} & -\frac{12}{7} & \vdots & -\frac{15}{7} \\ 0 & 0 & -2 & -1 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \sim;$$

в) разделим элементы третьей строки на $\frac{3}{7}$, а затем прибавим к четвертой строке элементы третьей, умноженной на 2:

$$\sim\left(\begin{array}{cccccc} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{13}{7} & \vdots & -\frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -4 & \vdots & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & \vdots & 1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccccc} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{13}{7} & \vdots & -\frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -4 & \vdots & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & \vdots & -9 \end{array}\right);$$

г) разделим элементы четвертой строки на -9.

В результате всех преобразований данная система линейных уравнений приводится к треугольному виду

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 4, \\ x_2 - \frac{5}{7}x_3 + \frac{13}{7}x_4 = -\frac{10}{7}, \\ x_3 - 4x_4 = -5, \\ x_4 = 1. \end{cases}$$

Она имеет единственное решение. Из последнего уравнения имеем

$$x_4 = 1.$$

Подставляем это значение x_4 в предыдущее уравнение и находим из него

$$x_3 = -1.$$

Далее, из второго и первого уравнений находим

$$x_2 = -4 \text{ и } x_1 = 3.$$

Решение системы можно написать в векторном виде

$$X = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Из рассмотренного примера видно, что решение линейной системы уравнений по методу Гаусса сводится к построению эквивалентной системы, имеющей треугольный вид. Необходимым и достаточным условием применимости метода Гаусса является неравенство нулю всех главных элементов системы.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 6x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 = 9, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12x_4 = 10. \end{cases}$$

Решение

Выпишем расширенную матрицу данной системы

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 & \vdots & 1 \\ 4 & -2 & -1 & 1 & \vdots & 5 \\ 6 & -3 & -1 & -1 & \vdots & 9 \\ 2 & -1 & 2 & -12 & \vdots & 10 \end{pmatrix}$$

и преобразуем ее.

Первую строку, умноженную, соответственно, на 2,3,1, вычтем из последующих строк:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -10 & \vdots & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -15 & \vdots & 9 \end{pmatrix}.$$

Вторую строку, умноженную, соответственно, на 2, 3, вычтем из последующих строк:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Система свелась к ступенчатой, которая после отбрасывания двух уравнений вида $0 = 0$, превращается в следующую:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 1, \\ \qquad\qquad\quad x_3 - 5x_4 = 3. \end{cases}$$

Здесь за базисные неизвестные примем x_1 и x_3. Это можно сделать, так как определитель $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ из коэффициентов при этих коэффициентах отличен от нуля, т.е. $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. Свободными неизвестными служат x_2 и x_4.

Из второго уравнения найдем выражение x_3 через x_4. Затем, подставив его в первое уравнение, найдем выражение x_1 через x_2 и x_4:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_2 + x_4 + 2, \\ x_3 = 5x_4 + 3. \end{cases}$$

Следовательно, общее решение X данной системы можно записать в виде

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\lambda_2 + \lambda_4 + 2 \\ \lambda_2 \\ 5\lambda_4 + 3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix},$$

где λ_2 и λ_4 - произвольные числа.

Если положить, например,

$$\lambda_2 = 2, \ \ \lambda_4 = 1,$$

то найдем одно из частных решений этой системы:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Если же положить

$$\lambda_2 = 0, \ \ \lambda_4 = 0,$$

то найдем другое из частных решений, которое называется **базисным решением** этой системы:

$$X_б = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Упражнение

Решить систему уравнений, пользуясь методом Гаусса:

1. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ 3x_1 - x_2 \qquad = 5. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 + 7x_2 - 10x_3 = 11. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 = 7, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_4 = 3, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 \qquad - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + -4x_3 - x_4 = 9. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \qquad \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 + 2\boldsymbol{x}_4 = -3, \\ 2\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + 2\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_4 = 6, \\ \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 + 3\boldsymbol{x}_3 - 2\boldsymbol{x}_4 = 10, \\ 3\boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3 + 4\boldsymbol{x}_4 = -15. \end{cases}$

Теперь рассмотрим следующую модификацию метода Гаусса.

2. Метод Гаусса – Жордана или метод полных исключений неизвестных

В методе Гаусса вместо того чтобы исключить x_k только с номерами $k+1,\ldots,n$, мы с одинаковым успехом можем исключить также x_k в уравнениях с номерами $1,\ldots,k-1$, так что x_k появится только в k-м уравнении. В таком случае не будет необходимости в обратной подстановке.

Определение. Эта модификация гауссовского исключения называется **методом Гаусса – Жордана или методом полных исключений неизвестных.**

Следующие примеры иллюстрируют применение метода Гаусса – Жордана.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

методом Гаусса – Жордана или методом полных исключений неизвестных.

Решение

Выпишем расширенную матрицу данной системы

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & \vdots & 1 \\ 2 & 2 & -5 & \vdots & 3 \\ 4 & -2 & 2 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

и произведем следующее элементарное преобразование над ее строками:

а) разделим элементы первой строки на 2, а затем с помощью элементарных преобразований все элементы первого столбца, кроме первого превратим в нули. Это означает, что исключим x_1 из всех уравнений, кроме первого:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -2 & \vdots & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -1 & \vdots & 2 \\ 0 & -8 & 10 & \vdots & -1 \end{pmatrix} \sim ;$$

а) разделим элементы второй строки на -1, а затем с помощью элементарных преобразований все элементы второго столбца кроме второго превратим в нули. Это означает, что исключим x_2 из всех уравнений, кроме второго:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{2} & \vdots & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 18 & \vdots & -17 \end{pmatrix} \sim ;$$

а) разделим элементы третьей строки на 18, а затем, с помощью элементарных преобразований все элементы третьего столбца кроме третьего превратим в нули. Это означает, что исключим x_3 из всех уравнений, кроме третьего:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & \frac{7}{36} \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -\frac{19}{18} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -\frac{17}{18} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в результате всех этих преобразований данная система линейных уравнений приводится к следующему треугольному виду:

$$\begin{cases} x_1 & & & = \frac{7}{36}, \\ & x_2 & & = -\frac{19}{18}, \\ & & x_3 & = -\frac{17}{18}, \end{cases}$$

т.е. найдено решение системы

$$X = \begin{pmatrix} \frac{7}{36} \\ -\frac{19}{18} \\ -\frac{17}{18} \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -2 \end{cases}$$

методом Гаусса – Жордана.

Решение

Выпишем расширенную матрицу данной системы

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 3 & \vdots & 1 \\ 2 & -2 & 5 & 2 & \vdots & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 2 & \vdots & -2 \end{pmatrix} \sim,$$

к элементам которой, примем метод полных исключений неизвестных или метод Гаусса – Жордана:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & \vdots & \frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{14}{5} & \frac{19}{5} & \frac{4}{5} & \vdots & \frac{18}{5} \\ 0 & \frac{14}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \vdots & -\frac{13}{5} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{8}{7} & \frac{5}{7} & \vdots & \frac{5}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{19}{14} & -\frac{2}{7} & \vdots & -\frac{9}{7} \\ 0 & 0 & 4 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{7} & \vdots & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{56} & \vdots & -\frac{53}{56} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \vdots & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Система свелась к ступенчатому виду:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{7}x_4 = \frac{3}{7}, \\ x_2 + \frac{3}{56}x_4 = -\frac{53}{56}, \\ x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Здесь за базисные неизвестные примем x_1, x_2 и x_3, ибо определитель, составленный из коэффициентов при этих неизвестных $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ (этот единичный определитель является базисным минором основной матрицы коэффициентов последней системы). Свободным неизвестным служит x_4.

Из последней системы находим:

$$x_1 = \frac{3}{7} - \frac{3}{7}x_4,$$
$$x_2 = -\frac{53}{56} - \frac{3}{56}x_4,$$
$$x_3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x_4.$$

Следовательно, общее решение X данной системы можно записать в виде

$$X = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} - \frac{3}{7}x_4 \\ -\frac{53}{56} - \frac{3}{56}x_4 \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x_4 \end{pmatrix}.$$

Если положить, например,

$$x_4 = 2,$$

то найдем одно из частных решений этой системы:

$$X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ -\frac{59}{56} \\ -\frac{1}{4} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Базисное решение данной системы таково:

$$X_б = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ -\frac{53}{56} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Оно получается из общего решения при $x_4 = 0$.

Упражнение

Решить систему уравнений, пользуясь методом Жордана - Гаусса:

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_1 - 2x_2 \qquad + x_4 = -6, \\ \qquad x_2 + x_3 + 34x_4 = 16, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \qquad = 6. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad = 8, \\ \qquad x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ 4x_1 \qquad + x_3 + x_4 = 11, \\ x_1 + x_2 \qquad + 5x_4 = 23. \end{cases}$

4. $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -5, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -10. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 1, \\ 7x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 6, \\ \qquad x_2 + x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 10, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -15. \end{cases}$

Вопросы для самопроверки

1. Численно, какими методами решаются системы линейных уравнений? Что понимается под точными и итерационными методами?

2. Что представляет собой метод Гаусса или метод последовательного

исключения неизвестных? В чем состоит суть этого метода?

3. Что называется ступенчатой системой или системой ступенчатого вида?

4. Что называются главными, или ведущими элементами системы?

5. Когда ступенчатая система будет определенной, неопределенной? Когда система линейных уравнений называется треугольной?

6. Какое решение называется базисным?

7. Что представляет собой метод Гаусса или метод полного исключения неизвестных? В чем состоит суть этого метода?

§7. Решения систем линейных алгебраических уравнений правилом Крамера и матричным способом

Ключевые слова: *правило Крамера, матричный способ, невырожденное базисное решение системы, вырожденное базисное решение системы, матричное уравнение.*

1. Правило Крамера. Матричный способ решения

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n известными $x_1, x_2, \ldots, x_n$, т.е. такую систему, в которой число уравнений равно числу неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

или короче

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in} = b_i, \qquad i = 1,2,\ldots,n. \tag{1′}$$

Определение. Основная матрица A этой системы имеет n строк и n столбцов, т.е. является квадратной. Определитель этой матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называется **определителем системы.**

Заменим в определителе системы Δ какой-либо столбец, например, j-й столбцом B из свободных членов. Полученный таким способом определитель $\Delta_j(B)$ будем обозначать через Δ_j, т.е.

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Поясним сказанное на примере.

Пример 1. Пусть дана система 3 уравнений с 3 неизвестными:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

Тогда

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 2 & 2 & -5 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix}; \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Теорема (правило Крамера). Если дана система уравнений (1), определитель которой отличен от нуля, то эта система совместна и имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \qquad j = 1,2,\ldots,n. \tag{2}$$

Доказательство. Обозначим через A основную матрицу системы, через B - столбец из свободных членов. Тогда данная система запишется в матричном виде

$$AX = B,$$

где X - столбец из неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Проведем доказательство теоремы в три этапа.

1. Существование решения. Так как матрица A по условию неособенная, то существует обратная к ней матрица A^{-1}. Рассмотрим вектор-столбец $\Xi = A^{-1}B$ и покажем, что он является решением данной системы. Действительно,

$$A\Xi = A\left(A^{-1}B\right) = \left(AA^{-1}\right)B = EB = B.$$

Таким образом, при подстановке вектор – столбца Ξ в систему уравнений $AX = B$ вместо вектора-столбца X из неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ получается тождество. Значит, вектор-столбец Ξ является решением данной системы.

2. Единственность решения. Пусть вектор-столбец Y - произвольное решение системы $AX = B$. Покажем, что $Y = \Xi$.

В самом деле, раз вектор Y является решением системы, то имеет место тождество

$$AY = B.$$

Умножая обе части этого тождества слева на матрицу A^{-1}, получим

$$A^{-1}(AY) = A^{-1}B,$$

$$(A^{-1}A)Y = \Xi,$$

$$Y = \Xi.$$

Итак, всякое решение данной системы совпадает с вектором $\Xi = A^{-1}B$. Иначе говоря, данная система имеет единственное решение.

Замечание. Отыскание решения системы по формуле $X = \Xi = A^{-1}B$ называют **матричным способом решения системы**.

3. Формулы Крамера. Матрица A^{-1}, обратная к основной матрице A системы, имеет вид

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где $\Delta = |A|$; A_{ij} - алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A.

Согласно правилу умножения матриц получаем

$$X = \Xi = A^{-1}B = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11}b_1 & +A_{21}b_2 + & \cdots & +A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 & +A_{22}b_2 & \cdots & +A_{n2}b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n}b_1 & +A_{2n}b_2 & \cdots & +A_{nn}b_n \end{pmatrix}.$$

Но согласно теореме Лапласа и ее следствия, имеем

$$\begin{array}{llll} A_{11}b_1 & +A_{21}b_2 + & \cdots & +A_{n1}b_n = \Delta_1(B) = \Delta_1, \\ A_{12}b_1 & +A_{22}b_2 & \cdots & +A_{n2}b_n = \Delta(B) = \Delta_2, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \quad\cdots \\ A_{1n}b_1 & +A_{2n}b_2 & \cdots & +A_{nn}b_n = \Delta(B) = \Delta_n. \end{array}$$

Таким образом, решением системы является вектор – столбец

$$X = \begin{pmatrix} \dfrac{\Delta_1}{\Delta} \\ \dfrac{\Delta_2}{\Delta} \\ \vdots \\ \dfrac{\Delta_n}{\Delta} \end{pmatrix},$$

что и требовалось доказать.

Пример 2. Решить матричным способом систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

Решение

Положим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Тогда данная система уравнений запишется матричным уравнением

$$AX = B.$$

Поскольку определитель матрицы A

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0,$$

то матрица A неособенная и потому имеет обратную

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

и, следовательно,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Выполняя умножения в правой части, получим единственное решение заданной системы:

$$X=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Решить по формулам Крамера систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=1, \\ 3x_1-x_2+2x_3=1, \\ x_1+4x_2-x_3=2. \end{cases}$$

Решение

Находим определитель системы

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}=14\neq 0.$$

Следовательно, система определенная, т.е. она имеет единственное решение. Для нахождения ее решения вычисляем определители Δ_1, Δ_2, Δ_3:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}=14,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}=-14.$$

По формулам Крамера находим:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{14}{14} = 1; \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{14} = 0; \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-14}{14} = -1.$$

Итак,

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- единственное решение данной системы.

Упражнение

Решить систему уравнений по правилу Крамера и матричным методом.

$$1. \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -5, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1. \end{cases} \qquad 2. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -3, \\ x_1 + x_2 \qquad = 5. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2. \end{cases} \qquad 4. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -16, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 5x_1 - x_2 - 3x_3 = -14. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases} \qquad 6. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 = -8, \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Замечание. Выше мы получили достаточное условие совместности системы n линейных уравнений с n неизвестными, и нашли формулы, явно выражающие решение этой системы через ее коэффициенты. Стоит заметить, что численное решение такой системы по формулам Крамера сводится к вычислению $n+1$ определителей порядка n, а матричным способом - к вычислению n^2 определителей порядка $n-1$ (алгебраических дополнений к элементам основной матрицы системы). Если число n велико, то вычисление определителей становится очень трудоемкой операцией. В таком случае выгоднее воспользоваться методом исключения неизвестных. Наоборот, при решении и особенно исследовании системы с буквенными коэффициентами метод исключения неизвестных, в свою очередь, приводит к весьма громоздким выкладкам, так что значительно удобнее пользоваться формулами Крамера или матричной записью решения.

2. Базисные решения систем линейных уравнений

Пусть дана система m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{*}$$

Предположим, что ее ранг r меньше числа неизвестных n. Следовательно, согласно выводу 2 п. 4.2 §5, система (*) имеет бесчисленное множество решений.

Пусть A - основная матрица системы. Очевидно, что ее ранг равен r. Тогда согласно определению ранга эта матрица содержит отличный от нуля минор r - го порядка. Всякий такой минор, ранее в §3, мы называли базисным минором матрицы A. Ясно, что у данной матрицы может быть несколько базисных миноров. Выберем и зафиксируем один из них.

Предположим, что зафиксированный нами минор порядка r состоит из первых r строк и r столбцов основной матрицы. Столбцы и строки матрицы, на пересечении которых расположены элементы выбранного нами базисного минора, называют базисными столбцами и строками.

Выделим в этом миноре произвольную строку. Элементы этой строки являются коэффициентами при r первых неизвестных $x_1, x_2, ..., x_r$ в одном из уравнений системы (*). Напомним, что эти r первых неизвестных $x_1, x_2, ..., x_r$ называют базисными неизвестными рассматриваемой системы уравнений. Они могут быть выражены через $n-r$ остальных неизвестных, называемых «свободными». Базисные неизвестные в выделенной системе оставим в левых частях уравнений, а члены, содержащее свободные неизвестные, перенесем вправо. Из полученной системы уравнений выразим базисные неизвестные через свободные. Полученные выражения базисных неизвестных через свободные называются общим решением системы уравнений. Придавая свободным неизвестным произвольные значения, можно получить частные решения системы уравнений.

Если в общем решении системы свободным неизвестным придавать нулевые значения, то такое решение называется базисным.

Выше уже отметили, что у данной матрицы может быть несколько базисных миноров. Тогда базисными могут быть разные группы из r неизвестных. Однако количество различных способов выбора r неизвестных из общего их числа n конечно. Оно равно числу сочетаний из n элементов по r в каждом, т.е. C_n^r. Следовательно, количество способов разбиения неизвестных системы на базисные и свободные ограничено этим числом. Это количество равно C_n^r, если все миноры r- го порядка, основной матрицы отличны от нуля, и меньше этого числа, если хотя бы один из этих миноров равен нулю.

Каждому разбиению неизвестных системы (*) на базисные и свободные соответствует одно базисное решение. Следовательно, имеется не более чем C_n^r базисных решений системы.

Пример 4. Для системы

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 6x_5 = 3, \\ 3x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 5 \end{cases}:$$

а) указать способы и число разбиений неизвестных систем на базисные и свободные; б) найти базисные решения данной системы.

Решение

а) Данная система содержит два уравнения и пять неизвестных $(m=2, \quad n=5)$. Значит, группы базисных неизвестных состоят из двух неизвестных. Пять неизвестных на группы, содержащих по два неизвестных, можно разбить десятью различными способами: $C_5^2 = \dfrac{5!}{2!3!} = \dfrac{3!4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3!} = 10$. Эти группы:

$$x_1, x_2; \quad x_1, x_3; \quad x_1, x_4; \quad x_1, x_5; \quad x_2, x_3; \quad x_2, x_4; \quad x_2, x_5; \quad x_3, x_4; \quad x_3, x_5; \quad x_4, x_5.$$

Однако из этих пар базисными неизвестными являются только те пары, определители из коэффициентов при которых отличны от нуля, т.е. базисными неизвестными являются только те пары, определители из коэффициентов при которых образуют базисные миноры. Вычислим все эти определители:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 1 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -2 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = -2 \neq 0;$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 9 \end{vmatrix} = -3 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -4 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

Следовательно, неизвестные данной системы можно разбить на базисные и свободные шестью способами:

1) x_1 и x_2 - базисные, а x_3, x_4, x_5 - свободные;

2) x_1 и x_4 - базисные, а x_2, x_3, x_5 - свободные;

3) x_2 и x_3 - базисные, а x_1, x_4, x_5 - свободные;

4) x_2 и x_5 - базисные, а x_1, x_3, x_4 - свободные;

5) $\boldsymbol{x}_3$ и x_5 - базисные, а x_1, x_2, x_4 - свободные;

6) x_4 и x_5 - базисные, а x_1, x_2, x_3 - свободные.

б) Найдем базисные решения данной системы. Выше в пункте а) данного примера было установлено, что существует шесть способов разбиения неизвестных данной системы на базисные и свободные. Следовательно, она имеет шесть базисных решений. Первое базисное решение найдем, считая x_1 и x_2 - базисными, а свободные неизвестные x_3, x_4, x_5 равными нулю. Тогда придем к системе

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 3, \\ 3x_1 - 4x_2 = 5. \end{cases}$$

Решая, которую получим $x_1 = 3, \quad x_2 = 1$. Таким образом, $X_{1б} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ - первое базисное решение.

Найдем второе базисное решение. Считая x_1 и x_4 - базисными, а свободные неизвестные x_2, x_3, x_5 равными нулю, придем к системе

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_4 = 3, \\ 3x_1 + 8x_4 = 5. \end{cases}$$

Решая, которую получим $x_1 = 3, \quad x_4 = -\frac{1}{2}$. Таким образом, $X_{2б} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -0,5 \\ 0 \end{pmatrix}$ - второе базисное решение.

Таким же образом находим третье базисное решение. Считая x_2 и x_3 - базисными, а свободные неизвестные $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{x}_5$ равными нулю, придем к системе

$$\begin{cases} -3x_2 + 4x_3 = 3, \\ -4x_2 + 6x_3 = 5. \end{cases}$$

Решая, которую получим $x_2 = 1, \quad x_3 = \frac{3}{2}$. Таким образом, $X_{3б} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1,5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ - третье базисное решение.

Аналогично находим остальные базисные решения. Опуская выкладки, запишем эти решения:

$$X_{4б}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix};\qquad X_{5б}=\begin{pmatrix}0\\0\\1{,}5\\-0{,}5\\0\end{pmatrix};\qquad X_{6б}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-0{,}5\\1\end{pmatrix}.$$

Базисное решение, содержащее точно r отличных от нуля неизвестных, где r - ранг системы, называется **невырожденным базисным решением.**

Заметим, что все шесть базисных решений выше рассмотренного примера являются невырожденными.

В базисном решении свободные неизвестные по определению равны нулю, а базисные неизвестные обычно отличны от нуля. Однако может оказаться, что в базисном решении некоторые базисные неизвестные также равны нулю. Такое базисное решение называется **вырожденным базисным решением.**

Пример 5. Найти базисные решения системы уравнений

$$\begin{cases}2x_1+x_2-2x_3=2,\\3x_1+4x_2-8x_3=3.\end{cases}$$

Решение

Данная система содержит два уравнения и три неизвестных $(m=2,\quad n=3)$. Значит, группы базисных неизвестных состоят из двух неизвестных. Три неизвестных на группы, содержащих по два неизвестных, можно разбить тремя различными способами: $C_3^2=\dfrac{3!}{2!1!}=3$.

Неизвестные x_1 и x_2 - базисные, так как определитель из коэффициентов при них отличен от нуля: $\begin{vmatrix}2&1\\3&4\end{vmatrix}=5\neq 0$. Тогда неизвестная $\boldsymbol{x}_3$ - свободная. Полагая в уравнениях системы $\boldsymbol{x}_3=0$, получим систему

$$\begin{cases}2x_1+x_2=2,\\3x_1+4x_2=3.\end{cases}$$

Решая ее, находим $x_1 = 1, \quad x_2 = 0$ и первое базисное решение $X_{1б} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, являющееся вырожденным (так как базисная неизвестная $x_3 = 0$).

Неизвестные x_1 и x_3 - также базисные, поскольку определитель из коэффициентов при них отличен от нуля: $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -8 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$. Тогда неизвестная x_2 - свободная. Полагая в уравнениях системы $x_2 = 0$, получим систему

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_3 = 2, \\ 3x_1 - 8x_3 = 3. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем $x_1 = 1, \quad x_3 = 0$, т.е. $X_{2б} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ - второе базисное решение, также $X_{1б} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, являющееся вырожденным (так как базисная неизвестная $x_2 = 0$).

Неизвестные x_2 и x_3 не являются базисными, так как определитель из коэффициентов при них равен нулю: $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 0$, а поэтому отпадает вопрос о третьем базисном решении.

Замечание. Вырожденность базисного решения имеет геометрический смысл. Геометрическую иллюстрацию вырожденного базисного решения обсудим самостоятельно.

Замечание. Базисные решения имеют большое значение в приложениях математики, особенно в линейном программировании, в котором точными математическими методами решается вопрос о выборе оптимального решения среди многовариантных решений различных прикладных задачи, в том числе экономических.

Упражнения

Найти базисные решения системы линейных уравнений:

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -2, \\ x_1 - x_2 \qquad - x_4 = 2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 18, \\ -x_1 - x_2 \qquad + 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1`, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 18, \\ \qquad - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

3. Матричные уравнения

Определение. Матричными уравнениями называют уравнения вида

$$AX = B, \tag{3}$$

$$XA = B, \tag{4}$$

где A и B - данные квадратные матрицы n-го порядка, а X - искомая матрица того же порядка.

Определение. Решением матричного уравнения называется всякая матрица соответствующего порядка, которая, будучи подставлена в матричное уравнение вместо матрицы X, обращает уравнение в тождество.

Матричные уравнения (3) и (4) имеют единственные решения, если $\det A \neq 0$. Действительно, умножив эти уравнения, соответственно, слева и справа на матрицу A^{-1}, получим

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \qquad \text{или} \qquad X = A^{-1}B, \tag{5}$$

и

$$XA^{-1}A = BA^{-1} \qquad \text{или} \qquad X = BA^{-1}. \tag{6}$$

Очевидно, что матрица $A^{-1}B$ является решением уравнения (3), а матрица BA^{-1} - решением уравнения (4).

Замечание. Если матрицы A^{-1} и B перестановочны, то решением обоих матричных уравнений будет одна и та же матрица

$$X == A^{-1}B = BA^{-1}.$$

Пример 6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение

Здесь $\det A \neq 0$, т.е. матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- неособенная.

Находим, что

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},$$

тогда

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Если матрица A - особенная, то изложенный выше способ решения матричного уравнения непригоден, так как матрица A^{-1} не существует. В этом случае матричное уравнение или имеет бесконечно много решений, или неразрешимо. Поясним этот случай на следующем примере.

Пример 7. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение

Здесь $\det A = 0$. Положим

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда после перемножения матриц A и X получим

$$\begin{pmatrix} 2x_{11} + 3x_{21} & 2x_{12} + 3x_{22} \\ 4x_{11} + 6x_{21} & 4x_{12} + 6x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\begin{cases} 2x_{11} + 3x_{21} = 1, \\ 4x_{11} + 6x_{21} = 2. \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_{12} + 3x_{22} = 2, \\ 4x_{12} + 6x_{22} = 4. \end{cases}$$

Последние системы являются совместными и неопределенными. Решая их, находим

$$x_{11} = \frac{1 - 3x_{21}}{2}, \qquad x_{12} = \frac{2 - 3x_{22}}{2}.$$

Полагая, например,

$$x_{21} = 2\lambda + 1, \qquad x_{22} = 2\mu,$$

получаем

$$X = \begin{pmatrix} -3\lambda + 1 & 1 - 3\mu \\ 2\lambda + 1 & 2\mu \end{pmatrix},$$

где λ и μ - произвольные числа.

Замечание. Системы линейных уравнений относительно $x_{11}, x_{21}, x_{12}, x_{22}$ или одна из них могут оказаться несовместными. Тогда матричное уравнение (с особенной матрицей A) неразрешимо.

Упражнения

1. Решить матричные уравнения относительно квадратной матрицы X второго порядка:

$a)\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix};$

$b)\quad X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix};$

$c)\quad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix};$

$d)\quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$

2. Решить матричные уравнения относительно квадратной матрицы X третьего порядка:

$a)\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix};$

$b)\quad X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix};$

$c)\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix};$

$d)\quad X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$

3. Найти все матрицы X , удовлетворяющее условию:

$a)\quad \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix};$

$b)\quad X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 18 \end{pmatrix};$

$c)\quad \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$

$$d) \quad X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$e) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте правило Крамера.

2. Что называется матричным способом решения системы?

3. Для решения системы n линейных уравнений с n неизвестными, что выгоднее: воспользоваться методом исключения неизвестных или пользоваться формулами Крамера или матричной записью решения.

4. Что называется базисным решением системы линейных уравнений?

5. Сколько базисных решений может иметь система линейных уравнений?

6. Какое базисное решение называется невырожденным базисным решением?

7. Какое базисное решение называется вырожденным базисным решением.

8. Какое значение имеют базисные решения?

9. Что называют матричными уравнениями?

10. Что называется решением матричного уравнения?

§8. Фундаментальная система решений однородной линейной системы алгебраических уравнений

Ключевые слова: *система однородных линейных уравнений, система неоднородных линейных уравнений, тривиальное решение системы однородных линейных уравнений, фундаментальная система решений, приведенная система.*

1. Системы однородных линейных уравнений

Определение. Линейное уравнение называется **однородным**, если его свободный член равен нулю, и **неоднородным** в противном случае.

Система однородных линейных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{1}$$

или в матричном виде

$$AX = \Theta. \tag{1'}$$

Очевидно, что всякая система однородных линейных уравнений имеет **нулевое решение**

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

и, значит, совместна.

Определение. Нулевое решение системы **называют также тривиальным.**

Теорема. Для того чтобы система однородных линейных уравнений имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг этой системы был меньше числа неизвестных.

Следствие. Любая система однородных линейных уравнений, в которой число уравнений меньше числа неизвестных, имеет нетривиальное решение.

Действительно, если число уравнений системы меньше числа неизвестных, то ранг этой системы и подавно меньше числа неизвестных.

Для системы однородных линейных уравнений, в которой число уравнений равно числу неизвестных,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

доказанная выше теорема принимает следующий вид.

Теорема. Для того чтобы система однородных линейных уравнений, в которой число уравнений равно числу неизвестных, имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю.

Действительно, условие $r < n$ в данном случае эквивалентно условию равенства нулю определителя системы.

Следующие две теоремы решают вопрос о структуре общего решения однородной системы линейных уравнений.

Теорема. Если векторы $C_1, C_2, \dots, C_n$ являются решениями однородной системы $AX = \Theta$, то любая их линейная комбинация

$$C = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_n C_n$$

также является решением этой системы.

Доказательство. Так как векторы $C_1, C_2, \dots, C_n$ являются решениями системы $AX = \Theta$, то справедливы равенства

$$AC_1 = \Theta, \quad AC_2 = \Theta, \dots, AC_n = \Theta .$$

Следовательно, учитывая свойства матричного умножения, а также независимость произведения матрицы на число от порядка сомножителей, имеем

$$AC = A(\lambda_1 C_1) + A(\lambda_2 C_2) + \cdots + A(\lambda_n C_n) =$$
$$= \lambda_1 (AC_1) + \lambda_2 (AC_2) + \cdots + \lambda_n (AC_n) = \Theta .$$

Но полученное нами равенство $AC = \Theta$ означает, что вектор C является решением системы $AX = \Theta$. Теорема доказана.

Следствие. Из этой теоремы следует, в частности, что если существует хоть одно нетривиальное решение однородной системы, то из него умножением на произвольные числа можно получить бесконечно много решений.

Определение. Фундаментальной системой решений для системы линейных однородных уравнений называется линейно независимая система решений, через которую линейно выражается любое решение этой системы уравнений.

Если ранг r системы линейных однородных уравнений равен числу n неизвестных, то фундаментальная система решений состоит из единственного решения - нулевого.

Если $r < n$, то справедлива следующая теорема.

Теорема. Если ранг r системы однородных линейных уравнений меньше числа n неизвестных, то эта система уравнений имеет бесконечно много фундаментальных систем решений, причем каждая из них состоит из $n-r$ решений.

Отметим, что последние приведенные две теоремы дают возможность доказать следующее утверждение.

Теорема. Общее решение однородной системы ранга r с n неизвестными имеет вид

$$X = \lambda_1 C_1, + \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_{n-r} C_{n-r},$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}$ - произвольные линейно независимые частные решения этой системы, а $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}$ - любые числа.

Действительно, в силу первой из вышеупомянутых теорем вектор X является решением системы при любом выборе чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}$. Обратно, согласно второй из вышеупомянутых теорем любое частное решение можно получить из общего подходящим выбором этих числовых коэффициентов.

Полученные результаты дают возможность сформулировать следующее правило.

Правило для построения фундаментальной системы решений

Берется любой отличный от нуля определитель D порядка $n-r$. Для простоты обычно берется определитель, у которого элементы главной диагонали равны единице, а остальные - нулю.

Свободным неизвестным придают поочередно значения, равные элементам первого, второго и т.д. столбцов определителя D, и каждый раз из общего решения находят соответствующие значения главных неизвестных.

Полученные $n-r$ решений составляют фундаментальную систему. Общее решение имеет вид линейной комбинации векторов фундаментальной системы.

Пример 1. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} x_1+3x_2+3x_3+2x_4+4x_5=0, \\ x_1+4x_2+5x_3+3x_4+7x_5=0, \\ 2x_1+5x_2+4x_3+x_4+5x_5=0, \\ x_1+5x_2+7x_3+6x_4+10x_5=0. \end{cases}$$

Решение

Путем вычитания первого уравнения из последующих, а затем второго из последующих легко привести данную систему к ступенчатому виду

$$\begin{cases} x_1+3x_2+3x_3+2x_4+4x_5=0, \\ \qquad x_2+2x_3+x_4+3x_5=0, \\ \qquad\qquad x_4 \qquad =0. \end{cases}$$

Будем считать главными неизвестными x_1, x_2, x_4, а свободными x_3 и x_5. Из второго и четвертого уравнений находим

$$x_2=-2x_3-3x_5.$$

Подставляя это выражение x_2 в первое уравнение, найдем

$$x_1=3x_3+5x_5.$$

Таким образом, общее решение системы имеет вид

$$x_1=3x_3+5x_5,$$

$$x_2 = -2x_3 - 3x_5,$$

$$x_4 = 0.$$

Давая свободным неизвестным поочередно значения, равные элементам столбцов определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

получим векторы

$$C_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

представляющие собой фундаментальную систему решений.

Общее решение можно теперь записать следующим образом:

$$Y_{об.одн.} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\lambda_1 + 5\lambda_2 \\ -2\lambda_1 - 3\lambda_2 \\ \lambda_1 \\ 0 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Придавая коэффициентам λ_1, λ_2 различные числовые значения, будем получать различные частные решения. При этом любое частное решение можно получить путем подходящего выбора коэффициентов λ_1 и λ_2.

Упражнение

Найти общее решение и фундаментальную систему решений для следующих систем уравнений:

$$a) \quad \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$$

$$b)\quad \begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3+3x_4+5x_5=0, \\ 6x_1+4x_2+3x_3+5x_4+7x_5=0, \\ 9x_1+6x_2+5x_3+7x_4+9x_5=0, \\ 3x_1+2x_2 \qquad +4x_4+8x_5=0. \end{cases}$$

$$c)\quad \begin{cases} 3x_1+5x_2+2x_3=0, \\ 4x_1+7x_2+5x_3=0, \\ x_1+x_2-4x_3=0 \\ 2x_1+9x_2+6x_3=0. \end{cases}$$

$$d)\quad \begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0, \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0, \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0, \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0. \end{cases}$$

$$e)\quad \begin{cases} 6x_1-2x_2-2x_3+5x_4+7x_5=0, \\ 9x_1-3x_2+4x_3+8x_4+9x_5=0, \\ 6x_1-2x_2+6x_3+7x_4+x_5=0, \\ 3x_1-x_2+4x_3+4x_4-x_5=0. \end{cases}$$

$$f)\quad \begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4=0, \\ 2x_1+3x_2-4x_3+5x_4=0, \\ x_1+4x_2+3x_3-5x_4=0. \end{cases}$$

2. Связь решений однородной и неоднородной систем

Если в неоднородной системе линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=f_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=f_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=f_m \end{cases} \tag{5}$$

заменить все свободные члены нулями, то получится однородная система

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}, \tag{6}$$

называемая **приведенной системой** для исходной неоднородной системы. Решения данной неоднородной системы и соответствующей ей приведенной системы связаны следующим образом.

Теорема. Сумма любого решения неоднородной системы и любого решения ее приведенной системы снова будет решением неоднородной системы.

Доказательство. Пусть векторы

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

представляют собой решения, соответственно, систем (5) и (6). Иначе говоря,

$$AC = F, \quad AB = 0.$$

Отсюда выводим:

$$A(C + B) = AC + AB = F.$$

Это означает, что вектор $C + B$ является решением системы $AX = F$, что и требовалось установить.

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема. Разность двух любых решений неоднородной системы является решением ее приведенной системы.

Из этих теорем вытекает, что все решения неоднородной системы можно получить, прибавляя к одному (любому) ее решению всевозможные решения ее приведенной системы. Иначе говоря, справедлива следующая теорема.

Теорема. Общее решение неоднородной системы можно получить, если к любому частному решению этой системы прибавить общее решение ее приведенной системы.

Пример 2. Дана неоднородная система линейных уравнений.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 13, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 7x_5 = 20, \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 + 5x_5 = 17, \\ x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 10x_5 = 29. \end{cases}$$

Доказать, что эта система совместна, и найти ее общее решение исходя из последней теоремы.

Решение

I способ решения поставленной задачи. Выпишем расширенную матрицу системы:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 4 & \vdots & 13 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 7 & \vdots & 20 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 5 & \vdots & 17 \\ 1 & 5 & 7 & 6 & 10 & \vdots & 29 \end{pmatrix}.$$

Применим к строкам матрицы элементарные операции, не изменяющие ранга матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 4 & \vdots & 13 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & \vdots & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & \vdots & 9 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 6 & \vdots & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 & -5 & \vdots & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & \vdots & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 & -5 & \vdots & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & \vdots & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & -5 & \vdots & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & \vdots & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда очевидно, что $r(A) = r(\tilde{A}) = 3$. Следовательно, система совместна и исходная система эквивалентна системе

$$\begin{cases} x_1 \qquad - 3x_3 \qquad - 5x_5 = -7, \\ \qquad x_2 + 2x_3 \qquad + 3x_5 = 6, \\ \qquad\qquad\qquad x_4 \qquad = 1. \end{cases}$$

Положим в ней «свободные» неизвестные равными, например, нулю, т.е. $x_3 = 0,\ \ x_5 = 0$. В результате получим $x_1 = -7,\ \ x_2 = 6,\ \ x_4 = 1.$

Таким образом, найдено частное решение неоднородной системы:

$$X_{част.неодн.} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь рассмотрим приведенную систему данной неоднородной системы:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 7x_5 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 10x_5 = 0. \end{cases}$$

Эта однородная система из примера предыдущего пункта и общее решение нами было найдено:

$$Y_{об.одн.} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда общее решение исходной системы линейных уравнений получим с помощью формулы $X = X_{част.неодн.} + Y_{об.одн.}$:

$$X = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

II способ решения поставленной задачи. Решим данную систему методом последовательного исключения неизвестных, а именно, методом Гаусса - Жордана. Составим расширенную матрицу. Применим к строкам матрицы элементарные операции, не изменяющие ранга матрицы. Выполняя все это (см. начало решения задачи I способом), мы получим:

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 4 & \vdots & 13 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 7 & \vdots & 20 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 5 & \vdots & 17 \\ 1 & 5 & 7 & 6 & 10 & \vdots & 29 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & -5 & \vdots & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & \vdots & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда очевидно, что $r(A)=r(\widetilde{A})=3$. Следовательно, система совместна и исходная система эквивалентна системе

$$\begin{cases} x_1 \qquad -3x_3 \qquad -5x_5 = -7, \\ \qquad x_2 + 2x_3 \qquad +3x_5 = 6, \\ \qquad\qquad\qquad x_4 \qquad = 1. \end{cases}$$

Очевидно, что x_1, x_2, x_4 являются базисными неизвестными, а x_3, x_5 свободные переменные. Тогда общее решение исходной системы - неоднородной системы линейных уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} x_1 &= -7 + 3x_3 + 5x_5, \\ x_2 &= 6 - 2x_3 - 3x_3, \\ x_4 &= 1. \end{aligned}$$

Итак,

$$X=\begin{pmatrix} -7+3x_3+5x_5 \\ 6-2x_3-3x_5 \\ x_3 \\ 1 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+x_3\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+x_5\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где x_3, x_5 - произвольные числа.

Обозначив, $x_3=\lambda_1,\ \ x_5=\lambda_2$ получим общее решение исходной системы - неоднородной системы линейных уравнений в виде

$$X = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Полученные одинаковые результаты обоими способами говорит о том, что изложенная здесь теория, показывает связь решений однородной и неоднородной систем не противоречит общей теории линейных систем уравнений.

Упражнение

Доказать, что следующие неоднородные линейные системы:

$$a)\quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

$$b)\quad \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -2, \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 5, \\ 4x_1 - 8x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -3. \end{cases}$$

$$c)\quad \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 + 9x_3 - 4x_4 = -8, \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 14. \end{cases}$$

$$d)\quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7, \end{cases}$$

совместны, и найти их общее решение в терминах частного решения неоднородной системы и общего решения приведенной системы.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется однородным линейным и неоднородным линейным уравнением?

2. Напишите систему однородных линейных уравнений.

3. Что называется тривиальным решением системы однородных линейных уравнений?

4. Приведите необходимое и достаточное условие существования нетривиального решения системы однородных линейных уравнений. Сформулируйте теорему.

5. Приведите необходимое и достаточное условие существования нетривиального решения системы однородных линейных уравнений, в которой число уравнений равно числу неизвестных. Сформулируйте теорему.

6. Приведите теоремы, которые решают вопрос о структуре общего решения однородной системы линейных уравнений.

7. Что называется фундаментальной системой решений для системы линейных однородных уравнений?

8. Из чего состоит фундаментальная система решений, если ранг r системы линейных однородных уравнений равен числу n неизвестных? А если $r < n$? Приведите теорему, отвечающую на последний вопрос.

9. Какой вид имеет общее решение однородной системы ранга r с n неизвестными?

10. Приведите правило для построения фундаментальной системы решений.

11. Что называется приведенной системой для исходной неоднородной системы линейных уравнений?

12. Приведите теоремы, устанавливающие связи решений однородной и неоднородной систем.

13. Как можно получить общее решение неоднородной системы в терминах частного решения неоднородной системы и общего решения ее приведенной системы.

§9. Арифметическое векторное пространство. Линейное пространство

Ключевые слова: *свободные вектора, векторное пространство, арифметические вектора, арифметическое векторное пространство, скалярное произведение векторов, длина (модуль) вектора, ортогональные вектора, угол между векторами, неравенство Коши – Буняковского, базис пространства, естественный базис, координаты векторов в пространстве, преобразование координат векторов, старая базисная система, навоя базисная система, матрица перехода, подпространство, размерность подпространства, базис подпространства, линейная оболочка совокупности векторов, подпространство, натянутое на данную систему векторов, ортонормальный базис, процесс ортонормализации Шмидта, линейное пространство, подпространство, базис, размерность, евклидово пространство, изоморфизм.*

1. Арифметическое векторное пространство

1.1. Пространства R^3, R^2 *и* R^1

В довузовской математике в разделе метод координат элементарной геометрии мы познакомились со свободными векторами на прямой, на плоскости, в пространстве и определили для них линейные операции (сложение векторов и умножение вектора на число).

Определение. Множество свободных векторов пространства, рассматриваемое с установленными в нем линейными операциями, **называется трехмерным векторным пространством** V^3, **а сами векторы - элементами этого пространства.**

Аналогично, множество векторов, расположенных на плоскости, называется **двумерным векторным пространством** V^2, а множество векторов, расположенных на прямой, - **одномерным векторным пространством** V^1**.**

Если в пространствах V^3**,** V^2 и V^1 введена декартова система координат, то устанавливается взаимно однозначное соответствие между векторами пространства V^3 и упорядоченными тройками чисел (их координатами), между векторами пространства V^2 и упорядоченными парами чисел (их координатами), между векторами пространства V^1 и числами.

Будем записывать координаты вектора пространства V^3 в виде столбца, состоящего из трех чисел, координаты вектора пространства V^2 - в виде столбца из двух чисел, координату вектора пространства V^1- в виде столбца, состоящего из одного числа. При этом столбцы из координат векторов будем **называть, соответственно, трехмерными, двумерными или одномерными арифметическими векторами.**

Из метода координат элементарной геометрии известно, что линейным операциям над векторами соответствуют линейные операции над координатами этих векторов.

Определение. Множества трехмерных, двумерных и одномерных арифметических векторов называются, соответственно, трехмерными R^3, двумерными R^2 и одномерными R^1 арифметическими векторными пространствами.

Пример 1. Пусть завод производит мужские, женские и детские велосипеды. Тогда объем его производства A за год можно записать как вектор

$$\begin{pmatrix} m \\ l \\ d \end{pmatrix},$$

где m- объем производства за год мужских велосипедов, l- женских и d - детских. Например, пусть объем производства в 2010 г. был

$$A = \begin{pmatrix} 1000 \\ 800 \\ 4000 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что план на 2011 г. на 10% больше объема производства в 2010 г., тогда этот план есть вектор

$$B = \begin{pmatrix} 1100 \\ 880 \\ 4400 \end{pmatrix}.$$

Пусть торговая фирма «Велосипеды» покупает половину всей продукции завода, тогда в 2010 г. она купила

$$P = \begin{pmatrix} 500 \\ 400 \\ 2000 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что в стране всего три велосипедных завода, объемы производства, которых в 2010 г. были

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1000 \\ 800 \\ 4000 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1000 \\ 600 \\ 200 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2000 \\ 1600 \\ 8000 \end{pmatrix}.$$

Тогда все три завода вместе произвели

$$A = \begin{pmatrix} 4000 \\ 3000 \\ 14000 \end{pmatrix},$$

т.е. 4000 мужских, 3000 женских и 14 000 детских велосипедов. Можно также отметить, что $A_3 = 2A_1$, т.е. 3-й завод произвел в 2 раза больше велосипедов каждого вида, чем 1-й завод.

Приведенные выше векторы A, B, P, A_1, A_2, A_3 и т.д. – это примеры конкретных арифметических векторов. Ясное дело, что произвольный трехмерный вектор можно обозначить

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

В векторе X компонента x_1 есть 1-я компонента, x_2 - 2-я, x_3 - 3-я.

Векторы бывают двух видов - векторы-столбцы и векторы-строки. Все вышеприведенные были векторы-столбцы. Векторы-строки записываются в виде упорядоченной строки, векторы-столбцы записываются в виде упорядоченного столбца (нумерация компонент вектора идет сверху).

Векторы широко используются во всех областях науки, в том числе и в экономической. Многие обозначения при использовании векторов очень компактны, при этом не теряют в наглядности и содержательности.

Замечание. Вообще-то в математике понятие «вектор» многозначно. Уже в школе в курсе физики вектор понимался как направленный отрезок с фиксированным началом (точкой приложения силы). В геометрии иногда под вектором понимается преобразование плоскости или пространства специального вида (перемещение).

Замечание. В математике понятие «вектор» может обозначать упорядоченный набор не только чисел, но и любых объектов, т.е. когда 1-я компонента вектора обозначает (или есть) элемент некоторого множества M_1, 2-я компонента - элемент множества M_2 и т.д. Это **более общее понятие** вектора иногда используется в нашем курсе далее.

1.2. Арифметическое $\boldsymbol{n}$- мерное пространство $\boldsymbol{R^n}$

Понятие арифметического векторного пространства одного, двух или трех измерений можно обобщить следующим образом.

Рассмотрим множество матриц, каждая из которых состоит из одного столбца с n компонентами, иначе говоря, совокупность n-мерных вектор - столбцов.

Так как n-мерные вектор – столбцы являются частными видами матриц, следовательно, на основе определения линейных операций над матрицами (см. лекцию №1) можно определить следующие линейные операции над векторами:

а) сложение двух векторов

$$X+Y=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix};$$

б) умножение вектора на число

$$\lambda X = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Как видно из этих определений, суммой двух n-мерных векторов, а также произведением вектора на число снова будет n-мерный вектор.

Пример 2. В примере 1 мы уже умножали вектор на число. Действительно, $A_3 = 2A_1$. В этом же примере мы сложили три вектора $A_1 + A_2 + A_3$ и получили их сумму A. Эти действия с векторами очень естественны и весьма напоминают обычные действия с числами. Можно сказать, что действия с векторами являются естественным распространением действий над числами на более широкую область.

Умножим вектор $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ на 3. Получим вектор $\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$. Его естественно обозначить $3U$.

Умножим вектор $A_1 = \begin{pmatrix} 1000 \\ 800 \\ 4000 \end{pmatrix}$ на 2. Получим вектор $\begin{pmatrix} 2000 \\ 1600 \\ 8000 \end{pmatrix}$, равный A_3. Итак, $A_3 = 2A_1$, что и послужило нам основанием сказать выше, что 3-й велосипедный завод произвел в 2 раза больше велосипедов, чем 1-й.

Иногда, впрочем, при умножении вектора содержательный смысл вектора-результата теряется. Например, при умножении вектора A_1 на 1/3 в векторе-результате 2-я компонента не целое число и ее нельзя трактовать как число велосипедов.

Сложим вектор $A_1 = \begin{pmatrix} 1000 \\ 800 \\ 4000 \end{pmatrix}$ и вектор $A_3 = \begin{pmatrix} 2000 \\ 1600 \\ 8000 \end{pmatrix}$. Получим вектор $K = \begin{pmatrix} 3000 \\ 2400 \\ 12000 \end{pmatrix}$.

Упражнение

Проверьте, что $K = 3A_1$.

Однако векторы разной размерности складывать нельзя.

Легко проверить, что указанные действия с векторами обладают следующими свойствами:

1^0. $X + Y = Y + X$;

2^0. $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$;

3^0. $X + \Theta = X$;

4^0. $X + (-X) = \Theta$;

5^0. $1 \cdot X = X$;

6^0. $(\alpha + \beta)X = \alpha X + \beta X$;

7^0. $\alpha(X + Y) = \alpha X + \alpha Y$;

8^0. $\alpha(\beta X) = (\alpha\beta)X$,

здесь X, Y и Z n- мерные вектора, α и β - числа, Θ - нулевой n-мерный вектор, т.е.

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Определение. Множество всех n-мерных векторов, рассматриваемое с установленными выше линейными операциями, **называется арифметическим векторным пространством размерности** n.

Арифметическое векторное пространство может быть действительным, когда векторы имеют действительные компоненты, или комплексным, когда компоненты векторов - комплексные числа. В первом случае определено умножение векторов на действительные числа, во втором - на комплексные.

Действительное арифметическое векторное пространство обозначают через R^n, а комплексное - через C^n.

В дальнейшем, мы в основном рассмотрим только действительное арифметическое пространство, которое мы будем называть просто арифметическим пространством и обозначать через R^n.

Замечание. Подчеркнем еще раз, что введенное нами обобщение понятия вектора позволяет рассматривать векторы не обязательно физической и геометрической природы.

Пример 3. Пусть некоторое предприятие использует n сырьевых продуктов. Тогда, если x_k - некоторое количество k -го сырьевого продукта, измеренное в подходящих единицах, то векторы вида

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

могут указывать, например, суточную потребность предприятия в сырье; вектор λX - потребность в сырье за λ суток. Потребность в сырье за сутки двух таких предприятий будет суммой соответствующих векторов.

1.3. Скалярное произведение двух векторов

Для полного определения нашего арифметического n- мерного пространства R^n, по аналогии со свойствами трехмерного пространства, мы должны ввести понятия длин и углов.

В элементарной геометрии (метод координат) при помощи известных понятий длины вектора и угла мы определили скалярное произведение векторов. Оказывается, что длина вектора и угол между векторами могут, выражены через скалярное произведение векторов. Следовательно, **важным** является введение понятия скалярного произведения.

Определение. Скалярным произведением двух векторов

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_1 \end{pmatrix},$$

называется число

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n,$$

равное сумме произведений соответствующих координат векторов и обозначается через $X'Y$.

Замечание. Применяются различные обозначения для скалярного произведения, например, (X,Y), $<X,Y>$, $X'Y$ - если X, Y являются вектор – столбцами, XY' - если X, Y являются вектор – строками и XY - если X является вектор – строкой, а Y является вектор – столбцом. Мы выбрали последние три обозначения (в зависимости от способа задачи векторов) для того, чтобы сохранить обозначения, ранее введенных нами для матриц, хотя там где удобно и необходимо мы будем использовать и первое обозначение.

Замечание. Скалярное произведение – это лишь один из способов «умножения» двух векторов. Вместе с тем имеются и другие определения операции умножения, которые мы в этом курсе не будем вводить и использовать.

Пример 4. В экономических задачах можно рассматривать скалярное произведение вектора цен P на вектор объема продукции X. Скалярное произведение $(P, X) \equiv P'X$ в этом случае дает суммарную стоимость продукции X при ценах P.

Например, если объем всей продукции, выпущенной предприятием, выражается вектором

$$X = \begin{pmatrix} 400 \\ 750 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix},$$

элементы которого означают, соответственно, количество изделий высшего, первого, второго и третьего сортов, а цены в одних и тех же денежных единицах заданы в соответствующем порядке вектором

$$P=\begin{pmatrix}3\\2{,}1\\1{,}2\\0{,}5\end{pmatrix},$$

то скалярное произведение

$$(P,X)=3\cdot 400+2{,}1\cdot 750+1{,}2\cdot 200+0{,}5\cdot 300=3165$$

выражает суммарную стоимость всей продукции X.

Нетрудно проверить, что скалярное произведение векторов обладает следующими свойствами:

1^0. $(X,X)\geq 0$, причем $(X,X)=0$ лишь при $X=\Theta$;

2^0. $(X,Y)=(Y,X)$;

3^0 $(X,Y+Z)=(X,Y)+(X,Z)$;

4^0. $(\lambda X,Y)=\lambda(X,Y)$.

Среди соотношений, связанных со свойствами скалярного произведения особое место занимает **скалярный квадрат:**

$$(X,X)=x_1^2+x_2^2+\cdots x_n^2.$$

Определение. Число

$$|X|=\sqrt{(X,X)}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2},$$

равное корню квадратному из суммы квадратов компонент вектора, называется **длиной (или модулем)** n **- мерного вектора** X **.**

Имеют место следующие свойства длины вектора:

1^0. $|X|\geq 0$, причем $|X|=0$ тогда и только тогда, когда $X=\Theta$;

2^0. $|\lambda X|=|\lambda|\cdot|X|$, где λ - действительное число;

3^0 $|X+Y|\leq|X|+|Y|$ (неравенство треугольника).

Пример 5. Вектор

$$X=\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$$

имеет длину, равную

$$|X| == \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Два вектора называют ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю.

Пример 6. Векторы

$$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad Y = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ортогональны, так как

$$(X, Y) = 3 \cdot (-2) + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 6 + (-1) \cdot 0 = 0.$$

Вышеприведенные определения скалярного произведения и длины являются прямым обобщением соответствующих определений для трехмерных арифметических пространств. Не совсем ясно, однако каким образом должно быть обобщено понятие угла между двумя векторами. В данном случае необходимо отметить, что при интуитивном представлении угол между двумя векторами представлял собой часть определения скалярного произведения.

Выше мы скалярное произведение определили безотносительно к углам. В настоящий момент мы применим первоначальное определение скалярного произведения для определения угла между двумя векторами.

Определение. Углом между двумя n- мерными векторами X и Y, где $X \neq \Theta$ и $Y \neq \Theta$, называется угол φ**,** удовлетворяющий двум условиям:

$$a)\ \cos\varphi = \frac{X'Y}{|X| \cdot |Y|} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}}, \qquad б)\ (\varphi \in [0; \pi].$$

Условие б) гарантирует единственное значение угла φ**.** Корректность определения угла между n- мерными векторами арифметического пространства R^n вытекает из справедливости неравенства

$$|(X, Y)| \leq |X| \cdot |Y| \ \text{или} \ \left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

Определение. Это неравенство называется **неравенством Коши – Буняковского - Шварца.** Мы будем его называть просто **неравенством Коши.**[1]

Доказательство неравенство Коши. Доказуемое неравенство перепишем в виде

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^2 .$$

Рассмотрим квадратный трехчлен

$$S(\xi) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + \xi y_i)^2 = A^2 + 2B\xi + C\xi^2 ,$$

где $A = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $\quad B = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, $\quad C = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$.

Так как квадратный трехчлен $S(\xi)$ принимает только неотрицательные значения, то его дискриминант не положителен, а именно, $B^2 - AC \le 0$. Подставляя в последнее неравенство значения коэффициентов A, B и C, получаем неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^2 ,$$

и тем самим доказали неравенство Коши.

Замечание. Неравенство Коши означает, что в арифметическом пространстве R^n между длинами двух векторов и их скалярным произведением имеет место такое же неравенство, как в обычном трехмерном пространстве R^3. Именно, справедлива следующая теорема.

Теорема. Модуль скалярного произведения векторов из арифметического векторного пространства размерности n не превосходит произведения модулей этих векторов, т.е. $(|X,Y|) \le |X| \cdot |Y|$.

Пример 7. Понятие косинуса угла между векторами используется в статистике. Если мы имеем n исторических или экспериментальных дат

[1] Это неравенство было открыто французским математиком Коши в 1821году. Это неравенство, в другом пространстве спустя треть века установил русский математик Буняковский. Шварц опубликовал соответствующие неравенства в 1885 году.

$(y_1;x_1),\quad (y_2;x_2),\quad \dots\quad ,(y_n;x_n)$, и если мы обозначим

$$Y=\begin{pmatrix} y_1-\bar{y} \\ y_2-\bar{y} \\ \vdots \\ y_n-\bar{y} \end{pmatrix},\qquad X=\begin{pmatrix} x_1-\bar{x} \\ x_2-\bar{x} \\ \vdots \\ x_n-\bar{x} \end{pmatrix},$$

где

$$\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i}^{n} y_i\ ,\qquad \bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i}^{n} x_i\ ,$$

то косинус угла между векторами Y и X представляет собой коэффициент корреляции для множеств дат.

Заметим, что скалярное произведение в арифметическом n- мерном пространстве R^n можно ввести бесконечно многими способами.

Упражнение

В определении скалярного произведения отказаться от первого свойства. Сохраняется ли неравенство Коши и в этом случае?

Следует отметить, что в данном арифметическом пространстве R^n скалярное произведение можно вести многими различными способами. При введении различных скалярных произведений обычно сохраняют свойства 1^0 - 4^0 скалярного произведения. Длина некоторого арифметического вектора, вычисленная с помощью одного такого скалярного произведения, будет отличаться от длины этого же вектора, вычисленной с помощью другого скалярного произведения; то же относится и к углу между двумя данными арифметическими векторами.

Упражнения

1. Задают ли скалярное произведение в одномерном арифметическом векторном пространстве R^1 следующие формулы:

$$a)\quad (X,Y)=xy;\quad b)\quad (X,Y)=xy^3;\quad c)\quad (X,Y)=5xy.$$

2. Задают ли скалярное произведение в двумерном арифметическом векторном пространстве R^2 следующие формулы:

$$a)\quad (X,Y)=x_1y_1;\quad b)\quad (X,Y)=x_1y_1-x_2y_2;\quad c)\quad (X,Y)=x_1y_1+2x_2y_2;$$

$d)\quad (X,Y)=x_1y_1+2x_2y_2-x_1y_2-x_2y_1;\ \ e)\quad (X,Y)=\sqrt{(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)}.$

3. Можно ли в двумерном арифметическом векторном пространстве R^2 ввести скалярное произведение по формулам:

$a)\quad (X,Y)=x_1y_1-2x_2y_2;\quad b)\quad (X,Y)=2x_1y_1+3x_2y_2;$

$c)\quad (X,Y)=x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+3x_2y_2.$

4. Вычислите скалярное произведение элементов X,Y, их длины и угол между ними в случаях $б)$ и $в)$ задачи 3, если $X=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\qquad Y=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}.$

5. Показать, что скалярное произведение в двумерном арифметическом векторном пространстве R^2 можно определить следующими способами:

$а)\quad (X,Y)=x_1y_1+2x_2y_2;\quad б)\quad (X,Y)=2x_1y_1+5x_2y_2;$

$в)\quad (X,Y)=x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+2x_2y_2.$

Вычислить скалярное произведение векторов $X=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ и $Y=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ каждым из этих способов.

6. Выясните, можно ли n-мерном арифметическом векторном пространстве R^n задать скалярное произведение с помощью формулы

$$(X,Y)=x_1y_1+2x_2y_2+3x_3y_3+\dots+nx_ny_n.$$

1.4. Базис и координаты векторов в пространстве R^n

Определение. Всякая система векторов из пространства R^n называется **базисом этого пространства**, если выполняются следующие условия:

а) все векторы данной системы линейно независимы и

б) любой вектор пространства R^n является линейной комбинацией векторов данной системы.

Теорема. В пространстве R^n любая система из $\boldsymbol{n}$ линейно независимых векторов образует базис.

Теорема. Система из n векторов пространства R^n линейно независима тогда и только тогда, когда определитель матрицы, составленной из компонент этих векторов, отличен от нуля.

Из последней теоремы вытекает, в частности, существование бесчисленного множества базисов в пространстве R^n. Например, система из n векторов этого пространства

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \cdots \quad E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

линейно независима, так как определитель, составленный из компонент этих векторов

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

отличен от нуля. Значит, она образует базис. Этот базис называется **естественным базисом.**

Вообще, базис образуют столбцы любого не равного нулю определителя.

Легко заметить далее, что в пространстве R^n - не существует базиса, состоящего из $k < n$ векторов. В противном случае система, например, векторов $E_1, E_2, \ldots, E_n$ должна была бы линейно выражаться через эти k векторов и в силу основной теоремы о линейной зависимости векторов была бы линейно зависимой, чего нет. Таким образом, число базисных векторов совпадает с размерностью пространства.

Можно показать, что **представление произвольного вектора X из пространства R^n в виде линейной комбинации данных базисных векторов является единственным.**

Пример 8. Найти координаты вектора

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

в базисе

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решение

Обозначим координаты вектора X в базисе P_1, P_2, P_3 через x_1, x_2, x_3. Это значит, что

$$X = x_1 P_1 + x_2 P_2 + \cdots + x_n P_n$$

или

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ \qquad x_2 + x_3 = 3, \\ \qquad\qquad x_3 = 1. \end{cases}$$

Решив эту систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными x_1, x_2, x_3, получим

$$x_1 = -2; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = 1.$$

Таким образом, если координаты вектора X в базисе P_1, P_2, P_3 обозначить как $X_{нов}$, тогда

$$X_{нов} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Упражнения

1. Показать, что векторы A_1, A_2, A_3 образуют базис, и найти координаты вектора X в этом базисе.

$$a)\quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix};$$

$$b)\quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},\quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

2. Найти координаты вектора X в этом базисе H_1, H_2, H_3, H_4:

$$a)\quad H_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad H_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\quad H_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\quad H_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$б)\quad H_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad H_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\quad H_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad H_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\quad X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Из приведенных в этом пункте результатов вытекает следующее.

Согласно определению пространства R^n элементами этого пространства, т.е. n-мерными векторами, мы считали столбцы из n чисел (компонент этого вектора):

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Теперь мы имеем возможность, зафиксировав произвольный базис, задавать каждый вектор пространства R^n, столбцом из его координат в этом базисе.

Действительно, в фиксированном базисе координаты однозначно определены для каждого вектора из R^n.

Обратное очевидно: задание столбца из координат в данном базисе однозначно определяет сам вектор. ■

1.5. Действия над векторами, заданными в произвольном базисе

Линейные операции над векторами пространства R^n были определены как линейные операции над их компонентами, т.е. через линейные операции над их координатами в естественном базисе. Например, для нахождения суммы векторов надо найти суммы их соответствующих компонент; ранг системы векторов вычисляется как ранг матрицы, составленной из компонент этих векторов и т.д.

Оказывается, что хотя координаты векторов и меняются при изменении базиса, но линейные соотношения между столбцами из координат этих векторов от выбора базиса уже не зависят.

Имеет место следующее утверждение, которое мы примем без доказательства.

Теорема. Для существования линейной зависимости между векторами необходимо и достаточно, чтобы такая же линейная зависимость существовала между столбцами из их координат в произвольном фиксированном базисе.

Таким образом, линейное соотношение между векторами пространства R^n равносильно такому же линейному соотношению между столбцами из координат этих векторов в произвольном базисе. В частности, действия с векторами сводятся к соответствующим действиям со столбцами из координат этих векторов.

Кроме того, из приведенной теоремы следует, что **для определения ранга системы векторов достаточно найти ранг матрицы из координат этих векторов в произвольном фиксированном базисе.**

1.6. Преобразование координат векторов при изменении базиса

Пусть даны две системы из n векторов пространства R^n

$$\{H_i\} \text{ и } \{\widetilde{H}_j\}, \quad i, j = 1,2,\ldots,n.$$

Условимся первую из этих систем называть старой, а вторую - новой.

Предположим, что старая система $\{H_i\}$ образует базис. Тогда

$$\begin{aligned}
\widetilde{H}_1 &= p_{11}H_1 + p_{21}H_2 + \cdots + p_{n1}H_n, \\
\widetilde{H}_2 &= p_{12}H_1 + p_{22}H_2 + \cdots + p_{n2}H_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\widetilde{H}_n &= p_{1n}H_1 + p_{2n}H_2 + \cdots + p_{nn}H_n,
\end{aligned}$$

где числа p_{ij} - координаты векторов новой системы в базисе $\{H_i\}$ из векторов старой системы.

Матрицу из этих координат

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix},$$

назовем **матрицей перехода** от старой системы $\{H_i\}$ к новой системе $\{\widetilde{H}_j\}$.

Теорема. Пусть старая система $\{H_i\}$ образует базис. Для того чтобы новая система $\{\widetilde{H}_j\}$ также была базисной, необходима и достаточна не вырожденность (не особенность) матрицы перехода P.

Таким образом, при переходе от старого базиса к новому новые координаты выражаются через старые с использованием матрицы перехода от нового базиса к старому. В связи с этим говорят, что координаты векторов при изменении базиса преобразуются «контравариантно», т.е. противоположным образом сравнительно с векторами, составляющими базис.

Пример 9. Показать, что каждая из двух систем векторов

$$\{H_i\}: \quad H_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad H_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\{\tilde{H}_i\}: \quad \tilde{H}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \tilde{H}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{H}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

является базисом пространства R^3, и найти матрицы перехода от базиса $\{H_i\}$ к базису $\{\tilde{H}_i\}$ пространства R^3 и обратно, а также координаты вектора

$$X = \begin{pmatrix} -17 \\ -36 \\ -11 \end{pmatrix}$$

в каждом из заданных базисов.

Решение

Каждая из данных систем состоит из 3 векторов, и они рассматриваются в пространство R^3. Поэтому достаточно показать, что системы линейно независимы.

Составим матрицы:

$$A_H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_{\tilde{H}} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

Поскольку определители $|A_H| = 1$, $|A_{\tilde{H}}| = 4$ отличны от нуля, то строки каждой матрицы линейно независимы. А это означает, что и обе системы векторов линейно независимы.

Для нахождения координат x_1, x_2, x_3 вектора X в базисе $\{H_i\}$ и матрицы P перехода от базиса $\{H_i\}$ к базису $\{\tilde{H}_i\}$ составим и решим векторные уравнения:

$$X = x_1 H_1 + x_2 H_2 + x_3 H_3, \tag{1}$$

$$\tilde{H}_1 = p_{11} H_1 + p_{21} H_2 + p_{31} H_3, \tag{2}$$

$$\tilde{H}_2 = p_{12} H_1 + p_{22} H_2 + p_{32} H_3, \tag{3}$$

$$\tilde{H}_3 = p_{13} H_1 + p_{23} H_2 + p_{33} H_3. \tag{4}$$

Уравнение (1) дает

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 3x_2 \\ 3x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x_3 \\ 7x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ -36 \\ -11 \end{pmatrix},$$

откуда получим систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -17, \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = -36, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = -11. \end{cases}$$

Аналогично уравнения (2), (3), (4) дадут, соответственно, следующие системы уравнений с такими же коэффициентами при новых неизвестных:

$$\begin{cases} p_{11} + 2p_{21} + 3p_{31} = 3, \\ 2p_{11} + 3p_{21} + 7p_{31} = 1, \\ p_{11} + 3p_{21} + p_{31} = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} p_{12} + 2p_{22} + 3p_{32} = 5, \\ 2p_{12} + 3p_{22} + 7p_{32} = 2, \\ p_{112} + 3p_{22} + p_{32} = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} p_{13} + 2p_{23} + 3p_{33} = 1, \\ 2p_{13} + 3p_{23} + 7p_{33} = 1, \\ p_{13} + 3p_{23} + p_{33} = -6. \end{cases}$$

Поэтому все полученные четыре системы можно решить методом Гаусса одновременно:

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 3 & -17 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & -36 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -11 & 4 & 1 & -6 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 3 & -17 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -5 & -8 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 6 & 1 & -4 & -7 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 3 & -17 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -5 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -4 & -12 & -8 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 0 & -5 & -9 & -31 & -23 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -9 & -20 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -4 & -12 & -8 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -27 & -71 & -41 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 9 & 20 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 4 & 12 & 8 \end{array}\right).$$

Получаем:

$$X = -H_1 - 2H_2 - 4H_3, \tag{1'}$$

$$\tilde{H}_1 = -27H_1 + 9H_2 + 4H_3, \tag{2'}$$

$$\tilde{H}_2 = -71H_1 + 20H_2 + 12H_3, \tag{3'}$$

$$\tilde{H}_3 = -41H_1 + 9H_2 + 8H_3. \tag{4'}$$

Итак, числа -1, -2, -4 являются координатами вектора X в базисе $\{H_i\}$, а матрицей перехода от базиса $\{H_i\}$ к базису $\{\tilde{H}_i\}$ будет матрица

$$P = \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}.$$

Обратная к ней матрица

$$P^{-1} = \frac{1}{|P|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 52 & 76 & 181 \\ -36 & -52 & -126 \\ 28 & 40 & 99 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 19 & \frac{181}{4} \\ -9 & -13 & -\frac{63}{2} \\ 7 & 10 & \frac{99}{4} \end{pmatrix}$$

является матрицей перехода от базиса $\{\tilde{H}_i\}$ к базису $\{H_i\}$. Теперь находим столбец координат вектора X в базисе $\{\tilde{H}_i\}$:

$$X = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 19 & \frac{181}{4} \\ -9 & -13 & -\frac{63}{2} \\ 7 & 10 & \frac{99}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -232 \\ 161 \\ -126 \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$\tilde{x}_1 \tilde{H}_1 + \tilde{x}_2 \tilde{H}_2 + \tilde{x}_3 \tilde{H}_3 = -232 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 161 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 126 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ -36 \\ -11 \end{pmatrix} = X .$$

Упражнения

1. Найти матрицу перехода от базиса H_1, H_2, H_3 к базису $\tilde{H}_1, \tilde{H}_2, \tilde{H}_3$ и обратно, если

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad H_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{H}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{H}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{H}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Показать, что каждая из двух систем векторов $\{H_i\}$ и $\{\tilde{H}_i\}$ является базисом, и найти связь между координатами одного и того же вектора в этих двух базисах:

$$a) \quad H_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad H_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{H}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \tilde{H}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{H}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix};$$

$$b) \quad H_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad H_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad H_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{H}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{H}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{H}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{H}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

С помощью формул преобразования координат мы можем установить одно утверждение о ранге матриц, которое будет использовано в дальнейшем.

Теорема. Если одна из двух квадратных матриц - сомножителей не вырождена, то ранг произведения равен рангу второй матрицы.

1.7. Подпространства пространства R^n

1.7.1. Основные понятия

Определение. Пусть R - некоторое множество векторов пространства R^n. Если всякая линейная комбинация векторов множества R также является вектором из этого множества, то R называют **подпространством пространства** $\boldsymbol{R^n}$**.**

Иначе говоря, множество R является подпространством, если выполняются следующие два условия:

I. Если $X \in \mathrm{R}$ и $Y \in \mathrm{R}$, то $X + Y \in \mathrm{R}$.

II. Если $X \in \mathrm{R}$ и λ любое число, то $\lambda X \in \mathrm{R}$.

При этом, конечно, имеется в виду, что в случае действительного пространства R^n рассматриваются только действительные числа λ.

Заметим, что согласно второму условию нуль-вектор принадлежит любому подпространству.

Пример 10. Тривиальными примерами подпространств являются все пространство, а также множество, состоящее из одного нуль - вектора.

Пример 11. Более содержательный пример получим, рассматривая множество R_1 векторов из R^n, у которых первая координата в каком-либо фиксированном базисе $\{H_i\}$ равна нулю.

Пример 12. Множество решений совместной однородной системы линейных уравнений с n неизвестными также является подпространством пространства R^n.

Пример 13. Если рассматривать действительное пространство R^3 как обычное трехмерное пространство V^3 с фиксированной системой прямоугольных координат, то подпространствами будут плоскости и прямые, проходящие через начало координат. Заметим, что другие плоскости и прямые не будут подпространствами (они не содержат нуль - вектора).

Определение. Размерностью подпространства R пространства R^n называется число k, удовлетворяющее следующим двум условиям:

1) существует k линейно независимых векторов, принадлежащих этому подпространству;

2) любая система из $k+1$ векторов данного подпространства линейно зависима.

Очевидно, такое число k существует, причем $k \le n$. Если $k = n$, то подпространство R совпадает со всем пространством R^n, Действительно, n линейно независимых векторов образуют базис в R^n. Поэтому каждый вектор в R^n, поскольку он может быть разложен по этому базису, является по определению элементом подпространства R. Итак, все векторы пространства R^n входят в R. Обратное очевидно.

Определение. Система векторов подпространства R называется **базисом этого подпространства,** если:

1) векторы системы линейно независимы;

2) любой вектор подпространства является линейной комбинацией векторов данной системы.

Пример 14. В подпространстве R векторов из R^n, у которых первая координата в базисе $H_1, H_2, \ldots, H_n$ равна нулю, базисом будет система векторов $H_2, \ldots, H_n$. Действительно, она линейно независима, а всякий вектор из R по самому определению этого подпространства является линейной комбинацией векторов указанной системы. Размерность R, как легко заметить, равна $n-1$.

Пример 15. В пространстве V^3 плоскость, проходящая через начало координат, будет подпространством размерности 2. В самом деле, радиус-векторы любых трех точек этой плоскости компланарны и, следовательно, линейно зависимы. С другой стороны, пара неколлинеарных векторов этой плоскости линейно независима и образует базис этого подпространства.

Пример 16. Подпространство решений однородной системы ранга r с n неизвестными имеет базис, состоящий из любых $n-r$ линейно независимых решений; размерность этого подпространства равна $n-r$.

Действительно, если обратить на структуру множество решений совместной системы однородных уравнений с n неизвестными, то нетрудно заметить, что они образуют подпространство пространства R^n (§8). Из приведенной там теоремы вытекает, что подпространство решений однородной системы ранга r с n неизвестными имеет базис, состоящий из любых $n-r$ линейно независимых решений. Любые другие решения линейно выражаются через эту фундаментальную систему решений и, если число их больше $n-r$, они линейно зависимы согласно основной теореме о линейной зависимости векторов. Значит, размерность этого пространства равна $n-r$.

Во всех разобранных примерах мы нашли базис соответствующего подпространства и убедились, что размерность подпространства и число его базисных векторов одинаковы. Этот факт имеет место и в общем случае. Прежде всего, заметим, что все базисы подпространства состоят из одного и того же числа векторов.

Теорема. Для того чтобы подпространство R имело размерность k, необходимо и достаточно, чтобы в нем существовал базис из k векторов.

Таким образом, размерность подпространства можно также определить как число базисных векторов этого подпространства.

В заключение этого пункта рассмотрим вопрос о пополнении базиса подпространства R до базиса всего пространства R^n.

Теорема. Пусть $f_1, f_2, \dots, f_k$ - базис подпространства R пространства R^n, причем $k<n$. Тогда можно дополнительно выбрать $f_{k+1}, f_{k+2}, \dots, f_n$ так, чтобы система $f_1, f_2, \dots, f_n$ была базисом всего пространства R^n.

Упражнение

Даны два вектора:

$$A_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \qquad A_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Подобрать еще два вектора A_3, A_4 так, чтобы система A_1, A_2, A_3, A_4 была линейно независимой.

1.7.2. Линейная оболочка совокупности векторов

Определение. Пусть M - некоторое множество векторов пространства R^n (конечное или бесконечное). Совокупность всех (конечных) линейных комбинаций векторов из M **называется линейной оболочкой множества** M **и обозначается** $\mathsf{R}(\mathsf{M})$**.**

Легко увидеть, что линейная оболочка является подпространством, ибо если сложить две линейные комбинации векторов из множества M, а также если умножить линейную комбинацию таких векторов на число, то в обоих случаях опять получится некоторая линейная комбинация из векторов множества M.

Например, в пространстве V^3 линейной оболочкой векторов i и j будет подпространство, состоящее из всех векторов, лежащих в плоскости векторов i и j.

Определение. Иногда линейную оболочку системы (множества) векторов $X_1, X_2, \dots, X_k$ называют **подпространством, натянутым на данную систему векторов.**

Теорема. Размерность подпространства $\mathsf{R}(\mathsf{M})$, натянутого на систему векторов M, равна рангу этой системы.

Пример 16. Найти размерность и базис линейного подпространства пространства R^4, натянутого на данную систему векторов

$$f_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решение

Составим матрицу координат данных векторов

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и вычислим ее ранг. Так как минор третьего порядка, стоящий в левом верхнем углу матрицы P,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

а окаймляющий его минор четвертого порядка равен нулю, то ранг матрицы P равен 3. Значит, и ранг данной системы векторов равен 3.

Следовательно, подпространство, натянутое на данную систему векторов, трехмерно, а за базис можно принять векторы

$$f_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Помимо рассмотренных вопросов, а также можно было бы определить сумму и пересечение подпространств пространства R^n и рассмотреть другие вопросы, связанные с подпространствами пространства R^n. Эти вопросы мы затрагивать не будем.

1.8. Ортонормальный базис пространства $\mathbf{R^n}$. Процесс ортонормализации Шмидта

Напомним, что два вектора X и Y, состоящие из n компонент, являются ортогональными, если $(X,Y) \equiv X'Y = 0$. Предположим, что мы имеем n векторов $V_1, V_2, \ldots, V_n$ из пространства R^n, которые взаимно ортогональны и все отличны от Θ так, что

$$(V_i, V_j) = 0 \quad \text{для всех } i, j: \quad i \neq j.$$

Это множество векторов образует базис для пространства R^n. Доказательство получится, если мы сможем показать, что множество векторов $V_1, V_2, \ldots, V_n$ является линейно независимым, поскольку любое множество, состоящее из n линейно независимых векторов из пространства R^n, образует базис пространства R^n. Рассмотрим задачу нахождения коэффициентов λ_i, которые удовлетворяли бы равенству

$$\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \cdots + \lambda_n V_n = \Theta.$$

Умножая скалярно обе части последнего равенства на вектор V_1, мы получим:

$$\lambda_1|V_1|^2+\lambda_2(V_1,V_2)+\cdots+\lambda_n(V_1,V_n)=(V_1,\Theta)=0,$$

но $|V_1|^2\neq 0$ и значит, $\lambda_1=0$. Если мы скалярно умножим обе части равенства $\lambda_1V_1+\lambda_2V_2+\cdots+\lambda_nV_n=\Theta$ на вектор V_2, то получим $\lambda_2=0$ и т.д. Отсюда каждый коэффициент $\lambda_{\boldsymbol{i}}$, $(\boldsymbol{i}=1,2,\ldots,\boldsymbol{n})$ является нулем, поэтому векторы $V_1,V_2,\ldots,V_n$ являются линейно независимыми и образуют базис для пространства R^n. Таким образом, любое множество, состоящее из n взаимно ортогональных не нуль - векторов из пространства R^n, образует базис пространства R^n.

Разделим каждый вектор V_i на его длину $|V_i|$ и напишем

$$U_i=\frac{V_i}{|V_i|}.$$

Это может быть сделано, так как $|V_i|\neq 0$. Векторы U_i представляют собой векторы единичной длины, таким образом,

$$(U_i,U_j)=\begin{cases}0 & при \quad i\neq j,\\ 1 & при \quad i=j.\end{cases}$$

Определение. Множество n взаимно ортогональных векторов единичной длины из пространства R^n образует так называемый **ортогональный нормированный, короче ортонормальный базис пространства**.

Ортонормальные базисы особенно интересны потому, что любой вектор X из пространства R^n может выражаться значительно проще как линейная комбинация ортонормальных базисных векторов. Если векторы $U_1,U_2,\ldots,U_n$ образуют ортонормальный базис для пространства R^n, и мы хотим найти коэффициенты в выражении

$$X=\lambda_1U_1+\lambda_2U_2+\cdots+\lambda_nU_n,$$

то достаточно скалярно умножить обе части последнего равенства на U_i, и мы получим:

$$\lambda_i=(U_i,X).$$

Скаляр λ_i найдем просто путем образования скалярного произведения векторов U_i и X.

Замечание. Отметим, что в пространстве R^n ортонормальный базис (один из бесконечного числа возможных) образует единичные векторы

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \cdots \quad E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Напомним, что выше этот базис мы называли естественным базисом.

Поскольку любое множество взаимно ортогональных ненулевых векторов из n компонент является линейно независимым, невозможно иметь $n+1$ взаимно ортогональных ненулевых векторов в пространстве R^n.

Любое множество, состоящее из данных n линейно независимых векторов из пространства, может быть преобразовано в ортонормальный базис посредством процесса, известного под названием **ортонормализационного процесса Шмидта**.

Предположим, что векторы $A_1, A_2, \ldots, A_n$ представляют собой $\boldsymbol{n}$ линейно независимых векторов из пространства R^n. Мы выбираем любой вектор из этого множества, например, вектор A_1. Этот вектор определяет направление в пространстве, и мы строим вокруг него ортонормальное множество. Определим вектор единичной длины U_1 как

$$U_1 = \frac{A_1}{|A_1|}.$$

Для того чтобы получить вектор V_2, ортогональный к вектору $\boldsymbol{U}_1$ мы вычитаем из вектора A_2 вектор U_1, умноженный на скалярный множитель α_1, т.е. вектор U_2 выражается как

$$V_2 = A_2 - \alpha_1 U_1,$$

и определяем α_1 таким образом, чтобы $(U_1, V_2) = 0$. Отсюда

$$\alpha_1 = (U_1, A_2)$$

может быть выражен через компоненты векторов A_2 и U_1. Итак, вектор $\alpha_1 U_1$ может быть интерпретирован как векторная компонента вектора A_2 по вектору U_1. Таким образом,

$$V_2 = A_2 - (U_1, A_2)U_1.$$

Второй единичный вектор, ортогональный к $\boldsymbol{U}_1$ определяется равенством

$$U_2 = \frac{V_2}{|V_2|}.$$

Это может быть сделано, поскольку $|V_2| \neq 0$ (почему?). Вектор, ортогональный к векторам U_1, U_2, найдется вычитанием из вектора $\boldsymbol{A}_3$ векторных компонент этого вектора по векторам U_1 и U_2. Это дает:

$$V_3 = A_3 - (U_1, A_3)U_1 - (U_2 - A_3)U_2.$$

Ясно, что вектор V_3 является ортогональным к векторам U_1, U_2. Третий единичный вектор, который является ортогональным к векторам U_1 и U_2, выражается равенством

$$U_3 = \frac{V_3}{|V_3|}.$$

Этот процесс продолжается до тех пор, пока не будет получен ортонормальный базис. Вообще

$$V_r = A_r - \sum_{i=1}^{r-1}(U_i, A_r)U_i, \qquad U_r = \frac{V_r}{|V_r|}. \ \blacksquare$$

Пример 17. Применяя процесс Шмидта, построить ортонормальный базис из системы векторов

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Решение

Эта система векторов линейно независима, так как матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

составленная из этих векторов имеет ранг равный 3. Действительно, минор второго порядка стоящий в левом верхнем углу матрицы A,

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -16 \neq 0,$$

и окаймляющий его минор третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -64 \neq 0.$$

Тогда

$$U_1 = \frac{A_1}{|A_1|} = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$V_2 = A_2 - (U_1, A_2)U_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{15}{\sqrt{13}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{30}{13} \\ \frac{45}{13} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{48}{13} \\ -\frac{32}{13} \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$U_2=\frac{V_2}{|V_2|}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3328}}{13}}\cdot\begin{pmatrix}\frac{48}{13}\\-\frac{32}{13}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{48}{\sqrt{3328}}\\-\frac{32}{\sqrt{3328}}\\0\end{pmatrix};$$

$$V_3=A_3-(U_1,A_3)U_1-(U_2,A_3)U_2=$$

$$=\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{13}}\\\frac{3}{\sqrt{13}}\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{48}{\sqrt{3328}} & -\frac{32}{\sqrt{3328}} & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{48}{\sqrt{3328}}\\-\frac{32}{\sqrt{3328}}\\0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}-\frac{6}{\sqrt{13}}\cdot\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{13}}\\\frac{3}{\sqrt{13}}\\0\end{pmatrix}+\frac{64}{\sqrt{3328}}\cdot\begin{pmatrix}\frac{48}{\sqrt{3328}}\\-\frac{32}{\sqrt{3328}}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{12}{13}\\\frac{18}{13}\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{64\cdot 48}{3328}\\-\frac{64\cdot 32}{3328}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix};$$

$$U_3=\frac{V_3}{|V_3|}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Таким образом, применяя процесс Шмидта, из заданной системы векторов построили следующий ортонормальный базис:

$$U_1=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{13}}\\\frac{3}{\sqrt{13}}\\0\end{pmatrix},\qquad U_2=\begin{pmatrix}\frac{48}{\sqrt{3328}}\\-\frac{32}{\sqrt{3328}}\\0\end{pmatrix},\qquad U_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Замечание. Отметим, что в пространстве R^3 только что построенные нами (с помощью процесса Шмидта) вектора U_1, U_2, U_3 наряду с единичными векторами этого пространства

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

образуют ортонормальный базис. Заметим, что эти ортонормальные базисы только два из бесконечного числа возможных ортонормальных базисов пространства R^3.

Упражнения

1. Используя шмидтовский процесс ортонормализации, построить ортонормальный базис пространства R^3 из следующего множества базисных векторов:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}; \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

2. Используя шмидтовский процесс ортонормализации построить ортонормальный базис подпространства R, натянутого на следующую систему векторов:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. Линейное пространство

2.1. Определение линейного пространства

В курсах аналитической геометрии, математического анализа и алгебры можно встретиться с объектами различной природы - действительными и комплексными числами, векторами на прямой линии, на плоскости и в трехмерном пространстве; n - мерными векторами; матрицами; функциями, определенными на некотором отрезке. Для каждого типа таких объектов устанавливаются операции их сложения и умножения на число. Эти операции, несмотря на различие в их определений, в природе объектов, над которыми они совершаются, обладают существенными общими свойствами.

Можно отвлечься от конкретной природы этих объектов и построить содержательную общую теорию, результаты которой применимы в любом конкретном случае. Краткую схему построения такой теории мы и дадим в этом параграфе.

В этой теории основным понятием является понятие линейного пространства, которое вводится аксиоматически.

Рассмотрим множество L элементов $x, y, z, \ldots$. Будем предполагать, что

1) каждой паре двух элементов x и y ($x \in L$, $y \in L$) каким-то образом сопоставляется третий элемент z $(z \in L)$, называемый **их суммой** и обозначаемый через $z = x + y$;

2) каждому элементу $x \in L$ и каждому числу λ сопоставляется элемент $u \in L$, называемый **произведением элемента** x **числа** λ и обозначаемый через $u = \lambda \cdot x$.

Определение. Множество L называется **линейным пространством**, если установленные для его элементов $x, y, z, \ldots$ операции сложения и умножения на число подчинены следующим аксиомам:

1°. $x + y = y + x$ для любых $x, y \in L$;

2°. $(x + y) + z = y + (x + z)$ - для любых $x, y, z \in L$;

3°. существует элемент «нуль», обозначаемый через θ, и такой, что $x + \theta = x$ при любом $x \in L$;

4°. для любого элемента x - существует противоположный элемент $(-x)$, такой, что $x + (-x) = \theta$;

5°. $1 \cdot x = x$;

6°. $(\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$;

7°. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;

8°. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,

где α и β - любые числа.

Элементы $x, y, z, \dots$ линейного пространства L называются **векторами.** В частности, элемент «нуль» называется нулевым вектором (нуль -вектором), противоположный элемент - противоположным вектором.

В качестве чисел мы можем взять либо комплексные числа, либо действительные.

Определение. Линейное пространство называется **комплексным**, если для его векторов определено умножение на комплексные числа, и **действительным**, если определено умножение только на действительные числа.

Из приведенных аксиом могут быть выведены следующие свойства линейного пространства, доказательство которых мы опускаем:

1. В любом линейном пространстве существует единственный нулевой вектор.

2. В любом линейном пространстве для каждого вектора x существует единственный противоположный вектор $(-x)$, причем $(-x) = -1 \cdot x$.

3. В любом линейном пространстве для всякого вектора имеет место равенство $0 \cdot x = \theta$.

Замечание. Аксиома 4° позволяет ввести вычитание в линейном пространстве. Под разностью $x - y$ мы будем понимать сумму $x + (-y)$.

2.2. Примеры линейных пространств

В данном выше аксиоматическом определении линейного пространства природа векторов безразлична. Теперь переходим к конкретным примерам линейных пространств.

Пример 18. Рассмотрим множество L чашек кофе с молоком. Введем в этом множестве операции умножения на число и сложения. Если к приготовленной порции кофе добавить точно такую же, то содержимое сосуда увеличится вдвое. Будем говорить, что мы умножили порцию кофе на 2. Аналогично можно определить умножение на любое положительное число.

Теперь возьмем две разные чашки кофе, приготовленного по различным рецептам, и сольем их вместе. Будем говорить, что мы произвели сложение двух элементов нашего множества. Заметим, что в результате всех этих действий мы получаем элемент нашего множества (кофе с молоком), а не компот и не кисель.

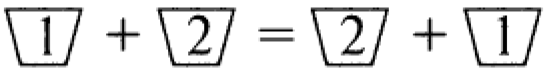
Каждой чашке кофе можно поставить в соответствие пару чисел (x_1, x_2), где x_1 - количество молока (в стаканах) в этой чашке, а x_2 - количество черного кофе (в стаканах) в этой чашке. Мы получим объекты вида $\mathsf{x} = (x_1, x_2)$, с которыми уже хорошо знакомы, - векторы. А введенные нами операции во множестве чашек кофе - это умножение вектора на число и сложение векторов. Но интерпретация векторов на языке чашек кофе с молоком поможет нам лучше изучить свойства операций над векторами. При объединении содержимого двух чашек кофе мы получаем элемент нашего множества (кофе с молоком), а не компот и не кисель. На математическом языке это звучит так:

1) каждой паре x и y ($\mathsf{x} \in \mathsf{L}$, $\mathsf{y} \in \mathsf{L}$) сопоставляется третий элемент z $(\mathsf{z} \in \mathsf{L})$, называемый **их суммой** и обозначаемый через $\mathsf{z} = \mathsf{x} + \mathsf{y}$.

Если к приготовленной порции кофе с молоком добавить точно такую же, то содержимое сосуда увеличится вдвое. Будем говорить, что мы умножили порцию кофе на 2. Аналогично можно определить умножение на любое положительное число. На математическом языке это звучит так:

2) каждому $\mathsf{x} \in \mathsf{L}$ и каждому числу λ сопоставляется элемент $\mathsf{u} \in \mathsf{L}$, называемый **произведением элемента** x **число** λ и обозначаемый через $\mathsf{u} = \lambda \cdot \mathsf{x}$.

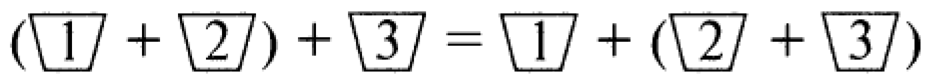
Можно добавить содержимое 2-й чашки к 1-й, а можно добавить содержимое 1-й чашки ко 2-й. Результат от этого не изменится.



1°. $\mathsf{x} + \mathsf{y} = \mathsf{y} + \mathsf{x}$ для любых $\mathsf{x}, \mathsf{y} \in \mathsf{L}$.

Эта аксиома выполняется не для всякого множества, в котором введена операция сложения. Заменим кофе и молоко на воду, и концентрированную серную кислоту. Тогда $H_20 + H_2S0_4$ = раствор серной кислоты, а $H_2S0_4 + H_20$ = опасность!

При сложении векторы можно объединять в любые группы. Можно объединить сначала содержимое 1 -й и 2-й чашек кофе, а затем добавить содержимое 3-й чашки кофе. А можно объединить сначала содержимое 3-й и 2-й чашек кофе и добавить все это к содержимому 1-й чашки кофе. Результат от этого не изменится.



2°. $(x+y)+z=y+(x+z)$ - для любых $x, y, z \in L$.

Эта аксиома выполняется не для всякого множества, в котором введена операция сложения. Для приготовления водного раствора кристаллического йода сначала нужно йод растворить в спирте, а затем полученный раствор разбавить водой: $H_20 + (I_2 + C_2H_5OH)$ = раствор. При изменении порядка сложения результат будет другим: с водой йод образует взвесь, которая не превратится в раствор при добавлении спирта. $(H_20 + 1_2) + C_2H_5OH$ = взвесь.

В нашем множестве чашек кофе с молоком есть особый элемент (пустая чашка), прибавление которого к любой другой чашке кофе с молоком не влияет на содержимое чашки кофе.

3°. существует элемент «нуль», обозначаемый через θ , и такой, что $x+\theta=x$ при любом $x \in L$.

Английскому физику Полю Дираку однажды предложили шуточную задачу на смекалку. Три рыбака ловили рыбу. Ловля закончилась затемно, и рыбаки решили разделить добычу утром при свете дня. Один рыбак проснулся раньше других и решил, не будя остальных, взять причитающуюся ему треть улова и уйти. Число рыб на 3 не делилось. Рыбак выкинул одну рыбу и, забрав треть улова, ушел. Затем проснулся другой рыбак и, ничего не подозревая, принялся вновь делить добычу на 3 части. Число рыб на 3 не делилось. Рыбак выкинул одну рыбу и, забрав треть улова, ушел. Последний рыбак поступил так же, как и предыдущий. Какое минимальное число рыб поймали рыбаки?

Легко проверить, что ответ задачи 25. Но Дирак дал другой и, как ни странно, правильный ответ: -2. С точки зрения математики Дирак прав (-2 < 25 и -2 подходит, -2 - 1 = -3, -3/3 = -1, -3 - (-1) = -2 и т.д.).

Конечно, ответ Дирака не имеет физического смысла. Но для нас ценен то факт, что Дирак не делает различия между положительными и отрицательными числами. И мы не будем делать различия между положительными и отрицательными числами при определении умножения на числа. Появляются отрицательные чашки кофе – кофе по-дираковски.

Из физики известно, что две взаимно противоположные силы при сложении дают нулевую силу. Для всякой силы можно подобрать противоположную силу.

4°. для любого элемента $\mathbf{x}$ - существует противоположный элемент $(-\mathrm{x})$, такой, что $\mathrm{x}+(-\mathrm{x})=\theta$.

Проверка выполнимости других аксиом 5°-8°для нашего примера является очевидной.

Таким образом, множество L чашек кофе с молоком образует линейное пространство.

Упражнение

Рассмотрим множество T всех наборов товаров. Под **товаром** понимаются некоторое благо или услуга, поступившие в продажу в определенное время и в определенном месте. Будем считать, что имеется n различных товаров, количество i-го товара обозначается x_i, тогда некоторый набор товаров обозначается $X=(x_1,\ldots,x_n)$, т.е. является «n-мерным вектором». В этом множестве можно сложить любые два набора и умножить любой набор товаров на любое число. Возможность умножения набора товаров на любое неотрицательное число отражает предположение о безграничной делимости и умножении товаров (т.е. товары устроены наподобие сахарного песка, а не авианосцев).

Будет ли это множество линейным пространством (проверить, выполняются ли аксиомы 1° - 8°).

Пример 19. Множество действительных чисел составляет действительное линейное пространство. Аксиомы 1° - 8° выполняются в этом случае в силу свойств действий, установленных в арифметике.

Аналогично комплексные числа составляют комплексное линейное пространство.

Пример 20. Рассмотренные нами в ранее пространства V^1, V^2 и V^3 являются примерами линейных пространств, так как установленные в этих пространствах правила сложения векторов и умножения вектора на число подчиняются аксиомам 1° - 8°.

Пример 21. Рассмотренное ранее действительное арифметическое пространство R^n также является примером действительного линейного пространства, поскольку правила сложения векторов и умножения вектора на число, установленные в этом пространстве, подчиняются аксиомам 1° - 8°.

Аналогично комплексное арифметическое пространство C^n является примером комплексного линейного пространства.

Пример 22. Пространство M^n, векторами которого являются квадратные матрицы порядка $\boldsymbol{n}$, также является примером линейного пространства, так как правила сложения квадратных матриц и умножения их на число подчиняются аксиомам 1°- 8°.

Пример 23. Векторами пространства $C[a,b]$ являются действительные функции $\mathsf{x} = x(t)$ действительного аргумента, непрерывные на отрезке $a \le t \le b$.

В этом пространстве сумма двух векторов определяется как обычная сумма соответствующих функций, произведение вектора на число - как обычное произведение соответствующей функции на это число:

$$\mathsf{x} + \mathsf{y} = x(t) + y(t), \qquad \lambda \cdot \mathsf{x} = \lambda \cdot x(t).$$

Как будет известно из математического анализа, сумма двух функций (векторов нашего пространства), непрерывных на отрезке $a \le t \le b$, и результат умножения такой функции (вектора нашего пространства) на число снова представляют собой функции, т.е. векторы нашего пространства, непрерывные на отрезке $a \le t \le b$.

Роль нулевого вектора в пространстве $C[a,b]$ играет функция, тождественно равная нулю на отрезке $a \le t \le b$, а противоположным вектором (-x) является функция $(-1)\cdot x(t)$.

Установленные над рассматриваемыми функциями действия удовлетворяют всем аксиомам из определения линейного пространства. Проверка этого сводится к использованию законов арифметики при фиксированном t.

Пример 24. Таким же образом можно проверить, что множество всех многочленов степени, меньшей или равной n, с обычными действиями сложения и умножения на число представляет собой линейное пространство. Заметим, что множество всех многочленов степени, равной n, не будет линейным пространством, так как сумма таких многочленов может оказаться многочленом степени, меньшей n. Так, если

$$\mathsf{x} \equiv P_n(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$$

и

$$\mathsf{y} \equiv Q_n(t) = a_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \dots + b_1 t + b_0$$

- многочлены степени n, то многочлен $P_n(x) - Q_n(x)$ имеет степень меньше n.

2.3. Линейная зависимость. Базис и координаты. Размерность

Аксиомы 1° - 8° линейного пространства выражают тот факт, что действия с векторами любого линейного пространства производятся в точности по тем же правилам, что и действия над вектор - столбцами. Это дает возможность перенести на абстрактное линейное пространство определение линейной зависимости векторов, данное для пространства R^n вектор - столбцов. Вообще, все свойства вектор - столбцов, использующие не их конкретную природу, а только правила линейных операций над ними, оказываются автоматически справедливыми и в абстрактном линейном пространстве L.

Хорошим примером служит теорема Штейница – основная теорема о линейной зависимости векторов: **если векторы $y_1, y_2, \ldots, y_k$ являются линейными комбинациями векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причем $k > n$, то эти первые k векторов линейно зависимы.**

Доказательство, данное ранее для вектор - столбцов и не использующее их конкретную природу, дословно переносится на случай любого линейного пространства L.

Напротив, обоснование утверждения **«всякие $(n+1)$ векторов пространства R^n линейно зависимы»** существенно опиралось на представление этих векторов как столбцовых матриц с n компонентами. **В применении к абстрактному линейному пространству это утверждение бессодержательно ввиду произвольности n.**

Рассмотрим примеры линейной зависимости в различных линейных пространствах.

Пример 25. Показать, что в пространстве $C[a,b]$ векторы $1, t, t^2, \ldots, t^n$, где n - любое целое положительное число, являются линейно независимыми.

Решение

Нулевым вектором в этом пространстве, как уже отмечалось, является функция, тождественно равная нулю. Предположим, что

$$\lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \cdots + \lambda_n t^n \equiv 0.$$

Если среди чисел λ_i - имеются отличные от нуля, то стоящий слева многочлен имеет не более $\boldsymbol{n}$ корней. Но у этого многочлена каждая точка интервала $[a,b]$ является корнем. Следовательно, все коэффициенты рассматриваемого многочлена равны нулю, т.е. векторы $1, t, t^2, \ldots, t^n$ линейно независимы.

Пример 26. Показать, что в пространстве $C[a,b]$ векторы $x_1 = e^t$ и $x_2 = 3e^t$ линейно зависимы.

Решение

Линейная зависимость данных векторов очевидна, так как

$$3x_1 - x_2 \equiv 0.$$

Аналогичным путем легко показать, что функции $y_1 = \sin^2 t$, $y_2 = \cos^2 t$, $y_3 = \frac{1}{2}$, рассматриваемые как векторы пространства $C[a,b]$, линейно зависимы, так как

$$y_1 + y_2 - 2y_3 \equiv 0.$$

Базис и координаты в абстрактном линейном пространстве определяются точно так же, как в пространстве R^n.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 27. Указать один из базисов пространства многочленов не выше четвертой степени.

Решение

В качестве вектора e_1 возьмем число 1, т.е. $e_1 = 1$. В качестве векторов**,** e_2, e_3, e_4, e_5 возьмем, соответственно, функции t, t^2, t^3, t^4. Очевидно, что все эти векторы линейно независимы и любой многочлен степени не выше четвертой является их линейной комбинацией.

Пример 28. Найти координаты полинома $P(t) = 3 + 2t - t^2 + t^3$ в базисе $e_1 = 1$**,** $e_2 = t - 1$**,** $e_3 = (t-1)^2$**,**$e_4 = (t-1)^3$**.**

Решение

Пользуясь формулой Тейлора, разложим многочлен по степеням $(t-1)$:

$$P'(t) = 2 - 2t + 3t^2, \quad P'(1) = 3; \; P''(t) = -2 + 6t, \quad P''(1) = 4; \; P'''(t) = 6, \quad P'''(1) = 6.$$

Следовательно, $P(t) = 5 + 3(t-1) + 2(t-1)^2 + (t-1)^3$. Откуда следует, что координатами данного многочлена $P(t) = 3 + 2t - t^2 + t^3$ в заданном базисе будут числа 5, 3. 2, 1.

Введя понятие базиса в абстрактном линейном пространстве, с помощью основной теоремы о линейной зависимости векторов легко установить, что **все базисы линейного пространства L, если они существуют, состоят из одинакового числа векторов.**

Доказательство, точно такое же, как в случае конечной совокупности векторов-столбцов. ■

Далее имеем: **если в линейном пространстве существует базис из** n **векторов, то любые** $(n+1)$ **векторов этого пространства линейно зависимы**.

И это утверждение является следствием цитированной только что основной теоремы.

Наконец, **если в линейном пространстве** L **существует система из** n **линейно независимых векторов, а всякая система из** $(n+1)$ **векторов линейно зависима, то** n **линейно независимых векторов образуют базис этого пространства.**

Действительно, присоединив к указанным n векторам $\{\mathrm{e_j}\}$ произвольный вектор x из L, получим согласно условию линейно зависимую систему. Иначе говоря,

$$\lambda_0\mathrm{x}+\lambda_1\mathrm{e}_1+\lambda_2\mathrm{e}_2+\cdots+\lambda_n\mathrm{e}_\mathrm{n}=\theta,$$

причем не все λ_j равны нулю. Очевидно, $\lambda_0 \neq 0$, в противном случае система $\{\mathrm{e_j}\}$ была бы линейно зависима. Но если $\lambda_0 \neq 0$, то $\boldsymbol{x}$ линейно выражается через $\{\mathrm{e_j}\}$, что и требовалось доказать. ■

Определение. Теперь можно дать определение **размерности пространства** как максимального числа (если такое существует) линейно независимых векторов этого пространства.

В силу отмеченных выше утверждений **размерность пространства совпадает с числом его базисных векторов.** Оговорка относительно существования размерности не является излишней. Так, в пространстве $C[a,b]$ векторы $1,t,t^2,\ldots,t^n$, как уже было показано, линейно независимы при любом n.

Определение. Пространства, обладающие бесконечным множеством линейно независимых векторов, называются бесконечномерными.

Кроме $C[a,b]$, бесконечномерным является, например, пространство всех многочленов. Напротив, пространство многочленов степени не выше n

конечномерно, и его размерность равна $(n+1)$. Для доказательства достаточно заметить, что базисом его будет, в частности, система векторов $1, t, t^2, ..., t^n$.

Пример 29. Найти базис и размерность линейного пространства M^2, состоящего из всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \tag{*}$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ - действительные числа.

Решение

В качестве базиса можно взять следующую четверку матриц:

$$\mathrm{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{**}$$

Действительно, любая матрица (*) разлагается по матрицам (**):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\mathrm{e}_1 + a_{12}\mathrm{e}_2 + a_{21}\mathrm{e}_3 + a_{22}\mathrm{e}_4,$$

а линейная независимость матриц (**) следует из того, что равенство

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\mathrm{e}_1 + a_{12}\mathrm{e}_2 + a_{21}\mathrm{e}_3 + a_{22}\mathrm{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

возможно только, при $a_{11} = 0,\ \ a_{12} = 0,\ \ a_{21} = 0,\ \ a_{22} = 0$. Таким образом, размерность пространства M^2 равна 4.

Определение подпространства также не отличается от соответствующего определения для случая R^n. Заметили только, что **всякое подпространство линейного пространства само является линейным пространством.**

Доказательство очевидно. ■

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 30. В пространстве квадратных матриц порядка n подпространствами будут, например, множество диагональных матриц и множество симметричных матриц. Размерность подпространства диагональных матриц равна n, а размерность подпространства симметричных матриц равна

$\frac{n(n+1)}{2}$. Проверка предоставляется читателю.

Пример 31. Пространство бесконечно гладких (бесконечно дифференцируемых) функций представляет собой подпространство пространства $C[a,b]$. Оно обозначается через $C^{\infty}[a,b]$.

Пример 32. В пространстве $C[a,b]$ подпространством будет множество всех многочленов, так как сумма любых двух многочленов, а также произведение многочлена на любое число есть снова многочлен.

Рассмотрим в заключение действия над векторами в конечномерном линейном пространстве.

Теорема. В конечномерном линейном пространстве координаты вектора в фиксированном базисе определены однозначно. Для существования линейной зависимости между векторами необходимо и достаточно существование такой же зависимости между столбцами из координат этих векторов.

Доказательство соответствующего утверждения для пространства R^n использует только определение линейной зависимости, существование базиса и правила линейных операций с векторами. Поэтому результат остается справедливым для любого конечномерного линейного пространства. ■

2.4. Изоморфизм конечномерных линейных пространств

Рассмотрим два множества X и Y некоторых элементов $x_1, x_2, \ldots$ и $y_1, y_2, \ldots$ причем $x_1, x_2, \ldots \in X$, а $y_1, y_2, \ldots \in Y$.

Определение. Будем говорить, что **между множествами** X **и** Y **установлено взаимно однозначное соответствие**, если указано правило, согласно которому каждому элементу $x \in X$ сопоставлен один и только один элемент $y \in Y$ и при этом каждый элемент $y \in Y$ сопоставлен одному и только одному элементу $x \in X$.

Такое взаимно однозначное соответствие имеет, например, место между буквами в двух экземплярах текста, отпечатанного под копирку, или между точками на фотопленке и соответствующими точками отпечатка на фотобумаге.

Определение. Пусть X и Y - два линейных пространства. Будем говорить, что **между этими пространствами установлен изоморфизм** или что **эти пространства изоморфны,** если между векторами этих пространств установлено взаимно однозначное соответствие, сохраняющееся при линейных операциях над векторами, т.е. из того, что

$$x_1 \longleftrightarrow y_1, \qquad x_2 \longleftrightarrow y_2,$$

следует, что

$$x_1 + x_2 \longleftrightarrow y_1 + y_2,$$

а из того, что

$$x \longleftrightarrow y,$$

следует, что

$$\lambda x \longleftrightarrow \lambda y.$$

Иначе говоря, изоморфизм - это взаимно однозначное соответствие, сохраняющееся при сложении векторов, а также при умножении их на числа.

2.5. Условие изоморфности линейных пространств

Рассмотрим два линейных пространства X и Y; при этом будем предполагать, что оба пространства действительные.

Теорема. Для того чтобы два конечномерных линейных пространства были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы они имели одинаковую размерность.

Доказательство. Достаточность. Пусть X и Y - два линейных пространства одной и той же размерности n. Чтобы установить их изоморфизм, выберем произвольные базисы $e_1, e_2, \ldots, e_n \in X$, а $f_1, f_2, \ldots, f_n \in Y$ и сопоставим векторы базисов следующим образом:

$$e_1 \longleftrightarrow f_1,$$

....

$$e_n \longleftrightarrow f_n.$$

Теперь соответствие легко распространяется на все векторы из пространств X и Y:

$$\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n \longleftrightarrow \xi_1 f_1 + \xi_2 f_2 + \cdots + \xi_n f_n. \qquad (1)$$

Так как при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число, то при умножении на число векторов, стоящих слева и справа в (1), получаются соответствующие друг другу векторы

$$\lambda\xi_1 e_1 + \lambda\xi_2 e_2 + \cdots + \lambda\xi_n e_n \longleftrightarrow \lambda\xi_1 f_1 + \lambda\xi_2 f_2 + \cdots + \lambda\xi_n f_n. \qquad (2)$$

Аналогично соответствие сохраняется при сложении векторов, т.е. если

$$\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n \longleftrightarrow \xi_1 f_1 + \xi_2 f_2 + \cdots + \xi_n f_n,$$

$$\eta_1 e_1 + y_2 e_2 + \cdots + \eta_n e_n \longleftrightarrow \eta_1 f_1 + \eta_2 f_2 + \cdots + \eta_n f_n,$$

то

$$\begin{aligned}&(\xi_1 + \eta_1)e_1 + (\xi_2 + \eta_2)e_2 + \cdots + (\xi_n + \eta_n)e_n \longleftrightarrow \\ &\longleftrightarrow (\xi_1 + \eta_1)f_1 + (\xi_2 + \eta_2)f_2 + \cdots + (\xi_n + \eta_n)f_n.\end{aligned} \qquad (3)$$

Необходимость. Предположим, что пространства X и Y изоморфны. Пусть одно из них, например, Y, имеет размерность n. Покажем, что пространство X также n-мерно.

Возьмем в пространстве Y базис $f_1, f_2, \ldots, f_n$ и найдем в пространстве X те векторы, которые при изоморфизме соответствуют векторам этого базиса. Обозначим их через $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Нам достаточно проверить, что векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ образуют базис в пространстве X, т.е., что они линейно независимы и что любой вектор $x \in X$ является их линейной комбинацией.

Допустим, что

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n. \qquad (4)$$

Тогда

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n, \tag{5}$$

ибо при изоморфизме нулевому вектору, как легко проверить, соответствует нулевой вектор. Но по условию векторы $f_1, f_2, \cdots, f_n$ образуют базис и, следовательно, являются линейно независимыми; это означает, что

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Следовательно, векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейно независимы.

Теперь возьмем любой вектор $x \in X$. Пусть ему соответствует $y \in Y$, Разложим вектор y по базису $f_1, f_2, \ldots, f_n$:

$$y = \xi_1 f_1 + \xi_2 f_2 + \cdots + \xi_n f_n.$$

Рассмотрим в пространстве X вектор

$$\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n.$$

В силу определения изоморфизма

$$\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n \longleftrightarrow \xi_1 f_1 + \xi_2 f_2 + \cdots + \xi_n f_n.$$

Но вектору $y \in Y$ соответствует вектор $x \in X$, значит,

$$\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n = x.$$

Таким образом, мы показали, что $e_1, e_2, \ldots, e_n$ есть базис в пространстве X; следовательно, пространство X n-мерно, что и требовалось доказать.

Замечание. Установленный здесь результат означает, что изучение свойств любого конечномерного пространства равносильно изучению соответствующего арифметического пространства R^n. Отсюда ясно, почему именно этому пространству мы уделили такое исключительное внимание.

3. Евклидово пространство

3.1. Вводные замечания

В предыдущих пунктах данного параграфа были введены и изучены некоторые важные понятия, относящиеся к линейным пространствам, такие как базис, размерность, подпространство. Однако линейные пространства существенно отличаются от пространства, изучаемого в аналитической геометрии, тем, что у векторов рассматриваемых пространств нет длины и нет угла между векторами. Эти понятия просто не определены.

В элементарной геометрии (метод координат) при помощи известных понятий длины вектора и угла мы определили скалярное произведение векторов. Оказывается, что длина вектора и угол между векторами могут, выражены через скалярное произведение векторов. Следовательно, важным является введение понятия скалярного произведения.

Для арифметического n- мерного пространства R^n, которое является примером линейного пространства, ранее по аналогии со свойствами трехмерного пространства, нами было введено понятие скалярного умножения. Отметим, что там мы скалярное произведение определили безотносительно к углам, а затем первоначальное определение скалярного произведения применили для определения угла между двумя векторами и длины вектора.

Ниже мы дадим абстрактное определение скалярного пространства в действительном линейном пространстве. Для пространства, снабженного таким произведением – евклидова пространства – дадим схему построения теории, включающую все основные геометрические факты, имеющие место в обычном трехмерном пространстве. Еще раз отметим, что для арифметического n- мерного пространства R^n нами это уже сделано, когда еще мы были незнакомы с понятием линейного пространства и не знали, что R^n образует линейное пространство.

3.2. Скалярное произведение. Определение евклидова пространства

Определение. Действительное линейное пространство E называется **евклидовым пространством,** если каждой паре векторов x и y из E поставлено в соответствие действительное число, обозначаемое символом (x,y) и называемое **скалярным произведением векторов** x **и** y**,** причем выполняются следующее условия (аксиомы):

1^0. $(\mathrm{x},\mathrm{y}) = (\mathrm{y},\mathrm{x})$;

2^0. $(\mathrm{x}+\mathrm{y},\mathrm{z}) = (\mathrm{x},\mathrm{z}) + (\mathrm{y},\mathrm{z})$;

3^0. $(\alpha\mathrm{x},\mathrm{y}) = \alpha(\mathrm{y},\mathrm{x})$;

4^0. $(\mathrm{x},\mathrm{x}) \geq 0$, причем $(\mathrm{x},\mathrm{x}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{x} = \theta$.

Здесь x, y и z - произвольные вектора из E, α - произвольное действительное число.

Определение. Линейное пространство, в котором скалярное произведение не введено, называется **аффинным пространством.**

Пример 33. Типичным примером евклидова пространства является арифметическое n-мерное пространство R^n, в котором скалярное произведение векторов $\mathrm{x} \equiv X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ и $\mathrm{x} \equiv Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)'$ задано правилом:

$$(\mathrm{x},\mathrm{y}) \equiv (X,Y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n .$$

Пример 34. В линейном пространстве $C[a,b]$ скалярное произведение векторов (функций) $\mathrm{x} = x(t)$ и $\mathrm{y} = y(t)$ можно вести по формуле

$$(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \int_a^b x(t)y(t)dt .$$

Легко проверить, применяя основные правила интегрирования, что аксиомы скалярного произведения выполняются и, следовательно, пространство $C[a,b]$ является евклидовым.

Пример 35. В линейном пространстве многочленов с действительными коэффициентами степени, не превосходящей 2, скалярное произведение векторов (многочленов степени ≤ 2) $\mathrm{x} = P(t)$ и $\mathrm{y} = Q(t)$ можно ввести по формуле

$$(\mathrm{x},\mathrm{y}) = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1) .$$

Проверим выполнимость аксиом скалярного произведения.

1^0. $(\mathrm{x},\mathrm{y}) = (\mathrm{y},\mathrm{x})$ в силу переместительности умножения чисел.

2^0. Проверим, что $(\mathrm{x}+\mathrm{y},\mathrm{z}) = (\mathrm{x},\mathrm{z}) + (\mathrm{y},\mathrm{z})$. Пусть $\mathrm{z} = S(t)$. Имеем

$$(x+y,z)=[P(-1)+Q(-1)]S(-1)+[P(0)+Q(0)]S(0)+[P(1)+Q(1)]S(1)=$$
$$=[P(-1)S(-1)+P(0)S(0)+P(-1)S(-1)]+[Q(-1)S(-1)+Q(0)S(0)+Q(1)S(1)]=$$
$$=(x,z)+(y,z).$$

3^0. Проверим, что $(\alpha x,y)=\alpha(y,x)$, где α - произвольное действительное число.

$$(\alpha x,y)=\alpha P(-1)Q(-1)+\alpha P(0)Q(0)+\alpha P(1)Q(1)=$$
$$=\alpha[P(-1)Q(-1)+P(0)Q(0)+P(1)Q(1)]=\alpha(x,y).$$

4^0. Для любого многочлена $x=P(t)$ справедливо неравенство

$$(x,x)=P^2(-1)+P^2(0)+P^2(1)\geq 0.$$

Покажем, что если $(x,x)=0$ то $x=P=\theta$. Пусть $(x,x)=0$, т.е.

$$P^2(-1)+P^2(0)+P^2(1)=0.$$

Отсюда получаем

$$P(-1)=P(0)=P(1)=0.$$

Так как степень многочлена $P(t)$ не превосходит 2, то число корней этого многочлена не может быть более чем 2. Следовательно, $P(t)\equiv 0$, т.е. $P(t)$ - нулевой элемент пространства многочленов с действительными коэффициентами степени, не превосходящей 2.

Таким образом, **введенное скалярное произведение, по указанной формуле рассматриваемое линейное пространство превращает в евклидовое пространство.**

3.3. Основные метрические понятия

Имея скалярное произведение, мы можем дать определение и основных метрических понятий – длины вектора и угла между векторами в евклидовом пространстве.

Определение. Длиной вектора x в евклидовом пространстве E называется величина

$$|x|=\sqrt{(x,x)}.$$

Пример 36. В евклидовом пространстве R^n для вектора $\mathrm{x} \equiv X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ получается выражение длины в виде

$$|X| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\ .$$

Пример 37. В евклидовом пространстве $C[a,b]$ длина вектора $\mathrm{x} = x(t)$ оказывается равной, и можно вести по формуле

$$|\mathrm{x}| = \sqrt{(\mathrm{x},\mathrm{x})} = \sqrt{\int_a^b x^2(t)dt}\ .$$

Определение. Эту величину обозначают иногда $\|x(t)\|$ и называют **нормой функции** $x(t)$ (чтобы избежать ложных ассоциаций, связанных со словами «длина функции»).

В любом евклидовом пространстве между длинами двух векторов и их скалярным произведением имеет место такое же неравенство, как в обычном трехмерном пространстве. Именно справедлива следующая теорема.

Теорема. Модуль скалярного произведения векторов из евклидового пространства не превосходит произведения длин этих векторов, т.е.

$$|(\mathrm{x},\mathrm{y})| \le |\mathrm{x}||\mathrm{y}|.$$

Определение. Это неравенство называется **неравенством Коши – Буняковского - Шварца**. **Мы будем его называть просто неравенством Коши.**

Для пространства R^n это неравенство имеет вид

$$\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \le \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}\ .$$

Для пространства $C[a,b]$ это неравенство запишется так:

$$\left|\int_a^b x(t)y(t)dt\right| \le \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2 dt} \cdot \sqrt{\int_a^b |y(t)|^2 dt}\ .$$

Первое из этих неравенств было открыто французским математиком Коши в 1821 году; второе, спустя треть века, - русским математиком Буняковским. Шварц опубликовал соответствующие неравенства в 1885 году.

Имеют место следующие свойства длины вектора:

1^0. $|\mathrm{x}| \ge 0$, причем $|\mathrm{x}| = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{x} = \theta$;

2^0. $|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|$, где λ - действительное число;

3^0 $|x + y| \le |x| + |y|$ (неравенство треугольника).

Определение. Вектор x, имеющий длину 1, называется **нормированным**.

Всякий ненулевой вектор y можно нормировать, т.е. умножить на такое число λ, чтобы в результате получился нормированный вектор.

Действительно, уравнение $|\lambda y| = 1$ относительно λ имеет решение, например,

$$\lambda = \frac{1}{|y|}. \blacksquare$$

Определение. Множество $M \subset E$ называется **ограниченным**, если длины всех векторов $x \in M$ ограничены фиксированной константой.

Примерами ограниченных множеств являются **единичный шар** пространства E - совокупность всех векторов $x \in E$ с длиной, не превышающей единицы, а также **единичная сфера** - совокупность всех векторов $x \in E$ с длиной, равной 1.

Определение. Углом между двумя векторами x и y ($x \ne \theta$ и $y \ne \theta$) в евклидовом пространстве E, называется угол φ, удовлетворяющий двум условиям:

$$a)\ \ \cos\varphi = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}, \qquad б)\ \ (\varphi \in [0; \pi].$$

Условие б) гарантирует единственное значение угла φ. Корректность определения угла между двумя векторами x и y в евклидовом пространстве E вытекает из справедливости неравенства Коши

$$|(x, y)| \le |x||y|.$$

Определение. Векторы x и y **называются ортогональными,** если $(x, y) = 0$. Если $x \ne \theta$ и $y \ne \theta$ понятие ортогональности векторов x и y означает, что x и y образует угол 90°.

Нулевой вектор оказывается ортогональным к любому вектору $x \in E$.

Мы могли бы, далее, привести несколько простых утверждений, связанных с понятием ортогональности, затем последовательно переносить на евклидово пространство остальные теоремы элементарной геометрии. Но в этом нет нужды. Это выходит за рамки нашего курса.

3.4. Изоморфизм евклидовых пространств

Задавая в линейном пространстве различные скалярные произведения, мы будем получать различные евклидовы пространства. Оказывается, тем не менее, что в конечномерном случае, эти евклидовы пространства ничем существенным друг от друга не отличаются. Можно доказать, что как и для линейных пространств, единственной существенной характеристикой конечномерного евклидова пространства является его размерность.

Определение. Будем говорить, что **два евклидовых пространства** E_1**, и** E_2 со скалярными произведениями (x_1, y_1) и (x_2, y_2) **называются изоморфными**, если они изоморфны как линейные пространства и если при этом скалярные произведения соответствующих пар векторов одинаковы, т.е. из того, что

$$x_1 \longleftrightarrow x_2, \qquad y_1 \longleftrightarrow y_2,$$

следует, что

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2).$$

Имеет место следующая теорема, которую примем без доказательства.

Теорема. Два конечномерных евклидовых пространства изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одну и ту же размерность.

Упражнения

1. Образует ли множество всех векторов на плоскости, начала которых находятся в начале координат, а концы – в пределах первой четверти, линейное пространство (с обычными операциями)?

2. Образует ли линейное пространство множество всех векторов на

плоскости с исключением векторов, параллельных некоторой заданной прямой?

3. Пусть R_+^1 – множество положительных действительных чисел. Введем операции по следующим правилам: под «сложением» двух чисел будем понимать их (обычное) умножение, а под «произведением» элемента $r \in R_+^1$ на действительное число λ будем понимать (обычное) возведение числа $\boldsymbol{r}$ в степень λ. Является ли множество R_+^1 с указанными в нем операциями линейным пространством?

4. Найти координаты многочлена $P(t) = 5 - 2(t+1) + 3(t+1)^2 + (t+1)^3$ в базисе $\mathrm{e}_1 = 1$, $\mathrm{e}_2 = t$, $\mathrm{e}_3 = t^2$, $\mathrm{e}_4 = t^3$.

5. Найти координаты многочлена $P(t) = 3 - 2t + t^2 - 4t^3 + 6t^4 - 20t^5$ в базисе а) $\mathrm{e}_1 = 1$, $\mathrm{e}_2 = (t-1)$, $\mathrm{e}_3 = (t-1)^2$, $\mathrm{e}_4 = (t-1)^3$, $\mathrm{e}_5 = (t-1)^4$, $\mathrm{e}_6 = (t-1)^5$; б) $\mathrm{e}_1 = 1$, $\mathrm{e}_2 = (t+1)$, $\mathrm{e}_3 = (t-1)^2$, $\mathrm{e}_4 = (t+1)^3$, $\mathrm{e}_5 = (t+1)^4$, $\mathrm{e}_6 = (t+1)^5$.

6. Существует ли базис у линейного пространства R_+^1 (задача 3)?

7. Какова размерность линейного пространства R_+^1 (задача 3)?

8. Согласно теореме одномерные пространства R^1 и R_+^1 (задача 3) изоморфны. Как можно осуществить этот изоморфизм?

9. Пусть P_3 – множество всех многочленов степени, меньшей или равной 3. Убедитесь в том, что P_3 изоморфно арифметическому линейному пространству R^3. Если векторам базиса $1, t, t^2$ пространства P_3 сопоставлены, соответственно, векторы базиса

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

пространства R^3, то какой вектор из P_3 будет соответствовать вектору

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

из R^3 и какой вектор из R^3 будет соответствовать вектору $-4t^2$ из P_3.

10. Назовем скалярным произведением двух векторов пространства R^3 произведение их длин. Будет ли пространство евклидовым?

11. А если назвать скалярным произведением двух векторов того же пространства произведение их длин на куб косинуса угла между ними?

12. А если назвать скалярным произведением удвоенное обычное скалярное произведение этих векторов?

13. Найти угол между противоположными ребрами правильного тетраэдра.

14. Найти углы в треугольнике, образованным в пространстве $C[-1,1]$ векторами $x_1 = 1$, $x_2 = t$, $x_3 = 1 - t$.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется трехмерным векторным пространством V^3? Что называются элементами этого пространства? Что называются двумерным векторным пространством V^2, одномерным векторным пространством V^1?

2. Что назовется трехмерными, двумерными или одномерными арифметическими векторами?

3. Что называются трехмерными R^3, двумерными R^2 и одномерными R^1 арифметическими векторными пространствами?

4. Какие линейные операции над n-мерными векторами можно определить?

5. Какими свойствами обладают действия с n-мерными векторами, введенными в рамках линейной операции?

6. Что называется арифметическим векторным пространством размерности n?

7. Позволяет ли введенное нами обобщение понятия вектора рассматривать векторы не обязательно геометрической природы, а, например, экономической природы? Разъясните и приведите примеры.

8. Что называется скалярным произведением двух n- мерных векторов? Как обозначается скалярное произведение?

9. Является ли скалярное произведение единственным способом «умножения» двух векторов?

10. Какое приложение скалярного произведения в экономических задачах вы можете привести?

11. Как определяется угол φ между двумя n- мерными не нулевыми векторами?

12. Какое неравенство называется неравенством Коши? С какой целью оно приводится и доказывается? Что означает неравенство Коши в арифметическом пространстве R^n?

13. Используется ли понятие косинуса угла между векторами в приложениях математики в других отраслях науки? Приведите пример.

14. Что называется базисом пространства R^n?

15. Что образует базис в пространстве R^n? Приведите теорему отвечающую на этот вопрос.

16. Приведите теорему, где приведено необходимое и достаточное условие линейной независимости систем n векторов в пространстве R^n.

17. Можно ли утверждать, что в пространстве R^n существует бесчисленного множества базисов? Если «да», то из какой теоремы это вытекает? Какой из базисов называется естественным базисом?

18. Как можно представить произвольный вектор X из пространства R^n через данные базисные вектора? Является ли это представление единственным?

19. Что называется координатой вектора в данном базисе?

20. Сформулируйте теорему, которая показывает, что линейное соот-

ношение между векторами пространства R^n равносильно такому же линейному соотношению между столбцами из координат этих векторов в произвольном базисе.

21. Для определения ранга системы векторов достаточно ли найти ранг матрицы из координат этих векторов в произвольном фиксированном базисе? Если «да», то из какой теоремы это вытекает?

22. Что называется матрицей перехода от старой системы к новой системе?

23. Пусть старая система образует базис. Какое условие является необходимым и достаточным, для того чтобы новая система также была базисной?

24. Что называется подпространством пространства R^n?

25. Что называется размерностью подпространства?

26. Что называется базисом подпространства?

27. Приведите необходимое и достаточное условие того, что подпространство имело размерность k.

28. Сформулируйте теорему о пополнении базиса подпространства R до базиса всего пространства R^n.

29. Что называется линейной оболочкой совокупности векторов? Как еще называют линейную оболочку системы векторов?

30. Чему равна размерность подпространства, натянутого на систему векторов?

31. Когда два вектора пространства R^n являются ортогональными?

32. Предположим, что мы имеем n векторов из пространства R^n, которые взаимно ортогональны и все отличны от нуля. Образует ли это множество базисов в пространстве R^n? Если «да», то докажите это.

33. Что представляет собой ортогональный нормированный базис пространства?

34. Чем интересны ортонормальные базисы?

35. Как может быть преобразовано в ортонормальный базис любое мно-

жество, состоящее из данных $\boldsymbol{n}$ линейно независимых векторов пространства R^n? Что представляет собой ортонормализационный процесс Шмидта?

36. Дайте определение линейного пространства.

37. Приведите примеры линейных пространств.

38. Как вводится понятия базис и координаты в абстрактном линейном пространстве?

39. Дайте определение размерности линейного пространства. Когда линейное пространство называется бесконечномерным? Приведите пример.

40. Как определяется подпространства в абстрактном линейном пространстве? Чем это определение отличается от соответствующего определения для случая R^n?

41. Что означает изоморфизм конечномерных линейных пространств?

42. Приведите условия изоморфности линейных пространств.

43. Равносильно ли изучение свойств любого конечномерного линейного пространства изучению арифметического пространства R^n? Разъясните ответ.

44. Дайте определение евклидового пространства.

45. Дайте определения основных метрических понятий – длины вектора и угла между векторами в евклидовом пространстве.

46. Приведите свойства длины вектора. Какой вектор называется нормированным?

47. Какие векторы называются ортогональными?

48. Что означает изоморфизм конечномерных евклидовых пространств?

49. Приведите условия изоморфности евклидовых пространств.

§10. Линейные операторы и их свойства

Ключевые слова и словосочетания: *преобразование, оператор, линейный оператор, нулевой оператор, единичный или тождественный оператор, оператор подобия, оператор проектирования, матрица оператора, матрица линейного преобразования, действия с линейными операторами, линейное пространство линейных операторов, подобная матрица, симметрический линейный оператор, собственные значения линейного оператора, собственные векторы линейного оператора, характеристический многочлен линейного оператора, оператор простой структуры, симметрический линейный оператор.*

1. Основные определения. Примеры операторов

Определение. Пусть X - линейное пространство. Предположим, что на этом пространстве задана векторная (векторнозначная) функция $y = A(x)$, т.е. каждому вектору $x \in X$ сопоставляется вектор $y \in X$.

Такая функция называется **оператором или преобразованием,** действующим в пространстве. При этом вектор y мы будем называть **образом вектора** x, и записывать его в виде $y = A(x)$ или $y = Ax$, а вектор x - прообразом вектора y.

Определение. Оператор $A(x)$ называется **линейным**, если выполняется следующее условие:

$$A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A(x_1) + \lambda_2 A(x_2), \tag{1}$$

где x_1 и x_2 - любые векторы линейного пространства X, а λ_1 и λ_2 - любые числа.

Отметим, что часто вместо условия (1) приводят эквивалентное условие

$$A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2),$$

$$A(\lambda x) = \lambda A(x),$$

где x_1 и x_2 - любые векторы линейного пространства X, а λ - любое число.

Иначе говоря, линейный оператор переводит сумму векторов в сумму их образов, произведение вектора на число - в произведение образа этого вектора на то же число.

Пример 1. Оператор A в $\mathsf{X}=R^n$ каждый вектор $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ переводит в вектор $\mathsf{A}X=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\x_2\\2x_1-x_2+3x_3\end{pmatrix}$. Показать, что A-линейный оператор.

Решение

Если положить

$$X_1=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad X_2=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\yx_3\end{pmatrix},$$

тогда ясно, что

$$\mathsf{A}X_1=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\x_2\\2x_1-x_2+3x_3\end{pmatrix}, \qquad \mathsf{A}X_2=\begin{pmatrix}y_1+y_2\\y_2\\2y_1-y_2+3y_3\end{pmatrix}.$$

Проверим первое свойство:

$$\mathsf{A}(X_1+X_2)=$$

$$=\begin{pmatrix}x_1+y_1+x_2+y_2\\x_2+y_2\\2(x_1+y_1)-(x_2+y_2)+3(x_3+y_3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2+y_1+y_2\\x_2+y_2\\2x_1-x_2+3x_3+2y_1-y_2+3y_3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\x_2\\2x_1-x_2+3x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1+y_2\\y_2\\2y_1-y_2+3y_3\end{pmatrix}=\mathsf{A}X_1+\mathsf{A}X_2.$$

Проверим второе свойство:

$$\mathsf{A}(\lambda X)=\begin{pmatrix}\lambda x_1+\lambda x_2\\\lambda x_2\\2\lambda x_1-\lambda x_2+3\lambda x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda(x_1+x_2)\\\lambda x_2\\\lambda(2x_1-x_2+3x_3)\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x_1+x_2\\x_2\\2x_1-x_2+3x_3\end{pmatrix}=\mathsf{A}X\ .$$

Оба свойства выполнены. Поэтому A-линейный оператор.

Упражнения

1. Какие из следующих операторов в пространстве R^3 являются линейными:

$$a)\ \mathsf{A}X = (A, X)A; \qquad b)\ \mathsf{A}X = (A, X)X\ ,$$

где A- фиксированный ненулевой вектор.

2. Какие из следующих операторов в пространстве R^3 являются линейными:

$$a)\ \mathsf{A}X = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix}; \qquad b)\ \mathsf{A}X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + 1 \\ x + 2 \end{pmatrix}.$$

Примеры операторов

Пример 2. Оператор, который любой вектор пространства X переводит в нулевой вектор, называется **нулевым оператором** и записывается так: $\mathsf{O}(\mathsf{x}) = \theta$.

Очевидно, что нулевой оператор является линейным.

Пример 3. Оператор, который любой вектор $\mathsf{x} \in \mathsf{X}$ переводит в самого себя, называется **единичным, или тождественным** оператором и записывается так:

$$\mathsf{E}(\mathsf{x}) = \mathsf{x}.$$

Очевидно, что единичный оператор также является линейным.

Пример 4. Оператор $\mathsf{A}(\mathsf{x}) = \lambda\mathsf{x}$, который любой вектор $\mathsf{x} \in \mathsf{X}$ переводит в вектор $\lambda\mathbf{x}$, где λ - фиксированное число, называется **оператором подобного растяжения или оператором подобия.**

Покажем, что оператор подобия линеен. Применим его к вектору $\mathsf{x} = \lambda_1\mathsf{x}_1 + \lambda_2\mathsf{x}_2$:

$$\mathsf{A}(\lambda_1\mathsf{x}_1 + \lambda_2\mathsf{x}_2) = \lambda(\lambda_1\mathsf{x}_1 + \lambda_2\mathsf{x}_2) = \lambda_1(\lambda\mathsf{x}_1) + \lambda_2(\lambda\mathsf{x}_2).$$

Отсюда видно, что соотношение (1) выполняется.

Замечание. Первый и второй примеры являются частными случаями третьего. Первый - при $\lambda = 0$, второй - при $\lambda = 1$.

Пример 5. Возьмем в пространстве X базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Оператор P, который любой вектор $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n$ переводит в вектор

$$y = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_k e_k,$$

где $k < n$, называется **оператором проектирования** на подпространство, натянутое на векторы $e_1, e_2, \ldots, e_k$.

Ясно, что применение оператора P к вектору x эквивалентно замене нулями последних $n-k$ слагаемых в разложении вектора $\boldsymbol{x}$ по данному фиксированному базису.

Легко проверить, что оператор проектирования линеен.

Пример 6. В пространстве $C[a,b]$ умножение заданной функции на любую фиксированную непрерывную функцию $\varphi(\boldsymbol{t})$, например, на $\varphi(\boldsymbol{t}) \equiv \boldsymbol{t}$, является линейным оператором.

Пример 7. В пространстве $C^{\infty}[a,b]$ бесконечно дифференцируемых на $[a,b]$ функций дифференцирование заданной функции

$$Dx(t) = x'(t))$$

является линейным оператором, так как производная от суммы функций равна сумме производных этих функций, а производная от произведения функции на число равна произведению производной функции на это число.

2. Общий вид линейного оператора в конечномерном пространстве

Пусть X - конечномерное пространство, $\{e_i\}$ - его базис, A - линейный оператор, действующий в этом пространстве.

Пусть

$$\begin{cases} A(e_1) = f_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \cdots + a_{n1}e_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A(e_n) = f_n = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \cdots + a_{nn}e_n, \end{cases} \tag{2}$$

или короче

$$A(e_j) = f_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i \qquad (j = 1,2,\ldots,n). \tag{2$'$}$$

Здесь векторы f_j, представляющие собой образы векторов e_j, разложены по базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Возьмем любой вектор $x \in X$ и разложим его по базису $\{e_i\}$:

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n.$$

тогда

$$A(x) = y = A(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n).$$

Воспользовавшись сначала линейностью оператора, а затем соотношением (2), получим

$$A(x) = y = A(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n) = \xi_1 f_1 + \xi_2 f_2 + \cdots + \xi_n f_n) =$$
$$= \xi_1 (a_{11} e_1 + a_{21} e_2 + \cdots + a_{n1} e_n) + \cdots + \xi_n \left(a_{1n} e_1 + a_{2n} e_2 + \cdots + a_{nn} e_n\right) =$$
$$= (a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \cdots + a_{1n}\xi_n) e_1 + \cdots + (a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \cdots + a_{nn}\xi_n) e_n.$$

Обозначим координаты вектора $A(x) = y$ через η_i. Тогда в силу единственности координат

$$\begin{cases} \eta_1 = a_{11}\xi_1 + \cdots + a_{1n}\xi_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_n = a_{n1}\xi_1 + \cdots + a_{nn}\xi_n. \end{cases} \tag{3}$$

В матричной форме эти соотношения запишутся так:

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \cdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{22} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \cdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \tag{3′}$$

или короче

$$Y = \left(a_{ij}\right) X. \tag{3′′}$$

Таким образом, если вектор x имеет координаты, ξ_i а вектор $y = A(x)$ имеет координаты η_i в базисе $\{e_j\}$, то столбец Y получается из столбца X по формуле (3′′).

Итак, линейному оператору A сопоставлена в данном базисе $\{e_j\}$ матрица $A = \left(a_{ij}\right)$, называемая **матрицей оператора** A в базисе $\{e_j\}$. В этой матрице первый столбец состоит из координат образа 1-го базисного вектора, второй столбец - из координат образа 2-го базисного вектора и т.д., последний столбец - из координат образа последнего базисного вектора.

Пусть теперь $A=(a_{ij})$ - произвольная квадратная матрица, порядок которой равен размерности пространства. Определим, оператор A формулами (3´´), т.е. положим $\mathsf{A}(\mathsf{x})=\mathsf{y}$, где координаты вектора y вычисляются по координатам вектора x с помощью формул (3´´) при фиксированном базисе.

Легко проверить, что такой оператор линеен и каждому $\mathsf{x}\in\mathsf{X}$ ставит в соответствие сектор y, также принадлежащий X.

Таким образом, **формула (3´´) дает общий вид линейного оператора в конечномерном пространстве.**

Из равенств (3) видно, что координаты вектора $\mathsf{y}=\mathsf{A}(\mathsf{x})$ **линейно** выражаются через координаты вектора x.

Иногда говорят, что в равенствах (3) числа $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n$ получены из чисел $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ с помощью **линейного преобразования,** задаваемого матрицей $A=(a_{ij})$. В этом случае матрицу A называют **матрицей линейного преобразования.**

Пример 8. Найти матрицу оператора A из примера 1.

Решение

Найдем образы базисных векторов

$$E_1=(1{,}0{,}0)',\quad E_2=(0{,}1{,}0)',\quad E_3=(0{,}0{,}1)'$$

под воздействием оператора A.

$$\mathsf{A}E_1=\begin{pmatrix}1+0\\0\\2\cdot1-1\cdot0+3\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\qquad \mathsf{A}E_2=\begin{pmatrix}0+1\\1\\2\cdot0-1+3\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},$$

$$\mathsf{A}E_3=\begin{pmatrix}0+0\\0\\2\cdot0-0+3\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}.$$

Запишем полученные координаты и виде столбцов матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}.$$

Это и есть матрица линейного оператора A из примера 1.

Пример 9. Пусть в пространстве $\mathsf{X}=R^3$ линейный оператор A в базисе $E_1=(1{,}0{,}0)'$, $E_2=(0{,}1{,}0)'$, $E_3=(0{,}0{,}1)'$ задан матрицей

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ -1 & 5 & 6\\ 1 & 8 & 2\end{pmatrix}. \qquad (*)$$

Найти образ $\mathsf{y}=\mathsf{A}(\mathsf{x})$ - вектора $\mathsf{x}=4E-3E_2+E_3$, (т.е. вектора $X=(4,-3{,}1)'\in R^3$).

Решение

По формулам (3′) имеем

$$\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ -1 & 5 & 6\\ 1 & 8 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ -3\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\ -13\\ -18\end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\mathsf{y}=10E-13E_2-18E_3$. Полученный результат можно перефразировать таким образом: «Числа $10,-13,-18$, которые являются координатами вектора $Y\in R^3$, получены из координат вектора $X=(4,-3{,}1)'\in R^3$ с помощью линейного преобразования, задаваемой матрицей (*) ».

Заметим, что по формулам (3′′) мы можем найти образ $\mathsf{y}=\mathsf{A}(\mathsf{x})$ любого вектора x.

Итак, мы **установили соответствие между линейными операторами и матрицами в конечномерном пространстве с фиксированным базисом.**

Каждому линейному оператору сопоставлена квадратная матрица и, наоборот, каждой квадратной матрице - линейный оператор.

Легко проверить, что это соответствие является взаимно однозначным.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 10. $\mathsf{O}(\mathsf{x})=\theta$; по формуле (3´´) имеем

$$\begin{pmatrix}0\\0\\\cdots\\0\end{pmatrix}=\left(a_{ij}\right)\cdot\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\cdots\\\xi_n\end{pmatrix}.$$

Ясно, что матрица $\left(a_{ij}\right)$ в данном случае должна быть нулевой, $a_{ij}=0$. Следовательно, **нулевому оператору отвечает нулевая матрица независимо от выбора базиса.**

Пример 11. $\mathsf{E}(\mathsf{x})=\mathsf{x}$; по формуле (3´´) имеем

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\cdots\\\xi_n\end{pmatrix}=\left(a_{ij}\right)\cdot\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\cdots\\\xi_n\end{pmatrix}.$$

Очевидно, что матрица $\left(a_{ij}\right)$ в данном случае должна быть единичной. Таким образом, **единичному оператору отвечает единичная матрица в любом базисе.**

Пример 12. $\mathsf{A}(\mathsf{x})=\lambda\mathsf{x}$;

$$\begin{pmatrix}\lambda\xi_1\\\lambda\xi_2\\\cdots\\\lambda\xi_n\end{pmatrix}=\left(a_{ij}\right)\cdot\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\cdots\\\xi_n\end{pmatrix}.$$

В данном случае элементы матрицы линейного оператора должны удовлетворять условиям

$$a_{ij}=\begin{cases}\lambda & при \quad i=j,\\ 0 & при \quad i\neq j.\end{cases}$$

Таким образом, **оператору подобного растяжения отвечает в любом базисе скалярная матрица**

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{pmatrix}.$$

Пример 13. В случае оператора проектирования P формула (3′′) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right) \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_k \\ \xi_{k+1} \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что в этом случае матрица $\left(a_{ij}\right)$ должна быть такой:

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ k-я \quad строка \rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что в отличие от примеров 10-12 оператор проектирования имеет в различных базисах, вообще говоря, различные матрицы.

3. Действия с линейными операторами

Пусть A и B - два линейных оператора, действующие в пространстве X.

Определение. Операторы A и B **считаются равными**, если $\mathsf{Ax} = \mathsf{Bx}$ для любого $\mathsf{x} \in \mathsf{X}$.

Пусть $\left(a_{ij}\right)$ и $\left(b_{ij}\right)$ - матрицы, соответствующие линейным операторам A и B в некотором базисе $\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, \ldots, \mathsf{e}_n$ пространства X.

Полагая $\mathsf{x} = \mathsf{e}_j$ в равенстве $\mathsf{Ax} = \mathsf{Bx}$ и воспользуясь формулами (2), получим

$$a_{1j}\mathsf{e}_1 + a_{2j}\mathsf{e}_2 + \cdots + a_{nj}\mathsf{e}_n = \mathsf{Ae}_j = \mathsf{Be}_j = b_{1j}\mathsf{e}_1 + b_{2j}\mathsf{e}_2 + \cdots + b_{nj}\mathsf{e}_n. \tag{4}$$

Поскольку векторы $\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, \ldots, \mathsf{e}_n$ образуют базис, координаты при одинаковых векторах базиса в равенствах (4) будут равны:

$$a_{ij} = b_{ij}.$$

Отсюда следует, что

равные линейные операторы обладают в данном базисе равными матрицами

$$(a_{ij}) = (b_{ij}).$$

Очевидно, справедливо и обратное утверждение.

Определение. Суммой двух линейных операторов называется оператор $C = A + B$, действующий по правилу

$$Cx = (A + B)x = Ax + Bx. \tag{5}$$

Оператор $C = A + B$ тоже является линейным.

Положим $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, тогда

$$C(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + B(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) =$$
$$= \lambda_1 Ax_1 + \lambda_2 Ax_2 + \lambda_1 Bx_1 + \lambda_2 Bx_2 = \lambda_1 (Ax_1 + Bx_1) + \lambda_2 (Ax_2 + Bx_2) =$$
$$= \lambda_1 Cx_1 + \lambda_2 Cx_2.$$

Выясним теперь, что происходит с матрицами линейных операторов при сложении операторов. Пусть в некотором базисе $\{e_j\}$ пространства X линейному оператору A соответствует матрица (a_{ij}), а линейному оператору B - матрица (b_{ij}).

Тогда, если X - столбец из координат вектора x, то $(a_{ij})X$ представляет собой столбец из координат вектора Ax, а $(b_{ij})X$ - столбец из координат вектора Bx. Отсюда следует, что вектору $(A + B)x = Ax + Bx$ отвечает сумма столбцов $(a_{ij})X + (b_{ij})X = ((a_{ij}) + (b_{ij}))X$, т.е. **при сложении линейных операторов их матрицы складываются. ■**

Определение. Произведением линейного оператора A на число λ называется оператор $B = \lambda A$, действующий по правилу

$$Bx = (\lambda A)x = \lambda Ax. \tag{6}$$

Легко проверить, что если A - линейный оператор, то λA тоже является линейным оператором.

Пусть в некотором базисе $\{\mathrm{e_j}\}$ линейному оператору A соответствует матрица (a_{ij}), и произвольный вектор x имеет в этом базисе координатный столбец X. Тогда вектор Ax имеет столбцом из своих координат $(a_{ij})X$, а вектор $(\lambda\mathrm{A})\mathrm{x} = \lambda\mathrm{Ax}$ определяется столбцом координат $\lambda((a_{ij})X) = (\lambda(a_{ij}))X$.

Отсюда следует, что если оператору A соответствует матрица (a_{ij}), то оператору $\lambda\mathrm{A}$ соответствует матрица $\lambda(a_{ij})$, т.е. **при умножении линейного оператора на число соответствующая ему матрица тоже умножается на это число.**

Определение. Произведением двух линейных операторов $\mathrm{AB} = \mathrm{C}$ назовем оператор

$$\mathrm{Cx} = \mathrm{A}(\mathrm{Bx}), \tag{7}$$

т.е. применение к вектору x произведения операторов AB означает, что сначала к вектору x применяется оператор B, затем к полученному новому вектору применяется оператор A.

Произведение двух операторов снова является линейным оператором

Действительно, так как

$$\mathrm{C}(\lambda_1\mathrm{x}_1 + \lambda_2\mathrm{x}_2) = \mathrm{A}\big(\mathrm{B}(\lambda_1\mathrm{x}_1 + \lambda_2\mathrm{x}_2)\big) + \mathrm{B}(\lambda_1\mathrm{x}_1 + \lambda_2\mathrm{x}_2) =$$
$$= \mathrm{A}(\lambda_1\mathrm{Bx}_1 + \lambda_2\mathrm{Bx}_2) + \lambda_1(\mathrm{ABx}_1) + \lambda_2(\mathrm{ABx}_2) =$$
$$= \lambda_1\mathrm{Cx}_1 + \lambda_2\mathrm{Cx}_2. \ \blacksquare$$

Теперь выясним, что происходит с матрицами линейных операторов при перемножении последних. Пусть в некотором базисе $\{\mathrm{e_j}\}$ оператору A отвечает матрица (a_{ij}), а оператору B - матрица (b_{ij}), произвольный вектор x задается в этом базисе столбцом X из своих координат. Тогда вектор Bx задается столбцом из координат $(b_{ij})\cdot X$, а вектор $\mathrm{A}(\mathrm{Bx})$ - столбцом $(a_{ij})\cdot((b_{ij})\cdot X)$.

Учитывая, что

$$\mathrm{A}(\mathrm{Bx}) = \mathrm{Cx}$$

и

$$(a_{ij})\cdot((b_{ij})\cdot X)=((a_{ij})\cdot(b_{ij}))X,$$

мы заключаем, что оператору $\mathsf{AB}=\mathsf{C}$ отвечает матрица

$$(c_{ij})=(a_{ij})\cdot(b_{ij}).$$

Иначе говоря, **при перемножении линейных операторов соответствующие им матрицы перемножаются.**

Упражнения

Оператор A в базисе $A_1=\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ имеет матрицу $\begin{pmatrix}2 & -1\\5 & -3\end{pmatrix}$, а оператор B в базисе $B_1=\begin{pmatrix}6\\-7\end{pmatrix}$, $B_2=\begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}$ имеет матрицу $\begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 7\end{pmatrix}$.

Найти матрицу оператора AB в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов.

4. Линейное пространство линейных операторов

В п. 3 мы ввели во множестве линейных операторов линейные операции. Можно показать, что введенные операции подчиняются всем аксиомам линейного пространства. Следовательно, **множество линейных операторов представляет собой линейное пространство.**

С другой стороны, квадратные матрицы порядка n тоже образуют линейное пространство. Указанные два линейных пространства изоморфны, так как между линейными операторами и квадратными матрицами установлено взаимно однозначное соответствие, которое сохраняется при сложении и умножении на числа (это соответствие зависит от выбора базиса в исходном пространстве).

Пространство квадратных матриц порядка n имеет размерность n^2. Базис этого пространства образует, например, все такие матрицы, у которых один из элементов равен единице, а все остальные равны нулю.

Из изоморфизма вытекает, что пространство линейных операторов, действующих в n-мерном пространстве, тоже имеет размерность n^2.

Эти обстоятельства служат основанием для того, чтобы применение оператора к вектору записывать как умножение матрицы на столбец, а действия над операторами записывать как действия над соответствующими матрицами.

Более того, часто оператор и соответствующую ему матрицу обозначают одной и той же буквой.

5. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису

Пусть в пространстве X мы перешли от базиса $\{\mathsf{e}_i\}$ к базису $\{\tilde{\mathsf{e}}_i\}$. Координаты любого вектора x пространства X согласно, п. 6 §7 изменяются по формулам

$$X = P\tilde{X},$$

где X - столбец из координат вектора x в базисе $\{\mathsf{e}_i\}$, $\tilde{X}$ - столбец из координат вектора x в базисе $\{\tilde{\mathsf{e}}_i\}$, P - матрица перехода от базиса $\{\mathsf{e}_i\}$ к базису $\{\tilde{\mathsf{e}}_i\}$.

Рассмотрим теперь линейный оператор A. Пусть в базисе $\{\mathsf{e}_i\}$ ему соответствует матрица A, а в базисе $\{\tilde{\mathsf{e}}_i\}$ - матрица $\tilde{A}$.

Пусть $\mathsf{y} = \mathsf{A}(\mathsf{x})$, Y и $\tilde{Y}$ - столбцы из координат вектора y в базисах $\{\mathsf{e}_i\}$ и $\{\tilde{\mathbf{e}}_i\}$ соответственны. Тогда, согласно п. 2 настоящего параграфа

$$Y = AX,$$

$$\tilde{Y} = \tilde{A}\tilde{X}.$$

По формулам преобразования координат имеем

$$X = P\tilde{X}, \quad Y = P\tilde{Y}$$

и поэтому

$$P\tilde{Y} = AP\tilde{X},$$

откуда

$$\tilde{Y} = P^{-1}AP\tilde{X}.$$

Следовательно, для любого столбца X

$$\tilde{A}\tilde{X} = P^{-1}AP\tilde{X},$$

откуда

$$\tilde{A} = P^{-1}AP.$$

Определение. Матрица $\widetilde{A}$ называется **подобной** матрице A, если существует такая неособенная матрица P, что

$$\widetilde{A} = P^{-1}AP. \tag{8}$$

Будем говорить также, что матрица $\widetilde{A}$ получена из матрицы A **преобразованием подобия.**

Следовательно,

одному и тому же оператору в различных базисах соответствуют подобные матрицы.

Замечание. Подобные матрицы имеют одинаковые характеристические полиномы.

Пример 14. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

линейного оператора A в базисе

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу этого линейного оператора A в базисе

$$E_1' = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad E_2' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решение

Очевидно, что

$$E_1' = 5E_1 + 3E_2, \qquad E_2' = 2E_1 + E_2.$$

Матрица перехода состоит из записанных в столбцы координат векторов E_1', E_2' в базисе E_1, E_2:

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица линейного оператора A в базисе E_1', E_2' вычисляется по формуле $\widetilde{A} = P^{-1}AP$.

Имеем

$$P^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\widetilde{A} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 & 16 \\ -102 & -38 \end{pmatrix}.$$

Упражнение

Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

линейного оператора A в базисе в базисе

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу этого линейного оператора A в базисе

$$E_1' = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \qquad E_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

Пусть A - линейный оператор, действующий в линейном пространстве X.

Определение. Ненулевой вектор $\mathsf{x} \in \mathsf{X}$ **называется собственным вектором оператора** A, если

$$\mathsf{A}\mathsf{x} = \lambda \mathsf{x}, \tag{9}$$

где λ - некоторое число, **называемое собственным значением или собственным числом** этого оператора.

Определение. Совокупность всех собственных значений данного оператора **называется его спектром.**

Собственные векторы и собственные значения линейного оператора в конечномерном пространстве находятся следующим образом.

Возьмем в пространстве X некоторый базис $\{\mathsf{e}_\mathsf{i}\}$. Пусть в этом базисе оператору A отвечает матрица (a_{ij}). Если в рассматриваемом базисе вектор $\mathsf{x} \in \mathsf{X}$ имеет столбец из координат X, то вектор $\mathsf{A}\mathsf{x}$ имеет столбец из координат $(a_{ij})\cdot X$. С другой стороны, вектор $\mathsf{A}\mathsf{x} = \lambda\mathsf{x}$ должен иметь в том же базисе столбец из координат λX . Отсюда получаем

$$(a_{ij})X = \lambda X . \tag{10}$$

Запишем это соотношение подробнее:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}. \tag{10′}$$

Здесь x_i - координаты собственного вектора x, а λ - собственное значение (число) оператора, соответствующее собственному вектору x.

Перепишем соотношение (2′) в виде системы n однородных линейных уравнений относительно $x_1,\ldots,x_n$:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (a_{n1}-\lambda)x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0. \end{cases} \tag{10′′}$$

Такая система имеет отличные от нуля решения тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21}-\lambda & \cdots & a_{21} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 . \tag{11}$$

Нулевое решение системы нас не интересует, так как $\mathbf{x} \neq \theta$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. Собственные значения линейного оператора совпадают с корнями характеристического уравнения матрицы этого оператора.

Определение. Левую часть характеристического уравнения (3) называют также **характеристическим многочленом линейного оператора.**

Если из уравнения (11) удастся найти значения λ, то, подставляя их в уравнения (10´´), найдем ненулевые решения этой системы. Это и будут координаты собственного вектора.

Пример 15. Пусть оператор A действует в двумерном пространстве, его матрица –

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Найти собственные векторы и собственные значения оператора A.

Решение

Составляем характеристическое уравнение для матрицы линейного оператора A и решаем его:

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

$$(1-\lambda)^2-4=0,\quad 1-\lambda=\pm 2,\quad \lambda_1=3,\quad \lambda_2=-1.$$

Мы нашли собственные значения оператора A.

Возьмем $\lambda_1=3$ и подставим в уравнения вида (2´´). В результате получим

$$\begin{cases}(1-3)x_1+2x_2=0,\\ 2x_1+(1-3)x_2=0.\end{cases}$$

Поскольку определитель этой системы равен нулю, второе уравнение является следствием первого и его можно отбросить. Тогда имеем

$$-2x_1+2x_2=0,$$

откуда

$$x_1=x_2.$$

Возьмем, например, $x_1=x_2=1$. Тогда получим собственный вектор

$$\mathsf{x}_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Теперь, взяв $\lambda_2=-1$, снова записываем только одно уравнение системы вида (2´´), так как по тем же причинам второе является его следствием:

$$\big(1-(-1)\big)x_1+2x_2=0,$$

$$2x_1+2x_2=0,$$

$$x_1 = -x_2.$$

Взяв, например, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, находим собственный вектор

$$\mathrm{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Несколько замечаний:

1. Характеристическое уравнение - это уравнение вида $P(\lambda) = 0$, где $P(\lambda)$- многочлен степени n. Согласно основной теореме алгебры всякий многочлен имеет хотя бы один комплексный корень. Отсюда получаем, что линейный оператор, действующий в комплексном конечномерном линейном пространстве, заведомо имеет хотя бы один собственный вектор.

2. Если линейный оператор действует в действительном линейном пространстве, то многочлен $P(\lambda)$ имеет действительные коэффициенты. Если при этом n нечетно, то характеристическое уравнение имеет, по крайней мере, один действительный корень. В этом случае всякий линейный оператор имеет, по крайней мере, один собственный вектор.

3. Линейный оператор не может иметь больше чем n различных собственных значений, так как характеристическое уравнение имеет степень n.

4. Собственные векторы x_1, $\mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_m$ линейного оператора A с попарно различными собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ линейно независимы.

Доказательство этого утверждения можно провести методом математической индукции. Читателю рекомендуется провести это самостоятельно.

5. Если все n корней характеристического многочлена $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ различны, то соответствующие им собственные векторы x_1, $\mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$ можно принять за базис n-мерного пространства X, так как они согласно замечанию 4 линейно независимы.

Построим матрицу оператора A в этом новом базисе. Поскольку

$$\mathrm{A}\mathrm{x}_1 = \lambda_1 \mathrm{x}_1,$$

$$\mathrm{A}\mathrm{x}_2 = \lambda_2 \mathrm{x}_2,$$

…………..

$$Ax_n = \lambda_n x_n,$$

эта матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что характеристический полином оператора A в этом случае представляет собой произведение линейных множителей вида

$$P(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\cdots(\lambda_n - \lambda).$$

7. Оператор простой структуры

Определение. Линейный оператор A называется **оператором простой структуры**, если он обладает базисом из собственных векторов.

Пример 16. Пусть A - оператор, рассмотренный нами в примере 15. Нетрудно заметить, что собственные векторы

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

отвечающие собственным значениям $\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1$ линейного оператора A**,** действующего в двумерном пространстве с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

в этом двумерном пространстве, образуют базис.

Однако не всегда в пространстве существует базис, состоящий из собственных векторов оператора, действующего в этом пространстве. Следующий пример тому подтверждение.

Пример 17. Пусть оператор A действует в трехмерном пространстве и его матрицей является

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

Найти собственные векторы и собственные значения оператора A.

Решение

Составляем характеристическое уравнение для матрицы линейного оператора A и решаем его:

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -5 & -3 \\ 3 & -2-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$$(\lambda-1)^2(\lambda-2)=0, \quad \lambda_1=\lambda_2=1, \quad \lambda_3=2.$$

Мы нашли собственные значения оператора A.

Возьмем $\lambda_1 = 1$ и подставим в уравнение вида (2). В результате получим систему

$$\begin{cases} 5x_1-5x_2-3x_3=0, \\ 3x_1-3x_2-2x_3=0, \\ 2x_1-2x_2-x_3=0. \end{cases}$$

Так как ранг системы равен 2, фундаментальная система состоит из одного решения, например,

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Это означает, что первому собственному значению, имеющему кратность 2, соответствуют один собственный вектор.

Для корня $\lambda_3 = 2$ получаем систему

$$\begin{cases} 4x_1-5x_2-3x_3=0, \\ 3x_1-4x_2-2x_3=0, \\ 2x_1-2x_2-2x_3=0, \end{cases}$$

ранга 2. Ее фундаментальная система также состоит из одного решения, например,

$$C_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что полученные два собственных вектора, отвечающие собственным значениям $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 2$ линейного оператора A, действующего в **трехмерном** пространстве с матрицей (*) в этом трехмерном пространстве не могут образовать базис.

Итак, рассмотренный пример показывает, что не всегда в пространстве существует базис, состоящий из собственных векторов оператора, действующего в этом пространстве. **Выясним, каким условиям должен удовлетворять оператор для того, чтобы в пространстве существовал базис из его собственных векторов.**

Из замечания 5 (п. 6) следует, что если в пространстве существует базис из собственных векторов, то в таком базисе матрица линейного оператора имеет диагональную форму.

Обратно, если оператор A имеет в некотором базисе $\{\mathsf{e}_j\}$, диагональную матрицу, то векторы этого базиса являются линейно независимыми собственными векторами оператора A. В самом деле, в столбце из координат вектора $\mathsf{A}\mathsf{e}_j$ отличной от нуля будет лишь j-я координата и потому $\mathsf{A}\mathsf{e}_j = \lambda \mathsf{e}_j$.

Теорема. Для того чтобы существовал базис из собственных векторов оператора A, необходимо и достаточно, чтобы каждому собственному значению соответствовало столько линейно независимых собственных векторов, какова его кратность.

Доказательство опускаем.

В силу того, что одному и тому же линейному оператору в различных базисах соответствуют подобные матрицы, эта теорема может быть сформулирована так: **если каждому собственному значению соответствует столько линейно независимых собственных векторов, какова кратность собственного значения как корня характеристического многочлена, то тогда и только тогда существует преобразование подобия, приводящее матрицу оператора к диагональному виду.**

Определение. Матрицу подобную диагональной, называют **матрицей**

простой структуры.

Таким образом, **оператору простой структуры отвечает матрица простой структуры и наоборот.**

Пример 18. Показать, что матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$$

можно привести к диагональному виду.

Решение

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

как нетрудно подсчитать, преобразуется к виду:

$$(\lambda - 1)^2 (\lambda + 1) = 0.$$

Находим его корни (собственные значения):

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -1.$$

Возьмем $\lambda_1 = 1$ и подставим в уравнение вида (10). В результате получим систему

$$\begin{cases} 6x_1 - 12x_2 + 6x_3 = 0, \\ 10x_1 - 20x_2 + 10x_3 = 0, \\ 12x_1 - 24x_2 + 12x_3 = 0. \end{cases}$$

Так как ранг системы равен 1, фундаментальная система состоит из двух решений, например,

$$C_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Это означает, что первому собственному значению, имеющему кратность 2, соответствуют два линейно независимых собственных вектора.

Для корня $\lambda_3 = -1$ получаем систему

$$\begin{cases} 8x_1 - 12x_2 + 6x_3 = 0, \\ 10x_1 - 18x_2 + 10x_3 = 0, \\ 12x_1 - 24x_2 + 14x_3 = 0, \end{cases}$$

ранга 2. Фундаментальная система состоит из одного решения, например,

$$C_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица A подобна диагональной матрице

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

при этом

$$B = C^{-1}AC.$$

Матрица C, посредством которой осуществляется преобразование подобия, совпадает с матрицей перехода от старого базиса к новому, поэтому в качестве ее столбцов берут столбцы из координат собственных векторов. В нашем примере матрица подобного преобразования записывается так:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что такая матрица определяется не однозначно.

Замечание. Из результатов, полученных в предыдущих пунктах, ясно, что к диагональному виду может быть приведена далеко не каждая матрица. В более объемных курсах линейной алгебры вводят некоторую простейшую каноническую форму - **каноническую форму Жордана**, обобщающую диагональную, к **которой может быть приведена преобразованием подобия уже совершенно произвольная матрица.**

Мы каноническую форму Жордана вводить и изучать не будем. Это выходит за рамки нашего курса.

Упражнения

1. Найдите собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами:

$$a)\ A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix};\ b)\ A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -4 & 4 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix};\ c)\ A=\begin{pmatrix}4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\\ 6 & -9 & 4\end{pmatrix}.$$

2. Выяснить, можно ли матрицу A линейного оператора A n-мерного линейного пространства X привести к диагональному виду путем перехода к новому базису, и если можно, то найти этот базис и соответствующую ему диагональную матрицу:

$$a)\ A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix};\quad b)\ A=\begin{pmatrix}5 & 0 & -2\\ 8 & 1 & -4\\ 12 & 0 & -5\end{pmatrix};\quad c)\ A=\begin{pmatrix}6 & -5 & -3\\ 3 & -2 & -2\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}.$$

3. Линейный оператор A пространства R^3 задано невырожденной матрицей

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\\ -3 & 5 & -1\\ -3 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

Найдите собственные значения оператора A^{-1}.

8. Собственные значения и собственные векторы симметрического оператора

Ниже без доказательства приведем ряд теорем и следствий из них, которые справедливы для симметрического оператора, представляющего наибольший интерес среди линейных операторов, действующих в евклидовом пространстве.

Теорема. Все корни характеристического уравнения симметрического линейного оператора могут быть только действительными числами.

Следствие. Любой симметрический оператор имеет хотя бы одно собственное значение.

Теорема. Собственные векторы симметрического оператора, соответствующие его различным собственным значениям, ортогональны между собой.

Теорема. Для любого симметрического линейного оператора, действующего в евклидовом пространстве E, существует ортонормированный базис пространства E, составленный из собственных векторов этого оператора.

Следствие. Матрица симметрического линейного оператора с помощью соответствующего выбора ортонормированного базиса может быть приведена к диагональному виду. За этот базис достаточно принять ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов симметрического оператора.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется оператором или преобразованием, действующим в линейном пространстве? Что называется образом, прообразом вектора?

2. Когда оператор называется линейным? Во что переводит линейный оператор сумму векторов, произведение вектора на число?

3. Что называется нулевым оператором и как он записывается? Покажите, что нулевой оператор является линейным.

4. Что называется единичным, или тождественным оператором и как он записывается? Покажите, что единичный оператор является линейным.

5. Что называется оператором подобного растяжения, или оператором подобия? Покажите, что оператор подобия является линейным.

6. Что называется оператором проектирования? Покажите, что нулевой оператор проектирования является линейным.

7. Приведите примеры линейных операторов в линейных пространствах $C[a,b]$ и $C^{\infty}[a,b]$.

8. Что называется матрицей линейного оператора заданного в некотором базисе?

9. Как представляется общий вид линейного оператора в конечномерном пространстве?

10. Какое соответствие можно установить между линейными операторами и матрицами в конечномерном пространстве с фиксированным базисом? Разъ-

ясните сущность этого соответствия.

11. Какая матрица отвечает нулевому оператору? Зависит ли от выбора базиса матрица, отвечающая нулевому оператору.

12. Какая матрица отвечает единичному оператору? Зависит ли от выбора базиса матрица, отвечающая единичному оператору.

13. Какая матрица отвечает оператору подобия? Зависит ли от выбора базиса матрица, отвечающая оператору подобия?

14. Какая должна быть матрица, отвечающая оператору проектирования?

Зависит ли от выбора базиса матрица, отвечающая оператору подобия?

15. Когда два линейных оператора считаются равными? Какими матрицами обладают в данном базисе равные линейные операторы**?**

16. Что называется суммой двух линейных операторов? При сложении линейных операторов, какая операция производится с их матрицами?

17. Что называется произведением линейного оператора на число? При умножении линейного оператора на число что делается с соответствующей ему матрицей?

18. Что называется произведением двух линейных операторов? При умножении линейных операторов, какая операция производится с их матрицами?

19. Обоснуйте, что множество линейных операторов представляет собой линейное пространство.

20. Какие обстоятельства служат основанием для того, чтобы применение оператора к вектору записывать как умножение матрицы на столбец, а действия над операторами записывать как действия над соответствующими матрицами? Почему часто оператор и соответствующую ему матрицу обозначают одной и той же буквой?

21. Как происходит преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису?

22. Какая матрица называется подобной к данной матрице?

23. Какие матрицы соответствуют одному и тому же оператору в различных базисах?

24. Что такое ортогональный оператор? Какими свойствами обладает этот оператор?

25. Какими свойствами обладает матрица ортогонального оператора в ортонормированном базисе?

26. Какой линейный оператор называется симметрическим?

27. Какую матрицу имеет симметрический линейный оператор в (любом) ортонормированном базисе?

28. Что называется собственным вектором, собственным значением (или собственным числом) линейного оператора?

29. Что называется спектром линейного оператора?

30. Каким образом находятся собственные векторы и собственные значения линейного оператора в конечномерном пространстве?

31. Что называется характеристическим многочленом линейного оператора?

32. Что можно утверждать о числе собственных значений линейного оператора действующего в действительном линейном пространстве?

33. Когда собственные векторы линейного оператора A линейно независимы?

34. Какому условию должны удовлетворять корни характеристического многочлена, для того чтобы соответствующие им собственные векторы можно было принять за базис n-мерного линейного пространства?

35. Какой линейный оператор называется оператором простой структуры?

36. Всегда ли в пространстве существует базис, состоящий из собственных векторов линейного оператора действующего в этом пространстве?

37. Каким условиям должен удовлетворять линейный оператор для того, чтобы в пространстве существовал базис из его собственных векторов?

38. Когда матрица линейного оператора имеет диагональную форму?

39. Что называется матрицей простой структуры?

40. Разъясните смысл фразы: - «**Оператору простой структуры отвечает матрица простой структуры и наоборот**».

41. Можно ли любую матрицу привести к диагональному виду?

42. Что можно утверждать о собственных значениях симметрического линейного оператора?

43. Каким свойством обладают собственные векторы симметрического оператора, соответствующие его различным собственным значениям?

44. Каким образом матрица симметрического линейного оператора может быть приведена к диагональному виду?

§11. Квадратичные формы

Ключевые слова: *квадратичная форма, общий вид квадратичной формы, канонический вид квадратичной формы, нормальный вид квадратичной формы, ортогональное преобразование переменных, закон инерции квадратичных форм, знакоположительная квадратичная форма, определенно положительная квадратичная форма, знакоотрицательная квадратичная форма, определенно отрицательная квадратичная форма, положительная матрица, неотрицательная матрица, отрицательная матрица, неположительная матрица, критерии Сильвестра, кривая эллиптического типа, кривая гиперболического типа, кривая параболического типа.*

1. Квадратичные формы

Не нарушая общности, квадратичную форму можно рассмотреть в следующем виде:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k = X'AX\,. \qquad (1)$$

Переменных $x_1, x_{2,} \dots, x_n$ рассмотрим как координаты вектора $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ пространства R^n.

При $n = 2$ получаем

$$f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2.$$

При $n = 3$ будет

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3\,.$$

Квадратичные формы обладают легко проверяемым свойством:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n)\,.$$

Из коэффициентов квадратичной формы можно **составить матрицу квадратичной формы.** Это квадратная матрица порядка n (n - число переменных квадратичной формы). Коэффициент при x_i^2 пишется на главной диагонали на пересечении i-й строки и j-го столбца. Коэффициент при $x_i x_j$ $(i \neq j)$ делится пополам и пишется на пересечении i-й строки и j-го столбца.

Пример 1. Найдем матрицу квадратичной формы

$$f(x_1, x_2, x_3) = 17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3.$$

Порядок матрицы равен 3, так как квадратичная форма содержит 3 переменные. На главной диагонали расположены числа 17, 14, 14 (коэффициенты при квадратах), на пересечении переменных $x_i x_j \quad (i \neq j)$ пишем $\frac{a_{ij}}{2}$, где a_{ij} - коэффициент при $x_i x_j \quad (i \neq j)$ квадратичной форме.

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что при транспонировании полученная матрица не меняется: $A = A'$.

Упражнение

Найти матрицу квадратичной формы

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 9x_1x_2 - 3x_1x_3 - 7x_2x_3.$$

2. Канонический и нормальный виды квадратичной формы

Если в квадратичной форме (1) переменные подвергнуть линейному преобразованию

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n, \end{cases} \qquad (2)$$

где коэффициенты a_{ij} образуют невырожденную матрицу, то получится квадратичная форма от переменных $y_1, y_{2,}\dots, y_n$ с новыми коэффициентами. В п. 3 будет показано, что при надлежащем выборе преобразования (2) любую квадратичную форму (1) можно привести к виду, содержащему только квадраты новых переменных:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1y_1^2 + c_2y_2^2 + \cdots + c_ny_n^2. \qquad (*)$$

Такой вид квадратичной формы называется **каноническим**; матрица формы в этом случае является диагональной:

$$\begin{pmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n \end{pmatrix}.$$

Если в частности коэффициенты $c_1, c_{2,}..., c_n$ равны +1, -1 или 0, то этот вид квадратичной формы является ее **нормальным видом.**

3. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Метод Лагранжа. Метод ортогональных преобразований.

3.1. Теорема о возможности приведения квадратичной формы к каноническому виду

Лемма 1. Если квадратичная форма (1) не содержит квадратов переменных, то с помощью линейного преобразования ее можно перевести в форму, содержащую квадрат хотя бы одной переменной.

Доказательство. По условию квадратичная форма содержит только члены с произведениями переменных. Пусть при каких-нибудь различных значениях i и k $a_{ik} \neq 0$, т. е. $2a_{ik}x_i x_k$ - один из таких членов. Если выполнить линейное преобразование

$$\begin{cases} x_i = y_i + y_k \\ x_k = y_i - y_k \\ x_l = y_l \ \ \textit{при всех } l \neq i \textit{ и } l \neq k \end{cases}$$

(его определитель не равен нулю), то в квадратичной форме появятся даже два члена с квадратами переменных:

$$2a_{ik}x_i x_k = a_{ik}(y_i + y_k)(y_i - y_k) = 2a_{ik}y_i^2 - 2a_{ik}y_k^2.$$

Эти слагаемые не могут исчезнуть после приведения подобных членов, так как любое из остальных слагаемых содержит хотя бы одну переменную, отличную от y_i или y_k.

Пример 2. С помощью линейного преобразования квадратичную форму

$$f = 3x_1x_4 - 5x_2x_3 + 4x_2x_4$$

можно перевести в форму, содержащую квадрат хотя бы одной переменной.

Решение

Так как, например, $a_{14} = \dfrac{3}{2} \neq 0$, то можно положить

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_4 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \\ x_4 = y_1 - y_4. \end{cases}$$

Определитель этой системы отличен от нуля

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

и соответствующее преобразование является линейным. Квадратичная форма принимает вид

$$f = 3y_1^2 - 3y_4^2 - 5y_2y_3 + 4y_1y_2 - 4y_2y_4.$$

Упражнение

С помощью линейного преобразования квадратичную форму

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1x_2 + 7x_1x_3 + 11x_2x_3$$

можно перевести в форму, содержащую квадрат хотя бы одной переменной.

Лемма 2. Если квадратичная форма (1) содержит член с квадратом переменной, например, член $a_{ii}x_i^2$, и еще хотя бы один член с этой переменной x_i, то с помощью линейного преобразования данную квадратичную форму можно перевести в форму от переменных $y_1, y_{2,} \ldots, y_n$, имеющую вид

$$f = d_{ii}y_i^2 + g, \tag{3}$$

где g - квадратичная форма, не содержащая переменной y_i.

Доказательство. Выделим в квадратичной форме (1) сумму членов, содержащих переменную x_i:

$$f = 2a_{i1}x_i x_1 + 2a_{i2}x_i x_2 + \cdots + a_{ii}x_i^2 + \cdots + 2a_{in}x_i x_n + g_1, \qquad (3)$$

где через g_1 обозначена сумма всех остальных членов (не содержащих переменную x_i). Введем также обозначение:

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ii}x_i + \cdots + a_{in}x_n.$$

Квадрат многочлена равен сумме квадратов всех его членов, сложенной с удвоенными произведениями каждого члена на каждый из последующих. Следовательно, если в выражении для y_i^2 выделить сумму членов, содержащих переменную x_i, то эта сумма будет содержать квадрат члена $a_{ii}x_i$ и удвоенные произведения этого члена $a_{ii}x_i$ на остальные члены многочлена:

$$y_i^2 = 2a_{ii}x_i \cdot a_{i1}x_1 + 2a_{ii}x_i \cdot a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ii}^2 x_i^2 + \cdots + 2a_{ii}x_i \cdot a_{in}x_n + g_2, \qquad (5)$$

где g_2 - сумма членов, не содержащих переменную x_i.

Разделим обе части (5) на a_{ii} и вычтем полученное равенство из (4). После приведения подобных членов будем иметь:

$$f - \frac{1}{a_{ii}}y_i^2 = g_1 - \frac{1}{a_{ii}}g_2.$$

Выражение в правой части не содержит переменной $\boldsymbol{x_i}$ и является квадратичной формой от переменных $x_1, x_{2,}..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$. Обозначим его через $\boldsymbol{g}$, а коэффициент $\dfrac{1}{a_{ii}}$ - через d_{ii}.

Тогда

$$f = d_{ii}y_i^2 + g.$$

Если произвести линейное преобразование

$$\begin{cases} y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \\ y_l = x_l \ \ \textit{при всех} \ \ l \neq i \end{cases}$$

(определитель, которого не равен нулю), то g будет квадратичной формой от переменных $y_1, y_{2,}..., y_{i-1}, y_{i+1}, ..., y_n$ и квадратичная форма f окажется приведенной к виду (3).

Теорема. Всякая квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду с помощью линейного преобразования переменных.

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. Квадратичная форма от одной переменной x_1 имеет вид $a_{11}x_1^2$ уже являющийся каноническим. Предположим, что эта теорема верна для квадратичных форм от $n-1$ переменных, и докажем, что она будет верна тогда и для квадратичных форм от n переменных.

Если квадратичная форма (1) не содержит квадратов переменных, то по лемме 1 ее можно с помощью линейного преобразования перевести в квадратичную форму, содержащую квадрат хотя бы одной переменной. По лемме 2 полученную квадратичную форму можно представить в виде (3). Так как квадратичная форма g в равенстве (3) зависит от $n-1$ переменных $y_1, y_{2,} \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n$, то по сделанному предположению она может быть приведена к каноническому виду линейным преобразованием этих переменных. От переменных $y_1, y_{2,} \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n$ мы перейдем при этом к новым переменным $z_1, z_{2,} \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_n$. Если к формулам этого перехода добавить еще и формулу $y_i = z_i$, то получатся формулы линейного преобразования, которые приводят к каноническому виду квадратичную форму $d_{ii}y_i^2 + g$ содержащуюся в равенстве (3).

Композиция всех рассмотренных преобразований переменных является искомым линейным преобразованием, приводящим к каноническому виду данную квадратичную форму (1).

Если квадратичная форма (1) содержит квадрат какой-нибудь переменной, то лемму 1 применять не нужно.

3.2. Способы приведения квадратичной формы к каноническому и нормальному виду

Способ, использованный при доказательстве теоремы из 3.1, был **предложен известным французским математиком Лагранжем**. Этот способ может быть применен и для практического приведения квадратичной формы к каноническому виду.

Если данная квадратичная форма от n переменных не содержит квадратов переменных, то с помощью линейного преобразования, примененного при доказательстве леммы 1, переходим к квадратичной форме, содержащей квадраты переменных. Затем с помощью линейного преобразования, рассмотренного при доказательстве леммы 2, представляем квадратичную форму в виде суммы члена с квадратом какой-нибудь переменной и квадратичной формы от остальных $n-1$ переменных. Применив снова этот же прием к полученной квадратичной форме, получаем еще один член с квадратом другой переменной и квадратичную форму от остальных $n-2$ переменных. Этот процесс продолжаем до тех пор, пока не получится квадратичная форма, содержащая только члены с квадратами переменных.

От канонического вида квадратичной формы

$$c_1v_1^2 + c_2v_2^2 + \cdots + c_mv_m^2,$$

где $m \le n$ и $c_1, c_2, \ldots, c_m$ отличны от нуля, можно перейти к нормальному виду

$$\varepsilon_1w_1^2 + \varepsilon_2w_2^2 + \cdots + \varepsilon_mw_m^2,$$

(где $\varepsilon_i = 1$ при $c_i > 0$ и $\varepsilon_i = -1$ при $c_i < 0$) с помощью линейного преобразования

$$\begin{cases} v_1 = \dfrac{1}{\sqrt{|c_1|}} w_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ v_m = \dfrac{1}{\sqrt{|c_m|}} w_m \\ v_{m+1} = w_{m+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ v_n = w_n. \end{cases}$$

Пример 3. Приведем к каноническому виду следующую квадратичную форму:

$$f = x_1^2 + 11x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3. \tag{6}$$

Решение

1. Так как форма содержит член x_1^2, то леммы 1 применять не нужно. Если бы остальные члены не содержали x_v, то один из квадратов был бы уже выделен и можно было бы сразу приводить к каноническому виду сумму этих остальных членов. Но, кроме x_1^2, есть еще члены, содержащие переменную x_1. Как при доказательстве леммы 2, выделяем их сумму:

$$f=(x_1^2-2x_1x_2 4x_1x_3)+11x_3^2-6x_2x_3; \qquad i=1, \quad a_{11}=1, \quad a_{12}=-1, \quad a_{13}=2;$$

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=x_1-x_2+2x_3, \\ y_1^2 &= x_1^2+x_2^2+4x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3; \end{aligned}$$

$$\frac{1}{a_{11}}=1, \quad f-y_1^2=-x_2^2+7x_3^2-2x_2x_3;$$

$$\begin{cases} y_1=x_1-x_2+2x_3 \\ y_2=x_2 \\ y_3=x_3; \end{cases} \tag{7}$$

$$f=y_1^2+(-y_2^2+7y_3^2-2y_2y_3).$$

Снова применяем лемму 2, на этот раз – к квадратичной форме

$$g=-y_2^2+7y_3^2-2y_2y_3.$$

Выделяем члены, содержащие переменную y_2:

$$g=(-y_2^2-2y_2y_3)++7y_3^2; \qquad i=2, \quad d_{22}=-1, \quad d_{23}-1.$$

$$\begin{aligned} v_2 &= d_{22}y_2+d_{23}y_3=-y_2-y_3, \\ v_2^2 &= y_2^2+2y_2y_3+y_3^2; \end{aligned}$$

$$\frac{1}{d_{22}}=-1, \quad g+v_2^2=8y_3^2;$$

$$\begin{cases} v_1=y_1 \\ v_2=-y_2-y_3 \\ v_3=y_3; \end{cases} \tag{8}$$

$$g=-v_2^2+8v_3^2.$$

Так как

$$f = y_1^2 + g,$$

то

$$f = v_1^2 - v_2^2 + 8v_3^2. \tag{9}$$

Таким образом, квадратичная форма (6) приведена к каноническому виду.

2. Чтобы получить линейное преобразование, непосредственно приводящее данную квадратичную форму (6) к каноническому виду (9), найдем сначала преобразования, обратные преобразованиям (7) и (8):

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 - 2y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = v_1 \\ y_2 = -v_2 - v_3, \\ y_3 = v_{3,} \end{cases}$$

а затем композицию полученных преобразований:

$$\begin{cases} x_1 = v_1 - v_2 - 3v_3 \\ x_2 = -v_2 - v_3 \\ x_3 = v_3 \end{cases}. \tag{10}$$

Если подставить полученные выражения для x_1, x_2, x_3 в форму (6), то сразу придем к форме (9).

3. От канонического вида (1) с помощью линейного преобразования

$$\begin{cases} v_1 = w_1 \\ v_2 = w_2 \\ v_3 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} w_3 \end{cases}$$

можно перейти к нормальному виду

$$f = w_1^2 - w_2^2 + w_3^2. \tag{11}$$

Линейное преобразование, непосредственно приводящее форму (6) к виду (11), выражается формулами

$$\begin{cases} x_1 = w_1 - w_2 - \dfrac{3}{2\sqrt{2}} w_3 \\ x_2 = -w_2 - \dfrac{1}{2\sqrt{2}} w_3 \\ x_3 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} w_3. \end{cases}$$

Рассмотренную выше квадратичную форму можно было бы привести к каноническому виду и другим способом, непосредственно выделяя полные квадраты:

$$f = x_1^2 + 11x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3 =$$
$$= 2x_1^2 + 4x_1x_3 + 2x_3^2 + 9x_3^2 - 6x_2x_3 + x_2^2 - x_2^2 - 2x_1x_2 - x_1^2 =$$
$$= 2(x_1 - x_2)^2 + (3x_3 - x_2)^2 - (x_1 + x_2)^2.$$

Линейное преобразование

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + x_3 \\ z_2 = -x_2 + 3x_3 \\ z_3 = x_1 + x_2 \end{cases}$$

также приводит данную квадратичную форму к каноническому виду

$$f = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2.$$

Таким образом, **приводя квадратичную форму к каноническому виду различными способами, можно получить разные ответы. Это следует иметь в виду при решении примеров.**

4. Приведение квадратичной формы к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования

4.1. Ортогональное преобразование переменных

Выше было доказано, что любая квадратичная форма может быть приведена с помощью линейного преобразования переменных к каноническому и даже к нормальному виду. С геометрической точки зрения это преобразование можно рассматривать как переход к новому базису в линейном пространстве. Но в евклидовом пространстве обычно рассматриваются лишь ортонормированные базисы, мы во всех подпунктах этого пункта будем использовать линейные преобразования переменных только с ортогональными матрицами.

Определение. Линейное преобразование переменных с ортогональной матрицей **называется ортогональным.**

Ниже будет показано, что квадратичную форму можно привести к каноническому виду, ограничиваясь только ортогональными преобразованиями переменных. **Однако приведение квадратичной формы к нормальному виду (*) с помощью ортогонального преобразования уже не всегда выполнимо.**

4.2. Теорема о возможности приведения квадратичной формы к каноническому виду

Лемма. Если квадратичная форма и линейный оператор имеют одну и ту же матрицу относительно какого-нибудь ортонормированного базиса, то они будут иметь одинаковые матрицы и относительно любого другого ортонормированного базиса.

Доказательство. Рассмотрим квадратичную форму

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k \qquad (12)$$

и линейный оператор, матрица которого относительно какого-либо ортонормированного базиса совпадает с матрицей этой квадратичной формы: $b_{ik} = a_{ik}$.

Этот оператор отображает произвольный вектор

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{на вектор} \quad \tilde{X} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix}$$

по формулам (§9)

$$\tilde{x}_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \,. \qquad (13)$$

Тогда квадратичную форму (12) можно записать в виде

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \right) = \sum_{i-1}^{n} x_i \tilde{x}_i = \tag{14}$$

$$= x_1 \tilde{x}_1 + x_2 \tilde{x}_2 + \cdots + x_n \tilde{x}_n .$$

Перейдем теперь к новому ортонормированному базису. Пусть векторы X и $\tilde{X}$ имеют относительно этого базиса, соответственно, координаты y_i и $\tilde{y}_i$, а формулы, связывающие эти координаты, имеют вид

$$\tilde{y}_i = \sum_{k=1}^{n} d_{ik} y_k . \tag{15}$$

Выражая скалярное произведение векторов X и $\tilde{X}$ через их координаты относительно нового базиса, получим с помощью (15):

$$y_1 \tilde{y}_1 + y_2 \tilde{y}_2 + \cdots + y_n \tilde{y}_n = \sum_{i-1}^{n} y_i \tilde{y}_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \left(\sum_{k=1}^{n} d_{ik} y_k \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} d_{ik} y_i y_k .$$

Отсюда вследствие (22) получаем:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} d_{ik} y_i y_k . \tag{16}$$

Сравнивая (15) и (16), видим, что данные квадратичная форма и линейный оператор имеют и относительно нового базиса одну и ту же матрицу с элементами d_{ik}.

Теорема. Любая квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования переменных.

Доказательство. Пусть (12) - данная квадратичная форма. Рассмотрим линейный оператор, имеющий относительно некоторого ортонормированного базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ту же симметрическую матрицу, что и эта квадратичная форма. Характеристическое уравнение этого оператора имеет вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} - \lambda & \cdots & a_{21} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 . \tag{17}$$

Существует ортонормированный базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ относительно которого матрица данного линейного оператора имеет диагональный вид; при этом диагональными элементами будут служить корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ характеристического уравнения (17). По лемме квадратичная форма (12) будет иметь в новом базисе ту же матрицу, что и этот линейный оператор, т.е. окажется приведенной к каноническому виду

$$\lambda_1 y_1^2 +, \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2; \tag{18}$$

здесь каждый корень характеристического уравнения взят столько раз, какова его кратность.

Векторы нового базиса выражаются через векторы старого базиса формулами вида

$$e'_i = \sum_{k=1}^{n} d_{ik} e_k , \tag{19}$$

при этом матрица перехода является ортогональной. Матрица преобразования

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} d_{ik} y_k , \tag{20}$$

приводящего квадратичную форму к каноническому виду, получается при транспонировании этой ортогональной матрицы и, следовательно, также является ортогональной.

4.3. Способ приведения квадратичной формы к каноническому виду

Из сказанного в 4.2 следует, что для нахождения коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ в каноническом виде (18) квадратичной формы (12) достаточно решить характеристическое уравнение (17).

Укажем теперь способ нахождения соответствующего ортонормированного базиса $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ и ортогонального преобразования, приводящего квадратичную форму к каноническому виду.

Пусть λ_k - корень характеристического уравнения, имеющий кратность 1. Подставив, этот корень в систему:

$$
\begin{cases}
(a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\
a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
(a_{n1}-\lambda)x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0,
\end{cases} \qquad (21)
$$

найдем из нее координаты собственного вектора и, соответствующего этому собственному значению λ_k. Разделив найденный вектор на его длину, получим вектор искомого ортонормированного базиса.

Пусть теперь λ_k - корень характеристического уравнения, имеющий кратность $m>1$. После его подстановки в (19) найдем m независимых решений полученной системы, выбрав их так, чтобы они определяли координаты m попарно ортогональных единичных векторов. Эти векторы образуют ортонормированный базис m-мерного подпространства, состоящего из собственных векторов, соответствующих данному собственному значению λ_k. Примем найденные векторы за векторы искомого базиса евклидова пространства.

Проведем такие же рассуждения для каждого из корней характеристического уравнения. Так как сумма кратностей всех корней равна n, а собственные векторы, соответствующие различным корням, ортогональны, то мы получим искомый ортонормированный базис.

Матрицу ортогонального преобразования (20), приводящего квадратичную форму к каноническому виду, можно получить транспонированием матрицы перехода от базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ к базису $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$.

Пример 4 . С помощью ортогонального преобразования привести к каноническому виду квадратичную форму

$$
f = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3. \qquad (22)
$$

Решение

1. Находим канонический вид квадратичной формы.

Записываем матрицу квадратичной формы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

и составляем характеристическое уравнение вида (17):

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -4 \\ 2 & -2-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислив определитель, получим:

$$\lambda^3 - 27\lambda - 54 = 0 \quad \text{или} \quad \lambda^3 - 36\lambda + 9\lambda - 54 = 0.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\lambda(\lambda-6)(\lambda+6) + 9(\lambda-6) = 0 \quad \text{или} \quad (\lambda-6)(\lambda+3)^2 = 0.$$

Отсюда

$$\lambda_1 = 6, \quad \lambda_2 = -3, \quad \lambda_3 = -3.$$

Искомым каноническим видом формы (30) является

$$6y_1^2 - 3y_2^2 - 3y_3^2. \qquad (23)$$

2. Переходим к нахождению базиса, в котором квадратичная форма имеет канонический вид.

Запишем для данной квадратичной формы (22) систему вида (21):

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - (2+\lambda)x_2 - 2x_3 = 0 \\ -4x_1 - 2x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0. \end{cases} \qquad (24)$$

Находим вектор e_1' нового базиса, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 6$.

Полагаем в системе (24) $\lambda = 6$:

$$\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 8x_2 - 2x_3 = 0 \\ -4x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Найдем какое-нибудь решение полученной системы. Если, например, положить $x_1 = 2$, то из 1-го и 3-го уравнений будем иметь $x_2 = 1$ и $x_3 = -2$.

Вектор

$$P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

имеющий эти координаты, - собственный вектор, соответствующий значению $\lambda_1 = 6$. Нормируя его, найдем вектор

$$\mathrm{e}_1' = \frac{P}{|P|} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Находим векторы e_2', e_3' нового базиса, соответствующие значению $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$.

Полагаем в системе (24) $\lambda = -3$:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ -4x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Эта система эквивалентна одному уравнению

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \tag{25}$$

из которого видно, что векторы e_2' и e_3' ортогональны уже найденному вектору $P = (2,\quad 1,\quad -2)'$, а, следовательно, и вектору $\mathrm{e}_1' = \left(\frac{2}{3},\quad \frac{1}{3},\quad -\frac{2}{3}\right)'$.

Одно из решений уравнения (25) можно выбрать произвольно. Если, например, $x_2 = x_3 = 2$, то $x_1 = 1$. Нормируя найденный вектор

$$Q = (1,\quad 2,\quad 2)',$$

получим вектор

$$\mathrm{e}_2' = \frac{Q}{|Q|} = \left(\frac{1}{3},\quad \frac{2}{3},\quad \frac{2}{3}\right)'.$$

Теперь определим вектор $\boldsymbol{S}$, координаты которого удовлетворяют уравнению (25), но который ортогонален найденному выше вектору $Q = (1, \quad 2, \quad 2)'$:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Получим какое-нибудь решение этой системы; если, например, $x_3 = 1$, то $x_1 = 2$ и $x_2 = -2$. Тогда

$$S = (2, \quad -2, \quad 1)',$$

откуда

$$\mathrm{e}_3' = \frac{S}{|S|} = \left(\frac{2}{3}, \quad -\frac{2}{3}, \quad \frac{1}{3}\right)'.$$

Находим ортогональное преобразование, приводящее данную квадратичную форму к каноническому виду.

Записываем выражения векторов нового ортонормированного базиса через векторы старого базиса:

$$\begin{cases} \mathrm{e}_1' = \frac{2}{3}\mathrm{e}_1 + \frac{1}{3}\mathrm{e}_2 - \frac{2}{3}\mathrm{e}_3 \\ \mathrm{e}_2' = \frac{1}{3}\mathrm{e}_1 + \frac{2}{3}\mathrm{e}_2 + \frac{2}{3}\mathrm{e}_3 \\ \mathrm{e}_3' = \frac{2}{3}\mathrm{e}_1 - \frac{2}{3}\mathrm{e}_2 + \frac{1}{3}\mathrm{e}_3. \end{cases}$$

Матрица искомого ортогонального преобразования получается при транспонировании матрицы этой системы, следовательно, искомое ортогональное преобразование выразится формулами

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3 \\ x_2 = \frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_3 \\ x_3 = -\frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3. \end{cases}$$

Если подставить эти значения в данную квадратичную форму (22), то получится ее канонический вид (23).

Вследствие неоднозначности выбора вектора e_2' существует бесконечное множество ортогональных преобразований, приводящих форму (22) к каноническому виду. Мы нашли одно из них.

Упражнение

С помощью ортогонального преобразования привести к каноническому виду квадратичную форму из примера 1:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3.$$

5. Закон инерции квадратичных форм

При решении примера в 3.2 мы привели одну и ту же квадратичную форму к каноническому (а, в частности, и к нормальному) виду различными способами, получив при этом квадратичные формы с различными коэффициентами:

$$v_1^2 - v_2^2 + 8v_3^2, \qquad w_1^2 - w_2^2 + w_3^2, \qquad z_1^2 + z_2^2 - z_3^2.$$

Однако число членов с положительными коэффициентами, а также число членов с отрицательными коэффициентами во всех случаях оказалось одинаковым. Это не случайно. Чтобы подчеркнуть неизменность указанных чисел, соответствующее свойство квадратичных форм называют **законом инерции.** Оно выражается следующей теоремой.

Теорема. Если данная квадратичная форма приведена к каноническому виду с помощью двух различных линейных преобразований, то число положительных коэффициентов при квадратах новых переменных, так же как и число отрицательных коэффициентов, будет в обоих случаях одно и то же.

6. Знакоопределенные квадратичные формы

Определение. Квадратичная форма

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k = X'AX$$

называется знакоположительной, если неравенство

$$X'AX \geq 0$$

выполняется для всех точек $X \in R^n$, и **определенно положительной,** если неравенство

$$X'AX > 0$$

выполняется для всех $X \in R^n$, $X \neq 0$.

Аналогично определяются **знакоотрицательные и определенно отрицательные** квадратичные формы. С введенными квадратичными формами связаны понятия положительных и неотрицательных матриц.

Определение. Симметричная матрица A называется **положительной (неотрицательной)** и обозначается $A > 0$ (соответственно, $A \geq 0$), если она служит матрицей коэффициентов определенно положительной (знакоположительной) квадратичной формы.

Рассмотрим симметрическую матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Минор матрицы A, составленный из строк с номерами $i_1, \dots, i_p$ и столбцов $j_1, \dots, j_p$, обозначим через

$$A\begin{pmatrix} i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \dots & a_{i_1 j_p} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots & \dots \\ a_{i_p j_1} & \dots & a_{i_p j_p} \end{vmatrix}.$$

Определение. Минор называется главным, если $i_1 = j_1$,..., $i_p = j_p$, т.е. он составлен из строк и столбцов с одинаковыми номерами. Миноры

$$D_1 = a_{11}, \quad D_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad ,\ldots, \quad D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называются последовательными главными.

Справедливы следующие утверждения:

Теорема (критерии Сильвестра)

1) для того чтобы матрица была положительной, необходимо и достаточно, чтобы ее последовательные главные миноры были положительны:

$$D_1 > 0 \quad ,\ldots, \quad D_n > 0. \tag{26}$$

2) для того чтобы матрица была неотрицательной, необходимо и достаточно, чтобы все ее главные миноры были неотрицательны:

$$A\begin{pmatrix} i_1,\ldots,i_p \\ i_1,\ldots,i_p \end{pmatrix} \ge 0, \quad 1 \le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_p \le n, \quad p = 1,2,\ldots,n. \tag{27}$$

Условий $D_1 \ge 0 \quad ,\ldots, \quad D_n \ge 0$ не достаточно, чтобы матрица была неотрицательной. Действительно, у матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

последовательные главные миноры

$$D_1 = a_{11}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{11}^2.$$

При $a_{11} = 0, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} < 0$, получаем $D_1 = 0, \qquad D_2 = 0$, однако, в этом случае, соответствующая форма $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = a_{22}x_2^2$ не является знакоположительной (она знакоотрицательна).

Замечание. Применяя условия (26), (27) к матрице A, получаем критерии:

а) отрицательности матрицы: $(-1)^p D_p > 0, \quad p = 1,2,\ldots,n;$

б) неположительности матрицы: $(-1)^p A\begin{pmatrix} i_1,\ldots,i_p \\ i_1,\ldots,i_p \end{pmatrix} \ge 0.$

Замечание. Проверку условий (27) следует начинать с построения последовательных главных миноров, ибо из неравенств (26) следует, что все главные миноры положительны.

В ряде случаев для установления определенно положительности и определенно отрицательности квадратичной формы применяют следующий критерий.

Теорема. Для того чтобы квадратичная форма $f = X'AX$ была определенно положительной (определенно отрицательной) необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения λ_i матрицы A были положительны (отрицательны).

Пример 5. Показать, что квадратичная форма $f = 13x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2$ является определенно положительной.

Решение

Первый способ. Матрица A квадратичной формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Так как главные миноры матрицы A

$$D_1 = a_{11} = 13, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 56$$

положительны, то по критерию Сильвестра данная квадратичная форма f определенно положительная.

Второй способ. Для матрицы A характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 13-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad \lambda^2 - 18\lambda + 56 = 0.$$

Решая это уравнение, найдем $\lambda_1 = 14, \quad \lambda_2 = 4$. Так как корни характеристического уравнения матрицы A положительны, то на основании последней теоремы данного пункта квадратичная форма f определенно положительная.

Упражнения

1. Найдите канонический вид квадратичной формы:

$a)\quad f = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$;

$b)\quad f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$.

2. Найдите нормальный вид квадратичной формы:

$a)\quad f = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$; $b)\quad f = x_1^2 + x_1x_2 + x_3x_4$.

3. Приведите квадратичную форму к нормальному виду и найдите формулы соответствующего линейного преобразования:

$a)\quad f = 9x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_3 - 42x_2x_3$;

$b)\quad f = 4x_1^2 + 9x_2^2 + x_3^2 - 12x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3$;

$c)\quad f = -x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 14x_1x_3 + 36x_2x_3$.

4. Исследовать знакоопределенность квадратичной формы:

$a)\quad f = 17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ (квадратичная форма из примера 1);

$b)\quad f = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$; $\qquad c)\quad f = x_1^2 - x_1x_2 - 3x_2^2$.

7. Применение теории квадратичных форм к кривым второго порядка

Пусть на плоскости задана декартова система координат (декартов базис i, j и точка O – начало координат). Рассмотрим общее уравнение второго порядка:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0. \qquad (28)$$

Обозначим через $f(x,y)$ сумму старших слагаемых:

$$f(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

и рассмотрим квадратичную форму $f(x_1,x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$. Её матрица $Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ симметрическая.

Пример 6. Привести квадратичную форму

$$f\left(x_1,x_2\right) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2$$

к каноническому виду методом собственных векторов.

Решение

Матрица Q квадратичной формы имеет вид $Q=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$. Найдём её собственные векторы. Характеристическое уравнение:

$$|Q-\lambda E|=\begin{vmatrix}5-\lambda & 2\\ 2 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0, \qquad \lambda^2-7\lambda+6=0\ ,$$

его корни: $\lambda_1=6$, $\lambda_2=1$.

Имеем для $\lambda=6$: $\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\{-x_1+2x_2=0$, и $u_1=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$.

Для $\lambda=1$: $\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\{2x_1+x_2=0$ и $u_2=\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$.

В базисе u_1,u_2 матрица оператора диагональная: $B=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Нормируем векторы u_1,u_2: $u_1'=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$, $u_2'=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$. Матрица перехода от базиса u_1,u_2 к базису u_1',u_2':

$$S=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Вернёмся к квадратичной форме. Положим $X=SX'$, то есть

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{2}{\sqrt5}x_1'-\dfrac{1}{\sqrt5}x_2',\\ x_2=\dfrac{1}{\sqrt5}x_1'+\dfrac{2}{\sqrt5}x_2'.\end{cases} \tag{29}$$

Тогда $f(y_1,y_2)=6y_1^2+y_2^2$.

Замечание. Формулы (29) – формулы поворота осей координат на угол φ против хода часовой стрелки. Угол φ определяется соотношениями

$$\cos\varphi=\frac{2}{\sqrt5},\ \sin\varphi=\frac{1}{\sqrt5} \quad (\operatorname{tg}\varphi=\frac12,\ \varphi=\operatorname{arctg}\frac12).$$

В общем случае преобразование поворота осей координат

$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi, \end{cases} \qquad (30)$$

приведёт линию (11) к виду

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2b_1 x' + 2b_2 y' + b = 0 . \qquad (31)$$

Эта процедура называется приведением линии второго порядка *к главным осям* (из дальнейшего изложения будет ясно, что если (28) – эллипс или гипербола, то новые оси OX' и OY' параллельны главным осям кривой).

Коэффициенты λ_1 и λ_2 в уравнении (31) – характеристические числа матрицы $Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и могут быть найдены как корни уравнения $|Q - \lambda E| = 0,$ или

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (32)$$

Обозначим $\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix}, \quad \varphi(0) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \delta .$

Имеем: $\lambda_1 \lambda_2 = \delta$.

Действительно, из (32) находим $a_{11}a_{22} - \lambda a_{22} - \lambda a_{11} + \lambda^2 - a_{12}^2 = 0$, или $\lambda^2 - \lambda\left(a_{11} + a_{22}\right) + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, и по теореме Виета $\lambda_1\lambda_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \delta$.

Случай 1. $\delta = \lambda_1\lambda_2 > 0$ (кривая *эллиптического* типа).

Преобразуем (31) следующим образом:

$$\lambda_1\left(x' + \frac{b_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2 - \frac{b_1^2}{\lambda_1} - \frac{b_2^2}{\lambda_2} + b = 0;$$

обозначив $b - \frac{b_1^2}{\lambda_1} - \frac{b_2^2}{\lambda_2} = c,$ придём к равенству

$$\lambda_1\left(x' + \frac{b_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2 + c = 0 .$$

Положим

$$\begin{cases} x' + \dfrac{b_1}{\lambda_1} = x'', \\ y' + \dfrac{b_2}{\lambda_2} = y'', \end{cases} \tag{33}$$

и в новой системе координат $O''X''Y''$ получим:

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + c = 0. \tag{34}$$

Формулы (33) – формулы параллельного переноса начала координат в точку $O''\left(-\dfrac{b_1}{\lambda_1}, -\dfrac{b_2}{\lambda_2}\right)$.

Случай 1. а) Знак c противоположен знаку λ_1 (и, следовательно, знаку λ_2). Тогда (17) определяет эллипс:

$$\frac{\lambda_1 x''^2}{c} + \frac{\lambda_2 y''^2}{c} = 1.$$

Случай 1. б) $c = 0$, - уравнение (34) определяет одну точку: $x'' = y'' = 0$.

Случай 1. в) Знаки c и λ_1 совпадают, – нет точек (мнимый эллипс).

Случай 2. $\delta = \lambda_1 \lambda_2 < 0$ (кривая *гиперболического* типа).

В этом случае знаки λ_1 и λ_2 противоположены.

Случай 2. а) $c \neq 0$ - уравнение (31) определяет гиперболу:

$$\frac{\lambda_1 x''^2}{-c} + \frac{\lambda_2 y''^2}{-c} = 1.$$

Случай 2. б) $c = 0$ - уравнение (34) принимает вид:

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = 0.$$

Пусть $\lambda_1 > 0$, тогда $\lambda_2 < 0$, и уравнение (34) можно переписать в следующем виде

$$\left(\sqrt{\lambda_1}x'' - \sqrt{-\lambda_2}y''\right)\left(\sqrt{\lambda_1}x'' + \sqrt{-\lambda_2}y''\right) = 0. \tag{35}$$

Уравнение (35) определяет пару пересекающихся прямых:

$$y'' = \pm \frac{\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{-\lambda_2}} x''.$$

Случай 3. $\delta = \lambda_1 \lambda_2 = 0$ (кривая *параболического* типа).

Пусть для определённости $\lambda_2 \neq 0$ (тогда $\lambda_1 = 0$). Уравнение (28) преобразованием (30) приводится к виду

$$\lambda_2 y'^2 + 2b_1 x' + 2b_2 y' + b = 0. \quad (36)$$

Пусть $b_1 \neq 0$, тогда (36) можно переписать следующим образом

$$\lambda_2 \left(y' + \frac{b_2}{\lambda_2} \right)^2 + 2b_1 \left(x' + \frac{b_2}{2b_1} - \frac{b_2^2}{2\lambda_2 b_1} \right) = 0.$$

Получим:

$$\begin{cases} x'' = x' + \dfrac{b}{2b_1} - \dfrac{b_2^2}{2\lambda_2 b_1}, \\ y'' = y' + \dfrac{b_2}{\lambda_2}, \end{cases}$$

$$\lambda_2 \left(y'' \right)^2 + 2b_1 x'' = 0. \quad (37)$$

Уравнение (37) определяет параболу.

Если же $b_1 = 0$, то уравнение (31) перепишем в виде

$$\lambda_2 \left(y' + \frac{b_2}{\lambda_2} \right)^2 + b - \frac{b_2^2}{\lambda_2} = 0.$$

Обозначив $b - \frac{b_2^2}{\lambda_2} = c$ и полагая

$$\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' + \dfrac{b_2}{\lambda_2}, \end{cases}$$

приходим к уравнению

$$\lambda_2 y''^2 + c = 0. \quad (38)$$

Случай 3. а) $c\lambda < 0$, - уравнение (38) определяет пару параллельных прямых: $y'' = \pm\sqrt{-\frac{c}{\lambda_2}}$.

Случай 3. б) $c = 0$, - уравнение (38) определяет пару совпадающих прямых: $y'' = 0$.

Случай 3. в) $c\lambda_2 = 0$, - нет точек (пара мнимых прямых).

Сведём полученные результаты в таблицу.

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">$\delta > 0$
кривая эллиптического типа</td><td>λ_1 и c разных знаков</td><td>Эллипс</td></tr>
<tr><td>λ_1 и c одного знака</td><td>Мнимый эллипс</td></tr>
<tr><td>$c = 0$</td><td>Точка</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">$\delta < 0$
кривая гиперболического типа</td><td>$c \neq 0$</td><td>Гипербола</td></tr>
<tr><td>$c = 0$</td><td>Пара пересекающихся прямых</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\delta = 0$
кривая параболического типа</td><td rowspan="3">$b_1 = 0$</td><td>λ_2 и c одного знака</td><td>Пара мнимых параллельных прямых</td></tr>
<tr><td>λ_2 и c разных знаков</td><td>Пара параллельных прямых</td></tr>
<tr><td>$c = 0$</td><td>Пара совпадающих прямых</td></tr>
<tr><td>$b_1 \neq 0$</td><td></td><td>Парабола</td></tr>
</table>

Пример 7. Определить вид и расположение кривой второго порядка

$$f(x, y) = 5x^2 + 4xy + 2y^2 + 2\sqrt{5}x + 8\sqrt{5}y + 1 = 0. \qquad (39)$$

Решение

Слагаемые второго порядка в (39) составляют квадратичную форму

$$\tilde{f}(x, y) = 5x^2 + 4xy + 2y^2,$$

которую преобразование неизвестных по формулам

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{\sqrt{5}}x' - \dfrac{1}{\sqrt{5}}y' \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}x' + \dfrac{2}{\sqrt{5}}y', \end{cases} \qquad (40)$$

приводит к сумме квадратов $f(x', y') = 6x'^2 + y'^2$ (см. пример 6).

Тогда уравнение кривой (39) преобразованием (40) приведётся к виду

$$6x'^2 + y'^2 + 2\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right) + 8\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) + 1 = 0.$$

Здесь $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 1$ и, следовательно, $\delta = 6 > 0$, – кривая эллиптического типа.

Как при рассмотрении случая 1, соберём слагаемые, содержащие неизвестное x' и дополним их до полного квадрата, аналогично поступим со слагаемыми, содержащими y':

$$6\left(x'^2+2x'+1\right)-6+\left(y'^2+14y'+49\right)-49+1=0, \text{ или } 6\left(x'+1\right)^2+\left(y'+7\right)^2=54.$$

Полагаем

$$\begin{cases} x''=x'+1 \\ y''=y'+7 \end{cases}$$

и получим

$$\frac{x''^2}{9}+\frac{y''^2}{54}=1.$$

Это уравнение эллипса с полуосями $a=3,\ b=3\sqrt{6}$ и центром в точке $O''(-1,-7)$.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется квадратичной формой заданной в n-мерном пространстве R^n?

2. Какое соответствие существует между билинейными и квадратичными формами?

3. Что называется каноническим видом квадратичной формы? Какая матрица является матрицей квадратичной формы в данном случае? Что называется нормальным видом квадратичной формы?

4. Сформулируйте теорему о возможности приведения квадратичной формы к каноническому виду.

5. Приведите способы приведения квадратичной формы к каноническому и нормальному виду.

6. Прокомментируйте возможность применения метода Лагранжа и способа приведения квадратичной формы к каноническому и нормальному виду с помощью ортогонального преобразования.

7. В чем заключается недостаток способа приведения квадратичной формы к каноническому и нормальному виду с помощью ортогонального преобразования?

8. Что означает закон инерции квадратичных форм? Приведите теорему, которая выражает этот закон.

9. Когда квадратичная форма называется знакоположительной и определенно положительной?

10. Как определяются знакоотрицательные и определенно отрицательные квадратичные формы?

11. Когда симметричная матрица называется положительной (неотрицательной)?

12. Когда симметричная матрица называется отрицательной (неположительной)?

13. Сформулируйте критерии Сильвестра.

14. Существует ли другой критерий для установления определенно положительности и определенно отрицательности квадратичной формы, кроме критериев Сильвестра? Если «да», то сформулируйте это утверждение.

15. В чем заключается применение теории квадратичных форм к кривым второго порядка?

§12. Элементы аналитической геометрии

Ключевые слова: *метод координат, прямоугольная декартовая система координат, радиус-вектор точки, абсцисса, ордината, аппликата, вектор нормали к прямой, общее уравнение прямой, угол между прямыми, направляющий вектор прямой, каноническое уравнение прямой, уравнение прямой, проходящей через две точки, уравнение пучка прямых, угловой коэффициент, уравнение прямой с угловым коэффициентом, расстояния от точки до прямой, деление отрезка в данном отношении, вектор нормали к плоскости, общее уравнение плоскости, взаимное расположение плоскости, канонические уравнения прямой в пространстве, уравнение прямой проходящей через две точки, деление отрезка в данном отношении.*

1. Введение

Рене Декарт[1] создавал аналитическую геометрию с целью, чтобы геометрические задачи можно было решать алгебраически.

В аналитической геометрии геометрические объекты (точки, линии, поверхности) и их расположение в пространстве или на плоскости **изучаются** аналитически, **методами алгебры**. Это удается сделать с помощью введенного Декартом метода координат. С методом координат мы знакомы из школьной геометрии. Читателю напомним определение прямоугольной декартовой системы в пространстве R^3.

Определение. Упорядоченная система трех взаимно перпендикулярных осей с общим началом отсчета (началом координат) и общей единицы длины **называется прямоугольной декартовой системой координат в пространстве** R^3**.**

Определение. В этой упорядоченной системе координатных осей $Oxyz$ ось Ox **называется осью абсцисс, ось** Oy **- осью ординат и ось** Oz **осью аппликат.**

С произвольной точкой M, пространства свяжем вектор $\vec{OM}$ называемый радиус-вектором точки M, и спроецируем его на каждую из координатных осей. Обозначим величины соответствующих проекций:

---
[1] Р. Декарт (1596-1650) – французский математик и философ.

$$np_x \vec{OM} = x \qquad np_y \vec{OM} = y \qquad np_z \vec{OM} = z \text{ (рис.1).}$$

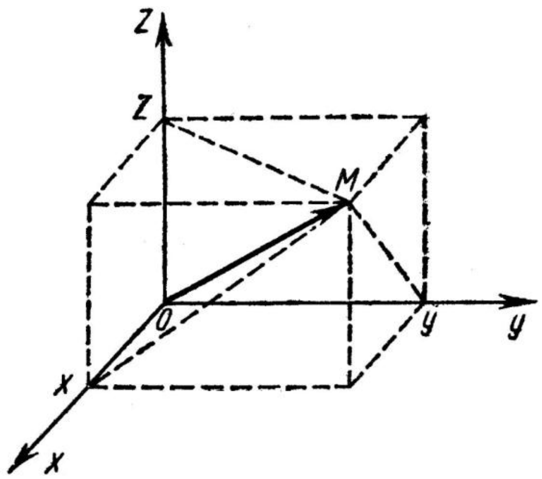


Рис.1

Определение. Числа x, y, z называются **координатами точки** M, соответственно, **абсциссой, ординатой и аппликатой,** и записываются в виде упорядоченной тройки чисел: $M(x, y, z)$.

Таким образом, между точками пространства (плоскости) и радиус векторами, проведенными в эти точки из начала координат, существует взаимно - однозначное соответствие. Понятие точечного пространства распространяется и на n- мерные векторы, где упорядоченный набор из n действительных чисел рассматривается как точка в n- мерном пространстве R^n. Разумеется, при $n > 3$ геометрического образа точка не имеет.

Итак, метод координат позволяет простейший геометрический образ - точку - представить в виде упорядоченной системы чисел, ее координат. Всякий геометрический объект рассматривается как множество точек, обладающих некоторыми, только им присущими свойствами. При переходе от одной точки геометрического объекта к другой координаты точки изменяются. Они являются величинами переменными, которые меняют свои числовые значения не произвольно, а в соответствии с определенной закономерностью, обусловленной особенностями рассматриваемого множества точек.

С помощью метода координат эта закономерность может быть выражена аналитически в виде уравнения или неравенства, связывающего переменные координаты каждой точки рассматриваемого геометрического объекта. Таким образом, устанавливается соответствие между геометрическими объектами и уравнениями или неравенствами.

В школьном курсе рассматривались некоторые уравнения прямой, параболы, графика функции $y = \frac{1}{x}$ и т.д. Сейчас, после введения декартовой прямоугольной системы координат в пространстве, мы рассмотрим эти вопросы с более общих позиций, используя **векторную алгебру**.

Определение. Уравнением, соответствующим заданному множеству точек (на плоскости или в пространстве), называется равенство, которому удовлетворяют координаты любой точки этого множества и не удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих этому множеству.

Если задано уравнение некоторого множества точек

$$F(x, y, z) = 0,$$

то можно установить, принадлежит ли любая точка пространства этому множеству точек. Для этого достаточно подставить в уравнение $F(x, y, z) = 0$ вместо переменных координат x, y, z координаты рассматриваемой точки: если они удовлетворяют этому уравнению, то точка принадлежит заданному множеству точек, в противном случае не принадлежит.

2. Прямая на плоскости

2.1. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку

Определение. Пусть l - произвольная прямая на плоскости. Всякий перпендикулярный ей ненулевой вектор называется **вектором нормали** к этой прямой.

Если известна какая-нибудь точка $M_0(x_0, y_0)$ прямой l и какой-нибудь вектор $\vec{N} = (A, B)$ нормали к ней, то этими двумя условиями прямая на плоскости вполне определена (через данную точку можно провести единственную прямую, перпендикулярную данному вектору).

Чтобы получить уравнение прямой, заданной этими условиями, возьмем на прямой $\boldsymbol{l}$ произвольную точку M с переменными координатами $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$. Эта точка принадлежит прямой только в том случае, когда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярен вектору $\vec{N}$ (рис. 2), а для того необходимо и достаточно, чтобы скалярное произведение этих векторов равнялось нулю, т.е.

$$\left(\vec{N}, \overrightarrow{M_0M}\right) = 0. \tag{1}$$

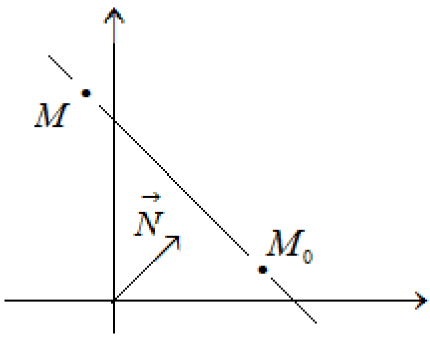


Рис.2

Вектор $\vec{N} = (A, B)$ задан по условию. Очевидно, что $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$.

Теперь выразим скалярное произведение (1) в координатной форме:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{2}$$

Так как точка $M(x, y)$ выбрана на прямой произвольно, то последнему уравнению удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на прямой l. Для точки K, не лежащей на заданной прямой, $\left(\vec{N}, \overrightarrow{M_0K}\right) \neq 0$ и равенство (2) нарушается. Следовательно, уравнение (2) определяет прямую, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$ и перпендикулярную вектору $\vec{N} = (A, B)$.

Пример 1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2,-3)$ и перпендикулярной вектору $\vec{N} = (5,2)$.

Решение

Используя формулу (2), имеем $5(x - 2) + 2(y + 3) = 0,$ откуда после преобразований получим $5x+2y-4=0$. Искомое уравнение оказалось выражено общим уравнением первой степени относительно переменных координат x, y произвольной точки прямой.

Упражнение

Составить уравнения прямых, проходящих через точку $A(7,-1)$ параллельно осям координат.

Ниже мы **убедимся, что всякое уравнение первой степени относительно x, y определяет прямую в R^2.**

2.2. Общее уравнение прямой

Теорема 1. На плоскости R^2 всякая прямая выражается уравнением первой степени

$$Ax+By+C=0. \qquad (3)$$

Доказательство. В п. 2.1 было установлено, что всякая прямая может быть задана уравнением вида (2):

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$$

Раскрыв скобки и обозначив $-Ax_0-By_0=C$, получим общее уравнение первой степени относительно x, y

$$Ax+By+C=0,$$

эквивалентное уравнению (2). Поэтому оно определяет ту же прямую, что и уравнение (2), и называется **общим уравнением прямой.** Коэффициенты при переменных в этом уравнении сохраняют тот же геометрический смысл, что и в равенстве (2), т.е. являются координатами вектора $\vec{N}=(A,B)$ нормали к прямой. Так как вектор нормали к прямой является ненулевым, то коэффициенты A и B не могут быть одновременно равны нулю. Итак, мы доказали, что всякая прямая на плоскости R^2 определяется уравнением первой степени относительно переменных координат x, y.

Теорема 2 (обратная). Всякое линейное уравнение с двумя переменными $Ax + By + C = 0$ определяет прямую на плоскости R^2, если хотя бы один из коэффициентов при переменных не равен нулю.

Доказательство. Пусть x_0, y_0 - какое-либо решение данного уравнения. Тогда $Ax_0 + By_0 + C = 0$, откуда $C = -(Ax_0 + By_0)$. Подставляя в данное уравнение вместо $\boldsymbol{C}$ его значение и группируя члены, получим

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Это уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеющей вектор нормали $\vec{N} = (A, B)$. Следовательно, и равносильное ему уравнение $Ax + By + C = 0$ определяет прямую перпендикулярную вектору $\vec{N} = (A, B)$.

Пример 2. Построить в прямоугольной декартовой системе координат прямую, заданную уравнением $x - 2y + 8 = 0$.

Решение

Для построения прямой достаточно знать какие-либо две ее точки, например, точки пересечения прямой с осями координат. Полагая в заданном уравнении $x = 0$, получим $y = 4$. Следовательно, заданная прямая пересекает ось Ox в точке $A(0,4)$. Аналогично, при $y = 0$ получим $x = -8$, т.е. точку $B(-8,0)$, в которой прямая пересекает ось Oy. Теперь строим прямую проходящую через точки $A(0,4)$ и $B(-8,0)$ (рис. 3). Вектором нормали служит вектор $\vec{N} = (1, -2)$.

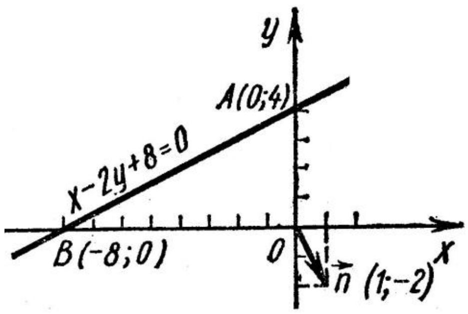


Рис. 3

Упражнение

Найти точки пересечения прямых с осями координат и по этим точкам построить прямые: $a)$ $x+5y-10=0;$ $b)$ $3x-2y-4=0;$ $c)$ $3x+y+3=0;$ $d)$ $3x-y-6=0$.

Частные случаи общего уравнения прямой. Рассмотрим особенности расположения прямой на плоскости в тех случаях, когда те или иные коэффициенты уравнения (3) равны нулю.

1. При $C=0$ уравнение $Ax+By=0,$ определяет прямую, проходящую через начало координат, так как координаты точки $O(0,0)$ удовлетворяют этому уравнению.

2. При $A=0$ уравнение $By+C=0$ (или $y=b$, где $b=-\dfrac{C}{B}$ определяет прямую, параллельную оси Ox, поскольку вектор нормали $\vec{N}=(0,B)$ этой прямой перпендикулярен оси Ox. Аналогично, при $B=0$ уравнение $Ax+C=0$ (или $x=a$, где $a=-\dfrac{C}{A}$) определяет прямую, параллельную оси Oy.

3. При $A=C=0$ уравнение $By=0$ (или $\boldsymbol{y}=0$) определяет ось Ox, так как эта прямая одновременно параллельна оси Ox ($A=0$) и проходит через начало координат ($C=0$). Аналогично, при $B=C=0$ уравнение $Ax=0$ (или $x=0$) определяет ось Oy.

Пример 3. Построить в декартовой прямоугольной системе координат на плоскости прямую l заданную уравнением $2x-3y=0$.

Решение

В данном уравнении свободный член равен нулю, поэтому оно определяет прямую, проходящую через начало координат. Следовательно, в точке $O(0,0)$ прямая l пересекает обе координатные оси. Для построения прямой нужно знать еще какую-либо ее точку. Для этого дадим одной из переменных в заданном уравнении произвольное значение, например, $\boldsymbol{y}=4$, и найдем соответствующее значение x: $A(x,4) \in l \Longleftrightarrow 2x - 3 \cdot 4 = 0 \Rightarrow$ $x = 6$. Теперь строим прямую, проходящую через начало координат и точку $A(6,4)$ (рис. 4).

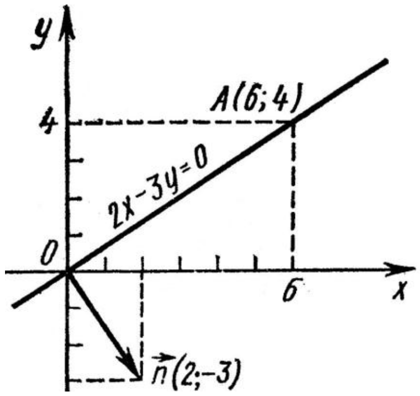


Рис. 4

Пример 4. Составить уравнение прямой l, проходящей через точку $A(-2,3)$ и параллельной оси Oy.

Решение. Уравнение прямой, параллельной оси Oy, имеет вид $x = a$. Любая точка этой прямой имеет одну и ту же абсциссу a, которая совпадает с абсциссой точки $A(-2,3) \in l$. Поэтому искомое уравнение примет вид $x = -2$, или $x + 2 = 0$.

Упражнение

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3,4)$:

a) параллельно оси Ox; b) параллельно оси Oy.

2.3. Угол между двумя прямыми на плоскости. Условия параллельности и перпендикулярности прямых

Если две прямые l_1 и l_2 заданы общими уравнениями $Ax_1 + B_1 y + C_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$, то известны векторы $\vec{N}_1 = (A_1, B_1)$ и $\vec{N}_2 = (A_2, B_2)$ их нормалей. Поэтому вычисление одного из двух смежных углов между прямыми l_1 и l_2 сводится к вычислению угла φ между векторами нормалей этих прямых (рис. 5).

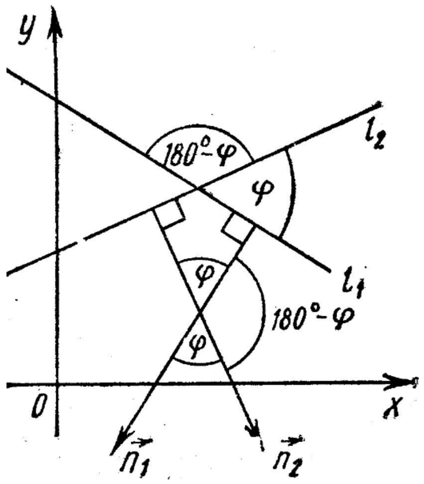


Рис.5

По формуле (3) получим

$$\cos\varphi = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\sqrt{\left|\vec{N}_1\right|} \cdot \sqrt{\left|\vec{N}_2\right|}} = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{4}$$

Если требуется вычислить **острый угол** между прямыми, то числитель правой части равенства (4) берется **по абсолютной величине** (так как косинусы смежных углов отличаются только знаками).

Условие параллельности прямых l_1 **и** l_2 эквивалентно условию коллинеарности (см. школьный курс геометрии) векторов $\vec{N}_1 = (A_1, B_1)$ и $\vec{N}_2 = (A_2, B_2)$:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}. \tag{5}$$

Замечание 1

В частности, прямые $Ax_1 + B_1y + C_1 = 0$ и $A_1x + B_1y + C_2 = 0$, у которых равны коэффициенты при соответствующих переменных, являются параллельными, так как в этом случае выполняется условие (5).

Условие перпендикулярности прямых эквивалентно условию перпендикулярности (ортогональности) векторов их нормалей $\vec{N}_1 = (A_1, B_1)$ и $\vec{N}_2 = (A_2, B_2)$:

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0. \tag{6}$$

Замечание 2

В частности, прямые $Ax_1 + B_1 y + C_1 = 0$ и $B_1 x - A_1 y + C_2 = 0$, у второго из которых поменялись местами коэффициенты при x и y, и противоположны знаки вторых членов, являются перпендикулярными, так как в этом случае выполняется условие (6).

Замечания 1 и 2 удобно использовать при решении задач.

Пример 5. Составить уравнение прямой l, проходящей через точку $A(2,-1)$ и перпендикулярной прямой $3x - 2y + 5 = 0$.

Решение

Используя замечание 2, запишем уравнение любой прямой, перпендикулярной данной:

$$2x + 3y + C = 0. \tag{*}$$

При разных значениях C это уравнение определяет множество прямых, перпендикулярных данной. Из этого множества нужно выбрать ту прямую, которая проходит через точку $A(2,-1)$. Так как $A(2,-1) \in l$, то $2 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) + C = 0$, откуда $C = -1$. Подставив это значение C в равенство (*), получим искомое уравнение $2x + 3y - 1 = 0$.

Упражнения

1. Дана прямая $x + 2y - 4 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-4,3)$: a) параллельно данной; b) перпендикулярно данной.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(-1,2)$ параллельно прямой, проведенной через две точки $A(5,-4)$ и $B(-3,2)$.

3. Составить уравнения перпендикуляров к прямой $x - 2y + 4 = 0$, восставленных в точках пересечения этой прямой с осями координат.

4. Вычислить острый угол между прямыми:

a) $4x + 3y - 12 = 0$ и $2x - 3y - 25 = 0$;

$b)$ $4x+3y-12=0$ и $3x-2y+6=0$;

$c)$ $x+2y-1=0$ и $2x-3y-1=0$.

2.4. Точка пересечения прямых в R^2

Пусть две прямые заданы уравнениями $Ax_1+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$. Если эти прямые пересекаются (а это выполняется в случае, если $A_1:A_2 \neq B_1:B_2$), то они имеют общую точку, координаты которой должны удовлетворять каждому из уравнений прямых. Следовательно, для нахождения точки пересечения двух прямых нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2=0. \end{cases} \tag{7}$$

При решении системы (7) возможны следующие случаи.

1. Система имеет одно решение (x_0, y_0) (если $A_1:A_2 \neq B_1:B_2$), В этом случае прямые пересекаются в одной точке с координатами (x_0, y_0).

2. Система является несовместной, т.е. не имеет решения (если $A_1:A_2 = B_1:B_2 \neq C_1:C_2$). В этом случае у прямых нет общих точек, они параллельны.

3. Система является неопределенной, т.е. имеет бесчисленное множество решений (если $A_1:A_2 = B_1:B_2 = C_1:C_2$). В этом случае прямые имеют бесчисленное множество общих точек, т.е. совпадают.

Пример 6. Составить уравнение прямой l, проходящей через точку пересечения прямых $8x_1-3y+12=0$ и $3x+2y-33=0$ параллельно: 1) прямой $2x-7y+5=0$; 2) оси Ox.

Решение

Для нахождения точки A пересечения двух прямых решим систему уравнений

$$\begin{cases} 8x-3y+12=0, \\ 3x+2y-33=0. \end{cases}$$

Получим $x=3, \quad y=12$, т.е. $A(3{,}12)$.

1. Используя замечание 1 предыдущего пункта, запишем уравнение любой прямой, параллельной данной: $2x-7y+C=0$. Чтобы из этого множества прямых выбрать ту, которая проходит через точку $A(3{,}12)$, подставим в последнее уравнение ее координаты: $A(3{,}12)\in l \Longleftrightarrow 2\cdot 3-7\cdot 12+C=0$. Отсюда найдем $C=78$. Следовательно, искомое уравнение имеет вид $2x-7y+78=0$.

2. Уравнение прямой, параллельной оси Ox, имеет вид $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}$. Эта прямая проходит через точку $A(3{,}12)$, поэтому $A(3{,}12)\in l \Longleftrightarrow 12=b$. Следовательно, $y=12$, $y-12=0$.

Упражнения

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $5x+2y-7=0$ и $3x+7y-10=0$ перпендикулярно прямой $5x-y-4=0$.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку пересечения прямых $x-y-2=0$ и $3x-y-4=0$.

2.5. Каноническое уравнение прямой. Уравнение прямой, проходящей через две точки

Каноническое уравнение прямой. Положение прямой вполне определено, если заданы лежащая на ней точка и направление. Направление прямой может быть задано любым ненулевым вектором, коллинеарным данной прямой и потому **называемым направляющим вектором прямой.**

Выведем уравнение прямой $\boldsymbol{l}$, проходящей через данную точку $M_1(x_1, y_1)$ и имеющей направляющий вектор $\vec{S}=(m,n)$ (рис. 6).

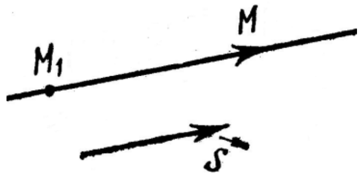


Рис. 6

Произвольная точка $M(x,y)$ лежит на прямой l только в том случае, если векторы $\vec{M_1M}=(x-x_1, y-y_1)$ и $\vec{S}=(m,n)$ коллинеарны, т.е. для них выполняется условие:

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}. \qquad (8)$$

Определение. Уравнение (8) **называется каноническим уравнением прямой,** проходящей через точку $M_1(x_1,y_1)$ в направлении вектора $\vec{S}=(m,n)$.

Замечание. Так как вектор $\vec{S}$ - ненулевой, то числа m и n не могут одновременно равняться нулю. Но одно из них может оказаться равным нулю. В аналитической геометрии допускается, например, такая запись:

$$\frac{x-x_1}{0}=\frac{y-y_1}{n} \qquad \left(\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{0}\right),$$

которая означает, что первая (вторая) координата вектора $\vec{S}$ равна нулю. Поэтому и вектор $\vec{S}$ и прямая, заданная указанным способом, перпендикулярны оси Ox (Oy).

Уравнение прямой, проходящей через две точки. Прямая может быть задана двумя лежащими на ней точками $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$. В этом случае направляющим вектором прямой может служить вектор $\vec{M_1M_2}$, т.е. $\vec{S}=\vec{M_1M_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$. Тогда уравнение (8) примет вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (9)$$

Уравнение (9) называется **уравнением прямой, проходящей через две точки** $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

Пример 7. Составить уравнение прямой, которая проходит через начало координат и перпендикулярна прямой, проходящей через точки $A(4,-3)$ и $B(-1,0)$.

Решение

Используя формулу (9), запишем уравнение прямой, проходящей через две точки $A(4,-3)$ и $B(-1,0)$:

$$\frac{x-4}{-1-4} = \frac{y+3}{0+3}, \text{ или } 3x+5y+3=0.$$

Согласно замечанию 2 п.3, любая прямая, перпендикулярная найденной, определяется уравнением $5x-3y+C=0$. Из этого множества прямых выделим ту, которая проходит через начало координат, т.е. $C=0$. Получим искомое уравнение $5x-3y=0$.

Упражнение

Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и параллельной прямой $5x-y+3=0$.

2.6. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку

Пусть на плоскости xOy задана прямая l, непараллельная оси Oy.

Определение. Углом α **между прямой и осью** Ox (или **углом наклона прямой к оси** Ox) называется тот угол между прямой и положительным направлением оси, который расположен в верхней полуплоскости.

Если прямая параллельна оси или совпадает с нею, то угол α считается равным нулю.

Положение прямой на плоскости xOy вполне определено заданием точки $M_1(x_1, y_1)$, лежащей на этой прямой, и углом α наклона прямой к оси Ox. Чтобы вывести уравнение прямой, заданной этими двумя условиями, воспользуемся уравнением (8). В качестве направляющего вектора прямой $\boldsymbol{l}$

можно взять любой единичный вектор $\vec{S}_0$ $\left(\left|\vec{S}_0\right| = 1\right)$ параллельный данной прямой и поэтому составляющий с осью ***Ox*** также угол α ($\alpha \neq 90^\circ$). Найдем координаты этого вектора (рис.7):

$$m = np_x\,\vec{S}_0 = \left|\vec{S}_0\right| \cos\alpha = \cos\alpha, \qquad n = np_y\,\vec{S}_0 = \left|\vec{S}_0\right| \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha .$$

Теперь, зная точку $M_1(x_1, y_1)$, лежащую на прямой, и ее направляющий вектор $\vec{S}_0 = (\cos\alpha, \ \sin\alpha)$, запишем уравнение этой прямой в виде (8):

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\sin\alpha}.$$

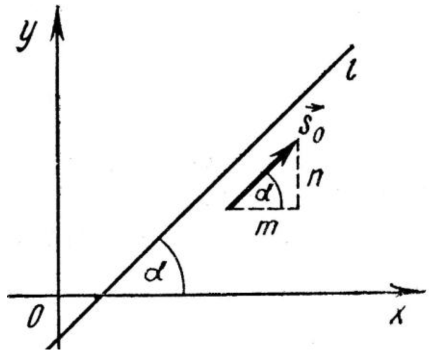


Рис. 7

Разрешая его относительно $y - y_1$ получим $y - y_1 = (tg\alpha)(x - x_1)$.

Число $tg\alpha$ называется **угловым коэффициентом прямой** и обычно обозначается $k = tg\alpha$; тогда последнее уравнение примет вид

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{10}$$

При фиксированном значении k уравнение (10) определяет прямую, проходящую через данную точку $M_1(x_1, y_1)$ в направлении, заданном угловым коэффициентом k.

Если же k не задано и принимает различные значения, то уравнение (10) определяет **пучок прямых, проходящих через данную точку** $M_1(x_1, y_1)$**.**

Замечание. Уравнение прямой, параллельной оси Oy, не может быть записано в виде (10), так как при $\alpha = 90^\circ$ угловой коэффициент прямой не определен. В этом случае уравнение прямой имеет вид $x = x_1$ (так как все точки этой прямой имеют одну и ту же абсциссу $x = x_1$).

2.7. Уравнение прямой с угловым коэффициентом и начальной ординатой

Пусть прямая l не параллельная оси Oy, имеет угловой коэффициент k и пересекает ось Oy в точке $M_1(0, b_1)$. Записав уравнение этой прямой в виде (10), получим $y - b = k(x - 0)$, или

$$y = kx + b. \qquad (11)$$

Определение. Уравнение (11) **называют уравнением прямой с угловым коэффициентом, а число** b **- начальной ординатой**.

Замечание. Если прямая, не параллельная оси Oy, задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$ $(B \neq 0)$, то, разрешая его относительно y, получим уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y = \left(-\frac{A}{B}\right)x - \frac{C}{B}, \quad \text{где} \quad k = tg\alpha = -\frac{A}{B}, \;\; b = -\frac{C}{B}.$$

Рассмотрим частные случаи уравнения (11).

1. При $b = 0$ уравнение $y = kx$ определяет прямую, проходящую через начало координат, так как координаты точки $O(0,0)$ удовлетворяют этому уравнению. В частности, при $b = 0$ и $k = 1$ уравнение $y = x$ определяет биссектрису I и III координатных углов ($k = tg\alpha = 1, \;\; \alpha = 45^\circ$).

2. При $k = 0$ ($k = tg\alpha = 0, \;\; \alpha = 0^\circ$) уравнение (11) примет вид $y = b$. Это уравнение прямой, параллельной оси Ox (все точки этой прямой имеют одну и ту же ординату $y = b$).

3. При $k = b = 0$ получим $y = 0$ уравнение оси Ox.

Рассмотрим условия параллельности и перпендикулярности прямых, заданных уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$. Перепишем эти уравнения в общем виде: $k_1x - y + b_1 = 0$ и $k_2x - y + b_2 = 0$. Коэффициенты при переменных в этих общих уравнениях прямых таковы: $A_1 = k_1, \;\; B_1 = -1, \; A_2 = k_2, \;\; B_2 = -1.$

Теперь условие (5) параллельности прямых примет вид

$$\frac{k_1}{k_2}=1, \text{ или } k_2=k_1. \tag{12}$$

Условие (6) перпендикулярности прямых в этом случае запишется так:

$$k_1k_2+1=0, \text{ или } k_2=-\frac{1}{k_1}. \tag{13}$$

Итак, **для параллельности прямых необходимо и достаточно, чтобы их угловые коэффициенты были равны, а для перпендикулярности двух прямых необходимо и достаточно, чтобы их угловые коэффициенты были обратны по величине и противоположны по знаку.**

Пример 8. Составить уравнение прямой l, проходящей через точку $A(-2,2)$ и перпендикулярной прямой $y=3x+5$.

Решение

I способ. Согласно замечанию 2 п.3, множество прямых, перпендикулярных прямой $y=3x+5$, или $3x-y+5=0$, определяется уравнением $x+3y+C=0$. Выделим из этого множества ту прямую, которая проходит через данную точку $A(-2,2)$. Имеем $A(-2,2)\in l \Longleftrightarrow -2+3\cdot 2+C=0 \Rightarrow C=-4$, поэтому искомое уравнение прямой имеет вид $x+3y-4=0$

II способ. Запишем уравнение (10) пучка прямых, проходящих через точку $A(-2,2)$: $y-2=k(x+2)$. Чтобы из этого пучка выбрать прямую, перпендикулярную данной, нужно знать ее угловой коэффициент. Из уравнения заданной прямой имеем $k_1=3$. Из условия (13) находим угловой коэффициент прямой, перпендикулярной данной: $k_2=\frac{1}{k_1}=-\frac{1}{3}$. Подставив найденное значение $\boldsymbol{k}_2$ в уравнение пучка прямых, получим искомое уравнение

$$y-2=\left(-\frac{1}{3}\right)(x+2), \text{ или } \ x+3y-4=0.$$

Пример 9. Составить уравнение прямой l, проходящей через точку $A(3,-5)$ параллельно примой, проведенной через две данные точки $B(0,-2)$ и $C(-1,3)$.

Решение

Используя формулу (9), запишем уравнение прямой, проходящей через две точки $B(0,-2)$ и $C(-1,3)$:

$$\frac{x-0}{-1-0}=\frac{y+2}{3+2}, \text{ ила } \quad 5x+y+2=0.$$

Далее для решения можно снова использовать два способа.

I способ. Согласно замечанию 1 п.3, множество прямых, параллельных данной, определяется уравнением $5x+y+C=0$. Из этого множества выделим прямую, проходящую через точку $A(3,-5)$; имеем $A(3,5)\in l \Longleftrightarrow 5\cdot 3-5+C=0 \Rightarrow C=-10$. Искомое уравнение примет вид $5x+y-10=0$.

II способ. На основании формулы (10) уравнение пучка прямых, проходящих через точку $A(3,-5)$, имеет вид $y+5=k(x-3)$. Чтобы из этого пучка прямых выбрать ту, которая параллельна данной, нужно знать ее угловой коэффициент. Для этого запишем уравнение данной прямой в виде $y=-5x-2$ и, согласно условию (12), получим $k_2=k_1=-5$. Подставив найденное значение $k=-5$ в уравнение пучка прямых, получим

$$y+5=-5(x-3), \text{ или } \ 5x+y-10=0.$$

Пример 10. Найти острый угол между прямыми $y=2x+3$ и $y=-3x+5$.

Решение

Чтобы использовать формулу (4), перепишем уравнения прямых в общем виде: $2x+-y+3=0$ и $3x+y-5=0$. Отсюда $A_1=2$, $B_1=-1$,

$A_2 = 3, \quad B_2 = 1.$ Поэтому

$$\cos\varphi = \frac{|A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = \frac{|2 \cdot 3 - 1 \cdot 1|}{\sqrt{4+1} \cdot \sqrt{9+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \varphi = 45^\circ.$$

2.8. Расстояние от точки до прямой

Пусть требуется найти расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой l, заданной общим уравнением $Ax + By + C = 0$.

Под расстоянием от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой l понимается длина перпендикуляра $d = |M_0 M_1|$, опущенной из точки M_0 на прямой $\boldsymbol{l}$ (рис. 8).

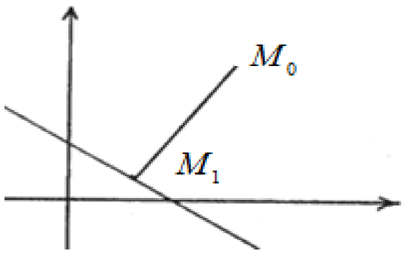


Рис. 8

Для определения расстояния d необходимо:

а) составить уравнение прямой $M_0 M_1$ перпендикулярной данной и проходящей через точку;

б) найти точку $M_1(x_1, y_1)$ пересечения прямых;

в) по формуле $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ определить расстояние между двумя точками, т.е. найти $d = |M_0 M_1|$. В результате преобразований получим

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{14}$$

Доказательство формулы (14) (предоставляется читателю самостоятельно) проводится по выше указанной схеме.

Примечание. Полезно заметить, что числитель формулы (14) представляет собой левую часть общего уравнения прямой, в которую вместо переменных координат $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ подставлены координаты данной точки $M_0(x_0, y_0)$.

Пример 11. Найти расстояние между двумя параллельными прямыми $12x-5y-36=0$ и $12x-5y+3=0$.

Решение

Расстояние между параллельными прямыми равно длине перпендикуляра, опущенного из произвольной точки M_0 одной прямой на другую. Для этого найдем координаты произвольной точки прямой $12x-5y-36=0$; пусть, например, $y=0$, тогда $x=3$, т.е. $M_0(3{,}0)$. Теперь по формуле (14) вычислим расстояние от точки $M_0(3{,}0)$ до прямой $12x-5y+3=0$:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|12\cdot 3-5\cdot 0+3|}{\sqrt{12^2+5^2}}=3.$$

2.9. Деление отрезка в данном отношении

Пусть даны точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$. Требуется найти координаты точки $M(x,y)$ делящей отрезок прямой, заключенной между M_1 и M_2, в отношении $\lambda=|M_1M|:|MM_2|$.

Рассмотрим векторы $\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1,y-y_1)$ и $\overrightarrow{MM_2}=(x_2-x,y_2-y)$. Они коллинеарны и одинаково направлены (рис. 9) , т.е. могут отличаться только длиной. По условию, $|M_1M|:|MM_2|=\lambda$, по этому $|M_1M|=\lambda|MM_2|$, или в координатной форме $(x-x_1,y-y_1)=\lambda(x_2-x,y_2-y)$. Из равенства этих двух векторов следует равенство их координат:

$$x-x_1=\lambda(x_2-x); \qquad y-y_1=\lambda(y_2-y).$$

Отсюда

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}; \qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \tag{15}$$

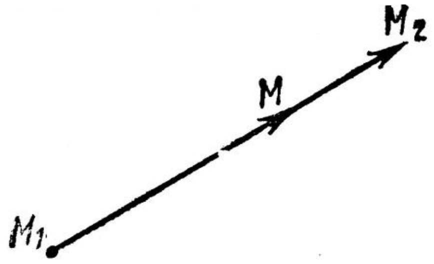


Рис. 9

В частности, если точка M делит отрезок M_1M_2 пополам, то $\lambda = 1$, то формулы (15) примут вид

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Отметим, что последние формулы знакомы читателю из школьной геометрии.

Пример 12. Найти расстояние от точки C делящей отрезок прямой точками $A(-2,1)$ и $B(3,2)$ в отношении $\lambda = 3:2$, до прямой $2x - 5y + 1 = 0$.

Решение

Координаты точки C вычислим по формулам (15):

$$x = \frac{-2 + \frac{3}{2}\cdot 3}{1 + \frac{3}{2}} = 1, \qquad y = \frac{1 + \frac{3}{2}\cdot 2}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{8}{5}.$$

Теперь найдем расстояние от точки $C\left(1, \ \frac{8}{5}\right)$ до прямой $2x - 5y + 1 = 0$:

$$d = \frac{\left|2\cdot 1 - 5\cdot \frac{8}{5} + 1\right|}{\sqrt{4 + 25}} = \frac{5}{\sqrt{29}}.$$

Упражнение

Найти уравнение перпендикуляра, восставленного к прямой в точке C, делящей отрезок этой прямой между точками $A(2,-3)$ и $B(0,5)$ в отношении $\lambda = 1:3$.

3. Плоскость и прямая в пространстве

3.1. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку

Определение. Пусть P - произвольная плоскость в пространстве. Всякий перпендикулярный ей ненулевой вектор называется **вектором нормали** к этой плоскости.

Если известна какая-нибудь точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ плоскости P и какой-нибудь вектор $\vec{N} = (A, B, C)$ нормали к ней, то этими двумя условиями плоскость в пространстве вполне определена (через данную точку можно провести единственную плоскость, перпендикулярную данному вектору).

Чтобы получить уравнение плоскости, заданной этими условиями, возьмем на плоскости P произвольную точку M с переменными координатами x, y, z. Эта точка принадлежит плоскости только в том случае, когда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярен вектору $\vec{N}$ (рис. 1), а для того необходимо и достаточно, чтобы скалярное произведение этих векторов равнялось нулю, т.е.

$$\left(\vec{N}, \overrightarrow{M_0M}\right) = 0. \quad (1)$$

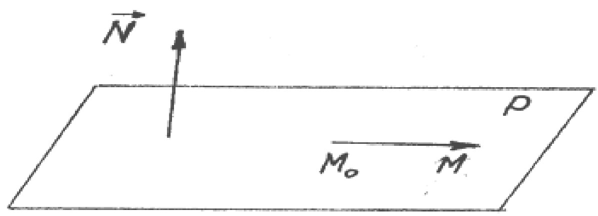


Рис. 1

Вектор $\vec{N} = (A, B, C)$ задан по условию. Очевидно, что

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0).$$

Теперь выразим скалярное произведение (1) в координатной форме:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (2)$$

Так как точка $M(x, y, z)$ выбрана на плоскости произвольно, то последнему уравнению удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на плоскости P. Для точки K, не лежащей на заданной плоскости, $\left(\vec{N}, \overrightarrow{M_0K}\right) \neq 0$ и равенство (2) нарушается. Следовательно, уравнение (2) определяет плоскость, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярную вектору $\vec{N} = (A, B, C)$.

Пример 1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2, -3, -1)$ и перпендикулярной вектору $\vec{N} = (5, 2, -4)$.

Решение

Используя формулу (2), имеем

$$5(x-2)+2(y+3)-4(z+1)=0,$$

откуда после преобразований получим

$$5x+2y-4z-8=0$$

Искомое уравнение оказалось выражено общим уравнением первой степени относительно переменных координат x, y, z произвольной точки плоскости.

Ниже мы **убедимся, что всякое уравнение первой степени относительно x, y, z определяет плоскость в R^3.**

Упражнение

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и имеющей вектор нормали $\vec{N}=(2;-1;3)$.

2. Даны две точки $A(-3;0;1)$ и $B(2;2;-3)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A и перпендикулярной вектору $\vec{AB}$.

3.2. Общее уравнение плоскости

Теорема 1. В пространстве R^3 всякая плоскость выражается уравнением первой степени

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{3}$$

Доказательство. В п.1 было установлено, что всякая плоскость может быть задана уравнением вида (2):

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Раскрыв скобки и обозначив $-Ax_0-By_0-Cz_0=D$, получим общее уравнение первой степени относительно x, y, z

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

эквивалентное уравнению (2). Поэтому оно определяет ту же плоскость, что и уравнение (2), и называется **общим уравнением плоскости.** Коэффициенты при переменных в этом уравнении сохраняют тот же геометрический смысл, что и в равенстве (2), т.е. являются координатами вектора $\vec{N} = (A, B, C)$ нормали к плоскости. Так как вектор нормали к плоскости является ненулевым, то коэффициенты A, B и C не могут быть одновременно равны нулю. Итак, мы доказали, что всякая прямая на плоскости R^3 определяется уравнением первой степени относительно переменных координат x, y, z.

Теорема 2 (обратная). Всякое линейное уравнение с тремя переменными $Ax + By + Cz + D = 0$, определяет плоскость в пространстве R^3, если хотя бы один из коэффициентов при переменных не равен нулю.

Доказательство. Пусть x_0, y_0, z_0 - какое-либо решение данного уравнения. Тогда $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, откуда $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$. Подставляя в данное уравнение вместо D его значение, и группируя члены, получим

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Это уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеющей вектор нормали $\vec{N} = (A, B, C)$. Следовательно, и равносильное ему уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$, определяет плоскость (перпендикулярную вектору $\vec{N} = (A, B, C)$).

Пример 2. Построить в прямоугольной декартовой системе координат плоскость, заданную уравнением $3x - 2y + z - 6 = 0$.

Решение

Для построения плоскости необходимо и достаточно знать какие-либо три ее точки (не лежащие на одной прямой), например, точки пересечения плоскости с осями координат. Полагая в заданном уравнении $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} = 0$, получим $\boldsymbol{z} = 6$. Следовательно, заданная плоскость пересекает ось $\boldsymbol{Oz}$ в точке $\boldsymbol{A}(0,0,6)$. Аналогично, при $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z} = 0$ получим $\boldsymbol{y} = -3$, т.е. точку $\boldsymbol{B}(0,-3,0)$, а при $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z} = 0$ получим $\boldsymbol{x} = 2$, т.е. точку $\boldsymbol{C}(2,0,0)$. Теперь построим плоскость, проходящую через точки $\boldsymbol{A}(0,0,6)$, $\boldsymbol{B}(0,-3,0)$ и $\boldsymbol{C}(2,0,0)$ (рис. 2).

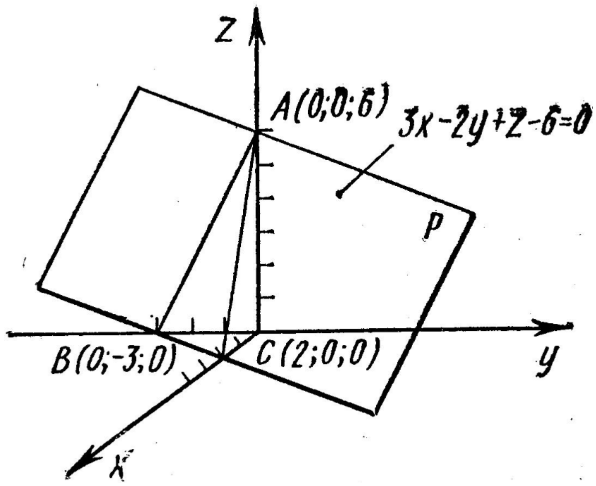


Рис. 2

Частные случаи общего уравнения плоскости. Рассмотрим особенности расположения плоскости в тех случаях, когда те или иные коэффициенты уравнения (3) равны нулю.

1. При $D=0$ уравнение $Ax+By+Cz=0$ определяет плоскость, проходящую через начало координат, так как координаты точки $\boldsymbol{O}(0,0,0)$ удовлетворяют этому уравнению.

2. При $A=0$ уравнение $By+Cz+D=0$ определяет плоскость, параллельную оси Ox, поскольку вектор нормали $\vec{N}=(0,B,C)$ этой плоскости перпендикулярен оси Ox. Аналогично, при $B=0$ уравнение $Ax+Cz+D=0$ определяет плоскость, параллельную оси Oy.

3. При $A=D=0$ уравнение $By+Cz=0$ определяет плоскость, проходящую через ось Ox, поскольку она параллельна оси Ox ($A=0$) и проходит через начало координат ($D=0$). Аналогично, плоскость $Ax+Cz=0$ проходит через ось Oy, а плоскость $Ax+By=0$ - через ось Oz.

4. При $A=B=0$ уравнение $Cz+D=0$ определяет плоскость, параллельную координатной плоскости xOy, поскольку она параллельна осям Ox ($A=0$) и Oy ($B=0$). Аналогично, плоскость $Ax+D=0$ параллельна плоскости yOz, а плоскость $By+D=0$ - плоскости xOz.

5. При $A = B = D = 0$ уравнение $Cz = 0$ (или $z = 0$) определяет координатную плоскость xOy, так как она параллельна плоскости xOy ($A = B = 0$) и проходит через начало координат ($D = 0$). Аналогично, уравнение $\boldsymbol{y} = 0$ в пространстве определяет координатную плоскость xOz, а уравнение $\boldsymbol{x} = 0$ - координатную плоскость yOz.

Пример 3. Составить уравнение плоскости P, проходящей через ось Oy и точку $M_0(2,-4,3)$.

Решение

Уравнение плоскости, проходящей через ось Oy, имеет вид $Ax + Cz = 0$. Для определения коэффициентов A и C воспользуемся тем, что точка $M_0(2,-4,3)$ принадлежит плоскости P. Поэтому ее координаты удовлетворяют написанному выше уравнению плоскости: $M_0(2,-4,3) \in P \Longleftrightarrow 2A + 3C = 0$, откуда $A = -1{,}5C$. Подставив найденное значение $\boldsymbol{A}$ в уравнение $\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Cz} = 0$, получим

$$-1{,}5Cx + Cz = 0 \text{ или } 3x - 2z = 0.$$

Это и есть искомое уравнение.

3.3. Взаимное расположение плоскостей

Пусть две плоскости заданы в прямоугольной системе координат общими уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Плоскости параллельны в том случае, если коллинеарны векторы $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ нормалей к ним, т.е. выполняются условия:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{4}$$

Следовательно, **две плоскости, заданные общими уравнениями, параллельны, если коэффициенты при одноименных переменных пропорциональны.**

Если кроме коэффициентов при переменных пропорциональны и свободные члены, т.е. выполняются равенства

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}. \tag{5}$$

Чтобы две плоскости пересеклись, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при переменных x, y, z не были пропорциональны

Плоскости перпендикулярны в том случае, если перпендикулярны (ортогональны) векторы их нормалей $\vec{N}_1=(A_1,B_1,C_1)$ и $\vec{N}_2=(A_2,B_2,C_2)$:

$$A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2=0. \tag{6}$$

Пример 4. Установить, перпендикулярны ли плоскости, заданные уравнениями $2x-3y+z-2=0$ и $4x+3y+z+5=0$.

Решение. Плоскости перпендикулярны в том случае, если векторы их нормалей $\vec{N}_1=(2,-3,1)$ и $\vec{N}_2=(4,3,1)$ перпендикулярны, т.е. удовлетворяют условию (6). Так как $A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2=2\cdot 2-3\cdot 3+1\cdot 1=0$, то указанное условие выполнено и значит, данные плоскости перпендикулярны.

Упражнения

1. Установить, какие из следующих пар уравнений определяют параллельные плоскости:

$a)$ $2x+3y-4z+12=0,\quad 4x+6y-8z+1=0$;

$b)$ $x-2y+3z-5=0,\quad x-2y-3z+9=0$;

$c)$ $2x-y-3z+4=0,\quad 6x-2y-9z+5=0$.

2. Установить, какие из следующих пар уравнений определяют перпендикулярные плоскости:

$a)$ $5x+y-3z-1=0,\quad 2x-5y-3z+6=0$;

$b)$ $x-y-z-3=0,\quad 2x+3y-z+5=0$;

$c)$ $7x-2y-z=0,\quad x-7y+21z+3=0$.

3.4. Уравнения прямой в пространстве R^3

3.4.1. Канонические уравнения прямой

Положение прямой вполне определено, если заданы лежащая на ней точка и направление. Направление прямой может быть задано любым ненулевым вектором, коллинеарным данной прямой и потому **называемым направляющим вектором прямой.**

Выведем уравнение прямой $\boldsymbol{l}$, проходящей через данную точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и имеющей направляющий вектор $\vec{S} = (m, n, p)$ (рис. 3).

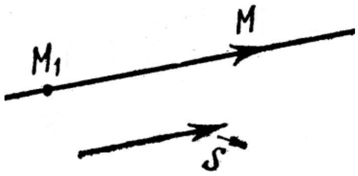


Рис. 3

Произвольная точка $M(x, y, z)$ лежит на прямой l только в том случае, если векторы $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ и $\vec{S} = (m, n, p)$ коллинеарны, т.е. для них выполняется условие:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p} \quad . \tag{7}$$

Определение. Уравнения (7) (с равенствами (7) фактически заданы два независимых уравнения) определяют прямую**,** проходящую через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ в направлении вектора $\vec{S} = (m, n)$ и называются **каноническими уравнениями прямой**.

Замечание. Так как вектор $\vec{S}$ - ненулевой, то все три числа m, n и p не могут одновременно равняться нулю. Но одно или два из них может оказаться равным нулю. В аналитической геометрии допускается, например, такая запись:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{0} = \frac{z - z_1}{0},$$

которая означает, что вторая и третья координаты вектора $\vec{S}$ равны нулю.

Поэтому и вектор $\vec{S}=(m,0,0)$ и прямая, заданная указанным способом, перпендикулярны осям Oy и Oz, т.е плоскости yOz.

Пример 5. Составить уравнения прямой, перпендикулярной плоскости $2x-3y+4z-8=0$ и проходящей через точку пересечения этой плоскости с осью Oz.

Решение

Найдем точку пересечения данной плоскости с осью Oz. Так как любая точка, лежащая на оси Oz, имеет координаты $(0,0,z)$, то, полагая в заданном уравнении плоскости $x=y=0$, получим $4z-8=0$ или $z=2$. Следовательно, точка пересечения данной плоскости с осью Oz имеет координаты $(0,0,2)$. Поскольку искомая прямая перпендикулярна плоскости, она параллельна вектору ее нормали $\vec{N}_1=(2,-3,4)$. Поэтому направляющим вектором прямой может служить вектор нормали $\vec{S}=\vec{N}_1=(2,-3,4)$ заданной плоскости.

Теперь запишем искомое уравнение прямой, проходящей через точку $\boldsymbol{A}(0,0,2)$ в направлении вектора $\vec{S}=(2,-3,4)$:

$$\frac{x-0}{2}=\frac{y-0}{-3}=\frac{z-2}{4} \quad \text{или} \quad \frac{x}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-2}{4}.$$

Упражнение

Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $A(2;-3;0)$ параллельно:

$a)$ вектору $\vec{A}=(1;-2;3)$; $b)$ прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{3}$;

$c)$ оси Ox; $d)$ оси Oy; $e)$ оси Oz.

3.4.2. Уравнения прямой, проходящей через две точки

Прямая может быть задана двумя лежащими на ней точками $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$. В этом случае направляющим вектором прямой может служить вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$, т.е. $\vec{S} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Тогда уравнение (7) примет вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (8)$$

Определение. Уравнения (8) называются **уравнениями прямой, проходящей через две точки** $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Пример 6. Составить уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(2;-3;5)$ и $M_1(-4;3;2)$.

Решение

Запишем искомые уравнения прямой в виде (8):

$$\frac{x-2}{-4-2} = \frac{y-3}{3-3} = \frac{z+5}{2+5}, \quad \text{или} \quad \frac{x-2}{-6} = \frac{y-3}{0} = \frac{z+5}{7}.$$

Так как $\vec{S} = (-6;0;7)$, то искомая прямая перпендикулярна оси Oy.

Упражнения

1. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через две данные точки:

$a)\quad A(-2;0;1), \quad B(3;4;-5); \qquad b)\quad C(6;-1;2), \quad D(0;2;3).$

2. Составить уравнения прямой, проходящей через точки $A(2;-3;7)$ и $B(-5;2;0)$, и найти координаты точек пересечения этой прямой с координатными плоскостями.

Пример 7. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(2;-3;5)$ параллельно прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{4}$.

Решение

Направляющим вектором искомой прямой может служить направляющий вектор $\vec{S} = (2;-1;4)$ данной прямой, поскольку по условию эти прямые параллельны. Зная точку $M_1(2;-3;5)$ и направляющий вектор $\vec{S} = (2;-1;4)$ искомой прямой, запишем ее уравнение в виде (7):

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-5}{4}.$$

3.5. Прямая как линия пересечения плоскостей

Прямая в пространстве может быть определена как линия пересечения двух параллельных плоскостей $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, т.е. как множество точек, удовлетворяющих системе двух линейных уравнений

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \tag{9}$$

Справедливо и обратное утверждение: система двух независимых линейных уравнений (9) определяют прямую как линию пересечения плоскостей (если они не параллельны).

Определение. Уравнения системы (9) **называются общими уравнениями прямой в пространстве** R^3**.**

Пример 8. Составить канонические уравнения прямой, заданной общими уравнениями

$$\begin{cases} 2x-5y+z+4=0, \\ x+2y-z+2=0. \end{cases}$$

Решение

Чтобы написать канонические уравнения прямой или, что то же самое, уравнения прямой, проходящей через две данные точки, нужно найти координаты каких – либо двух точек прямой. Ими могут служить точки пересечения прямой, с какими – ни будь двумя координатными плоскостями, например, yOz и xOz.

Точка пересечения прямой с плоскостью yOz имеет абсциссу $x=0$. Поэтому, полагая в данной системе уравнений $\boldsymbol{x}=0$, получим систему с двумя переменными:

$$\begin{cases} -5y + z + 4 = 0, \\ \ \ 2y - z + 2 = 0. \end{cases}$$

Ее решение $y = 2, \quad z = 6$ вместе с $x = 0$ определяет точку $A(0;2;6)$ искомой прямой. Полагая затем в заданной системе уравнений $\boldsymbol{y} = 0$, получим систему

$$\begin{cases} 2x + z + 4 = 0, \\ x - z + 2 = 0, \end{cases}$$

решение которой $\boldsymbol{x} = -2, \quad \boldsymbol{z} = 0$ вместе с $\boldsymbol{y} = 0$, определяет точку $\boldsymbol{B}(-2;0;0)$ пересечения прямой с плоскостью xOz.

Теперь на основании формулы (8) запишем уравнения прямой, проходящей через точки $A(0;2;6)$ и $B(-2;0;0)$:

$$\frac{x-0}{-2-0} = \frac{y-2}{0-2} = \frac{z-6}{0-6} \quad \text{или} \quad \frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{3}, \text{ где } \vec{S} = (1;1;3).$$

Упражнение

Составить канонические уравнения прямой, заданной общими уравнениями:

$a)$ $\begin{cases} x + 2y - z - 6 = 0, \\ 2x - y + z + 1 = 0. \end{cases}$ $\qquad$ $b)$ $\begin{cases} x + y - 3z + 1 = 0, \\ x - y + z + 3 = 0. \end{cases}$

Пример 9. Прямая задана каноническими уравнениями

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-3}{-1}.$$

Составить общие уравнения этой прямой.

Решение

Канонические уравнения прямой можно записать в виде систем двух независимых уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{5}, \\ \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{z-3}{-1}. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 5x - 3y - 13 = 0, \\ x + 3z - 11 = 0. \end{cases}$$

Получили общие уравнения прямой, которая теперь задана пересечением двух других плоскостей, одна из которых $5x-3y-13=0$ параллельна оси $Oz \quad (C=0)$, а другая $x+3z-11=0$ - оси $Oy \quad (B=0)$.

Данную прямую можно представить в виде линии пересечения двух других плоскостей, записав ее канонические уравнения в виде другой пары независимых уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{5}, \\ \dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z-3}{-1}. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 5x-3y-13=0, \\ y+5z-14=0. \end{cases}$$

Упражнение

Записать общие уравнения прямой, заданной каноническими уравнениями:

$$a) \quad \frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-3}{1}; \qquad\qquad b) \quad \frac{x+2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{4}.$$

Замечание. Одна и та же прямая может быть задана различными системами двух линейных уравнений (т.е. пересечением различных плоскостей, так как через одну прямую можно провести бесчисленное множество плоскостей), а также различными каноническими уравнениями (в зависимости от выбора ее направляющего вектора).

3.6. Деление отрезка в данном отношении

Пусть даны точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Требуется найти координаты точки $M(x, y, z)$, делящий отрезок прямой, заключенный между M_1 и M_2, в отношении $\lambda = |M_1M| : |MM_2|$.

Рассмотрим векторы

$$\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1, y-y_1, z-z_1) \text{ и } \overrightarrow{MM_2}=(x_2-x, y_2-y, z_2-z).$$

Они коллинеарны и одинаково направлены (рис. 4) , т.е. могут отличаться только длиной. По условию, $|M_1M| : |MM_2| = \lambda$, по этому $|M_1M| = \lambda |MM_2|$, или в координатной форме

$$(x-x_1, y-y_1, z-z_1) = \lambda(x_2-x, y_2-y, z_2-z).$$

Из равенства этих двух векторов следует равенство их координат:

$$x-x_1 = \lambda(x_2-x); \qquad y-y_1 = \lambda(y_2-y); \qquad z-z_1 = \lambda(z_2-z).$$

Отсюда

$$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}; \qquad y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \qquad z = \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}. \qquad (10)$$

В частности, если точка M делит отрезок M_1M_2 пополам, то $\lambda = 1$, то формулы (15) примут вид

$$x = \frac{x_1+x_2}{2}; \qquad y = \frac{y_1+y_2}{2}; \qquad z = \frac{z_1+z_2}{2}. \qquad (11)$$

Отметим, что последние формулы знакомы читателю из школьной геометрии.

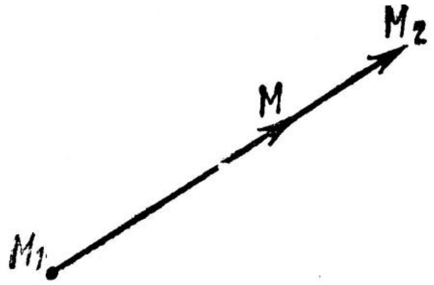


Рис. 4

Пример 10. Найти координаты точки M, делящей пополам отрезок прямой

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-3}{-1},$$

заключенный между плоскостями xOz и xOy.

Решение

Найдем точку пересечения прямой с плоскостью xOz, полагая в уравнениях прямой $y=0$. Тогда получим

$$\frac{x-2}{3} = \frac{1}{5} = \frac{z-3}{-1} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{1}{5}, \\ \dfrac{z-3}{-1} = \dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

Из последней системы находим $x = 2{,}6$; $z = 2{,}8$. Эти координаты вместе с

$y = 0$ определяют точку $A(2{,}6;0;2{,}8)$.

Аналогично, xOz, полагая в уравнениях прямой $\boldsymbol{z} = 0$, имеем

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{5} = 3 \quad \text{или} \quad \begin{cases} x-2=9, \\ y+1=15, \end{cases}$$

откуда $x = 11$; $y = 14$. Получим точку $B(11;14;0)$ пересечения прямой с плоскостью xOy. Зная координаты концов $A(2{,}6;0;2{,}8)$ и $B(11;14;0)$ отрезка AB по формулам (11) определим координаты точки M - середины отрезка AB:

$$x = \frac{2{,}6+11}{2} = 6{,}8; \qquad y = \frac{0+14}{2} = 7; \qquad z = \frac{2{,}8+0}{2} = 1{,}4.$$

Итак, $M(6{,}8;7;1{,}4)$ - искомая точка.

Вопросы для самопроверки

1. Какими методами и как изучаются геометрические объекты (точки, линии, поверхности) и их расположение в пространстве или на плоскости в аналитической геометрии?

2. Что называется прямоугольной декартовой системой координат в пространстве R^3? Что называется осью абсцисс, осью ординат и осью аппликат?

3. Что называется радиус-вектором точки M?

4. Как называются координатами точки M в пространстве R^3?

5. Что существует между точками пространства (плоскости) и радиус векторами, проведенными в эти точки из начала координат?

6. С помощью метода координат как можно представить всякий геометрический объект? Каким образом, устанавливается соответствие между геометрическими объектами и уравнениями или неравенствами?

7. Что называется **уравнением, соответствующим заданному множеству точек** (на плоскости или в пространстве)?

8. Что называется вектором нормали к прямой?

9. Разъясните, что означает фраза «Если известна какая-нибудь точка $M_0(x_0, y_0)$ прямой l и какой-нибудь вектор $\vec{N} = (A, B)$ нормали к ней, то этими двумя условиями прямая на плоскости вполне определена»? Как можно получить уравнение прямой, заданной этими условиями?

10. Как выражается на плоскости R^2 всякая прямая? Что называется общим уравнением прямой?

11. Приведите особенности расположения прямой на плоскости в тех случаях, когда те или иные коэффициенты уравнения $Ax + By + C = 0$ равны нулю.

12. Как определяется угол между двумя прямыми на плоскости? Приведите условия параллельности и перпендикулярности прямых.

13. Что называется направляющим вектором прямой? Когда положение прямой вполне определено?

14. Что называется каноническим уравнением прямой?

15. Что называется уравнением прямой, проходящей через две точки?

16. Что называется углом α между прямой и осью Ox (или углом наклона прямой к оси Ox)? Вполне определено ли положение прямой заданием точки, лежащей на ней и углом наклона прямой к оси Ox?

17. Что называется уравнением пучка прямых, проходящих через данную точку? Что называется угловым коэффициентом прямой?

18. Что называется уравнением прямой, проходящей через данную точку и имеющей заданный угловой коэффициент?

19. Что называется уравнением прямой с угловым коэффициентом и начальной ординатой?

20. Приведите особенности расположения прямой на плоскости в тех случаях, когда те или иные коэффициенты уравнения $y = kx + b$ равны нулю.

21. Приведите условия параллельности и перпендикулярности прямых, заданных уравнениями $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$.

22. Как определяется расстояние от точки до прямой? Приведите формулу вычисления расстояния от точки до прямой.

23. Как определяются координаты точки, делящей отрезок в данном отношении? Приведите формулы.

24. Как определяются координаты точки, делящей отрезок пополам? Приведите формулы.

25. Что называется вектором нормали к плоскости?

26. Разъясните, что означает фраза «Если известна какая-нибудь точка $\boldsymbol{M}_0(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{z}_o)$ плоскости $\boldsymbol{P}$ и какой-нибудь вектор $\vec{\boldsymbol{N}} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$ нормали к ней, то этими двумя условиями плоскость в пространстве вполне определена»? Как можно получить уравнение плоскости, заданной этими условиями?

27. Что называется общим уравнением плоскости?

28. Приведите особенности расположения плоскости в тех случаях, когда те или иные коэффициенты уравнения $\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{By} + \boldsymbol{Cz} + \boldsymbol{D} = 0,$ равны нулю.

29. Когда две плоскости, заданные общими уравнениями, параллельны?

30. Приведите условия, при которых плоскости совпадают.

31. Приведите необходимое и достаточное условие пересечения двух плоскостей.

32. Когда две плоскости, заданные общими уравнениями, перпендикулярны?

33. Что называется направляющим вектором прямой в пространстве? Когда в пространстве положение прямой, вполне определено?

34. Что называется каноническими уравнениями прямой в пространстве?

35. Что называется уравнением прямой в пространстве, проходящей через две точки?

36. Приведите формулы деления отрезка в данном отношении.

§ 13. Задачи линейного программирования

Ключевые слова: *математическая модель, ограничения типа равенств, ограничения типа неравенств, целевая функция, линейное программирование, нелинейное программирование, дискретное программирование, целочисленное программирование, динамическое программирование, стохастическое программирование, параметрическое программирование, дробно-линейное программирование, блочное программирование, сетевое (потоковое) программирование, многоиндексное программирование, булевское программирование, комбинаторное программирование, квадратичное программирование, биквадратичное программирование, сепарабельное программирование, выпуклое программирование, скалярная оптимизация, векторная оптимизация, задачи многокритериального подхода, задача в нормальной форме, задача в канонической форме, дополнительная переменная, план, опорный план, невырожденный опорный план, вырожденный опорный план, оптимальный план, выпуклая линейная комбинация точек, выпуклое множество (замкнутое, ограниченное), угловая точка, многогранник решений.*

1. Построение математических моделей некоторых простейших экономических задач

1.1. Введение

Каждое разумное действие является в определённом смысле оптимальным, ибо оно выбирается после сравнения с другими вариантами на основе интуиции и опыта человека. Интерес к задачам наилучшего выбора был всегда высоким.

Многие экономические задачи и процессы обладают многовариантными решениями. Следует отметить, что иногда число допустимых вариантов или практически необозримо, или бесконечно. Конечно, нахождение оптимальных решений (выбор наилучших вариантов) не основывается на «здравом смысле», интуиции и опыте специалиста. Нахождение оптимальных решений - выбор наилучших вариантов (максимума, минимума или вообще оптимального в том или ином смысле) необходимо осуществлять с помощью точных математических методов с применением компьютерной технологии. Эти точные математические методы составляют содержание предмета «Математическое программирование».[1] Более подходящим по смыслу названием было бы «методы оптимизации», но не слишком удачно переведенный с английского[2] термин прочно вошел в обиход.

Математическое программирование – эта отрасль математики, которая является теоретической основой решения задач о нахождении оптимальных решений.

Нахождение оптимальных решений экономических задач можно разбить на следующие этапы:

1. Построение математической модели.[3]

2. Нахождение оптимального метода одним из математических методов.

3. Практическое внедрение.

Построение математической модели состоит из такого функционального описания изучаемого экономического процесса математическими соотношениями, которое отражало бы его сущность. Иными словами в математической модели должны учитываться существенные особенности задачи, а также ограничивающие условия, которые могут повлиять на результат.

Можно считать, что процесс построения математической модели любой задачи начинается с ответов на следующие вопросы:

1. Для определения, каких величин должна быть построена модель, т.е. как идентифицировать переменные данной задачи?

2. Какие ограничения должны быть наложены на переменные, чтобы выполнялись условия, характерные для моделируемой системы?

3. В чем состоит цель задачи, для достижения которой из всех допустимых переменных нужно выбрать те, которые будут соответствовать оптимальному (наилучшему) решению задачи?

---

[1] Этот термин не следует смешивать с термином «программирование», обозначающим составление программы, осуществляющей определенный вычислительный процесс на компьютере.

[2] Выражение «mathematic programming» лучше было бы перевести как «математическое планирование».

[3] Математическая модель – описание какого-либо класса явлений внешнего мира (в том числе, экономических явлений), выраженное с помощью математической символики.

Следует отметить, что в экономической теории на первоначальном этапе ее развития редко использовались математические формулировки. Тем не менее, многие классические доктрины экономики в словесной, завуалированной форме по существу содержали определенные математические утверждения; это иногда оставалось скрытым и от самих приверженцев таких доктрин. По мере развития экономической науки внутренне присущие ей математические черты постепенно проявлялись все сильнее. На более поздней стадии ее истории некоторые экономисты стали предлагать даже полную математизацию экономической теории. По-видимому, самым выдающимся представителем зарождавшегося математического направления в экономической теории был французский экономист Леон Вальрас. Именно он в конце XIX столетия заложил основы теории общего экономического равновесия.

Эта теория основана на том, что между соответствующими величинами в экономике существует не односторонняя причинно-следственная связь, а многосторонняя взаимозависимость, которую математически можно представить некоторой системой соотношений между этими величинами. Исследования Вальраса остаются блестящим примером математического подхода к экономическим явлениям. Большой его заслугой является ныне общепризнанная идея о возможности функционального описания экономических явлений системами уравнений, неравенств или и тех и других вместе.

В общем случае, задачу математического программирования можно поставить следующим образом:

Пусть в R^n заданы функции $f(X), g_1(X), g_2(X),\dots g_m(X)$ и $b_i \in R^1$. Требуется найти точку $X^0 \in R^n$, удовлетворяющую условиям:

$$g_1(X)=b_1,\ g_2(X)=b_2,\dots\ g_m(X)=b_m,$$

такую что

$$f(X_0)=\min_{\substack{g(X)=b_i\\ i=\overline{1,m}}} f(X).$$

Кратко задачу математического программирования в общем случае можно записать так:

$$f\left(X\right) \to \min, \tag{1}$$

$$g_i\left(X\right) = b_i,\ \ i = 1, 2, \ldots, m. \tag{2}$$

При этом система уравнений (2), определяющая допустимое множество (или множество планов) задачи, называется системой ограничений задачи математического программирования, а функция $f\left(X\right)$ называется целевой функцией, а также критерием качества.

Нетрудно понять, что задача математического программирования не всегда имеет решение.

Простое достаточное условие существования решения основано на теореме Вейерштрасса и состоит в следующем: если допустимое множество замкнуто, непустое и ограничено (непустой компакт), а функция $f\left(X\right)$ на нем полунепрерывна снизу, то задача математического программирования имеет решение.

Замечание. Символ $f\left(X\right) \to \min,$ в записи задачи математического программирования используется вместо слов «минимизировать функцию $f\left(X\right)$». Далее указываются ограничения, определяющие допустимое множество.

1.2. Составные части «Математического программирования»

В зависимости от особенностей целевой функции $f\left(X\right)$ и функций, задающих ограничения $g_i\left(X\right)$, задачи математического программирования делятся на ряд типов.

Если целевая функция $f\left(X\right)$ и функции $g_i\left(X\right)$ $\left(i = 1, 2, \ldots, m\right)$, входящие в систему ограничений, линейны (первой степени) относительно входящих в задачу неизвестных x_j, то такой раздел математического программирования называется **линейным программированием**.

Методы и модели линейного программирования широко применяются при оптимизации процессов во всех отраслях народного хозяйства:

- при разработке производственной программы предприятия, распределение ее по исполнителям;

- при размещении заказов между исполнителями и по временным интервалам;

- при определении наилучшего ассортимента выпускаемой продукции, в задачах перспективного, текущего и оперативного планирования и управления;

- при планировании грузопотоков, определении плана товарооборота и его распределении; в задачах развития и размещения производительных сил, баз и складов систем обращения материальных ресурсов и т.д.

Особенно широкое применение методы и модели линейного программирования получили при решении задач экономии ресурсов (выбор ресурсосберегающих технологий, составление смесей, раскрой материалов), производственно-транспортных и других задач.

Начало линейному программированию было положено в 1939 г. математиком-экономистом Л. В. Канторовичем в работе «Математические методы организации и планирования производства». Появление этой работы открыло новый этап в применении математики в экономике. Спустя десять лет американский математик Дж. Данциг разработал эффективный метод решения данного класса задач - симплекс-метод. Термин **«линейное программирование»** впервые появился в 1951 г. в работах Дж. Данцига и Т. Купманса.

Линейное программирование и межотраслевой баланс характеризуют линейные взаимосвязи элементов народного хозяйства.

Однако при более глубоком исследовании в ряде задач появляются и связи нелинейного характера, когда с изменением одного элемента другие изменяются непропорционально первому. Например, даже простейшая транспортная задача принимает нелинейный вид, если стоимость перевозки единиц груза зависит от их общего количества. Поэтому вслед за разработкой моделей линейного программирования начались интенсивные исследования нелинейных моделей.

Если в задаче математического программирования целевая функция $f(X)$ и (или) хотя бы одна из функций системы ограничений $g_i(X)$ нелинейна, то такой раздел называется **нелинейным программированием**.

Методы и модели нелинейного программирования могут применяться при решении перечисленных выше задач, когда хотя бы одна из функций $f(X)$, $g_i(X)$ нелинейна. Кроме того, методы нелинейного программирования получили широкое применение при расчете экономически выгодных партий запуска деталей в производство, при определении экономически выгодной партии поставки, поставочного комплекта, размеров запасов, распределении ограниченных ресурсов, размещении производительных сил, в тарном хозяйстве, при решении многих производственно-экономических задач и т.д.

Если на все или некоторые переменные x_j, наложено условие дискретности, например, целочисленности $x_j \in N_0$, $N_0 = \{0,1,2,....\}$, то такие задачи рассматриваются в разделе математического программирования, называемом **дискретным программированием**, в частности, **целочисленным программированием**.

Методами **целочисленного программирования** решается широкий круг задач оптимизации с неделимостями, комбинаторного типа, с логическими условиями, с разрывной целевой функцией и т.д. В частности, задачи выбора (о назначениях), о контейнерных перевозках (о рюкзаке), о маршрутизации (коммивояжера), теории расписаний, комплектных поставок и комплектования, размещения производственно-складской структуры и т.п.

Если параметры целевой функции и (или) системы ограничений изменяются во времени или целевая функция имеет аддитивный

$$f(X)=\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j),$$

либо мультипликативный вид

$$f(X)=\prod_{j=1}^{n} f_j(x_j),$$

или сам процесс выработки решения имеет многошаговый характер, то такие задачи решаются методами **динамического программирования**. Методами динамического программирования могут решаться задачи перспективного и текущего планирования, управления производством, поставками и запасами в условиях изменяющегося спроса, распределения ограниченных ресурсов, в частности, размещения капитальных вложений, замены оборудования, обновления и восстановления элементов сложных человеко-машинных организационных систем и т.д.

В перечисленных выше разделах математического программирования предполагается, что вся информация о протекании процессов заранее известна и достоверна. Такие методы оптимизации называются **детерминированными** или методами обоснования решений в условиях определенности.

Если параметры, входящие в функцию цели, или ограничения задачи являются случайными величинами или если приходится принимать решения в условиях риска, неполной информации, то говорят о проблеме стохастической оптимизации, а соответствующий раздел называется **стохастическим программированием**. К нему, в первую очередь, следует отнести методы и модели выработки решений в условиях конфликтных ситуаций (математическая теория игр), в условиях неполной информации (экспертные оценки), в условиях риска (статистические решения) и др. Позднее появились другие типы задач, учитывающих специфику целевой функции и системы ограничений, в связи с чем возникли **параметрическое, дробно-линейное, блочное, сетевое (потоковое), многоиндексное, булевское, комбинаторное и другие типы программирования.** В случае нелинейностей специфика задач породила **квадратичное, биквадратичное, сепарабельное, выпуклое и другие**

типы программирования. Появились численные методы отыскания оптимальных решений: градиентные, штрафных и барьерных функций, возможных направлений, линейной.

Следует отметить, что задачи математического программирования с одной целевой функцией решаются методами ***скалярной оптимизации***. Однако реальные ситуации настолько сложны, что нередко приходится одновременно учитывать несколько целевых функций, которые должны принимать экстремальные значения. Например, дать продукцию больше, высокого качества и с минимальными затратами. Задачи, где находят решение по нескольким целевым функциям, относятся к ***векторной оптимизации*** – это так называемые **задачи многокритериального подхода.**

1.3. Линейное програмирование

Линейным программированием называют раздел математического программирования, в котором при формулировке задач используются только линейные функции.

Экономические приложения наиболее характерны для линейного программирования. Ниже рассмотрим математические модели некоторых экономических задач.

Построение математических моделей некоторых экономических задач

Рассмотрим процесс построения математических моделей задач линейного программирования на примерах.

Пример 1. Задача использования сырья. Для изготовления двух видов продукции P_1, P_2 используют три вида сырья: S_1, S_2, S_3. Запасы сырья, количество единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, а также величина прибыли, получаемая от реализации единицы продукции, приведены в табл. 1. Необходимо составить такой план выпуска продукции, чтобы при её реализации получить максимальную прибыль.

Обозначим через x_1 количество единиц продукции P_1, а через x_2 количество единиц продукции P_2. Тогда, учитывая количество единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, а также запасы сырья, получим систему ограничений

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 20, \\ 8x_1 + 5x_2 \le 40, \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30, \end{cases}$$

которая показывает, что количество сырья, расходуемое на изготовление продукции, не может превысить имеющихся запасов. Если продукция P_1 не выпускается, то $x_1 = 0$; в противном случае $x_1 > 0$. То же самое получаем и для продукции P_2. Таким образом, на неизвестные x_1 и x_2 должно быть наложено ограничение неотрицательности: $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.

Таблица 1

Вид сырья	**Запас сырья**	**Количество единиц сырья, идущих на изготовление единицы продукции**	
		P_1	P_2
S_1	20	2	5
S_2	40	8	5
S_3	30	5	6
Прибыль от единицы продукции, (ден. ед.)		50	40

Конечную цель решаемой задачи – получение максимальной прибыли при реализации продукции – выразим как функцию двух переменных x_1 и x_2. Реализация x_1 единиц продукции вида P_1 и x_2 единиц продукции вида P_2 даёт, соответственно, $50x_1$ и $40x_2$ (ден. ед.) прибыли, суммарная прибыль

$$f = 50x_1 + 40x_2 \text{ (ден. ед.)}.$$

Условиями не оговорена неделимость единицы продукции, поэтому x_1 и x_2 (план выпуска продукции) могут быть и дробными числами, следовательно, задача имеет бесконечное множество вариантов планов (значение x_1

и x_2, которые удовлетворяют системе ограничений). Необходимо найти такие неотрицательные значения x_1 и x_2, при которых функция f достигает максимума, то есть найти максимальное значение линейной функции

$$f = 50x_1 + 40x_2$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 20, \\ 8x_1 + 5x_2 \le 40, \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Построенная линейная функция называется функцией цели и совместно с системой ограничений образует математическую модель рассматриваемой экономической задачи.

Задачу использования сырья можно легко обобщить, если при выпуске n видов продукции используются m видов сырья. Обозначим через S_i $\left(i = 1, 2, ..., m\right)$ виды сырья; b_i – запасы сырья $i-$го вида: P_j $\left(j = 1, 2, ..., n\right)$ – виды продукции; a_{ij}– количество единиц $i-$го сырья, идущего на изготовление единицы $j-$й продукции; c_j – величину прибыли, получаемой при реализации единицы продукции. Условия задачи запишем в табл. 2.

Таблица 2

Вид сырья	**Запас сырья**	**Количество единиц i - го сырья, идущих на изготовление единицы j - й продукции**			
		P_1	P_2	...	P_n
S_1	b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
S_2	b_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	...	$\cdots$
S_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}
Прибыль от единицы продукции, (ден. ед.)		P_1	P_2	$\cdots$	P_n

Пусть x_j– количество единиц j-продукции, которое необходимо произвести. Тогда математическую модель задачи можно представить в следующем виде.

Найти максимальное значение линейной функции

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, \dots, n;$$

$$b_i \ge 0,\ i = 1, 2, \dots, m.$$

Рассматривая приведенную задачу и ее математическую модель, нетрудно заметить, что если потребовать, чтобы в процессе производства какое-то сырье использовалось полностью, то ограничение для этого сырья можно выразить в виде уравнения.

Таким образом, системы ограничений в зависимости от условий задачи могут содержать не только линейные неравенства, но и линейные уравнения.

Рассмотренные задачи относятся к разряду типовых задач оптимизации производственной программы предприятия. Критерий качества в этих задачах - доход и прибыль. В качестве критериев оптимальности в задачах могут быть также использованы: себестоимость, номенклатура производимой продукции и затраты станочного времени и т.д.

Пример 2. **Определение оптимального ассортимента продукции.** Предприятие изготавливает два вида продукции P_1 и P_2, которая поступает в оптовую продажу. Для производства продукции используется два вида сырья - A и B. Максимально возможные запасы сырья в сутки составляют 9 и 13 единиц, соответственно. Расход сырья на единицу продукции вида P_1 и вида P_2 дан в табл. 3.

Таблица 3

Сырье	**Расход сырья на 1 ед. продукции** P_1	**Расход сырья на 1 ед. продукции** P_2	**Запас сырья, ед.**
A	2	3	9
B	3	2	13

Опыт работы показал, что суточный спрос на продукцию P_1 никогда не превышает спроса на продукцию P_2 более чем на 1 ед. Кроме того, известно, что спрос на продукцию P_2 никогда не превышает 2 ед. в сутки.

Оптовые цены единицы продукции равны: 3 ден.ед. – для P_1 и 4 ден. ед. для P_2.

Какое количество продукции каждого вида должно производить предприятие, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Решение

Ответы на вышеперечисленные вопросы 1, 2, 3 п.1 могут быть сформулированы для данной задачи так: предприятию требуется определить объемы производства каждого вида продукции в тоннах, максимизирующие доход в ден. ед. от реализации продукции, с учетом ограничений на спрос и расход исходных продуктов.

Для построения математической модели остается только идентифицировать переменные и представить цель и ограничения в виде математических функций этих переменных.

Предположим, что предприятие изготовит x_1 единиц продукции P_1 и x_2 единиц продукции P_2. Поскольку производство продукции P_1 и P_2 ограничено имеющимися в распоряжении предприятия сырьем каждого вида и спросом на данную продукцию, а также учитывая, что количество изготовляемых изделий не может быть отрицательным, должны выполняться следующие неравенства:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 9, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 13, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_2 \le 2, \end{cases} \tag{3}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \tag{4}$$

Доход от реализации x_1 единиц продукции P_1 и x_2 единиц продукции P_2 составит $f = 3x_1 + 4x_2$. Нас интересует максимальный доход, т.е.

$$f = 3x_1 + 4x_2 \to \max. \tag{5}$$

Итак, (5), (4), (3) является математической моделью задачи об ассортименте продукции.

Таким образом, мы приходим к следующей математической задаче: среди всех неотрицательных решений данной системы линейных неравенств требуется найти такое, при котором функция f принимает максимальное значение.

Пример 3. **Использование мощностей оборудования.** Предприятие имеет m моделей машин различных мощностей. Задан план по времени и номенклатуре: T - время работы каждой машины; продукции j-го вида должно быть выпущено не менее N_j - единиц.

Необходимо составить такой план работы оборудования, чтобы обеспечить минимальные затраты на производство, если известны производительность каждой i -й машины по выпуску j -го вида продукции b_{ij} и стоимость единицы времени, затрачиваемого i -й машиной на выпуск j -го вида продукции c_{ij}.

Другими словами, задача для предприятия состоит в следующем: требуется определить время работы i -й машины по выпуску j -го вида продукции x_{ij} , обеспечивающее минимальные затраты на производство при соблюдении ограничений по общему времени работы машин T и заданному количеству продукции N_j.

Задача решается на минимум затрат на производство:

$$f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min.$$

По условию задачи машины работают заданное время T, поэтому данное ограничение можно представить в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = T, \quad i = \overline{1,m}.$$

Ограничение по заданному количеству продукции выглядит следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_{ij} \geq N_j, \quad j = \overline{1,n}.$$

Необходимо также учесть неотрицательность переменных $x_{ij} \geq 0$.

Задача поставлена так, чтобы израсходовать все отведенное время работы машины, т.е. обеспечить полную загрузку машины. При этом количество выпускаемой продукции каждого вида должно быть, по крайней мере, не менее N_j. Однако в некоторых случаях не допускается превышение плана по номенклатуре, тогда ограничения математической модели изменяются следующим образом:

$$f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq T, \ \ i = \overline{1,m};$$

$$\sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_{ij} = N_j, \quad j = \overline{1,n};$$

$$x_{ij} \geq 0, \ i = \overline{1,m}; \ \ j = \overline{1,n}.$$

Пример 4. Минимизация дисбаланса на линии сборки. Промышленная фирма производит изделие, представляющее собой сборку из m различных узлов. Эти узлы изготавливаются на n заводах.

Из-за различий в составе технологического оборудования производительность заводов по выпуску $j-$го узла неодинакова и равна b_{ij}. Каждый $i-$й завод располагает максимальным суммарным ресурсом времени в течение недели для производства т узлов, равного величине T_i.

Задача состоит в максимизации выпуска изделий, что по существу эквивалентно минимизации дисбаланса, возникающего вследствие некомплектности поставки по одному или по нескольким видам узлов.

В данной задаче требуется определить еженедельные затраты времени (в часах) на производство $j-$го узла на $i-$м заводе, не превышающие в сумме временные ресурсы $i-$го завода и обеспечивающие максимальный выпуск изделий.

Пусть $x_{ij}-$ недельный фонд времени (в часах), выделяемый на заводе i для производства узла j. Тогда объемы производства узла j будут следующими:

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ij} x_{ij}, \qquad j=1,2,...,n.$$

Так как в конечной сборке каждый из комплектующих узлов представлен в одном экземпляре, количество конечных изделий должно быть равно количеству комплектующих узлов, объем производства которых, минимален:

$$\min\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij} x_{ij}, \qquad j=1,2,...,m\right).$$

Условие рассматриваемой задачи устанавливает ограничение на фонд времени, которым располагает завод i.

Таким образом, математическая модель может быть представлена в следующем виде.

$$f=\min\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij} x_{ij}, \qquad j=1,2,...,m\right) \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \le T_i, \qquad i=1,2,...,n \ ;$$

$$x_{ij} \ge 0,\ i=1,2,...,n;\ j=1,2,...,m.$$

Эта модель не является линейной, но ее можно привести к линейной форме с помощью простого преобразования. Пусть $y-$ количество изделий:

$$y=\min\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij} x_{ij} = N_j, \qquad j=1,2,...,m\right).$$

Этому выражению с математической точки зрения эквивалентна следующая формулировка: максимизировать $f=y$ при ограничениях

$$\sum_{i=11}^{n} b_{ij} x_{ij} - y \ge 0, \qquad j=1,2,...,m;$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \le T_i, \qquad i = 1, 2, ..., n;$$

$$x_{ij} \ge 0, \; i = 1, 2, ..., n; \; j = 1, 2, ..., m; \; y \ge 0.$$

Пример 5. Задача составления кормовой смеси или задача о диете. Пусть крупная фирма имеет возможность покупать m различных видов сырья и приготавливать различные виды смесей (продуктов). Каждый вид сырья содержит разное количество питательных компонентов (ингредиентов).

Лабораторией фирмы установлено, что продукция должна удовлетворять, по крайней мере, некоторым минимальным требованиям с точки зрения питательности (полезности). Перед руководством фирмы стоит задача определить количество каждого $i-$го сырья, образующего смесь минимальной стоимости при соблюдении требований к общему расходу смеси и ее питательности.

Решение

Введем условные обозначения:

x_i - количество $i-$го сырья в смеси;

m - количество видов сырья;

n - количество ингредиентов в сырье;

a_{ij} - количество ингредиента j, содержащегося в единице $i-$го вида сырья;

b_j - минимальное количество ингредиента j, содержащегося в единице смеси;

c_j - стоимость единицы сырья i;

q - минимальный общий вес смеси, используемый фирмой.

Задача может быть представлена в виде

$$f = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i \to \min$$

при следующих ограничениях:

- на общий расход смеси:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \ge q;$$

- на питательность смеси:

$$\sum a_{ij} x_i \geq b_j \sum_{i=1}^{m} x_i , \quad j = 1, 2, ..., n;$$

- на неотрицательность переменных:

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, ..., m .$$

Пример 6. Задача составления жидких смесей. Еще один класс моделей, аналогичных рассмотренным выше, возникает при решении экономической проблемы, связанной с изготовлением смесей различных жидкостей, с целью получения пользующихся спросом готовых продуктов.

Представим себе фирму, торгующую различного рода химическими продуктами, каждый из которых является смесью нескольких компонентов. Предположим, что эта фирма планирует изготовление смесей m -видов. Обозначим подлежащее определению количество литров $i-$го химического компонента, используемого для получения $j-$го продукта через x_{ij}. Будем предполагать, что

$$x_{ij} \geq 0, \; i = \overline{1,n}; \; j = \overline{1,m}.$$

Первая группа ограничений относится к объемам потребляемых химических компонентов:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq S_i , \qquad i = 1, 2, ..., n ,$$

где S_i - объем $i-$го химического компонента, которым располагает фирма в начале планируемого периода.

Вторая группа ограничений отражает требование, заключающееся в том, чтобы запланированный выпуск продукции хотя бы в минимальной степени удовлетворял имеющийся спрос на каждый из химических продуктов, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geq D_j , \qquad j = 1, 2, ..., m ,$$

где D_j - минимальный спрос на продукцию j в течение планируемого периода.

Третья группа ограничений связана с технологическими особенностями, которые необходимо принимать во внимание при приготовлении смеси, например, простое ограничение, определяемое некоторыми минимально допустимыми значениями, отношения между объемами двух химических компонентов в процессе получения продукта j :

$$\frac{x_{ij}}{x_{i+1\,jj}} \geq r \;\text{ или }\; x_{ij} - r x_{i+1\,j} \geq 0 \;,$$

где r – некоторая заданная константа.

Обозначив через P_{ij} доход с единицы продукции x_{ij}, запишем целевую функцию:

$$f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} P_{ij} x_{ij} \to \max \;.$$

Пример 7. Задача о раскрое или о минимизации обрезков. Данная задача состоит в разработке таких технологических планов раскроя, при которых получается необходимый комплекс заготовок, а отходы (по длине, площади, объему, массе или стоимости) сводятся к минимуму.

Например, продукция бумажной фирмы выпускается в виде бумажных рулонов стандартной ширины L. По специальным заказам потребителей фирма поставляет рулоны других размеров, для этого производится разрезание стандартных рулонов. Типичные заказы на рулоны нестандартных размеров могут включать m видов шириной l_i, $(i = 1, 2, ..., m)$. Известна потребность в нестандартных рулонах каждого вида, она равна b_i. Возможны n различных вариантов построения технологической карты раскроя рулонов стандартной ширины L на рулоны длиной l_i.

Обозначим через a_{ij} количество рулонов $i-$ го вида, получаемых при раскрое единицы стандартного рулона по j – му варианту. При каждом варианте раскроя на каждый стандартный рулон возможны потери, равные P_j. К потерям следует относить также избыточные рулоны нестандартной длины l_i, получаемые при различных вариантах раскроя y_{ij}, $j = 1, 2, ..., n$.

В качестве переменных следует идентифицировать количество стандартных рулонов, которые должны быть разрезаны при j – м варианте раскроя. Определим переменную следующим образом: x_j - количество стандартных рулонов, разрезаемых по варианту j, $j = 1, 2, ..., n$.

Целевая функция - минимум отходов при раскрое

$$f = \left(\sum_{j=1}^{n} P_j x_j + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_{ij} \right) \to \min .$$

Ограничение на удовлетворение спроса потребителя

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - \sum_{j=1}^{n} y_{ij}, \quad x_j \geq 0, \quad y_{ij} \geq 0 .$$

Пример 8. Многосторонний коммерческий арбитраж (см. [5]). В сфере деятельности, связанной с валютными и биржевыми операциями, а также коммерческими сделками контрактного характера, возможны различного рода трансакции, позволяющие извлекать прибыль на разнице в курсе валют. Такого рода трансакции называются **коммерческим арбитражем.**

Представим себе коммерсанта (условно назовем его N), имеющего возможность реализовать многосторонний коммерческий арбитраж. Предположим, что число валютных рынков, вовлеченных в трансакционную деятельность коммерсанта N, равняется шести, а максимальное число возможных трансакций равняется девяти. Подробные данные, характеризующие рассматриваемую задачу, приведены в табл. 4.

При трансакции x_1 продажа единицы валютного номинала (ценных бумаг) II позволяет приобрести r_{11}, единиц валютного номинала I. При трансакции x_7 взамен единицы валютного номинала I можно получить r_{37} единиц валютного номинала III и r_{67} единиц валютного номинала VI. Остальные трансакции расшифровываются аналогично. Значения r_{ij} могут быть дробными. Заметим, что при любой трансакции x_i $(i = 1,2,3,4,5)$ каждый из валютных номиналов можно обменять на валютный номинал I. Следует обратить внимание на правило выбора знака перед показателями в табл.4. Чтобы отличить куплю от продажи, будем, соответственно, использовать знаки «плюс» и «минус» перед показателями, характеризующими данную трансакцию.

Таблица 4

Валютный номинал	**Тип трансакции**									**Возможность рынка**
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	
I	r_{11}	r_{12}	r_{13}	r_{14}	r_{15}	-1	-1			≥ 0
II	-1					r_{26}			r_{29}	≥ 0
III		-1					r_{37}	r_{38}		≥ 0
IV			-1					-1		≥ 0
V				-1				r_{58}		≥ 0
VI					-1		r_{67}		-1	≥ 0
Размер трансакции	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	

Рассмотрим идеализированный случай, когда все трансакции коммерсанта N выполняются одновременно. Ограничения определяются единственным требованием - трансакция возможна лишь при условии, если коммерсант N располагает наличными ценными бумагами. Другими словами, количество проданных ценных бумаг не должно превышать количество приобретенных. Данные ограничения имеют вид

$$r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + r_{13}x_3 + r_{14}x_4 + r_{15}x_5 - x_6 - x_7 \geq 0 \ ;$$
$$-x_1 + r_{26}x_6 + r_{29}x_9 \geq 0 \ ;$$
$$-x_2 + r_{37}x_7 + r_{38}x_8 \geq 0 \ ;$$
$$-x_3 - x_8 + r_{49}x_9 \geq 0;$$
$$-x_4 + r_{58}x_8 \geq 0 \ ;$$
$$-x_5 + r_{67}x_7 - x_9 \geq 0 \ ;$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,...,9.$$

Пусть целевая функция представляет собой чистый доход, выраженный в единицах валютного номинала I, т.е. задача состоит в том, чтобы

$$f = r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + r_{13}x_3 + r_{14}x_4 + r_{15}x_5 - x_6 - x_7 \to \max .$$

Упражнения

Составить математические модели следующих задач с экономическим содержанием:

1. В рационе животных используется два вида корма. Животные должны получать четыре вида питательных веществ. Составить рацион питания животных, обеспечивающий минимальные затраты, при исходных данных, заданных таблицей

Необходимое количество питательного вещества	**Норма (ед. массы)**	**Содержание питательного вещества в единице корма**	
		корм 1	**корм 2**
Пит. вещ. № 1	20	1	5
Пит. вещ. № 2	24	3	2
Пит. вещ. № 3	32	2	4
Пит. вещ. № 4	2	1	0
Стоимость единицы корма (ден. ед.)		4	6

2. Для изготовления изделий двух типов А и Б имеется 200 кг металла. На изготовление одного изделия типа А расходуется 2 кг металла, а одного изделия типа Б – 4 кг. Составить план производства, обеспечивающий получение наибольшей выручки от продажи изготовленных изделий, если изделие типа А стоит 50, а одно изделие типа Б стоит 70, причём изделий типа А можно изготовить не более 60, и изделий типа Б – не более 30.

Замечание

Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to extr,$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, \ldots, n;$$

то есть имеем задачу отыскания наибольших и наименьших значений линейной функции, на неизвестные которой наложены линейные ограничения. Таким образом, задачи линейного программирования относятся к задачам на условный экстремум функции.

Казалось бы, что для исследования линейной функции многих переменных на условный экстремум достаточно применить хорошо разработанные методы математического анализа, однако невозможность их использования можно довольно просто проиллюстрировать.

Так как f – линейная функция, то $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} = c_j$, $\left(j = 1, 2, \ldots, n \right)$, но все коэффициенты линейной функции не могут быть равны нулю, следовательно, внутри области, образованной системой ограничений экстремальные точки не существуют. Они могут быть на границе области, но исследовать точки границы невозможно, поскольку частные производные являются константами.

Для решения задачи линейного программирования созданы специальные методы.

2. Общая задача линейного программирования

2.1. Задача в нормальной и канонической формах

Определение 1. Задачей линейного программирования в нормальной форме называется следующая задача:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max, \tag{1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \tag{2}$$

$$x_j \ge 0, \ \left(j = 1, 2, ..., n \right), \tag{3}$$

где a_{ij}, b_i, c_j - заданные постоянные величины. Соотношения (1)-(3) представляют координатную запись задачи.

Как отмечалось ранее (§10), в системе ограничений (2) все b_i, $\left(i = 1, 2, 3, .., m \right)$ можно считать неотрицательными.

Если ввести векторы

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \ A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ ... \\ a_{m2} \end{pmatrix}, ..., A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ ... \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix},$$

$$C = \left(c_1, c_2, ..., c_n \right),$$

то можно привести векторную запись задачи (1)-(3).

Векторная запись

$$f = CX \to \max,$$
$$A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n \le A_0, \ X \ge 0.$$

Формулировка задачи становится более компактной, если ввести матрицу $A = \left(a_{ij} \right), \ i = \overline{1, m}; \ j = \overline{1, n}$. В этом случае задачу (1)-(3) можно записать в матричной форме.

Матричная запись

$$f = CX \to \max,$$
$$AX \le A_0, \ X \ge 0.$$

Приведем еще одну форму записи задачи (1)-(3).

Запись с помощью знаков суммирования

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1,2,...,m; \quad x_j \ge 0, \quad j = 1,2,...,n.$$

Матрица A называется *матрицей условий*.

Наряду с нормальной формой задачи линейного программирования широкое распространение получила каноническая форма.

Определение 2. Задачей линейного программирования в канонической форме называется следующая задача (в матричной записи):

$$f = CX \to \max,$$
$$AX = A_0, \; X \ge 0.$$

Таким образом, две формы задачи линейного программирования отличаются лишь типом основных ограничений: в нормальной форме ограничения заданы неравенствами, а в канонической они имеют вид равенств.

Отметим, что ограничения типа неравенств можно свести введением дополнительных переменных к ограничениям типа равенств.

Лемма 1. Каждая задача на максимум типа неравенств (1)-(3) эквивалентна задаче с ограничениями типа равенств

$$f(X) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \to \max, \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \; i = 1,2,...,m, \tag{5}$$

$$x_j \ge 0, \; j = 1,2,...,n,n+1,...,n+m. \tag{6}$$

Переменные $x_{n+i}, \; i = \overline{1,m},$ в задаче (1)-(3) называются *дополнительными переменными.* Покажем, что точка X^0 будет решением задачи (1)-(3) тогда и только тогда, если

$$X_0, \quad x_{n+1}^0 = -\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j^0 + b_1 \quad ,..., \quad x_{n+m}^0 = -\sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j^0 + b_m \tag{7}$$

будет решением задачи (4)-(6).

Доказательство представляем читателю проводить самостоятельно в качестве упражнения.

Таким образом, ограничения типа неравенств можно свести введением дополнительных переменных к ограничениям типа равенств. С другой стороны, каждое ограничение типа равенства $AX = A_0$ можно записать в виде двух ограничений типа неравенств $AX \le A_0$, $-AX \le -A_0$. Поэтому задачи в нормальной и канонической формах эквивалентны между собой (с точностью до размерностей n и m).

2.2. Основные определения

В предыдущем пункте было показано, что систему ограничений любой задачи линейного программирования можно привести к системе m линейных уравнений с n неизвестными; значения переменных x_j, $(j = 1, 2, ..., n)$, при которых линейная функция достигает максимального значения. Следует заметить, что там, где необходимо найти минимальное значение линейной функции, достаточно заменить на противоположный знак линейной функции и найти максимальное значение последней функции. Заменяя на противоположный знак полученного максимального значения, определяем минимальное значение исходной линейной функции. Аналогичным образом, любую задачу максимизации можно свести к задаче минимизации.

Поэтому общую задачу линейного программирования можно определить следующим образом:

Определение 3. *Общей задачей линейного программирования* называется следующая задача:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min, \tag{8}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{9}$$

$$x_j \ge 0, (j = 1, 2, ..., n), \tag{10}$$

где a_{ij}, b_i, c_j - заданные постоянные величины.

Векторная запись общей задачи линейного программирования имеет вид:

$$f = CX \to \min, \tag{11}$$

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + ... + A_n x_n = A_0, \; X \geq 0. \tag{12}$$

Таким образом, общая задача линейного программирования означает следующее: найти такие неотрицательные значения $x_1, x_2, ..., x_n$, которые удовлетворяют системе ограничений (9) и доставляют линейной функции (8) минимальное значение.

Как отмечалось ранее, в системе ограничений (9) все b_i, $(i = 1, 2, .., m)$ можно считать неотрицательными.

Определение 4. *Планом* или *допустимым решением* задачи линейного программирования называется вектор $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющий условиям (9) и (10).

Определение 5. План $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *опорным,* если векторы $A_i, (i = 1, 2, ..., m)$, входящие в разложение (12) с положительными коэффициентами x_i, являются линейно независимыми.

Так как векторы A_i являются m- мерными, то из определения опорного плана следует, что число его положительных компонент не может превышать m.

Определение 6. Опорный план называется *невырожденным,* если он содержит m положительных, компонент, в противном случае опорный план называется вырожденным.

Определение 7. *Оптимальным планом* или *оптимальным решением* задачи линейного программирования называется план, доставляющий наименьшее (наибольшее) значение линейной функции.

Свойства решений задачи линейного программирования тесно связаны со свойствами выпуклых множеств.

2.3. Выпуклые множества

Здесь приведем основные сведения о выпуклых множествах. Пусть на плоскости R^2 заданы две точки: $A_1(x_1^1, x_2^1)$ и $A_2 = (x_1^2, x_2^2)$, определяющие прямолинейный направленный отрезок $\overline{A_1 A_2}$.

Точка A, для которой выполняются условия

$$A=\lambda_1 A_1+\lambda_2 A_2, \tag{13}$$

$$\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1+\lambda_2=1 \tag{14}$$

называется *выпуклой линейной комбинацией точек* A_1 и A_2. При $\lambda_1=1$ и $\lambda_2=0$ точка A совпадает с концом отрезка A_1 и при $\lambda_1=0$ и $\lambda_2=1$ с концом отрезка A_2. Точки A_1 и A_2 называются *угловыми или крайними точками отрезка* $\overline{A_1A_2}$.

Из определения выпуклой линейной комбинации точек видно, что угловая точка не может быть представлена как выпуклая линейная комбинация двух других точек отрезка. Соотношения (13) и (14) верны независимо от размерности пространства.

Пусть имеется n точек $A_1, A_2, ..., A_n$. Точка A- выпуклая линейная комбинация, если выполняются условия

$$A=\lambda_1 A_1+\lambda_2 A_2+\ldots+\lambda_n A_n,$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad (j=1,2,\ldots,n), \quad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1.$$

Множество точек называется выпуклым, если оно вместе с любыми двумя точками содержит и их произвольную выпуклую линейную комбинацию. Геометрический смысл этого определения состоит в том, что множеству вместе с его двумя произвольными точками полностью принадлежит и прямолинейный отрезок, их соединяющий. Примерами выпуклых множеств служат прямолинейный отрезок, прямая, полуплоскость, круг, шар, куб, полупространство и др.

Угловыми точками выпуклого множества называются точки, не являющиеся выпуклой комбинацией двух различных точек множества. Например, угловыми точками треугольника являются его вершины, угловыми точками круга - точки окружности, которая его ограничивает. Таким образом, выпуклое множество может иметь конечное и бесконечное число угловых точек. Прямая, плоскость, полуплоскость, пространство, полупространство угловых точек не имеют.

Выпуклым многоугольником называется выпуклое замкнутое ограниченное множество на плоскости, имеющее конечное число угловых точек. Угловые точки многоугольника называются его вершинами, а отрезки, соединяющие две вершины и образующие его границу,- сторонами многоугольника. Опорной прямой выпуклого многоугольника называется прямая, имеющая с многоугольником по одну сторону от нее, хотя бы одну общую точку.

Выпуклым многогранником называется выпуклое замкнутое ограниченное множество трехмерного пространства, имеющее конечное число угловых точек. Угловые точки многогранника называются его вершинами; многоугольники, ограничивающие многогранник, - гранями; отрезки по которым они пересекаются, - ребрами. Опорной плоскостью многогранника называется плоскость, имеющая с многогранником, расположенным по одну от нее, хотя бы одну общую точку.

Теорема 1. Замкнутый, ограниченный, выпуклый многогранник является выпуклой линейной комбинацией своих угловых точек.

2.4. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования

Рассмотрим задачу линейного программирования, система ограничений которой задана в виде неравенств.

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min, \tag{15}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \tag{16}$$

$$x_j \ge 0, \quad \left(j = 1, 2, ..., n\right). \tag{17}$$

Совокупность чисел $x_1, x_2, ..., x_n$, удовлетворяющих ограничениям (15)-(17) называется *решением.* Если система (16) при условии (17) имеет хотя бы одно решение, она называется *совместной*, в противном случае - *несовместной*.

Рассмотрим на плоскости R^2 совместную систему линейных неравенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Это все равно, что в системе (16)-(17) положить $n = 2$. Каждое неравенство этой системы геометрически определяет полуплоскость с граничной прямой $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i \ (i = 1, 2, ..., m)$.

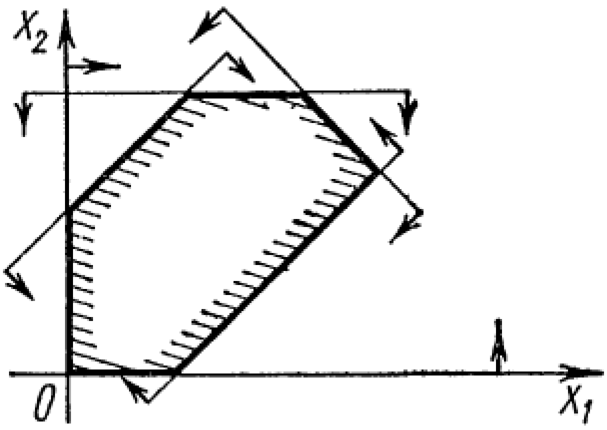


Рис.1

Условия неотрицательности определяют полуплоскости, соответственно, с граничными прямыми $x_1 = 0, x_2 = 0$. Система совместна, поэтому полуплоскости, как выпуклые множества, пересекаясь, образуют общую часть, которая является выпуклым множеством и представляет собой совокупность точек, координаты каждой из которых являются решением данной системы (рис. 1). Совокупность этих точек (решений) назовем многоугольником решений. Он может быть точкой, отрезком, лучом, многоугольником, неограниченной многоугольной областью.

Если в системе ограничений (16)-(17) $n = 3$, то каждое неравенство геометрически представляет полупространство трехмерного пространства, граничная плоскость которого $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i \ (i = 1, 2, ..., m)$, а условия неотрицательности – полупространства с граничными плоскостями, соответственно, $x_j = 0 \ (j = 1, 2, 3)$. Если система ограничений совместна, то эти полупространства, как выпуклые множества, пересекаясь, образуют в трехмерном пространстве R^3 общую часть, которая называется многогранником решений. Многогранник решений может быть точкой, отрезком, лучом, многоугольником, многогранником, многогранной неограниченной областью.

Пусть в системе ограничений (16)-(17) $n > 3$; тогда каждое неравенство определяет полупространство пространства R^n с граничной гиперплоскостью $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i$, $\left(i = 1, 2, .., m\right)$, а условия неотрицательности –полупространства с граничными гиперплоскостями $x_j = 0$ $\left(j = 1, 2, ..., n\right)$.

Если система ограничений совместна, то по аналогии с R^3 пространством она образует общую часть пространства R^n , называемую многогранником решений, так как координаты каждой его точки являются решением.

Таким образом, геометрически задача линейного программирования представляет собой отыскание такой точки многогранника решений, координаты которой доставляют линейной функции минимальное значение, причем допустимыми решениями служат все точки многогранника решений.

2.5. Свойства решений задачи линейного программирования

Теорема 2. Множество всех планов задачи линейного программирования выпукло (если оно не пусто).

Теорема 3. Линейная функция задачи линейного программирования достигает своего минимального значения в угловой точке многогранника решений. Если линейная функция принимает минимальное значение более чем водной угловой точке, то она достигает того же значения в любой точке являющейся выпуклой линейной комбинацией этих точек.

Теорема 4. Если известно, что система векторов $A_1, A_2, ..., A_k$ $\left(k \le n\right)$ в разложении (12) линейно независима и такова, что

$$A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_kx_k = A_0,$$

где все $x_j \ge 0$, то точка $X = \left(x_1, x_2, ..., x_k, 0, ..., 0\right)$ является угловой точкой многогранника решений.

Здесь X есть $n-$мерный вектор, последние $n-k$ компонент которого равны нулю.

Теорема 5. Если $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ - угловая точка многогранника решений, то векторы в разложении (12), соответствующие положительным x_i, являются линейно независимыми.

Следствие 1.Так как векторы $A_1,A_2,...,A_n$ имеют размерность m, то угловая точка многогранника решений имеет не более чем m положительных компонент $x_i>0,\ (i=1,2,...,m)$.

Следствие 2. Каждой угловой точке многогранника решений соответствует $k\le m$ линейно независимых векторов системы $A_1,A_2,...,A_n$.

Не теряя общности, можно предположить, что система векторов $A_1,A_2,$ $,...,A_n$ задачи линейного программирования (8)-(10) всегда содержит m линейно независимых векторов. Если при решении частной задачи это свойство не очевидно, то первоначальную систему векторов дополняют m линейно независимыми векторами, затем находят решение расширенной задачи.

Итак, если задача линейного программирования ограничена на многограннике решений, то:

1) существует такая угловая точка многогранника решений, в которой линейная функция задачи линейного программирования достигает своего оптимума;

2) каждый опорный план соответствует угловой точке многогранника решений. Поэтому для решения задачи линейного программирования необходимо исследовать угловые точки многогранника решений, т.е. только опорные планы.

Упражнения

Приведите каждую из следующих задач к канонической форме.

1. $f = 3x_1 - 4x_2 + x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 8, \\ 12x_1 + 9x_2 + 3x_3 \le 14, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \ge 8, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ (j = 1,2,3).$

2. $f = 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 6, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 \le 18, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 6, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ (j = 1,2,3).$

3. $f = 3x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 7, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 8, \\ 2x_1 + x_3 \ge -5, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0.$

4. $f = 3x_1 - 2x_2 - x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \le 5, \\ x_1 + 3x_2 \ge -2, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ \ x_3 \ge 0.$

5. $f = -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 < 3, \\ x_2 + x_4 > -5, \\ 2x_1 + x_3 \ge -5, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0.$

6. $f = 4x_2 + x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 - x_3 \ge 7, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$

Вопросы для самопроверки

1. Что составляет содержание «математического программирования»?

2. Из каких этапов состоит нахождение оптимальных решений экономических задач?

3.Что означает построение математической модели экономической задачи или экономического процесса?

4. Что включает в себя процесс построения математической модели?

5. Кто был выдающимся представителем зарождавшегося математического направления в экономической теории? На чем основана теория математического подхода к экономическим явлениям?

6. Сформулируйте задачу математического программирования в общем случае?

7. Всегда ли имеет решение задача математического программирования? Приведите какое-то достаточное условие существования решения задачи математического программирования.

8. Перечислите составные части математического программирования исходя из формулировки задачи математического программирования в общем виде.

9. Что называется детерминированной оптимизацией?

10. Что называется стохастической оптимизацией?

11. К какой оптимизации относится математическая теория игр?

12. Какие задачи математического программирования решаются методами скалярной оптимизации?

13. Какие задачи относятся к векторной оптимизации?

14. Дайте определение линейного программирования.

15. Какие Вы знаете еще математические модели экономических задач, кроме вышеприведенных математических моделей?

16. Разъясните, почему для нахождения решения задачи линейного программирования нельзя применить хорошо разработанные методы математического анализа исследования условного экстремума.

17. Дайте определение задачи линейного программирования в нормальной форме.

18. Дайте определение задачи линейного программирования в канонической форме.

19. Каким образом ограничения типа неравенств можно свести к ограничениям типа равенств? Доказать лемму. Какие переменные называются дополнительными?

20. Сформулируйте общую задачу линейного программирования.

21. Чем отличается каноническая форма задачи линейного программирования от общей?

22. Дайте определения планам: невырожденного и вырожденного плана, оптимального плана.

23. Какое множество называется выпуклым?

24. Какая точка выпуклого множества называется угловой?

25. В чем заключается важность теоремы 1?

26. Что называется многогранником решений?

27. Дайте геометрическое истолкование задачи линейного программирования.

28. В какой точке многогранника решений линейная функция задачи линейного программирования достигает своего оптимального решения?

29. Какой вид имеет угловая точка многогранника решений, и какому плану она соответствует?

30. Какие планы необходимо исследовать, чтобы найти оптимальное значение линейной функции?

31. Дайте геометрическое истолкование задачи линейного программирования.

32. В какой точке многогранника решений линейная функция задачи линейного программирования достигает своего оптимального значения?

33. Какой вид имеет угловая точка многогранника решений, и какому плану она соответствует?

34. Какие планы необходимо исследовать, чтобы найти оптимальное значение линейной функции?

§14. Графический метод решения задачи линейного программирования

Ключевые слова: *графический метод, полуплоскость, многоугольник решений, градиент.*

Графический метод основан на геометрической интерпретации задачи линейного программирования (п.2.4. §13) и применяется в основном при решении задач двумерного пространства и только некоторых задач трехмерного пространства, так как довольно трудно построить многогранник решений, который образуется в результате пересечения полупространств. Задачу пространства размерности больше трех изобразить графически невозможно.

Поэтому графический метод имеет такие узкие рамки применения, что о нем как об особом методе решения задач линейного программирования говорить нельзя.

Однако для выработки наглядных представлений о задачах линейного программирования графический метод представляет определенный интерес. Кроме того, он позволяет геометрически подтвердить справедливость теорем, приведенных в предыдущем параграфе.

1. Графический метод

Пусть задача линейного пространства задана в двумерном пространстве R^2, т.е. ограничения содержат две переменные:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 \to \min, \tag{1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \end{cases} \tag{2}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \tag{3}$$

Допустим, что система (2) при условии (3) совместна и ее многоугольник решений ограничен. Каждое из неравенств (2) и (3) как отмечалось в п.2.4 §13 определяет полуплоскость с граничной прямой: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ $(i = 1, 2, ..., m)$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

Линейная функция (1) при фиксированных значениях f является уравнением прямой линии: $c_1x_1 + c_2x_2 = const$. Построим многоугольник решений системы ограничений (2)-(3) и график линейной функции (1) при $f = 0$ (рис. 1). Тогда поставленной задаче линейного программирования можно дать следующую интерпретацию. Найти точку многоугольника решений, в которой прямая $c_1x_1 + c_2x_2 = const$ - опорная и функция f при этом достигает минимума.

Значения $f = c_1x_1 + c_2x_2$ возрастают в направлении градиента

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = (c_1, c_2)$$

линейной функции f. Поэтому прямую $f = 0$ передвигаем параллельно самой себе в направлении вектора ∇f. Из рис. 1 следует, что прямая дважды становится опорной по отношению к многоугольнику решений (в точках A и C), причем минимальное значение принимает в точке A. Координаты точки $A(x_1, x_2)$ находим, решая систему уравнений прямых AB и AE.

Если многоугольник решений представляет собой неограниченную область, то возможны два случая.

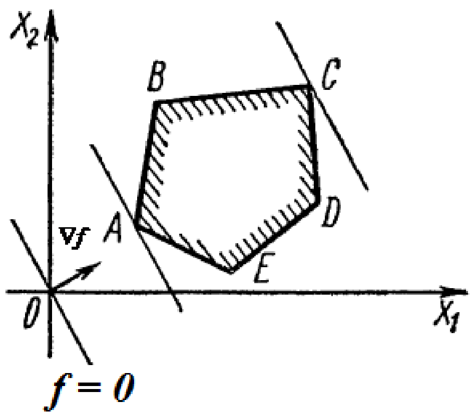


Рис. 1

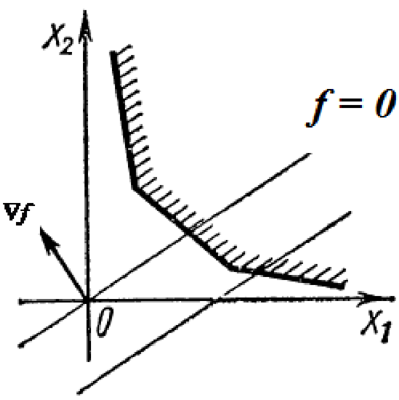


Рис. 2

Случай 1. Прямая $c_1x_1 + c_2x_2 = const$, передвигаясь в направлении вектора ∇f или противоположно ему, постоянно пересекает многоугольник решений и ни в какой точке не является опорной к нему. В этом случае линейная функция не ограничена на многоугольнике решений как сверху, так и снизу (рис. 2).

Случай 2. Прямая $c_1x_1 + c_2x_2 = const$, передвигаясь, все же становится опорной относительно многоугольника решений (рис. 3) Тогда в зависимости от вида области линейная функция может быть ограниченной сверху и неограниченной снизу (рис. 3а), ограниченной снизу и не ограниченной сверху (рис. 3, б), либо ограниченной как снизу, так и сверху (рис. 3в).

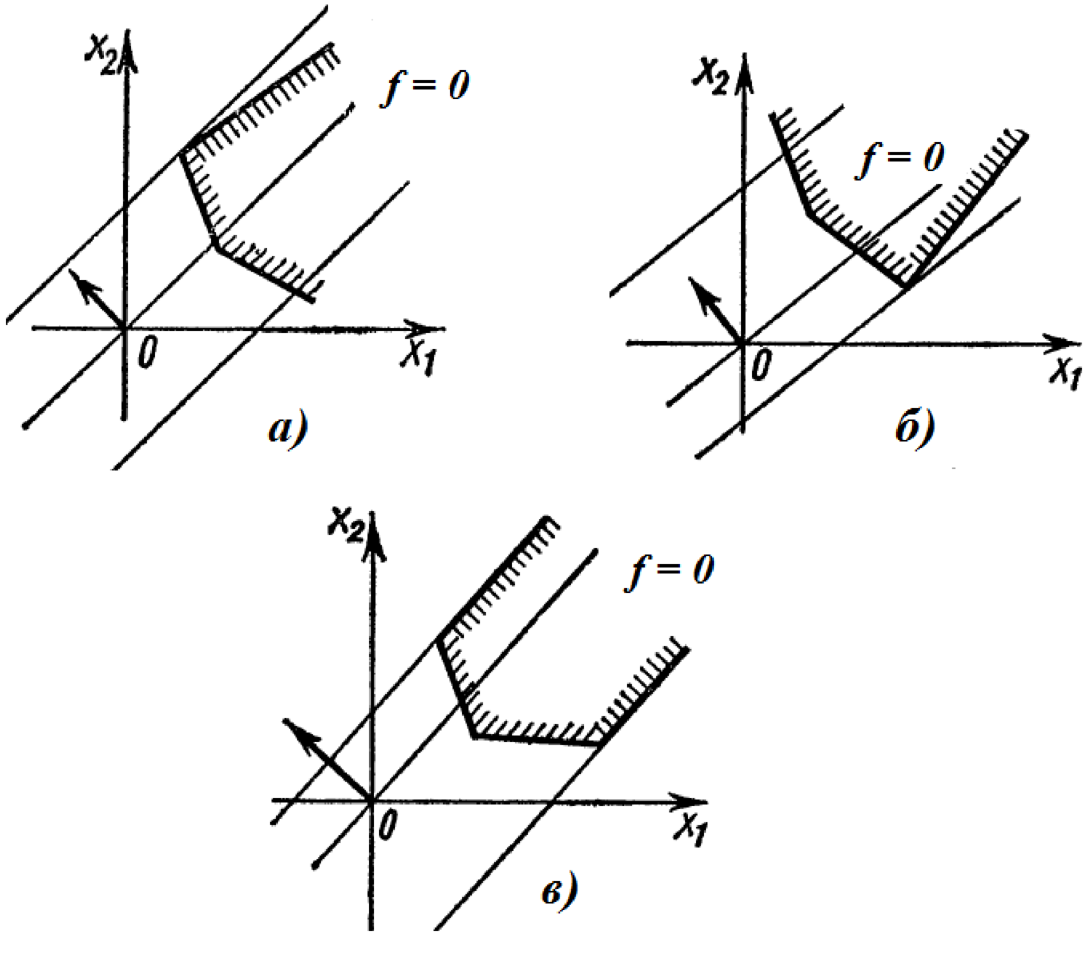


Рис. 3

2. Примеры задач, решаемых графическим методом

Решим графическим методом некоторые простейшие экономические задачи из §10.

Пример 1. Определение оптимального ассортимента продукции. Предприятие изготавливает два вида продукции P_1 и P_2, которая поступает в оптовую продажу. Для производства продукции используется два вида сырья - A и B. Максимально возможные запасы сырья в сутки составляют 9 и 13 единиц, соответственно. Расход сырья на единицу продукции вида P_1 и вида P_2 дан в табл. 1.

Таблица 1

Сырье	**Расход сырья на 1 ед. продукции** P_1	**Расход сырья на 1 ед. продукции** P_2	**Запас сырья, ед.**
A	2	3	9
B	3	2	13

Опыт работы показал, что суточный спрос на продукцию P_1 никогда не превышает спроса на продукцию P_2 более чем на 1 ед. Кроме того, известно, что спрос на продукцию P_2 никогда не превышает 2 ед. в сутки.

Оптовые цены единицы продукции равны: 3 ден.ед. – для P_1 и 4 ден. ед. для P_2.

Какое количество продукции каждого вида должно производить предприятие, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Решение

Нами в п.1/3 §13 была построена математическая модель задачи. Математическая модель задачи об ассортименте продукции имеет вид:

$$Z = 3x_1 + 4x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 9, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 13, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_2 \le 2, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Эту задачу решим графическим методом.

Построим многоугольник решений (рис.4). Для этого на плоскости R^2, где введена прямоугольная декартовая система координат, изобразим граничные прямые

$$2x_1 + 3x_2 = 9 \qquad (L_1),$$
$$3x_1 + 2x_2 = 13 \qquad (L_2),$$
$$x_1 - x_2 = 1 \qquad (L_3),$$
$$x_2 = 2 \qquad (L_4),$$
$$x_1 = 0, \ \ x_2 = 0,$$

и установим, какую полуплоскость определяет каждое неравенство относительно граничной прямой. В результате получим многоугольник *OABCD.*

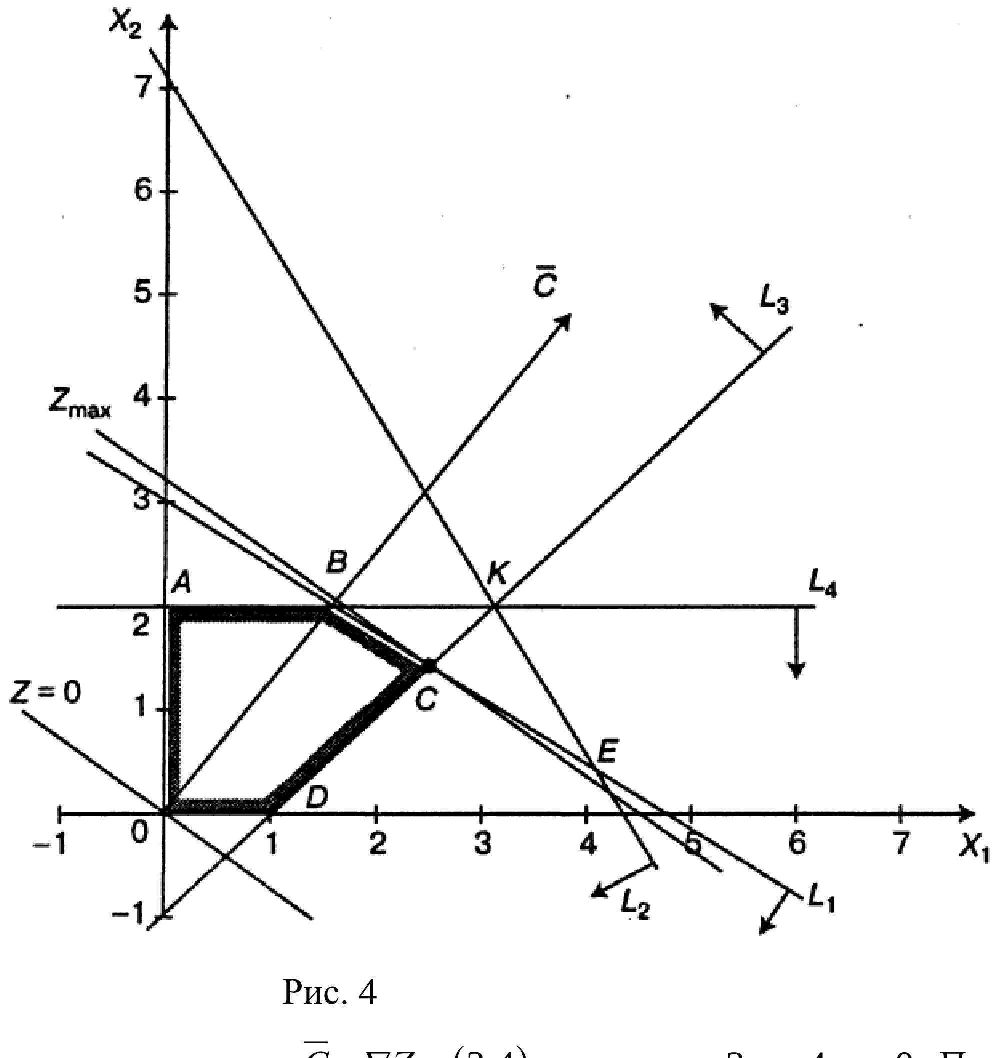


Рис. 4

Построим градиент $\overline{C} = \nabla Z = (3;4)$ и прямую $3x_1 + 4x_2 = 0$. Перемещаем прямую $Z = 0$ параллельно самой себе в направлении вектора $\overline{C}$. Из рис. 4 следует, что по отношению к многоугольнику решений опорной эта прямая становится в точке C, где линейная функция принимает максимальное значение. Точка C лежит на пересечении прямых L_1 и L_3. Для определения ее координат решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 9, \\ x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$$

Оптимальный план задачи: $x_1 = 2,4;\ x_2 = 1,4,$ т.е. $X_{opt} = (2,4;1,4)$, и $Z_{\max} = Z(X_{opt}) = 3 \cdot 2,4 + 4 \cdot 1,4 = 12,8.$

Полученное решение означает, что объем производства продукции P_1 должен быть равен 2,4 ед., а продукции P_2 -1,4 ед. Максимальный доход, получаемый в этом случае, составит 12,8 ден.ед.

Пример 2. Задача использования сырья. Как нам известно (п.2 §10) математическая модель задачи имеет вид:

$$Z = 50x_1 + 40x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 20, \\ 8x_1 + 5x_2 \le 40, \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Решение

Построим многоугольник решений (рис. 5). Для этого на плоскости R^2, где введена прямоугольная декартовая система координат изобразим граничные прямые

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 20 & (L_1), \\ 8x_1 + 5x_2 = 40 & (L_2), \\ 5x_1 + 6x_2 = 30 & (L_3), \end{cases}$$
$$x_1 = 0, \ x_2 = 0.$$

Взяв какую-нибудь точку, например, начало координат, установим, какую полуплоскость определяет соответствующее неравенство. Многоугольником решений данной задачи является ограниченный пятиугольник *OABCD.*

Для построения прямой $50x_1 + 40x_2 = 0$ строим градиент $\nabla Z = (50;40) = 10 \cdot (5;4)$ и через точку *O* проводим прямую, перпендикулярную ему. Построенную прямую $Z=0$, перемещаем параллельно самой себе в направлении вектора ∇Z.

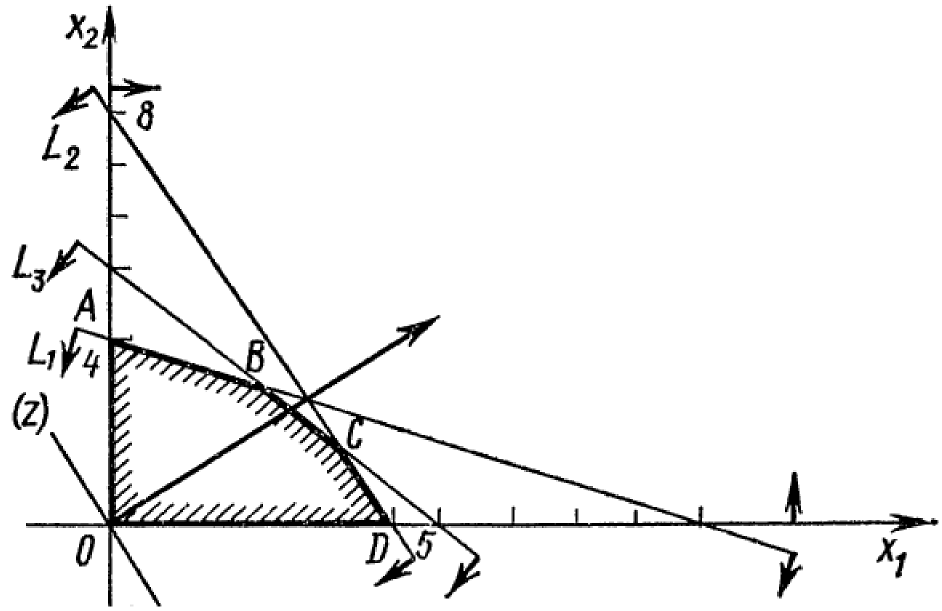


Рис. 5

Из рис. 5 следует, что опорной по отношению к многоугольнику решений эта прямая становится в точке *C,* где функция Z принимает максимальное значение. Точка C лежит на пересечении прямых L_2 и L_3. Для определения ее координат решим систему уравнений

$$\begin{cases} 8x_1+5x_2=40, \\ 5x_1+6x_2=30. \end{cases}$$

Оптимальный план задачи: $x_1=\dfrac{90}{23}\approx 3{,}9;\ x_2=\dfrac{40}{23}\approx 1{,}7,$ т.е. $X_{opt}=\left(\dfrac{90}{23};\quad \dfrac{40}{23}\right)$ и

$Z_{\max}=Z\left(X_{opt}\right)=50\cdot 3{,}9+40\cdot 1{,}7\approx 260{,}3.$

Таким образом для того чтобы получить максимальную прибыль в размере 260,3 ден. ед., необходимо запланировать производство 3,9 ед. продукции P_1 и 1,7 ед. продукции P_2.

Вообще, с помощью графического метода может быть решена задача линейного программирования, система ограничений которой содержит n неизвестных и m линейно независимых уравнений, если n и m связаны соотношением $n-m=2$.

Пример 3. Графическим методом решить следующую задачу линейного программирования

$$Z = 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + 4x_5 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 18x_4 + 2x_5 = -4, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 21x_4 + 4x_5 = 22, \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 - 43x_4 + 11x_5 = 38, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = 1, 2, .., 5).$$

Решение

Используя метод Жордана-Гаусса, произведем три полных исключения неизвестных x_1, x_2, x_3. В результате приходим к системе

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + x_4 - 3x_5 \quad = 6, \\ \quad x_2 \qquad + 7x_4 + 10x_5 \quad = 70, \\ \qquad\quad x_3 - 4x_4 + 5x_5 \quad = 20, \end{cases} \tag{4}$$

откуда

$$x_1 = 6 - x_4 + 3x_5, \quad x_2 = 70 - 7x_4 - 10x_5, \quad x_3 = 20 + 4x_4 - 5x_5. \tag{5}$$

Подставляя эти значения в линейную функцию, и отбрасывая в системе (4) базисные переменные, получаем задачу, выраженную только через свободные неизвестные x_4, x_5:

$$Z = 6x_4 + 15x_5 - 38 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_4 - 3x_5 \leq 6, \\ 7x_4 + 10x_5 \leq 70, \\ -4x_4 + 5x_5 \leq 20, \end{cases}$$

$$x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0.$$

Построим многогранник решений в системе координат x_4Ox_5 (рис. 6). Из рис. 6 заключаем, что линейная функция принимает максимальное значение в угловой точке B , которая лежит на пересечении прямых 2 и 3. В результате решения системы

$$\begin{cases} 7x_4 + 10x_5 = 70, \\ -4x_4 + 5x_5 = 20 \end{cases}$$

находим: $x_4 = 2$; $x_5 = \frac{28}{5}$. Максимальное значение функции

$$Z_{\max} = -38 + 12 + 84 = 58.$$

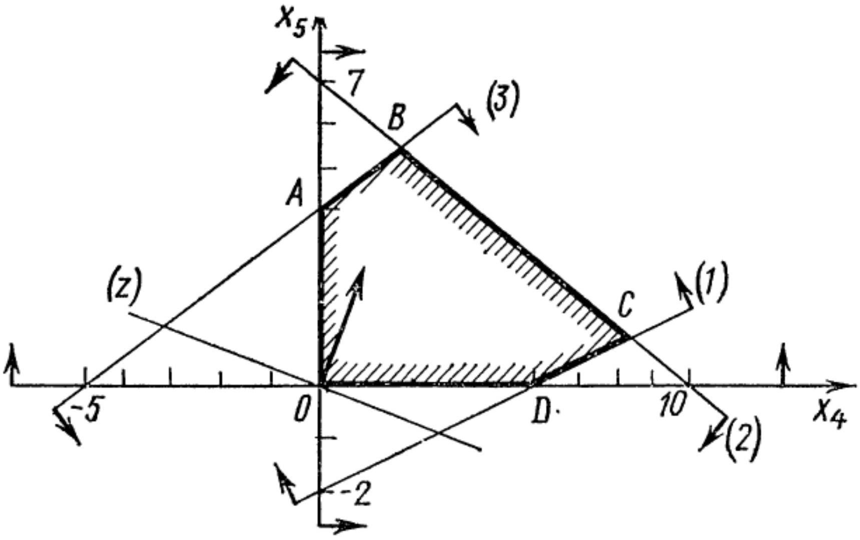


Рис. 6

Для отыскания оптимального плана исходной задачи подставляем в (5) найденные значения $x_4 = 2$; $x_5 = \frac{28}{5}$. Окончательно получаем:

$$x_1 = \frac{104}{5},\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 2,\ x_5 = \frac{28}{5}.$$

Таким образом,

$$X_{opt} = \left(\frac{104}{5}; \frac{40}{3}; 0; 2; \frac{28}{5}\right) \text{ и } Z_{\max} = Z\left(X_{opt}\right) = Z\left(\frac{104}{5}; \frac{40}{3}; 0; 2; \frac{28}{5}\right) = 58.$$

Упражнения

1. Решить графическим методом задачи с двумя переменными.

а) $Z = 3x_1 + 4x_2 \to \max$,

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \ge 0, \\ -x_1 + x_2 \le 3, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ 2x_1 - 5x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

б) $Z = 3x_1 - x_2 \to \max$,

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 4, \\ -x_1 + x_2 \le 2, \\ 3x_1 - 2x_2 \ge 0, \\ x_1 - x_2 \le 0, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

2. Решить графическим методом задачу с $n = 4$ переменными.

$$a)\ Z = 4x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 8x_4 \to \max, \quad б)\ Z = -2x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 6x_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 12, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 12, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4. \qquad x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4.$$

3. В рационе животных используется два вида корма. Животные должны получать четыре вида питательных веществ. Составить рацион питания животных, обеспечивающий минимальные затраты, при исходных данных, заданных таблицей

Необходимое количество питательного вещества	**Норма (ед. массы)**	**Содержание питательного вещества в единице корма**	
		Корм 1	**Корм 2**
Пит. вещ. № 1	20	1	5
Пит. вещ. № 2	24	3	2
Пит. вещ. № 3	32	2	4
Пит. вещ. № 4	2	1	0
Стоимость единицы корма (ден. ед.)		4	6

4. Для изготовления изделий двух типов А и Б имеется 200 кг металла. На изготовление одного изделия типа А расходуется 2 кг металла, а одного изделия типа Б – 4 кг. Составить план производства, обеспечивающий получение наибольшей выручки от продажи изготовленных изделий, если изделие типа А стоит 50 , а одно изделие типа Б стоит 70 , причём изделий типа А можно изготовить не более 60, и изделий типа Б – не более 30.

Вопросы для самопроверки

1. На чем основан графический метод решения задачи линейного программирования?
2. Как определить по рисунку имеет ли задача линейного программирования решение или ее оптимум находится в $\pm\infty$?
3. Какие задачи линейного программирования можно решать графическим методом?

§ 15. Симплексный метод решения задачи линейного программирования

Ключевые слова: *симплексный метод, опорный план, первоначальный опорный план, оптимальный план, условие оптимальности искусственный базис, двухфазный метод, М-метод, вырожденные задачи, зацикливание.*

Для решения задачи линейного программирования имеется много различных методов. В особенности это касается конкретных экономических задач. Систематическое исследование общих задач линейного программирования и разработка общих методов их решения были начаты в работах Л.В. Канторовича в 1939 г. В настоящее время основным общим методом решения общих задач линейного программирования является так называемый симплексный метод, предложенный Данцигом в 1949 году и многочисленные его модификации.

На основании материала, рассмотренного в §§13-14, можно сделать следующий вывод.

Существует такая угловая точка многогранника решений, в которой линейная функция достигает своего наименьшего (наибольшего) значения. Каждой угловой точке многогранника решений соответствует опорный план. Каждый опорный план определяется системой m линейно независимых векторов, содержащихся в данной системе из n векторов, $A_1, A_2, ..., A_n$. Для отыскания оптимального плана необходимо исследовать только опорные планы. Верхняя граница количества опорных планов, содержащихся в данной задаче, определяется числом сочетаний C_n^m. При больших m и n найти оптимальный план, перебирая все опорные планы задачи, очень трудно. Поэтому необходимо иметь схему, позволяющую осуществлять упорядоченный переход от одного опорного плана к другому. Такой схемой является симплексный метод, который позволяет, исходя из известного опорного плана задачи, за конечное число шагов получить ее оптимальный план. Каждый из шагов (или итераций) состоит в нахождении нового плана, которому соответствует меньшее значение линейной функции, чем значение этой же функции в предыдущем плане. Процесс продолжают до получения оптимального плана. Если задача не обладает планами или ее линейная функция не ограничена на многограннике решений, то симплексный метод позволяет установить это в процессе решения.

Отметим, что существуют много эквивалентных друг другу схем, позволяющих осуществлять упорядоченный переход от одного плана к другому. Ниже остановимся на одном из них.

1.Построение опорных планов

Пусть поставлена общая задача линейного программирования (см. §13 п.2.2):

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min$$

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{aligned}$$

$$x_j \ge 0, \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

где a_{ij}, $b_i \ge 0$, c_j - заданные постоянные величины.

Предположим сначала, что система ограничений задачи содержит m единичных векторов, причем без ограничения общности можно предположить, что единичными являются первые m векторов. Тогда имеем задачу

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} x_1 \qquad &+ a_{1m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ x_2 \quad &+ a_{2m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_3 &+ a_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_{m,} \end{aligned} \tag{2}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Запишем систему (2) в векторной форме:

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_mA_m + x_{m+1}A_{m+1} + \ldots + x_nA_n = A_0, \tag{4}$$

где

$$A_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\dots\\0\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\dots\\0\end{pmatrix},\ \dots,\ A_m=\begin{pmatrix}0\\0\\\dots\\1\end{pmatrix},\ A_{m+1}=\begin{pmatrix}a_{1m+1}\\a_{2m+1}\\\dots\\a_{mm+1}\end{pmatrix},\ \dots,\ A_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\dots\\a_{nm}\end{pmatrix},\ A_0=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\dots\\b_m\end{pmatrix}.$$

Поскольку векторы $A_1, A_2, ..., A_m$ линейно независимы, они образуют базис в m мерном пространстве. Поэтому в разложении (4) за базисные неизвестные выбираем $x_1, x_2, ..., x_m$, свободные неизвестные $x_{m+1}, ..., x_n$ приравниваем нулю, и учитывая, что $b_i \geq 0, \quad i = 1, 2, ..., m$, а векторы $A_1, A_2, ..., A_m$ - единичные; получаем первоначальный план:

$$X_0 = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0). \tag{5}$$

Плану (5) соответствует разложение

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + ... + x_m A_m = A_0, \tag{6}$$

где векторы $A_1, A_2, ..., A_m$ линейно независимы, следовательно, построенный первоначальный план является и опорным.

Ниже рассмотрим, как исходя из первоначального опорного плана (5), можно построить второй опорный план. Векторы $A_1, A_2, ..., A_m$ образуют базис в m- мерном пространстве, поэтому каждый из данных n векторов соотношения (4) можно разложить по векторам базиса, причем единственным образом:

$$A_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} A_i, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

Предположим, что для некоторого вектора, не входящего в базис, например, для вектора A_{m+1}, положителен хотя бы один из коэффициентов x_{im+1} в разложении

$$x_{1m+1} A_1 + x_{2m+1} A_2 + ... + x_{mm+1} A_m = A_{m+1}. \tag{7}$$

Выберем некоторую величину $\theta > 0$ **(пока неизвестную),** умножим на нее обе части равенства (7) и вычтем результат почленно из равенства (6). Получаем

$$(x_1-\theta x_{1m+1})A_1+(x_2-\theta x_{2m+1})A_2+\ldots+(x_m-\theta x_{mm+1})A_m+\theta A_{m+1}=A_0. \qquad (8)$$

Таким образом, вектор

$$X_1=\left(x_1-\theta x_{1m+1};x_2-\theta x_{2m+1};\ldots;x_m-\theta x_{mm+1};\theta;0,\ldots,0\right)$$

является планом, если его компоненты неотрицательны.

Так как $\theta>0$, то все компоненты вектора X_1, в которые входят неположительные x_{im+1}, неотрицательны. Потому надо рассмотреть только компоненты, включающие положительные x_{im+1}, $i=1,2,\ldots,m$, т.е. необходимо определить такое $\theta>0$, при котором для всех $x_{im+1}>0$

$$x_i-\theta x_{im+1}\geq 0. \qquad (9)$$

Из (9) получаем $\theta\leq\frac{x_i}{x_{im+1}}$, следовательно, вектор X_1 - план задачи для любого θ, удовлетворяющего условию

$$0<\theta\leq\min\frac{x_i}{x_{im+1}}, \qquad (10)$$

где минимум берется по i, для которых $x_{im+1}>0$.

Опорный план не может содержать $m+1$ положительных компонент, поэтому в плане X_1 необходимо обратить в нуль по крайней мере одну из компонент. Предположим в (10), что

$$\theta=\theta_0=\min_i\frac{x_i}{x_{im+1}}, \qquad (11)$$

тогда компонента плана X_1, для которой достигается минимум, обращается в нуль. Пусть эта компонента стоит на первом месте, т.е.

$$\theta_0=\min\frac{x_i}{x_{im+1}}=\frac{x_1}{x_{im+1}}.$$

Подставляя значение θ_0 в (8), имеем

$$\left(x_1-\frac{x_1}{x_{1m+1}}x_{1m+1}\right)A_1+\left(x_2-\frac{x_1}{x_{1m+1}}x_{2m+1}\right)+\cdots+\left(x_m-\frac{x_1}{x_{1m+1}}x_{mm+1}\right)A_m+\frac{x_1}{x_{1m+1}}A_{m+1}=A_0,$$

откуда получаем разложение

$$x_2'A_2 + x_3'A_3 + ... + x_m'A_m + x_{m+1}'A_{m+1} = A_0,$$

которому соответствует новый опорный план:

$$X_1 = \left(0; x_2', x_3'; ..., x_m'; x_{m+1}'; 0; ...; 0\right),$$

где $x_i' = \theta_0 x_{im}', \quad (i = 1, 2, ..., m); \quad x_{m+1}' = \theta_0$.

Исключение одного вектора из базиса и включение вместо него другого с помощью θ_0 соответствуют переходу от одного базиса к другому с помощью метода Жордана - Гаусса. Поэтому система векторов $A_2, A_3, ..., A_m, A_{m+1}$ линейно независима и является новым базисом.

Для определения следующего опорного плана необходимо любой вектор, не входящий в базис $A_2, A_3, ..., A_m, A_{m+1}$, разложить по векторам этого базиса, а затем определить такое $\theta_0 > 0$, при котором исключался бы один из векторов этого базиса.

Таким образом, **процесс получения новых опорных планов заключается в выборе вектора, который подлежит включению в базис, и определении вектора, подлежащего исключению из базиса.** Критерий, используемый для определения вектора, который включается в базис, является одним из основных элементов симплексного метода. Заметим, что если вектор A_{m+1} подлежит включению в базис, а в его разложении (7) все $x_{im+1} \le 0$, очевидно, нельзя выбрать такое $\theta > 0$, которое исключало бы один из векторов разложения (8). В этом случае план X_1 содержит $m+1$ положительных компонент, а система векторов $A_1, A_2, A_3, ..., A_m, A_{m+1}$ линейно зависимая и определяет не угловую, а внутреннюю точку многогранника решений, в которой линейная функция не может достигать минимального значения. Это указывает на то, что гиперплоскость соответствующая линейной функции, не может стать опорной к многограннику решений, как бы далеко ее ни перемещать в направлении, обратном вектору ∇f, т.е. линейная функция не ограничена на многограннике решений.

Таким образом, **если система ограничений задачи линейного программирования при неотрицательных свободных членах содержит еди-**

ничный базис, то без дополнительных вычислений нужно получить первоначальный опорный план, а также коэффициенты разложения векторов по векторам базиса.

Пример. Дана система

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \qquad\qquad &= 7, \\ 2x_1 - 4x_2 \qquad + x_5 \qquad &= 12, \\ -4x_1 - 3x_2 + 8x_3 \qquad + x_6 &= 10, \end{aligned}$$

или

$$x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 + x_4A_4 + x_5A_5 + x_6A_6 = A_0,$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

За базис выбираем систему векторов A_4, A_5, A_6, так как нам эти векторы единичные и линейно независимые. Базисными неизвестными являются неизвестные x_4, x_5, x_6. Приравнивая нулю, свободные неизвестные $x_1 = x_2 = x_3$ получаем исходное базисное решение - первоначальный опорный план.

Этому плану соответствует разложение

$$7A_4 + 12A_5 + 10A_6 = A_0. \tag{12}$$

Чтобы перейти к другому опорному плану, возьмем любой вектор, не входящий в базис, но имеющий хотя бы одну положительную компоненту, например, A_1 и разложим его по базису. Так как базис единичный, то коэффициентами разложения вектора A_1 по векторам базиса являются компоненты вектора A_1, т.е,

$$3A_4 + 2A_5 - 4A_6 = A_1. \tag{13}$$

В разложении вектора имеются два положительных коэффициента. Умножая последнее соотношение на $\theta > 0$ и вычитая из (12), получим

$$(7 - 3\theta)A_4 + (12 - 2\theta)A_5 + (10 + \theta)A_6 + \theta A_1 = A_0. \tag{14}$$

Для исключения какого-нибудь вектора из разложения (14) находим

$$\theta_0 = \min_i \frac{x_i}{x_{i1}} = \min\left(\frac{7}{3}; \frac{12}{3}\right) = \frac{7}{3}.$$

Подставляя значение $\theta_0 = \frac{7}{3}$ в (14), исключаем из разложения вектор A_4.

Имеем:

$$\left(7 - 3\cdot\frac{7}{3}\right)A_4 + \left(12 - 2\cdot\frac{7}{3}\right)A_5 + \left(10 + 4\cdot\frac{7}{3}\right)A_6 + \frac{7}{3}A_1 = A_0.$$

В результате получаем второе разложение:

$$\frac{22}{3}A_5 + \frac{58}{3}A_6 + \frac{7}{3}A_1 = A_0,$$

которому соответствует новое базисное решение – новый опорный план

$$X_1 = \left(\frac{7}{3};\, 0;\, 0;\, 0;\, \frac{22}{3};\, \frac{58}{3}\right).$$

Заметим, что не всякий вектор можно ввести в базис для получения нового базисного решения. В нашем примере, вводя в базис вектор A_2, не удается получить новое базисное решение – новый опорный план.

Действительно, возьмем вектор A_2, который имеет следующее разложение в первоначальном базисе:

$$-A_4 - 4A_5 - 3A_6 = A_0. \tag{15}$$

Умножая (15) на $\theta > 0$ и вычитая из (12), получаем разложение

$$(7+\theta)A_4 + (12+4\theta)A_5 + (10+3\theta)A_6 + \theta A_2 = A_0,$$

из которого ни при каком $\theta > 0$, нельзя исключить ни один из векторов, т.е. нет возможности получить новое базисное решение.

План $X_1 = \left(0;\, \theta;\, 0;\, 7+\theta;\, 12+\theta;\, 10+3\theta\right)$ не является опорным, так как содержит четыре положительные компоненты и соответствует внутренней точке многогранника решений.

2. Условия оптимальности

Предположим, что задача линейного программированная (1) - (3) обладает планами, и каждый ее опорный план является невырожденным. В этом случае для опорного плана (5) имеем:

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_mA_m = A_0, \qquad (16)$$

$$x_1c_1 + x_2c_2 + \ldots + x_mc_m = f\left(X_0\right), \qquad (17)$$

где все $x_i > 0$, а $f\left(X_0\right)$- значение линейной функции, соответствующее этому плану.

Разложение любого вектора A_j по векторам данного базиса $A_1, A_2, \ldots, A_m$ единственное:

$$x_{1j}A_1 + x_{2j}A_2 + \ldots + x_{mj}A_j = A_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (18)$$

поэтому разложению вектора A_j в базисе соответствует и единственное, значение линейной функции

$$x_{1j}c_1 + x_{2j}c_j + \ldots + x_{mj}c_m = f_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (19)$$

где f_j- значение линейной функции, если в нее вместо неизвестных подставить соответствующие коэффициенты разложения j- го вектора по векторам базиса.

Обозначим через c_j коэффициент линейной функции, соответствующий вектору A_j. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Если для некоторого вектора A_j выполняется условие $f_j - c_j > 0$, то план X_0 не является оптимальным, и можно построить такой план X, для которого выполняется неравенство $f\left(X\right) < f\left(X_0\right)$.

Следствие. Если для некоторого плана X_0 разложения всех векторов A_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ в данном базисе удовлетворяют условию

$$f_j - c_j \le 0, \qquad (20)$$

то план X_0 является оптимальным.

Неравенства (20) являются **условием оптимальности плана** задачи, решаемой **на отыскание минимального значения линейной функции,** а значения $\Delta_j = f_j - c_j$ называются **оценками плана.**

Таким образом, **для того чтобы план задачи на отыскание минимального значения линейной функции был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы его оценки были неположительными.**

Для задачи линейного программирования (1) - (3), заключающейся в отыскании максимального значения линейной функции, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Если для некоторого вектора A_j, выполняется условие $f_j - c_j < 0$, то план X_0 не является оптимальным и можно построить такой план X, для которого выполняется условие $f\left(X\right) > f\left(X_0\right)$.

Следствие. Если для некоторого плана X_0 разложения всех векторов $A_j, \quad j = 1, 2, ..., n$ в данном базисе удовлетворяют условию

$$f_j - c_j \le 0, \tag{21}$$

то план X_0 является оптимальным.

Неравенство (21) - **условие оптимальности плана** задачи решаемой **на отыскание максимального значения линейной функции.**

Таким образом, **для того чтобы план задачи на отыскание максимального значения линейной функции был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы его оценки были неотрицательными.**

3. Алгоритм симплексного метода

Как следует из теорем 1 и 2 и следствий, начиная с исходного опорного плана задачи можно получить последовательность опорных планов, завершающихся оптимальным планом.

Продолжим рассмотрение задачи линейного программирования (1) - (3) на отыскание минимального значения линейной функции, опорный план которой $X_0 = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$, определяется системой m- мерных единичных векторов $A_1, A_2, ..., A_m$. Для исследования этого опорного плана на оптимальность необходимо векторы $A_j, \quad j = 1, 2, ..., n$ системы (2) разложить по векторам базиса $A_1, A_2, ..., A_m$ и подсчитать значения оценок $\Delta_j = f_j - c_j$. Базис является единичным, поэтому коэффициентами разложения вектора A_j по базису служат его компоненты, т.е. $x_{ij} = a_{ij}, \quad i = 1, 2, ..., m; \quad j = 1, 2, ..., n$. Дальнейшие вычисления удобнее проводить, если условия задачи и первоначальные данные, полученные после определения первого опорного плана, записать в симплексную таблицу (табл. 1). В столбце C базиса запишем коэффициенты линейной функции, соответствующие векторам базиса. В столбце A_0- первоначальный опорный план X_0, в нем же в результате вычислений получаем оптимальный план, в столбцах $A_j, \quad j = 1, 2, ..., n$ записываем коэффициенты разложения j- го вектора по базису, обозначаемые в дальнейшем через X_j.

В $m+1$- й строке в столбце A_0 записываем значения линейной функции $f(X_0)$, которое она принимает при найденном опорном плане, а в столбцах A_j- значения оценок $\Delta_j = f_j - c_j$.

Значения $f(X_0)$ и $f_j = f(X_j)$ находим, подставляя в линейную функцию, соответственно, компоненты опорного плана и коэффициенты разложения j-го вектора по векторам базиса, поэтому эти значения в табл. 1 можно получить как скалярное произведение:

$$f(X_0) = C_б X_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i,$$

$$f_j = C_б X_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij}, \quad j = 1, 2, ..., n,$$

где c_j коэффициенты линейной функции, соответствующие векторам базиса.

Таблица 1

i	**Базис**	$C_б$	A_0	c_1	c_2	$\cdots$	c_l	$\cdots$	c_m	c_{m+1}	$\cdots$	c_j	$\cdots$	c_k	$\cdots$	c_n
				A_1	A_2	$\cdots$	A_l	$\cdots$	A_m	A_{m+1}	$\cdots$	A_j	$\cdots$	A_k	$\cdots$	A_n
1	A_1	c_1	x_1	1	0	$\dots$	0	$\dots$	0	x_{1m+1}	$\cdots$	x_{1j}	$\cdots$	x_{1k}	$\cdots$	x_{1n}
2	A_2	c_2	x_2	0	1	$\dots$	0	$\dots$	0	x_{2m+1}	$\cdots$	x_{2j}	$\cdots$	x_{2k}	$\cdots$	x_{2n}
…	…	…	…	…	0	…	..	…	…	…	…		…	…	…	…
l	A_l	c_l	x_l	0	0	$\dots$	1	$\dots$	0	x_{lm+1}		x_{lj}	$\cdots$	x_{lk}	$\cdots$	$x_{\ln}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…		…	…	…	…
m	A_m	c_m	x_m	0	0	$\dots$	0	$\dots$	1	x_{mm+1}	$\cdots$	x_{mj}	$\cdots$	x_{mk}	$\cdots$	x_{mn}
$m+1$	Δ_j		f_0	0	0	$\dots$	0	$\dots$	0	$f_{m+1}-$ $-c_{m+1}$	$\cdots$	f_j- $-c_j$	$\cdots$	f_k- $-c_k$	$\cdots$	f_n- $-c_n$

После составления табл. 1 просматриваем $m+1$- ю строку. Если для всех $j=1,2,...,n$ разности $f_j-c_j\le 0$, то опорный план X_0 оптимальный и минимальное значение линейной функции равно $f\left(X_0\right)$.

Предположим, что одна из оценок $f_j-c_j>0$; тогда план X_0 не является оптимальным и, включая в базис вектор, соответствующий этой оценке, можно построить другой опорный план, которому соответствует меньшее значение линейной функции.

Если положительных оценок несколько, то в базис должен быть включен вектор, которому соответствует $\max\left[\theta_{0j}\left(f_j-c_j\right)\right]$**, где максимум берется по тем** j**, для которых** $f_j-c_j>0$ **и** θ_{0j} **определяется для каждого** j**.** Это дает возможность на данном шаге перейти к вершине многогранника решений, связанной с наибольшим уменьшением линейной функции и в большинстве случаев приводящей к уменьшению количества итераций, что при решении задачи «вручную» позволяет быстрее получить оптимальное решение. При решении задачи на компьютере вектор, подлежащий включению в базис, выбирается по $\max\left(f_j - c_j\right)$. Если имеется несколько одинаковых максимальных значений $\theta_{0j}\left(f_j - c_j\right)$, то из соответствующих им векторов включается в базис прежде всего вектор, которому соответствует $\min c_j$.

Если хотя бы для одной положительной оценки $f_j - c_j > 0$ коэффициенты разложения x_{ij} соответствующего вектора неположительны, то линейная функция не ограничена на многограннике решений и, выбирая θ, ее значение можно сделать сколь угодно малым; многогранник решений в этом случае (представляет собой неограниченную многогранную область.

Пусть $\max\left[\theta_{0j}\left(f_j - c_j\right)\right] = \theta_{0k}\left(f_k - c_k\right)$, т.е. максимальное значение достигается для k- го вектора, $m < k \le n$. Тогда в базис включается вектор A_k и исключается - вектор, которому соответствует $\theta_{0k} = \min \dfrac{x_i}{x_{ik}}, \quad (x_{ik} > 0)$.

Допустим, что $\theta_{0k} = \min \dfrac{x_i}{x_{ik}} = \dfrac{x_l}{x_{lk}}$ достигается для вектора базиса, состоящего в l- й строке; тогда вектор A_l исключается из базиса. Элемент x_{lk} называется разрешающим, а столбец и строка, на пересечении которых он находится, - направляющими. Новому опорному плану соответствует базис, состоящий из векторов $A_1, A_2, ..., A_{l-1}, A_k, A_{l+1}, ..., A_m$. Чтобы вычислить новый опорный план и проверить его на оптимальность, необходимо все векторы $A_0, A_j, \quad j = 1, 2, ..., n$ разложить по векторам базиса. Первоначальный базис был единичным, поэтому

$$A_0 = x_1 + ... + x_l A_l + ... + x_m A_m, \tag{22}$$

$$A_k = x_{1k} A_1 + ... + x_{lk} A_l + ... + x_{mk} A_m, \tag{23}$$

$$A_j = x_{1j} A_1 + ... + x_{lj} A_l + ... + x_{mj} A_m. \tag{24}$$

Из (23) имеем

$$A_l = \frac{1}{x_{lk}}\left(A_k - x_{1k}A_1 - \ldots - x_{mk}A_m\right). \tag{25}$$

Подставляя выражение A_l в (22), получаем

$$A_0 = x_1A_1 + \ldots + x_l\left[\frac{1}{x_{lk}}\left(A_k - x_{1k}A_1 - \ldots - x_{mk}A_m\right)\right] + \ldots + x_mA_m,$$

или

$$A_0 = \left(x_1 - \frac{x_l}{x_{lk}}x_{1k}\right)_1 A_1 + \ldots + \frac{x_l}{x_{lk}}A_k + \ldots + \left(x_m - \frac{x_l}{x_{lk}}x_{mk}\right)A_m.$$

Таким образом, новый опорный план $X_1 = \left(x_1'; x_2'; \ldots; x_k'; \ldots; x_m'\right)$ вычисляется по формулам

$$\begin{cases} x_i' = x_i - \dfrac{x_l}{x_{lk}}x_{ik} \quad (i \neq l), \\ x_k' = \dfrac{x_l}{x_{lk}} \qquad (i = l). \end{cases} \tag{26}$$

Подставляя в (25) в (27), получаем разложение вектора A_j,- по векторам нового базиса:

$$A_j = x_{1j}'A_1 + \ldots + x_{kj}'A_k + \ldots + x_{mj}'A_m,$$

где

$$\begin{cases} x_{ij}' = x_{ij} - \dfrac{x_{lj}}{x_{lk}}x_{ik} \quad (i \neq l), \\ x_{kj}' = \dfrac{x_{lj}}{x_{lk}} \qquad (i = l). \end{cases} \tag{27}$$

Объединяя (26) и (27), находим, что новый опорный план и разложения векторов в новом базисе при $j = 1, 2, \ldots, n$ определяются по формулам

$$\begin{cases} x_{ij}' = x_{ij} - \dfrac{x_{lj}}{x_{lk}}x_{ik} \quad (i \neq l), \\ x_{lj}' = \dfrac{x_{lj}}{x_{lk}} \quad (i = l), \end{cases} \tag{28}$$

которые являются формулами полных исключений Жордана-Гаусса. Действительно, полагая $j = k$, имеем

$$\begin{cases} x'_{ik} = x_{ik} - \dfrac{x_{lk}}{x_{lk}} x_{ik} \quad (i \neq l), \\ x'_{lk} = \dfrac{x_{lk}}{x_{lk}} = 1 \quad (i = l), \end{cases}$$

т.е. все коэффициенты разложения вектора, вводимого в базис, за исключением одного, обращаются в нуль, а коэффициент, взятый за разрешающий элемент, - в единицу. Вектору базиса соответствует оценка, равная нулю, поэтому для вычисления значений $m+1$- й строки также используем формулы (47).

Таким образом, чтобы получить коэффициенты разложения векторов $A_0, A_j, \quad j = 1,2,...,n$ по векторам нового базиса, значения оценок нового опорного плана и значение линейной функции нужно разделить все элементы направляющей строки на разрешающий элемент и, производя одно полное исключение по методу Жордана - Гаусса с помощью этой преобразованной строки, составить симплексную таблицу (табл. 2).

Таблица 2

i	**Базис**	$C_б$	A_0	c_1	c_2	…	c_l	…	c_m	c_{m+1}	…	c_j	…	c_k	…	c_n
				A_1	A_2	…	A_l	…	A_m	A_{m+1}	…	A_j	…	A_k	…	A_n
1	A_1	c_1	x'_1	1	0	…	x'_{1l}	…	0	x'_{1m+1}	…	x'_{1j}	…	0	…	x'_{1n}
2	A_2	c_2	x'_2	0	1	…	x'_{2l}	…	0	x'_{2m+1}	…	x'_{2j}	…	0	…	x'_{2n}
…	…	…	…	…	0	…	..	…	…	…	…	…	…	…	…	…
l	A_k	c_k	x'_k	0	0	…	x'_{ll}	…	0	x'_{lm+1}		x'_{lj}	…	1	…	$x'_{\ln}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…		…	…	…	…
m	A_m	c_m	x'_m	0	0	…	x'_{ml}	…	1	x'_{mm+1}	…	x'_{mj}	…	0	…	x'_{mn}
$m+1$	Δ_j		f'_0	0	0	…	$f'_l - c_l$	…	0	$f'_{m+1} - c_{m+1}$	…	$f'_j - c_j$	…	0	…	$f'_n - c_n$

Формулы

$$f\left(X_0\right)=C_б X_0; \quad f_j-c_j=C_б X_j-c_j \tag{29}$$

используют для контроля, за правильностью произведенных вычислений.

Если в табл. 2 в $m+1$- й строке все оценки $f_j-c_j \le 0$, то полученный план X_0 является оптимальным; если же имеются положительные оценки, то отыскивают следующий опорный план. Процесс продолжают либо до получения оптимального плана, либо до установления неограниченности линейной функции решаемой задачи.

Если среди оценок оптимального плана только нулевые оценки, соответствующие базисным векторам, то это говорит о единственности оптимального плана. Если же нулевая оценка соответствует вектору, не входящему в базис, то в общем случае это означает, что оптимальный план не единственный.

Действительно, пусть некоторому A_{m+1}, не входящему в базис, соответствует оценка $f_{m+1}-c_{m+1}$. Включим этот вектор в базис и по θ_{0m+1} какой-то вектор исключим из базиса. В результате получим новый опорный план, которому соответствует то же значение линейной функции, что и в первоначальном оптимальном плане, т.е. линейная функция достигает оптимума в двух угловых точках многогранника решений, но тогда по теореме 3 (см. §13) она достигает его в любой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих угловых точек. Таким образом, в этом случае задача линейного программирования обладает бесконечным множеством оптимальных планов.

Используя теорему 2 и ее следствие, решаем задачу линейного программирования на отыскание максимального значения линейной функции.

При невыполнении условия оптимальности (21) в базис включают, в первую очередь, тот вектор, которому соответствует $\min\left[\theta_{0j}\left(f_j-c_j\right)\right]$, где минимум берется по тем j, для которых $f_j-c_j<0$. Если минимальных оценок несколько, то в базис, прежде всего, включают вектор, который соответствует $\max c_j$. В остальном симплексный процесс аналогичен процессу, имеющему место при отыскании минимального значения линейной функции.

Пример. На заводе изготовляются изделия четырех типов. Стоимости единицы изделия каждого типа: $c_1 = 2, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = 3, \quad c_4 = 5$. На изготовление изделий расходуются энергия, материалы, труд. Размеры на единицу изделия каждого типа и заводские ресурсы на них приведены в следующей таблице.

	I тип	**II тип**	**III тип**	**IV тип**	**Ресурсы**
Энергия	2	3	1	2	30
Материалы	4	2	1	2	40
Трудовые затраты	1	2	3	1	25

Требуется найти такой план производства изделий, при котором стоимость всей продукции завода была максимальна.

Решение

Нетрудно составить математическую модель данной производственной задачи:

$$f = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 \to \max,$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \le 30,$$
$$4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 40,$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 25,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.$$

От этой задачи в нормальной форме перейдем к задаче в канонической форме

$$f = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 \to \max,$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 30,$$
$$4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 40,$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_7 = 25,$$
$$x_1 \ge 0, \ldots, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0, x_6 \ge 0, x_7 \ge 0,$$

где x_5, x_6, x_7 - дополнительные переменные, имеющие экономический смысл свободных ресурсов при рассматриваемом плане.

В качестве первоначального опорного плана можно взять точку $X=(0,0,0,0,30,40,25)$, которой соответствуют базисные векторы A_5, A_6, A_7.

Составим первую симплексную таблицу.

Ба-зис	$C_б$	A_0	2	1	3	5	0	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_5	0	30	2	3	1	2	1	0	0
A_6	0	40	4	2	1	2	0	1	0
A_7	0	25	1	2	3	1	0	0	1
Δ_j		0	-2	-1	-3	-5	0	0	0

В последней строке среди чисел Δ_j имеются отрицательные числа. Значит, первоначальный опорный план неоптимальный. Над отрицательными числами Δ_j нет столбцов из неположительных чисел. Значит пока нельзя сказать, что решение задачи не ограничено. Первоначальный план можно улучшить, включив в базис вектор, которому соответствует $\min\left\{\theta_{0j}\cdot\Delta_j\right\}<0$. Вычислим:

$$\theta_{01}=\min\left\{\frac{30}{2};\frac{40}{4};\frac{25}{1}\right\}=10,\qquad \theta_{02}=\min\left\{\frac{30}{3};\frac{40}{2};\frac{25}{2}\right\}=10,$$

$$\theta_{03}=\min\left\{\frac{30}{1};\frac{40}{1};\frac{25}{3}\right\}=\frac{25}{3},\qquad \theta_{04}=\min\left\{\frac{30}{2};\frac{40}{2};\frac{25}{1}\right\}=15;$$

$$\min\left\{\theta_{0j}\cdot\Delta_j\right\}=\min\left\{(-2\cdot 10);\ (-1)\cdot 10;\ (-3)\cdot\frac{25}{3};\ (-5)\cdot 15\right\}=(-5)\cdot 15=-75.$$

Следовательно, разрешающим элементом служит число 2, стоящее на пересечении первой строки и четвертого столбца, первая строка и четвертый столбец являются направляющими; необходимо вектор A_4 включить в базис, а A_5 исключить.

Составим вторую симплексную таблицу.

Базис	$C_б$	A_0	2	1	3	5	0	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_4	5	15	1	3/2	1/2	1	1/2	0	0
A_6	0	10	2	-1	0	0	-1	1	0
A_7	0	10	0	-1/2	5/2	0	-1/2	0	1
Δ_j		55	3	13/2	-1/2	0	5/2	0	0

Аналогично строится следующая таблица.

Базис	$C_б$	A_0	2	1	3	5	0	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_4	5	13	1	8/5	0	1	3/5	0	-1/5
A_6	0	10	2	-9/10	0	0	-1	1	0
A_3	3	4	0	-1/5	1	0	0	0	2/5
Δ_j		77	3	32/5	0	0	3	0	3/5

Итак, имеем таблицу, у которой в последней строке все числа $\Delta_j \geq 0$. Следовательно, опорный план $X = (0,0,4,13,10,0,0)$ является оптимальным планом исходной задачи, т.е.

$$X_{opt} = X = (0,0,4,13,10,0,0), \text{ и } \quad f_{\max} = f\left(X_{opt}\right) = 77.$$

Упражнение

1. $F = 6x_1 + 5x_2 + 9x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 25, \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 20, \\ 4x_1 + 3x_3 \leq 18, \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \ j = \overline{1, 3}.$

2. $F = 50x_1 + 40x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 20, \\ 8x_1 + 5x_2 \le 40, \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

3. $F = 3x_1 + 4x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 9, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 13, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_2 \le 2, \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

3. $F = 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 50, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 90, \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 70, \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$

4. Решение задач линейного программирования методом искусственного базиса

Выше было показано, что если ограничения задачи линейного программирования содержат единичную матрицу порядка m, то тем самым при неотрицательных правых частях уравнений определен первоначальный план, исходя из которого с помощью симплексного метода находится оптимальный план.

Если ограничения задачи линейного программирования можно преобразовать к виду $AX \le A_0$ при $A_0 \ge 0$, то система ограничений всегда содержит единичную матрицу. Многие задачи линейного программирования не содержат единичной матрицы. В этом случае для решения задач применяются следующие методы:

а) двухфазный метод решения задач линейного программирования;

б) решение задач линейного программирования с помощью М-метода.

Двухфазный метод решения задач линейного программирования

Рассмотрим следующую задачу линейного программирования

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min, \tag{31}$$

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{array} \tag{32}$$

$$x_j \geq 0, \quad \left(j = 1, 2, ..., n\right), \tag{33}$$

где a_{ij}, $b_i \geq 0$, c_j - заданные постоянные величины и система ограничений не содержит единичной матрицы. Предположим, что относительно этой задачи неизвестно, имеет ли она планы и содержит ли уравнения (32) линейно зависимые условия.

Дж. Данцигом предложен метод решения задачи (31)-(33), состоящий из двух фаз. В первой фазе находится опорный план и выясняется вопрос о ранге системы (32), во второй – приводится стандартная процедура симплексного метода. Здесь рассмотрим лишь первую фазу.

По задаче (31)-(32) построим вспомогательную задачу

$$\varphi = x_1 + x_2 + ... + x_m \to \min \tag{34}$$

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} \qquad\qquad = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \qquad + x_{n+2} \qquad = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \qquad\qquad + x_{n+m} = b_m, \end{array} \tag{35}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, ..., n + m, \tag{36}$$

в которой переменные x_{n+i}, $i = 1, 2, ..., m$, называются **искусственными.**

Теорема 3. Необходимым и достаточным условием существования планов задачи (1)-(3) является выполнение равенства

$$\varphi = x_1 + x_2 + ... + x_m = 0 \tag{37}$$

на решении задачи.

Доказательство. Действительно, если равенство (37) выполняется, то из условия $x_{n+i} \geq 0, \quad i = 1,2,...,m$, следует, что $x_{n+i} = 0, \quad i = 1,2,...,m$, а значит, компоненты $x_1, x_2, ..., x_n$ решения задачи (34)-(36) составляют план $X = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ задачи (31) - (33).

Предположим, что равенство (7) на решении

$$X = \left(x_1, x_2, ..., x_n x_{n+1}, ..., x_{n+m}\right)$$

задачи (34)-(36) не выполняется, но задача (31)-(33) имеет план. Дополним этот вектор нулями до плана вектора задачи (34) - (36):

$$X^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, 0, \overset{m}{...} 0 \right).$$

Тогда

$$\varphi\left(X^*\right) = x_1^* + x_2^* + ... + x_m^* < x_1 + x_2 + ... + x_m = \varphi\left(X\right),$$

что противоречит тому, что на векторе $X = \left(x_1, x_2, ..., x_n x_{n+1}, ..., x_{n+m}\right)$ линейная функция (34) достигает минимума.

Значит, условие (37) является необходимым и достаточным для существования допустимых векторов задачи (31) - (33).

Замечание. Задача (34)-(36) всегда имеет решение, так как нижняя граница линейной функции на множестве планов равна нулю.

Вспомогательную задачу (34) - (36) можно решить симплексным методом, ибо первоначальный опорный план для нее известен:

$$X = \left(0, 0, ..., 0, b_1, ..., b_m\right).$$

При решении задачи (34)-(36) возможны три исхода:

1) в полученном решении не все искусственные переменные равны нулю;

2) все искусственные переменные равны нулю и среди базисных векторов нет векторов, соответствующих искусственным переменным;

3) все искусственные переменные равны нулю, но среди базисных векторов есть векторы, соответствующие искусственным переменным.

В случае 1) согласно доказанному, задача (31)-(33) не разрешима из-за отсутствия планов, т.е. из-за того, что уравнения в (32) несовместны.

В случае 2) решение задачи (34)-(36) без искусственных переменных можно использовать в качестве первоначального опорного плана при решении задачи (31)-(33) симплексным методом.

В случае 3) решение задачи (34)-(36) нельзя использовать непосредственно, ибо в конечном базисе присутствуют векторы, соответствующие искусственным переменным. Поэтому, прежде чем переходить ко второй фазе, нужно из числа базисных исключить лишние векторы.

Для этого преобразуем последнюю таблицу первой фазы. В качестве разрешающей строки выберем строку с искусственной переменной x_{n+k}. В качестве разрешающего столбца берем столбец, в котором находится вектор условий $A_j,\ \ j \le n,$ не вошедший в базис, и в котором $x_{n+k\,j} \neq 0$. После преобразования таблицы строка Δ_j не изменится. Не изменится и столбец A_0, только теперь вместо переменной x_{n+k} будет стоять переменная $x_j = 0,\ \ j \le n$. Этот процесс закончится или удалением из базиса всех векторов, соответствующих искусственным переменным, или получением равенств

$$x_{n+k\,j} = 0, j = 1, 2, ..., n; \quad k = k_1, k_2, ..., k_s, \tag{38}$$

для всех оставшихся искусственных базисных переменных $x_{n+k};\ \ k = \overline{k_1, k_s}$. В первом случае переходим ко второй фазе. Второй случай по смыслу чисел x_{ij} означает, что среди уравнений в (32) есть линейно зависимые. Напомним, что x_{ij} - i-я координата вектора A_j по базисному вектору A_i. Если $x_{n+k\,j} \neq 0$ для всех $j = 1, 2, ..., n$, то это означает, что все векторы можно разложить по базисным, в которые не входит вектор A_{n+k}, т.е. на вектор A_{n+k} базисные векторы можно сократить. Поэтому при выполнении равенств (38) в симплексной таблице вычеркиваем s строк, содержащих искусственные переменные, и вторую фазу начнем с $m - s$ базисных векторов.

В терминах исходной задачи полученный результат означает, что из уравнений (32) исключается s линейно зависимых и процедура симплексного метода начинается при меньшем числе уравнений.

Проиллюстрируем двухфазный метод на следующем примере.

Пример 1.

$$f = -x_1 + 2x_2 - x_3 \to \min,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 5,$$
$$2x_1 + x_2 = 3,$$
$$-2x_1 + 2x_2 = 4,$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

Решаем задачу первой фазы:

$$\varphi = x_4 + x_5 \to \min,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 5,$$
$$2x_1 + x_2 + x_4 = 3,$$
$$-2x_1 + 2x_2 + x_5 = 4,$$
$$x_1 \geq 0, \ldots, x_5 \geq 0.$$

Произведя вычисления, получим следующие таблицы:

Базис	$C_б$	A_0	0	0	0	1	1
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3	0	5	1	1	1	0	0
A_4	1	3	2	1	0	1	0
A_5	1	4	-2	2	0	0	1
Δ_j		7	0	3	0	0	0

Базис	$C_б$	A_0	0	0	0	1	1
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3	0	3	2	0	1	0	-1/2
A_4	1	1	3	0	0	1	-1/2
A_2	0	2	-1	1	0	0	1/2
Δ_j		1	3	0	0	0	-3/2

Базис	$C_б$	A_0	0	0	0	1	1
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3	0	7/3	0	0	1	-2/3	-1/6
A_1	0	1/3	1	0	0	1/3	-1/6
A_2	0	7/3	0	1	0	1/3	1/3
Δ_j		0	0	0	0	-1	-1

Далее переходим ко второй фазе, взяв за первоначальный опорный план $X = \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right)$ и базис A_1, A_2, A_3. Для этого плана составлена следующая таблица.

Базис	$C_б$	A_0	-1	2	-1
			A_1	A_2	A_3
A_3	-1	7/3	0	0	1
A_1	-1	1/3	1	0	0
A_2	2	7/3	0	1	0
Δ_j		2	0	0	0

Таким образом, $X = \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right)$ доставляет минимум линейной функции $f = -x_1 + 2x_2 - x_3$, т.е.

$$X_{opt} = X = \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right), \text{ и } \quad f_{\min} = f\left(X_{opt}\right) = 2.$$

Решение задач линейного программирования с помощью М-метода

Этот метод предложен американским ученым Чарнесом. В этом методе обе фазы предыдущего метода объединены. Вместо исходной задачи заданной в общем виде

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min,$$

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m,
\end{aligned}
$$

$$x_j \ge 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

где a_{ij}, $b_i \ge 0$, c_j - заданные постоянные величины и система ограничений не содержит единичной матрицы, рассматривается так называемая М-задача или расширенная задача:

$$\overline{f} = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + Mx_{n+1} + \dots + Mx_{n+m} \to \min,$$

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} \qquad\qquad = b_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \qquad + x_{n+2} \qquad = b_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \qquad\qquad + x_{n+m} = b_m,
\end{aligned}
$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, \dots, n+m.$$

Замечание. Здесь для получения единичной матрицы к каждому равенству исходной задачи прибавили по одной переменной x_{n+i}, $i = 1, 2, \dots, m$, которые называют искусственными.

Величина M предполагается достаточно большим положительным числом, если задача решается на отыскание минимального значения линейной функции, и достаточно малым отрицательным числом, если находится максимальное значение линейной функции. Единичные векторы

$$A_{n+1}, A_{n+2}, \dots, A_{n+m},$$

соответствующие искусственным переменным, образуют искусственный базис.

Для отыскания оптимального плана исходной задачи используют следующую теорему.

Теорема 4. Если в оптимальном плане $\overline{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$ расширенной задачи искусственные переменные $x_{n+i} = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, то план $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ является оптимальным планом исходной задачи.

Применение симплексного метода к расширенной задаче обеспечивает построение плана, в котором каждое из искусственных переменных $x_{n+m} = 0$. Если первоначальная задача не обладает планами (т.е. она не совместна), то оптимальное решение расширенной задачи содержит, по крайней мере, одно $x_{n+m} > 0$.

Для отыскания оптимального плана расширенной задачи в случае, если заранее не задана величина М, применяется симплексный метод, с составлением симплексных таблиц, которые имеют на одну строку больше, чем обычная симплексная таблица. По этой $m+2$-й строке определяют вектор, подлежащий включению в базис. Итерационный процесс по $m+2$- й строке проводят для исключения из базиса всех искусственных векторов, затем процесс отыскания оптимального плана продолжают по $m+1$-й строке.

Проиллюстрируем М-метод на следующем примере.

Пример.

$$
\begin{aligned}
&f = -x_1 + 2x_2 - x_3 \to \min \\
&\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 = 2, \\
&x_1 + 2x_2 = 3, \\
&-x_1 + 4x_2 = 3, \\
&x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Так как вектор условий A_3 является единичным, то его можно взять в качестве базисного. Поэтому вводим две искусственные переменные x_4, x_5 и составляем расширенную задачу (М-задачу):

$$
\begin{aligned}
&\overline{f} = -x_1 + 2x_2 - x_3 + Mx_4 + Mx_5 \to \min \\
&\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 = 2, \\
&x_1 + 2x_2 + x_4 = 3, \\
&-x_1 + 4x_2 + x_5 = 3, \\
&x_1 \ge 0, \dots, x_5 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Произведя стандартные вычисления, получим следующие таблицы:

Базис	$C_б$	A_0	-1	2	-1	M	M
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3	-1	2	1/2	1/2	1	0	0
A_4	M	3	1	2	0	1	0
A_5	M	3	-1	4	0	0	0
Δ_j		-2	1/2	-5/2	0	0	0
		6	0	6	0	0	0

Базис	$C_б$	A_0	-1	2	-1	M	M
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3	-1	13/8	5/8	0	1	0	-1/8
A_4	M	3/2	3/2	0	0	1	-1/2
A_2	2	3/4	-1/4	1	0	0	1/4
Δ_j		-13/8	-1/8	0	0	0	5/8
		9/4	3/2	0	0	0	-3/2

Базис	$C_б$	A_0	-1	2	-1	M	M
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3	-1	1	0	0	1	-5/12	1/12
A_1	-1	1	1	0	0	2/3	-1/3
A_2	2	1	0	0	0	1/6	1/6
Δ_j		0	0	0	0	1/12-M	7/12-M

Таким образом, $\overline{X} = (1,1,1,0,0)$ является оптимальным планом расширенной задачи (М-задачи). В нем искусственные переменные $x_4 = 0, x_5 = 0$, следовательно, в силу теоремы 4 план $X = (1,1,1)$ является оптимальным планом исходной задачи, т.е.

$$X_{opt} = X = (1,1,1), \text{ и } \quad f_{\min} = f\left(X_{opt}\right) = 0.$$

Замечание. Отметим, что если исходная задача является задачей на отыскание максимального значения линейной функции, то для нее М-задача или расширенная задача имеет вид:

$$\overline{f} = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n - Mx_{n+1} - ... - Mx_{n+m} \to \max,$$

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \quad + x_{n+2} = b_2,\\
&...\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \quad + x_{n+m} = b_m,
\end{aligned}$$

$$x_j \ge 0, \qquad j = 1,2,...,n+m.$$

Замечание. С помощью последней задачи довольно просто можно показать эвристическую основу М-метода. Она такова. Введением искусственных переменных $x_{n+1} \ge 0, x_{n+2} \ge 0,..., x_{n+m} \ge 0$ нарушается каждое из исходных уравнений. За нарушение условий платится «штраф» - $M\sum_{i=1}^{m} x_{n+i}$, где M - мера штрафа за единицу нарушения. Таким образом, общая прибыль от выбора вектора $X = (x_1, x_2, ...x_n)$, при котором условия задачи выполняются с заданными отклонениями $x_{n+1}, x_{n+2},..., x_{n+m}$, будет равна $c_1x_1 + .. + c_nx_n - M\sum_{i=1}^{m} x_{n+i}$.

При больших относительных штрафах M эта величина может стать отрицательной, поэтому, чем больше M, тем менее выгодно нарушать условия задачи. В задачах линейного программирования существует конечный штраф M, при превышении которого ни одно из условий нельзя нарушать, если стремится получить максимальное значение линейной функции.

Упражнения

Используя вышерассмотренные методы, найдите решения следующих задач.

1. $F = x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - 6 \to \max$,

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 6 \\ 10x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 25, \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \ \ j = \overline{1, 5}.$

2. $F = x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 \to \max$,

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ x_2 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 - x_5 = 25, \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \ \ j = \overline{1, 5}.$

3. $F = 5x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 \to \min$,

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 11, \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \ \ j = \overline{1, 4}.$

4. $F = -2x_1 + 6x_2 + 2x_4 \to \max$,

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 30, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 5, \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \ \ j = \overline{1, 4}.$

5. $F = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 \to \min$,

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 + 6x_4 = 140, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 100, \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \ \ j = \overline{1, 4}.$

6. $F = x_1 - x_2 - 3x_3 \to \min$,

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -6, \\ 3x_1 + x_3 \leq 15, \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \ \ j = \overline{1, 3}.$

5. Вырожденные задачи

Определение. Задача линейного программирования называется невырожденной, если у нее нет вырожденных опорных планов.

Определение. Задача линейного программирования называется вырожденной, если у нее имеется вырожденный опорный план.

Если проанализировать обоснование симплексного метода, приведенного выше, нетрудно обнаружить моменты, где используется предположение о невырожденности задачи. Главная трудность применения стандартной процедуры к вырожденным задачам заключается в том, что на некоторой итерации параметр θ_0 может оказаться равным нулю, в силу чего на ней линейная функция не возрастает. Если подобная ситуация повторится несколько раз, то появляется опасность зацикливания, т.е. через несколько итераций возможно возвращение к тому же базису, при котором впервые оказалось, что $\theta_0 = 0$. Существуют примеры вырожденных задач, при решении которых получается зацикливание. Однако пока не описано практических задач, где это явление наблюдалось. Поэтому целесообразно следовать во всех случаях стандартной процедуре симплексного метода. При этом, возможно, потребуются дополнительные итерации для вырожденных задач, но сохранится простота алгоритма. Существует несколько способов избежания зацикливания.

Вопросы для самопроверки

1. Перечислите условия оптимальности опорного плана задачи линейного программирования на отыскание минимального и максимального значений линейной функции.

2. Как определяется вектор для включения в базис, если первоначальный план не является оптимальным?

3. Когда линейная функция не ограничена на многограннике решений?

4. Как определить вектор, подлежащий исключению из базиса? Какой элемент называется разрешающим?

5. Выведите формулы разложения векторов по векторам базиса и покажите, что они являются формулами полного исключения.

6. Какой метод решения систем линейных уравнений лежит в основе симплексного метода?

7. Какая переменная называется искусственной, когда она вводится и какой коэффициент соответствует ей в линейной функции?

8. Зачем в системе ограничений необходим единичный базис?

9. Когда оптимальный план расширенной задачи является оптимальным планом исходной задачи?

10. Когда исходная задача несовместна, и как это определить с помощью решения расширенной задачи?

11. Как определяется вектор, подлежащий включению в базис при использовании искусственного базиса?

12. Что такое зацикливание, и в какой задаче линейного программирования оно может произойти?

§16. Теория двойственности в линейном программировании

Ключевые слова: *двойственность, двойственная задача, симметрические двойственные задачи, несимметрические двойственные задачи, теоремы двойственности, двойственный симплексный метод, оптимальное решение, статус ресурсов, дефицитный ресурс, недефицитный ресурс, ценность ресурса, вариация коэффициентов целевой функции, двойственные оценки ресурса, приращение ресурса.*

1. Понятие двойственности

Любой задаче линейного программирования можно определенным образом сопоставить некоторую другую связанную с ней задачу, которую называют **двойственной по отношению к первой**. Первоначальная задача называется **исходной** или **прямой.**

Связь исходной и двойственной задач состоит в том, что коэффициенты C_j функции цели исходной задачи являются свободными членами системы ограничений двойственной задачи, свободные члены b_i системы ограничений исходной задачи служат коэффициентами функции цели двойственной задачи, а матрица коэффициентов системы ограничений двойственной задачи является транспонированной матрицей коэффициентов системы ограничений исходной задачи. Решение двойственной задачи может быть получено из решения исходной и наоборот (см.п.2).

В качестве примера рассмотрим задачу использования ресурсов. Предприятие №1 имеет m видов ресурсов в количестве b_i $(i=1,2,...,m)$ единиц, из которых производится n видов продукций. Для производства 1 ед. j-й продукции расходуется a_{ij} ед. i - го ресурса, а ее стоимость составляет C_j ед. Составить план выпуска продукции, обеспечивающий ее максимальный выпуск в стоимостном выражении. Обозначим через x_j $(j=1,2,...,n)$ количество ед. j - й продукции. Тогда математическая модель исходной задачи имеет вид:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\ &\quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0, \end{aligned} \tag{2}$$

т.е. найти вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, который удовлетворяет ограничениям (2) и доставляет максимальное значение линейной функции (1).

Допустим, предприятие №1 решило продать все ресурсы (на рынке спрос на эти ресурсы очень высок), а предприятие №2 решило закупить все ресурсы, которыми располагает предприятие №1. В этом случае предприятиям (совместно) необходимо установить оптимальные цены на эти ресурсы, исходя из следующих условий:

1) общая стоимость ресурсов для предприятия №2 должна быть минимальной;

2) за каждый вид ресурса предприятию №1 надо уплатить не менее той суммы, которую это предприятие может получать при переработке данного вида ресурса в готовую продукцию.

Оценим ресурсы, необходимые для изготовления продукции. Обозначим через y_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ стоимость единицы i-го ресурса. Тогда стоимость всех затраченных ресурсов, идущих на изготовление единицы j-й продукции, равна $\sum_{i=1}^{m} a_{ji} y_i$. Стоимость затраченных ресурсов не может быть меньше стоимости окончательного продукта, поэтому должно выполняться неравенство $\sum_{i=1}^{m} a_{ji} y_i \geq C_j$, $j = 1, 2, \ldots, n.$ Стоимость всех имеющихся ресурсов выразится величиной $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$.

Итак, получили следующую задачу

$$g = b_1 y_1 + b_2 y_2 + ... + b_m y_m \to \min, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ &a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \ge c_n, \\ &\quad y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, ..., y_m \ge 0, \end{aligned} \tag{4}$$

т.е. найти вектор $Y = (y_1, y_2, ..., y_m)$, который удовлетворяет ограничениям (4) и доставляет минимальное значение линейной функции (3).

Связь полученной задачи (3)-(4) с исходной задачей (1)-(2) очевидна. Задача (3)-(4) является двойственной к исходной задаче (1)-(2).

Отношение двойственности является взаимным. Если двойственную задачу считать исходной, то двойственной к ней будет прямая задача, поэтому имеет смысл, говорить о паре двойственных задач.

Обычно различают следующие виды пары двойственных задач - симметрических и несимметрических.

1. Симметрические двойственные задачи

Разновидностью двойственных задач линейного программирования являются двойственные симметрические задачи, в которых система ограничений как исходной, так и двойственной задач задается неравенствами, причем на двойственные переменные налагается условие неотрицательности.

Исходная задача

$$\begin{aligned} &f = C'X \to \min, \\ &AX \ge A_0, \quad X \ge 0. \end{aligned}$$

Двойственная задача

$$\begin{aligned} &g = A_0'Y \to \max, \\ &A'Y \le C, \quad Y \ge 0. \end{aligned}$$

2. Несимметрические двойственные задачи

В несимметрических двойственных задачах система ограничений исходной задачи задается в виде равенств, а двойственной – в виде неравенств, причем в последней переменные могут быть и отрицательными.

Исходная задача

$$f = C'X \to \min,$$
$$AX = A_0, \quad X \ge 0. \tag{5}$$

Двойственная задача

$$g = A_0'Y \to \max,$$
$$A'Y \le C. \tag{6}$$

Замечание. Систему неравенств в симметрических двойственных задач с помощью дополнительных переменных можно преобразовать в систему уравнений, поэтому всякую пару симметрических двойственных задач можно преобразовать в пару несимметрических. Поэтому ниже (в п.2.) теорему двойственности докажем для несимметрических двойственных задач.

Математические модели пары двойственных задач могут иметь один из следующих видов.

Таблица 1

№	Исходная задача	Двойственная задача
Несимметричные задачи		
I	$f = C'X \to \min,$ $AX = A_0, \quad X \ge 0$	$g = A_0'Y \to \max,$ $A'Y \le C$
II	$f = C'X \to \max,$ $AX = A_0, \quad X \ge 0$	$g = A_0'Y \to \min,$ $A'Y \ge C$
Симметричные задачи		
III	$f = C'X \to \min,$ $AX \ge A_0, \quad X \ge 0$	$g = A_0'Y \to \max,$ $A'Y \le C, \quad Y \ge 0$
IV	$f = C'X \to \max,$ $AX \le A_0, \quad X \ge 0$	$g = A_0'Y \to \min,$ $A'Y \ge C, \quad Y \ge 0$

Следовательно, прежде чем записать двойственную задачу для данной исходной, систему ограничений исходной задачи необходимо привести к соответствующему виду.

Пример 1. Для следующей задачи

$$f = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 12, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 24, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 18, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

составить двойственную задачу.

Решение

Рассматриваемая задача относится к несимметричным задачам (II вид). Число переменных в двойственной задаче равно числу уравнений исходной задачи, т.е. равно трём. Коэффициентами целевой функции двойственной задачи являются свободные члены системы уравнений исходной задачи, т.е. 12, 24, 18.

Целевая функция исходной задачи исследуется на максимум, а система условий содержит только уравнения. Поэтому в двойственной задаче целевая функция исследуется на минимум, а её переменные могут принимать любые значения (в том числе и отрицательные). Так как все три переменные исходной задачи принимают только лишь неотрицательные значения, то в системе условий двойственной задачи должны быть три неравенства вида «≥». Следовательно, для исходной задачи двойственная задача имеет вид:

$$g = 12y_1 + 24y_2 + 18y_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 + 3y_3 \ge 2, \\ 3y_1 - y_2 + y_3 \ge 1, \\ -5y_1 + 4y_2 + y_3 \ge 3, \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0. \end{cases}$$

Пример 2. Для следующей задачи

$$f = 2x_1 + x_2 + 5x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \le 4, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 \ge 5, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

составить двойственную задачу.

Решение

Эта задача в таком виде не соответствует ни одному из видов задач, приведённых в таблице. Однако, умножением первого неравенства на –1, её можно привести к виду III:

$$f = 2x_1 + x_2 + 5x_3 \to \min,$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \ge -4, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 \ge 5, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Для этой задачи двойственной будет следующая задача:

$$g = -4y_1 + 5y_2 + 6y_3 \to max,$$
$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + 2y_3 \le 2, \\ y_1 - 5y_2 - y_3 \le 1, \\ y_1 + y_2 + 3y_3 \le 5, \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0. \end{cases}$$

Пример 3. Для следующей задачи

$$f = 4x_1 + x_2 - 4x_3 \to \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 \le 12, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 13, \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 \le 11, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

составить двойственную задачу.

Решение

Эта задача тоже не соответствует ни одному из видов задач, приведённых в таблице. Рассматриваемую задачу можно переписать следующим образом:

$$f = 4x_1 + x_2 - 4x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 \le 12, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 \le 13, \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 \le 11, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

Эта задача относится к симметричным задачам вида IV. Поэтому двойственная задача будет иметь вид:

$$g = 12y_1 + 13y_2 + 11y_3 \to min,$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 4, \\ -y_1 + 3y_2 + 5y_3 \ge 1, \\ 4y_1 - 2y_2 - 6y_3 \le -4, \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0. \end{cases}$$

2. Связь между решениями прямой и двойственной задач

Рассмотрим пару двойственных задач (5) и (6). Существующие связи между оптимальными планами пары двойственных задач устанавливают следующие теоремы двойственности.

Теорема 1 (первая теорема двойственности). Если из пары двойственных задач одна обладает оптимальным планом, то и другая имеет решение, причём для экстремальных значений целевых функций выполняется соотношение

$$\min f = \max g, \qquad X_{opt} = D^{-1}A_0, \qquad Y_{opt} = C_Б^* D^{-1},$$

где D^{-1} – матрица, составленная из компонент векторов окончательного базиса, A_0 – вектор, составленный из свободных членов исходной задачи, $C_Б^*$- вектор, составленный из коэффициентов при окончательных базисных переменных в целевой функции.

Если целевая функция одной из задач не ограничена, то другая не имеет решения.

Приведенная теорема позволяет при решении одной из двойственных задач находить оптимальный план другой.

Пример 4. Для следующей задачи

$$f = x_2 - x_4 - 3x_5 \to \min,$$
$$x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 1,$$
$$-4x_2 + x_3 = 2x_4 - x_5 = 2,$$
$$3x_2 + x_5 + x_6 = 5,$$
$$x_j \geq 0, \;\; j = \overline{1,6}$$

составить двойственную задачу и найти её решения.

Решение

Двойственная задача имеет вид:

$$g = y_1 + 2y_2 + 5y_3 \to \max,$$
$$\begin{cases} 2y_1 - 4y_2 + 3y_3 \leq 1 \\ -y_1 + 2y_2 \leq -1 \\ y_1 - y_2 + y_3 \leq -3 \\ y_1 \leq 0, y_2 \leq 0, y_3 \leq 0 \end{cases}.$$

Решение исходной задачи находим симплексным методом.

Б	**$C_Б$**		**0**	**1**	**0**	**-1**	**-3**	**0**
		A_0	**A_1**	**A_2**	**A_3**	**A_4**	**A_5**	**A_6**
A_1	0	1	-1	2	0	-1	1	0
A_3	0	2	0	-4	1	2	-1	0
A_6	0	5	0	3	0	0	1	1
Δ_j		0	0	-1	0	1	3	0
A_5	-3	1	1	2	0	-1	1	0
A_3	0	3	1	-2	1	1	0	0
A_6	0	4	-1	1	0	1	0	1
Δ_j		-3	-3	-7	0	4	0	0
A_5	-3	4	2	2	1	0	1	0
A_4	-1	3	1	-2	1	1	0	0
A_6	0	1	-2	3	-1	0	0	1
Δ_j		-15	-7	1	-4	0	0	0
A_5	-3	4	2	0	1	0	1	0
A_4	-1	11/3	-1/3	0	1/3	1	0	2/3
A_2	1	1/3	-2/3	1	-1/3	0	0	1/3
Δ_j		-46/3	-19/3	0	-11/3	0	0	-1/3

Оптимальный план исходной задачи $X_{opt} = (0;1/3;0;11/3;4;0)$, при котором $f_{\min} = -\dfrac{46}{3}$, получен в четвертой итерации. Используя эту итерацию, найдем оптимальный план двойственной задачи. Согласно первой теоремы двойственности, оптимальный план двойственной задачи находится из соотношения $Y^* = C^* D^{-1}$, где матрица D^{-1}- матрица, обратная матрице, составленной из компонент векторов, входящих в последний базис, при котором получен оптимальный план исходной задачи. В последний базис входят векторы A_5, A_4, A_2; значит,

$$D = (A_5, A_4, A_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица D^{-1} образована из коэффициентов, стоящих в столбцах A_1, A_3, A_6 четвертой итерации:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Из этой же итерации следует $C^* = (-3;-1;-1;1)$. Таким образом,

$$Y^* = C^* D^{-1} = (-3; \quad -1; \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} =$$

$$= (-19/3; \quad -11/3; \quad -1/3),$$

т.е. $y_i = C^* X_i$, где X_i- коэффициенты разложения последней итерации, стоящие в столбцах векторов первоначального единичного базиса.

Итак, i - ю двойственную переменную можно получить из значения оценки последней строки симплексной таблицы, стоящей против соответствующего вектора, входившего в первоначальный единичный базис, если к ней прибавить соответствующее значение коэффициента целевой функции исходной задачи:

$$y_1=-\frac{19}{3}+0=-\frac{19}{3};\ y_2=-\frac{11}{3}+0=-\frac{11}{3}\ ;\ y_3=-\frac{1}{3}+0=-\frac{1}{3}.$$

При этом плане $g_{\max}=-\dfrac{46}{3}$.

Замечание. На практике при нахождении оптимальных планов двойственных задач, выбирают задачу более удобную для решения. Затем с помощью первой теоремы двойственности находят оптимальный план другой.

Пример 5. Найти оптимальный план следующей задачи

$$f=x_1+2x_2+3x_3\to\min,$$
$$\begin{cases}2x_1+2x_2-x_3\ge 2,\\ x_1-x_2-4x_3\le -3,\\ x_1+x_2-2x_3\ge 6,\\ 2x_1+x_2-2x_3\ge 3,\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0.\end{cases}$$

Решение

Для этой задачи двойственной будет следующая задача

$$g=2y_1+3y_2+6y_3+3y_4\to\max,$$
$$\begin{cases}2y_1-y_2+y_3+2y_4\le 1,\\ 2y_1+y_2+y_3+y_4\le 2,\\ -y_1+4y_2-2y_3-2y_4\le 3,\\ y_1\ge 0, y_2\ge 0, y_3\ge 0, y_4\ge 0.\end{cases}$$

Для решения исходной задачи необходимо ввести четыре дополнительные переменные и одну искусственную. Таким образом, исходная симплексная таблица будет состоять из шести строк и девяти столбцов.

Для решения двойственной задачи необходимо ввести три дополнительные переменные. Её первая симплексная таблица содержит четыре строки и восемь столбцов.

Целесообразно решить двойственную задачу. Двойственную задачу решим симплексным методом.

Б	**$C_Б$**	**A**	**2**	**3**	**6**	**3**	**0**	**0**	**0**
			A_1	**A_2**	**A_3**	**A_4**	**A_5**	**A_6**	**A_7**
A_5	0	1	2	-1	1	2	1	0	0
A_6	0	2	2	1	1	-1	0	1	0
A_7	0	3	-1	4	-2	-2	0	0	1
Δ_j		0	-2	-3	-6	-3	0	0	0
A_3	6	1	2	-1	1	2	1	0	0
A_6	0	1	0	2	0	-1	-1	1	0
A_7	0	5	3	6	0	2	2	0	1
Δ_j		6	10	-9		9	6	0	0
A_3	6	3/2	2	0	1	3/2	1/2	1/2	0
A_2	3	1/2	0	1	0	-1/2	-1/2	1/2	0
A_7	0	2	3	0	0	4	5	3	1
Δ_j		21/2	10	0	0	9/2	3/2	9/2	0

Оптимальный план двойственной задачи $Y^* = (0;1/2;3/2;0)$, $g_{\max} = \frac{21}{2}.$ Оптимальный план исходной задачи находим, используя оценки последней строки симплексной таблицы, стоящей в столбцах A_5, A_6, A_7:

$$x_1 = 3/2 + 0 = 3/2; \quad x_2 = 9/2 + 0 = 9/2; \quad x_3 = 0 + 0 = 0.$$

При оптимальном плане исходной задачи

$$X^* = (3/2);9/2;0)$$

целевая функция достигает минимального значения $f_{\min} = \frac{21}{2}$.

Теорема 2 (вторая теорема двойственности). Если при подстановке компонент оптимального плана в систему ограничений исходной задачи i - е ограничение обращается в неравенство, то i - я компонента оптимального плана двойственной задачи равна нулю.

Если i - я компонента оптимального плана двойственной задачи положительна, то i - е ограничение исходной задачи удовлетворяется ее оптимальным решением как строгое равенство.

Упражнения

Построить двойственные задачи.

1. $F = x_1 + 2x_2 - 3x_4 \to \max$,

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 \le 12, \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 \le 10, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 9, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1, 4}$.

2. $F = 3x_1 - x_2 + 2x_3 \to \min$,

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 6, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 \ge -1, \\ 2x_1 + 3x_3 - 2x_4 \ge 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \ge 10, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1, 4}$.

Для каждой из следующих задач линейного программирования составить двойственную задачу и решить обе эти задачи.

3. $F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$,

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le -2, \\ -x_1 - x_2 \le -6, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.

4. $F = x_1 + 2x_2 - x_3 \to max$,

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 12, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 17, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 4, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1, 3}$.

3. Двойственный симплексный метод

Иногда для получения оптимального решения исходной задачи переходят к двойственной и, используя оценки её оптимального плана, определяют оптимальное решение исходной задачи. Переход к двойственной задаче не обязателен, так как если рассмотреть первую симплексную таблицу с m единичным базисом, то легко заметить, что в столбцах записана исходная задача, а в строках - двойственная. Причём оценками плана исходной задачи являются c_j, а оценками плана двойственной задачи - b_i.

Решим двойственную задачу по симплексной таблице, в которой записана исходная задача. Найдём оптимальный план двойственной задачи, а вместе с ним и оптимальный план исходной задачи. Этот метод называется двойственным симплексным методом.

В обычном симплексном методе для преобразования симплексной таблицы (т.е. для перехода к новому допустимому базисному решению) сначала выбирают вектор подлежащий включению в базис, а затем определяют вектор, который необходимо исключить из базиса. В двойственном симплексном методе сначала по условию

$$\min_{b_i<0} b_i = b_l$$

выбирают вектор, подлежащий исключению из базиса, затем определяют вектор, который необходимо включить в базис. Для этого находят

$$\min_{a_{li}<0} \frac{\Delta_i}{a_{li}}.$$

Если этот минимум достигается при j=r, тогда вектор A_r включают в базис, т.е. a_{lr} будет разрешающим элементом. Симплексная таблица преобразовывается как в обычном симплексном методе. Этот процесс продолжают до тех пор, пока из столбца вектора A_0 не будут исключены отрицательные элементы. В результате находим оптимальный план исходной задачи, а, следовательно, и двойственной.

Если на некотором шаге окажется, что в i-й строке симплексной таблицы в столбце вектора A_0 стоит отрицательное число b_i, а среди остальных элементов этой строки нет отрицательных, то исходная задача не имеет решения.

Пример. Следующую задачу

$$F = -x_1 + x_2 - 2x_3 \to \min,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 8,$$

$$x_1 - x_2 \geq 4,$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 6,$$
$$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0,\ \ x_3 \geq 0$$

решить двойственным симплексным методом.

Решение

Эту задачу не трудно привести к следующему виду:

$$F = -x_1 - x_2 - 2x_3 \to \min,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 8,$$
$$-x_1 + x_2 + x_4 = -4,$$
$$-x_1 - 2x_2 + x_5 = -6,$$
$$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0,\ \ x_3 \geq 0,\ \ x_4 \geq 0,\ \ x_5 \geq 0.$$

Выбрав в качестве базиса векторы A_3, A_4 и A_5 составим первоначальную симплексную таблицу для исходной задачи:

Б	$C_б$	A_0	-1	-1	-2	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3	0	8	1	1	1	0	0
A_4	0	-4	-1	1	0	1	0
A_5	0	-6	-1	-2	0	0	1
Δ_i		-16	-1	-1	0	0	0

В столбце вектора A_0 имеются два отрицательных числа (-4 и -6) и в строках векторов A_4 и A_5 имеются отрицательные числа (если бы они отсутствовали, то задача была бы неразрешима). Вектор, подлежащий исключению, выбираем из условия

$$\min\{-4;-6\} = -6,$$

т.е. из базиса исключаем вектор A_5. Чтобы определить, какой вектор необходимо ввести в базис, находим

$$\min_{a_{3j}<0} \frac{\Delta_i}{a_{3j}} = \min\left\{\frac{-1}{-1};\frac{-1}{-2}\right\} = \frac{1}{2}.$$

Значит, в базис вводим вектор A_2. Переходим к новой симплексной таблице.

Б	$C_б$	A_0	-1	-1	-2	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3	-2	5	1/2	0	1	0	1/2
A_4	0	-7	-3/2	0	0	1	1/2
A_2	1	3	1/2	1	0	0	-1/2
Δ_i		-13	-1/2	0	0	0	-1/2

В столбце вектора A_0 стоит отрицательное число -7. Поэтому рассмотрим элементы второй строки. Среди этих чисел есть одно отрицательное -3/2 (если бы такое число отсутствовало, то исходная задача была бы неразрешима). В данном случае переходим к новой симплексной таблице.

Б	$C_б$	A_0	-1	-1	-2	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3	-2	8/3	0	0	1	1/3	2/3
A_1	-1	14/3	1	0	0	-2/3	-1/3
A_3	-1	2/3	0	1	0	1/3	-1/3
Δ_i		-32/3	0	0	0	-1/3	-2/3

Как видно из таблицы, найдены оптимальные планы исходной и двойственной задач. Ими собственно являются:

$$X_{opt} = \left(\frac{14}{3}; \frac{2}{3}; \frac{8}{3}; 0\right), \qquad F_{\max} = -\frac{32}{3};$$

$$Y_{opt} = \left(2; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right), \qquad G_{\max} = -\frac{32}{3}.$$

Упражнения

Найдите решения следующих задач двойственным симплексным методом:

1. $F = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 \to \min$,

$x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 4$,

$3x_1 + x_2 - 4x_3 \ge 7$,

$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ x_3 \ge 0$.

2. $F = x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max$,

$x_1 + x_2 + x_3 = 8$,

$x_1 - x_2 \ge 4$,

$x_1 + x_2 \ge 6$,

$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ x_3 \ge 0$.

3. $F = -4x_1 - 7x_2 - 8x_3 - 5x_4 \to \max$,

$x_1 + x_2 + 2x_4 \ge 4$,

$2x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6$,

$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ x_3 \ge 0,\ \ x_4 \ge 0$.

4. $F = 5x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 \to \min$,

$1{,}5x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \ge 18$,

$3x_1 + 2x_3 - 4x_4 \ge 24$,

$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ x_3 \ge 0,\ \ x_4 \ge 0$.

5. $F = x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \to \min$,

$x_1 - x_2 + 4x_3 + 5x_4 \ge 27$,

$2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 \ge 24$,

$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ x_3 \ge 0,\ \ x_4 \ge 0$.

6. $F = 2x_1 + 3x_2 + 5x_4 \to \max$,

$-2x_1 + x_2 - x_3 = 12$,

$x_1 + 2x_2 + x_4 = 10$,

$3x_1 - 2x_2 - x_5 = 18$,

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0.$

4. Анализ оптимального решения экономической задачи

4.1. Экономическая интерпретация решения задачи линейного программирования

Оказывается заключительная симплексная таблица «насыщена» весьма важными данными, лишь небольшую часть которых составляют оптимальные значения переменных. Из симплексной таблицы можно получить информацию относительно:

- оптимального решения;
- статуса ресурсов;
- ценности каждого ресурса;
- чувствительности оптимального решения к изменению запасов ресурсов, вариациям коэффициентов целевой функции и интенсивности потребления ресурсов.

Сведения, относящиеся к первым трем пунктам, можно извлечь непосредственно из итоговой симплексной таблицы. Получение информации, относящейся к четвертому пункту, требует дополнительных вычислений.

Для иллюстрации возможностей получения указанной выше информации из заключительной симплексной таблицы воспользуемся задачей об ассортименте продукции.

Определение оптимального ассортимента продукции

Предприятие изготавливает два вида продукции P_1 и P_2, которая поступает в оптовую продажу. Для производства продукции используется два вида сырья - A и B. Максимально возможные запасы сырья в сутки составляют 9 и 13 единиц, соответственно. Расход сырья на единицу продукции вида P_1 и вида P_2 дан в табл. 1.

Таблица 1

Сырье	**Расход сырья на 1ед.продукции** P_1	**Расход сырья на 1ед.продукции** P_2	**Запас сырья, ед.**
A	**2**	**3**	**9**
B	**3**	**2**	**13**

Опыт работы показал, что суточный спрос на продукцию P_1 никогда не превышает спроса на продукцию P_2 более чем на 1 ед. Кроме того, известно, что спрос на продукцию P_2 никогда не превышает 2 ед. в сутки.

Оптовые цены единицы продукции равны: 3 ден.ед. – для P_1 и 4 ден. ед. для P_2.

Какое количество продукции каждого вида должно производить предприятие, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Эта задача формулируется следующим образом:

$$Z = 3x_1 + 4x_2 \to \max \quad \text{(доход);}$$

$$2x_1 + 3x_2 \le 9 \quad \text{(сырье А);}$$

$$3x_1 + 2x_2 \le 13 \quad \text{(сырье В);}$$

$$x_1 - x_2 \le 1 \quad \text{(спрос);}$$

$$x_2 \le 2 \quad \text{(спрос);}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Решим эту задачу методом симплекса. Симплексная таблица приведена ниже (см. табл. 2). В этой таблице x_3, x_4, x_5, x_6 - выравнивающие (дополнительные) переменные.

Оптимальное решение

С точки зрения практического использования результатов решения задач линейного программирования, классификация переменных на базисные и небазисные не имеет значения и при анализе оптимального решения могут не учитываться. Переменные, вектора которых отсутствуют в симплексной таблице в столбце $Б$ - «базисные вектора», обязательно имеют нулевое значение. Значения остальных переменных приводятся в столбце A_0 - свободные члены».

Таблица 2

$Б$	$C_б$	A_0	3 A_1	4 A_2	0 A_3	0 A_4	0 A_5	0 A_6
A_3	0	9	2	3	1	0	0	0
A_4	0	13	3	2	0	1	0	0
A_5	0	1	1	-1	0	0	1	0
A_6	0	2	0	1	0	0	0	1
Δ_j		0	-3	-4	0	0	0	0
A_3	0	7	0	5	1	0	-2	0
A_4	0	10	0	5	0	1	-3	0
A_1	3	1	1	-1	0	0	1	0
A_6	0	2	0	1	0	0	0	1
Δ_j		3	0	-7	0	0	3	0
A_2	4	7/5	0	1	1/5	0	-2/5	0
A_4	0	3	0	0	-1	1	-1	0
A_1	3	12/5	1	0	1/5	0	3/5	0
A_6	0	3/5	0	0	-1/5	0	2/5	1
Δ_j		64/5	0	0	7/5	0	1/5	0

При интерпретации результатов оптимизации в задаче об ассортименте продукции нас прежде всего интересуют объемы производства продукции P_1 и P_2, т.е. значения управляемых переменных x_1 и x_2. Используя данные, содержащиеся в симплексной таблице для оптимального решения, основные результаты можно представить в следующем виде:

Управляемые переменные	**Оптимальные значения**	**Решение**
x_1	2,4	Объем производства продукции P_1 должен быть равен 2,4 ед. в сутки
x_2	1,4	Объем производства продукции P_2 должен быть равен 1,4 ед. в сутки
$Z_{\max}$	12,8	Доход от реализации продукции будет равен 12,8 д.е. в сутки

Статус ресурсов

В линейном программировании ресурсы относят либо к дефицитным, либо к недефицитным - в зависимости от того, полное или частичное их использование предусматривает оптимальное решение задачи. Сейчас цель состоит в том, чтобы получить соответствующую информацию непосредственно из оптимальной таблицы.

В модели, построенной для задачи об ассортименте продукции, фигурируют четыре ограничения со знаком «$\leq$». Первые два ограничения (определяющие допустимый расход исходного сырья) представляют собой истинные ограничения на ресурсы. Третье и четвертое ограничения относятся к спросу. Эти требования можно рассматривать как ограничения на соответствующие ресурсы, так как увеличение спроса на продукцию эквивалентно расширению представительства предприятия на рынке сбыта. В отношении финансовых средств такая ситуация имеет те же последствия, что и увеличение запасов ресурсов, требующее распределения дополнительных вложений.

Из вышеизложенного следует, что статус ресурсов (дефицитный или недефицитный) для любой модели линейного программирования можно установить непосредственно из результирующей симплексной таблицы, обращая внимание на значения выравнивающих переменных. Применительно к нашей задаче можно привести следующую сводную таблицу:

Ресурс	Выравнивающая переменная	Статус ресурса
Сырье *A*	$x_3 = 0$	Дефицитный
Сырье *B*	$x_4 = 3$	Недефицитный
Превышение объема производства продукции P_1, по отношению объему производства	$x_5 = 0$	Дефицитный
Спрос на продукцию P_2	$x_6 = 0,6$	Недефицитный

Положительное значение выравнивающей переменной указывает на неполное использование соответствующего ресурса, т.е. данный ресурс является недефицитным. Если же выравнивающая переменная равна 0, то это свидетельствует о полном потреблении соответствующего ресурса. Из сводной таблицы видно, что ресурсы 2 и 4 связаны с запасами сырья *B* и возможностями сбыта продукции P_2. Поэтому любое увеличение их запасов сверх установленного максимального значения приведет лишь к тому, что они станут еще более недефицитными. Оптимальное решение задачи при этом останется неизменным.

Ресурсы, увеличение запасов которых позволяет улучшить решение (увеличить доход), — это сырье *A* и возможности по сбыту продукции P_1, поскольку из оптимальной симплексной таблицы видно, что они дефицитные. В связи с этим логично поставить вопрос: какому из дефицитных ресурсов следует отдать предпочтение при вложении дополнительных средств на увеличение их запасов, с тем чтобы получить от них максимальную отдачу? Ответ на этот вопрос будет дан в следующем разделе этой главы, где рассматривается ценность различных ресурсов.

Ценность ресурса

Ценность ресурса характеризуется величиной улучшения оптимального значения Z, приходящегося на единицу прироста объема данного ресурса. Графическая интерпретация этого определения применительно к условиям задачи об ассортименте продукции была дана в § 4 (вторая задача на чувствительность). Графический анализ показывает, что ценность ресурсов 1, 2, 3 и 4 равна:

y_1= 1,4 д.е. на единицу прироста запасов ресурса сырья *A;*

y_2 =0, y_4 = 0;

y_3 =0,2 д.е. на единицу прироста превышения производства продукции P_1 по отношению к объему производства продукции P_2.

Эта информация представлена в оптимальной таблице, а именно, в последней строке в столбцах, которые соответствуют векторам начального базиса A_3, A_4, A_5, A_6: 1,4; 0; 0,2; 0. Указанные числа в точности соответствуют значениям y_1, y_2, y_3, y_4.

Покажем, каким образом аналогичный результат можно получить непосредственно из симплексной таблицы.

Рассмотрим Z - уравнение оптимальной симплексной таблицы решения задачи об ассортименте продукции:

$$Z = 12{,}8 - \left(1{,}4 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0{,}2 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6\right).$$

Положительное приращение переменной относительно x_3 текущего нулевого значения приводит к пропорциональному уменьшению Z, причем коэффициент пропорциональности равен 1,4 д.е. Однако из первого ограничения модели следует

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9,$$

т.е. увеличение x_3 эквивалентно снижению запаса ресурса 1 (сырья *A).* Отсюда следует, что уменьшение запаса первого ресурса вызывает пропорциональное уменьшение целевой функции с коэффициентом пропорциональности, равным 1,4 д.е. Аналогичные рассуждения справедливы и для ресурса 3.

В отношении ресурсов 2 и 4 было установлено, что их ценность равна 0 ($y_2 = y_4$ =0). Этого и следовало ожидать, так как ресурсы 2 и 4 оказались недефицитными. Такой результат получается всякий раз, когда соответствующие выравнивающие переменные имеют положительное значение.

Несмотря на то, что ценность различных ресурсов, определяемая значениями переменных y_i, была представлена в стоимостном (д.е.) выражении, ее нельзя отождествлять с действительными ценами, по которым возможна закупка соответствующих ресурсов. На самом деле речь идет о некоторой мере, имеющей экономическую природу и количественно характеризующей ценность ресурса только относительно полученного оптимального значения Z. При изменении ограничений модели соответствующие экономические оценки будут меняться даже тогда, когда оптимизируемый процесс предполагает применение тех же ресурсов. Поэтому при характеристике ценности ресурсов экономисты предпочитают использовать такие термины, как теневая цена или двойственная оценка. Заметим, что теневая цена характеризует интенсивность улучшения оптимального решения Z. Однако при этом не фиксируется интервал значений увеличения запасов ресурсов, при которых интенсивность улучшения целевой функции остается постоянной. Для большинства практических ситуаций логично предположить наличие верхнего предела увеличения запасов, при превышении которого соответствующее ограничение становится избыточным, что, в свою очередь, приводит к новому базисному решению и соответствующим ему новым теневым ценам. Ниже определяется интервал значений запасов ресурса, при которых соответствующее ограничение не становится избыточным.

Максимальное изменение запаса ресурса

При решении вопроса о том, запас какого из ресурсов следует увеличивать, в первую очередь, обычно используются двойственные оценки (теневые цены). Чтобы определить интервал значений изменения запаса ресурса, при которых двойственная оценка данного ресурса, фигурирующая в заключительной симплекс-таблице, остается неизменной, необходимо выполнить ряд дополнительных вычислений. Положим, что в задаче об ассортименте продукции запас первого ресурса (сырья A) изменился на Δ_1, т.е. запас сырья A составит $(9 + \Delta_1)$ единиц. Введем это изменение в начальную симплекс-таблицу и затем выполним всю последовательность вычислений.

Поскольку элементы правых частей ограничений никогда не используются в качестве разрешающих, то, очевидно, что на каждой итерации вычислений Δ_1 будет оказывать влияние только на значения элементов столбца «свободные члены».

Результаты вычислений элементов столбца A_0- «свободные члены» сведены в следующую таблицу:

Начальная симплексная таблица	**Оптимальная симплексная таблица**
$9 + \Delta_1$ 13 1 2 0	$1{,}4 + 0{,}2 \cdot \Delta_1$ $3 - 1 \cdot \Delta_1$ $2{,}4 + 0{,}2 \cdot \Delta_1$ $0{,}6 - 0{,}2 \cdot \Delta_1$ $12{,}8 + 1{,}4 \cdot \Delta_1$

Все изменения элементов столбца «свободные члены» определяются непосредственно по данным, содержащимся в симплекс-таблицах. Каждый элемент столбца «свободные члены» представляет собой сумму двух величин: 1) постоянной и 2) члена, линейно зависящего от Δ_1. Постоянные соответствуют числам, которые фигурируют в оптимальной симплекс-таблице до введения Δ_1 в столбце «свободные члены». Коэффициенты при Δ_1 во вторых слагаемых равны коэффициентам при x_3 в оптимальной симплексной таблице.

Заметим, что при анализе изменений в правых частях второго, третьего и четвертого ограничений нужно пользоваться коэффициентами при переменных x_4, x_5, x_6, соответственно.

Так как введение Δ_1 сказывается лишь на правой части ограничений (на элементах столбца «свободные члены»), изменение запаса ресурса может повлиять только на допустимость решения. Поэтому Δ_1 не может принимать значений, при которых какая-либо из базисных переменных становится отрицательной. Из этого следует, что величина Δ_1 должна быть ограничена таким интервалом значений, при котором выполняется условие неотрицательности правых частей ограничений в результирующей симплекс-таблице, т.е.:

$$x_2 = 1{,}4 + 0{,}2 \cdot \Delta_1 \geq 0, \qquad \text{(I)}$$

$$x_4 = 3 - 1 \cdot \Delta_1 \geq 0, \qquad \text{(II)}$$

$$x_1 = 2{,}4 + 0{,}2 \cdot \Delta_1 \geq 0, \qquad \text{(II)}$$

$$x_6 = 0{,}6 - 0{,}2 \cdot \Delta_1 \geq 0. \qquad \text{(IV)}$$

Для определения допустимого интервала изменения Δ_1 рассмотрим два случая.

***Случай* 1:** $\Delta_1 > 0$. Соотношения (I) и (III) всегда выполняются при $\Delta_1 \geq 0$. Соотношения (II) и (IV) определяют следующие предельные значения Δ_1,: $\Delta_1 \leq 3$; $\Delta_1 \leq 3$. Таким образом, все четыре соотношения выполняются при $\Delta_1 \leq 3$.

***Случай* 2:** $\Delta_1 < 0$. Соотношения (II) и (IV) выполняются при $\Delta_1 < 0$, Соотношения (I) и (III) справедливы при $\Delta_1 \geq -12$; $\Delta_1 \geq -7$, соответственно.

Таким образом, оба соотношения справедливы при $\Delta_1 \geq -7$.

Объединяя результаты, полученные для обоих случаев, можно сделать вывод, что при $-7 \leq \Delta_1 \leq 3$ решение рассматриваемой системы всегда будет допустимым. Любое значение Δ_1, выходящее за предел указанного интервала (т.е. уменьшение запаса сырья A более чем на 7 единиц или увеличение более чем на 3 единицы), приведет к недопустимости решения и новой совокупности базисных переменных.

Анализ на чувствительность оптимального решения к вариации коэффициентов целевой функции

Иногда при определенных значениях изменения коэффициентов целевой функции оптимальные значения переменных остаются неизменными (хотя оптимальное значение Z при этом меняется). Возвращаясь к этому вопросу, покажем, каким образом интересующую нас информацию можно получить из данных, содержащихся в оптимальной симплексной таблице.

Следует отметить, что уравнение целевой функции также не используется в качестве ведущего уравнения. Поэтому любые изменения коэффициентов целевой функции окажут влияние только на Z- уравнение результирующей симплексной таблицы. Это означает, что такие изменения могут сделать полученное решение неоптимальным. Наша цель заключается в том, чтобы найти интервалы изменений коэффициентов целевой функции, при которых оптимальные значения переменных остаются неизменными.

Чтобы показать, как выполняются соответствующие вычисления, положим, что доход, получаемый с единицы продукции P_1 изменяется от 3 до 3 + δ_1, где δ_1 может быть как положительным, так и отрицательным числом. Целевая функция в этом случае принимает следующий вид:

$$Z = (3 + \delta_1) \cdot x_1 + 4x_2 \to \max.$$

Если воспользоваться данными начальной симплексной таблицы и выполнить все вычисления, необходимые для получения оптимальной симплексной таблицы, то последнее Z- уравнение будет выглядеть следующим образом:

$Б$	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
Δ_j		$12,8 + 2,4\delta_1$	0	0	$1,4 + 0,2\delta_1$	0	$0,2 + 0,6\delta_1$	0

Это уравнение (строка целевой функции) отличается от Z- уравнения до введения δ_1, только наличием членов, содержащих δ_1. Коэффициенты при δ_1 равны коэффициентам при соответствующих переменных в x_1- уравнении (x_1- строка) симплекс-таблицы для полученного ранее оптимального решения:

$Б$	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_1	3	2,4	1	0	0,2	0	0,6	0

Мы рассматриваем x_1- уравнение, так как коэффициент именно при этой переменной в выражении для целевой функции в начальной симплексной таблице изменился на δ_1.

Оптимальные значения переменных будут оставаться неизменными при значениях δ_1, удовлетворяющих условию неотрицательности (задача на отыскание максимума) всех коэффициентов при свободных переменных в Z- уравнении. Таким образом, должны выполняться следующие неравенства:

$$1{,}4 + 0{,}2 \cdot \delta_1 \geq 0;$$

$$0{,}2 + 0{,}6 \cdot \delta_1 \geq 0.$$

Из первого неравенства получаем, что $\delta_1 \geq -7$, а из второго следует, что $\delta_1 \geq -1/3$. Эти результаты определяют пределы изменения коэффициента

$$-1/3 \leq \delta_1 < +\infty.$$

Таким образом, при уменьшении коэффициента целевой функции при переменной x_1 до значения, равного $\left(3 + \left(\frac{1}{3}\right)\right) = 2\frac{2}{3}$, или при его увеличении до $+\infty$ оптимальные значения переменных остаются неизменными.

Следует отметить, что оптимальное значение Z будет изменяться в соответствии с выражением ($12{,}8 + 2{,}4\ \delta_1$), где $-1/3 \leq \delta_1 < +\infty$.

Мы рассмотрели случай изменения коэффициента при базисной переменной x_1. В случае изменения коэффициента при свободной переменной в целевой функции происходит изменение коэффициента только при данной переменной в оптимальной симплексной таблице. Рассмотрим в качестве иллюстрации случай, когда коэффициент при свободной переменной x_3 (первая выравнивающая переменная) изменяется от 0 до δ_2. Выполнение преобразований, необходимых для получения заключительной симплекс-таблицы, приводит к следующему результирующему Z- уравнению:

$Б$	$С_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
Δ_j		12,8	0	0	1,4-δ_2	0	0,2	0

Из приведенного фрагмента заключительной симплексной таблицы видно, что единственное отличие от Z - уравнения до введения δ_2 состоит в том, что коэффициент при x_5 уменьшился на δ_2. Таким образом, коэффициент при свободной переменной в результирующем Z - уравнении нужно уменьшить на ту же величину, на которую он увеличивался в исходном Z - уравнении.

4.2.Экономико-математический анализ полученных оптимальных решений

Оптимальное решение задачи линейного программирования существенно зависит от реальной экономической ситуации, складывающейся на предприятии. На решение задачи могут повлиять следующие экономические ситуации:

1) изменение запасов ресурсов;

2) внедрение нового технологического способа производства, позволяющего снизить расход сырья А и В;

3) происшедшие изменения в ценовой политике на предприятии;

4) предполагается выпуск нового вида продукции.

Результаты влияния данных экономических ситуаций на оптимальное решение можно получить в ходе проведения экономико-математического анализа модели на чувствительность.

Анализ на чувствительность оптимального решения базируется на второй теореме двойственности.

Теорема. Если при подстановке компонент оптимального плана в систему ограничений исходной задачи i-е ограничение обращается в неравенство, то i-я компонента оптимального плана двойственной задачи равна нулю.

Если i-я компонента оптимального плана двойственной задачи положительна, то i-е ограничение исходной задачи удовлетворяется ее оптимальным решением как строгое равенство.

Таким образом:

1. Двойственные оценки характеризуют дефицитность ресурсов. Величина y_i в оптимальном решении двойственной задачи является оценкой i-го ресурса; чем больше значение оценки y_i, тем выше дефицитность ресурса. Для недефицитного ресурса $y_i = 0$.

2. Двойственные оценки показывают, как влияют изменения правой части ограничений (запасов ресурсов) на значение целевой функции. Практический интерес представляют границы (нижняя и верхняя) изменения ресурсов, в которых величины оценок остаются неизменными.

3. Двойственные оценки являются показателем эффективности производства отдельных видов продукции с позиции критерия оптимальности. С этой точки зрения в оптимальный план может быть включена лишь та продукция j-го вида, для которой выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j .$$

4. Двойственные оценки позволяют провести сравнение суммарных условных затрат и результатов.

Это свойство следует из принципа двойственности, в котором устанавливается связь между значениями функции прямой и двойственной задач, т.е. $Z_{\max} = L_{\min}$. Это означает, что оценка всех затрат производства должна равняться оценке произведенного продукта.

Используя данные свойства двойственных оценок, проведем анализ изменений исходной задачи, которые могут привести к недопустимости и неоптимальности решения.

Обратимся к конкретной задаче и проиллюстрируем применение анализа оптимального решения на чувствительность на примере задачи оптимизации ассортимента выпускаемой продукции.

Математическая модель исходной задачи имеет вид:

$$Z = 3x_1 + 4x_2 \to \max, \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} &2x_1 + 3x_2 \le 9 && \text{(сырье А);} \\ &3x_1 + 2x_2 \le 13 && \text{(сырье В);} \qquad (2) \\ &x_1 - x_2 \le 1 && \text{(спрос);} \\ &x_2 \le 2 && \text{(спрос);} \\ &x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

Математическая модель двойственной задачи имеет вид:

$$L = 9y_1 + 13y_2 + y_3 + 2y_4 \to \min, \qquad (3)$$

$$\begin{aligned} &2y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 3, \\ &3y_1 + 2y_2 - y_3 + y_4 \ge 4, \qquad (4) \\ &y_1 \ge 0, \ldots, y_4 \ge 0. \end{aligned}$$

Как видно, задачи (1)-(2) и (3)-(4) образуют симметричную пару двойственных задач. Чтобы найти решение этих задач, следует сначала отыскать решение какой-либо одной из них. Так как система ограничений задачи (1) - (2) содержит лишь неравенства вида «$\le$», то лучше сначала найти решение этой задачи. Ее решение приведено в табл. 2:

$$X_{opt} = \left(\frac{12}{5}, \frac{7}{5}\right), \qquad Z_{\max} = \frac{64}{5} = 12{,}8.$$

Из этой же таблицы получим решение двойственной задачи (3)–(4):

$$Y_{opt} = \left(\frac{7}{5}, 0, \frac{1}{5}, 0\right), \qquad L_{\min} = \frac{64}{5} = 12{,}8.$$

Из этой таблицы видно, что оптимальным планом производства продукций является такой, при котором изготовляется $\frac{12}{5} = 2{,}4$ продукции P_1 и $\frac{7}{5} = 1{,}4$ продукции P_2. При данном плане производства остается неиспользованным 3 ед. ресурса B и на $\frac{3}{5} = 0{,}6$ ед. продукции P_2 спроса не будет, а доход от реализации продукции равна $\frac{64}{5} = 12{,}8$ ден.ед.

Переменные y_1 и y_3 обозначают двойственные оценки ограничения 1 и 3. Первое ограничение определяет запасы сырья A, а третье ограничение определяет соотношение спроса на выпускаемую продукцию. Эти оценки отличны от нуля (см. оптимальное решение двойственной задачи), следовательно, ресурс 1 и 3 видов полностью используется при оптимальном плане производства продукции. Двойственная оценка единицы ресурса 2 и 4 видов равна нулю. Следовательно, ресурс B не полностью используется и спрос на продукцию P_2 не будет удовлетворен полностью.

Таким образом, положительную двойственную оценку имеют лишь те виды ресурсов, которые полностью используются при оптимальном плане производства продукций. Поэтому двойственные оценки определяют дефицитность используемого предприятием ресурса. Более того, величина данной двойственной оценки показывает, на сколько возрастает максимальное значение целевой функции прямой задачи при увеличении количества сырья соответствующего вида на 1 ед. Так, увеличение количества сырья A вида на Δb_1=1 ед. приведет к тому, что появится возможность найти новый оптимальный план производства изделий, при котором общая стоимость изготовляемой продукции возрастет на 1,4 ден.ед.: $\Delta Z = y_1 \cdot \Delta b_1 = \frac{7}{5} \cdot 1 = 1,4$ и станет равной

$$Z_{\max} = 12,8 + 1,4 = 14,2 \text{ ден.ед.}$$

При этом числа, стоящие в столбце вектора A_3 табл.1, показывают, что указанное увеличение общей стоимости изготовляемой продукции может быть достигнуто за счет увеличения выпуска продукций P_1 и P_2 на 1/5=0,2 ед. Вследствие этого использование сырья A вида увеличится на 1 ед. Точно так же увеличение на Δb_3= 1 ед. ресурса 3 вида (т.е. если предположить, что суточный спрос на продукцию P_1 никогда не превышает спроса на продукцию P_2 более чем на 2 ед.) позволит найти новый оптимальный план производства изделий, при котором общая стоимость изготовляемой продукции возрастет на $\Delta Z = y_3 \cdot \Delta b_3 = \frac{1}{5} \cdot 1 = 0,2$ ден.ед. и составит $Z_{\max} = 12,8 + 0,2 = 13$ ден.ед.

Это будет (см. столбец вектора A_5) достигнуто в результате увеличения выпуска продукции P_1 на 3/5 ед. и уменьшения изготовления продукции P_2 на 2/5 ед.

Продолжим рассмотрение оптимальных двойственных оценок. При подстановке оптимальных двойственных оценок в систему ограничений двойственной задачи получаем

$$2 \cdot \frac{7}{5} + 3 \cdot 0 + \frac{1}{5} = 3, \qquad 3 \cdot \frac{7}{5} + 2 \cdot 0 - \frac{1}{5} + 0 = 4.$$

Первое и второе ограничения двойственной задачи выполняются как строгие равенства. Это означает, что двойственные оценки сырья, используемого для производства единицы, соответственно, продукций P_1 и P_2, равны в точности их ценам. Поэтому выпускать эти два вида продукции по двойственным оценкам экономически целесообразно. Их производство и предусмотрено оптимальным планом прямой задачи.

Таким образом, двойственные оценки тесным образом связаны с оптимальным планом прямой задачи. Всякое изменение исходных данных прямой задачи может оказать влияние, как на ее оптимальный план, так и на систему оптимальных двойственных оценок. Поэтому, чтобы проводить экономический анализ с использованием двойственных оценок, нужно знать их интервал устойчивости.

Упражнения

Решите задачи линейного программирования и проведите анализ на чувствительность.

1. $Z = 2x_1 - 5x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2. $Z = x_1 - 4x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \ge 8, \\ -3x_1 + 10x_2 \le 16, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

3. $Z = x_1 + x_2 \to \max,$

4. $Z = 2x_1 + 2x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 30, \\ 2x_1 + x_2 \le 20, \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5. $\mathrm{Z} = 2x_1 + 3x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 \ge 4, \\ x_2 \ge 3, \\ x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

6. $\mathrm{Z} = x_1 - 3x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3, \\ -x_1 + 2x_2 \le 5. \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

7. $\mathrm{Z} = x_1 - 3x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

8. $\mathrm{Z} = 2x_1 + 5x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 500, \\ x_1 \le 400, \\ x_2 \le 300, \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

9. $\mathrm{Z} = x\ \ + 4x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7, \\ x_1 \le 3, \\ x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

10. $\mathrm{Z} = 2x_1 + x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 \le 15, \\ 4x_1 + 3x_2 \le 11, \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

11. $\mathrm{Z} = 2x_1 + 2x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

12. $\mathrm{Z} = 3x_1 + 2x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 \ge 1, \\ x_2 \ge 0{,}6, \\ 0{,}1x_1 + 0{,}4x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Вопросы для самопроверки

1. В чем в линейном программировании заключается сущность двойственности?

2. Пусть исходная задача состоит в оптимальном использовании ресурсов. Дайте экономическую интерпретацию двойственной задачи.

3. Сформулируйте и докажите теорему двойственности.

4. Какие задачи линейного программирования относятся к несимметричным и симметричным, в чем их отличие?

5. Как по решению исходной (двойственной) найти решение двойственной (исходной) задачи?

6. Запишите возможные виды математических моделей двойственных задач.

7. Описать простое правило нахождения решения двойственной задачи по известной симплексной таблице прямой задачи.

8. В чем состоит сущность двойственного симплексного метода?

9. Каким образом из симплексной таблицы можно получить информацию относительно: оптимального решения; статуса ресурсов; ценности каждого ресурса; чувствительности оптимального решения к изменению запасов ресурсов, вариациям коэффициентов целевой функции и интенсивности потребления ресурсов?

10. Сведения, относящиеся к первым трем пунктам, можно извлечь непосредственно из итоговой симплексной таблицы. Получение информации, относящейся к четвертому пункту, требует дополнительных вычислений. Какие эти вычисления?

11. На какой теореме теории двойственности базируется анализ на чувствительность оптимального решения? Сформулируйте эту теорему.

12. Приведите схему проведения экономико-математического анализа полученного оптимального решения.

§17. Транспортная задача

Ключевые слова: *транспортная задача, условие баланса, закрытая модель транспортной задачи, открытая модель транспортной задачи, распределительный метод, метод северо-западного угла, метод минимальной стоимости, транспортная задача, распределительный метод, дополнительные переменные (потенциалы), метод потенциалов, транспортная задача с открытой моделью.*

Транспортная задача - самая распространенная в линейном программировании. Она обладает рядом специфических свойств, в силу которых общие свойства и методы линейного программирования могут быть детализированы до весьма простых утверждений и операций.

1. Постановка задачи. Теорема существования

Имеется n пунктов производства (поставщики) $A_1, A_2, ..., A_n$ и m пунктов потребления (потребители) $B_1, B_2, ..., B_m$ некоторого продукта. В пункте A_i производится $a_i > 0, \quad i = 1, 2, ..., n$ (запасы), а в пункте B_j потребляется $b_j > 0$, $j = 1, 2, ..., m$ единиц продукта (потребности). Стоимость перевозки единицы продукта из A_i в B_j равна $c_{ij} > 0$. Нужно найти оптимальный план перевозок, т.е. указать количество

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, ..., n; \quad j = 1, 2, ..., m \tag{1}$$

продукта, перевозимое из A_i в B_j при условии:

- весь продукт из пунктов производства будет вывезен:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i, \qquad i = 1, 2, ..., n; \tag{2}$$

- запросы всех пунктов потребления удовлетворены:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, \qquad j = 1, 2, ..., m; \tag{3}$$

- стоимость перевозок окажется минимальной:

$$f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to \min. \qquad (4)$$

Задача линейного программирования, имеющая структуру (1)-(4), называется **транспортной задачей.**

В рассмотренной модели предполагается, что количество произведенного продукта равно его потреблению, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j \,. \qquad (5)$$

Условие (5) называется **условием баланса.**

Транспортная задача, для которой выполняется условие (5) называется **задача с закрытой** моделью; в противном случае – **задача с открытой моделью.**

Теорема. Для того чтобы закрытая транспортная задача имела решение, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию баланса.

2. Основные свойства матрицы условий транспортной задачи

Условия (2), (3) запишем в векторной форме

$$A_{11}x_{11} + \ldots + A_{1m}x_{1m} + \ldots + A_{n1}x_{1n} + \ldots + A_{nm}x_{nm} = A_0 \,. \qquad (6)$$

Здесь через A_{ij} обозначен $(n+m)$- мерный вектор, у которого все координаты равны нулю, за исключением i - й и $(n+j)$ - й, равных единице:

$$A_{ij}^{i} = 1, \qquad A_{ij}^{n+j} = 1.$$

Другими словами, каждый вектор условий A_{ij} можно записать в форме

$$A_{ij} = e_i + e_{n+j},$$

где e_k - $(n+m)$- вектор, все координаты которого равны нулю, кроме k-й, равной единице.

Вектор A_0 имеет размерность $n+m$:

$$A_0 = \left(a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m\right).$$

Матрица A условий транспортной задачи (1) - (4) составлена из векторов A_{ij}:

$$A=\left(A_{11},A_{12},...,A_{ij},...,A_{nm}\right). \qquad (7)$$

у нее $n+m$ строк и nm столбцов.

Первое свойство. Ранг матрицы условий равен $n+m-1$:

$$rankA=n+m-1 .$$

Доказательство. Ранг матрицы (7) меньше $n+m$. Действительно, если сложить первые n строк матрицы, то получим строку, состоящую из одних единиц. Сумма последних m строк также дает строку из одних единиц. Это значит, что если первые n строк умножить на +1, а последние m строк на - 1 и сложить, то в результате получим нулевой вектор, что означает

$$rankA<n+m .$$

Осталось показать, что в матрице (7) можно найти отличный от нуля минор $(n+m-1)$- го порядка.

Составим матрицу из первых $n+m-1$ компонент векторов $A_{1m},A_{2m},....,A_{nm},A_{11},A_{12},...,A_{1m-1}$. Полученная матрица треугольная, на ее диагонали стоят единицы, значит, определитель равен единице. Утверждение доказано.

Замечание. Если у матрицы условий A вычеркнуть любую строку, то ранг оставшейся $(n+m-1)\times nm$- матрицы будет равен $n+m-1$.

В силу доказанного свойства достаточно показать, что любое условие в (2), (3) есть следствие остальных.

Пусть план x_{ij} удовлетворяет всем условиям из (2), (3), кроме k- го, $1\le k\le n$.

Тогда

$$\sum_{o=1}^{m}x_{ij}=a_i,\quad i=1,2,...,n;\quad i\neq k;\quad \sum_{i=1}^{n}x_{ij}=b_j,\quad j=1,2,...,m.$$

Поэтому

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij} - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} a_i = a_k,$$

т.е. k - е условие также выполняется.

Следовательно, одно из условий в (2), (3) можно отбросить, однако ради симметрии все соотношения обычно сохраняются. Согласно результатам по задаче линейного программирования решение транспортной задачи можно искать среди угловых точек множества планов. Поскольку $rank\ A = n + m - 1$, то опорный план в транспортной задаче не может иметь более $n + m - 1$ положительных координат.

Второе свойство. Любой минор матрицы (7) равен одному из трех чисел: -1, 0, +1 (в силу этого свойства матрицу транспортной задачи называют унимодулярной).

Доказательство. Рассмотрим минор k - го порядка

$$A_k = \begin{pmatrix} i_1, ..., i_k \\ j_1, ..., j_k \end{pmatrix}.$$

В этом определителе каждый столбец содержит не более двух единиц. Если найдется столбец из нулей, то $A_k = 0$.

Пусть в каждом столбце по две единицы. Одна из них обязательно в строке, соответствующей ограничениям (2), другая - в строке, соответствующей ограничениям (3). Складывая строки с номерами из (2) и вычитая из них сумму строк по номерам из (3), получаем нуль. Это значит, что $A_k = 0$. Если найдется столбец с одной единицей, то, разлагая определитель по этому столбцу, получаем

$$A_k = \pm B_{k-1},$$

где B_{k-1} - некоторый минор $(k-1)$-го порядка.

Повторив рассуждения с минором B_{k-1}, получим $B_{k-1} = 0$ или $B_{k-1} = \pm C_{k-2}$ и т.д. Поскольку миноры первого порядка матрицы A равны 0 или 1, то отсюда следует справедливость второго свойства.

Третье свойство. Если числа $a_i, \quad i=1,2,...,n; \quad b_j, \quad j=1,2,...,m$ целые, то существует решение транспортной задачи из целочисленных компонент.

Доказательство. Пусть $x_{ij}, \quad i=1,2,...,n; \quad j=1,2,...,m$ (угловая точка) - некоторое решение транспортной задачи, положительные координаты которой обозначим через $x_1, x_2, ..., x_k, \qquad k \le n+m-1$. В §11 показано, что векторы условий $A_1, A_2, ..., A_k$ с теми же номерами линейно независимы (см. теорему 5). В равенстве

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + ... + A_k x_k = A_0$$

выделим k строк, соответствующих ненулевому минору k-го порядка. Остальные строки будут линейно выражаться через выделенные. Поскольку каждый отличный от нуля минор матрицы A равен ± 1, то, решая выделенную систему уравнений по правилу Крамера, получаем

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \pm \Delta_1, \quad ... \quad , x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta} = \pm \Delta_k ,$$

где Δ_i- определители из целочисленных элементов. Значит, и все $x_1, x_2, ..., x_k$ целые числа.

3. Вычисление элементов симплексной таблицы. Распределительный метод

При решении задач линейного программирования симплексным методом наиболее трудоемким является вычисление элементов симплексной таблицы. Ситуация существенно упрощается для транспортной задачи.

Как известно, симплексная таблица состоит из координат разложения векторов условий по текущему базису, соответствующему рассматриваемому опорному плану. Пусть задача невырожденная. Тогда любой опорный план $\left(x_{ij}\right)$ имеет ровно $n+m-1$ положительных компонент, которым соответствуют $n+m-1$ линейно независимых векторов условий $\{A_{ij}\}$. Множество индексов i, j, которые встречаются в этих векторах, обозначим через Ω. Любой вектор условий A_{kl} разлагается по базису $A_{ij}, \quad (i,j) \in \Omega$:

$$A_{kl} = \sum\sum_{(i,j)\in\Omega} x_{ij}^{kl} A_{ij} \,. \tag{8}$$

Числа x_{ij}^{kl} и есть элементы основной части симплексной таблицы.

Лемма. Элементы x_{ij}^{kl}, принимают одно из трех значений:- 1, 0, +1.

Доказательство. В матричной форме соотношение (8) принимает вид

$$A_{ij} = Qx^{kl}, \tag{9}$$

где Q- матрица, составленная из $n+m-1$ линейно независимых векторов условий A_{ij}, $(i,j)\in\Omega$. По доказанному второму свойству, если у матрицы Q вычеркнуть любую строку, то оставшаяся $(n+m-1)\times(n+m-1)$- матрица будет не особой. В уравнении (9) вычеркнем k-ю строку. Тогда слева останется $n+m-1$ вектор e_{n+i-1}, а справа - Rx^{kl}, где R не особая матрица:

$$e_{n+l-1} = Rx^{kl}\,.$$

Отсюда $x^{kl} = R^{-1}e_{n+l-1} = r_{n+l-1}$, где r_{n+l-1}- $(n+l-1)$- й столбец матрицы R^{-1}. Известно, что каждый элемент обратной матрицы R^{-1} равен некоторому минору, $(n+m-2)$-го порядка, деленному на определитель матрицы R. Но $\det R$ и все миноры матрицы R являются минорами матрицы условий А транспортной задачи. Поэтому они равны одному из трех чисел: -1, 0, 1. Следовательно, $x_{ij}^{kl} = -1, 0, 1$. Лемма доказана.

В силу леммы каждый вектор условий транспортной задачи имеет представление

$$A_{kl} = \sum\sum_{(i,j)\in\Omega^1} \pm A_{ij}, \qquad \Omega^1 \subset \Omega\,. \tag{10}$$

Поскольку у вектора A_{ij} единицы стоят только на k-м и $(n+m)$-м местах, то в базисе найдется вектор A_{kj_1} первый индекс которого такой же, что и у разлагаемого вектора A_{kl}. Если $j_1 \neq l$, то в силу равенства (10) найдется вектор базиса $A_{i_1 j_1}$, который в (10) входит со знаком « - ». Разложение на двух векторах не может закончиться, ибо слева $(n+l)$-я координата равна 1; справа координаты с номерами, большими чем n, - нулю, i_1-я координата равна -1. Поэтому найдется вектор базиса $A_{i_1 j_2}$, входящий в (10) со знаком «+». Если $j_2 = l$, то разложение вектора A_{kl} закончено. При $j_2 \neq l$ разложение продолжается. В результате через конечное число шагов получаем разложение

$$A_{kl} = A_{kj_1} - A_{i_1 j_1} + A_{i_1 j_2} - \ldots - A_{i_s j_s} + A_{i_s l}\,. \tag{11}$$

В этом разложении справа будет нечетное число слагаемых, знаки слагаемых чередуются, первое и последнее слагаемые имеют знак «+». Правило чередования индексов поясним на следующем примере. Пусть в табл. 1 точками обозначены клетки с номерами векторов базиса. Нужно разложить вектор A_{26}. Из клетки A_{26} движемся по строке до одной из точек, затем по столбцу до одной из точек, далее по строке и т.д. Наконец приходим по строке к точке, лежащей в том же столбце, что и раскладываемая точка.

Таблица 1

Поставщики	**Потребители**						**Запасы**
	B₁	**B₂**	**B₃**	**B₄**	**B₅**	**B₆**	
A₁	•	•					a_1
A₂		•	•			A_{26}	a_2
A₃			•	•			a_3
A₄				•		•	a_4
Потребности	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$

Если в очередную точку приходим по строке, то вектору базиса, соответствующему этой точке, приписываем знак «+», если по столбцу - знак «-». По доказанному, описанное построение всегда осуществимо и единственно. Для вектора A_{26} имеем

$$A_{26} = A_{23} - A_{33} + A_{34} - A_{44} + A_{46}.$$

Последовательность построенных прямолинейных отрезков, исходящих из клетки с A_{26}, назовем **цепочкой этой клетки**, отрезки - **звеньями цепочки.**

Теперь можно приступить к вычислению последней строки в симплексной таблице. При двухиндексной нумерации координат выражение для компонент вектора $f - c$ принимает вид

$$f_{kl} - c_{kl} = \sum_{(i,j)\in\Omega}\sum c_{ij} x_{ij}^{kl} - c_{kl}.$$

Значения x_{ij}^{kl} определяются разложением (11) вектора A_{kl}, в соответствии с этим разложением получаем

$$f_{kl} - c_{kl} = c_{kj_1} - c_{i_1 j_1} + c_{i_1 j_2} - \ldots - c_{i_s j_s} + c_{i_s l} - c_{kl}. \tag{12}$$

Таблица 2

Поставщики	**Потребители**				**Запасы**
	$\mathbf{B_1}$	$\mathbf{B_2}$	**…**	$\mathbf{B_n}$	
$\mathbf{A_1}$	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1m} x_{1m}	a_1
$\mathbf{A_2}$	c_{21} x_{21}	c_{12} x_{12}	…	c_{2m} x_{2m}	a_2
…	…	…	…	…	…
$\mathbf{A_n}$	c_{n1} x_{n1}	c_{n2} x_{n2}		c_{nm} x_{nm}	a_n
Потребности	b_1	b_2	…	b_m	$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$

Как следует из симплексного метода, величины (12) полностью определяют оптимальность текущего плана и вектор условий, который следует включить в базис на следующем этапе, если текущий план не оптимален.

Для подсчета чисел (12) составим новую таблицу, которую назовем транспортной таблицей или таблицей планирования (табл. 2), включим в нее данные о транспортной задаче.

Вместо величин x_{ij} на каждом этапе вычислений заносим компоненты текущей крайней точки, причем, если $x_{ij}=0$, то клетку оставляем пустой. Далее, для каждой пустой клетки с номером (k,l) составляем цепочку по правилу разложения вектора условия A_{kl}, соответствующего этой клетке. Числа c_{ij}, стоящие в клетках, где кончается горизонтальное звено цепочки, умножим на +1, где кончается вертикальное звено, - на -1 и результаты сложим. Из полученного результата вычитаем значение c_{kl}, стоящее в клетке, из которой начинается цепочка. Ясно, что эти операции приведут к величине (12).

Согласно критерию оптимальности, доказанному для симплексного метода, текущий опорный план будет оптимальным, если все числа (12) не положительны.

Если хотя бы для одной пустой клетки описанные операции приведут к положительному числу, то рассматриваемый план перевозок не оптимален. Номер (k,l) этой клетки указывает номер вектора условия A_{kl}, который можно ввести в базис. При рассмотрении симплексного метода брался тот номер (k,l), при котором число (12) наибольшее. И здесь можно, просчитав числа (12) для пустых клеток, выбрать из результатов наибольший. Из физического смысла подобного выбора, отмеченного при исследовании симплексного метода, следует, что при такой замене скорость убывания линейной функции (4) будет наибольшей. Пусть индексы (s,t) таковы, что

$$f_{st}-c_{st}\max\{f_{kl}-c_{kl}\}.$$

Тогда вектор A_{st} войдет в базис, и число x_{st} будет положительным на следующем этапе, т.е. клетка с номером (s,t) уже не будет пустой.

Замечание. Вопрос о неограниченности решения в транспортной задаче не возникает, ибо множество планов всегда ограничено (см. п. 1).

Значения $\Delta_{kl} = f_{kl} - c_{kl}$ помещаются также в клетках. Окончательный вид транспортной таблицы представлен табл.3.

Таблица 3

Поставщики	Потребители				Запасы
	B₁	**B₂**	**…**	**Bₙ**	
A₁	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	$\dots$	c_{1m} x_{1m}	a_1
A₂	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	$\dots$	c_{2m} x_{2m}	a_2
…	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
Aₙ	c_{n1} x_{n1}	c_{n2} x_{n2}	$\dots$	c_{nm} x_{nm}	a_n
Потребности	b_1	b_2	$\dots$	b_m	$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$

Найдем далее номер того вектора условий, который нужно исключить из базиса. Для этого, следуя симплексному методу, составим отношения

$$\theta_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_{ij}^{st}}, для \quad всех \quad x_{ij}^{st} > 0.$$

Но по доказанному (см. лемму), все положительные x_{ij}^{st} равны единице, поэтому $\theta_{ij} = x_{ij}$. Согласно симплексному методу исключается из базиса вектор A_{pq}, индексы которого удовлетворяют соотношению

$$\theta_{pq} = \min \theta_{ij} = \max x_{ij} = x_{pq}. \tag{13}$$

На языке транспортной таблицы индексы исключаемого вектора находятся так: для клетки (s,t) строится цепочка. Среди чисел x_{ij}, стоящих на концах горизонтальных звеньев цепочки, находим наименьшее x_{pq}. Вектор

A_{pq} на следующем этапе выводим из базиса и клетка с номером (p,q)] становится пустой.

Осталось заполнить таблицу для нового набора базисных векторов. Общая формула перехода к новой угловой точке в симплексном методе имела вид

$$x'_{ij} = x_{ij} - \theta_{pq} x_{ij}^{pq}.$$

Пользуясь графической интерпретацией чисел x_{ij}^{pq}, формулой (13), приходим к следующим правилам заполнения таблицы в новом базисе:

1) $x'_{st} = x_{pq}$, $\quad x'_{ij} = x_{ij} - x_{pq}$,

если клетка (i, j) лежит на конце горизонтального звена цепочки, построенного для клетки (s,t);

2) $x'_{ij} = x_{ij} + x_{pq}$,

если клетка (i, j) лежит на конце вертикального звена цепочки, построенного для клетки (s,t);

3) $x'_{ij} = x_{ij}$,

если в непустой клетке (i, j) старой таблицы цепочка не терпит излома.

Описанная процедура перехода от старого базиса к новому, являющаяся интерпретацией симплексного метода для транспортной задачи, называется **распределительным методом решения транспортной задачи.**

4. Построение первоначального опорного плана

Известно, что нахождение оптимального решения любой задачи линейного программирования начинается с построения первоначального опорного плана. Первоначальный опорный план транспортной задачи как задачи линейного программирования можно построить ранее рассмотренными методами. При решении общей задачи линейного программирования симплексным методом для построения начальной крайней точки приходится, как правило, прибегать к искусственным переменным. В транспортной задаче введение искусственных переменных излишне, ибо существует допустимый план перевозок (см. п. 1) и имеются различные приемы построения угловой точки по этим планам. Остановимся на некоторых из них.

4.1. Метод северо-западного угла

Не учитывая стоимости перевозки единицы груза, удовлетворим потребности первого потребителя B_1, за счет запаса поставщика A_1. Для этого $min\ (a_1,b_1)$ записываем в левый нижний угол клетки A_1B_1, т.е. $x_{11}=min\ (a_1,b_1)$. Если $a_1 > b_1$, то излишек $a_1 - b_1$ завозим из A_1 в пункт B_1, т.е. полагаем $x_{12} = min\ (a_1 - b_1;\ b_2)$. Если $a_1 < b_1$, то остаток $b_1 - a_1$ завозим из пункта A_2, т.е. полагаем $x_{12}=min\ (b_1 - a_1;\ a_2)$. Процесс продолжим до тех пор, пока не удовлетворим всех потребителей за счет запасов поставщиков. На этом построение первоначального плана заканчивается.

Опорный план содержит не более n+m-1 положительных компонент (т.е. в таблице планирования количество занятых клеток не превосходит n+m-1). Если опорный план имеет ровно n+m-1 положительных компонент (т.е. в таблице планирования количество занятых клеток не превосходит n+m-1), тогда этот опорный план будет невырожденным.

Пример 1. Найти первоначальный план следующей задачи:

Поставщики	**Потребители**				**Запасы**
	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	
A_1	3	5	7	11	**100**
A_2	1	4	6	2	**130**
A_3	5	8	12	7	**170**
Потребности	**150**	**120**	**80**	**50**	

Решение

Первоначальный опорный план найден методом северо-западного угла. Матрицу планирования заполним следующим образом:

a_i \ b_j	**150**	**120**	**80**	**50**
100	3 100	5	7	11
130	1 50	4 80	6	2
170	5	8 40	12 80	7 50

В этой таблице через a_i обозначены запасы поставщиков, а через b_j – потребности потребителей. Полученный опорный план имеет вид:

$$X = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 50 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 80 & 50 \end{pmatrix}.$$

Этот план невырожденный, так как содержит точно n+m-1=3+4-1=6 занятых клеток. Вычислим стоимость полученного плана:

$$f(X) = 100\cdot 3 + 50\cdot 1 + 80\cdot 4 + 40\cdot 8 + 80\cdot 12 + 50\cdot 7 = 2300.$$

Недостатком правила северо-западного угла является то, что оно не учитывает стоимости перевозок. В силу этого первоначальный опорный план может оказаться далеким от решения задачи и потребует большого числа вычислений по распределительному методу. Существуют другие методы построения первоначального опорного плана, учитывающие стоимость перевозок. Хотя они более трудоемки, но могут сократить общий объем вычислений при решении задачи, так как дают лучшее начальное приближение к решению.

4.2. Метод минимальной стоимости

Суть метода заключается в том, что из всей таблицы стоимостей выбирают наименьшую и в клетку, которая ей соответствует, помещают меньшее из чисел a_i или b_j. Затем, из рассмотрения исключают либо строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы, либо и строку и столбец, если израсходованы запасы поставщика и удовлетворены потребности потребителя. Из оставшейся части таблицы стоимостей снова выбирают наименьшую стоимость, и процесс распределения запасов продолжают, пока все запасы не будут распределены, а потребности удовлетворены.

Пример 2. Составить с помощью метода минимальной стоимости опорный план выше рассмотренной транспортной задачи.

Решение

a_i \ b_j	**150**	**120**	**80**	**50**
100	3 20	5 80	7	11
130	1 130	4	6	2
170	5	8 40	12 80	7 50

Опорный план имеет вид:

$$X = \begin{pmatrix} 20 & 80 & 0 & 0 \\ 130 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 80 & 50 \end{pmatrix}.$$

В этом случае также опорный план содержит точно 6 занятых клеток. Следовательно, опорный план является невырожденным. При составлении опорного плана учитывалась стоимость перевозки единицы груза. Поэтому план будет значительно ближе к оптимальному.

Действительно,

$$f(X) = 20\cdot 3 + 80\cdot 5 + 130\cdot 1 + 40\cdot 8 + 80\cdot 12 + 50\cdot 7 = 2200.$$

Существуют ещё и другие методы построения первоначального плана.

С помощью рассмотренных методов построения первоначального плана можно получить вырожденный и невырожденный опорный план.

Упражнения

Найти первоначальный опорный план транспортных задач 1-6 методами северо-западного угла и минимального элемента.

1.

a_i \ b_j	40	60	80	60
60	1	3	4	2
80	4	5	8	3
100	2	3	6	1

2.

a_i \ b_j	150	140	190
60	3	7	2
80	9	2	1
100	1	5	7
170	6	4	8

5. Нахождение оптимального плана транспортной задачи

5.1. Вводное замечание

Метод потенциалов является модификацией распределительного метода (поэтому иногда называется модифицированным распределительным методом), в которой введением дополнительных переменных (потенциалов) упрощается одна из процедур распределительного метода.

Как известно, в симплексном методе и его реализации - распределительном методе - одна из основных процедур связана с вычислением в опорном плане вектора $\Delta = f - c$, по которому можно судить об оптимальности опорного плана или находить новый вектор базиса. В методе потенциалов предлагается новый путь вычисления компонент этого вектора.

Введение потенциалов существенно уменьшает объем вычислений для транспортных задач больших размеров (числа n, m большие).

Метод потенциалов был предложен Л. В. Канторовичем вне связи с симплексным методом. Дж. Данциг получил его независимо, исходя из симплексного метода.

С помощью рассмотренных методов построения первоначального плана можно получить вырожденный и невырожденный опорный план. Построенный опорный план транспортной задачи с помощью методов потенциалов можно довести до оптимального.

5.2. Метод потенциалов

Теорема. Если план $X^* = \left(x_{ij}^*\right)$ транспортной задачи является оптимальным, то существует система $m+n$ чисел U_i^* и V_j^* удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} &U_i^* + V_j^* = c_{ij} \quad \text{для} \quad x_{ij}^* > 0, \\ &U_j^* + V_j^* \le c_{ij} \quad \text{для} \quad x_{ij}^* = 0, \\ &i = 1, 2, ..., n; \quad j = 1, 2, ..., m. \end{aligned}$$

Числа U_i^* и V_j^* j называются **потенциалами**, соответственно, **поставщиков и потребителей.**

Доказательство. Транспортную задачу минимизации линейной функции $f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$ при ограничениях

$$\begin{aligned} &x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{im} = a_i, \qquad i = 1, 2, ..., n; \\ &x_{1j} + x_{2j} + ... + x_{nj} = b_j, \qquad j = 1, 2, ..., m; \\ &x_{ij} \ge 0, \qquad i = 1, 2, ..., n; \quad j = 1, 2, ..., m \end{aligned}$$

можно рассматривать как двойственную некоторой исходной задачи линейного программирования, условия которой получают по общей схеме, рассмотренной в §15, если каждому ограничению вида $x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{im} = a_i$ в исходной задаче соответствует переменная U_i, $i = 1, 2, ..., n$, а каждому ограничению вида $x_{1j} + x_{2j} + ... + x_{nj} = b_j$ - переменная V_j, $j = 1, 2, ..., m$, а именно, максимизировать линейную функцию

$$g = \sum_{i=1}^{n} a_i U_i + \sum_{j=1}^{m} b_j V_j$$

при ограничениях

$$U_i + V_j \leq c_{ij}, \quad i = 1, 2, ..., n; \quad j = 1, 2, ..., m.$$

План X^*- оптимальный план двойственной задачи, поэтому план $Y^* = \left(U_i^*, V_j^*\right)$ является планом исходной задачи и на основании теоремы двойственности

$$g_{\max} = f_{\min}$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} a_i U_i^* + \sum_{j=1}^{m} b_j V_j^* = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}^*, \qquad x_{ij}^* \geq 0.$$

На основании второй теоремы двойственности получаем, что ограничения исходной задачи, соответствующие положительным компонентам оптимального плана двойственной задачи, удовлетворяются как строгие равенства, а соответствующие компонентам равным нулю, - как неравенства, т.е.

$$U_i^* + V_j^* = c_{ij} \quad \text{для} \quad x_{ij}^* > 0,$$
$$U_j^* + V_j^* \leq c_{ij} \quad \text{для} \quad x_{ij}^* = 0.$$

Теорема доказана.

На основании доказанной теоремы для того чтобы первоначальный опорный план был оптимальным, необходимо выполнение следующих условий:

а) для каждой занятой клетки сумма потенциалов должна быть равна стоимости единицы перевозки, стоящей в этой клетке:

$$U_i^* + V_j^* = c_{ij}; \qquad (14)$$

б) для каждой незанятой клетки сумма потенциалов должна быть меньше или равна стоимости единицы перевозки, стоящей в этой клетке:

$$U_i^* + V_j^* \le c_{ij}. \qquad (15)$$

Если хотя бы одна незанятая клетка не удовлетворяет условию 15, то опорный план является неоптимальным и его можно улучшить, вводя в базис вектор, соответствующий клетке, для которой нарушается условие оптимальности (т.е. в клетку надо переместить некоторое количество единиц груза).

Таким образом, для проверки плана на оптимальность необходимо сначала построить систему потенциалов.

5.3. Построение системы потенциалов

Для построения системы потенциалов используем условие

$$U_i^* + V_j^* = c_{ij}.$$

Систему потенциалов можно построить только для невырожденного опорного плана. Такой план содержит n+m-1 занятых клеток, поэтому для него можно составить систему из n+m-1 линейно независимых уравнений с n+m неизвестными. Уравнений на одно меньше, чем неизвестных, поэтому система является неопределенной и одному неизвестному (обычно U_1) придают нулевое значение. После этого остальные потенциалы определяются однозначно. Затем для каждой незанятой клетки проверяем условие $\Delta_{ij} = (U_i + V_j) - C_{ij} \le 0$. Если для некоторых клеток $\Delta_{ij} \le 0$, то план оптимальный. Если для некоторых клеток $\Delta_{ij} > 0$, то план неоптимальный. Тогда для каждой клетки, в которой не выполняется условие оптимальности, находим величину $\Delta_{ij} > 0$ и записываем её значение в левый нижний угол этой же клетки.

Для построения следующего опорного плана в первую очередь заполняется клетка, которой соответствует max Δ_{ij}.. Для того чтобы эту клетку сделать занятой сначала необходимо определить, сколько единиц груза должно быть перераспределено в нее.

Для определения количества единиц груза, подлежащих перераспределению, отмечаем знаком «+» незанятую клетку, которую надо загрузить. Это означает, что клетка присоединяется к занятым клеткам. В таблице занятых клеток стало n+m, поэтому появляется цикл, все вершины которого, за исключением клетки, отмеченной знаком «+» находятся в занятых клетках, причем этот цикл единственный. Отыскиваем цикл и, начиная движение от клетки, отмеченной знаком «+», поочередно проставляем знаки «-» и «+». Затем находим $\theta_0 = \min x_{ij}$, где x_{ij} – перевозки, стоящие в вершине цикла, отмеченные знаком «-».

Величина θ_0 определяет, сколько единиц груза можно перераспределить по найденному циклу. Значение θ_0 записываем в незанятую клетку, отмеченную знаком «+», двигаясь по циклу, вычитаем θ_0 из объемов перевозок, расположенных в клетках, которые отмечены знаком «-», и прибавляем к объёмам перевозок, находящихся в клетках, отмеченных знаком «+». Если θ_0 соответствуют несколько минимальных перевозок, то при вычитании оставляем в соответствующих клетках нулевые перевозки в таком количестве, чтобы θ_0 во вновь полученном опорном плане занятых клеток было n+m-1.

В результате перераспределения θ_0 получается новый опорный план, который снова подлежит проверке на оптимальность.

Пример. С помощью метода потенциалов найти оптимальный план вышерассмотренной транспортной задачи.

Решение

Построим систему потенциалов для первоначального опорного невырожденного плана, найденного нами методом северо-западного угла.

$U_1 + V_1 = 3, \qquad U_1 = 0, \quad V_1 = 3;$

$U_2 + V_1 = 1, \qquad U_2 = 1 - V_1 = 1 - 3 = -2;$

$U_2 + V_2 = 4, \qquad V_2 = 4 - U_2 = 4 + 2 = 6;$

$U_3 + V_2 = 8, \qquad U_3 = 8 - V_2 = 8 – 6 = 2;$

$U_3 + V_3 = 12, \qquad V_3 = 12 - U_3 = 12 - 2 = 10;$

$U_3 + V_4 = 7, \qquad V_4 = 7 - U_3 = 7 – 2 = 5.$

b_j / a_i	150	120	80	50	U_i
100	– 3 100	5	7 +	11	0
130	+ 1 50	4 80 –	6	2	-2
170	5	8 40 +	12 80 –	7 50	2
V_j	3	6	10	5	

$$X_0 = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 50 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 80 & 50 \end{pmatrix}, \quad F(X_0) = 2300.$$

Теперь для незанятых клеток проверим условие оптимальности:

$$\Delta_{12} = (U_1 + V_2) - C_{12} = -1;$$

$$\Delta_{23} = (U_2 + V_3) – C_{23} = 2;$$

$$\Delta_{12} = (U_1 + V_2) - C_{13} = 3;$$

$$\Delta_{24} = (U_2 + V_4) – C_{24} = 1;$$

$$\Delta_{14} = (U_1 + V_4) - C_{14} = -6;$$

$$\Delta_{31} = (U_3 + V_1) – C_{31} = 0.$$

Видно, что среди Δ_{ij} имеются положительные. Поэтому этот план не является оптимальным. Переходим к новому опорному плану: max{3; 2; 1} = 3 = Δ_{13}.

Значит, в таблице клетку A_1B_3 отметим знаком «+» и построим цикл. Вычислим θ_0 = min{100; 80}= 80. Значение $\theta_0 = 80$ записываем в незанятую клетку со знаком «+»; двигаясь по циклу вычитаем $\theta_0 = 80$ из объёмов перевозок, расположенных в клетках со знаком «-» и прибавляем к объёмам перевозок, находящихся в клетках «+». В результате получим новый опорный план:

b_j / a_i	**150**	**120**	**80**	**50**	U_i
100	3 20	5	7 80	11	0
130	− 1 130	4	6	+ 2 0	-2
170	5 +	8 120	12	− 7 50	3
V_j	3	5	7	4	

$$X_1 = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 80 & 0 \\ 130 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 0 & 50 \end{pmatrix}, \quad F\left(X_1\right) = 2060.$$

X_1 – вырожденный опорный план, ибо одной занятой клетки не хватает. Поэтому выбираем строку, которая содержит наибольшее количество занятых клеток (например, строка A_1) и полагаем $U_1 = 0$. Тогда $U_1 = 0$, $U_1 + V_1 = 3$; $V_1 = 3 - U_1 = 3 - 0 = 3$, $V_1 = 3$; $U_1 + V_3 = 7$, $V_3 = 7 - U_1 = 7 - 0 = 7$; $V_3 = 7$; $U_2 + V_1 = 4$; $U_2 = 1 - V_1 = 1 - 3 = -2$. А из соотношения $U_3 + V_2 = 8$, $U_3 + V_4 = 7$ невозможно определить U_3 , V_2 , V_4 .

Эта ситуация возникла из-за того, что опорный план оказался невырожденным, т.е. количество занятых клеток равно 5. Чтобы выйти из этого положения и определение U_3 и V_4 сделать фиктивно занятыми одной из незанятых клеток строки A_3 или столбца B_4 . ***Фиктивно занятые клетки это те клетки, в которые введены нулевые перевозки.*** Задача решается на минимизацию линейной функции, поэтому целесообразно сделать фиктивно занятой клетку, в которой стоит наименьшая стоимость. Такой клеткой является клетка A_2B_4. Теперь последовательно находим

$$U_2 + V_4 = 2,\ V_4 = 2 - U_2 = 2 - (-2) = 4,\ V_4 = 4\ ;$$
$$U_3 + V_4 = 7,\ U_3 = 7 - V_4 == 7 - 4 = 3,\ \ U_3 = 3;$$
$$U_3 + V_2 = 8,\ V_2 = 8 - U_3 = 8 - 3 = 5,\ \ V_2 = 5.$$

Теперь для не занятых клеток проверяем условие оптимальности:

$\Delta_{12} = (U_1 + V_2) - C_{12} = 0$;

$\Delta_{14} = (U_1 + V_4) - C_{14} = -7$;

$\Delta_{23} = (U_2 + V_3) - C_{23} = -1;$

$\Delta_{31} = (U_3 + V_1) - C_{31} = 1;$

$\Delta_{33} = (U_3 + V_3) - C_{33} = 2.$

План X_1 не является оптимальным, ибо $\Delta_{31} = 1 > 0$.

В таблице клетку A_3B_1 отметим знаком «+» и построим цикл; находим $\theta_0 = \min\{130; 50\} = 50$. Значение $\theta_0 = 50$ записываем в не занятую клетку со знаком «+» ; двигаясь по циклу вычитаем $\theta_0 = 50$ из объёмов перевозок, расположенных в клетках со знаком «-» и прибавляем к объемам перевозок, находящихся в клетках со знаком «+». В результате получим новый опорный план.

a_i \ **b_j**	**150**	**120**	**80**	**50**	U_i
100	– 3 20	5 +	7 80	11	0
130	1 80	4	6	2 50	-2
170	– 5 50	8 120 –	12	7	2
V_j	3	6	7	4	

$$X_2 = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 80 & 0 \\ 80 & 0 & 0 & 50 \\ 50 & 120 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad F(X_2) = 2010.$$

Полученный опорный план X_2 является невырожденным. Выполнив необходимые вычисления убеждаемся что план X_2 не является оптимальным. Построим очередной опорный план.

a_i \ b_j	**150**	**120**	**80**	**50**	U_i
100	3	5 20	7 80	11	0
130	1 80	4	6	2 50	-2
170	5 70	8 100	12	7	2
V_j	3	6	7	4	

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 80 & 0 \\ 80 & 0 & 0 & 50 \\ 70 & 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad F(X_3) = 1990.$$

X_3 является невырожденным опорным планом. Этот план является оптимальным. Для этого выполняются все условия оптимальности:

$\Delta_{12} = (U_1 + V_1) - C_{11} = -1;$ $\Delta_{23} = (U_2 + V_3) – C_{23} = 0;$

$\Delta_{14} = (U_1 + V_4) - C_{14} = -12;$ $\Delta_{33} = (U_3 + V_3) – C_{23} = -2;$

$\Delta_{22} = (U_2 + V_2) – C_{12} = 0;$ $\Delta_{34} = (U_3 + V_4) – C_{34} = -5,$

т.е. $X_3 = X_{opt}$ и $F_{\min} = F(X_3) = 1990.$

5.4. Транспортная задача с «открытой» моделью

В ранее рассмотренных транспортных задачах суммарные запасы и потребности совпадали. Такие задачи называются транспортные задачи с «закрытой» моделью, в противном случае задачу называют **транспортная задача с «открытой» моделью.**

Транспортная задача с «открытой» моделью решается приведением к задаче с «закрытой» моделью.

Для приведения задачи с «открытой» модели к задаче с «закрытой» модели вводятся «фиктивный потребитель» или «фиктивный поставщик». А именно:

а) в случае, когда суммарные запасы превышают суммарные потребности, вводится «фиктивный потребитель» B_{n+1}, потребности которого

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j \ ;$$

б) в случае, когда суммарные потребности превышают суммарные запасы, вводится «фиктивный поставщик» A_{n+1}, запасы которого

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i \ .$$

Стоимость перевозки, как до «фиктивного потребителя», так и стоимость перевозки единицы груза от «фиктивного поставщика» полагают равными нулю, так как груз в обоих случаях не перевозится.

Пример. Приведите следующую транспортную задачу с «открытой» моделью к задаче с «закрытой» моделью и найдите ее оптимальное решение.

b_i / a_j	**3**	**3**	**3**	**2**	**2**
4	3	2	1	2	3
5	5	4	3	1	1
7	0	2	3	4	5

В этой задаче

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 16 \ \rangle \qquad \sum_{j=1}^{5} b_j = 13.$$

Поэтому введем «фиктивного потребителя», потребности которого

$$b_6 = 16 - 13 = 3.$$

Теперь составим таблицу планирования:

a_j \ b_i	**3**	**3**	**3**	**2**	**2**	**3**
4	3	2	1	2	3	0
5	5	4	3	1	1	0
7	0	2	3	4	5	0

Полученную задачу с «закрытой» моделью решаем методом потенциалов. После 7-ми итераций получим следующий оптимальный план задачи:

$$X_{опт} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad F_{\min} = F\left(X_{опт}\right) = 13.$$

6. Усложненные задачи транспортного типа

Нами рассмотрена классическая транспортная задача, на которой показано, в частности, как используется метод потенциалов для нахождения оптимального плана. В экономике предприятия такие задачи встречаются крайне редко. Обычно при составлении математической модели задачи транспортного типа приходится вводить целый ряд дополнительных ограничений, а затем пользоваться методом потенциалов.

Ряд экономических задач легко сводятся к транспортной задаче. Рассмотрим наиболее часто встречающиеся ситуации в экономике предприятия.

1. Отдельные поставки от определенных поставщиков некоторым потребителям должны быть исключены (из-за отсутствия необходимых условий хранения, чрезмерной перегрузки коммуникаций и т.д.). Это ограничение требует, чтобы в матрице перевозок, содержащей оптимальный план, опре-

деленные клетки оставались свободными. Последнее достигается искусственным завышением затрат на перевозки c_{ij} в клетках, перевозки через которые следует запретить. При этом производят завышение величины c_{ij} до таких значений, которые будут заведомо больше всех и с которыми их придется сравнивать в процессе решения задачи.

2. На предприятии необходимо определить минимальные суммарные затраты на производство и транспортировку продукции. С подобной задачей сталкиваются при решении вопросов, связанных с оптимальным размещением производственных объектов. Здесь может оказаться экономически более выгодным доставлять сырье из более отдаленных пунктов, но зато при меньшей его себестоимости. В таких задачах за критерий оптимальности принимают сумму затрат на производство и транспортировку продукции.

3. Ряд транспортных маршрутов, по которым необходимо доставить грузы, имеют ограничения по пропускной способности. Если, например, по маршруту A_iB_j можно провести не более q единиц груза, то B_j - й столбец матрицы разбивается на два столбца - B'_j и B''_j. В первом столбце спрос принимается равным разности между действительным спросом b_j и ограничением q: $b'_j = b_j - q,$ во втором - равным ограничению q, т.е. $b''_j = q$. Затраты c_{ij} в обоих столбцах одинаковы и равны данным, но в первом столбце B'_j, клетке, соответствующей ограничению i, вместо истинного тарифа c_{ij} ставится искусственно завышенный тариф M (клетка блокируется). Затем задача решается обычным способом.

4. Поставки по определенным маршрутам обязательны и должны войти в оптимальный план независимо от того, выгодно это или нет. В этом случае уменьшают запас груза у поставщиков и спрос потребителей и решают задачу относительно тех поставок, которые необязательны. Полученное решение корректируют с учетом обязательных поставок.

5. Экономическая задача не является транспортной, но в математическом отношении подобна транспортной, так как описывается аналогичной моделью, например, распределение производства изделий между предприятиями, оптимальное закрепление механизмов по определенным видам работы.

6. Необходимо максимизировать целевую функцию задачи транспортного типа. В этой ситуации при составлении опорного плана в первую очередь стараются заполнить клетки с наиболее высокими значениями показателей c_{ij}. Выбор клетки, подлежащей заполнению при переходе от одного допустимого плана к другому, должен производиться не по максимальной положительной разнице $\Delta_{ij} = U_i + V_j - c_{ij}$, а по минимальной отрицательной разнице $\Delta_{ij} = U_i + V_j - c_{ij}$. Оптимальным будет план, которому в последней таблице сопутствуют свободные клетки с неотрицательными элементами: все разности $\Delta_{ij} = U_i + V_j - c_{ij} \geq 0$.

7. Необходимо в одно время распределить груз различного рода по потребителям. Задачи данного типа называются много продуктовыми транспортными задачами. В этих задачах поставщики n родов грузов разбиваются на n условных поставщиков, а потребители m родов грузов разбиваются на m условных потребителей. С учетом этой разбивки составляют полную транспортную таблицу. При этом заметим, что некоторые маршруты A_iB_j, должны быть блокированы (закрыты), поскольку в данной постановке задачи грузы разного рода не могут заменять друг друга. Этим маршрутам A_iB_j должна соответствовать очень высокая стоимость перевозки. Много продуктовую задачу не всегда обязательно описывать одной моделью. Например, если поставки грузов различного рода независимы, то задачу можно представить в виде комплекса транспортных задач по каждому роду груза. Однако если между грузами различного рода существует связь (например, одни из

грузов можно заменить другими), то в общем случае исходную модель (задачу) не удается разбить на комплекс простых транспортных задач.

Рассмотрим примеры задач транспортного типа.

Пример 5.1. Одно фермерское хозяйство (A_1) имеет продовольственное зерно двух видов: 3 тыс. т - III класса и 4 тыс. т - IV класса. Второе фермерское хозяйство (A_2) также имеет зерно двух классов: 5 тыс. т - III класса и 2 тыс. т - IV класса. Зерно должно быть вывезено на два элеватора: на первый элеватор (B_1) необходимо поставить 2 тыс. т пшеницы III класса, 3 тыс. т пшеницы IV класса и остальные 2 тыс. т пшеницы любого класса.

Аналогично второй элеватор (B_2)должен получить 8,25 тыс. т, из них пшеницы - 1 тыс. т III класса и 1,5 тыс. т IV класса.

Стоимость перевозки в д.е. 1 т зерна составляет: из пункта A_1 в пункты B_1 и B_2 - 1 и 1,5, соответственно; из пункта A_2 в пункты B_1 и B_2 - 2 и 1 д.е., соответственно.

Составить оптимальный план перевозок.

Решение

Каждого поставщика условно разбиваем на две части согласно двум видам зерна (A_1^3 и A_1^4; A_2^3 и A_2^4*)*, аналогично потребителей разбиваем на три части (пшеница III класса, IV класса и любой класс): B_1^3, B_1^4 и B_1^0, а также B_2^3, B_2^4 и B_2^0. Потребности превышают запасы, поэтому вводим фиктивного поставщика A_3. Часть клеток в таблице запираем большими числами *M;* например, в клетке (1; 2) стоит большое число. Это значит, что поставщик A_1^3 не может удовлетворить потребителя B_1^4 пшеницей IV класса за счет имеющейся пшеницы III класса.

С учетом сделанных замечаний составим первую таблицу (табл. 1).

Таблица 1

Исходные данные

Поставщики		**Потребители**						**Запас, тыс. т**
		B_1			B_2			
		B_1^3	B_1^4	B_1^0	B_2^3	B_2^4	B_2^0	
A_1	A_1^3	1	*M*	1	1,5	*M*	1,5	3
	A_1^4	*M*	1	1	*M*	1,5	1,5	4
A_2	A_2^3	2	*M*	2	1	*M*	1	5
	A_2^4	M	2	2	*M*	1	1	2
A_3		0	0	0	0	0	0	1,25
Спрос, тыс. т		2	3	2	1	1,5	5,75	15,25

Перевозки от фиктивного поставщика не производятся, поэтому c_{51} = $= c_{52}$ = c_{53} = c_{54} = c_{55} = c_{56} = 0. Величина *M* намного больше c_{ij}. Применяя метод потенциалов, в итоге получим таблицу с оптимальным решением (табл. 1).

Анализ решения

Первый поставщик поставит на первый элеватор B_1 пшеницу III класса$\left(x_{22} = 2\right)$; пшеницу IV класса $\left(x_{22} = 3\right)$, а также пшеницу любого класса (III или IV) $\left(x_{13} = 1; x_{23} = 1\right)$.

Таблица 2

Оптимальное решение

Поставщики	**Потребители**		**Запас, тыс. т**
	B_1	B_2	

		B_1^3	B_1^4	B_1^0	B_2^3	B_2^4	B_2^0	
A_1	A_1^3	1 2	M	1 1	1,5	M	1,5	3
	A_1^4	M	1 3	1 1	M	1,5	1,5	4
A_2	A_2^3	2	M	2	1 1	M	1 4	5
	A_2^4	M	2	2	M	1 1,5	1 0,5	2
A_3		0	0	0	0	0	0 1,25	1,25
Спрос, тыс. т		2	3	2	1	1,5	5,75	15,25

Второй поставщик (A_2) поставит на второй элеватор (B_2) пшеницу III класса$(x_{31} = 1)$, пшеницу IV класса $(x_{45} = 1{,}5)$ и частично любую пшеницу $(x_{36} = 4;\ x_{46} = 0{,}5)$. Потребность элеватора в любой пшенице не удовлетворена на 1,25 тыс. т $(x_{56} = 1{,}25)$. Минимальные затраты на перевозку составили: $F_{\min} = 14$ д.е.

Пример 5.2. ***Модель производства с запасами***

Фирма переводит свой головной завод на производство определенного вида изделий, которые будут выпускаться в течение четырех месяцев. Величины спроса в течение этих четырех месяцев составляют 100, 200, 180 и 300 изделий, соответственно. В каждый месяц спрос можно удовлетворить за счет:

- запасов изделий, произведенных в прошлом месяце, сохраняющихся для реализации в будущем;
- производства изделий в течение текущего месяца;
- избытка производства изделий в более поздние месяцы в счет невыполненных заказов.

Затраты на одно изделие в каждом месяце составляют 4 д.е. Изделие, произведенное для более поздней реализации, влечет за собой дополнительные издержки на хранение в 0,5 д.е. в месяц. С другой стороны, каждое изделие, выпускаемое в счет невыполненных заказов, облагается штрафом в размере 2 д.е. в месяц.

Объем производства изделий меняется от месяца к месяцу в зависимости от выпуска других изделий. В рассматриваемые четыре месяца предполагается выпуск 50, 180, 280 и 270 изделий, соответственно.

Требуется составить план, имеющий минимальную стоимость производства и хранения изделий.

Решение

Задачу можно сформулировать как транспортную. Эквивалентность между элементами производственной и транспортной систем устанавливается следующим образом (табл. 3):

Таблица 3

Транспортная система	**Производственная система**
1. Исходный пункт i	1. Период производства i
2. Пункт назначения j	2. Период потребления j
3. Предложение в пункте i	3. Объем производства за период i
4. Спрос в пункте j	4. Реализация за период j
5. Стоимость перевозки из i и j	5. Стоимость производства и хранения за период i и j

Перед нами структура транспортной модели. Для рассматриваемой задачи стоимость «перевозки» изделия из периода i в период j выражается как:

$$c_{ij} = \begin{cases} \bullet\ \textit{стоимость производства в } i-\textit{й период, } i=j; \\ \bullet\ \textit{стоимость производства в } i-\textit{й период плюс стоимость} \\ \textit{задержки от } i \textit{ до } j,\ i<j; \\ \bullet\ \textit{стоимость производства в } i-\textit{й период плюс штраф} \\ \textit{за нарушение срока, } i>j. \end{cases}$$

Из определения c_{ij} следует, что затраты в период i при реализации продукции в тот же период i ($i = j$) оцениваются только стоимостью производства. Если в период i производится продукция, которая будет потребляться позже ($i < j$), то имеют место дополнительные издержки, связанные с хранением. Аналогично производство в i- й период в счет невыполненных заказов $i > j$ влечет за собой дополнительные расходы в виде штрафа. Например,

$$c_{ij} = 4 \text{ д. е.}; \quad c_{ij} = 4 + (0{,}5 + 0{,}5) = 5 \text{ д.е.}; \quad c_{ij} = 4 + (2 + 2 + 2) = 10 \text{ д.е.}$$

Исходная транспортная таблица выглядит следующим образом (табл. 4).

Таблица 4

Исходные данные

Период	**Период**				**Объем произд-ва**
	1	2	3	4	
1	4	4,5	5	5,5	50
2	6	4	4,5	5	180
3	8	6	4	4.5	280
4	10	8	6	4	270
Спрос	100	200	180	300	

Задача решается обычным методом потенциалов на минимум затрат по производству и хранению продукции.

Пример 5.3. Имеются три сорта бумаги в количестве 10, 8 и 5 т, которую можно использовать на издание четырех книг тиражом 8000, 6000, 10 000, 15 000 экземпляров. Расход бумаги на одну книгу составляет: 0,6; 0,4;

0,8; 0,5 кг, а себестоимость тиража книги при использовании i -го сорта бумаги задается следующей матрицей (д.е.):

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 24 & 16 & 32 & 25 \\ 18 & 24 & 24 & 20 \\ 30 & 24 & 16 & 20 \end{pmatrix}.$$

Определить оптимальное распределение бумажных резервов.

Решение

Задача по своему экономическому смыслу не является транспортной, в то же время можно построить математическую модель, аналогичную транспортной задаче.

Потребности в бумаге легко определить, зная тираж и расход на одну книгу (т):

$$8000 \cdot 0{,}6 = 4{,}8 \text{ т};$$

$$15000 \cdot 0{,}4 = 6 \text{ т};$$

$$6000 \cdot 0{,}8 = 4{,}8 \text{ т};$$

$$10000 \cdot 0{,}5 = 5 \text{ т}.$$

Общие запасы бумаги составляют 23 т, а общие потребности - 20,5 т, поэтому необходимо в таблицу ввести фиктивный тираж B_5 с нулевыми затратами. В связи с тем, что мы составляем модель относительно бумаги, а матрица c_{ij} характеризует себестоимость печатания книги, необходимо исходную матрицу преобразовать относительно единицы бумаги (каждый столбец матрицы c_{ij} разделим на количество бумаги, приходящейся на одну книгу).

Согласно изложенному, составим первую таблицу (табл. 5).

Таблица 5

Исходные данные

Поставщики	**Потребители**					**Запасы, т**
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5^*	
A_1	40	20	80	50	0	10

A_2	30	30	60	40	0	8
A_3	50	30	40	40	0	5
Потребность, т	4,8	4,8	6	5	2,4	23

Используя метод потенциалов, получим оптимальное решение (табл. 6).

Таблица 6

Оптимальное решение

Поставщики	**Потребители**					**Запасы, т**
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5^*	
A_1	40	20 4,8	80	50 2,8	0 2,4	10
A_2	30 4,8	30	60 1	40 2,2	0	8
A_3	50	30	40 5	40	0	5
Потребность, т	4,8	4,8	6	5	2,4	23

Анализ решения

Бумаги 1- го сорта в количестве 4,8 т затрачено на издание второй книги; 2,8 т - на издание четвертой книги; 2,4 т - не использовано. Бумаги 2-го сорта затрачено: на первую книгу - 4,8 т; на издание третьей книги - 1,0 т; на издание четвертой книги - 2,2 т; бумага 3-го сорта использована на издание третьей книги в количестве 5 т.

Упражнения

Решить следующие транспортные задачи, заданные следующими таблицами планирования.

1.

B_j / A_j	40	60	80	60

60	1	3	4	2
80	4	5	8	3
100	2	3	6	1

2.

A_j \ B_j	150	140	190
60	3	7	2
80	9	2	1
100	1	5	7
170	6	4	8

3.

A_j \ B_j	100	70	35	45	50
54	12	14	26	16	3
32	8	11	11	22	10
85	6	10	10	21	15
162	10	4	4	8	9

4.

A_j \ B_j	20	10	60	30	70
60	18	2	8	3	2
36	8	2	3	12	4
90	4	3	5	7	14
84	9	4	16	5	8

5.

B_j / A_j	125	75	200	380	220
222	20	18	11	8	3
188	10	10	5	2	4
210	2	17	8	4	3
300	3	9	17	8	4

В задачах 6 – 9 решить транспортные задачи, в которых заданы векторы запасов ***A*** и потреблений ***B***, а тарифы перевозок задаются матрицей ***C*** .

6. $A=(30,40,90),\quad B=(40,20,30,60).$

$$C=\begin{pmatrix}3&6&7&2\\5&4&1&5\\7&3&3&4\end{pmatrix}.$$

8. $A=(400,300,900),\quad B=(400,200,300,600).$

$$C=\begin{pmatrix}3&2&4&4\\5&6&7&5\\3&4&1&2\end{pmatrix}.$$

9. $A=(18,24,30),\quad B=(12,18,24,18).$

$$C=\begin{pmatrix}2&4&5&3\\5&6&9&4\\3&4&7&8\end{pmatrix}.$$

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте транспортную задачу линейного программирования и напишите ее математическую модель.

2. Докажите теорему о существовании решения транспортной задачи.

3. Что называется распределительным методом решения транспортной задачи?

4. Какие существуют методы построения первоначального опорного плана? Постройте опорный план с помощью этих методов.

5. Сколько положительных перевозок должен содержать невырожденный опорный план и почему?

6. В чем заключается опорность плана транспортной задачи, условия которой записаны в виде таблицы?

7. Дайте определение системе потенциалов, расскажите, как она строится.

8. В каком случае опорный план транспортной задачи является оптимальным?

9. Какая модель транспортной задачи называется закрытой, а какая - открытой?

10. Как открытую модель преобразовать в закрытую?

11. Для решения, каких экономических задач применяется транспортная задача? Сформулируйте эти задачи и постройте их математические модели. Что такое усложненные задачи транспортного типа?

§18. Целочисленное линейное программирование

Ключевые слова: *неделимые величины, полностью целочисленная задача линейного программирования, частичная целочисленная задача линейного программирования, метод Гомори, задачи с неделимостями, экстремальные комбинаторные задачи, задачи оптимизации капиталовложений, задачи оптимизации производственной программы, двумерная задачи раскроя, задача о ранце.*

1. **Постановка задачи**

Целочисленные задачи математического программирования могут возникать различными путями. Существуют задачи линейного программирования, которые формально к целочисленным, не относятся (требование целочисленности переменных в них в явном виде не накладывается), но которые при целочисленных исходных данных всегда обладают целочисленным планом. Этим свойством обладают транспортная задача и различные ее варианты (задача о назначениях).

Первоначальным стимулом к изучению целочисленных задач явилось рассмотрение задач линейного программирования, в которых переменные представляли физически **неделимые** величины (скажем, количество единиц продукции разных видов). Для характеристики этого класса моделей используется термин «задачи с неделимостями».

Итак, во многих случаях на переменные задачи линейного программирования накладывается дополнительное требование целочисленности переменных. Если этому требованию должны удовлетворять все переменные, то получаем полностью целочисленную задачу линейного программирования, которая записывается следующим образом:

$$F(x)=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j \to \min, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j = b_i,\ i=1,2,\ldots,m, \tag{2}$$

$$x_j \ge 0;\quad j=1,2,\ldots,n, \tag{3}$$

$$x_j \in Z \quad j=1,2,\ldots,n, \tag{4}$$

где Z – множество целых чисел.

2. **Графический метод**

Полностью целочисленную задачу с двумя переменными можно решить графически, учитывая, что множество допустимых решений $\tilde{K}$ этой задачи состоит из точек целочисленной координатной сетки, принадлежащих множеству допустимых решений задачи (1) - (3), т.е. задачи линейного программирования без дополнительного требования (4).

Пример 1

$$F = x_1 - 20x_2 \to \min,$$

$$-x_1 + 10x_2 \le 40,$$

$$4x_1 + 2x_2 \le 29,$$

$$x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ j = 1,2.$$

Решение

На плоскости R^2 построим множество допустимых решений K рассматриваемой задачи линейного программирования без требования целочисленности (многоугольник ABCD на рис. 1) и отметим точки множества К с целочисленными координатами. Совокупность этих точек представляет собой множество допустимых решений $\tilde{K}$ полностью целочисленной задачи.

Перемещая линию уровня целевой функции $F(x)$ в направлении $\nabla F = (-1;20)$ убывания $F(x)$, находим крайнее положение этой линии, в котором она ещё имеет непустое пересечение со множеством $\tilde{K}$. В этом положении линия уровня проходит через точку B(0,4), поэтому решение задачи будет

$$\tilde{X}_{opt} = (0,4) \text{ и } F_{\min} = F(\tilde{X}_{opt}) = -80.$$

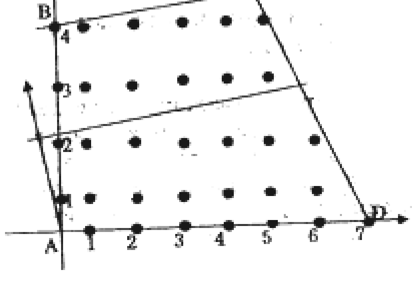


Рис.1

Отметим, что (как видно из рис. 1) точкой минимума $F(x)$ в данной задаче без требования целочисленности является точка С(5; 4,5), т.е.

$$X_{opt} = (5;\ 4{,}5) \text{ и } F_{\min} = F(X_{opt}) = -85.$$

Отсюда следует, что точкой минимума целевой функции на множестве допустимых решений $\tilde{K}$ целочисленной задачи не обязательно является ближайшая к решению X_{opt} обычной (не целочисленной) задачи точка множества K с целочисленными координатами.

Упражнения

Решить следующие полностью целочисленные задачи линейного программирования графическим методом.

1. $$F(x) = -x_1 - x_2 \to \min,\quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 36, \\ x_1 \le 13, \\ 3x_1 + x_2 \ge 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_j \in Z,\ j = 1,2. \end{cases}$$

2. $$F(x) = -9x_1 - 11x_2 \to \min,\quad \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 10, \\ x_1 \le 5, \\ x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_j \in Z,\ j = 1,2. \end{cases}$$

3. $$F(x) = -x_1 - x_2 \to \min,\quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 5, \\ x_1 \le 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_j \in Z,\ j = 1,2. \end{cases}$$

5. $$F(x) = 3x_1 + x_2 \to \min,\quad \begin{cases} -4x_1 + x_2 \le 29, \\ 3x_1 - x_2 \le 15, \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 38, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_j \in Z,\ j = 1,2. \end{cases}$$

6. $$F(x) = 5x_1 + 7x_2 \to \min,\quad \begin{cases} -3x_1 + 14x_2 \le 78, \\ 5x_1 - 6x_2 \le 26, \\ x_1 + 4x_2 \ge 25, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_j \in Z,\ j = 1,2. \end{cases}$$

4. $$F(x) = -4x_1 - 3x_2 \to \min,\quad \begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 10, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_j \in Z,\ j = 1,2. \end{cases}$$

3. **Метод Гомори**

Для решения полностью целочисленных задач линейного программирования с произвольным числом переменных используется метод Гомори. Он состоит в последовательном отсечении от множества допустимых решений K нецелочисленной задачи частей, не содержащих точек с целыми координатами. Эти отсечения производятся включением в задачу дополнительных ограничений на переменные x_j.

Опишем алгоритм метода Гомори:

1. С помощью симплекс-метода находится решение X_{opt} задачи линейного программирования без учета требования целочисленности (4). Если для X_{opt} условие (4) выполняется, то задача решена. В противном случае среди чисел β_i и столбца A_0, определяющей решение X_{opt}, есть такие, что $\{\beta_i\} > 0$.

Замечание. Напомним, что любое $a \in R^1$ можно представить в виде $a = [a] + \{a\}$, где $[a]$- целая часть числа a, а $\{a\} = a - [a]$ - его дробная часть.

Например,

$$\left[\frac{7}{3}\right] = 2; \; \left[-\frac{7}{3}\right] = -3, \qquad \left\{\frac{7}{3}\right\} = \frac{7}{3} - \left[\frac{7}{3}\right] = \frac{7}{3} - 2 = \frac{1}{3},$$

$$\left\{-\frac{7}{3}\right\} = -\frac{7}{3} - \left[-\frac{7}{3}\right] = -\frac{7}{3} + 3 = \frac{2}{3}.$$

2. Среди нецелых элементов β_i выбирается произвольный элемент $\{\beta_r\}$ (например, исходя из условия $\{\beta_r\} = \max\{\beta_i\}$).

По r- й строке симплекс-таблицы составляется дополнительное ограничение вида

$$-\sum_{j=m+1}^{n} \{q_{rj}\} x_j \le -\{\beta_r\}.$$

С помощью вспомогательной переменной $x_{n+1} \ge 0$ это ограничение представляется в виде равенства

$$-\sum_{j=m+1}^{n} \{q_{rj}\} x_j + x_{n+1} = -\{\beta_r\}$$

и вводится в симплекс-таблицу дополнительной строкой.

Так как $x_{n+1} = \{\beta_r\} < 0$, то теперь симплекс-таблица перестает соответствовать допустимому базисному решению задачи линейного программирования, которую она описывает (на столбце A_0 появляется $-\{\beta_r\} < 0$).

3. Для перехода к допустимому базисному решению производятся следующие операции:

a) строка с отрицательным свободным членом β_k считается разрешающей (на первом шаге, очевидно $k = n+1$);

b) если все коэффициенты $q_{kj} > 0$, то задача **не имеет решения**, в противном случае номер l разрешающего столбца находится из условия

$$\frac{\Delta_l}{|q_{kl}|} = \min_{j: q_{kj} < 0} \frac{\Delta_j}{|q_{kj}|};$$

c) совершается преобразование симплекс-таблицы с опорным элементом q_{kl}.

4. Если найденное в разделе 3 решение задачи линейного программирования удовлетворяет условию целочисленности, то вычисления завершаются, а если нет, то продолжаются переходом к разделу 2 описания алгоритма. Описанный алгоритм позволяет найти решение полностью целочисленной задачи линейного программирования или установить отсутствие решений за конечное число итераций.

Пример 2. Решить задачу, рассмотренную в примере 1, методом Гомори.

Решение

Введя дополнительные переменные $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, запишем эту задачу в каноническом виде:

$$F = x_1 - 20x_2 \to \min,$$
$$-x_1 + 10x_2 + x_3 = 40,$$
$$4x_1 + 2x_2 + x_4 = 29,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0,$$
$$x_j \in Z,\ j = 1,2,3,4.$$

Отметим, что, так как все коэффициенты ограничений-равенств данной задачи целые, то целочисленность исходных переменных x_1, x_2 влечет целочисленность и дополнительных переменных x_3, x_4 :x3, x4. Поэтому и после перехода к каноническому виду можно рассматривать данную задачу как полностью целочисленную (что мы и сделали выше) и применить для её решения метод Гомори.

Задачу решим симплексным методом.

Б	**С$_б$**	**А$_0$**	**1**	**-20**	**0**	**0**
			А$_1$	**А$_2$**	**А$_3$**	**А$_4$**
А$_3$	0	40	-1	10	1	0
А$_4$	0	29	4	2	0	1
Δ_j		0	-1	20	0	0
А$_2$	-20	4	$-1/10$	1	$1/10$	0
А$_4$	0	21	$21/5$	0	$-1/5$	1
Δ_j		-80	2	0	-2	0
А$_2$	-20	$9/2$	0	1	$2/21$	$1/42$
А$_1$	1	5	1	0	$-1/21$	$5/21$
Δ_j		-85	0	0	$-41/21$	$-5/21$

Это решение

$$X_{opt} = \left(5;\ 9/2;\ 0;\ 0\right),\ F_{\min} = F\left(X_{opt}\right) = -85$$

не удовлетворяет условию целочисленности, поэтому дополняем последнюю симплекс-таблицу дополнительной строкой.

$$\{\beta_1\} = \frac{9}{2} - \left[\frac{9}{2}\right] = \frac{9}{2} - 4 = \frac{1}{2};\quad q_{11} = q_{12} = 0;\quad q_{13} = \frac{2}{21} - 0 = \frac{2}{21};\quad q_{14} = \frac{1}{42} - 0 = \frac{1}{42}.$$

Для перехода к допустимому базисному решению находим разрешающий **а** элемент по описанному правилу и преобразуем симплексную таблицу:

Б	$C_б$	A	1	-20	0	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_2	-20	$9/2$	0	1	$2/21$	$1/42$	0
A_1	1	5	1	0	$-1/21$	$5/21$	0
Δ_j		-85	0	0	$-41/21$	$-5/21$	0
A_5	0	$-1/2$	0	0	$-2/21$	$-1/42$	1
A_2	-20	4	0	1	0	0	1
A_1	1	0	1	0	-1	0	10
A_4	0	21	0	0	4	1	-42
Δ_j		-80	0	0	-1	0	-10

Последняя симплекс-таблица дает решение рассматриваемой задачи:

$$\tilde{X}_{opt} = (0{,}4) \text{ и } F_{\min} = F\left(\tilde{X}_{opt}\right) = -80.$$

Отметим, что дополнительное ограничение, введенное в симплексную таблицу, имеет вид

$$-\frac{1}{42}x_4 - \frac{4}{42}x_3 \le -\frac{1}{2}.$$

С помощью уравнений $x_3 = 40 + x_1 - 10x_2$, $x_4 = 29 - 4x_1 - 2x_2$ перепишем его для переменных x_1, x_2: $x_2 \le 4$. Отсюда видно, что дополнительное ограничение соответствует отсечению от множества K (многоугольника ABCD на рис.1) части, содержащей точку X= (5; $9/2$) (вершину C этого многоугольника).

Отметим, что переход к каноническому виду в полностью целочисленной задаче линейного программирования, содержащей ограничения-неравенства

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad (5)$$

не приводит, вообще говоря, к полностью целочисленной задаче в каноническом виде, так как в преобразованных ограничениях (5) вспомогательные переменные x_{n+i} не подчинены требованию целочисленности.

Однако, если все коэффициенты a_{ij}, b_i в (5) – целые числа, то условия целочисленности можно распространить и на x_{n+i}, как это сделано при решении примера 2.

Полностью целочисленную задачу в каноническом виде можно получить также, если (5) a_{ij}, b_i - рациональные числа. Для этого следует умножить (5) на общее кратное знаменателей коэффициентов a_{ij}, b_i (т.е. перейти к целым коэффициентам в (5)) и лишь после этого ввести вспомогательные переменные x_{n+i}.

Упражнения

Решить следующие полностью целочисленные задачи линейного программирования методом Гомори.

1. $F(x) = -x_1 + x_4 \to \min,$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_4 = 2, \\ x_1 + x_3 + 3x_4 = 3, \\ x_j \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2,3,4. \end{cases}$$

2. $F(x) = -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \to \min,$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 4, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 6, \\ x_j \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2,3,4. \end{cases}$$

3. $F(x) = -x_1 - x_2 \to \min,$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9, \\ x_j \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2,3,4. \end{cases}$$

5. $F(x) = x_1 + 2x_2 + x_5 \to \min,$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5. \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2. \\ x_3 - x_4 + x_5 = 1. \\ x_j \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2,3,4,5. \end{cases}$$

6. $F(x) = -4x_1 - 3x_2 \to \min,$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8, \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = 10, \\ x_j \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2,3,4. \end{cases}$$

4. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 9, \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1,2,3,4. \end{cases}$

$F(x) = -x_1 - x_2 \to \min,$

7. Сформулируйте задачу оптимального раскроя материалов и составьте ее математическую модель.

8. В обработку поступила партия из 150 досок длиной 7,5 м каждая для изготовления комплектов из четырех деталей. Комплект состоит из одной детали длины 3 м, двух деталей размером по 2 м и одной детали размером 1,6 м. Как распилить все доски, чтобы получить большее число комплектов?

Указание. Сначала составить таблицу возможных способов распила одной доски на детали заданных размеров.

4. Некоторые классы задач целочисленного линейного программирования

4.1. Задача с неделимостями

К данному классу принадлежат *задачи распределения капиталовложений* и *задачи планирования производства.*

Рассмотрим следующую задачу целочисленного линейного программирования:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + ...c_nx_n \to \max, \tag{6}$$

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{mn} \leq b_m, \end{array} \tag{7}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,\ldots,n; \tag{8}$$

$$x_j \text{–} \textit{целые числа}, \qquad j \in J, \tag{9}$$

где J — некоторое подмножество множества индексов $N = \{1,2,...,n\}$.

Ясно, что если $J = N$ (т.е. требование целочисленности наложено на все переменные), то задачу называют *полностью целочисленной;* если же $J \neq N$, она называется *частично целочисленной.*

Модель (6) - (9) естественно интерпретировать, например, в следующих терминах. Пусть через $i = 1,..., m$ обозначены производственные факторы, через $j = 1, ..., n$ — виды конечной продукции.

Обозначим далее:

a_{ij} - количество факторов i, необходимое для производства единицы продукта j;

b_i - наличные ресурсы фактора i;

c_i - прибыль, получаемая от единицы продукта j.

Пусть продукты j для $j \in J$ являются **неделимыми,** т.е. физический смысл имеет лишь их целое неотрицательное количество («штуки»). Предположим, что требуется составить производственную программу, обеспечивающую максимум суммарной прибыли и не выводящую за пределы данных ресурсов. Обозначая через x_j искомые объемы выпуска продукции, мы сводим эту задачу к модели (6) - (9).

Задача с булевыми переменными. Логическая взаимосвязь:

1) *взаимоисключение.* Пусть $x_j = 1$, если реализуется проект A_j, и $x_j = 0$ в противном случае. Запись $A_j \vee A_k$ означает, что в план может быть включен либо проект A_j, либо проект A_k. Вместе они включены быть не могут. С помощью этой записи выражается отношение взаимоисключения между проектами.

В этих обозначениях взаимоисключение $A_j \vee A_k$ выражается неравенством $x_j + x_k \leq 1$;

2) *взаимообусловленность.* Запись $A_k \to A_j$ («проект A_k влечет за собой проект A_j») означает, что проект A_k может быть включен в план только в том случае, если в план включен и проект A_j. С помощью этой записи выражается отношение между обусловливающими друг друга проектами, например, когда проект A_k - результат тиражирования проекта A_j на другом объекте или когда A_k базируется на результатах реализации проекта A_j.

В принятых обозначениях взаимообусловленность $A_k \rightarrow A_j$ выражается неравенством $x_k \leq x_j$.

4.2. Экстремальные комбинаторные задачи

Задачи данного класса, называемые также **задачами выбора**, состоят в отыскании среди конечного множества альтернатив одной, которой отвечает экстремальное значение принятой целевой функции.

Задача о коммивояжере - классический пример задачи выбора оптимального маршрута. Формулируется она следующим образом. Коммивояжер должен выехать из определенного города и вернуться в него, побывав в каждом из городов лишь по одному разу и проехав минимальное расстояние.

Пусть $x_{ij} = 1$, если коммивояжер переезжает из города i непосредственно в город j, и $x_{ij} = 0$ в противном случае. Обозначим через c_{ij} расстояние между городами i и j (чтобы избежать бессмысленных значений $x_{ij} = 1$, предполагается, что c_{ii} равны достаточно большому числу).

Тогда формальная модель имеет вид:

$$f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \rightarrow \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad i = 1, 2, ..., n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

К приведенным ограничениям необходимо добавить условия на недопустимость под циклов, т.е. повторного посещения городов (за исключением исходного). Это ограничения вида

$$z_i - z_j + n\,x_{ij} \leq n - 1, \quad i = 2, ..., n; \quad j = 2, ..., n \ \ (i \neq j),$$

где на переменные z_i и z_j не требуется накладывать никаких ограничений.

Общая *задача календарного планирования* формулируется следующим образом. Имеется n станков (машин), на которых требуется обработать m деталей. Заданы маршруты (в общем случае различные) обработки каждой детали на каждом из станков или группе станков. Задана также продолжительность операций обработки деталей. Предполагается, что одновременно на станке можно обрабатывать не более одной детали. Требуется определить оптимальную последовательность обработки. Критерием оптимальности могут выступать продолжительность обработки всех деталей, суммарные затраты на обработку, общее время простоя станков и др. Существует огромное число постановок данной задачи, учитывающих конкретные условия производства.

Один из представителей задач данного типа - так называемая *задача о ранце.* Имеется n предметов. Предмет j (j = 1, ..., n) обладает весом w_j и полезностью c_j. Пусть b - общий максимально допустимый вес предметов, которые можно положить в ранец. Требуется выбрать предметы таким образом, чтобы их общий вес не превышал максимально допустимый и при этом суммарная полезность (ценность) содержимого ранца была максимальной. Пусть x_j = 1, если предмет положен в ранец, и x_j = 0 в противном случае. Математическая формулировка задачи имеет вид:

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j x_j \le b,$$

$$x_j \in \{0;\ 1\}, \qquad j = 1, 2, \dots, n.$$

К классу экстремальных комбинаторных задач принадлежит также линейный и нелинейный варианты *задачи о назначениях*.

Большинство целочисленных и комбинаторных типов задач таких, как задача с неделимостями, задача коммивояжера, задача календарного планирования, принадлежит к разряду так называемых *трудно решаемых.* Это означает, что вычислительная сложность алгоритма их точного решения - зависимость числа элементарных операций (операций сложения или сравнения), необходимых для получения точного решения, от размерности задачи n - является *экспоненциальной* (порядка 2^n), т.е. сравнимой по трудоемкости с полным перебором вариантов. В качестве *n,* например, для задачи с неделимостями служит число целочисленных переменных и число ограничений, для задачи коммивояжера - число городов (или узлов графа маршрутов), для задачи календарного планирования - число деталей и число станков. Такие задачи называют еще *NP*-трудными или *NP*-полными. Получение их точного решения не может быть гарантировано, хотя для некоторых задач данного типа существуют эффективные методы, позволяющие находить точное решение даже при больших размерностях. Примером таких задач служит задача о ранце с булевыми переменными.

Задачи с вычислительной сложностью, определяемой *полиномиальной* зависимостью от n называются *эффективно решаемыми.* К такому типу задачам принадлежат задачи транспортного типа и линейные задачи о назначениях.

Пример 3. *Оптимизация капиталовложений.* Имеется 10 работ, каждая из которых характеризуется тремя технико-экономическими показателями: a_j - трудозатраты; b_j - размер, необходимых капиталовложений; c_j - ожидаемый экономический эффект.

Исходные данные, приведены в следующей таблице:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
a_j	3	3	3	4	4	2	4	3	6	5
b_j	4	3	2	4	6	4	3	5	3	4
c_j	3	7	5	6	8	4	7	4	7	6

Общие трудозатраты не должны превышать 20. Общий объем капиталовложений не должен превышать 20. Определите, какие из 10 работ следует выполнить, чтобы максимизировать ожидаемый экономический эффект, учитывая следующие условия взаимообусловленности и взаимоисключения:

$$a)\quad \begin{array}{ccccc} A_1 & \to & A_7 & \vee & A_4 \\ & & \downarrow & & \\ & & A_{10} & \vee & A_2, \end{array} \qquad\qquad б)\quad \begin{array}{ccccccc} & & A_3 & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ A_5 & \vee & A_8 & \vee & A_9 & \to & A_6. \end{array}$$

Решение

Помимо целевой функции и двух ограничений по общему объему трудозатрат и капиталовложений, данную задачу характеризует следующая система неравенств:

$$x_1 \le x_7, \quad x_3 \le x_8, \quad x_7 \le x_{10}, \quad x_9 \le x_6,$$

$$x_{10} + x_2 \le 1, \quad x_5 + x_8 \le 1, \quad x_7 + x_4 \le 1, \quad x_8 + x_9 \le 1.$$

В результате расчетов получаем X^* = (0101110010).

Пример 4. ***Оптимизация производственной программы.*** Автомобилестроительный завод выпускает три модели автомобилей, которые изготавливаются последовательно в трех цехах. Мощность цехов составляет 300, 250 и 200 человеко-дней в декаду. В первом цехе для сборки одного автомобиля первой модели требуется 6 человеко-дней, второй модели - 4 и третьей модели – 2 человеко-дня в декаду, соответственно. Во втором цехе трудоемкость равна 3, 4 и 5 человеко-дней, соответственно, в третьем - по 3 человеко-дня на каждую модель. Прибыль, получаемая заводом от продажи одного автомобиля каждой модели, составляет, соответственно, 15, 13 и 10 тыс.

Постройте модель для определения оптимального плана.

Решение

Пусть x_i - количество выпускаемых автомобилей i - й модели в течение декады $(i = 1,2,\ldots,n)$.

В принятых обозначениях модель имеет вид:

$$\begin{gathered}
F = 15x_1 + 13x_2 + 10x_3 \to \max \\
6x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 300, \\
3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 250, \\
3(x_1 + x_2 + x_3) \le 200, \\
x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0, \\
x_j - \text{\textit{целые}},\ j = 1,2,3.
\end{gathered}$$

Пример 5. ***Двумерная задача раскроя.*** Из минимального количества листов стекла размером 8х6 м^2 требуется вырезать 10 оконных стекол размером 4х4м^2, 20 оконных стекол размером 4х5м^2 и 30 оконных стекол размером 3х3м^2. Множество вариантов раскроя показано в следующей таблице:

Размер, м² / *Вариант*	**4x4**	**4x5**	**3x3**
1	2	-	-
2	1	1	-
3	1	-	2
4	-	2	-
5	-	-	4
6	1	1	2

Постройте модель для определения плана раскроя, требующего минимальное количество материала.

Решение

Пусть x_i - количество листов стекла размером 8х6м^2, которые следует раскроить по варианту i.

Тогда модель имеет вид:

$$F = \sum_{i=1}^{n} x_i \to \min,$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \geq 10,$$
$$x_2 + 2x_4 + x_6 \geq 20,$$
$$2x_3 + 4x_5 + 2x_6 \geq 30,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, ..., x_6 \geq 0,$$
$$x_j - \text{целые},\ j = 1, 2, ..., 6.$$

Пример 6. ***Задача о ранце.*** Некая торговая компания имеет свои универсамы в Ташкенте, Самарканде, Бухаре, Карши, Термезе, Ургендже и Нукусе. В результате ошибок менеджмента экономическое положение компании стало ухудшаться, ей пришлось взять кредит в размере 13 млн. и, в конечном счете, чтобы вовремя его погасить, срочно продавать некоторые из своих универсамов. Средства, которые компания могла бы получить от продажи универсамов в Ташкенте, Самарканде, Бухаре, Карши, Термезе, Ургендже и Нукусе составляют, соответственно, 5,2; 4,9; 4,5; 3,6; 3,4; 3,2 и 3,1 млн. Однако продажа универсамов сопряжена с необходимостью увольнения персонала. Его численность составляет, соответственно, 200,190,180,170, 150,130 и 110 человек. По требованию объединенного профсоюза работников торговли компания должна минимизировать численность увольняемого персонала.

Постройте модель для нахождения оптимального решения.

Решение

Пронумеруем города в соответствии с порядком их перечисления. Пусть $x_i = 1$, если универсам, расположенный в городе, продается, и $x_i = 0$ в противном случае. Тогда оптимизационная модель имеет вид:

$$F = 200x_1 + 190x_2 + 180x_3 + 170x_4 + 150x_5 + 130x_6 + 110x_7 \to \min,$$

$$5,2x_1 + 4,9x_2 + 4,5x_3 + 3,6x_4 + 3,4x_5 + 3,2x_6 + 3,1x_7 \geq 13,$$

$$x_i \in \{0;1\},\ i = 1,2,...,7.$$

Вопросы для самопроверки

1. Как возникают целочисленные задачи математического программирования?

2. Прокомментируйте термин «задачи с неделимостями».

3. Какую задачу называют полностью целочисленной задачей линейного программирования?

4. Запишите полностью целочисленную задачу линейного программирования?

5. Опишите графический метод решения полностью целочисленной задачи с двумя переменными.

6. Опишите метод Гомори решения полностью целочисленной задачи с произвольным числом переменных.

7. Переход к каноническому виду в полностью целочисленной задаче линейного программирования, содержащей ограничения-неравенства $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$ не приводит, вообще говоря, к полностью целочисленной задаче в каноническом виде, так как в преобразованных ограничениях $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$ вспомогатель-

ные переменные x_{n+i} не подчинены требованию целочисленности. В каких случаях условия целочисленности можно распространить и на дополнительные переменные x_{n+i} и получить полностью целочисленную задачу в каноническом виде?

8. Приведите задачи, принадлежащие к классу задач с неделимостями, и прокомментируйте их. Какие из них допускают экономическую интерпретацию?

9. Приведите задачи, принадлежащие к классу экстремальные комбинаторные задачи, и прокомментируйте и их.

10. Приведите постановку задачи оптимизации капиталовложений и прокомментируйте ее.

11. Приведите постановку задачи оптимизации, производственной программы и прокомментируйте ее.

12. Приведите постановку двумерной задачи раскроя и прокомментируйте ее.

13. Приведите постановку задачи о ранце и прокомментируйте ее.

ГЛАВА 2. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

§19. Понятие n- мерного координатного пространства R^n. Последовательность точек.

Ключевые слова: *точка в n- мерном пространстве R^n, n- мерное координатное пространство R^n, расстояние между любыми двумя точками, шар в пространстве R^n, внутренняя точка, внутренность множества, открытое множество, окрестность точки, предельная точка – точка накопления множества, изолированная точка множества, замкнутое множество в пространстве R^n, замыкание множества, ограниченное множество, компакт в пространстве R^n, прямые, лучи, отрезки в пространстве R^n, выпуклое множество, выпуклая линейная комбинация точек, угловые или крайние точки, связанное множество, область, замкнутая область, ломанная в пространстве R^n, бесконечная последовательность точек, числовая последовательность, множество значений числовой последовательности, предел последовательности точек, ограниченная последовательность, бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, монотонная последовательность, вложенные отрезки, теорема Кантора, подпоследовательность, частичный предел, теорема Больцано - Вейерштрасса, фундаментальная последовательность, критерий Больцано - Коши сходимости последовательности.*

1. Взаимное расположение точек n- мерного пространства R^n

1.1. Понятие n- мерного координатного пространства. Точки в n- мерном координатном пространстве. Расстояние между точками

Рассмотрим n- мерное (арифметическое) пространство R^n. Элементы этого пространства в математике трактуются двояко: с одной стороны, их рассматривают как (арифметические) векторы с координатами $x_1, x_2, ..., x_n$, с другой стороны – как точки с координатами $x_1, x_2, ..., x_n$. Читатель уже знаком с первой трактовкой из линейной алгебры. Ниже и далее в основном будем пользоваться второй трактовкой.

Для дальнейшего изложения нам будет необходимо ввести понятие **точки в n- мерном пространстве R^n.**

Определение. Упорядоченную совокупность n действительных чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ называют n- **мерной точкой** $M(x_1; x_2; ...; x_n)$, а сами числа $x_1, x_2, ..., x_n$ - **координатами точки** M.

Множество всех n- мерных точек составляет n- **мерное координатное пространство** R^n.

Пример 1. $A(2;\ -3;\ 5;\ 1;\ 4)$ и $B(1;\ -12;\ -\sqrt{3};\ 5{,}6;\ 1)$ являются точками R^5, а $C(3)$, $D(\sqrt{2})$ и $E(0)$ - точки R^1 и т.д.

Одной из **фундаментальных характеристик взаимного расположения точек** пространства является **расстояние** между ними. Расстояние или метрику в пространстве R^n вводят по-разному. Наиболее распространенной является следующая (так называемая евклидова) метрика:

Определение. Расстоянием между любыми двумя точками $M(x_1; x_2; ...; x_n)$ и $N(y_1; y_2; ...; y_n)$ пространства R^n называют число

$$\rho(M, N) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}. \qquad (1)$$

Формула (1) обобщает расстояния между точками в аналитической геометрии для $n = 1, 2, 3$.

Через O обозначают точку с нулевыми координатами $O(0; 0; ...; 0)$ - начало координат. Тогда имеем

$$\rho(M, O) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}.$$

Пример 2. Определить расстояние между точками $A(3;8)$ и $B(-5;14)$.

Решение

Воспользовавшись формулой (1), получим

$$\rho\left(A,B\right)=\sqrt{(-5-3)^2+(14-8)^2}=\sqrt{64+36}=10.$$

Аксиомы (или свойства) расстояния в n **- мерном пространстве** R^n:

1^0. $\rho\left(M,N\right)\geq 0,\ \ \rho\left(M,N\right)=0 \Leftrightarrow M=N$;

2^0. $\rho\left(M,N\right)=\rho\left(N,M\right)$;

3^0. $\rho\left(M,N\right)\leq \rho\left(M,L\right)+\rho\left(L,N\right)$ (неравенство треугольника) для всех $M,N,L \in R^n$.

При всяких обобщениях понятия расстояния обычно стараются сохранить эти свойства.

Если даны две точки $M\left(x_1;x_2;...;x_n\right)$ и $N\left(y_1;y_2;...;y_n\right)$ в пространстве R^n, то можно рассмотреть вектор

$$\vec{MN}=(y_1-x_1,y_2-x_2,...,y_n-x_n).$$

При этом длина вектора $\vec{MN}$ совпадает с расстоянием $\rho\left(M,N\right)$, т.е. $\left|\vec{MN}\right|=\rho\left(M,N\right)$.

Определение. Вектор $\vec{OM}$, где $O\left(0;0;...;0\right)$ называют **радиусом-вектором точки** M **.**

Замечание. В дальнейшем элементы пространства R^n будем называть точками или векторами в зависимости от того, какая трактовка для вводимых нами понятий будет более удобной.

Располагая понятием «расстояния между двумя точками», мы можем определить в пространстве R^n ряд других понятий.

1.2. Внутренние точки. Открытые множества в пространстве R^n

Определение. Шаром радиуса r **в пространстве** R^n с центром в точке $A \in R^n$ называется следующее множество точек пространства R^n:

$$S_r(A)=\left\{X : X\left(x_1;x_2;...;x_n\right)\in R^n, \quad \rho\left(X,A\right)<r\right\}$$

или то же самое

$$S_r(A)=\left\{X : X\left(x_1;x_2;...;x_n\right)\in R^n, \quad \sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)^2<r^2\right\}.$$

Шар в R^1 есть интервал $(a-r,\ a+r)$, шар в R^2 - множество $(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2<r^2$.

Определение. Пусть M есть множество точек в пространстве R^n. Точка $X_0\in\mathrm{M}$ называется **внутренней точкой множества** M, если существует $S_\varepsilon(X_0)\subset\mathrm{M}$, т.е. точка X_0 принадлежит множеству M вместе с некоторым шаром с центром в точке X_0.

Определение. Совокупность всех внутренних точек множества M **называется его внутренностью** и обозначается $\mathrm{int}\,\mathrm{M}$. Очевидно, $\mathrm{int}\,\mathrm{M}\subset\mathrm{M}$. Если $\mathrm{int}\,\mathrm{M}=\mathrm{M}$, т.е. все точки множества M внутренние, то множество M называется **открытым в пространстве** R^n.

Пустое множество считается открытым по определению.

Пример 3. Шар в пространстве R^n - открытое множество.

Действительно, пусть

$$S_c(A)=\left\{X : X\in R^n, \quad \rho\left(X,A\right)<c\right\}$$

и пусть точка $\bar{X}\in S_c(A)$, $\rho\left(\bar{X},A\right)<c$. Положим $\varepsilon=c-\rho\left(\bar{X},A\right)$. Шар $S_\varepsilon(\bar{X})\subset S_c(A)$ (рис. 1).

В самом деле, если $X\in S_\varepsilon(\bar{X})$, то $\rho\left(X,\bar{X}\right)<\varepsilon$. В силу неравенства треугольника получаем

$$\rho\left(X,A\right)\le\rho\left(X,\bar{X}\right)+\rho\left(\bar{X},A\right)<\varepsilon+\rho\left(\bar{X},A\right)=c-\rho\left(\bar{X},A\right)+\rho\left(\bar{X},A\right)=c.$$

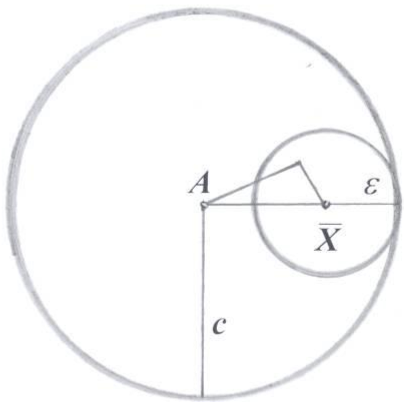


Рис. 1

Следовательно, $X \in S_c(A)$. Так как X - произвольная точка шара $S_\varepsilon(\bar{X})$, то $S_\varepsilon(\bar{X}) \subset S_c(A)$. Итак, любая точка $\bar{X}$ шара $S_c(A)$ принадлежит ему вместе с некоторым шаром $S_\varepsilon(\bar{X})$. Поэтому $S_c(A)$ есть открытое множество.

Теорема 1. Открытые множества в пространстве R^n обладают следующими свойствами:

1) все пространство R^n и пустое множество $\varnothing$ есть открытые множества;

2) объединение любого множества открытых множеств есть открытое множество;

3) пересечение конечного числа открытых множеств есть открытое множество.

Упражнение

Показать, что пересечение бесконечного множества открытых множеств может не быть открытым множеством.

1.3. Предельные точки. Замкнутые множества в пространстве R^n

Определение. Окрестностью точки $X_0 \in R^n$ будем называть любое множество $O(X_0)$, для которого точка X_0 является внутренней. Например, шар $S_\varepsilon(X_0)$ является окрестностью (шаровой) точки X_0.

Определение. Точка X_0 называется **предельной точкой*** **множества** $\mathsf{M} \subset R^n$, если в любой окрестности точки X_0 есть точки множества M, отличные от точки X_0.

Предельная точка множества M может принадлежать множеству M, а может и не принадлежать.

Примеры предельных точек

Пример 4. Множество рациональных чисел вида $\left\{\frac{1}{k}\right\}$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$, имеет предельную точку 0, не принадлежащую ему.

Пример 5. Множество целых чисел $\mathbf{Z}$ предельных точек не имеет.

Пример 6. Множество рациональных чисел R на отрезке $[0;1]$ имеет в качестве множества предельных точек все точки отрезка $[0;1]$, из них рациональные принадлежат множеству R, иррациональные – нет.

Пример 7. Все точки интервала (a,b) будут его предельными точками. Концы интервала a и b - тоже его предельные точки, но концы не принадлежат интервалу.

Определение. Точка множества M, не являющаяся предельной точкой множества M, называется **изолированной точкой множества** M.

Если X_0 есть изолированная точка множества M, то существует такая окрестность $O(X_0)$, в которой нет точек множества M, отличных от точки X_0. Каждая точка множества M является или предельной точкой множества M, или изолированной точкой множества M.

Пример 8. Рассмотрим множество1

$$\mathsf{K} = \{x : 1 < x \le 2\} \cup \{3\} \cup \left\{-\frac{1}{k}, \quad k \in \mathbf{N}\right\} \subset R^1.$$

---

* В математической литературе иногда называется точкой накопления.

Точка 0 является предельной, поскольку любая окрестность, содержащая 0, содержит по крайней мере одну точку $\left\{-\frac{1}{k}\right\}$. Все точки из отрезка $[1;2]$ будут предельными точками, поскольку любая окрестность содержащая точку из $(1;2]$ содержит по крайней мере одну точку из K (отличную от рассматриваемой, если она принадлежит $(1;2]$). Предельные точки 0 и 1 не принадлежат множеству K.

Любая из точек $\left\{-\frac{1}{k}\right\}$ и 3 может быть заключена в окрестность, в котором из множества K содержится лишь одна эта точка. По определению точки $\left\{-\frac{1}{k}\right\}$ и 3 являются изолированными точками множества K.

Упражнения

1. Пусть $\mathsf{M}=\left\{X : X\in R^2,\ x_1^2+x_2^2<25\right\}\subset R^2$. Доказать, что точка $A(3;4)$ является предельной для множества M.

2. Построить хотя бы одно множество, для которого предельными были бы точки $A(3;4)$ и $B(-1;2)$, и только эти точки.

Определение. Множество $\mathsf{M}\subset R^n$ называется **замкнутым,** если оно содержит все свои предельные точки.

Например, отрезок $[a,b]$ замкнут в R^1, а интервал (a,b) не является замкнутым множеством в R^1.

Определение. Множество, которое получается если присоединить к множеству M все его предельные точки, называется **замыканием** M и обозначается через $\bar{\mathsf{M}}$.

Пример 9. Рассмотрим множество K из примера 3. Множество $\bar{\mathsf{K}}$, являющееся замыканием множества K, определяется следующим образом:

$$\bar{\mathsf{K}}=\{x:1\le x\le 2\}\cup\{0,3\}\cup\left\{-\frac{1}{k},\quad k\in\mathbf{N}\right\}.$$

Упражнение

В пространстве R^1 дано множество $\mathsf{M}=(0;1]\cup\{2\}$. Указать внутренние точки множества M в R^1, а также изолированные, предельные и граничные точки множества M. Как определяется замыкание $\bar{\mathsf{M}}$ этого множества?

Теорема 2. Для того чтобы множество S в пространстве R^n было замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы его дополнение $R^n \backslash \mathsf{S}$ было открытым.

Теорема 3. Замкнутые множества обладают следующими свойствами:

1) все пространство R^n и пустое множество $\varnothing$ замкнуты;

2) пересечение любого множества замкнутых множеств замкнуто;

3) объединение конечного числа замкнутых множеств есть замкнутое множество.

Упражнения

1. Показать, что объединение бесконечного множества замкнутых множеств может не быть открытым множеством.

2. Доказать, что множество $\mathsf{M}=\left\{X : X \in R^2,\, x_2 \geq x_1^2\right\} \subset R^2$ замкнуто.

3. Доказать равносильность следующих определений предельных точек:

1) точка X_0 называется предельной точкой множества $\mathsf{M} \subset R^n$, если в любой окрестности точки X_0 есть точки множества M, отличные от точки X_0;

2) точка X_0 называется предельной точкой множества $\mathsf{M} \subset R^n$, если любая ее окрестность содержит бесконечно много точек из M.

1.4. Компакт в пространстве R^n

Определение. Множество M в пространстве R^n называется **ограниченным,** если существует положительное число m, такое что расстояние $\rho(X,Y) \leq m$ для любых точек X и Y множества M.

Теорема 4. Объединение двух ограниченных множеств - ограниченное множество.

Объединение конечного числа ограниченных множеств пространства R^n - ограниченное множество.

Определение. Ограниченное замкнутое множество в пространстве R^n называется **компактом в R^n.**

На первых порах это определение примем за определение компакта в R^n. Но в дальнейшем, после определения сходимости последовательности точек в пространстве R^n приведем то определение компакта, которое принято в математике.

1.5. Граница множества в пространстве R^n

Определение. Точка A пространства R^n называется **граничной точкой множества** $\mathsf{M} \subset R^n$ если в любой окрестности точки A есть как точки, принадлежащие множеству M, так и точки, не принадлежащие множеству M.

Граничная точка A множества M может не принадлежать множеству M.

Определение. Совокупность всех граничных точек множества M называется **границей множества** M и обозначается как $\partial\mathsf{M}$.

Например,

$$\partial(a,b)=\{a,b\},\ \ \partial[a,b]=\{a,b\};\ \ a,b\in R^1;$$

$$\partial\left\{X:\rho\left(X,A\right)<\varepsilon \quad X\in R^n\right\}=\left\{X:\rho\left(X,A\right)=\varepsilon \quad X\in R^n\right\}.$$

Каждая точка множества является либо его внутренней точкой, либо граничной точкой, при этом множество может не содержать все или некоторые граничные точки:

$$\mathsf{M}\subset \operatorname{int}\mathsf{M}\cup\partial\mathsf{M}.$$

Каждая точка замыкания $\bar{\mathsf{M}}$ множества M также является либо внутренней, либо граничной точкой самого множества M, но его замыкание $\bar{\mathsf{M}}$ содержит в себе уже все граничные точки множества: $\partial\mathsf{M}\subset\bar{\mathsf{M}}$. Поэтому

$$\bar{\mathsf{M}}=\operatorname{int}\mathsf{M}\cup\partial\mathsf{M}.$$

Справедливо, конечно, и равенство

$$\bar{\mathsf{M}}=\mathsf{M}\cup\partial\mathsf{M},$$

но в нем слагаемые правой части равенства, вообще говоря, пересекаются. Они не пересекаются тогда и только тогда, когда множество M является открытым. В самом деле, если множество открыто, то каждая его точка является внутренней и, тем самым, не принадлежит его границе.

Замечание. Нетрудно заметить, что:

1) если предельная точка множества M не принадлежит этому множеству, то она является граничной точкой множества M;

2) изолированная точка множества всегда является его граничной точкой.

Упражнение

Найти граничные точки множества

$$\mathsf{M}=\left\{X : X\in R^2,\ x_1^2+x_2^2<100\right\}\subset R^2.$$

1.6. Прямые, лучи и отрезки в пространстве R^n

В предыдущих пунктах мы рассмотрели только такие объекты в R^n, при исследовании которых используются лишь свойства расстояния. Такая метрическая геометрия не достаточно содержательная. В ней есть точки, шары, но нет прямых, плоскостей и т. д.

Введем в R^n некоторые, не связанные с метрикой объекты, как прямые, лучи и отрезки.

Определение. Прямой в R^n**,** проходящей через точки $A(a_1;a_2;...;a_n)$ и $B(b_1;b_2;...;b_n)$, будем называть следующее множество точек

$$\left\{X : X\in R^n \quad x_i=ta_i+(1-t)b_i,\ \ t\in R^1,\ \ i=1,2,...,n\right\}.$$

Лучом с вершиной в точке A в направлении $L=\left(l_1,l_2,...,l_n\right)'$, где $l_1^2+l_2^2+\dots+l_n^2=1$ назовем множество

$$\left\{X : X\in R^n \quad x_i=a_i+tl_i,\ \ 0\le t\le +\infty,\ \ i=1,2,...,n\right\}.$$

Определение. Отрезком, соединяющим точки $A\left(a_1;a_2;...;a_n\right)$ и $B\left(b_1;b_2;...;b_n\right)$, назовем множество

$$\left\{X : X\in R^n \quad x_i=ta_i+(1-t)b_i,\ \ 0\le t\le 1,\ \ i=1,2,...,n\right\}.$$

Определение. Множество точек в R^n называется **выпуклым**, если вместе с любыми двумя своими точками оно содержит отрезок, который эти точки соединяет.

Ниже введем понятие выпуклой линейной комбинации точек и с помощью этого понятия дадим другое эквивалентное определение выпуклого множества.

Пусть на плоскости R^2 заданы две точки: $A_1\left(x_1^1,x_2^1\right)$ и $A_2=\left(x_1^2,x_2^2\right)$, определяющие прямолинейный направленный отрезок $\overline{A_1A_2}$.

Определение. Точка A, для которой выполняются условия

$$A=\lambda_1A_1+\lambda_2A_2,\qquad \lambda_1\ge 0,\ \ \lambda_2\ge 0,\ \ \ \lambda_1+\lambda_2=1$$

называется **выпуклой линейной комбинацией точек** A_1 **и** A_2**.** При $\lambda_1=1$ и $\lambda_2=0$ точка A совпадает с концом отрезка A_1 и при $\lambda_1=0$ и $\lambda_2=1$ с концом отрезка A_2, Точки A_1 и A_2 **называются угловыми или крайними точками** отрезка $\overline{A_1A_2}$.

Из определения выпуклой линейной комбинации точек очевидно, что угловая точка не может быть представлена как выпуклая линейная комбинация двух других точек отрезка. Соотношения (1) и (2) верны независимо от размерности пространства.

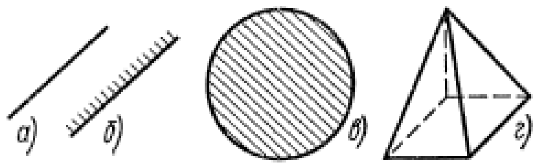
Пусть имеется n точек $A_1,A_2,...,A_n$. Точка A - выпуклая линейная комбинация, если выполняются условия

$$A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + ... + \lambda_n A_n, \quad \lambda_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, ..., n), \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1.$$

Определение. Множество точек в R^n называется **выпуклым,** если оно вместе с любыми двумя точками содержит и их произвольную выпуклую линейную комбинацию.

Геометрический смысл этого определения состоит в том, что множеству вместе с его двумя произвольными точками полностью принадлежит и прямолинейный отрезок, их соединяющий.

Примерами выпуклых множеств служат прямолинейный **отрезок, прямая, полуплоскость, круг, шар, куб, полупространство и др.**



Определение. Угловыми точками выпуклого множества называются точки, не являющиеся выпуклой комбинацией двух различных точек множества.

Например, угловыми точками треугольника являются его вершины, угловыми точками круга-точки окружности, которая его ограничивает. Таким образом, выпуклое множество может иметь конечное и бесконечное число угловых точек. Прямая, плоскость, полуплоскость, пространство, полупространство угловых точек не имеют.

Определение. Выпуклым многоугольником называется выпуклое замкнутое ограниченное множество на плоскости, имеющее конечное число угловых точек. Угловые точки многоугольника называются его **вершинами,** а отрезки, соединяющие две вершины и образующие его границу,- **сторонами многоугольника. Опорной прямой** выпуклого многоугольника называется прямая, имеющая с многоугольником по одну сторону от нее, хотя бы одну общую точку.

Определение. Выпуклым многогранником называется выпуклое замкнутое ограниченное множество трехмерного пространства, имеющее конечное число угловых точек. Угловые точки многогранника называются его **вершинами;** многоугольники, ограничивающие многогранник, - **гранями;** отрезки по которым они пересекаются, - **ребрами**. **Опорной плоскостью** многогранника называется плоскость, имеющая с многогранником, расположенным по одну сторону от нее, хотя бы одну общую точку.

Теорема 5 (теорема Крейна - Мильмана). Замкнутый, ограниченный, выпуклый многогранник является выпуклой линейной комбинацией своих угловых точек.

Кривая в R^n задается параметрическими уравнениями

$$x_i = \phi_i(t), \qquad \alpha \le t \le \beta, \qquad i = 1, 2, ..., n,$$

где $\phi_i(t)$, $i = 1, 2, ..., n$ суть непрерывные функции на отрезке $[a, b]$.

Определение. Множество $\mathsf{M} \subset R^n$ называется **связанным,** если любые точки можно соединить кривой Γ, лежащей в множестве $\mathsf{M} \subset R^n$.

Определение. Открытое и связанное множество в пространстве R^n называют **областью.** Замыкание области называют **замкнутою областью.**

Определение. Кривая в пространстве R^n**,** являющаяся объединением конечного числа отрезков, называется **ломаной** в R^n.

Упражнения

1. Выяснить, является ли множество $\mathfrak{M}$ в пространстве $\boldsymbol{R}^2$: а) связанным; б) открытым; в) областью, если:

1) $\mathfrak{M} = \{\boldsymbol{x}_1^2 + \boldsymbol{x}_2^2 > 1\}$;

2) $\mathfrak{M} = \{\boldsymbol{x}_1^2 + \boldsymbol{x}_2^2 = 1\}$;

3) $\mathfrak{M} = \{\boldsymbol{x}_1^2 + \boldsymbol{x}_2^2 \ne 1\}$;

4) $\mathfrak{M} = \{\boldsymbol{x}_1^2 + \boldsymbol{x}_2^2 = 0\}$;

5) $\mathfrak{M} = \{\boldsymbol{x}_1^2 + \boldsymbol{x}_2^2 < 1\} \cup \{(\boldsymbol{x}_1 - 2)^2 + \boldsymbol{x}_2^2 < 1\}$;

6) $\mathfrak{M} = \{x_1^2 + x_2^2 \le 1\} \cup \{(x_1 - 2)^2 + x_2^2 < 1\}$;

7) $\mathfrak{M} = \{x_1^2 - x_2^2 < 1\}$;

8) $\mathfrak{M} = \{x_1^2 - x_2^2 = 1\}$;

9) $\mathfrak{M} = \{x_1^2 - x_2^2 > 1\}$;

10) $\mathfrak{M} = \left\{ x_1 \in (0;1), \quad \left| x_2 - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2x_1} \right| < \frac{1}{4} \right\}$;

11) $\mathfrak{M} = \{5x_1^2 + 12x_1x_2 - 22x_1 - 12x_2 > 19\}$.

2. Доказать, что любые две точки произвольной области можно соединить ломаной, целиком ей принадлежащей.

3. Выяснить, какие из множеств, заданных в задаче 1 из данного упражнения являются выпуклыми?

2. Сходимость последовательности точек n- мерного пространства R^n

2.1. Последовательности n-мерных точек

Определение. Если каждому натуральному числу k по некоторому закону поставлено в соответствие определенная n-мерная точка X_k, то говорят, что задана **бесконечная последовательность n-мерных точек.**

В этом случае последовательность записывают в виде $X_1, X_2, ..., X_k, ...$ или, кратко, $\{X_k\}$, при этом точки $X_1, X_2, ..., X_k, ...$ называют членами или элементами этой последовательности, k - номером последовательности.

Например, если каждому натуральному числу k ставится в соответствие точка $X_k\left(\frac{k}{k+1}, \ k^2\right)$, то задана последовательность двумерных точек:

$$X_1\left(\frac{1}{2}, \ 1\right), X_2\left(\frac{2}{3}, \ 4\right), X_3\left(\frac{3}{4}, \ 9\right), ..., X_k\left(\frac{k}{k+1}, \ k^2\right), ...$$

Определение. Последовательность одномерных точек называют **числовой последовательностью.**

Таким образом, числовую последовательность считают заданной, если указан закон, по которому каждому натуральному числу k ставится в соответствие определенное число x_k.

Очевидно, что числовая последовательность – это функция, область определения которой есть множество $\mathbf{N}$ всех натуральных чисел; множество значений этой функции, совокупность чисел x_k, $k \in \mathbf{N}$, называется **множеством значений числовой последовательности.**

Например, множество значений последовательности может быть как конечным, так и бесконечным, в то время как множество ее элементов всегда является бесконечным: любые два разных элемента последовательности отличаются своими номерами.

Например, множество значений последовательности $\{(-1)^k\}$ состоит из двух чисел 1 и -1, а множество значений последовательности $\{k^2\}$ и $\{1/k\}$ бесконечны.

Последовательность может быть задана с помощью формулы, позволяющей вычислить каждый член последовательности по его номеру.

Например, если $x_k = \dfrac{(-1)^k + 1}{2}$, то каждый нечетный член последовательности равен 0, а каждый четный член равен 1.

Иногда последовательность задается рекуррентной формулой, позволяющей находить члены последовательности по известным предыдущим. При таком способе задания последовательности обычно указывают:

1) первый член последовательности x_1(или несколько членов, например, x_1, x_2);

2) формулу связывающую k- й член с соседними (например, с $(k-1)$-м и $(k+1)$-м членами).

Так, арифметическая прогрессия с разностью d и геометрическая прогрессия со знаменателем $q \neq 0$ задаются, соответственно, рекуррентными формулами

$$a_{k+1} = a_k + d, \qquad b_{k+1} = b_k q.$$

Зная первые члены этих прогрессий a_1 и b_1, можно получить формулы для $(k+1)$- х членов прогрессий:

$$a_{k+1} = a_1 + kd, \qquad b_{k+1} = b_1 q^n, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Рекуррентной формулой

$$x_k = x_{k-1} + x_{k-2}, \quad k \in \mathbf{N}, \quad k \geq 3,$$

и условиями $x_1 = 1, \ x_2 = 1$ задается **последовательность Фибоначчи.**

В некоторых случаях последовательность может быть задана описанием ее членов. Например, если x_k - простое число с номером k, то

$$x_1 = 2, \ x_2 = 3, \ x_3 = 5, \ x_4 = 7, \ x_5 = 11 \text{ и т.д.}$$

Отметим, наконец, что последовательность $\{x_k\}$ можно изобразить:

1) точками с координатами $(k, \ x_k), \quad k \in \mathbf{N}$ на плоскости;

2) точками $x_k, \quad k \in \mathbf{N}$ на числовой оси.

2.2. Предел последовательности n - мерных точек

Определение. Пределом последовательности $\{X_k\}, \ X_k \in R^n$, называется n-мерная точка A, если каждая ε- окрестность точки A содержит все члены данной последовательности начиная с некоторого номера, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ должен существовать номер $N_\varepsilon = N(\varepsilon)$ такой, что $X_k \in O_\varepsilon(A)$ при всех $k \geq N_\varepsilon$.

Если A - предел последовательности $\{X_k\}, \ X_k \in R^n$, то пишут $\lim\limits_{k\to\infty} X_k = A$ или $X_k \to A$ при $k \to \infty$.

С помощью логических символов определение предела «на языке окрестностей» можно записать так:

$$\left\{ \lim_{k\to\infty} X_k = A \right\} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon = N(\varepsilon): \quad \forall k \geq N_\varepsilon \Rightarrow X_k \in O_\varepsilon(A).$$

При отыскании предела последовательности n-мерных точек $(n \geq 2)$ **важную роль играет предел числовой последовательности.** Корме того **дальнейшее изложение теории сходимости последовательности точек в**

пространстве R^n полностью опирается на теорию пределов числовых последовательностей.

Поэтому сначала ниже изложим необходимую теорию пределов числовых последовательностей, а затем продолжим изучение сходимости последовательности точек в пространстве R^n.

2. 3. Определение предела числовой последовательности

Определение. Число a называется пределом числовой последовательности $\{x_k\}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать номер $N_\varepsilon = N(\varepsilon)$**,** такой, что для всех номеров $k \ge N_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$|x_k - a| < \varepsilon.$$

Если a - предел числовой последовательности $\{x_k\}$, то пишут $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ или $x_k \to a$ при $k \to \infty$.

С помощью логических символов определение предела «на языке окрестностей» можно записать в виде:

$$\left\{ \lim_{k\to\infty} x_k = a \right\} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon = N(\varepsilon): \quad \forall k \ge N_\varepsilon \Rightarrow |x_k - a| < \varepsilon. \tag{1}$$

Определение. Последовательность, у которой существует предел, называют **сходящейся.**

Таким образом, последовательность $\{x_k\}$ является сходящейся, если

$$\exists a \in R^1: \ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon = N(\varepsilon): \quad \forall k \ge N_\varepsilon \Rightarrow |x_k - a| < \varepsilon. \tag{2}$$

Определение. Последовательность, не являющуюся сходящейся, называют **расходящейся;** иначе говоря, последовательность называют расходящейся, если никакое число не является ее пределом.

Заметим, что если $x_k = a$ для всех $k \in \mathbf{N}$ (такую последовательность называют **стационарной**), то $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$.

Из определения (1) следует, что последовательность $\{x_k\}$ имеет предел, равный a**, тогда и только тогда, когда последовательность** $\{x_k - a\}$ имеет предел, равный нулю, т.е.

$$\left\{\lim_{k\to\infty} x_k = a\right\} \Leftrightarrow \left\{\lim_{k\to\infty}(x_k - a) = 0\right\}.$$

Пример 10. Пользуясь определением показать, что число 1 является пределом последовательности $\{x_k\}$, если $x_k = \dfrac{k-1}{k}$.

Решение

Рассмотрим модуль разности

$$|x_k - 1| = \left|\frac{k-1}{k} - 1\right| = \frac{1}{k}.$$

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Неравенство $|x_k - 1| < \varepsilon$ будет выполняться, если $\dfrac{1}{k} < \varepsilon$, т.е. $k > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Возьмем в качестве N_ε какое – нибудь натуральное число, удовлетворяющее условию $N_\varepsilon > \dfrac{1}{\varepsilon}$**,** например, число $N_\varepsilon = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, где $[x] = E(x)$ - целая часть числа x. Тогда для всех $k \ge N_\varepsilon$ будет выполняться неравенство

$$|x_k - 1| = \frac{1}{k} \le \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon.$$

По определению предела это означает, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 1$, т.е.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k-1}{k} = 1.$$

Пример 11. Пользуясь определением, найти предел последовательности $\{x_k\}$, если:

$a)\quad x_k = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n;\qquad b)\quad x_k = \dfrac{a}{k^r},\quad a \in R^1,\quad r = \dfrac{1}{m}\quad m \in \mathbf{N};$

$c)\quad x_k = \sqrt{k+2} - \sqrt{k+1};\qquad d)\quad x_k = \sum\limits_{m=1}^{k} \dfrac{1}{m(m+1)}.$

Решение

a) Так как $3^k > k$ для любого $k \ge 1$, то $\frac{1}{3^k} < \frac{1}{k}$. Пусть $\varepsilon > 0$, выберем N_ε такое, что $\frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$. Тогда для любого $k \ge N_\varepsilon$ имеем

$$\left|\left(\frac{1}{3}\right)^k - 0\right| = \frac{1}{3^k} < \frac{1}{k} \le \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon.$$

Значит,

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k = 0.$$

b) Так как $|x_k| = \frac{|a|}{k^r}$, а неравенство $\frac{|a|}{k^r} < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, равносильно каждому из неравенств $k^r > \frac{|a|}{\varepsilon}$, $\quad k > \left(\frac{|a|}{\varepsilon}\right)^m$, то при всех $k \ge N_\varepsilon$, где $N_\varepsilon = \left[\left(\frac{|a|}{\varepsilon}\right)^m\right] + 1$**,** справедливо неравенство $|x_k| < \varepsilon$. Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a}{k^r} = 0.$$

c) Умножив и разделив x_k на $\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}$ получим

$$x_k = \frac{\left(\sqrt{k+2}\right)^2 - \left(\sqrt{k+1}\right)^2}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}},$$

откуда $|x_k| < \frac{1}{2\sqrt{k}}$, неравенство $\frac{1}{2\sqrt{k}} < \varepsilon$ будет выполняться, если $\sqrt{k} > \frac{1}{2\varepsilon}$, т.е. при $\quad k > \frac{1}{4\varepsilon^2}$. Пусть $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{4\varepsilon^2}\right] + 1$**,** тогда при всех $k \ge N_\varepsilon$ выполняются неравенства $|x_k| < \frac{1}{2\sqrt{k}} \le \frac{1}{2N_\varepsilon} < \varepsilon$. Это означает, что $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$, т.е.

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}\right) = 0.$$

d) Так как

$$\frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

то

$$x_k = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1},$$

откуда находим $\lim_{k\to\infty} x_k = 1$, т.е.

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m(m+1)}=1.$$

Пример 12. Показать, что последовательность $\{x_k\}$, где $x_k=(-1)^k$ является расходящейся.

Решение

Отметим на числовой оси члены последовательности. На числовой оси члены последовательности $\{x_k\}$ изображаются точками -1 и 1, причем $x_{2m}=1,\quad x_{2m-1}=-1,\quad m\in\mathbf{N}$. Любое число a**,** где $a\neq\pm1$**,** не может быть пределом последовательности, так как существует ε- окрестность точки a (достаточно взять $\varepsilon=\min\left(|a+1|,\ |a-1|\right)$), не содержащая ни одного числа последовательности.

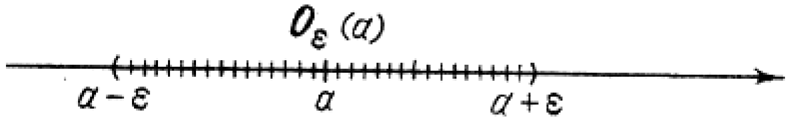


Рис. 1

Число 1 также не является пределом последовательности, так как существует такая ε- окрестность точки a $\left(\varepsilon=\dfrac{1}{2}\right)$, что вне ее содержится бесконечно много членов последовательности (все члены с нечетными номерами). Аналогичное утверждение справедливо и для точки -1. Таким образом, ни одно число не является пределом последовательности, т.е. $\{x_k\}$- расходящаяся последовательность.

Упражнение 1. Доказать, что если $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=a$, то

$$\lim_{k\to\infty}|x_k|=|a|,\qquad \lim_{k\to\infty}(x_{k+1}-x_k)=0.$$

2.4. Единственность предела числовой последовательности

Теорема 1. Числовая последовательность может иметь только один предел.

2.5. Ограниченность сходящейся последовательности

Определение. Последовательность $\{x_k\}$ называется **ограниченной снизу**, если существует такое число C_1, что все члены последовательности удовлетворяют условию $x_k \geq C_1$, т.е.

$$\exists C_1 : \ \forall k \in \mathbf{N} \ \Rightarrow \ x_k \geq C_1 .$$

Определение. Последовательность $\{x_k\}$ называется **ограниченной сверху**, если

$$\exists C_2 : \ \forall k \in \mathbf{N} \ \Rightarrow \ x_k \leq C_2 .$$

Определение. Последовательность, ограниченную как снизу, так и сверху, называют **ограниченной**, т.е. последовательность $\{x_k\}$ называется ограниченной, если

$$\exists C_1 \ \exists C_2 : \ \forall k \in \mathbf{N} \ \Rightarrow \ C_1 \leq x_k \leq C_2 . \qquad (3)$$

Таким образом, последовательность называют ограниченной, если множество ее значений ограничено.

Замечание 1. Условие (3) равносильно следующему:

$$\exists C : \ \forall k \in \mathbf{N} \ \Rightarrow \ |x_k| \leq C . \qquad (4)$$

В самом деле, из условия (4) следует (3), если взять $C_1 = -C, \quad C_2 = C$, а из условия (3) следует (4), если взять $C = \max\left(|C_1|, \quad |C_2|\right)$.

Геометрически ограниченность последовательности означает, что все члены последовательности содержатся в C- окрестности точки нуль.

Теорема 2. Если последовательность имеет предел, то она ограничена.

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_k\}$ имеет предел, равный a. По определению предела для $\varepsilon = 1$ найдем номер N такой, что при всех $k \geq N$ имеет место неравенство $|x_k - a| < 1$. Так как модуль суммы не превосходит суммы модулей, то

$$|x_k| = |x_k - a + a| \leq |x_k - a| + |a| .$$

Поэтому при всех $k \geq N$ выполняется неравенство

$$|x_k| < 1 + |a| .$$

Положим $C = \max\left(1+|a|,\ |x_1|\ ,...,\ \ |x_{N-1}|\right)$, тогда $|x_k| \le C$ при всех $k \in \mathbf{N}$, т. е. последовательность $\{x_k\}$ ограничена.

Замечание 2. В силу теоремы 2 всякая сходящаяся последовательность является ограниченной. Обратное неверно: не всякая ограниченная последовательность является сходящейся. Например, последовательность $\{x_k\} = \{(-1)^n\}$ ограничена, но не является сходящейся.

Замечание 3. Если условие (4) не выполняется, т.е.

$$\forall C:\ \exists k_C \in \mathbf{N}\ \Rightarrow\ \left|x_{k_C}\right| > C,$$

то говорят, что **последовательность $\{x_k\}$ неограничена.**

Пример 13. Доказать, что последовательность $\left\{\dfrac{1}{y_k}\right\}$ является ограниченной, если $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = b,\ b \ne 0$ и $y_k \ne 0$ для всех $k \in \mathbf{N}$.

Решение

Так как $b \ne 0$, то $|b| > 0$. По заданному числу $\varepsilon = \dfrac{|b|}{2}$ в силу определения предела последовательности найдется номер N_0 такой, что

$$k \ge N_0 \Rightarrow |y_k - b| < \frac{|b|}{2}. \qquad (*)$$

Используя неравенство модуля разности

$$|b| - |y_k| \le |y_k - b|$$

и неравенство (*), получаем $|b| - |y_k| \le \dfrac{|b|}{2}$, откуда $|y_k| > \dfrac{|b|}{2}$, и поэтому для всех $k \ge N_0$ справедливо равенство $\left|\dfrac{1}{y_k}\right| < \dfrac{2}{|b|}$.

Пусть $C = \max\left(\frac{1}{y_1}, \frac{1}{y_2}, ..., \frac{1}{y_{N_0-1}}, \frac{2}{|b|}\right)$, тогда для всех $k \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство $\left|\frac{1}{y_k}\right| < C$, т.е. $\left\{\frac{1}{y_k}\right\}$ - ограниченная последовательность.

Упражнение 2. Доказать, что последовательность $\{x_k\}$ ограничена, если:

$$a) \quad x_k = \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{k+m}; \qquad b) \quad x_k = \frac{k^2}{a^k}, \quad a > 1.$$

Упражнение 3. Доказать, что последовательность $\{x_k\}$ неограничена, если:

$$a) \quad x_k = k^{(-1)^k}; \qquad b) \quad x_k = \frac{k\sqrt{k}}{3k+4}.$$

2.6. Свойства сходящихся последовательностей, связанные с неравенствами.

Теорема 3. Если последовательности $\{x_k\}$, $\{y_k\}$, $\{z_k\}$ таковы, что

$$x_k \le y_k \le z_k \text{ для всех } k \ge N_0. \tag{5}$$

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} z_k = a,$$

то последовательность $\{y_k\}$ сходится и $\lim_{k\to\infty} y_k = a$.

Замечание 4. Теорему 3 называют **теоремой о трех последовательностях или теоремой о пределе «зажатой» последовательности.**

Пример 14. Пусть $\alpha_k \ge -1$ при всех $k \in \mathbf{N}$ и $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0$. Доказать, что

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[m]{1+\alpha_k} = 1, \quad m \in \mathbf{N}. \tag{6}$$

Докажем сначала, что

$$1 - |\alpha_k| \le \sqrt[m]{1+\alpha_k} \le 1 + |\alpha_k|, \qquad k \in \mathbf{N}, \quad m \in \mathbf{N}. \tag{7}$$

В самом деле, если $\alpha_k \ge 0$, то

$$1 \le \sqrt[m]{1+\alpha_k} \le \left(\sqrt[m]{1+\alpha_k}\right)^m = 1 + \alpha_k = 1 + |\alpha_k|,$$

а если $-1 \le \alpha_k \le 0$, то

$$1 \ge \sqrt[m]{1+\alpha_k} \ge \left(\sqrt[m]{1+\alpha_k}\right)^m = 1+\alpha_k = 1-|\alpha_k|,$$

откуда следуют неравенства (7). Применяя теорему 3, получаем утверждение (6).

Упражнения

4. Доказать, что если $a > 1$, то $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a} = 1$.

5. Доказать, что $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1$.

6. Доказать, что если $a > 1,\ \ p \in \mathbf{N}$, то $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{k^p}{a^k} = 1$.

Теорема 4. Если $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a,\ \lim\limits_{k\to\infty} y_k = b$, причем $a < b$, то

$$\exists N_0: \ \forall k \ge N_0 \ \Rightarrow \ x_k < y_k .$$

Следствие 1. Если $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, и $a < b$, то $\exists N_0: \ \forall k \ge N_0 \Rightarrow x_k < b$.

Следствие 2. Если $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = b$ и $\forall k \in \mathbf{N} \ \Rightarrow \ x_k \ge y_k$, то $a \ge b$.

2.7. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Арифметические операции над сходящимися последовательностями

2.7.1. Бесконечно малые последовательности

Определение. Последовательность $\{\alpha_k\}$ называется **бесконечно малой**, если

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0.$$

Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N_\varepsilon = N(\varepsilon)$ такой, что $|\alpha_n - 0| = |\alpha_n| < \varepsilon$ для всех номеров $k \ge N_\varepsilon$.

Понятие бесконечно малой последовательности используется для доказательства свойств сходящихся последовательностей. Пусть число a - предел последовательности $\{x_k\}$. Обозначим $\alpha_k = x_k - a$. По определению предела

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon = N(\varepsilon): \quad \forall k \ge N_\varepsilon \Rightarrow |x_k - a| = |\alpha_k| < \varepsilon,$$

т.е. $\{\alpha_k\}$ - бесконечно малая последовательность. Обратно, если $x_k = a + \alpha_k$, где $\{\alpha_k\}$ - бесконечно малая последовательность, то $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$.

Пример 15. Приведем примеры бесконечно малых последовательностей, используя результаты примеров, которые были рассмотрены выше:

$a)\ \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\};\qquad b)\ \left\{\frac{a}{k^r}\right\},\quad a\in R^1,\quad r=\frac{1}{m}\quad m\in\mathbf{N};$

$c)\ \left\{\sqrt[k]{a}-1\right\},\ a>1;\qquad d)\ \left\{\sqrt[k]{k}-1\right\};\qquad e)\ \left\{\frac{k^p}{a^k}\right\},\ p\in\mathbf{N},\quad a>1.$

При изучении свойств сходящихся последовательностей нам потребуется ввести арифметические операции над последовательностями.

Определение. Назовем **суммой, разностью, произведением и частным двух последовательностей** $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ соответственно, последовательности

$$\{x_k+y_k\},\ \{x_k-y_k\},\ \{x_k y_k\},\ \left\{\frac{x_k}{y_k}\right\}.$$

При определении частного предполагается, что $y_k \neq 0$ для всех $k\in\mathbf{N}$.

Бесконечно малые последовательности обладают следующими свойствами, доказательство которых читатель может провести самостоятельно:

а) алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность;

б) произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность является бесконечно малой последовательностью.

В частности, если $\{\alpha_k\}$ - стационарная последовательность, т.е. $\alpha_k = a$ для всех $k\in\mathbf{N}$, а $\{\beta_k\}$ - бесконечно малая последовательность, то $\{a\beta_k\}$ - бесконечно малая последовательность.

Замечание 5. Так как бесконечно малая последовательность ограничена (теорема 2), то из вышеприведенного свойства следует, что произведение конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечная малая последовательность.

2.7.2. Бесконечно большие последовательности

Определение. Последовательность $\{x_k\}$ называется **бесконечно большой**, если для любого $\delta > 0$ существует такой номер N_δ, что для всех $k \geq N_\delta$ выполняется неравенство $|x_n| > \delta$.

В этом случае пишут

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \infty$$

и говорят, что последовательность **имеет бесконечный предел**.

Используя логические символы, это определение можно записать так:

$$\left\{ \lim_{k\to\infty} x_k = \infty \right\} \Leftrightarrow \forall \delta > 0 \quad \exists N_\delta : \quad \forall k \geq N_\delta \Rightarrow |x_k| > \delta. \tag{8}$$

Дадим геометрическую интерпретацию определения (8).

Назовем δ**-окрестностью** ∞ (рис. 4) множество $U = \{x \in R^1 : \quad |x| > \delta\}$.

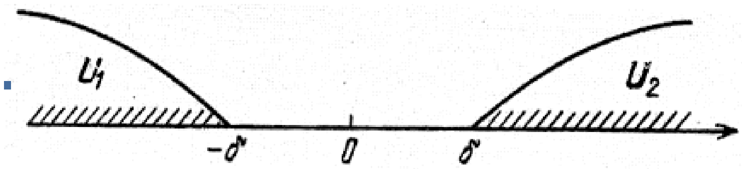


Рис. 4

Если последовательность $\{x_k\}$ имеет бесконечный предел, то в любой δ-окрестности ∞ лежат все члены последовательности, за исключением, быть может, конечного числа членов.

Аналогично вводятся для последовательности $\{x_k\}$ понятия бесконечного предела, равного $-\infty$ и $+\infty$. Эти пределы обозначаются, соответственно, символами

$$\lim_{k\to\infty} x_k = -\infty, \qquad \lim_{k\to\infty} x_k = +\infty$$

и определяются так:

$$\left\{ \lim_{k\to\infty} x_k = -\infty \right\} \Leftrightarrow \forall \delta > 0 \quad \exists N_\delta : \quad \forall k \geq N_\delta \Rightarrow x_k < -\delta. \tag{9}$$

$$\left\{ \lim_{k\to\infty} x_k = +\infty \right\} \Leftrightarrow \forall \delta > 0 \quad \exists N_\delta : \quad \forall k \geq N_\delta \Rightarrow x_k > \delta. \tag{10}$$

Определение. Множества $U_1 = \{x \in R^1: \quad x < -\delta\}$ и $U_2 = \{x \in R^1: \quad x > \delta\}$, где $\delta > 0$, назовем δ**-окрестностями** $-\infty$ и $+\infty$**,** соответственно (рис. 4).

Тогда $U = U_1 \bigcup U_2$**.** Согласно определению (10) последовательность $\{x_k\}$ имеет предел, равный $+\infty$, если в δ-окрестности символа $+\infty$ содержатся все члены этой последовательности, за исключением, быть может, конечного числа их. Аналогичный смысл имеет определение (9).

В дальнейшем под пределом последовательности будем понимать конечный предел, если не оговорено противное.

Замечание 6. Ясно, что всякая бесконечная большая последовательность является расходящейся в смысле определения предела числовой последовательности приведенного в п. 2.3.

Пример 16. Доказать, что $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt{k} = +\infty$.

Решение

Пусть ε- произвольное положительное число, а N такой номер, что $N > \varepsilon^2$ (например, $N = E(\varepsilon^2)+1$). Тогда для всех $k \ge N$ верно неравенство $\sqrt{k} \ge \sqrt{N} > \varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt{k} = +\infty$.

Пример 17. Приведем еще примеры последовательностей, имеющих бесконечный предел.

Если $x_k = -\sqrt{k}$, то $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = -\infty$; если $x_k = \dfrac{k^2}{k+2}$, то $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = +\infty$; если $x_k = (-1)^k 2^k$, то $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \infty$.

Упражнение 7. Доказать, что если $x_k \ne 0$ для всех $k \in \mathbf{N}$, то последовательность $\{x_k\}$ является бесконечно большой тогда и только тогда, когда $\left\{\dfrac{1}{x_k}\right\}$- бесконечно малая последовательность.

Упражнение 8. Можно ли утверждать, что:

а) всякая бесконечно большая последовательность является неограниченной;

б) всякая неограниченная последовательность является бесконечно большой.

Упражнение 9. Пусть $\{x_k\}$ - ограниченная, а $\{y_k\}$ - бесконечно большая последовательность. Доказать, что $\{x_k + y_k\}$ - бесконечно большая последовательность.

Упражнение 10. Доказать, что если $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = +\infty$, $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = +\infty$, то $\lim\limits_{k\to\infty} x_k y_k = +\infty$.

2.7.3. Арифметические операции над сходящимися последовательностями

Теорема 5. Если $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = b$, то:

а) $\lim\limits_{k\to\infty}(x_k + y_k) = a + b$; б) $\lim\limits_{k\to\infty}(x_k y_k) = ab$; в) $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{x_k}{y_k} = \dfrac{a}{b}$ при условии, что $y_k \neq 0$ $(k \in \mathbf{N})$ и $b \neq 0$.

2.8. Предел монотонной последовательности

2.8.1. Монотонная последовательность. Точные грани последовательности

Определение. Числовую последовательность $\{x_k\}$ называют **возрастающей (неубывающей)**, если для любого $k \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство

$$x_{k+1} \geq x_k. \qquad (11)$$

Определение. Числовую последовательность $\{x_k\}$ называют **убывающей (невозрастающей),** если для любого $k \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство

$$x_{k+1} \leq x_k. \qquad (12)$$

Определение. Если неравенство (11) можно записать в виде $x_{k+1} > x_k$, а неравенство (12) – в виде $x_{k+1} < x_k$, то последовательность $\{x_k\}$ называют, соответственно, **строго возрастающей** и **строго убывающей.**

Определение. Возрастающую или убывающую последовательность называют **монотонной,** а строго возрастающую или строго убывающую – **строго монотонной.**

Например, $\left\{\frac{1}{k}\right\}$ - строго убывающая последовательность, так как

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \cdots > \frac{1}{k} > \frac{1}{k+1} > \cdots,$$

а $\left\{\frac{k-1}{k}\right\}$ - строго возрастающая последовательность, так как

$$0 < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \cdots < \frac{k-1}{k} < \frac{k}{k+1} < \cdots.$$

Определение. Если неравенство (11) выполняется при $k \geq k_0$, то последовательность $\{x_k\}$ называют **возрастающей начиная с номера** k_0 (при $k \geq k_0$).

Аналогично вводятся понятия убывающей, строго убывающей и строго возрастающей с номера k_0 (при $k \geq k_0$).

Для обсуждения теоремы о пределе монотонной последовательности нам потребуются понятия точной верхней и нижней грани последовательности.

Определение. Точную верхнюю (нижнюю) грань множества значений последовательности $\{x_k\}$ называют **точной верхней (нижней) гранью последовательности** и обозначают, соответственно, $\sup\{x_k\}$ и $\inf\{x_k\}$.

Определение точной верхней грани $\sup \mathsf{M}$ числового множества M можно записать так:

$$\{M = \sup \mathsf{M}\} \Leftrightarrow \{\forall x \in \mathsf{M} \Rightarrow x \leq M\} \wedge \{\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists x_\varepsilon \in \mathsf{M}: \;\; x_\varepsilon > M - \varepsilon\}. \quad (13)$$

Аналогично определение точной нижней грани $\inf \mathsf{M}$ числового множества M можно записать в виде

$$\{m = \inf \mathsf{M}\} \Leftrightarrow \{\forall x \in \mathsf{M} \Rightarrow x \geq m\} \wedge \{\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists x_\varepsilon \in \mathsf{M}: \;\; x_\varepsilon < m + \varepsilon\}. \quad (14)$$

Поэтому определения точной верхней и точной нижней грани последовательности можно записать в виде:

$$\{a=\sup\{x_k\}\} \Leftrightarrow \{\forall k\in\mathbf{N} \Rightarrow x_k \le a\} \wedge \left\{\forall\varepsilon>0\ \ \exists N_\varepsilon:\ \ x_{N_\varepsilon} > a-\varepsilon\right\}. \qquad (15)$$

$$\{b=\inf\{x_k\}\} \Leftrightarrow \{\forall k\in\mathbf{N} \Rightarrow x_k \ge b\} \wedge \left\{\forall\varepsilon>0\ \ \exists N_\varepsilon:\ \ x_{N_\varepsilon} < b+\varepsilon\right\}. \qquad (16)$$

Таким образом, число a - точная верхняя грань последовательности $\{x_k\}$, если выполняются условия:

1) все члены последовательности не превосходят a, т.е.

$$\forall k\in\mathbf{N} \Rightarrow x_k \le a; \qquad (17)$$

2) для каждого $\varepsilon>0$ (рис. 5) найдется член последовательности, больший $a-\varepsilon$, т.е.

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists N_\varepsilon:\ \ x_{N_\varepsilon} > a-\varepsilon. \qquad (18)$$

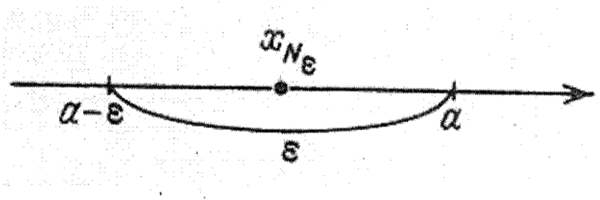


Рис. 5

Аналогично разъясняется определение (16) точной нижней грани последовательности.

Упражнение 11. Доказать, что если $M=\sup\mathrm{M}$, то существует последовательность $\{x_k\}$, где $x_k\in\mathrm{M}$ при всех $k\in\mathbf{N}$, такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = M$.

2.8.2. Признак сходимости монотонной последовательности

Теорема 6. Если последовательность $\{x_k\}$ является возрастающей и ограниченной сверху, то существует

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \sup\{x_k\}.$$

Если последовательность $\{x_k\}$ является убывающей и ограниченной снизу, то существует

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \inf\{x_k\}.$$

Замечание 7. Эта теорема остается справедливой для последовательности сверху (снизу) и возрастающей (убывающей), начиная с некоторого номера.

Упражнение 12. Доказать, что монотонная последовательность сходится тогда и только тогда когда она ограничена.

Пример 18. Доказать, что если $x_k = \dfrac{a^k}{k!}$, где $a > 0$, то $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$.

Решение

Так как

$$x_{k+1} = \frac{a}{k+1} x_k, \tag{20}$$

то $x_{k+1} \le x_k$ при всех $k \ge k_0$, где $k_0 = [a]$, т.е. $\{x_k\}$ - убывающая при $k \ge k_0$ последовательность. Кроме того, $x_k \ge 0$ при всех $k \in \mathbf{N}$, т.е. последовательность ограничена снизу. По теореме 6 последовательность $\{x_k\}$ сходится. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = b$. Тогда переходя к пределу в равенстве (20), получаем $b = 0 \cdot b$, т.е. $b = 0$. Итак,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a^k}{k!} = 0. \tag{21}$$

Пример 19. Последовательность $\{x_k\}$ задается рекуррентной формулой

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k} \right), \tag{22}$$

где $x_1 > 0$, $a > 0$. Доказать, что

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \sqrt{a}. \tag{23}$$

Решение

Докажем сначала методом индукции , что

$$\forall l \in \mathbf{N} \Rightarrow x_l > 0. \tag{24}$$

В самом деле, из формулы (22) и условий $x_1 > 0$, $a > 0$ следует, что $x_2 > 0$. Предполагая, что $x_k > 0$, из равенства (22) получаем: $x_{k+1} > 0$. Утверждение (24) доказано.

Далее, применяя неравенство для среднего арифметического и среднего геометрического, из (22) получаем

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right) \geq \sqrt{x_k \cdot \frac{a}{x_k}} = \sqrt{a} \text{ при всех } k \in \mathbf{N},$$

т.е.

$$\forall k \geq 2 \Rightarrow x_k \geq \sqrt{a}\,. \tag{25}$$

Итак, последовательность $\{x_k\}$ ограничена снизу. Докажем, что она является убывающей. Запишем равенство (22) в виде

$$x_{k+1} - x_k = \frac{a - x_k^2}{2x_k},$$

откуда в силу (24) и (25) получаем

$$\forall k \geq 2 \Rightarrow x_{k+1} \leq x_k\,,$$

т.е. последовательность является убывающей при $k \geq 2$. По теореме 6 существует $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \alpha$, где $\alpha \geq \sqrt{a} > 0$ в силу условия (25). Переходя в равенстве (22) к пределу, получаем

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{a}{\alpha}\right),$$

откуда $\alpha^2 = a$, $\alpha = \sqrt{a}$, т.е. справедливо утверждение (23).

Пример 20. Доказать, что последовательность $\{x_k\}$, где

$$x_1 = \sqrt{2},\quad x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}\,,\quad \ldots\quad,\ x_k = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{k\ \text{корней}}$$

сходится, и найти ее предел.

Решение

Заметим, что при $k \geq 2$ имеет место равенство

$$x_k = \sqrt{2 + x_{k-1}}\,, \tag{26}$$

откуда следует, что

$$\forall k \in \mathbf{N} \Rightarrow x_k > 0. \tag{27}$$

Покажем, что $\{x_k\}$ - ограниченная сверху и возрастающая последовательность. Так как $x_1 < 2$, то, предположив, что $x_{k-1} < 2$, из формулы (26) получаем: $x_k < 2$. Таким образом, методом индукции доказано, что

$$\forall k \in \mathbf{N} \Rightarrow x_k < 2.$$

Тем же методом докажем, что $\{x_k\}$ - возрастающая последовательность. Заметим, что $x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} > \sqrt{2} = x_1$, т.е. $x_2 > x_1$. Предположив, что $x_k > x_{k-1}$ докажем, что $x_{k+1} > x_k$. Из (26) и (27) следует, что $x_{k+1}^2 = 2 + x_k$, $x_k^2 = 2 + x_{k-1}$ откуда

$$(x_{k+1} - x_k)(x_{k+1} + x_k) = x_k - x_{k-1}. \qquad (28)$$

Так как $x_k - x_{k-1} > 0$, $x_{k+1} + x_k > 0$, то из равенства (28) получаем $x_{k+1} > x_k$. Таким образом, при любом $k \in \mathbf{N}$ справедливо неравенство $x_k < x_{k+1}$, т.е. $\{x_k\}$ - возрастающая последовательность. По теореме 6 существует $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, где $a \ge 0$ в силу условия (27). Переходя к пределу в равенстве $x_{k+1}^2 = 2 + x_k$, получаем $a^2 = 2 + a$, откуда $a = 2$, т.к. $a \ge 2$. Таким образом, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 2$.

2.8.3. Число e

Рассмотрим последовательность $\{x_k\}$, где

$$x_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k,$$

и покажем, что эта последовательность возрастающая и ограниченная сверху. Используя формулу бинома Ньютона, получаем

$$x_k = 1 + C_k^1 \frac{1}{k} + C_k^2 \frac{1}{k^2} + \cdots + C_k^l \frac{1}{k^l} + \cdots + \frac{1}{k^k},$$

где

$$C_k^l = \frac{k(k-1)\cdots(k-(l-1))}{l!}, \quad l = 1, 2, ..., k, \quad C_k^0 = 1.$$

Запишем x_k в следующем виде:

$$x_k = 1 + \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l!}\left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(1 - \frac{2}{k}\right)\cdots\left(1 - \frac{l-1}{k}\right); \qquad (29)$$

тогда

$$x_{k+1} = 1 + \sum_{l=1}^{k+1} \frac{1}{l!}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right)\left(1 - \frac{2}{k+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{l-1}{k+1}\right). \qquad (30)$$

Все слагаемые в суммах (29) и (30) положительны, причем каждое слагаемое суммы (29) меньше соответствующего слагаемого суммы (30), так как $1-\dfrac{m}{k}<1-\dfrac{m}{k+1}$, $m=1,2,...,k-1$, а число слагаемых в сумме (30) на одно больше, чем в сумме (29). Поэтому $x_k < x_{k+1}$ для всех $k \in \mathbf{N}$, т.е. $\{x_k\}$ - строго возрастающая последовательность. Кроме того, учитывая, что $0<1-\dfrac{m}{k}<1$, $(m=1,2,...,k-1)$ из равенства (29) получаем $x_k<1+\sum\limits_{l=1}^{k}\dfrac{1}{l!}$. Так как $\dfrac{1}{l!}\le\dfrac{1}{2^{l-1}}$ при $l\in\mathbf{N}$, то, используя формулу для суммы геометрической прогрессии, получаем

$$x_k<1+\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{2^{l-1}}=1+\frac{1-\dfrac{1}{2^k}}{1-\dfrac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{k-1}}.$$

Следовательно,

$$x_k=\left(1+\frac{1}{k}\right)^k<3,$$

т.е. $\{x_k\}$ - ограниченная последовательность. По доказанной теореме существует $\lim\limits_{k\to\infty}x_k$. Этот предел обозначается буквой e. Таким образом,

$$\lim_{k\to\infty}x_k=\left(1+\frac{1}{k}\right)^k=e. \qquad (31)$$

Число e является иррациональным, оно служит основанием натуральных логарифмов и играет важную роль в математике и в ее приложениях.

Справедливо приближенное равенство $e\approx 2,718281828459$.

Упражнения

13. Доказать, что $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{k}{\sqrt[k]{k!}}=e$.

14. Доказать, что $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[k]{k!}}=0$.

15. Доказать, что последовательность $\{x_k\}$, заданная при $k\in\mathbf{N}$ формулой $x_{k+1}=\sqrt{a+x_k}$ и условием $x_1=\sqrt{a}$, сходится, и найти ее предел.

16. Доказать, что последовательность $\{x_k\}$, заданная при $k \in \mathbf{N}$ рекуррентной формулой $x_{k+1} = x_k(2 - x_k)$ и условием $x_1 = a$, где $0 < a < 1$, сходится, и найти ее предел.

2.8.4. Теорема Кантора о вложенных отрезках

Определение. Последовательность отрезков $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_k, ...,$ где $\Delta_k = [a_k, b_k]$ называют **стягивающейся,** если выполнены следующие условия:

а) каждый последующий отрезок принадлежит предыдущему, т. е.

$$\forall k \in \mathbf{N} \Rightarrow \Delta_{k+1} \subset \Delta_k; \qquad (32)$$

б) длина k-го отрезка Δ_k стремится к нулю при $k \to \infty$, т.е.

$$\lim_{k \to \infty}(b_k - a_k) = 0. \qquad (33)$$

Условие (32) означает, что

$$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_k \le a_{k+1} \le \cdots \le b_{k+1} \le b_k \le \cdots \le b_2 \le b_1. \qquad (34)$$

Теорема 7 ***(Кантора).*** Если последовательность отрезков является стягивающейся, то существует единственная точка, принадлежащая всем отрезкам этой последовательности.

Упражнение 17. Доказать, что если выполнены условия (33) и (34), то последовательности $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ являются сходящимися, причем

$$\lim_{k \to \infty} a_k = \lim_{k \to \infty} b_k = c, \text{ где } c = \sup\{a_k\} = \inf\{b_k\}.$$

2.9. Подпоследовательности. Частичные пределы

2.9.1. Подпоследовательность

Определение. Пусть задана последовательность $\{x_k\}$. Рассмотрим строго возрастающую последовательность $\{k_l\}$ натуральных чисел, т.е. такую, что

$$k_1 < k_2 < \cdots < k_l < \cdots$$

Тогда последовательность $\{y_k\}$, где $y_k = x_{k_l}$ при $k \in \mathbf{N}$, называется **подпоследовательностью последовательности** $\{x_k\}$ и обозначается $\{x_{k_l}\}$.

Например, последовательность нечетных натуральных чисел 1, 3, 5, 7, 9, ..., взятых в порядке возрастания, является подпоследовательностью последовательности натуральных чисел 1, 2, 3, ..., а последовательность 3, 5, 1, 9, 11, 7, ...

уже не является подпоследовательностью последовательности натуральных чисел.

Согласно определению подпоследовательность $\{x_{k_l}\}$ образована из членов исходной последовательности $\{x_k\}$, причем порядок следования членов в подпоследовательности такой же, как и в данной последовательности $\{x_k\}$. В записи $\{x_{k_l}\}$ число l означает порядковый номер члена последовательности $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots$, а k_l - номер этого члена в исходной последовательности. Поэтому $k_l \geq k$, откуда следует, что $k_l \to \infty$ при $k \to \infty$.

Введем теперь понятие частичного предела.

Определение. Пусть $\{x_{k_l}\}$ - подпоследовательность последовательности $\{x_k\}$ и пусть существует конечный или бесконечный $\lim\limits_{k\to\infty} x_{k_l} = a$. Тогда a называют **частичным пределом последовательности** $\{x_k\}$**.**

Например, последовательность $\{(-1)^k\}$ имеет два частичных предела, а именно -1 и 1. Последовательность $\{(1+(-1)^k)k\}$ имеет два частичных предела, а именно 0 и $+\infty$.

Определение. Если $\{x_k\}$ - ограниченная последовательность, а $\mathcal{L}$ - множество всех ее частичных пределов, то числа $\sup \mathrm{L}$ и $\inf \mathrm{L}$ называют, соответственно, **верхним и нижним пределом этой последовательности,** и обозначают, соответственно, символами $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} x_k$ и $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} x_k$.

Например, для последовательности 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, ... имеем $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} x_k = 3$, $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} x_k = 1$.

Упражнения

18. Доказать, что если некоторая подпоследовательность $\{x_{k_l}\}$ монотонной последовательности $\{x_k\}$ сходится и $\lim\limits_{k\to\infty} x_{k_l} = a$, то существует $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$.

19. Доказать, что если последовательность имеет предел, то и любая ее подпоследовательность имеет тот же предел.

20. Привести пример неограниченной последовательности:

а) не имеющей конечных частичных пределов;

б) имеющей конечное число конечных частичных пределов;

в) имеющей бесконечно много частичных пределов.

21. Привести пример последовательности такой, что:

а) ее частичными пределами являются все члены данной последовательности;

б) каждое вещественное число - ее частичный предел.

2.9.2. Существование частичного предела у ограниченной последовательности

Теорема 8 ***(Больцано - Вейерштрасса).*** Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Замечание 8. Теорему Больцано - Вейерштрасса можно сформулировать так: любая ограниченная последовательность имеет хотя бы один частичный предел.

Упражнение 22. Показать, что всякая неограниченная последовательность имеет частичный предел, равный ∞.

Упражнение 23. Доказать, что для того, чтобы a, где a - число или один из символов $+\infty$, $-\infty$, было частичным пределом последовательности, необходимо и достаточно, чтобы в любой окрестности a содержалось бесконечное число членов этой последовательности.

2.10. Критерий Больцано - Коши сходимости последовательности

2.10.1. Фундаментальная последовательность

Определение. Последовательность $\{x_k\}$ называют **фундаментальной**, если она удовлетворяет условию Коши: для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число K_ε, что для любого $k \geq K_\varepsilon$ и любого $m \geq K_\varepsilon$ справедливо неравенство $|x_k - x_m| < \varepsilon$. Кратко это условие можно записать так:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists K_\varepsilon : \ \forall k \geq K_\varepsilon \ \ \forall m \geq K_\varepsilon \Rightarrow |x_k - x_m| < \varepsilon . \qquad (41)$$

или в другом виде:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists K_\varepsilon : \;\; \forall k \geq K_\varepsilon \;\;\; \forall p \in \mathbf{N} \Rightarrow \left| x_{k+p} - x_k \right| < \varepsilon .$$

Можно показать, что

фундаментальная последовательность является ограниченной.

Упражнение 24. Доказать, что произведение двух фундаментальных последовательностей есть фундаментальная последовательность.

2.10.2. Необходимое и достаточное условие сходимости последовательности

Теорема 9 (Критерий Больцано - Коши). Для того чтобы последовательность имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Пример 21. Доказать, что последовательность $\{x_k\}$, где

$$x_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k}$$

расходится.

Решение

Последовательность $\{x_k\}$ расходится, если не выполяется условие Коши (41), т.е.

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \;\; \forall l \in \mathbf{N} : \;\; \exists k \geq l \;\;\; \exists m \geq l : \;\; \left| x_k - x_m \right| \geq \varepsilon_0 . \tag{47}$$

Пусть задано любое $l \in \mathbf{N}$, положим $k = 2l$, $m = l$. Тогда

$$\left| x_k - x_m \right| = \left| x_{2l} - x_l) \right| = \frac{1}{l+1} + \frac{1}{l+2} + \dots + \frac{1}{2l} \geq \frac{1}{2l} \cdot l = \frac{1}{2} .$$

Таким образом, условие (47) выполняется при $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$ и в силу критерия Больцано – Коши последовательность $\{x_k\}$ расходится.

2.11. Предел последовательности n - мерных точек (продолжение)

Теперь после изложения теории пределов числовых последовательностей, мы можем продолжить изучение сходимости последовательности точек в пространстве R^n.

Например, при отыскании предела последовательности n-мерных точек $(n \geq 2)$ важную роль играет предел числовой последовательности, так как имеют место следующие два утверждения:

Лемма 1. Точка $A \in R^n$ является пределом последовательности $\{X_k\}$, $X_k \in R^n$ тогда и только тогда, когда предел числовой последовательности $\{\rho(X_k, A)\}$ равен нулю, т.е.

$$\lim_{k\to\infty} \rho(X_k, A) = 0. \tag{48}$$

Лемма 2. Точка $A(a_1, \quad a_2, \quad \cdots, \quad a_n)$ является пределом последовательности $\{X_k\}$, $X_k\left(x_1^k, \quad x_2^k, \quad \cdots, \quad x_n^k\right)$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{k\to\infty} x_1^k = a_1, \quad \lim_{k\to\infty} x_2^k = a_2, \quad \cdots, \quad \lim_{k\to\infty} x_n^k = a_n\,. \tag{49}$$

Предложение. Условие (49) эквивалентно условию (48).

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} X_k = A$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(X_k, A) = 0$. Поэтому при любом $i = 1, 2, ..., k$

$$0 \leq \left|x_i^k - a_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i^k - a_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \rho(X_k, A) \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Наоборот, если при любом $i = 1, 2, ..., k$ выполнено условие $\lim\limits_{k\to\infty} \left|x_i^k - a_i\right| = 0$, то $\rho(X_k, A) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i^k - a_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \to 0$ при $k \to \infty$.

Последовательность n-мерных точек называют **сходящейся**, если она имеет предел.

Лемма 3. Если последовательность n-мерных точек сходится, то она имеет только один предел.

Лемма 4. Любая сходящаяся последовательность n-мерных точек ограничена.

Определение. Так же как в одномерном случае, будем называть **последовательность** $\{X_k\}$, $X_k \in R^n$ **фундаментальной,** если для каждого числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое натуральное число K_ε, что для любого $k \geq K_\varepsilon$ и любого

$m \geq K_\varepsilon$ справедливо неравенство $\rho\left(X_k, X_m\right) < \varepsilon$. Кратко это условие можно записать так:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists K_\varepsilon : \ \forall k \geq K_\varepsilon \ \ \forall m \geq K_\varepsilon \Rightarrow \rho\left(X_k, X_m\right) < \varepsilon \qquad (50)$$

или в другом виде:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists K_\varepsilon : \ \forall k \geq K_\varepsilon \ \ \forall p \in \mathbf{N} \Rightarrow \rho\left(X_k, X_m\right) < \varepsilon .$$

Для сходимости последовательности точек пространства R^n имеет место **аналог критерий Больцано - Коши**.

Теорема 10. Для того чтобы последовательность $\left\{X_k\right\}, \quad X_k \in R^n$ имела предел, необходимо и достаточно, чтобы она являлась фундаментальной последовательностью.

Последовательность $\Xi_1, \Xi_2, ..., \Xi_l, ...$ называют **подпоследовательностью** последовательности n-мерных точек $\left\{X_k\right\}$, если

$$\Xi_1 = X_{k_1}, \Xi_2 = X_{k_2}, ..., \Xi_l = X_{k_l}, ...,$$

где $k_1 < k_2 < ... < k_l < ...$.

Таким образом, подпоследовательность всегда составлена из членов данной последовательности, а порядок следования членов подпоследовательности такой же, как у данной последовательности.

Лемма 5. Если последовательность n-мерных точек сходится к точке A, то и любая ее подпоследовательность сходится к A.

Ранее мы привели следующее определение компакта в пространстве R^n:

Определение. Ограниченное замкнутое множество в пространстве R^n называется **компактом в R^n.**

Это определение мы приняли на первых порах за определение компакта в R^n**.** Теперь, после определения сходимости последовательности точек в пространстве R^n**,** приведем то определение компакта, которое принято в математике.

Определение. Множество M в пространстве R^n называется **компактом в R^n,** если из любой последовательности точек $X_k \in \mathrm{M}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к точке, принадлежащей множеству M.

Например, отрезок $[a,b]$ есть компакт в R^1, а промежуток $[a,b)$ не является компактом в R^1.

Упражнения 25. Доказать, что неограниченное множество в пространстве R^n не может быть компактом.

Упражнение 26. Доказать, что компакт в пространстве R^n есть замкнутое множество.

На пространство R^n обобщается теорема Больцано - Вейерштрасса.

Теорема 11. Из любой ограниченной последовательности точек пространства R^n можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Следствие. Для того чтобы множество $\mathsf{M} \subset R^n$ было компактом, необходимо и достаточно, чтобы множество M было ограниченным и замкнутым.

Замечание 9. Именно вот это доказанное следствие – критерий компактности множества в пространстве R^n ранее нами было принято в качестве определения компакта в R^n.

Ниже без доказательства приведем еще некоторые свойства сходящихся последовательностей n - мерных точек:

1°. Если A - предельная точка некоторого множества S $\left(\mathsf{S} \subseteq R^n\right)$, то существует последовательность точек из множества S, сходящаяся к точке A.

2°. Если последовательность точек замкнутого множества сходится к точке A, то $A \in \mathsf{S}$.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется n - мерной точкой в пространстве R^n?
2. Что такое n - мерное координатное пространство R^n? Как называется элементы этого пространства?
3. Что называется расстоянием между любыми двумя точками пространства R^n?
4. Приведите аксиомы (свойства) расстояния.
5. Что называется шаром в пространстве R^n?
6. Что называется внутренней точкой множества?

7. Что называется внутренностью множеств?

8. Что называется открытым множеством в пространстве R^n?

9. Какими свойствами обладают открытые множества в пространстве R^n?

10. Что называется окрестностью точки?

11. Какая точка называется предельной точкой (или точкой накопления) множества?

12. Что называется изолированной точкой множества?

13. Какое множество в пространстве R^n называется замкнутым?

14. Что называется замыканием множества?

15. Приведите необходимое и достаточное условие замкнутости множества в пространстве R^n.

16. Какими свойствами обладают замкнутые множества в пространстве R^n?

17. Какое множество называется ограниченным в пространстве R^n? Какие свойства ограниченных множеств Вы знаете?

18. Какое множество называется компактом в пространстве R^n?

19. Что называется граничной точкой множества из пространства R^n?

20. Что называется границей множества? Может ли точка быть одновременно внутренней и граничной точкой какого-то множества? Может ли точка быть одновременно не внутренней и не граничной точкой этого множества?

21. Может ли граничная точка множества: а) быть предельной точкой этого множества; б) не быть предельной точкой этого множества?

22. Что называется прямой в пространстве R^n?

23. Какое множество называется лучом? Что называется отрезком? А ломанной?

24. Что называется выпуклым множеством?

25. Что называется выпуклой линейной комбинацией точек?

26. Какая точка называется угловой или крайней точкой?

27. Что называется выпуклым многоугольником?

28. Что называется выпуклым многогранником?

29. Приведите теорему Крейна – Мильмана и прокомментируйте ее.

30. Какое множество называется связанным?

31. Какое множество называется областью? Что называется замкнутою областью?

32. Когда говорят, что задана последовательность n-мерных точек? В каком виде записывают последовательность n-мерных точек? Что называется членами последовательности?

33. Какие последовательности называются числовыми последовательностями? Что называется множеством значений числовой последовательности?

34. Какими способами можно задавать числовую последовательность?

35. Как можно изобразить числовую последовательность?

36. Что называется пределом последовательности n-мерных точек? А пределом числовой последовательности?

37. Какие последовательности называют сходящейся? А какие - расходящейся?

38. Сколько пределов может иметь числовая последовательность? А последовательность n-мерных точек?

39. Какую последовательность называют ограниченной? А какую - неограниченной?

40. Когда последовательность ограничена?

41. Приведите свойства сходящихся числовых последовательностей, связанных с неравенствами. Что называют теоремой о трех последовательностях или о пределе «зажатой» последовательности?

42. Какая последовательность называется бесконечно малой? Приведите примеры бесконечно малых последовательностей.

43. Какими свойствами обладают бесконечно малые последовательности?

44. Что можно утверждать о произведении конечного числа бесконечно малых последовательностей?

45. Какая последовательность называется бесконечно большой?

46. Что называется δ-окрестностью ∞?

47. Как вводятся для последовательности $\{x_k\}$ понятия бесконечного предела, равного $-\infty$ и $+\infty$? Как обозначаются эти пределы?

48. Что называется δ-окрестностями $-\infty$ и $+\infty$?

49. Можно ли утверждать, что всякая бесконечная большая последовательность является расходящейся в смысле определения предела числовой последовательности приведенного в п.п.2.3?

50. Какие арифметические операции можно произвести над сходящимися последовательностями? Сформулируйте теорему и прокомментируйте ее.

51. Какую последовательность называют монотонной, а какую – строго монотонной?

52. Сформулируйте признак сходимости монотонной последовательности.

53. Какая последовательность имеет своим пределом число e? Что еще можно сказать об этом числе? Приближенно чему равно число e?

54. Какие последовательности отрезков $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_k, ...,$ где $\Delta_k = [a_k, b_k]$ называют стягивающейся?

55. Приведите теорему Кантора о вложенных отрезках.

56. Что называется подпоследовательностью последовательности $\{x_k\}$? Как она обозначается?

57. Дайте определения частичного предела последовательности $\{x_k\}$?

58. Что называют верхним и нижним пределом последовательности? Как их обозначают?

59. Когда существует частичный предел у ограниченной последовательности? Сформулируйте теорему Больцано - Вейерштрасса.

60. Какая последовательность называется фундаментальной?

61. Приведите необходимое и достаточное условие (критерий Больцано - Коши) сходимости последовательности.

62. При отыскании предела последовательности n-мерных точек $(n \geq 2)$ важную роль играет предел числовой последовательности. Обоснуйте это.

63. Для сходимости последовательности точек пространства R^n имеет место аналог критерий Больцано - Коши. Приведите эту теорему.

64. Какое множество в пространстве R^n называется компактом?

65. На пространство R^n обобщается теорема Больцано – Вейерштрасса. Приведите эту теорему.

66. Приведите необходимое и достаточное условие компактности множества в пространстве R^n.

67. Прокомментируйте следующие свойства сходящихся последовательностей n- мерных точек:

1°. Если A- предельная точка некоторого множества S $\left(\mathsf{S} \subseteq R^n\right)$, то существует последовательность точек из множества S, сходящаяся к точке A.

2°. Если последовательность точек замкнутого множества сходится к точке A, то $A \in \mathsf{S}$.

§20. Числовые ряды

Ключевые слова: *числовой ряд, частичная сумма ряда, сходящийся ряд, сумма ряда, расходящийся ряд, критерий Коши сходимости ряда, ряды с неотрицательными членами, критерий сходимости ряда с неотрицательными членами, признаки сходимости рядов с неотрицательными членами, абсолютно и условно сходящиеся ряды, знакочередующиеся ряды, условно сходящиеся ряды.*

1. Определение и свойства сходящихся рядов

1.1. Сходящийся числовой ряд и его сумма

Определение. Выражение

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots,$$

где $\{a_n\}$ - заданная числовая последовательность, называют **числовым рядом** и обозначают символом $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а числа a_n - **членами ряда.** Сумму n первых членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называют n**-ой частичной суммой этого ряда** и обозначают S_n, т.е.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k . \qquad (1)$$

Определение. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (2)$$

называется **сходящимся,** если последовательность его частичных сумм $\{S_n\}$ имеет конечный предел S, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S . \qquad (3)$$

Число S, определяемое условиями (1) и (3), называют **суммой ряда (2)** и пишут

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S . \qquad (4)$$

Определение. Если последовательность $\{S_n\}$ не имеет конечного предела (предел не существует или бесконечен), то говорят, что ряд (2) **расходится (является расходящимся).**

Пример 1. Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}, \quad \text{где } |q|<1 \tag{5}$$

сходится, и найти его сумму S.

Решение

Используя формулу для суммы n первых членов геометрической прогрессии, получаем

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}.$$

Так как $q^n \to 0$ при $n \to \infty$, если $|q|<1$, то последовательность $\{S_n\}$ имеет конечный предел, равный $\dfrac{1}{1-q}$, т.е. ряд (5) сходится и его сумма $S = \dfrac{1}{1-q}$.

Пример 2. Доказать, что если при всех $n \in \mathbf{N}$ выполняется равенство

$$a_n = b_n - b_{n+1} \tag{6}$$

и существует конечный

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b, \tag{7}$$

то ряд (2) сходится, а его сумма $S = b_1 - b$, т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b. \tag{8}$$

Решение

Используя условие (6), получаем

$$S_n = \sum_{k=-1}^{n} a_k = \sum_{k-1}^{n} (b_k - b_{k+1}) =$$

$$= b_1 - b_2 + b_2 - b_3 + \cdots + b_{n-1} - b_n + b_n - b_{n+1} = b_1 - b_{n+1},$$

откуда в силу (7) следует сходимость ряда (2) и равенство (8).

Пример 3. Найти сумму ряда (2), если

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

Решение

Так как

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{(n+2)-n}{2n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n(n+1)} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)},$$

то последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условиям (6) и (7), где

$$b_n = \frac{1}{2n(n+1)}, \quad b = 0,$$

и по формуле (8) получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{6}.$$

1.2. Необходимое условие сходимости ряда

Теорема 1. Если ряд (2) сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{9}$$

Доказательство. Так как ряд (2) сходится, то существует конечный предел S последовательности $\{S_n\}$, где S_n - n-я частичная сумма ряда (формула (1)). Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$, откуда следует, что $S_n - S_{n-1} = a_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Таким образом, соотношение (9) **выражает необходимое условие сходимости ряда.**

Пример 4. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится.

Решение

Так как

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{при} \quad k = 1, 2, ..., n,$$

то

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},$$

откуда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится.

Замечание. Условие (9) не является достаточным для сходимости ряда (2): ряд, рассмотренный в примере 4, удовлетворяет условию (9), но расходится.

Пример 5. Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\alpha, \text{ где } \alpha \neq \pi m, \ (m \in \mathbf{Z}) \tag{10}$$

расходится.

Решение

Докажем, что

$$\lim_{n\to\infty} \sin n\alpha \neq 0. \tag{11}$$

Предположим, что $\sin n\alpha \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда $\sin(n+1)\alpha \to 0$ при $n \to \infty$, т.е. $\sin n\alpha \cdot \cos\alpha + \cos n\alpha \cdot \sin\alpha \to 0$. Откуда следует, что $\cos n\alpha \to 0$ при $n \to \infty$, так как $\sin\alpha \neq 0$.

Итак, если $\sin n\alpha \to 0$, то $\cos n\alpha \to 0$ при $n \to \infty$, что невозможно, так как $\sin^2 n\alpha + \cos^2 n\alpha = 1$.

Таким образом, для ряда (10) должно выполняться условие (11), и поэтому ряд (10) расходится.

1.3. Свойства сходящихся рядов

Свойство 1. Если ряды (2) и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{12}$$

сходятся, а их суммы равны, соответственно, S и $\tilde{S}$, то при любых $\lambda, \mu \in R^1$ сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n, \qquad (13)$$

а его сумма равна

$$\sigma = \lambda S + \mu \tilde{S}. \qquad (14)$$

Доказательство. Пусть S_n, $\tilde{S}_n$ и σ_n- n - ые частичные суммы рядов (2), (12) и (13), соответственно. Тогда $\sigma_n = \lambda S_n + \mu \tilde{S}_n$. Так как $S_n \to S$ и $\tilde{S}_n \to \tilde{S}$ при $n \to \infty$, то последовательность $\{\sigma_n\}$ имеет конечный предел, т.е. ряд (13) сходится, и справедливо равенство (14).

Свойство 2. Если сходится ряд (2), то при каждом $m \in \mathbf{N}$ сходится ряд

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n, \qquad (15)$$

который называют m**-м остатком ряда (2).** Обратно, если при фиксированном m ряд (15) сходится, то и ряд (2) также сходится.

Доказательство. Пусть

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad \text{и} \quad \tilde{S}_k^{(m)} = a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+k}.$$

Соответственно, n-ая частичная сумма ряда (2) и k-я частичная сумма ряда (15). Тогда

$$S_n = S_m + \tilde{S}_k^{(m)}, \quad \text{где } n = m + k. \qquad (16)$$

Если ряд (2) сходится, то последовательность $\{S_n\}$ имеет конечный предел при $n \to \infty$, и поэтому из равенства (16) следует, что последовательность $\{\tilde{S}_k^{(m)}\}$, где m фиксировано, имеет конечный предел при $k \to \infty$, т.е. ряд (15) сходится.

Обратно, если m фиксировано и существует конечный $\lim\limits_{k\to\infty} \tilde{S}_k^{(m)}$, то существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Замечание. Согласно свойству 2, отбрасывание конечного числа членов ряда или добавление конечного числа членов к данному ряду не влияет на его сходимость.

Свойство 3. Если ряд (2) сходится, то и ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} b_j , \tag{17}$$

полученный группировкой членов ряда (2) без изменения порядка их расположения, также сходится и имеет ту же сумму, что и ряд (2).

Доказательство. Пусть

$$b_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{k_1} ;$$

$$b_2 = a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \cdots + a_{k_2} ;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$b_j = a_{k_{j-1}+1} + a_{k_{j-1}+2} + \cdots + a_{k_j} ,$$

где $j \in \mathbf{N}$, $\{k_j\}$ - строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Обозначим $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $\tilde{S}_m = \sum_{j=1}^{m} a_j$, тогда $\tilde{S}_m = S_{k_m}$. Так как $\{\tilde{S}_m\}$ - подпоследовательность сходящейся последовательности $S_1, S_2, \ldots$, то существует $\lim_{m\to\infty} \tilde{S}_m = S$, где S - сумма ряда (2).

Упражнение

Показать, что утверждение, обратное к свойству 2, неверно: из сходимости ряда (17) не следует сходимость ряда (2).

1.4. Критерий Коши сходимости ряда

Теорема 2. Для сходимости ряда (2) необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon : \forall n \ge N_\varepsilon,\ \forall p \in \mathbf{N} \Rightarrow \left| a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} \right| < \varepsilon . \tag{18}$$

Доказательство. Так как $a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} = S_{n+p} - S_n$, где S_n - n-я частичная сумма ряда (2), то условие (18) означает, что последовательность $\{S_n\}$ является фундаментальной (§ 20). В силу критерия Коши для последовательности условие (18) равносильно существованию конечного предела последовательности $\{S_n\}$, т.е. равносильно сходимости ряда (2).

Замечание. Если условие (18) не выполняется, т.е.

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall k \in \mathbf{N} : \exists n \geq k, \exists p \in \mathbf{N} \Rightarrow \left| a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} \right| \geq \varepsilon, \tag{19}$$

то ряд (2) расходится.

Пример 6. Доказать, что **гармонический ряд**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tag{20}$$

расходится.

Решение

Для любого $k \in \mathbf{N}$ возьмем $n = k$, $p = k$. Тогда

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k = \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{2k} > \frac{1}{2k} \cdot k = \frac{1}{2} = \varepsilon_0$$

и в силу условия ряд (20) расходится.

2. Ряды с неотрицательными членами

2.1. Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами

Теорема 3. Если члены ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{21}$$

неотрицательны, т.е.

$$\forall n \in \mathbf{N} \;\; \Rightarrow \;\; a_n \geq 0, \tag{22}$$

то для сходимости этого ряда необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм $\{S_n\}$ была ограничена сверху, т.е.

$$\exists M > 0 \;\; \forall n \in \mathbf{N} \;\; \Rightarrow \;\; S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \leq M. \tag{23}$$

Доказательство. Заметим, что $\{S_n\}$- возрастающая последовательность, так как $S_n - S_{n-1} = a_n \geq 0$ при $n \geq 1$ в силу условия (2).

Если ряд (21) с неотрицательными членами сходится, т.е. существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то согласно теореме о пределе возрастающей последовательности

$$\forall n \in \mathbf{N} \;\Rightarrow\; S_n \le S,$$

т.е. выполняется условие (23).

Обратно, если ряд (21) с неотрицательными членами удовлетворяет условию (23), то возрастающая последовательность $\{S_n\}$ ограничена сверху. Следовательно, она имеет конечный предел, т.е. ряд (1) сходится.

2.3. Признак сравнения

Теорема 5. Если для всех $n \in \mathbf{N}$ выполняется условие

$$0 \le a_n \le b_n, \tag{26}$$

то из сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{27}$$

следует сходимость ряда (21), а из расходимости ряда (21) следует расходимость ряда (27).

Доказательство. Из сходимости ряда (27) с неотрицательными членами (условие (26)) по теореме 3 следует ограниченность сверху последовательности его частичных сумм, т.е.

$$\exists M: \;\forall n \in \mathbf{N} \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{n} b_k \le M,$$

откуда, используя условие (26), получаем

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \le \sum_{k=1}^{n} b_k \le M, \text{ для всех } n \in \mathbf{N}.$$

Таким образом, последовательность частичных сумм ряда (21) ограничена сверху и в силу теоремы 3 ряд (21) сходится.

Если ряд (21) расходится, то ряд (27) также должен расходиться, так как в случае сходимости ряда (12) сходился бы ряд (21).

Замечание 4. Теорема 5 остается в силе, если условие (26) выполняется при всех $n \geq m$, где m - заданный номер.

Пример 8. Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+2(-1)^n)(1+\sin^3 n)}{n\sqrt{n}}$$

сходится.

Решение

Так как $1 \leq 3+(-1)^n \leq 5$, $0 \leq 1+2\sin^3 n \leq 2$ при всех $n \in \mathbf{N}$, то из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n\sqrt{n}}$ по теореме 5 следует сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+2(-1)^n)(1+\sin^3 n)}{n\sqrt{n}}.$$

2.4. Признак Даламбера

Теорема 6. Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{, где } a_n > 0 \text{ для всех } n \in \mathbf{N}. \tag{28}$$

Тогда:

а) если существуют число $q \in (0,\ 1)$ и номер m такие, что для всех $n \geq m$ выполняется неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q, \tag{29}$$

то ряд (28) сходится;

б) если существует номер m такой, что для всех $n \geq m$ выполняется неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1, \tag{30}$$

то ряд (28) расходится.

Доказательство опускаем.

Следствие (признак Даламбера в «предельной форме»). Если существует

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lambda, \tag{31}$$

то ряд (28) сходится при $\lambda<1$ и расходится при $\lambda>1$.

Пример 9. Используя признак Даламбера, исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, где:

а) $a_n=\dfrac{a^n}{n!}$, $a>0$; б) $a_n=\dfrac{n!}{n^n}$.

Решение

а) ряд сходится, так как $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{a}{n+1}\to 0$ при $n\to\infty$, т.е, выполняется условие (31) при $\lambda=0$;

б) так как $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n}\to e^{-1}$ при $n\to\infty$,

то выполняется условие (31) при $\lambda=e^{-1}<1$. Поэтому ряд сходится.

2.5. Признак Коши

Теорема 7. Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{, где } a_n\geq 0 \text{ для всех } n\in\mathbf{N}. \tag{32}$$

Тогда:

а) если существуют число $q\in(0,\ 1)$ и номер m такие, что для всех $n\geq m$ выполняется неравенство

$$\sqrt[n]{a_n}\leq q, \tag{33}$$

то ряд (32) сходится;

б) если существует номер m такой, что для всех $n\geq m$ выполняется неравенство

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1,$$

то ряд (32) расходится.

Доказательство опускаем.

Следствие (признак Коши в «предельной форме»). Если существует

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda, \tag{34}$$

то ряд (28) сходится при $\lambda < 1$ и расходится при $\lambda > 1$.

Замечание. Если условие (31 или условие (34) выполняется при $\lambda = 1$, то ряд (28) может, как сходиться, так и расходиться, т.е. признак Даламбера (Коши) при $\lambda = 1$ не решает вопроса о сходимости ряда (28).

Замечание. Из существования предела (31) следует, что существует предел (34) и эти пределы равны, а обратное утверждение является неверным. Поэтому говорят, что признак Коши при исследовании сходимости рядов с положительными членами сильнее признака Даламбера.

Пример 10. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n^2}$.

Решение

Так как

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^n = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e},$$

то условие (34) выполняется при $\lambda = \frac{1}{e} < 1$, и поэтому ряд сходится.

2.6. Признак Раабе

Теорема 8. Если существует

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right) = \lambda, \tag{35}$$

то ряд (28) сходится при $\lambda > 1$ и расходится при $\lambda < 1$.

Доказательство опускаем.

Пример 11. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Решение

Признак Даламбера не позволяет решить вопрос о сходимости ряда, так как $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. Воспользуемся признаком Раабе. В данном примере

$$\sigma_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1} - 1}\right) = n\left(\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} - 1\right).$$

Так как

$$\lim_{x\to 0} \frac{e(1+x)^{-\frac{1}{x}}}{x} = \frac{1}{2},$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \frac{1}{2},$$

и согласно признаку Раабе (теорема 8) ряд расходится.

3. Абсолютно и условно сходящиеся ряды

3.1. Абсолютно сходящиеся ряды

Определение. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{36}$$

называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \tag{37}$$

Ниже приведем (без доказательства) некоторые свойства абсолютно сходящихся рядов.

Свойство 4. Если ряд абсолютно сходится, то он сходится.

Свойство 5. Если ряд (36) абсолютно сходится, а последовательность $\{b_n\}$ ограничена, т.е.

$$\exists M > 0: \ \forall n \in \mathbf{N} \ \Rightarrow \ |b_n| \le M,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ абсолютно сходится.

3.2. Знакочередующиеся ряды

Определение. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n, \text{ где } a_n > 0 \text{ для всех } n \in \mathbf{N} \tag{38}$$

называют **знакочередующимся.**

Теорема 9 (Лейбница). Если последовательность $\{a_n\}$ монотонно стремится к нулю, т.е.

$$a_n \ge a_{n+1} \text{ для всех } n \in \mathbf{N}, \tag{39}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \tag{40}$$

то знакочередующийся ряд (38) сходится.

3.3. Условно сходящиеся ряды

Определение. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{41}$$

называется **условно сходящимся**, если этот ряд сходится, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{42}$$

расходится.

При исследовании ряда на сходимость и абсолютную сходимость иногда оказывается полезным следующее утверждение.

Теорема 10. Если ряд (41) абсолютно сходится, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ одновременно либо абсолютно сходятся, либо условно сходятся, либо расходятся.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется числовым рядом? Как его обозначают?

2. Что называется n-ой частичной суммой заданного ряда?

3. Когда ряд называется сходящимся? Что называется суммой ряда?

4. Когда говорят, что ряд расходится (является расходящимся)?

5.Приведите необходимое условие сходимости ряда.

6. Является ли условие $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ достаточным для сходимости ряда? Что можно сказать о ряде если $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$?

7. Приведите свойства сходящихся рядов. Что называется m-м остатком заданного ряда?

8. Сформулируйте критерий Коши сходимости ряда.

9. Покажите, что гармонический ряд расходится.

10. Сформулируйте критерий сходимости ряда с неотрицательными членами.

11. Приведите интегральный признак сходимости ряда.

12. Приведите признак сравнения сходимости ряда.

13. Приведите признак Даламбера и его следствие (признак Даламбера в «предельной форме»).

14. Приведите признак Коши и его следствие (признак Коши в «предельной форме»).

15. Когда признак Даламбера (Коши) не решает вопроса о сходимости ряда?

16. Разъясните, почему говорят, что признак Коши при исследовании сходимости рядов с положительными членами сильнее признака Даламбера?

17. Приведите признак Раабе.

18. Когда ряд называется абсолютно сходящимся? Приведите некоторые свойства абсолютно сходящихся рядов.

19. Когда ряд называют знакочередующимся? При каких условиях знакочередующийся ряд сходится?

20. Когда ряд называется условно сходящимся? Приведите утверждение, которое оказывается полезным при исследовании ряда на сходимость и абсолютную сходимость.

21. Что называется функциональным рядом?

22. Что называется областью сходимости этого ряда?

§21. Функции одной и многих переменных

Ключевые слова: *функция многих переменных, область существования или область определения функции, множество значений функции, равенство функций, сужение функции, ограниченная функция, сложная функция (суперпозиция или композиция), неявная функция, параметрическое задание функций, выпуклые и вогнутые функции, четная и нечетная функция, периодическая функция, выпуклая (вогнутая) функция, возрастающая (неубывающая) функция, строго возрастающая функция, убывающая (невозрастающая) функция, строго убывающая функция, монотонные функции, строго монотонные функции, обратная функция,* производственная *функция, двухфакторная производственная функция Кобба–Дугласа, экономико-математические характеристики производственной функции.*

1. Понятие функции

Пусть M - некоторое множество точек n-мерного пространства R^n, т.е. $\mathrm{M}=\left\{X\left(x_1;x_2;\ldots;x_n\right)\right\}\subseteq R^n$.

Определение 1. Если каждой точке $X\in\mathrm{M}$ поставлено в соответствие определенное действительное число $f(X)$, то говорят, что на множестве M **задана функция** $y=f(X)=f(x_1,x_2,...,x_n)$ **многих переменных,** а именно, n**-переменных** $x_1,x_2,...,x_n$. При этом, число $f(X)$ называют **значением функции** y **в точке** X **.**

В частности, если $\mathrm{M}\subseteq R^1$, т.е. M является подмножеством множества действительных чисел R^1, говорят, что на множестве M задана функция одной переменной $y=f(x)$**.**

Примеры

1. $f(x)=\lg x$ - функция одной переменной x, заданная на множестве $\mathrm{M}=\{x:x\in R^1,\ \ x>0\}$. В частности, $f(10)=\lg 10=1$**.**

2. $f(X)=\dfrac{1-x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}$ - функция двух переменных x_1,x_2**,** заданная на множестве $\mathrm{M}=R^2\setminus\{O(0,0)\}$. В частности, в точке $A(1;-1)$ имеем

$$f(A)=\frac{1-1\cdot(-1)}{1^2+(-1)^2}=1.$$

3. $f(X)=\sqrt{4-x_1^2-x_2^2-x_3^2}$ - функция трех переменных x_1,x_2,x_3, заданная на множестве $\mathsf{M}=\{X: X\in R^3,\ x_1^2+x_2^2+x_3^2\le 4\}$. В частности, в точке $A(1;1;1)$ имеем $f(A)=\sqrt{4-1^2-1^2-1^2}=1$.

Упражнения

1. Найти значение функции $y=\dfrac{x_1^4+2x_1^2x_2^2+x_2^4}{1-x_1^2-x_2^2}$ в точках окружности $x_1^2+x_2^2=R^2$.

2. Найти $f(x_1,\ x_2)$, если $f(x_1+x_2,\ x_1-x_2)=x_1x_2+x_2^2$.

Замечание. Обратим внимание на правомерность фразы: **функция многих переменных.** С точки зрения общего определения всех функций, которое приводятся в математической литературе: **функция - отображение множества** A **на множество** B**,** $B=f(A)$**,** $A\in\mathsf{A}$**,** $B\in\mathsf{B}$**,** эта фраза не кажется правомерной. В самом деле, все функции выступают как функции одного аргумента $A\in\mathsf{A}$. Значит, и функцию, заданную на множестве пространства R^n, следует считать функцией одного переменного X (X - точка пространства R^n).

В связи с этим запись

$$y=f(X),\ X\in\mathsf{M}\subseteq R^n,$$

кажется более правомерной, чем запись

$$y=f(x_1,x_2,...,x_n),\ (x_1,x_2,...,x_n)\in\mathsf{M}\subseteq R^n.$$

Первая запись не только более правомерна, но и более кратка. Однако от второй записи действительных функций многих переменных мы отказываться не будем. Дело в том, что для изучения функций и операций над ними будет использовано все то, что будет получено в связи с изучением функций одного переменного. Вторая запись функции многих переменных предпочтительнее потому, что, закрепив в ней значения $x_2,x_3,...,x_n$, мы получим функцию только одного действительного переменного x_1. Ее мы можем изучать с привлечением всех методов, добытых в связи с исследованием функций одного действительного переменного. Изучив особенности функции по каждому из переменных, мы сможем вынести суждение об особенностях функции по совокупности всех переменных. К такому приему изучения функций многих переменных прибегают весьма часто.

Однако и мы это еще раз подчеркнем, фраза **«функция многих переменных»** означает только форму (удобную) записи функции. Можно и функцию одного переменного записать в форме функции даже бесконечного числа переменных. В самом деле, всякое действительное число $x=[x],x_1x_2\cdots x_n\cdots$, где $[x]$ - целая часть числа x, x_1 - число десятых, x_2 - сотых и т.д. Поэтому

$$y=f(x)=f([x],x_1,x_2,...,x_n,...),$$

т.е. функция одного переменного, записана в форме функции бесконечного числа переменных, каждое из которых принимает только целые значения.

После этого отступления мы приходим к следующему определению функции многих переменных.

Определение 2. Функцией n переменных называется отображение множества M пространства R^n на множество действительных чисел и записывают функцию так:

$$y=f(x_1,x_2,...,x_n)=f(X),\ \ X=\left(x_1;x_2;\ldots;x_n\right)\in \mathrm{M}\subseteq R^n.$$

Очевидно, что вышеприведенные два определения функции многих переменных эквивалентны.

Определение. Множество M называется **областью существования** или **областью определения функции** и обозначается $D(f)$; $D(f)\subseteq R^n$**.**

В случае, когда функция задана формулой, а область определения ее не указана, тогда под областью определения функции мы будем понимать множество всех точек, в которых выполнимы все операции формулы.

Определение. Множество всех значений, которые принимает функция $y = f(X)$ во всех точках своей области определения $D(f)$, называется **множеством значений функции** и обозначается $E(f)$; $E(f) \subseteq R^1$.

Примеры

4. $f(x) = \sqrt{x-1}$ - функция одной переменной x;

$$D(f) = [1,+\infty) \subset R^1; \quad E(f) = [0,+\infty) \subset R^1.$$

5. $f(X) = \dfrac{1}{x_1^2 + x_2^2}$ - функция двух переменных;

$$D(f) = R^2 \setminus \{O(0,0)\} \subset R^2; \quad E(f) = (0,+\infty) \subset R^1.$$

6. $f(X) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}$ - функция трех переменных;

$$D(f) = \{X : X \in R^3,\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 1\} \subset R^3; \quad E(f) = [0,1] \subset R^1.$$

Упражнения

Найти области определения заданных функций.

1. $y = \sqrt{\dfrac{x-3}{1-3x+2x^2}}$. 2. $y = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$. 3. $y = \sqrt{x_2 \sin x_1}$.

5. $y = 1 + \sqrt{-(x_1 - x_2)^2}$. 6. $y = \ln\left(x_1^2 + x_2\right)$. 7. $y = \ln\left(x_1 + x_2\right)$.

8. $y = arctg\dfrac{x_1 - x_2}{1 + x_1^2 x_2^2}$. 9. $y = x_1 + \arccos x_2$. 10. $y = \dfrac{1}{x_1^2 + x_2^2}$.

11. $y = \sqrt{1 - x_1^2} + \sqrt{1 - x_2^2}$. 12. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x_2 - \sqrt{x_1}}}$. 13. $y = \arcsin\dfrac{x_2}{x_1}$.

2. Равенство функций. Операции над функциями

Определение. Функции f и g называются **равными** или **совпадающими,** если они имеют одну и ту же область определения M и для каждого $X \in \mathrm{M}$ значения этих функций совпадают. В этом случае пишут

$$f(X) = g(X),\ \ X \in \mathrm{M} \quad \text{или} \quad f = g.$$

Пример 7. Если $f(x) = \sqrt{x^2}$, $x \in R^1$ и $g(x) = |x|$, $x \in R^1$, то $f = g$, так как при всех $x \in R^1$ справедливо равенство $\sqrt{x^2} = |x|$.

Определение. Если $M' \subset D(f)$, то функцию $g(X) = f(X)$, $X \in M'$ называют **сужением функции** f на множество M'.

Пример 8. Если $M' = [0,+\infty)$, то функция $g(x) = x$, $x \in M'$ является сужением функции $f(x) = |x|$, $x \in R^1$ на множество M'.

Если равенство $g(X) = f(X)$ верно при всех $X \in M'$, где $M' \subset D(f) \bigcap D(g)$, т.е. сужения функций f и g на множество M' совпадают, то в этом случае говорят, что функции f и g равны на множестве M'. Например, функции $\sqrt{x^2}$ и x равны на множестве $M' = [0,+\infty)$.

Естественным образом для функций вводятся арифметические операции.

Определение. Пусть функции f и g определены на одном и том же множестве M. Тогда функции, значения которых в каждой точке $X \in M$ равны

$$f(X) + g(X), \quad f(X) - g(X), \quad f(X)g(X), \quad \frac{f(X)}{g(X)}, \ \left(g(X) \neq 0 \ \ \forall X \in M\right),$$

называют, соответственно, **суммой, разностью, произведением и частным функций** f и g и обозначают $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\dfrac{f}{g}$.

Упражнения

Найти области определения функций f, g, $f+g$.

1. $f(x) = \sqrt[4]{3-x}$, $\qquad g(x) = \sqrt{x+1}$.
2. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $\qquad g(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x}{2x-1}}$.
3. $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x-3}$, $\qquad g(x) = \lg(x^2-4)$.
4. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{5x-x^2}}$, $\qquad g(x) = tgx$.
5. $f(x) = \lg(16-x^2)$, $\qquad g(x) = \dfrac{1}{1-\sin x}$.
6. $f(x) = x + \sqrt{x-1}$, $\qquad g(x) = x - \sqrt{x-1}$.

3. Ограниченные функции

Функция $y = f(X)$, определенная на множестве M, называется **ограниченной сверху (снизу),** если множество принимаемых ею на M значений ограничено сверху (снизу).

Ограниченность сверху (снизу) функции $y = f(X)$ на множестве M означает существование такого числа c, что для всех точек $X \in \mathrm{M}$ выполняется неравенство $f(X) \le c$ $\left(f(X) \ge c\right)$.

Определение. В частности, если M является окрестностью некоторой точки A, т.е. $\mathrm{M} = S_\varepsilon(A) = \left\{X : X \in R^n, \quad \rho\left(X, A\right) < \varepsilon\right\}$, то говорят об ограниченности функции $y = f(X)$ в данной окрестности точки A.

Если M - область определения $D(f)$ функции $y = f(X)$, то говорят об ограниченности функции в области определения, при этом множество значений $E(f)$ является ограниченным множеством.

Если функция $y = f(X)$ не ограничена сверху (снизу) на множестве M, то существует последовательность $\{X_k\}$ $(k = 1, 2, ...)$ точек, принадлежащих M, такая, что

$$\lim_{k\to\infty}\{f(X_k)\} = +\infty \qquad \left(\lim_{k\to\infty}\{f(X_k)\} = -\infty\right).$$

Примеры

9. Функция $f(x) = \sin x$ ограничена во всей области определения $D(f) = (-\infty, +\infty)$, так как множество ее значений $E(f) = [-1, 1]$ - множество ограниченное $\left(-1 \le \sin x \le 1\right)$.

10. Функция $f(X) = \dfrac{1}{x_1^2 + x_2^2}$ ограничена лишь снизу во всей области определения $D(f) = R^2 \setminus \{(0,0)\}$, так как множество ее значений $E(f)$ ограничено только снизу так, что $f(X) > 0$. Функция не ограничена сверху в любой окрестности точки $O(0,0)$: существует последовательность

$$X_k\left(\frac{1}{k}, \ \frac{1}{k}\right), \ k = 1, 2, ...$$

сходящаяся к точке $O(0,0)$ и такая, что последовательность значений функ-

ции $f(X_k)=\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{k}\right)^2+\left(\dfrac{1}{k}\right)^2}=\dfrac{k^2}{2}$

стремится к $+\infty$.

Упражнения

1. Показать, что функция $y=\dfrac{1}{x^2}$, $x\in R^1$, $x\neq 0$, неограниченна, и построить ее график.

2. Показать, что функция $y=\dfrac{x^3}{x^4+1}$, $x\in R^1$, ограничена.

3. Показать, что сумма и произведение ограниченных функций – ограниченная функция.

4. Сложные функции (суперпозиции)

Пусть функция $y=f(u_1,u_2,...,u_m)$ определена на некотором множестве $\mathsf{W}\subseteq R^m$ переменных $u_1,u_2,...,u_m$, а каждая из функций

$$u_1=g_1(x_1,x_2,...,x_n),\quad u_2=g_2(x_1,x_2,...,x_n)\quad ,...,\quad u_m=g_m(x_1,x_2,...,x_n)$$

определена в некотором множестве $\mathsf{M}\subseteq R^n$ переменных $x_1,x_2,...,x_n$.

Определение. Если при этом каждой точке $X(x_1;x_2;...,x_n)\in\mathsf{M}$ можно поставить в соответствие точку $U(u_1;u_2;...,u_m)\in\mathsf{W}$, где

$$u_1=g_1(x_1,x_2,...,x_n),\quad u_2=g_2(x_1,x_2,...,x_n)\quad ,...,\quad u_m=g_m(x_1,x_2,...,x_n),$$

то на множестве M определяется функция

$$y=f\left(g_1(x_1,x_2,...,x_n),\quad g_2(x_1,x_2,...,x_n)\quad ,...,\quad g_m(x_1,x_2,...,x_n)\right),$$

называемая **сложной функцией переменных** $x_1,x_2,...,x_n$ **или суперпозицией (композицией) функций** $f,g_1,g_2,...,g_m$.

В частности, если даны две функции одной переменной $y=f(u)$, $u=g(x)$ и при этом $E(g)\subseteq D(f)$ (множество значений функции g является подмножеством области определения функции f), то говорят о сложной функции $y = f\left(g(x)\right)$ одной переменной x.

Примеры

11. Следующая пара функций $y = 2^u$, $u = \sin x$ задает сложную функцию $y = 2^{\sin x}$, определенную на множестве R^1 и имеющую множеством значений отрезок $\left[\frac{1}{2},\ 2\right]$.

12. Аналогично, функция $y = \ln\cos\frac{1}{\sqrt{x}}$ является суперпозицией следующих функций $y = \ln u,\ u = \cos v,\ v = \frac{1}{z},\ z = \sqrt{x}$.

5. Неявные функции

Определение. Говорят, что функция $y = f(X) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ неявно задана уравнением $F(x_1, x_2, ..., x_n, y) = 0$, если существует множество $\mathrm{M} \subseteq R^n$ такое, что для всех точек $X(x_1; x_2; ..., x_n) \in \mathrm{M}$ справедливо тождество

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, f(x_1, x_2, ..., x_n)) \equiv 0.$$

Одно и то же уравнение может задавать неявно не одну, а несколько функций. Например, уравнение $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ задает неявно две функции

$$y_1 = f_1(X) = +\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2}$$

и

$$y_2 = f_2(X) = -\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2},$$

определенные на множестве $\mathrm{M} = \{X : X \in R^n,\ \ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \le 1\}$.

В частности, уравнение $F(x, y) = 0$ при указанных предположениях задает неявно функцию $y = f(x)$ одной переменной x; уравнение $F(x_1, x_2, y) = 0$ задает неявно функцию $y = f(x_1, x_2)$ двух переменных и т.д.

Название «неявная функция» отражает способ задания функциональной зависимости.

6. Параметрическое задание функций

Часто бывает полезно (например, при изучении неявных функций) функциональную зависимость между несколькими переменными выражать через вспомогательные переменные - параметры. Так, для функции, неявно заданной уравнением $F(x,y)=0$, необходимо каждую из переменных x и y выразить через один параметр; для функции, неявно заданной уравнением $F(x_1,x_2,y)=0$, необходимо каждую из переменных x_1,x_2,y выразить через два параметра.

Определение. Выражение переменных через параметры называют **параметрическим заданием** функциональной зависимости.

Примеры

13. Эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ задается параметрически, в виде $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, где $0\le t\le 2\pi$.

14. Прямая линия в пространстве имеет параметрическое задание $x=x_0+mt,\quad y=y_0+nt,\ z=z_0+pt$, где $(x_0,\quad y_0,\ z_0)$ - точка, через которую проходит прямая; $(m,\quad n,\ p)$ - вектор, параллельный прямой; $-\infty<t<+\infty$.

15. Зависимость $z=x^2+y^2$ (параболоид вращения) может быть задана параметрически в виде $x=r\cos t,\quad y=r\sin t,\ z=r^2$, где параметры r и t изменяются в следующих пределах: $0\le r\le+\infty;\ 0\le t\le 2\pi$.

7. Выпуклые и вогнутые функции

Определение. Пусть функция $y=f(X)$ определена на выпуклом множестве $\mathrm{M}\subseteq R^n$.

Функция $y = f(X)$ называется **выпуклой (вогнутой)** на множестве M, если для любых двух точек $X(x_1; x_2; ..., x_n)$ и $Y(y_1; y_2; ..., y_n)$, принадлежащих M, и для любого действительного числа $0 \le \lambda \le 1$ выполняется неравенство

$$f(\lambda X + (1-\lambda)Y) \le \lambda f(X) + (1-\lambda) f(Y)$$
$$\left(f(\lambda X + (1-\lambda)Y) \ge \lambda f(X) + (1-\lambda) f(Y) \right).$$

Примеры

16. Функция $f(x) = x^2$- выпуклая на R^1. Действительно, для произвольных $x, z \in R^1$ и любого $\lambda \in [0,1]$ получим

$$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(z) - f(\lambda x + (1-\lambda)z) = \lambda x^2 + (1-\lambda)z^2 - (\lambda x + (1-\lambda)z)^2 =$$
$$= \lambda(1-\lambda)x^2 - 2\lambda(1-\lambda)xz + \lambda(1-\lambda)z^2 = \lambda(1-\lambda)(x-z)^2 \ge 0.$$

17. Линейная функция

$$f(X) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

является одновременно и выпуклой, и вогнутой на всем пространстве R^n.

18. Квадратичная (форма) функция

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k$$

является выпуклой (вогнутой) на R^n тогда и только тогда, когда она является **знакоположительной** (**знакоотрицательной**), т.е. принимает неотрицательные (неположительные) значения.

Например, квадратичная (форма) функция

$$f(X) = 2x_1^2 + 11x_2^2 + 52x_3^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 - 16x_2x_3,$$

является выпуклой на пространстве R^3.

Действительно,

$$f(X) = 2(x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3) + 11x_2^2 + 52x_3^2 - 16x_2x_3 =$$
$$= 2(x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_2x_3) + 3x_2^2 + 50x_3^2 - 24x_2x_3 =$$
$$= 2(x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + 3(x_2^2 - 8x_2x_3 + 16x_3^2) + 2x_3^2 =$$
$$= 2(x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + 3(x_2 - 4x_3)^2 + 2x_3^2 \ge 0$$

во всех точках пространства R^3, т.е. данная квадратичная функция $f(X)$ является знакоположительной.

Свойства выпуклых функций

1°. Функция $f(X)$ выпукла на множестве M тогда и только тогда, когда функция $-f(X)$ вогнута на M.

2°. Если функции $f_1(X)$ и $f_2(X)$ выпуклы на множестве M, то функция $k_1 f_1(X) + k_2 f_2(X)$, где k_1, k_2 - произвольные неотрицательные числа, также является выпуклой на M.

3°. Если функция $f(X)$ выпукла на множестве M, то множество $\{X \in \mathrm{M}\colon f(X) \le b\}$, где b - любое число, если только оно не пусто, само является выпуклым множеством.

4°. Если выпуклая функция $f(X)$ определена на открытом множестве M, то на этом множестве она непрерывна.

Аналогичные свойства имеют место и для вогнутых функций.

8. Специфические свойства функций одной переменной

Определение. Функция $y = f(x)$, определенная на множестве $\mathrm{M} \subseteq R^1$, называется **четной** на этом множестве, если множество M симметрично относительно точки $x = 0$ и имеет место равенство $f(-x) = f(x)$ для любого $x \in \mathrm{M}$.

График четной функции симметричен относительно оси ординат Oy.

Определение. Функция $y = f(x)$, определенная на множестве $\mathrm{M} \subseteq R^1$, называется **нечетной** на этом множестве, если множество M симметрично относительно точки $x = 0$ и имеет место равенство $f(-x) = -f(x)$ для любого $x \in \mathrm{M}$.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Примеры

19. Функция $y=\cos x$, для которой $D(f)=(-\infty,+\infty)$, является четной функцией, так как $\cos(-x)=\cos x$ для всех $x\in D(f)$.

20. Функция $y=\arcsin x$, для которой $D(f)=[-1,1]$, является нечетной функцией, так как $\arcsin(-x)=-\arcsin x$ для всех $x\in D(f)$.

Определение. Функция $y=f(x)$ называется **периодической,** если существует такое положительное действительное число t, что для всех точек x и $x+t$ из области определения функции имеет место равенство $f(x+t)=f(x)$. При этом число t называют **периодом функции**.

Практически всегда ставится вопрос о наименьшем из всех возможных периодов, т.е. о числе $T=\min\limits_i t_i$.

Если функция $y=f(x)$ непрерывна, отлична от постоянной и периодическая на R^1, то существует наименьший период T этой функции. Все остальные периоды кратны T.

Примеры

21. $y=\sin x$ и $y=\cos x$ имеют период $T=2\pi$.

22. $y=tgx$ и $y=ctgx$ имеют период $T=\pi$.

23. Функция Дирихле

$$y=\begin{cases}1, & \text{если} \quad x-\text{рациональное},\\ 0, & \text{если} \quad x-\text{иррациональное},\end{cases}$$

имеет периодом любое положительное рациональное число, однако не имеет наименьшего периода.

Определение. Функция $y=f(x)$ называется **возрастающей (неубывающей)** на некотором множестве $\mathrm{M}\subseteq D(f)$, если она определена на этом множестве и если для любых значений $x_1,x_2\in\mathrm{M}$ из условия $x_1<x_2$ следует неравенство

$$f(x_1) \le f(x_2).$$

Если это неравенство является строгим $\left(f(x_1) < f(x_2) \right)$, то функцию $y = f(x)$ называют **строго возрастающей** на множестве M.

Таким образом, функция $y = f(x)$ называется:

а) **возрастающей (неубывающей)** на множестве M, если

$$\forall x_1 \in \mathsf{M} \;\; \forall x_2 \in \mathsf{M}: \;\; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2);$$

б) **строго возрастающей** на множестве M, если

$$\forall x_1 \in \mathsf{M} \;\; \forall x_2 \in \mathsf{M}: \;\; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Аналогично, функция $y = f(x)$ называется:

а) **убывающей (невозрастающей)** на множестве M, если

$$\forall x_1 \in \mathsf{M} \;\; \forall x_2 \in \mathsf{M}: \;\; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2);$$

б) **строго убывающей** на множестве M, если

$$\forall x_1 \in \mathsf{M} \;\; \forall x_2 \in \mathsf{M}: \;\; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Определение. Убывающие и возрастающие функции называют **монотонными функциями,** а строго возрастающие и строго убывающие - называют **строго монотонными.**

Если $\mathsf{M} = D(f)$, то в этих определениях указание на множество M обычно опускают.

Примеры

24. $y = \lg x$ - строго возрастающая функция во всей области определения.

25. $y = \left(\dfrac{1}{2} \right)^x$ - строго убывающая функция во всей области определения.

26. $y = x^2$ - строго возрастающая в промежутке $\mathsf{M} = [0, +\infty)$ и строго убывающая в промежутке $\mathsf{M} = (-\infty, 0]$.

27. $y = E(x) = [x]$ (целая часть числа x) - неубывающая функция.

28. $y = \sin x$, строго возрастающая функция на $\mathrm{M} = \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} \right]$.

Упражнения

1. Показать, что функция $f(x) = x^3 + 3x + 5$ возрастает во всей области ее определения.

2. Показать, что функция $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$ убывает в промежутке $(1,\ +\infty)$.

9. Обратная функция

Определение. Пусть функция $y = f(x)$ определена в области $D(f) \subset R^1$ и имеет множество значений $E(f)$. Если эта функция такова, что для любых $x_1, x_2 \in D(f)$ из условия $x_1 \neq x_2$ следует условие $f(x_1) \neq f(x_2)$, то каждому $y \in E(f)$ можно поставить в соответствие определенное $x \in D(f)$ такое, что $f(x) = y$, т.е. на множестве $E(f)$ можно определить функцию $x = g(y)$, называемую **обратной** к заданной функции $y = f(x)$.

Областью определения обратной функции является множество значений $E(f)$ функции $y = f(x)$. Множеством значений обратной функции является область определения $D(f)$ функции $y = f(x)$.

Например, функция $y = x^2$, заданная в промежутке $[0, +\infty)$, имеет обратную функцию $x = +\sqrt{y}$, определенную на множестве $E(y) = [0, +\infty)$. Эта же функция, заданная в промежутке $(-\infty, 0]$, имеет обратную функцию $x = -\sqrt{y}$, определенную на множестве $E(y) = [0, +\infty)$. Однако функция $y = f(x) = x^2$, заданная, например, на отрезке $[-2, 2]$, не имеет обратной функции, так как $f(-1) = f(1) = 1$ (двум различным значениям аргумента $x = -1$ и $x = 1$ соответствует одно и то же значение y).

Если функция $y = f(x)$ определена, непрерывна и строго монотонна на отрезке $[a,b]$, то она имеет обратную функцию $x = g(y)$, определенную, непрерывную и строго монотонную на отрезке с концами в точках $f(a)$ и $f(b)$.

Упражнения

Являются ли взаимно обратными функции, следующие заданные функции.

1. $y = \dfrac{x+1}{x-1}, \qquad y = \dfrac{x+1}{x-1}.$

2. $y = 1 - \sqrt[3]{x}, \qquad y = (1-x)^3.$

3. $y = 1 + \sqrt{x}, \qquad y = (x-1)^2.$

4. $y = \sqrt{1-x^2}, \qquad y = \sqrt{1-x^2}.$

10. Производственная функция и ее некоторые экономико-математические характеристики

Пусть R_+^n положительный ортант n- мерного пространства, каждый вектор $X = \left(x_1,...,x_n\right)$ которого интерпретируется как вектор затрат производственных ресурсов (в стоимостном или натуральном выражении). В качестве факторов производства здесь могут выступать как первичные факторы в обычном понимании, так и продукты производства, внешнего по отношению к изучаемому, выступающие в данном случае как ресурсы или сырье.

Пусть R_+^m - положительный ортант m- мерного пространства, каждый вектор $Y = \left(y_1,...,y_m\right)$ которого интерпретируется как набор количественных оценок результатов производства при определенных затратах ресурсов. Такими количественными оценками могут служить, например, физический объем выпуска по каждому из наименований выпускаемой продукции, стоимостные показатели.

Определение. Если P - некоторый производственный процесс, то **производственной функцией** f этого процесса будем называть отображение $f : D \to V$, где $D \subseteq R_+^n$, $V \subseteq R_+^m$, моделирующее выпуск продукции в процессе P.

Введение множеств D, V обусловлено тем, что в реальных ситуациях построение функции f для процесса P происходит всегда на основе ограниченного статистического материала. В этом случае отчетные данные, на основе которых строится функция, заполняют ограниченные участки соответствующих пространств. При этом может случиться, что удобная аналитическая форма функции f дает хорошие результаты (т.е. достаточно адекватно моделирует процесс P) только в пределах некоторых множеств D и V.

Замечание. Проблема построения производственной функции, так же как и проблема ее использования с целью анализа производства в масштабах народного хозяйства в целом или отдельных его отраслей, представляет собой сложную научную задачу, рецепта, для решения которой в общем случае в настоящий момент не существует.

Отметим сразу, что, несмотря на широту приведенного выше определения производственной функции, до сих пор в научной и прикладной экономико-математической литературе в основном изучался случай $m = 1$, т.е. когда имеется единственная количественная оценка результатов производства. В этом случае производственную функцию естественно записывать как обычную функцию нескольких переменных

$$y = f(x_1, ..., x_n). \tag{1}$$

Всюду в дальнейшем мы будем иметь дело только с таким случаем.

Для введения основных математических характеристик производственной функции и выяснения их экономической интерпретации, рассмотрим двухфакторную производственную функцию. Обозначим через K объем основных фондов, либо в стоимостном выражении, либо в количественном (скажем, число станков). Пусть L - числовое выражение объема трудовых ресурсов, т.е. число рабочих, число человеко-дней, человеко-часов и т.д., Y - объем выпущенной продукции в стоимостном выражении, либо в натуральном, если мы имеем дело с отраслью, выпускающей один продукт. Тогда производственная функция имеет вид

$$Y = F(K, L). \qquad (2)$$

Ниже в качестве иллюстрации будем рассматривать одну из наиболее распространенных двухфакторных производственных функций - функцию Кобба - Дугласа:

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}, \qquad (3)$$

где $A > 0$ - константа, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $\alpha + \beta = 1$. Обычные требования на производственную функцию (2) заключаются в требовании гладкости, которое мы приведем в последующих лекциях.

Ниже приведем основные экономико - математические характеристики производственной функции (2).

Средняя производительность труда определяется как $y = \dfrac{Y}{L}$ - отношение объема произведенного продукта к количеству затраченного труда. Отметим, что эта характеристика (как и все прочие) является функцией фазовых координат K, L. Средняя фондоотдача $z = \dfrac{Y}{K}$ - отношение объема произведенного продукта к величине основных фондов.

Для функции Кобба - Дугласа, например, средняя производительность труда равна $Y = AK^{\alpha}L^{\beta-1}$ и в силу условия $\beta < 1$ является убывающей функцией аргумента L. Другими словами, с увеличением затрат труда средняя производительность труда падает. Этот вывод допускает естественное объяснение - поскольку величина второго фактора K остается неизменной, то, значит, вновь привлекаемая рабочая сила не обеспечивается дополнительными средствами производства, что и приводит к снижению производительности труда. Таким образом, становится ясным и значение такой характеристики, как фондовооруженность труда $k = \frac{K}{L}$, показывающей объем основных фондов, приходящийся на одного работника.

Наряду со **средними показателями** при анализе производственных функций играют роль и **предельные характеристики функции**. Эти характеристики мы приведем в последующем.

При изучении производственных функций часто делают различные предположения, в той или иной мере отвечающие экономической реальности. Основное предположение состоит в том, что производственную функцию (2) считают однородной первой степени или линейно-однородной, т.е. требуют выполнения соотношения $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$ для всех $\lambda > 0$. Можно по-разному толковать содержательный смысл условия однородности. Здесь (из-за ограниченности возможности) эти толкования и многие другие вопросы, связанные с производственной функцией не приводятся.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение функции многих переменных. Прокомментируйте правомерность фразы: функция многих переменных.

2. Что называется областью существования или областью определения функции и как она обозначается?

3. Что называется множеством значений функции и как оно обозначается?

4. Когда две функции называются равными? Что называется сужением функции?

5. Каким образом для функций вводятся арифметические операции?

6. Что называется ограниченной функцией? Приведите примеры.

7. Дайте определение сложной функции многих переменных (суперпозиции или композиции функции многих переменных). Приведите примеры.

8. Когда говорят, что функция задана неявно? Что отражает название «неявная функция»?

9. Что означает параметрическое задание функции?

10. Что называется выпуклой (вогнутой) функцией? Приведите свойства выпуклых функций.

11. Что называется четной (нечетной) функцией?

12. Что называется периодической функцией?

13. Что называется возрастающей (неубывающей) функцией?

14. Что называется строго возрастающей функцией?

15. Что называется убывающей (невозрастающей) функцией?

16. Что называется строго убывающей функцией?

17. Какие функции называются монотонными (строго монотонными) функциями?

18. Что называется обратной функцией к заданной функции? Когда существует обратная функция к заданной?

19. Что называется производственной функцией? Какой вид имеет одна из наиболее распространенных двухфакторных производственных функций - функция Кобба–Дугласа?

20. Какие экономико-математические характеристики производственной функции Вы можете привести?

§22. Предел функций

Ключевые слова: *проколотая δ - окрестность точки, предел функции в точке, частичный предел функции в точке, односторонние конечные пределы, бесконечные пределы в конечной точке, бесконечно большая функция, предел в бесконечности, бесконечно малые функции, критерий существования предела функции, раскрытие неопределенностей, замечательные пределы, важные пределы, предел функции многих переменных, двойной предел, повторный предел.*

1. Предел функции одной переменной

1.1. Понятие предела

Важную роль в математическом анализе играет понятие предела, связанное с поведением функции в окрестности данной точки.

Напомним, что δ-окрестностью точки a называется интервал длины 2δ с центром в точке a, т.е. множество

$$O_\delta(a)=\{x:\ |x-a|<\delta\}=\{x:\ a-\delta<x<a+\delta\}.$$

Если из этого интервала удалить точку a, то получим множество, которое называют **проколотой δ-окрестностью точки** a и обозначают $\dot{O}_\delta(a)$, т.е.

$$\dot{O}_\delta(a)=\{x:\ |x-a|<\delta,\ \ x\neq a\}=\{x:\ 0<|x-a|<\delta\}.$$

A. Определение предела по Коши

Определение. Число b **называется пределом функции $f(x)$ в точке a,** если эта функция определена в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a, и для каждого $\varepsilon>0$ найдется число $\delta>0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x-a|<\delta,\ \ x\neq a$, выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$. В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ или $f(x)\to b$ при $x\to a$.

С помощью логических символов это определение можно записать так:

$$\left\{\lim_{x\to a} f(x)=b\right\} \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0: \quad \forall x:\ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$$

или, используя понятие окрестности, в виде

$$\left\{\lim_{x\to a} f(x)=b\right\} \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0: \quad \forall x\in \overset{\bullet}{O}_\delta(a) \Rightarrow f(x)\in O_\varepsilon(b).$$

В случае бесконечного a, т.е. $x\to\infty$ определение таково:

Определение. Число b **называется пределом функции** $f(x)$ **при** $x\to\infty$, если для каждого $\varepsilon>0$ найдется число $M>0$ такое, что для всех $x>M$, выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$. В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$.

Б. Определение предела по Гейне

Определение. Число b называется пределом функции $f(x)$ в точке a, если эта функция определена в некоторой проколотой окрестности точки a, т.е.

$$\exists\delta_0>0: \ \overset{\bullet}{O}_{\delta_0}(a)\subset D(f)$$

и для любой последовательности $\{x_k\}$, сходящейся к a и такой, что $x_k\in \overset{\bullet}{O}_{\delta_0}(a)$ для всех $k\in\mathbf{N}$, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_k)\}$ сходится к числу b.

Пример 1. Пользуясь определением предела по Гейне, доказать, что функция $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ не имеет предела в точке $x=0$.

Решение

Достаточно показать, что существуют последовательности $\{x_k\}$ и $\{\tilde{x}_k\}$ с отличными от нуля членами, сходящиеся к нулю и такие, что $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k)\neq\lim\limits_{k\to\infty} f(\tilde{x}_k)$.

Возьмем $x_k=\left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)^{-1}$, $\tilde{x}_k=(k\pi)^{-1}$, тогда $\lim\limits_{k\to\infty} x_k=\lim\limits_{x\to\infty}\tilde{x}_k=0$, $f(x_k)=1$ и $f(\tilde{x}_k)=0$ для всех $k\in\mathbf{N}$, и поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k)=1$, а $\lim\limits_{k\to\infty} f(\tilde{x}_k)=0$. Следовательно, функция $\sin\dfrac{1}{x}$ не имеет предела в точке $x=0$.

Определение. Если функция f определена в проколотой δ_0-окрестности точки a и существуют число b и последовательность $\{x_k\}$ такие, что $x_k \in \dot{O}_{\delta_0}(a)$ при всех $k \in \mathbf{N}$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, и $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = b$, то число b называют **частичным пределом функции f в точке a.**

Пример 2. Для функции $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ каждое число $b = [-1,\ 1]$ является ее частичным пределом. В самом деле, последовательность $\{x_k\}$, где $x_k = \left(\arcsin b + 2k\pi\right)^{-1}$, образованная из корней уравнения $\sin\frac{1}{x} = b$ (рис. 1),

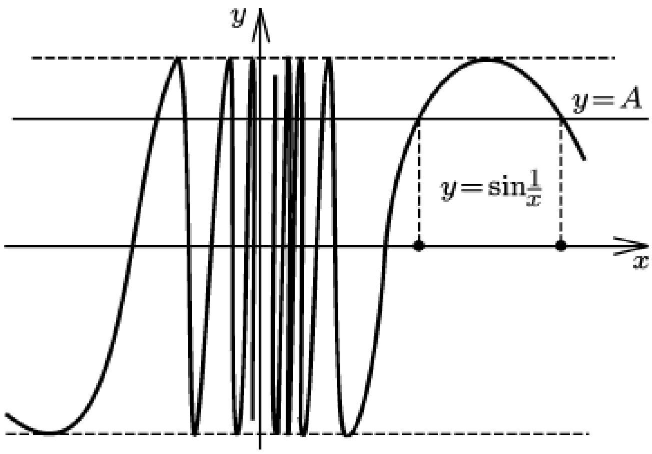


Рис. 1

такова, что $x_k \neq 0$ для всех $k \in \mathbf{N}$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$, и $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = b$.

Замечание. Определение *Гейне* весьма полезно на практике. Например, если существование предела установлено, то для его нахождения достаточно определить предел $f\left(x\right)$ для какой-нибудь одной под последовательности x_k.

В. Эквивалентность двух определений предела

Теорема 1. Определения предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны.

Упражнение

Доказать, что если функция $f(x)$ имеет предел в точке a, то этот предел единственный.

1.2. Различные типы пределов

Различных типов пределов оказывается довольно много. Если их воспринимать как разные понятия и укладывать в голове независимо друг от друга - никакого места не хватит. Есть всего одно понятие предела. Одна идея, одна схема. Остальное - вариации. И эти вариации, желательно, чтобы сами выскакивали из головы по мере надобности. Если «не выскакивают» - лучше еще повозиться с общей идеей. А заглядывать в книжку даже вредно.

Вариации определяются природой переменных: a, b и могут быть, в том числе, бесконечностями; x, f - дискретными или непрерывными величинами.

Ниже, в качестве примера из числа различных типов пределов рассмотрим ***односторонние конечные пределы.***

Определение. Число b_1 называют **пределом слева функции** $f(x)$ в **точке** a и обозначают $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=b$ или $f(a-0)$ если

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0: \quad \forall x\in(a-\delta,\ a)\Rightarrow\left|f(x)-b_1\right|<\varepsilon.$$

Аналогично число b_2 называют **пределом справа функции** $f(x)$ в **точке** a и обозначают $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b$ или $f(a+0)$ если

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0: \quad \forall x\in(a,\ a+\delta)\Rightarrow\left|f(x)-b_2\right|<\varepsilon.$$

Определение. Числа b_1 и b_2 характеризуют поведение функции f, соответственно, в левой и правой полу окрестности точки a, поэтому пределы слева и справа называют **односторонними пределами.** Если $a=0$, то предел слева функции $f(x)$ обозначают $\lim\limits_{x\to -0} f(x)=b$ или $f(-0)$, а предел справа обозначают $\lim\limits_{x\to +0} f(x)=b$ или $f(+0)$.

Пример 3. Для функции

$$sign(x)=\begin{cases}-1, & если \quad x<0,\\ 0, & если \quad x=0,\\ 1, & если \quad x>0,\end{cases}$$

график которой изображен на рис. 2,

$$\lim_{x\to -0} f(x) = f(-0) = -1, \qquad \lim_{x\to +0} f(x) = f(+0) = 1.$$

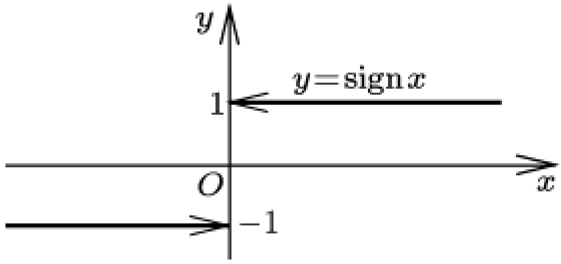


Рис. 2

Отметим еще, что если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0: \ \ \forall x \in \overset{\bullet}{O}_\delta(a) \ \ \Rightarrow f(x) \in [b, \ \ b+\varepsilon),$$

т.е. значения функции лежат в правой ε - полу окрестности числа b, то пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b+0$. В частности, если $b=0$, то пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +0$.

Аналогично

$$\left\{\lim_{x\to a} f(x) = b-0\right\} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0: \ \ \forall x \in \overset{\bullet}{O}_\delta(a) \ \ \Rightarrow f(x) \in (b-0, \ \ b].$$

Пример 4. Для функции

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & \textit{если} \quad x<0, \\ 2, & \textit{если} \quad x=0, \\ 1+\sqrt{x}, & \textit{если} \quad x>0, \end{cases}$$

график которой изображен на рис. 3, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1+0$.

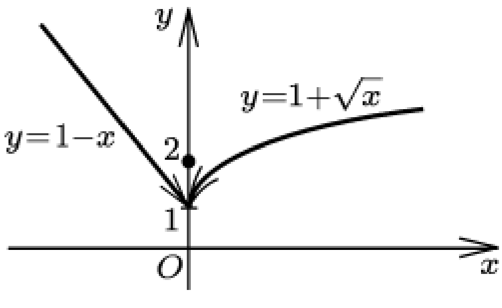


Рис. 3

Аналогичный смысл имеют записи вида

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = b+0, \qquad \lim_{x\to a+0} f(x) = b-0.$$

Например,

$$\left\{\lim_{x\to a-0} f(x)=b+0\right\} \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0: \quad \forall x\in(a-\delta,\ a) \Rightarrow f(x)\in\{b, \quad b+\varepsilon).$$

Упражнение

Записать с помощью логических символов утверждение:

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=b-0.$$

Упражнение

Доказать, что функция $f(x)$ имеет предел в точке a тогда и только тогда, когда в этой точке существуют односторонние пределы функции f и выполняется равенство $f(a-0)=f(a+0)$.

1.3. Свойства пределов функций

В рассматриваемых ниже свойствах речь идет о конечном пределе функции в заданной точке. Под точкой понимается либо число a, либо один из символов $a-0$, $a+0$, $-\infty$, $+\infty$, ∞. Предполагается, что функция определена в некоторой окрестности или полу окрестности точки a, не содержащей саму точку a. Для определенности будем формулировать и доказывать свойства пределов, предполагая, что a - число, а функция определена в проколотой окрестности точки a.

А. Локальные свойства функции, имеющей предел. Покажем, что функция, имеющая конечный предел в заданной точке, обладает некоторыми **локальными** свойствами, т.е. свойствами, которые справедливы в окрестности этой точки.

Свойство 1. Если функция $f(x)$ имеет предел в точке a, то существует такая проколотая окрестность точки a, в которой эта функция ограничена.

Свойство 2. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, причем $b\neq 0$, то найдется такая проколотая окрестность точки a, в которой значения функции f имеют тот же знак, что и число b.

Определение. Это свойство **называют свойством сохранения знака предела.**

Свойство 3. Если $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, причем $c \neq 0$, то существует число $\delta > 0$ такое, что функция $\dfrac{1}{g(x)}$ ограничена на множестве $\overset{\bullet}{O}_\delta(a)$.

Б. Свойства пределов, связанные с неравенствами

Свойство 1. Если существует число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in \overset{\bullet}{O}_\delta(a)$ выполняются неравенства

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x), \tag{2}$$

и если

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = b, \tag{3}$$

то существует $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Свойство 2. Если существует число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in \overset{\bullet}{O}_\delta(a)$ справедливо неравенство $f(x) \leq g(x)$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, то $b \leq c$.

Замечание. Если исходное неравенство является строгим, т.е. $f(x) < g(x)$, то в случае существования пределов функций f и g в точке a можно утверждать только, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq \lim\limits_{x \to a} g(x)$, т.е. знак строгого неравенства между функциями при переходе к пределу, вообще говоря, не сохраняется.

Упражнение

Доказать, что если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$ причем $b < c$, то существует число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in \overset{\bullet}{O}_\delta(a)$ выполняется неравенство $f(x) < g(x)$.

В. Бесконечно малые функции

Если $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$, то функцию $\alpha(x)$ называют бесконечно малой при $x \to a$.

Бесконечно малые функции обладают следующими свойствами:

1) сумма конечного числа бесконечно малых при $x \to a$ функций есть бесконечно малая функция при $x \to a$;

2) произведение бесконечно малой при $x \to a$ функции на ограниченную в некоторой проколотой окрестности точки a функцию есть бесконечно малая при $x \to a$ функция.

Эти свойства легко доказать, используя определения бесконечно малой и ограниченной функции, либо с помощью определения предела функции по Гейне и свойств бесконечно малых последовательностей. Из второго свойства следует, что произведение конечного числа бесконечно малых при $x \to a$ функций есть бесконечно малая при $x \to a$ функция.

Замечание. Из определения предела функции и определения бесконечно малой функции следует, что число b является пределом функции $f(x)$ в точке a тогда и только тогда, когда эта функция представляется в виде

$$f(x) = b + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$ функция.

Упражнения

1. Показать, что функция $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ является бесконечно малой при $x \to 0$.

2. Пусть существует число $\delta > 0$ такое, что $\alpha(x) \neq 0$ для всех $x \in \dot{O}_\delta(a)$. Доказать, что функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x \to a$ тогда и только тогда, когда функция $\frac{1}{\alpha(x)}$ является бесконечно большой при $x \to a$, т. е. $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{\alpha(x)} = \infty$.

Г. Свойства пределов, связанные с арифметическими операциями

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы в точке a, причем $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, то

1) $\lim\limits_{x \to a} \big(f(x) + g(x) \big) = b + c$,

2) $\lim\limits_{x \to a} \big(f(x) \cdot g(x) \big) = b \cdot c$, (4)

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{b}{c}$ при условии, что $c\neq 0$.

Отметим частный случай утверждения (4):

$$\lim_{x\to a}\bigl(C\cdot f(x)\bigr)=C\cdot\lim_{x\to a}f(x),$$

т.е. постоянный множитель можно вынести за знак предела.

1.4. Пределы монотонных функций

Понятие монотонной функции было введено в § 17. Приведем теорему о существовании односторонних пределов у монотонной функции.

Теорема 2. Если функция f определена и является монотонной на отрезке $[a,\ \ b]$, то в каждой точке $x_0\in(a,\ \ b)$ эта функция имеет конечные пределы слева и справа, а в точках a и b, соответственно, правый и левый пределы.

Следствие. Если функция f определена и возрастает на отрезке $[a,\ \ b]$, $x_0\in(a,\ \ b)$, то $f(x_0-0)\le f(x_0)\le f(x_0+0)$.

Замечание. Теорема о пределе монотонной функции справедлива для любого конечного или бесконечного промежутков. При этом если f - возрастающая функция, не ограниченная сверху на $(a,\ \ b)$, то $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=+\infty$ (в случае, когда $a=+\infty$, пишут $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$), а если f - возрастающая и не ограниченная снизу на промежутке $(a,\ \ b)$ функция, то $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=-\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty\right)$.

1.5. Критерий Коши существования предела функции

Будем говорить, что функция $f(x)$ удовлетворяет в точке $x=a$ **условию Коши,** если она определена в некоторой проколотой окрестности точки a и

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0:\quad\forall x',x''\in\overset{\bullet}{O}_\delta(a)\Rightarrow\bigl|f(x')-f(x'')\bigr|<\varepsilon. \tag{5}$$

Теорема 3. Для того чтобы существовал конечный предел функции $f(x)$ в точке $x=a$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция удовлетворяла в точке a условию Коши (5).

Замечание. Теорема 3 остается в силе, если точку a заменить одним из символов $a-0$, $a+0$, $-\infty$, $+\infty$; при этом условие (5) должно выполняться в окрестности этого символа.

2. Вычисление пределов функций

2.1. Раскрытие неопределенностей

Определение. При вычислении пределов часто встречается случай, когда требуется найти $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, где f и g - бесконечно малые функции при $x\to a$, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$. В этом случае вычисление предела называют **«раскрытием неопределенности»** вида $\dfrac{0}{0}$.

Чтобы найти такой предел, обычно преобразуют дробь $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, выделяя в числителе и знаменателе множитель вида $(x-a)^k$. Например, если в некоторой окрестности точки $x=a$ функции f и g представляются в виде $f(x)=(x-a)^k f_1(x)$, $g(x)=(x-a)^k g_1(x)$, где $k\in\mathbf{N}$, а функции f_1 и g_1 непрерывны (понятие непрерывности рассмотрим чуть ниже) в точке a, то $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ при $x\neq a$, откуда следует, что $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f_1(a)}{g_1(a)}$, если $g_1(a)\neq 0$.

Аналогично, если f и g - бесконечно большие функции при $x\to a$, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, то говорят, что их частное $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ и разность $f(x)-g(x)$ представляют собой при $x\to a$ неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$ и $\infty-\infty$, соответственно. Для раскрытия неопределенности таких типов обычно преобразуют частное или разность так, чтобы к полученной функции были применены свойства пределов. Например, если f и g - многочлены степени m, т.е. $f(x)=\sum_{k=0}^{m} a_k x^k$, $g(x)=\sum_{k=0}^{m} b_k x^k$, где $a_k \neq 0$, $b_k \neq 0$, то разделив числитель и знаменатель дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ на x^m найдем, что

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a_m+a_{m-1}\frac{1}{x}+\dots+a_0\frac{1}{x^m}}{b_m+b_{m-1}\frac{1}{x}+\dots+b_0\frac{1}{x^m}}=\frac{a_m}{b_m}.$$

2.2. Замечательные и некоторые важные пределы

Теорема 11 (первый замечательный предел). Если $x\to 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Теорема 12 (второй замечательный предел). Функция $\phi(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ имеет при $x\to 0$ предел, равный e $(e=2,718...)$, т.е.

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Существуют некоторые важные пределы:

1) $\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1.$ 2) $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1.$ 3) $\lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1.$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$ 5) $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e.$ 6) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a.$

7) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$ 8) $\lim_{x\to 0}\frac{shx}{x}=1$, где $shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{e^{2x}-1}{2e^x}.$

9) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$ для любого $\alpha\in R^1$, $\alpha\neq 0$.

Доказательство некоторых из них приведем ниже:

2) Пусть $y=\arcsin x$, тогда $x=\sin y$ и поэтому

$$\frac{\arcsin x}{x}=\frac{y}{\sin y},$$

причем $\{x\to 0\}\Leftrightarrow\{y\to 0\}$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}.$$

Используя первый замечательный предел $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}$, получаем соотношение 2).

3) Если $y=arctgx,$ тогда $x=tgy$ и поэтому

$$\frac{\arcsin x}{x}=\frac{y}{\sin y},$$

причем $\{x\to 0\}\Leftrightarrow\{y\to 0\}$.

Так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{tgy},$$

где

$$\lim_{y\to 0}\frac{y}{tgy}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}\cdot\cos y=1,$$

то справедливо утверждение 3).

Упражнение

Остальные важные пределы доказать самостоятельно.

2.3. Сравнение функций

А. Эквивалентные функции

Определение. Если в некоторой проколотой окрестности* точки x_0 определены функции f, g, h такие, что

$$f(x)=g(x)\cdot h(x),\qquad \lim_{x\to x_0}h(x)=1, \tag{7}$$

то функции f и g называют **эквивалентными (асимптотически равными)** при $x\to x_0$ и пишут

$$f(x)\sim g(x)\ \text{ при }\ x\to x_0,$$

---

* В этом подпункте во избежание путаницы проколотую окрестность точки x_0 обозначим через $\dot U_\delta(x_0)$, т.е. $\dot U_\delta(x_0)\equiv \dot O_\delta\ (x_0)$.

или, короче, $f \sim g$ при $x \to x_0$.

Например, $\sin x \sim x$ при $x \to 0$, так как $\sin x = x \cdot \dfrac{\sin x}{x}$, а $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$;

$\dfrac{x^4}{x^2+1} \sim x^2$ при $x \to \infty$, так как $\dfrac{x^4}{x^2+1} = x^2\dfrac{x^2}{x^2+1}$, а $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}} = 1$.

Упражнения

1. Показать, что отношение эквивалентности функций обладает свойствами:

а) симметричности, т.е. если $f \sim g$ при $x \to x_0$, то $g \sim f$ при $x \to x_0$;

б) транзитивности, т.е. если $f \sim g$ и $g \sim \phi$ при $x \to x_0$, то $f \sim \phi$ при $x \to x_0$.

2. Показать, что если $f \sim g$ и $f_1 \sim g_1$ при $x \to x_0$, то $ff_1 \sim gg_1$ при $x \to x_0$.

Отметим, что функции f и g, не имеющих нули в проколотой окрестности точки x_0, эквивалентны при $x \to x_0$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)} = 1.$$

Понятие эквивалентности обычно используют в тех случаях, когда обе функции f и g являются либо бесконечно малыми, либо бесконечно большими при $x \to x_0$.

Некоторые замечательные и важные пределы, приведенные выше, позволяют составить следующую таблицу функций, эквивалентных при $x \to 0$:

$$\begin{array}{ll}
\sin x \sim x & e^x - 1 \sim x; \\
\operatorname{tg} x \sim x & \operatorname{sh} x \sim x; \\
\arcsin x \sim x & \ln(1+x) \sim x; \\
\operatorname{arctg} x \sim x & (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x.
\end{array}$$

Эти соотношения остаются в силе при $x \to x_0$, если заменить в них x на функцию $\alpha(x)$ такую, что $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$. Например,

$$\sin x^2 \sim x^2 \text{ при } x \to 0,$$

$$\mathrm{sh}\,(x-1)^3 \sim (x-1)^3 \text{ при } x \to 1.$$

Пример 10. Доказать, что

$$\text{а) } 1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}, \text{ при ; б) } ch\,x-1 \sim \frac{x^3}{2} \text{ при } x \to 0.$$

Решение

а) Пользуясь тем, что $1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ и $\sin\frac{x}{2} \sim \frac{x}{2}$ при $x \to 0$, получаем $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$ при $x \to 0$.

б) Так как $chx = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $ch\,x-1 = 2\,sh^2\frac{x}{2}$ и $sh\frac{x}{2} \sim \frac{x}{2}$ при $x \to 0$, то $ch\,x-1 \sim \frac{x^2}{2}$ при $x \to 0$.

Б. Замена функций эквивалентными при вычислении пределами

Теорема 13. Если $f \sim f_1$ и $g \sim g_1$ при $x \to x_0$, то из существования предела функции $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ при $x \to x_0$ следует существование предела функции $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to x_0$ и справедливость равенства

$$\lim_{x \to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

Пример 11. Найти $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\arcsin x \cdot (e^x-1)}{\cos x - \cos 3x}$.

Решение

Так как $\arcsin x \sim x$, $e^x - 1 \sim x$, $\cos x - \cos 3x = 2\sin x \sin 2x$, $\sin x \sim x$, $\sin 2x \sim 2x$, то $\arcsin x \cdot \left(e^x - 1\right) \sim x^2$, $\cos x - \cos 3x \sim 4x^2$ при $x \to 0$. Отсюда по теореме 5 следует, что искомый предел равен 1/4.

В заключении отметим, что в дальнейшем будут рассмотрены более эффективные методы вычисления пределов, основанные на использовании понятия производной.

3. Предел функции многих переменных

3.1. Предел функции многих переменных в точке

Определение. Пусть функция $f(X)$ в проколотой окрестности $\dot{O}_\delta(A)$ точки A пространства R^n. Говорят, что число b есть предел функции $f(X)$ при $X \to A$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ такое, что $\forall X \in \dot{O}_\delta(A)$ выполнено неравенство $\left| f(X) - b \right| < \varepsilon$.

Говорят, что функция $f(X)$, определенная в $\dot{O}_\delta(A)$, имеет при $X \to A$ предел b, если для любой последовательности $X_k \in \dot{O}_\delta(A)$ и такой, что $\lim\limits_{k\to\infty} X_k = A$ выполнено равенство $\lim\limits_{k\to\infty} f(X_k) = b$.

Эквивалентность двух определений предела доказывается так же, как и для функций одной переменной.

Если число b есть предел функции $f(X)$ при $X \to A$, то будем писать $b = \lim\limits_{X\to A} f(X)$.

Определение. Если функция двух переменных $f(x_1, x_2)$ определена в $\dot{O}_\delta(A(a_1, a_2))$, а число b есть ее предел при $(x_1, x_2) \to (a_1, a_2)$, то пишут

$$b = \lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2}} f(x_1, x_2)$$

и называют **иногда число b двойным пределом.**

Аналогично для функции n переменных наряду с обозначением $b=\lim\limits_{X\to A} f(X)$ будем использовать обозначение

$$b=\lim_{\substack{x_1\to a_1\\ x_2\to a_2\\ \dots\dots\dots\dots\\ x_n\to a_n}} f(x_1,x_2,\dots,x_n).$$

Лемма 1. Пусть функции $f(X)$ и $\phi(X)$ определены в $\dot{O}_\delta(A)$ и $|f(X)|\le\phi(X)$ в $\dot{O}_\delta(A)$. Если $\lim\limits_{X\to A}\phi(X)=0$, то и $\lim\limits_{X\to A} f(X)=0$.

Примеры

12. Доказать, что $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)^d=0$, если $d>0$.

Решение

Возьмем любое $\varepsilon>0$. Положим $\delta=\varepsilon^{\frac{1}{2d}}$. Пусть $(x,y)\in O_\delta(0,0)$, тогда

$$(x^2+y^2)^d<\delta^{2d}<\varepsilon,$$

т.е.

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)^d=0.$$

13. Показать, что $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{|x|^\alpha|y|^\beta}{(x^2+y^2)^\gamma}=0$, если $\alpha+\beta-2\gamma>0$.

Решение

Так как

$$|x|<\sqrt{x^2+y^2},\quad |y|<\sqrt{x^2+y^2},$$

то при $x^2+y^2>0$ имеем неравенства

$$0\le f(x,y)=\frac{|x|^\alpha|y|^\beta}{(x^2+y^2)^\gamma}\le\frac{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}(x^2+y^2)^{\frac{\beta}{2}}}{(x^2+y^2)^\gamma}=(x^2+y^2)^{\frac{\alpha+\beta-2\gamma}{2}}=\phi(x,y).$$

В силу примера 12 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\phi(x,y)=$, так как $\alpha+\beta-2\gamma>0$. Применяя лемму 1, получаем, что

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)=0.$$

14. Функция $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ не имеет предела при $(x,y)\to(0,0)$.

Решение

Рассмотрим последовательность точек $X_k\left(\dfrac{1}{k},\ \dfrac{1}{k}\right)$, $k=1,2,....$ Тогда $f(x_k,y_k)=1$ и, следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k,y_k)=1$. Если же взять последовательность точек $X'_k\left(\dfrac{1}{k},\ -\dfrac{1}{k}\right)$, $k=1,2,....$, то $\lim\limits_{k\to\infty} f(x'_k,y'_k)=-1$. Так как при любом $k\in\mathbf{N}$ точки (x_k,y_k) и (x'_k,y'_k) не совпадают с точкой $(0,0)$, а последовательности точек (x_k,y_k) и (x'_k,y'_k) сходятся к точке $(0,0)$, то, используя второе определение предела, получаем, что функция $f(x,y)$ не имеет предела при $(x,y)\to(0,0)$.

15. Функция $f(x,y)=\dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$ не имеет предела при $(x,y)\to(0,0)$.

Решение

Повторяя рассуждения примера 3, построим две последовательности точек $X_k\left(\dfrac{1}{k},\ \dfrac{1}{k}\right)$, $k=1,2,....$ и $X'_k\left(\dfrac{1}{k},\ \dfrac{1}{k^2}\right)$, $k=1,2,.....$ Так как $(x_k,y_k)\to(0,0)$ и $(x'_k,y'_k)\to(0,0)$, а $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k,y_k)=0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} f(x'_k,y'_k)=1$, то двойной предел функции $f(x,y)=\dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$ при $(x,y)\to(0,0)$ не существует.

Определение. Пусть функция двух переменных $f(x,y)$ определена в проколотой окрестности $\overset{\bullet}{O}_\delta((x_0,y_0))$. Пределом функции $f(x,y)$ в точке (x_0,y_0) **по направлению** $l=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ будем называть выражение

$$\lim_{t\to+0} f(x_0+t\cos\alpha,\ \ y_0+t\sin\alpha)=\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ (x,y)\in\overset{\bullet}{O}_\delta(x_0,y_0)\cap L}} f(x,y),$$

где L есть луч, выходящий из точки (x_0,y_0) в направлении l.

16. Показать, что предел функции $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ в точке (0,0) по любому направлению $l=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ существует и равен $\sin 2\alpha$.

Решение

Так как при $t>0$ выполнено равенство

$$f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha,$$

то

$$\lim_{t\to+0} f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha.$$

17. Показать, что предел функции $f(x,y)=\dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$ в точке (0,0) по любому направлению $l=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ существует и равен нулю.

Решение

При $t>0$ справедливо равенство

$$f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=\frac{2t\sin\alpha\cos^2\alpha}{t^2\cos^4\alpha+\sin^2\alpha}.$$

Если $\sin\alpha=0$, то $f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=0$ и, следовательно, $\lim\limits_{t\to+0} f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=0$. Если $\sin\alpha\neq 0$, то

$$\lim_{t\to+0} f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=0.$$

Ясно, что из существования $\lim\limits_{X\to A,\ X\in \mathrm{M}} f(X)$ следует существование $\lim\limits_{X\to A,\ X\in \mathrm{M}'} f(X)$ для любого подмножества $\mathrm{M}'\subset\mathrm{M}$, для которого A есть предельная точка. В частности, из существования двойного предела функции $f(x,y)$ при $(x,y)\to(x_0,y_0)$ следует существование предела функции $f(x,y)$ в точке (x_0,y_0) по любому направлению и равенство этих пределов двойному пределу функции $f(x,y)$ при $(x,y)\to(x_0,y_0)$.

Из результатов примеров 15 и 17 следует, что из существования и равенства пределов по любому направлению в точке (x_0,y_0) не вытекает существование в этой точке предела функции.

Предел функции $f(X)$ в точке $X_0 \in R^n$ по направлению $l=(l_1, l_2, ..., l_n)$, где $l_1^2 + l_2^{2\cdot} + \cdots + l_n^2 = 1$, определяется по аналогии со случаем функции двух переменных.

Упражнение

Пусть выполнены следующие условия:

а) множества $\mathsf{M}_i \subset R^n,\ \ i-1,2,...,N$;

б) X_0 есть предельная точка каждого из множеств $\mathsf{M}_i,\ \ i-1,2,...,N$;

в) функция $f(X)$ определена на множестве $\mathsf{M} = \bigcup\limits_{i=1}^{N} \mathsf{M}_i$.

Доказать, что $b = \lim\limits_{X \to A,\ X \in \mathsf{M}} f(X)$ в том и только в том случае, когда $b = \lim\limits_{X \to A,\ X \in \mathsf{M}_i} f(X), \quad i = 1, 2, ..., N$.

Упражнение

Показать, что результат упражнения 1 не допускает обобщения на тот случай, когда множество M есть объединение бесконечного множества множеств $\bigcup\limits_{\alpha} \mathsf{M}_\alpha$.

Указание. Проанализируйте еще раз результат примеров 15 и 17.

3.2. Повторные пределы

Определение. Пусть функция двух переменных $f(x,y)$ определена на множестве

$$\Pi = \{(x,y): \quad 0 < |x - x_0| < a, \quad 0 < |y - y_0| < b\}.$$

Допустим, что $\forall x \in (x_0 - a,\ x_0 + a), \quad x \neq x_0$, существует $\lim\limits_{y \to y_0} f(x,y) = g(x)$, а функция $g(x)$ определена в проколотой окрестности точки x_0. Если существует

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x,y),$$

то этот предел называется **повторным.** Аналогично определяется другой повторный предел $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$.

Как показывают простые примеры, из существования двойного предела не следует существование повторных пределов, а из существования и равенства повторных пределов не следует существование двойного предела.

Примеры

18. Для функции $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ примера 14 двойной предел при $(x,y)\to(0,0)$ не существует, но оба повторных предела равны нулю, так как

$$\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0} f(x,y)=0.$$

19. Для функции

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}, & \textit{если} \quad y\neq 0,\\ 0, & \textit{если} \quad y=0\end{cases}$$

справедливо неравенство $|f(x,y)|\le|x|$. В силу леммы 1 двойной предел этой функции при $(x,y)\to(0,0)$ равен нулю. Но при $x\neq 0$ не существует

$$\lim_{y\to 0} x\sin\frac{1}{y},$$

а поэтому не существует и соответствующий повторный предел.

Упражнение

Пусть функция $f(x,y)$ определена в проколотой окрестности точки (x_0,y_0) и существует двойной предел функции $f(x,y)$ при $(x,y)\to(x_0,y_0)$. Доказать, что, в том случае, когда в проколотой окрестности точки y_0 определена функция $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$, будет существовать и повторный предел $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$, причем он равен двойному пределу.

Бесконечные пределы для функций многих переменных определяются по той же схеме, что и для функций одной переменной. Например, $\lim\limits_{X\to A} f(X) = +\infty$, если для любого действительного числа C найдется такое действительное число $\delta > 0$, такое, что $\forall X \in \dot{O}_\delta(A)$ выполнено неравенство $f(X) > C$.

Пример 20. Показать, что

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} (x^2+y^2)e^{-(x+y)} = 0.$$

Решение

Так как при $x > 0, \quad y > 0$ справедливо неравенство

$$0 \le (x^2+y^2)e^{-(x+y)} \le (x+y)^2 e^{-(x+y)}$$

и $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 e^{-t} = 0$, то $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ такое, что $\forall t > \delta$ выполнено неравенство $t^2 e^{-t} < \varepsilon$. Но тогда $\forall x > \dfrac{\delta}{2}$ и $\forall y > \dfrac{\delta}{2}$ справедливо неравенство

$$0 \le (x^2+y^2)e^{-(x+y)} < \varepsilon.$$

Вопросы для самопроверки

1. Что называется проколотой δ - окрестностью точки a?

2. Дайте определение предела по Коши и по Гейне. Разъясните эквивалентность двух определений предела – сформулируйте теорему и докажите ее.

3. Что называется частичным пределом функции в точке? Приведите пример функции, который не имеет предела, но имеет частичные пределы.

4. Когда число b называется пределом по Коши функции $f(x)$ в точке a по множеству В и как его обозначают?

5. Что называется пределом слева (справа) функции в точке? Что называется односторонними пределами? Приведите примеры.

6. Сформулируйте необходимое и достаточное условие существования предела, связанное с существованием односторонних пределов функции.

7. Приведите локальные свойства функции, имеющий предел. Что называют свойством сохранения знака предела?

8. Приведите свойства пределов, связанные с неравенствами.

9. Какую функцию называют бесконечно малой? Какими свойствами обладают бесконечно малые функции?

10. Приведите свойства пределов, связанные с арифметическими операциями.

11. Сформулируйте теорему о существовании односторонних пределов у монотонной функции. Приведите следствие этой теоремы.

12. Когда говорят, что функция удовлетворяет в точке условию Коши?

13. Приведите критерий Коши существования предела функции.

14. В каком случае вычисление предела называют «раскрытием неопределенности» вида $\frac{0}{0}$? Что делают в этом случае для раскрытия неопределенности?

15. В каком случае говорят, что их частное и разность двух функций представляют собой неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$ и $\infty-\infty$, соответственно? Что делают обычно для раскрытия неопределенностей таких типов?

16. Когда две функции называют эквивалентными (асимптотически равными)? Как это обозначается?

17. Какими свойствами обладает отношение эквивалентности функций?

18. Приведите необходимое и достаточное условие эквивалентности двух функций?

19. В каких случаях обычно используют понятие эквивалентности?

20. Как производится замена функций эквивалентными функциями при вычислении пределов? Сформулируйте теорему.

21. Дайте определение предела функции многих переменных по Коши и по Гейне. Разъясните эквивалентность двух определений предела.

22. Что называют двойным пределом?

23. Что называется пределом функции в точке по направлению?

24. Из существования $\lim\limits_{X\to A,\ X\in \mathrm{M}} f(X)$ следует ли существование $\lim\limits_{X\to A,\ X\in \mathrm{M}'} f(X)$ для любого подмножества $\mathrm{M}'\subset \mathrm{M}$, для которого A есть предельная точка?

25. Следует ли из существования двойного предела функции $f(x,y)$ при $(x,y)\to(x_0,y_0)$ существование предела функции $f(x,y)$ в точке (x_0,y_0) по любому направлению и равенство этих пределов двойному пределу функции $f(x,y)$ при $(x,y)\to(x_0,y_0)$?

26. Вытекает ли из существования и равенства пределов по любому направлению в точке (x_0,y_0) существование в этой точке предела функции?

27. Что называют повторным пределом?

28. Приведите простые примеры, которые показывают, что из существования двойного предела не следует существование повторных пределов, а из существования и равенства повторных пределов не следует существование двойного предела.

§23. Непрерывность функций

Ключевые слова: *непрерывность функции одной переменной, точка разрыва первого рода, скачок функции в точке, точка устранимого разрыва, до определение функции по непрерывности в точке, точка разрыва второго рода, локальные свойства непрерывной функции, ограниченность непрерывной на отрезке функции, достижимость наименьшего и наибольшего значений, промежуточные значения, непрерывность сложной функции, свойства функций непрерывных на компакте.*

1. Непрерывность функции одной переменной

1.1. Понятие непрерывности функции

Определение. Функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки a называется **непрерывной в точке** a, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a). \tag{6}$$

Таким образом, функция f непрерывна в точке a, если выполнены следующие условия:

а) функция f определена в некоторой окрестности точки a, т.е. существует число $\delta_0 > 0$ такое, что $O_{\delta_0}(a) \subset D(f)$;

б) существует $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$;

в) $b = f(a)$.

Определение непрерывности функции $f(x)$ в точке a, выраженное условием (6), можно сформулировать с помощью неравенств (на языке $\varepsilon - \delta$), с помощью окрестностей и в терминах последовательностей, соответственно, в виде

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall x: \ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall x \in O_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(f(a)),$$

$$\forall \{x_k\}: \ \lim_{k\to\infty} x_k = a \Rightarrow \lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(a).$$

Подчеркнем, что в определении непрерывности, в отличие от определения предела, рассматривается полная, а не проколотая окрестность точки a, и пределом функции является значение этой функции в точке a.

Назовем разность $x-a$ **приращением аргумента** и обозначим Δx, а разность $f(x)-f(a)$ - приращением функции, соответствующим данному приращению аргумента Δx, и обозначим Δy. Таким образом,

$$\Delta x = x-a, \quad \Delta y = f(x)-f(a) = f(a+\Delta x)-f(a).$$

При этих обозначениях равенство (1) примет вид

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0.$$

Таким образом, непрерывность функции в точке означает, что бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Пример 5. Доказать, что функция $f(x)$ непрерывна в точке a, если:

$a)\quad f(x)=x^3,\ a=1;\qquad b)\quad f(x)=\dfrac{1}{x^2},\ a\neq 0;$

$c)\quad f(x)=\sqrt{x},\ a>0;\qquad d)\quad f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & \text{если}\quad x\neq 0,\\ 0 & \text{если}\quad x=0,\end{cases}\qquad a=0.$

Решение

$a)$ Если $x\to 1$, то по свойствам пределов получаем $x^3\to 1$, т.е. для функции $f(x)=x^3$ в точке $x=1$ выполняется условие (1). Поэтому функция $f(x)=x^3$ непрерывна в точке $x=1$.

$b)$ Если $x\to a$, где $a\neq 0$, то, используя свойства пределов, получаем

$$\frac{1}{x}\to\frac{1}{a},\qquad \frac{1}{x^2}\to\frac{1}{a^2},$$

т.е. функция $f(x)=\dfrac{1}{a^2}$ непрерывна в точке $x=a\quad (a\neq 0)$.

$c)$ Так как

$$\sqrt{x}-\sqrt{a}=\frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}},$$

то отсюда при $x>0$ получаем

$$0\le\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right|<\frac{|x-a|}{\sqrt{a}}.$$

Следовательно, $\sqrt{x}-\sqrt{a}\to 0$ при $x\to a$, если $a>0$. Это означает, что функция $f(x)=\sqrt{x}$ непрерывна в точке a, где $a>0$.

d) Функция f определена на R^1 и при любом $x\in R^1$ выполняется неравенство

$$0\le\left|f(x)-f(0)\right|=\left|f(x)\right|\le|x|,$$

так как $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le 1$ при $x\ne 0$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$, т.е. функция f непрерывна в точке $x=0$.

По аналогии с понятием предела слева (справа) вводится понятие непрерывности слева (справа). Если функция f определена на полуинтервале $(a-\delta,\ a]$ и $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=f(a)$, т.е. $f(a-0)=f(a)$, то эту функцию называют **непрерывной слева в точке** a**.**

Аналогично, если функция f определена на полуинтервале $[a,\ a+\delta)$ и $f(a+0)=f(a)$, то эту функцию называют **непрерывной справа в точке** a**.**

Пример 6. Функция $y=E(x)$, где $E(x)=[x]$ - целая часть числа x (наибольшее целое число, не превосходящее x) непрерывна справа в точке $x=1$ и не является непрерывной слева в этой точке (рис. 4), так как $f(1-0)=0$, $f(1+0)=f(1)=1$. Стрелка на графике указывает на то, что точка в ее острие не принадлежит графику.

Очевидно, функция непрерывна в данной точке тогда и только тогда, когда она непрерывна как справа, так и слева в этой точке.

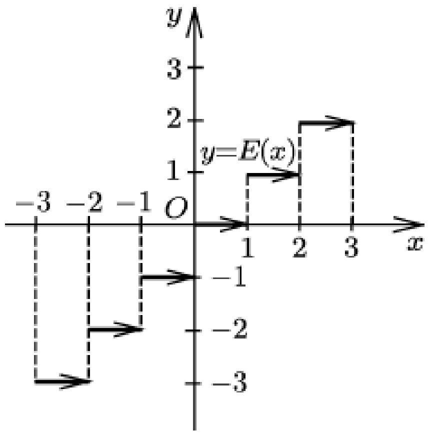


Рис. 4

1.2. Точки разрыва

В этом пункте будем предполагать, что функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки a.

Определение. Точку a **назовем точкой разрыва функции** f**,** если эта функция либо не определена в точке a, либо определена, но не является непрерывной в точке a.

Следовательно, a - точка разрыва функции f, если не выполняется, по крайней мере, одно из следующих условий:

а) $a \in D(f)$;

б) существует конечный $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$;

в) $b = f(a)$.

Если a - точка разрыва функции f, причем в этой точке существуют конечные пределы слева и справа, т.е. $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a-0)$ и $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a+0)$, то **точку** a **называют точкой разрыва первого рода.**

Замечание. Если $x = a$ - точка разрыва первого рода функции $f(x)$, то разность $f(a+0) - f(a-0)$ называют **скачком функции в точке** a. В случае, когда $f(a+0) = f(a-0)$, точку a называют **точкой устранимого разрыва.** Полагая $f(a) = f(a+0) = f(a-0) = b$, получим функцию

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если} \quad x \neq a, \\ b, & \text{если} \quad x = a, \end{cases}$$

непрерывную в точке a и совпадающую с $f(x)$ при $x \neq a$. В этом случае говорят, что **функция доопределена по непрерывности в точке** a**.**

Определение. Пусть $x=a$ - точка разрыва функции f, не являющаяся точкой разрыва первого рода. Тогда ее называют **точкой разрыва второго рода функции f.**

В такой точке хотя бы один из односторонних пределов либо не существует, либо бесконечен.

Пример 7. Для функции $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ точка $x=0$ - точка разрыва первого рода. Доопределив эту функцию по непрерывности, получим функцию

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \textit{если} \quad x\neq 0, \\ 0 & \textit{если} \quad x=0, \end{cases}$$

непрерывную в точке $x=0$, так как $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$.

Для функций $\sin\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x^2}$ точка $x=0$ - точка разрыва второго рода.

Теорема 4. Если функция f определена на отрезке $[a,b]$ и монотонна, то она может иметь внутри этого отрезка точки разрыва только первого рода.

1.3. Свойства функций, непрерывных в точке

А. Локальные свойства непрерывной функции

Свойство 1. Если функция f непрерывна в точке a, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки, т.е.

$$\exists\delta>0 \quad \exists C>0: \quad \forall x\in O_\delta(a) \ \Rightarrow \ |f(x)|\leq C.$$

Свойство 2. Если функция f непрерывна в точке a, причем $f(a)\neq 0$, то в некоторой окрестности точки a знак функции совпадает со знаком числа $f(a)$, т.е. $\exists\delta>0: \ \forall x\in O_\delta(a) \ \Rightarrow \ sign f(x)=sign f(a)$.

Б. Непрерывность суммы, произведения и частного

Если функции f и g непрерывны в точке a, то функции $f+g$, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$ (при условии $g(a)\neq 0$) непрерывны в точке a.

В. Непрерывность сложной функции

Теорема 5. Если функция $z=f(y)$ непрерывна в точке y_0, функция $y=\phi(x)$ непрерывна в точке x_0, причем $y_0=\phi(x_0)$, то в некоторой окрестности точки x_0 определена сложная функция $f(\phi(x))$ и эта функция непрерывна в точке x_0.

Упражнение

Сформулировать определение непрерывности с помощью последовательностей (по Гейне) и доказать, исходя из этого определения, теорему 5.

1.4. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Определение. Функцию $f(x)$ называют непрерывной на отрезке $[a,b]$, если она непрерывна в каждой точке интервала (a,b) и, кроме того, непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b.

А. Ограниченность непрерывной на отрезке функции

Теорема 6 (Вейерштрасса). Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она ограничена, т.е.

$$\exists C>0: \quad \forall x\in[a,b]) \;\Rightarrow\; |f(x)|\leq C.$$

Замечание. Теорема 5 неверна для промежутков, не являющихся отрезками.

Примеры

8. Функция $f(x)=\frac{1}{x}$ непрерывна на интервале $(0,\ 1)$, но не ограничена на этом интервале.

9. Функция $f(x)=x^2$ непрерывна на R^1, но не ограничена на R^1.

Б. Достижимость наименьшего и наибольшего значений

Теорема 7 (Вейерштрасса). Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает своего m наименьшего значения и M наибольшего значения.

Замечание. Теорема 6 неверна для интервалов.

В. Промежуточные значения

Теорема 8 (теорема Коши о нулях непрерывной функции). Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$ и принимает в его концах значения разных знаков, т.е. $f(a)\cdot f(b)<0$, то на отрезке $[a,b]$ имеется хотя бы один нуль функции f, т.е.

$$\exists c\in[a,b]: \quad f(c)=0.$$

Замечание. Теорема 7 утверждает, что график функции $y=f(x)$, непрерывной на отрезке $[a,b]$ и принимающей в его концах значения разных знаков, пересекает ось Ox (рис. 5) хотя бы в одной точке отрезка $[a,b]$.

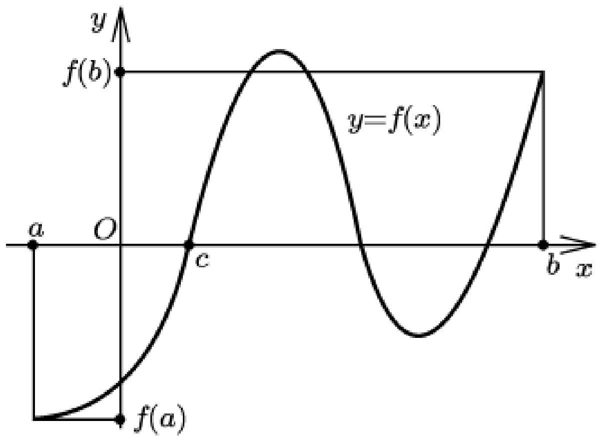


Рис. 5

Теорема 9 (теорема Коши о промежуточных значениях). Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $f(a)\neq f(b)$, то для каждого значения c, заключенного между $f(a)$ и $f(b)$, найдется точка $\xi\in[a,b]$ такая, что $f(\xi)=c$.

Из приведенной теоремы и теоремы 6 вытекает такое утверждение.

Следствие. Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, а m и M ее наименьшее и наибольшее значения на этом отрезке, то областью значений функции является отрезок $[m,M]$.

Г. Существование и непрерывность функции, обратной для непрерывной и строго монотонной функции

Понятие обратной функции было введено в §21. Докажем теорему о существовании и непрерывности обратной функции.

Теорема 10. Если функция $y=f(x)$ непрерывна и строго возрастает на отрезке $[a,b]$, то на отрезке $[f(a),f(b)]$ определена функция $x=g(y)$, обратная к f, непрерывная и строго возрастающая.

Доказательство. Существование и монотонность обратной функции $x=g(y)$ следует из теорем 5 и 6.

Непрерывность обратной функции доказывается с привлечением теоремы о пределах монотонной функции.

Замечание. Если функция f непрерывна и строго убывает на отрезке $[a,b]$, то обратная к ней функция g непрерывна и строго убывает на отрезке $[f(a),f(b)]$.

Замечание. Аналогично формулируется и доказывается теорема о функции g, обратной к функции f для случаев, когда функция f задана на интервале (конечном либо бесконечном) и полуинтервале.

Если функция f определена, строго возрастает и непрерывна на интервале (a,b), то обратная функция g определена, строго возрастает и непрерывна на интервале (r,s), где

$$r=\lim_{x\to a+0} f(x), \qquad s=\lim_{x\to b-0} f(x).$$

1.5. Непрерывность элементарных функции

а) Многочлены и рациональные функции. Рассмотрим многочлен степени k, т.е. функцию вида

$$P_k(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Эта функция непрерывна на R^1.

Действительно, функция $y = c$, где c - постоянная, непрерывна на R^1, так как $\Delta y = 0$ при любом x. Функция $y = x$ непрерывна на R^1, так как $\Delta y = \Delta x \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Поэтому функция $y = a_i x^i$, где $i \in \mathbf{N}$, непрерывна на R^1 как произведение непрерывных функций. Так как многочлен $P_k(x)$ есть сумма непрерывных функций вида $y = a_i x^i$, $\quad (i = 1, 2, ..., k)$, то он непрерывен на R^1.

Рациональная функция, т.е. функция вида $f(x) = \dfrac{P_k(x)}{Q_l(x)}$, где $P_k(x)$, $Q_l(x)$ - многочлены степени k и l, соответственно, непрерывна во всех точках, которые не являются нулями многочлена $Q_l(x)$.

В самом деле, если $Q_l(x_0) \neq 0$, то из непрерывности многочленов P_k, Q_l следует непрерывность функции f в точке x_0.

б) Можно доказать, что не только многочлены и рациональные функции, но и *все основные элементарные функции непрерывны в каждой точке области определения.*

Ниже будет доказано, что

функция $f(x) = \sin x$ непрерывна при любом $x \in R^1$.

Доказательство. Возьмем произвольную точку $x \in R^1$ и приращение Δx. Найдем, что $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)$, откуда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0}\left(2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right) = 0.$$

Аналогично доказываются непрерывность других элементарных функций.

2. Непрерывность функции многих переменных

2.1. Непрерывность функции в точке

Определение. Говорят, что функция $f(X)$, определенная в окрестности точки A пространства R^n, **непрерывна в точке** A, если $\lim\limits_{X \to A} f(X) = f(A)$.

Определение. Говорят, что функция $f(X)$, определенная в окрестности точки $A \in R^n$, **непрерывна в точке** A, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $O_\delta(A)$, что для любого $X \in O_\delta(A)$ выполняется неравенство $\left| f(X) - f(A) \right| < \varepsilon$.

Эквивалентность двух определений следует из определения предела на языке окрестностей.

Пример 21. Функция

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{\textit{если}} \quad x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & \text{\textit{если}} \quad x = y = 0 \end{cases}$$

непрерывна в точке $(0,0)$ по любому лучу, но не является непрерывной в точке $(0,0)$.

Решение

Из результата примера 15 следует, что функция $f(x,y)$ не имеет предела при $(x,y) \to (0,0)$ и, следовательно, не является непрерывной в точке $(0,0)$. Из результата примера 17 следует, что в точке $(0,0)$ предел функции $f(x,y)$ по любому направлению существует и равен нулю. Следовательно, функция $f(x,y)$ непрерывна в точке $(0,0)$ по любому направлению.

Основные теоремы о свойствах непрерывных в некоторой точке функций (например, теорема о непрерывности суммы непрерывных функций) доказываются для функций многих переменных так же, как и для функции одной переменной. Ниже будет без доказательства приведена теорема, что суперпозиция непрерывных функций есть непрерывная функция.

2.2. Непрерывность сложной функции

Теорема 15. Пусть функции $\phi_1(X),...,\phi_n(X)$ определены в некоторой окрестности точки $X_0 \in R^m$ и непрерывны в точке X_0. Функция $f(Y) = f(y_1,..., y_n)$ определена в окрестности точки $Y_0 = \left(\phi_1(X_0),...,\phi_n(X_0)\right)$ и непрерывна в точке Y_0. Тогда в некоторой окрестности точки X_0 определена сложная функция

$$\Phi(X) = f\left(\phi_1(X),...,\phi_n(X)\right),$$

причем функция $\Phi(X)$ непрерывна в точке X_0.

2.3. Свойства функций, непрерывных на компакте

Определение. Функция $f(X)$ называется непрерывной на множестве M, если она непрерывна в каждой точке множества M по этому множеству, т.е. если в каждой предельной точке множества X_0 выполнено условие

$$\lim_{X \to X_0,\ X \in \mathrm{M}} f(X) = f(A).$$

Доказательства следующих двух теорем о свойствах функций, непрерывных на компакте пространства R^n, практически не отличаются от соответствующих доказательств для функций одной переменной, непрерывных на отрезке.

Теорема 16 (Вейерштрасса). Функция $f(X)$, непрерывная на компакте пространства R^n, ограничена на этом компакте.

Теорема 17 (Вейерштрасса). Функция $f(X)$, непрерывная на компакте пространства R^n, принимает на этом компакте свои наибольшее и наименьшее значения.

Вопросы для самопроверки

1. Когда функция называется непрерывной в точке? Какая (полная или проколотая) окрестность точки рассматривается в определении непрерывности?

2. Что означает непрерывность функции в точке в терминах приращения аргумента и приращения функции?

3. Сформулируйте определение непрерывности функции в точке с помощью последовательностей (по Гейне)?

4. Когда функцию называют непрерывной слева (справа) в точке? Приведите примеры.

5. Сформулируйте необходимое и достаточное условие непрерывности точки.

6. Что называется точкой разрыва функции?

7. Какую точку называют точкой разрыва первого рода? Что называют скачком функции в точке?

8. В каком случае точку называют точкой устранимого разрыва? Когда говорят, что функция доопределена по непрерывности в точке?

9. Какую точку называют точкой разрыва второго рода?

10. Когда функция может иметь точки разрыва только первого порядка? Приведите теорему.

11. Приведите локальные свойства непрерывной функции? Откуда следуют эти свойства?

12. Приведите свойства непрерывности функций связанные арифметическими операциями.

13. Что можно сказать о непрерывности в точке сложной функции? Приведите теорему.

14. Когда функция называется непрерывной на отрезке? Приведите свойства функций непрерывных на отрезках (теоремы Вейерштрасса об

ограниченности функции и достижимости наименьшего и наибольшего значений).

15. Приведите и прокомментируйте теорему о нулях непрерывной функции.

16. Приведите и прокомментируйте теорему Коши о нулях непрерывной функции.

17. Приведите и прокомментируйте теорему Коши о промежуточных значениях. Приведите следствие из этой теоремы, связанное с областью значений функции.

18. Приведите теорему о существовании и непрерывности функции, обратной для непрерывной и строго монотонной функции.

19. Покажите непрерывность некоторых элементарных функций.

20. Дайте определение непрерывности функции многих переменных в точке.

21. Дайте определение непрерывности функции (многих переменных) в точке по множеству.

22. Имеют ли место основные теоремы о свойствах непрерывных в некоторой точке функций одной переменной для функции многих переменных?

23. Когда функция (многих переменных) называется непрерывной на множестве? Приведите свойства функций непрерывных на компакте (теоремы Вейерштрасса об ограниченности функции и достижимости наименьшего и наибольшего значений).

§24. Производная и дифференциал функции одной переменной

Ключевые слова: *производная, предельные (маржинальные) величины, эластичность функции (относительная производная), дифференцируемость функции, дифференциал функции.*

1. Определение производной

Определение. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и пусть существует конечный предел отношения

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

при $\Delta x \to 0$. Этот предел тогда называется **производной функции** $f\left(x\right)$ **в точке** x_0 и обозначается $f'(x_0)$, $f'_x(x_0)$, $y'_x(x_0)$ или $y'(x_0)$, т.е.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Согласно определению производная функции $f(x)$ в точке x_0 есть предел отношения приращения функции $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ к приращению аргумента Δx при условии, что $\Delta x \to 0$, т.е.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (2)$$

Определение. Если в некотрой точке x_0

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty \quad \left(+\infty,\ -\infty\right)$$

и функции $f(x)$ непрерывен в точке x_0, то говорят о наличии у функции в точке x_0 **«бесконечной производной»** $f'\left(x_0\right) = \infty$ $\left(+\infty,\ -\infty\right)$.

В случае, когда $f'(x_0) = +\infty$ и $f'(x_0) = -\infty$ говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 бесконечную производную (иногда добавляют: *определенного знака*).

Примеры

1. Функция $f\left(x\right)=x^2$ имеет конечную производную в каждой точке $x\in R^1$. Действительно, при любом $x\in R^1$ имеем

$$f'\left(X\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(x+\Delta x\right)-x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\cdot\left(\Delta x\right)+\left(\Delta x\right)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(2x+\Delta x\right)=2x.$$

2. Функция $f\left(x\right)=\sqrt[3]{x}$ имеет в точке $x_0=0$ бесконечную производную. Действительно,

$$f'\left(0\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{0+\Delta x}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}=+\infty.$$

Покажем теперь случай, когда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\infty$, но не выполняется ни одно из условий $f'(x_0)=+\infty$ и $f'(x_0)=-\infty$. В этом случае говорят, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ *не является бесконечностью определенного знака.* Это имеет место, если

$$\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=+\infty,\ \text{а}\ \lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\infty.$$

3. Этим свойством обладает функция $f(x)=\sqrt{|x|}$ (рис. 1) в точке $x_0=0$, так как $f'_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to +0}\dfrac{\sqrt{|\Delta x|}}{\Delta x}=+\infty$, а $f'_-(0)=\lim\limits_{\Delta x\to -0}\dfrac{\sqrt{|\Delta x|}}{\Delta x}=-\infty$.

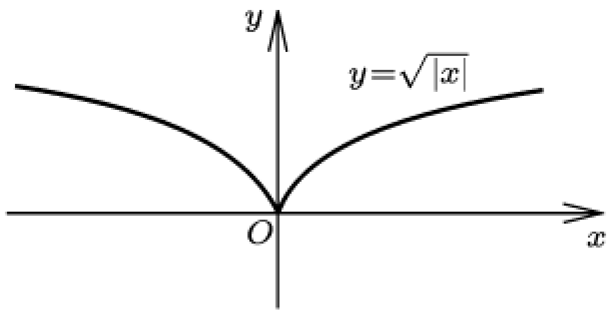


Рис. 1

Определение. Конечные или бесконечные пределы

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\quad \text{и}\quad f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Называют, соответственно, **левой и правой производными** функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Теорема 1. Функция $f(x)$ в точке x_0 имеет производную $f'(x_0)$ тогда и только тогда, когда односторонние производные $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$ существуют и совпадают, т.е.

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0).$$

Пример 4. Функции $f(x) = |x|$ не имеет производной в точке $x_0 = 0$, хотя в этой точке существуют конечные односторонние производные. Действительно, поскольку $\Delta y = |\Delta x|$ и поэтому

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1, \qquad f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

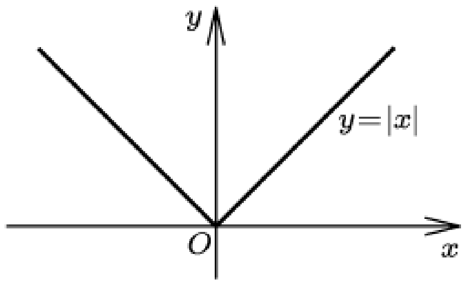


Рис. 2

Замечание. Так как $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$ для функции $f(x) = |x|$, то непрерывная в точке $x_0 = 0$ функция $y = |x|$ не имеет производной в этой точке. Этот пример показывает, что из непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 не следует существование ее производной в данной точке.

Упражнение. Показать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\dfrac{1}{x}, & \text{\textit{если}} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{\textit{если}} \quad x = 0, \end{cases}$$

не имеет односторонних производных при $x_0 = 0$.

Теорема 2. Функция $y = f(x)$, имеющая производную в точке x_0, непрерывна в этой точке.

Доказательство. Из равенства (4) следует, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) = \varepsilon(\Delta x), \tag{3}$$

где $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. А из (3) получаем

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \Delta x \varepsilon(\Delta x). \tag{4}$$

Если $\Delta x \to 0$, то правая часть равенства (4) стремится к нулю, и поэтому $\Delta y \to 0$. Следовательно, функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Операция вычисления производной функции **называется дифференцированием.**

Ниже вычислим производные некоторых элементарных функций.

Пример 5. Доказать, что функции $y = C$, $y = x^n$ $(n \in \mathbf{N})$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = a^x$ имеют производные в каждой точке $x \in R^1$, и найти эти производные.

Решение

а) Если $y = C$, C - постоянная, то $\Delta y = C - C = 0$ и поэтому $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$, т.е.

$$C' = 0. \tag{5}$$

б) Если $y = x^n$, где $n \in \mathbf{N}$, то

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n =$$

$$= x^n + C_n^1 x^{n-1}(\Delta x) + C_n^2 x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + C_n^{n-1} x(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n - x^n =$$

$$= C_n^1 x^{n-1}(\Delta x) + C_n^2 x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + C_n^{n-1} x(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n,$$

откуда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = C_n^1 x^{n-1} = nx^{n-1}$, т.е.

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}, \qquad n \in \mathbf{N}. \tag{6}$$

в) Если $y = \sin x$, то $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$, откуда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$. Так как $\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \to \cos x$ при $\Delta x \to 0$ в силу непрерывности функции $\cos x$, а $\frac{\sin t}{t} \to 1$ при $t \to 0$. Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x$, т.е.

$$(\sin x)' = \cos x. \tag{7}$$

г) Если $y = \cos x$, то $\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$, откуда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin x$, т.е.

$$(\cos x)' = -\sin x. \tag{8}$$

д) Если $y = a^x$, то $\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$, откуда $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to a^x \ln a$ при $\Delta x \to 0$, так как $\frac{a^t - 1}{t} \to \ln a$ при $t \to 0$ в силу непрерывности функции $\cos x$, а $\frac{\sin t}{t} \to 1$ при $t \to 0$.

Таким образом, если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x$, т.е. $a > 0$, $a \neq 1$, то

$$\left(a^x\right)' = a^x \ln a. \tag{9}$$

Из формулы (9) при $a = e$ получаем

$$e' = e^x. \tag{10}$$

Замечание. Согласно формуле (10) производная показательной функции с основанием e совпадает с самой функцией. Этим объясняется тот факт, что в математическом анализе и его приложениях в качестве основания степени и основания логарифмов обычно используют число e.

Пример 6. Найти производную функции $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$)

Решение

Если $y = \log_a x$, то

$$\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a(x) = \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right), \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} \cdot \frac{1}{x},$$

откуда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{1}{x\ln a}$, так как $\dfrac{\log_a(1+t)}{t}\to\log_a e=\dfrac{1}{\ln a}$ при $t\to 0$.

Итак, если $a>0$, $a\neq 1$, $x>0$, то

$$\left(\log_a x\right)'=\frac{1}{x\ln a}. \tag{11}$$

Из формулы (11) при $a=e$ получаем

$$\left(\ln x\right)'=\frac{1}{x}. \tag{12}$$

Теорема 3. Функция $y=f(x)$, имеющая производную в точке x_0, непрерывна в этой точке.

Доказательство. Из равенства (4) следует, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x_0)=\varepsilon(\Delta x), \tag{13}$$

где $\varepsilon(\Delta x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$. А из (13) получаем

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\Delta x\varepsilon(\Delta x). \tag{14}$$

Если $\Delta x\to 0$, то правая часть равенства (14) стремится к нулю, и поэтому $\Delta y\to 0$. Следовательно, функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0.

2. Экономический смысл производной

Экономический смысл производной поясним на примерах.

2.1. Предельные величины в экономике

Издержки производства K однородной продукции есть функция количества продукции x. Поэтому можно записать:

$$K=K(x).$$

Предположим, что количество продукции увеличивается на Δx. Продукции $x+\Delta x$ соответствуют издержки производства продукции

$$K(x+\Delta x).$$

Следовательно, приращению количества продукции Δx соответствует приращение издержек производства продукции

$$\Delta K=K(x+\Delta x)-K(x).$$

Среднее приращение издержек производства есть

$$\frac{\Delta K}{\Delta x}.$$

Это есть приращение издержек производства на единицу приращения количества продукции.

Определение. Предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x} = K'(x) \qquad (*)$$

называется **предельными издержками производства.**

Аналогично, если мы обозначим через $U(x)$ выручку от продажи x единиц товара.

Определение. Предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} = U'(x) \qquad (**)$$

мы будем называть **предельной выручкой.**

Пример 7. Издержки производства K зависят от объема продукции x по формуле

$$K = 100x - \frac{1}{30}x^3.$$

Определить предельные издержки, если объем производства составляет: а) 5 единиц; б) 10 единиц продукции.

Решение. Имеем:

$$K' = 100 - \frac{1}{10}x^2,$$

откуда

$$K'(5) = 100 - \frac{1}{10}5^2 = 97{,}5; \quad K'(10) = 100 - \frac{1}{10}10^2 = 90.$$

Это означает, что при объеме производства в 5 единиц продукции издержки по изготовлению следующей (шестой) единицы продукции составят 97,5; при объеме производства в 10 единиц они составят 90.

Пример 8. Функция цен спроса на какой-либо товар определяется формулой

$$p = 10 - 2x,$$

где x - спрос, p - цена.

Выручка от продажи товара есть

$$u = x(10 - 2x) = 10x - 2x^2,$$

откуда $u' = 10 - 4x^2$. Если, например, $x = 2$, то $u'(2) = 2$. Это означает, что если спрос возрастет с 2 до 3 единиц, то выручка возрастет приблизительно на 2 единицы.

Упражнения

1. Зависимость между издержками продукции y и объемом выпускаемой продукции x на предприятии выражается функцией $y = 10x + 50$. Определить предельные издержки при объеме продукции $x = 100$ единиц.

2. Зависимость издержек производства одного из предприятий от объема выпускаемой продукции x выражается формулой

$$y(x) = 40x - 0{,}03x^3.$$

Определить средние и предельные издержки при объеме продукции $x = 15$ ден. ед.

Как видно, *предельная величина характеризует не состояние (как суммарная или средняя величины), а процесс, изменение экономического объекта.*

Таким образом, ***предельная величина выступает как скорость изменения некоторого экономического объекта (процесса).***

Теоретический анализ разнообразных явлений экономики использует ряд других предельных величин кроме, вышерассмотренных. Перечислим некоторые из них: **предельная стоимость, предельный доход, предельная производительность, предельная полезность, предельная склонность к потреблению.** Все эти величины самым тесным образом связаны с понятием производной.

В экономической теории предельные (маржинальные) величины $y'(x)$ принято обозначать через $\mathrm{M}y(x)$. Буква М первая буква английского слова **marginal «маржинальный»** (переводится на русский язык словом предельный»).

Определение предельных величин с помощью понятия производной позволяет использовать математический аппарат для доказательства экономических законов.

Рассмотрим некоторые применения дифференциального исчисления в экономической теории.

Пусть x количество реализованного товара, $R(x)$- функция дохода, $C(x)$ - функция издержек (затрат на производство товара). Вид этих функций зависит от способа производства, оптимизации инфраструктуры и т.п. Обозначим функцию прибыли через $\Pi(x)$. Тогда

$$\Pi(x)=R(x)-C(x).$$

Очевидно, оптимальным уровнем производства является тот, при котором прибыль максимальна, т.е. такое значение выпуска x, при котором функция $\Pi(x)$ имеет максимум. По теореме Ферма в этой точке

$$\Pi'(x)=0.$$

Но $\Pi'(x)=R'(x)-C'(x)$. Поэтому $R'(x)=C'(x)$, т.е. если уровень выпуска x является оптимальным для производителя, то $\mathrm{M}R(x)=\mathrm{M}C(x)$, где $\mathrm{M}R(x)$- предельный доход, а $\mathrm{M}C(x)$ - предельные издержки.

Получили известное в микроэкономике утверждение:

Для того чтобы прибыль была максимальной необходимо, чтобы предельный доход и предельные издержки были равны.

Использование в конце XIX в. предельных (маржинальных) величин полностью изменило способы анализа и предмет экономической теории. Экономисты для вывода экономических законов стали охотно прибегать к математическим доказательствам. Произошедшие в результате этого изменения были столь значительны, что их впоследствии назвали ***маржиналистской революцией***.

Упражнения

1. Объем продаж видеомагнитофонов задается следующей функцией времени:

$$V(t)=5000+1000t-100t^2,$$

где t - время, измеряемое в месяцах, V - количество видеомагнитофонов, проданных за месяц.

Найти скорость изменения объема продаж в момент времени:

а) $t=0$; б) $t=3$; в) $t=6$.

2. Население некоторой страны растет по следующему закону:

$$P(t)=100000(1+t^2),$$

где время t - измеряется в годах. Найти скорость изменения населения в момент времени:

а) $t=0$; б) $t=2$; в) $t=5$.

3. Эпидемия медленно распространяется среди населения. Число, заболевших определяется формулой

$$A(t)=200\left(t^{\frac{5}{2}}+t^2\right),$$

где t - число недель, прошедших с момента начала эпидемии.

Найти скорость изменения числа, заболевших в момент времени:

а) $t=1$; б) $t=4$; в) $t=9$.

4. Предположим, что издержки получения питьевой воды заданы формулой

$$C=\frac{1000}{p}-100,$$

где p - процентное содержание загрязняющих воду примесей.

Найти скорость изменения издержек производства, если примеси составляют 5%.

2.2. Эластичность функции (относительная производная)

Как уже заметили с помощью производной можно вычислить приращение зависимой переменной, соответствующее приращению независимой переменной. Во многих задачах, особенно экономических, удобнее вычислить процент прироста (относительное приращение) зависимой переменной, соответствующее проценту прироста независимой переменной. Это приводит нас к понятию **эластичности функции (иногда ее называют относительной производной).**

Понятие эластичности было введено Альфредом Маршаллом в связи с анализом функции спроса. Впоследствии это понятие было распространено и на другие функции.

Пусть дана функция $y = f(x)$. Предположим, что приращение независимой переменной x есть Δx.

Определение. *Эластичностью функции* $y = f(x)$ называется следующий предел

$$E_X(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right). \qquad (***)$$

Говорят также, что $E_X(y)$ - это *коэффициент эластичноти* y по x.

Из определения эластичности вытекает, что при достаточно малых Δx выполняется приближенное равенство

$$E_X(y) \approx \left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Замечание. Эластичность $E_X(y)$ - это коэффициент пропорциональности между относительными изменениями величин y по x. Если, например, x увеличится на один процент, то у увеличится (приближенно) на $E_X(y)$ процентов.

Теоретический и практический интерес представляют производственные функции с постоянной (отличной от единицы) эластичностью замещения труда производственными фондами и с постоянной (переменной) отдачей на единицу масштаба производства.

Примерно такого рода функцией является функция ***CES (Constant Elasticity of Substitution)***

$$y = C_0\left[CL^{-p} + \left(1-C\right)K^{p}\right]^{-1/p},$$

для которой эластичность замещения равна $\dfrac{1}{1-p} \neq 1$; p, C_0 и C - постоянные.

Примеры

9. Правильное применение знаний о коэффициентах эластичности спроса на товары помогает правительству в оценке последствий введения новых налогов или акцизов.

Пусть x акцизы на некоторое импортное ювелирное изделие, y - спрос на этот товар. Предположим, что государство предполагает повысить акцизы на это изделие на 10%. Если известно, что эластичность спроса составляет $E_X\left(y\right) = -0,2$, то следует ожидать, что это вызовет снижение спроса на данный товар на $0{,}2 \cdot 10$ = 2 (%) и доходы государства по продаже импортного ювелирного изделия повысятся на 8%.

10. Изучение эластичности важно и для оценки изменения ситуации на рынке товаров и услуг в результате повышения доходов населения. Известно, что для мяса, масла и яиц эластичность спроса относительно доходов населения положительна, а для муки - отрицательна. Это означает, что с ростом дохода спрос на мясо, масло и яйца увеличивается, а на муку - понижается. Обратно, понижение доходов населения приводит к понижению закупок мяса, яиц, масла и увеличению закупок муки. Связано это с тем, что снижение доходов влечет за собой и уменьшение возможности покупки дорогостоящих продуктов. Вместо этих продуктов, например, мяса, население покупает более дешевый продукт, т.е. муку или хлеб.

11. Пусть заданы функции спроса y и предложения (количества товаров предлагаемого в единицу времени) z от цены x:

$$y = 10 - x, \qquad z = 3x - 6.$$

Найти:

а) цену равновесия, при которой спрос и предложение уравновешиваются;

б) эластичность спроса и предложения для цены равновесия.

Решение

а) Цена равновесия находится из условия $y(x)=z(x)$, или $10-x=3x-6$, откуда $x=4$;

б) эластичность спроса $E_X(y)$ и предложения $E_X(z)$ находим по формуле (***). Имеем

$$y=10-x;$$

$$\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)=10-(x+\Delta x)-(10-x)=-\Delta x;$$

$$\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}=\frac{-\Delta x}{10-x}:\frac{\Delta x}{x}=-\frac{x}{10-x},$$

откуда

$$E_X(y)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(-\frac{x}{10-x}\right)=-\frac{x}{10-x}.$$

Аналогично имеем

$$z=3x-6;$$

$$\Delta z=z(x+\Delta x)-z(x)=3x+3\Delta x-6-(3x-6)=3\Delta x;$$

$$\frac{\Delta y}{z}:\frac{\Delta x}{x}=\frac{3\Delta x}{3x-6}:\frac{\Delta x}{x}=\frac{3x}{3x-6},$$

следовательно

$$E_X(z)=\frac{x}{x-2}.$$

Таким образом, при $x=4$ получаем

$$E_X(y)=-\frac{4}{10-4}=-\frac{2}{3},\quad E_X(z)=\frac{4}{4-2}=2.$$

Это означает, что при цене равновесия между спросом и предложением увеличение цены на 1% влечет уменьшение спроса на (2/3)% и возрастание предложения на 2%.

Замечание. Коэффициент эластичности широко используют в исследованиях потребительского спроса на товары в зависимости от цен этих товаров или доходов потребителей. Высокий коэффициент эластичности означает слабую степень удовлетворения потребности; низкий указывает на то, что данная потребность высока.

Упражнения

1. Найти эластичность функции спроса:

а) $p+5x=100$ в точке $p = 50$;

б) $3p+4x=120$ в точках $p = 15$ и $p = 20$;

в) $p^2+p+4x=40$ в точках $p = 2$ и $p = 4$.

Как увеличение цены повлияет на выручку? При каких значениях p спрос является эластичным?

2. Найти эластичность функции спроса $xp = 5$ в точке $p = 10$. Как увеличение цены повлияет на выручку? Какой это тип эластичности?

3. Для следующих функций спроса найти значения p при которых спрос является эластичным:

а) $2p+3x=12$;

б) $x=50(10-\sqrt{p})$;

в) $p=ax+b \quad (a<0, b>0)$.

4. Функция спроса имеет вид $p=\sqrt{3600-x^2}$.

а) Найти эластичность спроса в точке $p = 50$.

б) Посчитать приближенно процентное изменение спроса, если цена выросла на 11%.

5. Уравнение спроса имеет вид $p=20-0{,}1\sqrt{x}$.

а) Найти эластичность спроса в точке $p = 18$.

б) Вычислить приближенно процентное изменение спроса, если цена уменьшилась на 2%.

6. Уравнение спроса имеет вид $p = 100\sqrt{4 - p}$. Найти эластичность и выяснить, как повлияет увеличение цены на выручку, если спрос составляет:

а) 150 единиц;

б) 50 единиц.

7. Уравнение спроса имеет вид $(p+1)\sqrt{x+1} = 100$. Найти эластичность и выяснить, как повлияет увеличение цены на выручку, если спрос составляет:

а) 24 единицы;

б) 15 единиц.

8. Для следующих функций спроса и предложения найти значение налога на единицу товара, максимизирующее доход государства:

а) $\begin{array}{l} p = -3x + 124, \\ p = 2x + 14; \end{array}$ б) $\begin{array}{l} p = 250 - 2x^2, \\ p = 700 + 3x. \end{array}$

9. Найти значение налога, максимизирующее доход государства, если функции спроса и предложения имеют вид:

а) $\begin{array}{l} p = 800 - 0,5x, \\ p = 700 + 2x; \end{array}$ б) $\begin{array}{l} p = 8200 - 5x^2, \\ p = 700 + 20x^2. \end{array}$

3. Дифференцируемость и дифференциал функции

Определение. Если функция $y = f(x)$ определена в δ - окрестности точки x_0, а приращение Δy функции $y = f(x)$ в точке x_0 представимо в виде

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \varepsilon(\Delta x), \tag{15}$$

где $A = A(x_0)$ не зависит от Δx, а $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, то функция f называется **дифференцируемой в точке** x_0, а произведение $A \cdot \Delta x$ называется **ее дифференциалом в точке** x_0 и обозначается $df(x_0)$ или dy. Таким образом,

$$\Delta y = dy + o(\Delta x), \qquad \text{при} \quad \Delta x \to 0, \tag{16}$$

где

$$dy = A \cdot \Delta x. \tag{17}$$

Отметим, что приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ можно рассматривать только для таких Δx, при которых точка $x_0 + \Delta x$ принадлежит области определения функции f, в то время как дифференциал dy определен при любых Δx.

Пример 9. Функция $y = x^2$ дифференцируема при любом x, так как $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot (\Delta x) + (\Delta x)^2 = 2x \cdot (\Delta x) + o(\Delta x)$. При этом $dy = 2x\,dx$.

Теорема 4. Для того чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируемой в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы эта функция имела производную в точке x_0. При этом дифференциал и производная связаны равенством

$$dy = f'(x_0) \cdot \Delta x. \tag{18}$$

Доказательство. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то выполняется условие (15), и поэтому $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A + \varepsilon(\Delta x)$, где $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $(\Delta x \neq 0)$, откуда следует, что существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A$, т.е. существует $f'(x_0) = A$.

Обратно, если существует $f'(x_0)$, то справедливо равенство (14), и поэтому выполняется условие (15). Это означает, что функция f дифференцируема в точке $x = x_0$, причем коэффициент A в формулах (15) к (17) равен $f'(x_0)$, и поэтому дифференциал записывается в виде (18).

Таким образом, существование производной функции в данной точке равносильно дифференцируемости функции в этой точке.

Определение. Функцию, имеющую производную в каждой точке интервала (a,b), называют д**ифференцируемой на интервале** (a,b).

Если функция f дифференцируема на интервале (a,b) и, кроме того, существуют $f'_+(a)$, и $f'_-(b)$, то функцию f **называют дифференцируемой на отрезке** $[a,b]$.

Замечание. Если $f'(x_0)\neq 0$, то из равенств (20) и (22) следует, что $dy\neq 0$ при $\Delta x\neq 0$ и

$$\Delta y \sim dy, \qquad \text{при} \quad \Delta x\to 0.$$

В этом случае говорят, что дифференциал есть **главная линейная часть приращения функции,** так как дифференциал есть линейная функция от Δx и отличается от Δy на бесконечно малую более высокого порядка, чем Δx.

Замечание. Приращение Δx часто обозначают символом dx и называют **дифференциалом независимого переменного.** Поэтому формулу (18) записывают в виде

$$dy = f'(x_0)dx. \tag{19}$$

По формуле (19) можно найти дифференциал функции, зная ее производную.

Например, $d\sin x=\cos x dx$, $de^x=e^x dx$.

Из формулы (19) получаем

$$f'(x_0)=\frac{dy}{dx}. \tag{20}$$

Согласно формуле (20) производную можно рассматривать как отношение дифференциала функции к дифференциалу независимого переменного.

Замечание. Отбрасывая в формуле (15) член $\beta=\Delta x\cdot\varepsilon(\Delta x)$, т.е. заменяя приращение функции ее дифференциалом, получаем приближенное равенство $\Delta y\approx f'(x_0)\Delta x$ или

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x. \tag{21}$$

Формулу (21) можно использовать для вычисления приближенного значения $f(x_0+\Delta x)$ при малых Δx, если известны значения $f(x_0)$ и $f'(x_0)$.

Пример 10. Найти с помощью формулы (21) приближенное значение функции $y=\sqrt[4]{x}$ при $x=90$.

Решение. Полагая в формуле (21) $f(x)=\sqrt[4]{x}$, $x_0=81$, $\Delta x=9$ и учитывая, что $f(x_0)=\sqrt[4]{81}=3$, $f'(x)=\dfrac{1}{4\cdot\sqrt[4]{x^3}}$, $f'(x_0)=\dfrac{1}{4\cdot 3^3}$ поручаем

$\sqrt[4]{90}\approx 3+\dfrac{1}{12}$, т.е. $\sqrt[4]{90}\approx 3{,}083$.

4. Геометрический смысл производной и дифференциала

Определение. ***Касательной к графику*** функции $y=f(x)$ в точке $M(x_0;f(x_0))$ называют предельное положение секущей MN при произвольном стремлении точки N к точке M по графику функции (или, что то же самое, при $dx\to 0$) (рис. 3).

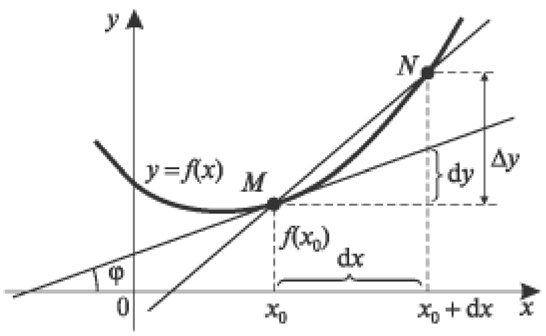


Рис. 3

Значение производной $f'(x_0)$ в точке x_0 определяется *угловым коэффициентом касательной*, проведенной к графику функции $f(x)$ в точке $M(x_0;f(x_0))$, т.е. $f'(x_0)=tg\phi$, где ϕ- угол между положительным направлением оси Ox и касательной, отсчитываемый против часовой стрелки (см. рис. 3).

Уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $M(x_0;f(x_0))$ имеет вид

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Если $f'(x_0) = \infty$ $(-\infty, +\infty)$, то касательная к графику непрерывной функции $f(x)$ в точке $M(x_0; f(x_0))$ перпендикулярна оси Ox (вертикальная касательная).

Уравнение такой касательной имеет вид $x = x_0$.

Величина дифференциала dy в точке x_0 равна *приращению ординаты касательной* к графику $f(x)$ в точке $M(x_0; f(x_0))$ при переходе от точки x_0 к точке $(x_0 + dx)$ (см. рис. 3).

Примеры

11. Написать уравнение касательно к графику функции $f(x) = \sqrt{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = 4$.

Решение

Имеем

$$f(x_0) = \sqrt{4} = 2, \qquad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, уравнение касательной имеет вид $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4)$ или $y = \frac{1}{4}x + 1$ (рис. 4).

12. Касательная графику функции $y = \sqrt[3]{x}$ в точке $O(0,0)$ будет вертикальной, так как данная функция непрерывна при $x = 0$, а $f'(0) = +\infty$ (рис.5).

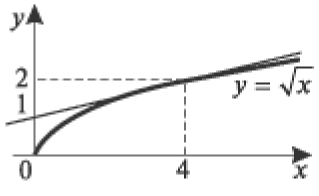


Рис. 4

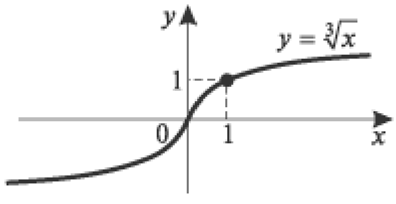


Рис. 5

5. Правила вычисления производных и дифференциалов

5.1. Дифференцирование суммы, произведения и частного

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемые в точке x и пусть k - постоянная. Тогда:

1. $\left[f(x) \pm g(x)\right]' = f'(x) \pm g'(x)$;

$d\left[f(x) \pm g(x)\right] = df(x) \pm dg(x)$.

2. $\left[kf(x)\right]' = kf'(x)$;

$d\left[kf(x)\right] = k\,df(x)$.

3. $\left[f(x)g(x)\right]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;

$d\left(f(x)g(x)\right) = df(x)g(x) + f(x)dg(x)$.

4. $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$;

$d\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{df(x)g(x) - f(x)dg(x)}{g^2(x)}\ \left(g(x) \neq 0\right)$.

Дадим теперь сводку формул для производных элементарных функций.

1) $(C)' = 0,\ \ C = const.$

2) $\left(x^\alpha\right)' = \alpha x^{\alpha-1},\ \ \alpha \in R^1,\ \ x > 0,\qquad \left(x^n\right)' = nx^{n-1},\ \ n \in N,\ \ x \in R^1.$

3) $\left(a^x\right)' = \alpha^x \ln a,\ \ \alpha > 0,\ \ a \neq 1,\ \ x \in R^1,\quad \left(e^x\right)' = e^x,\ \ x \in R.^1$

4) $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x\ln a},\ \ a > 0,\ \ a \neq 1,\ \ x > 0.$

$\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x\ln a},\ \ a > 0,\ \ a \neq 1,\ \ x \neq 0.$

$\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x},\ \ x > 0.$

$\left(\ln|x|\right)' = \dfrac{1}{x},\ \ x \neq 0.$

5) $\left(\sin x\right)' = \cos x,\ \ x \in R^1.$

6) $(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in R^1.$

7) $(tg\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z.$

8) $(ctg\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq \pi n, \quad n \in Z.$

9) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1.$

10) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1.$

11) $(arctg\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad x \in R^1.$

12) $(arcctg\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}, \quad x \in R^1.$

13) $(sh\, x)' = ch \quad x, \quad x \in R^1.$

14) $(ch\, x)' = sh \quad x, \quad x \in R^1.$

15) $(th\, x)' = \dfrac{1}{ch^2 x}, \quad x \in R^1.$

16) $(cth\, x)' = -\dfrac{1}{sh^2 x}, \quad x \neq 0.$

Примеры

13. Вычислить производную функцию $y = \dfrac{e^x + 4x^3}{\ln x}$.

Решение

Применения правила и сводку производных, имеем

$$y' = \frac{\left(e^x + 4x^3\right)' \ln x - \left(e^x + 4x^3\right)(\ln x)'}{\ln^2 x} = \frac{\left(e^x + 12x^2\right)\ln x - \dfrac{e^x + 4x^3}{x}}{\ln^2 x}.$$

14. Для функции $y = a^x arctg\, x$ ее производная

$$y' = \left(a^x\right)' arctg\, x + a^x \left(arctg\, x\right)' = a^x \cdot \ln a \cdot arctg\, x + \frac{a^x}{1+x^2}.$$

5.2. Дифференцирование сложной функции

Если функция $u = g(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $y = f(u)$ дифференцируема в соответствующей точке $u_0 = g(x_0)$, то *сложная функция* $y = \Phi(x) = f(g(x))$ также дифференцируема в точке x_0, причем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}, \quad \text{или } \Phi'(x_0) = f'(u_0) g'(x_0).$$

Справедливо равенство

$$dy = \Phi'(x_0) dx = f'(u_0) du,$$

где $du = g'(x_0) dx$, т.е. дифференциал равен произведению производной по некоторой переменной на дифференциал этой переменной независимо от того, является ли эта переменная независимой или функцией другой переменной **(инвариантность формы первого дифференциала).**

Примеры

15. Производная функции $y = 3^{\cos^5 2x}$ равна

$$y' = 3^{\cos^5 2x} \ln 3 \left(\cos^5 2x\right)' = 3^{\cos^5 2x} \ln 3 \cdot 5 \cos^4 2x \left(\cos 2x\right)' =$$
$$5 \ln 3 \cdot 3^{\cos^5 2x} \cos^4 2x \left(-\sin 2x\right)\left(2x\right)' = -10 \ln 3 \cdot \sin 2x \cos^4 2x \cdot 3^{\cos^5 2x}.$$

16. Дифференциал функция $y = tg^4 6x$ равен

$$dy = 4tg^3 6x d\left(tg\, 6x\right) = 4tg^3 6x \frac{1}{\cos^2 6x} d\left(6x\right) = \frac{24 tg^3 6x}{\cos^2 6x} dx = \frac{24 \sin^3 6x}{\cos^5 6x} dx.$$

17**.** Вычислить производную функции $y = \ln \sqrt[4]{\dfrac{1+x^2}{1-x}}, \quad (x < 1).$

Решение

Предварительно преобразуем эту функцию к виду

$$y = \frac{1}{4} \ln\left(1 + x^2\right) - \frac{1}{4} \ln\left(1 - x\right).$$

Тогда

$$y' = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x}{1+x^2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{-1}{1-x} = \frac{2x+1-x^2}{4(1-x)(1+x^2)}.$$

5.3. Логарифмическое дифференцирование

Прием логарифмического дифференцирования используется в том случае, когда функция имеет вид, удобный для логарифмирования, и сводится к следующей схеме:

а) заменяют функцию y на функцию $|y|$;

б) логарифмируют выражение $|y|$;

в) находят производную от $\ln|y| \left((\ln|y|)' = y'/y \right)$;

г) находят y'.

Примеры

18. Для функции $y = (\cos x)^{\sin x}$, $(\cos > 0)$ имеем $|y| = y$ и, следовательно,

$$\ln y = \sin x \ln(\cos x).$$

Тогда $\dfrac{y'}{y} = \cos x \ln(\cos x) + \sin x \dfrac{-\sin x}{\cos x}$, откуда

$$y' = (\cos x)^{\sin x} \left[\cos x \ln(\cos x) - \frac{\sin^2 x}{\cos x} \right].$$

19. Для функции $y = \sqrt[5]{\dfrac{\sin 5x}{1-\sin 5x}}$ имеем

$$\ln|y| = \frac{1}{5}\ln|\sin 5x| - \frac{1}{5}\ln|1-\sin 5x|.$$

Тогда $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{\cos 5x}{\sin 5x} \cdot 5 - \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{-5\cos 5x}{1-\sin 5x} = \dfrac{ctg\, 5x}{1-\sin 5x}$, откуда

$$y' = \sqrt[5]{\frac{\sin 5x}{1-\sin 5x}} \cdot \frac{ctg\, 5x}{1-\sin 5x}.$$

Упражнения

1. Найти производную показательно-степенной функции $z = u(x)^{v(x)}$, где $u,\ v$ - функции, дифференцируемые в точке x, причем $u(x) > 0$.

2. Найти $f'(x)$, $g'(x)$, если:

а) $f(x) = x^x$; *б*) $g(x) = x^{x^x}$.

3. Пусть функция f дифференцируема на интервале $(-a,\ a)$. Доказать, что если $f(x)$ - четная функция, то ее производная $f'(x)$ - нечетная функция, а если $f(x)$ - нечетная функция, то $f'(x)$ - четная.

6. Производные и дифференциалы высших порядков

Если у функции $f(x)$ определена производная $y^{(n-1)}$ порядка $(n-1)$, ***производную*** $y^{(n)}$ ***порядка*** n (при условии ее существования) определяют как производную от производной порядка $(n-1)$, т.е. $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$.

В частности, $y'' = (y')'$ - производная второго порядка, $y''' = (y'')'$ - производная третьего порядка и т.д. Другие обозначения производных высших порядков: $\dfrac{d^n y}{dx^n}$, y^{IV}, y''_{xx}, $f^{(n)}(x)$.

При вычислении производных высших порядков используют те же правила, что и для вычисления y'. Например, если $y = e^{x^2}$, то

$$y' = e^{x^2} \cdot 2x,$$

$$y'' = \left(e^{x^2}\right)' \cdot 2x + e^{x^2}(2x)' = e^{x^2} \cdot 2x \cdot 2x + e^{x^2} \cdot 2 = 2e^{x^2}\left(2x^2 + 1\right).$$

Дифференциалы высших порядков функции $y = f(u)$ последовательно определяют таким образом:

$d^2 y = d(dy)$ - дифференциал второго порядка,

$d^3y = d\left(d^2y\right)$ - дифференциал третьего порядка, … .

Вообще, $d^ny = d\left(d^{n-1}y\right)$ - дифференциал n - го порядка.

При этом если $y = f(u)$ и u независимая переменная или линейная функция $u = kx + b$ переменной x, то

$$d^2y = y''(du)^2;\ d^3y = y'''(du)^3; \dots;\ d^ny = y^{(n)}(du)^n.$$

Если же $y = f(u)$, где $u = g(x) \neq kx + b$, то $d^2y = f''(u)(du)^2 + f'(u)d^2u$ и т.д. **(свойство инвариантности формы не выполняется).** Например, для функции $y = 3u^5 - 4u^2 + 7$ ее первый дифференциал

$$dy = \left(15u^4 - 6u\right)du$$

независимо от того, является ли u независимой переменной или функцией другой переменной. В то же время дифференциал второго порядка будет равен:

$d^2y = \left(60u^3 - 8\right)(du)^2$, если u - независимая переменная;

$d^2y = \left(60u^3 - 8\right)(du)^2 + \left(15u^4 - 8u\right)d^2u$, если u - функция другой переменной.

6.1. Производная обратной функции

Если дифференцируемая функция $y = f(x), (a < x < b)$ имеет непрерывную обратную функцию $x - y(u)$ и $y'_x \neq 0$, то существует *производная обратной функции* x'_y и имеет место равенство

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Дифференцируя последнее равенство по y и, предполагая существование y''_{xx}, найдем

$$x''_{yy} = -\frac{y''_{xx}}{\left(y'_x\right)^2} x'_y = -\frac{y''_{xx}}{\left(y'_x\right)^3}.$$

При соответствующих предположениях аналогично можно определить производные любого порядка обратной функции.

Например, для функции $y = a^x \left(a > 0,\ a \neq 1,\ y > 0\right)$ обратной является функция $x = \log_a y$. Ее производная

$$x'_y = \left(\log_a y\right)' = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{\left(a^x\right)'_x} = \frac{1}{a^x \ln a} = \frac{1}{y \ln a}.$$

Кроме того, так как $y''_{xx} = a^x \left(\ln a\right)^2$, то

$$x''_{yy} = -\frac{a^x \left(\ln a\right)^2}{\left(a^x \ln a\right)^3} = -\frac{1}{y^2 \ln a}.$$

6.2. Производная параметрически заданной функции

Рассмотрим функцию $y = f\left(x\right)$. Систему соотношений $x = \phi\left(t\right)$, $y = \psi\left(t\right)$, где $\alpha < t < \beta$, называют *параметрическим представлением функции* $y = f\left(x\right)$, если $\psi\left(t\right) - f\left(\left(\phi\left(t\right)\right)\right)$ для всех $t \in \left]\alpha, \beta\right[$. Переменная t называется в этом случае *параметром*.

Если функция $\phi\left(t\right)$ и $\psi\left(t\right)$ - дифференцируемые и $\phi'\left(t\right) \neq 0$, то существует производная y'_x параметрически заданной функции и

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'\left(t\right)}{\phi'\left(t\right)}.$$

Если, кроме того, существуют y''_{tt} и x''_{tt}, то

$$y''_{xx} = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)_t t'_x = \frac{y''_{tt} x'_t - y'_t x''_{tt}}{\left(x'_t\right)^3}.$$

При соответствующих предположениях аналогично можно определить производные любого порядка параметрически заданной функции.

Например, если функция $y = f(x)$задана параметрически соотношениями $x = a\cos^3 t,\ y = b\sin^3 t\ (-\infty < t < \infty)$, где a и b - положительные постоянные, то $y'_t = 3b\sin^2 t\cos t,\ x'_t = -3a\cos^2 t\sin t$. При $t \neq \pi k/2\left(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\right)$ производная $x'_t \neq 0$. Следовательно, при этих значениях t получаем

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{3b\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t\sin t} = -\frac{b}{a}tg\,t.$$

Далее,

$$y''_{xx} = \left(-\frac{b}{a}tg\,t\right)'_x = \left(-\frac{b}{a}tg\,t\right)'_x t'_x = -\frac{b}{a\cos^2 t}\cdot\frac{1}{x'_t} = \frac{b}{3a^2\cos^4 t\sin t}.$$

6.3. Производная неявно заданной функции

Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$, то дифференцируя тождество $F(x, f(x)) \equiv 0$ по x (как сложную функцию), можно определить $f'(x)$. Дифференцируя выражения $f'(x)$ по x, можно определить $f''(x)$ и т.д.

Например, если функция $y = f(x)$ задана неявно уравнением

$$arctg\,y - y + x = 0,$$

то, дифференцируя по x тождество

$$arctg\,f(x) = f(x) + x = 0,$$

найдем

$$\frac{f'(x)}{1+y^2} - f'(x) + 1 = 0,$$

откуда

$$y' = f'(x) = 1 + y^{-2}.$$

Дифференцируя по x последнее равенство, получаем

$$y'' = f''(x) = 2y^{-3}y' = \frac{2\left(1+y^2\right)}{y^5}.$$

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение производной функции в заданной точке? Как она обозначается?

2. Когда говорят, что функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 бесконечную производную?

3. В каком случае говорят, что функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 бесконечную производную определенного знака?

4. Как вводятся понятия левой и правой производных? Что называют левой (правой) производной функции f в точке x_0 и как ее обозначают?

5. Что называется дифференцированием функции?

6. Верна ли обратная теорема к следующей теореме: Функция $y = f(x)$, имеющая производную в точке x_0, непрерывна в этой точке.

7. Что означает предельные величины в экономике?

8. Что называется предельными издержками производства?

9. Что называется предельной выручкой?

10. Разъясните понятие эластичности функции. Почему иногда ее называют относительной производной?

11. Где широко используется коэффициент эластичности?

12. Дайте определение дифференциала функции в точке x_0. В каком случае функция f называется дифференцируемой в точке x_0?

13. Сформулируйте необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции в точке x_0. Каким равенством связаны дифференциал и производная?

14. Дайте определение дифференцируемой функции на интервале (a,b).

15. Дайте определение дифференцируемой функции на отрезке $[a,b]$.

16. Почему говорят, что дифференциал есть главная линейная часть приращения функции?

17. Что называют дифференциалом независимого переменного? Напи-

шите формулу, по которой можно найти дифференциал функции, зная ее производную.

18. Откуда можно получить приближенное равенство $\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x$ или $f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x$, которое используется для вычисления приближенного значения $f(x_0+\Delta x)$ при малых Δx, при известных значений $f(x_0)$ и $f'(x_0)$?

19. Объясните геометрический смысл производной и дифференциала.

20. Приведите правила вычисления производных и дифференциалов.

21. Приведите правило дифференцирования обратной функции. Сформулируйте теорему. Покажите применение этого правила для вычисления производных обратных тригонометрических функций.

22. Сформулируйте теорему, отражающую правило дифференцирования сложной функции. На композицию какого числа функций распространяется правило вычисления производной сложной функции.

23. Что называется инвариантностью формы первого дифференциала.

24. Дайте сводку формул для производных элементарных функций.

25. Что называют логарифмической производной функции дифференцируемой в точке?

26. Приведите правило дифференцирования функции заданной параметрически.

27. Как можно дифференцировать функцию заданную неявно?

28. Что называют второй производной или производной второго порядка функции в точке и как ее обозначают?

29. Выведите формулу для второй производной функции заданной параметрически.

30. Как решается вопрос о вычислении второй производной сложной функции?

31. Как находят вторую производную неявной функции в простейших случаях? Поясните это на примере.

32. Каким образом определяется производная n-го порядка? Как ее обозначают?

33. Что называют вторым дифференциалом или дифференциалом второго порядка функции в точке и как его обозначают?

34. Как определяется n-й дифференциал $d^n y$? Откуда следует, что производная n-го порядка функции $y = f(x)$ равна отношению дифференциала n-го порядка этой функции к n-й степени дифференциала независимого переменного, т.е. $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$?

35. Дифференциал второго порядка, в отличие от первого дифференциала, не обладает свойством инвариантности формы. Разъясните, что это означает?

§25. Основные теоремы для дифференцируемых функций

Ключевые слова: *локальный минимум, локальный максимум, локальный экстремум, теорема Ферма, теорема Ролля, нули производной, теорема Лагранжа, формула конечных приращений, обобщенная формула конечных приращений (формула Коши), теорема Дарбу.*

1. Локальный экстремум и теорема Ферма. Пусть существует число $\delta > 0$ такое, что функция $f(x)$ определена в δ - окрестности точки x_0, т.е. на множестве $O_\delta(x_0) = (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$, и пусть для всех $x \in O_\delta(x_0)$ выполняется неравенство

$$f(x) \geq f(x_0). \tag{1}$$

Тогда говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный минимум.

Аналогично, если существует число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in O_\delta(x_0)$ выполняется неравенство

$$f(x) \leq f(x_0), \tag{2}$$

то говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный максимум.

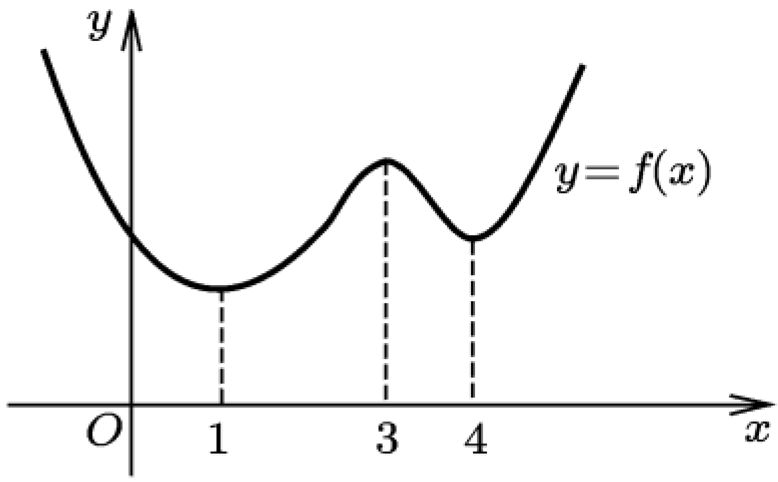


Рис. 1

Локальный максимум и локальный максимум объединяются общим термином локальный экстремум. Функция $y = f(x)$, график которой изображен на рис. 1, имеет локальные экстремумы в точках $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, а именно, минимум при $x = 1$ и $x = 4$ и максимум при $x = 3$.

Теорема 1 (Ферма). Если функция $f(x)$ имеет локальный экстремум в точке x_0 и дифференцируемая в этой точке, то

$$f'(x_0) = 0. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть, например, функция $f(x)$ имеет локальный минимум в точке x_0. Тогда в силу (1) для всех $x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ выполняется неравенство

$$f(x) - f(x_0) \geq 0. \tag{4}$$

Если $x \in (x_0 - \delta,\ x_0)$, то $x - x_0 \leq 0$ и из условия (4) следует, что

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \tag{5}$$

а если $x \in (x_0,\ x_0 + \delta)$, то выполняется неравенство

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0. \tag{6}$$

Так как функция f дифференцируема в точке x_0, то существует предел при $x \to x_0$ в левой части неравенства (5), равный $f'_-(x_0) = f'(x_0)$. По свойствам пределов из (5) следует, что

$$f'(x_0) \leq 0. \tag{7}$$

Аналогично, переходя к пределу в неравенстве (6), получаем

$$f'(x_0) \geq 0. \tag{8}$$

Из неравенств (7) и (8) следует, что $f'(x_0) = 0$.

Замечание 1. Теорема Ферма имеет простой геометрический смысл: касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке локального экстремума $(x_0,\ f(x_0))$ параллельна оси абсцисс (рис. 2).

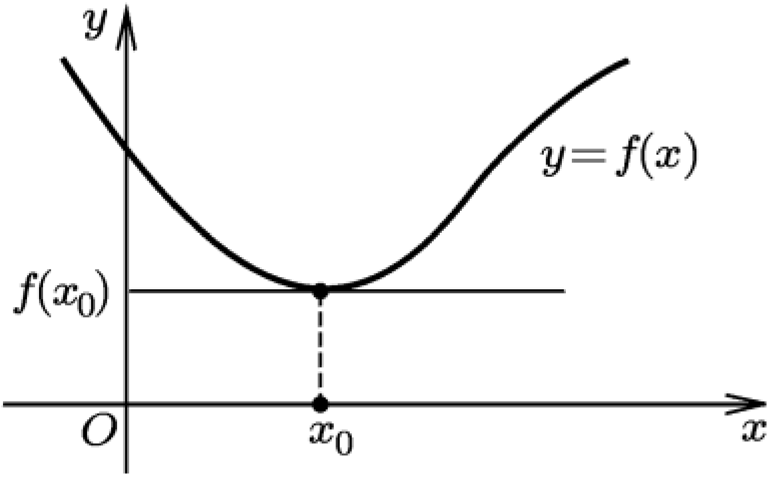


Рис. 2

2. Теорема Ролля о нулях производной

Теорема 2 (Ролля). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, принимает в концах этого отрезка равные значения, т.е.

$$f(a)=f(b), \tag{9}$$

и дифференцируема на интервале $(a,\ b)$, то существует точка $\xi\in(a,\ b)$ такая, что

$$f'(\xi)=0. \tag{10}$$

Доказательство. Обозначим $M=\sup\limits_{a\le x\le b} f(x),\ \ m=\inf\limits_{a\le x\le b} f(x)$. По теореме Вейерштрасса (**§23**, теорема 4) на отрезке $[a,\ b]$ существуют такие точки c_1 и c_2, что $f(c_1)=m,\ \ f(c_2)=M$.

Если $m=M$, то $f(x)=const$, и в качестве ξ можно взять любую точку интервала $(a,\ b)$.

Если $m\neq M$, то $m\le M$, и поэтому $f(c_1)<f(c_2)$. В силу условия (9), по крайней мере, одна из точек $c_1,\ c_2$ является внутренней точкой отрезка $[a,\ b]$. Пусть, например, $c_1\in(a,\ b)$. Тогда существует число $\delta>0$ такое, что $O_\delta(c_1)\subset(a,\ b)$. Так как для всех $x\in O_\delta(c_1)$ выполняется условие $f(x)\ge f(c_1)=m$, то по теореме Ферма $f'(c_1)=0$, т.е. условие (10) выполняется при $\xi = c_1$. Аналогично рассматривается случай, когда $c_2 \in (a,\ b)$.

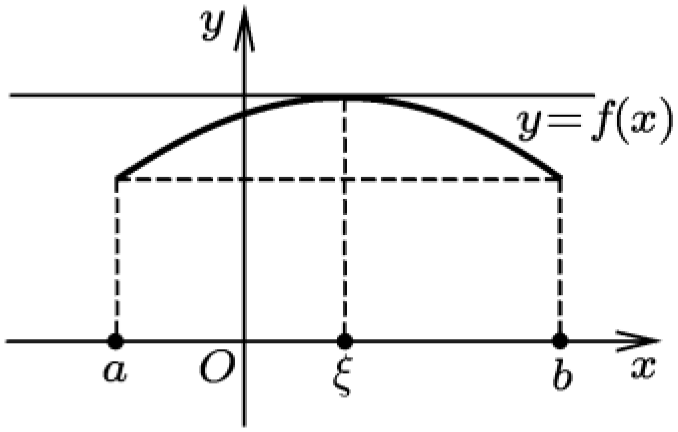


Рис. 3

Теорему Ролля можно кратко сформулировать так: **между двумя точками, в которых дифференцируемая функция принимает равные значения, найдется хотя бы один нуль производной этой функции.** Для случая $f(a) = f(b) = 0$ теорема формулируется еще короче: **между двумя нулями дифференцируемой функции лежит хотя бы один нуль ее производной.**

Замечание 2. Геометрический смысл теоремы Ролля: при условиях теоремы 2 существует значение $\xi \in (a,\ b)$ такое, что касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке ξ, $f(\xi)$ параллельна оси Ox (рис. 3).

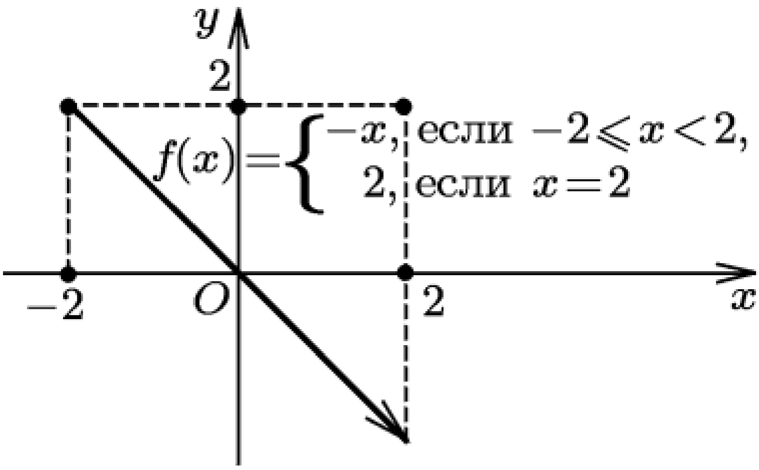


Рис. 4

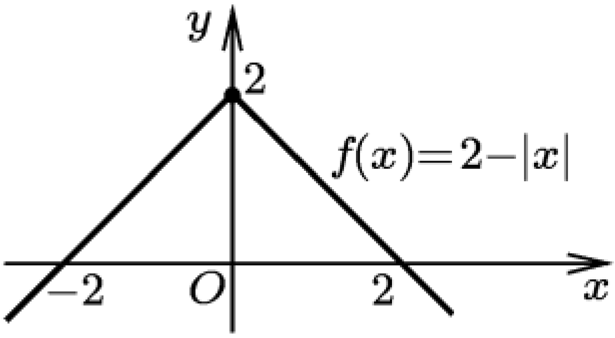


Рис. 5

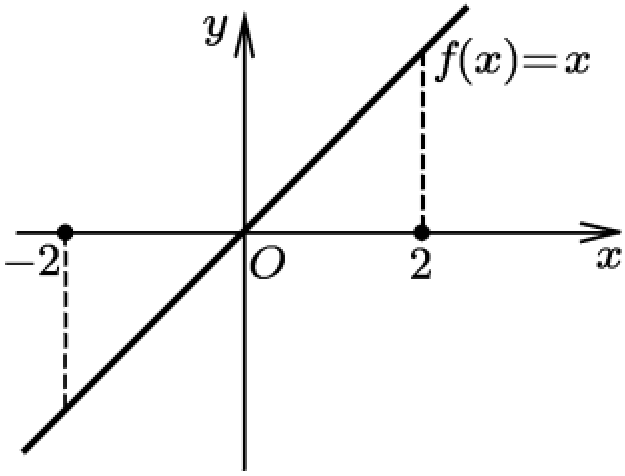


Рис. 6

Замечание 3. Все условия теоремы Ролля существенны. На рис. 4, 5 и 6 изображены графики функций, каждая из которых удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, кроме одного. Для всех этих функций не существует точки на интервале (-2, 2), в которой производная была бы равна нулю.

3. Формула конечных приращений Лагранжа

Теорема 3 (Лагранжа). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$ и дифференцируема на интервале $(a,\ b)$, то в этом интервале найдется хотя бы одна точка ξ такая, что

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)\ (b-a). \tag{11}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\phi(x) = f(x) + \lambda x,$$

где число λ выберем таким, чтобы выполнялось условие $\phi(a) = \phi(b)$, т.е. $f(a) + \lambda a = f(b) + \lambda b$.

Отсюда находим

$$\lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \qquad (12)$$

Так как функция $\phi(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, дифференцируема на интервале $(a,\ b)$ и принимает равные значения в концах этого интервала, то по теореме Ролля существует точка $\xi \in (a,\ b)$ такая, что $\phi'(\xi) = f'(\xi) + \lambda = 0$. Отсюда в силу условия (12) получаем равенство

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \qquad (13)$$

равносильное равенству (11).

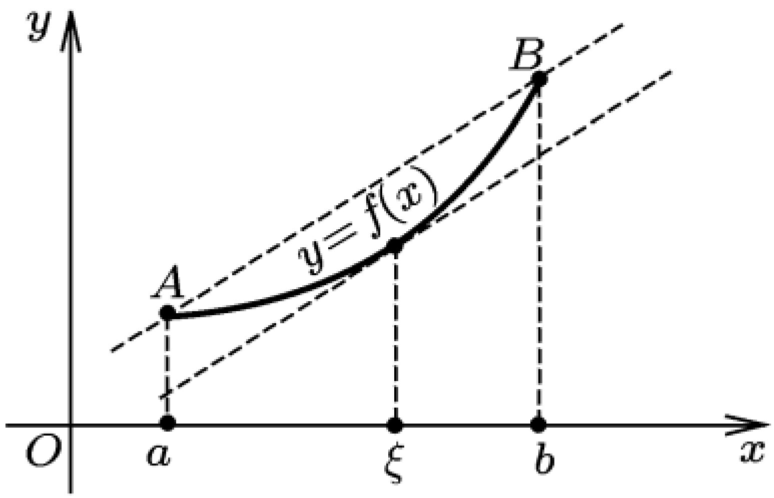


Рис. 7

Замечание 4. Правая часть формулы (13) равна угловому коэффициенту секущей, которая проходит через точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ графика функции $y = f(x)$, а левая часть этой формулы равна угловому коэффициенту касательной к графику в точке $(\xi, f(\xi))$. Поэтому теорема Лагранжа имеет следующую геометрическую интерпретацию:

существует значение $\xi \in (a,\ b)$ такое, что касательная к графику функция $y = f(x)$ в точке $(\xi, f(\xi))$ параллельна секущей (рис. 7), соединяющей точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$.

Замечание 5. Пусть функция f удовлетворяет условиям теоремы 3. Если $x_0 \in (a,\ b)$, а приращение $\Delta x \neq 0$ и таково, что точка $x_0 + \Delta x$ также принадлежит отрезку $[a,\ b]$, то, применив теорему Лагранжа к функции $f(x)$ на отрезке l с концами (x_0) и $x_0 + \Delta x$ (Δx может быть и отрицательным), получим

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta x \cdot f'(\xi), \qquad (14)$$

где ξ - некоторая внутренняя точка отрезка l.

Пусть $\Delta x > 0$, тогда $0 < \xi - x_0 < \Delta x$ (рис. 8), и поэтому $0 < \dfrac{\xi - x_0}{\Delta x} < 1$.

Рис. 8

Полагая $\theta = \dfrac{\xi - x_0}{\Delta x}$, получаем

$$\xi = x_0 + \theta \cdot \Delta x, \qquad \text{где } 0 < \theta < 1. \qquad (15)$$

Аналогично, если $\Delta x < 0$, то $0 < x_0 - \xi < |\Delta_x|$ (рис. 9), и поэтому $0 < \dfrac{x_0 - \xi}{-\Delta x} < 1$.

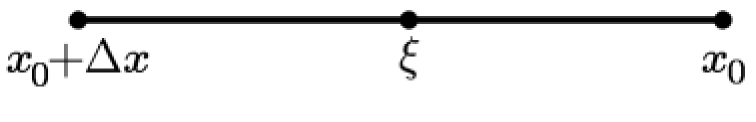


Рис. 9

Полагая $\theta = \dfrac{x_0 - \xi}{-\Delta x} = \dfrac{\xi - x_0}{\Delta x}$, и снова получаем равенство (15), где $0 < 0 < 1$.

Следовательно, равенство (14) можно записать в виде

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta x\cdot f'(x_0+\theta\cdot\Delta x), \tag{16}$$

где $0<\theta<1$.

Формулу (16) **называют формулой конечных приращений Лагранжа.** Она дает точное выражение для приращения функции в отличие от приближенного равенства

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx\Delta x\cdot f'(x_0),$$

которое иногда **называют формулой бесконечно малых приращений.**

Пример 1. Доказать, что

$$\ln(1+x)<x \text{ при } x>0, \tag{17}$$

$$|arctg\ \ x_2-arctg\ \ x_1|\le|x_2-x_1|,\ x_1\in R^1,\ x_2\in R^1. \tag{18}$$

Решение

а) Применяя теорему Лагранжа к функции $f(x)=\ln(1+x)$ на отрезке $[0,\ x]$, где $x>0$, получаем $\ln(1+x)=\dfrac{1}{1+\xi}x$, откуда следует неравенство (17), так как $0<\xi<x$.

б) По теореме Лагранжа для функции $arctg\ \ x$ на отрезке с концами x_1 и x_2 находим

$$arctg\ \ x_2-arctg\ \ x_1=\frac{1}{1+\xi^2}(x_2-x_1),$$

откуда получаем $|arctg\ \ x_2-arctg\ \ x_1|=\dfrac{|x_2-x_1|}{1+\xi^2}\le|x_2-x_1|$, так как $0<\dfrac{1}{1+\xi^2}\le1$.

Полагая в соотношении (18) $x_2=x$, $x_1=0$, получаем

$$|arctg\ \ x|\le x,\qquad x\in R^1, \tag{19}$$

и, в частности,

$$0\le arctg\ \ x\le x,\qquad x\ge0. \tag{20}$$

4. Некоторые следствия из теоремы Лагранжа

Следствие 1. Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a,\ b)$ и $f'(x)=0$ для всех $x\in(a,\ b)$, то

$$f(x)=C=const, \qquad x\in(a,\ b).$$

Доказательство. Пусть x_0 - фиксированная точка интервала $(a,\ b)$, x - любая точка этого интервала. Применяя теорему Лагранжа к функции $f(x)$ на отрезке с концами x_0 и x, получаем

$$f(x)-f(x_0)=(x-x_0)f'(\xi),$$

где $\xi\in(a,\ b)$, $f'(\xi)=0$, откуда $f(x)=f(x_0)=C$.

Следствие 2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, дифференцируема на интервале $(a,\ b)$ и для всех $x\in(a,\ b)$ выполняется равенство $f'(x)=k$, где k - постоянная, то

$$f(x)=kx+B,\ x\in[a,\ b],$$

т.е. f - линейная функция.

Доказательство. Применяя теорему Лагранжа к функции f на отрезке $[a,\ x]$, где $a\le x\le b$, получаем $f(x)-f(a)=k(x-a)$, откуда следует, что $f(x)=kx+B$, где $B=f(a)-k\cdot a$.

Следствие 3. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a,\ b)$, за исключением, быть может, точки $x_0\in(a,\ b)$, и непрерывна в точке x_0. Тогда если существует конечный или бесконечный

$$\lim_{x\to x_0-0} f'(x)=A, \tag{21}$$

то в точке x_0 существует левая производная, причем

$$f'_-(x_0)=A. \tag{23}$$

Аналогично, если существует

$$\lim_{x\to x_0+0} f'(x)=B, \tag{23}$$

то

$$f'_+(x_0)=B. \tag{24}$$

Доказательство. Пусть приращение Δx таково, что $\Delta x = 0$ и точка $x_0 + \Delta x$ принадлежит интервалу $(a,\ b)$. Запишем равенство (16) в виде

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0 + \theta \cdot \Delta x),\ \ 0 < \theta < 1. \tag{25}$$

Если существует предел (21), т.е. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to -0} f'(x_0 + \Delta x) = A$, то правая часть (25) имеет предел в левой части (25) и справедливо равенство (22).

Аналогично из соотношения (23) следует равенство (24).

Предположим, что функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, тогда

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0). \tag{26}$$

Если пределы (21) и (23) существуют и конечны, то из соотношений (22), (24) и (26) следует, что

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f'(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f'(x) = f'(x_0).$$

Это означает, что **если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a,\ b)$, то ее производная $f'(x)$ не может иметь точек разрыва первого рода.** Иначе говоря, **каждая точка $x_0 \in (a,\ b)$ является либо точкой непрерывности функции $f'(x)$, либо точкой разрыва второго рода.**

Пример 2. Найти $f'_-(1)$ и $f'_+(1)$, если $f(x) = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$.

Решение

Функция f определена на R^1, так как $1 + x^2 \geq 2|x|$.

Вычислив производную, получим

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)}} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{|1-x^2|(1+x^2)}, \qquad |x| \neq 1,$$

откуда

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{1+x^2}, & \textit{если} \quad |x|<1, \\ -\dfrac{2}{1+x^2}, & \textit{если} \quad |x|>1. \end{cases}$$

Применяя следствие 3, получаем

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1-0} f'(x)=\lim_{x\to 1-0}\frac{2}{1+x^2}=1.$$

Аналогично находим

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1+0}\left(-\frac{2}{1+x^2}\right)=-1.$$

Пример 3. Найти точки разрыва функции $f'(x)$, если

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & \textit{при} \quad x\neq 0, \\ 0 & \textit{при} \quad x=0. \end{cases}$$

Решение

Если $x\neq 0$, то $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$, а если $x=0$, то по определению производной

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=0.$$

Следовательно, функция $f'(x)$ определена на R^1 и непрерывна при $x\neq 0$. В точке $x=0$ эта функция $f'(x)$ имеет разрыв второго рода, так как не существует предела функции

$$f'(x)=2x\ \sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, \text{ при } x\to 0.$$

Следствие 4. Если функции ϕ и ψ дифференцируемы при $x\geq x_0$ и удовлетворяют условиям $\phi(x_0)=\psi(x_0)$, $\phi'(x)>\psi'(x)$, при $x>x_0$, то $\phi(x)>\psi(x)$ при $x>x_0$.

Доказательство. Применяя теорему Лагранжа к функции $f(x)=\phi(x)-\psi(x)$ на отрезке $[x_0,\ x]$, где $x>x_0$, получаем $f(x)=f'(\xi)(x-x_0)$, так как $f(x_0)=0$. Отсюда, учитывая, что

$$\xi>x_0,\quad f'(\xi)=\phi'(\xi)-\psi'(\xi)>0,$$

получаем $f(x)>0$, т.е. $\phi(x)>\psi(x)$ при $x>x_0$.

Пример 4. Доказать, что

$$\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}\quad \text{при } x>0. \tag{27}$$

Доказательство. Пусть $\phi(x)=\ln(1+x)$, $\psi(x)=x-\dfrac{x^2}{2}$, тогда $\phi(0)=\psi(0)$, $\phi'(x)=\dfrac{1}{1+x}$, $\psi'(x)=1-x$ и при $x>0$ справедливо неравенство $\dfrac{1}{1+x}>1-x$, так как при $x>0$ это неравенство равносильно очевидному неравенству $1>1-x^2$. Применяя следствие 4 к функциям ϕ и ψ, получаем неравенство (27).

5. Обобщенная формула конечных приращений (формула Коши)

Теорема 4. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,\ b]$, дифференцируемы на интервале $(a,\ b)$, причем $g'(x)\neq 0$ во всех точках этого интервала, то найдется хотя бы одна точка $\xi\in(a,\ b)$ такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{28}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\phi(x)=f(x)+\lambda g(x),$$

где число λ выберем таким, чтобы выполнялось равенство $\phi(a)=\phi(b)$, которое равносильно следующему

$$f(b)-f(a)+\lambda\big(g(b)-g(a)\big)=0. \tag{29}$$

Заметим, что $g(b) \neq g(a)$, так как в противном случае, согласно теореме Ролля, существовала бы точка $c \in (a,\ b)$ такая, что $g'(c) = 0$ вопреки условиям теоремы 4. Итак, $g(b) - g(a) \neq 0$, и из равенства (29) следует, что

$$\lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \tag{30}$$

Так как функция ϕ при любом λ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$ и дифференцируема на интервале $(a,\ b)$, а при значении λ, определяемом формулой (30), принимает равные значения в точках a и b, то по теореме Ролля существует точка $\xi \in (a,\ b)$ такая, что $\phi'(\xi) = 0$, т.е. $f'(\xi) + \lambda g'(\xi) = 0$, откуда $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = -\lambda$. Из этого равенства и формулы (30) следует утверждение (28).

Замечание 6. Теорема Лагранжа – частный случай теоремы Коши $(g(x) = x)$.

Замечание 7. Теорему 4 нельзя получить применением теоремы 3 к числителю и знаменателю дроби, стоящей в левой части равенства (28). Действительно, эту дробь по теореме 3 можно записать в виде $\dfrac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)}$, где $\xi_1 \in (a,\ b)$, $\xi_2 \in (a,\ b)$, но, вообще говоря, $\xi_1 \neq \xi_2$.

Упражнение. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a,\ b]$ и $f'(a) < f'(b)$. Доказать, что для любого λ, удовлетворяющего условию $f'(a) < \lambda < f'(b)$, существует хотя бы одна точка $\xi \in (a,\ b)$ такая, что $f'(\xi) = \lambda$ **(теорема Дарбу).**

Упражнения

Для функции $y = f(x)$ на заданном отрезке $[a;b]$ проверьте возможность применения теоремы Ролля и найдите c .

1. $f(x)=x^3+5x^2-6x,\ \ 0\le x\le 1.$

2. $f(x)=\cos^2 x,\ \ -\dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{\pi}{4}.$

3. $f(x)=\sin^2 x,\ \ \ 0\le x\le\pi.$

4. $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3),\ \ \ 2\le x\le 3.$

5. $f(x)=\sqrt[3]{x^2-3x+2},\ \ \ 1\le x\le 2.$

6. $f(x)=\ln\sin x,\ \ \ \dfrac{\pi}{6}\le x\le\dfrac{5\pi}{6}.$

7. Покажите, что между корнями функции $f(x)=x^2-4x-5$ находится один корень ее производной, и найдите c $\left(f'(c)=0\right)$. Приведите графическую иллюстрацию.

8. Покажите, что уравнение $x^3+3x+q=0$ имеет только один действительный корень.

9. Докажите с помощью теоремы Ролля, что уравнение $x^4-4x-1=0$ не может иметь более двух действительных корней.

Для функции $y=f(x)$ на заданном отрезке $[a;b]$ проверьте возможность применения теоремы Лагранжа; найдите c в формуле Лагранжа.

10. $y=\ln x,\ \ \ 1\le x\le e.$

11. $y=\sqrt{x},\ \ \ 0\le x\le 4.$

12. $y=x^2,\ \ a\le x\le b.$

13. $y=x^{\frac{1}{3}},\ \ a\le x\le b.$

14. В какой точке М кривой $y=4-x^2$ касательная параллельна хорде, проходящей через точки $A(-2;0)$, $B(1;3)$?

15. Почему к функции $y=|\cos x|$ на отрезке $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$ нельзя применить теорему Лагранжа? Сделайте чертеж.

16. Почему к функции $y=x+|\sin x|$ на отрезке $[-1;1]$ нельзя применить теорему Лагранжа? Сделайте чертеж.

17. Используя формулу Лагранжа, докажите справедливость следующих неравенств:

1) $|\sin x_2-\sin x_1|\le|x_2-x_1|$;

2) $arctg\,x_2-arctg\,x_1\le x_2-x_1,\quad$ где $x_2>x_1$.

Докажите тождества.

18. $\arccos\sqrt{1-x^2}=\begin{cases}\arcsin x, & 0\le x\le 1,\\ -\arcsin x, & -1\le x<0.\end{cases}$

19. $\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}=\begin{cases}\pi-2arctg\,x, & x\ge 1,\\ 2arctg\,x, & -1<x<1,\\ -\pi-2arctg\,x, & x\le -1.\end{cases}$

20. $arctg\,x+arctg\dfrac{1-x}{1+x}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}, & x>-1,\\ -\dfrac{3\pi}{4}, & x<-1.\end{cases}$

21. Покажите, что функция $y=\cos^2 x+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-\cos x\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$ есть постоянная. Найдите значение этой постоянной.

22. Покажите, что функция $y=2arctg\,x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ является постоянной при $x\ge 1$. Найдите значение этой постоянной.

23. Определите значение c в формуле Коши для функций $f(x)=x^3$ и $g(x)=x^2+1$ на отрезке $[1;2]$.

24. Определите значение c в формуле Коши для функций $f(x) = \sin x$ и $g(x) = 1 + \cos x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

25. Поясните, почему теорема Коши не применима для функций $f(x) = x^2$ и $g(x) = x^3$ на отрезке $[-1;1]$.

Вопросы для самопроверки

1. Когда говорят, что функция имеет в заданной точке локальный минимум (максимум)?

2. Каким общим термином объединяются локальный минимум и локальный максимум?

3. Сформулируйте теорему Ферма. Какой простой геометрический смысл имеет теорема Ферма?

4. Сформулируйте теорему Ролля о нулях производной. Какой геометрический смысл имеет теорема Ролля?

5. Как кратко можно сформулировать теорему Ролля? В каком случае и как теорема Ролля формулируется еще короче?

6. Приведите примеры показывающие, что все условия теоремы Ролля существенны.

7. Сформулируйте теорему Лагранжа. Какую геометрическую интерпретацию имеет теорема Лагранжа?

8. Какую формулу называют формулой конечных приращений Лагранжа? Чем она отличается от формулы бесконечно малых приращений?

9. Приведите все четыре следствия из теоремы Лагранжа.

10. Сформулируйте теорему Коши. Какую формулу называют обобщенной формулой конечных приращений (формулой Коши)?

11. Сформулируйте теорему Дарбу.

§26. Формула ряд Тейлора. Правило Лопиталя

Ключевые слова: *формула Тейлора, ряд Тейлора, степенный ряд, функциональный ряд, правило Лопиталя.*

1. Формула Тейлора

Если функция $f(x)$ имеет производные до $(n+1)$- го порядка включительно в некоторой окрестности точки $x=a$, то для всех x из этой окрестности справедливо равенство **(формула Тейлора)**

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x), \quad (1)$$

где $R_n(x)=\frac{f^{(n-1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\,(0<\theta<1)$ - остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа.

Замечание. Полагая $x=a+\Delta x$, где $\Delta x\neq 0$, формулу Тейлора можно представить в виде

$$f(a+\Delta x)-f(a)=\frac{f'(a)}{1!}\Delta x+\frac{f''(a)}{2!}(\Delta x)^2+...$$

$$...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(\Delta x)^n+\frac{f^{(n+1)}(a+\theta\Delta x)}{(n+1)!}(\Delta x)^{n+1}$$

$$(0<\theta<1),$$

которая обобщает формулу конечных приращений Лагранжа.

Определение. При $a=0$ формула Тейлора принимает вид

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad (0<\theta<1),$$

и называется **формулой Маклорена**.

Формулу Тейлора используют для представления функций многочленами, вычисления приближенных значений функций, при исследовании функции и вычислении пределов.

Примеры

1. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + ... + \dfrac{x^n}{n!} + R_n(x)$.

2. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + ... + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x)$.

3. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + ... + (-1)^{n-1} \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x)$.

4. $(1+x)^m = 1 + mx + \dfrac{m(m-1)}{2!}x^2 + ... + \dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + R_n(x)$.

5. $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + ... + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + R_n(x)$.

2. Ряд Тейлора

Формула (1) дает представление функции $f(x)$ в виде суммы конечного множества слагаемых. Если функция $f(x)$ на некоторой окрестности точки $x = a$ имеет производные любого порядка, причем на этом отрезке выполняется соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, то можно перейти в формуле Тейлора к пределу при $n \to \infty$. Мы получим,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \qquad (2)$$

Определение. Выражение, стоящее в правой части формулы (2), называется **рядом Тейлора функции** f. Он зависит не только от этой функции, но и от выбора значения a. Если $a = 0$, то ряд Тейлора принимает вид:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \qquad (3)$$

Непосредственно проверить, что $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ для всех x из окрестности точки $x = a$, иногда бывает затруднительно. Поэтому нужно вывести признак того, что на нем выполняется равенство (2), т.е. что функция равна на нем сумме своего ряда Тейлора. Дело в том, что ряд Тейлора может расходиться или сходиться к другой функции.

Например, для функции $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$, доопределенной в нуле по непрерывности $(f(x)=0)$, все производные $f^{(n)}(0)$. Поэтому ее ряд Тэйлора (3) или тоже самое ряд Маклорена сходится к другой функции, тождественно равной нулю.

Тем не менее, для многих функций представление (3) справедливо, причем не в малой окрестности, а на довольно широких областях и даже на всей числовой прямой. Например, представления

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

справедливы при любом $-\infty<x<+\infty$.

Вот еще несколько рядов

$$arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots,\qquad |x|\le 1;$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\cdots,\qquad -1<x\le 1.$$

Признак сходимости ряда Тейлора к разлагаемой функции формулируется следующим образом:

Теорема. Пусть функция f бесконечно дифференцируема на $[a-\delta;\ a+\delta]$ и пусть существует такое число M, что для всех x из этого отрезка и всех n выполняется неравенство $\left|f^{(n)}(a)\right|\le M$. Тогда функция f является на $[a-\delta;\ a+\delta]$ суммой своего ряда Тейлора.

Иными словами, в этом случае $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ для всех $x\in[a-\delta;\ a+\delta]$.

Определение. Представление функции f в виде суммы ряда вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x-c\right)^n$ называется **разложением этой функции в степенный ряд.** Как мы уже знаем, для разложения функций в степенные ряды применяют ряд Тейлора.

Степенный ряд является частным случаем, так называемого функционального ряда.

3. Функциональные ряды

Определение. Выражение вида

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \tag{4}$$

где $f_1(x), f_2(x),..., f_n(x),...$ - некоторые функции, определенные на одном и том же множестве M, называется **функциональным рядом.**

Определение. Множество Ω $\left(\Omega \subseteq \mathsf{M}\right)$ всех значений x, при которых функциональный ряд (4) сходится (как числовой ряд), называется **областью сходимости** этого ряда.

Функция $S(x)$, $x \in \Omega$ является **суммой ряда** (4), если

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x),$$

где $S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$.

Определение. Если функция $S(x)$, $x \in \mathsf{L}$ $\left(\mathsf{L} \subseteq \Omega\right)$ является суммой ряда (4), то говорят, что функциональный ряд (43) **сходится на множестве** L **к функции** $S(x)$.

Определение. Функциональный ряд называется **равномерно сходящимся** на множестве L к функции $S(x)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что при $n \geq N$ сразу для всех $x \in \mathsf{L}$ выполняется неравенство $\left|S(x) - S_n(x)\right| < \varepsilon$.

Если функциональный ряд сходится на множестве L, то на этом множестве сходимость не обязана быть равномерной, однако на некотором под-множестве множества L сходимость может оказаться уже равномерной.

Признак равномерной сходимости Вейерштрасса. Если члены функционального ряда (4) удовлетворяют на множестве L неравенствам

$$|f_n(x)| \le c_n, \quad (n = 1, 2, ...),$$

где c_n - члены сходящегося числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, то функциональный ряд сходится на множестве L равномерно.

Пример. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ сходится на $L = (-\infty, \ +\infty)$ равномерно, так как всегда $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится.

4. Функциональные свойства суммы ряда

Если функции $f_n(x)$ непрерывны на $[a, \ b]$, а составленный из них ряд сходится равномерно на этом отрезке к функции $f(x)$, то:

1°. Функция $f(x)$ на отрезке $[a, \ b]$ непрерывна.

2°. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \cdots + \int_a^b f_n(x)dx + \cdots$.

Пример. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ на отрезке $[0, \ 1/2]$ сходится равномерно к функции $\frac{1}{1-x}$. Тогда

$$\int_0^{\frac{1}{2}} 1 \cdot dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x dx + \cdots + \int_0^{\frac{1}{2}} x^{n-1} dx + \cdots = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x}$$

или

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 \cdot 2} + \frac{1}{2^3 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{2^n \cdot n} + \cdots = \ln 2.$$

Если функции $f_n(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a, \ b]$ и на этом отрезке:

а) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится к функции $f(x)$;

б) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ сходится равномерно, то $f(x)$ имеет на $[a,\ b]$ непрерывную производную и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = f'(x)$.

5. Степенные ряды *(продолжение)*

Определение. Функциональный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n, \tag{5}$$

где a_n, $(n = 0,1,2,...)$ и c - некоторые числа, называют **степенным рядом с центром в точке c.**

Возможны лишь три случая:

1) степенный ряд (5) сходится только при $x = c$ (всюду расходящийся ряд);

2) степенный ряд (5) сходится (при том абсолютно) при любом значении x (всюду сходящийся ряд);

3) существует число $R > 0$ такое, что ряд (5) сходится абсолютно при $|x = c| < R$ и расходится при $|x = c| > R$ (R - радиус сходимости ряда).

Кроме того, считают: $R = 0$ для всюду расходящегося ряда и $R = +\infty$ для всюду сходящегося ряда.

Определение. Интервал $(c - R,\ c + R)$ называют **интервалом сходимости степенного ряда (5).** При этом на концах интервала сходимости степенный ряд может, как сходиться, так и расходиться.

Пример. Найдем область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n \cdot 2^n}$.

Положим $u_n = \dfrac{|x|^n}{n \cdot 2^n}$, $u_{n+1} = \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1} \cdot n \cdot 2^n}{|x|^n \cdot (n+1) \cdot 2^{n+1}} = \frac{|x|}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{|x|}{2}.$$

По признаку Даламбера степенный ряд сходится абсолютно при $|x| < 2$, а при

$|x| > 2$ абсолютной сходимости у него нет. Следовательно, радиус сходимости ряда $R = 2$. Исследуем сходимость ряда на концах интервала сходимости: при $x = 2$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, а при $x = -2$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ сходится. Таким образом, область сходимости данного степенного ряда $\Omega = [-2,\ 2)$.

Основные свойства степенных рядов

1°. Если степенный ряд не является всюду расходящимся, то его сумма непрерывна в каждой точке области сходимости.

2°. Степенный ряд внутри его области сходимости можно интегрировать почленно.

3°. Степенный ряд внутри его области сходимости можно дифференцировать почленно.

Замечание. Эти утверждения сохраняют силу и для конца интервала сходимости, если только последний ряд на этом конце сходится.

4°. Если степенный ряд не является всюду расходящимся, то его сумма $f(x)$ имеет внутри интервала сходимости производные всех порядков. При этом

$$a_0 = f(c), \quad a_1 = f'(c), \quad a_2 = \frac{f''(c)}{2!}, \quad \ldots \quad a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}, \quad \ldots$$

6. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей

Если существует окрестность точки $x = a$, в которой функции $\psi(x)$ и $\phi(x)$ дифференцируемы, за исключением, быть можно, самой точки $x = a$, $\phi(x) \neq 0$ и либо $\lim\limits_{x\to a}\psi(x) = \lim\limits_{x\to a}\phi(x) = 0$, либо $\lim\limits_{x\to a}\psi(x) = \lim\limits_{x\to a}\phi(x) = \infty$, то при условии существования $\lim\limits_{x\to a}\frac{\psi'(x)}{\phi'(x)}$ существует и $\lim\limits_{x\to a}\frac{\psi(x)}{\phi(x)}$, причем имеет место равенство **(правило Лопиталя)**

$$\lim_{x\to a}\frac{\psi(x)}{\phi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\psi'(x)}{\phi'(x)}$$

(правило применимо и в случае, когда a бесконечно).

Замечание. Если соотношение $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\psi'(x)}{\phi'(x)}$ в точке $x=a$ также представляет неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, то при выполнении соответствующих условий правило Лопиталя может быть применено и к $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\psi'(x)}{\phi'(x)}$, так что

$$\lim_{x\to a}\frac{\psi(x)}{\phi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\psi'(x)}{\phi'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\psi''(x)}{\phi''(x)},$$

причем процесс, если это необходимо, можно продолжить.

Неопределенность вида $0\ \ \infty$ или $\infty-\infty$ приводятся к неопределенностям $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ с помощью алгебраических преобразований.

Неопределенности вида 1^∞, ∞^0, 0^0 приводятся к неопределенностям вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ с помощью предварительного логарифмирования.

Примеры

6. $$\lim_{x\to 2}\frac{\ln\left(x^2-3\right)}{x^2+7x-18}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{\dfrac{2x}{x^2-3}}{2x+7}=\frac{4}{11}.$$

7. $$\lim_{x\to 2}(x-4)tg\,\frac{\pi x}{8}=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{ctg\,\dfrac{\pi x}{8}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 4}\frac{1}{-\dfrac{\pi}{8}\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{\pi x}{8}}}=-\frac{8}{\pi}.$$

8. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{tgx}=\left(1^\infty\right)$.

Сначала найдем предел логарифма данной функции:

$$\lim_{x\to\pi/2}(\sin x)^{tgx}\ \lim_{x\to\pi/2}\left[tg\,x\ln(\sin x)\right]=(\infty\cdot 0)=$$

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln(\sin x)}{ctg\,x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\pi/2}\frac{ctg\,x}{1}=\lim_{x\to\pi/2}(-\sin x\cos x)=0.$$

Отсюда

$$\lim_{x\to\pi/2}(\sin x)^{tg\,x} = e^0 = 1.$$

Упражнения

1. Покажите, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\cos x}$ существует, и равен 1, но не может быть вычислен с помощью правила Лопиталя.

2. Применимо ли правило Лопиталя для вычисления следующего предела:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-\sin x}\quad ?$$

Упражнение

Вычислите пределы.

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-tgx}{\cos 2x}.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x-\sin x}.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^4 x}{e^{x^2}-1-x^2}.$

4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin^2 x-\frac{1}{2}tg\,x}{1+\cos 4x}.$

5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln\left(x^2-8\right)}{x^2+2x-15}.$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}.$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}.$

8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\arcsin(2-x)}{\sqrt{x^2-3x+2}}.$

9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-x^4}-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[4]{x^3}}.$

10. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right).$

11. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tg\,x-\dfrac{1}{1-\sin x}\right).$

12. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{1}{\ln(x-1)}\right).$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-ctg^2 x\right).$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x(1+x)}-\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}\right).$

Вопросы для самопроверки

1. Что называют формулой Тейлора?

2. Какую функцию называют остаточным членом формулы Тейлора в форме Лагранжа?

3. Что называют формулой Маклорена?

4. Приведите разложение некоторых основных элементарных функций по формуле Маклорена.

5. Что называют рядом Тейлора для заданной функции? Когда ряд Тейлора называется рядом Макролена?

6. Приведите таблицу разложений в степенный ряд некоторых функций.

5. Что называется функциональным рядом?

6. Что называется областью сходимости этого ряда?

7. Что называется суммой функционального ряда?

8. Когда говорят, что заданный функциональный ряд сходится на некотором множестве к некоторой функции?

9. Когда функциональный ряд называется равномерно сходящимся на некотором множестве?

10. Если функциональный ряд сходится на множестве, то, что можно сказать о равномерной сходимости этого ряда на этом множестве?

11. Сформулируйте признак равномерной сходимости Вейерштрасса. Приведите пример.

12. Приведите функциональные свойства суммы ряда.

13. Что можно утверждать, если функции $f_n(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a,\ b]$ и на этом отрезке:

а) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится к функции $f(x)$; б) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ сходится равномерно?

14. Какой функциональный ряд называют степенным рядом с центром в некоторой точке?

15. Приведите возможные случаи сходимости степенного ряда.

16. Что называется интервалом сходимости степенного ряда? Что можно сказать о концах интервала сходимости степенного ряда?

17. Приведите основные свойства степенных рядов.

§27. Экстремумы функции одной переменной

Ключевые слова: *экстремум, наибольшее и наименьшее значения, точки перегиба.*

1. Основные определения и необходимые и достаточные условия экстремума

Определение. Если существует такая δ - окрестность точки x_0, что для всех точек $x \neq x_0$ и принадлежащих этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$ $\left(f(x) \leq f(x_0)\right)$, то точку x_0 называют ***точкой нестрого минимума (нестрого максимума)*** функции $f(x)$, а число $f(x_0)$ - ***минимумом (максимумом)*** этой функции.

Если в указанной δ- окрестности выполняется строгое неравенство $f(x) > f(x_0)$ $\left(f(x) < f(x_0)\right)$, то точку x_0 называют ***точкой строгого минимума (строго максимума)***.

Определение. Точки строгого и нестрогого максимума и минимума функции называют ее ***точками экстремума***.

Если x_0 - точка минимума функции $f(x)$, то в указанной δ - окрестности точки x_0 приращение функции $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) \geq 0$ $\left(\Delta f(x_0) > 0\right)$; если же x_0 - точка максимума функции $f(x)$, то $\Delta f(x_0) \leq 0 \left(\Delta f(x_0) < 0\right)$ во всех точках δ - окрестности точки x_0.

Необходимый признак экстремума

Пусть точка x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$, определенной в некоторой окрестности точки x_0. Тогда либо производная $f'(x_0)$ не существует, либо $f'(x_0) = 0$.

Определение. Точки, в которых производная данной функции равна нулю, называют **стационарными точками этой функции**, а точки, в которых функция непрерывна, а ее производная либо равна нулю, либо не существует, - ее **критическими точками**.

Замечание. Поэтому все точки экстремума функции содержатся среди ее критических точек.

Пример 1. Точка $x = 0$ является критической точкой для каждой из функций $y = x^2$, $y = x^3$, $y = |x|$ (рис. 2, §24), $y = |x|^{\frac{1}{2}}$ (рис. 1, §24), $y = \sqrt[3]{x}$ (рис. 5, §24), причем для функций $y = x^2$, $y = |x|$, $y = |x|^{\frac{1}{2}}$ точка $x = 0$ - точка экстремума, а для функций $y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$ эта точка не является точкой экстремума.

Таким образом, не всякая критическая точка является точкой экстремума функции.

Упражнение. Определите критические точки функции $f(x) = \sqrt[3]{x}(x-8)$.

Достаточные условия строгого экстремума непрерывной функции

1. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ критической точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0, в некоторой, тем не менее, функция $f(x)$ непрерывна. Если при этом в интервале $]x_0 - \delta, x_0[$ и $]x_0, x_0 + \delta[$ производная $f'(x)$ имеет противоположные знаки, то x_0 - точка экстремума, причем:

а) если $f'(x) > 0$ при $x \in]x_0 - \delta, x_0[$ и $f'(x) < 0$ при $x \in]x_0 + \delta, x_0[$, то x_0 - точка строгого максимума функции;

б) если $f'(x) < 0$ при $x \in]x_0 - \delta, x_0[$ и $f'(x) > 0$ при $x \in]x_0 + \delta, x_0[$, то x_0 - точка строгого минимума функции.

Если же $f'(x)$ сохраняет знак при $x \neq x,\ ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, x_0 не является точкой экстремума функции $f(x)$.

2. Пусть $f'(x_0)=0$, функция $f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки $f(x)$ и $f''(x)$ непрерывна в этой окрестности. Тогда:

а) если $f''(x_0)<0,$ то x_0 - точка строгого максимума функции $f(x)$;

б) если $f''(x_0)>0,$ то x_0 - точка строгого минимума функции $f(x)$;

в) если $f''(x_0)=0,$ то вопрос о наличии экстремума остается открытым.

3. Пусть $f'(x_0)=f''(x_0)=...=f^{(n-1)}(x_0)=0,$ а $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. Тогда:

а) если n - честное, то при $f^{(n)}(x_0)<0$ точка x_0 является точкой строгого максимума, а при $f^{(n)}(x_0)>0$ - точкой строгого минимума;

б) если n - нечетное, от x_0 не является точкой экстремума.

Примеры

2. Дана функция $f(x)=\sqrt[3]{x}(x-8)$. Ее производная $f'(x)=\dfrac{4}{3}\dfrac{x-2}{\sqrt[3]{x^2}}$, так что критическими являются точки $x=0,$ $x=2$. При этом $f'(x_0)<0$ как при $x<0$, так и при $x<0$, так и при $0<x<2$ и, следовательно, согласно условию 1, точка $x=0$ не является точкой экстремума функции $f(x)$. С другой стороны, $f'(x)<0$ при $0<x<2$ и $f'(x)>0$ при $x>2$; следовательно, $x=2$ является точкой строгого минимума, а число $f(2)=-6\sqrt[3]{2}$ - минимумом функции $f(x)$.

3. Рассмотрим функцию $f(x)=x^3-3x^2$. Ее производная $f'(x)=3x^2-6x=\ =3x(x-2)$, так что $f'(x)=0$ при $x=0$ и $x=2$. Вторая производная $f''(x)=6x-6$ и, следовательно, $f''(x)=-6<0$, а $f''(2)=12-6-6>0$. Тогда, согласно условию 2, точка $x=0$ является точ-

кой строгого максимума функции и $f(0)=0$, а точка $x=2$ - точкой строгого минимума и $f(2)=-4$.

4. Дана функция $f(x)=x^4$. Для этой функции $f'(x)=4x^3$, $f''(x)=12x^2, f'''(x)=24x, f^{IV}(x)=24$, так что $f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0$, а $f^{IV}(x)=24>0$. Тогда, согласно условию 3, точка $x=0$ является точкой строгого минимума и $f(0)=0$.

5. *Максимизация прибыли*. Пусть функция дохода от количества реализованного товара x выражается формулой $R(x)=\dfrac{x^3}{3}+2000000x$, а функция затрат на производство товара - формулой $C(x)=1500x^2$. Определить оптимальный уровень производства и прибыль, которая при этом достигается.

Решение

Прибыль определяется формулой

$$\Pi(x)=R(x)-C(x),$$

откуда

$$\Pi(x)=\frac{x^3}{3}-1500x^2+2000000x.$$

Приравнивая производную прибыли

$$\Pi'(x)=x^2-1500x+2000000$$

к нулю, получаем уравнение

$$x^2-1500x+2000000=0.$$

Корни этого уравнения $x_1=1000$, $x_2=2000$. Проверка показывает, что максимальная прибыль достигается при $x=1000$:

$$\Pi_{\max}=\Pi(1000)\approx 833333333\textit{ден.ед.}$$

6. *Оптимизация прибыли*. Пусть функция дохода от количества реализованного товара x выражается формулой $R(x)=16x=x^2$, а функция затрат

на производство товара - формулой $C(x)=x^2+1$. Определить оптимальный уровень производства и прибыль, которая при этом достигается.

Решение

Прибыль определяется формулой

$$\Pi(x)=R(x)-C(x),$$

откуда

$$\Pi(x)=16x-2x^2-1.$$

Приравнивая производную прибыли $\Pi'(x)=16-4x$ нулю, получаем $x=4$. Проверка показывает, что эта точка является точкой максимума. Таким образом, оптимальный уровень производства $x=4$. При этом значении максимальная прибыль составит $\Pi_{\max}=31$.

7. *Оптимизация налогообложения предприятий*. Пусть, как и в предыдущем примере, функция дохода от количества реализованного товара x выражается формулой $R(x)=16x-x^2$, а функция затрат на производство товара - формулой $C(x)=x^2+1$. Определить оптимальный уровень налога с единицы реализованного товара и прибыль предприятия, которая при этом достигается.

Решение

Пусть t (tax) налог с единицы выпускаемой продукции. Тогда общий налог с x единиц продукции составит $T=tx$. В этом случае функция прибыли будет иметь вид

$$\Pi(x)=R(x)-C(x)-tx.$$

Требуется определить: каким должен быть налог t, чтобы величина суммарного налога T со всей продукции была наибольшей?

Поскольку $R(x)=16x-x^2$, а $C(x)=x^2+1$, то функция прибыли имеет вид

$$\Pi(x)=16x-2x^2-tx-1.$$

Как и в предыдущем примере, условие максимума прибыли $\Pi'(x)=0$; отсюда получаем значение x, максимизирующего прибыль с учетом пока неизвестного налога t:

$$16-4x-t=0, \quad x=4-\frac{t}{4}.$$

Подставим полученное значение объема продукции в величину суммарного налога $T=tx$. Получим

$$T=t\left(4-\frac{t}{4}\right).$$

Найдем теперь условия, при которых величина T будет максимальной:

$$T=t\left(4-\frac{t}{4}\right), \quad T'(t)=0, \quad \Rightarrow \quad t=8.$$

Далее, при $t=8$ имеем $x=4-\frac{t}{4}=4-\frac{8}{4}=2$. Отсюда следует, что при налоге $t=8$ максимальная величина прибыли достигается при $x=2$:

$$\Pi_{\max}=\Pi(2)=16\cdot 2-2\cdot 2^2-8\cdot 2-1=7,$$

а оптимальный (с точки зрения налоговой службы) сбор налога

$$T=t\left(4-\frac{t}{4}\right)=8\cdot\left(4-\frac{8}{4}\right)=16.$$

Интересно сопоставить эти цифры ($x=2,\ \Pi_{\max}=7$) с цифрами при отсутствии налогообложения. При $t=0$ решение задачи на максимизацию прибыли дало следующие результаты (см. предыдущий пример): $x=4,\ \Pi_{\max}=31$.

Вывод: ***уменьшение налогообложения стимулирует рост выпуска продукции и приводит при этом к увеличению прибыли от ее реализации.***

Понятно, почему производители прикладывают столько усилий, чтобы снизить ставку налога.

Пример 8. *Минимизация средних издержек*. Доказать с помощью теоремы Ферма экономический закон, согласно которому при наиболее экономичном производстве достигается равенство средних и предельных издержек.

Решение

Уровнем наиболее экономичного производства является такой, при котором средние издержки по производству товара минимальны. Средние издержки определяются как $\text{A}C = \frac{C(x)}{x}$, т.е. издержки по производству товара, деленные на произведенное его количество. По необходимому условию минимума в точке минимума функции $\frac{C(x)}{x}$ производная этой функции равна нулю. Следовательно,

$$\left(\frac{C(x)}{x}\right)' = \frac{C'(x)\cdot x - C(x)}{x^2} = 0,$$

откуда

$$C'\cdot x - C = 0, \quad C' = \frac{C}{x},$$

или $\text{M}C = \text{A}C$, что и требовалось доказать.

Вывод: ***при наиболее экономичном производстве достигается равенство средних и предельных издержек.***

Пример 10. *Задача максимизации дохода*. При определении максимально возможного дохода государства от сбора налогов находится экстремум функции.

Предположим, законы спроса и предложения имеют следующий вид:

$$p = -3x + 12,$$
$$p = 2x + 2.$$

Найти величину налога t, при которой доход государства будет максимален.

Решение

После введения налога t имеем систему

$$\begin{cases} p_c = -3x + 12 \\ p_s = 2x + 2 \\ p_c = p_s + t. \end{cases}$$

Выражаем t через x и подставляем в функцию T, определяющую доход государства:

$$-3x + 12 = 2x + 2 + t$$
$$t = 10 - 5x$$
$$T = xt = x(10 - 5x) = 10x - 5x^2.$$

Находим максимум функции T:

$$\begin{cases} T' = 10 - 10x = 0 \\ x = 1 \\ T'' = -10 < 0. \end{cases}$$

Следовательно, $x = 1$- точка максимума.

В точке $x = 1$ находим $t = 5,\ T = 5$. Следовательно, доход государства максимален при $t = 5$.

Упражнения

1. Найти экстремум функции $f(x)$, если

а) $f(x) = (x-2)^2 (x+1)^3$; б) $f(x) = \left|x^2 - 4\right| e^{-|x|}$.

2. Сахарный завод производит x единиц продукции в месяц, а суммарные издержки составляют $y = \frac{1}{50}x^2 + 15x + 800$. Зависимость между удельной ценой p и количеством единиц продукции x, которое можно продать по этой цене, такова: $p = 50 - \frac{1}{10}x$. Рассчитать, при каких условиях максимум будет максимальным.

2. Наибольшее и наименьшее значения функции на множестве

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором множестве $V \subseteq R^1$ и точка $x_0 \in V$.

Если для всех $x \in V$ выполняется неравенство $f(x) \le f(x_0)$, то говорят, что в точке x_0 функция $f(x)$ *принимает свое наибольшее значение* $f(x_0)$ на *множестве* V.

Если для всех $x \in V$ справедливо неравенство $f(x) \ge f(x_0)$, то в точке x_0 функция $f(x)$ *принимает свое наименьшее значение* $f(x_0)$ на *множестве* V.

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $]a,b[$, то она достигает на этом отрезке своих наибольшего и наименьшего значений. Для **отыскания наибольшего и наименьшего значений функции** необходимо:

- найти все критические точки функции, принадлежащие отрезку $[a,b]$;
- добавить к ним концы отрезка (точки $x = a$ и $x = b$);
- найти значения функции во всех выделенных точках;
- выбрать из полученных значений самое большое и самое маленькое.

Если же функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a,b]$ конечное число точек разрыва, то для отыскания наибольшего и наименьшего значений такой функции необходимо: добавить к указанным точкам все точки разрыва функции, принадлежащие отрезку $[a,b]$, и исследовать поведение функции в окрестности каждой точки разрыва.

Наконец, если функция $f(x)$ задана на открытом промежутке (например, на интервале $]a,b[$, $a < b$), то дополнительно необходимо исследовать поведение функции в односторонних окрестностях концов промежутка (при $x \to a+0$, при $x \to b-0$).

Примеры

11. Функция $f(x)=x^3-3x^2$ определена и непрерывна на отрезке $[1,3]$. Ее производная $f'(x)=3x(x-2)$, так что точки $x=0$ и $x=2$- критические. При этом, однако, $x=0\notin[1,3]$. Следовательно, необходимо рассмотреть лишь точки $x=1$, $x=2$, $x=3$. Имеем: $f(1)=-2$, $f(2)=-4$, $f(3)=0$. Таким образом, наибольшее значение, равное 0 функция принимает в точке $x=3$, а наименьшее значение, равное (-4), - в точке $x=2$.

12. Рассмотрим функцию $f(x)=\begin{cases} x^2 \ \ \textit{при} \ -2\le x<0, \\ x-1 \ \ \textit{при} \ 0\le x\le 2. \end{cases}$

Функция определена на отрезке $[-2,2]$, однако, разрывная при $x=0$ $\left(\lim\limits_{x\to -0} x^2=0\right.$, в то время как $\left.f(0)=-1\right)$.

Критических точек функция $f(x)$ не имеет, так как $f'(x)=2x$ при $-2\le x<0$ и $f'(x)=1$ при $0<x\le 2$, т.е. $f'(x)\ne 0$ на отрезке $[-2,2]$.

Следовательно, необходимо рассмотреть лишь точки $x=0$, $x=0$, $x=2$. Имеем: $f(-2)=4$, $f(0)=-1$, $\lim\limits_{x\to -0} f(x)=0$, $f(2)=1$.

Таким образом, наибольшее значение, равное 4, функция принимает при $x=-2$, а наименьшее значение, равное (-1), - при $x=0$.

13. Функция $f(x)=4-x^2$ определена и непрерывна в полуинтервале $[-2,1[$. Ее производная $f'(x)=-2x$, так что точка $x=0$ - критическая точка, принадлежащая $[-2,1[$. Необходимо рассмотреть точки $x=-2$, $x=0$, $x=1$. Имеем: $f(-2)=0$, $f(0)=4$, $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}\left(4-x^2\right)=3$.

Таким образом, наибольшее значение, равное 4, функция принимает в точке $x=0$, а наименьшее значение, равное 0, - в точке $x=-2$.

Упражнения

1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на множестве M, если:

а) $f(x)=(x-2)^2(x+1)^3$, $\mathsf{M}=[0,\ 3]$; б) $f(x)=\left|x^2-4\right|e^{-|x|}$, $\mathsf{M}=R^1$.

2. Определить отношение радиуса основания к высоте цилиндра, если при данном объеме цилиндра площадь его полной поверхности является наименьшей.

Вопросы для самопроверки

1. Какую точку называют *точкой нестрого минимума (нестрого максимума)* функции? Что называют *минимумом (максимумом)* этой функции?

2. Какую точку называют *точкой строго минимума (строго максимума)* функции?

3. Какие точки функции называют ее *точками экстремума*?

4. Приведите необходимый признак экстремума.

5. Какие точки называют стационарными точками этой функции? А какие точки - ее критическими точками?

6. Приведите все достаточные условия строгого экстремума непрерывной функции.

7. Когда функция $f(x)$, определенная на отрезке $]a,b[$, достигает на этом отрезке своих наибольшего и наименьшего значений.

8. Что неоходимо для отыскания наибольшего и наименьшего значений функции? А если же функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a,b]$ конечное число точек разрыва? А если функция $f(x)$ задана на открытом промежутке (например, на интервале $]a,b[$, $(a<b)$?

§28. Исследование функции одной переменной с помощью производных

Ключевые слова: *монотонность, выпуклость, точки перегиба, асимптоты, график функции.*

Многие явления, в том числе явления в экономике можно описать с помощью функций. Зная производные, можно изучить разные свойства функции, т.е. исследовать характер их изменений и затем наглядно представлять их в графике функции.

Изучая характер измения функции, следует:

1) указать интервал, в котором функция определена;

2) определить точки пересечения кривой функции с осью абцисс, т.е. точки в которых функция принимает нулевые значения;

3) промежутки, на которых $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$, если таковые имеют место;

4) определить точки, в которых функция возрастает или убывает;

5) найти экстремумы функций;

6) определить тип выпуклости кривой;

7) исследовать, имеет ли функция точки перегиба;

8) исследовать, имеет ли функция асимтоты;

9) начертить график функции.

1. Признаки монотонности функции

Пусть функция $f\left(x\right)$ определена и дифференцируема в интервале $\left[a,b\right]$.

Для того чтобы функция $f\left(x\right)$ была *неубывающей* (*невозрастающей*) в интервале $\left]a,b\right[$ производная $f'\left(x\right) \geq 0, \quad \left(f'\left(x\right) \leq 0\right)$.

Для того чтобы функция $f\left(x\right)$ была *строго возрастающей* (*строго убывающей*) в интервале $\left]a,b\right[$ производная $f'\left(x\right) \geq 0, \quad \left(f'\left(x\right) \leq 0\right)$.

Пример 1. Для функции $f(x)=x^2e^{-x}$ производная $f'(x)=xe^{-x}(2-x)$. Поэтому $f'(x)<0$, если $x\in\,]-\infty,0[\,\cup\,]2,+\infty[$, и в этих промежутках функция $f(x)$ строго убывает; $f'(x)<0$, если $x\in\,]0,2[$, и в этом интервале функция строго возрастает.

Упражнения

1. Исследовать в каких интервалах функция

$$y=x^3+3x^2-9x-2$$

будет возрастающей, а в каких интервалах убывающей.

2. Исследовать в каких интервалах функция

$$y=\frac{1}{1+x^2}$$

строго монотонна.

Пример 2. Предприятие производит x единиц продукции в месяц. Зависимость финансовых накоплений предприятия от объема выпуска продукции выражается формулой

$$y=-0{,}01x^3+300x+300.$$

Найдем производную

$$y'=-0{,}03x^2+300.$$

Отсюда $y'<0$, если $-0{,}03x^2+300<0$, или $0{,}03x^2-300>0$. Неравенство справедливо, если $x>100$. Следовательно, если выпуск продукции превышает 100 единиц, **финансовые накопления предприятия убывают.**

2. Выпуклость функции

График дифференцируемой функции $y=f(x)$ направлен выпуклостью вверх (выпуклостью вниз) на интервале $]a,b[$, если в пределах этого интервала он расположен ниже (выше) касательной, проведенной в любой его точке (рис. 1).

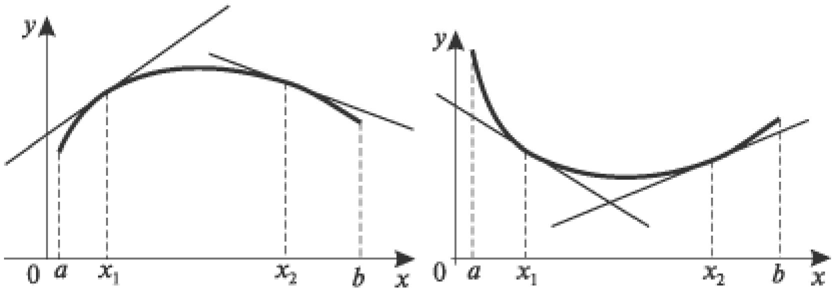


Рис. 1

Достаточное условие выпуклости

Пусть функция $y=f(x)$ определена и дважды дифференцируема на интервале $]a,b[$. Тогда:

а) если $f''(x)<0$ во всех точках интервала $]a,b[$, то график функции $f(x)$ направлен выпуклостью вверх на этом интервале;

б) если $f''(x)>0$ во всех точках интервала $]a,b[$, то график функции $f(x)$ направлен выпуклостью вниз на этом интервале.

Пример 3. Для функции $f(x)=\sqrt[3]{x}(x-8)$ вторая производная

$$f''(x)=\frac{4}{9}\frac{x+4}{\sqrt[3]{x^5}}.$$

Поэтому $f''(x)<0$ при $4<x<0$ и, следовательно, на этом интервале график функции направлен выпуклостью вверх; $f''(x)>0$ интервалах $]-\infty,-4[$ и $]0,+\infty[$, следовательно, на этих промежутках график функции направлен выпуклостью вниз.

Упражнение

Найти интервалы выпуклости функции:

а) $f(x)=x^4-6x^2-6x+1$; б) $f(x)=\dfrac{x^2}{(x-1)^3}$; в) $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x\sqrt{x}}$.

3. Точки перегиба функции

Определение. Точка $(x_0; f(x_0))$ называется ***точкой перегиба*** графика функции $y = f(x)$, если в этой точке существует касательная к графику и в промежутках $]x_0 - \delta, x_0[$, и $]x_0, x_0 + \delta[$, где δ - некоторое положительное число, график функции имеет разное направление выпуклости.

Так, на рис. 1 *а* точка M_0 является точкой перегиба графика функции, а на рис. 2 *б* точка M_1 не является точкой перегиба, хотя в этой точке и происходит изменение направления выпуклости (в точке M_1 не существует касательной к графику).

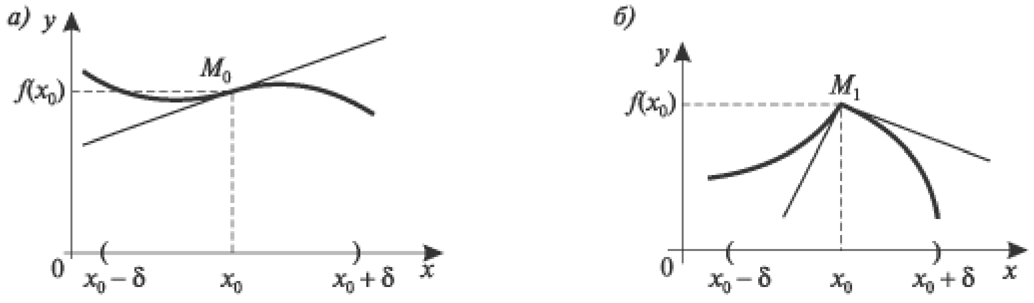


Рис. 2

Пусть точка $(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции $y = f(x)$, определенной в некоторой окрестности точки x_0. Тогда либо вторая производная $f''(x_0)$ не существует, либо $f''(x_0) = 0$ **(необходимый признак точки перегиба)**.

Пусть в точке $(x_0; f(x_0))$ существует касательная (хотя бы вертикальная) к графику функции $y = f(x)$ и в некоторой окрестности $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ $(\delta > 0)$ существует $f''(x_0)$, за исключением, быть может, точки x_0, причем $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует. Если при этом в интервале $]x_0 - \delta, x_0[$ и $]x_0, x_0 + \delta[$ производная $f''(x_0)$ имеет противоположные знаки, то точка $(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции $y = f(x)$ **(достаточные условия точки перегиба)**.

Примеры

4. Рассмотрим функцию $f(x) = x^3$. Ее производная $f'(x) = 3x^3$, а

$f''(x)=6x$. Тогда $f''(x)=0$ при $x=0$, причем $f''(0)=0$ (в точке $x=0$ существует касательная к графику). Производная $f''(x)<0$ при $x<0$ и $f''(x)>0$ при $x>0$. Следовательно, точка $(0,0)$ является точкой перегиба графика функции $y=x^3$.

5. Для функции

$$f(x)=\sqrt[3]{x}(x-8)$$

имеем

$$f'(x)=\frac{4}{3}\frac{x-2}{\sqrt[3]{x^2}}, \qquad f''(x)=\frac{4}{9}\frac{x+4}{\sqrt[3]{2}},$$

так что $f''(x)=0$ при $x=-4$ и $f''(x)$ не существует при $x=0$. При этом $f'(-4)=-\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$, а $f'(0)=-\infty$ (в точках $x=-4$ и $x=0$ существуют касательные к графику функции, причем при $x=0$ касательная вертикальна). Кроме того, $f''(x)>0$ при $x<-4$, $f''(x)<0$ при $-4<x<0$ и $f''(x)>0$ при $x>0$. Следовательно, точки $\left(-4;12\sqrt[3]{4}\right)$ и $(0,0)$ являются точкой перегиба графика функции.

Упражнения

1. Найти точки перегиба графика функции $y=e^{\sqrt[3]{x}}$ и угловые коэффициентфы касательных к графику функции в его точках перегиба.

2. Определить, является ли точка $x=0$ точкой перегиба функции $f(x)=\frac{x^3}{2}-tgx+\sin x$.

3. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции:

а) $f(x)=x^4-6x^2-6x+1$; б) $f(x)=\frac{x^2}{(x-1)^3}$; в) $f(x)=\frac{|x-1|}{x\sqrt{x}}$.

Более детальное исследование характера изменений функции облегчает определение так называемых асимптот.

4. Асимптоты

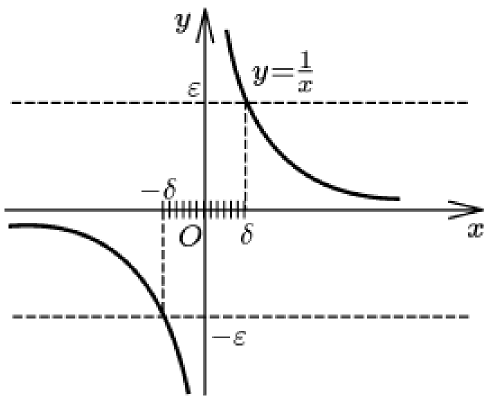
А. Вертикальная асимптота

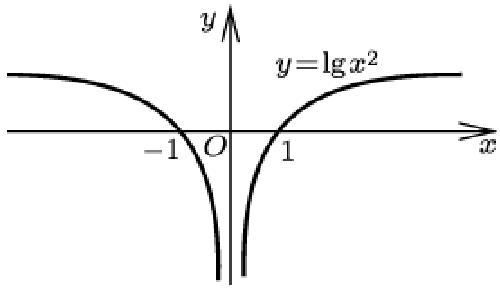
Определение. Если выполнено хотя бы одно из условий

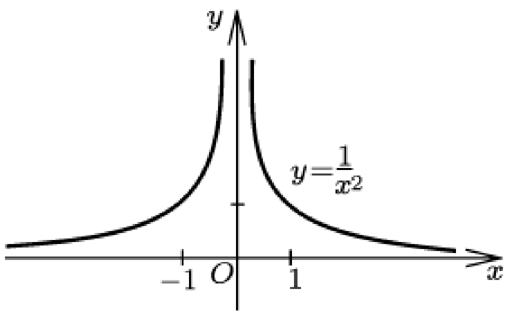
$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\infty, \quad \lim_{x\to x_0+0} f(x)=\infty,$$

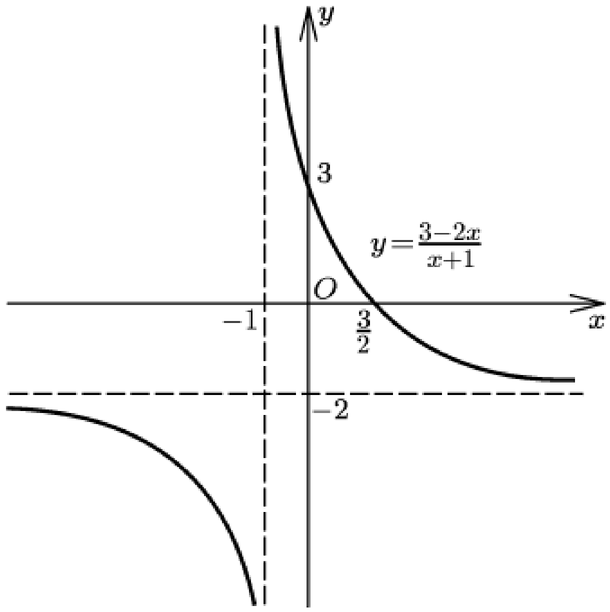
то прямую $x=x_0$ называют **вертикальной асимптотой графика функции** $y=f(x)$**.**

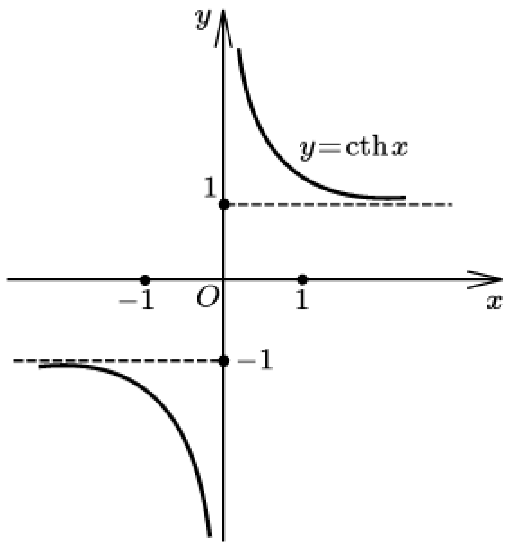
Например, прямая $x=0$ - вертикальная асимптота графиков функций $y=\dfrac{1}{x}$, $y=\lg x^2$, $y=\dfrac{1}{x^2}$, $y=cthx$, прямая $x=-1$ - вертикальная асимптота графика функции $y=\dfrac{3-2x}{x+1}$, прямые $y=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ (k\in Z)$ - вертикальные асимптоты графика функции $y=tgx$.











Б. Асимптота (невертикальная асимптота)

Определение. Прямую $y = kx + b$ **называют асимптотой (невертикальной асимптотой) графика функции** $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - (kx + b) \right) = 0. \tag{1}$$

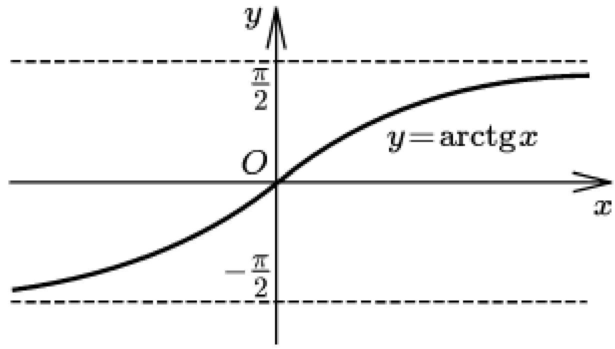
Если $k \neq 0$, то асимптоту называют **наклонной,** а если $k = 0$, то асимптоту $y = b$ называют **горизонтальной.**

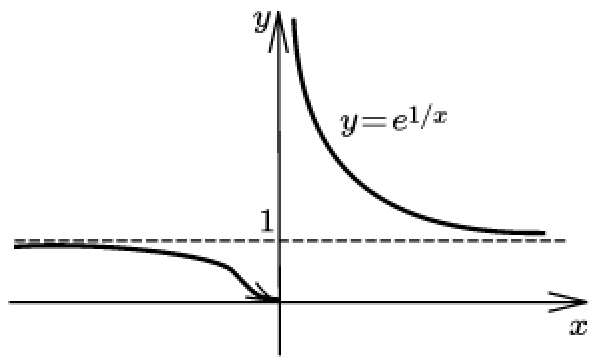
Аналогично вводится понятие асимптоты при $x \to -\infty$.

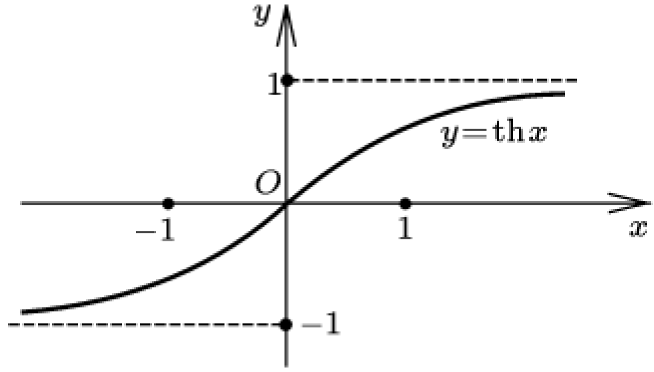
Например, прямая $y = 0$ - горизонтальная асимптота графиков функций

$y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{1}{x^2}$ при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$, графика функций $y=a^x$, $a>1$ при $x\to-\infty$.

Прямая $y=1$ - асимптота графиков функций $y=e^{\frac{1}{x}}$, $y=thx$, и $y=cthx$, при $x\to+\infty$; прямая $y=\frac{\pi}{2}$ - асимптота графика функций $y=artctg\ \ x$ при $x\to+\infty$, а прямая $y=\frac{\pi}{2}$- асимптота графика функции $y=artctgx$ при $x\to-\infty$.







Пример 6. Найти асимптоту при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ графика функции:

а) $y = \dfrac{3-2x}{x+1}$; б) $y = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$;

в) $y = \sqrt[3]{x^3 + x^2}$; г) $y = \dfrac{x^2-4}{x} e^{-\frac{5}{3x}}$.

Решение

а) Так как $y = -2 + \dfrac{5}{x+1}$, то прямая $y = -2$ - асимптота графика функции $y = \dfrac{3-2x}{x+1}$ при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

б) Разделив числитель x^3 на знаменатель $(x+1)^2$ по правилу деления многочленов получим

$$\frac{x^3}{(x+1)^2} = x - 2 + \frac{3x+2}{(x+1)^2}. \tag{2}$$

Отсюда следует, что асимптотой графика функции $y = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$ при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ является прямая $y = x - 2$.

в) Используя равенство $y = \sqrt[3]{x^3 + x^2} = x\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$ и локальную формулу Тейлора, получаем

$$y = x\left(1 + \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x + \frac{1}{3} + o(1) \text{ при } x \to \infty,$$

откуда следует, что прямая $y = x + \dfrac{1}{3}$ - асимптота графика функции $y = \sqrt[3]{x^3 + x^2}$ при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

г) Применяя формулу Тейлора для экспоненты, получаем

$$y = \left(x - \frac{4}{x}\right)\left(1 - \frac{5}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x - \frac{5}{3} + o(1) \text{ при } x \to \infty,$$

откуда следует, что прямая $y = x - \frac{5}{3}$ - асимптота графика данной функции при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

Теорема 1. Для того чтобы прямая $y = kx + b$ была асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \tag{3}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - kx \right) = b. \tag{4}$$

Доказательство. Необходимость. Если прямая $y = kx + b$ - асимптота графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, то выполняется условие (1) или равносильное ему условие

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \;\; \alpha(x) \to 0 \text{ при } x \to +\infty. \tag{5}$$

Разделив обе части неравенства (5) на x, получим

$$\frac{f(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x},$$

откуда следует, что существует предел (3).

Из равенства (5) получаем

$$f(x) - kx = b + \alpha(x), \text{где } \alpha(x) \to 0 \text{ при } x \to +\infty,$$

откуда следует, что существует предел (4).

Достаточность. Если существуют конечные пределы (3) и (4), то $f(x) - \left(kx + b = \alpha(x) \right)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, т.е. выполняется условие (1). Это означает, что прямая $y = kx + b$ - асимптота графика функции $y = f(x)$.

Замечание. Для случая горизонтальной асимптоты теорема 1 формулируется в следующем виде: для того чтобы прямая $y = b$ была асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$.

5. Построение графиков функций

При построении графика функции $y = f(x)$ можно придерживаться следующего плана:

1. Найти область определения функции. Выяснить, является ли функция четной (нечетной), периодической.

2. Найти точки пересечения графика с осями координат и промежутки, на которых $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$.

3. Найти асимптоты графика.

4. Сделать эскиз графика.

5. Вычислить $f'(x)$, найти экстремумы и промежутки возрастания (убывания) функции.

6. Вычислить $f''(x)$, найти точки перегиба и промежутки выпуклости вверх (вниз) функции.

7. Нарисовать график функции.

Примеры

7. Построить график функции $y = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$.

Решение

Функция определена при $x \neq -1$, принимает положительные значения при $x > 0$ и отрицательные при $x < 0$, $y(0) = 0$. Прямые $x = -1$ и $y = x - 2$ – асимптоты графика этой функции. Из равенства (2) следует, что при $x > -\dfrac{2}{3}$ график лежит выше прямой $y = x - 2$, а при $x < -\dfrac{2}{3}$ ниже этой прямой.

Вычисляем производные:

$$y' = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, \tag{6}$$

$$y'' = \frac{6x}{(x+1)^4}. \qquad (7)$$

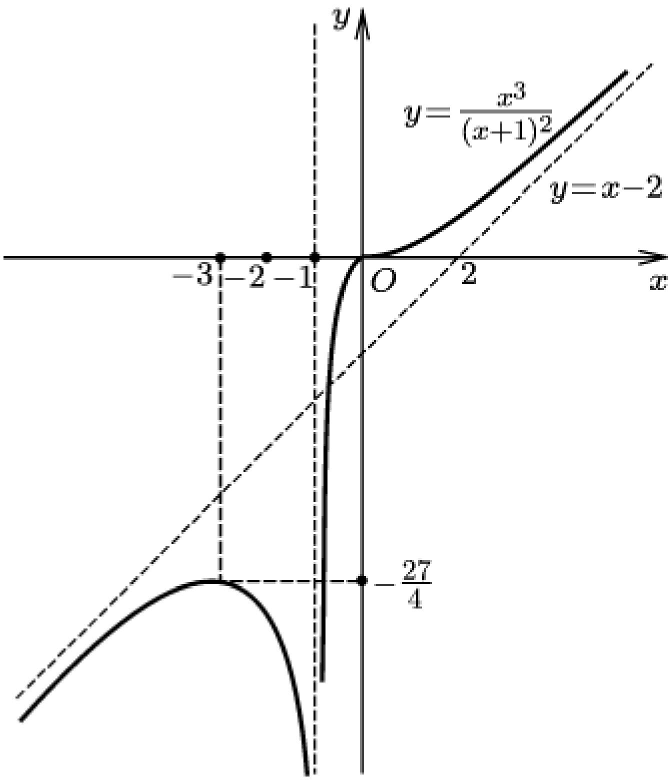


Рис. 3

Согласно формуле (6) функция $y(x)$ имеет две стационарные точки $x=0$ и $x=-3$. Точка $x=0$ не является точкой экстремума этой функции, как y' не меняет знак при переходе через точку $x=0$.

Точка $x=-3$ является точкой максимума функции $y(x)$, так как y' меняет знак с плюса на минус при переходе через точку $x=-3$. Находим

$$y(-3) = -\frac{27}{4}.$$

Из формулы (7) следует, что $y''<0$ при $x<0$ $(x \neq -1)$ и $y''>0$ при $x>0$. Поэтому функция $y(x)$ является выпуклой вверх на интервалах $(-\infty,\ -1)$ и $(-1,\ 0)$, и выпуклой вниз на интервале $(0,\ +\infty)$. Точка $x=0$, в которой функция $y(x)$ меняет направление выпуклости, есть точка перегиба этой функции. График функции изображен на рис. 3.

8. Построить график функции $y=\sqrt[3]{x^3+x^2}$.

Решение

Функция $y(x)$ определена на R^1, причем $y<0$ при $x<-1$, $y>0$ при $x>-1$, $(x\neq 0)$, $y(-1)=y(0)=0$. Прямая $y=x+\dfrac{1}{3}$ - асимптота графика этой функции при $x\to+\infty$. Вычисляем производные:

$$y'=\frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}x^{-\frac{1}{3}}(3x+2), \tag{8}$$

$$y''=-\frac{2}{9}(x+1)^{-\frac{5}{3}}x^{-\frac{4}{3}}. \tag{9}$$

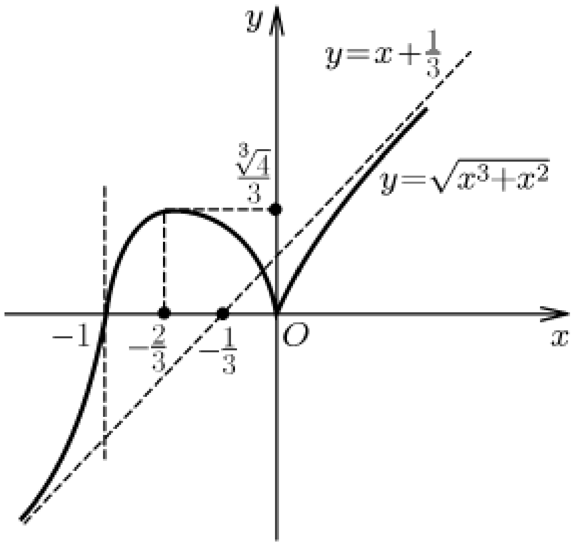


Рис. 4

Формулы (8) и (9) справедливы при $x\neq -1$ и $x\neq 0$. Из формулы (8) согласно теореме Лагранжа находим

$$f'(-1)=\lim_{x\to-1}y'(x)=+\infty,\quad f'_+(0)=+\infty,\quad f'_-(0)=-\infty.$$

Так как в точке $x=-\dfrac{2}{3}$ производная меняет знак с плюса на минус, то $x=-\dfrac{2}{3}$ - точка максимума функции $y(x)$, причем $y\left(-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$. Аналогично точка $x=0$ - точка минимума функции и $y(0)=0$.

Из формулы (9) следует, что $y''>0$ при $x<-1$ и $y''<0$ при $x>-1$ $(x\neq 0)$. Поэтому функция $y(x)$ является выпуклой вниз на интервале $(-\infty,-1)$ и выпуклой вверх на интервалах $(-1,\ 0)$ и $(0,\ +\infty)$. График функции изображен на рис. 4.

Упражнения

1. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции:

а) $f(x)=x^4-6x^2-6x+1$; б) $f(x)=\dfrac{x^2}{(x-1)^3}$; в) $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x\sqrt{x}}$.

2. Найти точки перегиба графика функции $y=e^{\sqrt[3]{x}}$ и угловые коэффициентфы касательных к графику функции в его точках перегиба.

3. Определить, является ли точка $x=0$ точкой перегиба функции $f(x)=\dfrac{x^3}{2}-tgx+\sin x$.

4. При каких значениях a кривая $y=x^4+ax^3+\dfrac{3}{2}x^2+1$ будет выпукла вниз на всей числовой прямой?

5. При каких значениях a и b точка $A(1;3)$ является точкой перегиба кривой $y=ax^3+bx^2$?

6. Покажите, что кривая $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ имеет три точки перегиба, лежащие на одной прямой.

7. Докажите, что график всякого многочлена, содержащего переменную только в четных степенях с положительными коэффициентами обращен выпуклостью вниз.

8. Докажите, что график всякого многочлена нечетной степени, большей 1, имеет хотя бы одну точку перегиба.

9. Построить график функции:

а) $f(x)=\dfrac{1}{4}\left(x^3+3x^2-9x-3\right)$; б) $f(x)=\dfrac{x^2}{4(2-x)^2}$;

в) $f(x)=x\sqrt[3]{(x+1)^2}$.

10. Функция полных издержек имеет вид $K=x^3+2x^2+x$. Исследовать характер изменений этой функции, а также функции издержек. Начертить ее график.

Вопросы для самопроверки

1. Приведите признаки монотонности функции.
2. Сформулируйте достаточное условие выпуклости.
3. Какую точку называют точкой перегиба графика функции?
4. Приведите необходимое условие точки перегиба.
5. Приведите достаточное условие точки перегиба.
6. Что называют вертикальной асимптотой графика функции?
7. Что называют невертикальной асимптотой графика функции?
8. Когда невертикальную асиптоту называют наклонной?
9. Когда невертикальную асиптоту называют горизонтальной?
10. Сформулируйте необходимое и достаточное условие, чтобы прямая $y=kx+b$ была асимптотой графика функции.
11. Какого плана можно придерживаться при построении графика функции.

§29. Дифференцируемость функции многих переменных

Ключевые слова: *частные производные, полное приращение, дифференцируемость, дифференциал, градиент, предельные (маржинальные) характеристики производственной функции, эластичность по факторам.*

1. Частные производные функций многих переменных

Определение. Пусть функция

$$f(X) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

определена в окрестности точки X_0. Рассмотрим функцию одной переменной

$$\phi(x_1) = f(x_1, x_{20}, ..., x_{n0}).$$

Функция $\phi(x_1)$ может иметь производную в точке x_{10}. По определению такая производная называется **частной производной** $\dfrac{\partial f(X_0)}{\partial x_1}$.

Таким образом,

$$\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_{10} + \Delta x_1, x_{20}, ..., x_{n0}) - f(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})}{\Delta x_1}.$$

Аналогично определяются частные производные (первого порядка)

$$\frac{\partial f(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})}{\partial x_i}, \qquad i = 2, 3, ..., n.$$

Употребляются и другие обозначения для частных производных первого порядка

$$\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_i} = f'_{x_i}(X_0) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(X_0).$$

Функция двух переменных может иметь в точке (x_0, y_0) частные производные первого порядка

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}.$$

Для функции трех переменных – три частные производные первого порядка

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}.$$

Поскольку при вычислении частных производных все переменные, кроме одной, фиксируются, то техника вычисления частных производных такая же, как техника вычисления производных функций одной переменной.

Примеры

1. Если $f(X) = x_1^5 x_2 x_3 - x_1 x_2^3 x_3 + 2x_2 x_3^2$, то

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \left(x_1^5\right)' x_2 x_3 - x_1' x_2^3 x_3 = 5x_1^4 x_2 x_3 - x_2^3 x_3,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1^5 x_2' x_3 - x_1 \left(x_2^3\right)' x_3 + 2x_2' x_3^2 = x_1^5 x_3 - 3x_1 x_2^2 x_3 + 2x_3^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = x_1^5 x_2 x_3' - x_1 x_2^3 x_3' + 2x_2 \left(x_3^2\right)' = x_1^5 x_2 - x_1 x_2^3 + 4x_2 x_3.$$

Для того чтобы вычислить частную производную в некоторой фиксированной точке, достаточно найти эту частную производную в любой точке и в найденное выражение подставить вместо неизвестных координаты данной точки.

2. Найти частную производную $\frac{\partial f}{\partial y}(X_0)$, где $f(X) = e^{x^2+y^2}$, $X_0(1;-1)$.

Решение

Так как $\frac{\partial f}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2}$, то $\frac{\partial f}{\partial y}(X_0) = 2(-1)e^{1^2+(-1)^2} = -2e^2$.

Упражнения

1. Найти частные производные первого порядка функции $f(x, y)$:

а) $f(x, y) = x + y^2 + \ln\left(x + y^2\right)$;

б) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$;

в) $f(x, y) = \frac{x(x - y)}{y^2}$;

г) $f(x, y) = \sin x - x^2 y$;

д) $f(x, y) = \sin\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}$;

е) $f(x, y) = e^x(\cos x + x\sin y)$;

ж) $f(x, y) = \ln\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$;

з) $f(x,y)=\arcsin\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$; и) $f(x,y)=\left(1+\sin^2 x\right)^{\ln y}$.

2. Вычислить частные производные первого порядка функции $f(x,y)$ в данной точке, если:

а) $f(x,y)=\dfrac{x}{y^2}$, $(1,1)$;

б) $f(x,y)=\ln\left(1+\dfrac{x}{y}\right)$, $(1,2)$;

в) $f(x,y)=xye^{\sin \pi xy}$, $(1,1)$;

г) $f(x,y)=(2x+y)^{2x+y}$, $(1,-1)$.

3. Найти частные производные первого порядка функции $f(x,y,z)$:

а) $f(x,y,z)=xy+yz+zx$;

б) $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$;

в) $f(x,y,z)=\dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{z}$;

г) $f(x,y,z)=\dfrac{y}{z}+arctg\,\dfrac{z}{x}+arctg\,\dfrac{x}{z}$;

д) $f(x,y,z)=z^{xy}$;

е) $f(x,y,z)=\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$.

2. Полное приращение функции многих переменных

Пусть функция $f(X)$ определена в некоторой окрестности точки $X_0(x_{10},...,x_{i0},...,x_{n0})$. Рассмотрим точку $X_\Delta(x_{10}+\Delta x_1,...,x_{i0}+\Delta x_i,...,x_{n0}+\Delta x_n)$.

Определение. Полным приращением Δf функции $f(X)$ в точке X_0 называется число $f(X_\Delta)-f(X_0)$, т. е.

$$\Delta f = f\left(X_{\Delta}\right) - f\left(X_0\right) =$$
$$= f\left(x_{10} + \Delta x_1, ..., x_{i0} + \Delta x_i, ..., x_{n0} + \Delta x_n\right) - f\left(x_{10}, ..., x_{io}, ..., x_{n0}\right).$$

Примеры

3. Найти полное приращение функции $f\left(X\right) = x_1^2 + x_2^2$ в точке $X_0\left(1;-2\right)$.

Решение

Так как $X_{\Delta}\left(1 + \Delta x_1; -2 + \Delta x_2\right)$, то

$$\Delta f = f\left(X_{\Delta}\right) - f\left(X_0\right) =$$
$$= \left(1 + \Delta x_1\right)^2 + \left(-2 + \Delta x_2\right)^2 - 1^2 - \left(-2\right)^2 = 2\Delta x^1 - 4\Delta x_2 + \left(\Delta x_1\right)^2 + \left(\Delta x_2\right)^2.$$

Полное приращение функции многих переменных существует в любой точке, в окрестности которой эта функция определена.

4. Найти полное приращение функции $f\left(X\right) = x_1^3 + x_1 x_2 + x_1 x_3$ в произвольной точке $X\left(x_1, x_2, x_3\right) \in R^3$.

Решение

Так как $M_{\Delta}\left(x_1 + \Delta x_1; x_2 + \Delta x_2; x_3 + \Delta x_3\right)$, то

$$\Delta f = f\left(X_{\Delta}\right) - f\left(X_0\right) = \left(x_1 + \Delta x_1\right)^3 + \left(x_1 + \Delta x_1\right)\left(x_2 + \Delta x_2\right) +$$
$$+ \left(x_1 + \Delta x_1\right)\left(x_3 + \Delta x_3\right) - x_1^3 - x_1 x_2 - x_1 x_3 = \left(3x_1^2 + x_2 + x_3\right)\Delta x_1 + x_1 \Delta x_2 +$$
$$+ x_1 \Delta x_3 + 3x_1\left(\Delta x_1\right)^2 + \left(\Delta x_1\right)^3 + \Delta x_1 \Delta x_2 + \Delta x_1 \Delta x_3.$$

3. Дифференцируемость функций многих переменных

Пусть функция $f\left(X\right)$ определена в некоторой окрестности точки X_0, $X_0 \in R^n$.

Определение. Функция $f\left(X\right)$ называется **дифференцируемой в точке** X_0, если полное приращение Δf в этой точке имеет следующий вид:

$\Delta f = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + ... + A_n \Delta x_n + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + ... + \alpha_n \Delta x_n$, где $A_1, A_2, ..., A_n$ - некоторые числа не зависящие от $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$, а $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \to 0$ при $\Delta x_1 \to 0, \Delta x_2 \to 0, \Delta x_n \to 0$.

Примеры

5. Функция $f(X)=x_1^2+x_2^2$ дифференцируема в точке $X_0(1;-2)$.

В самом деле,

$$\Delta f=2\Delta x_1-4\Delta x_2+(\Delta x_1)^2+(\Delta x_2)^2,$$

т.е.

$$\Delta f=A_1\Delta x_1+A_2\Delta x_2+\alpha_1\Delta x_1+\alpha_2\Delta x_2,$$

где $A_1=2, A_2=-4,\ \alpha_1=\Delta x_1,\ \alpha\ =\Delta x_{2.}.$

6. Функция $f(X)=x_1^3+x_1x_2+x_1x_3$ дифференцируема в любой точке $X(x_1,x_2,x_3)\in R^3.$

Действительно,

$$\Delta f=\left(3x_1^2+x_2+x_3\right)\Delta x_1+x_1\Delta x_2+x_1\Delta x_3+\Delta x_1\left(3x_1\Delta x_1+\Delta x_2+\Delta x_3+(\Delta x_1)^2\right),$$

т.е.

$$\Delta f=A_1\Delta x_1+A_2\Delta x_2+A_3\Delta x_3+\alpha_1\Delta x_1,$$

где $A_1=3x_1^2+x_2+x_3,\ A_2=x_1,\ A_3=x_1,\ \alpha_1=3x_1\Delta x_1+\Delta x_2+\Delta x_3+(\Delta x_1)^2$ и $\alpha_1\to 0$ при $\Delta x_1\to 0,\ \Delta x_2\to 0,\ \Delta x_3\to 0.$

Замечание. Линейная функция $f(X)=a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n$ и квадратичная функция

$$f(X)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+...+a_{nn}x_n^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+...+2a_{1n}x_1x_n+$$
$$2a_{23}x_2x_3+...+2a_{2n}x_2x_n+...+2a_{n-1nn-1}x_{n-1}x_n$$

дифференцируемы в любой точке $X(x_1,x_2,...,x_n)\in R^n.$

Упражнения

1. Показать, что функция $f(x_1,x_2)=\sqrt[3]{x_1^3+x_2^4}$ дифференцируема в точке $X_0(0;0).$

2. Показать, что функция $f(x_1,x_2)=\sqrt[3]{x_1^3+x_2^3}$ не дифференцируема в точке $X_0(0;0).$

Свойства дифференцируемых функций:

1. Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она в этой точке непрерывна.

2. Если функция $f(M)$ дифференцируема в точке M_0, то она имеет в этой точке все частные производные **(необходимое условие)**, причем

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0)\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0)\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0)\Delta x_n + \alpha_1\Delta x_1 + \alpha_2\Delta x_2 + \ldots + \alpha_n\Delta x_n,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \to 0$ при $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n \to 0$.

3. Если функция $f(X)$ имеет все частные производные в некоторой окрестности точки X_0, которые непрерывны в самой точке X_0, то функция $f(X)$ дифференцируема в этой точке **(достаточное условие).**

Замечание. Непрерывность частных производных в точке не является необходимым условием дифференцируемости функции в этой точке.

Пример 7. Функция

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{если} \quad x^2+y^2>0, \\ 0, & \text{если} \quad x=y=0 \end{cases}$$

дифференцируема в точке $X_0(0;\,0)$, так как

$$f(x,y) = 0\cdot x + 0\cdot y + o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \text{ при } (x,y)\to(0,0).$$

Но при $x^2+y^2>0$ частная производная

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

не имеет предела при $(x,y)\to(0,0)$ и, следовательно, не является непрерывной функцией в точке $X_0(0;\,0)$. Чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что $\dfrac{\partial f(x,0)}{\partial x}$ не имеет предела при $x\to 0$.

Упражнения

1. Показать, что функция $f(x,y)=x+y^2+\ln(x+y^2)$ дифференцируема в точке (0;1) и найти $df(0,1)$.

2. Исследовать на дифференцируемость в точке (0;0) функцию $f(x,y)$, если

а) $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$;

б) $f(x,y)=\cos\sqrt[3]{xy}$;

в) $f(x,y)=arctg\left(5+x^{\frac{4}{5}}y^{\frac{2}{7}}\right)$;

г) $f(x,y)=\arcsin(xy)+\sqrt[3]{x^3+y^3}$.

4. Дифференциал функции многих переменных

Определение. Если функция $f(X)$ дифференцируема в точке X_0, то линейная часть приращения функции $f(X)$ в точке X_0 называется ее ***дифференциалом*** $df(X_0)$в точке X_0,т.е.

$$df(M_0)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0)\Delta x_1+\frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0)\Delta x_m.$$

Можно считать, что

$$dx_1=\Delta x_1,\ dx_2=\Delta x_2\ ,...,\ dx_n=\Delta x_n.$$

Тогда

$$df(X_0)dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0)dx_2+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0)dx_n.$$

Пример 8. Найти дифференциал функции $f(X)=x_1^3x_2+x_2^2x_3+x_3$ в точке $X_0(2,1,-3)$.

Решение

Так как

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=3x_1^2x_2,\qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}=x_1^3+2x_2x_3,\qquad \frac{\partial f}{\partial x_3}=x_2^2+1,$$

то

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0)=12,\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0)=2,\ \frac{\partial f}{\partial x_3}(X_0)=2,$$

и, следовательно,

$$df\left(X_0\right)=12dx_1+2dx_2+2dx_3.$$

Дифференциал сложной функции

Пусть функции $\phi_1(X),...,\phi_m(X)$ дифференцируемы в точке X_0, а функция $f(y_1,...,y_m)$ дифференцируема в точке $Y_0=\left(\phi_1(X_0),...,\phi_m(X_0)\right)$. Тогда опираясь на свойство 1 дифференцируемых функций и теорему о непрерывности сложной функции можно установить, что сложная функция $\Phi(X)=f\left(\phi_1(X),...,\phi_m(X)\right)$ дифференцируема в точке X_0.

Замечание. Правило нахождения частных производных сложной функции аналогично соответствующему правилу для функции одной переменной.

Пример 9. Пусть функция $f(x,y)$ дифференцируема во всех точках пространства R^2. Перейти к полярным координатам $x=r\cos\phi,\quad y=r\sin\phi$ и найти выражения для $\dfrac{\partial f}{\partial r}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial \phi}$.

Решение

Пусть $F=(r,\phi)=f(r\cos\phi,r\sin\phi),\quad x=r\cos\phi,\quad y=r\sin\phi$.

Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=\cos\phi\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\phi\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial \phi}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \phi}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \phi}=-r\sin\phi\frac{\partial f}{\partial x}+r\cos\phi\frac{\partial f}{\partial y}=-y\frac{\partial f}{\partial x}+x\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Упражнения

1. Пусть $f\left(u,v\right)$ дифференцируемая в R^2 функция $u=xy$, $v=x^2-y^2$. Выразить $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ через $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial v}$.

2. Преобразовать уравнение $x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{\partial z}{\partial y}=0$, приняв за новые независимые переменные $u=x$, $v=xy$.

Теперь найдем дифференциал сложной функции

$$d\Phi(X_0)=df\left(\phi_1(X_0),...,\phi_m(X_0)\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Phi(X_0)}{\partial x_i}dx_i=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(Y_0)}{\partial y_j}\frac{\partial\phi_j(X_0)}{\partial x_i}dx_i=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(Y_0)}{\partial y_j}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\phi_j(X_0)}{\partial x_i}dx_i=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(Y_0)}{\partial y_j}dy_j(X_0),$$

где $dy_j(X_0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\phi_j(X_0)}{\partial x_i}dx_i$.

Итак,

$$df\left(y_1(X_0),...,y_m(X_0)\right)=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(Y_0)}{\partial y_j}dy_j(X_0). \tag{1}$$

Если бы $y_1,...,y_m$ были независимыми переменными, то $df(Y_0)$ отличался бы от дифференциала сложной функции (*) только тем, что в выражении (1) $dy_i(X_0)$ - дифференциалы функций φ_j , а в

$$df\left(Y_0\right)=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(Y_0)}{\partial y_j}dy_j,$$

dy_i - дифференциалы независимых переменных. Формальная запись дифференциала в обеох случаях одинакова. Поэтому говорят, что ***форма первого дифференциала инвариантна относительно замены переменных.***

Инвариантность формы первого дифференциала является весьма удобным его свойством. При записи $df(Y_0)$ в виде (1) мы можем не задумываться о том, являются ли переменные $y_1,...,y_m$ независимыми. **Заметим, что во многих прикладных задачах, в том числе экономических, часто бывает затруднительно выяснить вопрос о независимости переменных.**

Пусть функция $f(X)$ дифференцируема во всех точках некоторого открытого множества $\mathrm{M}\subset R^n$. Тогда в каждой точке $X\in\mathrm{M}$ можно вычислить дифференциал

$$df(X)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(X)}{\partial x_i}dx_i .$$

Он будет функцией $2n$ переменных $x_1,...,x_n,\ dx_1,...,dx_n$, причем при фиксированных $x_1,...,x_n$ дифференциал есть линейная функция $dx_1,...,dx_n$. Правила дифференцирования такие же, как и для функций одной переменной:

а) $d(u+v)=du+dv$,

б) $d(uv)=udv+vdu$,

в) $d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{vdu-udv}{v^2}, \qquad v\neq 0$.

Основное свойство дифференциала

Если функция $f\left(M\right)$ дифференцируема в точке X_0, то $\Delta f\left(M_0\right)\approx df\left(M_0\right)$ при малых $\Delta x_1,\ \Delta x_2,\ ...\ ,\Delta x_n$, т.е.

$$\Delta f\left(X_0\right)\approx\frac{\partial f}{\partial x_2}\left(X_0\right)\Delta x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\left(X_0\right)\Delta x_2+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}\left(X_0\right)\Delta x_n .$$

Пример 10. Найти дифференциал функции $arctg\,\dfrac{y}{x}$.

Решение

Пусть $u=\dfrac{y}{x}$, тогда

$$d\left(arctg\,\frac{y}{x}\right)=d(arctgu)=\frac{du}{1+u^2}=\frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=$$

$$=\frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{xdy-ydx}{x^2}=-\frac{y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

Упражнения

1. Найти дифференциал функции $f\left(x,y\right)$, если:

а) $f\left(x,y\right)=2x^4-3x^2y^2+x^3y$;

б) $f\left(x,y\right)=\left(y^3+2x^2y+3\right)^4$;

в) $f\left(x,y\right)=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$;

г) $f(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

д) $f(x,y)=2^{-\frac{y}{x}}$;

е) $f(x,y)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$;

ж) $f(x,y)=\ln\sin\dfrac{x+1}{\sqrt{y}}$;

з) $f(x,y)=arctg\dfrac{x}{y}+arctg\dfrac{y}{x}$;

и) $f(x,y)=arctg\dfrac{x+y}{x-y}$;

й) $f(x,y)=1+\dfrac{z}{x^2+y^2}$.

2. Вычислить дифференциал функции $f(x,y)$ в данной точке, если:

а) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $(1;1)$;

б) $f(x,y)=\sqrt{xy+\dfrac{x}{y}}$, $(2;1)$;

в) $f(x,y)=\dfrac{\cos(x-2y)}{\cos(x+2y)}$, $\left(\dfrac{\pi}{4};\pi\right)$;

г) $f(x,y)=\arccos\sqrt{x^2-2y}$, $(1;\,0{,}18)$.

5. Градиент функции многих переменных

Определение. Градиентом функции $f(X)$ в точке $X_0\in R^n$, называется вектор, координаты которого, соответственно, равны значениям частных производных функции $f(X)$ в точке $X_0\in R^n$, т.е.

$$\nabla f(X_0)\equiv\frac{\partial f(X_0)}{\partial X}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f(X_0)}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial f(X_0)}{\partial x_2}\\ \dots\\ \dfrac{\partial f(X_0)}{\partial x_n}\end{pmatrix}.$$

Пример 11. Если $f(X)=x_1^3+x_1x_2^2+x_3^3$, то

$$\nabla f(X)=\begin{pmatrix}3x_1^2+x_2^2\\2x_1x_2\\3x_3^2\end{pmatrix}.$$

В данном случае $\nabla f(X)$ - градиент функции $f(X)$ в произвольной точке $X(x_1,x_2x_3)\in R^3$.

Если же $f(X)=x_1^5x_2-x_2^6,\ X_0(1;-1)$, то

$$\nabla f(X_0)=\begin{pmatrix}-5\\7\end{pmatrix}.$$

Основное свойство градиента

Пусть функция $f(X)$ дифференцируема в точке $X_0(x_{10},x_{20},...,x_{n0})$, а $\mathrm{A}'=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ - некоторый n - мерный вектор. Рассмотрим точку $X_t(x_{10}+\alpha_1 t,x_{20}+\alpha_2 t,...,x_{n0}+\alpha_n t)$. Тогда:

1) если скалярное произведение $\left(\nabla f(X_0),\mathrm{A}\right)<0$, то существует число $T_1>0$ такое, что $f(X_t)<f(X_0)$ для всех t, $0<t<T_1$.

2) если скалярное произведение $\left(\nabla f(X_0),\mathrm{A}\right)>0$, то существует число $T_2>0$ такое, что $f(X_t)>f(X_0)$ при всех t, $0<t<T_2$.

Чтобы найти точку, в которой данная функция принимает значение большее, чем в точке $X_0(x_{10},x_{20},...,x_{n0})$, можно поступить следующим образом:

1) выбрать направление перемещения, т.е. найти вектор $\mathrm{A}'=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ такой, что $\left(\nabla f(X_0),\mathrm{A}\right)>0$ (если нет дополнительных ограничений, можно положить $\mathrm{A}=\nabla f(X_0)$);

2) рассмотреть точку $X_t(x_{10}+\alpha_1 t,x_{20}+\alpha_2 t,...,x_{n0}+\alpha_n t)$ и подобрать параметр $t>0$ так, чтобы $f(X_t)>f(X_0)$.

Пример 12. Найти точку, в которой значение функции

$$f(X)=-3x_1^2-3x_2^2+2x_1x_2+10x_1-6x_2+2$$

больше ее значения в точке $X_0(-1;\ 1)$.

Решение

Так как

$$\nabla f(X)=\begin{pmatrix}-6x_1+2x_2+10\\ -6x_2+2x_1-6\end{pmatrix},$$

то

$$\nabla f(X_0)=\begin{pmatrix}18\\ -14\end{pmatrix}.$$

Если $\mathrm{A}'=\left(1;\quad -1\right)$, то

$$\left(\nabla f(X_0),\mathrm{A}\right)=18\cdot 1+(-14)\cdot(-1)=32>0.$$

Рассмотрим точку $X_t(-1+t,\ 1-t)$. Тогда $f(X_t)=-8t^2+32t-22$ и при $t=2$ имеем $\dfrac{df(X_t)}{dt}=0$. Значит, при $t=2$ функция $f(X_t)$ имеет наибольшее значение. Если $t=2$, то $X_t(1,\quad -1)$ и $f(X_t)=10$, в то время как $f(X_0)=-22$.

Рассмотрим более сложный пример.

Пример 13. Найти точку на плоскости $x_1+3x_2+x_3=15$, в которой значение функции $f(X)=-x_1^2-2x_2^2-x_3^2$ больше ее значения в точке $X_0(1,\quad 2,\quad 8)$.

Решение

Рассмотрим точку $X_t(1+\alpha_1 t,\quad 2+\alpha_2 t,\quad 8+\alpha_3 t)$. Эта точка должна принадлежать данной плоскости, т.е.

$$1+\alpha_1 t+3(2+\alpha_2 t)+8+\alpha_3 t=15 \text{ или } \alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3=0.$$

Кроме того, вектор $\mathrm{A}'=(\alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \alpha_3))$ должен удовлетворять условию $\left(\nabla f(X_0),\mathrm{A}\right)>0$. Так как $\left(\nabla f(X_0)\right)'=\left(-2,\quad -8,\quad -16\right)$, то имеем систему

$$\begin{cases}\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3=0,\\ -2\alpha_1-8\alpha_2-16\alpha_3>0.\end{cases}\qquad(2)$$

Вектор $\mathrm{A}'=(-2,\quad 1,\quad -1)$ является решением системы (2).

Таким образом,

$$X_t(1-2t,\quad 2+t,\quad 8-t),\text{ а } f(X_t)=-7t^2+12t-73.$$

Функция $f(X_t)$ имеет наибольшее значение при $t=\frac{6}{7}$. Если $t=\frac{6}{7}$, то

$$X_t\left(-\frac{5}{7},\quad \frac{20}{7},\quad \frac{50}{7}\right),$$

а $f(X_t)=-67\frac{6}{7}$, в то время как $f(X_0)=-73$.

Основное свойство градиента используют для отыскания экстремумов функций многих переменных.

6. Частные производные высших порядков

Пусть во всех точках открытого множества $\mathrm{M}\subset R^3$ существует частная производная $\frac{\partial f(X)}{\partial x_i}$. Эта производная как функция от X может иметь в некоторой точке производную

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f(X)}{\partial x_i}\right)_{X=X_0},$$

которая называется частной производной второго порядка и обозначается одним из символов

$$\frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_j \partial x_i}, \qquad f''_{x_i x_j}(X_0).$$

Если $i=j$, то для частной производной применяется обозначение

$$\frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i^2}.$$

Пример 14. Найти частные производные второго порядка функции $f\left(X\right)=x_1^3x_2^2-x_1^2x_2^3+2x_1x_2$ в произвольной точке $X\left(x_1,x_2\right)$. Так как

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=3x_1^2x_2^2-2x_1x_2^3+2x_2;\quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=2x_1^3x_2-3x_1^3x_2^2+2x_1,$$

то

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = 6x_1x_2^2 - 2x_2^3;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = 6x_1^2x_2 - 6x_1x_2^2 + 2;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = 6x_1^2x_2 - 6x_1x_2^2 + 2;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = 2x_1^3 - 6x_1^2x_2.$$

Упражнение

Найти частные производные второго порядка функции $f(x,y)$:

а) $f(x,y) = xy\left(x^3 + y^3 - 3\right)$; б) $f(x,y) = e^{xy}$;

в) $f(x,y) = arctg\,\frac{x+y}{1-xy}$; г) $f(x,y) = x^y$.

Для функции двух переменных можно записать четыре производные второго порядка в точке (x,y):

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y},\quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x},\quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}.$$

Определение. Производные $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$ называют **смешанными**. Вообще говоря, они могут быть неравны.

Пример 15. Рассмотрим функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{если} \quad x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = y = 0. \end{cases}$$

Покажем, что $f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0)$.

Решение

Так как

$$f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0,$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + y\frac{4x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 > 0,$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + y\frac{4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{при} \quad x^2+y^2>0,$$

то

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f'_y(x,0)-f_y(0,0)}{x} = 1, \qquad f''_{xy}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f'_x(0,y)-f_x(0,0)}{y} = -1.$$

Таким образом, $f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0)$.

Теорема (о смешанных производных. Если обе смешанные производных $f''_{xy}(x,y)$ и $f''_{yx}(x,y)$ определены в некоторой окрестности точки (x_0,y_0) и непрерывны в этой точке, то $f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0)$.

Замечание. Поскольку для функции n- переменных $f(x_1,x_2,...,x_n)$ при вычислении смешанных производных $\dfrac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_j \partial x_i}$ и $\dfrac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i \partial x_j}$ все переменные, кроме x_i и x_j, фиксируются, то фактически рассматривается функция только двух переменных и обе смешанные производные в точке X_0 равны, если они в этой точке непрерывны.

Производные порядка выше первого определяется по индукции. Например, если $f(x,y,z)$ - функция трех переменных, то

$$\frac{\partial^3 f(x,y,z)}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y \partial z}\right).$$

Если $f(X)$- функция n- переменных, то

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_m}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\frac{\partial^{m-1} f}{\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_m}}\right). \qquad (3)$$

По индукции легко доказать, что если производная (3) и все производные порядка m, которые получаются при помощи всевозможных перестановок индексов $i_1,i_2,...,i_n$, определены в окрестности точки X_0 и непрерывны в точке X_0, то все эти производные равны в точке X_0. Если вспомнить, что транспозицией называется такая перестановка, которая переставляет два соседних элемента, а все остальные оставляет на своих местах, то легко понять, что две производные m-го порядка, полученные при помощи транспозиции индексов, будут равны по теореме о смешанной производной. В курсе алгебры доказывается, что все перестановки можно упорядочить таким образом, что каждая последующая перестановка получается из предыдущей при помощи транспозиции. Упорядочивая таким же образом и все производные m-

го порядка, получающиеся перестановкой индексов, заключаем, что все они равны.

7. Дифференциалы высших порядков

Пусть функция $u(X)$ имеет в области $\mathrm{M} \subset R^n$ непрерывные частные производные первого и второго порядка. Тогда дифференциал

$$du(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(X)}{\partial x_i} dx_i, \qquad X \in \mathrm{M},$$

есть функция $2n$ переменных, а именно, $x_1,...,x_n$ и $dx_1,...,dx_n$.

Если фиксировать переменные $dx_1,...,dx_n$, то дифференциал $du(X)$ будет функцией X, имеющей в области M, непрерывные частные производные. В силу достаточности условия дифференцируемости функции в точке $du(X)$ как функция X имеет в каждой точке $X \in \mathrm{M}$ дифференциал $d(du)$. Если приращения независимых переменных обозначить через $\delta x_1,...,\delta x_n$, то

$$d(du(X)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial d(u(X))}{\partial x_k} \delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i} dx_i \delta x_k \,. \tag{4}$$

Определение. Выражение $d(du(X))$ есть билинейная форма относительно приращений $dx_1, \delta x_1..., dx_n, \delta x_n$. Полагая в этой билинейной форме $dx_1 = \delta x_1..., dx_n = \delta x_n$, получаем **квадратичную форму**, которая называется **вторым дифференциалом функции** $u(X)$ в точке X и обозначается через $d^2u(X)$ Таким образом,

$$d^2u(X) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(X)}{\partial x_i \partial x_k} dx_i dx_k \,. \tag{5}$$

Аналогично, предполагая, что все частные производные третьего порядка непрерывны, можно вычислить первый дифференциал от $d^2u(X)$, после чего положить $\delta x_i = dx_i$ и полученную **однородную форму третьего порядка назвать третьим дифференциалом** функции $u(X)$. Третий дифференциал обозначается через $d^3u(X)$. Таким образом,

$$d^3u(X)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^3u(X)}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}dx_idx_jdx_k\,.$$

По индукции определяется **дифференциал m- го порядка** в предположении, что все частные производные m-го порядка непрерывны в точке X. Если дифференциал $d^{m-1}u(X)$ вычислен как однородная форма порядка $m-1$ относительно $dx_1,...,dx_n$ с коэффициентами, являющимися функциями X, то вычисляя первый дифференциал от $d^{m-1}u(X)$ и, полагая затем $\delta x_i=dx_i$ при $i=1,2,...,n$, получим, что $d^mu(X)$ есть однородная форма порядка m, т.е.

$$d^mu(X)=\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_m}^{n}\frac{\partial^mu(X)}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_m}}dx_{i_1}\cdots dx_{i_m}\,.$$

Покажем, что **дифференциал второго порядка уже не обладает свойством инвариантности** относительно замены переменных.

Пусть $f(X)=f(x_1,x_2,...,x_n)$, $x_i=\phi_i(U)$, и $U\in R^m$, функции $f(X)$ и $\phi_i(U)$ имеют все непрерывные частные производные до второго порядка включительно, и сложная функция $f(\phi_1(U),\phi_2(U),...,\phi_n(U))$ определена в некоторой окрестности точки U. Тогда в силу инвариантности формы первого дифференциала получаем равенство

$$df(X(U))=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(X)}{\partial x_i}dx_i(U)\,.$$

Пользуясь правилом нахождения дифференциала произведения и суммы, получаем

$$\begin{aligned}d^2f(X(U))&=\sum_{i=1}^{n}d\left(\frac{\partial f(X(U))}{\partial x_i}dx_i(U)\right)=\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2f(X(U))}{\partial x_i\partial x_j}dx_idx_j+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(X(U))}{\partial x_i\partial x_j}d^2x_i.\end{aligned}\tag{6}$$

Формула (6) отличается от формулы (5) наличием суммы

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(X(U))}{\partial x_i\partial x_j}d^2x_i\,,$$

которая обращается в нуль, если $x_1,\dots,x_n$ - независимые переменные.

Замечание. Если замена переменных линейная, то $d^2x_i = 0$, $i = 1,2,\dots,n$. Таким образом, второй дифференциал $d^2 f(X)$ инвариантен относительно линейной замены переменных. То же самое справедливо и для дифференциалов всех порядков.

Если функция $u(x,y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно, то, воспользовавшись теоремой о равенстве смешанных производных, получаем

$$d^2u(x,y) =$$
$$= \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y \partial x}dydx + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}dy^2 =$$
$$= u''_{xx}dx^2 + 2u''_{xy}dxdy + u''_{yy}dy^2.$$

Упражнения

1. Найти второй дифференциал функции $f(x,y)$, если:

а) $f(x,y) = x(1+y)$;

б) $f(x,y) = x\sin^2 y$;

в) $f(x,y) = \left(\frac{1}{y}\right)e^{xy}$;

г) $f(x,y) = y\ln x$;

д) $f(x,y) = \ln\left(x^2+y^2\right)$;

е) $f(x,y) = \arcsin xy$.

2. Вычислить второй дифференциал функции $f(x,y)$ в данной точке, если:

а) $f(x,y) = e^{xy}$, $(1;-1)$;

б) $f(x,y) = e^{\frac{x^2}{y}}$, $(1;1)$;

в) $f(x,y) = \left(\frac{x}{y}\right)e^{x^2}$, $(0;1)$.

3. Найти $d^3 f$, если:

а) $f(x,y) = x^2 y$;

б) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy(y-x)$;

в) $f(x,y) = \sin\left(x^2 + y^2\right)$;

г) $f(x,y) = xyz$.

4. Найти $d^4 f$, если:

а) $f(x,y) = \cos(x+y)$;

б) $f(x,y) = \ln\left(x^x y^y z^z\right)$.

8. Приложения в экономике: предельные (маржинальные) характеристики производственной функции, эластичность по факторам

В практике экономических исследований широкое применение получили ***производственные функции,*** используемые для установления зависимостей выпуска продукции от затрат ресурсов, при прогнозировании развития отраслей, при решении оптимизационных задач.

Пусть R_+^n положительный ортант n- мерного пространства, каждый вектор $X = (x_1, ..., x_n)$ которого интерпретируется как вектор затрат производственных ресурсов (в стоимостном или натуральном выражении). В качестве факторов производства здесь могут выступать как первичные факторы в обычном понимании, так и продукты производства, внешнего по отношению к изучаемому, выступающие в данном случае как ресурсы или сырье.

Пусть R_+^m - положительный ортант m- мерного пространства, каждый вектор $Y = (y_1, ..., y_m)$ которого интерпретируется как набор количественных оценок результатов производства при определенных затратах ресурсов. Такими количественными оценками могут служить, например, физический объем выпуска по каждому из наименований выпускаемой продукции, стоимостные показатели.

Если P - некоторый производственный процесс, то производственной функцией f этого процесса будем называть отображение $f: D \to V$, где $D \subseteq R_+^n$, $V \subseteq R_+^m$, моделирующее выпуск продукции в процессе P.

Введение множеств D, V обусловлено тем, что в реальных ситуациях построение функции f для процесса P происходит всегда на основе ограниченного статистического материала. В этом случае отчетные данные, на основе которых строится функция, заполняют ограниченные участки соответствующих пространств. При этом может случиться, что удобная аналитическая форма функции f дает хорошие результаты (т.е. достаточно адекватно моделирует процесс P) только в пределах некоторых множеств D и V.

Замечание. Проблема построения производственной функции, так же как и проблема ее использования с целью анализа производства в масштабах народного хозяйства в целом или отдельных его отраслей, представляет собой сложную научную задачу, рецепта, для решения которой в общем случае в настоящий момент не существует. Здесь эта проблема не рассматривается и поэтому и не обсуждается.

Отметим сразу, что, несмотря на широту приведенного выше определения производственной функции, до сих пор в научной и прикладной экономико-математической литературе в основном изучался случай $m=1$, т.е. когда имеется единственная количественная оценка результатов производства. В этом случае производственную функцию естественно записывать как обычную функцию нескольких переменных

$$y = f\left(x_1, \dots, x_n\right). \tag{7}$$

Всюду в дальнейшем мы будем иметь дело только с таким случаем.

Для введения основных математических характеристик производственной функции и выяснения их экономической интерпретации, рассмотрим **двухфакторную производственную функцию.**

Обозначим через K объем основных фондов, либо в стоимостном выражении, либо в количественном (скажем, число станков). Пусть L - числовое выражение объема трудовых ресурсов, т.е. число рабочих, число человеко-дней, человеко-часов и т.д., Y - объем выпущенной продукции в стоимостном выражении, либо в натуральном, если мы имеем дело с отраслью, выпускающей один продукт. Тогда производственная функция имеет вид

$$Y = F(K, L). \tag{8}$$

Производственная функция (8) обладает следующими свойствами:

1. При отсутствии одного из ресурсов производство невозможно:

$$F(0, L) = F(K, 0) = 0.$$

2. С ростом ресурсов выпуск растет:

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial L} > 0.$$

3. С ростом ресурсов скорость роста выпуска замедляется:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0.$$

4. При неограниченном увеличении одного из ресурсов выпуск неограниченно растет:

$$F(+\infty, L) = +\infty, \qquad F(K, +\infty) = +\infty.$$

Ниже в качестве иллюстрации будем рассматривать одну из наиболее распространенных двухфакторных производственных функций - мультипликативную производственную функцию (от лат. ***multiplico*** - умножаю, увеличиваю) Кобба - Дугласа:

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}, \tag{9}$$

где $A > 0$ - константа, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $\alpha + \beta = 1$. Обычные требования на производственную функцию (8) заключаются в требовании гладкости и

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial L} > 0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0, \quad при\, K > 0, \quad L > 0. \tag{11}$$

Смысл условий (10) очевиден: при увеличении объема одного из факторов при неизменном объеме другого выпуск продукции возрастает. Условия (11) означают, что при фиксированном объеме одного из факторов последовательное увеличение другого приводит к все меньшим приростам произведенного продукта.

Ниже приведем основные экономико-математические характеристики [1) – 3)] производственной функции (8).

1. Средняя производительность труда определяется как $y = \frac{Y}{L}$ - отношение объема произведенного продукта к количеству затраченного труда. Отметим, что эта характеристика (как и все прочие) является функцией фазовых координат K, L. Средняя фондоотдача; $z = \frac{Y}{K}$ - отношение объема произведенного продукта к величине основных фондов.

Для функции Кобба - Дугласа, например, средняя производительность труда равна $Y = AK^{\alpha}L^{\beta-1}$ и в силу условия $\beta < 1$ является убывающей функцией аргумента L. Другими словами, с увеличением затрат труда средняя производительность труда падает. Этот вывод допускает естественное объяснение - поскольку величина второго фактора K остается неизменной, то, значит, вновь привлекаемая рабочая сила не обеспечивается дополнительными средствами производства, что и приводит к снижению производительности труда.

Таким образом, становится ясным и значение такой характеристики, как **фондовооруженность труда** $k = \frac{K}{L}$, показывающая объем основных фондов, приходящийся на одного работника.

2. Наряду со средними показателями при анализе производственных функций играют роль и **предельные (маржинальные) характеристики функции**.

Предельная производительность труда $v=\dfrac{\partial F}{\partial L}$ характеризует величину дополнительного эффекта от каждой дополнительной единицы затраченного труда в данной точке (K,L) фазовой плоскости. Условие (11) показывает, что при неизменных основных фондах при увеличении численности работников предельная производительность труда, аналогично средней, падает.

Для функции Кобба - Дугласа **предельная производительность труда** равна $\beta AK^{\alpha}L^{\beta-1}$. Видно, что для этой функции $\dfrac{\partial F}{\partial L}=\beta\dfrac{Y}{L}$, т.е. предельная производительность труда пропорциональна средней производительности и всегда меньше се ($\beta<1$).

Предельная фондоотдача определяется аналогично: $r=\dfrac{\partial F}{\partial K}$.

3. Заметим, что такие характеристики, как предельная и средняя производительность труда и фондоотдача, являются размерными величинами, связанными с абсолютными приростами. Представляют также интерес величины, характеризующие процент прироста продукции при увеличении затрат ресурса на 1%. Такие показатели именуются **коэффициентами эластичности.**

Коэффициент эластичности по фондам

$$\alpha=\frac{\partial F}{\partial K}\frac{K}{Y}. \qquad (12).$$

Поясним формулу (12). Пусть приращению ΔK основных фондов при неизменном втором факторе - трудовых ресурсах - соответствует приращение ΔY объема выпуска. Тогда увеличению объема основных фондов на $\dfrac{\Delta K}{K}\cdot 100\%$ соответствует увеличение выпуска на $\dfrac{\Delta Y}{Y}\cdot 100\%$. Следовательно, при увеличении объема основных фондов на 1% объем выпуска увеличивается на $\dfrac{\Delta F}{\Delta K}\dfrac{K}{Y}\%$. Переходя к пределу при $\Delta K\to 0$ получаем выражение (12).

Коэффициент эластичности по труду

$$\beta = \frac{\partial F}{\partial L}\frac{L}{Y}$$

носит аналогичный смысл. Видим, что параметры α и β в формуле (3), задающие функцию Кобба - Дугласа, являются как раз коэффициентами эластичности. Таким образом, коэффициенты эластичности по факторам для функции Кобба - Дугласа суть величины постоянные, не зависящие от значений факторов K, L.

Предельная норма замещения S показывает, на сколько единиц нужно уменьшить (увеличить) K при увеличении (уменьшении) L на единицу, чтобы при этом величина Y осталась неизменимой. Взятие полного дифференциала от обеих частей уравнения (2) дает соотношение

$$S = -\frac{dK}{dL} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial L}}{\dfrac{\partial F}{\partial K}}.$$

Вычисляя данный показатель для функции Кобба - Дугласа, имеем $S = \dfrac{\beta}{\alpha}\dfrac{K}{L}$. Из этой формулы видно, что предельная норма замещения затрат труда производственными фондами для функции Кобба – Дугласа прямо пропорциональна фондовооруженности труда. Этот факт представляется вполне естественным: чем выше фондовооруженность, тем больше требуется фондов для компенсации одной единицы трудовых ресурсов.

Далее можно вводить величину **эластичности замещения.** Нетрудно проверить, что для функции Кобба - Дугласа эластичность замещения постоянна и равна 1.

При изучении производственных функций часто делают различные предположения, в той или иной мере отвечающие экономической реальности. Основное предположение состоит в том, что производственную функцию (8) считают однородной первой степени или линейно-однородной, т.е. требуют выполнения соотношения $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$ для всех $\lambda > 0$. Можно по- разному толковать содержательный смысл условия однородности. В этом параграфе (из-за ограниченности возможности) эти толкования и многие другие вопросы, связанные с производственной функцией, не приводятся.

Пример 16. Провести анализ двухфакторной производственной функции $Y = K^{0,5}L^{0,5}$ при условии $K > 0$ и $L > 0$.

Решение

При $K = 0$ и $L = 0$ исследуемая производственная функция равна нулю, т.е. выполняется свойство 1, утверждающее, что при отсутствии одного из ресурсов производство невозможно.

Первые частные производные производственной функции:

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = 0,5K^{-0,5}L^{0,5} = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{K}\right)^{0,5} = \frac{Y}{2K}; \qquad \frac{\partial Y}{\partial L} = 0,5K^{0,5}L^{-0,5} = \frac{1}{2}\left(\frac{K}{L}\right)^{0,5} = \frac{Y}{2L}.$$

Так как первые частные производные положительны, то исследуемая функция возрастающая, т.е. выполняется свойство 2.

Вторые частные производные производственной функции:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} = -0,25K^{-1,5}L^{0,5} = \frac{Y}{4K^2}; \qquad \frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} = -0,25K^{0,5}L^{-1,5} == \frac{Y}{4L^2}.$$

Вторые частные производные отрицательны. Поэтому с ростом ресурсов скорость роста выпуска замедляется. Следовательно, выполняется свойство 3.

При неограниченном увеличении одного из ресурсов выпуск неограниченно растет, так как $Y = K^{0,5}L^{0,5} \to \infty$ при $K \to +\infty$; $Y = K^{0,5}L^{0,5} \to \infty$ при $L \to +\infty$. Таким образом, выполняется свойство 4.

Уравнения

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{K}\right)^{0,5} = 0 \quad \text{и} \qquad \frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{1}{2}\left(\frac{K}{L}\right)^{0,5} = 0$$

имеют решения при $L=0$ и $K=0$. В этих точках функция обращается в ноль. Других корней эти уравнения не имеют. Поэтому максимума для всех точек (K, L), для которых исследуемая функция определена, у нее нет.

Линии уровня производственной функции $Y = K^{0,5}L^{0,5}$ определяются уравнением

$$Y_0 = K^{0,5}L^{0,5} \text{ или } K = \frac{Y_0^2}{L},$$

т.е. данные линии уровня являются гиперболами.

Вопросы для самопроверки

1. Как определяются частные производные? Какие обозначения используют для частных производных?

2. Приведите определение полного приращения функции многих переменных.

3. Когда функцию многих переменных называют дифференцируемой?

4. Приведите свойства дифференцируемых функций.

5. Является ли непрерывность частных производных в точке необходимым условием дифференцируемости функции в этой точке?

6. Что называют дифференциалом функции в точке?

7. Как определяют дифференциал сложной функции?

8. Что означает инвариантность формы первого дифференциала? Разъясните, почему инвариантность формы первого дифференциала считается весьма удобным его свойством?

9. Приведите основное свойство дифференциала.

10. Что называют градиентом функции многих переменных?

11. Приведите основное свойство градиента.

12. Для чего используют основное свойство градиента?

13. Как определяются частные производные высших порядков?

14. Сформулируйте теорему о смешанных производных.

15. Как определяются дифференциалы m- го порядка $(m \geq 2)$?

16. Обладает ли свойством инвариантности форма дифференциала m- го порядка $(m \geq 2)$?

17. Что называется производственной функцией? Что можете сказать по поводу построения и использования производственной функции?

18. Приведите основные свойства двухфакторной производственной функции.

19. Приведите одну из распространенных двухфакторных производственных функций – мультипликативную производственную функцию Кобба-Дугласа.

20. Приведите основные экономико–математические характеристики двухфакторной производственной функции.

§30. Безусловный и условный экстремумы функции многих переменных

Ключевые слова: *задача на безусловный минимум, задача на условный минимум, задача нелинейного программирования, сепарабельная функция, необходимые и достаточные условия безусловного минимума, морсовское l-седло, информативная функция, обезьянье седло, графический метод, метод исключения, функция Лагранжа, нормальная функция Лагранжа, нормальные задачи, правило множителей Лагранжа, экономическая интерпретация множителей Лагранжа, достаточное условие условного минимума.*

1. Введение

Пусть в R^n заданы функции $f(X), g_1(X), g_2(X), ..., g_m(X)$, из которых хотя бы одна является нелинейной. Определим в R^n каким - ни будь образом скалярное произведение векторов X и Y, например, следующим образом:

$$Y'X = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X'Y .$$

Символом $\|X\|$ будем обозначать норму вектора X, определенную $\|X\|^2 = X'X$.

Требуется найти точку, $X^0 \in R^n$ удовлетворяющую условиям:

$$g_1(X)=0,\ g_2(X)=0,\ \dots ,g_m(X)=0 ,$$

такую, что

$$f\left(X^0\right) = \min_{\substack{g_i(X)=0 \\ i=\overline{1,m}}} f(X).$$

Кратко эту задачу можно записать так:

$$f(X) \to \min, \tag{1}$$

$$g_i(X)=0, \quad i=1,2,...,m. \tag{2}$$

Очевидно, что такая задача имеет смысл лишь в том случае, когда допустимое множество K:

$$K = \left\{X : g_1(X)=0,\ g_2(X)=0,\ \dots ,g_m(X)=0\right\}$$

не пусто (система ограничений (2) совместна).

Нетрудно понять, что задача (1)-(2) не всегда имеет решение.

Во многих случаях для доказательства существования решения задачи (1)-(2) достаточно воспользоваться теоремой Вейерштрасса о минимуме на компакте непрерывной функции.

Определение. Задачу (1)-(2) называют **задачей на глобальный условный минимум** в отличие от задачи на локальный условный минимум, которая состоит в следующем: найти точку X^0, удовлетворяющую ограничениям (2), такую, что при некотором достаточно малом ε, $\varepsilon > 0$, для всех допустимых векторов (точек) X из ε- окрестности точки X^0, $\left\| X - X^0 \right\| \le \varepsilon$, выполняется неравенство

$$f\left(X^0\right) \le f\left(X\right).$$

В других обозначениях точка X^0- локального условного минимума – определяется равенством:

$$f\left(X^0\right) = \min_{\left\| X - X^0 \right\| \le \varepsilon, \quad X \in K} f\left(X\right) .$$

Замечание. Некоторые авторы используют термины абсолютный и относительный, а не глобальный и локальный условный минимум. Мы ниже будем использовать те и другие термины.

Замечание. Так как любое уравнение равносильно системе двух неравенств

$$\begin{cases} \phi\left(X\right) \le 0, \\ -\phi\left(X\right) \le 0, \end{cases}$$

то можно считать, что допустимое множество K задачи (1)-(2) задается только неравенствами.

Замечание. Отметим также, что если ограничения задачи на условный минимум задается ограничениями типа неравенств, то такую задачу называют **задачей нелинейного программирования.** Задачу нелинейного программирования рассмотрим в §31.

Задачи нелинейного программирования образуют широкий класс оптимизационных задач. В частности, к этому классу принадлежит задача минимизации функции n переменных на всем пространстве R^n, которую называют **задачей безусловного минимума**.

Отметим, что основные результаты в нелинейном программировании получены при рассмотрении задач, в которых система ограничений линейная, а целевая функция нелинейная. Даже в таких задачах оптимальное решение может быть найдено только для узкого класса целевых функций. Рассматривают частные случаи, когда целевая функция сепарабельная (является суммой n функций $f_j(X_j)$) или квадратичная. Отметим также, что в некоторых специальных случаях эти задачи можно решить графическим методом. Мы на них остановимся ниже.

2. Задачи на безусловный минимум (минимизация функции многих переменных)

Приступим к исследованию функций, определенных на n-мерном пространстве R^n. Точки пространства R^n будем обозначать символом X. При операциях с вектором X будем считать его записанным в виде вектора-столбца, хотя часто для экономии места компоненты вектора будут записываться в строку. Для обозначения вектора-строки используется символ (')-транспонирование. Поэтому

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad X' = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где $x_i, \quad i = 1, 2, .., n$- компоненты вектора X (координаты точки X).

Для дважды непрерывно дифференцируемой скалярной функции

$$f(X), \qquad X \in R^n, \text{(т.е. } f(X) \in C^{(2)}),$$

символы $\nabla f \equiv \dfrac{\partial f}{\partial X}, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial X^2}$ означают

$$\nabla f \equiv \frac{\partial f}{\partial X} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Если функция $g(X)$ - m-мерная, то символ $\frac{\partial g}{\partial X}$ означает $n \times m$- мерную матрицу $(\nabla g_1, \nabla g_2, ..., \nabla g_n)$.

2.1. Постановка задачи на безусловный минимум

Пусть в R^n задана скалярная функция $f(X)$. Требуется найти точку X^0, $X^0 \in R^n$, такую, что

$$f\left(X^0\right) = \min_{x \in R^n} f(X).$$

Эта задача называется **задачей на глобальный (абсолютный) минимум,** точка X^0- точкой глобального (абсолютного) минимума**. Задача на локальный (относительный) минимум** состоит в поиске точки X^0, $X^0 \in R^n$, такой, что при некотором достаточно малом ε, $\varepsilon > 0$, выполняется соотношение

$$f\left(X^0\right) = \min_{\left\|X - X^0\right\| \le \varepsilon, \quad X \in R^n} f(X) \ .$$

Вопрос о существовании решения поставленных задач во многих случаях решается с помощью теоремы Вейерштрасса.

2.2. Необходимые условия минимума

Пусть X^0, $X^0 \in R^n$ - точка локального (относительного) минимума, т.е. существует такое ε, $\varepsilon > 0$, что для всех X, $\left\| X - X^0 \right\| \le \varepsilon$, выполняется неравенство $f\left(X^0\right) \le f\left(X\right)$.

Теорема 1. В точке минимума X^0 гладкой функции $\left(f\left(X\right) \in C^{(1)}\right)$ выполняется условие

$$\nabla f\left(X^0\right) = 0 \ . \tag{3}$$

Доказательство мы опускаем, но по поводу гладкости (т.е. непрерывно дифференцируемости) функции хотим отметить, что каковая не излишня в данном контексте. Функция

$$f\left(x\right) = 2x^2 + x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

имеет в нуле строгий минимум и равную нулю производную, но в сколь угодно малой окрестности нуля принимает, как положительные, так и отрицательные значения (см. рис. 1).

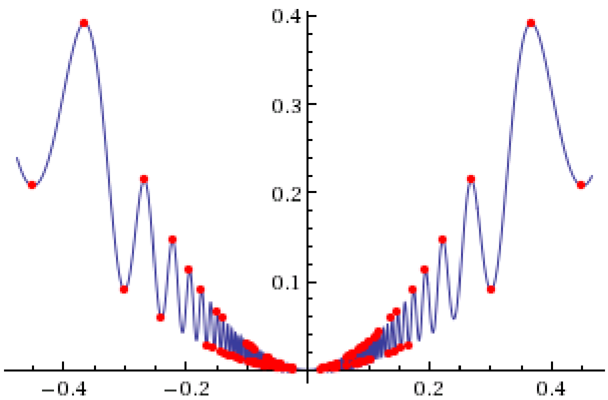


Рис. 1

Условие (5) называется **необходимым условием минимума** первого порядка. Вектор $\nabla f\left(X^0\right) = \dfrac{\partial f\left(X^0\right)}{\partial X}$ - принято называть **градиентом функции** $f\left(X\right)$ в точке X^0.

В новых терминах теорема 1 утверждает: в точке локального (относительного) минимума градиент функции равен нулю.

Теорема 1 сводит поиск относительного минимума к решению уравнения

$$\nabla f(X) = 0. \tag{4}$$

Определение. Решения уравнения (4) называют **стационарными точками функции** $f(X)$.

Смысл теоремы 1 можно выразить и таким образом: точка минимума функции является стационарной точкой функции. Обратное утверждение, конечно, неверно, ибо уравнению могут удовлетворять и точки максимума и другие точки.

Для того чтобы среди стационарных точек выделить точки минимума, нужно использовать дополнительные условия, например, необходимое условие второго порядка, которое содержится в следующем утверждении.

Теорема 2. Пусть функция $f(X)$ определена, непрерывна вместе с производными первого и второго порядков во всех точках n- мерного пространства R^n. Если X^0- точка относительного минимума, то в этой точке матрица вторых производных минимизируемой функции неотрицательна:

$$\frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial X^2} \geq 0. \tag{5}$$

Доказательство этой теоремы также опускаем.

3.4. Достаточное условие относительного минимума

Из курса математического анализа без доказательства приведем следующее утверждение.

Теорема 3. Для того чтобы стационарная точка X^* была точкой относительного минимума дважды непрерывно дифференцируемой функции $f(X)$ ($f(X) \in C^{(2)}$), достаточно, чтобы матрица вторых производных функций $f(X)$ в точке X^* была положительной

$$\frac{\partial^2 f(X^*)}{\partial X^2} > 0. \tag{8}$$

Пример. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x,y,z) = x^2 + 2xy + 4xz + 8yz + 5y^2 + 9z^2.$$

Решение

Найдем стационарные точки функции $f(x,y,z)$. Они определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y + 4z = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x + 10y + 8z = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 4x + 8y + 18z = 0. \end{cases}$$

Определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 8 \\ 4 & 8 & 18 \end{vmatrix} = 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 8 \cdot 16 > 0.$$

Поэтому единственное решение однородной системы есть $x = y = z = 0$.

Итак, функция $f(x,y,z)$ имеет единственную стационарную точку $(0,0,0)$. Найдем

$$\frac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial X^2} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial x \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial y \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial z \partial x} & \dfrac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial z \partial y} & \dfrac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 8 \\ 4 & 8 & 18 \end{pmatrix}.$$

Так как

$$D_1 = 2 > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} > 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 8 \\ 4 & 8 & 18 \end{vmatrix} = 8 \cdot 16 > 0,$$

то в силу критерия Сильвестра

$$\frac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial X^2} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 8 \\ 4 & 8 & 18 \end{pmatrix} > 0.$$

Точка $(0,0,0)$ является точкой локального минимума функции $f(x,y,z)$, причем $f_{\min} = f(0,0,0) = 0$.

Пример. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x,y,z) = 3x^3 + 6xy + y^2 + z^2 - 2z + 1.$$

Решение

Найдем стационарные точки функции $f(x,y,z)$. Они определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 9x^2 + 6y = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 6x + 2y = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 2z - 2 = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем стационарные точки $(2,-6,1)$ и $(0,0,1)$. Вычислив частные производные, построим матрицу

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial X^2} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z \partial x} & \dfrac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z \partial y} & \dfrac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18x & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

В точке $(2,-6,1)$ имеем

$$\frac{\partial^2 f(2,-6,1)}{\partial X^2} == \begin{pmatrix} 32 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Так как

$$D_1 = 32 > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 32 & 6 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 36 > 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 32 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 72 > 0,$$

то, в силу критерия Сильвестра

$$\frac{\partial^2 f(2,-6,1)}{\partial X^2} = \begin{pmatrix} 32 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} > 0.$$

Точка $(2,-6,1)$ является точкой локального минимума функции $f(x,y,z)$, причем $f_{\min} = f(2,-6,1) = -12$.

В точке $(0,0,1)$ имеем

$$\frac{\partial^2 f(0,0,1)}{\partial X^2} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для исследования функции в точке $(0,0,1)$ **нельзя использовать критерий Сильвестра, так как $D_1 = 0$.** Легко видеть, что в этой точке экстремума нет. В самом деле, $f(0,0,1)=0$, а в столь угодно малой окрестности точки $(0,0,1)$ функция принимает как положительные, так и отрицательные значения. Например, $f(0,0,\varepsilon) > 0$, если $\varepsilon > 0$ и $f(0,0,\varepsilon) < 0$, если $\varepsilon < 0$.

Если матрица $\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}$ вырождена, ситуация принципиально усложняется**.** В скалярном случае о характере критической точки можно судить по первому ненулевому члену ряда Тейлора. Для функций n переменных дело обстоит совершенно иным образом по особой схеме. Эта **схема позволяет свести анализ экстремали функции к исследованию стационарной точки функции меньшего числа переменных – информативной функции**. Рассмотрение этой схемы исследования вырожденных стационарных точек выходит за рамки данного курса.

Предвидеть трудности (но не их масштаб) довольно легко. Понятно, что в отсутствие знакоопределенности дифференциалов порядка выше второго - поверхности их вырождения могут накладываться друг на друга весьма разнообразно, в результате чего аномалии становятся нормой.

Островок порядка характеризуется невырожденными критическими точками, в которых не вырождены соответствующие матрицы Гессе. Классическая лемма Морса гарантирует существование в некоторой окрестности критической точки - локальной системы координат $x_1, x_2, ..., x_n$ такой что

$$f = x_1^2 + \cdots x_l^2 - x_{l+1}^2 - \cdots - x_n^2.$$

Функция такого вида называется **морсовским l-седлом.** В случае $l = 0$ 0 имеем максимум, при $l = n$ - минимум.

Лемма Морса дает по существу полную классификацию невырожденных критических точек. **Для вырожденных критических точек такой классификации нет.** Простой пример вырожденной критической точки **- обезьянье седло** (рис. 2), которое описывается функцией

$$f(x, y) = x^3 - 3xy^2.$$

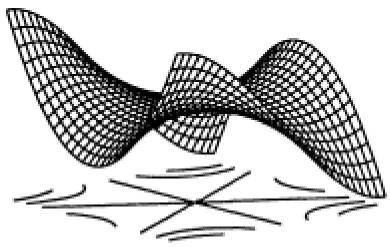


Рис. 2

Упражнения

Исследовать на экстремум функции двух переменных (1-17).

1. $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26$.

2. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 12x - 3y$.

3. $f(x, y) = 3 + 2x - y - x^2 + xy - y^2$.

4. $f(x, y) = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$.

5. $f = 4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y + 1$.

6. $f(x, y) = \left(x + y^2\right)e^{\frac{x}{2}}$.

7. $f(x, y) = \left(x^2 - 2y^2\right)e^{x-y}$.

8. $f(x, y) = \left(8x^2 - 6xy + 3y^2\right)e^{2x+3y}$.

9. $f(x, y) = (5 - 2x + y)e^{x^2-y}$.

10. $f(x, y) = \dfrac{x^3}{3} + 3x^2e^y - e^{-y^2}$.

11. Найти все стационарные точки функции $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2$ и исследовать ее на экстремум. Можно ли использовать при этом достаточное условие экстремума?

12. Может ли непрерывная дифференцируемая функция $f(x,y)$ иметь бесконечное множество максимумов и ни одного минимума?

13. Верно ли утверждение: если непрерывно дифференцируемая функция $f(x,y)$, $(x,y)\in R^2$, имеет только одну стационарную точку (x_0,y_0), в которой у нее локальный минимум, то справедливо неравенство $f(x,y)\geq f(x_0,y_0)$, $(x,y)\in R^2$?

Исследовать на экстремум функции трех переменных (21-30).

14. $f(x,y,z)=3x^3+y^2+z^2+6xy-2z+1$.

15. $f(x,y,z)=x^2+y^2+(z+1)^2-xy+x$.

16. $f(x,y,z)=8-6x+4y-2z-x^2-y^2-z^2$.

17. $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2-4x+6y-2z$.

18. $f(x,y,z)=x^3+y^2+z^2+6xy-4z$.

2.5. Замечание к вопросу о глобальных экстремумах

Существенный интерес нередко представляет вопрос о глобальных экстремумах. В одномерном случае локальный минимум при отсутствии других стационарных точек является одновременно глобальным минимумом. В общем случае это не так. Вот соответствующий контр пример.

Пример. Пусть X_0- единственная стационарная точка дважды непрерывно дифференцируемой функции $f(X)$, $X\in R^n$, и X_0 реализует его локальный минимум. Будет, ли эта точка точкой его глобального минимума? Ответ на этот вопрос отрицателен. Соответствующий пример дает функция

$$f(x,y)=\frac{3x^2-2x^3-1}{1+y^2}+(3x^2-2x^3)e^{-y}.$$

Эта функция имеет лишь нулевую стационарную точку, которая реализует ее локальный минимум, поскольку матрица

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial X^2} = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} > 0.$$

Однако $f(0,0) = -1$, $f(2,0) = -9$.

Существуют различные признаки существования глобального минимума (максимума). Они связаны с понятиями, введения которых выходят за рамки данного курса.

Упражнение

Покажите, что если функция $f(X)$ имеет в точке $X^{\bullet}$ локальный минимум, и $\lim\limits_{\|X\|\to\infty} \|F(X)\| = \infty$, то в $X^{\bullet}$ достигается глобальный минимум $f(X)$.

3. Задачи на условный минимум

3.1. Решение задачи нелинейного программирования графическим методом

Если число переменных в задаче нелинейного программирования равно двум, то она может быть решена графическим методом.

Математическая формулировка такой задачи имеет вид

$$z = f(x, y) \to \max\ (\min), \tag{*}$$

$$\begin{aligned} &g_1(x, y) \le b_1, \\ &g_2(x, y) \le b_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &g_m(x, y) \le b_m. \end{aligned} \tag{**}$$

При решении задачи нелинейного программирования графическим методом сначала надо построить область допустимых решений, т.е. множество точек на плоскости, удовлетворяющих неравенствам (**). Экстремум функции может достигаться как внутри области, так и на границе. Затем следует записать уравнения линий уровня целевой функции, построить графики этих уровней на рисунке и определить направление возрастания (убывания) целевой функции. Далее, перемещая линии уровня в нужном направлении в области допустимых решений, найти точки области, в которых целевая функция принимает оптимальные значения.

Пример 1. Решить задачу графическим методом

$$z=(x-2)^2+(y-3)^2 \to extr,$$

$$x+y=7,$$
$$0\le x\le 5,$$
$$0\le y\le 10.$$

Решение

Область определения - замкнутая ограниченная (прямоугольник $OABC$), поэтому глобальные экстремумы, в том числе и условные существуют. Уравнение $x+y=7$ есть прямая, отрезок которой DE (рис. 1) располагается внутри области.

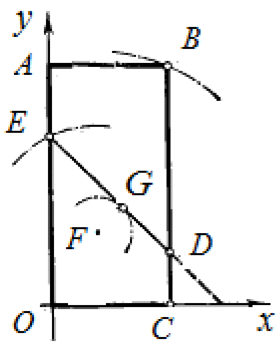


Рис. 1

Следовательно, значения функции должны сравниваться не во всей области $OABC$, а только вдоль этого отрезка DE. На рисунке показаны линии уровни, представляющие собой концентрические окружности с центром в точке $F(2;3)$. Как видно из рисунка, безусловные экстремумы достигаются в точках F (где $z_{\min}=0$) и B (где $z_{\max}=58$). При этом первый является одновременно локальным и глобальным минимумом, а второй только глобальным максимумом. Если же рассматривать только точки, лежащие на отрезке DE, то из того же рисунка видно, что условный глобальный максимум достигается в точке E (0;7), где $z_{\max}=20$, а условный глобальный минимум (он же и локальный) достигается в точке G, в которой окружность касается отрезка DE. Определив координаты этой точки из равенства угловых коэффициентов, получим $x_0 = 3$, $y_0 = 4$ и $z_{\min} = 2$. Ниже решим эту задачу аналитически.

Упражнения. Решить следующие задачи графическим методом:

1. $z = (x-4)^2 + (y-3)^2 \to extr$,
$2x + 3y \geq 6,$
$3x - 2y \leq 18,$
$-x + 2y \leq 8,$
$x \geq 0,\ y \geq 0.$

2. $z = 2x^2 - y^2 \to \max$,
$x - y \geq 6,$
$y \leq 4,$
$x + y - xy \geq 0,$
$x \geq 0,\ y \geq 0.$

3. $z = y - x^2 \to \max$,
$2x + 3y \leq 24,$
$x + 2y \leq 15,$
$3x + 2y \leq 24,$
$y \leq 4,$
$x \geq 0,\ y \geq 0.$

4. $z = (x-3)^2 + (y-4)^2 \to extr$,
$3x + 2y \geq 7,$
$10x - y \leq 8,$
$-18x + 4y \leq 12,$
$x \geq 0,\ y \geq 0.$

5. $z = 3x + 4y^2 \to \max$,
$x^2 + y^2 \leq 25,$
$xy \geq 4,$
$x \geq 0,\ y \geq 0.$

6. $z = 2x + y \to extr$,
$x^2 + y^2 \leq 16,$
$x \geq 0,\ y \geq 0.$

3.2. Решение задачи нелинейного программирования методом исключения

Рассмотрим задачу нелинейного программирования в общем виде

$$f(X) \to \min, \tag{1}$$

$$g_i(X) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{2}$$

В некоторых задачах условия (2) составлены из несложных функций $g_1(X), g_2(X), \ldots, g_m(X)$, позволяющих исключить m переменных. Пусть ими будут $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Тогда, подставив значения

$$x_1 = h_1\left(x_{m+1},...,x_n\right), x_2 = h_2\left(x_{m+1},...,x_n\right), \quad ..., \quad x_m = h_m\left(x_{m+1},...,x_n\right)$$

в $f\left(X\right)$, получим новую функцию

$$\psi\left(x_{m+1},...,x_n\right) = f\left(h_1\left(x_{m+1},...,x_n\right),...,.h_m\left(x_{m+1},...,x_n\right), x_{m+1},...,x_n\right) \tag{3}$$

$n-m$ переменных.

Лемма 1. Если $X^0 = \left(x_1^0,...,x_n^0\right)$- точка условного минимума функции $f\left(X\right)$, то $\left(x_{m+1}^0,...,x_n^0\right)$- точка безусловного минимума функции $\psi\left(x_{m+1},...,x_n\right)$ и, наоборот, если $\left(x_{m+1}^0,...,x_n^0\right)$- точка безусловного минимума функции $\psi\left(x_{m+1},...,x_n\right)$, то $\left(h_1\left(x_{m+1}^0,...,x_n^0\right),...,.h_m\left(x_{m+1}^0,...,x_n^0\right), x_{m+1}^0,...,x_n^0\right)$ - точка условного минимума функции $f\left(X\right)$.

Доказательство опускаем.

Хотя метод исключения часто затруднителен для реализации, все же в тех задачах, где он осуществим, следует им пользоваться. Например, метод исключения реализуется в симплексном методе.

Теоретическая возможность применения метода исключения основана на теоремах о неявных функциях. Приведем простейшую теорему такого рода, которая будет использоваться и в дальнейшем.

Теорема 1 (о неявных функциях). Пусть A, B. $A \in R^m$, $B \in R^k$ - некоторые точки. Если m-мерная функция $g\left(Y,Z\right)$, $Y \in R^m$, $Z \in R^k$ определена в окрестности точки $\left(Y,Z\right) \in R^m \times R^k$, дифференцируема там по Y и удовлетворяет условиям:

$$g\left(A,B\right) = 0, \qquad \left|\frac{\partial g\left(A,B\right)}{\partial Y}\right| \neq 0,$$

то найдется m-мерная функция $Y = h\left(Z\right)$, определенная, непрерывная в окрестности точки $Z = B$ такая, что

1) $g\left(h\left(Z\right),Z\right) \equiv 0$ в окрестности точки $Z = B$;

2) $h\left(B\right) = A$;

3) функция $h(Z)$ имеет в окрестности точки $Z = B$ непрерывные производные по Z того же порядка, что и функция $g(Y,Z)$.

Используем теорему о неявных функциях для обоснования метода исключения в случае гладких функций $g_1(X), g_2(X), ..., g_m(X)$.

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 2. Метод исключения в задаче на относительный минимум применим, если в точке $X = X^0$

$$rank\left(\frac{\partial g_1(X^0)}{\partial X}, ..., \frac{\partial g_m(X^0)}{\partial X}\right) = m.$$

Пример 2. Решить методом исключения задачу из примера 1.

Решение

Разрешим относительно y уравнения $x + y = 7$: $y = 7 - x$. Подставляя найденное значение в выражения задачи получаем, следующую задачу на нахождения наибольшего и наименьшего значения для функции одной переменной

$$\psi(x) = (x-2)^2 + (4-x)^2 = 2x^2 - 12x + 20, \ \ 0 \le x \le 5.$$

Так как $\psi'(x) = 4x^2 - 12, \ \psi''(x) = 12 > 0$, то функция ψ в точке $x_0 = 3$ имеет минимум $\psi_{\min} = 2$. На границах отрезка $0 \le x \le 5$ имеем следующие значения: $\psi(0) = 20, \ \ \psi(5) = 10.$ Сравнивая найденные значения, находим, что наименьшее значения функции ψ равно 2. Следовательно, $x_0 = 3, \ y_0 = 4$ и $z_{\min} = 2$, что совпадает с результатом графического решения (см. п.1).

Упражнения

Решить методом исключения следующие задачи:

1. $f(x,y) = x^2 + y^2 \to extr$,
$x + y = 1.$

2. $f(x,y,z) = xyz \to extr$,
$x + y + z = 6,$
$x + 2y + 3z = 6.$

3.3. Метод множителей Лагранжа

По условиям задачи (1)-(2) составим функцию

$$F\left(X,\bar{\Lambda}\right)=\lambda_0 f\left(X\right)+\Lambda' g\left(X\right), \tag{4}$$

где $\bar{\Lambda}=\left(\lambda_0,\Lambda\right)$ есть $(m+1)$- мерный вектор, состоящий из скаляра λ_0 и m- мерного вектора Λ.

Функцию $F\left(X,\bar{\Lambda}\right)$ называют **функцией Лагранжа** задачи (1), (2), а компоненты $\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m$ вектора $\bar{\Lambda}$ - множителями Лагранжа.

Теорема 2 (правило множителей Лагранжа). Пусть функции

$$f\left(X\right),\ g_1\left(X\right),\ g_2\left(X\right),\dots,g_m\left(X\right)$$

определены, непрерывны и дифференцируемы на R^n. Если X^0 - точка локального условного минимума, то найдется ненулевой вектор $\bar{\Lambda}$ такой, что

$$\frac{\partial F\left(X^0,\bar{\Lambda}\right)}{\partial X}=0.$$

Замечание. Если $\bar{\Lambda}$, удовлетворяет правилу множителей Лагранжа, то, в силу однородности по $\bar{\Lambda}$ функции Лагранжа, правилу множителей удовлетворяет и вектор -$\bar{\Lambda}$. Поэтому знак одной компоненты вектора $\bar{\Lambda}$ можно выбрать заранее. Для определенности задают знак множителя $\lambda_0 : \lambda_0 \ge 0$. В уточненной формулировке правило множителей утверждает о существовании чисел $\lambda_0 \ge 0,\lambda_1,...,\lambda_m$, не равных одновременно нулю, таких что $\dfrac{\partial F\left(X^0,\bar{\Lambda}\right)}{\partial X}=0$.

В приложениях часто используется функция Лагранжа,

$$F\left(X,\Lambda\right)=f\left(X\right)+\Lambda' g\left(X\right), \tag{5}$$

которую будем называть **нормальной функцией Лагранжа**. Функция (5) получается из (4) при $\lambda_0=1$. Нормальная функция Лагранжа проще функции Лагранжа, удобнее для вычислений. Однако правило множителей для нее не всегда верно.

Пример 3. $n=2,\quad m=1,\ f\left(x\right)=x_1,\qquad g\left(x\right)=x_1^3-x_2^2$. Допустимые точки удовлетворяют уравнению $x_1^3-x_2^2=0$ и лежат на полукубической параболе.

Ясно, что точка $x_1^0 = x_2^0 = 0$ есть точка условного минимума. Составим нормальную функцию Лагранжа

$$F(X,\lambda) = f(X) + \lambda g(X) = x_1 + \lambda\left(x_1^3 - x_2^2\right).$$

Правило множителей приводит к уравнениям

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 1 + 3\lambda x_1^2 = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial x_2} = -2\lambda x_2 = 0.$$

Точка минимума $x_1^0 = x_2^0 = 0$ не удовлетворяет этим уравнениям, т.е. правило множителей с нормальной функцией Лагранжа в данной задаче не справедливо.

Множители λ_0, Λ, при которых выполняется правило множителей в точке X^0, назовем множителями, соответствующими точке X^0. Точке X^0 может соответствовать несколько систем множителей Лагранжа.

4. Нормальные задачи на условный минимум

Рассматриваются задачи на условный минимум, которые не сводятся к перебору конечного числа допустимых точек.

4.1. Нормальные точки минимума и обыкновенные допустимые точки

Если среди систем множителей Лагранжа, соответствующих точке условного минимума X^0 задачи

$$f(X) \to \min, \quad g(X) = 0,$$

нет множителей $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ с $\lambda_0 = 0$, то точка называется **нормальной точкой минимума;** а сама задача - **нормальной задачей на условный минимум**. Если X^0- нормальная точка минимума, то соответствующие ей множители можно разделить на $\lambda_0 \neq 0$ и считать, что множители Лагранжа имеют вид $\lambda_0 = 1, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$.

Для нормальной точки соответствующие множители $1, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ существуют и определяются единственным образом.

Действительно, если допустить еще одну систему множителей $1, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, ...,$ $\tilde{\lambda}_m$, $\left(\tilde{\lambda}_i \neq \lambda_i\right)$, то получаем

$$\frac{\partial f\left(X^0\right)}{\partial X} + \lambda_1 \frac{\partial g_1\left(X^0\right)}{\partial X} + ... + \lambda_m \frac{\partial g_m\left(X^0\right)}{\partial X} = 0,$$

$$\frac{\partial f\left(X^0\right)}{\partial X} + \tilde{\lambda}_1 \frac{\partial g_1\left(X^0\right)}{\partial X} + ... + \tilde{\lambda}_m \frac{\partial g_m\left(X^0\right)}{\partial X} = 0.$$

Вычитая одно уравнение из другого, приходим к равенству

$$\mu_1 \frac{\partial g_1\left(X^0\right)}{\partial X} + ... + \mu_m \frac{\partial g_m\left(X^0\right)}{\partial X} = 0,$$

где $\mu_i = \lambda_i - \tilde{\lambda}_i \neq 0$. Полученное равенство означает, что точке X^0 соответствует еще одна система множителей $\mu_0 = 0, \mu_1, ..., \mu_m$, и это противоречит определению нормальности точки X^0. Следовательно, система множителей Лагранжа $1, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ единственна. Оказывается, характер точки минимума (нормальна она или нет) определяется полностью ограничениями задачи.

Точку $\tilde{X}$ назовем **обыкновенной допустимой точкой**, если $g\left(\tilde{X}\right) = 0$ и векторы

$$\frac{\partial g_1\left(\tilde{X}\right)}{\partial X}, \frac{\partial g_2\left(\tilde{X}\right)}{\partial X}, ..., \frac{\partial g_m\left(\tilde{X}\right)}{\partial X},$$

вычисленные в этой точке, линейно независимы.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Точка X^0 является нормальной в том и только в том случае, когда она обыкновенная допустимая точка.

Доказательство. Необходимость. Пусть точка X^0 - нормальная:

$$\frac{\partial f\left(X^0\right)}{\partial X} + \lambda_1 \frac{\partial g_1\left(X^0\right)}{\partial X} + ... + \lambda_m \frac{\partial g_m\left(X^0\right)}{\partial X} = 0,$$

но не является обыкновенной, т.е. для некоторого вектора $\mathrm{M} = \left(\mu_1, ..., \mu_m\right)$, $\mathrm{M} \neq 0$, выполняется равенство

$$\mu_1 \frac{\partial g_1\left(X^0\right)}{\partial X} + \ldots + \mu_m \frac{\partial g_m\left(X^0\right)}{\partial X} = 0 .$$

Отсюда следует, что точке X^0 соответствует система множителей Лагранжа $\mu_0 = 0, \mu_1, \ldots, \mu_m = 0$, чего не может быть по определению нормальной точки X^0.

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть допустимая точка X^0 обыкновенная. Если предположить, что она не является нормальной, то найдутся множители $\lambda_0 = 0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m; \quad \Lambda \neq 0$ такие, что

$$\lambda_0 \frac{\partial f\left(X^0\right)}{\partial X} + \lambda_1 \frac{\partial g_1\left(X^0\right)}{\partial X} + \ldots + \lambda_m \frac{\partial g_m\left(X^0\right)}{\partial X} = 0 .$$

Поскольку первое слагаемое слева равно нулю, то оставшаяся часть равенства означает, что векторы $\frac{\partial g_1\left(X^0\right)}{\partial X}, \frac{\partial g_2\left(X^0\right)}{\partial X}, \ldots, \frac{\partial g_m\left(X^0\right)}{\partial X}$ линейно зависимы. Это противоречит определению обыкновенной точки. Теорема доказана.

4.2. Правило множителей для нормальной задачи на условный минимум

Как следует из определения нормальных задач на условный минимум, при их исследовании достаточно пользоваться нормальными функциями Лагранжа. В этом случае правило множителей верно. Более того, оно упрощается и может быть записано в симметричном виде.

Теорема 4. Если точка X^0 доставляет решение нормальной задаче на условный минимум, то существует m-мерный вектор Λ такой, что выполняются равенства

$$\frac{\partial F\left(X^0, \Lambda\right)}{\partial X} = 0, \qquad \frac{\partial F\left(X^0, \Lambda\right)}{\partial \Lambda} = 0 , \tag{6}$$

где $F\left(X, \Lambda\right) = f\left(X\right) + \Lambda' g\left(X\right)$.

Для доказательства утверждения достаточно заметить, что первое равенство в (6) есть следствие правила множителей для рассматриваемого нормального случая, а второе эквивалентно условию $g\left(X^0\right)=0$, которое должно, очевидно, выполняться для допустимой точки X^0.

Соотношения (6) представляют собой систему из $n+m$ уравнений относительно $n+m$ неизвестных X^0, Λ. В анормальных задачах правило множителей сводит исходную задачу к решению $n+m$ уравнений относительно $n+m+1$ неизвестных X^0, λ_0, Λ.

Если сравнить метод исключения с правилом множителей, то видно, что в первом методе исходная задача на условный минимум функции n переменных сводится к задаче безусловной минимизации функции $n-m$ переменных, во втором методе исходная задача сводится к условиям стационарности функции Лагранжа от $n+m$ аргументов. Следует подчеркнуть, что точка условного минимума X^0, вообще говоря, не является точкой минимума функции Лагранжа.

Пример 4. $n=2, \quad m=1, \quad f\left(X\right)=x_2, \quad g\left(X\right)=-x_1^2+x_2$. В обыкновенной точке $x_1^0=x_2^0=0$ достигается условный минимум. Правило множителей приводит к уравнениям

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=-2\lambda x_1=0, \qquad \frac{\partial F}{\partial x_2}=1+\lambda=0,$$

откуда $\lambda=-1$. Функция Лагранжа $F\left(X,-1\right)=x_1^2$ в точке $x_1=0$, соответствующей точке условного минимума, также достигает минимума.

Пример 5. $n=2, \quad m=1, \quad f\left(X\right)=x_2^3, \quad g\left(X\right)=-x_1^2+x_2$. Поскольку

$$\frac{\partial g}{\partial x_{11}}=-2x_1, \qquad \frac{\partial g}{\partial x_2}=1,$$

то

$$\frac{\partial g}{\partial X}\neq 0$$

и любая допустимая точка – обыкновенная, т.е. задача нормальная и

$$F(X,\lambda) = x_2^3 + \lambda\left(x_2 - x_1^2\right).$$

Правило множителей приводит к уравнениям

$$-2\lambda x_1 = 0, \quad 3x_2^2 + \lambda = 0, \quad x_2 - x_1^2 = 0.$$

Точке условного минимума $x_1^0 = x_2^0 = 0$ соответствует $\lambda = 0$. Функция Лагранжа с этим значением $F(X,0) = x_2^3$ в точке $x_2^0 = 0$ не достигает минимума. Точка $x_2^0 = 0$ является точкой перегиба функции.

Пример 6. $n = 2, \quad m = 1, \quad f(X) = -x_2^2, \quad g(X) = x_2$. Точка $x_1^0 = x_2^0 = 0$ является нормальной точкой условного минимума. Правило множителей для функции $F(X,\lambda) = -x_2^2 + \lambda x_2$ приводит к уравнениям

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial x_2} = -2x_2^0 + \lambda = 0,$$

из которых следует, что $\lambda = 0$. При этом значении множителя функция Лагранжа $F(X,0) = -x_2^2$ достигает не минимума, а максимума.

4.3. Лемма о включении

Место нормальных задач в теории минимизации функций с дополнительными ограничениями определяется тем, что нормальные задачи на условный минимум не могут быть тривиальными, т.е. множество их допустимых векторов состоит не из конечного числа точек, а из бесконечного. Это следует из метода исключения. Такой же смысл можно придать, и следующей лемме, ярко отражающей существо классических методов исследования задач на минимум.

Лемма 3. Пусть X^*- обыкновенная допустимая точка, $g\left(X^*\right) = 0$, где $g(X)$- гладкая функция. Тогда для n- мерного вектора Y, лежащего в гиперплоскости

$$\frac{\partial g'\left(X^*\right)}{\partial X} Y = 0, \tag{7}$$

найдется n- мерная функция $h(\beta)$ такая, что в окрестности точки $\beta = 0$ выполняется тождество

$$g(h(\beta)) \equiv 0$$

и

$$h(0) = X^*, \dot{h}(0) = Y \quad \left(\dot{h}(0) = \frac{dh(0)}{d\beta} \right).$$

Замечание. Найденная функция $h(\beta)$ по теореме о неявных функциях дифференцируема столько раз, сколько раз дифференцируема функция $g(X)$.

Геометрический смысл леммы можно пояснить следующим образом. Совокупность уравнений $g_1(X) = 0, ..., g_m(X) = 0, \quad m < n$, задает $(m-n)$-мерное многообразие. В частности, при $m - n = 2$ это будет поверхность.

Уравнение

$$\frac{\partial g'\left(X^*\right)}{\partial X} Y = 0$$

задает касательную гиперплоскость к этой поверхности в точке $X = X^*$. Лемма о включении утверждает, что какой бы вектор Y ни взять из касательной плоскости, на поверхности можно провести линию, которая исходит из точки $X = X^*$ с касательной, содержащей вектор Y.

По доказанной лемме, точку минимума нормальной задачи можно погрузить в семейство допустимых точек, зависящее от параметров β, Y. Поэтому нормальная задача на условный минимум не может оказаться тривиальной. Анормальные же задачи могут быть и тривиальными.

Пример 7. $n = 4, \quad m = 1, \quad f(X) = x_1, \quad g(X) = x_1^2 + x_2^2 = 0$. Множество допустимых точек состоит лишь из одной точки $x_1 = x_2 = 0$, поэтому задача минимизации вырождается: минимизировать функцию $f(X)$ на других точках не имеет смысла.

4.4. Экономическая интерпретация множителей Лагранжа

В конкретных прикладных вопросах множители Лагранжа имеют содержательную интерпретацию. Так, в механике множители Лагранжа задают реакции связей, а в экономике – **цены на продукты производства.**

Ниже будем обсуждать экономическую интерпретацию множителей Лагранжа.

Пример 8. Пусть производственные функции каждого из двух продуктов зависят от двух (одних и тех же) факторов. Суммарное количество каждого фактора фиксировано. Пусть заданы цены продуктов. При каких условиях доход от выпуска будет максимальным?

Обозначим через x_1, x_2 объемы выпуска первого и второго продуктов, соответственно. Пусть x_3, x_4 - объемы факторов, использованные при производстве первого продукта с производственной функцией $x_1 = \phi(x_3, x_4)$. Аналогично, $x_2 = \psi(x_5, x_6)$. Предполагается, что x_3 и x_5 представляют один и тот же фактор, так же как и x_4 и x_6. Задача состоит в следующем:

$$\begin{gathered} f(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 \to \max, \\ x_1 - \phi(x_3, x_4) = 0, \quad x_3 + x_5 - k_1 = 0, \\ x_2 - \psi(x_5, x_6) = 0, \quad x_4 + x_6 - k_2 = 0. \end{gathered}$$

Функция Лагранжа в этом случае запишется в виде

$$F(X, \Lambda) =$$

$$= p_1 x_1 + p_2 x_2 - \lambda_1 (x_1 - \phi(x_3, x_4)) - \lambda_2 (x_2 - \psi(x_5, x_6)) - \lambda_3 (x_3 + x_5 - k_1) - \lambda_4 (x_4 + x_6 - k_2).$$

Приравнивая частные производные нулю, получим шесть уравнений:

$$p_1 = x_1, \quad p_2 = x_2, \ \lambda_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_3} = \lambda_3, \quad \lambda_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_4} = \lambda_4, \ \lambda_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_5} = \lambda_3; \quad \lambda_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_6} = \lambda_4.$$

Отсюда легко получить условия на выпуск максимизированного дохода:

$$p_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_3} = p_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_5} = \lambda_3, \qquad p_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_4} = p_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_6} = \lambda_4.$$

Следовательно, стоимость предельного продукта по каждому фактору будет одна и та же в обеих отраслях. Заметим, что все множители Лагранжа оказались равными ценам. Если в приведенном случае имеет место конкурентное ценообразование, то λ_1, λ_2 - цены продуктов, а λ_3, λ_4 - цены факторов.

Таким образом, в примере, приведенном выше, множители Лагранжа оказались равными ценам. Такими же свойствами, как мы помним, обладают двойственные переменные в теории линейного программирования.

Ниже будет предложена формальная интерпретация множителей Лагранжа.

Рассмотрим стандартную задачу условной оптимизации. Решим ее с помощью метода множителей Лагранжа, который дает оптимальные векторы X^*, Λ^*. Пусть i-е ограничение имеет вид $g_i(x) = b_i$.

Первоначально полагалось, что $b_i = 0$. Исследуем здесь влияние малого ослабления ограничения.

Обозначим через V^* оптимальное значение целевой функции ($V^* = f(X^*)$). Малое ослабление i-го ограничения приводит к малым изменениям оптимальных значений переменных. Однако предполагается, что условия оптимальности по-прежнему удовлетворяются, так что новое состояние, достигаемое в результате ослабления ограничений, также оптимально. Влияние ослабления на оптимальное значение целевой функции определяется формулой

$$\frac{\partial V^*}{\partial b_i} = \sum_j \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial b_i}. \tag{8}$$

Из ограничений имеем

$$\sum_j \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial b_i} = \begin{cases} 0, & k \neq i, \\ 1, & k = i. \end{cases} \tag{9}$$

Умножим k - е равенство в (9) на $\lambda_k{}^*$ и просуммируем по k. Получим

$$\sum_k \sum_j \lambda_k{}^* \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial b_i} = \lambda_i{}^*.$$

Вычтем это выражение из (8). Получим

$$\frac{\partial V^*}{\partial b_i} = \lambda_i{}^* + \sum_j \left[\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} - \sum_k \lambda_k \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j} \right] \frac{\partial x_j}{\partial b_i}.$$

Выражение справа в скобках в силу условия оптимальности равно нулю, поэтому

$$\frac{\partial V^*}{\partial b_i} = \lambda_i^*.$$

Таким образом, λ_i^* соответствует маргинальной (предельной) скорости изменения целевой функции относительно малого ослабления i - го ограничения при условии, что все остальные ограничения неизменны. Эта интерпретация аналогична интерпретации двойственных переменных в теории линейного программирования.

В типичных экономических приложениях ограничения могут задаваться лимитами на ресурсы, а целевая функция - некоторым индексом общественного благосостояния. Тогда оптимальные множители Лагранжа соответствовали бы маргинальным (предельным) общественным оценкам ресурсов. В примере, рассмотренном выше, множители соответствуют ценам на продукты и на факторы. Цены на факторы соответствуют предельным оценкам для фиксированного предложения факторов. Чему же соответствуют цены на продукты? Оказывается, они соответствуют маргинальным оценкам производственных функций, выступающих в качестве ограничений, или параметрам эффективности производственных функций.

Таким образом, множители Лагранжа в общей задаче оптимизации, играют роль двойственных переменных в линейном программировании, и сводится к ним, если общая задача линейна.

В экономических задачах можно, поэтому интерпретировать множители Лагранжа так же, как двойственные переменные.

5. Необходимое условие второго порядка. Достаточное условие минимума

До сих пор в задачах нелинейного программирования рассматривались необходимые условия первого порядка, которые используют лишь значения первых производных. Этой информации может оказаться недостаточно для различения точек, не являющихся точками минимума. Ниже приводятся более тонкие условия минимума, основанные на свойствах вторых производных.

5.1. Необходимое условие второго порядка

Теорема 5. Пусть функции $f\left(X\right)$, $g\left(X\right)$ определены, непрерывны и дважды дифференцируемы в окрестности точки $X = X^0$. Если X^0 - нормальная точка условного минимума, а Λ - соответствующий ей множитель Лагранжа, то квадратичная форма

$$Y'\frac{\partial^2 f\left(X^0,\Lambda\right)}{\partial X^2}Y$$

знакоположительна на гиперплоскости

$$\frac{\partial g'\left(X^0\right)}{\partial X}Y = 0, \tag{10}$$

т.е. для всех Y, удовлетворяющих уравнению (16), выполняется неравенство

$$Y'\frac{\partial^2 f\left(X^0,\Lambda\right)}{\partial X^2}Y \geq 0.$$

Доказательство опускаем.

Без предположения о нормальности точки X^0 теорема 7 может вырождаться.

Пример 9. $n = 2,\quad m = 1,\quad f(X) = x_1^4 + x_2^4,\quad g(X) = x_1 x_2$. Допустимые точки заполняют оси координат $x_1 = 0,\quad x_2 = 0$. Точка $x_1^0 = 0,\quad x_2^0 = 0$ является точкой условного минимума. Правило множителей приводит к уравнениям

$$\frac{\partial F\left(X^0,\overline{\Lambda}\right)}{\partial x_1} = 4\lambda_0 (x_1^0)^3 + \lambda x_2^3 = 0,\quad \frac{\partial F\left(X^0,\overline{\Lambda}\right)}{\partial x_2} = 4\lambda_0 (x_2^0)^3 \lambda x_1^0 = 0,$$

из которых следует, что любые числа λ_0, λ являются множителями, соответствующими точке минимума. Матрица вторых производных функции Лагранжа имеет вид

$$\frac{\partial^2 F\left(X^0,\overline{\Lambda}\right)}{\partial X^2} = \begin{pmatrix} 12\lambda_0 (x_1^0)^2 & \lambda \\ \lambda & 12\lambda_0 (x_2^0)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

Уравнению

$$\frac{\partial g'(X^0)}{\partial X}Y = 0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 = 0$$

удовлетворяют все точки плоскости. Квадратичная форма $2\lambda y_1 y_2$ неотрицательна лишь при $\lambda = 0$.

5.2. Достаточное условие минимума

Допустимую точку X^* назовем **условно - стационарной точкой функции** $f(X)$, если найдется m- мерный вектор Λ такой, что

$$\frac{\partial F\left(X^*, \Lambda\right)}{\partial X} = 0,$$

где $F\left(X, \Lambda\right) = f\left(X\right) + \Lambda' g\left(X\right)$.

Теорема 6. Пусть функции $f\left(X\right)$, $g\left(X\right)$ определены, непрерывны и дважды дифференцируемы в окрестности точки $X = X^*$. Для того чтобы условно – стационарная точка была точкой относительного условного минимума, достаточно, чтобы квадратичная форма

$$Y' \frac{\partial^2 f\left(X^*, \Lambda\right)}{\partial X^2} Y$$

была определенно положительной на гиперплоскости

$$\frac{\partial g'\left(X^*\right)}{\partial X} Y = 0. \qquad (17)$$

Замечание. Из доказательства теоремы следует, что X^*- точка строгого относительного условного минимума, т.е. найдется такое ε_2, что для всех точек X, $X \neq X^*$, $X \in B_\varepsilon$ $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$, выполняется неравенство $f\left(X^*\right) < f\left(X\right)$.

Пример 10. Найти параметры цилиндрической цистерны, которая при заданной площади поверхности S_0 имеет объем.

Решение. Площадь поверхности цистерны равна $S = 2\pi x_2^2 + 2\pi x_1 x_2$. Объем цистерны равен $V = -\pi x_1 x_2^2$. Введя функцию

$$g(x_1, x_2) = \pi x_2^2 + 2\pi x_1 x_2 - S_0,$$

исходную задачу сведем к задаче

$$f(X) \to \min, \qquad g(X) = 0. \tag{18}$$

Полученная задача не эквивалентна исходной, ибо не учтены дополнительные ограничения

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \tag{19}$$

вытекающие из физической сущности этих переменных.

Однако будем решать задачу в форме (18), в случае необходимости отбрасывая решения, не удовлетворяющие ограничениям (19). Если задача (18) имеет решение, то искомое, очевидно, будет среди локальных минимумов задачи (18). Но без учета (19) задача (18) не имеет решения, ибо при $x_1 \to \infty, \quad x_2 \to -\infty$ имеем $f(X) \to -\infty$. Значит, доказанные необходимые условия минимума нельзя применить. И все же имеющегося материала достаточно для решения поставленной задачи. Для этого нужно найти условно-стационарные точки и к ним применить достаточное условие минимума.

Составляем нормальную функцию Лагранжа

$$F(X, \lambda) = -\pi x_1 x_2^2 + \lambda[2\pi x_2^2 + 2\pi x_1 x_2 - S_0].$$

Условно-стационарные точки удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = -2\pi x_2^2 + 2\pi\lambda x_2 = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = -2\pi x_1 x_2 + 4\pi\lambda x_2 + 2\pi\lambda x_1 = 0,$$
$$2\pi x_2^2 + 2\pi x_1 x_2 - S_0 = 0.$$

Отсюда

$$x_1 = 4\lambda, \quad x_2 = 2\lambda, \quad \lambda = \pm\sqrt{\frac{S_0}{24\pi}}.$$

Выберем $\lambda > 0$. Подсчитаем матрицу

$$\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}\begin{pmatrix} 0 & -2\pi x_2 + 2\pi\lambda \\ -2\pi x_2 + 2\pi\lambda & -2\pi x_1 + 4\pi\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2\pi\lambda \\ -2\pi\lambda & -4\pi\lambda \end{pmatrix}.$$

Уравнение гиперплоскости, на которой проверяется квадратичная форма:

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}y_1+\frac{\partial g}{\partial x_2}y_2=2\pi x_2 y_1+[4\pi x_2+2\pi x_1]y_2=4\pi\lambda y_1+16\pi\lambda y_2=0. \qquad (20)$$

Квадратичная форма с матрицей $\dfrac{\partial^2 F}{\partial X^2}$ имеет вид $-4\pi\lambda y_1 y_2-4\pi\lambda y_2^2$ и на гиперплоскости (20) переходит в выражение $12\pi\lambda y_2^2$, которое положительно при $y_2\neq 0$. Таким образом, условия теоремы 6 для точки

$$x_1=2\sqrt{\frac{S_0}{6\pi}},\quad x_2=\sqrt{\frac{S_0}{6\pi}}$$

выполнены. Поэтому цистерна с такими параметрами, по крайней мере, среди цистерн с близкими параметрами имеет наибольший объем.

Упражнения

Решить следующие задачи:

1. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1-2x_2+2x_3\to\min,$

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1.$$

2. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2x_3\to\min,$

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1,$$
$$x_1+x_2+x_3=0.$$

3. $f(x_1,x_2)=x_1^2+12x_1x_2+2x_2^2\to\min,$

$$4x_1^2+x_2^2=25.$$

4. Мукомольный комбинат реализует муку двумя способами: в розницу через магазин и оптом через торговых агентов. При продаже x кг муки через магазин расходы на реализацию составляют x^2 ден. ед., а при продаже y кг муки через торговых агентов - y^2 ден. ед. В сутки для продажи выделяется 5000 кг муки. Сколько кг муки надо продавать каждым способом при минимальных затратах? Задачу решить методом Лагранжа.

5. **Задача Шварца.** В остроугольный треугольник надо вписать треугольник минимального периметра с вершинами, лежащими на сторонах исходного.

6. **Задача Евклида.** В треугольник вписать параллелограмм наибольшей площади.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте постановку задачи нелинейного программирования в общем случае.

2. Приведите необходимые условия минимума в задаче на безусловный минимум.

3. Приведите достаточное условие минимума в задаче на безусловный минимум.

4. В каком случае для исследования функции на минимум нельзя использовать критерий Сильвестра?

5. Что дает полную классификацию невырожденных критических точек?

6. Существует ли классификация вырожденных критических точек?

7. В чем состоит суть решения задачи на условный минимум методом исключения?

8. На чем основана возможность применения метода исключения?

9. Приведите определение функции Лагранжа. Сформулируйте правило множителей Лагранжа.

10. Приведите определение нормальной функции Лагранжа. В чем преимущества нормальной функции Лагранжа от функции Лагранжа?

11. Дайте определения нормальной точки минимума и нормальной задачи на условный минимум.

12. Дайте определения обыкновенной допустимой точки.

13. Приведите критерий нормальности задачи на условный минимум.

14. Сформулируйте правило множителей Лагранжа для нормальной задачи на условный минимум.

15. Дайте экономическую интерпретацию множителей Лагранжа.

16. Приведите необходимое условие второго порядка минимума в задаче на условный минимум.

17. Приведите достаточное условие второго порядка минимума в задаче на условный минимум.

§31. Задачи нелинейного программирования

Ключевые слова: *система ограничения, допустимые точки, активные (жесткие) ограничения, пассивные (нежесткие) ограничения, условия дополняющей нежесткости (условия дополняющей пассивности).*

В задаче на условный минимум из §30 ограничения задаются в виде системы равенств, поэтому ее можно назвать задачей минимизации при ограничениях типа равенств. В данном параграфе рассматривается задача минимизации, в которой дополнительные условия задаются системой неравенств. Многие авторы именно такую задачу называют **задачей нелинейного программирования,** хотя задачу минимизации при ограничениях типа равенств также можно назвать задачей нелинейного программирования, если учесть, что любое уравнение равносильно системе двух неравенств

$$\begin{cases} \phi(X) \le 0, \\ -\phi(X) \le 0. \end{cases}$$

1. Постановка задачи и ее сведение к задаче на условный минимум

Пусть в R^n заданны функции, $f(X), g_1(X), g_2(X), \ldots, g_m(X)$ из которых хотя бы одна является нелинейной. Требуется найти точку, $X^0 \in R^n$ удовлетворяющую условиям:

$$g_1(X) \le 0, g_2(X) \le 0, \ldots, g_m(X) \le 0,$$

такую, что

$$f\left(X^0\right) = \min_{\substack{g_i(X) \le 0 \\ i=\overline{1,m}}} f(X).$$

Решение этой задачи – точка X^0 - называется точкой минимума функции $f(X)$ при ограничениях типа неравенств.

Кратко задачу нелинейного программирования, т.е. задачу минимизации при ограничениях типа неравенств можно записать так:

$$f(X) \to \min. \tag{1}$$

$$g_i\left(X\right)\le 0,\quad i=1,2,...,m. \tag{2}$$

Определение. Каждый вектор X , удовлетворяющий ограничениям (2) называется допустимым.

Определение. Ограничения $g_i(X)\le 0$ называется **жестким (активным) в точке** X^*, если $g_i(X^*)=0$, **и нежестким (пассивным),** если $g_i(X^*)<0$.

В дальнейшем, при необходимости, ограничения (2) будем записывать в векторном виде $g(X)\le 0$, считая, что для m- мерного вектора $A=\left(a_1,a_2,...,a_m\right)$ неравенство $A\le 0$ означает покомпонентное выполнение неравенства $a_i\le 0,\quad i=1,2,...,m$. В задаче (1)-(2) с ограничениями типа неравенств не обязательно предполагать, что $m<n$.

Определение. Задачу (1)-(2) называют задачей на глобальный условный минимум при ограничениях типа неравенств в отличие от задачи на локальный условный минимум при ограничениях типа неравенств, которая состоит в следующем: найти точку X^0, удовлетворяющую ограничениям (2), такую что при некотором достаточно малом $\varepsilon,\quad \varepsilon>0$, для всех допустимых векторов (точек) X из ε-окрестности точки X^0, $\left\|X-X^0\right\|\le\varepsilon$, выполняется неравенство $f\left(X^0\right)\le f\left(X\right)$.

В других обозначениях точка X^0- локального условного минимума при ограничениях типа неравенств – определяется равенством:

$$f\left(X^0\right)=\min_{\left\|X-X^0\right\|\le\varepsilon,\quad X\in K} f\left(X\right).$$

Лемма. Каждая задача на минимум с ограничениями типа неравенств (1)-(2) эквивалентна задаче с ограничениями типа равенств

$$f\left(X\right)\to\min. \tag{3}$$

$$g_i\left(X\right)+x_{n+i}^2=0,\quad i=1,2,...,m. \tag{4}$$

Дополнительные переменные x_{n+i}, $i=1,2,...,m$, в задаче (3)-(4) называются дополнительными переменными. Покажем, что точка X^0 будет решением задачи (1)-(2) тогда и только тогда, если

$$X^0, \quad x_{n+1}^0 = [-g_1(X^0)]^{\frac{1}{2}}, \quad ... \quad , x_{n+ь}^0 = [-g_m(X^0)]^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

будет решением задачи (3)-(4).

Доказательство. Пусть X^0 - решение задачи (1)-(2), но точка (5) не является решением задачи (3)-(4), т.е. для точки $(\tilde{X}, \tilde{x}_{n+1}, ..., \tilde{x}_{n+m})$ выполняются

$$f(\tilde{X}) < f(X^0),$$
$$g_i(\tilde{X}) + \tilde{x}_{n+i}^2 = 0.$$

Таким образом,

$$f(\tilde{X}) < f(X^0),$$
$$g_i(\tilde{X}) = -\tilde{x}_{n+i}^2 \le 0,$$

что противоречит определению точки X^0. Пусть, наоборот, точка $\left(X^0, x_{n+1}^0, ..., x_{n+m}^0\right)$ - решение задачи (3), (4), но вектор X^0 не есть решение задачи (1), (2), т.е. существует вектор X^* такой, что

$$f(X^*) < f(X^0), \tag{6}$$

$$g_i(X^*) \le 0, \quad i=1,2,...,m \; . \tag{7}$$

Дополним вектор X^* координатами $x_{n+1}^* = [-g_1(X^*)]^{\frac{1}{2}}, ..., x_{n+m}^* = [-g_m(X^*)]^{\frac{1}{2}}$.

Тогда для $(n+m)$- мерного вектора $\left(X^*, x_{n+1}^*, ..., x_{n+m}^*\right)$ и (6), (7)

$$f(X^*) < f(X^0),$$

$$g_i(X^*) + [x_{n+i}^*]^2 = 0, \quad i=1,2,...,m,$$

что противоречит предположению о том, что $\left(X^0, x_{n+1}^0, ..., x_{n+m}^0\right)$ - решение задачи (3)-(4). Лемма 1 доказана.

Дальнейшее исследование задачи на минимум при ограничениях типа неравенств, очевидно. К задаче (3)-(4) применяем доказанные теоремы по задаче на условный минимум, а результаты формулируем в терминах исходной задачи.

2. Необходимые условия минимума

Будем считать, что функции $f(X), g(X)$ определены и принадлежат классу $C^{(2)}$. Допустимую точку X^* назовем обыкновенной допустимой при ограничениях (2), если векторы

$$\frac{\partial g_{i_1}(X^*)}{\partial X},...,\frac{\partial g_{i_k}(X^*)}{\partial X}, \quad 1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le m, \tag{8}$$

соответствующие всем ограничениям $g_{i_1}(X) \le 0,..., g_{i_k}(X) \le 0$, активным в точке X^*, линейно независимы. Нетрудно показать, что если точка X^* обыкновенная при ограничениях (2), то

$$(X^*, x_{n+1}^* = [-g_1(X^*)]^{\frac{1}{2}},..., x_{n+m}^* = [-g_m(X^*)]^{\frac{1}{2}})$$

- обыкновенная допустимая при ограничениях (4).

Составим для задачи (3)-(4) нормальную функцию Лагранжа:

$$F(X, x_{n+1},..., x_{n+m}, \Lambda) = f(X) + \Lambda' g(X) + \sum_{i=1} \lambda_i x_{n+i}^2 .$$

Согласно правилу множителей Лагранжа, для точки

$$\bar{X}^0 = \left(X^0, x_{n+1}^0,..., x_{n+m}^0\right)$$

найдется m- мерный векторный множитель Λ такой, что

$$\frac{\partial F(X^0, x_{n+1}^0,..., x_{n+m}^0, \lambda)}{\partial X} = \frac{\partial f(X^0)}{\partial X} + \Lambda' \frac{\partial g(X^0)}{\partial X} = 0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial F(X^0, x_{n+1}^0,..., x_{n+m}^0, \Lambda)}{\partial x_{n+1}} = 2\lambda_1 x_{n+1}^0 = 0,$$

$$\text{...} \tag{10}$$

$$\frac{\partial F(X^0, x_{n+1}^0,..., x_{n+m}^0, \Lambda)}{\partial x_{n+m}} = 2\lambda_m x_{n+m}^0 = 0.$$

Если для исходной задачи (1)- (2) ввести функцию Лагранжа

$$F(X, \Lambda) = f(X) + \Lambda' g(X),$$

то условие (9) примет вид

$$\frac{\partial F(X^0,\Lambda)}{\partial X}=0.$$

Обратимся к условиям (10). Из неравенств (2) видно, что равенства

$$\lambda_i x_{n+i}^0=0, \quad i=1,2,...,m$$

выполняются тогда и только тогда, когда

$$\lambda_i g_i(X^0)=0, \quad i=1,2,...,m.$$

Эти условия называются **условиями дополняющей не жесткости (условия дополняющей пассивности).** Очевиден их смысл: множитель Лагранжа, соответствующий ограничению, пассивному в точке X^0, равен нулю и, наоборот, если некоторый множитель Лагранжа отличен от нуля, то соответствующее ограничение активно в точке X^0.

Поскольку задача (3)-(4) нормальна, то для точки X^0 выполняется необходимое условие минимума второго порядка. Далее, применяя теорему 5, из §30 получим следующее утверждение.

Теорема 1. Необходимые условия минимума в задаче с ограничениями типа неравенств. Пусть скалярная функция $f(X)$ и m- мерная функция $g(X)$ определены и непрерывны вместе с двумя первыми производными по $X\in R^n$. Пусть X^0 — точка относительного минимума в задаче

$$f\left(X\right)\to \min$$

$$g_i\left(X\right)\le 0, \quad i=1,2,...,m,$$

является обыкновенной допустимой и в этой точке активны ограничения с номерами $i_1,...,i_k$. Тогда:

1) найдется неотрицательный множитель $\Lambda=(\lambda_1,....,\lambda_m)\ge 0$ такой, что для функции Лагранжа $F(X,\Lambda)=f(X)+\Lambda' g(X)$ выполняется равенство

$$\frac{\partial F(X^0,\Lambda)}{\partial X}=0;$$

2) выполняются условия дополняющей не жесткости

$$\lambda_i g_i(X^0)=0, \qquad i=1,2,...,m;$$

3) квадратичная форма

$$Y'\frac{\partial^2 F(X^0,\Lambda)}{\partial X^2}Y$$

неотрицательна на гиперплоскости, заданных уравнениями

$$\frac{\partial g'_{i_1}(X^{0)}}{\partial X}Y=0,....,\frac{\partial g'_{i_k}(X^0)}{\partial X}Y=0\,.$$

3. Достаточное условие минимума

Допустимая точка X^* называется условно-стационарной в задаче минимизации с ограничениями типа неравенств (1)-(2), если при некотором m-мерном векторе $\Lambda \geq 0$ выполняются условия

$$\frac{\partial F(X^*,\Lambda)}{\partial X}=0, \qquad \lambda_i g_i(X^*), \quad i=1,2,...,m\,.$$

Теорема 2. Для того чтобы условно – стационарная точка X^* была точкой относительного минимума, достаточно, чтобы квадратичная форма

$$Y'\frac{\partial^2 F(X^0,\Lambda)}{\partial X^2}Y$$

была определенно положительной на гиперплоскости

$$\frac{\partial g'_{i_1}(X^{*)}}{\partial X}Y=0,....,\frac{\partial g'_{i_k}(X^*)}{\partial X}Y=0, \qquad \|Y\|\neq 1,$$

где номерами $i_1,...,i_k$ ограничений, активных в точке X^*.

Доказательство. Ясно, что найдется такое $\varepsilon>0$, когда для любой точки X из ε-окрестности точки X^* выполняются ограничения, пассивные в точке X^*, т.е. $g_i(X)<0$, если $i\neq i_1,...,i_k$; $\quad \|X-X^*\|\leq\varepsilon$. Поэтому, повторив рассуждения из доказательства теоремы 6 о достаточном условии минимума в задаче на условный минимум (см. §30) с учетом равенств $\lambda_i=0, \quad i\neq i_1,...,i_k$, получим утверждение теоремы 2.

4. Необходимость в методах нелинейного программирования

Даже самого краткого обзора простых, но все же поучительных моделей линейного программирования, приведенных ранее, будет достаточно для того, чтобы вызвать у читателя сомнения в действительной адекватности строго линейных моделей многим реальным ситуациям.

Легко может создаться впечатление, что при линейном подходе попросту игнорируются такие явления как: эффективность или неэффективность укрупнения операций во много продуктовых моделях; отсутствие аддитивности объемных показателей при составлении химических смесей; влияние объема реализации на цену реализации, а, следовательно, на выручку от реализации.

Отметим, что при более глубоком исследовании в ряде задач появляются связи нелинейного характера, когда с изменением одного элемента другие элементы непропорциональны первому. Например, даже простейшая транспортная задача принимает нелинейный вид, если стоимость перевозки единицы груза зависит от их общего количества.

Если у читателя и создалось такое впечатление, то приведенное ниже обсуждение позволит устранить возникшее недоразумение.

Имеется много данных об очень успешном применении моделей линейного программирования в условиях нелинейности. Поскольку любая модель неизбежно оказывается лишь приближением к реальности, возникает важный вопрос: «*в каких случаях* линеаризованный вариант является адекватным отображением нелинейного явления?». Следовательно, читатель должен научиться отличать условия, в которых непосредственное применение линейного программирования приемлемо, от условий, где оно неприемлемо.

Далее следует два примера, на основе которых можно судить о вероятной неадекватности линеаризованного варианта в некоторых реальных ситуациях.

Пример. Рассмотрим фирму, находящуюся на начальном этапе разработки модели перспективного планирования в масштабах всей фирмы. Специалист по управлению обычно знает, что даже опытному бизнесмену трудно дать точный и детальный прогноз оптимальных объемов производства фирмы, и распространения ее контроля на рынки сбыта на последующие 10 и более лет. В самом деле, применение администратором такой модели в основном обусловлено именно тем, что он понимает, как легко ошибиться при использовании только лишь интуитивных соображений в стремлении оценить влияние экономических факторов в последующие периоды. Если затраты производства и выручка от реализации зависят от объема операции нелинейно, линеаризованные догадки могут оказаться недостаточными для получения надежных ответов (вместе с тем, при многократном применении линейная модель может оказаться применимой, если только параметры модели значительно не меняются во времени).

Пример. Этот пример относится к фирме, составляющей производственную программу с помощью динамической много продуктовой модели, отображающей существенные затраты времени на наладку станков, ограниченную мощность отдельных групп оборудования, колеблющийся спрос. Обычно в таких случаях *сущность* оптимизационной задачи состоит в варьировании различных нелинейных факторов, влияющих на принимаемые решения, относительно производственной программы. Если только специалист, разрабатывающий программу, не имеет очень хорошего представления о характере оптимального решения, любая простая линеаризация задачи, вероятно, приведет к нарушению фундаментальных принципов оптимизации.

Однако даже если в данном конкретном случае может потребоваться построение нелинейной модели, иногда удается использовать метод решения, лишь немногим отличающийся от *метода решения* для линейной модели. Наряду с этим при существенной нелинейности в связи с ее спецификой или влиянием ее на характер модели приходится применять методы оптимизации, гораздо более сложные, чем симплексный алгоритм.

5. Значение нелинейных моделей для управления

В настоящее время применение математического программирования в преобладающем большинстве реальных ситуаций сводится к моделям линейной аппроксимации, а не к линейным моделям в явном их виде. Однако значимость нелинейного программирования и его использования постоянно возрастает. Это обусловлено быстро растущими познаниями руководителей и специалистов в части использования математических моделей, предназначенных для подготовки решений, а также все большей доступностью компьютерных программ решения нелинейных задач большой размерности.

В большинстве случаев нелинейности, которые необходимо отобразить в моделях, относятся к одной из двух категорий:

- эмпирически наблюдаемые соотношения, такие, как непропорциональные изменения затрат, выхода продукции, показателей качества;
- структурно полученные соотношения, к которым относятся постулируемые экономические явления, а также выведенные математически или установленные руководством правила поведения.

Очевидно, четкое разграничение этих двух категорий невозможно, поскольку при наличии достаточных данных можно вывести структурное соотношение, лежащее в основе эмпирически наблюдаемого явления.

Пример. Первым примером может служить тот случай, когда на предприятии в течение ряда лет прирост выпуска продукции отстает от роста затрат труда, тогда как темпы роста количества отходов его обгоняют.

Пример. Вторым примером является фирма, которая должна оплатить счет за электроэнергию в случае, когда расчеты ведутся по нелинейной формуле, учитывающей как среднесуточный расход, так и сведения о нелинейном характере затрат из договора о ставках оплаты, заключенного с компанией, обеспечивающей энергоснабжение.

Нелинейность «встраивается» в модели программирования и в других случаях, например:

Пример. ***Приготовление бензиновых смесей.*** В модели приготовления бензина определенного состава из отдельных фракций, полученных в результате перегонки нефти, обычно имеется нелинейное ограничение на октановое число смеси, поскольку эта характеристика качества нелинейно зависит от количества добавляемого к смеси тетра – этилового свинца.

Пример. ***Выручка от реализации продукции.*** Спрос на продукцию компании может существенно зависеть от цен реализации: чем ниже цена продукта, тем больше объем реализации, несмотря на аналогичное снижение цен, производимое конкурентами. Следовательно, выручка от реализации продукции не изменяется пропорционально цене, и это обстоятельство должно быть отражено в целевой функции много продуктовой модели с помощью нелинейного слагаемого. Для иллюстрации примем, что $x(p)$ есть объем реализации, зависящий от цены p; тогда выручка от реализации равна $p \cdot x(p)$. Пусть на представляющем для нас интерес интервале изменения p функция объема реализации от цены линейна, т.е. имеет вид $x(p) = ap + b$. Тогда слагаемые в целевой функции, относящиеся к выручке от реализации, являются квадратичным относительно управляющей переменной p и имеют вид $\left(a\,p^2 + b\,p\right)$.

Пример. ***Размер много продуктового заказа.*** В моделях управления запаса обычно число продуктов бывает равно одному. Однако нередко оптовый покупатель пополняет свои запасы, заказывая у одного и того же поставщика одновременно несколько видов продукции. Тем самым достигается экономия на транспортных затратах, расходах по оформлению документации и скидке на размер заказа, представляемой поставщиком. Эта ситуация может рассматриваться на основе использования модели математического программирования большой размерности, в которой затраты на пополнения запасов являются нелинейной функцией нескольких переменных – размеров заказов отдельных продуктов.

Пример. ***Уровень страховых запасов.*** В большинстве моделей математического программирования, используемых для общефирменного планирования, длительность отрезков планового периода редко составляет менее трех месяцев и часто превышает год и более. В таких динамических, «многопериодных» моделях обычно предусматривается условие наличия страховых запасов, которые должны выполнять компенсатора колебаний еженедельного объема реализации. В этих моделях применяется, в частности, следующий подход: уровень страхового запаса предполагается зависимым как от прогнозированного объема реализации, так и от степени использования производственных мощностей, обусловленной этим прогнозом. Так, например, пусть c - максимально возможный недельный объем производства рассматриваемого продукта, s - прогнозированный *средне недельный* объем реализации этого продукта и $n \cdot s$- уровень страхового запаса продукта, где n - число недель, зависимое от коэффициента использования производственных мощностей s/c. Для примера предположим, что администрация приняла следующую формулу расчета n: $n = m + f(s/c)$. Тогда уровень страхового запаса представляет собой квадратичную функцию прогнозированного средне недельного уровня реализации, имеющую следующий вид: $\left[ms + (j/c)s^2\right]$. Этот уровень может входить как в ряд ограничений модели, так и в целевую функцию.

Как видно из сказанного, множество разнообразных обстоятельств, приводит к нелинейной формулировке ограничений или целевых функций задач математического программирования.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте постановку задачи нелинейного программирования.

2. Как решается задача на условный минимум с ограничениями типа неравенств?

3. Когда ограничение называется жестким (активным)?

4. Когда ограничение называется нежестким (пассивным)?

5. Какие условия называются условиями дополняющей не жесткости?

6. Приведите необходимое условие второго порядка минимума в задаче на условный минимум с ограничениями типа неравенств.

7. Приведите достаточное условие второго порядка минимума в задаче на условный минимум с ограничениями типа неравенств.

§32. Задачи выпуклого программирования

Ключевые слова: *выпуклое программирование, теорема Куна–Таккера, условие Слейтера, сепарабельная функция, сепарабельное программирование.*

Раздел нелинейного программирования, в котором задачи минимизации формулируются в терминах выпуклых функций и выпуклых множеств, называется **выпуклым программированием.**

1. Необходимые сведения

1.1. Выпуклые множества

Основные сведения о выпуклых множествах приведены нами ранее в §11. Здесь приведем лишь определения выпуклого множества.

Определение. Множество $K \subset R^n$ называется выпуклым, если оно наряду с любыми двумя своими точками содержит соединяющий их отрезок. Другими словами, если $X^1, X^2 \in K$, то $X(\lambda) = \lambda X^1 + (1-\lambda)X^2 \in K$ для любого λ, $0 \le \lambda \le 1$.

1.2. Выпуклые функции

Определение. Функция $f(X)$, определенная на выпуклом множестве K, называется **выпуклой**, если для любых $X^1, X^2 \in K$ и любого λ, $0 \le \lambda \le 1$, выполняется неравенство

$$f(\lambda X^1 + (1-\lambda)X^2) \le \lambda f(X^1) + (1-\lambda) f(X^2). \tag{1}$$

Выпуклая функция $f(X)$, $X \in K$, называется строго выпуклой, если неравенство

$$f(\lambda X^1 + (1-\lambda)X^2) < \lambda f(X^1) + (1-\lambda) f(X^2)$$

выполняется для каждых двух точек $X^1, X^2 \in K$, $X^1 \ne X^2$ и числа λ, $0 < \lambda < 1$. Иными словами, график строго выпуклой функции не содержит прямолинейных отрезков.

Упражнение

Показать, что линейная функция $f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + c_0$ является выпуклой функцией в пространстве R^n.

Лемма 1. Если $f(X)$ - выпуклая функция, то множество

$$K = \{X : f(X) \le c\}$$

при любом c выпукло (или пусто).

Доказательство. Действительно, пусть $X^1, X^2 \in K, \quad \lambda, \quad 0 \le \lambda \le 1$. Тогда $f(X^1) \le c, \quad f(X^2) \le c$ и в силу выпуклости функции $f(X)$

$$f(\lambda X^1 + (1-\lambda)X^2) \le \lambda f(X^1) + (1-\lambda) f(X^2) \le \lambda c + (1-\lambda)c = c,$$

т.е. точка $\lambda X^1 + (1-\lambda)X^2$ принадлежит множеству K. Поскольку $X^1, \quad X^2, \quad \lambda$ выбирались произвольными в пределах ограничений, то полученный факт означает выпуклость множества K. Доказанное свойство не полностью характеризует связь между выпуклыми множествами и выпуклыми функциями. Она полностью раскрывается в следующем утверждении.

Теорема 1. Для того чтобы функция $f(X)$, определенная на выпуклом множестве K, была выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы было выпуклым множество

$$\bar{K} = \{X, Y : \ X \in K, \quad Y \ge f(X)\}.$$

На геометрическом языке: функция $f(X)$, определенная на выпуклом множестве K, выпукла тогда и только тогда, когда ее надграфик представляет выпуклое множество.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $f(X), \ X \in K$ - выпуклая функция. Возьмем две точки X^1, X^2 множества $\bar{K}$:

$$\bar{X}^1 = \begin{pmatrix} X^1 \\ Y^1 \end{pmatrix}, \qquad \bar{X}^2 = \begin{pmatrix} X^2 \\ Y^2 \end{pmatrix},$$

где $X^1, X^2 \in K, \quad Y^1 \ge f(X^1), \quad Y^2 \ge f(X^2)$.

Составим отрезок

$$\overline{X}(\lambda) = \lambda\overline{X}^1 + (1-\lambda)\overline{X}^2 = \lambda\begin{pmatrix} X^1 \\ Y^1 \end{pmatrix} + (1-\lambda)\begin{pmatrix} X^2 \\ Y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda X^1(1-\lambda)X^2 \\ \lambda Y^1 + (1-\lambda)Y^2 \end{pmatrix}, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Поскольку K - выпуклое множество, то $\lambda X^1 + (1-\lambda)X^2 \in K$. Далее, в силу определения множества $\overline{K}$ и выпуклости функции $f(X)$

$$\lambda Y^1 + (1-\lambda)Y^2 \geq \lambda f(X^1) + (1-\lambda) f(X^2) \geq f(\lambda X^1 + (1-\lambda)X^2).$$

т.е. $\overline{X}(\lambda)$ принадлежит множеству $\overline{K}$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть множество $\overline{K}$ выпукло. Рассмотрим две его точки:

$$\overline{X}^1 = \begin{pmatrix} X^1 \\ f(X^1) \end{pmatrix}, \qquad \overline{X}^2 = \begin{pmatrix} X^2 \\ f(X^2) \end{pmatrix}.$$

При любом $\lambda, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$,

$$\lambda\overline{X}^1 + (1-\lambda)\overline{X}^2 = \lambda\begin{pmatrix} X^1 \\ Y^1 \end{pmatrix} + (1-\lambda)\begin{pmatrix} X^2 \\ Y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda X^1(1-\lambda)X^2 \\ \lambda Y^1 + (1-\lambda)Y^2 \end{pmatrix}, \quad 0 < \lambda < 1.$$

По определению множества $\overline{K}$ это означает, что

$$f(\lambda X^1 + (1-\lambda)X^2) \leq \lambda f(X^1) + (1-\lambda) f(X^2).$$

Но это неравенство было положено в определение выпуклой функции. Теорема доказана.

Функция $f(X)$, определенная па выпуклом множестве K, называется вогнутой, если функция $g(X) = -f(X), \quad X \in K$ выпукла. Основные свойства вогнутых функций непосредственно следуют из свойств выпуклых функций.

1.2. Свойства выпуклых функций

Перечислим свойства, которые понадобятся в дальнейшем. Большинство из них доказывается в курсах анализа.

1. Выпуклая функция $f(X)$, непрерывна во всех относительно внутренних точках множества K. Это значит, что выпуклая функция может иметь разрыв лишь на границе множества K.

2. Если функции $f_i(X), \quad i=1,2,\ldots,m; \quad X \in K$, выпуклы, то при любых $\alpha_i \geq 0$ выпуклы и функции

$$f(X) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(X), \tag{2}$$

$$f(X) = \max_{1\leq i\leq m} f_i(X). \tag{3}$$

Докажем второе свойство. Для функции (2)

$$f(\lambda X^1 + (1-\lambda)X^2) = \sum_{ш=1}^{ь} \alpha_i f_i(\lambda X^1 + (1-\lambda)X^2) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} \alpha_i [\lambda f_i(X^1) + (1-\lambda) f_i(X^2)] =$$

$$= \lambda \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(X^1) + (1-\lambda)\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(X^2) = \lambda f(X^1) + (1-\lambda) f(X^2),$$

т.е. функция (2) выпукла. Аналогично для (3)

$$f(\lambda X^1 + (1-\lambda)X^2) = \max_{1\leq i\leq m} f_i(\lambda X^1 + (1-\lambda)X^2) \leq$$

$$\leq \max_{1\leq i\leq m} [\lambda f_i(X^1) + (1-\lambda) f_i(X^2)] \leq$$

$$\leq \lambda \max_{1\leq i\leq m} f_i(X^1) + (1-\lambda) \max_{1\leq i\leq m} f_i(X^2) = \lambda f(X^1) + (1-\lambda) f(X^2).$$

3. Выпуклая функция $f(X)$ не может иметь двух различных локальных минимумов (локальный минимум является и глобальным); у строго выпуклой функции минимум может достигаться в единственной точке.

Действительно, если $X^1, X^2 \in K$ - точки локального минимума выпуклой функции $f(X)$ и $f(X^1) > f(X^2)$, то для точки $X(\lambda) = \lambda X^1 + (1-\lambda)X^2$, $0 < \lambda < 1$

$$\begin{aligned} &f(\lambda X^1 + (1-\lambda)X^2) \leq \lambda f(X^1) + (1-\lambda) f(X^2) \leq \\ &\leq \lambda f(X^1) + (1-\lambda) f(X^1) = f(X^1). \end{aligned} \tag{4}$$

При достаточно малых $\lambda, \lambda > 0$, точка $X(\lambda)$ попадает в сколь угодно малую окрестность точки X^1 и поэтому соотношение (4) противоречит тому, что X^1 - точка локального минимума. Значит, $f(X^1) = f(X^2)$.

Предположим, что у строго выпуклой функции $f(X)$ имеются две разные точки минимума $X^1, X^2 \in K$, $X^1 \neq X^2$, $f(X^1) \neq f(X^2)$. Тогда, при $0 < \lambda < 1$ имеем соотношение

$$f(\lambda X^1 + (1-\lambda)X^2) < \lambda f(X^1) + (1-\lambda) f(X^2) = \min_{X \in K} f(X).$$

Значит, в точке $\lambda X^1 + (1-\lambda)X^2 \in K$ функция $f(X)$ принимает значение, меньшее, чем $\min\limits_{X \in X} f(X)$. Противоречие доказывает утверждение: $X^1 = X^2$.

Доказанные свойства означают, что график выпуклой функции может быть «плоским» в окрестности точки минимума, у строго выпуклой функции этого не может быть. Более того, множество точек минимума выпуклой функции выпукло и состоит из единственной точки, если функция строго выпуклая.

4. Если $f(X) \in C^{(2)}$, то для выпуклости функции $f(X)$ на открытом выпуклом множестве необходимо и достаточно, чтобы матрица

$$\frac{\partial^2 f(X)}{\partial X^2}, \quad X \in K, \tag{5}$$

была неотрицательной. Если матрица (5) положительна, то функция $f(X)$ строго выпукла.

Пример 1. Рассмотрим функцию

$$f(X) = 2x_1^2 - 4x_1x_3 + 4x_2^2 - 8x_2x_3 + 9x_3^2 + 4x_1 + 8x_2 - 20x_3.$$

Эта функция дважды дифференцируема и ее частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 4x_1 - 4x_3 + 4; \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 8x_2 - 8x_3 + 8; \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = -4x_1 - 8x_2 + 18x_3 - 20;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 4; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} = -4; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = -8; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 8; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = 18.$$

Матрица вторых производных

$$\frac{\partial^2 f(X)}{\partial X^2} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 8 & -8 \\ -4 & -8 & 18 \end{pmatrix} > 0, \quad X \in R^n,$$

так как

$$\Delta_1 = 4 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 32 > 0,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 8 & -8 \\ -4 & -8 & 18 \end{vmatrix} = 192 > 0.$$

Следовательно, функция строго выпукла.

Упражнение

Исследуйте на выпуклость производственную функцию

$$Q(K, L) = \alpha K^{\beta} L^{1-\beta}, \qquad \alpha > 0,\ 0 < \beta < 1,$$

выражающую объем производства Q через используемый капитал K и затраты труда L.

5. В каждой точке $X^* \in K$ выпуклая функция имеет опорную функцию, т.е. существует линейная функция $C'(X - X^0)$ такая, что для всех $X \in K$ выполняется неравенство

$$f(X) - f(X^*) \geq C'(X - X^*).$$

Если $f(X) \in C^{(1)}$, то $C = \nabla f(X^*)$.

6. Выпуклая функция $f(X)$ в любой относительно внутренней точке множества K дифференцируема по всем направлениям l, $\|l\| = 1$, и

$$\frac{\partial f(X)}{\partial l} = \max C'l, \quad C \in \Omega(X),$$

где $\Omega(X)$ - множество нормалей опорных функций к $f(X)$ в точке X.

7. Пусть K - выпуклое множество. Вектор l, $l \neq 0$, назовем допустимым направлением в точке X, $X \in K$, относительно множества K, если найдется число ε_1, $\varepsilon_1 > 0$ такое, что $X + \varepsilon l \in K$ при всех ε, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1$.

Для того чтобы точка $X^0 \in K$ была точкой минимума выпуклой дифференцируемой по всем направлениям функции $f(X)$ на множестве K, необходимо и достаточно, чтобы производная функции $f(X)$ по любому допустимому направлению в точке $X^0 \in K^0$ была неотрицательной.

Следствие. Из этого свойства, в частности, следует, что каждая стационарная точка X^* $\left(\dfrac{\partial f(X^*)}{\partial X}=0\right)$ выпуклой гладкой функции $f(X)$ является ее точкой минимума.

2. Теорема Куна – Таккера

В этом параграфе основная теорема для гладких задач выпуклого программирования получается как следствие теорем нелинейного программирования.

2.1. Постановка задачи

Пусть в пространстве R^n заданы выпуклые функции $f(X), g_1(X),\ldots,g_m(X)$ и выпуклое множество Q. Задача выпуклого программирования: найти точку $X^0,\quad X^0 \in Q,\quad g(X^0) \le 0$, удовлетворяющую соотношению

$$f(X^0) = \min_{\substack{g(X)\le 0,\\ X\in Q}} f(X). \tag{6}$$

Допустимые точки в задаче выпуклого программирования задаются соотношениями

$$g(X) \le 0,\quad X \in Q.$$

Поскольку функции $g_i(X),\quad i=1,2,\ldots,m$, выпуклы, то, в силу приведенных в п.1 свойств выпуклых множеств и функций, множество K допустимых точек представляет выпуклое множество. Как доказано в том же параграфе, выпуклая функция $f(X)$ на множестве K может иметь один локальный минимум, который является и глобальным.

Лемма 2. Множество решений задачи выпуклого программирования - выпуклое множество.

Доказательство. Действительно, если

$$f(X^1)=\min_{X\in K} f(X),\quad f(X^2)=\min_{X\in K} f(X),\quad fX^1)\neq f(X^2)=\alpha,$$

то для всех $\lambda,\quad 0\le\lambda\le 1,$

$$f(\lambda X^1+(1-\lambda)X^2)\le\lambda f(X^1)+(1-\lambda)f(X^2)\le\lambda\alpha+(1-\lambda)\alpha=\min_{X\in K} f(X).$$

Поскольку строгое неравенство в последнем выражении противоречит определению минимума, то получаем равенство

$$f(\lambda X^1+(1-\lambda)X^2)=\min_{X\in K} f(X),$$

в силу которого точка $\lambda X^1+(1-\lambda)X^2$ есть решение задачи (6). Лемма 2. доказана.

Следствие. Из леммы следует, что если задача - (6) имеет два решения, то она имеет и континуум решений.

2.2. Седловая точка функции Лагранжа и решение задачи выпуклого программирования

Определение. Функция

$$F(X,\Lambda)=f(X)+\Lambda' g(X),\qquad \Lambda\in R^m,\quad \Lambda\ge 0 \tag{7}$$

называется **нормальной функцией Лагранжа для задачи выпуклого программирования.**

Определение. Совокупность (X^*,Λ^*) векторов $X^*,\quad \Lambda^*\ge 0$, называется **седловой точкой функции Лагранжа**, если для всех $X\in Q,\ \ \Lambda\ge 0$, выполняются неравенства

$$F(X^*,\Lambda)\le F(X^*,\Lambda^*)\le F(X,\Lambda^*). \tag{8}$$

Теорема 2. Если (X^*,Λ^*), $X^*\in Q,\ \Lambda^*\ge 0$ - седловая точка функции Лагранжа (7), то X^* - решение задачи выпуклого программирования (6).

Доказательство. Запишем неравенства (8) более подробно (в исходных функциях):

$$f(X^*)+\Lambda' g(X^*)\le f(X^*)+\Lambda^{*'} g(X^*)\le f(X)+\Lambda^{*'} g(X),\ X\in Q,\Lambda\ge 0. \tag{9}$$

Из левого неравенства следует

$$\Lambda' g(X^*) \le \Lambda^{*'} g(X^*). \tag{10}$$

Для выполнения (10) необходимо, чтобы

$$g(X^*) \le 0$$

ибо, если при некотором i, $1 \le i \le m$, $g_i(X^*) > 0$, то, полагая $\lambda_j = 0$, $j \ne i$, $j = 1,2,\ldots,m$, и выбирая λ_i, достаточно большим, получаем слева в (10) сколь угодно большое положительное число.

Из (10) следует условие дополняющей не жесткости:

$$\Lambda^{*'} g(X^*) = 0. \tag{11}$$

Действительно, если допустить, что $\Lambda^{*'} g(X^*) \le 0$, то, положив $\Lambda = \dfrac{\Lambda^*}{2}$ из (10), имеем противоречивые неравенства $0 \le \dfrac{1}{2}\Lambda^{*'} g(X^*) < 0$. С учетом (11) из правого неравенства в (9) получаем

$$f(X^*) \le f(X) + \Lambda^{*'} g(X).$$

Отсюда следует, что для всех $X \in Q$, удовлетворяющих неравенству $g(X) \le 0$, должно выполняться неравенство

$$f(X^*) \le f(X).$$

Это значит, что X^* - решение задачи выпуклого программирования. Теорема доказана.

Замечание. В доказательстве не использовалась выпуклость функций $f(X)$, $g(X)$ множества Q. Эта теорема верна и для невыпуклых функций и множеств.

Согласно теореме 2 решение задачи выпуклого программирования сводится к нахождению седловых точек функции Лагранжа. Теоремы о существовании седловых точек функции Лагранжа называют **теоремами Куна - Таккера,** по имени ученых, получивших первые результаты такого типа.

2.3. Теорема Куна - Таккера для частной задачи

Пусть выпуклая скалярная функция $f(X)$, $X \in R^n$, и выпуклые компоненты m-мерной векторной функции $g(X)$, $X \in R^n$ определены и непрерывны вместе с производными до второго порядка включительно. Рассмотрим задачу

$$f(X) \to \min, \tag{12}$$

$$g(X) \le 0. \tag{13}$$

Данная задача отличается от общей задачи выпуклого программирования (6) предположением гладкости функций и отсутствием ограничения $X \in Q$.

Пусть вектор X^0 (решение задачи (12), (13)) является обыкновенной допустимой точкой по ограничениям типа неравенств (13). Тогда в силу теоремы о необходимых условиях минимума в задачах нелинейного программирования найдется m- мерный вектор Λ^0, $\Lambda^0 \ge 0$ такой, что выполняются условия:

$$\Lambda^{*\prime} g(X^0) = 0, \tag{14}$$

$$\frac{\partial F(X^0, \Lambda^0)}{\partial X} = 0, \tag{15}$$

где

$$F(X, \Lambda) = f(X) + \Lambda' g(X). \tag{16}$$

Поскольку $f(X), g_1(X), \ldots, g_m(X)$- выпуклые функции и $\Lambda^0 \ge 0$, то функция $F(X, \Lambda^0)$ по свойству 2 из п. 1 также выпукла по X.

Следовательно, точка X^0, удовлетворяющая условию (15), является по свойству 7 из п. 1 точкой минимума функции Лагранжа (16)

$$F(X^0, \Lambda^0) \le F(X, \Lambda^0) \quad \text{для всех} \quad X \in R^n. \tag{17}$$

По предположению $g(X^0) \le 0$, поэтому для всех $\Lambda \ge 0$ выполняется неравенство $\Lambda' g(X^0) \le 0$. С другой стороны, выполняется равенство (14), таким образом,

$$F(X^0,\Lambda) = f(X^0) + \Lambda' g(X^0) \le f(X^0) + \Lambda^0 g(X^0) = F(X^0,\Lambda^0). \qquad (18)$$

Объединяя (17) и (18), приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. Если обыкновенная допустимая точка X^0 является решением задачи выпуклого программирования (12), (13), то существует вектор Λ^0, $\Lambda^0 \ge 0$ такой, что пара (X^0,Λ^0) составляет седловую точку функции Лагранжа, т.е. для всех $\Lambda \ge 0$ и $X \in R^n$ выполняются неравенства

$$F(X^0,\Lambda) \le F(X^0,\Lambda^0) \le F(X,\Lambda^0).$$

Замечание. В силу доказанной теоремы точка условного минимума в задаче выпуклого программирования является и точкой безусловного минимума функции Лагранжа. **Известно, что в общем случае задач нелинейного программирования это утверждение неверно**.

Следствие. Если ограничения (13) линейны

$$A_i' X + b_i \le 0, \quad i = 1,2,\ldots,m,$$

то теорема 3 верна без предположения о том, что X^0- обыкновенная допустимая точка.

2.4. Задача выпуклого программирования с дополнительным ограничением

Сохраняя предположение о гладкости функций $F(X)$, $g(X)$, вместо (12), (13) рассмотрим задачу

$$f(X) \to \min, \qquad (19)$$

$$g(X) \le 0, \quad X \ge 0. \qquad (20)$$

Точка X^* называется **обыкновенной допустимой по ограничениям** (20), если она обыкновенная допустимая по ограничениям $g(X) \le 0$, т.е. в точке X^* векторы

$$\frac{\partial g_{i_1}(X^*)}{\partial X},\ldots,\frac{\partial g_{i_k}(X^*)}{\partial X}, \qquad (21)$$

составленные из функций ограничений, активных в точке X^*, линейно независимы.

Каждое из дополнительных ограничений

$$x_i \ge 0, \;\; i = 1,2,\ldots,m,$$

с помощью функций $g_{m+i} = -x_i$ можно записать в виде неравенства

$$g_{m+i} \le 0. \tag{22}$$

Поэтому вводя $(n+m)$- мерную векторную функцию задачи (19), (20) запишем в виде

$$f(X) \to \min, \tag{23}$$

$$\bar{g}(X) \le 0. \tag{24}$$

Если точка X^*- обыкновенная допустимая по ограничениям (20), то она обыкновенная допустимая по ограничениям (24), так как все дополнительные ограничения линейны.

Компоненты функции $\bar{g}(X)$ являются выпуклыми функциями. Поэтому, в силу теоремы 3, найдется неотрицательный $(n+m)$- мерный вектор $\overline{\Lambda}^0 = (\Lambda^{0'}, \lambda^0_{m+1}, \ldots, \lambda^0_{m+n})$ такой, что пара (X^0, Λ^0), где X^0- решение задачи (23), (24) составляет седловую точку функции Лагранжа

$$F(X, \overline{\Lambda}) = f(X) + \Lambda' g(X) - \sum_{ш=1}^{m} \lambda_{ь+ш} x_i\,.$$

Точнее, для всех $X \in R^n$, $\Lambda, \lambda_{m+i} \ge 0$, $i = 1,2,\ldots,n$ выполняются неравенства

$$\begin{gathered} f(X^0) + \Lambda' g(X^0) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_{m+i} x_i^0 \le f(X^0) + \Lambda^{0'} g(X^0) - \sum_{i=1}^{n} \lambda^0_{m+i} x_i^0 \le \\ \le f(X) + \Lambda^{0'} g(X) - \sum_{i=1} \lambda^0_{m+i} x_i. \end{gathered} \tag{25}$$

Докажем, что из (25) следует неравенство

$$f(X^0) + \Lambda' g(X^0) \le f(X^0) + \Lambda^{0'} g(X^0) \le f(X) + \Lambda^{0'} g(X) \tag{26}$$

для всех $\Lambda \ge 0, \;\; X \ge 0$.

Действительно, если при некотором $\tilde{\Lambda}, \;\; \tilde{\Lambda} \ge 0$, имеем

$$f(X^0) + \tilde{\Lambda}' g(X^0) > f(X^0) + \Lambda^{0'} g(X^0),$$

то в (25) левое неравенство при $\Lambda = \tilde{\Lambda}$ и достаточно малых $\lambda_{m+i}\ i = 1,2,\ldots,n$, нарушится. Отсюда следует, что $\Lambda^{0'} g(X^0) = 0$. По той же причине из (25) следует

$$\Lambda^{0'} g(X^0) - \sum_{ш=1}^{m} \lambda_{m+i}^0 x_i^0 = 0.$$

Поэтому, из правого неравенства в (25) получаем

$$f(X^0) + \Lambda' g(X^0) \le f(X^0) + \Lambda^{0'} g(X^0) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_{m+i}^0 x_i^0 \le f(X) + \Lambda^{0'} g(X)$$

для всех x_i, $x_i \ge 0$. Неравенства (26) доказаны. Следовательно, справедлива теорема 4.

Теорема 4. Пусть $f(X), g(X) \in C^{(2)}$. Для того чтобы обыкновенная допустимая точка X^0 была решением задачи (19), (20) необходимо и достаточно существование неотрицательного вектора Λ^0, $\Lambda^0 \ge 0$ такого, что для всех $X \ge 0$, $\Lambda \ge 0$ выполнялись неравенства

$$F(X^0, \Lambda) \le F(X^0, \Lambda^0) \le F(X, \Lambda^0),$$

где $F(X, \Lambda) = f(X) + \Lambda' g(X)$.

Таким образом, в задаче выпуклого программирования (14), (15) дополнительные ограничения $X \ge 0$ можно не вносить в функцию Лагранжа, а перенести в формулировку результата.

Пример 2. Найдите объемы ресурсов K и L, при которых затраты на производство не менее 80 единиц продукции минимальны, если производственная функция Кобба - Дугласа $Q(K, L) = K^{3/4} L^{1/4}$, цены на ресурсы $p_K = 6$, $p_L = 2$.

Решение

Поскольку целевая функция имеет вид $f(K, L) = p_K K + p_L L$, то имеем задачу

$$f(K, L) = 6K + 2L \to \min,$$
$$K^{3/4} L^{1/4} \geq 80,$$
$$K \geq 0, \quad L \geq 0.$$

Заметим, что функция $f(K, L)$ линейна, т.е. выпукла и любая точка, удовлетворяющая условию задачи, является обыкновенной допустимой, так как вектор

$$\frac{\partial g(K, L)}{\partial X} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{4K^{1/4}} \\ \dfrac{1}{4L^{3/4}} \end{pmatrix}$$

для указанных точек является ненулевым - линейно независимым (достаточно проверить точку (81, 81)). Теперь для применения теоремы Куна - Таккера достаточно записать постановку задачи в виде

$$f(K, L) = 6K + 2L \to \min,$$
$$-K^{3/4} L^{1/4} + 80 \leq 0,$$
$$K \geq 0, \quad L \geq 0.$$

Составим функцию Лагранжа

$$F(K, L, \lambda) = 6K + 2L + \lambda\left(- K^{3/4} L^{1/4} + 80\right).$$

Тогда условия теоремы Куна – Таккера записываются следующим образом:

$$\frac{\partial F}{\partial K} = 6 - \frac{3}{4} \lambda K^{-1/4} L^{1/4} = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial L} = 2 - \frac{1}{4} \lambda K^{3/4} L^{-3/4} = 0,$$
$$\lambda\left(- K^{3/4} L^{1/4} + 80\right) = 0,$$
$$\lambda \geq 0.$$

Отсюда приходим к системе

$$\begin{cases} \frac{3}{4}\lambda K^{-1/4}L^{1/4} = 6, \\ \frac{1}{4}\lambda K^{3/4}L^{-3/4} = 2, \\ -K^{3/4}L^{1/4} + 80 = 0, \\ \lambda > 0. \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} 8K^{1/4}L^{-1/4} = 8K^{-3/4}L^{3/4}, \\ K^{3/4}L^{1/4} = 80. \end{cases}$$

Из последней системы заключаем, что $K = L = 80$, причем $\lambda = 8 > 0$. Таким образом, все условия теоремы Куна – Таккера выполнены и $K = L = 80$ производственный план с минимальными издержками, причем

$$f_{\min} = f(80,80) = 640.$$

Упражнение

Найдите объемы ресурсов K и L, при которых затраты на производство не менее 140 единиц продукции минимальны, если производственная функция Кобба - Дугласа $Q(K, L) = K^{2/3}L^{1/3}$, цены на ресурсы $p_K = 12$, $p_L = 3$.

Теорема 5. Теорема 4 для случая линейных ограничений верна без предположения о линейной независимости векторов (21).

3. Основная теорема выпуклого программирования

Ниже приведем основную теорему выпуклого программирования без предположения о гладкости функций. Метод доказательства основан на теореме об отделимости выпуклых множеств, а это выходит за рамки математической подготовки студента - экономиста. Поэтому эту теорему приведем без доказательства.

3.1. Условие Слейтера. Основная теорема

Рассмотрим задачу выпуклого программирования

$$f(X) \to \min, \tag{27}$$

$$g(X) \le 0, \quad X \in Q, \tag{28}$$

где $f(X)$ и компоненты m-мерной функции $g(X)$ - выпуклые функции при $X \in Q$; Q - выпуклое множество.

Говорят, что ограничения (28) удовлетворяют условию Слейтера, если существует вектор X^*, $X^* \in Q$ такой, что

$$g(X^*) < 0. \qquad (29)$$

Теорема 6. Пусть ограничение (28) задачи (27), (28) удовлетворяет условию Слейтера. Тогда для того чтобы вектор X^0, $X^0 \in Q$ был решением задачи (27), (28) необходимо и достаточно, чтобы существовал вектор Λ^0, $\Lambda^0 \geq 0$ такой, что пара (X^0, Λ^0) составляла седловую точку функции Лагранжа $F(X, \Lambda) = f(X) + \Lambda' g(X)$.

Другими словами, теорема утверждает, что для всех $X \in Q$, $\Lambda \geq 0$, выполняются неравенства

$$F(X^0, \Lambda) \leq F(X^0, \Lambda^0) \leq F(X, \Lambda^0). \qquad (30)$$

3.2. Обсуждение

Сравнивая теорему 6 с результатами п.2, видим, что теорема верна для выпуклых функций без дополнительных предположений типа гладкости. Уже отмечалось, что для невыпуклых функций теорема неверна. Однако она справедлива и не для всех выпуклых функций $f(X), g(X)$.

Предположение о том, что ограничения удовлетворяют условию Слейтера, существенно.

Пример 3. Действительно, пусть $f(x) = -x$, $g(x) = x^2$ и точка $x^0 = 0$ является решением задачи (27), (28). Составим функцию Лагранжа

$$F(x, \lambda) = -x + \lambda x^2.$$

Допустим, что теорема Куна - Таккера верна. Тогда существует число λ^0, $\lambda^0 \geq 0$ такое, что для всех x, $x \geq 0$ выполняется неравенство

$$F(x^0, \lambda^0) \leq F(x^0, \lambda), \text{ т.е. } 0 \leq -x + \lambda^0 x^2.$$

Ясно, что при любом $\lambda^0 \geq 0$ найдется достаточное малое число $x > 0$ такое, что $-x + \lambda^0 x^2 < 0$. Значит, теорема Куна - Танкера для этого примера неверна. В примере условие Слейтера не выполняется, ибо $g(x) = x^2$ при всех $x \ge 0$.

Упражнения

Проверить указанные точки на оптимальность в задачах выпуклого программирования:

1) $f(X) = -2x_1^2 - 3x_2^2 + x_1 - 6 \to \max$,

$\mathscr{W} = \{X : x_1^2 + x_1 - 3 \le 0,\ 2x_1 + x_2 - 5 \le 0,\ x_2 \ge 0\}$,

$X^1 = (1,1),\ X^2 = (2,1),\ X^3 = (1/4,0),\ X^4 = (0,0)$;

2) $f(X) = x_1^2 + 3x_1 \to \min$,

$\mathscr{W} = \{X : x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 + 8x_2 + 16 \le 0,\quad x_1 - x_2 \le 5\}$,

$X^1 = (1,-4),\ X^2 = (0,-4),\ X^3 = (2,-4)$;

3) $f(X) = 7x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2 + x_1 - x_2 \to \min$,

$\mathscr{W} = \{X : x_1 + x_2 \le 2,\ x_1 - 3x_2 \le 4,\ -2x_1 + x_2 \le -3\}$,

$X^1 = (5/2,-1/2),\ X^2 = (1,-1),\ X^3 = (2,0)$;

4) $f(X) = x_1^2/2 + x_2^2 - 5x_1 + x_2 \to min$,

$\mathscr{W} = \{X : x_1 + x_2 - 2x_3 \le 3,\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 \ge -11,\quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0\}$,

$X^1 = (1,0,2),\ X^2 = (0,0,-1),\ X^3 = (1,3,0),\ X^4 = (2,1,1),\ X^5 = (5,0,1)$;

5) $f(X) = e^{x_1 + x_2} + x_1^2 - 2x_2 \to \min$,

$\mathscr{W} = \{X : x_2 \le \ln x_1,\quad x_1 \ge 1,\quad x_2 \ge 0\}$,

$X^1 = (2,\ \ln 2),\ X^2 = (2,0),\ X^3 = (1,0)$;

6) $f(X) = e^{x_1 + x_2} + x_3^2 + 2x_1 + 2x_2 \to \min$,

$\mathscr{W} = \{X : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 18,\quad 2x_1 + x_2 - x_3 + 3 \le 0\}$,

$X^1 = (-3,3,0),\ X^2 = (1,-1,4),\ X^3 = (-3,-3,0),\ X^4 = (0,0,3)$;

7) $f(X) = -5x_1^2 - 6x_2^2 - x_3^2 + 8x_1x_2 + x_1 \to \max$,

$\mathscr{W} = \{X : x_1^2 - x_2 + x_3 \le 5,\quad x_1 + 5x_2 \le 8,\quad x_1 \ge 0,\quad x_2 \ge 0\}$;

$X^1 = (0,0,0),\ X^2 = (1,0,4),\ X^3 = (3/14,1/7,0),\ X^4 = (4,0,-11)$;

8) $f(X) = -x_1^2 - 2x_2^2 + x_1x_2 - 26 \to \max$,

$\mathscr{W} = \{X : x_1^2 \le 25,\quad x_1 + 2x_2 - 5 \le 0,\ x_2 \ge 0\}$,

$X^1=(0,0),\quad X^2=(-1,2),\quad X^3=(0,6),\quad X^4=(3,0)$;

9) $\quad f(X)=10x_1^2+5x_2^2-x_1+2x_2-10\to\min$,

$\mathcal{W}=\{X: 2x_1^2-x_2\le 4,\quad x_1+x_2\le 8,\quad x_1\ge 0\}$

$X^1=(0,0),\quad X^2=(1,1),\quad X^3=(0,-1)$;

10) $\quad f(X)=4x_1^2+3x_2^2+4x_1x_2-x_1+6x_2-5\to\min$,

$\mathcal{W}=\{X: x_1^2-x_2^2\ge -3,\quad 3x_1^2+x_2\le 4,\quad x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0\}$,

$X^1=(0,0),\quad X^2=(5,0),\quad X^3=(1,-1),\quad X^4=(1,1)$;

11) $\quad f(X)=x_1^2+5/2x_2^2-x_1x_2\to\min$,

$\mathcal{W}=\{X: x_1^2-4x_1-x_2\le -5,\quad -x_1^2+6x_1-x_2\ge 7\}$,

$X^1=(2,1),\quad X^2=(3,2)$;

12) $\quad f(X)=x_1^2+2x_2^2+30x_1-16x_3\to\min$,

$\mathcal{W}=\{X: 5x_1+3x_2-4x_3=-20,\quad x_1-6x_2+3x_3\le 0,\quad x_3\ge 0$,

$X^1=(-3,1,2),\quad X^2=(-5,3,1)$.

Условие Слейтера является довольно стеснительным. Оно не выполняется при любой функции $g(X)$ для ограничений

$$g^1(X)\le 0,\ \ g^2(X)\le 0,\qquad \left(g^1(X)=g(X),\quad g^2(X)=-g(X)\right),$$

полученных из ограничения $g(X)=0$. Однако можно показать, что если функция $g(X)$ линейна, то теорема верна без условия Слейтера. Это расширяет область ее применения.

Как и в случае гладких задач, смысл основного результата, содержащегося в теореме Куна - Таккера, состоит в том, что точка условного минимума X^0 задачи выпуклого программирования при некотором $\Lambda^0,\ \Lambda^0\ge 0$, является точкой безусловного минимума функции Лагранжа на множестве Q.

4. Метод кусочно-линейной аппроксимации для решения некоторого класса задач выпуклого программирования

4.1. Введение

Рассмотрим задачу нелинейного программирования, в которой целевая функция и функции в системе ограничений являются сепарабельными.

Определение. Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется **сепарабельной,** если она может быть представлена в виде суммы функций, каждая из которых является функцией одной переменной, т.е. если

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j).$$

Определение. Если целевая функция и функции в системе ограничений задачи нелинейного программирования являются сепарабельными, то задача называется **задачей сепарабельного программирования.**

Приближенное решение такой задачи можно найти с использованием метода кусочно-линейной аппроксимации. Однако его применение в общем случае позволяет получить приближенный локальный экстремум. Если множество допустимых решений выпукло, а $f_j(x_j)-$вогнутые функции, то локальный максимум является одновременно и глобальным. Поэтому рассмотрим использование метода кусочно-линейной аппроксимации для решения задачи выпуклого программирования.

4.2. Метод кусочно-линейной аппроксимации

Пусть требуется определить максимальное значение вогнутой функции

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \to \max, \qquad (31)$$

$$\sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x_j) \le b_i, \qquad i = \overline{1,m}, \qquad (32)$$

$$x_j \ge 0, \qquad j = \overline{1,n}. \qquad (33)$$

Чтобы найти решение задачи (31) - (33), заменим функции $f_j(x_j)$, $g_{ij}(x_j)$кусочно-линейными функциями $\tilde{f}_j(x_j)$, $\tilde{g}_{ij}(x_j)$ и перейдем от задачи (31) - (33) к задаче, состоящей в определении максимального значения функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} \tilde{f}_j(x_j) \to \max \qquad (34)$$

при условии

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{g}_{ij}(x_j) \le b_i, \quad i = \overline{1,m}, \tag{35}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}. \tag{36}$$

В задаче (34) - (36) пока не определен вид функций. Чтобы сделать это, будем считать, что переменная x_j может принимать значения из промежутка $[0,\alpha_j]$ (α_j - максимальное значение переменной x_j,). Разобьем промежуток $[0,\alpha_j]$ на r_j промежутков с помощью r_j+1 точек так, что $x_{0j}=0,\ x_{r_j j}=\alpha_j$. Тогда функции $\tilde{f}_j(x_j),\ \tilde{g}_{ij}(x_j)$ можно записать в виде

$$\tilde{f}_j(x_j) = \sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} f_{kj}; \quad \tilde{g}_{ij}(x_j) = \sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} g_{kij}, \tag{37}$$

где

$$f_{kj} = f_j(x_k); \quad g_{kij} = g_{ij}(x_k), \quad i = \overline{1,m}; \tag{38}$$

$$x_j = \sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} x_{kj}.$$

$\sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} = 1,\ \lambda_{kj} > 0$ для всех $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{j}$, причем для данного x_j не более двух чисел λ_{kj} могут быть положительными и должны быть соседними.

Подставляя теперь в равенства (34) и (35) выражения функций $\tilde{f}_j(x_j)$ и $\tilde{g}_{ij}(x_j)$ в соответствии с формулами (37), приходим к следующей задаче:

$$\tilde{F} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{r_j} f_{kj} \lambda_{kj} \to \max, \tag{39}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{r_j} g_{kij} \lambda_{kj} \le b_i, \quad i = \overline{1,m}, \tag{40}$$

$$\sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} = 1, \quad j = \overline{1,n}, \tag{41}$$

$$\lambda_{kj} \ge 0, \quad \text{для всех } k \text{ и } j. \tag{42}$$

Полученная задача отличается от обычной задачи линейного программирования тем, что наложено дополнительное ограничение на переменную λ_{kj}, состоящее в том, чтобы для каждого $\boldsymbol{j}$ не более двух были положительными и эти положительные λ_{kj} были соседними. Выполнение этих условий может быть соблюдено при решении задачи (39) - (42) симплексным методом за счет соответствующего выбора базиса, определяющего как каждый опорный, так и оптимальный план данной задачи. При этом в общем случае точность полученного решения зависит от принятого шага разбиения промежутка $[0, \alpha_j]$. Чем меньше шаг, тем более точным является полученное решение.

Таким образом, процесс нахождения решения задачи нелинейного программирования методом кусочно-линейной аппроксимации включает следующие этапы:

1. Каждую из сепарабельных функций заменяют кусочно-линейной функцией.

2. Строят задачу линейного программирования (39) - (42).

3. С помощью симплексного метода находят решение задачи (39) - (42).

4. Определяют оптимальный план задачи (31) - (33) и находят значение целевой функции при этом плане.

Пример 4. Используя метод кусочно-линейной аппроксимации, решить следующую задачу

$$F = x_2 - x_1^2 + 6x_1 - 9 \to \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 24, \\ x_1 + 2x_2 \le 15, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 24, \\ x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение

В данном случае целевую функцию $F = x_2 - x_1^2 + 6x_1 - 9$ можно представить как сумму двух функций $f(x_1) = -x_1^2 + 6x_1 - 9$ и $f_2(x_2) = x_2$, каждая из которых есть функция одной переменной. Следовательно, функция F является сепарабельной. Кроме того, она является вогнутой (как сумма двух вогнутых функций), а область допустимых решений - выпуклой. Значит, используя метод кусочно-линейной аппроксимации, можно найти приближенно глобальный максимум целевой функции.

Здесь нелинейной функцией является только целевая функция. Значит, кусочно-линейной функцией следует заменить только ее. При этом, так как функция $f_2(x_2)$ линейная, то аппроксимировать будем функцию $f(x_1)$.

Если построить область допустимых решений задачи, то видно будет, что переменная x_1 может принимать значения в промежутке [0;8]. Разобьем этот промежуток на восемь частей точками

$$x_{01}=0,\ x_{11}=1,\ x_{21}=2,\ x_{31}=3,\ x_{41}=4,\ x_{51}=5,\ x_{61}=6,\ x_{71}=7,\ x_{81}=8.$$

Вычислим теперь значения функции $f(x_1)$ в этих точках (табл.1).

Таблица 1

x_{kj}	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_j(x_{kj})$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	-16	-25

Используя формулы (37) – (38) находим

$$\tilde{f}_1(x_1)=-9\lambda_{01}-4\lambda_{11}-\lambda_{21}-\lambda_{41}-4\lambda_{51}-9\lambda_{61}-16\lambda_{71}-25\lambda_{81},$$

$$x_1=0\lambda_{01}+1\lambda_{11}+2\lambda_{21}+3\lambda_{41}+4\lambda_{41}+5\lambda_{51}+6\lambda_{61}+7\lambda_{71}+8\lambda_{81}.$$

Подставляя найденные значения $f(x_1)$ и x_1 в исходные данные, получим:

$$F = -9\lambda_{01} - 4\lambda_{11} - \lambda_{21} - \lambda_{41} - 4\lambda_{51} - 9\lambda_{61} - 16\lambda_{71} - 25\lambda_{81} + x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2\lambda_{11} + 4\lambda_{21} + 6\lambda_{31} + 8\lambda_{41} + 10\lambda_{51} + 12\lambda_{61} + 14\lambda_{71} + 16\lambda_{81} + 3x_2 + x_3 = 24, \\ \lambda_{11} + 2\lambda_{21} + 3\lambda_{31} + 4\lambda_{41} + 5\lambda_{51} + 6\lambda_{61} + 7\lambda_{71} + 8\lambda_{81} + 2x_2 + x_4 = 15, \\ 3\lambda_{11} + 6\lambda_{21} + 9\lambda_{31} + 12\lambda_{41} + 15\lambda_{51} + 18\lambda_{61} + 21_{71} + 24\lambda_{81} + 2x_2 + x_5 = 24, \\ \qquad x_2 + x_6 = 4, \\ \lambda_{01} + \lambda_{11} + \lambda_{21} + \lambda_{31} + \lambda_{41} + \lambda_{51} + \lambda_{61} + \lambda_{71} + \lambda_{81} = 1 \\ x_2 \geq 0, \ldots, x_6 \geq 0, \quad \lambda_k \geq 0, \quad k = \overline{1,8}. \end{cases}$$

Для полученной задачи пять векторов $\boldsymbol{P}_{01}$, $\boldsymbol{P}_3$, $\boldsymbol{P}_4$, $\boldsymbol{P}_5$, $\boldsymbol{P}_6$ являются единичными. Значит, ее решение может быть найдено симплексным методом. Определяем его (табл. 2).

Таблица 2

p_b	c_b	p_0	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	-16	-25	1	0	0	0	0
			p_{01}	p_{11}	p_{21}	p_{31}	p_{41}	p_{51}	p_{61}	p_{71}	p_{81}	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
p_3	0	24	0	2	4	6	8	10	12	14	16	3	1	0	0	0
p_4	0	15	0	1	2	3	4	5	6	7	8	2	0	1	0	0
p_5	0	24	0	3	6	9	12	15	18	21	24	2	0	0	1	0
p_6	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
p_{01}	-9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
Δ		-9	0	-5	-8	-9	-8	-5	0	7	16	-1	0	0	0	0
p_3	0	18	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10	3	1	0	0	0
p_4	0	12	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	2	0	1	0	0
p_5	0	15	-9	-6	-3	0	3	6	9	12	15	2	0	0	1	0
p_6	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
p_{31}	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
Δ		0	9	4	1	0	1	4	9	16	25	-1	0	0	0	0
p_3	0	6	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10	0	1	0	0	-3

p_4	0	4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	0	0	1	0	-2
p_5	0	7	-9	-6	-3	0	3	6	9	12	15	0	0	0	1	-2
p_2	1	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
p_{31}	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
Δ		4	9	4	1	0	1	4	9	2	25	0	0	0	0	1

По найденным в табл. 2 значениям λ_{kj} находим $x_1^{\bullet} = 3$. Далее, из табл. 2 видим, что $x_1^{\bullet} = 4$. Значит, $X = (3;4)$ является приближенным оптимальным решением, которое случайно совпало с точным решением. При данном решении $F_{\max} = 4$.

Замечание. Рассмотренный способ приближенного нахождения локального максимума весьма полезен, так как не зависит от аналитических свойств функций, входящих в условие задачи. Однако его нужно применять с большой осторожностью, так как локальные экстремумы приближенной задачи могут существенно отличаться от глобального экстремума.

Упражнения

Используя приближенную задачу, найти оптимальное решение следующих задач.

1. $F = x_1 - x_1^2 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1^2 + 2x_1 + 3x_2^2 \le 3, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2. $F = 3x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2^2 \le 16, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

3. $F = -(x_1 - 4)^2 - (x_2 - 3)^2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 6, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

4. $F = 4(x_1 - 1)^2 + 16(x_2 - 5)^2 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5. $F = 4x_1^2 + 3x_2^2 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 5, \\ x_1 + 4x_2 \ge 4. \end{cases}$$

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определения: а) выпуклой функции; б) строго выпуклой функции.

2. Какая связь имеется между выпуклыми множествами и выпуклыми функциями. Приведите утверждения, в которых эта связь раскрывается.

3. Приведите свойства выпуклых функций.

4. Сформулируйте постановки задачи выпуклого программирования.

5. Что можно утверждать о множестве решений задачи выпуклого программирования?

6. Дайте определения седловой точки функции Лагранжа.

7. Как решается задача выпуклого программирования. Сформулируйте теорему Куна-Таккера – основную теорему задачи выпуклого программирования в частном случае.

8. Как решается задача выпуклого программирования с дополнительным ограничением?

9. Что представляет условие Слейтера?

10.Сформулируйте теорему Куна-Таккера – основную теорему задачи выпуклого программирования без предположения о гладкости функций.

11. Почему условие Слейтера является стеснительным?

12. В чем состоит смысл основного результата содержащего в теореме Куна - Таккера как в случае гладких, так и в случае негладких задач?

13. Что называется сепарабельной функцией?

14. Какая задача называется задачей сепарабельного программирования?

15. Известно, что приближенное решение задачи сепарабельного программирования можно найти с использованием метода кусочно-линейной ап-

проксимации. Всегда ли его применение позволяет получить приближенный локальный экстремум?

16. Когда полученный приближенный локальный максимум задачи сепарабельного программирования является одновременно и глобальным?

17. Почему в выражении $x_j = \sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} x_{kj}$ не более двух λ_{kj} могут быть отличными от нуля?

18. Как определить, является ли решение задачи, приведенное в симплексной таблице, оптимальным?

19. При решении, каких задач можно не учитывать ограничения на выбор базиса?

§33. Неопределенный интеграл

Ключевые слова: *первообразная, неопределенный интеграл, операция интегрирования, формула интегрирования подстановкой, подстановка Эйлера, формула интегрирования по частям, интегрирование рациональных, иррациональных, тригонометрических и гиперболических функций.*

Ранее нами была рассмотрена задача о нахождении мгновенной скорости материальной точки по заданному закону ее движения. Если $S = S(t)$ - путь, пройденный точкой за время t от начала движения, то мгновенная скорость и в момент t равна производной функции $S(t)$, т.е.

$$v = S'(t).$$

В физике встречается обратная задача: по заданной скорости $v = S'(t)$ найти закон движения, т.е. найти такую функцию $S(t)$, производная которой равна $v(t)$.

1. Первообразная

Пусть функции $f(x)$ и $F(x)$ определены на интервале $(a,\ b)$. Если функция $F(x)$ имеет производную на интервале $(a,\ b)$ и если для всех $x \in (a,\ b)$ выполняется равенство

$$F'(x) = f(x), \qquad (1)$$

то функция $F(x)$ называется **первообразной для функции** $f(x)$ на интервале $(a,\ b)$.

Замечание. Понятие первообразной можно ввести и для других промежутков (полуинтервала - конечного или бесконечного, отрезка).

Дадим определение первообразной на отрезке.

Определение. Если функции $f(x)$ и $F(x)$ определены на отрезке $[a,\ b]$, причем функция F дифференцируема на интервале $(a,\ b)$, непрерывна на отрезке $[a,\ b]$ и для всех $x \in (a,\ b)$ выполняется равенство (1), то функцию $F(x)$ назовем первообразной для функции $f(x)$ на отрезке $[a,\ b]$.

Замечание. Если $F(x)$- первообразная для функции $f(x)$ на интервале

$(a,\ b)$, то функция $F(x)+C$ при любом значении $C=const$ также является первообразной для $f(x)$.

Справедливо и обратное утверждение.

Теорема. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - две первообразные для функции $f(x)$ на интервале $(a,\ b)$, то для всех $x\in(a,\ b)$ выполняется равенство

$$F_2(x)=F_1(x)+C, \qquad (2)$$

где C - постоянная.

Доказательство. Обозначим $\Phi(x)=F_2(x)-F_1(x)$. По определению первообразной и в силу условий теоремы для всех $x\in(a,\ b)$ выполняются равенства

$$F_2'(x)=f(x), \qquad F_1'(x)=f(x),$$

откуда следует, что функция $\Phi(x)$ дифференцируема на интервале $(a,\ b)$ и для всех $x\in(a,\ b)$ имеет место равенство

$$\Phi'(x)=0.$$

Согласно следствию из теоремы Лагранжа, $\Phi(x)=C=const$== const для всех $x\in(a,\ b)$ или $F_2(x)-F_1(x)=C$, т.е. справедливо равенство (2).

Таким образом, для данной функции $f(x)$ ее первообразная $F(x)$ определяется неоднозначно, с точностью до постоянной. Для того чтобы из совокупности первообразных выделить какую-либо первообразную $F_1(x)$, достаточно указать точку $M_0(x_0,y_0)$, принадлежащую графику функции $y=F_1(x)$.

Пример 1. Для функции $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, найти такую первообразную $F_1(x)$, график которой проходит через точку $M_0(1,\ 2)$.

Решение

Совокупность всех первообразных функции $\dfrac{1}{x^2}$ описывается формулой

$$F(x) = -\frac{1}{x} + C.$$

По условию $F_1(1) = 2$, т.е. $2 = -1 + C$, откуда $C = 3$. Следовательно,

$$F_1(x) = 3 - \frac{1}{x}.$$

Упражнения

1. Найти какую-либо первообразную $F(x)$ функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in (0, \infty)$.

2. Для функции $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (-\infty, 0)$, первообразную $F(x)$, график которой проходит через точку $M_0(-2; 2)$.

Замечание. В дальнейшем будет доказано, что первообразная существует для любой функции, непрерывной на отрезке (или интервале).

2. Понятие неопределенного интеграла

Определение. Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на некотором промежутке Δ называют **неопределенным интегралом от функции** f на этом промежутке, обозначают символом $\int f(x)dx$ и пишут

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \tag{3}$$

Здесь $F(x)$ - какая-нибудь первообразная функции $f(x)$ на промежутке Δ, C - произвольная постоянная. Знак $\int$ называют знаком интеграла, f - подынтегральной функцией, $f(x)dx$ - подынтегральным выражением.

Подынтегральное выражение можно записать в виде $F'(x)dx$ или $dF(x)$, т.е.

$$f(x)dx = dF(x). \tag{4}$$

Определение. Операцию нахождения неопределенного интеграла от данной функции, которая является обратной операции дифференцирования, называют **интегрированием.**

Поэтому любую формулу для производной, т.е. формулу вида

$F'(x) = f(x)$ можно записать в виде (3). Используя таблицу производных, можно найти интегралы от некоторых элементарных функций. Например, из равенства $(\sin x)' = \cos x$ следует, что

$$\int \cos x dx = \sin x + C .$$

3. Свойства неопределенного интеграла

Свойство 1

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx . \qquad (5)$$

Доказательство. Из равенства (3) следует, что

$$d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x) + C) = dF(x) ,$$

так как $dC = 0$.

Согласно формуле (5) знаки дифференциала и интеграла взаимно уничтожаются, если знак дифференциала стоит перед знаком интеграла.

Свойство 2

$$\int dF(x) = F(x) + C . \qquad (6)$$

Доказательство. Равенство (6) следует из равенств (3) и (4).

Соотношение (6) показывает, что и в случае, когда знак интеграла стоит перед знаком дифференциала, эти знаки также взаимно уничтожаются (если отбросить постоянную C).

Свойство 3. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют на некотором промежутке первообразные, то для любых $\alpha \in R^1$, $\beta \in R^1$ таких, что $\alpha\beta \neq 0$, функция $\phi(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ также имеет первообразную на этом промежутке, причем

$$\int \left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right)dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx . \qquad (7)$$

Доказательство. Пусть F и G - первообразные для функций f и g, соответственно, тогда $\Phi = \alpha F + \beta G$ - первообразная для функции ϕ, так как

$$\left(\alpha F(x) + \beta G(x)\right)' = \alpha f(x) + \beta g(x) = \phi(x) .$$

Согласно определению интеграла левая часть (7) состоит из функций вида $\Phi(x)+C$, а правая часть - из функций вида

$$\alpha F(x)+\alpha C_1+\beta G(x)+\beta C_2=\Phi(x)+\alpha C_1+\beta C_2.$$

Так как $\alpha\beta\neq 0$, то каждая функция вида $\Phi(x)+C$ принадлежит совокупности функций $\Phi(x)+\alpha C_1+\beta C_2$ и наоборот, т.е. по заданному числу C можно найти C_1 и C_2, а по заданным C_1 и C_2 - число C такое, чтобы выполнялось равенство $C=\alpha C_1+\beta C_2$.

Таким образом, интегрирование обладает свойством линейности: интеграл от линейной комбинации функции равен соответствующей линейной комбинации интегралов от рассматриваемых функций.

Пример 2. Найти $\int f(x)dx$, если:

$a)$ $f(x)=e^x+x^2$; $\qquad b)$ $f(x)=-2\sin x+\dfrac{3}{1+x^2}$.

Решение

$a)$ используя таблицу производных и свойство 3 интеграла, получаем

$$\int(e^x+x^2)dx=e^x+\frac{x^3}{3}+C;$$

$b)$ так как $(-\cos x)'=\sin x$, $\quad (arctgx)'=\dfrac{1}{1+x^2}$, то

$$\int\left(-2\sin x+\frac{3}{1+x^2}\right)dx=2\cos x+3arctgx+C.$$

Упражнение

Найти интеграл:

$a)$ $\int\left(x-2e^x\right)dx$; $\qquad b)$ $\int\dfrac{\left(\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}\right)^2}{x}dx$; $\qquad c)$ $\int\dfrac{dx}{x^4+4x^2}$;

$d)$ $\int\dfrac{\sqrt{x^2-3}-3\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^4-9}}dx$; $\qquad e)$ $\int\cos^2\dfrac{x}{2}dx$; $\qquad$ e) $f)$ $\int tg^2xdx$;

$g)$ $\int 3^x\cdot 5^{2x}dx$.

Дальнейшее расширение множества функций, интегралы от которых выражаются через элементарные функции, можно получить, если воспользоваться правилом дифференцирования сложной функции и правилом дифференцирования произведения двух функций.

4. Метод замены переменного (метод подстановки)

Пусть функция $t=\phi(x)$ определена и дифференцируема на промежутке Δ и пусть $\tilde{\Delta}=\phi(\Delta)$ - множество значений функции ϕ на Δ.

Если функция $U(t)$ определена и дифференцируема на $\tilde{\Delta}$, причем

$$U'(t)=u(t), \tag{8}$$

то на промежутке Δ определена и дифференцируема сложная функция $F(x)=U(\phi(x))$ и

$$F(x)=\big(U(\phi(x))\big)'=U'(\phi(x))\cdot\phi'(x)=u(\phi(x))\cdot\phi'(x). \tag{9}$$

Из равенств (8) и (9) следует, что если $U(t)$ - первообразная для функции $u(t)$, то $U(\phi(x))$- первообразная для функции и $u(\phi(x))\cdot\phi'(x)$. Это означает, что если

$$\int u(t)dt=U(t)+C, \tag{10}$$

то

$$\int u(\phi(x))\phi'(x)dx=U(\phi(x))+C, \tag{11}$$

или

$$\int u(\phi(x))d\phi(x)=U(\phi(x))+C. \tag{12}$$

Формулу (12) (или формулу (11)) называют формулой **интегрирования заменой переменного.**

Она получается из формулы (10), если вместо t подставить дифференцируемую функцию $\phi(x)$.

Замечание. Формула (12) дает возможность найти интеграл $\int f(x)dx$, если функция $f(x)$ представляется в виде $f(x)=u(\phi(x))\cdot\phi'(x)$ и если известна первообразная функции и $u(t)$, т.е. известен интеграл (10).

Отметим важные частные случаи формулы (12).

а) пусть $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$, т.е.

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

тогда

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, \quad a \neq 0; \tag{13}$$

б) используя равенство

$$\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C,$$

получаем

$$\int \frac{d\phi(x)}{\phi(x)} = \int \frac{\phi'(x)dx}{\phi(x)} = \ln|\phi(x)| + C, \text{ если } \phi(x) \neq 0; \tag{14}$$

в) так как

$$\int t^{\alpha}dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,, \qquad \alpha \neq -1, \quad t > 0,$$

то

$$\int (\phi(x))^{\alpha}\phi'(x)dx = \int (\phi(x))^{\alpha}d\phi(x) = \frac{(\phi(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \qquad \alpha \neq -1, \quad t > 0. \tag{15}$$

Приведем примеры применения формул (13) – (15).

Примеры

3. $\int (2x+3)^6 dx = \int (2x+3)^6 d(2x+3) = \dfrac{(2x+3)^7}{14} + C$.

4. $\int \dfrac{dx}{(x+a)^k} = \begin{cases} \ln|x+a| + C, & k = 1, \\ \dfrac{(x+a)^{-k+1}}{1-k} + C, & k \neq 1. \end{cases}$

5. $\int \dfrac{xdx}{x^2+a} = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{d(x^2+a)}{x^2+a} = \dfrac{1}{2}\ln|x^2+a| + C$.

6. $\int ctgxdx = \int \dfrac{d(\sin x)}{\sin x} = \dfrac{1}{2}\ln|\sin x| + C$.

7. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+a}} = \int \frac{d(x^2+a)}{2(x^2+a)} = \sqrt{x^2+a} + C$.

8. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a} arctg\left(\frac{x}{a}\right) + C,\ \ a>0$.

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C,\ \ a>0$.

10. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \int \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,\ \ a \neq 0$.

11. $J = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}},\ \ a \neq 0$.

Решение. Пусть $x + \sqrt{x^2+a} = t = t(x)$, тогда

$$dt = t'(x)dx = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\right)dx = \frac{t(x)}{\sqrt{x^2+a}}dx,$$

откуда

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \frac{dt(x)}{t(x)}.$$

Поэтому

$$J = \int \frac{dt(x)}{t(x)} = \ln|t(x)| + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C,$$

т.е.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C.$$

Замечание. При вычислении этого интеграла использована **подстановка Эйлера** $x + \sqrt{x^2+a} = t$.

Замечание. Интегралы, рассмотренные в примерах 8-11, часто применяются. Эти интегралы обычно считают табличными.

Приведем таблицу интегралов, полученную из соответствующей таблицы производных. Сюда включены интегралы, найденные в примерах 8-11.

1) $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad a \neq -1.$

2) $\int \dfrac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C.$

3) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq -1, \qquad \int e^x dx = e^x + C.$

4) $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

5) $\int \cos x dx = \sin x + C.$

6) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C.$

7) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C.$

9) $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a} arctg\left(\dfrac{x}{a}\right) + C, \quad a > 0.$

10) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right) + C, \quad a > 0.$

11) $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad a \neq 0.$

12) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad a \neq 0.$

Примеры

12. $J = \int \dfrac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$

Решение

Так как

$$x(1-x) = -(x^2 - x) = \frac{1}{4} - \left(x^2 - 2\cdot x\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2,$$

то, используя пример 9, при $a = \frac{1}{2}$, получаем

$$J = \int \frac{d\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} = \arcsin\left(\frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right) + C = \arcsin(2x-1) + C,$$

т.е.

$$J = \arcsin(2x-1) + C.$$

13. $J = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 3x + 5}}$.

Решение

Так как

$$x^2 - 3x + 5 = \left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{4}\right) + 5 - \frac{9}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4},$$

то, используя пример 11, получаем

$$J = \int \frac{d\left(x - \frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}}} = \ln\left|x - \frac{3}{2} + \sqrt{x^2 - 3x + 5}\right| + C.$$

Иногда бывает целесообразно при вычислении интеграла

$$J = \int f(x)dx \qquad (16)$$

перейти к новой переменной.

Пусть $x = \phi(t)$ - строго монотонная и дифференцируемая на некотором промежутке функция. Тогда она имеет обратную функцию

$$t = \omega(x). \qquad (17)$$

Преобразуя подынтегральное выражение в интеграле (16) с помощью подстановки $x = \phi(t)$, получаем $f(x)dx = f(\phi(t))\phi'(x)dt$. Обозначим $u(t) = f(\phi(t))\phi'(x)$, тогда

$$f(x)dx = u(t)dt. \qquad (18)$$

Пусть $U(t)$ - первообразная для функции $u(t)$, тогда

$$\int u(t)dt = U(t) + C. \tag{19}$$

Из равенств (16) - (19) находим

$$J = \int f(x)dx = \int u(t)dt = U(t) + C = U(\omega(x)) + C. \tag{20}$$

Определение. Формулу (20) называют **формулой интегрирования подстановкой.**

Согласно этой формуле для вычисления интеграла (16) достаточно подобрать такую обратимую дифференцируемую функцию $x = \phi(t)$, с помощью которой подынтегральное выражение $f(x)dx$, представляется в виде $u(t)dt$, причем первообразная для функции $u(t)$ известна.

Пример 14. Вычислить интеграл

$$J = \int \sqrt{a^2 - x^2}dx, \ \ a > 0.$$

Решение

Подынтегральная функция определена на отрезке $[-a, \ a]$. Положим $x = \phi(t) = a\sin t$, тогда $t = \omega(x) = \arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right)$, $\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2\cos^2 t} = a\cos t$, так как $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \ \dfrac{\pi}{2}\right]$, $a > 0$. Следовательно,

$$J = \int a\cos t \cdot \cos t dt = \frac{a^2}{2}\int (1 + \cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + C.$$

Так как

$$\sin t = \frac{x}{a}, \qquad \cos t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a},$$

то

$$\frac{1}{2}\cdot\sin 2t = \sin t \cdot \cos t = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2}.$$

Поэтому

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+C.$$

Упражнения

1. Найти интеграл:

$a)\ \int(3x-5)^{10}dx$; $\quad b)\ \int x^2\sqrt[5]{5x^3+1}\,dx$; $\quad c)\ \int tgx\,dx$;

$d)\ \int\frac{dx}{2+\cos^2 x},\ \ |x|<\frac{\pi}{2}$; $\quad e)\ \int\frac{x^7}{\sqrt{1-x^{16}}}dx$; $\quad f)\ \int\frac{x^2+1}{\sqrt{x^6-7x^4+x^2}}dx$.

2. Найти интеграл:

$a)\ \int\frac{dx}{2+\sqrt{x}}$; $\quad b)\ \int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}},\quad x>0$; $\quad c)\int\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

3. Найти интеграл:

$a)\ \int\frac{3x-1}{x^2-x+1}dx$; $\quad b)\ \int\frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx$.

5. Метод интегрирования по частям

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на промежутке Δ. Тогда функция uv также имеет непрерывную производную на Δ и, согласно правилу дифференцирования произведения, выполняется равенство

$$uv'=(uv)'-vu'.$$

Интегрируя это равенство и учитывая, что

$$\int(uv)'dx=uv+C,$$

получаем

$$\int uv'dx=uv+C-\int vu'dx.$$

Относя произвольную постоянную C к интегралу $\int vu'dx$ находим

$$\int uv'dx=uv-\int vu'dx \tag{21}$$

или

$$\int udv=uv-\int vdu\ . \tag{22}$$

Определение. Формула (21) (или (22)) называется **формулой интегрирования по частям.**

Она сводит вычисление интеграла $\int u dv$ к вычислению интеграла $\int v du$.

Примеры

15. $\int x\cos x dx = \int x d(\sin x) = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C$.

16. Вычислить интеграл

$$J = \int \sqrt{x^2+a}dx.$$

Решение

Полагая $u = \sqrt{x^2+a}, \quad v = x$, по формуле (21) находим

$$J = x\sqrt{x^2+a} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}dx,$$

где

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}dx = \int \frac{x^2+a-a}{\sqrt{x^2+a}}dx = J - a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}.$$

Отсюда получаем уравнение относительно J

$$J = x\sqrt{x^2+a} - J + a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}.$$

Используя результат примера 11, находим

$$\int \sqrt{x^2+a}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C.$$

Упражнения

1. Найти интеграл:

$a)$ $\int \frac{dx}{\sin x}$; $\quad$ $b)$ $\int \ln x dx$; $\quad$ $c)$ $\int x\sin x dx$.

2. Найти интеграл:

$a)$ $\int x^2 e^x dx$; $\quad$ $b)$ $\int \arccos^2 x dx$.

6. Некоторые приложения неопределенного интеграла в экономике

Теперь будем знакомиться с некоторыми приложениями интеграла в экономике.

Пусть $Q(L)-$функция общего продукта, $MP(L)-$функция маржинального продукта. Функция маржинального продукта с функцией общего продукта связана следующим образом:

$$MP(L)=\frac{dQ(L)}{dL}\Rightarrow Q(L)=\int MP(L)dL\,. \tag{14}$$

Пусть $MP(L)=a=const>0$. Тогда

$$Q(L)=\int adL=aL+C\,.$$

Примеры

17. Если функция маржинального продукта имеет вид $MP(L)=3(3L+2)$, то найдите функцию общего продукта. Воспользуемся формулой (14) и имеем:

$$Q(L)=\int MP(L)dL=3\int(3L+2)dL=\frac{9}{2}L^2+6L+C.$$

18. Если функция маржинального продукта имеет вид $MP(L)=4\sin 2L$, то найдите функцию общего продукта. Здесь $L=0\Rightarrow Q=0$. Воспользуемся формулой (5.14) и имеем:

$$Q(L)=4\int\sin 2LdL=-2\cos 2L+C.$$

Здесь $L=0\Rightarrow C=2$. Тогда $Q(L)=-2\cos 2L+2.$

19. Если функция маржинального продукта имеет вид $MP(L)=4\cos 2L$, то найдите функцию общего продукта. Здесь $L=0\Rightarrow Q=3$. Воспользуемся формулой (5.14) и имеем:

$$Q(L)=4\int\cos 2LdL=2\sin 2L+C.$$

Здесь $L=0\Rightarrow C=3$. Тогда $Q(L)=2\sin 2L+3.$

Упражнения

1. Если функция маржинального продукта имеет вид $MP(L) = 3L\sin 2L$, то найдите функцию общего продукта.

2. Если функция маржинального продукта имеет вид $MP(L) = 5L^2 \sin 2L$, то найдите функцию общего продукта. Здесь $L = 0 \Rightarrow Q = 0$.

3. Если функция маржинального продукта имеет вид $MP(L) = 4L\ln 3L$, то найдите функцию общего продукта. Здесь $L = 0 \Rightarrow Q = 2$.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение первообразной для функции на интервале.

2. Дайте определение первообразной на отрезке. Можно ли ввести понятие первообразной и для других промежутков (полуинтервала - конечного или бесконечного)?

3. Приведите примеры функций, имеющих первообразные.

4. Приведите примеры двух различных первообразных для одной и той же функции.

5. Если $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$ на интервале $(a,\ b)$, то что можно сказать о функции $F(x) + C$?

6. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - две первообразные для функции $f(x)$ на интервале $(a,\ b)$, то как они связаны между собой?

7. Разъясните тот факт, что для данной функции $f(x)$ ее первообразная $F(x)$ определяется неоднозначно, с точностью до постоянной. Что нужно сделать для того, чтобы из совокупности первообразных выделить какую-либо первообразную?

8. Всякая ли функция имеет первообразную?

9. Вопрос о существовании первообразной для функции существенно свя-

зан с тем промежутком, на котором эта функция рассматривается. Разъясните это с помощью примера.

10. Для каких функций существует первообразная?

11. Что называют неопределенным интегралом от функции f на этом промежутке? Каким символом обозначают неопределенный интеграл и что пишут в этом случае?

12. Что называют подынтегральной функцией? А - подынтегральным выражением? Приведите возможные виды записей подынтегрального выражения.

13. Какую операцию называют операцией интегрированием? Какой операции это операция является обратной?

14. На основе какого факта по таблице производных можно найти интегралы от некоторых элементарных функций, т.е. составить таблицу основных интегралов?

15. Приведите свойства неопределенного интеграла.

16. На каком правиле дифференцирования основан метод замены переменной, который является одним из мощных методов интегрирования? Поясните суть этого метода.

17. Какую формулу называют формулой интегрирования заменой переменного? Приведите некоторые важные частные случаи этой формулы.

18. Какую формулу называют формулой интегрирования подстановкой? Разъясните условия применения этой формулы для вычисления интегралов.

19. Какое правило дифференцирования используется при выводе формулы интегрирования по частям? Приведите формулу интегрирования по частям.

20. Что дают методы замены переменного и интегрирования по частям в плане расширения таблицы основных интегралов, т.е. в плане дальнейшего расширения множества функций, интегралы от которых выражаются через элементарные функции?

§34. Методы интегрирования

Ключевые слова: *метод неопределенных коэффициентов, простейшие дроби, дроби 4-го рода, дроби 2-го рода, универсальная подстановка.*

1. Метод неопределенных коэффициентов

В ряде случаев по виду подынтегральной функции можно предположить, что ее первообразная будет иметь ту же структуру, что и подынтегральная функция. Это бывает в тех случаях, когда, например, подынтегральная функция представляет собой произведение многочлена и показательной функции, произведение многочлена и синуса или косинуса, или произведение показательной функции и синуса или косинуса. Тогда записывают искомую первообразную в предполагаемом виде с неопределенными буквенными коэффициентами. Задача в этом случае сводится к нахождению неопределенных буквенных коэффициентов, для чего, пользуясь свойствами неопределенного интеграла, сначала дифференцируют обе части равенства, а затем сравнивают левую часть полученного равенства с правой. Поясним сказанное на примерах.

Пример 1. Вычислить $\int\left(x^3+2x^2+5\right)e^x dx$.

Решение

Если вычислить этот интеграл с помощью трехкратного интегрирования по частям, то получим:

$$\int\left(x^3+2x^2+5\right)e^x dx=\left(x^3-x^2+2x+3\right)e^x+C.$$

Этот ответ имеет ту же структуру, что и подынтегральная функция, т.е. является (с точностью до произвольной постоянной) произведением многочлена третьей степени на показательную функцию e^x. Поэтому первообразную можно было сразу искать в следующем виде:

$$\int\left(x^3+2x^2+5\right)e^x dx=\left(Ax^3+Bx^2+Cx+D\right)e^x+E, \tag{1}$$

где E - произвольная постоянная.

Чтобы найти неопределенные коэффициенты $A, B, C, D,$ продифференцируем обе части равенства (1), учитывая при этом, что производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(x^3+2x^2+5\right)e^x=\left(3A^2+2Bx+C\right)e^x+\left(Ax^3+Bx^2+Cx+D\right)e^x.$$

Разделив обе части этого равенства на e^x, получим:

$$x^3+2x^2+5=3Ax^2+2B+C+Ax^3+Bx^2+Cx+D,$$

откуда

$$x^3+2x^2+5=Ax^3+\left(3A+B\right)x^2+\left(2B+C\right)x+\left(C+D\right). \qquad (2)$$

Воспользуемся теперь тем, что два многочлена тождественно равны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую степень и равны их коэффициенты при одинаковых степенях переменной. Сравнив в тождестве (2) коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, получим:

$$\begin{array}{c|c} x^3 & A=1, \\ x^2 & 3A+B=2, \\ x^1 & 2B+C=0, \\ x^0 & C+D=5. \end{array}$$

Мы получили систему из четырех уравнений с четырьмя переменными $A, B, C, D.$

Решая ее, находим: $A=1,\ B=-1,\ C=2,\ D=3$.

Таким образом,

$$\int\left(x^3+2x^2+5\right)e^x dx=\left(x^3-x^2+2x+3\right)e^x+E\,.$$

Пример 2. Вычислить $\int e^{3x}\sin 2x\,dx$.

Решение

Здесь подынтегральная функция является произведением показательной функции и синуса. В этом случае ее первообразная равна произведению показательной функции и линейной комбинации синуса и косинуса того же аргумента:

$$\int e^{3x}\sin 2x\,dx = e^{3x}\left(A\cos 2x + B\sin 2x\right) + C. \qquad (3)$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов A и B продифференцируем обе части равенства (3):

$$e^{3x}\sin 2x = 3e^{3x}\left(A\cos 2x + B\sin 2x\right) + e^{3x}\left(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x\right).$$

Разделим обе части этого равенства на e^{3x}:

$$\sin 2x = 3A\cos 2x + 3B\sin 2x - 2A\sin 2x + 2B\cos 2x.$$

Далее имеем:

$$\sin 2x = \left(3B - 2A\right)\sin 2x + \left(3A + 2B\right)\cos 2x.$$

Полученное равенство справедливо для любых значений x. Это имеет место тогда, когда равны коэффициенты при $\sin 2x$ и $\cos 2x$ в левой и правой частях равенства. Приравняв друг другу указанные коэффициенты, получим:

$$\begin{array}{r|l} \sin 2x & 3B - 2A = 1, \\ \cos 2x & 3A + 2B = 0. \end{array}$$

Из этой системы двух уравнений с двумя переменными A и B находим: $A = -\dfrac{2}{13}$, $B = \dfrac{3}{13}$. Значит

$$\int e^{3x}\sin 2x\,dx = e^{3x}\left(-\frac{2}{13}\cos 2x + \frac{3}{13}\sin 2x\right) + C = \frac{1}{13}e^{3x}\left(3\sin 2x - 2\cos 2x\right) + C.$$

Упражнение

Воспользуясь методом неопределенных коэффициентов, вычислите следующие интегралы:

$\int \left(3x^2 + 2x - 1\right) e^{2x}\,dx;$ $\qquad$ $\int \left(5x^2 - 8x + 2\right) e^{-x}dx;$

$\int e^{-x}\cos 3x\,dx;$ $\qquad$ $\int \left(x + 8\right)\sin 2x\,dx.$

2. Интегрирование рациональных функций

2.1. Интегрирование простейших рациональных функций

Рассмотрим интеграл вида

$$\int R(x)\ dx,$$

где $y = R(x)$ - рациональная функция. Всякое рациональное выражение $R\,(x)$ можно представить в виде $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ - многочлены. Если эта дробь неправильная, т.е. если степень числителя больше или равна степени знаменателя, то ее можно представить в виде суммы многочлена (целая часть) и правильной дроби. Поэтому достаточно рассмотреть интегрирование правильных дробей.

Покажем, что интегрирование таких дробей сводится к интегрированию *простейших дробей*, т.е. выражений вида:

$$1)\frac{A}{x-a};\quad 2)\frac{A}{(x-a)^n};\quad 3)\frac{Ax+B}{x^2+px+q};\quad 4)\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n},$$

где A, B, a, p, q - действительные числа, а квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ не имеет действительных корней. Выражение вида 1) и 2) называют *дробями 4-го рода*, а выражения вида 3) и 4) – *дробями 2-го рода*.

Интегралы от дробей 1-го рода вычисляются непосредственно

1) $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C;$

2) $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int (x-a)^{-n}\,dx = A\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C\,(n = 2,3,4,\ldots).$

Рассмотрим вычисление интегралов от дробей 2-го рода:

3) $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx.$

Сначала заметим, что

$$\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{t}{a} + C,$$

$$\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{2} \ln\left(t^2+a^2\right) + C.$$

Чтобы свести вычисление интеграла 3) к этим двум интегралам, преобразуем квадратный трехчлен x^2+px+q, выделив из него полный квадрат:

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right).$$

Так как предположению этот трехчлен не имеет действительных корней, то $q-\dfrac{p^2}{q}>0$ и мы можем положить $q-\dfrac{p^2}{4}=a^2$. Подстановка $x+\dfrac{p}{2}=t,\ dx=dt$ преобразует интеграл 3) к линейной комбинации указанных двух интегралов:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B}{t^2+a^2}dt =$$

$$= A\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{A}{2}\ln\left(t^2+a^2\right) + \frac{1}{2}\left(B-\frac{Ap}{2}\right) arctg \frac{t}{a}.$$

В окончательном ответе нужно лишь заменить t на $x+\dfrac{p}{2}$, а $\sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}}$.

Так как $t^2+a^2=x^2+px+q$, то

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C.$$

4) $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx$.

Как и в предыдущем случае, положим $x+\dfrac{p}{2}=t$. Получим:

$$I_2 = \frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{t^2+1}.$$

Но

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+1} = arctg\, t .$$

Таким образом,

$$I_2 = \frac{1}{2} arctg\, t + \frac{1}{2\left(t^2+1\right)}.$$

Окончательно получаем:

$$\int \frac{x+2}{\left(x^2+6x+10\right)^2} dx = -\frac{1}{2\left(t^2+1\right)} - \frac{1}{2} arctg\, t - \frac{t}{2\left(t^2+1\right)} =$$

$$= -\frac{1}{2\left(x^2+6x+10\right)} - \frac{1}{2} arctg\left(x+3\right) - \frac{x+3}{2\left(x^2+6x+10\right)} + C =$$

$$= \frac{-x-4}{2\left(x^2+6x+10\right)} - \frac{1}{2} arctg\left(x+3\right) + C .$$

Упражнение

Вычислите следующие интегралы от простейших дробей.

$$\int \frac{dx}{6x^2+x+2}.$$

$$\int \frac{5x+3}{\left(x^2+2\right)^2} dx .$$

$$\int \frac{dx}{\left(2x+3\right)^3}.$$

$$\int \frac{3x+2}{x^2-3x+8}\, dx .$$

$$\int \frac{2x-7}{\left(x^2+4x+15\right)^2}\, dx .$$

2.2. Интегрирование правильных дробей

Рассмотрим правильную дробь $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $Q(x)$ - многочлен степени n. Не теряя общности, можно считать, что старший коэффициент в $Q(x)$ равен 1. В курсе алгебры доказывается, что такой многочлен с действительными коэффициентами:

$$Q(x)=(x-x_1)^{\alpha}\ldots(x-x_k)^{\beta}\left(x^2+px+q\right)^{\nu}\ldots\left(x^2+rx+s\right)^{\delta},$$

где $x_1,\ldots,x_k$ - действительные корни многочлена $Q(x)$, а квадратные трехчлены не имеют действительных корней. Можно доказать, что тогда $R(x)$ представляется в виде суммы простейших дробей вида 1) – 4):

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-x_1)}+\frac{A_2}{(x-x_1)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha}}{x-x_1}+$$

$$+\ldots+\frac{B_1}{(x-x_k)}+\frac{B_2}{(x-x_k)^{\beta-1}}+\ldots+\frac{B_{\beta}}{x-x_k}+\frac{M_1x+N_1}{\left(x^2+px+q\right)^{\nu}}+$$

$$+\ldots+\frac{M_{\nu}x+N_{\nu}}{x^2+px+x}+\ldots+\frac{E_1x+F_1}{\left(x^2+rx+s\right)^{\delta}}+\ldots+\frac{E_{\delta}x+F_{\delta}}{x^2+rx+s}, \qquad (1)$$

где показатели у знаменателей последовательно уменьшаются от α до $1,\ldots,$ от β до 1, от γ до $1,\ldots,$ от δ до 1, а $A_1,\ldots,F_{\delta}$ неопределенные коэффициенты. Для того чтобы найти эти коэффициенты, необходимо освободиться от знаменателя и, получив равенство двух многочленов, воспользоваться методом неопределенных коэффициентов.

После нахождения неопределенных коэффициентов остается вычислить интегралы от полученных простейших дробей. Так как при интегрировании простейших дробей получаются, как мы видели, лишь рациональные функции, арктангенсы и логарифмы, то *интеграл от любой рациональной* *функции выражается через рациональную функцию, арктангенсы и логарифмы*.

Пример 3. Вычислить $\int \frac{6x+1}{x^2+2x-3}dx$.

Решение

Разложим знаменатель подынтегральной функции на множители:

$$x^2+2x-3=\left(x-1\right)\left(x+3\right).$$

Выпишем подынтегральную функцию и представим ее в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{6x+1}{\left(x-1\right)\left(x+3\right)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}.$$

Освободившись в этом равенстве от знаменателей, получим:

$$6x+1=A\left(x+3\right)+B\left(x-1\right). \qquad (2)$$

Для отыскания коэффициентов воспользуемся методом подстановки частных значений. Для нахождения коэффициента A положим $x=1$. Тогда из равенства (2) получим $7=4A$, откуда $A=\frac{7}{4}$. Для отыскания коэффициента B положим $x=-3$. Тогда из равенства (2) получим $-17=-4B$, откуда $B=\frac{17}{4}$.

$$\frac{6x+1}{\left(x-1\right)\left(x+3\right)}=\frac{\frac{7}{4}}{x-1}+\frac{\frac{17}{4}}{x+3}.$$

Значит,

$$\int\frac{6x+1}{x^3+2x-3}dx=\frac{7}{4}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{17}{4}\int\frac{dx}{x+3}=\frac{7}{4}\ln\left|x-1\right|+\frac{17}{4}\ln\left|x+3\right|+C.$$

Пример 4. Вычислим $\int\frac{x^4+2x^2+8x+5}{\left(x^2+2\right)\left(x-1\right)^2\left(x+2\right)}dx$.

Решение

Выпишем подынтегральную функцию и представим ее в виде суммы простейших дробей. В знаменателе содержится множитель x^2+2, не имеющий действительных корней, ему соответствует дробь 2-го рода:

$$\frac{Ax+B}{x^2+2},$$

множителю $\left(x-1\right)^2$ соответствует одна дробь 1-го рода $\frac{E}{x+2}$. Таким образом, подынтегральную функцию мы представим в виде суммы четырех дробей:

$$\frac{x^4+2x^2+8x+5}{\left(x^2+2\right)\left(x-1\right)^2\left(x+2\right)}=\frac{Ax+B}{x^2+2}+\frac{C}{\left(x-1\right)^2}+\frac{D}{x-1}+\frac{E}{x+2}. \qquad (3)$$

Освободимся в этом равенстве от знаменателей. Получим:

$$x^4+2x^2+8x+5=\left(Ax+B\right)\left(x-1\right)^2\left(x+2\right)+C\left(x^2+2\right),$$

$$\left(x+2\right)+D\left(x^2+2\right)\left(x-1\right)\left(x+2\right)+E\left(x^2+2\right)\left(x-1\right)^2. \qquad (4)$$

Знаменатель подынтегральной функции имеет два действительных корня $x=1, x=-2$. При подстановке в равенство (4) значения $x=1$ получаем $16=9C$, откуда находим $C=\frac{16}{9}$. При подстановки $x=-2$ получаем $13=54E$ и, соответственно, определяем $E=\frac{13}{54}$. Подстановка значения $x=i\sqrt{2}$ (корня многочлена x^2+2) позволяет перейти к равенству

$$4-4+8i\sqrt{2}+5=\left(Ai\sqrt{2}+B\right)\left(i\sqrt{2}-1\right)^2\left(i\sqrt{2}+2\right).$$

Оно преобразуется к виду:

$$\left(10A+2B\right)+\left(2A-5B\right)\sqrt{2}\,i=5+8\sqrt{2}\,i,$$

откуда $10A+2B=5$, а $\left(2A-5B\right)\sqrt{2}=8\sqrt{2}$.

Решив систему двух уравнений с двумя переменными

$$\begin{cases} 10A + 2B = 5, \\ 2A - 5B = 6, \end{cases}$$

находим: $A = \dfrac{41}{54}, B = -\dfrac{35}{27}$.

Осталось определить значение коэффициента D. Для этого в равенстве (4) раскроем скобки, приведем подобные члены, а затем сравним коэффициенты при x^4. Получим:

$$A + D + E = 1, \text{ т.е. } D = 0.$$

Подставим найденные значения коэффициентов в равенство (3):

$$\frac{x^4 + 2x^2 + 8x + 5}{\left(x^2 + 2\right)\left(x - 1\right)^2\left(x + 2\right)} = \frac{\frac{41}{54}x - \frac{35}{27}}{x^2 + 2} + \frac{\frac{16}{9}}{\left(x - 1\right)^2} + \frac{\frac{13}{54}}{x + 2},$$

а затем перейдем к интегрированию:

$$\int \frac{x^4 + 2x^2 + 8x + 5}{\left(x^2 + 2\right)\left(x - 1\right)^2\left(x + 2\right)} dx = \frac{41}{54}\int \frac{x\,dx}{x^2 + 2} - \frac{35}{27}\int \frac{dx}{x^2 + 2} +$$

$$+\frac{16}{9}\int \frac{dx}{\left(x - 1\right)^2} + \frac{13}{54}\int \frac{dx}{x + 2} = \frac{41}{108}\ln\left(x^2 + 2\right) - \frac{35}{27\sqrt{2}}\,arctg\,\frac{x}{\sqrt{2}} -$$

$$-\frac{16}{9\left(x - 1\right)} + \frac{13}{54}\ln\left|x + 2\right| + C.$$

Упражнение

Вычислите следующие интегралы от правильных дробей:

$$\int \frac{x^2 + 2}{x^3 + x^2 - 2x}\,dx. \qquad \int \frac{3x - 2}{\left(x + 1\right)\left(x^2 - 9\right)}\,dx.$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\left(x + 1\right)\left(x + 3\right)^2}. \qquad \int \frac{dx}{\left(x^2 + 1\right)\left(x^2 + 1\right)}.$$

$$\int \frac{x\,dx}{x^3 + 1}. \qquad \int \frac{2x - 1}{\left(x^2 + 2\right)\left(x^2 + 4\right)}\,dx.$$

2.3. Интегрирование неправильных дробей

Пусть нужно проинтегрировать функцию, где $f(x)$ и $g(x)$ - многочлены, причем степень многочлена $f(x)$ больше или равна степени многочлена $g(x)$. В этом случае, прежде всего, необходимо выделить целую часть неправильной дроби $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, т.е. представить ее в виде

$$\frac{f(x)}{g(x)}=s(x)+\frac{r(x)}{g(x)},$$

где $s(x)$ - многочлен степени, равной разности степеней многочленов $f(x)$ и $g(x)$, а $\dfrac{r(x)}{g(x)}$ - правильная дробь.

Тогда

$$\int\frac{f(x)}{g(x)}dx=\int s(x)dx+\int\frac{r(x)}{g(x)}dx.$$

Пример 5. Вычислить $\displaystyle\int\frac{x^4-4x^3+x^2+16x-11}{(x-1)(x+2)(x-3)}dx$.

Решение

Имеем:

$$g(x)=(x-1)(x+2)(x-3)=x^3-2x^2-5x+6,$$

$$f(x)=x^4-4x^3+x^2+16x-11.$$

Для выделения целой части разделим $f(x)$ на $g(x)$:

$$\begin{array}{r|l}
-\,x^4-4x^3+x^2+16x-11 & \\
x^4-2x^3-5x+6x & x^3-2x^2-5x+6 \\ \cline{1-1}\cline{2-2}
-\,-2x^3+6x^2+10x-11 & x-2 \\
-2x^3+4x^2+10x-12 & \\ \cline{1-1}
2x^2\qquad+\quad 1 &
\end{array}$$

Итак,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = x - 2 + \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 2x^2 - 5x + 6}.$$

Значит,

$$\int \frac{x^4 - 4x^3 + x^2 + 16x - 11}{(x-1)(x+2)(x-3)} dx = \int (x-2) + dx + \int \frac{2x^2 + 1}{(x-1)(x+2)(x-3)} dx.$$

Имеем:

$$\int (x-2) dx = \frac{x^2}{2} - 2x + C_1.$$

Для вычисления интеграла $\int \frac{2x^2 + 1}{(x-1)(x+2)(x-3)} dx$ применяется, как и выше, метод неопределенных коэффициентов. После вычислений, которые мы оставляем читателю, получаем:

$$\int \frac{x^4 - 4x^3 + x^2 + 16 - 11}{(x-1)(x+2)(x-3)} dx = \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{3}{5}\ln|x+2| + \frac{19}{10}\ln|x-3| + C.$$

Упражнение

Вычислите следующие интегралы от неправильных дробей.

$$\int \frac{x^5 + x - 1}{x - 2} dx.$$

$$\int \frac{x^4 + 2}{x^3 - x} dx.$$

$$\int \frac{x^3 + 4}{x^2 - 6x + 8} dx.$$

$$\int \frac{5x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx.$$

3. Интегрирование иррациональных функций

При интегрировании иррациональных функций используются различные приемы. Мы рассмотрим метод *рационализации* подынтегрального выражения. Метод заключается в выборе такой подстановки $t = \phi(x)$, которая данное подынтегральное выражение преобразует в рациональное относительно новой переменной t. Поскольку рациональные функции мы умеем интегрировать, такие подстановки позволяют интегрировать и иррациональные функции.

Пусть $R(x, y)$- рациональная функция от x и y, т.е. функция, получаемая из x, y и чисел с помощью конечного числа арифметических операций (сложения, умножения и деления). Примерами таких функций могут служить

$$z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + 3y^2(4x - y)}; \qquad z = \frac{x^3 + y^3}{x - y} + \frac{(x^5 - 6y^2)^7}{(8x^3 - 9xy)^3}.$$

Если заменить в $R(x, y)$ переменную y выражением $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, то получим функцию $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ одной переменной x. Интеграл от нее имеет вид:

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx.$$

Этот интеграл рационализируется с помощью подстановки

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t.$$

В самом деле, так как подкоренное выражение представляет собой дробно – линейную относительно x функцию, то переменная x рационально выражается через переменную t:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n, \qquad x = \frac{b - dt^n}{ct^n - a} = g(t).$$

Тогда $x' = g'(t)$ - рациональная функция. Заменяя теперь переменную в данном интеграле, получим интеграл от рациональной функции новой переменной t:

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \int R\big(g(t), \big)\ g'(t)\, dt.$$

Замечание. Если под знаком интеграла содержатся корни с разными показателями, но с одним и тем же дробно – линейным относительно x подкоренным выражением, то сначала следует провести их к одному показателю, после чего использовать указанный прием.

Примеры

6. Вычислить $\int \dfrac{dx}{(x-1)(x+2)\sqrt[4]{\dfrac{x+2}{x-1}}}$.

Решение

Учитывая, что под корнем содержится дробно–линейно выражение, воспользуемся подстановкой

$$\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}=t \text{, откуда } x=\frac{t^4+2}{t^4-1}.$$

Выразим все компоненты подынтегрального выражения через t.

$$x-1=\frac{t^4+2}{t^4-1}-1=\frac{3}{t^4-1};\ x+2=\frac{t^4+2}{t^4-1}+2=\frac{3t^4}{t^4-1};$$

$$dx=\left(\frac{t^4+2}{t^4-1}\right)' dt=-\frac{12t^3}{\left(t^4-1\right)^2}dt.$$

Заменив под знаком интеграла переменную x новой переменной t, получим:

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)\sqrt[4]{\dfrac{x+2}{x-1}}}=\int \frac{-\dfrac{12t^3}{\left(t^4-1\right)}dt}{\dfrac{3}{t^4-1}\cdot\dfrac{3t^4}{t^4-1}\cdot t}=-\frac{4}{3}\int\frac{dt}{t^2}=\frac{4}{3t}+C=\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}+C.$$

7. Вычислить $I=\int \dfrac{1+7\sqrt[3]{\dfrac{5x-1}{7}}-5x}{\sqrt[6]{\dfrac{5x-1}{7}}+\sqrt[3]{\dfrac{5x-1}{7}}+\sqrt{\dfrac{5x-1}{7}}}dx$.

Решение

В данном случае под знаком интеграла содержатся корни с разными показателями, но с одним и тем же подкоренным выражением. Наименьшее общее кратное всех показателей корней, входящих в состав подынтегрального выражения, равно 6, поэтому данный интеграл от иррациональной функции может быть рационализирован с помощью подстановки:

$$\sqrt[6]{\frac{5x-1}{7}}=t,\ x=\frac{7t^6+1}{5}.$$

Тогда

$$dx=\frac{42}{5}t^5dt,\quad \sqrt{\frac{5x-1}{7}}=t^3,\quad \sqrt[3]{\frac{5x-1}{7}}=t^2.$$

Заменив переменную под знаком интеграла, получим:

$$I=\int\frac{1+7t^2-\left(7t^6+1\right)}{t+t^2+t^3}\cdot\frac{42}{5}t^2dt=-\frac{294}{5}\int\frac{t^{10}-t^6}{t^2+t+1}dt.$$

Под знаком интеграла содержится неправильная рациональная дробь. Для выделения целой части разделим числитель на знаменатель, так как это было сделано ранее.

Получаем:

$$\frac{t^{10}-t^6}{t^2+t+1}=t^8-t^7+t^5-2t^4+t^3+t^2-2t+1+\frac{t-1}{t^2+t+1}.$$

Поэтому

$$I=-\frac{294}{5}\int\left(t^8-t^7+t^5-2t^4+t^3+t^2-2t+1+\frac{t-1}{t^2+t+1}\right)dt=$$

$$=-\frac{294}{5}\left(\frac{t^9}{9}-\frac{t^9}{8}+\frac{t^6}{6}-\frac{2t^5}{5}+\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}-t^2+t+\int\frac{t-1}{t^2+t+1}dt\right).$$

Для вычисления $\int\frac{t-1}{t^2+t+1}dt$ выделим в знаменателе полный квадрат аналогично тому, как это было сделано в предыдущем примере. Получим:

$$\int\frac{t-1}{t^2+t+1}dt=\frac{1}{2}\ln\left(t^2+t+1\right)-\sqrt{3}arctg\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Окончательно находим:

$$I=-\frac{294}{5}\left(\frac{t^9}{9}-\frac{t^8}{8}+\frac{t^6}{6}-\frac{2t^5}{5}+\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}-t^2+t+\frac{1}{2}\ln\left(t^2+t+1\right)-\sqrt{3}arctg\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)+C,$$

где $t=\sqrt[6]{\dfrac{5x-1}{7}}$.

Упражнение

Вычислите следующие интегралы от иррациональных функций.

$$\int \frac{\sqrt{4+x}}{x}\,dx.$$

$$\int x\sqrt{1+x}\,dx.$$

$$\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}\,dx.$$

$$\int \frac{1-2\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}\,dx.$$

$$\int \frac{1}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\,dx.$$

$$\int \frac{\sqrt[6]{2x-1}+1}{(2x-1)\left(\sqrt[3]{2x-1}-1\right)}\,dx.$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

Рассмотрим интегралы вида

$$\int R\left(\sin x, \cos x\right) dx,$$

где $R\left(u, v\right)$ - рациональная функция. Такие интегралы всегда рационализируются подстановкой $t=tg\,\dfrac{x}{2}$ $\quad\left(-\pi<x<\pi\right)$. В самом деле,

$$\sin x=\frac{2tg\,\frac{x}{2}}{1+tg^2\,\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}.$$

Во многих случаях удается упростить вычисление интегралов вида $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, воспользовавшись другими подстановками. Так, если при изменении знака $\sin x$ меняется знак $R(\sin x, \cos x)$:

$$R(-\sin x, \cos x)=-R(\sin x, \cos x),$$

то интеграл можно рационализировать с помощью подстановки $\cos x=t$. Если при изменении знака $\cos x$ меняется знак $R(\sin x, \cos x)$:

$$R(\sin x, -\cos x)=-R(\sin x, \cos x),$$

то целесообразна подстановка $\sin x = t$. Если при одновременном изменении знака $\sin x$ и $\cos x$ $R(\sin x, \cos x)$ не меняются:

$$R(-\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то рационализация достигается с помощью одной из подстановок:

$$tg\ x = t, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \text{или } ctg\ x = t, \qquad 0 < x < \pi.$$

Поясним сказанное на примерах.

Примеры

8. Вычислить $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx$.

Решение

В данном случае имеем:

$$R(-\sin x, \cos x) = -(-\sin x)^3 \cos^2 x = -\sin^3 x \cos^2 x.$$

Воспользуемся подстановкой $\cos x = t$. Заметим, что

$$\sin^3 x \cos^2 x\, dx = \sin^2 x \cos^2 x \sin x\, dx = -\left(1 - \cos^2 x\right)\cos^2 x$$

$$(-\sin x\, dx) = -\left(1 - \cos^2 x\right)\cos^2 x\, d(\cos x).$$

Значит,

$$\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx = -\int \left(1 - t^2\right) t^2 dt =$$

$$= \int \left(t^4 - t^2\right) dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C.$$

9. Вычислим $\int \frac{\cos^3 x\, dx}{1 + \sin^2 x}$.

Решение

В данном случае имеем:

$$R(\sin x, -\cos x) = \frac{(-\cos x)^3}{1 + \sin^2 x} = -\frac{\cos^3 x}{1 + \sin^2 x} = -R(\sin x, \cos x).$$

Воспользуемся подстановкой $\sin x = t$:

$$\int \frac{\cos^3 x\, dx}{1 + \sin^2 x} = \int \frac{\cos^2 x}{1 + \sin^2 x}\cos x\, dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \sin^2 x} d(\sin x) =$$

$$= \int \frac{1-t^2}{1+t^2} dt = \int \left(\frac{2}{1+t^2} - 1 \right) dt = 2 arctg\, t - t + C =$$

$$= 2 arctg(\sin x) - \sin x + C .$$

10. Вычислить $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx$.

Решение

В данном случае имеем:

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

Значит, в качестве рационализирующей может выступить одна из двух подстановок $tg\, x = t$ или $ctg\, x = t$. Имеем:

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx = \int ctg^2 x \frac{dx}{\sin^2 x} .$$

В данном случае целесообразно сделать подстановку $ctg\ x = t.$

Тогда $dt = -\frac{dx}{\sin^2 x}$ и, следовательно,

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx = -\int t^2 dt = -\frac{t^3}{3} + C = -\frac{1}{3} ctg^3 x + C .$$

При вычислении интегралов от тригонометрических функций для преобразования подынтегральных выражений часто используются различные формулы тригонометрии. В первую очередь при

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{2}; \quad (5)$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2}; \quad (6)$$

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2} \quad (7)$$

и их частные случаи:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Из формул (5), (6), (7) получаем, что при $n \neq m$

$$\int \sin mx \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int \sin(m+n)x + \sin(m-n)x\, dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos(m+n)x}{m+n} + \frac{\cos\,(m-n)x}{m-n}\right) + C\,.$$

$$\int \cos mx \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos(n+n)x + \cos(m-n)x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right) + C\,.$$

$$\int \sin mx \sin nx\, dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right) + C\,.$$

Примеры

11. Вычислим $\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx$.

Решение

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx = \int \left(\sin^2 x \cos^2 x\right) \cos^2 x\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \sin^2 2x \cos^2 x\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{6}\int (1-\cos 4x + \cos 2x - \cos 4x \cos 2x) dx = \frac{1}{16}\left(x - \frac{\sin 4x}{4} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin 2x}{2} - \int \frac{\cos 6x + \cos 2x}{2}\right) = \frac{1}{16}\left(x - \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 2x}{2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 2x}{2}\right)\right) + C = \frac{1}{16}\left(x + \frac{1}{4}\sin 2x - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{12}\sin 6x\right) + C \quad .$$

12. Вычислим $\int \sin x \sin 3x \sin 5x\, dx$.

Решение

Несколько раз воспользуемся формулами преобразования произведения в сумму:

$$\int \sin x \sin 3x \sin 5x \, dx = \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 4x) \sin 5x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 2x \sin 5x \, dx - \frac{1}{2}\int \cos 4x \sin 5x \, dx = \frac{1}{4}\int (\sin 7x +$$

$$+ \sin 3x) \, dx - \frac{1}{4}\int (\sin 9x + \sin) \, dx = \frac{1}{4}\left(-\frac{\cos 7x}{7} - \frac{\cos 3x}{3} \right) -$$

$$-\frac{1}{4}\left(-\frac{\cos 9x}{9} - \cos x \right) + C = \frac{7\cos 9x + 63\cos x - 9\cos 7x - 21\cos 3x}{252} + C .$$

Упражнение

Вычислите следующие интегралы от тригонометрических функций.

$\int tg^5 x \, dx$.

$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^7} dx$

$\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} dx$

$\int tg^4 x \, dx$.

$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$.

$\int \frac{dx}{4 - 3\cos^2 x + 5\sin^2 x}$.

$\int \sin^5 x \cos^4 x \, dx$.

$\int \frac{\cos^3 x}{1 + \sin x} dx$.

$\int \frac{dx}{\sin^4 x}$.

$\int \cos^8 x \, dx$.

Вопросы для самопроверки

1. В чем заключается сущность метода неопределенных коэффициентов? Для вычисления, каких интегралов целесообразно применять этот метод?

2. Напишите линейную комбинацию $\sin\beta x$ и $\cos\beta x$ с неопределенными коэффициентами.

3. Напишите общий вид многочлена пятой степени с неопределенными коэффициентами.

4. Приведите примеры простейших рациональных функций вида 1) – 4).

5. Какая рациональная функция называется правильной дробью? Какая рациональная функция называется неправильной дробью?

6. В каком случае разложение правильной дроби на простейшие будет содержать лишь дроби 1-го рода?

7. В каком случае разложение правильной дроби на простейшие будет содержать и дроби 2-го рода?

8. В каком случае приходится применять конкретную формулу при интегрировании рациональных функций? Какой вид имеет эта формула.

9. К какой задаче сводится отыскание коэффициентов при разложении правильной дроби на простейшие?

10. Сформулируйте алгоритм интегрирования рациональных функций.

11. Почему подстановку $tg\dfrac{x}{2}=z$ называют универсальной?

12. Какими свойствами должна обладать подынтегральная функция, чтобы целесообразно было пользоваться другими тригонометрическими подстановками?

§35. Определенный интеграл

Ключевые слова: *криволинейная трапеция, разбиение отрезка, нижняя и верхняя суммы Дарбу, интегрируемая функция, определенный интеграл, классы интегрируемых функций, формула Ньютона – Лейбница, интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле.*

1. Задача о вычислении площади криволинейной трапеции

Определение. Криволинейной трапецией называют фигуру в плоскости xOy, ограниченную прямыми $x = a$, $x = b$, $(a < b)$ и графиками функций $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, непрерывных на $[a,\ b]$ и таких, что $f_1(x) \le f_2(x)$ для всех $x \in [a,\ b]$ (рис. 1).

Рассмотрим частный случай такой трапеции, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и графиком непрерывной и неотрицательной на $[a,\ b]$ функции $y = f(x)$ (рис. 2). Как найти площадь такой фигуры? Правда, само понятие площади также нуждается в определении, но к этому мы вернемся позднее. Пока же будем опираться на интуитивное представление о площади.

Разобьем отрезок $[a,\ b]$ на ряд мелких участков точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

на каждом участке $[x_k,\ x_{r+1}]$ найдем наименьшее значение функции $y = f(x)$, обозначим его m_k и рассмотрим прямоугольник с основанием $[x_k,\ x_{k+1}]$ и высотой m_k (рис. 3); его площадь равна $m_k(x_{k+1} - x_k)$.

Объединение этих прямоугольников представляет собой вписанную в данную криволинейную трапецию ступенчатую фигуру (рис. 4); ее площадь обозначим s_T (буква T символизирует то разбиение отрезка $[a,\ b]$, которое мы осуществили). Аналогично, если на каждом участке $[x_k,\ x_{r+1}]$ выбрать наибольшее значение функции M_k и рассмотреть прямоугольник с высотой M_k, то объединение таких прямоугольников даст описанную около данной криволинейной трапеции ступенчатую фигуру (рис. 5); ее площадь обозначим S_T.

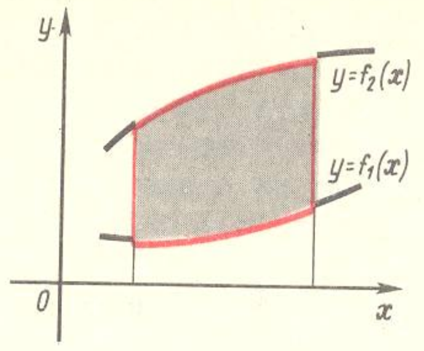


Рис. 1

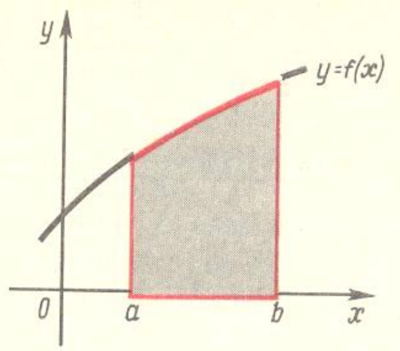


Рис. 2

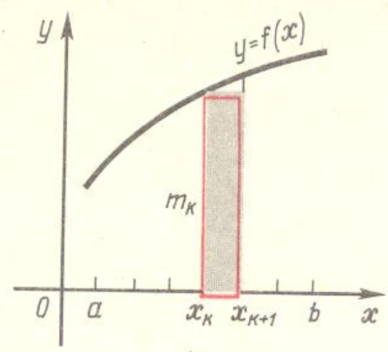


Рис. 3

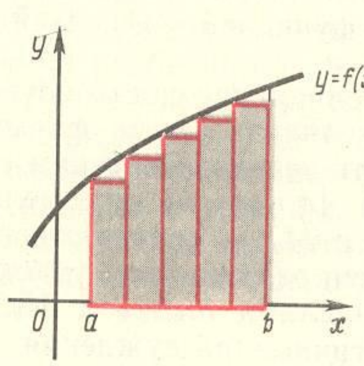


Рис. 4

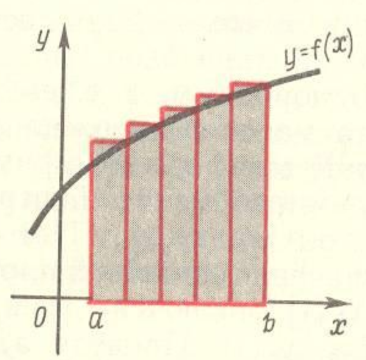


Рис. 5

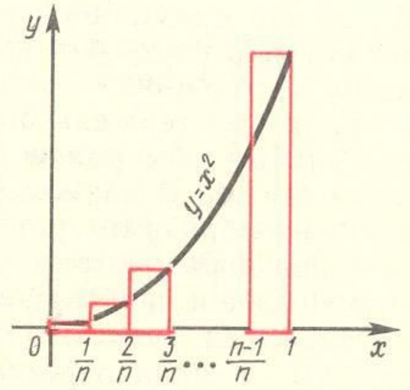


Рис. 6

Очевидно, что для любого разбиения T выполняется неравенство $s_T \le S \le S_T$, где S - искомая площадь криволинейной трапеции. Эту площадь можно определить как число, которое не меньше площади любой вписанной ступенчатой фигуры и не больше площади любой описанной ступенчатой фигуры, а точнее как число, разделяющее множества $\{s_T\}$ и $\{S_T\}$ для всевозможных разбиений T отрезка $[a,\ b]$. Интуитивно ясно, что такое разделяющее число должно быть единственным.

Искомая площадь S приближенно равна площади вписанной или описанной ступенчатой фигуры, т.е. $S \approx s_T$ или $S \approx S_T$.

На практике делят отрезок $[a,\ b]$ на n равных частей и вместо s_T используют запись s_n, а вместо S_T - запись S_n. Чем больше n, тем точнее приближенное равенство $s_n \approx S$ или $S_n \approx S$. Точное равенство получается при переходе к пределу: $S = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ или $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Пример 1 (Архимеда). Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямыми $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ (рис. 6).

Решение

Разделим отрезок [0, 1] на n равных частей точками

$$x_0 = 0,\;\; x_1 = \frac{1}{n},\;\; x_2 = \frac{2}{n},\;\; \ldots\;\; ,x_{n-1} = \frac{n-1}{n},\;\; x_n = \frac{n}{n} = 1.$$

Тогда

$$f(x_0) = 1,\;\; f(x_1) = \frac{1^2}{n^2},\;\; f(x_2) = \frac{2^2}{n^2},\;\; \ldots\;\; ,f(x_{n-1}) = \frac{(n-1)^2}{n^2},\;\; f(x_n) = \frac{n^2}{n^2} = 1.$$

Составим сумму S_n (площадь ступенчатой фигуры на рис. 6):

$$S_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \frac{3^2}{n^2} + \cdots + \frac{n^2}{n^2}\right) = \frac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2\right).$$

Методом математической индукции можно доказать, что

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Значит,

$$S_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \frac{3^2}{n^2} + \cdots + \frac{n^2}{n^2}\right) = \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2},$$

откуда

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Заметим, что этот результат был получен еще Архимедом с помощью предельного перехода.

2. Задача о массе материальной плоской пластины

Пусть дан прямолинейный неоднородный материальный стержень $[a,\; b]$, линейная плотность которого в точке x выражается функцией $\rho(x)$. Найдем массу μ стержня.

Если бы стержень был однородным, т.е. его линейная плотность во всех точках была бы равна ρ, то масса μ стержня вычислялась бы по формуле

$\mu = \rho(b-a)$. В данном случае эту формулу применить нельзя. Поступим следующим образом: произведем разбиение T отрезка $[a,\ b]$ на ряд мелких участков и рассмотрим участок $[x_k,\ x_{k+1}]$. Пусть m_k и M_k - соответственно, наименьшее и наибольшее значения линейной плотности $\rho(x)$ на этом участке. Тогда масса участка $[x_k,\ x_{k+1}]$ заключена между числами $m_k\Delta x_k$ и $M_k\Delta x_k$, где Δx_k - длина отрезка $[x_k,\ x_{k+1}]$. Проведя аналогичные рассуждения для остальных участков разбиения, получим, что масса μ стержня $[a,\ b]$ удовлетворяет двойному неравенству

$$s_T \le \mu \le S_T,$$

где

$$s_T = m_0\Delta x_0 + m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \cdots + m_{n-1}\Delta x_{n-1} \equiv \sum_{k=0}^{n-1} m_k\Delta x_k,$$

$$S_T = M_0\Delta x_0 + M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \cdots + M_{n-1}\Delta x_{n-1} \equiv \sum_{k=0}^{n-1} M_k\Delta x_k.$$

Таким образом, масса стержня есть число, разделяющее множества $\{s_T\}$ и $\{S_T\}$ для всевозможных разбиений T отрезка $[a,\ b]$.

3. Определение определенного интеграла

Две различные задачи, рассмотренные в предыдущих пунктах, в процессе решения привели к одной и той же математической модели - к двум, определенным образом, построенным числовым множествам $\{s_T\}$ и $\{S_T\}$, разделяющимся единственным числом: в первом случае, это число определяет площадь криволинейной трапеции, во втором — массу стержня. Оказывается, многие важные задачи из геометрии, физики, техники и других дисциплин, в том числе экономики приводят к такой же математической модели, поэтому есть смысл специально заняться ее изучением. Прежде всего, нужно более точно осмыслить процесс решения двух рассмотренных выше задач, отвлекаясь от их конкретного содержания.

Итак, пусть на отрезке $[a,\ b]$ определена ограниченная функция $y = f(x)$. Произведем разбиение T отрезка $[a,\ b]$ точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

на каждом из отрезков разбиения $[x_k,\ x_{k+1}]$ найдем нижнюю и верхнюю грани значений функции, обозначим их, соответственно, m_k и M_k, и составим суммы

$$s_T = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k\,, \qquad S_T = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k\,.$$

Определение. Первая из этих сумм называется **нижней,** а вторая - **верхней суммой Дарбу**.

Эти суммы обладают следующими свойствами:

1°. Для любого T справедливо неравенство $s_T \le S_T$.

Доказательство следует из того, что $m_k \le M_k$.

2°. Если к данному разбиению T_1 добавить несколько новых точек, получив тем самым разбиение T_2 отрезка $[a,\ b]$, то $s_{T_1} \le s_{T_2}$, а $S_{T_1} \ge S_{T_2}$.

Доказательство следует из того, что если отрезок $[x_k,\ x_{k+1}]$ разбить на два отрезка и на каждом из них найти нижние и верхние грани значений функции - соответственно, m'_k, m''_k, M'_k, M''_k то $m_k \le m'_k$, $m_k \le m''_k$, в то время как $M_k \ge M'_k$, $M_k \ge M''_k$.

3°. Для любых разбиений T_1 и T_2 отрезка $[a,\ b]$ выполняется неравенство $s_{T_1} \le S_{T_2}$

Доказательство следует из того, что составив разбиение T, включающее в себя все точки разбиения T_1 и все точки разбиения T_2, а затем, используя свойства 1° и 2°, получим $s_{T_1} \le s_T \le S_T \le S_{T_2}$.

Последнее свойство означает, что множество M нижних сумм Дарбу расположено левее множества N верхних сумм Дарбу, построенных для ограниченной на отрезке $[a,\ b]$ функции $y = f(x)$. Тогда найдется хотя бы одно число I, разделяющее множества M и N, т.е. такое, что для любого разбиения отрезка $[a,\ b]$ выполняется двойное неравенство

$$s_T = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k \le I \le \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k = S_T .$$

Определение. Функция $y = f(x)$, ограниченная на отрезке $[a,\ b]$, называется **интегрируемой на этом отрезке**, если существует единственное число I, разделяющее множества нижних и верхних сумм Дарбу, образованных для всевозможных разбиений отрезка $[a,\ b]$. Если функция интегрируема на отрезке $[a,\ b]$, то единственное число, разделяющее эти множества, называют **определенным интегралом этой функции по отрезку** $[a,\ b]$ и обозначают символом $\int_a^b f(x)dx$.

Определение. Знак $\int_a^b$ читается: «интеграл от a до b»; числа a и b называются, **соответственно, нижним и верхним пределами интегрирования.**

Позднее мы установим связь между $\int f(x)dx$ и $\int_a^b f(x)dx$, которая сделает оправданным использование знака интеграла и в случае определенного интеграла.

Мы определили интеграл $\int_a^b f(x)dx$ для случая, когда $a < b$. Если $a > b$, то положим $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. Это определение естественно, так как при изменении направления промежутка интегрирования каждая разность $x_{k+1} - x_k$ изменяет знак, а тогда изменят знаки и суммы Дарбу и, следовательно, разделяющее их число, т.е. интеграл.

Так как при $a = b$ все Δx_k обращаются в нуль, то положим

$$\int_a^a f(x)dx = 0 .$$

Рассматривая в п. 1 задачу о площади криволинейной трапеции, мы получили, что площадь есть число, разделяющее площади вписанных и описанных ступенчатых фигур, а эти площади являются нижними и верхними суммами Дарбу для заданной неотрицательной и непрерывной на отрезке $[a,\ b]$ функции $y = f(x)$. Опираясь на интуицию, мы предположили, что это число единственно. Значит, $S = \int_a^b f(x)dx$, т.е. определенный интеграл выражает площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$ $(a < b), y = 0$ и графиком непрерывной и неотрицательной на отрезке $[a,\ b]$ функции $y = f(x)$. В этом состоит геометрический смысл определенного интеграла.

Рассматривая в п. 2 задачу о массе стержня, мы получили, что масса есть число, разделяющее множества нижних и верхних сумм Дарбу для функции $\rho(x)$, задающей плотность стержня. По смыслу задачи это число единственно.

Значит, $\mu = \int_a^b \rho(x)dx$, т.е. масса стержня есть интеграл от плотности. В этом состоит физический смысл определенного интеграла.

Пример 2. Приведем пример, показывающий, что существуют неинтегрируемые функции. Напомним, что функцией Дирихле называют функцию $D(x)$, определяемую на отрезке $[0,\ 1]$ равенствами

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \textit{если} \quad x - \textit{рациональное число}, \\ 0, & \textit{если} \quad x - \textit{иррациональное число}. \end{cases}$$

Какой бы отрезок $[x_k,\ x_{k+1}]$ мы ни взяли, на нем найдутся как рациональные, так и иррациональные точки, т.е. точки, где $D(x) = 0$, и точки, где $D(x) = 1$. Поэтому для любого разбиения отрезка $[0,\ 1]$ все значения m_k равны нулю, а все значения M_k равны единице. Тогда все нижние суммы Дарбу $s_T = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k$ равны нулю, а все верхние суммы Дарбу $S_T = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k$ равны единице, поскольку

$$s_T=\sum_{k=0}^{n-1} m_k\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1} 0\cdot\Delta x_k=0\,,\qquad S_T=\sum_{k=0}^{n-1} M_k\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1} 1\cdot\Delta x_k=1,$$

а $\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k$ длина отрезка $[0,\ 1]$. Итак, в рассматриваемом случае $\mathsf{M}=\{0\}$, $\mathsf{N}=\{1\}$ и любое число из промежутка $[0,\ 1]$ разделяет множества M и N. Значит, функция Дирихле **не является интегрируемой на отрезке** $[0,\ 1]$.

Теорема 1 (необходимое и достаточное условие интегрируемости функции). Для того чтобы функция $y=f(x)$, определенная и ограниченная на отрезке, была интегрируема на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовало такое разбиение T, что $S_T-s_T<\varepsilon$. Короче:

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists T:\quad S_T-s_T<\varepsilon\,.$$

Доказательство следует из критерия единственности разделяющего числа и свойств 1° и 2° сумм Дарбу.

Поскольку

$$S_T-s_T=\sum_{k=0}^{n-1} M_k\Delta x_k-\sum_{k=0}^{n-1} m_k\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1}(M_k-m_k)\Delta x_k$$

условие $S_T-s_T<\varepsilon$ можно записать и так:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(M_k-m_k)\Delta x_k<\varepsilon\,. \tag{1}$$

Разность M_k-m_k, будем обозначать через ω_k и называть **колебанием функции** $f(x)$ на отрезке $[x_k,\ x_{k+1}]$. Тогда неравенство (1) можно записать следующим образом:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\Delta x_k<\varepsilon\,.$$

4. Классы интегрируемых функций

В предыдущем пункте мы ввели понятие интегрируемой функции и установили необходимое и достаточное условие интегрируемости. Ниже без доказательства приведем ряд теорем, которые выделяют **некоторые классы интегрируемых функций.**

Теорема 2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Замечание. В литературе по математическому анализу существует много вариантов доказательства теоремы 2. Например, теорему 2 можно доказать используя:

- теорему Кантора о равномерной непрерывности;
- понятие модуля непрерывности функции.

Упражнение

Доказать теорему 2, используя понятие модуля непрерывности функции.

Теорема 3. Если функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,\ b]$ и монотонна, то она интегрируема на этом отрезке.

Теорема 4. Если функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a,\ b]$ и непрерывна во всех точках этого отрезка, кроме конечного числа точек $c_k,\ k=1,2,....,m$, то она интегрируема на этом отрезке.

Теорема 5. Если функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a,\ b]$, ограничена, интегрируема на отрезке $[a,\ \eta]$ при любом $\eta\in[a,\ b]$ и существует конечный

$$\lim_{\eta\to b-0}\left(\int_a^b f(x)dx\right)=A,$$

то она интегрируема на этом отрезке, причем

$$\int_a^b f(x)dx=A.$$

Пример 3. Показать, пользуясь определением интеграла и теоремой 2, что $\int_a^b dx=b-a$.

Решение

Функция $f\left(x\right)=1$ непрерывна на отрезке и в силу теоремы 2 интегрируема. Пусть $T=\left\{x_i,\ i=0,1,...,n\ \right\}$ - произвольное разбиение отрезка $[a,\ b]$. Так как $f(x)=1$, то для любого разбиения отрезка $[a,\ b]$ все значения m_k равны единице, а все значения M_k также равны единице. Тогда все нижние суммы Дарбу $s_T=\sum_{k=0}^{n-1} m_k\Delta x_k$ равны 1, а все верхние суммы Дарбу $S_T=\sum_{k=0}^{n-1} M_k\Delta x_k$ равны 1, поскольку

$$s_T=\sum_{k=0}^{n-1} m_k\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1} 1\cdot\Delta x_k=b-a,\qquad S_T=\sum_{k=0}^{n-1} M_k\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1} 1\cdot\Delta x_k=b-a,$$

а $\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k$ длина отрезка $[a,\ b]$. Итак, в рассматриваемом случае $\mathsf{M}=\{b-a\}$, $\mathsf{N}=\{b-a\}$. Тогда

$$b-a=s_T=\sum_{k=0}^{n-1} m_k\Delta x_k\le I\le\sum_{k=0}^{n-1} M_k\Delta x_k=S_T=b-a,$$

и поэтому $I=\int_a^b dx=b-a$.

Упражнение

Показать, пользуясь определением интеграла и теоремой 2, что $\int_a^b xdx=\frac{b^2-a^2}{2}$.

5. Аддитивность определенного интеграла

Теорема 6. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a,\ c]$ и $[c,\ b]$, $a<c<b$, то она интегрируема и на отрезке $[a,\ b]$, причем выполняется равенство

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx \quad \text{(аддитивное свойство интеграла).} \qquad (2)$$

Доказательство. Возьмем произвольное число $\varepsilon>0$. Так как по условию функция интегрируема на отрезке $[a,\ c]$, то в силу теоремы 1 существует разбиение T_1 отрезка $[a,\ c]$ такое, что $S_{T_1}-s_{T_1}<\frac{\varepsilon}{2}$. Аналогично функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[c,\ b]$ и, значит, существует разбиение T_2 отрезка $[c,\ b]$ такое, что $S_{T_2} - s_{T_2} < \frac{\varepsilon}{2}$. Эти разбиения T_1 и T_2 в совокупности образуют разбиение T отрезка $[a,\ b]$, причем

$$S_T - s_T = (S_{T_1} - S_{T_2}) - (s_{T_1} - s_{T_2}) = (S_{T_1} - s_{T_1}) + (S_{T_2} - s_{T_2}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Итак, для произвольного числа $\varepsilon > 0$ нам удалось построить разбиение T отрезка $[a,\ b]$ такое, что $S_T - s_T < \varepsilon$. Это означает, что функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,\ b]$.

Из неравенств $s_{T_1} \le \int\limits_a^c f(x)dx \le S_{T_1}$, $\quad s_{T_2} \le \int\limits_c^b f(x)dx \le S_{T_2}$ следует, что

$$s_T = s_{T_1} + s_{T_2} \le \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx \le S_{T_1} + S_{T_2} = S_T .$$

Таким образом, как $\int\limits_a^b f(x)dx$, так и $\int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$ разделяют множества $\{s_T\}$ и $\{S_T\}$ сумм Дарбу для отрезка $[a,\ b]$. Поскольку эти множества разделяются лишь одним числом, справедливость равенства (2) доказана.

Отметим, что если $b < c$, то

$$\int\limits_a^c f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx - \int\limits_c^b f(x)dx .$$

Значит, и в этом случае

$$\int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx .$$

Равенство (2) имеет наглядный геометрический смысл: оно выражает **свойство аддитивности площади плоской фигуры.** Так, площадь S криволинейной трапеции $aABb$, изображенной на рис.7, равна $S_1 + S_2$, где S_1 - площадь трапеции $aACc$, а S_2 - площадь трапеции $cCBb$. Но

$$S_1 = \int\limits_a^c f(x)dx, \qquad S_2 = \int\limits_c^b f(x)dx, \qquad S = \int\limits_a^b f(x)dx,$$

откуда следует равенство (2).

С физической точки зрения равенство (2) выражает **свойство аддитивности массы стержня.**

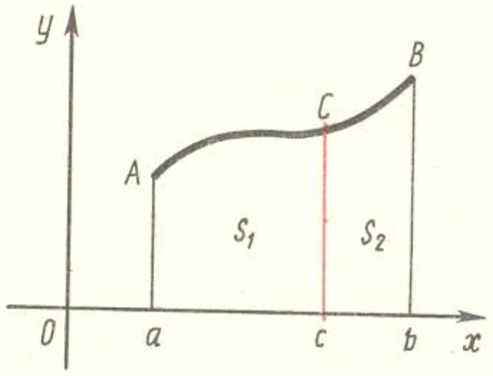


Рис. 7

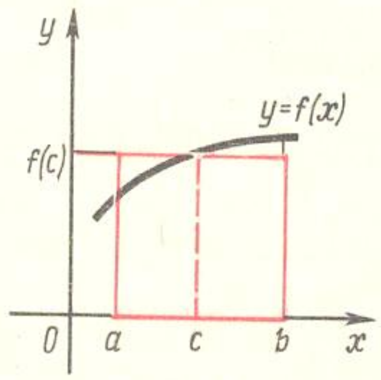


Рис. 8

6. Теорема о среднем для определенного интеграла

Теорема 7 (о среднем). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, то существует точка $c \in [a,\ b]$ такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Число $f(c) = \dfrac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx$ называется средним значением функции f на отрезке $[a,\ b]$.

Геометрический смысл этой теоремы состоит в том, что **площадь криволинейной трапеции равна площади прямоугольника, имеющего то же основание, что и трапеция, причем высота прямоугольника равна ординате** $f(c)$ **в некоторой точке** c**, лежащей между** a **и** b (рис. 8).

На практике нередко исчисляются такого рода средние значения, например, средняя производительность труда, средняя мощность электродвигателей и т.д.

Пример 4. Переменные издержки производства определяются формулой $y = 3x$, где x - количество произведенных единиц продукции. Рассчитать средние издержки производства, если объем производства составляет от 3 до 5 единиц.

Решение

Среднее значение функции есть $\frac{1}{5-3}\cdot\int_3^5 3xdx = \frac{3}{2}\int_3^5 xdx = 12$. Поскольку $y = 3x$, имеем:

$$12 = 3x_0, \text{ откуда } x_0 = 4.$$

Средние издержки производства составляют 12.

Упражнение

Найти среднее значение издержек $K(x) = 3x^2 + 4x + 1$, если объем продукции x меняется от 3 до 3 единиц, и указать объем продукции, при котором издержки принимают среднее значение.

7. Формула Ньютона - Лейбница

В этом пункте мы докажем основную формулу интегрального исчисления, устанавливающую связь между понятиями определенного интеграла и первообразной.

7.1. Существование первообразной у непрерывной функции

Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,\ b]$, то она интегрируема по любой части этого отрезка и потому при любом $x \in [a,\ b]$ существует интеграл $\int_a^x f(x)dx$. Чтобы не смешивать обозначения верхнего предела и переменной интегрирования, будем записывать этот интеграл в виде $\int_a^x f(t)dt$. Рассмотрим функцию $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$. Докажем справедливость следующей теоремы.

Теорема 8. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, то функция

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$$

дифференцируема в любой внутренней точке x этого отрезка, причем

$$\Phi'(x)=f(x).$$

Иными словами, **интеграл с переменным верхним пределом является одной из первообразных для непрерывной подынтегральной функции.**

Доказательство. Найдем производную функцию

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt.$$

Выберем Δx столь малым, чтобы точка $x+\Delta x$ лежала внутри отрезка $[a,\ b]$; тогда

$$\Phi(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Далее,

$$\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

(здесь было использовано аддитивное свойство интеграла).

Теперь к полученному интегралу применим теорему о среднем значении (см. теорему 7):

$$\Delta\Phi=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt=f(c)\Delta x,$$

где $c\in[x,\ x+\Delta x]$(или $c\in[x+\Delta x,\ x]$, если $\Delta x<0$). Итак, $\Delta\Phi=f(c)\Delta x$, а $\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta x}=f(c)$.

Так как функция $f(x)$ непрерывна и $c\to x$ при $\Delta x\to 0$, то $\lim\limits_{c\to x} f(c)=f(x)$. Поэтому

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim_{c\to x} f(c)=f(x).$$

Следствие. Из доказанного утверждения вытекает, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, то она имеет на этом отрезке первообразную, а именно, функцию Φ, где $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$, и поэтому

$$\int f(x)dx=\int\limits_a^x f(t)dt+C\,,\qquad a\le x\le b\,,$$

где C - произвольная постоянная.

Определение. Поэтому доказанная теорема называется **теоремой о существовании первообразной для непрерывной функции.**

7.2. Основная формула интегрального исчисления (формула Ньютона - Лейбница)

Теорема 9. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)\,,\tag{3}$$

где $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$.

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, то она интегрируема на нем и, значит, существует $\int\limits_a^b f(x)dx$. Далее, в силу непрерывности функции $f(x)$ на $[a,\ b]$, на этом отрезке существует ее первообразная.

Согласно теореме 8, функция $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ является одной из первообразных для функции $f(x)$; следовательно, для любой первообразной $F(x)$ имеем

$$\Phi(x)=F(x)+C\,.\tag{4}$$

Заметим, что $\Phi(a)=\int\limits_a^a f(t)dt=0$. Из равенства (4) заключаем, что

$\Phi(a) = F(a) + C$, т. е. $0 = F(a) + C$; значит, $C = -F(a)$. Итак,

$$\Phi(x) = F(x) - F(a),$$

в частности,

$$\Phi(b) = F(b) - F(a). \text{ Но } \Phi(b) = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx.$$

Итак,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Определение. Равенство (3) называется **формулой Ньютона – Лейбница.** Разность $F(b) - F(a)$ записывают в виде $F(x)\Big|_a^b$; тогда $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$.

Пример 5. Функция $\frac{x^3}{3}$ - одна из первообразных для функции x^2. Поэтому $\int\limits_a^b x^2dx = \left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_a^b = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} = \frac{b^3 - a^3}{3}$.

7.3. Свойства определенного интеграла

Из формулы Ньютона - Лейбница легко выводятся основные свойства определенного интеграла. Во всех этих свойствах предполагается, что функции непрерывны на рассматриваемых промежутках.

1°. Интеграл от суммы двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ по отрезку $[a, b]$ равен сумме интегралов от этих функций по тому же отрезку:

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.$$

Доказательство. Из свойств неопределенного интеграла вытекает, что если $F_1(x)$- первообразная для $f_1(x)$, а $F_2(x)$ - первообразная для $f_2(x)$, то первообразной для $f_1(x) + f_2(x)$ служит функция $F_1(x) + F_2(x)$. Поэтому

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = (F_1(b) + F_2(b)) - (F_1(a) + F_2(a)) =$$

$$=(F_1(b)-F_1(a))+(F_2(b)-F_2(a))=\int_a^b f_1(x)dx+\int_a^b f_2(x)dx.$$

Аналогично доказывается следующее свойство.

2°. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda\int_a^b f(x)dx.$$

Пример 6. Вычислить $\int_{-2}^{1}(2x^3+3x-4)dx$.

Решение

Имеем

$$\int_{-2}^{1}(2x^3+3x-4)dx=\int_{-2}^{1}2x^3dx+\int_{-2}^{1}3xdx+\int_{-2}^{1}(-4)dx=3\int_{-2}^{1}x^3dx+3\int_{-2}^{1}xdx-4\int_{-2}^{1}dx=$$

$$=2\cdot\frac{x^4}{4}\bigg|_{-2}^{1}+3\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_{-2}^{1}-4\cdot x\bigg|_{-2}^{1}=$$

$$=\frac{1}{2}\left((1^4-(-2)^4)+\frac{3}{2}(1^2-(-2)^2)-4(1-(-2)\right)=-24.$$

3°. Если $f(x)\geq 0$ на отрезке $[a,\ b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx\geq 0. \tag{5}$$

Доказательство. В самом деле, если $f(x)\geq 0$, то $s_T\geq 0$, а тогда тем более $\int_a^b f(x)dx\geq 0$.

Неравенство (5) допускает простое геометрическое истолкование: **площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции, принимающей только неотрицательные значения, есть неотрицательное число.**

4°. Если на отрезке $[a,\ b]$ выполняется неравенство $f(x)\leq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx. \tag{6}$$

Доказательство. В самом деле, $g(x)-f(x)\geq 0$, а тогда согласно свойству 3° имеем $\int\limits_a^b (g(x)-f(x))dx \geq 0$), т.е. $\int\limits_a^b g(x)dx - \int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$, откуда и следует неравенство (6).

Геометрический смысл неравенства (6) рекомендуем выяснить самостоятельно.

7.4. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Для определенного интеграла формула интегрирования по частям принимает следующий вид:

$$\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu . \tag{7}$$

В самом деле, если $\int udv = F(x)+C_1$, $\int vdu = \Phi(x)+C_2$ то применяя формулу интегрирования по частям для неопределенного интеграла имеем $\int udv = uv - \int vdu$, т.е.

$$F(x) = u(x)v(x) - \Phi(x) + C .$$

Поэтому $F(b) = u(b)v(b) - \Phi(b) + C$ и $F(a) = u(a)v(a) - \Phi(a) + C$. Значит,

$$F(b) - F(a) = (u(b)v(b) - u(a)v(a)) - (\Phi(b) - \Phi(a)) ,$$

а это и есть формула (7).

Пример 7. Вычислить $\int\limits_1^2 xe^x dx$.

Решение. Положим $u = x,\ dv = e^x dx$. Тогда $du = dx,\ v = e^x$. Используя формулу (7), получим

$$\int\limits_1^2 xe^x dx = xe^x\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 e^x dx = 2\cdot e^2 - 1\cdot e^1 - e^x\Big|_1^2 = 2e^2 - e - (e^2 - e) = e^2 .$$

Упражнение

Показать, что для любых $m\in N$, $n\in N$ справедливы равенства а) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx dx = 0;$ б) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi.$

7.5. Замена переменной в определенном интеграле

Пусть $F(x)$ является первообразной для $f(x)$ на отрезке $[a, \ b]$ и пусть $x = \phi(t)$ - дифференцируемая функция, отображающая отрезок $[\alpha, \ \beta]$ в отрезок $[a, \ b]$, причем $\phi(\alpha) = a$, $\phi(\beta) = b$. Ранее мы установили, что

$$\int f(\phi(t))\phi'(t)dt = F(\phi(t)) + C.$$

Значит,

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t))\phi'(t)dt = F(\phi(t))\Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$$

Итак, мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 10. Пусть функция $y = f(x)$ имеет первообразную на отрезке $[a, \ b]$, а функция $x = \phi(t)$ определена на отрезке $[\alpha, \ \beta]$ и дифференцируема внутри этого отрезка, причем $\phi(\alpha) = a$, $\phi(\beta) = b$ и $\phi([\alpha, \ \beta]) = [a, \ b]$. Тогда

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t))\phi'(t)dt. \qquad (8)$$

На этом утверждении и основан метод замены переменной под знаком определенного интеграла. Заметим, что на практике формула (8) используется как «слева направо», так и «справа налево».

Условие $\phi([\alpha, \ \beta]) = [a, \ b]$ заведомо выполняется, если функция $x = \phi(t)$ монотонна на отрезке $[\alpha, \ \beta]$. Это имеет место, если ее производная сохраняет знак на $[\alpha, \ \beta]$.

Пример 8. Вычислить $\int\limits_{0}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}dx$.

Решение

Воспользуемся тригонометрической подстановкой $x = \phi(t) = a\sin t$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$. Найдем пределы интегрирования α и β для новой переменной t.

Функция $\phi(t) = a\sin t$ на отрезке $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ определена и дифференцируема внутри него, причем $\phi(0) = 0$, $\phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$ и $\phi\left(\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]\right) = [0,\ a]$. Значит, можно применить формулу (8). Имеем

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\cos^2 t} \cdot a\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t \cdot a\cos t dt = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt =$$

$$= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt = \frac{a^2}{2} t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{a^2}{2} \frac{\sin 2t}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + \frac{a^2}{4}(\sin\pi - \sin 0) = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Упражнение

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,\ -a]$. Показать, что:

а) если f - нечетная функция, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$;

б) если f - четная функция, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$

Пример 9. Вычислить $\int_{0,5}^{1,5} \frac{dx}{4x^2 - 4x + 5}$.

Решение

Так как $4x^2 - 4x + 5 = (2x - 1)^2 + 4$. Положим $u = 2x - 1$; тогда $du = 2dx$. Если $x = 0{,}5$, то $u = 2x - 1 = 2 \cdot 0{,}5 - 1 = 0$; если $x = 1{,}5$, то $u = 2x - 1 = 2 \cdot 1{,}5 - 1 = 2$. Таким образом, 0 и 2 - новые пределы интегрирования. Функция $u = 2x - 1$ на отрезке $[0{,}5,\ 1{,}5]$ определена, дифференцируема и монотонно возрастает; значит, можно воспользоваться формулой (8) (но если в предыдущем примере мы использовали эту формулу «слева направо», то теперь будем идти «справа налево»). Получаем

$$\int_{0,5}^{1,5} \frac{dx}{4x^2 - 4x + 5} = \int_{0,5}^{1,5} \frac{2dx}{(2x-1)^2 + 4} = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{du}{u^2 + 4} =$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}arctg\left(\frac{u}{2}\right)\Big|_0^2=\frac{1}{4}(arctg1-arctg0)=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4}-0\right)=\frac{\pi}{16}.$$

Упражнение

Показать, что если f - непрерывна на отрезке R^1 периодическая с периодом T функция, то для любого $\alpha\in R^1$ справедливо равенство

$$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_a^T f(x)dx.$$

Вопросы для самопроверки

1. Какую фигуру на плоскости называют криволинейной трапецией? Как найти площадь такой фигуры? Что означает разбиение T отрезка $[a,\ b]$? Очевидно, что для любого разбиения T выполняется неравенство $s_T\le S\le S_T$, где S - искомая площадь криволинейной трапеции. Как можно определить эту площадь?

2. Как на практике делят отрезок $[a,\ b]$? При этом какую запись используют вместо s_T и S_T соответственно? Как можно определить искомую площадь в этом случае? Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y=x^2$ и прямыми $x=0,\ x=1,\ y=0$.

3. Найти массу материальной плоской пластины - стержня как число, разделяющее множества $\{s_T\}$ и $\{S_T\}$ для всевозможных разбиений T отрезка $[a,\ b]$.

4. Что называется нижней суммой Дарбу? Что называется верхней суммой Дарбу? Какими свойствами обладают эти суммы?

5. Когда функция, ограниченная на отрезке $[a,\ b]$, называется интегрируемой на этом отрезке? Что называется определенным интегралом заданной функции по отрезку $[a,\ b]$ и как его обозначают?

6. Обычно интеграл $\int_a^b f(x)dx$ определяют для случая, когда $a<b$. Как определяют интеграл $\int_a^b f(x)dx$ когда $a>b$?

7. Интегрируемые ли любые функции? Если «нет», то приведите пример, неинтегрируемой функции.

8. Что является необходимым и достаточным условием интегрируемости функции? Сформулируйте теорему.

9. Приведите теоремы, которые выделяют некоторые классы интегрируемых функций.

10. Что означает аддитивное свойство определенного интеграла? Сформулируйте теорему.

11. Что означает свойство аддитивности площади плоской фигуры и свойство аддитивности массы стержня?

12. Сформулируйте теорему о среднем для определенного интеграла. Что называется средним значением функции на отрезке $[a, \; b]$? В чем заключается геометрический смысл этой теоремы?

13. Сформулируйте теорему существования первообразной для непрерывной функции.

14. Показать, что интеграл с переменным верхним пределом является одной из первообразных для непрерывной подынтегральной функции.

15. Выведите основную формулу интегрального исчисления - формулу Ньютона – Лейбница.

16. Приведите свойства определенного интеграла.

17. Какой вид принимает формула интегрирования по частям для определенного интеграла?

18. Приведите утверждения, на котором основан метод замены переменной под знаком определенного интеграла.

§36. Несобственные интегралы

Ключевые слова: *несобственные интегралы, интеграл на бесконечном промежутке, интеграл на конечном промежутке, формула Ньютона - Лейбница для несобственного интеграла.*

1. Определение несобственных интегралов

Определенный интеграл был введен для ограниченных на отрезке функций. Естественно поставить вопрос о распространении понятия интеграла на случай бесконечного промежутка, а также на случай, когда подынтегральная функция является неограниченной.

А. Интеграл на бесконечном промежутке

Рассмотрим функцию $\frac{1}{1+x^2}$. Эта функция непрерывна на отрезке $[0,\ \xi]$ при любом $\xi \ge 0$, и поэтому существует интеграл $J(\xi) = \int_0^{\xi} \frac{dx}{1+x^2} = arctg\xi$, откуда следует, что $\lim_{\xi \to +\infty} J(\xi) = \frac{\pi}{2}$. Этот предел называют несобственным интегралом от функции $\frac{1}{1+x^2}$ на бесконечном промежутке $[0,\ +\infty)$ и пишут

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Число $\frac{\pi}{2}$ можно интерпретировать как площадь фигуры ограниченной графиком функции $y = \frac{1}{1+x^2}$, $x \ge 0$ и координатными осями (рис. 1).

Перейдем к определению несобственного интеграла на бесконечном промежутке.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена при $x \ge a$, где a - заданное число, и интегрируема на отрезке $[a,\ \xi]$ при любом $\xi \ge a$, т.е. при

$[a, \ +\infty)$. Если существует конечный $\lim\limits_{\xi\to+\infty}\int\limits_a^{\xi} f(x)dx$, то этот предел **называют несобственным интегралом от функции** $f(x)$ **на промежутке** $[a, \ +\infty)$ и обозначают $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, а функцию $f(x)$ называют **интегрируемой в несобственном смысле на промежутке** $[a, \ +\infty)$.

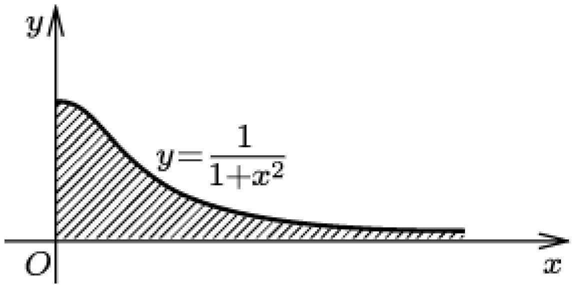


Рис. 1

Таким образом, по определению

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\xi\to+\infty}\int\limits_a^{\xi} f(x)dx. \qquad (1)$$

В этом случае говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ **сходится (является сходящимся).**

Замечание. Символ $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ иногда называют несобственным интегралом и в том случае, когда не существует конечный предел (1), при этом говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ **расходится.**

Для краткости вместо слов «несобственный интеграл» пишут «интеграл».

Сходимость интеграла (1) равносильна сходимости интеграла $\int\limits_c^{+\infty} f(x)dx$, где c - любое число из промежутка $(a, \ +\infty)$, так как

$$\int_a^{\xi} f(x)dx = \int_a^{c} f(x)dx + \int_c^{\xi} f(x)dx.$$

Интеграл на бесконечном промежутке $(-\infty,\ a)$ определяется аналогично:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{\xi\to-\infty}\int_{\xi}^{a} f(x)dx. \qquad (2)$$

Пример 1. Показать, что интеграл $J = \int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx$ сходится, и вычислить этот интеграл.

Решение

$F(\xi) = \int_{\xi}^{0} xe^{-x^2}dx$. Тогда

$$F(\xi) = \frac{1}{2}\int_0^{\xi} e^{-x^2} d(-x^2) = \frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^{\xi} = \frac{1}{2}(e^{-\xi^2} - 1).$$

Так как существует конечный $\lim_{\xi\to-\infty} F(\xi) = -\frac{1}{2}$, то согласно определению (2) интеграл J существует, причем $J = -\frac{1}{2}$.

Определение. Определим, наконец, несобственный интеграл на промежутке R:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{\xi\to-\infty \\ \eta\to+\infty}}\int_{\xi}^{\eta} f(x)dx. \qquad (3)$$

Определение. В этом случае предполагается, что функция f интегрируема на любом отрезке действительной оси, а интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ называется **сходящимся** в случае существования конечного предела (3), причем этот предел не должен зависеть от того, каким способом ξ и η стремятся, соответственно, к $-\infty$ и к $+\infty$. Иначе говоря, интеграл сходится тогда и только тогда, когда существуют конечные пределы $\lim\limits_{\xi\to-\infty}\int\limits_{\xi}^{a} f(x)dx = J_1$ и $\lim\limits_{\eta\to+\infty}\int\limits_{a}^{\eta} f(x)dx = J_2$, где $a\in R$, и при этом несобственный интеграл по определению равен $J_1 + J_2$, т.е.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx .$$

Пример 2. Показать, что интеграл $J = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x+x^2}$ сходится, и вычислить этот интеграл.

Решение

Обозначим $F(\xi,\eta) = \int\limits_{\xi}^{\eta}\frac{dx}{1+x+x^2}$, тогда

$$F(\xi,\eta) = \int\limits_{\xi}^{\eta}\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big|_{\xi}^{\eta} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(arctg\frac{2\eta+1}{\sqrt{3}} - arctg\frac{2\xi+1}{\sqrt{3}}\right).$$

Так как $\lim\limits_{t\to+\infty} arctgt = \frac{\pi}{2}$, а $\lim\limits_{t\to-\infty} arctgt = -\frac{\pi}{2}$, то существует конечный

$$\lim_{\substack{\xi\to-\infty\\ \eta\to+\infty}} F(\xi,\eta) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}},$$

несобственный интеграл сходится, причем $J = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

Упражнение

Вычислить интеграл или установить его расходимость:

а) $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-1}$; б) $\int\limits_{0}^{+\infty}\cos 2x dx$; в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}$.

Пример 3. Исследовать на сходимость интеграл

$$J(\alpha) = \int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}. \qquad (4)$$

Решение

Пусть $\alpha\neq 1$, тогда

$$\int_1^{\xi}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_1^{\xi}=\frac{\xi^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}.$$

Если $\alpha>1$, то существует конечный $\lim\limits_{\xi\to+\infty}\int_1^{\xi}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\frac{1}{\alpha-1}$, т.е. интеграл (4) сходится, причем $J(\alpha)=\frac{1}{\alpha-1}$. Если $\alpha<1$, то $\lim\limits_{\xi\to+\infty}\int_1^{\xi}\frac{dx}{x^{\alpha}}=+\infty$, и поэтому интеграл (4) расходится. При $\alpha=1$интеграл также расходится, так как

$$\int_1^{\xi}\frac{dx}{x}=\ln\xi\to+\infty \text{ при } \xi\to+\infty.$$

Таким образом, интеграл (4) сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\le 1$.

Упражнение

Показать, что интеграл $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{(x-c)^{\alpha}}$, где $a>c$, сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\le 1$.

Б. Интеграл на конечном промежутке

Рассмотрим функцию $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$. Эта функция непрерывна на промежутке $[0,\ 1)$, но не ограничена на этом промежутке. При любом $\xi\in[0,\ 1)$ функция $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ - интегрируема на отрезке $[0,\ \xi]$, причем

$$J(\xi)=\int_0^{\xi}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=-2\sqrt{1-x}\Big|_0^{\xi}=2\left(1-\sqrt{1-\xi}\right),$$

откуда следует, что существует конечный $\lim\limits_{\xi\to 1-0}F(\xi)=2$. Этот предел назовем несобственным интегралом от функции $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ на промежутке $[0,\ 1)$ и обозначим $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$, т.е. $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=2$. Число 2 можно интерпретировать как площадь заштрихованной на рис. 2 фигуры G.

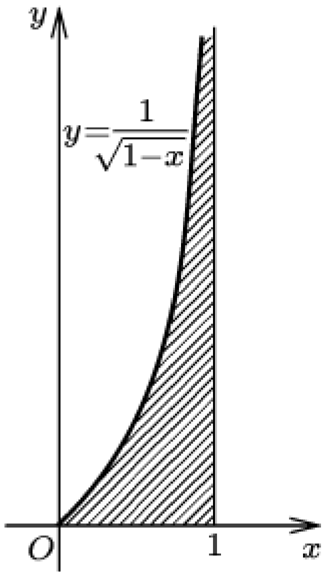


Рис. 2

Упражнение

Вычислить интеграл или установить его расходимость:

а) $\int\limits_{2}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;   б) $\int\limits_{0}^{1}\ln x dx$;   в) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Дадим теперь определение несобственного интеграла на конечном промежутке. Пусть функция $f(x)$ определена на конечном промежутке $[a,\ b)$, интегрируема на отрезке $[a,\ \xi]$ при любом $\xi\in[a,\ b)$. Если существует конечный $\lim\limits_{\xi\to b-0}\int\limits_{a}^{\xi}f(x)dx$, то этот предел называют несобственным интегралом от функции $f(x)$ на промежутке $[a,\ b)$ и обозначают $\int\limits_{a}^{b}f(x)dx$. Таким образом, по определению

$$\int\limits_{a}^{b}f(x)dx=\lim\limits_{\xi\to b-0}\int\limits_{a}^{\xi}f(x)dx. \quad (5)$$

Определение. В случае существования конечного предела (5) интеграл $\int\limits_{a}^{b}f(x)dx$ называют **сходящимся**, в противном случае - **расходящимся;** символ

$\int_a^b f(x)dx$ употребляют как в случае сходимости, так и в случае расходимости интеграла.

Аналогично, если функция $f(x)$ определена на конечном промежутке $(a,\ b]$, интегрируема на отрезке $[\xi,\ b]$ при любом $\xi \in (a,\ b]$, то по определению в случае существования конечного предела (5) интеграл

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\xi \to a+0} \int_\xi^b f(x)dx. \qquad (6)$$

Если предел (6) существует и конечен, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называют **сходящимся;** в противном случае - **расходящимся.**

Замечание 2. Определение (5) несобственного интеграла на конечном промежутке $[a,\ b)$ является содержательным лишь в случае, когда функция $f(x)$ не ограничена на интервале $(b-\delta,\ b)$ при любом $\delta > 0$. В самом деле, если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,\ \xi]$ при любом $\xi \in [a,\ b)$ и ограничена на $[a,\ b)$, то, доопределив эту функцию в точке b, получим функцию, которая интегрируема в обычном смысле на отрезке $[a,\ b]$. При этом интеграл от доопределенной функции равен пределу (5) и не зависит от значения функции в точке b.

Поэтому в дальнейшем, рассматривая несобственный интеграл (5), будем считать, что функция $f(x)$ является неограниченной на интервале $(b-\delta,\ b)$ при любом $\delta > 0$, а точку b будем называть **иногда особой точкой подынтегральной функции $f(x)$ или интеграла (5).**

Аналогично, рассматривая несобственный интеграл (6), будем считать, что a - особая точка функции $f(x)$, т.е. предполагать, что функция $f(x)$ не ограничена на интервале $(a,\ a+\delta)$ при любом $\delta > 0$.

Пример 4. Исследовать на сходимость интеграл

$$J=\int_0^1\frac{dx}{x^\alpha}. \qquad (7)$$

Решение

Обозначим $F(\xi)=\int_\xi^1\frac{dx}{x^\alpha}$, тогда

$$F(\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\alpha}(1-\xi^{1-\alpha}), & \text{если} \quad \alpha\neq 1,\\ -\ln\xi, & \text{если} \quad \alpha=1.\end{cases}$$

Поэтому при $\alpha<1$ существует конечный $\lim\limits_{\xi\to+0}F(\xi)=\dfrac{1}{1-\alpha}$, а если $\alpha\geq 1$, то $\lim\limits_{\xi\to+0}F(\xi)=+\infty$. Таким образом, интеграл (7) сходится при $\alpha<1$ и расходится при $\alpha\geq 1$.

Упражнение. Пусть $-\infty<a<b<+\infty$. Показать, что интегралы

$$\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^\alpha} \quad \text{и} \quad \int_a^b\frac{dx}{(b-x)^\alpha}$$

сходятся при $\alpha<1$ и расходятся при $\alpha\geq 1$.

Упражнение. Сходимость несобственного интеграла (5) равносильна сходимости интеграла $\int_a^b f(x)dx$ при любом $c\in(a,\ b)$, так как

$$\int_a^\xi f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^\xi f(x)dx.$$

В. Другие типы несобственных интегралов

Если функция $f(x)$ определена на конечном интервале $(a,\ b)$, интегрируема на отрезке $[\xi,\ \eta]$ при любых $[\xi,\ \eta]$ таких, что $a<\xi\leq\eta<b$, то несобственный интеграл от функции $f(x)$ на промежутке $(a,\ b)$ определяется формулой

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\substack{\xi\to a+0\\ \eta\to b-0}}\int_\xi^\eta f(x)dx.$$

Если функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,\ b]$, за исключением точки $\xi \in (a,\ b)$, и интегрируема на отрезках $[a,\ \xi]$ и $[\eta,\ b]$ при любых $[\xi,\ \eta]$ таких, что $a \le \xi < c < \eta \le b$, то несобственный интеграл от функции $f(x)$ на промежутке $[a,\ b]$, обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$ и определяется равенством

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\xi \to c-0} \int\limits_a^{\xi} f(x)dx + \lim_{\eta \to c+0} \int\limits_{\eta}^{b} f(x)dx. \tag{8}$$

Если оба предела в правой части (8) существуют и конечны, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ называют **сходящимся** и пишут

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

В случае, когда функция $f(x)$ определена на конечном или бесконечном промежутке $(a,\ b)$, за исключением точек $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ понимается как сумма несобственных интегралов по промежуткам $\Delta_k = (x_k,\ x_{k+1})$, $k = 1, 2, ..., n$ и считается сходящимся в том и только в том случае, когда сходятся интегралы по всем промежуткам Δ_k.

2. Свойства и вычисление несобственных интегралов

Будем рассматривать несобственные интегралы вида $\int\limits_a^b f(x)dx$, предполагая, что:

а) функция $f(x)$ определена на промежутке $[a,\ b)$, где a - конечная точка, b - либо конечная точка, либо символ $+\infty$;

б) функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,\ \xi]$ при любом $\xi \in [a,\ b)$.

Согласно определению сходящегося несобственного интеграла

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\xi \to b-0} \int_a^{\xi} f(x)dx, \text{ если } b \neq +\infty.$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\xi \to +\infty} \int_a^{\xi} f(x)dx, \text{ если } b = +\infty.$$

А. Линейность интеграла

Утверждение 1. Если сходятся несобственные интегралы от функций $f(x)$ и $\lambda, \mu \in R$ на промежутке $[a, \ b)$, то при любых $\lambda, \mu \in R$ сходится интеграл от функции $\lambda f(x) + \mu g(x) \in R$ на том же промежутке и выполняется равенство

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx. \qquad (9)$$

Доказательство. Для любого $\xi \in [a, \ b)$ в силу свойств определенного интеграла справедливо равенство

$$\int_a^{\xi} (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^{\xi} f(x)dx + \mu \int_a^{\xi} g(x)dx,$$

правая часть которого, имеет по условию конечный предел при $\xi \to b-0$, откуда следует существование предела при $\xi \to b-0$ в левой части и справедливость формулы (9).

Б. Формула Ньютона - Лейбница

Утверждение 2. Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, \ b)$ и если $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится тогда и только тогда когда существует конечный

$$\lim_{\xi b-0} F(\xi) = F(b-0), \qquad (10)$$

причем

$$\int_a^b f(x)dx = F(b-0) - F(a). \qquad (11)$$

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, \ \xi]$ при любом $\xi \in [a, \ b)$, то справедлива формула Ньютона - Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(\xi) - F(a),$$

откуда, переходя к пределу при $\xi \to b-0$ и используя соотношение (10), получаем формулу (11).

Определение. Формулу (11), которую **называют формулой Ньютона - Лейбница для несобственного интеграла.**

Правую часть формулы (11) часто записывают в виде $F(x)\Big|_a^{b-a}$, если $b \neq +\infty$. Если $b = +\infty$, то правую часть формулы (11) записывают в виде $F(x)\Big|_a^{+\infty}$.

Пример 5. Вычислить интеграл $J = \int\limits_0^{+\infty} \frac{arctgx}{1+x^2}dx$.

Решение

Так как $\frac{arctgx}{1+x^2}dx = arctgxd(arctgx) = d\left(\frac{(arctgx)^2}{2}\right)$, то $F(x) = \frac{(arctgx)^2}{2}$

является первообразной для функции $f(x) = \frac{arctgx}{1+x^2}$ и по формуле (11) получаем

$J = \frac{1}{2}(arctgx)^2\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi^2}{8}$, так как $arctg(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} arctgx = \frac{\pi}{2}$, $arctg0 = 0$.

3. Возможность использования в экономике понятия несобственного интеграла

Пример 6. ***Определение периода окупаемости инвестиций.*** Для сопоставления затрат и доходов, относящихся к различным моментам времени, пользуются понятием стоимости, приведенной к какому-либо фиксированному моменту времени t_0. Возьмем $t_0 = 0$. Предположим, что в момент t_0 в предприятие были вложены инвестиции в объеме a д. ед. В результате этого выпуск предприятия за 1 единицу времени увеличился, и в момент времени t $(t \geq 0)$ дополнительный выпуск составил $b(t)$ д. ед.. Величина $b(t)$, приведенная к моменту $t_0 = 0$, равна $e^{it} \cdot b(t)$, где i - банковская норма процента при непрерывном его начислении. Тогда суммарное увеличение выпуска за период $[0, T]$, приведенное к моменту времени $t_0 = 0$, равно

$$\int_0^T e^{-it} \cdot b(t)\,dt.$$

Вычислим $v(T)$ - прибыль, полученную от инвестиций за период $[0, T]$:

$$v(T) = \int_0^T e^{-it} \cdot b(t)\,dt - a.$$

Для простого случая, когда функция $b(t)$ постоянна: $b(t) = b$ для всех $t > 0$, имеем

$$v(T) = \int_0^T e^{-it} b\,dt - a = b\int_0^T e^{-it}\,dt - a = b\left(-\frac{e^{it}}{i}\right)\Bigg|_0^T - a = b\frac{1-e^{-iT}}{i} - a.$$

При решении задач о выборе и обосновании величины инвестиций пользуются понятием приведенной стоимости. Так, например, если инвестиции *A* были сделаны в момент 0, а доход от них B получен в момент *t (t > 0),* то сравнивают величины *A* и Be^{it} - приведенную стоимость *B* к моменту 0, т.е. величину, которую нужно вложить в банк в момент 0, чтобы в момент *t* получить *B* (при условии, что банк начисляет проценты непрерывно с нормой процента *i).*

Для того чтобы инвестиции окупились, необходимо, чтобы $v(T) \geq 0,$ т.е.

$$b\frac{1-e^{-iT}}{i} \geq a.$$

Решение этого неравенства относительно *T* дает нам $T \geq \frac{1}{i}\ln\frac{b}{b-ai}$ при условии, что $b - ai \geq 0$. Это означает, что период окупаемости инвестиций равен $\frac{1}{i}\ln\frac{b}{b-ai}$.

Выясним теперь, какова будет прибыль $v(T)$ при $T \to \infty$. Для этого вычислим

$$v = \lim_{T\to\infty} v(t) = \lim_{T\to\infty}\left(\int_0^T e^{-it} b dt - a\right) = \lim_{T\to\infty} b\int_0^T e^{-it} dt - a = \frac{b}{i}\lim_{T\to\infty}\left(1 - e^{-iT}\right) - a = \frac{b}{i} - a.$$

Это означает, что при данных условиях невозможно получить прибыль большую, чем $\frac{b}{i} - a.$

Этот пример демонстрирует возможность использования в экономике понятия несобственного интеграла, так как по определению

$$\int_0^T b e^{-it} dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T b e^{-it} dt.$$

4. Заключительное замечание

Для исследования сходимости несобственных интегралов пользуются **различными признаками сходимости.** Рекомендуем в этом разобраться самостоятельно.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется несобственным интегралом на бесконечном промежутке?

2. Что называется несобственным интегралом на конечном промежутке (от неограниченной функции)?

3. Когда говорят, что несобственный интеграл сходится (расходится)?

4. Какие Вы знаете другие типы несобственных интегралов?

5. Что называют формулой Ньютона - Лейбница для несобственного интеграла?

ГЛАВА 3. ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 37. Дифференциальные уравнения первого порядка

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение, порядок дифференциального уравнения, дифференциальное уравнение* n*-го порядка, решение дифференциального уравнения, общее решение, частное решение, интегрирование дифференциального уравнения, поле направлений, интегральная кривая, задача Коши, начальное условие, существование и единственность решения, общий интеграл уравнения, уравнение с разделяющимися переменными, однородное уравнение, динамическая функция предложения, особые точки, особые решения, линейное уравнение первого порядка, линейное однородное уравнение первого порядка, линейное неоднородное уравнение первого порядка, вариация произвольной постоянной, уравнение Бернулли.*

1. Основные понятия

1.1. Дифференциальное уравнение и его порядок

До настоящего времени мы сталкивались с уравнениями вида $F(x)=0$, содержащими неизвестную величину x; задача заключалась в том, чтобы найти все значения величины x, удовлетворяющие заданному соотношению. Однако ряд важных задач – как самой математики, так и ее приложений – приводит к необходимости решать уравнения более сложного вида, где неизвестной является не величина x, а некоторая функция $y(x)$, причем в уравнение входят, наряду с x и $y(x)$, еще и производные $y', y'', y''',...$ до какого-то порядка n. Приведем примеры таких уравнений:

$$y' + y - x^2 = 0, \quad y''' = \sin x, \qquad y'' + y = 0.$$

Определение. Уравнение, связывающее независимую переменную x с неизвестной функцией $y(x)$ и ее производными до некоторого порядка n включительно, называется **дифференциальным уравнением n-го порядка**.

Все приведенные выше уравнения являются дифференциальными, причем первое из них имеет порядок 1, второе – порядок 3, третье – порядок 2.

Дифференциальное уравнение n-го порядка записывают обычно в виде

$$F(x,\ y,\ y',\ \dots\ ,\ y^{(n)})=0. \qquad (1)$$

В дальнейшем слово «дифференциальное» будем часто опускать и говорить просто «уравнение (1)».

1.2. Решения дифференциального уравнения

Определение. Решением дифференциального уравнения (1) называется любая функция $y=f(x)$, дифференцируемая, по крайней мере, n раз и такая, что при ее подстановке в уравнение (1) последнее обращается в тождество**.**

Так, для дифференциального уравнения

$$y'-y=0 \qquad (2)$$

одним из решений является функция $y=e^x$. Однако это решение – не единственное: любая функция вида

$$y=Ce^x, \qquad (3)$$

где C – постоянная, также является решением данного уравнения. Вскоре мы установим, что никаких других решений, кроме (3), данное уравнение не имеет. В этом смысле формула (3) определяет **общее решение** уравнения (2).

Поскольку в выражение (3) для y входит произвольная постоянная C, то говорят, что **множество решений уравнения (2) зависит от одной произвольной постоянной C.**

Определение. Придавая C определенное числовое значение, мы будем получать конкретные или, как говорят, **частные решения** уравнения (2).

В качестве другого примера рассмотрим уравнение второго порядка

$$y''=0\,. \qquad (4)$$

Все решения этого уравнения могут быть найдены непосредственно. Из соотношения (4) находим $y'=C_1$ и далее

$$y=C_1x+C_2, \qquad (5)$$

где C_1 и C_2 – постоянные. Обратно, при любых значениях постоянных C_1 и C_2 функция $y = C_1 x + C_2$ является решением уравнения (4). Таким образом, формула (5) определяет общее решение уравнения (4). Как видим, оно зависит от двух произвольных постоянных C_1 и C_2. При конкретных значениях C_1 и C_2 будем получать частные решения.

Понятия общего и частного решений дифференциального уравнения в дальнейшем будут уточнены. Однако одно важное обстоятельство можно отметить уже сейчас, исходя из приведенных примеров. А именно: общее решение зависит от стольких произвольных постоянных, каков порядок уравнения. Частные же решения получаются из общего при конкретных значениях этих постоянных.

Определение. Процесс отыскания решений дифференциального уравнения называют **интегрированием этого уравнения.**

В зависимости от контекста несколько расплывчатый термин «интегрирование» может означать либо отыскание общего решения, либо нахождение того или иного частного решения.

2. Дифференциальные уравнения первого порядка

2.1. Уравнение вида $y' = f(x, y)$ *и его геометрический смысл*

Наиболее общий вид дифференциального уравнения первого порядка есть

$$F(x,\ y,\ y') = 0.$$

Если это уравнение разрешить относительно y', то оно запишется в виде

$$y' = f(x, y). \tag{6}$$

Такое уравнение мы и будем сейчас рассматривать.

Укажем, прежде всего, геометрический смысл уравнения (6). Возьмем какую-либо точку (x_0, y_0), принадлежащую области определения $\mathcal{D}$ функции $f(x, y)$. Пусть $y = \phi(x)$ – решение уравнения (6), график которого проходит через эту точку (т.е. $y_0 = \phi(x_0)$). Чтобы найти значение производной

$\phi'(x_0)$, совсем необязательно знать функцию $\phi(x)$, так как согласно уравнению (6) должно выполняться равенство

$$\phi'(x_0) = f(x_0, y_0).$$

Таким образом, угловой коэффициент кривой $y = \phi(x)$, проходящей через точку (x_0, y_0) и являющейся решением уравнения (6), равен (при $x = x_0$) числу $f(x_0, y_0)$.

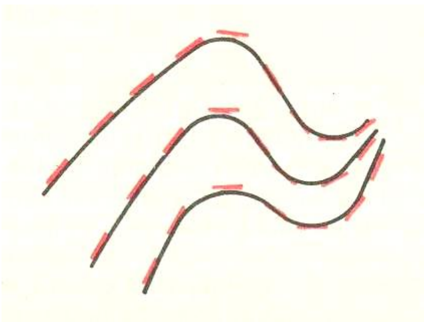


Рис. 1

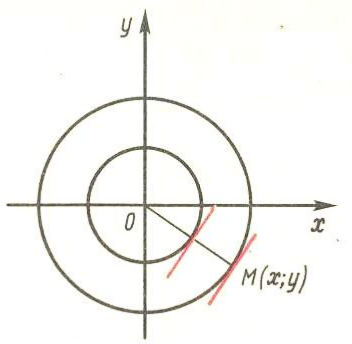


Рис. 2

Определение. Построим теперь для каждой точки (x_0, y_0) области $\mathcal{D}$ прямую, проходящую через эту точку и имеющую угловой коэффициент, равный $f(x_0, y_0)$. Будем говорить, что эта **прямая задает направление в точке** (x_0, y_0).

Функция $y = \phi(x)$ тогда и только тогда является решением уравнения (6), когда ее график в каждой своей точке имеет значение в этой точке направление, т.е. касается прямой, построенной для этой точки.

Определение. Пусть $\mathcal{D}$ – множество точек на плоскости. Говорят, что на этом множестве задано **поле направлений,** если для каждой точки

$M \in \mathcal{D}$ указана некоторая прямая $l(M)$, проходящая через эту точку.

Определение. Кривая γ, которая в каждой своей точке M, имеет направление поля (т.е. касается прямой $l(M)$), называется **интегральной кривой** данного **поля направлений.** В случае, когда поле направлений отвечает дифференциальному уравнению (6), кривая γ называется **интегральной кривой уравнения (6).**

Обычно вместо прямой $l(M)$ рисуют маленький отрезок («штрих»), проходящий через M. На рис. 1 изображены некоторое поле направлений и три интегральные кривые этого поля.

Пример 1. Описать геометрически поле направлений для уравнения

$$y' = -\frac{x}{y}. \qquad (7)$$

Решение

Правая часть уравнения определена на множестве $\mathcal{D}$, состоящем из всех точек (x, y), где $y \neq 0$**;** следовательно, уравнение задает на этом множестве поле направлений. Что касается точек, не принадлежащих $\mathcal{D}$, т.е. точек вида $(x,0)$, то при $x \neq 0$ естественно считать, что и в таких точках уравнение задает определенное направление, а именно – направление, параллельное оси Oy (поскольку в этих точках $y' = \infty$). Таким образом, данное уравнение определяет поле направлений во всей плоскости, за исключением единственной точки $(0,0)$. Это поле имеет простой геометрический смысл. Если $M(x, y)$ – точка, отличная от начала координат O, то прямая OM имеет угловой коэффициент $k = \frac{y}{x}$, перпендикулярная же ей прямая, проходящая через M, имеет угловой коэффициент – $k = -\frac{x}{y}$, что в силу (7) совпадает с y'. Таким образом, в каждой точке M, отличной от начала, направление поля перпендикулярно прямой OM (рис. 2).

Продолжим обсуждение примера. Из данного выше описания для направлений, соответствующего уравнению (7), ясно, что интегральные кривые поля представляют собой окружности с центром в начале координат, к тому же заключению придем, решая данное уравнение непосредственно:

$$y' = -\frac{x}{y} \Leftrightarrow yy' + x = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(y^2\right)' + \frac{1}{2}\left(x^2\right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = C.$$

Мы получили уравнение вида $x^2 + y^2 = 2C,$ определяющее (при $C > 0$) окружность с центром в начале координат. В данном случае решение дифференциального уравнения привело к соотношению вида $F(x; y) = 0,$ определяющему y как функцию от x неявно.

2.2. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения

Мы уже отмечали, что дифференциальное уравнение имеет, как правило, бесконечное множество решений. Чтобы из этого множества выделить какое-то конкретное решение, необходимо задать дополнительное условие.

Определение. Чаще всего такое условие ставится в форме следующей задачи, называемой **задачей Коши:**

Требуется найти решение $y(x)$ уравнения $y' = f(x, y)$ которое при заданном значении x_0 аргумента x принимает заданное значение y_0. Иначе говоря, требуется найти решение уравнения при **начальном условии** $y\big|_{x=x_0} = y_0$.

Ясно, что через каждую точку (x_0, y_0) должна проходить единственная интегральная кривая, т.е. задача Коши должна иметь единственное решение. Как правило, дело обстоит именно так. Однако возможны и такие случаи, когда задача Коши не имеет решения либо имеет не одно, а много решений. Чтобы гарантировать существование и единственность решения задачи Коши, следует подчинить функцию $f(x, y)$ некоторым ограничениям. Точная формулировка этих ограничений дается в следующей теореме Коши.

Теорема ***(о существовании и единственности решения задачи Коши).*** Если в некоторой окрестности начальной точки (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ определена, непрерывна и имеет непрерывную частную производную $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, то существует такая окрестность точки (x_0, y_0), в которой задача Коши для уравнения $y' = f(x,y)$ с начальным условием $y\big|_{x=x_0} = y_0$, имеет решение, и притом единственное.

Доказательство опускаем**.**

Пример 2. Применим теорему к уравнению

$$y' = \sqrt[3]{y^2}\ .$$

Здесь $f(x,y) = \sqrt[3]{y^2}$. Функция f определена на всей плоскости Oxy, однако ее частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}$ определена и непрерывна лишь в точках, где $y \neq 0$. Согласно теореме Коши, для каждой такой точки (x_0, y_0) существует окрестность, в которой задача Коши с начальным условием $y\big|_{x=x_0} = y_0$, имеет решение, и притом единственное. Более подробное обсуждение этого примера будет дано в п.п. 2.7 настоящего параграфа.

2.3. Уточнение понятий общего и частного решений

Определение. Если задание начальной точки (x_0, y_0) определяет единственное решение уравнения $y' = f(x,y)$, то такое решение называется **частным решением.**

Иначе говоря, частное решение – это решение, однозначно определяемое начальным условием.

Определение. Множество всех частных решений называется **общим решением** дифференциального уравнения.

Обычно общее решение записывается в виде $y = \phi(x, C)$, где C – произвольная постоянная. Задание начального условия позволяет определить значение постоянной C; она находится из равенства $y_0 = \phi(x_0, C)$**.**

В некоторых случаях процесс решения уравнения приводит не к явному выражению $y = \phi(x, C)$ для общего решения, а к соотношению вида $\Phi(x, y, C) = 0$, определяющему y как неявно заданную функцию от x.

Определение. Общим интегралом уравнения $y' = f(x, y)$ называется соотношение $\Phi(x, y, C) = 0$ (где C – произвольная постоянная), из которого при различных значениях C получаются все частные решения уравнения.

Пример 3. Для уравнения $y' = y$ условия теоремы о существовании и единственности решения выполняются во всей плоскости Oxy. Формула $y = Ce^x$ дает общее решение, так как любое начальное условие $y\big|_{x=x_0} = y_0$ удовлетворяется при подходящем выборе постоянной C. Действительно, для определения C имеем равенство $y_0 = Ce^{x_0}$ откуда $C = y_0 e^{-x_0}$.

Пример 4. Для уравнения $y' = -\dfrac{x}{y}$ условия теоремы о существовании и единственности решения выполнены во всей плоскости, за исключением точек оси Ox (где $y = 0$). Выше мы установили, что общий интеграл имеет вид $x^2 + y^2 = C$. Каковы бы ни были числа x_0 и y_0, где $y_0 \neq 0$ существует такое значение постоянной C (а именно, $C = x_0^2 + y_0^2$), при котором функция $y(x)$, заданная неявно уравнением $x^2 + y^2 = C$ удовлетворяет условию $y\big|_{x=x_0} = y_0$.

В связи со сказанным можно внести некоторые уточнения в формулировку задачи о решении дифференциального уравнения. Слова «решить уравнение» обычно означают нахождение общего решения (или общего интеграла).

2.4. Уравнения с разделяющимися переменными

Наиболее простой тип дифференциального уравнения первого порядка – это уравнение вида

$$y' = f(x), \tag{8}$$

которое решается простым интегрированием обеих частей уравнения:

$$y = \int f(x)dx.$$

Если $F(x)$ – какая-либо первообразная функция для $f(x)$, то общее решение запишется в виде $y = F(x) + C$.

Определение. Рассмотрим теперь одно важное обобщение уравнения (3) – так называемое **уравнение с разделяющимися переменными.** Это – дифференциальное уравнение вида

$$y' = p(x)\, q(y), \tag{9}$$

где правая часть есть произведение функции от x на функцию от y (если функция $q(y)$ постоянна, то получается уравнение вида (8).

Запишем уравнение (9) в виде

$$\frac{dy}{dx} = p(x)\, q(y).$$

Предполагая, что в рассматриваемой области изменения величины y выполняется условие $q(y) \neq 0$ перепишем уравнение (9) следующим образом:

$$\frac{dy}{q(y)} = p(x)\, dx. \tag{10}$$

Теперь левая часть содержит только y, а правая – только x, т.е. переменные, как принято говорить, разделены. Интегрируя обе части уравнения (10), получим

$$\int \frac{dy}{q(y)} = \int p(x)\, dx.$$

Если $Q(y)$ – какая-нибудь первообразная функция для $\dfrac{1}{q(x)}$, а $P(x)$– первообразная для $p(x)$, то последнее равенство можно записать в виде соотношения $Q(y) = P(x) + C,$ дающего, таким образом, общий интеграл уравнения (9).

Замечания

1. Операция интегрирования обеих частей уравнения (10) нуждается в некотором обосновании, поскольку мы интегрируем, казалось бы, по разным переменным (левую часть по y, правую по x). Однако если интегрировать

обе части, предполагая, что $y = y(x)$, то операция станет законной. В этом случае из (10) получаем

$$\int \frac{y' dx}{q(y)} = \int p(x)\, dx,$$

после чего от записи $\int \frac{y' dx}{q(y)}$ можно перейти к $\int \frac{dy}{q(y)}$ используя правило замены переменной в неопределенном интеграле.

2. Если ищется не общее, а частное решение уравнения (9), удовлетворяющее начальному условию $y\big|_{x=x_0} = y_0$, то неопределенное интегрирование в (10) можно заменить определенным; тогда получим

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{q(y)} = \int_{x_0}^{x} p(x)\, dx.$$

3. Если при некотором значении y_0 имеем $q(y_0) = 0$, то отыскание решения $y(x)$, удовлетворяющего условию $y(x_0) = y_0$, указанным выше методом невозможно. Однако в этом случае решением является функция $y(x)$, тождественно равная y_0. Действительно, тогда производная y' равна нулю, но и произведение $p(x)q(y_0)$ также равно нулю.

Пример 5. Найти все решения уравнения $y' = y^2$.

Решение

Это уравнение с разделяющимися переменными. Предполагая $y \neq 0$, можем записать

$$\frac{dy}{y^2} = dx, \tag{11}$$

откуда следует $-\frac{1}{y} = x + C$ или $y = -\frac{1}{x + C}$. Это общее решение уравнения. К нему следует добавить решение $y = 0$ (потерянное при переходе к уравнению (11)).

Пример 6. Решить уравнение $y' = \sin(x + y)$.

Решение

Данное уравнение не является уравнением с разделяющимися переменными, но оно приводится к нему заменой неизвестной функции $y(x)$ на $u(x) = x + y(x)$. Тогда $u' = 1 + y'$ и уравнение принимает вид $u' - 1 = \sin u$ или $u' = 1 + \sin u$. Предполагая $1 + \sin u \neq 0$, запишем это уравнение в виде

$$\frac{du}{1 + \sin u} = dx, \qquad (12)$$

т.е. получим уравнение с разделяющимися переменными.

Интегрируя обе части равенства (12), имеем

$$\int \frac{du}{1 + \sin u} = x + C.$$

Чтобы найти интеграл, записанный слева, используем подстановку $tg\frac{u}{2} = v$. Получаем

$$t\int \frac{du}{1 + \sin u} = \int \frac{2dv}{(1 + v)^2} = -\frac{2}{1 + v} = -\frac{2}{1 + tg\frac{u}{2}}.$$

Таким образом, общий интеграл уравнения (12) имеет вид

$$-\frac{2}{1 + tg\frac{u}{2}} = x + C.$$

Подставляя вместо функции u ее выражение $x + y$, находим

$$x + \frac{2}{1 + tg\frac{x + y}{2}} + C = 0. \qquad (13)$$

Это соотношение не охватывает тех решений y, для которых $1 + \sin u = 0$ или, что то же самое, $\sin(x + y) = -1$. Для таких решений имеем

$$x + y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

Итак, данное уравнение имеет общий интеграл (13), а также решения

$$y = -x - \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

К уравнениям с разделяющимися переменными сводится ряд других типов дифференциальных уравнений первого порядка. Некоторые из них будут рассмотрены ниже.

2.5. Однородные уравнения

Определение. Однородным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right), \qquad (14)$$

правая часть которого зависит только от отношения $\frac{y}{x}$.

Чтобы решить уравнение (14), перейдем от неизвестной функции $y(x)$ к функции $u(x) = \frac{y(x)}{x}$. Тогда $y = xu$, $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$, и уравнение принимает вид

$$u + x\frac{du}{dx} = f(u) \qquad \text{или} \qquad \frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}.$$

Мы получили уравнение с разделяющимися переменными, которое решается уже известным способом:

$$\int \frac{du}{f(u)-u} = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

После нахождения $u(x)$ следует вернуться к функции $y(x) = xu(x)$.

Замечание. Если существуют такие значения u, для которых $f(u) = u$, то к найденным решениям добавляются еще решения вида $u(x) = u_0$, т.е. $y = u_0 x$, где u_0 – любой из корней уравнения $f(u) = u$.

Пример 7. Решить уравнение $y' = \frac{y+x}{y-x}$.

Решение

Это уравнение является однородным, так как

$$\frac{y+x}{y-x}=\frac{\frac{y}{x}+1}{\frac{y}{x}-1}=\frac{u+1}{u-1},$$

где $u=\frac{y}{x}$. Для функции u имеем уравнение

$$\frac{du}{\frac{u+1}{u-1}-u}=\frac{dx}{x} \qquad \text{или} \qquad \frac{(u-1)du}{-u^2+2u+1}=\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя обе части, получаем

$$-\frac{1}{2}\ln\left|-u^2+2u+1\right|=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln C,$$

где $C>0$ (произвольную постоянную для интеграла $\int\frac{dx}{x}$ удобно записать в виде $-\frac{1}{2}\ln C$), затем

$$\left|-u^2+2u+1\right|^{-1/2}=|x|\cdot\frac{1}{\sqrt{C}}$$

и, наконец,

$$x^2\left|1+2u-u^2\right|=C.$$

Знак модуля в последнем равенстве можно опустить вместе с ограничением на знак C. Возвращаясь к функции $y=xu$, получим

$$x^2+2xy-y^2=C. \qquad (15)$$

Это общий интеграл данного уравнения. Из полученного соотношения нетрудно выразить y через x и найти общее решение.

В данном примере существуют такие значения u, для которых $f(u)-u=0$; это корни уравнения $1+2u-u^2=0$, т.е. $u=1\pm\sqrt{2}$. Им соответствуют два решения $y=\left(1\pm\sqrt{2}\right)x$, которые можно получить из соотношения (15) при $C=0$.

2.6. Примеры применения дифференциальных уравнений в экономических исследованиях

С помощью дифференциальных уравнений решаются разнообразные задачи – физические, **экономические** и т.д. Укажем кратко общую схему решения задач с помощью дифференциальных уравнений.

Пусть требуется найти функцию $y = y(x)$, выражающую зависимость между двумя переменными величинами x и y. Зафиксируем значение x. Тогда любому приращению Δx будет отвечать определенное значение Δy. Зависимость Δy от Δx может носить в принципе сколь угодно сложный характер. Однако если ограничиться малыми значениями Δx, то эта зависимость приближенно является линейной, поскольку отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ близко к некоторому постоянному числу k (значению производной y', вычисленному в точке x). Таким образом, имеем приближенное равенство $\Delta y \approx k\Delta x$.

Коэффициент пропорциональности k может быть найден из условий задачи, для чего следует воспользоваться известными законами физики, механики, геометрии, экономики и т.д. (в зависимости от характера задачи). Во многих случаях оказывается, что значение этого коэффициента определяется только значениями самих величин x и y, т.е. $k = f(x, y)$. Тогда для неизвестной функции $y(x)$ получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Дальнейшая часть решения задачи оказывается уже чисто математической. Она сводится к нахождению общего решения $y = \phi(x, C)$ (или общего интеграла) полученного уравнения, а затем – к выделению определенного частного решения, поскольку задача содержит обычно те или иные дополнительные условия (например, начальные условия задачи Коши).

Пример 8. Полные издержки K есть функция объема производства x. Найти функцию издержек, если известно, что предельные издержки для всех значений x равняются средним издержкам.

Из условия задачи следует, что

$$\frac{dK}{dx} = \frac{K}{x} \text{ или } \frac{dK}{K} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получаем

$$\int \frac{dK}{dK} = \int \frac{dx}{x},$$

откуда

$$\ln|K| = \ln|x| + \ln|C|,$$

где

$$\ln|K| = \ln|Cx| + \ln C, \quad \text{или} \quad K = Cx,$$

и, наконец,

$$\frac{K}{x} = C.$$

Таким образом, средние издержки постоянны.

Пример 9. Предположим, что продавец имеет в данный период времени некоторый объем товара, который в течение этого периода не увеличивается за счет производства. Например, торговец зерном закупил урожай после уборки и в течение последующего года продает закупленную партию зерна с недельными интервалами вплоть до нового урожая. При данных запасах недельное предложение будет зависеть от ожидаемой цены в наступающей неделе и от предполагаемой динамики цены в последующие недели. Если в наступающей неделе предполагается понижение цены, а в последующие недели – повышение, то предложение будет сдерживаться, если ожидаемое повышение цен превышает издержки хранения. Предложение товара в ближайшую наступающую неделю будет тем меньшим, чем большее ожидаемое повышение цены. И наоборот, если торговец ожидает, что в течение наступающей недели цена будет высокой, а на следующей неделе она упадет, предложение увеличится тем больше, чем больше предполагаемое понижение цены.

Введем обозначение: цена товара в наступающей неделе – $p(t)$, тенденция формирования цены – $\frac{dp}{dt}$ (производная цены по времени). При данном запасе предложения для поступающей недели можно описать зависимостью:

$$x = \left(p,\ \frac{dp}{dt} \right).$$

Это так называемая **динамическая функция предложения.**

Пример 10. Цена товара A вначале составляла 36, а через t недель – $p(t)$. Спрос определяется уравнением

$$q = 120 - 2p + 5\frac{dp}{dt},$$

а предложение

$$s = 3p - 30 + 50\frac{dp}{dt},$$

где q и s выражены в тыс. единиц.

Условие равновесия состоит в том, чтобы

$$120 - 2p + 5\frac{dp}{dt} = 3p - 30 + 50\frac{dp}{dt},$$

откуда

$$-45\frac{dp}{dt} = 5p - 150$$

и, следовательно,

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{1}{9}(p - 30),$$

откуда

$$\frac{dp}{p - 30} = -\frac{1}{9}dt.$$

Интегрируя, получаем:

$$\int \frac{dp}{p - 30} = -\int \frac{dt}{9}, \qquad \text{или} \qquad \ln|p - 30| = -\frac{1}{9}t + \ln C,$$

откуда

$$\ln\left|\frac{p-30}{C}\right| = -\frac{1}{9}t, \quad \text{или} \quad \ln\left|\frac{p-30}{C}\right| = e^{-\frac{1}{9}t}$$

и, наконец,

$$p = Ce^{-\frac{1}{9}t} + 30.$$

Из условия задачи следует, что $p = 36$ для $t = 0$. Отсюда $36 = Ce^0 + 30$, или $C = 6$.

Следовательно, чтобы для каждого значения t сохранилось равновесие, цена товара A должна изменяться по формуле

$$p = 6e^{-\frac{1}{9}t} + 30.$$

2.7. Понятие об особых точках и особых решениях дифференциального уравнения

В п. 2.2. была сформулирована теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения $y' = f(x,\ y)$. Условием, гарантирующим как существование решения, так и его единственность, является непрерывность функции $\frac{\partial f}{\partial y}$. В отдельных точках это условие может нарушаться; через такие точки может не проходить ни одной интегральной кривой или проходить несколько интегральных кривых.

Определение. Точки, через которые не проходит ни одна интегральная кривая или проходит более одной интегральной кривой, называются **особыми точками** данного дифференциального уравнения.

Определение. Может случиться, что некоторая интегральная кривая уравнения состоит из одних особых точек. Такая кривая называется **особым решением** уравнения.

Пример 11. Для уравнения

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2} \qquad (16)$$

функция $f(x,\ y) = 3y^{2/3}$ определена и непрерывна на всей плоскости Oxy. Ее частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{y}}$ существует и непрерывна во всех точках, где $y \neq 0,$ т.е. во всех точках, не принадлежащих оси Ox. Таким образом, через любую точку, не лежащую на оси Ox, проходит единственная интегральная кривая уравнения. Чтобы выяснить, как обстоит в этом смысле дело с точками оси Ox, проинтегрируем данное уравнение. Имеем

$$\frac{dy}{3y^{2/3}} = dx,$$

откуда следует $y^{1/3} + C = x$ или $y = \left(x - C\right)^3$.

Итак, общее решение представляет собой семейство кубических парабол. Однако имеется еще одно решение $y\left(x\right) = 0$. Следовательно, через любую точку $(C,0)$ оси Ox проходят, по крайней мере, две интегральные кривые: ось Ox и парабола $y = \left(x - C\right)^3$. Это показывает, что точки оси Ox являются особыми точками уравнения (16), а функция $y \equiv 0$ – особым решение.

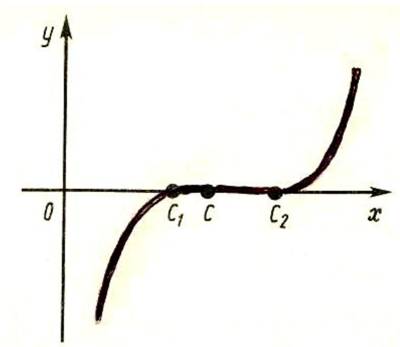


Рис. 3

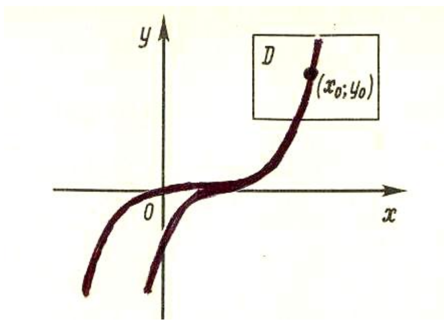


Рис. 4

Нетрудно установить, что через любую точку вида $(C,0)$ проходит в действительности бесчисленное множество интегральных кривых. Любую из них можно составить из трех кусков: «нижней» половины параболы

$y=(x-C)^3$, где C_1 – число, меньшее или равное C (рис. 3), отрезка $[C_1, C_2]$ оси Ox, где $C_2 > C_1$, и «верхней» половины параболы $y=(x-C)^3$.

Из этого примера можно понять, почему в формулировке теоремы Коши мы были вынуждены говорить о существовании и единственности решения лишь в некоторой окрестности начальной точки (x_0, y_0), а не во всей области существования функции $f(x,y)$. В самом деле, пусть точка (x_0, y_0) не является особой для уравнения (16), т.е. $y_0 \neq 0$. Если взять столь малую окрестность точки (x_0, y_0), чтобы она не пересекала ось Ox, то внутри такой окрестности через точку (x_0, y_0) будет проходить единственная кубическая парабола вида $y=(x-C)^3$. Однако если взять достаточно большую окрестность (например, всю плоскость Oxy), то окажется, что внутри такой окрестности через точку (x_0, y_0) проходит бесчисленное множество интегральных кривых. Любую из них можно составить указанным выше способом из трех кусков, один из которых проходит через точку (x_0, y_0) (рис. 4).

3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли

3.1. Линейное уравнение первого порядка

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка $F(x, y, y')=0$ называется **линейным,** если его левая часть линейно зависит от y и y'.

Таким образом, линейное уравнение имеет вид

$$\alpha(x)y' + \beta(x)y + \gamma(x) = 0.$$

Предполагая, что $\alpha(x) \neq 0,$ и разделив обе части на $\alpha(x)$ приведем уравнение к виду

$$y' + p(x)y = f(x), \tag{17}$$

где $\quad p(x)=\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}, \quad f(x)=-\dfrac{\gamma(x)}{\alpha(x)}.$

Интегрирование уравнения (17) обычно проводят в два этапа. Сначала находят общее решение уравнения

$$y'+p(x)y=0, \tag{18}$$

получаемого из уравнения (17) заменой функции $f(x)$, стоящей в правой части, нулем.

Определение. Уравнение (18) называется **линейным однородным**[*] уравнением, соответствующим уравнению (1); в противоположность этому само уравнение (17) называется (в случае, когда $f(x)\neq 0$) **неоднородным.**

После того как получено общее решение однородного уравнения, находят какое-либо частное решение $y_*(x)$, неоднородного уравнения (17). Тогда общее решение уравнения (17) можно получить с помощью следующей теоремы.

Теорема. Общее решение неоднородного уравнения (17) есть сумма частного решения $y_*(x)$, этого уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения (18).

Доказательство. Прежде всего, убедимся, что сумма $y_*(x)$ и любого решения $y_0(x)$ однородного уравнения также является решением уравнения (17). Положим, $y(x)=y_0(x)+y_*(x).$ Тогда

$$y'+p(x)y=(y_0'+y_*')+p(x)(y_0+y_*)=$$
$$=(y_0'+p(x)y_0)+(y_*'+p(x)y_*)=$$
$$=0+f(x)=f(x),$$

что и требовалось установить.

Теперь остается показать, что всякое решение $y(x)$ неоднородного уравнения есть сумма $y_*(x)$, и некоторого решения $y_0(x)$, однородного

---

[*] Не следует смешивать с однородным уравнением в смысле п. 2.5.

уравнения; иначе говоря, что разность $y(x)-y_*(x)$ является решением однородного уравнения. Имеем

$$(y-y_*)'+p(x)(y-y_*)=$$
$$=(y+p(x)y)-(y_*'+p(x)y_*)=f(x)-f(x)=0,$$

что и завершает доказательство теоремы.

Решим однородное уравнение (18). Оно представляет собой уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{y}=-p(x)\,dx$$

и его общее решение имеет вид

$$y=Ce^{-P(x)}, \tag{19}$$

где $P(x)$ обозначает одну из первообразных для функции $p(x)$.

Теперь найдем частное решение уравнения (17). Воспользуемся для этого приемом, который называется **вариацией произвольной постоянной**. А именно, будем искать решение $y_*\left(x\right),$ уравнения (17) в виде произведения:

$$y_*(x)=u(x)e^{-P(x)},$$

которое получается из (19) заменой постоянной C некоторой функцией $u(x)$ (отсюда и название «вариация произвольной постоянной»). Подставляя это выражение для $y_*\left(x\right),$ в уравнение (17), для неизвестной функции $u(x)$ получим уравнение

$$u'e^{-P(x)}-uP'(x)e^{-P(x)}+p(x)ue^{-P(x)}=f(x).$$

Поскольку $P'(x)=p(x),$ второе и третье слагаемое в левой части взаимно уничтожаются, и для функции u получается уравнение

$$u'e^{-P(x)}=f(x) \quad \text{или} \quad \frac{du}{dx}=f(x)e^{P(x)},$$

из которого следует $u(x)=\int f(x)e^{P(x)}dx$ (одна из первообразных).

Пример 12. Решить уравнение

$$y' - 2xy = 2x. \tag{20}$$

Решение

Это линейное уравнение. Соответствующее однородное уравнение имеет вид $y' - 2xy = 0$. Решая его, получаем

$$\frac{dy}{y} = 2x\,dx, \tag{21}$$

откуда

$$\ln|y| = x^2 + \ln C, \ (C > 0); \qquad y = \pm Ce^{x^2} = Ae^{x^2},$$

где постоянная A может быть как положительной, так и отрицательной или нулем (случай $A = 0$ позволяет учесть решение $y = 0$, потерянное при переходе к уравнению (21)).

Теперь находим частное решение $y_*(x)$, исходного уравнения в виде произведения:

$$y_*(x) = u(x)e^{x^2} = u(x)\,y_0(x),$$

где $y_0(x) = e^{x^2}$. Подставляя это выражение для $y_*(x)$, в уравнение (20), получим

$$u'y_0 + uy_0' - 2xy_0u = 2x$$

откуда, учитывая, что $y_0' - 2xy_0 = 0$, находим

$$u' = 2xe^{-x^2}.$$

Следовательно, $u = -e^{-x^2}$ (берем частное решение). Итак,

$$y_*(x) = -e^{-x^2} \cdot e^{x^2} = -1$$

(заметим, что это частное решение уравнения (20) можно было обнаружить непосредственно). Теперь на основании теоремы находим общее решение уравнения (20). Оно записывается в виде $y_*(x) + Cy_0(x)$, т.е. в виде $y(x) = -1 + Ce^{x^2}$.

3.2. Уравнение Бернулли

Метод, использованный выше для решения линейного уравнения, позволяет решать и некоторые нелинейные уравнения. В частности, с его помощью решается уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \tag{22}$$

называемое **уравнением Бернулли.**

Как и выше, сначала находим какое-нибудь решение $y_0(x)$ однородного уравнения $y' + p(x)y = 0;$ затем полагаем $y(x) = u(x)y_0(x).$ Подставляя это выражение в уравнение (22), для функции $u(x)$ получаем уравнение

$$u'(x)y_0(x) = q(x)\, u^n(x)\, y_0^n(x),$$

которое решаем как уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{du}{u^n} = q(x)\, y_0^{n-1}(x)\, dx.$$

Пример 13. Решить уравнение

$$y' + 2y = y^2 e^{2x}. \tag{23}$$

Решение

Сначала находим решение уравнения $y' + 2y = 0.$ В качестве такого решения можно взять функцию $y_0(x) = e^{-2x}$. Затем полагаем $y(x) = e^{-2x}u(x).$ Подставляя это выражение в уравнение (23), получаем

$$e^{-2x}u' = e^{-4x}e^{2x}u^2 \quad \text{или} \quad \frac{du}{u^2} = 1,$$

откуда $\dfrac{1}{u} = -x + C,$ или $u = \dfrac{1}{-x + C}$. Окончательно имеем

$$y(x) = u(x)y_0(x) = \frac{e^{-2x}}{C - x}.$$

Упражнения

1. Показать, что данная функция является решением данного дифференциального уравнения:

а) $y=(x+C)e^x$, $y'-y=e^x$; б) $y=-\frac{2}{x^2}$, $xy^2dx-dy=0$;

в) $x^2-xy+y^2=C$, $(x-2y)y'-2x+y=0$.

2. Решить задачу Коши:

а) $y'=\sin 5x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$; б) $\frac{dx}{dt}=3$, $x=1$ при $t=-1$.

3. Составить дифференциальное уравнение по заданному семейству интегральных кривых:

а) $y=Cx^2$;

б) семейство парабол, с вершиной в начале координат и осью, совпадающей с осью абсцисс.

4. Дано дифференциальное уравнение $y'=x^2$. Построить поле направлений.

5. Решить уравнение $\left(x-xy^2\right)dx+\left(y-yx^2\right)dy=0$. Имеет ли оно особые решения.

6. Найти частное решение уравнения $ydx+ctgxdy=0$, $y\big|_{x=\frac{\pi}{3}}=-1$.

7. Проинтегрировать следующие дифференциальные уравнения:

а) $\left(y^2+xy\right)dx-x^2dy=0$; б) $y'=\frac{xy^2-yx^2}{x^3}$, $y(-1)=1$;

в) $xy'-y+xe^{\frac{y}{x}}=0$.

8. Решить дифференциальные уравнения:

а) $y'+(tgx)y=\frac{1}{\cos x}$; б) $y'=\frac{y}{x+y^2}$; в) $xy'-4y=x^2\sqrt{y}$.

9. Решить задачу Коши:

$$e^x+y+\sin y+y'\left(e^y+x+x\cos y\right)=0,\quad y(\ln 2)=0.$$

10. Решить уравнение $\frac{y}{x}dx+\left(3y^2+\ln x\right)dy=0$.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется дифференциальным уравнением n-го порядка? В каком виде записывают дифференциальное уравнение n-го порядка? Приведите примеры дифференциальных уравнений.

2. Что называется решением дифференциального уравнения? С помощью простейших примеров разъясните понятие общего и частого решений.

3. Какой процесс называют интегрированием дифференциального уравнения? Что может означать термин «интегрирование»?

4. Приведите наиболее общий вид дифференциального уравнения первого порядка.

5. Приведите вид дифференциального уравнения первого порядка, разрешенный относительно y'. Укажите геометрический смысл этого уравнения.

6. Когда говорят, что на некотором множестве точек на плоскости задано поле направлений?

7. Что называется интегральной кривой дифференциального уравнения?

8. Приведите формулировку постановки задачи Коши для уравнения первого порядка, разрешенной относительно производной. Что называется начальным условием?

9. Сформулируйте теорему о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения первого порядка, разрешенной относительно производной.

10. Дайте (уточненные) определения понятий общего и частного решений.

11. Что называется общим интегралом уравнения?

12. Какое дифференциальное уравнение называется уравнением с разделяющимися переменными?

13. К уравнениям с разделяющимися переменными сводится ряд других типов дифференциальных уравнений первого порядка. Перечислите некоторые из них.

14. Что называется однородным дифференциальным уравнением первого порядка? Каким образом оно приводится к уравнению с разделяющимися переменными?

15. С помощью дифференциальных уравнений решаются разнообразные задачи – физические, экономические и т.д. Приведите краткую общую схему решения задач с помощью дифференциальных уравнений и примеры применения дифференциальных уравнений в экономических исследованиях.

16. Какие точки называются особыми точками данного дифференциального уравнения?

17. Что называется особым решением дифференциального уравнения?

18. Какое дифференциальное уравнение первого порядка называется линейным? Приведите два примера.

19. Какое линейное уравнение называется однородным? Какое линейное уравнение называется неоднородным?

20. Как можно получить общее решение неоднородного уравнения? Сформулируйте теорему.

21. Как находят частное решение неоднородного уравнения? Что называется вариацией произвольной постоянной?

22. Какое дифференциальное уравнение называется уравнением Бернулли? Как его решают?

§ 38. Дифференциальные уравнения второго порядка

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение второго порядка, дифференциальное уравнение второго порядка, разрешенное относительно производной второго порядка, начальные условия, задача Коши, линейное уравнение второго порядка, линейное однородное уравнение второго порядка, линейное неоднородное уравнение второго порядка, линейно независимые и линейно зависимые функции, определитель Вронского, фундаментальная система решений, вариация произвольных постоянных.*

1. Начальные условия

Дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид

$$F(x,\ y,\ y',\ y'')=0, \tag{1}$$

где $y(x)$ – неизвестная функция. К уравнениям второго порядка приводят, в частности, различные задачи механики. Пусть, например, материальная точка с массой m движется вдоль оси Ox, причем сила, действующая на точку, задана как функция времени: $F=F(t)$. Закон движения выражается с помощью функции $x=x(t)$, задающей положение точки на оси в произвольный момент времени t. Согласно второму закону Ньютона, имеем $ma=F$, где a – ускорение точки, т.е. $a=\dfrac{d^2x}{dt^2}$. Таким образом, функция $x(t)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{1}{m}F(t). \tag{2}$$

В более общем случае сила F может зависеть не только от момента времени t, но и от положения точки в момент t (таковы, например, сила тяготения или сила упругости), а также от ее скорости. Тогда $F=F\left(t,\ x,\ \dfrac{dx}{dt}\right)$, и вместо уравнения (2) имеем уравнение более общего вида

$$\frac{d^2x}{dt^2}=F\left(t,\ x,\ \frac{dx}{dt}\right). \tag{3}$$

Для дифференциального уравнения важное значение имеет вопрос о дополнительных условиях, позволяющих получить какое-то одно определенное решение уравнения. Какой характер могут носить эти условия для уравнения (3)? Возможный ответ на этот вопрос подсказывает рассмотренная выше механическая модель. Интуитивно ясно, что если задано положение точки в некоторый момент времени t_0, а также ее скорость в момент t_0, то дальнейшее движение точки однозначно определяется этими условиями. Поэтому имеются основания выбрать дополнительные условия в виде

$$x\big|_{t=t_0} = x_0, \ \frac{dx}{dt}\Big|_{t=t_0} = x_0',$$

где t_0, x_0, x_0' - заданные числа. Геометрически это означает, что ищется интегральная кривая уравнения (3), проходящая через заданную точку $(t_0;\ x_0)$ и имеющая в этой точке заданное направление, которое характеризуется угловым коэффициентом x_0' (рис. 1). Поставленная таким образом задача называется **задачей Коши** для уравнения (1).

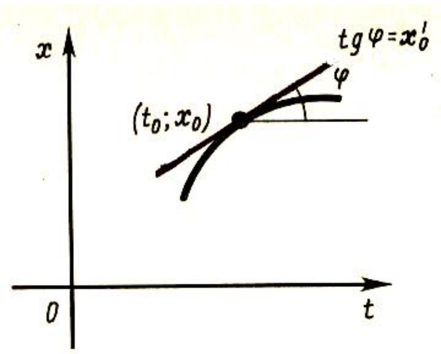


Рис. 1

В дальнейшем независимую переменную будем, как и ранее, обозначать через x, а неизвестную функцию – через y; таким образом, мы возвращаемся к записи уравнения второго порядка в форме (1) (а не в форме (3)).

Обычно уравнение (1) удается разрешить относительно y'', т.е. привести его к виду

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{4}$$

Сформулируем теорему о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения (4).

Теорема 1. Если в некоторой окрестности значений x_0, y_0, y'_0 функция $f(x, y, y'$ определена, непрерывна и имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{\partial f}{\partial y'}$, то существует такая окрестность точки $(x_0; y_0; y'_0)$ (в пространстве R^3), в которой задача Коши для уравнения (4) с начальными условиями $y\big|_{x=x_0} = y_0$, $y'\big|_{x=x_0} = y'_0$ имеет решение, и притом единственное.

Доказательство опускаем.

Как уже отмечалось в §37 (п.1.2), общее решение уравнения второго порядка зависит от двух произвольных постоянных, т.е. имеет вид $y = \phi(x, C_1, C_2)$. Это вполне согласуется с существованием и единственностью решения задачи Коши: из равенств $\phi(x_0, C_1, C_2) = y_0$, $\phi'(x_0, C_1, C_2) = y'_0$ вообще говоря, однозначно определяются значения C_1 и C_2, а значит, и частное решение уравнения (1).

Например, общее решение уравнения $y'' = 0$ имеет вид $y = C_1 x + C_2$. Таким образом, интегральные кривые представляют собой прямые на плоскости. Через данную точку $(x_0; y_0)$ плоскости в данном направлении, характеризуемом угловым коэффициентом y'_0, проходит интегральная кривая, и притом единственная.

В качестве другого примера рассмотрим уравнение $y'' + y = 0$. Нетрудно проверить, что оно имеет частные решения $y_1(x) = \cos x$ и $y_2(x) = \sin x$. Функция

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

при любых значениях постоянных C_1 и C_2 также является решением, поскольку

$$(C_1 y_1 + C_2 y_2)'' + (C_1 y_1 + C_2 y_2) =$$

$$= C_1(y_1'' + y_1) + C_2(y_2'' + y_2) = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0.$$

Это решение зависит от двух произвольных постоянных C_1 и C_2. Каковы бы ни были числа x_0, y_0, y_0' (начальные условия задачи Коши), существует единственная функция вида $C_1 \cos x + C_2 \sin x$, удовлетворяющая условиям $y\big|_{x=x_0} = y_0$ и $y'\big|_{x=x_0} = y_0'$. Например, если $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $y_0' = 1$, то для нахождения C_1 и C_2 имеем условия

$$y\big|_{x=x_0} = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 1, \quad y'\big|_{x=x_0} = -C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 = 1,$$

из которых следует $C_1 = 1$, $C_2 = 1$, т.е. $y = \cos x + \sin x$.

2. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

Определение. Дифференциальное уравнение второго порядка называется **линейным,** если оно имеет вид

$$\alpha(x) y'' + \beta(x) y' + \gamma(x) y = \delta(x),$$

где левая часть линейна по отношению к y, y', y''.

Предполагая, что $\alpha(x) \neq 0$, и разделив обе части уравнения на $\alpha(x)$, придем к уравнению

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = f(x). \tag{5}$$

Будем считать функции $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ непрерывными; согласно теореме 1 это обеспечивает существование и единственность решения задачи Коши для уравнения (5).

Определение. При рассмотрении уравнения (5) важную роль играет уравнение

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = 0, \tag{6}$$

которое называется **линейным однородным уравнением,** соответствующим уравнению (5).

Множество решений уравнения (6) обладает рядом особенностей, которые делают оправданным специальное изучение этого уравнения. Такое изучение будет проведено в п.3 и п. 4.

3. Линейно независимые и линейно зависимые функции. Определитель Вронского

Определение. Пусть $y_1(x), y_2(x), ..., y_k(x)$ – какие-то функции. Рассмотрим выражение

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_k y_k(x),$$

где $C_1, C_2, ..., C_k$ – постоянные числа. Любая функция $y(x)$ такого вида называется **линейной комбинацией** функций $y_1(x), y_2(x), ..., y_k(x)$.

Определение. Функции $y_1(x), y_2(x), ..., y_k(x)$ называются **линейно независимыми,** если ни одна из них не является линейной комбинацией остальных. В противном случае, т.е. если какая-то из данных функций может быть представлена как линейная комбинация остальных, эти функции называются **линейно зависимыми.**

Какими способами можно установить линейную независимость нескольких функций? Один из способов связан с так называемым **определителем Вронского.** Для системы, состоящей из двух функций $y_1(x), y_2(x)$, определитель Вронского имеет вид

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix},$$

для системы из трех функций $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ – вид

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y'' \end{vmatrix}$$

и т.д. Отметим, что, как и сами функции, $y_1(x), y_2(x), ..., y_k(x)$, так и их определитель Вронского являются функциями от x.

Теорема 2. Если функции $y_1(x), y_2(x), ..., y_k(x)$ линейно зависимы, то их определитель Вронского тождественно (т.е. при всех x) равен нулю.

Доказательство. Для сокращения записи положим $k = 3$. Пусть функции $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ линейно зависимы; например, пусть $y_3(x)$ есть линейная комбинация $y_1(x)$ и $y_2(x)$; $y_3 = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$. Тогда имеем

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \\ y_1' & y_2' & C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x) \\ y_1'' & y_2'' & C_1 y_1''(x) + C_2 y_2''(x) \end{vmatrix},$$

но такой определитель равен нулю, поскольку его третий столбец является линейной комбинацией первого и второго столбцов.

Следствие. Если $W(y_1(x), y_2(x), ..., y_k(x)) \neq 0$ (хотя бы при одном значении x), то функции $y(x) = C_1 y_1(x) + ... + C_k y_k(x)$. **линейно независимы.**

Заметим, что обратное утверждение, а именно: если $y_1(x), y_2(x), ..., y_k(x)$ линейно независимы, то $W(y_1(x), y_2(x), ..., y_k(x)) \neq 0$ вообще говоря, неверно.

4. Фундаментальная система решений и общее решение линейного однородного уравнения второго порядка

Займемся теперь подробно изучением однородного линейного уравнения

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \qquad (7)$$

Теорема 3. Линейная комбинация нескольких решений уравнения (7) также является решением этого уравнения.

Доказательство. Пусть каждая из функций $y_1(x), y_2(x), ..., y_k(x)$ является решением уравнения (7). Рассмотрим какую-нибудь линейную комбинацию этих функций:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + ... + C_k y_k(x).$$

Дифференцируя это равенство, находим

$$y' = C_1 y_1 + ... + C_k y_k', \quad y'' = C_1 y_1'' + ... + C_k y_k''.$$

Отсюда получим

$$y'' + p(x)y' + q(x) =$$

$$= (C_1 y_1'' + \cdots + C_k y_k'') + p(x)(C_1 y_1' + \cdots + C_k y_k') + q(x)(C_1 y_1 + \cdots + C_k y_k) =$$

$$= C_1(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + \cdots + C_k(y_k'' + p(x)y_k' + q(x)y_k) =$$

$$= C_1 \cdot 0 + ... + C_k \cdot 0 = 0,$$

т.е. функция $y(x)$ также является решением уравнения (7).

Теорема 4. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – два линейно независимых решения уравнения (7), то их определитель Вронского $W(y_1, y_2)$ ни при одном значении x не обращается в нуль.

Доказательство. Рассуждая от противного, допустим, что в некоторой точке x_0 справедливо равенство $W = 0$. Найдем такие два числа C_1 и C_2, не равные одновременно нулю, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{aligned} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = 0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = 0. \end{aligned} \qquad (8)$$

Искомые числа C_1 и C_2 обязательно существуют, так как определитель системы (8), имеющий вид

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix},$$

есть определитель Вронского $W(y_1, y_2)$ в точке x_0 и, следовательно, равен нулю. Далее, рассмотрим функцию

$$\phi(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

которая в силу теоремы 3 является решением уравнения (7). Имеем $\phi(x) \neq 0$: в противном случае тождественно по x выполнялось бы равенство $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0,$ что означало бы линейную зависимость функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ (здесь существенно используется тот факт, что C_1 и C_2 не равны одновременно нулю). Равенства (8) означают, что $\phi(x_0) = 0,$ $\phi'(x_0) = 0.$ Однако тем же начальным условиям удовлетворяет и другое решение уравнения (7), а именно, функция $y(x)$, тождественно равная нулю. Это противоречит единственности решения задачи Коши для уравнения (7). Таким образом, $W(y_1,\, y_2) \neq 0$ для всех x.

Из теорем 2 и 4 вытекает, что для любой пары решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (7) имеются только две возможности:

$y_1(x),$ $y_2(x)$ линейно зависимы, тогда (по теореме 2) $W(y_1,\, y_2) = 0$ при любом значении x;

$y_1(x),\ y_2(x)$ линейно независимы, тогда (по теореме 4) $W(y_1,\, y_2) \neq 0$ при любом значении x.

Мы располагаем теперь всем необходимым для доказательства следующей теоремы, занимающей центральное место в теории линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка.

Теорема 5 ***(о структуре множества всех решений однородного уравнения)***. Если два решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (7) линейно независимы, то любое решение уравнения можно представить в виде их линейной комбинации.

Доказательство. Пусть $\phi(x)$– произвольное решение уравнения (7). Выберем некоторое значение x_0 и обозначим числа $\phi(x_0)$ и $\phi'(x_0)$, соответственно, через y_0 и y_0'. Если мы докажем, что существует решение вида $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, удовлетворяющее начальным условиям $y\big|_{x=x_0} = y_0$, $y'\big|_{x=x_0} = y_0'$, то в силу единственности решения задачи Коши для уравнения (7) отсюда будет следовать $\phi(x) = y(x)$, т.е. что заданное решение $\phi(x)$ есть линейная комбинация решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

Для нахождения искомых чисел C_1 и C_2 имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) &= y_0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) &= y_0'. \end{aligned} \tag{9}$$

Эта система двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными $C_1,\ C_2$. Определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, равен

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix},$$

т.е. совпадает с определителем Вронского для функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ в точке x_0. Ввиду линейной независимости функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$, этот определитель отличен от нуля. Следовательно, решение C_1, C_2 системы (9) существует.

Определение. Набор из двух линейно независимых решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (7) называется **фундаментальной системой решений** этого уравнения.

Согласно предыдущему, для фундаментальности системы $y_1(x), y_2(x)$ необходимо и достаточно выполнение условия $W(y_1, y_2) \neq 0$. Используя данное определение, теорему 5 можно сформулировать по-другому. Ее новая формулировка выглядит так: **если $y_1(x), y_2(x)$ – какая-либо фундаментальная система решений однородного уравнения (7), то общее решение уравнения имеет вид $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.**

Пример 1. Для уравнения $y'' - y = 0$ функции $y_1(x) = e^x$ и $y_2(x) = e^{-x}$ являются частными решениями. Эти решения линейно независимы (образуют фундаментальную систему), так как их определитель Вронского

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2$$

отличен от нуля. Следовательно, общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Пример 2. Для уравнения $y'' + y = 0$ очевидными частными решениями являются функции $y_1(x) = \cos x$ и $y_2(x) = \sin x$. Их определитель Вронского

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1;$$

следовательно, $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы. Общее решение есть

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y'' - y' + \dfrac{1}{x} y = 0.$

Решение

В данном случае одним из решений является функция $y_1 = x$. Будем искать второе частное решение с помощью подстановки $y = y_1 u$, где u – новая неизвестная функция (можно показать, что такой способ нахождения второго решения применим к любому линейному уравнению). Имеем

$$y' = u + xu', \qquad y'' = 2u' + xu'';$$

уравнение принимает вид

$$2u' + xu'' - u - xu' + u = 0, \text{ или } \; xu'' + (2-x)u' = 0.$$

Так как в полученное уравнение входит не сама неизвестная функция u, а лишь ее производные, то можно понизить порядок уравнения с помощью подстановки $v = u'$. Получим

$$xv' + (2-x)v = 0, \text{ или } \; \frac{dv}{v} = \frac{x-2}{2}dx,$$

откуда $v = \dfrac{e^x}{x^2}$. Следовательно, $u = \int v dx = \int \dfrac{e^x}{x^2} dx$, и искомое решение

$y_2(x) = x\int \dfrac{e^x}{x^2}\, dx$. Линейная независимость $y_1(x)$ и $y_2(x)$ очевидна. Общее решение данного уравнения имеет вид

$$y(x) = C_1 x + C_2 x\int \frac{e^x}{x^2}\, dx$$

(написанный справа интервал не выражается в элементарных функциях).

5. Решение неоднородного уравнения методом вариации произвольных постоянных

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \tag{10}$$

Соответствующее ему однородное уравнение (7) было подробно изучено в предыдущем пункте.

Пусть нам известна какая-то фундаментальная система частных решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ однородного уравнения. Тогда общее решение однородного уравнения, как мы знаем, имеет вид $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$. Для отыскания же общего решения уравнения (10) теперь достаточно найти какое-нибудь частное решение этого уравнения. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 6. Общее решение неоднородного уравнения (10) есть сумма частного решения $y_*(x)$ этого уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения (7).

Доказательство этой теоремы ничем не отличается от доказательства аналогичной теоремы из § 30 (п.п. 3.1).

Итак, требуется найти частное решение уравнения (10). Будем искать такое решение в виде

$$y_* = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x),$$

т.е. в виде линейной комбинации функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$, но не с постоянными коэффициентами C_1 и C_2, а с переменными коэффициентами $u_1(x)$ и $u_2(x)$ (отсюда и название «метод вариации постоянных»). Так как одно уравнение связывает две неизвестные функции (u_1 и u_2), то имеется возможность по ходу решения наложить на функции u_1 и u_2 еще одно ограничение, чем мы вскоре и воспользуемся. Дифференцируя равенство $y_* = u_1y_1 + u_2y_2$, находим

$$y_*' = u_1y_1' + u_2y_2' + u_1'y_1 + u_2'y_2.$$

Используем теперь возможность, о которой говорилось выше: введем ограничение на выбор неизвестных функций u_1 и u_2. В качестве такого ограничения примем условие

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0.$$

Тогда получим

$$y_*' = u_1y_1' + u_2y_2'.$$

Дифференцируя еще раз, имеем

$$y_*'' = u_1y_1'' + u_2y_2'' + u_1'y_1' + u_2'y_2'.$$

Подставляя теперь выражения для $y,\ y', y''$ в уравнение (10), после очевидных преобразований получим

$$u_1(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + u_2(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2) + u_1'y_1' + u_2'y_2' = f(x).$$

Оба выражения, заключенные в скобки, равны нулю, так как y_1 и y_2 являются решениями однородного уравнения. Следовательно, приходим к соотношению

$$u_1'y_1' + u_2'y_2' = f(x).$$

Итак, неизвестные функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{aligned} u_1'y_1 + u_2'y_2 &= 0, \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' &= f(x). \end{aligned} \tag{11}$$

Пользуясь тем, что определитель из коэффициентов при $u_1(x)$ и $u_2(x)$, равный

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix},$$

есть определитель Вронского для функций $y_1(x), y_2(x)$ и потому отличен от нуля (по условию $y_1(x)$ и $y_2(x)$ образуют фундаментальную систему решений однородного уравнения), находим из соотношений (11) функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$. Затем простым интегрированием находим сами функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$, а вслед за ними и искомое решение $y_* = u_1y_1 + u_2y_2$.

Пример 4. Найти частное решение уравнения

$$y'' - \frac{y'}{x} = 1 \quad (x > 0),$$

используя тот факт, что однородное уравнение $y'' - \dfrac{y'}{x} = 0$ имеет линейно независимые частные решения $y_1(x) = 1, \;\; y_2(x) = x^2$.

Решение

Представим искомое решение y в виде $y = u_1 \cdot 1 + u_2 x^2$. Для нахождения u_1 и u_2 имеем систему уравнений (11), которая в данном случае принимает вид

$$u_1' + u_2' x^2 = 0,$$
$$u_2' \cdot 2x = 1.$$

Отсюда $u_2' = \frac{1}{2x}$, $u_1' = -\frac{1}{2}x$; следовательно,

$$u_2 = \frac{1}{2}\ln x, \quad u_1 = -\frac{1}{4}x^2.$$

Искомое решение имеет вид $y_*(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln x.$

6. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

6.1. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение

Решение однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка требует знания какой-нибудь фундаментальной системы частных решений. Если коэффициенты уравнения не постоянны, т.е. действительно зависят от x, то нахождение такой системы представляет, вообще говоря, трудную задачу. Значительно проще обстоит дело в случае уравнения с постоянными коэффициентами, т.е. уравнения вида

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{12}$$

где p и q - постоянные. Для этого случая можно указать простой способ построения фундаментальной системы решений.

Будем искать частное решение уравнения (12) в виде показательной функции $y = e^{\lambda x}$. Дифференцируя дважды функцию y, получим $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$.

Подставляя выражения для функции y и ее производных в уравнение (12), приходим к соотношению

$$\left(\lambda^2 + p\lambda + q\right)e^{\lambda x} = 0.$$

Так как $e^{\lambda x} \neq 0$, то полученное соотношение равносильно уравнению

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \qquad (13)$$

Определение. Алгебраическое уравнение (13) называется характеристическим уравнением для дифференциального уравнения (12).

Дальнейшая схема построения фундаментальной системы решений для уравнения (12) такова. Алгебраическое уравнение (13) имеет два корня - действительных или комплексных. Обозначим их λ_1 и λ_2. Таким образом, каждая из функций $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ является решением уравнения (12). Если эти функции линейно независимы, то общее решение уравнения, согласно теореме 5 , имеет вид $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$. В случае линейной зависимости указанных функций необходимы дополнительные рассуждения. Более подробно этот вопрос будет обсужден в следующем подпункте.

6.2. Построение общего решения

Рассмотрим все случаи, которые могут представиться при решении характеристического уравнения (13).

Первый случай: корни λ_1 и λ_2 - действительные и различные. Соответствующие им решения $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ линейно независимы. Действительно, их определитель Вронского

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 x} \cdot e^{\lambda_2 x} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \left(\lambda_2 - \lambda_1\right) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x},$$

ввиду $\lambda_1 \neq \lambda_2$ отличен от нуля. Следовательно, y_1 и y_2 образуют фундаментальную систему решений.

Пример 5. Найти общее решение уравнения $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Решение

Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$. Его корнями являются числа $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 3$. Следовательно, имеем линейно независимые частные решения $y_1 = e^{2x}$ и $y_2 = e^{3x}$. Общее решение запишется в виде

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}.$$

Второй случай: корни λ_1 и λ_2 - комплексно сопряженные: $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ и $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, где $\beta \neq 0$. Соответствующие им комплексные решения обозначим z_1 и z_2:

$$z_1 = e^{(\alpha+\beta i)x}, \qquad z_2 = e^{(\alpha-\beta i)x}.$$

Они линейно независимы, поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Используя формулу Эйлера, можем записать

$$z_1 = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + i\sin\beta x\right), \qquad z_2 = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x - i\sin\beta x\right),$$

откуда видно, что при любом x функции z_1 и z_2 сопряжены. Составим линейные комбинации

$$y_1 = \frac{1}{2}\left(z_1 + z_2\right) = e^{\alpha x}\cos\beta x, \qquad y_2 = \frac{1}{2}\left(z_1 - z_2\right) = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Функции y_1 и y_2 являются действительными решениями уравнения (12). Эти решения также линейно независимы: в противном случае мы имели бы тождественное равенство $y_1 = Cy_2$ и (или $y_2 = Cy_1$), откуда следовала бы линейная зависимость между z_1 и z_2 . Итак, комплексно сопряженным корням $\alpha + \beta i$, $\alpha - \beta i$ характеристического уравнения можно сопоставить два линейно независимых частных решения $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Следовательно, общее решение имеет вид

$$y = C_1e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2e^{\alpha x}\sin\beta x = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right).$$

Пример 6. Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' + 5y = 0$.

Решение

Характеристическое уравнение есть $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$. Его корни $\lambda_1 = 2 + i$ и $\lambda_2 = 2 - i$. Таким образом, имеем частные решения $y_1 = e^{2x}\cos x$, $y_2 = e^{2x}\sin x$. Общее решение записывается в виде

$$y = e^{2x}\left(C_1\cos x + C_2\sin x\right).$$

Третий случай: корни λ_1 и λ_2 - равные, а значит, действительные. Будем рассуждать следующим образом (хотя это рассуждение и не имеет силы доказательства). Изменим незначительно коэффициенты p и q уравнения так, чтобы вместо двух равных корней λ_1 и λ_2 получились два неравных (но близких) корня λ_1^* и λ_2^*. Соответствующие решения $y_1 = e^{\lambda_1^* x}$ и $y_2 = e^{\lambda_2^* x}$ являются различными. Составим из них линейную комбинацию

$$\frac{e^{\lambda_2^* x} - e^{\lambda_1^* x}}{\lambda_2^* - \lambda_1^\bullet}. \tag{14}$$

Если теперь представить, что коэффициенты уравнения (12) возвращаются к своим прежним значениям, т.е. $\lambda_1^* \to \lambda_1$, $\lambda_2^* \to \lambda_2$, то из (14) в пределе получим решение

$$y(x) = \lim_{\substack{\lambda_1^\bullet \to \lambda_1 \\ \lambda_2^* \to \lambda_1}} \frac{e^{\lambda_2^* x} - e^{\lambda_1^* x}}{\lambda_2^* - \lambda_1^\bullet} \tag{15}$$

исходного дифференциального уравнения (12). Для нахождения правой части соотношения (15) воспользуемся тем, что по теореме Лагранжа для любых a и b имеет место равенство $e^a - e^b = (a-b)e^\xi$, где точка ξ находится между a и b. В частности, $e^{\lambda_2^* x} - e^{\lambda_1^* x} = \left(\lambda_2^* - \lambda_1^*\right)e^{\lambda x}$, где λ находится между λ_1^* и λ_2^*. Поэтому правая часть соотношения (15) равна $xe^{\lambda_1 x}$. Таким образом, кроме решения $e^{\lambda_1 x}$, имеем решение $xe^{\lambda_1 x}$.

Итак, равным корням $\lambda_1 = \lambda_2$ характеристического уравнения можно сопоставить два частных решения $e^{\lambda_1 x}$, $xe^{\lambda_1 x}$. Они линейно независимы (проверить это самостоятельно); следовательно, общее решение

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_2 x} = e^{\lambda_1 x}\left(C_1 + C_2 x\right).$$

Пример 7. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' + y = 0$.

Решение

Характеристическое уравнение есть $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$. Его корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Общее решение уравнения имеет вид

$$y == e^x \left(C_1 + C_2 x\right).$$

6.3. Неоднородное уравнение

Рассмотрим теперь уравнение

$$y'' + py' + qy = f\left(x\right), \tag{16}$$

где $f\left(x\right)$ - некоторая заданная функция; коэффициенты p и q по-прежнему считаем постоянными. Согласно теореме 6, для построения общего решения уравнения (16) достаточно найти какое-нибудь частное решение этого уравнения, а также общее решение соответствующего однородного уравнения. Поскольку второе мы уже умеем делать, задача сводится к нахождению частного решения уравнения (16).

Для решения этой задачи можно воспользоваться методом вариации произвольных постоянных. Однако во многих важных для практики случаях имеется и более простой способ. Он применим в случае, когда $f\left(x\right)$ есть функция вида $P\left(x\right)e^{\alpha x}$, где $P\left(x\right)$ - многочлен. Укажем суть этого способа, не вникая в его обоснование.

Первый случай: число α не является корнем характеристического уравнения. Тогда решение нужно искать в виде

$$y = Q\left(x\right)e^{\alpha x},$$

где $Q\left(x\right)$ - многочлен той же степени, что и $P\left(x\right)$. Записав $Q\left(x\right)$ в виде многочлена с неопределенными коэффициентами и подставив выражение для у в уравнение (16), после сокращения обеих частей на $e^{\alpha x}$ получаем равенство двух многочленов (из которых один есть $P\left(x\right)$). Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, получим систему уравнений, из которой найдем коэффициенты многочлена $Q(x)$.

Особо отметим два частных случая:

1) $f(x)=P(x)$, т.е. правая часть уравнения (16) представляет собой многочлен от x. В этом случае имеем $\alpha=0$; следовательно, если число 0 не является корнем характеристического уравнения, то решение ищем в виде $y=Q(x)$;

2) $f(x)=e^{\alpha x}$. Тогда $P(x)=1$ есть многочлен нулевой степени, а значит, $Q(x)=c=const$. Если при этом число α не является корнем характеристического уравнения, то решение ищем в виде $y=ce^{\alpha x}$.

Пример 8. Найти частное решение уравнения

$$y''-5y'+6y=(12x-55)e^{-x}.$$

Решение

В данном случае $\alpha=-1$. Корнями характеристического уравнения являются 2 и 3; число α не совпадает ни с одним из них. Поэтому решение ищем в виде $y=(ax+b)e^{-x}$. Дифференцируя выражение для y, находим

$$y'=\alpha e^{-x}-(ax+b)e^{-x}=(-ax+a-b)e^{-x},$$

$$y''=-\alpha e^{-x}-(-ax+a-b)e^{-x}=(-ax-2a+b)e^{-x}.$$

Подставляя y, y', y'' в уравнение и сокращая обе части на e^{-x}, приходим к тождественному равенству

$$(ax-2a+b)-5(-ax+a-b)+6(ax+b)=12x-55,$$

или

$$12ax-7a+12b=12x-55,$$

откуда

$$\begin{cases}12a=12,\\ -7a+12b=-55.\end{cases}$$

Решая эту систему, находим $a=1,\ b=-4$. Следовательно, искомое частное решение данного уравнения есть $y=(x-4)e^{-x}$.

Второй случай: один из корней характеристического уравнения равен α, а второй корень отличен от α. Тогда частное решение следует искать в виде

$$y=xQ(x)e^{\alpha x}.$$

Пример 9. Найти частное решение уравнения

$$y''-2y'-3y=(8x+10)e^{3x}.$$

Решение

Здесь $\alpha=3$. Корнями характеристического уравнения являются - 1 и 3, один из них совпадает с $\alpha=3$. Поэтому решение ищем в виде $y=x(ax+b)e^{3x}$.

Подставляя $y,\ y',\ y''$ в уравнение и сокращая обе части на e^{3x}, приходим к тождественному равенству

$$8ax+2a+4b=8x+10,$$

откуда

$$\begin{cases}8a=8,\\2a+4b=10.\end{cases}$$

Решая эту систему, находим $a=1,\ b=2$. Следовательно, искомое частное решение данного уравнения есть $y=x(x+2)e^{3x}$.

Третий случай: оба корня характеристического уравнения равны α. Тогда частное решение следует искать в виде

$$y=x^2Q(x)e^{\alpha x}.$$

Пример 10. Найти частное решение уравнения

$$y''+2y'+y=3e^{-x}.$$

Решение

Здесь $\alpha = -1$ и оба корня характеристического уравнения также равны -1. Поэтому решение ищем в виде $y = ax^2 e^{\alpha x}$. Проведя такие же вычисления, что и в примерах 8 и 9, получим $a = 1{,}5$. Искомое решение имеет вид $y = 1{,}5x^2 e^{\alpha x}$.

Упражнения

1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' = \frac{1}{1+x^2} + x - \sin x.$$

2. Найти частное решение данного дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y'' = \left(e^{2x} + \sin 3x\right)x, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 1.$$

3. Решить дифференциальное уравнение $y'' - y'ctgx = 2x\sin x$. Найти также частное решение, если $y = 1, \quad y' = 0$ при $x = \frac{\pi}{4}$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''tgy = 2\left(y'\right)^2$. Найти также частное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$y(1) = \frac{\pi}{4}, \qquad y'(1) = -2.$

5. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$\left(1 + yy'\right)y'' = \left(1 + \left(y'\right)^2\right)y',$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = y'(0) = 1$.

6. Установить линейную зависимость или независимость данных пар функций на областях их определения:

а) $x, \cos x$; б) $x, 2x$; в) $tgx, ctgx$.

7. Даны функции $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-2x}$. Составить однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, общее решение которого имеет вид $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$.

8. Найти общее решение уравнения $2y'' - 3y + y = 0$.

9. Найти общее решение уравнения $4y'' + 4y + y = 0$.

10. Найти общее решение уравнения $2y'' + y + 3y = 0$.

11. Найти частное решение уравнения $3y'' + 7y + 4y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1, \quad y'(0) = -\dfrac{2}{3}$.

12. Найти общее решение уравнения $y'' - 7y' = 5xe^x$, подбирая частное решение методом неопределенных коэффициентов.

13. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 6y' + 9y = (x-2)e^{-2x}.$$

14. Решить уравнение $y'' + 3y' + 2y = (2x+3)\sin x + \cos x$.

Вопросы для самопроверки

1. Приведите общий вид дифференциального уравнения второго порядка.

2. Приведите вид дифференциального уравнения второго порядка, разрешенный относительно y''.

3. Приведите формулировку постановки задачи Коши для уравнения второго порядка, разрешенной относительно производной. Что называется начальными условиями?

4. Сформулируйте теорему о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения второго порядка, разрешенной относительно производной второго порядка.

5. Какое дифференциальное уравнения второго порядка называется линейным?

6. Какие условия на коэффициенты линейного дифференциального уравнения второго обеспечивает существование и единственность решения задачи Коши для уравнения?

7. Какое линейное уравнение второго порядка называется однородным? Какое линейное уравнение второго порядка называется неоднородным?

8. Что называется линейной комбинацией функций $y_1(x), y_2(x), ..., y_k(x)$?

9. Когда заданные функции $y_1(x), y_2(x), ..., y_k(x)$ называются линейно независимыми, а когда линейно зависимыми?

10. Какими способами можно установить линейную независимость нескольких функций?

11. Что называется определителем Вронского из двух (из трех) функций?

12. Каким образом с помощью определителя Вронского можно установить линейную независимость нескольких функций? Сформулируйте теорему.

13. Каким рядом свойств обладает множество решений линейного однородного уравнения второго порядка? Перечислите их.

14. Сформулируйте теорему о структуре множества всех решений однородного уравнения, занимающей центральное место в теории линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка

15. Что называется фундаментальной системой решений линейного однородного уравнения второго порядка?

16. Используя определение фундаментальной системы решений, по-другому сформулируйте теорему о структуре множества всех решений однородного уравнения. Какой вид имеет общее решение линейного однородного уравнения второго порядка?

17. Как можно получить общее решение неоднородного уравнения второго порядка? Сформулируйте теорему.

18. Как находят частное решение неоднородного уравнения второго порядка? Что называется вариацией произвольных постоянных?

19. Что называется характеристическим уравнением линейного однородного уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами?

20. Какой вид имеет общее решение линейного однородного уравнения 2-го порядка в случае, когда его характеристическое уравнение имеет действительные корни?

21. Какой вид имеет общее решение линейного однородного уравнения 2-го порядка в случае, когда его характеристическое уравнение имеет комплексно-сопряженные корни?

20. Какой вид имеет общее решение линейного однородного уравнения 2-го порядка в случае, когда его характеристическое уравнение имеет кратный корень?

§39. Системы дифференциальных уравнений

Ключевые слова: *система дифференциальных уравнений, задача Коши для системы,система линейная дифференциальных уравнений - линейная система.*

1. Общие сведения о системах дифференциальных уравнений

Решение той или иной задачи может потребовать нахождения не одной, а сразу нескольких неизвестных функций. Для этого необходимо располагать, вообще говоря, таким же числом уравнений. Если каждое из этих уравнений является дифференциальным, т.е. имеет вид соотношения, связывающего неизвестные функции и их производные, то говорят о **системе дифференциальных уравнений.** Ограничимся рассмотрением систем дифференциальных уравнений первого порядка: это означает, что в уравнения не входят производные порядка выше, чем 1.

При рассмотрении систем дифференциальных уравнений аргумент обозначают, как правило, через t, а сами неизвестные функции – через $x_1(t),\ \ x_2(t)$ и т.д. Так, система дифференциальных уравнений первого порядка с двумя неизвестными функциями записывается обычно в виде

$$\begin{cases} \phi\left(t,\ x_1,\ x_2,\ \dfrac{dx_1}{dt},\ \dfrac{dx_2}{dt}\right)=0, \\ \psi\left(t,\ x_1,\ x_2,\ \dfrac{dx_1}{dt},\ \dfrac{dx_2}{dt}\right)=0. \end{cases} \tag{1}$$

На системы дифференциальных уравнений естественным образом обобщается постановка задачи Коши для одного уравнения. Например, в случае системы (1) задача Коши состоит в нахождении решения $x_1(t),\ \ x_2(t)$, удовлетворяющего начальным условиям $x_1(t_0)=x_1^0,\ \ x_2(t_0)=x_2^0,$ где $t_0,\ x_1^0,\ x_2^0$ - заданные числа. Для случая системы может быть доказана теорема существования и единственности решения задачи Коши, аналогичная теореме из § 37.

К системам дифференциальных уравнений первого порядка в известном смысле сводятся уравнения (и системы уравнений) любого порядка. Проиллюстрируем это на примере уравнения третьего порядка. Пусть дано уравнение

$$y''' = f(x,\ y,\ y',\ y'').$$

Если обозначить функции y' и y'', соответственно, через u и v, то уравнение можно заменить системой

$$\begin{cases} y' = u, \\ u' = v, \\ v' = f(x,\ y,\ u,\ v), \end{cases}$$

состоящей из трех уравнений первого порядка с тремя неизвестными функциями $y(x)$, $u(x)$, $v(x)$. Аналогичное истолкование допускает любое другое дифференциальное уравнение (или система уравнений).

2. Системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Сведение к одному уравнению более высокого порядка

Ограничимся рассмотрением систем дифференциальных уравнений специального вида, называемых **линейными системами.** В случае двух неизвестных функций $x_1(t),\ \ x_2(t)$ линейная система имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2, \end{cases} \tag{2}$$

где коэффициенты α_{ij} являются, вообще говоря, функциями независимой переменной t. Будем считать эти функции непрерывными; тогда для заданной системы заведомо выполняются условия теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши.

Один из методов интегрирования системы (2) заключается в сведении системы к одному уравнению второго порядка с одной неизвестной функцией (о сведении одного уравнения произвольного порядка к системе уравнений первого порядка было сказано в п.1). Дифференцируя (по t) обе части первого уравнения системы (2), находим

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=\alpha_{11}\frac{dx_1}{dt}+\alpha_{12}\frac{dx_2}{dt}+\frac{d\alpha_{11}}{dt}x_1+\frac{d\alpha_{12}}{dt}x_2,$$

откуда, заменяя производные $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dx_2}{dt}$ их выражениями из самой системы, имеем

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=\alpha_{11}(\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2)+\alpha_{12}(\alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2)+\frac{d\alpha_{11}}{dt}x_1+\frac{d\alpha_{12}}{dt}x_2.$$

Группируя в правой части все члены с x_1, а также с x_2, получим уравнение вида

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=\beta_1x_1+\beta_2x_2, \tag{3}$$

где коэффициенты β_1 и β_2 определенным образом выражаются через коэффициенты α_{ij} и их производные (записывать эти выражения не будем). Комбинируя уравнение (3) с первым уравнением системы (2), получаем

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2,\\[2ex] \dfrac{d^2x_1}{dt^2}=\beta_1x_1+\beta_2x_2.\end{cases} \tag{4}$$

Предположим, что в рассматриваемой области изменения t определитель

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Тогда систему (4) можно решить относительно x_1 и x_2, т.е. выразить x_1 и x_2 через $\frac{dx_1}{dt}$ и $\frac{d^2x_1}{dt^2}$. В результате приходим к уравнениям вида

$$x_1 = a\frac{dx_1}{dt} + b\frac{d^2x_1}{dt^2}, \tag{5}$$

$$x_2 = c\frac{dx_1}{dt} + d\frac{d^2x_1}{dt^2} \tag{6}$$

(выражения для a, b, c, d приводить не будем). Первое из них представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка с одной неизвестной функцией $x_1(t)$. К нему приложима вся теория, изложенная в §31.

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 3x_1 - 2x_2, \\ \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2x_1 - x_2. \end{cases}$$

Решение

Дифференцируя обе части первого уравнения, имеем

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = 3\frac{dx_1}{dt} - 2\frac{dx_2}{dt} = 3(3x_1 - 2x_2) - 2(2x_1 - x_2) = 5x_1 - 4x_2.$$

В комбинации с первым уравнением данной системы это приводит к системе

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 3x_1 - 2x_2, \\ \\ \dfrac{d^2x_1}{dt} = 5x_1 - 4x_2. \end{cases}$$

Отсюда находим выражения для x_1 и x_2 через $\dfrac{dx_1}{dt}$ и $\dfrac{d^2x_1}{dt^2}$:

$$x_1 = 2\frac{dx_1}{dt} - \frac{d^2x_1}{dt^2}, \tag{7}$$

$$x_2 = \frac{5}{2}\frac{dx_1}{dt} - \frac{3}{2}\frac{d^2x_1}{dt^2}. \tag{8}$$

В результате приходим к уравнению второго порядка для неизвестной функции $x_1(t)$:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} - 2\frac{dx_1}{dt} + x_1 = 0.$$

Решая это уравнение известным способом, получим

$$x_1 = (C_1 + C_2 t)e^t,$$

после чего из выражения (8) находим

$$x_2 = \frac{1}{2}(2C_1 - C_2 + 2C_2 t)e^t.$$

Упражнения

1. Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 3x_1 - 2x_2 + 2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2x_1 - x_2. \end{cases}$$

2. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -2x_1 - 2x_2 - 4x_3, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -2x_1 + x_2 - 2x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = 5x_1 + 2x_2 + 7x_3. \end{cases}$$

3. Решить систему

$$\begin{cases} x_1' + x_2' - x_1 = e^t, \\ 2x_1' + x_2' + 2x_2 = \cos t \end{cases}$$

при данных начальных условиях $t_0 = 0,\quad x_0 = -\dfrac{3}{17},\quad y_0 = \dfrac{4}{17}$.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте общие сведения о системах дифференциальных уравнений. Обычно, в каком виде записывается система дифференциальных уравнений первого порядка с двумя неизвестными функциями?

2. Как на систему дифференциальных уравнений первого порядка с двумя неизвестными функциями обобщается постановка задачи Коши для одного уравнения? В чем заключается задача Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка с двумя неизвестными функциями?

3. К системам дифференциальных уравнений первого порядка в известном смысле сводятся уравнения любого порядка. Проиллюстрируйте это на примере.

4. Какой вид имеет линейная система дифференциальных уравнений первого порядка с двумя неизвестными функциями?

5. Какие условия на коэффициенты линейной системы дифференциальных уравнений первого порядка с двумя неизвестными функциями обеспечивает существование и единственность решения задачи Коши?

6. Один из методов интегрирования системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с двумя неизвестными функциями заключается в сведении системы к одному уравнению второго порядка с одной неизвестной функцией. Продемонстрируйте это.

7. Опишите алгоритм метода сведения линейной системы к одному уравнению более высокого порядка.

§40. Разностные уравнения первого порядка

Ключевые слова: *динамические модели, дискретные и непрерывные модели, линейные динамические модели первого порядка, разностные уравнения, порядок разностного уравнения, решение разностного уравнения, шаг дискретизации времени, начальные условия для разностных уравнений, автономные уравнения и точки равновесия, устойчивость точек равновесия, бифуркация.*

Развивающиеся во времени процессы принято называть *динамическими,* равно как и описывающие их математические модели. Все переменные в динамических моделях в общем случае зависят от времени t, которое выступает в качестве независимой переменной.

Различают динамические модели с дискретным и непрерывным временем, т.е. *дискретные* и *непрерывные модели.* С математической точки зрения дискретные модели описываются так называемыми *разностными уравнениями и системами,* а непрерывные - *дифференциальными уравнениями и системами.* Мы знакомы с начальными понятиями теории дифференциальных уравнений. Ниже начнем с неформального знакомства с разностными уравнениями и связями между дифференциальными и разностными уравнениями.

1. Предварительные сведения о разностных уравнениях

Определение. ***Разностными*** называют уравнения, которые содержат значения *неизвестной функции целочисленного аргумента,* относящиеся к различным периодам времени (t интерпретируем как время, принимающее значения 0,1,2, …). ***Порядком разностного уравнения*** называют наибольшую разность между номерами периодов, с которыми неизвестная функция входит в данное уравнение.

Пример 1. Разностное уравнение

$$y(t+1)=2y(t)-1 \tag{1}$$

имеет первый порядок, а уравнение

$$y(t+2)-2y(t)=6 \qquad (1)$$

- второй.

Решение разностного уравнения можно рассматривать как числовую последовательность $\{y(t)\}$, $t=0,1,2,...,$ которая удовлетворяет данному уравнению. Для выделения конкретного, частного решения разностного уравнения задаются ***начальные условия,*** число которых совпадает с порядком уравнения. Обычно эти условия - значения неизвестной последовательности в ряде первых периодов: для уравнения первого порядка $y(0)=y_0$, для 2-го порядка - $y(0)=y_0$, $y(1)=y_1$ и т.д.

С некоторыми приемами нахождения решений простейших разностных уравнений 1-го порядка, вероятно, вы уже знакомы по теории последовательностей. С их помощью можно найти общее решение уравнения (1)

$$y(t)=1+\left(C-\frac{1}{2}\right)2^t, \quad C=y_0,$$

а что же касается уравнения (2), то для него

$$y(t)=C_1\left(\sqrt{2}\right)^t+C_2\left(-\sqrt{2}\right)^t-6, \qquad t=0,1,2,...,$$

где постоянные, находятся из начальных данных (проверьте подстановкой в уравнение).

Часто (особенно в экономических моделях) используются упрощенные обозначения для неизвестных решений (последовательностей) разностных уравнений - y_t вместо $y(t)$ или же еще более привычное обозначение для последовательностей - y_n $(n=0,1,2,...)$.

Дифференциальные уравнения можно рассматривать как предел разностных, а разностные часто (но не всегда!) получаются из дифференциальных путем *дискретизации времени.*

Рассмотрим общее дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$y'=f(y,t), \qquad (3)$$

где $f(y,t)$ - заданная функция. Зафиксируем достаточно малое число $h>0$, называемое *шагом дискретизации* времени, и заменим в (3) производную y' разностным соотношением

$$\frac{\Delta y}{h}=\frac{y(t+h)-y(t)}{h}. \tag{4}$$

В результате получим равенство $\frac{\Delta y}{\Delta t}=f(y,t)$, где $\Delta t=h$, т.е.

$$y(t+h)=y(t)+hf\left(y(t),t\right). \tag{5}$$

Оно фактически является разностным уравнением 1-го порядка, соответствующим (3). Из него, зная $y(t_0)$, можно найти $y(t_0+h)$, по нему $y(t_0+2h)$ и т.д. Обратно, при $h\to 0$ уравнение (5) переходит в дифференциальное уравнение (3). Поэтому неудивительно, что каждое решение последнего определяется заданием функции в начальный момент.

Рассмотрим теперь общее дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$y''=f(y,y',t). \tag{6}$$

Заменив в нем y' разностным отношением (4), а вторую производную y'' - вторым разностным отношением

$$\frac{\Delta^2 y}{h^2}=\frac{y(t+2h)-2y(t+h)+y(t)}{h^2}, \tag{7}$$

получим соответствующее (6) разностное уравнение 2-го порядка:

$$\frac{\Delta^2 y}{(\Delta t)^2}=f(y,y',t),$$

т.е.

$$\frac{y(t+2h)-2y(t+h)+y(t)}{h^2}=f\left(y,\frac{y(t+h)-y(t)}{h},t\right). \tag{8}$$

Зная значения y в два разделенных интервалом h момента времени, мы можем найти из этого уравнения значения y еще через время h. Следовательно, все значения последовательности $y(t_0+nh)$ определяются заданием ее двух первых членов.

При $h \to 0$ разностное уравнение (8) переходит в дифференциальное уравнение (6) (убедитесь в этом!). Поэтому неудивительно, что решение дифференциального уравнения 2-го порядка также определяется заданием в начальный момент двух чисел (n - чисел для уравнений n - го порядка).

Конечно, не все разностные уравнения 2-го порядка допускают преобразование к виду (8) и, следовательно, не все разностные уравнения имеют свои точные дифференциальные аналоги. Например, знаменитая *последовательность чисел Фибоначчи* (см. §16)

$$1,1,2,3,5,8,13,\ldots$$

подчиняется разностному уравнению 2-го порядка

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \tag{9}$$

которое нельзя свести к дифференциальному, путем какого-либо предельного перехода. Между тем оно удивительным образом возникает в фантастическом числе приложений.

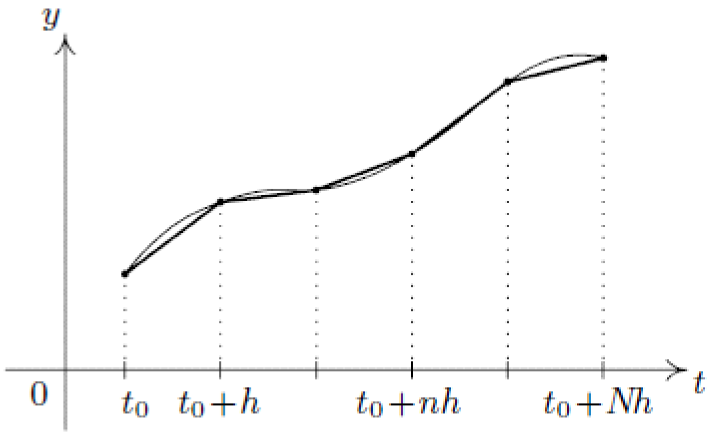


Рис. 1. **Траектория дифференциального уравнения 1-го порядка и ее разностная аппроксимация (ломаная Эйлера)**

Обратим также внимание на следующее обстоятельство: если в уравнении (3) приближенная замена первой производной разностным отношением (4) вполне естественна (в силу определения производной), то в уравнении (6) аппроксимация второй производной разностным отношением (7) отнюдь не столь однозначна - можно предложить и другие аппроксимации. Формально все они также приведут к разностным уравнениям 2-го порядка, но может оказаться, что эти уравнения имеют различные свойства решений (из-за чувствительности к изменению «коэффициентов», возникающих при аппроксимации). Отметим также, что в случае уравнений первого порядка при аппроксимации (4) траектория разностного уравнения (5) состоит из точек на траектории дифференциального уравнения (3), соответствующих моментам дискретизации времени (рис. 1). В случае уравнений 2-го порядка такое свойство в общем случае гарантировать невозможно.

2. Линейные динамические модели первого порядка

Мы начнем с примеров моделей, которые описываются *линейными* дифференциальными уравнениями первого порядка вида

$$y' = ay + b, \tag{10}$$

или их разностными аналогами

$$y(t+1) = ay + by. \tag{11}$$

Здесь a, b - некоторые постоянные или известные функции времени. При $b = 0$ уравнения (10), (11) называются **однородными.** В этом случае первое из них можно переписать в виде

$$\frac{y'}{y} = a,$$

откуда ясно, что оно описывает динамику переменной $y(t)$, которая имеет постоянный темп прироста a или же зависящий только от времени (не зависит от y). Поэтому a часто называют **коэффициентом роста,** допуская некоторую неточность.

Исторически данное однородное уравнение в социально-экономической сфере впервые появилось в работах Т. Мальтуса (1763-1834), который исследовал динамику населения Земли. Поскольку при начальном условии $y(0)=y_0$ и постоянном a это уравнение имеет *экспоненциальное решение*

$$y(t)=y_0e^{at\,t} \text{ (очень быстро возрастающее при } a>0\text{)},$$

то Мальтус сделал пессимистические выводы о неминуемом наступлении голода: природные ресурсы ограничены, а при $a>0$ население неограниченно растет. В действительности более адекватные «мягкие» модели популяций должны учитывать механизмы само регуляции, что приводит к совершенно другим, нелинейным моделям (см. §35).

На рис. 2 приведены графики решений уравнения $y' = ay$ при различных начальных условиях и знаках коэффициента роста.

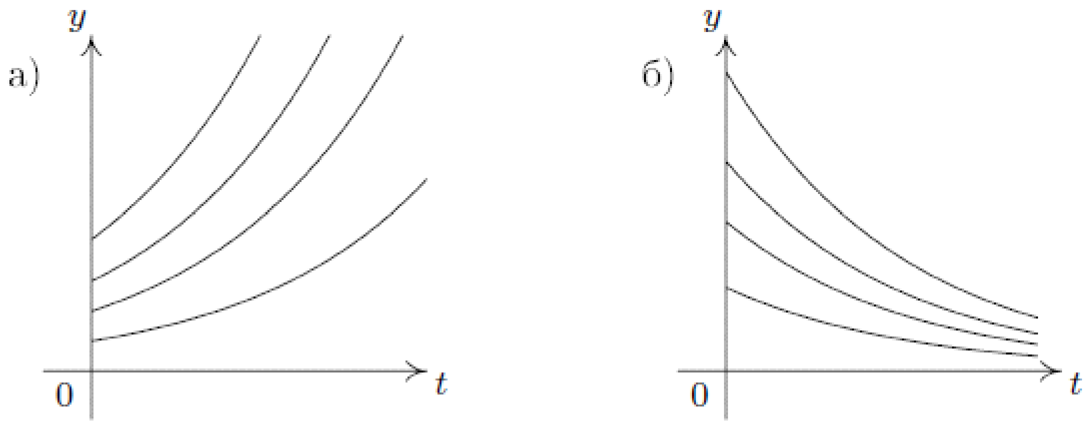


Рис. 2. **Графики решений уравнения** $y'=ay$**: а)** $a>0$ **- экспоненциальный рост; б)** $a<0$ **- экспоненциальное снижение**

Отметим, что разностное уравнение (11) при $b=0$ можно записать в виде

$$\frac{y(t+1)}{y(t)}=a.$$

Отсюда ясно, что оно описывает процесс с постоянным темпом роста, или же зависящим только от времени (если $a=a(t)$).

Рассмотрим другие модели этого типа.

Пример 1. ***Динамика банковского вклада***. Предположим, что инвестор положил в банк денежную сумму S_0 по **годовой** ставке m. Значение $S(t)$ **наращенной** суммы вклада через t лет зависит от частоты начисления процентов.

Если проценты начисляются раз в год, то сумма $S(t)$ будет вычисляться по рекуррентной формуле сложных процентов

$$S(t+1)=(1+r)S(t), \qquad t=0,1,2,... \tag{12}$$

Это разностное уравнение 1-го порядка с шагом по времени, равном году, и начальным условием $S(0)=S_0$. Ясно, что уравнение (12) задает геометрическую прогрессию и потому его решение легко находится: в конце года t вклад составит

$$S(t)=S_0(1+r)^t.$$

Предположим теперь, что те же r% годовых начисляются дважды в год. Тогда новое разностное уравнение будет иметь вид:

$$S(t+1)=\left(1+\frac{r}{2}\right)S(t),$$

причем шаг по времени становится равным полугоду, так что $t=0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},...$.

Легко понять, что решение будет иметь вид

$$S(t)=S_0\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2t},$$

где слева стоит наращенная сумма через t лет.

Вообще, если проценты начисляются m раз в год, то динамика вклада будет описываться уравнением с шагом по времени $\frac{1}{m}$:

$$S(t+1)=\left(1+\frac{r}{m}\right)S(t), \tag{13}$$

где $t = 0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \ldots$. Явное выражение наращенной суммы через t лет решение уравнения (13) представляет собой формулу сложных процентов при m-кратном начислении:

$$S(t) = S_0 \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}. \tag{14}$$

Допустим теперь, что банк, желая расшевелить вкладчиков, предлагает непрерывное начисление процентов. Тогда проценты добавляются к текущему вкладу в каждый момент и разностное уравнение не годится. Чтобы разобраться с ситуацией, имеются две возможности.

Во-первых, можно заметить, что непрерывное начисление соответствует случаю $m \to \infty$ и получить искомую сумму предельным переходом в известном решении (14) для случая m-кратного начисления:

$$S(t) = \lim_{m \to \infty} S_0 \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} = S_0 e^{rt}. \tag{15}$$

Во-вторых, можно перейти к пределу в разностном уравнении (13). Для этого обозначим через $h = \frac{1}{m}$ шаг дискретизации (тогда $h \to 0$ когда $m \to \infty$) и перепишем уравнение (13) в виде

$$\frac{S(t+1) - S(t)}{h} = rS(t).$$

При $m \to \infty$, т.е. при $h \to 0$ левая часть стремится к производной $\frac{dS}{dt}$, а правая остается неизменной, так как вообще не зависит от h. Поэтому предельный переход дает равенство

$$\frac{dS}{dt} = rS(t) \quad \text{или, кратко,} \quad S' = rS. \tag{16}$$

Получили дифференциальное уравнение, которое описывает динамику вклада при непрерывном начислении процентов.

По существу обе использованные возможности в данном случае совпадают, поскольку легко проверяется, что функция $S(t)$, определенная формулой (15), является решением уравнения (16), причем естественное начальное условие $S(0)=S_0$ выполнено.

Для наглядности приведем числовые данные, которые показывают влияние кратности начисления процентов на динамику наращенной суммы при $r=8\%$ (т.е. $r=0{,}08$).

Рост капитала при $r=0{,}08$:

Таблица 1

Годы	$\frac{S(t)}{S_0}$ **из (13)**		$\frac{S(t)}{S_0}$ **из (15) или (16)**
	$m=4$	$m=366$	
1	1,0824	1,0833	1,0833
2	1,1716	1,1735	1,1735
5	1,4859	1,4918	1,4918
10	2,2080	2,2253	2,2255
20	4,8754	4,9522	4,9530
30	10,7652	11,0202	11,0232
40	23,7609	24,5238	24,5325

Данные свидетельствуют, что способ начисления процентов оказывает незначительное влияние на рост суммы. Например, за 10 лет при $S_0=1000$, наращенная сумма вклада при непрерывном начислении, превзойдет этот показатель при ежеквартальном начислении всего на 17,5 ден. ед., т.е. меньше, чем на 2 ден. ед. в год. Конечно, с ростом m разница становится все более ощутимой.

В рассмотренном примере содержались как разностное уравнение, так и дифференциальное, причем одно переходило в другое, когда шаг дискретизации стремился к нулю. Это довольно типичная ситуация, но все же не правило: ***от дифференциального уравнения всегда можно перейти к разностному, но имеются разностные уравнения, которые не имеют дифференциальных аналогов.***

Пример 2. ***Активный инвестор.*** Предыдущий пример был упрощен, поскольку, однажды инвестировав, вкладчик не совершал более никаких операций с вкладом. Активный инвестор может пополнить вклад или, напротив, реинвестировать часть вклада (например, для текущего потребления).

Изменения, которые нужно внести в рассмотренные модели для описания данной ситуации, достаточно очевидны.

Если обозначить через $c(t)$ денежную сумму, которую инвестор дополнительно вкладывает в банк в период t дискретной модели, то разностное уравнение (12) модифицируется следующим образом

$$S(t+1)=(1+r)S(t)+c(t). \qquad (17)$$

Чтобы охватить случай снятия средств с вклада, то можно допускать для экзогенной переменной $c(t)$ и отрицательные значения.

Прежде чем написать соответствующий непрерывный аналог, отметим, что в (17) переменная $c(t)$ имеет смысл потока - ее размерность есть деньги/время. Так же обстоит дело и в непрерывной модели: $c(t)$ представляет собой полок средств, непрерывно присоединяемых к текущему вкладу, если $c(t)>0$ или отчисляемых с него, если $c(t)<0$ (все это особенно наглядно в случае $c(t)\equiv c$). Поэтому дифференциальное уравнение активного инвестора примет вид

$$S'=rS+c(t). \qquad (18)$$

Отметим, что найти решения уравнений (17), (18) с заданным начальным условием $S(0)=S_0$ можно только при известной стратегии инвестора $c(t)$. Именно поэтому эта переменная была названа выше **экзогенной.**

В случае $c(t)\equiv c$ решение разностного уравнения (17) можно найти, пользуясь известным приемом перехода от неявного способа задания числовой последовательности к явному. Совершенно аналогичная схема применима и к дифференциальному уравнению (18), и для самопроверки мы выпишем его решение

$$S(t) = S_0 e^{rt} + \frac{c}{r}\left(e^{rt} - 1\right).$$

Пример 3. ***Динамическое бюджетное ограничение потребителя.*** Развивая пример 2, представим себе потребителя, доход которого складывается из текущей заработной платы $w(t)$ и процентов с вложенного капитала, а расходы из текущего потребления $c(t)$и инвестирования накопления капитала (для связи с вышеизложенным обозначим капитал через $S(t)$.

В непрерывном описании данной ситуации нужно учесть, что прирост капитала совпадает с производной $S'(t)$, и записать баланс доходов и расходов:

$$\underbrace{w(t) + rS(t)}_{\text{ДОХОДЫ}} = \underbrace{c(t) + S'(T)}_{\text{РАСХОДЫ}}.$$

Это равенство и представляет собой бюджетное ограничение потребителя. Разрешив его относительно производной S', придем к дифференциальному уравнению 1-го порядка

$$S' = rS + w(t) - c(t). \tag{19}$$

В этой модели $w(t)$, $c(t)$ являются экзогенными переменными.

Упражнение. Разностный аналог этой модели предоставляем выписать самостоятельно.

Динамическое бюджетное ограничение возникает, например, в микроэкономической модели оптимального поведения потребителя И. Фишера и в ее обобщениях.

Пример 4. ***Модель инфляции Кейгана.*** Эта модель, предложенная Ф. Кейганом в 1956 г., описывает процесс гиперинфляции (динамику уровня цен) под влиянием инфляционных ожиданий экономических агентов.

Основу модели составляют следующие уравнения:

- функция спроса на деньги

$$\frac{M_d}{P} = e^{-\alpha\pi}, \tag{20}$$

где P фактический уровень цен (например, дефлятор ВВП), π - ожидаемый темп инфляции, $\alpha > 0$ эластичность денежного спроса;

- дифференциальное уравнение адаптации инфляционных ожиданий

$$\pi' = \beta\left(\frac{P'}{P} - \pi\right), \tag{*}$$

где $\beta > 0$ параметр адаптации, а $\frac{P'}{P}$ - фактический темп инфляции.

Таким образом, в модели Кейгана влияние на инфляцию реального сектора, ставки процента и т.д. считаются второстепенными, причем ожидаемый темп инфляции растет, если фактический темп инфляции превышает ожидаемый (тогда $\pi' > 0$), и снижается в противном случае.

Модель удобно представить в новых логарифмических переменных

$$m_d = \ln M_d, \qquad p = \ln P.$$

Тогда уравнения модели примут следующий линейный вид

$$m_d - p = -\alpha\pi,$$

$$\pi' = \beta(p' - \pi), \tag{**}$$

причем первое из них является конечным, а второе дифференциальным.

При $M_d = const$ (тогда и $m_d = const$) можно исключить p путем дифференцирования по t конечного уравнения. Это дает равенство $p' = \alpha\pi$, и, после подстановки его во второе уравнение, получим простое линейное уравнение

$$\pi' = \gamma\pi, \qquad \text{где } \gamma = \frac{\beta}{\alpha\beta - 1}.$$

Его решение с начальным условием $\pi(0) = \pi_0$ выражается через экспоненту

$$\pi(t) = \pi_0 e^{\gamma t}$$

и, следовательно, инфляционные ожидания снижаются, если $\gamma < 0$, т.е. при $\alpha\beta < 1$(тогда $\pi(t) \to 0$ при $t \to \infty$).

3. Общие понятия и элементы качественного анализа

Разностным уравнением 1-го порядка называется рекуррентное соотношение вида

$$y_{t+1} = f(t, y_t), \tag{21}$$

где переменная t пробегает все значения из множества неотрицательных целых чисел

$$Z_+ = \{0, 1, 2, ...\}$$

и интерпретируется как номер периода времени. $y_t = y(t)$ - неизвестная функция, определенная на Z_+, т.е. числовая последовательность, $f(t, y)$ - заданная числовая функция двух аргументов, первый из которых целочисленный $(t \in Z_+)$, а второй может принимать любые значения из множества действительных чисел R, или из некоторого его подмножества $\mathcal{S}$. В приложениях $\mathcal{S}$ это некоторый числовой промежуток (отрезок, интервал, полуинтервал).

Таким образом, разностное уравнение 1-го порядка связывает между собой каждый последующий член искомой последовательности с предыдущим. Если задать начальную точку

$$y_0 \in \mathcal{S},$$

то соотношение (21) позволяет вычислить все последующие члены последовательности методом итераций (повторных постановок):

$$y_1 = f(0, y_0), \quad y_2 = f(1, y_1) \quad \text{и т.д.}$$

Получающиеся точки $y_1, y_2, ...$ - должны попадать в $\mathcal{S}$, если функция f определена не при всех значениях y, ибо иначе вычисления невозможно продолжить. Следовательно, функция f должна быть определена на множестве

$$\mathcal{D}=\{(t,y): t\in Z_+,\ y\in \mathcal{S}\} \tag{22}$$

и принимать значения в $\mathcal{S}$. Символически это свойство записывают следующим образом:

$$f:\mathcal{D}\to\mathcal{S}, \tag{23}$$

и говорят, « f есть отображение из $\mathcal{D}$ в $\mathcal{S}$ (отображает $\mathcal{D}$ в $\mathcal{S}$)».

Динамическая система (21) полностью определяется отображением f со свойствами (22), (23).

Определение. Множество $\mathcal{S}$ называют **фазовым множеством** (или **фазовым пространством)** уравнения (21), а переменную y - **фазовой переменной.**

Ее значение y_t в каждый период времени t характеризует состояние моделируемой системы, или, иначе говоря, состояние процесса.

Определение. Если функция $f(t,y)$ линейна по y, т.е. имеет вид

$$f(t,y)=a(t)y+b(t),$$

то и соответствующее разностное уравнение

$$y_{t+1}=a(t)y_t+b(t)$$

называют **линейным.** В этом случае f определена при всех y и в качестве $\mathcal{S}$ можно взять фазовую прямую R.

Определение. Бесконечная последовательность $y_0, y_1, y_2, \ldots. y_t, \ldots$, удовлетворяющая уравнению (21), называется **решением с начальным условием** y_0 или **траекторией, начинающейся в точке** y_0. Она обозначается через $\{y_t\}$ или, более полно, $\{y(t,y_0)\}$.

Из этого определения и предшествующих пояснений получаем следующий вывод:

Теорема 1. Пусть функция $f(t,y)$ определена на множестве $\mathcal{D}$ и принимает значения в $\mathcal{S}$ (см. (22)). Тогда для любой начальной точки

$y_0 \in \mathfrak{S}$ существует единственная траектория $\{y(t, y_0)\}$ - целиком проходящая по $\mathfrak{S}$, т.е. удовлетворяющая условию $y_t \in \mathfrak{S}$ для любого $t \in Z_+$.

Таким образом, решение разностного уравнения существует и единственно при очень слабых предположениях на функцию f: никаких условий непрерывности и гладкости не требуется; все, что нужно, это согласование области определения и области значений (см. (22), (23)). Как мы видели ранее, в случае дифференциальных уравнений дело обстоит не так и просто.

Нас будут интересовать следующие два основных вопроса:

I. Как решить уравнение (21) с начальным условием y_0, т.е. как найти общий член искомой последовательности в виде явной функции t?

Для ответа на него непосредственное использование рекуррентных вычислений по формуле (21) малопригодно оно приводит к цели лишь в случае очень простых уравнений. Существуют специальные методы нахождения решений некоторых типов разностных уравнений 1-го порядка, в основном линейных.

Поскольку эти методы имеют весьма ограниченную сферу применения, то возникает второй вопрос:

II. Как по заданному уравнению (т.е. по функции f) получить качественное представление о поведении траекторий при различных начальных значениях y_0? В частности, особый интерес для экономистов представляет устойчивость решений их сходимость к конечному пределу при $t \to +\infty$.

Замечания

1. Иногда используется понятие общего решения уравнения (21). Под ним понимается такая функция $y = y(t, C)$, зависящая от $t \in Z_+$ и произвольной постоянной C, что, *во-первых,* она удовлетворяет уравнению (21) при любом C и, *во-вторых*, любое решение уравнения (21) можно получить из нее подходящим выбором произвольной постоянной. Например, линейное уравнение $y_{t+1} = a(t) y_t$ с произвольной начальной точкой y_0 имеет решение $y_t = y_0 a^t$. Все эти решения очевидным образом получаются из функции

$y(t,C)=Ca^t$, которая и является в данном случае общим решением. Если решение уравнения (21) удалось получить для произвольной начальной точки (как функцию t и y_0), то это и будет общим решением. Именно так обстоит дело в приведенном простом примере.

2. Решение уравнения (21) с заданной начальной точкой y_0 называют **решением начальной задачи, или решением задачи Коши для данного уравнения.** Отметим, что иногда рассматривают начальное условие вида $y_{t_0}=y_0$, которое задают в период $t_0>0$. Мы полагаем $t_0=0$ из соображений удобства, что не ведет к потере общности.

3.1. Автономные уравнения и точки равновесия

Определение. Разностное уравнение называют **автономным (или стационарным),** если оно явно не зависит от времени t. В автономном случае уравнение (21) принимает вид

$$y_{t+1}=f(y_t), \tag{24}$$

где функция $f(y)$ отображает фазовое множество $\mathcal{S}$ в себя т.е. $f:\mathcal{S}\to\mathcal{S}$.

Автономными уравнениями моделируются процессы, протекающие в условиях постоянства внешней среды и отсутствия экзогенных воздействий. Например, все макромодели, предполагающие постоянство технологии, описываются автономными уравнениями; учет технического процесса приводит к неавтономным уравнениям.

Для автономных уравнений важное значение имеют точки равновесия и их свойства устойчивости или неустойчивости.

Определение. Число y^* называется **точкой равновесия** автономного уравнения (24), если $f(y^*)=y^*$.

Постоянная траектория $\{y_t=y^*\}$ является в этом случае одним из решений уравнения (24).

Действительно, если мы стартуем из начальной точки $y_0 = y^*$, то последовательные вычисления показывают, что никакого движения не происходит:

$$y_1 = f(y^*) = y^*, \quad y_2 = f(y_1) = y^*, \ldots$$

Определение. Поэтому точки равновесия называют также **стационарными или неподвижными точками** уравнения (24).

Согласно определению, эти точки находятся путем решения уравнения

$$f(y) = y.$$

Определение. Так как под действием отображения f они не меняются, то их называют **неподвижными точками, отображения** f.

Следующее утверждение показывает, что траектории разностного уравнения могут сходиться при $t \to \infty$ только к неподвижным точкам.

Теорема 2. Пусть $\{y_t\}$ - некоторая траектория уравнения (24), сходящаяся при $t \to \infty$ к числу a. Если функция $f(y)$ непрерывна, в точке a, то a точка равновесия уравнения (24) (т.е. неподвижная точка, отображения f).

Действительно, непрерывность функции $f(y)$ в точке a означает, что существует

$$\lim_{\substack{y \to 0 \\ y \in \mathcal{S}}} f(y) = f(a). \tag{25}$$

Согласно предположению, $y_t \in \mathcal{S}$ для любого t и $y_t \to a$ при $t \to \infty$ и удовлетворяет равенству (24). В силу (25), в этом равенстве левая и правая части имеют пределом число a, так что предельный переход при $t \to \infty$ дает равенство $a = f(a)$. Оно означает, что a точка равновесия.

Следствие. Из последнего утверждения следует, что если отображение f непрерывно и не имеет неподвижных точек, то все траектории уравнения (24) расходятся (не имеют конечного предела при $t \to \infty$).

Пример 5. Рассмотрим разностное уравнение

$$y_{t+1} = \sqrt{y_t}. \tag{26}$$

Здесь функция $f(y)=\sqrt{y}$ определена и непрерывна на фазовом множестве $\mathcal{S}=R_+$ и там же принимает свои значения. Уравнение для нахождения неподвижных точек $\sqrt{y}=y$ имеет два корня: $\bar{y}=0$ и $y^*=1$. Это и есть точки равновесия данного уравнения. Если взять начальную точку $y_0>0,\ y_0\neq y^*=1,$ то методом итераций найдем $y_1=y_0^{\frac{1}{2}},\quad y_2=y_1^{\frac{1}{2}}=y_0^{\frac{1}{4}},\ldots$ и, улавливая закономерность, получаем решение - общий член последовательности

$$y_t=y_0^{\left(\frac{1}{2}\right)^t},\qquad t\in Z_+.$$

При $t\to\infty$ показатель степени стремится к нулю и, следовательно, $y_t\to 1=y^*$. Все траектории, стартующие из состояния $y_0>0$, сходятся к неподвижной точке y^*. В этом случае говорят, что она **устойчива**, в то время как $\bar{y}=0$ **неустойчивая точка** равновесия.

3.2. Фазовая диаграмма

Динамику автономного уравнения $y_{t+1}=f(y_t)$, или действие соответствующее отображению f наглядно иллюстрирует **фазовая диаграмма** (иногда ее называют **диаграммой Ламерея** или **паутинной диаграммой**). Она строится так (рис.2.1):

- в прямоугольной системе координат изображают график функции $f(y)$;

- проводят биссектрису первого и третьего координатных углов;

- отрезками изображают переход от y_t к y_{t+1} и указывают переход от значения функции к новому значению члена последовательности (через биссектрису).

Таким образом, мы начинаем в точке $(y_0,y_1)=(y_0,f(y_0))$ перемещаемся в точку (y_1,y_1), затем в $(y_1,y_2)=(y_1,f(y_1))$ и т.д.; вообще, на шаге t переходим из точки $(y_{t-1}, y_t) = (y_{t-1}, f(y_{t-1}))$ в (y_t, y_t), а затем в $(y_t, y_{t+1}) = (y_t, f(y_t))$.

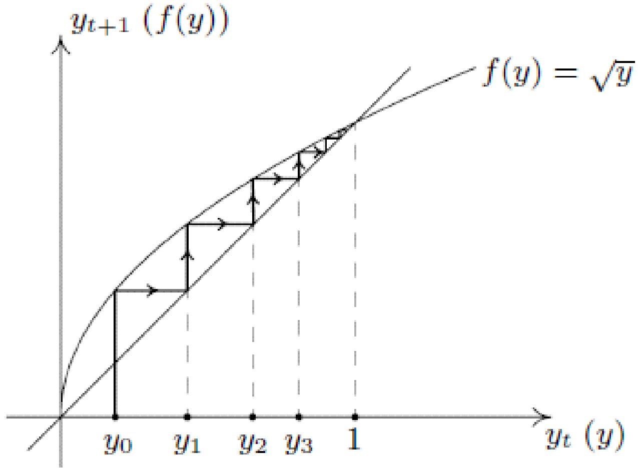


Рис. 3. **Фазовая диаграмма уравнения (26)**

Фазовая диаграмма уравнения (26) на рис. 3 дает графическое представление о сходимости траекторий к неподвижной точке $y^* = 1$. В других случаях она может указывать на расходимость траекторий, т.е. на неустойчивость неподвижных точек.

3.3. Устойчивость точек равновесия

Уточним понятия, которые на неформальном уровне уже использовались выше.

Определение. Пусть y^* точка равновесия автономного уравнения $y_{t+1} = f(y_t)$ определенного на множестве $\mathcal{S} \subseteq R$. Тогда:

а) y^* называют **устойчивой,** если все траектории, начинающиеся достаточно близко к y^*, остаются в произвольно малой ее окрестности.

Определение. Формально: y^* устойчива, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такую окрестность $O_\varepsilon(y^*)$ точки y^*, что неравенство

$$|y_t - y^*| < \varepsilon \qquad \forall t = 0,1,2,.... \tag{29}$$

выполняется для всех траекторий $\{y_t\}$ с начальной точкой $y_0 \in O_\varepsilon(y^*) \cap \mathcal{S}$.

б) y^* называют **асимптотически устойчивой**, если она устойчива, и выполняется предельное условие

$$y_t \to y^* \text{ при } t \to \infty \tag{30}$$

для всех траекторий, начинающихся в S достаточно близко к y^*.

Содержательный смысл этих понятий таков. Устойчивая неподвижная точка удерживает вблизи себя траектории всех точек из некоторой своей окрестности (возможно, очень малой). Асимптотически устойчивая неподвижная точка не только является удерживающей, но она еще притягивает к себе траектории всех точек из некоторой своей окрестности. Наконец неустойчивая неподвижная точка является отталкивающей в том смысле, что траектории всех близких к ней точек удаляются от нее.

Определение. Асимптотически устойчивые точки равновесия иногда называют **локально устойчивыми**, так как они должны притягивать к себе лишь траектории близких к ним точек. Если же y^* притягивает к себе все траектории, то ее называют **глобально устойчивой.** Однако эго свойство встречается довольно редко.

С каждой точкой равновесия y^* можно связать множество $\mathcal{S}(y^*) \subset \mathcal{S}$, стартуя с которого, траектории сходятся к y^*. Его называют **множеством притяжения точки** y^*. Если $\mathcal{S}(y^*) = \{y^*\}$, то y^* не является асимптотически устойчивой неподвижной точкой, а если $\mathcal{S}(y^*) = \mathcal{S}$, то y^* глобально устойчива.

Пример 6. Разностное линейное уравнение $y_{t+1} = -y_t$ имеет одну точку равновесия $y^* = 0$ (здесь $\mathcal{S} = R$) и решения вида $y_t = (-1)^t y_0$. Они колеблются около y^* с постоянной амплитудой $|y_0|$, поочередно принимая значения y_0 и $(-y_0)$. При выборе $|y_0| < \varepsilon$ соответствующие траектории не покидают ε-окрестности y^*, но не сходятся к y^*. Значит, y^* локально устойчива, но не асимптотически.

Легко проверить, что в уравнении $y_{t+1} = -\frac{1}{2} y_t$ неподвижная точка $y^* = 0$ оказывается уже локально асимптотически устойчивой, а в уравнении $y_{t+1} = -2y_t$ она теряет даже свойство локальной устойчивости. В том и другом случаях колебательный характер траекторий сохраняется, но в первом амплитуда колебаний затухает, а во втором нарастает.

Заметим, что эти уравнения получаются «изменением масштаба» они являются частными случаями уравнения $y_{t+1} = -a\, y_t$ с параметром $a > 0$. Значениям $a = 1,\ 0 < a < 1$ и $a > 1$ соответствует удивительно отличающееся качественное поведение траекторий.

Определение. Подобная резкая смена поведения траекторий динамических систем при изменении их параметров носит название **бифуркации.**

Понятие устойчивости было введено в конце XIX века русским ученым А.М. Ляпуновым применительно к более традиционным для математики дифференциальным уравнениям. Надо иметь ввиду, что в настоящее время существует несколько понятий устойчивости мы рассматриваем лишь самые простые из них. Поэтому при изучении различных литературных источников необходимо обращать внимание на смысл используемых в них типов устойчивости. Особенно это относится к экономической литературе, где термин «устойчивость» применяется в самом разнообразном смысле, порой без всяких пояснений.

4. Линейные разностные уравнения

Определение. Общее линейное, неавтономное, разностное уравнение 1-го порядка имеет вид

$$y_{t+1} = a(t) y_t + b(t), \quad t \in Z_+, \tag{31}$$

где коэффициенты $a(t),\ b(t)$, заданные функции целочисленного аргумента $t \in Z_+$. При $b(t) \equiv 0$ его называют **однородным**, а в противном случае – **неоднородным.**

Изучение начнем с более простого автономного линейного уравнения

$$y_{t+1} = ay_t + b, \quad t \in Z_+, \tag{32}$$

где a, b константы. Оно задается всюду определенной линейной функцией $f(y) = ay + b$, поэтому фазовое множество совпадает с R.

А. Однородное уравнение $y_{t+1} = ay_t$ задает геометрическую прогрессию со знаменателем a. Поэтому его решение, начинающееся в точке y_0, описывается показательной функцией: $y_t = y_0 a^t$.

Напомним, что непрерывный аналог данного уравнения дифференциальное уравнение $y' = ay$ имеет экспоненциальное решение $y(t) = y_0 e^{at}$. В решениях разностных уравнений вместо экспонента будут появляться показательные функции.

Данному уравнению соответствует отображение $f = ay$ с одной неподвижной точкой $y^* = 0$ (корнем уравнения $ay = y$). При $|a| < 1$ это отображение описывает сжатие, а при $|a| > 1$ растяжение (каждой точки y в a раз). Соответственно, при $|a| < 1$ неподвижная точка $y^* = 0$ глобально устойчива: $y_t \to 0$ при $t \to \infty$ для всех y_0; при $|a| > 1$ она неустойчива и траектории неограниченно удаляются от него. Что же касается случаев $a = 1$ (все траектории постоянны) и $a = -1$ (решения $y_t = (-1)^t y_0$ колеблются около y^* с постоянной амплитудой), то в них y^* устойчива, но не асимптотически.

Заметим, что общее решение, рассматриваемого однородного уравнения имеет вид $y(t, C) = Ca^t$: оно лишь обозначением отличается от указанного выше решения.

Б. Неоднородное уравнение (32) при $a \neq 1$ имеет одну точку равновесия

$$y^* = \frac{b}{1-a}$$

и может быть сведено к однородному подстановкой

$$x_t = y_t - y^* \quad (\text{тогда } y_t = x_t + y^*). \tag{33}$$

Для новой неизвестной функции x_t получается однородное уравнение

$$x_{t+1} = ax_t$$

с начальной точкой $x_0 = y_0 - y^*$.

Действительно,

$$x_{t+1} \overset{(33)}{=} y_{t+1} - y^* \overset{(32)}{=} ay_t + b - y^* \overset{(33)}{=} ax_t + \underline{ay^* + b - y^*} = ax_t,$$

так как подчеркнутые члены сокращаются. Это однородное уравнение имеет решение

$$x_t = x_0 a^t = \left(y_0 - y^*\right) a^t,$$

и обратной подстановкой получаем решение исходного уравнения:

$$y_t = x_t + y^* = \left(y_0 - y^*\right) a^t + y^* \qquad \left(a \neq 1\right). \tag{34}$$

В исключенном случае $a = 1$ уравнение принимает вид

$y_{t+1} = y_t + b$ (с отображением сдвига $f = y + b$).

Ясно, что оно задает арифметическую прогрессию с разностью b и, следовательно, имеет решение

$$y_t = y_0 + tb \quad \left(a = 1\right). \tag{35}$$

В этом случае точек равновесия нет и решения становятся неограниченными при $t \to \infty$.

Формула (34) позволяет легко проанализировать свойства устойчивости в содержательном случае $a \neq 1$:

- при $|a| < 1$ $\; y_t \to y^* \;\; \forall y_0$ и y^* глобально устойчива;

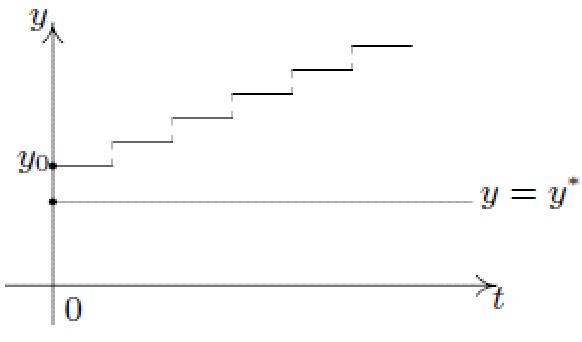
- при $|a| > 1$ $\; \left|a^t\right| \to \infty$ и траектории неограниченно удаляются от неустойчивой точки y^*;

- при $a = -1$ траектории совершают циклические колебания около точки равновесия, которая устойчива (но не асимптотически).

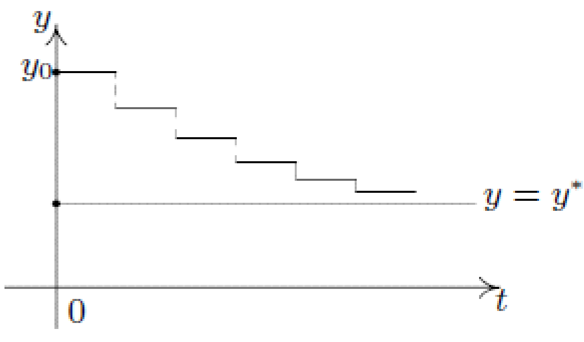
Качественное представление о поведении траекторий уравнения (32) дают рис. 4 и 5. Обращаем внимание на монотонную сходимость, или расходимость решений при $a > 1$ и колебательную при $a < 0$.

Замечание. Линейному уравнению (32) соответствует отображение $f = ay + b$. Оно представляет собой сумму отображений растяжения (ay) с коэффициентом $|a|$ и отображения сдвига на b единиц. Как мы видим, неподвижная точка оказывается притягивающей (глобально устойчивой), если только коэффициент растяжения меньше 1, т.е. в действительности имеет место сжатие.

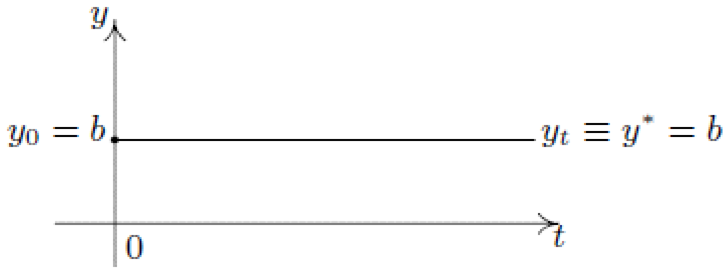
Заслуживает внимание и метод получения решения неоднородного уравнения, а также его структура. В этом методе на первом шаге находится некоторое частное решение неоднородного уравнения (в качестве него при $a \neq 1$ выступает стационарное решение y^*), на втором - решение соответствующего однородного уравнения, с подходящим начальным условием (в данном случае $y_0 - y^*$) и, наконец, эти решения суммируются и дают решение неоднородного уравнения с заданным начальным условием (см. (34)). Можно проверить, что и в случае $a = 1$ решение (35) можно получить по этой схеме (проверьте). Описанным методом можно получать решения всех линейных неоднородных разностных и дифференциальных уравнений.



$a \geq 1$ *монотонная расходимость*



$0 < a < 1$ *монотонная сходимость*



$a = 0$ *всего одно решение*

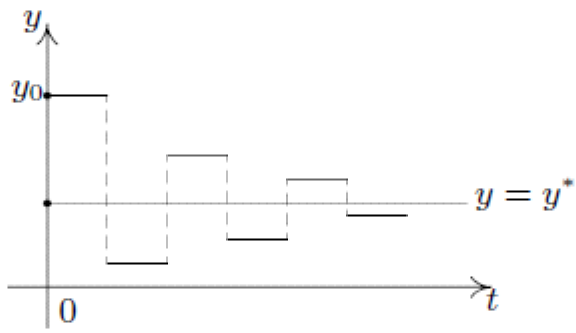
Рис. 4. **Поведение траекторий уравнения (32) при** $a \geq 0$

Отметим, что если ввести функцию

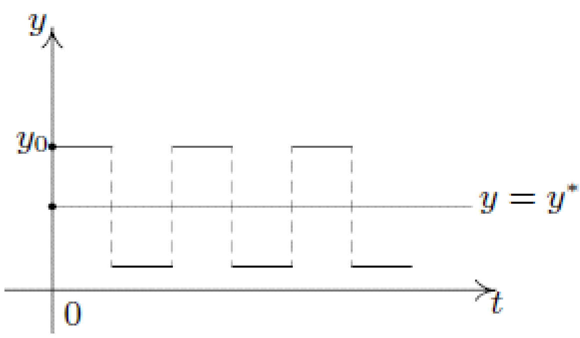
$$y(t,C) = Ca^t + y^t,$$

где $t \in Z_+$, а С произвольная постоянная, то она будет общим решением уравнения (32) при $a \neq 1$ (проверьте). Мы видим, что и общее решение лишенного неоднородного уравнения есть сумма общего решения, соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного.

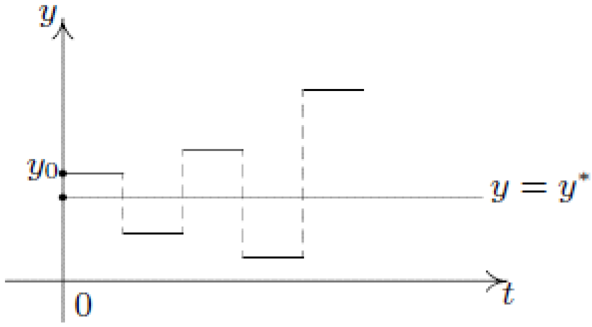
В действительности формулы (34), (35) тоже задают общее решение уравнения (32), так как начальная точка y_0 в них произвольна.



$0 < a < 1$ *затухающие колебания*



$a = -1$ *циклические колебания (с одной амплитудой)*



$a < -1$ *взрывные колебания (с нарастающей амплитудой)*

Рис. 5. **Поведение траекторий уравнения (32) при** $a < 0$

Пример 7. Решим уравнение $y_{t+1} = 0{,}5y_t + 10$. Здесь $a = 0{,}5$, $b = 10$, точка равновесия $y^* = 20$, общее решение соответствующего однородного уравнения $x_{t+1} = 0{,}5x_t$, это $x_t = C(0{,}5)^t$. Поэтому общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y_t = y(t, C) = C(0{,}5)^t + 20.$$

Решение с начальным условием $y\big|_{t=0} = y_0$ получается отсюда при $C = y_0 - y^* = y_0 - 20$ (см. (34)):

$$y_t = (y_0 - 20)(0{,}5)^t + 20.$$

Все они сходятся к неподвижной точке $y^* = 20$, которая устойчива.

B. Можно получить явную формулу для решения **общего неавтономного уравнения (31).** Однако она будет слишком громоздкой и практически удобнее непосредственно использовать метод, описанный в предыдущем пункте.

Ограничимся рассмотрением линейного уравнения

$$y_{t+1} = ay_t + b(t) \tag{36}$$

с постоянным коэффициентом a . Сначала обоснуем метод решения.

Теорема 4. Пусть $\{\bar{y}_t\}$ любое частное решение уравнения (30). Тогда, решение этого уравнения, с начальной точкой y_0 представимо в виде

$$y_t = \left(y_0 = \bar{y}_0\right)a^t + \bar{y}_t, \qquad t \in Z_+ \tag{37}$$

(общее решение однородного уравнения плюс частное решение неоднородного). Так как y_0 здесь произвольно, то эта формула дает общее решение уравнения (36).

Доказательство практически не отличается от рассуждения пункта б). Пусть $\{y_t\}$- искомое решение, стартующее из y_0. Положим $x_t = y_t - \bar{y}_t$. Тогда $x_0 = y_0 - \bar{y}_0$ и

$$x_{t+1} = y_{t+1} - \bar{y}_{t+1} \overset{(36)}{=} ay_t + b(t) - \bar{y}_{t+1} = ax_t + a\bar{y}_t + b(t) - \bar{y}_{t+1} = ax_t,$$

так как $\{y_t\}$ удовлетворяет уравнению (36). Для x_t получили однородное уравнение с решением $x_t = \left(y_0 - \bar{y}_0\right)a^t$. Обратной подстановкой получаем формулу (37).

При использовании теоремы 4 основная трудность состоит в подборе частного решения. Два последующих утверждения содержат соответствующие рецепты для некоторых типичных случаев.

Теорема 5. Пусть $b(t) = P(t)$ некоторый полином от t. Тогда, уравнение (36) имеет частное решение вида $\bar{y}_t = Q(t)$, где $Q(t)$ тоже полином:

- той же степени, что и P, если $a \neq 1$;

- степени на единицу выше P, если $a = 1$.

Доказательство теоремы заменим, иллюстрацией этого утверждения на примере уравнения

$$y_{t+1} = ay_t + t,$$

где $b(t) = t$. Попробуем искать его частное решение в виде $\bar{y}_t = Q(t) = At + B$, где A, B неопределенные коэффициенты. Подставляя $\bar{y}_t = At + B$ в уравнение, придем к равенству

$$B = A(t+1) = a\left(At + B\right) + t.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t слева и справа, получим систему для определения A, B:

$$aA+1=A, \qquad A+B=aB.$$

Если $a\neq 1$, то отсюда находим

$$A=\frac{1}{1-a}, \qquad B=\frac{1}{(1-a)^2}.$$

Поэтому

$$\bar{y}_t=\frac{t}{1-a}-\frac{1}{(1-a)^2}, \qquad y_0=-\frac{1}{(1-a)^2}$$

и общее решение найдется по формуле (37).

Если же $a=1$, то частное решение будем искать в виде

$$\bar{y}_t=At^2+Bt+C.$$

Вновь подставляя в уравнение, придем к системе для определения неизвестных коэффициентов:

$$2A+B=b+1, \qquad A+B=0, \qquad C=0$$

(проверьте). Отсюда находим $A=\frac{1}{2}, \quad B=-\frac{1}{2}$ и получаем частное решение

$$\bar{y}_t=\frac{t^2}{2}-\frac{t}{2}, \quad \bar{y}_0=0.$$

Остается вновь воспользоваться формулой (37).

Теорема 6. Пусть $b(t)=\lambda^t P(t)$ произведение степени числа λ и полинома от t. Тогда уравнение (36) имеет частное решение вида $\bar{y}_t=\lambda^t Q(t)$, где $Q(t)$ полином:

- той же степени, что и P, если $\lambda\neq a$,

- степени на единицу выше P, если $\lambda=a$.

Доказательство опускаем.

Практически частные решения находят методом неопределенных коэффициентов, задавая степень искомого полинома в соответствии с теоремами 5 и 6.

Пример 8. Найдем частное решение уравнения $y_{t+1} = ay_t + \lambda^t$ при $\lambda \neq a$. Здесь $P(t)$ и мы должны искать его в виде

$$\bar{y}_t = \lambda^t \left(At + B\right).$$

Подставляя в уравнение, напучим равенство

$$\lambda^{t+1}\left(A\left(t+1\right)+B\right) = a\lambda^t\left(At+B\right)+t\lambda^t,$$

или после сокращения на A,

$$\lambda At + \lambda A + \lambda B = \left(aA+1\right)t + aB.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t слева и справа, получаем систему для определения коэффициентов A, B:

$$\lambda A = aA + 1, \quad \lambda A + \lambda B = aB.$$

Отсюда находим

$$A = \frac{1}{\lambda} - a, \quad B = -\frac{\lambda}{\left(\lambda - a\right)^2},$$

а вместе с ними и частное решение.

При $\lambda = a$ частное решение можно найти в виде $\bar{y}_t = \lambda^t\left(Ct^2 + Dt\right)$.

Замечание. Согласно утверждению теоремы 6, общее решение уравнения

$$y_{t+1} = ay_t + \lambda P\left(t\right),$$

имеет вид

$$y_t = \left(y_0 - Q\left(0\right)\right)a^t + \lambda^t Q\left(t\right),$$

где $Q\left(t\right)$некоторый полином. Хотя данное уравнение неавтономно, поведение его решений при $t \to \infty$представляет интерес. Нетрудно показать, что здесь имеются следующие возможности:

- при $|a|<1$ $|\lambda|<1$ $\quad y_t \to 0 \quad \forall y_0$;

- при $|a|=1,$ $|\lambda|<1$ $\quad y_t \to y_0 - Q\left(0\right) \quad \forall y_0$;

- при $a=-1,$ $|\lambda|<1$ сходимости нет, но траектории не разбегаются от тренда (тенденции) $y=0$, а колеблются около него;

- в остальных случаях траектории расходятся.

Отметим, что решения уравнения, описанного в утверждении теоремы 5, являются расходящимися.

Упражнения

1. Используя метод итераций, найти решения следующих линейных уравнений с указанной начальной точкой:

$a)\ y_{t+1} = y_t + 1, \quad y_0 = 1;$

$б)\ y_{t+1} = \alpha y_t, \quad y\big|_{t=0} = y_0;$

$в)\ y_{t+1} = \alpha y_t - \beta, \quad y_e = y_0 \ при \ t = 0.$

2. Используя фазовую диаграмму, исследовать на устойчивость неподвижные точки уравнений из задачи 1.

3. Найти фазовые множества, точки равновесия и исследовать их на устойчивость с помощью фазовой диаграммы:

$$a)\ y_{t+1} = \frac{3}{16} + y_t^2;$$

$$б)\ y_{t+1} = 2 - 3y_t^2;$$

$$в)\ y_{t+1} = 4 + \frac{9}{4y_t};$$

$$г)\ y_{t+1} = 1 + \frac{3}{y_t}.$$

4. а) изобразить в координатной плоскости (t, y) траектории уравнений из примера 6 и построить фазовые диаграммы;

б) найти решения уравнения $y_{t+1} = ay_t$ и исследовать устойчивость точки равновесия в зависимости от параметра a.

5. При анализе уравнения $y_{t+1} = a(y_t)^\alpha$, $\alpha > 0$ обычно в качестве фазового множества выбирают полуось R_+. Однако для некоторых α её можно взять более широкой.

а) указать, для каких α можно положить $\mathcal{S} = R$?

б) рассмотреть два уравнения с дробным и целым значением α из ответа на вопрос а). Найти их решения, исследовать на устойчивость точки равновесия (на фазовой прямой R) и построить фазовые диаграммы.

6. Рассмотрим основное уравнение неоклассической модели экономического роста:

$$k_{t+1} = \upsilon\Big(f\left(k_t\right) + \left(1-b\right)k_t - c_t \Big).$$

Исследовать его на устойчивость при степенной производственной функции $f\left(k\right) = \sqrt{k}$ и среднедушевом потреблении $c_t = cf\left(k_t\right)$, где $c \in \left(0{,}1\right)$ норма потребления.

В задачах 7-12 требуется:

1) найти общее решение (с произвольным начальным условием);

2) получить из него частное решение, соответствующее начальному условию, если оно указано;

3) исследовать на устойчивость точки равновесия (для характеристики типов поведения траекторий используйте рис. 4 и 5).

7. $y_{t+1} = -3y_t + 4, \quad y_0 = 4;$

8. $y_{t+1} - 0{,}3y_t = 6, \quad y_0 = 4;$

9. $2y_{t+1} - y_t = 6, \quad y_0 = 7;$

10. $y_{t+1} - 0{,}1y_t = 9;$

11. $y_t - y_{t-1} = -1;$

12. $y_{t+1} - 5y_t = -2.$

Вопросы для самопроверки

1. Для чего вводится фазовое множество?

2. Что означают записи: $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}; \quad f : \mathcal{D} \to \mathcal{S}$?

3. В чем состоит условие согласования области определения и области значений отображения, задающего разностное уравнение первого порядка?

4. Для каких отображений f фазовое множество совпадает с числовой прямой R^1?

5. Совпадают ли неподвижные точки разностного уравнения и соответствующего ему отображения?

6. Пусть $y*$ точка равновесия уравнения $y_{t+1} = f\left(y_t\right)$. Может ли траектория $\left\{y_t\right\}$, стартующая с $y_0 \neq y*$, прийти в $y*$?

7. Почему в разностном уравнении с несколькими точками равновесия не может быть глобально асимптотически устойчивой точки?

8. Могут ли пересекаться множество притяжений различных неподвижных точек?

9. Почему в определении устойчивости естественно использовать наречие «асимптотически»?

10. Пусть траектория $\left\{y\left(t;y_0\right)\right\}$ уравнения $y_{t+1} = f\left(y_t\right)$ сходится к точке a при $t \to \infty$. Что можно сказать о точке a, если:

а) функция f непрерывна; б) f разрывна?

11. Что называется линейным неавтономным разностным уравнением первого порядка?

12. Что называется линейным автономным разностным уравнением первого порядка?

13. Какое отображение соответствует линейному автономному разностному уравнению первого порядка?

14. Как связаны между собой общее и частное решения линейного разностного уравнением первого порядка?

§41. Линейные разностные уравнения второго порядка

Ключевые слова: *линейное разностное уравнение k-го порядка, определитель Казоратти, характеристическое уравнение однородного линейного разностного уравнения, модель делового цикла Самуэльсона – Хикса.*

1. Линейные разностные уравнения k-го порядка

Определение. Разностное уравнение вида

$$a_k(t)y_{t+k} + \cdots + a_1(t)y_{t-1} + a_0(t)y_t = f(t), \tag{1}$$

где $a_0, a_1, ..., a_k$, f - некоторые функции от t ($a_0 \neq 0,\ a_k \neq 0$) называется **линейным разностным уравнением k - го порядка.**

Определение. Разностное уравнение вида

$$a_k(t)y_{t+k} + \cdots + a_1(t)y_{t-1} + a_0(t)y_t = 0, \tag{2}$$

называется **линейным однородным разностным уравнением**, соответствующим уравнению (1). Само же уравнение (1) называется **неоднородным.**

Проведя рассуждения, аналогичным рассуждениям, которые проводятся в случае линейных дифференциальных уравнений нетрудно убедиться в справедливости следующих утверждений.

Теорема 1 ***(об общем решении линейного неоднородного уравнения).*** Общее решение линейного неоднородного разностного уравнения (1) есть сумма частного решения $\bar{y}(t)$ этого уравнения и общего решения соответствующего ему однородного уравнения (1).

Теорема 2 ***(об общем решении линейного однородного уравнения).*** Пусть $y^{(1)}(t), \ldots, y^{(k)}(t)$ - система, состоящая из k линейно независимых решений линейного однородного разностного уравнения, тогда общее решение этого уравнения задается формулой:

$$y(t) = C_1 y^{(1)}(t) + \cdots + C_k y^{(k)}(t). \tag{3}$$

Определение. Множество решений линейного однородного разностного уравнения k-го порядка образует k - мерное линейное пространство, а любой набор $y^{(1)}(t),\dots,y^{(k)}(t)$ из k линейно независимых решений (называемый **фундаментальным набором**) является его базисом.

Признаком линейной независимости решений $y^{(1)}(t),\dots,y^{(k)}(t)$ однородного уравнения является неравенство нулю определителя **Казоратти:**

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_t^{(1)} & y_t^{(2)} & \cdots & y_t^{(k)} \\ y_{t+1}^{(1)} & y_{t+1}^{(2)} & \cdots & y_{t+1}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{t+k}^{(1)} & y_{t+k}^{(2)} & \cdots & y_{t+k}^{(k)} \end{vmatrix},$$

который является аналогом определителя Вронского в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Линейные разностные уравнения k-го порядка с постоянными коэффициентами

В случае, когда коэффициенты $a_0, a_1,\dots,a_k$ являются постоянными, методы решения линейного однородного разностного уравнения

$$a_k y_{t+k} + \cdots + a_1 y_{t-1} + a_0 y_t = 0, \tag{5}$$

во многом аналогичны методам решения дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Действительно, будем искать решения уравнения в виде:

$$y_t = \lambda^t, \tag{6}$$

где $\lambda \neq 0$ - некоторая постоянная. Подставляя выражение для y_t из (6) в (5), находим:

$$a_k\lambda^{t+k} + a_{k-1}\lambda^{t+k-1} + \cdots + a_1\lambda^{t+1} + a_0\lambda^t = 0.$$

Разделим обе части этого уравнения на λ^t Л", получим:

$$a_k\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0. \tag{7}$$

Определение. Уравнение (7) называется **характеристическим уравнением однородного линейного разностного уравнения.**

Так же, как и в случае линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, знание корней характеристического уравнения позволяет построить общее решение однородного разностного уравнения. Для простоты изложения продемонстрируем это на примере уравнения второго порядка.

3. Линейные разностные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами

А. Рассмотрим однородное линейное разностное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами в следующем виде

$$ay_{t+2} + by_{t+1} + cy_t = 0,\ a \neq 0,\ c \neq 0. \tag{8}$$

Однако заметим, что полученные в этом случае результаты могут быть без труда перенесены на случай уравнений более высокого порядка. В зависимости от значения дискриминанта $D = b^2 - 4ac$,

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{9}$$

характеристического уравнения возможны следующие случаи.

Случай 1. $D > 0$. Характеристическое уравнение имеет два действительных и различных корня - λ_1 и λ_2. Тогда $\lambda_1 \neq 0$ и $\lambda_2 \neq 0$. Действительно, если хотя бы один корень равен нулю, то коэффициент и $c = \lambda_1\lambda_2$ также будет равен нулю, что противоречит определению линейного разностного уравнения второго порядка. Корням λ_1 и λ_2 характеристического уравнения соответствуют два решения:

$$y_t^{(1)} = \lambda_1^t, \quad y_t^{(2)} = \lambda_2^t$$

уравнения (9). Покажем, что эти решения линейно независимы. Для этого вычислим определитель Казоратти:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1^t & \lambda_2^t \\ \lambda_1^{t+1} & \lambda_2^{t+1} \end{vmatrix} = \lambda_1^t\lambda_2^{t+1} - \lambda_1^{t+1}\lambda_2^t = \lambda_1^t\lambda_2^t\left(\lambda_2 - \lambda_1\right).$$

Так как корни λ_1 и λ_2 различны, то $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$, следовательно, $\Delta \neq 0$, а значит, решения линейно независимы. В этом случае общее решение уравнения имеет вид:

$$y(t) = C_1\lambda_1^t + C_2\lambda_2^t\ , \tag{10}$$

где C_1, C_2 - произвольные постоянные.

Пример 1. Решить уравнение $y_{t+2}+4y_{t+1}-5y_t=0.$

Решение

Составим характеристическое уравнение, и имеем:

$$\lambda^2+4\lambda-5=0.$$

Оно имеет два действительных различных корня: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-5$. Поэтому общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$y(t)=C_1+C_2(-5)^t.$$

Упражнение. Решить уравнение $y_{t+2}+5y_{t+1}+6y_t=0.$

Случай 2. $D<0$. Характеристическое уравнение имеет два комплексно сопряженных корня - λ_1 и λ_2, которые, используя тригонометрическую форму записи, могут быть представлены следующим образом:

$$\lambda_1=r(\cos\phi+i\sin\phi),\quad \lambda_2=r(\cos\phi-i\sin\phi),$$

где r - модуль λ_1, а ϕ - его аргумент. Соответствующие решения разностного уравнения также комплексно сопряжены и на основании формулы Муавра имеют вид:

$$y_t^{(1)}=r^t(\cos t\phi+i\sin t\phi),\quad y_t^{(2)}=r^t(\cos t\phi-i\sin t\phi).$$

Чтобы получить действительные решения, заменим $y_t^{(1)}$ и $y_t^{(2)}$ их линейными комбинациями:

$$z_t^{(1)}=\frac{y_t^{(1)}+y_t^{(2)}}{2},\quad z_t^{(2)}=\frac{y_t^{(1)}-y_t^{(2)}}{2}.$$

Таким образом, мы получили два линейно независимых действительных решения:

$$z_t^{(1)}=r^t\cos t\phi,\quad z_t^{(2)}=r^t\sin t\phi.$$

Таким образом, в данном случае общее решение имеет вид:

$$y_t=r^t(C_1\cos t\phi+C_2\sin t\phi).$$

Пример 2. Решить уравнение $y_{t+2}-2y_{t+1}+4y_t=0.$

Решение

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0$ имеет два комплексно сопряженных корня - $\lambda_1 = 1 + \sqrt{3}i$ и $\lambda_2 = 1 - \sqrt{3}\,i$, которые могут быть записаны как:

$$\lambda_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right), \quad \lambda_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\phi\right).$$

Следовательно, общим решением исходного уравнения будет:

$$y_t = 2^t\left(C_1\cos\frac{\pi}{3}t + C_2\sin\frac{\pi}{3}t\right).$$

Упражнение. Решить уравнение $y_{t+2} + 3y_{t+1} + 4y_t = 0.$

Случай 3. D = 0. Оба корня характеристического уравнения действительны и равны $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Покажем, что в этом случае кроме решения

$$y_t^{(1)} = \lambda^t$$

существует еще одно решение, линейно независимое с $y_t^{(1)}$. Действительно, нетрудно убедится, что таковым является:

$$y_t^{(2)} = t\lambda^t.$$

Сначала докажем, что $y_t^{(2)}$ является решением уравнения (8). В самом деле, подставляя выражение для $y_t^{(2)}$ в уравнение (8), получим:

$$a(t+2)\lambda^{t+2} + b(t+1)\lambda^{t+1} + ct\lambda^t = \lambda^t\left(a(t+2)\lambda^2 + b(t+1)\lambda + ct\right) =$$

$$= \lambda^t\left(t\left(a\lambda^2 + \lambda t + c\right) + 2a\lambda^2 + b\lambda\right) = 0$$

в силу того, что $a\lambda^2 + \lambda t + c = 0$ и $\lambda = -\dfrac{b}{2a}.$

Вычислим теперь определитель Казоратти. Имеем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda^t & t\lambda^t \\ \lambda^{t+1} & (t+1)\lambda^{t+1} \end{vmatrix} = \lambda^{2t+1} \neq 0,$$

так как $\lambda \neq 0$. Следовательно, частные решения $y_t^{(1)}$ и $y_t^{(2)}$ линейно независимы, и общее решение уравнения (8) имеет вид:

$$y_t = \lambda^t \left(C_1 + C_2 t\right).$$

Пример 3. Решить уравнение $y_{t+2} + 6y_{t+1} + 9y_t = 0.$

Решение

Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ имеет единственный корень $\lambda = -3$. Следовательно, общее решение исходного уравнения таково:

$$y_t = \left(-3\right)^t \left(C_1 + C_2 t\right).$$

Упражнение. Решить уравнение $y_{t+2} - 5y_{t+1} + 25y_t = 0.$

Б. Для нахождения решения неоднородного линейного разностного уравнения, так же как и в случае линейных дифференциальных уравнений, используется метод неопределенных коэффициентов, основанный на подборе частного решения неоднородного уравнения по виду правой части $f\left(t\right)$.

Пример 4. Решить уравнение $y_{t+2} + 2y_{t+1} - 3y_t = 64 \cdot 5^e.$

Решение

Будем искать частное решение в виде:

$$y\left(t\right) = p5^t.$$

Подставляя это выражение в наше уравнение, получим:

$$p\left(25 + 10 - 3\right) \cdot 5^t = 64 \cdot 5^t.$$

Следовательно, $p = 2$, а значит

$$y\left(t\right) = 2 \cdot 5^t.$$

Решая характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\lambda - 34 = 0,$$

находим $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -3$. Таким образом, общее решение уравнения имеет вид:

$$y\left(t\right) = C_1 + C_2\left(-3\right)^t + 2 \cdot 5^t.$$

Упражнение. Решить уравнение $y_{t+2} - 5y_{t+1} + 6y_t = 7.$

4. Модель делового цикла Самуэльсона - Хикса

Рассмотрим пример, иллюстрирующий применение линейных разностных уравнений 2–го порядка с постоянными коэффициентами. В качестве иллюстрации возьмем модель делового цикла **Самуэльсона - Хикса** (динамического варианта **модели Кейнса**). Эта модель основывается на принципе акселерации, то есть на предположении, что объемы инвестирования прямо пропорциональны приросту национального дохода. Данное предположение характеризуется следующим уравнением:

$$I(t)=V\big(Y(t-1)-Y(t-2)\big), \tag{11}$$

где коэффициент $V>0$ - фактор акселерации, $I(t)$ - величина инвестиций в период t, $Y(t-1)$, $Y(t-2)$ - величины национального дохода, соответственно, в $(t-1)$ - м и $(t-2)$ - м периодах. Предполагается также, что спрос на данном этапе зависит от величины национального дохода на предыдущем этапе, т.е.:

$$C(t)=aY(t-1)+b. \tag{12}$$

Условие равенства спроса и предложения имеет вид:

$$Y(t=)I(t)+C(t). \tag{13}$$

Подставляя в (13) выражение для $I(t)$ из (11) и выражение для $C(t)$ из (12), находим:

$$Y(t)=(a+V)Y(t-1)-VY(t-2)+b. \tag{14}$$

Уравнение (14) известно, как **уравнение Хикса.** Оно представляет собой неоднородное линейное разностное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами (если предположить, что на протяжении рассматриваемых периодов величины a и Y постоянны).

Замечание. Мы можем легко найти частное решение уравнения (14), если положим, что:

$$Y(t)=Y(t-1)=Y(t-2)=Y^*, \tag{15}$$

т.е. использовав в качестве частного решения равновесное решение $Y^*=const$.

Из (14) в силу (15) имеем:

$$Y^* = (a+V)Y^* - VY^* + b,$$

откуда:

$$Y^* = b(1-a)^{-1}. \qquad (16)$$

Заметим также, что выражение $(1-a)^{-1}$ в формуле (16) носит название **мультипликатора Кейнса** и является одномерным аналогом **матрицы полных затрат.**

Пример 5. Рассмотрим модель Самуэльсона - Хикса при условии, что $a = 0{,}5;\ V = 0{,}5;\ B = 4.$ В этом случае уравнение (14) принимает вид:

$$Y(t) - Y(t-1) - 0{,}5Y(t-2) = 4.$$

Его частным решением будет:

$$y(t) = \frac{4}{1-0{,}5} = 8.$$

Найдем корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 - \lambda + 0{,}5 = 0\,.$$

Имеем

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} \pm i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Следовательно, общим решением уравнения будет:

$$Y(t) = \left(\sqrt{2}\right)^t \left(C_1\cos\frac{\pi}{4}t + C_2\sin\frac{\pi}{43}t\right) + 8.$$

Замечание. В зависимости от значений a и V возможны четыре типа динамики. Она может быть растущей или затухающей и при этом иметь или не иметь колебательный характер. Так, в рассмотренном выше примере динамика носила колебательный характер с возрастающей амплитудой.

Упражнение

1. Самостоятельно определить виды динамики в зависимости a и V.

Упражнение

Решить уравнения

1. $y_{t+2} - 6y_{t+1} + 9y_t = 3;$

2. $y_{t+2} + 5y_{t+1} + 6y_t = 3;$

3. $3y_{t+2} + 3y_{t+1} - 4y_t = 8.$

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение и приведите пример разностного уравнения k-го порядка.

2. Как связаны между собой общее и частное решения одного разностного уравнения?

3. Чему равна степень характеристического уравнения линейного однородного разностного уравнения k - го порядка?

4. Какой вид имеет общее решение линейного однородного разностного уравнения 2- го порядка в случае, когда его характеристическое уравнение имеет:

а) действительные корни?

б) комплексно-сопряженные корни?

в) кратный корень?

5. В каких случаях используется метод неопределенных коэффициентов для решения неоднородного линейного разностного уравнения и в чем его суть?

6. Приведите примеры, иллюстрирующие применение линейных разностных уравнений 2–го порядка с постоянными коэффициентами в моделях экономики.

§ 42. Динамические модели

Ключевые слова: *динамические процессы, динамические модели, нелинейные динамические модели 1–го порядка, логистическое уравнение, банковский вклад при убывающей процентной ставке, бифуркация, логистическое уравнение и эффективность рекламы, логистическое уравнение спроса, модели адаптации рыночной цены, макромодель неоклассического роста, модель циклического роста Хавельмо.*

1. Введение

Определение. Как уже нам известно (см. §40), развивающиеся во времени процессы называют **динамическими процессами**.

Определение. Модели, которые описывают эти процессы, называют **динамическими моделями**.

Все переменные в динамических моделях в общем случае зависят от времени t, которое выступает в качестве независимой переменной.

Математическую формализацию понятия состояния динамической (движущейся) системы дал А. Пуанкаре (1854-1912). Модель Пуанкаре исходит из представления множества возможных состояний системы в виде некоторого пространства состояний или фазового пространства, где в качестве переменных выступают не только координаты, но и скорости. Поэтому состояния динамических систем будут близкими, если близки не только их конфигурации, но и их скорости. Задание координат и скоростей полностью определяет движение системы, поэтому в отличие от привычного нам евклидового пространства, из любой точки фазового пространства может выходить только одна траектория. Фазовые траектории никогда не пересекаются, так как в каждой точке состояние системы определено однозначно, и, следовательно, однозначно задано дальнейшее движение. Так что все фазовое пространство разбивается на непересекающиеся фазовые траектории.

Режимы движения динамической системы могут качественно отличаться. Так, например, математический маятник может совершать колебания, а может вращаться вокруг своей оси. Поэтому фазовое пространство разбивается на области качественно разных режимов движения (разной динамики), отвечающие траекториям разного топологического типа. Области разной динамики отделены друг от друга фазовыми траекториями, называемыми сепаратрисами (separate - разделять, отделять). Фазовое пространство, разбитое на области разной динамики дает фазовый портрет динамической системы.

Определение. Правило, по которому значения динамических переменных в любой последующий момент времени получаются из исходного набора, задает оператор эволюции системы.

Динамические модели экономики относятся к динамическим системам. Различают динамические модели с дискретным и непрерывным временем, т.е. *дискретные* и *непрерывные модели.* С математической точки зрения дискретные модели описываются так называемыми *разностными уравнениями и системами,* а непрерывные - *дифференциальными уравнениями и системами.*

Мы ранее в §40 рассмотрели некоторые линейные динамические модели 1- го порядка экономики. Исследовали глобальную и локальную устойчивость точек равновесия линейных разностных уравнений 1– го порядка, которыми описываются такие модели; проводили качественный анализ поведения траекторий этих уравнений.

Возможности использования линейных моделей 1-го порядка ограничены, поскольку решения в этих моделях не вполне адекватно отражают рассматриваемый процесс. В этом смысле нелинейные модели являются гораздо более гибкими.

2. Нелинейные динамические модели 1– го порядка

Ознакомление с нелинейными моделями начнем с так называемого **логистического уравнения,** которое в непрерывном времени имеет вид

$$y' = ay - by^2, \tag{1}$$

а в дискретном

$$y(t+1) = ay(t) - by^2(t), \tag{2}$$

где $a, b > 0$ некоторые параметры.

Логистическое уравнение возникает в невероятно большом числе ситуаций. Это объясняется, по-видимому, интересными свойствами его решений (как в непрерывном, так и особенно в дискретном случае).

Определение. Уравнения типа (1) или (2) часто называют моделью Ферхюльсте - Пирла по имени ученых, предложивших его в качестве альтернативы к «жесткой» модели Мальтуса для описания динамики биологической популяции.

Переписав их в виде

$$\frac{y'}{y} = a - by,$$

$$\frac{y(t+1)}{y(t)} = a - by(t),$$

можно заметить, что в непрерывной модели (1) темп прироста линейно убывает по y, а в дискретной так же ведет себя темп роста (т.е. они уже не являются постоянными, как у Мальтуса). При малых значениях y главным членом в уравнениях (1), (2) является ay, так что при таких y решения этих уравнений ведут себя подобно мальтузианским, но с ростом y начинают превалировать вторые слагаемые, вступают в действие процессы саморегуляции и лимитирования; чем больше значение y, тем сильнее действуют лимитирующие факторы.

Отметим, что все модификации модели Мальтуса, приводящие к более «мягким» моделям, связаны с моделированием коэффициента прироста зависимостью

$$\frac{y'}{y} = \phi(y), \quad \text{т.е.} \quad y' = \phi(y)y,$$

где $\phi(y) \approx a > 0$ при малых y, является убывающей функцией и $\phi(y) < 0$, когда y достаточно велико.

Пример 1. ***Банковский вклад при убывающей процентной ставке.*** Предположим, что некоторый политик или финансовый «гений» заметил, что с ростом времени сумма банковского вклада неограниченно возрастает (пример 1 из §33) и, желая воспрепятствовать беспредельному обогащению, предложил, чтобы процентная ставка уменьшалась пропорционально текущей сумме вклада. Это означает, что в динамических моделях (12), (16) из §33 коэффициент роста r надо заменить на

$$r\left(1-\frac{S(t)}{S_{\max}}\right),$$

что приводит к логистическим уравнениям вида

$$S(t+1)=\left(1+r\left(1-\frac{S(t)}{S_{\max}}\right)\right)S(t), \tag{3}$$

$$S'=r\left(1-\frac{S(t)}{S_{\max}}\right)S(t), \tag{4}$$

где $S_{\max}$ - параметр.

Казалось бы, что, благодаря механизму обратной связи (ставка зависит от суммы), решения уравнений (3), (4) и численность популяции в аналогичных моделях (1), (2) должны как-то стабилизироваться со временем. Как мы увидим далее, в непрерывной логистической модели дело обстоит именно так, но в дискретной модели возникают поразительные эффекты: при изменении параметров $r,\ S_{\max}$ поведение решений может резко меняться или, как принято говорить, происходит **бифуркация**; с ростом r оно и вовсе становится хаотическим (чрезвычайно сложным при $t\to\infty$) и даже на сегодня малоизученным.

Замечание. Этот факт показывает, что аналогичные между собой дифференциальные и разностные уравнения могут иметь существенно различающееся поведение решений. Данное обстоятельство нужно учитывать при построении моделей различных систем.

Пример 2. ***Логистическое уравнение и эффективность рекламы.*** Пусть переменная y означает долю населения города или региона, которое информировано через рекламу о товаре фирмы. Прирост этой части населения зависит от интенсивности обмена информацией между этой частью населения и потенциально еще возможной (т.е. $1-y$). Это соображение формализуется уравнением

$$y' = ay(1-y)$$

в непрерывном времени и уравнением

$$y(t+1) = y(t) + ay(t)\big(1 - y(t)\big)$$

в дискретном. Здесь параметр $a > 0$ характеризует интенсивность обмена информацией; в частности, он может зависеть от расходов фирмы на рекламу.

Если принять во внимание «забывание» покупателей о рекламе товара, то можно модифицировать приведенные уравнения путем добавления в правые части слагаемого $(-cy)$, где $c > 0$ коэффициент «забывания».

Пример 3. ***Логистическое уравнение спроса.*** Для построения функции спроса от дохода $D = D(I)$ естественно принять следующие гипотезы о свойствах коэффициента эластичности этой функции, т.е. показатели

$$E(D,I) = I\frac{D'(I)}{D(I)}: \tag{5}$$

а) $E(D,I) > 0,$ поскольку с ростом дохода потребители склонны увеличивать спрос;

б) частная производная $E'_D(D,I) < 0$, так как при постоянном доходе более высокий уровень удовлетворенного спроса влечет уменьшение склонности к потреблению данных благ;

в) $E'_I(D,I) > 0,$ поскольку при постоянном уровне потребления реакция на изменение дохода тем сильнее, чем выше уровень дохода.

Простейшей зависимостью, которая удовлетворяет гипотезам а) - в), является функция

$$E(D,I) = aI(M - D), \tag{6}$$

где $a, M > 0$, причем считается, что $0 < D < M$, чтобы обеспечить условие $E > 0$. Если подставить (6) в (5), то получим логистическое уравнение

$$\frac{dD}{dt} = aD\left(M - D\right), \tag{7}$$

где $D\left(I\right)$ искомая функция, а I независимая переменная.

Именно последнее обстоятельство примечательно: данный пример это один из тех редких случаев, когда в экономике возникает дифференциальное уравнение нединамического характера, поскольку неизвестная функция в (7) не зависит от времени.

Бегло укажем еще ряд приложений логистической модели, ограничившись, случаем непрерывного времени.

1. Если в модели (1) популяция как бы «предоставлена сама себе» (ни с кем не взаимодействует и не подвержена внешним воздействиям), то в модели, учитывающей возможность промысла, надо ввести дополнительную экзогенную переменную v интенсивность промысла (число особей, вылавливаемых в единицу времени) и заменить уравнение (1) следующим

$$y' = ay - by^2 - v. \tag{8}$$

2. Пусть y - это величина национального дохода экономики с ограниченными ресурсами, а v расходы непроизводственного характера (вооружение, ведение боевых действий и т.д.). Уравнение (8) описывает в этой ситуации динамику национального дохода.

3. Пусть нас интересует влияние показателя благосостояния W на численность населения. Тогда можно принять, что при модификации модели Мальтуса $y' = ay$ коэффициент роста не только уменьшается с ростом y, но и увеличивается с ростом количества благ на душу населения; например, можно заменить a на $a - by + c \cdot \frac{W}{y}$, что дает уравнение

$$y' = ay - by^2 + cW.$$

4. Уравнение (8) можно использовать для оценки влияния «утечки мозгов» и сокращения финансирования образования и науки. При этом, у это число квалифицированных специалистов, а v - интенсивность «утечки мозгов» (эмиграция, переход в бизнес, торговлю и т.д.).

Обратимся теперь к другим наиболее известным в экономике нелинейным моделям первого порядка.

Пример 4. ***Модели адаптации рыночной цены.*** Рассмотрим простой рынок товара, который не находится в равновесии. Пусть $p(t)$ - цена товара в момент t, $D(p), S(p)$ - функции спроса и предложения, соответственно, $z(p)=D(p)-S(p)$- функция избыточного спроса. Предположим (вслед за Л. Вальрасом), что прирост текущего уровня цены определяется избыточным спросом. В самом общем виде это можно описать дифференциальным уравнением

$$p'=aF\left(z(p)\right) \tag{9}$$

или же его разностным аналогом

$$p(t+1)=p(t)+aF\left(z\left(p(t)\right)\right).$$

Здесь $a>0$ параметр адаптации, характеризующий скорость реакции цены на дисбаланс рынка, а $F(z)$ заданная функция с естественными свойствами $F(0)=0,$ $F(z)>0$ при $z>0$ и $F(z)<0$ при $z<0.$ В частности, можно положить $F=z$ (и тогда при линейных функциях D, S дифференциальное уравнение (9) будет линейным).

Конечно, возможны и другие варианты описания приспособления цены к дисбалансу рынка. Например, можно предложить дискретную модель

$$p(t+1)=p(t)e^{az(p(t))},\quad a>0, \tag{10}$$

которая при линейных функциях $D, S,$обладает весьма экзотическими свойствами.

Пример 5. ***Макромодель неоклассического роста.*** Эта модель является одной из самых «расхожих» в литературе. Она состоит из следующих соотношений для макропеременных (ограничимся дискретной версией и упрощенными обозначениями типа y_t вместо $y(t)$:

а) $Y_t=C_T+I_t,\quad Y_t=F(K_t, L_t)$- условие равновесия и производственная функция;

б) уравнение динамики капитала с нормой амортизации b

$$K_{t+1} = K_t + I_t - bK_t = I_t + (1-b)K_t \ ; \qquad (11)$$

в) $S_t = I_t = sY_t$ - еще одно условие равновесия и линейная функция инвестиций (сбережений);

г) $L_t = (1+n)^t L_0$ - трудовые ресурсы растут с темпом n.

Здесь, как обычно, Y - национальный доход, C - потребление, I - инвестиции, K - капитал, L – труд, S – сбережения, s - склонность к сбережению.

Для математического анализа модель удобно преобразовать, пользуясь обычным свойством положительной однородности производственной функции $\left(F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L) \quad \forall \lambda > 0 \right)$ и переходом к удельным переменным

$$y = \frac{Y}{L}, \quad c = \frac{C}{L}, \quad k = \frac{K}{L}, \ i = \frac{I}{L}.$$

Вводя функцию

$$f(k) = F\left(\frac{K}{L}, 1\right),$$

преобразуем уравнение (11) к следующим (проверьте!)

$$y_t = c_t + i_t, \quad y_t = f(k_t), \quad k_{t+1} = v\left(i_t + (1-b)k_t\right),$$

где $v = \dfrac{1}{1+n}$. Исключая, y_t, i_t с помощью двух первых уравнений, получим основное уравнение **неоклассического роста**

$$k_{t+1}^p = v\left(f(k_t) + (1-b)k_t - c_t \right), \qquad (12)$$

в котором среднедушевое потребление c_t является экзогенной переменной.

Упражнение. Самостоятельно проверить, что «перевод» дискретной модели (12) на случай непрерывного времени (вместе с предположениями и последующими преобразованиями) приводит к следующему дифференциальному уравнению неоклассического роста

$$k' = f(k) - (b+n)k - c. \qquad (13)$$

Пример 6 представляет собой модификацию предыдущей модели, предложенную Р. Дэем в 1982 г. В отличие от неоклассической модели, он использовал нестандартную производственную функцию

$$\frac{Y_t}{L_t} = f(k_t) = Bk_t^{\beta}(M - k_t)^{\gamma}, \quad k_t \le M,$$

где $\beta, \gamma,\ M > 0$. Подстановка этой функции в (12) приводит к нелинейному разностному уравнению, которое при $\beta = \gamma = 1$оказывается логистическим.

Пример 7. ***Модель циклического роста Хавельмо.*** Эта макромодель включает в себя степенную производственную функцию

$$Y = AL^{\alpha}, \quad \alpha \in (0,1), \quad A > 0$$

и уравнение динамики занятых в виде дифференциального уравнения

$$\frac{L'}{L} = a - b\frac{L}{Y}.$$

Оно означает, что темп прироста занятых убывает с ростом трудоемкости $\frac{L}{Y}$. Подстановка Y в это равенство дает так называемое **уравнение Бернулли**

$$L' = aL - \frac{B}{A}L^{2-\alpha}. \tag{14}$$

Упражнение. Самостоятельно выписать дискретную версию этого уравнения.

Вопросы для самопроверки

1. Какие процессы называют динамическими процессами?

2. Что называют динамическими моделями?

3. Кто дал математическую формализацию понятия состояния динамической (движущейся) системы?

4. Прокомментируйте фразу: «Состояния динамических систем будут близкими, если близки не только их конфигурации, но и их скорости».

5. Почему фазовые траектории никогда не пересекаются?

6. Прокомментируйте фразу: «Фазовое пространство разбивается на области качественно разных режимов движения (разной ди-

намики), отвечающие траекториям разного топологического типа? Какие траектории называют сепаратрисами?

7. Что задает оператор эволюции системы?

8. Относятся ли динамические модели экономики к динамическим системам?

9. Какие динамические модели различают по времени?

10. С математической точки зрения, чем описываются дискретные модели? А непрерывные модели?

11. Почему нелинейные модели являются гораздо более гибкими чем линейные модели?

12. Что называют моделью Ферхюльсте – Пирла? Что называют логистическими уравнениями?

13. Как можно получить динамическую модель, которая описывает ситуацию *банковского вклада при убывающей процентной ставке?*

14. Во многих случаях при изменении параметров разностных уравнений, описывающих динамические системы, поведение решений может резко меняться или, как принято говорить, происходит бифуркация. Объясните происхождение бифуркации с помощью примеров.

15. Приведите некоторые приложения логистической модели в случае дискретного времени.

16. Укажите некоторые приложения логистической модели в случае непрерывного времени.

17. Прокомментируйте следующие наиболее известные в экономике нелинейные модели первого порядка: м*одели адаптации рыночной цены; макромодель неоклассического роста;* м*одель циклического роста Хавельмо.*

§43. Пространство элементарных исходов (событий). Определения вероятности

Ключевые слова: *событие, случайное событие, достоверное и невозможное события, несовместные события, равновозможные события, массовые или статистические случайные события, опыт (эксперимент, испытание), воспроизводимый опыт, наблюдаемый результат, пространство (множество) элементарных исходов, поле событий, элементарный исход, операция суммы, произведение событий, противоположное событие, алгебра событий, классическое определение, классическая схема или схема урн, факториал натурального числа, упорядоченное множество, размещения, перестановки, сочетания, статистическое определение вероятности, геометрическая вероятность.*

1. Случайные события и предмет теории вероятностей

Каждая математическая дисциплина, в том числе и теория вероятностей, отражает свойства реального мира. В каждой математической дисциплине есть свои основные понятия, связанные с предметом изучения. Эти понятия происходят из явлений и фактов окружающей нас действительности.

Начнем с описания тех явлений и фактов, которые лежат в основе понятия «случайное событие». Это описание еще не является математическим определением, однако оно заключает в себе некоторые свойства реального мира, изучение которых математическими методами является содержанием теории вероятностей.

При неоднократном воспроизведении одного и того же опыта результаты его могут изменяться от случая к случаю.

Так, в результате подбрасывания монеты может оказаться, что она падет либо гербом вверх («аверс»), либо гербом вниз («реверс»).

При бросании игральной кости на верхней ее грани может появиться одно из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Если из большого количества произведенных изделий выбрать наудачу одно, то такое изделие может оказаться либо стандартным, либо бракованным.

Всякой электролампе можно поставить в соответствие некоторое число - количество часов работы до момента перегорания.

В каждом из перечисленных выше примеров рассмотрен некоторый опыт (эксперимент, испытание), исход которого заранее предвидеть невозможно.

Определение 1. Некоторое событие называют *случайным* по отношению к данному опыту, если в его результате оно может появиться или не появиться.

Примеры. Следующие события являются случайными:

1. Событие, состоящее в том, что при бросании монеты выпадет герб (решетка).

2. Событие, состоящее в том, что при бросании игральной кости выпадет четное число очков.

3. Событие, состоящее в том, что наудачу выбранное изделие окажется бракованным.

4. Событие, состоящее в том, что электролампа будет гореть не менее трех часов.

Можно говорить о таких случайных событиях, как поражение мишени, выигрыш в лотерею, наличие сильных помех при радиоприеме и др.

Случайные события обозначаются в дальнейшем латинскими прописными буквами A, B, C и т.д.

Виды случайных событий. Сделаем сразу же одно замечание. Согласно данному выше определению, событие считается случайным, если его наступление в результате опыта представляет собой лишь одну из возможностей. Под это определение формально подходят и такие события, которые в результате данного опыта обязательно наступают; эти события называют *достоверными.* Например, достоверным является событие, состоящее в том, что при бросании игральной кости выпадает целое число очков или, что выбранное наугад слово из данной лекции содержит не более 50 букв. Итак, достоверное событие можно рассматривать как одну из разновидностей случайного события. Оно обозначается символом Ω (омега).

Аналогичное замечание относится и к *невозможным* событиям, т.е. таким, которые никогда не наступят при осуществлении данного опыта. Невозможное событие тоже можно рассматривать как случайное. Примером невозможного события может служить получение двух выигрышей по одному билету. Невозможное событие обозначается символом $\varnothing$ пустое множество.

Определение 2. События называют *несовместными,* если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

Комментарий к определению 2. Несовместные события не могут появиться в результате одного опыта.

Можно говорить о нескольких несовместных событий $A_1, A_2, ..., A_n$; в этом случае имеют в виду, что события $A_1, A_2, ..., A_n$, не могут наступить все сразу в результате одного испытания. Если в множестве $A_1, A_2, ..., A_n$ событий каждые два несовместны, то говорят, что эти события *попарно несовместны.*

Например, при бросании игральной кости события A «выпадет количество очков, равное 1 или 2» и B «выпадет количество очков, равное 4 или 5» несовместны.

Определение 3. События называют *равновозможными,* если есть основания считать, что ни одно из этих событий не является более возможными, чем другие.

В дальнейшем нас будут интересовать только такие опыты, которые можно повторить (в принципе) неограниченное число раз; именно такой характер носит опыт с бросанием монеты, покупкой лотерейного билета, обследованием изделия на годность или брак. Любое случайное событие, наступление которого возможно в такого рода опытах, называется *массовым* или *статистическим.*

Массовые случайные события следует отличать от единичных, исключительных, обладающих той особенностью, что опыт, с которым связаны эти события, принципиально невоспроизводим. Например «1 сентября 2018 года в Ташкенте шел дождь» является исключительным, так как воспроизвести наступление указанного дня невозможно. В то же время события «1 сентября в Ташкенте шел дождь» (без упоминания о годе) является, несомненно, массовым: ведь наблюдают погоду в Ташкенте 1 сентября в течение многих лет.

Теперь мы в состоянии ответить на вопрос, с которого, собственно, и должно начинаться знакомство с теорией вероятностей: чем занимается и какие задачи ставит перед собой эта дисциплина? В самых общих словах предмет теория вероятностей может быть определен следующим образом.

Теория вероятностей занимается изучением закономерностей, присущих массовым случайным событиям.

Простейший пример закономерности такого рода дает опыт с бросанием монеты. Предположим, что бросание производится много раз подряд. Исход каждого отдельного бросания является случайным, неопределенным. Однако средний *результат* большого числа бросания утрачивает случайный характер, становится закономерным. А именно: «доля» тех бросаний, при которых выпадает герб (т.е. отношение числа таких бросаний к числу всех бросаний) с увеличением числа бросаний приближается к $1/2$.

Это некоторый предварительный, интуитивный подход к понятию «случайное событие». Он базируется на совершенно естественных, но вместе с тем не вполне строгих рассуждениях. Точный смысл основных понятий теории вероятностей связано с понятием пространства элементарных исходов (событий).

Строгое математическое понятие «случайного события» должно обобщать соответствующее обиходное понятие, т.е. отражать его существенные черты и в то же время быть безупречно точным. Точный смысл основного понятия теории вероятностей, в том числе и понятия «случайного события» связано с понятием пространства элементарных исходов (событий).

2. Элементарные события (исходы)

Следует подчеркнуть, что всякий случайный опыт (эксперимент, испытание) состоит в осуществлении некоторого вполне определенного комплекса условий и наблюдений результата. ***Рассматриваются только такие опыты, которые можно повторять (воспроизводить) при неизменном комплексе условий произвольное число раз (по крайней мере, теоретически).***

Предметом наблюдения в том или ином опыте может быть некоторый процесс, физическое явление или действующая система. Для реально воспроизводимого опыта понятие «наблюдаемый результат» означает, что существует принципиальная возможность зарегистрировать данный результат опыта с помощью того или иного прибора (в простейшем случае, например, визуально). Любой наблюдаемый результат интерпретируется как случайный исход опыта ***(случайное событие).*** Событие может произойти, а может и не произойти в результате опыта.

При математической формализации модели опыта отправным пунктом является понятие ***пространства*** (***множества) элементарных исходов*** (обозначается Ω), связанного с данным опытом. Под этим понимают множество взаимоисключающих исходов такое, что результатом опыта всегда является один и только один исход. Любое подмножество данного множества Ω интерпретируется как событие (возможно, и ненаблюдаемое). Совокупность всех наблюдаемых событий составляет ***поле событий*** для данного опыта.

Говорят, что событие A появилось (наступило, произошло, осуществилось, реализовалось), если результатом опыта является элементарный исход ω, принадлежащий A $(\omega \in A)$. Событие, совпадающее с пустым множеством $\varnothing$, называется - ***невозможным*** событием, а событие, совпадающее со всем множеством Ω - ***достоверным***.

Два события A и B называются ***совместными (несовместными),*** если в результате опыта возможно (невозможно) их совместное осуществление.

Другими словами, события A и B совместны, если соответствующие множества A и B имеют общие элементы, и несовместны - в противном случае.

Множество Ω для данного опыта может быть дискретным, непрерывным или иметь более сложную структуру. К дискретным относятся конечные или счетные множества элементарных исходов. К непрерывным относятся множества типа континуума. Любой конечный или бесконечный промежуток числовой прямой является примером множества типа континуума. В дальнейшем мы рассматриваем только такие модели опытов, для которых множество элементарных исходов Ω либо дискретно, либо непрерывно.

Построение множества Ω (если оно не задано при описании опыта) осуществляется на практике, исходя из требования, чтобы все интересующие нас результаты данного опыта могли быть однозначно описаны на основе построенного множества Ω. Другими словами, если нас интересуют события A, B, C и т.д., являющиеся наблюдаемыми событиями в данном опыте, то множество Ω должно состоять из таких исходов, чтобы существовали подмножества данного множества, равносильные событиям A, B, C и т.д.

Так как понятие «элементарный исход» строго не определяемо, то указанная задача допускает не единственное решение и зависит от набора интересующих нас событий. Если потребовать, чтобы правило однозначного описания выполнялось для всего поля событий, то в этом случае понятие элементарного исхода становится более определенным. Именно в совокупности всех подмножеств множества Ω, составляющих поле событий, элементарные исходы являются одноэлементными подмножествами.

Пример 1. Опыт состоит в подбрасывании один раз правильной шестигранной игральной кости. Обозначим через X число очков, выпавших на верхней грани кости. Описать множество элементарных исходов Ω и указать состав подмножеств, соответствующих следующим событиям:

$$A = \{X - \textit{кратно трем}\},\quad B = \{X - \textit{нечетно}\},\quad C = \{X > 3\},$$

$$D = \{X < 7\},\ E = \{X - \textit{дробно}\},\quad F = \{0{,}5 < X < 1{,}5\}.$$

Выявить пары совместных событий.

Решение

Введем обозначения для следующих наблюдаемых в данном опыте событий:

$\omega_k = \{X = k\},\ k = 1,2,...,6;$

$\omega^{(1)} = \{X - \text{нечетное число}\};\ \omega^{(2)} = \{X - \text{четное число}\}.$

На базе данных исходов можно сконструировать два достоверных события:

$$\Omega_1 = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_6\} \text{ и } \Omega_2 = \{\omega^{(1)}, \omega^{(2)}\}.$$

Какое из них больше подходит в качестве множества элементарных исходов?

Ясно, что Ω_2 следует «забраковать», поскольку, например, наблюдаемые события $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_6,\ A,\ B, D, E$ не являются подмножествами множества Ω_2. С другой стороны, все перечисленные события могут быть описаны как подмножества множества Ω_1. Действительно,

$$A = \{\omega_3, \omega_6\},\quad B = \omega^{(1)} = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\},\quad C = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\},$$

$$D = \Omega_1 = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_6\},\ E = \varnothing,\ F = \{\omega_1\}.$$

Из написанных равенств, в частности, усматриваем, что исходы $\omega^{(1)}$ и $\omega^{(2)}$ разложимы на элементы, которые сами являются исходами данного опыта. Таким образом, исходы $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_6$ более «элементарны», чем исходы $\omega^{(1)}$ и $\omega^{(2)}$.

Сопоставляя попарно события и проверяя наличие общих элементов, находим пары совместных событий: A и B, A и C, A и D, B и C, B и D, B и F, C и D, D и F.

Пример 2. Опыт состоит в радиолокационном обнаружении воздушной цели. Наблюдаемый результат - положение светящегося пятна (отраженного импульса от цели) на экране индикатора цели, имеющего форму круга радиуса 10 см, в системе декартовых координат с началом, совпадающим с центром экрана. Описать множество элементарных исходов и состав подмножеств, соответствующих следующим событиям:

$$A = \{\text{цель находится в первом квадранте}\};$$

$$B = \left\{\begin{matrix} \text{цель находится в круге радиуса } 5 \text{ см, центр} \\ \text{которого совпадает с центром экрана} \end{matrix}\right\};$$

$$C = \left\{\begin{matrix} \text{цель находится в круге радиуса } 2{,}5 \text{ см, центр которого сдви}- \\ \text{нут на } 5 \text{ см вдоль оси } Ox \text{ в отрицательном направлении} \end{matrix}\right\}.$$

Совместны ли пары событий A и B, A и C, B и C?

Решение

Все интересующие нас в данном опыте наблюдаемые события связаны с регистрацией положения светящегося пятна на экране индикатора. Удобной формой математического описания элементарного исхода являются в данном случае координаты случайной точки на плоскости, соответствующей, например, центру пятна (предполагается, что пятно представляет собой круг достаточно малого радиуса). Хотя очевидно, что точку (как абстрактное математическое понятие) наблюдать физически на экране индикатора невозможно, тем не менее такой идеализированный способ описания элементарного исхода упрощает математическую формализацию модели данного опыта.

Таким образом, множество Ω непрерывно и может быть записано в виде

$$\Omega = \{(x, y):\ x^2 + y^2 \le 100\}.$$

Подмножества, равносильные указанным событиям, имеют вид:

$$A = \{(x, y):\ x^2 + y^2 \le 100,\ x > 0,\ y > 0\};$$

$$B = \{(x, y):\ x^2 + y^2 \le 25\};$$

$$C = \{(x, y):\ (x+5)^2 + y^2 \le 6{,}25\}.$$

По определению события совместны, если соответствующие им подмножества имеют общие элементы (пересекаются), и несовместны - в противном случае. Поэтому события A и B, B и C совместны, а события A и C несовместны.

Пример 3. Рассмотрим следующий случайный опыт: матч на первенство страны по футболу между командами «Пахтакор» и «Бунёдкор». Интересующие нас события:

$A = \{\textit{выиграла команда "Пахтакор"}\};$

$B = \{\textit{игра закончилась победой одной из команд}\};$

$C = \{\textit{игра закончилась со счетом } 3:1 \textit{ в пользу "Бунёдкор"}\};$

$D = \{\textit{в игре забито не меньше трех голов}\}.$

Требуется описать множество элементарных исходов и указать состав подмножеств, соответствующих указанным событиям.

Решение

Очевидно, что описанный опыт не удовлетворяет требованию воспроизводимости при неизменном комплексе условий, поскольку условия проведения матча меняются от игры к игре. Поэтому построение вероятностной модели исходов футбольного матча возможно лишь при определенной идеализации реальных условий. Предположим, что такая модель существует. Спрашивается, что представляет собой результат (элементарный исход) данного опыта? Ответ зависит от того, какой круг событий мы собираемся наблюдать (регистрировать) в данном опыте. События, перечисленные в условии задачи, определяют круг интересов обычного «болельщика» за ту или иную команду. Для полного и однозначного описания всех указанных событий достаточно принять в качестве элементарного исхода конечный счет в матче.

Запишем множество Ω следующим образом:

$$\Omega = \left\{\omega = (x, y) : x \in \mathbb{Z}_0, \, y \in \mathbb{Z}_0\right\},$$

где x - количество голов, забитых командой «Пахтакор», y - количество голов, забитых командой «Бунёдкор», $\mathbb{Z}_0$ - множество неотрицательных целых чисел.

Мы вынуждены считать множества возможных значений x и y, по крайней мере, теоретически - неограниченными, поскольку до игры нет никаких оснований для того, чтобы установить явную точную границу возможного счета. Практически, конечно, бесконечно большой счет ни в какой игре не осуществим.

Подмножества, соответствующие интересующим нас событиям, имеют следующий вид:

$$A=\{(x,y):\ x\in\mathbb{Z}_0,\ y\in\mathbb{Z}_0,\ \ x>y\},\quad B=\{(x,y):\ x\in\mathbb{Z}_0,\ y\in\mathbb{Z}_0,\ \ x\neq y\},$$

$$C=\{(x,y):\ x=1,\ y=3\}=\{(1,3)\},\quad D=\{(x,y):\ x\in\mathbb{Z}_0,\ y\in\mathbb{Z}_0,\ \ x+y\geq 3\}.$$

Заметим, что для другого «экспериментатора», например, для тренера команды «Пахтакор» - может оказаться более важным предметом наблюдения не конечный счет матча, а количество травмированных или оштрафованных игроков. В этом случае придется строить другое множество элементарных исходов, а следовательно, и другую вероятностную модель футбольного матча.

Упражнения

В задачах 1- 6 построить множество элементарных исходов Ω по описанию опыта и указанных подмножеств, соответствующие указанным событиям.

1. Игральная кость подбрасывается дважды. Наблюдаемый результат - пара чисел, соответствующих числам очков, выпавших в первый и второй раз. События:

A = {оба раза выпало число очков, кратное трем};

B = {ни разу не выпало число шесть};

C = {оба раза выпало число очков, большее трех};

D = {оба раза выпало одинаковое число очков}.

2. Монета подбрасывается три раза. Наблюдаемый результат - появление герба (г) или цифры (ц) на верхней стороне - монеты. События:

A = ={герб выпал ровно один раз};

B = {ни разу не выпала цифра};

C = {выпало больше гербов, чем цифр};

D = {герб выпал не менее, чем два раза подряд}.

3. Монета подбрасывается до первого появления герба. Наблюдаемый результат - общее число подбрасываний. События:

A = {герб выпал при третьем подбрасывании};

B = {герб выпал не ранее, чем при третьем подбрасывании).

4. Производится стрельба по плоской прямоугольной мишени:

$$-2 \le x \le 2, \quad -1 \le y \le 1.$$

Наблюдаемый результат - координаты точки попадания в декартовой системе координат. По условиям стрельбы непопадание в указанный прямоугольник исключено. События:

A = {абсцисса точки попадания не меньше ординаты};

B = {произведение координат точки неотрицательно};

C = {сумма абсолютных величин координат точки превышает единицу}.

Выявить пары совместных событий.

5. На отрезке $[a,b]$ наудачу ставится точка. Пусть x координата этой точки. Затем на отрезке $[a, x]$ наудачу ставится еще одна точка с координатой y. Наблюдаемый результат - пара чисел (x, y). События:

A = {вторая точка ближе к правому концу отрезка $[a,b]$, чем к левому};

B = {расстояние между двумя точками меньше половины длины отрезка);

C = {первая точка ближе к левому концу отрезка $[a,b]$, чем к правому};

D = {первая точка ближе ко второй, чем к правому концу отрезка $[a,b]$}.

Выявить пары несовместных событий.

6. Иван и Петр договорились о встрече в определенном месте между одиннадцатью и двенадцатью часами. Каждый приходит в случайный момент указанного промежутка и ждет появления другого до истечения часа, но не более 15 минут, после чего уходит. Наблюдаемый результат - пара чисел (x, y), где x- время прихода Петра, y- время прихода Ивана (время исчисляется в минутах, начиная от 11 часов). События:

A = {Петр пришел после 11 ч 45 мин};

B = {Петр пришел после Ивана);

C = {Иван пришел до 11ч 45 мин);

D = {встреча не состоялась);

E = {Петр ждал Ивана все обусловленное время и не дождался);

F = {Ивану не пришлось ждать Петра};

K ={встреча состоялась когда до истечения часа оставалось меньше пяти минут}.

3. Операции над событиями

В этом пункте мы ознакомимся с тремя основными видами комбинации событий: суммой событий, произведением события, противоположным событием.

В п. 2 было отмечено, что любое подмножество множества элементарных исходов Ω интерпретируется как событие (возможно, и ненаблюдаемое). Для любых двух подмножеств A, B пространства Ω определены подмножества $A \cup B$ (объединение A и B) и $A \cap B$ (пересечение A и B): $A \cup B$ состоит из тех элементов, которые принадлежат подмножеству A или подмножеству B, или обоим подмножествам вместе; $A \cap B$ состоит из тех элементов, которые принадлежат и множеству A, и множеству B.

Рассматривают также дополнение подмножества A в Ω, обозначаемое $\overline{A}$: дополнение $\overline{A}$ состоит из тех точек, которые не принадлежат множеству A.

Операциям $\cup$ и $\cap$ соответствуют операции над событиями - сумма и произведение событий.

Определение 4. *Суммой событий* A *и* B называется событие, обозначаемое $A+B$ и состоящее в том, что в результате опыта наступит или событие A, или событие B, или оба вместе.

Определение 5. *Произведением двух событий* A *и* B называется событие, обозначаемое AB и состоящее в том, что в результате опыта наступит и событие A, и событие B.

Операции дополнения множества A соответствует операция перехода от заданного события к противоположному.

Определение 6. Событием, *противоположным* событию A, называется событие, обозначаемое $\overline{A}$ и состоящее в том, что в результате опыта событие A не наступит.

Комментарии к определениям 4-6

1. Определения 4-6 описывают подмножества элементарных событий, благоприятствующих сумме событий A и B, произведению событий A и B, событию, противоположному к A.

2. Операции суммы событий, произведения событий и дополнения обладают такими свойствами, как

а) $A+B=B+A$, $AB=BA$, (*коммутативность*);

б) $(A+B)+C=A+(B+C)$, $(AB)C=A(BC)$ (*ассоциативность*);

в) $A(B+C)=AB+AC$ (*дистрибутивность умножения относительно сложения*).

Проиллюстрируем свойство в) диаграммами Венна. Пусть события означают:

A = {попадание в квадрат};

B = {попадание в круг};

C = {попадание в треугольник}.

Соответствующие области изображены на рис. 1. Горизонтальной штриховкой отмечена область, соответствующая событию AC, вертикальной - событию BC, косая штриховка соответствует событию AC+ BC.

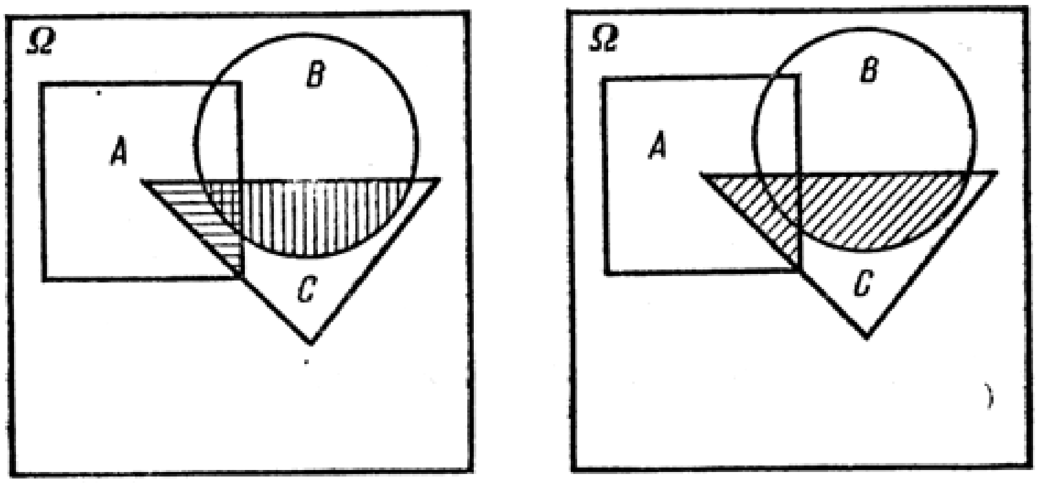


Рис. 1

Определение 7. Говорят, что множество событий вместе с операциями суммы, произведения событий и перехода к противоположному событию составляют ***алгебру событий.***

3. Рассматривают сумму трех и более событий $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ (быть может, бесконечного числа), которую обозначают

$$A_1 + A_2 + ... + A_n + ... = \sum_{i=1}^{\infty} A_i .$$

Событие $\sum A_i$ состоит в том, что в результате опыта наступит хотя бы одно из событий $A_1, A_2, ..., A_n, ...$.

Аналогично, произведение трех и более событий (быть может, бесконечного числа) $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ обозначается

$$A_1 \cdot A_2 \cdots A_n \cdots = \prod_{i=1}^{\infty} A_i .$$

Событие $\prod A_i$ состоит в том, что в результате опыта наступит каждое из событий $A_1, A_2, ..., A_n, ...$.

Примеры

1. Пусть при бросании игральной кости событие A означает, что выпадет четное число очков, а событие B - что количество очков не превзойдет четырех. Ясно, что

$$A=\{2,4,6\};\ B=\{1,2,3,4\};\ (A+B)=\{1,2,3,4,6\};\ (AB)=\{2,4\}.$$

Иными словами, событие $A+B$ наступает при выпадении чисел 1, 2, 3, 4, 6, а событие AB - при выпадении чисел 2, 4.

Для событий $\overline{A},\quad \overline{B},\quad \overline{A+B},\quad \overline{AB}$, противоположным, соответственно, к событиям $A,\quad B,\quad A+B,\quad AB,$ получим

$$\overline{A}=\{1,3,5\};\ \overline{B}=\{5,6\};\ \left(\overline{A+B}\right)=\{5\};\ \left(\overline{AB}\right)=\{1,3,5,6\}.$$

2. Пусть при игре в спортлото события $A,\ B,C$ заключаются в том, что выбранная в результате опыта шестерка чисел содержит, соответственно, число 7, 12, 20. Результатом испытания оказалась шестерка чисел 7, 8, 9, 20, 21, 42. Какие из следующих событий наступили при этом:

$$A,\quad B,\quad C,\quad \overline{A},\quad \overline{B},\quad \overline{C},\quad ABC,\quad A+B,\quad A+C,\quad \overline{A+C}\ ?$$

Решение

Обозначим множество {7, 8, 9, 20, 21, 42} через M. Тогда получим, что из перечисленных в условии событий наступили следующие: A, поскольку $7\in M$; C, так как $20\in M$; $\overline{B},$ поскольку $12\notin M$; $A+B,$ так как $7\in M$; $A+C$, поскольку $7\in M$ и $20\in M$. Остальные из перечисленных событий не наступили.

В алгебре событий справедливы формулы

$$\overline{A_1+A_2+\ldots+A_n}=\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdots\overline{A_n}, \qquad (*)$$

$$\overline{A_1\cdot A_2\cdots A_n}=\overline{A_1}+\overline{A_2}+\ldots+\overline{A_n}. \qquad (**)$$

Строгий вывод этих формул мы опускаем. Здесь мы ограничимся лишь некоторым пояснением к ним. Левая часть формулы (*) есть событие, противоположное к $A_1+A_2+\ldots+A_n$. Последнее событие наступает тогда и только тогда, когда наступает хотя бы одно из $A_i \quad (i=1,2,...,n)$. Событием, противоположным тому, что наступит хотя бы одно из A_i, является событие, состоящее в том, что не наступит ни одно из A_i, т.е. наступит каждое из $\overline{A_i}$; это означает, что наступит событие $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdots \overline{A_n}$.

Левая часть формулы (**) есть событие, противоположное событию $A_1 \cdot A_2 \cdots A_n$. Последнее событие состоит в том, что наступит каждое из событий $A_1, A_2, ..., A_n$. Событием, противоположным тому, что наступит каждое из $A_i \quad (i=1,2,...,n)$, является событие, состоящее в том, что не наступит хотя бы одно из $A_1 \cdot A_2 \cdots A_n$, т.е. что наступит хотя бы одно из $\overline{A_1}, \overline{A_2}, ..., \overline{A_n}$; это означает, что наступит событие $\overline{A_1} + \overline{A_2} + ... + \overline{A_n}$.

Пример 3. Каждый из стрелков делает по одному выстрелу в мишень.

а) Какое событие является противоположным к событию A: «хотя бы один стрелок попал в цель»?

б) Какое событие противоположно событию «каждый из стрелков попал в цель?»

Решение

а) Таким событием является «каждый из стрелков промахнулся» или, что то же самое, «ни один не попал в цель». Справедливость ответа вытекает из того, что событие A означает поражение мишени, а событие $\overline{A}$ - не поражение мишени. Этот пример иллюстрирует формулу (*).

б) Таким событием является «хотя бы один из стрелков промахнулся». Этот пример иллюстрирует формулу (**).

Пример 4. Игральная кость подбрасывается один раз. Наблюдаемый результат - число очков на верхней грани. События A, B, C, D, E, F описаны в примере 1, из п. 2 данного параграфа. Описать состав и выяснить смысл следующих событий:

$$E_1 = \overline{B}, \quad E_2 = \overline{C}, \quad E_3 = AB, \quad E_4 = A + B,$$

$$E_5 = A - B, \quad E_6 = E + D, \quad E_7 = EF.$$

Решение

В обозначениях примера 1 напишем состав указанных событий, используя определение соответствующей алгебраической операции:

$E_1 = \{\omega_{2,} \omega_4, \omega_4\} = \{\textit{выпало четное число очков}\};$

$E_2 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} = \{\textit{выпало число очков, небольше трех}\};$

$E_3 = \{\omega_3\} = \{\textit{выпавшее число очков,нечетно и кратно трем}\};$

$E_4 = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5, \omega_6\} = \{\textit{выпавшее число очков или нечетно, или кратно трем}\};$

$E_5 = A\overline{\overline{B}} = AB - E_3; \qquad E_6 = \varnothing + D = D = \Omega.$

Пример 5. Рассмотрим снова случайный эксперимент, описанный в примере 2. Как уже говорилось, множество идеализированных элементарных исходов

$$\Omega = \{(x, y):\ x^2 + y^2 \le 100\}$$

является удобной формой математического описания наблюдаемых событий, связанных с положением на экране индикатора светящегося пятна - отраженного импульса от цели. Пусть наблюдения в данном опыте состоят в регистрации факта принадлежности светящегося пятна произвольно выбранному участку круга, имеющему площадь. Например, проверяется результат: попадает ли отраженный импульс от цели в некоторую часть кольца, ограниченную радиусами r_1 и r_2 и полярными углами φ_1 и φ_2. Составляет ли множество всех квадрируемых подмножеств множества Ω алгебру событий?

Решение

Из интегрального исчисления известно, что объединение, пересечение и дополнение конечного или счетного числа квадрируемых, подмножеств некоторого квадрируемого множества на плоскости являются квадрируемыми множествами. Отсюда следует, что система квадрируемых подмножеств множества Ω образует алгебру для данного опыта.

Упражнения

В задачах 1-2 требуется по описанию опыта построить множество элементарных исходов и выявить состав подмножеств, соответствующих указанным событиям.

1. Пусть А, В, С - три события, наблюдаемые в данном эксперименте. Выразить в алгебре событий следующие события:

E_1 = {из трех событий А, В, С произойдет ровно одно};

E_2 = {из трех событий А, В, С произойдет хотя бы одно};

E_3 = {из трех событий А, В, С произойдет ровно два};

E_4 = {из трех событий А, В, С произойдет не меньше двух};

E_5 = {из трех событий А, В, С не произойдет ни одного};

E_6 = {из трех событий А, В, С произойдет хотя бы два};

E_7 = {из трех событий А, В, С не произойдет хотя бы одно}.

2. Произведено три выстрела из орудия по цели. Событие A_k = {попадание при k-м выстреле} (k = 1,2, 3).

а) Выяснить состав множества Ω, выразив каждый элементарный исход ω_i, через события A_k.

б) Записать в алгебре событий следующие события:

А = {ровно одно попадание};

В = {хотя бы одно попадание};

С = {хотя бы один промах};

D = {не меньше двух попаданий};

Е = {попадание не раньше, чем при третьем выстреле}.

4. Классическое определение вероятности

Опыт, связанный с пространством элементарных событий Ω, позволяет каждому событию A, сопоставить число $p(A)$, где $0 \le p(A) \le 1$), измеряющее «степень вероятности» наступления события *A,* причем для соответствия $A \to p(A)$ выполняются все требования здравого смысла, перечисленные выше.

Рассмотрим опыт, удовлетворяющий тому условию, что соответствующее ему множество элементарных исходов $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_n\}$ представляет собой конечное множество.

Соответствие $A\to p(A)$ строится следующим образом. Пусть дано событие $A=\left\{\omega_{k_1},\omega_{k_2},...,\omega_{k_m}\right\}\subset\Omega$; это значит, что заданы все элементарные исходы (события), благоприятствующие событию *A*. Общее количество таких элементарных исходов обозначим через m, а число всех исходов опыта - число элементов множества Ω через n.

Положим

$$p(A)=\frac{m}{n}\ . \qquad (1)$$

Формула (1) сопоставляет каждому событию *A* в рассматриваемом испытании число $p(A)$, называемое *вероятностью* события *A*.

Определение 8. Вероятностью $p(A)$ события A называют отношение числа исходов благоприятствующих этому событию к общему числу всех элементарных исходов испытания: $p(A)=\frac{m}{n}$.

Легко убедиться в том, что более вероятным событиям формула (1) сопоставляет большие вероятности, равновероятным событиям - равные вероятности, невозможному событию - нуль, достоверному событию - единицу. В частности, вероятность каждого элементарного исхода (события) ω_i равна $\frac{1}{n}$ $(i=1,2,...,n)$.

Формула (1) задает так называемое «классическое определение» вероятности события.

Определение 9. Всякий опыт, удовлетворяющий тому условию, что соответствующее ему множество элементарных исходов $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_n\}$ представляет собой конечное множество равновероятных исходов, называется **классической схемой или схемой урн.**

Классическая схема является математической формализацией опытов, в которых элементарные исходы обладают определенной симметрией по отношению к условиям опыта, так что нет оснований считать какой-либо из исходов более вероятным, чем другой. Таким свойством, например, обладают опыты по извлечению наудачу определенного числа шаров из урны, содержащей заданное количество неразличимых на ощупь шаров. Отсюда и название - схема урн.

Этим способом пользовались французские математики XVII в. Блез Паскаль и Пьер Ферма, рассматривавшие формулу (1) как определение вероятности. В далекое от нашей эпохи время трудно было предвидеть роль понятия вероятности, разнообразие и серьезность будущих приложений теории вероятностей к естествознанию, технике и экономике. Первоначальным материалом, на котором «отрабатывались» простейшие факты теории, были азартные игры. С тех пор задачи о бросании игральной кости, об извлечении карт из колоды, шаров из урны и т.п. стали традиционными для теории вероятностей. Заметим, что и по сей день, эти задачи сохраняют свою роль как тренировочные упражнения, а в некоторых случаях – как наглядные модели для более серьезных вероятностных схем.

Оказывается, что рассмотренный выше опыт, связанный с пространством элементарных исходов (событий), носит довольно общий характер: многие задачи теории вероятностей (в том числе далеко не простые) представляют собой частный случай этой общей схемы.

Отметим, однако, что пространство элементарных исходов может быть

бесконечным, этот случай рассмотрен в п. 6.

4.1. Элементы комбинаторики

Для подсчета m - общего количества благоприятствующих элементарных исходов некоторого наблюдаемого события и n - числа всех исходов опыта, связанного с этим событием (число элементов множества Ω), необходимо подсчитать число возможных способов совершения каких-либо действий. Задачи такого типа называются *комбинаторными*, а раздел математики, занимающийся решением таких задач, - *комбинаторикой.* Сформулируем два универсальных правила, применяемых при решении комбинаторных задач.

Правило произведения. Пусть требуется выполнить одно за другим какие-либо r действий. Если первое действие можно выполнишь l_1 способами, второе действие - l_2 способами и так до r - го действия, которое можно выполнить l_r способами, то все r действий могут быть выполнены $l_1 l_2 \cdots l_r$ способами.

Правило суммы. Пусть требуется выполнить одно из каких-либо r действий, взаимно исключающих друг друга. Если первое действие можно выполнить l_1 способами, второе действие - l_2 способами и так до r - го действия, которое можно выполнить l_r способами, то выполнить одно из этих r действий можно $l_1 + l_2 + \cdots + l_r$ способами.

Напомним понятие факториала, активно используемое в комбинаторике. **Факториалом натурального числа** l называется число

$$l! = l(l-1)(l-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1. \qquad (2)$$

По определению, факториалом нуля является единица: $0! = 1$.

Рассмотрим некоторое множество S, состоящее из l различных элементов. Пусть $1 \le k \le l$. Назовём множество, состоящее из k элементов, упорядоченным, если каждому элементу этого множества поставлено в соответствие число от 1 до k, причём различным элементам множества соответствуют разные числа.

Размещениями из l **элементов по** k называются упорядоченные подмножества множества S, состоящие из k различных элементов и отличающиеся друг от друга составом элементов или порядком их расположения.

Число размещений из l элементов по k равно

$$A_l^k = \frac{l!}{(l-k)!} = l(l-1)(l-2)\cdots(l-k+1). \qquad (3)$$

Перестановками из l **элементов** называются размещения из l элементов по l, т.е. упорядоченные подмножества множества S, состоящие из всех элементов данного множества и отличающиеся друг от друга только порядком их расположения.

Число перестановок из l элементов равно

$$P_l = l! = l(l-1)(l-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1. \qquad (4)$$

Сочетаниями из l **элементов по** k называются подмножества множества S, состоящие из k различных элементов и отличающиеся друг от друга только составом элементов.

Число сочетаний из l элементов по k равно

$$C_l^k = \frac{A_l^k}{P_l} = \frac{l!}{k!(l-k)!}. \qquad (5)$$

Размещениями с повторениями из l **элементов по** k называются упорядоченные подмножества множества S, состоящие из k элементов, среди которых могут оказаться одинаковые, и отличающиеся друг от друга составом элементов или порядком их расположения.

Число размещений с повторениями из l элементов по k равно

$$\tilde{A}_l^k = l^k. \qquad (6)$$

Сочетаниями с повторениями из l **элементов по** k называются подмножества множества S, состоящие из k элементов, среди которых могут оказаться одинаковые, и отличающиеся друг от друга только составом элементов.

Число сочетаний с повторениями из l элементов по k равно

$$\tilde{C}_l^k = C_{l+k-1}^k \frac{A_l^k}{P_l} = \frac{(l+k-1)!}{k!(l-1)!}. \qquad (7)$$

Отметим, что формулы (4) - (7) сохраняют смысл и остаются справедливыми и при $k = 0$.

Если во множестве S, состоящим из l элементов, есть только r различных элементов, то **перестановками с повторениями из l элементов** называются упорядоченные подмножества множества S, в которые первый элемент множества S входит l_1 раз, второй элемент - l_2 раз и так до r-го элемента, который входит l_r раз $\left(l_1 + l_2 + \cdots + l_r = l\right)$.

Число перестановок с повторениями из l элементов, в которые первый элемент множества S входит l_1 раз, второй элемент - l_2 раз и так до r-го элемента, который входит l_r раз $\left(l_1 + l_2 + \cdots + l_r = l\right)$, равно

$$\tilde{P}_l\left(l_1, l_2, ..., l_r\right) = \frac{l!}{l_1! l_2! \cdots l_r!}. \tag{8}$$

Примеры

1. Маша поссорилась с Петей и не хочет ехать с ним в одном автобусе. От общежития до института с 7 до 8 ч отправляется пять автобусов. Не успевший на последний из этих автобусов опаздывает на лекцию. Сколькими способами Маша и Петя могут доехать до института в разных автобусах и не опоздать на лекцию?

Решение

Петя может доехать до института $l_1 = 5$ различными способами (на одном из пяти автобусов), при этом Маше остаётся только $l_2 = 4$ способа (так как один из автобусов занят Петей). Таким образом, по правилу произведения у Пети и Маши есть $l_1 l_2 = 5 \cdot 4 = 20$ различных способов добраться до института в разных автобусах и не опоздать на лекцию.

2. В информационно-технологическом управлении банка работают три аналитика, десять программистов и 20 инженеров. Для сверхурочной работы в праздничный день начальник управления должен выделить одного сотрудника. Сколько способов существует у начальника управления?

Решение

Начальник управления может отобрать одного аналитика $l_1 = 3$ способами, одного программиста - $l_2 = 10$ способами, а одного инженера - $l_3 = 20$ способами. Поскольку по условию задачи начальник управления может выделить любого из своих сотрудников, согласно правилу суммы, у него существует $l_1 + l_2 + l_3 = 3 + 10 + 20 = 33$ различных способа выбрать сотрудника для сверхурочной работы.

3. Начальник службы безопасности банка должен ежедневно расставлять десять охранников по десяти постам. В целях усиления безопасности одна и та же комбинация расстановки охранников по постам не может повторяться чаще одного раза в месяц. Чтобы оценить, возможно ли это, найти число различных комбинаций расстановки охранников.

Решение

Первый способ. На первый пост начальник службы безопасности может назначить любого из $l_1 = 10$ охранников, на второй пост - любого из оставшихся $l_2 = 9$ охранников и так до девятого поста, на который можно назначить любого из оставшихся $l_9 = 2$ охранников, при этом оставшийся $l_{10} = 1$ охранник будет назначен на десятый пост. Поэтому, согласно правилу произведения, у начальника службы безопасности есть

$$l_1 l_2 \cdots l_{10} = 10 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1 = 10! = 3628800$$

способов расстановки охранников по постам. Поскольку количество дней в месяце не превышает 31, у начальника службы безопасности заведомо существует достаточное число способов расстановки своих подчинённых по постам.

Второй способ. Число способов расстановки десяти охранников по десяти постам, существующих у начальника службы безопасности, описывается числом перестановок из 10 элементов, т.е. $P_{10} = 10! = 3628800$.

Упражнение

Определить, сколькими способами можно разместить на шахматной доске восемь ладей так, чтобы они не били друг друга.

Пример 4. Новый президент банка должен назначить двух новых вице-президентов из числа десяти директоров. Сколько способов существует у президента, если: а) один из вице-президентов (первый) выше другого по должности; б) вице-президенты по должности равны между собой.

Решение

Первый способ. а) Первого вице-президента можно выбрать из $l_1 = 10$ претендентов, при этом на пост второго вице-президента будут претендовать $l_2 = 9$ оставшихся директоров. Поэтому, согласно правилу произведения, у нового президента банка есть $l_1 l_2 = 10 \cdot 9 = 90$ способов назначения двух вице-президентов, один из которых подчиняется другому, из числа десяти директоров. б) Пусть первое действие заключается в том, что президент отбирает двух человек на должность вице-президентов, а второе действие - в том, что президент говорит отобранным людям, кто из них является первым вице-президентом, а кто - вторым. Пусть первое действие можно выполнить l_1 способами, второе действие, очевидно, можно выполнить $l_2 = 2$ способами, и по правилу произведения число способов назначения двух вице-президентов, один из которых подчиняется другому, из числа десяти директоров составляет $l_1 l_2 = 2l_1$. С другой стороны, в пункте а) мы нашли это число, и оно оказалось равным 90, поэтому $l_1 = \dfrac{90}{2} = 45$.

Второй способ. а) Число способов выбора двух кандидатов на две различные должности из десяти претендентов описывается числом размещений из 10 элементов по 2, т.е. $A_{10}^2 = 90$. б) Число способов выбора двух кандидатов на две одинаковые должности из десяти претендентов описывается числом сочетаний из 10 элементов по 2, т.е. $C_{10}^2 = \dfrac{10!}{2!8!} = 45$.

Упражнения

1. В кредитном отделе банка работают восемь человек. Сколько существует способов распределить между ними три премии: а) одинакового размера; б) разных размеров, известных заранее?

2. Одна из воюющих сторон захватила в плен 12 солдат, а другая 15. Определить, сколькими способами стороны могут обменять семерых военнопленных.

3. Петя и Маша коллекционируют видеокассеты. У Пети есть 30 комедий, 80 боевиков и 7 мелодрам, у Маши - 20 комедий, 5 боевиков и 90 мелодрам. Сколькими способами Петя и Маша могут обменяться тремя комедиями, двумя боевиками и одной мелодрамой?

4. В период сдачи итоговых контрольных работ в течение 20 дней студенты одной группы должны сдать итоговые контрольные работы по пяти дисциплинам. Сколькими способами можно составить расписание сдачи итоговых контрольных работ, если: а) запрещается сдавать две сдачи итоговых контрольных работ в один день; б) между двумя сдачами итоговых контрольных работ должен пройти хотя бы один день, для подготовки?

5. Б банке девять учредителей. Регистрационные документы хранятся в сейфе. Сколько замков должен иметь сейф, и сколько ключей к ним нужно изготовить, чтобы доступ к содержимому сейфа был возможен только тогда, когда соберётся не менее шести учредителей?

6. Маша решила помириться с Петей и позвонить ему, но забыла две последних цифры его телефона и набирает их наудачу. Найти наибольшее возможное число неудачных попыток, которые сделает Маша, прежде чем дозвонится до Пети.

Пример 5. Маша очень любит пирожные и ежедневно в булочной, рядом с институтом покупает шесть пирожных (одинаковых или разных). Всего в булочной продаётся 11 сортов пирожных. Сколькими способами Маша может выбрать из них шесть штук?

Решение

Каждому набору пирожных, которые выберет Маша, будем ставить в соответствие последовательность нулей и единиц, определяемую по следующему правилу. Напишем подряд столько единиц, сколько пирожных первого вида выбрала Маша, далее поставим нуль и после него запишем количество отобранных пирожных второго вида и т.д. Например, комбинации «одно пирожное второго вида, три пирожных пятого вида и одно пирожное восьмого вида» соответствует такая последовательность:

«010001110001000»

(нули отделяют виды пирожных друг от друга, поэтому нуль после одиннадцатого вида не нужен). При этом каждому набору пирожных взаимно однозначным образом соответствует последовательность, построенная по описанному правилу. Все такие последовательности состоят, очевидно, из 16 знаков, причём 10 из них нули, которые могут занимать любое место. Поэтому количество способов выбора пирожных равно количеству всех таких последовательностей, т.е. числу размещений десяти нулей по 16 местам: $C_{16}^{10} = 8008$.

Упражнение

В конкурсе по трём номинациям участвуют десять кинофильмов. Вычислить число вариантов распределения призов, если по каждой номинации установлены: а) различные призы; б) одинаковые призы.

Пример 6. Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы в слове «мама»? Выписать все эти слова.

Решение

Число различных слов, которые можно составить, переставляя буквы в слове «мама», описывается числом перестановок с повторениями из $l = 4$ элементов (букв в слове «*мама*»), в которые первый элемент (буква «*м*») входит $l_1 = 2$ раза, а второй элемент (буква «*а*») - $l_2 = 2$ раза

$$\left(l_1 + l_2 = 4 = l\right).$$

Это число равно $\tilde{P}_4\left(2,2\right) = \frac{4!}{2!2!} = 6$. Шесть различных слов, получающихся перестановками букв в слове «мама», таковы: «*ммаа*», «*мама*», «*маам*», «*амма*», «*амам*», «*аамм*».

Упражнение

Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы в слове «*математика*»?

4.2. Примеры вычисления вероятности по формуле (1)

1. В испытании, связанном с бросанием игральной кости, пространство элементарных исходов состоит из шести элементов: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Вероятность того, что в результате опыта выпадет количество очков, большее двух, равна 4/6 четыре благоприятствующих элементарных исходов: 3, 4, 5, 6 $(m=4)$ и общее количество элементарных исходов $n=6$.

2. При игре в спортлото элементарным исходом является выбор шести различных чисел (шести нумерованных шаров) из множества 1, 2, 3, ..., 43, 44, 45. Так как шары, на которых обозначены цифры, одинаковы по физическим параметрам, то естественно считать, что все шестерки шаров равновероятны (и, значит, требование, предъявляемое к пространству элементарных исходов, выполнено). Пространством элементарных исходов является множество неупорядоченных наборов из 6 чисел $\{1,2,...,45\}$, состоящее из

$$C_{45}^{6}=\frac{45!}{(45-6)!6!}=8145060$$

элементов (общее количество различных шестерок равно 8145060).

Вероятности событий *A,* связанных с рассматриваемым испытанием, можно вычислить по формуле $p(A)=\frac{m}{n}$, где m - количество элементарных исходов, благоприятствующих событию *A,* т.е. количеству шестерок, означающих наступление события A. Тогда вероятность того, что в результате опыта появится заранее заданная шестерка чисел (т.е. вероятность угадать все шесть чисел), равна

$$p(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{8145060}=0,000000123.$$

3. Брошено две игральные кости. Предполагая, что элементарные события равновероятны, найти вероятность события $A=$ {сумма выпавших очков делится на 6}.

Решение

Исход эксперимента (опыта) можно описать парой чисел $\omega_{ij} = (i, j)$, где i – число очков, выпавших на первой кости, а j – на второй $(i, j = 1, 2, ..., 6)$. Поэтому множество элементарных исходов

$$\Omega = \left\{ \omega_{ij} = (i, j) : i = 1, 2, ..., 6; \quad j = 1, 2, ..., 6 \right\}.$$

Нетрудно проверить, что число элементов множества Ω (число всех исходов эксперимента) - $n = 36.$. Другими словами, общее число элементарных событий $n = 36$. Событие A соответствует подмножеству

$$\{(1,5), \quad (5,1), \quad (2,4), \quad (4,2), \quad (3,3), \quad (6,6)\} \subset \Omega. \ .$$

Другими словами

$$A = \{(1,5), \quad (5,1), \quad (2,4), \quad (4,2), \quad (3,3), \quad (6,6)\} \subset \Omega. \ .$$

Так как число элементов множества A (число всех благоприятствующих событию A исходов) - $m = 6$, то по формуле классической вероятности получаем

$$p(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

В этом примере помимо нахождения n - число элементов множества Ω (число всех исходов эксперимента) и m - число элементов множества A (число всех благоприятствующих событию A исходов) нам удалось, полностью описать то из чего состоят множества Ω и A. Однако во многих случаях описания содержания этих множеств является практически невозможным. Следует отметить, что это и не является обязательным. Обязательным является нахождение чисел m и n. Нахождение этих чисел, следовательно, вычисление вероятностей в классической схеме облегчается, если применить элементы комбинаторики см. п.п. 4.1.

Еще заметим, что подсчет числа элементов тех или иных подмножеств множества Ω часто облегчается благодаря следующей формуле. *Число эле-*

ментов прямого произведения множеств равно произведению числа элементов составляющих множеств, т.е.

$$N(\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_s) = N(\Omega_1)N(\Omega_2)\cdots N(\Omega_s).$$

При решении вероятностных задач важно выделять опыты, где можно использовать те или иные комбинаторные формулы. Каждая из комбинаторных формул определяет общее число элементарных исходов в некотором опыте, состоящем в выборе наудачу k элементов из l различных элементов исходного множества $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_l\}$. При этом, в постановке каждого такого опыта строго оговорено, каким способом производится выбор и, что понимается под различными выборками.

Существуют **две принципиально различные схемы** выбора. ***В первой схеме*** выбор осуществляется без возвращения элементов (это значит, что отбираются либо сразу все k элементов, либо последовательно по одному элементу, причем каждый отобранный элемент исключается из исходного множества). ***Во второй схеме*** выбор осуществляется поэлементно с обязательным возвращением отобранного элемента на каждом шаге и тщательным перемешиванием исходного множества перед следующим выбором. После того как выбор тем или иным способом осуществлен, отобранные элементы (или их номера) могут быть либо упорядочены (т.е. выложены в последовательную цепочку), либо нет. В результате получаются следующие **четыре различные постановки опыта** по выбору наудачу k элементов из общего числа l различных элементов множества E.

Первая схема

а) Схема выбора, приводящая к сочетаниям

Пример 4. Из партии, содержащей 10 изделий, среди которых 3 бракованных, наудачу извлекают три изделия для контроля. Найти вероятности следующих событий:

$A = \{$в полученной выборке ровно одно изделие бракованное$\}$;

$B = \{$в полученной выборке нет ни одного бракованного изделия$\}$.

Решение

Занумеруем изделия числами от 1 до 10, и пусть множество номеров E_1 $=\{1,2,\ldots,7\}$ соответствует годным изделиям, а множество номеров E_2 $=\{8,9,10\}$ - бракованным.

Согласно описанию эксперимента производится выбор без возвращения и без упорядочивания трех элементов из множества $E=E_1\cup E_2=$ $=\{1,2,\ldots,10\}$. Поэтому $n=C_{10}^3=120$.

Событию A благоприятствуют только такие исходы, когда один элемент выборки принадлежит E_2, а остальные два элемента - множеству E_1. По формуле прямого произведения множеств получаем, что число всех таких исходов $m=C_3^2\cdot C_7^2=63$, поэтому

$$p(A)=\frac{m}{n}=\frac{63}{120}=\frac{21}{40}.$$

Событию B благоприятствуют только такие исходы, когда все три отобранных элемента принадлежат множеству E_1, поэтому $m=C_7^2=35$. Отсюда следует, что

$$p(B)=\frac{m}{n}=\frac{35}{120}=\frac{7}{24}\cdot$$

Упражнения

1. Из десяти первых букв русского алфавита наудачу составляется новый алфавит, состоящий из трех букв. Какова вероятность того, что случайно выбранный алфавит будет содержать букву *а*?

2. Из полного набора домино (28 штук) наудачу выбирают 7 костей. Какова вероятность, что среди них окажется, по крайней мере, одна кость с шестью очками?

3. Из десяти первых букв русского алфавита наудачу составляется новый алфавит, состоящий из пяти букв. Найти вероятности следующих событий:

А ={в состав нового алфавита входит буква *о*};

B = {в состав нового алфавита входят только согласные буквы}.

4. Среди кандидатов в студенческий совет факультета 3 первокурсника, 5 второкурсников и 7 третьекурсников. Из этого состава наудачу выбирают пять человек на предстоящую конференцию. Найти вероятности следующих событий:

A = {будут выбраны одни третьекурсники};

B = {все первокурсники попадут на конференцию};

C = {не будет выбрано ни одного второкурсника}.

5. Из колоды в 52 карты извлекаются наудачу 4 карты. Найти вероятности следующих событий:

A = {в полученной выборке все карты бубновой масти},

B = {окажется хотя бы один туз}.

б) Схема выбора, приводящая к размещениям

Пример 5. Множество E состоит из 10 первых букв русского алфавита. Опыт состоит в выборе без возвращения 4 букв и записи слова в порядке поступления букв. Сколько 4-буквенных слов может быть получено в данном опыте? Какова вероятность того, что наудачу составленное слово будет оканчиваться буквой a?

Решение

n число всех 4-буквенных слов в данном опыте - равно числу 4- элементных упорядоченных подмножеств из 10 элементов, т.е.

$$n = A_{10}^{4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040.$$

Пусть событие $A = \{$наудачу, составленное слово из 4 букв множества E, оканчивается буквой $a\}$. Число элементов множества A равно числу способов разместить на три оставшиеся места по одному символу из 9 (символ a исключен из рассмотрения, поскольку его место уже определено); таким образом,

$$m = A_{9}^{3} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$$

и

$$p(A) = \frac{m}{n} = \frac{504}{5040} = \frac{1}{10}.$$

Упражнения

1. Числа 1, 2, ..., 9 записываются в случайном порядке. Найти вероятности следующих событий:

$A=\{$числа будут записаны в порядке возрастания$\}$;

$B=\{$числа 1 и 2 будут стоять рядом и в порядке возрастания$\}$;

$C=\{$числа 3, 6 и 9 будут следовать друг за другом и в порядке возрастания$\}$;

$D=\{$на четных местах будут стоять четные числа$\}$;

$E=\{$сумма каждых двух чисел, стоящих на одинаковом расстоянии от концов, равна 10$\}$.

2. Группа, состоящая из 8 человек, занимает места с одной стороны прямоугольного стола. Найти вероятность того, что два определенных лица окажутся рядом, если а) число мест равно 8; б) число мест равно 12.

3. На пяти карточках написаны цифры от 1 до 5. Опыт состоит в случайном выборе трех карточек и раскладывании их в порядке поступления в ряд слева направо. Найти вероятности следующих событий:

$A=$ $\{$появится число 123$\}$;

$B=$ $\{$появится число, не содержащее цифры 3$\}$,

$C=$ $\{$появится число, состоящее из последовательных цифр$\}$;

$D=$ $\{$появится четное число$\}$;

$E=$ $\{$появится число, содержащее хотя бы одну из цифр 2 или 3$\}$.

4. 10 вариантов контрольной работы, написанные каждый на отдельной карточке, перемешиваются и распределяются случайным образом среди восьми студентов, сидящих в одном ряду, причем, каждый получает по одному варианту. Найти вероятности следующих событий:

$A=$ $\{$варианты с номерами 1 и 2 останутся неиспользованными$\}$;

$B=$ $\{$варианты 1 и 2 достанутся рядом сидящим студентам$\}$;

$C=$ $\{$будут распределены последовательные номера вариантов$\}$.

5. 12 студентов, среди которых Иванов и Петров, случайным образом занимают очередь за учебниками в библиотеку. Какова вероятность, что между Ивановым и Петровым, в образовавшейся очереди, окажутся ровно 5 человек?

Вторая схема

а) Схема выбора, приводящая к сочетаниям с повторениями

Пример 6. В технической библиотеке имеются книги по математике, экономике, статистике и т.д., всего по 16 разделам науки. Поступили очередные четыре заказа на литературу. Считая, что любой состав заказанной литературы равно возможен, найти вероятности следующих событий:

$A=$ $\{$заказаны книги из различных разделов науки$\}$,

$B=$ $\{$заказаны книги из одного и того же раздела науки$\}$.

Решение

Число всех равновероятных исходов данного эксперимента равно, очевидно, числу сочетаний с повторениями из 16 элементов по 4, т.е.

$$n=C_{16+4-1}^{4}=C_{19}^{4}.$$

Число исходов, благоприятствующих событию A, равно числу способов отобрать без возвращения четыре элемента из 16, т.е. $m=C_{16}^{4}$, поэтому

$$p(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_{16}^{4}}{C_{19}^{4}}=\frac{455}{969}\approx 0,47.$$

Число исходов, благоприятствующих событию B, равно числу способов выбрать один элемент из шестнадцати, поэтому

$$p(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_{16}^{1}}{C_{19}^{4}}=\frac{4}{969}\approx 0,004.$$

Упражнения

1. В кондитерской имеется 7 видов пирожных. Очередной покупатель выбил чек на 4 пирожных. Считая, что любой заказываемый набор пирожных равновероятен, вычислить вероятность того, что покупатель заказал: а) пи-

рожные одного вида; б) пирожные разных видов; в) по два пирожных различных видов.

2. Из общего количества костей домино, содержащих числа $0,1,2,...,n$, наудачу извлекли одну кость. Оказалось, что это не дубль. Какова вероятность p_n того, что вторую, извлеченную также наудачу кость домино, можно будет приставить к первой. Найти числовые значения вероятности для $n=6$ (обычный набор домино) и $n=9$ (расширенный набор).

б) Схема выбора, приводящая к размещениям с повторениями

Пример 7. 7 одинаковых шариков случайным образом рассыпаются по 4 лункам (в одну лунку может поместиться любое число шариков). Сколько существует различных способов распределения 7 шариков по 4 лункам? Какова вероятность того, что в результате данного опыта первая лунка окажется пустой (при этом может оказаться пустой и еще какая-либо лунка)?

Решение

Занумеруем лунки и шарики. Можно считать, что опыт состоит в 7-кратном выборе с возвращением номера лунки и записи 7- буквенного слова. При этом, каждому порядковому номеру буквы (номеру шарика) будет поставлена в соответствие одна из четырех букв алфавита (номер лунки).

Так, например,

1	1	3	1	4	4	2
1	2	3	4	5	6	7

означает, что в первую лунку попали шары № 1, № 2 и № 4, во вторую лунку - шар № 7, в третью - шар № 3, в четвертую - шары № 5 и № 6. Таким образом, число всех способов распределить 7 шариков по 4 лункам равно числу различных 7- буквенных слов из алфавита в 4 буквы, т.е. $n=4^7$.

Событие $A=\{$первая лунка окажется пустой$\}$ соответствует такому выбору, когда символ 1 (номер первой лунки) удален из алфавита. Поэтому $m=3^7$ и

$$p(A) = \frac{m}{n} = \frac{3^7}{4^7} = \left(\frac{3}{4}\right)^7 \approx 0{,}133.$$

Упражнения

1. Бросается 10 одинаковых игральных костей. Вычислить вероятности следующих событий:

$A =$ {ни на одной кости не выпадет 6 очков};

$B =$ {хотя бы на одной кости выпадет 6 очков};

$C =$ {ровно на 3 костях выпадет 6 очков}.

2. Опыт состоит в четырехкратном выборе с возвращением одной из букв алфавита $E = \{а, б, к, о, м\}$ и выкладывании слова в порядке поступления букв. Какова вероятность того, что в результате будет выложено слово «*мама*»?

3. В подъезде дома установлен замок с кодом. Дверь автоматически отпирается, если в определенной последовательности набрать три цифры из имеющихся десяти. Некто вошел в подъезд и, не зная кода, стал наудачу пробовать различные комбинации из трех цифр. На каждую попытку он тратит 20 секунд. Какова вероятность события $A =$ {вошедшему удастся открыть дверь за один час}?

4. Телефонная книга раскрывается наудачу и выбирается случайный номер телефона. Считая, что телефонные номера состоят из 7 цифр, причем все комбинации цифр равновероятны, найти вероятности следующих событий:

$A =$ {четыре последние цифры телефонного номера одинаковы};

$B =$ {все цифры различны};

$C =$ {номер начинается с цифры 5};

$D =$ {номер содержит три цифры 5, две цифры 1 и две цифры 2}.

5. Шесть человек вошли в лифт на первом этаже семиэтажного дома. Считая, что любой пассажир может с равной вероятностью выйти на 2-м, 3-м, ..., 7- м этажах, найти вероятности следующих событий:

$A =$ {на втором, третьем и четвертом этажах не выйдет ни один из пассажиров};

$B =$ {трое пассажиров выйдут на седьмом этаже};

$C =$ {на каждом этаже выйдет по одному пассажиру};

$D =$ {все пассажиры выйдут на одном этаже}.

6. К четырехстороннему перекрестку с каждой стороны подъехало по одному автомобилю. Каждый автомобиль может с равной вероятностью совершить один из четырех маневров на перекрестке: развернуться и поехать обратно, поехать прямо, налево или направо. Через некоторое время все автомобили покинули перекресток. Найти вероятности следующих событий:

$A =$ {все автомобили поедут по одной и той же улице};

$B =$ {по определенной улице поедут ровно три автомобиля};

$C =$ {по крайней мере по одной из улиц не поедет ни один автомобиль}.

7. Из разрезной азбуки выкладывается слово математика. Затем все буквы этого слова тщательно перемешиваются и снова выкладываются в случайном порядке. Какова вероятность того, что снова получится слово «*математика*»?

8. 52 карты раздаются четырем игрокам (каждому по 13 карт). Найти вероятности следующих событий:

$A =$ {каждый игрок получит туза};

$B =$ {один из игроков получит все 13 карт одной масти};

$C =$ {все тузы попадут к одному из игроков};

$D =$ {двое определенных игроков не получат ни одного туза}.

5. Статистический подход к понятию вероятности

Существует еще один подход к понятию вероятности, не связанный с пространством элементарных событий. В основе этого подхода лежит явление устойчивости частоты наступления события при многократном повторении испытаний. Пусть в результате некоторого опыта возможно появление события A. Повторим опыт n раз и подсчитаем количество m наступлений событий A. Предположим, что в данной серии опытов результаты предшествующих испытаний не влияют на последующие. Как известно из практики, отношение $\frac{m}{n}$ мало изменяется при больших n несмотря на то, что событие A случайное и величина m также зависит от случая. В частности, если монету подбрасывать многократно, то отношение количества выпавших гербов к общему числу бросаний монеты приближенно будет равно 1/2.

Отношение $\frac{m}{n}$ называется ***частотой*** появления события A в n испытаниях.

При условии устойчивости частоты появления события A число $\frac{m}{n}$ удовлетворяет требованиям, предъявляемым к вероятности как к характеристике того, насколько вероятно изучаемое событие с точки зрения практики и здравого смысла. Действительно, число $\frac{m}{n}$ удовлетворяет неравенству $0 \le \frac{m}{n} \le 1$, более вероятным с точки зрения здравого смысла событиям соответствует большее значение $\frac{m}{n}$, для невозможных событий $\frac{m}{n} = 0$, для достоверных $\frac{m}{n} = 1$; если событие A является суммой двух несовместных событий B и C, т.е. $A = B + C$, то $\frac{m_A}{n} = \frac{m_B}{n} + \frac{m_C}{n}$, где m_A, m_B, m_C - количество наступлений событий в n опытах. В силу сказанного (и при том условии, что возможно многократное повторение опыта с устойчивостью частоты) отношение $\frac{m}{n}$ называют *статистической вероятностью* события A.

В дальнейшем будет доказано (закон больших чисел Бернулли), что если для события A определена его классическая вероятность p , то частное $\frac{m_n}{n}$, где m_n случайная величина, выражающая количество наступлений события A в n независимых друг от друга испытаниях, при больших n «почти всегда» мало отличается от p . Таким образом, известное из практики явление оказывается строго доказанным математическим утверждением.

Следует заметить, что статистическое определение вероятности в некоторых случаях единственно доступно для измерения и исследования: действительно, далеко не всегда можно изучать случайные события с помощью пространства элементарных событий. Например, при изучении стрельбы по мишени невозможно указать разумную модель пространства элементарных событий, отражающую существенные стороны исследуемых испытаний.

6. Геометрические вероятности

Рассмотрим, наконец, вопрос о том, что называется вероятностью события в строго математическом смысле. Строгое определение понятия вероятности развивает идею конечного пространства элементарных событий и приводится в солидных учебниках по теории вероятностей. Здесь будут указаны лишь главные черты такого определения.

Пусть дано некоторое множество X (пространство элементарных событий, описанное в п. 2). Изучаемые события представляют собой подмножества в X. Задана также функция p, которая подмножествам в X сопоставляет число из числового отрезка [0,1]. Требуется, чтобы эта функция обладала свойством аддитивности, т.е., чтобы для всяких двух непересекающихся подмножеств $A,B\subset X$, для которых p определена, было справедливо равенство

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B); \tag{9}$$

кроме того, $p(\varnothing)=0,\ \ p(X)=1.$

Определение 10. Значение функции p на множестве A называется **вероятностью события** A.

Следует отметить, что множество X в отличие от п. 4[1] может быть бесконечным; например, X - отрезок числовой прямой, вся прямая, квадрат на плоскости, вся плоскость и т.п.

Часто функцию p бывает невозможно определить для всех подмножеств множества X; в этом случае ее определяют только для некоторых (так называемых измеримых) подмножеств (подробнее см. в солидных учебниках по теории вероятностей).

Наглядным примером вероятностной модели может служить ***геометрическая вероятность.***

Пусть X - множество точек квадрата на плоскости, т.е.

$$a \le x \le b, \quad a \le y \le b.$$

Для подмножества $A \subset X$ определим значение f равенством

$$p(A) = \frac{S(A)}{(b-a)^2}, \tag{10}$$

где $S(A)$ - площадь фигуры A. Ясно, что $p(X)=1$. Свойство (9) для функции (10) выполняется, поскольку площадь объединения двух непересекающихся фигур равна сумме площадей этих фигур.

Пример. Два приятеля договорились встретиться в установленном месте в промежутке времени от 6 до 7 ч. По взаимному соглашению каждый приходит на место встречи в случайный наугад выбранный момент и ждет другого ровно 10 мин. Какова вероятность того, что приятели встретятся?

Решение. Пусть x и y означают моменты прихода на место встречи первого и второго приятеля, соответственно. Такое событие удобно отметить точкой квадрата (рис. 3). Условие встречи заключаются в том, что

[1] Классическое определение вероятности предполагает, что число элементарных исходов испытания – конечно. На практике же весьма часто встречаются испытания, число возможных исходов которых – бесконечно. В таких случаях классическое определение неприменимо.

$$|x-y|<\frac{1}{6} \quad (11)$$

(сторона квадрата соответствует часу времени, 10 мин составляет 1/6 ч).

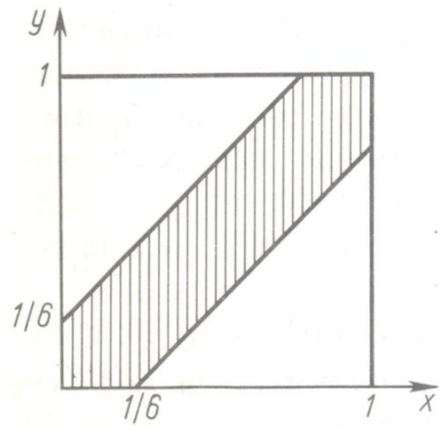


Рис. 3

Множество точек, удовлетворяющих условию (11), отмечено на рисунке штриховкой. Площадь этого множества равна 11 /36. Согласно формуле (10), вероятность встречи

$$p=\frac{{}^{11}\!/_{36}}{(7-6)^2}=\frac{11}{36}.$$

Здесь применение формулы (10) обосновано следующими соображениями. По условию каждый из приятелей приходит на место встречи, выбирая момент прихода наугад.

Формула (10) естественным образом обобщается на случай пространства любой размерности.

Пусть $\Omega\subset R^n$. Для подмножества $A\subset\Omega$ определим значение p равенством

$$P(A)=\frac{mes(\mathrm{A})}{mes(\Omega)},$$

где $mes(A)$ – мера множества A (длина, площадь, объем и т.д. в зависимости от размерности того пространства, в котором рассматриваются данные множества).

Упражнения

1. Внутри квадрата с вершинами (0,0), (1,0), (1,1) и (0,1) наудачу выбирается точка $M(x, y)$. Найти вероятности следующих событий:

$A = \{(x, y):\ \max(x, y) < a,\ a > 0\}$;

$B = \{(x, y):\ \min(x, y) < a,\ 0 \le a \le 1\}$;

$C = \{(x, y): x^2 + y^2 < a,\ a > 0\}$;

$D = \{(x, y): xy < a,\ a > 0\}$.

2. Какова вероятность того, что сумма трех наудачу взятых отрезков, длина каждого из которых не превосходит l, будет больше l?

3. Луч локатора перемещается в горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью. Какова вероятность того, что цель будет обнаружена в угловом секторе α радиан, если появление цели по любому направлению одинаково возможно?

4. Значения a и b равно возможны в квадрате $|a| \le 1,\ |b| \le 1$. Найти вероятности следующих событий:

$A =$ {корни квадратного трехчлена $x^2 + 2ax + b$ действительны};

В = {корни квадратного трехчлена $x^2 + 2ax + b$ положительны).

5. Какова вероятность, не целясь, попасть бесконечно малой пулей в прутья квадратной решетки, если толщина прутьев равна a, а расстояние между их осями равно l $(l > a)$?

6. Иван и Петр договорились о встрече в определенном месте между одиннадцатью и двенадцатью часами. Каждый приходит в случайный момент указанного промежутка и ждет появления другого до истечения часа, но не более 15 минут, после чего уходит. Наблюдаемый результат - пара чисел (x, y), где x - время прихода Петра, y - время прихода Ивана (время исчисляется в минутах, начиная от 11 часов). Найти вероятности событий:

В = {Петр пришел после Ивана);

D = {встреча не состоялась);

F = {Ивану не пришлось ждать Петра};

K ={встреча состоялась, когда до истечения часа оставалось меньше пяти минут}.

7. Из отрезка [-1, 2] наудачу взяты два числа. Какова вероятность того, что их сумма больше единицы, а произведение меньше единицы?

8. **Задача Бюффона.** На плоскость, разграфленную параллельными прямыми линиями, отстоящими друг от друга на расстоянии $2a$, наудачу бросается игла длиной $2l$. Какова вероятность того, что игла пересечет одну из параллельных прямых, если $l < a$.

Вопросы для самопроверки

1. Приведите интуитивное определение случайного события. Приведите примеры случайных событий.

2. Дайте определения достоверного и невозможного событий. Какими символами они обозначаются?

3. Когда события называют несовместными?

4. Какие события называют равновозможными?

5. Какое случайное событие называется массовым или статистическим? Чем отличаются массовые случайные события от единичных?

6. Чем занимается теория вероятностей?

7. С каким понятием связан точный смысл основных понятий теории вероятностей, в том числе, понятия «случайного события»?

8. Каково должно быть строгое математическое понятие «случайного события»?

9. Из чего состоит всякий случайный опыт (эксперимент, испытание)?

10. Что означает воспроизводимый опыт?

11. Что может быть предметом наблюдения в том или ином опыте?

12. Что означает понятие «наблюдаемый результат» для реально воспроизводимого опыта?

13. Как интерпретируется любой наблюдаемый результат?

14. Что понимают под понятием пространства (множества) элементарных исходов?

15. Как интерпретируется любое подмножество пространства (множества) элементарных исходов?

16. Из чего состоит поле событий для данного опыта?

17. Исходя из теоретико-множественного подхода разъясните понятие события; достоверного, невозможного событий и двух совместных (несовместных) событий.

18. Какую структуру может иметь множество Ω - пространство элементарных исходов? Прокомментируйте возможные варианты этого множества.

19. Исходя из какого требования на практике осуществляется построение множества Ω?

20. Когда строго не определяемое понятие «элементарный исход» становится более определенным?

21. Введите операции суммы, произведения событий и понятия противоположного события исходя из теоретико-множественного подхода к понятию события.

22. Что называется алгеброй событий?

23. Дайте классическое определение вероятности события.

24. Что называется классической схемой или схемой урн?

25. Сформулируйте два универсальных правила, применяемых при решении комбинаторных задач.

26. Что называется факториалом натурального числа l?

27. Когда множество, состоящее из k элементов называется упорядоченным?

28. Что называются размещениями из l элементов по k? Чему равно число размещений из l элементов по k?

29. Что называются перестановками из l элементов размещения из l элементов по l? Чему равно число перестановок из l элементов?

30. Что называются сочетаниями из l элементов по k?

31. Что называются размещениями с повторениями из l элементов по k? Чему равно число размещений с повторениями из l элементов по k?

32. Что называются сочетаниями с повторениями из l элементов по k? Чему равно число сочетаний с повторениями из l элементов по k?

33. Если во множестве S, состоящем из l элементов, есть только r различных элементов, то что называются перестановками с повторениями из l элементов? Чему равно число перестановок с повторениями из l элементов в данном случае?

34. Существуют две принципиально различные схемы выбора. Разъясните эти схемы.

35. Прокомментируйте четыре различные постановки опыта по выбору наудачу k элементов из общего числа l различных элементов множества.

36. Разъясните статистический подход к понятию вероятности. Что лежит в основе этого подхода?

37. В каких случаях целесообразно применить статистическое определение вероятности?

38. Что называется вероятностью события в строго математическом смысле? Укажите главные черты строгого определения понятия вероятности, которая развивает идею конечного пространства элементарных событий.

39. Разъясните понятие «геометрическая вероятность». Почему геометрическую вероятность считают наглядным примером вероятностной модели?

§44. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Ключевые слова: *аксиомы теории вероятностей, независимость (зависимость) одного события от другого, теорема сложения вероятностей, теорема умножения вероятностей, попарно независимость событий, независимость событий в совокупности, полная группа событий, теорема о полной вероятности, теорема гипотез или Байеса.*

1. Теорема сложения вероятностей

В п. 6 §43 в попытке определения вероятности события в строго математическом смысле на множестве событий - системе подмножеств множества Ω - пространства элементарных событий рассмотрели функцию $p(A)$ с требованием выполнения условия аддитивности и $p(\varnothing)=0$, $p(X)=1$. Затем вероятность события A определили как значение функции p на множестве A.

Ниже эту идею, следуя А.Н. Колмогорову, сформулируем в виде аксиом.

Вероятностью $p(A)$ называется числовая функция, определенная на[1] множестве событий - системе подмножеств множества Ω - пространства элементарных событий и удовлетворяющая трем условиям (аксиомам вероятностей):

1^0. Каждому событию A поставлено в соответствие неотрицательное число $p(A)$.

2^0. Если события $A_1, A_2, \ldots$ попарно несовместны, то

$$p(A_1 + A_2, + \cdots) = p(A_1) + p(A_2) + \cdots.$$

Заметим, что при бесконечном числе событий $A_1, A_2, \ldots$ в правой части написанного равенства стоит ***сумма ряда.***

---

[1] Поле событий (см. п. 2 §43) для данного опыта, и удовлетворяющая трем условиям (аксиомам вероятностей): *Далее по тексту.*

Очевидно, если множество Ω является конечным, то любая совокупность попарно не пересекающихся подмножеств состоит лишь из конечного числа подмножеств. Отсюда ясно, что для случая конечного Ω аксиома 2^0 равнозначна такому (в общем случае более слабому) требованию:

2^{*0}. $p(A+B)=p(A)+p(B)$, если A и B несовместны.

Чтобы подчеркнуть существенное различие между аксиомами 2^0 и 2^{*0}, часто аксиому 2^{*0} называют аксиомой аддитивности, а 2^0 - аксиомой счетной аддитивности.

3^0. $p(\Omega)=1$.

Аксиомы 1-3 составляют основу всей теории вероятностей. Все теоремы этой теории, включая самые сложные, выводятся из них формально-логическим путем.

Укажем несколько примеров такого вывода.

Следствие. Исходя из очевидного соотношения между подмножествами

$$A+\bar{A}=\Omega,$$

и применяя аксиомы 2^0 и 3^0, получаем, что

$$p(A)+p(\bar{A})=1,$$

т.е. сумма вероятностей противоположных событий равна единице.

В качестве другого следствия аксиом выведем следующее утверждение.

Теорема 1. Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$p(A+B)=p(A)+p(B)-p(AB). \qquad (*)$$

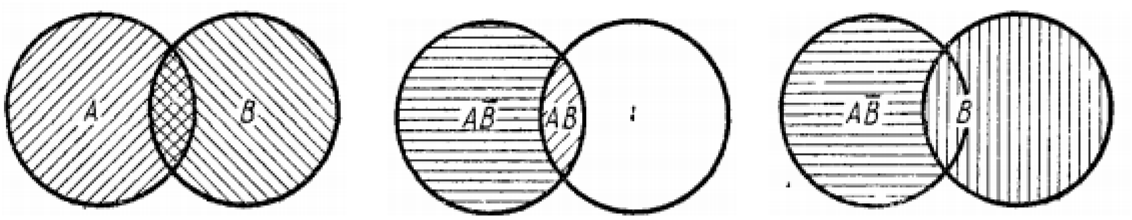
Доказательство. Рассмотрим очевидные соотношения между событиями (как между подмножествами множества Ω):

$$A=AB+A\bar{B}, \quad A+B=B+A\bar{B}.$$

Применяя к обоим равенствам аксиому сложения, получим два числовых равенства:

$$p(A)=p(AB)+p(A\bar{B}), \qquad p(A+B)=p(B)+p(A\bar{B}).$$

Вычитая из последнего равенства предыдущее, приходим к формуле (*).



Теорема 1 допускает следующее обобщение.

Теорема 2 (обобщенная теорема сложения вероятностей). Если A_1, A_2, …, A_n совместные события, то справедливо

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n=P(A_1)+\ldots+P(A_n)-P(A_1A_2)-\cdots-p(A_{n-1}A_n)+$$
$$+p(A_1A_2A_3)+p(A_1A_2A_4)+\cdots+p(A_{n-2}A_{n-1}A_n)-\cdots.$$

Доказательство опускаем.

2. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей.

Определение 1. Событие *A* называется ***независимым*** от события *B,* если вероятность события *A* не зависит от того, наступило событие *B* или нет. В противном случае событие *A* называется ***зависимым*** от события *B*.

Комментарий к определению 1. В дальнейшем будет доказано, что если случайное событие *A* не зависит от *B,* то и *B* не зависит от *A*.

Примеры

1. Монету подбрасывают два раза. Событие *A* состоит в том, что в первый раз выпадет герб, а событие *B* - в том, что во второй раз выпадет решка. Эти события, очевидно, независимы, поскольку второе бросание никак не может повлиять на первое.

2. Из деревьев леса наудачу выбирают одно. Событие *A* состоит в том, что дерево высокое (выше некоторого уровня, равного, например, 15 м), а событие *B* - в том, что дерево толстое (скажем, диаметр ствола больше 1 м).

Эти события зависимы, поскольку вероятность выбрать высокое дерево увеличивается, если выбирать его среди толстых деревьев.

Определение 2. Вероятность наступления события A при условии, что событие B наступило, **называется *условной вероятностью*** и обозначается $p_B(A)$.

Теорема 1 (теорема умножения вероятностей). Вероятность произведения событий A и B равна произведению вероятности события A на условную вероятность события B при условии, что A произошло, т.е.

$$p(AB) = p(A)\,p_A(B). \tag{1}$$

Для независимых событий A и B справедливо равенство

$$p(AB) = p(A)\,p(B). \tag{2}$$

Доказательство. Убедимся в справедливости теоремы для случая конечного пространства элементарных исходов.

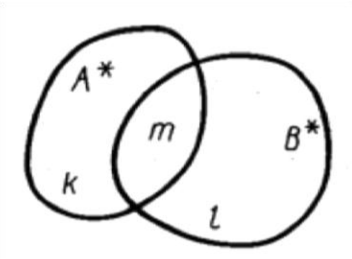


Рис. 1

Пусть событиям A и B соответствуют множества A^* и B^*, изображенные на рис. 1. Далее, пусть область A^* содержит k точек, область B^* - l точек и в пересечении $A^* \cap B^*$ содержится m точек; всего же в пространстве элементарных исходов имеется n точек. По определению, $p(A) = \dfrac{k}{n}$, $p(AB) = \dfrac{m}{n}$ (произведение AB изображается множеством $A^* \cap B^*$.

Заметим, что условная вероятность $p_A(B) = \dfrac{k}{m}$.

Действительно, событию B при условии, что A произошло, благоприятствуют m элементарных исходов, а наступление события A означает наступление одного из k элементарных исходов. Так как $\frac{m}{n}=\frac{k}{n}\cdot\frac{m}{k}$, то

$$p(AB)=p(A)\,p_A(B)\ ,$$

т.е. имеет место равенство (1).

В случае, когда событие B не зависит от события A, имеем $p(B)=$ $=p_A(B)$ и равенство (1) примет вид $p(AB)=p(A)\,p(B)$.

Теперь введем более широкое понятие независимости, а именно:

Определение 3. Говорят, что событие A не зависит от B если выполняется равенство (2).

В дальнейшем независимость A от B будет пониматься как выполнение равенства (2).

Следствие 1. Если случайное событие B не зависит от A, то и A не зависит от B.

Действительно, по условию $p(AB)=p(A)\,p(B)=p(B)\,p(A)$; кроме того, по теореме умножения вероятностей $p(AB)=p(B)\,p_B(A)$. Поэтому в случае $p(B)\neq 0$ имеем $p(A)=p_B(A)$, т.е. событие A не зависит от B.

Иначе говоря, отношение независимости является симметричным. Поэтому в дальнейшем мы можем говорить просто о независимых событиях A и B.

Следствие 2. Нетрудно видеть, что если A и B независимы, то независимы также события $\bar{A}$ и B, A и $\bar{B}$, $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

Примеры

1. В урне находятся 3 черных и 2 белых шара. Из урны извлекают последовательно (без возвращения) два шара. Событие A состоит в том, что первым будет взят белый шар, а событие B - в том, что второй шар окажется черным. Найти вероятность произведения (т.е. совместного наступления) событий A и B.

Решение

В силу теоремы умножения вероятностей имеем

$$p(AB) = p(A)\,p_A(B).$$

Очевидно, что $p(A)=\dfrac{2}{5}$. Так как после извлечения белого шара в урне осталось 4 шара -1 белый и 3 черных, то при этих условиях вероятность извлечения черного шара $p_A(B)=\dfrac{3}{4}$. Итак, $p(AB)=\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{6}{20}=\dfrac{3}{10}\cdot$

2. Какова вероятность выпадения двух гербов при двукратном бросании монеты?

Решение

Пусть A - выпадение герба при первом бросании, а B- выпадение герба при втором бросании; тогда $p(AB)=p(A)\,p(B)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$.

Аналогично, применяя теорему умножения несколько раз, получаем: вероятность того, что при n бросаниях монеты герб выпадает n раз, равна $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Замечание. Выразим условную вероятность из соотношения (1), считая $p(A)\neq 0$:

$$p_A(B)=\frac{p(AB)}{p(A)}\cdot \qquad (3)$$

Пример 1. Все грани игральной кости заклеены непрозрачной бумагой: грани 1, 2, 3 – красной, грани 4, 5, 6 – черной. При бросании кости выпала черная грань. Какова вероятность того, что на этой грани стоит четное число?

Решение

Очевидно, мы должны найти условную вероятность $p_A(B)$, где события B есть выпадение четного числа очков, а событие A – выпадение числа очков, большего 3. Имеем:

$$p_A(B)=\frac{p(AB)}{p(A)}=\frac{2/6}{3/6}=\frac{2}{3}.$$

Для сравнения отметим, что безусловная вероятность события B (просто $P(B)$) равна $1/2$.

Пример 2. Из колоды игральных карт наугад выбирают одну карту. Пусть событие A заключается в том, что вынутая карта является «тузом», а события B – в том, что карта красной масти («бубновая» или «червовая»). Интуитивно ясно, что A не зависит от B (цена карты не зависит от масти). Проверим это подсчетом. Так как

$$p(A)=\frac{4}{36},\quad p(B)=\frac{18}{36},\quad p(AB)=\frac{2}{36},$$

то равенство (2) выполняется. Следовательно, события A и B независимы.

В практических вопросах для установления независимости одного события от другого редко прибегают к проверке равенства (2). Обычно при этом довольствуются интуитивными соображениями. Так, например, если бросают подряд две монеты, то ясно, что выпадение той или другой стороны на одной монете не оказывает никакого влияния на условия бросания другой, и, значит, следующие два события: выпадение герба на одной монете (событие A) и выпадение герба на другой (событие B) - являются независимыми.

Определение 3. Несколько событий называют ***попарно независимыми,*** если каждые два из них независимы.

Пример 3. Монета брошена 3 раза. Пусть A, B, C - события, состоящие в появлении герба, соответственно, в первом, втором и третьем испытаниях. Ясно, что каждые два из рассматриваемых событий (т.е. A и B, A и C, B и C) - независимы.

Таким образом, события A, B и C - попарно независимые.

Определение 4. Несколько событий называют ***независимыми в совокупности,*** если каждое из них и любая комбинация остальных событий (содержащая либо все остальные события, либо часть из них) есть события независимые.

Например, если события A_1, A_2 и A_3 независимые в совокупности, то независимыми являются события: A_1 и A_2, A_1 и A_3, A_2 и A_3, A_1A_2 и A_3, A_1A_3 и A_2, A_2A_3 и A_1.

Комментарий к определению 4. Если несколько событий независимы попарно, то отсюда еще не следует их независимость в совокупности. В этом смысле требование независимости событий в совокупности сильнее требования их попарной независимости.

Привести пример, показывающий, что из попарной независимости событий A, B, C не следует их независимость в совокупности.

Теорема 2 (обобщенная теорема умножения вероятностей). Вероятность произведения нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже появились:

$$p(A_1A_2...A_n) = p(A_1)\cdot p_{A_1}(A_2)\cdot p_{A_1A_2}(A_3)...p_{A_1A_2...A_{n-1}}(A_n), \tag{4}$$

где $p_{A_1A_2...A_{n-1}}(A_n)$ - вероятность события, вычисленная в предположении, что события $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ наступили.

Для нескольких событий, независимых в совокупности, вероятность произведения нескольких событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$p(A_1A_2...A_n) = p(A_1)p(A_2)...p(A_n). \tag{5}$$

Комментарий к теореме 2. Порядок, в котором расположены события, может быть выбран любой, т.е. безразлично, какое событие считать первым, вторым и т.д.

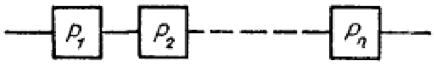
Доказательство производится методом математической индукции.

Теперь введем более широкое понятие независимости в совокупности, а именно:

Определение 5. События $A_1, A_2, ..., A_n$ называются ***независимыми в совокупности,*** если выполняется следующее условие: каково бы ни было подмножество $\{i_1, i_2 ..., i_k\}$ множеств $\{1, 2, ..., n\}$ справедливо равенство

$$p(A_{i_1} A_{i_2} ... A_{i_k}) = p(A_{i_1}) p(A_{i_2}) ... p(A_{i_k}). \qquad (6)$$

Пример 4. Электрическая схема состоит из ***n*** последовательно соединенных блоков.



Надежность (т.е. вероятность безотказной работы) каждого блока равна, соответственно, $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Считая выходы из строя различных блоков независимыми событиями, найти надежность всей схеме в целом.

Решение

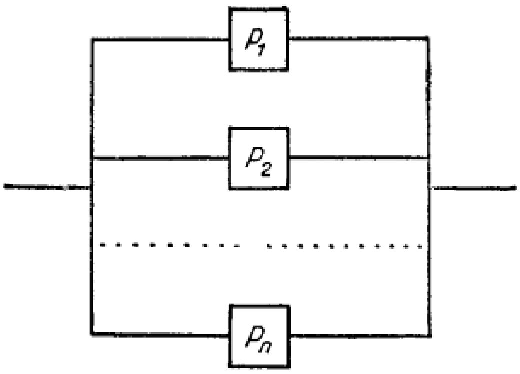
Событие, заключающееся в исправной работе i-го блока, обозначим A_i; исправность схемы в целом обозначим A. Так как блоки собраны последовательно, то A имеет место в том и только в том случае, когда имеют место все A_i. Поэтому

$$A = A_1 A_2 ... A_n,$$

откуда в силу независимости событий $A_1, A_2, ..., A_n$ следует

$$p(A) = p(A_1) p(A_2) ... p(A_n) = p_1 p_2 ... p_n.$$

Та же самая задача для схемы из параллельно соединенных блоков приводит к другому результату.



В этом случае выход схемы из строя происходит лишь в том случае, когда выходят из строя все блоки. Это значит, что

$$\bar{A}=\bar{A}_1\bar{A}_2...\bar{A}_n$$

и, следовательно,

$$p(\bar{A})=p(\bar{A}_1)p(\bar{A}_2)...p(\bar{A}_n)=(1-p_1)(1-p_2)...(1-p_n).$$

Таким образом, надежность всей схемы оказывается равной

$$p(A)=1-(1-p_1)(1-p_2)...(1-\mathrm{p}_n).$$

Пример 5. Слово «лотос», составленное из букв-кубиков, рассыпано на отдельные буквы, которые затем сложены в коробке. Из коробки наугад извлекаются одна за другой три буквы. Какова вероятность того, что при этом появится слово «сто».

Решение. Введем обозначение для событий:

$$A_1=\{\text{первой извлечена буква } \ll c \gg\};$$

$$A_2=\{\text{второй извлечена буква } \ll \text{т} \gg\};$$

$$A_3=\{\text{третьей извлечена буква } \ll o \gg\};$$

$$A=\{\text{получилось слово} \ll \text{сто} \gg\}.$$

Очевидно, $A=A_1A_2A_3$. Имеем последовательно:

$$p(A_1)=\frac{1}{5};\ \ p(A_1A_2)=p(A_1)p_{A_1}(A_2)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{20};$$

$$p(A_1A_2A_3)=p(A_1A_2)p_{A_1A_2}(A_3)=\frac{1}{20}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{30}.$$

Итак, $p(A)=\dfrac{1}{30}.$

3. Полная группа событий

Определение. ***Полной группой*** называют систему $A_1, A_2, ..., A_n$ попарно несовместных событий, если появления в результате опыта одного и только одного из них является достоверным событием.

Пример 6. Стрелок производит по мишени 2 выстрела. Следующие события A_1 – одно попадание; A_2 – два попадания; A_3 – промах образуют полную группу.

Для событий, образующих полную группу, имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице:

$$p(A_1)+p(A_2)+...+p(A_n)=1.$$

Доказательство: Так как появление одного из событий полной группы достоверно, а вероятность достоверного события равна единице, то

$$p(A_1+A_2+\cdots+A_n)=1.$$

Так как любые два события полной группы несовместны, то по теореме сложения несовместных событий

$$p(A_1+A_2+\cdots+A_n)=p(A_1)+p(A_2)+...+p(A_n)=1.$$

С помощью понятия полной группы событий можно дать другое определение противоположных событий.

Противоположными событиями называют два события, образующие полную группу.

На основании приведенной выше теоремы, сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$p(A)+p(\bar{A})=1.$$

Как правило, при рассмотрении противоположных событий вероятность одного из них обозначают p, а вероятность другого - q.

Таким образом, $p+q=1$.

Пример 7. Вероятность того, что день будет ясный равна 0,7. Найти вероятность того, что день будет дождливый.

Решение

По условию $p=0,7$. Тогда как $q=1-p$, т.е. $q=1-0,7=0,3$.

Очень часто при решении задач на нахождение вероятности события A бывает удобно найти прежде вероятность противоположного события $\bar{A}$, а затем вероятность искомого события по формуле:

$$p(A)=1-p(\bar{A}).$$

Пример 8. Студент из 50 экзаменационных вопросов знает ответ на 30. Какова вероятность того, что из заданных ему наудачу 5 вопросов он знает ответ хотя бы на один?

Решение

Обозначим через A событие, заключающееся в том, что студент знает ответ хотя бы на один вопрос. Тогда событие $\bar{A}$ - студент не знает ответа ни на один вопрос - противоположное событие. Вероятность события $\bar{A}$ легко находится по классическому определению вероятности:

$$p(\bar{A}) = \frac{m}{n} = \frac{C_{20}^5}{C_{50}^5}.$$

Тогда искомая вероятность

$$p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \frac{C_{20}^5}{C_{50}^5}.$$

Пример 9. В продукции завода брак составляет 5 % от общего количества выпускаемых деталей. Для контроля отобрано 20 деталей. Какова вероятность того, что среди них имеется хотя бы одна бракованная?

Решение

Для любой детали из продукции завода вероятность быть бракованной равна по условию $p = 0,05 = p\left(A_k\right),\ k = 1, 2, ..., 20,$ где событие

$$A_k = \{\, k\text{-я по счету извлеченная деталь бракованная}\}.$$

Очевидно, нас интересует событие $A_1 + A_2 + \cdots + A_{20}$. В условиях отлаженного технологического процесса можно считать, что события $A_1, A_2, ..., A_{20}$ независимы в совокупности. Тогда очевидно, что вероятность осуществления хотя бы одного $A_1, A_2, ..., A_{20}$ проще вычисляется не по формуле сложения, а с помощью формулы умножения:

$$p\left(A_1 + A_2 + \cdots + A_{20}\right) = 1 - p\left(\overline{A_1 + A_2 + \cdots + A_{20}}\right) =$$
$$= 1 - p\left(\overline{A_1}\right) p\left(\overline{A_2}\right) \cdots p\left(\overline{A_{20}}\right) = 1 - 0,95^{20} \approx 0,64.$$

Упражнения

1. Из 100 студентов, находящихся в аудитории, 50 человек знают английский язык, 40 - французский и 35 - немецкий. Английский и французский языки знают 20 студентов, английский и немецкий - 8, французский и немецкий - 10. Все три языка знают 5 человек. Один из студентов вышел из аудитории. Вычислить вероятности следующих событий:

A = {вышедший знает или английский или французский язык};

B = {вышедший знает только английский язык};

C = {вышедший не знает ни одного языка}.

2. Статистика, собранная среди студентов кредитно-экономического факультета Ташкентского финансового института, обнаружила следующие факты: 60 % всех студентов занимаются спортом, 30 % участвуют в художественной самодеятельности, 50 % работают в банке, 20 % занимаются спортом и участвуют в художественной самодеятельности, 10 % занимаются спортом и работают в банке, 5 % участвуют в самодеятельности и работают в банке, наконец, 5 % участвуют во всех трех видах деятельности. Корреспондент местной газеты подошел к наудачу выбранному студенту. Найти вероятности следующих событий:

A = {студент занимается по крайней мере одним из двух видов деятельности: занимается спортом или участвует в художественной самодеятельности};

B = (студент занимается одним только спортом};

C = {студент занимается только одним видом деятельности};

D = {студент занимается двумя и только двумя видами деятельности}.

3. **Задача де Мере.** Сколько раз нужно бросить пару игральных костей, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,5 хотя бы один раз появилась сумма очков, равная 12?

4. Формула полной вероятности. Формулы Байеса

Следствием основных теорем – теоремы сложения вероятностей и теоремы умножения вероятностей – является так называемая формула полной вероятности. А следствием теоремы умножения и формулы полной вероятности является так называемая теорема гипотез или формула Байеса. Этот пункт посвящается этим формулам.

4.1. Одним из эффективных методов подсчета вероятностей является формула полной вероятности, с помощью которой решается широкий круг задач.

Теорема 4 (теорема о полной вероятности). Пусть $B_1, B_2, ..., B_n$ - попарно несовместные события, имеющие, соответственно, вероятности $p(B_1)$, $p(B_2)$, ..., $p(B_n)$. Пусть событие A может наступить только вместе с одним из событий $B_1, B_2, ..., B_n$, и $p_{B_1}(A), p_{B_2}(A), ..., p_{B_n}(A)$ - условные вероятности события А при условии, что $B_1, B_2, ..., B_n$ наступили. Тогда вероятность $p(A)$ события A равна сумме произведений вероятностей событий B_n на условные вероятности $p_{B_n}(A)$:

$$p(A) = p(B_1)\cdot p_{B_1}(A) + p(B_2)\cdot p_{B_2}(A) + ... + p(B_n)\cdot p_{B_n}(A). \qquad (7)$$

Комментарий к теореме 4

1. Вероятности $p_A(B_i)$ называются после опытными (апостериорными) вероятностями событий B_i, а вероятности $p(B_i)$ - доопытными (априорными) вероятностями событий B_i). Эти вероятности различаются, что будет видно на примерах.

2) События $B_1, B_2, ..., B_n$ часто называются *гипотезами*.

Доказательство. По условию,

$$A(B_1 + B_2 + ... + B_n) = A \text{ и } AB_1 + AB_2 + ... + AB_n = A.$$

Применяя сначала теорему сложения, а затем теорему умножения вероятностей, получим

$$p(A) = p(AB_1) + p(AB_2) + \ldots + p(AB_n) =$$
$$= p(B_1) \cdot p_{B_1}(A) + p(B_2) \cdot p_{B_2}(A) + \ldots + p(B_n) \cdot p_{B_n}(A).$$

Формула (1) называется ***формулой полной вероятности.***

Пример 10. Производится серия из четырех выстрелов по некоторому объекту. Вероятности попадания в цель одного, двух, трех и четырех снарядов заданы таблицей

1	2	3	4
0,4	0,26	0,22	0,03

Вероятности разрушения объекта при условии попадания одного, двух, трех и четырех снарядов даны в таблице

1	2	3	4
0,5	0,7	0,8	0,99

Найти вероятность разрушения объекта.

Решение

Первая таблица задает вероятности $p(B_1), p(B_2), p(B_3), p(B_4)$, а вторая - вероятности $p_{B_1}(A), p_{B_2}(A), p_{B_3}(A), p_{B_4}(A)$ (событие B_i состоит в попадании в цель i (i=1, 2, 3, 4) снарядов, событие А состоит в разрушение мишени). По формуле (1) находим

$$p(A) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 + 0{,}26 \cdot 0{,}7 + 0{,}22 \cdot 0{,}8 + 0{,}03 \cdot 0{,}99 = 0{,}5877.$$

Пример 11. Статистика запросов кредитов в банке такова: 10% - государственные органы, 20% - другие банки, остальные - физические лица. Вероятности того, что взятый кредит не будет возвращён, составляют 0,01, 0,05 и 0,2, соответственно. Определить, какая доля кредитов в среднем не возвращается.

Решение

Пусть событие А состоит в том, что взятый кредит не возвращается, гипотеза B_1 - в том, что запрос на этот кредит поступил от государственного органа, гипотеза B_2 - в том, что запрос на кредит поступил от другого банка, гипотеза B_3 - в том, что запрос на кредит поступил от физического лица. По условию вероятности гипотез составляют

$$p(B_1)=0{,}1;\quad p(B_2)=0{,}2;\ p(B_3)=1-p(B_1)-p(B_2)=0{,}7.$$

Апостериорные вероятности, в свою очередь, по условию равны

$$p(B_1)=0{,}01;\quad p(B_2)=0{,}005;\quad p(B_3)=0{,}2.$$

По формуле полной вероятности

$$p(A)=p(B_1)\cdot p_{B_1}(A)+p(B_2)\cdot p_{B_2}(A)+p(B_3)\cdot p_{B_3}(A)=$$
$$=0{,}01\cdot 0{,}1+0{,}05\cdot 0{,}02+0{,}2\cdot 0{,}7=0{,}151.$$

Упражнения

1. Партия транзисторов, среди которых 10 % дефектных, поступила на проверку. Схема проверки такова, что с вероятностью 0,95 обнаруживается дефект (если он есть) и существует ненулевая вероятность 0,03 того, что исправный транзистор будет признан дефектным. Какова вероятность того, что случайно выбранный из партии транзистор будет признан дефектным?

2. Прибор, установленный на борту самолета, может работать в двух режимах: в условиях нормального крейсерского полета и в условиях перегрузки при взлете и посадке. Крейсерский режим полета осуществляется в 80% всего времени полета, условия перегрузки - в 20 %. Вероятность выхода прибора из строя за время полета в нормальном режиме равна 0,1, в условиях перегрузки - 0,4. Вычислить надежность прибора за время полета.

3. На шахматную доску ставят наудачу двух слонов, белого и черного. Какова вероятность того, что слоны побьют друг друга?

4. В продажу поступают телевизоры трех заводов. Продукция первого завода содержит 20 % телевизоров со скрытым дефектом, второго - 10 % и третьего - 5 %. Какова вероятность приобрести исправный телевизор, если в магазин поступило 30 % телевизоров с первого завода, 20 % - со второго и 50 % - с третьего?

5. В ящике лежат 20 теннисных мячей, в том числе 15 новых и 5 играных. Для игры наудачу выбираются два мяча и после игры возвращаются об-

ратно. Затем для второй игры также наудачу извлекаются еще два мяча. Какова вероятность того, что вторая игра будет проводиться новыми мячами?

6. Три стрелка, вероятности попадания которых при одном выстреле в мишень в неизменных условиях постоянны и, соответственно, равны $p_1 = 0,8,\ p_2 = 0,7,\ p_3 = 0,6,$ делают по одному выстрелу в одну и ту же мишень. Вычислить вероятность события A = $\{$в мишени окажется ровно две пробоины$\}$, приняв в качестве гипотез элементарные исходы данного опыта.

7. Из десяти студентов, пришедших сдавать экзамен по теории вероятностей и взявших билеты, Иванов и Петров знают 20 билетов из 30, Сидоров плохо занимался весь семестр и успел повторить только 15 билетов, остальные студенты знают все 30 билетов. По прошествии отведенного времени на подготовку экзаменатор наудачу вызывает отвечать одного из студентов. Какова вероятность того, что вызванный сдал экзамен, если знание билета гарантирует сдачу экзамена с вероятностью 0,85, а при незнании билета можно сдать экзамен лишь с вероятностью 0,1?

8. В первой урне находится 6 белых и 4 черных шара, во второй - 3 белых и 2 черных. Из первой урны наудачу извлекают сразу 3 шара, и шары того цвета, которые окажутся в большинстве, опускают во вторую урну и тщательно перемешивают. После этого из второй урны наудачу извлекают один шар. Какова вероятность того, что этот шар белый?

4.2. Теперь приступаем к обсуждению формул Байеса.

Теорема 5 (теорема Байеса). Пусть события $B_1, B_2, ..., B_n$ попарно несовместны и пусть событие A может наступить только вместе с одним из событий $B_1, B_2, ..., B_n$. Известны вероятности $p(B_1), p(B_2), ..., p(B_n)$ событий $B_1, B_2, ..., B_n$, и условные вероятности $p_{B_1}(A), p_{B_2}(A), ..., p_{B_n}(A)$ события A при условиях $B_1, B_2, ..., B_n$. Также известно, что событие A наступило. Тогда вероятности событий $B_1, B_2, ..., B_n$ при условии, что событие A наступило, находятся по формулам

$$p_A(B_i)=\frac{p(B_i)\cdot p_{B_i}(A)}{p(B_1)\cdot p_{B_1}(A)+p(B_2)\cdot p_{B_2}(A)+\ldots+p(B_n)\cdot p_{B_n}(A)},\quad i=1,2,\ldots,n. \quad (8)$$

Комментарий к теореме 5

1. Знаменатель в правой части формулы (8) совпадает с правой частью формулы (7) и равен $p(A)$.

2. Формула (8) дает вероятности гипотезы B_i, при которой наступило событие A.

Доказательство. Согласно теореме умножения вероятностей, имеем

$$p(AB_i)=p_A(B_i)\cdot p(A)=p(B_i)\cdot p_{B_i}(A).$$

Отсюда

$$p_A(B_i)=\frac{p(B_i)\cdot p_{B_i}(A)}{p(A)}. \quad (9)$$

Подставляя в знаменатель правой части равенства (9) вместо $p(A)$ правую часть формулы (7), получаем соотношение (8).

Формулы (8) называются ***формулами Байеса (или формулами гипотез).***

Пример 12. Поломка прибора (событие A) может быть вызвана одной из трех причин B_1, B_2, B_3, вероятности которых $p(B_1)$= 0,7, $p(B_2)$=0,2, $p(B_3)$ = 0,1. При наличии этих причин поломка прибора происходит с вероятностями $p_{B_1}(A)=0{,}1$, $p_{B_2}(A)=0{,}2$, $p_{B_3}(A)=0{,}2$. Известно, что прибор вышел из строя. Найти вероятности $p_A(B_1)$, $p_A(B_2)$, $p_A(B_3)$.

Решение. Используя формулы (8), получим

$$p_A(B_1)=\frac{0{,}7\cdot 0{,}1}{0{,}7\cdot 0{,}1+0{,}2\cdot 0{,}2+0{,}1\cdot 0{,}2}=\frac{0{,}07}{0{,}13}=\frac{7}{13};$$

$$p_A(B_2)=\frac{0{,}2\cdot 0{,}2}{0{,}7\cdot 0{,}1+0{,}2\cdot 0{,}2+0{,}1\cdot 0{,}2}=\frac{0{,}04}{0{,}13}=\frac{4}{13};$$

$$p_A(B_3)=\frac{0,1\cdot 0,2}{0,7\cdot 0,1+0,2\cdot 0,2+0,1\cdot 0,2}=\frac{0,02}{0,13}=\frac{2}{13}.$$

Из результатов вычислений видно, что апостериорные вероятности отличаются от априорных.

Пример 13. В условиях примера 11 начальнику кредитного отдела доложили, что получено факсимильное сообщение о неисполнении обязательств по возврату кредита, в котором очень плохо пропечаталось имя клиента. Найти вероятность того, что кредит не возвращает какой-либо банк.

Решение

Пусть событие А состоит в том, что взятый кредит не возвращается, гипотеза B_1 - в том, что запрос на этот кредит поступил от государственного органа, гипотеза B_2 - в том, что запрос на кредит поступил от другого банка, гипотеза B_3 - в том, что запрос на кредит поступил от физического лица. По условию вероятности гипотез составляют

$$p(B_1)=0,1;\quad p(B_2)=0,2;\; p(B_3)=1-p(B_1)-p(B_2)=0,7.$$

Апостериорные вероятности, в свою очередь, по условию равны

$$p(B_1)=0,01;\quad p(B_2)=0,05;\quad p(B_3)=0,2.$$

По формуле Байеса

$$p_A(B_2)=\frac{p(B_2)\cdot p_{B_2}(A)}{p(A)}=\frac{10}{151}\approx 0,66,$$

где вероятность $p(A)=0{,}151$ рассчитана по формуле полной вероятности в примере 10.

Пример 14. Страховая компания занимается страхованием жизни. 10% застрахованных в этой компании являются курильщиками. Если застрахованный не курит, вероятность его смерти на протяжении года равна 0,01. Если же он курильщик, то эта вероятность равна 0,05.

Какова доля курильщиков среди тех застрахованных, которые умерли в течение года?

Решение

Введем события:

$B_1 =$ {застрахованный - курильщик};

$B_2 =$ {застрахованный - не курильщик};

$A =$ {застрахованный умер в течение года}.

Условие задачи означает, что

$$p(B_1) = 0{,}1; \quad p_{B_2}(A) = 0{,}05; \quad p_{B_3}(A) = 0{,}01.$$

Кроме того, поскольку события B_1 и B_2 образуют полную группу попарно несовместимых событий, $p(B_2) = 1 - p(B_1) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9.$

Интересующая нас вероятность – это $p_A(B_1)$. Используя формулу Байеса, мы имеем:

$$p_A(B_1) = \frac{p(B_1)\cdot p_{B_1}(A)}{p(B_1)\cdot p_{B_1}(A) + p(B_2)\cdot p_{B_2}(A)} = \frac{0{,}1\cdot 0{,}05}{0{,}1\cdot 0{,}05 + 0{,}9\cdot 0{,}01} = \frac{5}{14} \approx 0{,}36.$$

Упражнения

1. Страховая компания продает договора страхования жизни трех категорий: стандартные, привилегированные и ультра привилегированные. 50% всех застрахованных являются стандартными, 40% - привилегированными и 10% - ультра привилегированными. Вероятность смерти в течение года для стандартного застрахованного равна 0,010, для привилегированного - 0,005, а для ультра привилегированного [2] - 0,001.

Чему равна вероятность того, что умерший застрахованный является ультра привилегированным ?

2. Партия транзисторов, среди которых 10 % дефектных, поступила на проверку. Схема проверки такова, что с вероятностью 0,95 обнаруживается дефект (если он есть) и существует ненулевая вероятность 0,03 того, что исправный транзистор будет признан дефектным. Случайно выбранный из пар-

[2] Привилегированность договора/застрахованного означает меньший риск для страховой компании (по результатам андеррайтинга).

тии транзистор был признан дефектным. Какова вероятность того, что на самом деле транзистор исправен?

3. Изучается три вида дефектов запоминающих устройств, выполненных на интегральных схемах: дефекты схем обрамления (гипотеза B_1); дефекты, вызванные паразитными связями между ячейками (гипотеза B_2); и дефекты адресных шин (гипотеза B_3). Известно, что

$$p(B_1)=0{,}1;\ p(B_2)=0{,}6;\ p(B_3)=0{,}3.$$

Диагностика запоминающих устройств производится с помощью набора тестов $T_1, T_2, \ldots, T_n$, каждый из которых проверяет определенное состояние ячейки памяти. Наблюдаемый результат - состояние выбранной ячейки по отношению к каждому тесту. Пусть диагностика произведена и наблюдался некоторый результат (произошло событие А). Известно до опыта, что

$$p_{B_1}(A)=0{,}4,\ p_{B_2}(A)=0{,}2,\ p_{B_3}(A)=0{,}3.$$

Установить, какая из гипотез имеет наибольшую апостериорную вероятность (т.е. какой из дефектов наиболее вероятен).

4. В специализированную больницу поступают в среднем 50% больных с заболеванием K, 20% с заболеванием M, 30% с заболеванием L. Вероятность полного излечения болезни K равна 0,7, для болезней L и M эти вероятности равны, соответственно, 0,8 и 0,9. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что этот больной страдал заболеванием K.

5. Продукция, изготавливаемая в цехе, проверяется двумя контролерами. Вероятность того, что деталь попадет на проверку к первому контролеру равна 0,6; ко второму - 0,4. Вероятность принять качественную деталь за бракованную равна для первого контролера 0,06, для второго контролера эта вероятность 0,02. Среди забракованных деталей оказалась качественная. Найти вероятность того, что она проверялась первым контролером.

6. В первой урне 1 белый и 2 черных шара, во второй – 100 белых и 100 черных шаров. Из второй урны переложили в первую один шар, а затем

из первой урны вынули наугад один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар ранее находился во второй урне, если известно, что он белый.

7. Среди поступающих на сборку деталей с первого станка 0,1% бракованных, со второго 0,2%, с третьего 0,25%, с четвертого 0,5%. Производительности их относятся, соответственно, как 4:3:2:1. Взятая наудачу деталь оказалась стандартной. Найти вероятность того, что она изготовлена на третьем станке.

8. В коробке находятся две неотличимые по внешнему виду и по весу игральные кости: одна правильная, с одинаковыми вероятностями выпадения всех шести цифр при случайном подбрасывании; другая неправильная, с неравномерным распределением массы по объему. При случайном подбрасывании неправильной игральной кости шестерка появилась с вероятностью 1/3, единица с вероятностью 1/9, остальные цифры выпадают с одинаковой вероятностью. Наудачу извлеченная из коробки игральная кость была подброшена, и в результате выпало 6 очков. Найти вероятность того, что была подброшена правильная игральная кость.

9. В группе из 25 человек, пришедших сдавать экзамен по теории вероятности, имеется 10 отличников, 7 подготовленных хорошо, 5 удовлетворительно и 3 человека плохо подготовлены. Отличники знают все 25 вопросов программы, хорошо подготовленные – 20, подготовленных удовлетворительно – 15, и плохо подготовленные знают лишь 10 вопросов. Вызванный наудачу студент ответил на два заданных вопроса. Найти апостериорные вероятности гипотез:

$H_1 = \{$студент подготовлен отлично или хорошо$\}$;

$H_2 = \{$студенты подготовлены удовлетворительно$\}$;

$H_3 = \{$студент подготовлен плохо$\}$.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте аксиомы 1-3, которые составляют основу всей теории вероятностей.

2. Все теоремы теории вероятностей, включая самые сложные, выводятся из аксиомы 1-3 формально-логическим путем. Укажите несколько примеров такого вывода.

3. Дайте определения независимости (зависимости) одного события от другого.

4. Что называется условной вероятностью и как она обозначается?

5. Приведите теорему умножения вероятностей.

6. Можно ли утверждать: - «Если случайное событие B не зависит от A, то и A не зависит от B».

7. Как поступают в практических вопросах для установления независимости одного события от другого?

8. Когда несколько событий называют попарно независимыми? Приведите примеры.

9. Когда несколько событий называют независимыми в совокупности? Приведите примеры.

10. Если несколько событий независимы попарно, то следует ли отсюда их независимость в совокупности?

11.Привести пример, показывающий, что из попарной независимости событий A, B, C не следует их независимость в совокупности.

12. Приведите обобщенную теорему умножения вероятностей.

13. Дайте определение полной группы событий. Чему равна сумма вероятностей событий, образующих полную группу?

14. Приведите другое определение противоположных событий с помощью понятия полной группы событий.

15. Сформулируйте теорему о полной вероятности. Прокомментируйте эту теорему.

16. Сформулируйте теорему Байеса. Прокомментируйте эту теорему.

17. Почему теоремы полной вероятности и Байеса (или гипотез) считают следствием теорем сложения и умножения вероятностей?

§45. Последовательность независимых испытаний. Предельные теоремы в схеме Бернулли

Ключевые слова: *последовательность независимых испытаний, схема Бернулли, формула Бернулли, наивероятнейшее число, локальная теорема Муавра-Лапласа, интегральная теорема Муавра-Лапласа, правило «трёх сигм», практически достоверные события, теорема Пуассона.*

При практическом применении теории вероятностей часто приходится встречаться с задачами, в которых одно и то же испытание или аналогичные испытания повторяются неоднократно. В результате каждого испытания может появиться или не появиться некоторое событие A, причем нас интересует не результат каждого отдельного испытания, а общее число появлений события A в результате испытаний. Например, если производится серия выстрелов по одной и той же цели, нас, как правило, интересует не результат каждого выстрела, а общее число попаданий. Такие задачи рассматриваются на этой и следующей лекциях. Оказывается, при определенных условиях, они решаются весьма просто.

1. Последовательность независимых испытаний (схема Бернулли)

Пусть производится серия из n испытаний, в каждом из которых событие A может наступить, а может и не наступить. Пусть при этом выполнено следующее условие: вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна, т.е. не зависит ни от номера испытания, ни от результатов предыдущих испытаний.

Это условие означает, что последовательность испытаний независима (вероятность p не зависит от результатов предыдущих испытаний).

Определение. Последовательность испытаний, удовлетворяющих указанному условию, называется ***последовательностью независимых испытаний (или схемой Бернулли).*** Схема Бернулли полностью определяется двумя числами - натуральным числом n, означающим количество испытаний, и числом p ($0 < p < 1$), означающим вероятность наступления события A в одном испытании (безразлично, в каком по счету).

Примеры. Следующие серии опытов представляют собой конкретные модели схемы Бернулли:

1. Монету подбрасывают n, раз; вероятность появления герба в одном испытании $p = 1/2$.

2. Производят n выстрелов по мишени. Предполагается, что вероятность попадания в мишень при каждом выстреле постоянна и равна p.

Отметим, однако, что если в процессе стрельбы стрелок пристрелялся и стал лучше поражать мишень, то такая последовательность испытаний не является схемой Бернулли.

3. Из кучи зерна отбирают n зерен для проверки их на всхожесть. Вероятность того, что каждое зерно при проверке дает положительный результат, постоянна (так будет, например, в том случае, когда куча зерна большая, а зерна отбирают наугад после перемешивания).

В связи со схемой Бернулли рассматривают такие задачи:

1. Найти вероятность $P_n(k)$ того, что в серии из n испытаний событие A наступит ровно k раз. Решение этой задачи дает формула Бернулли.

2. Найти вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что в серии из n испытаний количество k наступлений события A будет находиться в пределах $k_1 \le k \le k_2$.

3. Решить задачу 1 для больших чисел n и k (формула Бернулли, дающая решение задачи 1, неудобна для вычислений при больших n и k). Задача 3 решается с помощью локальной теоремы Муавра- Лапласа.

4. Решить задачу 2 для больших чисел n, k_1, k_2 (формула Бернулли мало пригодна для вычислений $P_n(k_1, k_2)$ при больших n, k_1, k_2). Задача решается с помощью интегральной теоремы Муавра-Лапласа.

2. Формула Бернулли

Теорема 1. Вероятность $P_n(k)$ того, что в последовательности из n испытаний в схеме Бернулли событие A наступит ровно n раз, выражается формулой

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ число сочетании из n элементов по k; p - вероятность наступления события A в одном испытании; $q = 1 - p$ - вероятность не наступления события A в одном испытании.

Доказательство. Рассмотрим последовательность из k плюсов и $n-k$ минусов, расположенных в произвольном, но фиксированном порядке. Каждая такая последовательность задает событие при «n-кратном испытании по схеме Бернулли: знак « + » или «-» на k-м месте последовательности означает, соответственно, наступление или не наступление события A при k-м испытании. Вероятность такого события (расположение k плюсов и $n-k$ минусов в произвольном, но фиксированном порядке) в силу теоремы умножения вероятностей равна $p^k q^{n-k}$ и не зависит от порядка плюсов и минусов в рассматриваемой последовательности. При этом последовательности с различным расположением k плюсов и $n-k$ минусов определяют различные попарно несовместные события. Количество последовательностей из k плюсов и $n-k$ минусов равно числу сочетаний из n элементов по k. Действительно, последовательность будет полностью определена, если из множества номеров $\{1, 2, 3, ..., n\}$ выбрано k штук и плюсы последовательности поставлены на места с номерами из выбранного множества.

Отсюда по теореме сложения вероятностей получаем

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} ,$$

где, как известно, число сочетаний из n элементов по k выражается формулой

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} .$$

Примеры

1. Найти вероятность того, что при 10-кратном бросании монеты выпадет ровно 3 герба.

Решение

Здесь $n=10,\quad k=3,\quad p=\frac{1}{2}$. Согласно формуле Бернулли, получим

$$P_{10}(3)=C_{10}^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{120}{1024} .$$

2. Пусть вероятность поражения мишени при одном выстреле равна $1/3$. Найти вероятность того, что из 6 выстрелов три поразят мишень.

Решение

Используя формулу Бернулли при $n=6,\quad k=3,\ p=\frac{1}{3},\ q=\frac{2}{3},$ находим

$$P_6(3)=C_6^3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{8}{729}=\frac{160}{729}.$$

3. Пусть вероятность того, что взятое наудачу из кучи зерно окажется всхожим, равна 0,9. Какова вероятность того, что из 7 отобранных зерен ровно 5 окажутся всхожими?

Решение

Имеем

$$P_7(5)=C_7^5\,0{,}9^5\cdot 0{,}1^2=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=21\cdot 0{,}0059049=0{,}124.$$

4. В схеме Бернулли, связанной с бросанием монеты, вычислить вероятности $P_{10}(k)$, где k = 0, 1, 2, ..., 10 (т.е. вероятности того, что в 10 испытаниях герб выпадет ровно k раз).

Решение. Используя формулу Бернулли при $p=q=\frac{1}{2},\ k=0,1,2,...,10,$ получим

$$P_{10}(0)=\frac{1}{1024},\ P_{10}(1)=\frac{10}{1024},\ P_{10}(2)=\frac{45}{1024},\ P_{10}(3)=\frac{120}{1024},\ P_{10}(4)=\frac{210}{1024},$$
$$P_{10}(5)=\frac{252}{1024},\ P_{10}(6)=\frac{210}{1024},\ P_{10}(7)=\frac{120}{1024},\ P_{10}(8)=\frac{45}{1024},\ P_{10}(9)=\frac{10}{1024},$$
$$P_{10}(10)=\frac{1}{1024}.$$

Результаты вычислений иллюстрирует рис.1. Как видно из рисунка, наибольшей из вероятностей $P_{10}(k)$ является $P_{10}(5)\approx 0,25$. Сравнительно велики и значения $P_{10}(4)$ и $P_{10}(6)$ $(\approx 0,21)$; в то же время «крайние» значения k дают $P_{10}(0)=P_{10}(10)\approx 0,001$.

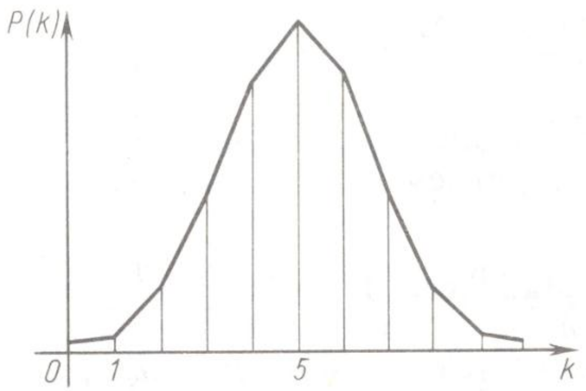


Рис. 1

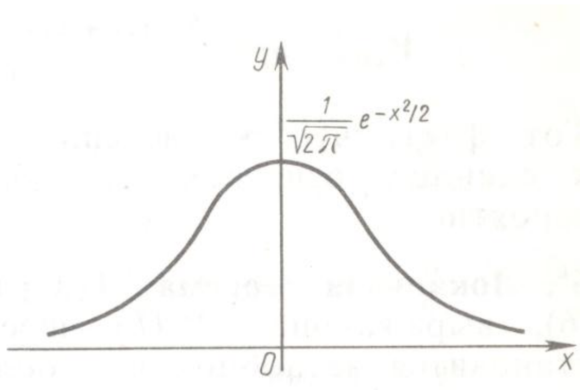


Рис. 2

Обратим внимание на характерный вид изображенной на рисунке ломаной, имеющей пик в точке $k=5$. В дальнейшем нам часто придется иметь дело с кривой $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ (рис. 2). Она называется гауссовой кривой (или кривой нормального распределения) и играет исключительно важную роль в теории вероятностей.

Тот факт, что ломаная на рис. 1 и кривая на рис. 2 имеют значительное сходство, не случаен. Причины этого явления раскрываются локальной теоремой Муавра-Лапласа.

Для вычисления вероятностей $P_n(k_1,k_2)$ того, что в схеме Бернулли из n испытаний количество m наступлений события A будет находиться в пределах $k_1\le m<k_2$, можно использовать формулу

$$P_n(k_1,k_2)=P_n(k_1)+P_n(k_1+1)+\ldots+P_n(k_2-1). \qquad (1)$$

Событие, о котором идет речь, является суммой попарно несовместных событий B_i $(i = k_1, k_1 + 1, ..., k_2 - 1)$, состоящих в том, что в n испытаниях событие A наступит ровно i раз; затем, используя теорему сложения вероятностей, получаем формулу (1).

В частности, вероятность того, что в n испытаниях событие наступит: а) менее k раз; б) более k раз; в) не менее k раз; г) не более k раз, находят, соответственно, по формулам:

$$P_n(0) + P_n(1) + ... + P_n(k-1);$$
$$P_n(k+1) + P_n(k+2) + ... + P_n(n);$$
$$P_n(k) + P_n(k+1) + ... + P_n(n);$$
$$P_n(0) + P_n(1) + ... + P_n(k).$$

3. Наивероятнейшее число появлений события в независимых испытаниях

Число k_0 (наступления события в независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p) называют наивероятнейшим, если вероятность того, что событие наступит в этих испытаниях k_0 раз, превышает (или, но в крайней мере, не меньше) вероятности остальных возможных исходов испытаний.

Наивероятнейшее число k_0 определяют из двойного неравенства

$$np - q \le k_0 \le np + p \ ,$$

причем:

а) если число $np - q$ -дробное, то существует одно наивероятнейшее число k_0;

б) если число $np - q$ – целое, то существует два наивероятнейших числа, а именно: k_0 и $k_0 + 1$;

в) если число np - целое, то наивероятнейшее число $k_0 = np$.

Пример. Испытывается каждый из 15 элементов некоторого устройства. Вероятность того, что элемент выдержит испытание, равна 0,9. Найти наивероятнейшее число элементов, которые выдержат испытание.

Решение. По условию, $n = 15,\ p = 0{,}9,\ q = 0{,}1$. Найдем наивероятнейшее число k_0 из двойного неравенства

$$np - q \le k_0 \le np + p.$$

Подставив данные задачи, получим

$$15 \cdot 0{,}9 - 0{,}1 \le k_0 < 15 \cdot 0{,}9 + 0{,}9, \text{ или } 13{,}5 < k_0 < 14{,}4.$$

Так как k_0 - целое число и поскольку между числами 13,4 и 14,4 заключено одно целое число, а именно 14, то искомое наивероятнейшее число $k_0 = 14$.

Пример. Найти наивероятнейшее число появления герба в 10 испытаниях (см. пример 4 из п.2).

Решение

$np - q = 10 \cdot 0{,}5 - 0{,}5 = 4{,}5$ – дробное число; существует одно наивероятнейшее число k_0. Имеем $4{,}5 \le k_0 \le 5{,}5$. Следовательно, $k_0 = 5$. Нетрудно заметить, что расчеты, проведенные в п.2, это подтверждают, т.е. наибольшей из вероятностей $P_{10}(k)$ является $P_{10}(5) \approx 0{,}25$. .

Пример. Известно, что из числа зрителей определённой телепрограммы 70% смотрят и рекламные блоки. Группы, состоящие из трёх наугад выбранных телезрителей, опрашивают относительно содержания рекламного блока. Рассчитать вероятности числа лиц в группе, которые смотрят рекламные блоки.

Решение

Вероятность того, что наугад выбранный зритель данной телепрограммы смотрит и рекламные блоки, согласно статистическому определению вероятности, равна $p = 0{,}7$. Интерпретируя опрос трёх телезрителей как три испытания Бернулли и считая событие A как ситуацию, когда телезритель смотрит рекламные блоки, найдём искомые вероятности по формуле Бернулли

$$P_3(k) = C_3^k 0,7^k \cdot 0,3^{3-k} \quad (k = 0,1,2,3),$$

в которой $n = 3$, $p = 3$. Отсюда имеем:

$$P_3(0) = C_3^0 0,7^0 \cdot 0,3^3 = 0,027; \qquad P_3(1) = C_3^1 0,7^1 \cdot 0,3^2 = 0,189;$$

$$P_3(2) = C_3^2 0,7^2 \cdot 0,3^1 = 0,441; \qquad P_3(3) = C_3^3 0,7^3 \cdot 0,3^0 = 0,343.$$

Пример. В условиях предыдущего примера найти наивероятнейшее число лиц в группе, которые смотрят рекламные блоки.

Решение

Наивероятнейшее число k_0 лиц в группе, которые смотрят рекламные блоки, подчиняется неравенствам

$$np - q \le k_0 \le np + p,$$

в которых $n = 3$, $p = 3$, т.е.

$$3 \cdot 0,7 - 0,3 \le k_0 \le 3 \cdot 0,7 + 0,7 \text{ или } 1,8 \le k_0 \le 2,8,$$

откуда $k_0 = 2$. Это подтверждается и решением предыдущего примера.

Упражнения

1. Стоимость проезда в автобусе равна 3, месячный проездной билет на автобус стоит 120, а штраф за безбилетный проезд составляет 10. Петя 24 раза в месяц ездит на автобусе в институт и обратно. Он не покупает проездного билета, никогда не платит за проезд и считает, что вероятность быть пойманным и заплатить штраф равна 0,05. Сравнить стоимость проездного билета с наиболее вероятной величиной штрафа за 48 поездок.

2. В брокерской конторе для стимулирования прибыльности торговли применяется следующая система премирования сотрудников. Если сотрудник не достигал установленного дневного уровня прибыли на протяжении более трёх дней за две недели (10 рабочих дней), он теряет свою премию. Вероятность того, что сотрудник выполнит требуемую норму прибыли, составляет 0,85. Найти число премий, потерянных 100 сотрудниками этой брокерской конторы за год (50 рабочих недель).

3. Среди 12 проверяемых ревизором договоров семь оформлены неправильно. Найти вероятность того, что среди пяти договоров, произвольно

отобранных ревизором для проверки, окажутся неправильно оформленными: а) ровно три договора; б) не менее трёх договоров.

4. Что вероятнее: выиграть в бильярд у равносильного противника три партии из четырёх или пять партий из восьми?

5. Что вероятнее: выиграть в бильярд у равносильного противника не менее трёх партий из четырёх или не менее пяти партий из восьми?

6. В течение месяца данная акция может подорожать на 1% с вероятностью 0,7 и подешеветь на 1% с вероятностью 0,3. Предполагая ежемесячные изменения цены независимыми, рассчитать вероятности того, что за три месяца цена акции возрастет: а) в $(1{,}01)^3$ раза; б) в $0{,}99\cdot(1{,}01)^2$ раза.

7. Из 1000 опрошенных 700 человек поддерживают некоторую правительственную программу. Найти минимальную численность группы, в которой с вероятностью, не меньшей 0,9, хотя бы один респондент не поддерживает эту программу.

8. Среди билетов лотереи половина выигрышных. Найти минимальное число билетов, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,99, быть уверенным в выигрыше хотя бы по одному билету.

9. В городе работают 1000 коммерческих банков, из которых 330 допускают нарушения налогового законодательства. Определить число банков, которые должна отобрать для проверки налоговая инспекция, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,99, среди них оказался хотя бы один нарушитель законодательства.

10. В условиях задачи 9 налоговая инспекция проводит проверку 12 банков, выбирая их случайным образом. Выбранные банки проверяются независимо друг от друга. Допущенные в проверяемом банке нарушения могут быть выявлены инспекцией с вероятностью 0,8. Найти вероятность того, что в ходе этой проверки будет выявлен хотя бы один нарушитель налогового законодательства.

11. Банк имеет пять отделений. Ежедневно с вероятностью 0,3 каждое отделение, независимо от других, может заказать на следующий день круп-

ную сумму денег. В конце рабочего дня один из вице-президентов банка знакомится с поступившими заявками. Найти вероятности следующих событий: а) поступили ровно две заявки; б) поступила хотя бы одна заявка; в) среди поступивших двух заявок есть заявка от первого отделения.

12. Игральную кость бросают пять раз. Найти вероятность того, что дважды появится число, кратное трём.

Пример. Задача о разделе ставки[1]. Петя и Маша часто играют в бильярд друг с другом, причём Петя выигрывает в два раза чаще, чем Маша. Исходя из этого, они оценили свои вероятности победить как $\frac{2}{3}$ для Пети и $\frac{1}{3}$ для Маши и начали турнир на следующих условиях: каждый выигрыш приносит одно очко. Петя для победы должен набрать двенадцать очков, а Маша - шесть. После того, как Петя набрал восемь очков, а Маша - четыре, игру пришлось прекратить, и победу решили присудить тому, у кого вероятность окончательного выигрыша больше. Определить, кому присудили победу в этом турнире.

Решение

Очевидно, максимальное количество партий, которое осталось сыграть Пете и Маше, равно пяти (либо Петя выиграет три раза, а Маша - два раза, либо Маша выиграет один раз, а Петя - четыре раза). Поэтому событие, заключающееся в выигрыше Пети (а значит, проигрыше Маши), состоит в том, что Маша из пяти партий не выиграет ни одной или выиграет всего одну. Поэтому вероятность выигрыша Пети равна вероятности того, что в пяти испытаниях Бернулли, в каждом из которых успех интерпретируется как выигрыш Машей очередной партии (т.е. вероятность успеха в каждом испытании составляет $p=\frac{1}{3}$), наступит 0 или 1 успех:

$$P\{\text{выигрыш Пети}\}=P\{0\ \text{или}\ 1\ \text{выигрыш Маши из}\ 5\ \text{партий}\}=$$

[1] Такая задача возникает при определении доли инвестора, который хочет «выйти» из незавершенного проекта.

$$= P_5(0) + P_5(1) = C_5^0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{5}\right)^5 + C_5^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{112}{243}.$$

При этом

$$P\{\textit{выигрыш Маши}\} = P\left\{\overline{\{\textit{выигрыш Пети}\}}\right\} =$$

$$= 1 - P\{\textit{выигрыш Пети}\} = 1 - \frac{112}{243} = \frac{131}{243}.$$

Поэтому в данном случае победу должны были присудить Маше.

Пример (задача Банаха). Известный математик Стефан Банах всегда носил с собой две коробки спичек, в каждой из которых первоначально было n спичек. Каждый раз, когда он хотел зажечь спичку, Банах доставал наугад одну из коробок. Найти вероятность того, что когда он в первый раз вынимал пустую коробку, в другой коробке оказывалось ровно r спичек, где $r = \overline{0, n}$.

Решение

Спички брались всего $(2n - r)$ раз, причём n раз из коробки, оказавшейся пустой. Это соответствует n успехам в $(2n - r)$ независимых испытаниях, поэтому вероятность

$$p(A) = \frac{C_{2n-r}^n}{2^{2n-r}}.$$

Упражнение

Доказать формулу $np - q \le k_0 \le np + p$ для наивероятнейшего числа наступления события в независимых испытаниях.

4. Полиномиальная схема. Более сложная схема с n независимых испытаний получается, когда при каждом испытании возможно появление одного из r попарно несовместных $A_1, A_2, ..., A_r$ исходов $(A_1 + A_2 + \dots + A_r = \Omega)$. Пусть $p_1, p_2, ..., p_r$ – вероятности этих исходов, тогда $p_1 + p_2 + \dots + p_r = 1$. Полагая $P_n(m_1, m_2, ..., m_r)$ – вероятность того, что A_1 произошло ровно m_1 раз, A_2 произошло ровно m_2 раз, и т.д., A_r произошло ровно m_r раз (нетрудно убедится, что $m_1 + m_2 + \dots + m_r = 1$) имеем

$$P_n(m_1, m_2, ..., m_r) = \frac{n!}{m_1!m_2!.....m_r!} p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdots p_r^{m_r}. \qquad (2)$$

Формула (3) носит называние *полиномиальной*; описанная схема независимых испытаний с r исходами также называется полиномиальной. При $r = 2$ эта схема превращается в биномиальную схему Бернулли.

Пример. В урне находятся 8 белых, 5 красных и 2 черных шара. Производится 5 извлечений с возвращением по одному шару. Рассматриваются события:

$A = \{$появился следующий состав шаров: 3 белых и по одному остальных цветов$\}$;

$B = \{$появилось ровно 3 белых шара$\}$;

$C = \{$появилось 3 белых шара и по одному остальных цветов; причем белые шары появились подряд$\}$.

Определить их вероятности.

Решение

Событие A соответствует полиномиальной схеме при $n = 5$, $r = 3$, $p_1 = 8/15$, $p_2 = 5/15$, $p_3 = 2/15$, поэтому

$$p(A) = P_5(3,1,1) = \frac{5!}{3!1!1!}\left(\frac{8}{15}\right)^3\left(\frac{5}{15}\right)\left(\frac{2}{15}\right) = \frac{8}{9}\cdot\left(\frac{8}{15}\right)^3 \approx 0{,}1348.$$

Событие B соответствует полиномиальной схеме при $n = 5$, $r = 2$, $p_1 = 8/15$, $q_1 = 7/15$, поэтому

$$p(B) = P_5(3) = C_5^3\left(\frac{8}{15}\right)^3\left(\frac{7}{15}\right)^2 = 10\cdot\left(\frac{8}{15}\right)^3\cdot\left(\frac{7}{15}\right)^2 \approx 0{,}3304.$$

Событие C соответствует комбинированной схеме, в которой в каких-либо трех последовательных испытаниях белый шар выпал трижды, а в остальных двух испытаниях по одному разу выпали черный и красный шары, поэтому

$$p(C) = 3\cdot P_3(3)\cdot P_2(0,1,1) = 3\cdot\left(\frac{8}{15}\right)^3\cdot\frac{2!}{0!1!1!}\cdot\left(\frac{8}{15}\right)^0\cdot\frac{5}{15}\cdot\frac{2}{15} \approx 0{,}0404.$$

Упражнения

1. Каждый из десяти аспирантов группы случайным образом и независимо от остальных выбирает один из четырех дней наступающей недели (понедельник, вторник, среду или четверг) для работы в библиотеке в отделе текущей периодики. Найти вероятности следующих событий:

A = (в понедельник в библиотеку явится один аспирант, во вторник - два, в среду - три, в четверг – четыре аспиранта);

B = {все десять аспирантов соберутся в библиотеке в четверг};

C = {пятеро из аспирантов появятся в библиотеке в первые два дня недели и пятеро - в следующие два дня};

D = {в понедельник в библиотеке появятся ровно три аспиранта}.

2. Два равносильных шахматиста играют матч из 12 партий. В каждой партии возможно три исхода: $\omega_1 =$ {выиграл первый игрок (проиграл второй)}; $\omega_2 =$ {ничья}; $\omega_3 =$ {выиграл второй (проиграл первый)}. Пусть

$$p(\omega_1) = p(\omega_3) = 0,2; \qquad p(\omega_2) = 1 - p(\omega_1) - p(\omega_3) = 0,6.$$

Найти вероятности следующих событий:

A = {первый игрок выиграл 3 партии, проиграл 3 партии и остальные свел вничью};

B = {один из игроков выиграл 4 партии и проиграл 3 партии};

C = {сыграно 6 результативных партий}.

5. Предельные теоремы в схеме Бернулли

Формула Бернулли $P_n(k) = C_n^k \ p^k \, q^{n-k}$, выражающая $P_n(k)$ через n и p в схеме Бернулли, становится неудобной при больших n: в этом случае затруднение вызывает вычисление C_n^k.

5.1. Существует удобный в практическом отношении способ вычисления вероятностей $P_n(k)$ - приближенный, но достаточно точный при больших n. Его описание дано в следующей теореме.

Теорема 2 (локальная теорема Муавра-Лапласа). При больших значениях *n* в схеме Бернулли справедливо приближенное равенство

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\ \varphi(x), \tag{3}$$

где $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$, а $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Комментарий к теореме 2

1. Локальная теорема Муавра-Лапласа является глубоким математическим фактом, ее доказательство связано с использованием нетривиальных и тонких построений.

2. Функция $\varphi(x)$, упоминаемая в теореме, табулирована: таблицы значений этой функции приведены в каждом учебнике по теории вероятностей. Эта функция четная; ее график называется нормальной или гауссовой кривой и изображен на рис. 3.

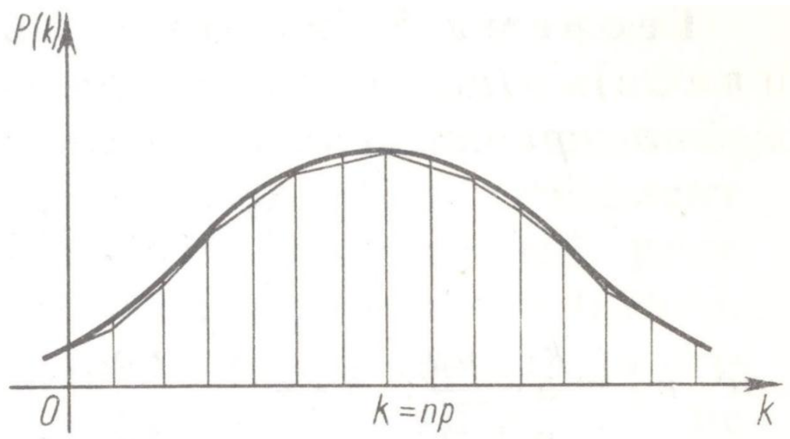


Рис. 3

3. Заметим, что $P_n(k)$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Наибольшая из вероятностей $P_n(k)$ достигается при $k \approx np$ (k - ближайшее к np целое число). В этом случае

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{npq}}\ .$$

Пример. Вычислить вероятность того, что при 100-кратном бросании монеты герб выпадет: а) ровно 50 раз; б) ровно 60 раз.

Решение

а) Здесь $n=100$, $k=50$, $p=0,5$, $q=0,5$. Используя формулу (1), получим

$$P_{100}(50)=\frac{1}{\sqrt{100\cdot 0,5\cdot 0,5}}\varphi(x)=\varphi(x)\cdot\frac{1}{5},\ \text{где}\ x=\frac{50-0,5\cdot 100}{\sqrt{100\cdot 0,5\cdot 0,5}}=0.$$

Следовательно, $P_{100}(50)=\frac{1}{5}\cdot\varphi(0)=\frac{1}{5}\,0,3989=0,079$ (значение $\varphi(0)$ найдено по таблице).

б) Аналогично находим $P_{100}(60)=\frac{1}{5}\varphi(x)$, где $x=\frac{60-0,5\cdot 100}{\sqrt{100\cdot 0,\cdot 0,5}}=\frac{10}{5}=2$.

Таким образом, $P_{100}(60)=\frac{1}{5}\varphi(2)=\frac{1}{5}\,0,0540=0,0108$.

Пример. Строительная фирма для привлечения инвестиций в строительство нового дома собирается воспользоваться банковским кредитом. Вероятность того, что какой-либо банк в ответ на поступление бизнес-плана примет положительное решение о кредитовании фирмы, равна 0,3. Строительная фирма обратилась в 100 банков. Найти вероятности того, что решения о предоставлении кредитов этой фирме примут: а) один банк; б) 15 банков; в) 30 банков; г) 50 банков.

Решение

Данную ситуацию можно рассматривать как серию из $n=100$ испытаний Бернулли, в которых появления события в каждом испытании считается принятие банком решения о кредитовании. Вероятность появления события в единичном испытании равна по условию $p=0,3$. Поскольку число испытаний n велико можно воспользоваться локальной теоремой Муавра – Лапласа.

$$P_{100}(1)\approx\frac{1}{\sqrt{100\cdot 0,3\cdot 0,7}}\cdot\varphi\left(\frac{1-100\cdot 0,3}{\sqrt{100\cdot 0,3\cdot 0,7}}\right)=\frac{1}{\sqrt{21}}\cdot\varphi\left(\frac{1-30}{\sqrt{21}}\right)=$$
$$=0,22\cdot\varphi(-6,33)\approx 0,22\cdot 0=0;$$

$$P_{100}(15)\approx\frac{1}{\sqrt{21}}\varphi\left(\frac{15-30}{\sqrt{21}}\right)=0,22\varphi(-3,27)\approx 0,22\cdot 0,0020=0,00044;$$

$$P_{100}(30) \approx \frac{1}{\sqrt{21}} \cdot \varphi\left(\frac{30-30}{\sqrt{21}}\right) = 0,22 \cdot \varphi(0) \approx 0,22 \cdot 0,03989 = 0,088;$$

$$P_{100}(50) \approx \frac{1}{\sqrt{21}} \cdot \varphi\left(\frac{50-30}{\sqrt{21}}\right) = 0,22 \cdot \varphi(4,36) \approx 0,22 \cdot 0 = 0.$$

Упражнение

Вероятность появления успеха в каждом из независимых испытаний равна 0,25. Найти вероятность того, что в серии из 300 испытаний успех наступит ровно 75 раз.

Из формулы (3) вытекает, что график функции $P_n(k)$ приближенно совпадает с графиком функции $f = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}$, где $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$, k -целое число. Это означает, что график функции $P_n(k)$ приближенно совпадает с гауссовой кривой $y = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$, сдвинутой вправо на np и сжатой по вертикали в $\sqrt{npq}$ раз. При этом график $P_n(k)$ обладает характерной чертой - наличием пика в точке $k \approx np$ (рис. 3). В учебниках по теории вероятностей можно встретить более строгую формулировку локальной теоремы Муавра - Лапласа.

5.2. Вычисление вероятностей $P_n(k_1,k_2)$ в схеме Бернулли по формуле $P_n(k) = C_n^k\ p^k = q^{n-k}$ при больших n является еще более затруднительным, чем использование формулы Бернулли для вычисления $P_n(k)$. Заметим, что в практическом отношении вероятности $P_n(k_1,k_2)$ имеют большее значение, чем $P_n(k)$. Действительно, при больших n часто бывает не столь существенным знать то обстоятельство, что событие A произойдет ровно k раз, но важно знать, что количество наступлений этого события будет находиться в заданных пределах. Так, при проверке семян на всхожесть не столь важно знать, что из выбранных 1000 семян ровно 907 окажутся всхожими, но важно знать, что всхожесть семян находится в пределах от 900 до 950.

Как отмечалось выше, вероятности $P_n(k)$ при больших n малы. Вероятности $P_n(k_1, k_2)$ могут быть сколь угодно близки к единице.

Удобный приближенный способ вычисления вероятностей $P_n(k_1, k_2)$ в схеме Бернулли дает следующая теорема.

Теорема 3 (интегральная теорема Муавра - Лапласа). При больших значениях n в схеме Бернулли имеет место приближенное равенство

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(k_2^{/}) - \Phi(k_1^{/}), \qquad (4)$$

где $k_1^{/} = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $k_2^{/} = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

Комментарий к теореме 3

1. Функция $\Phi(x)$ называется функцией Лапласа; она табулирована. Таблицы функции $\Phi(x)$ даны в каждом учебнике по теории вероятностей. Эта функция нечетная.

2. Отметим, что

$\Phi(x) = 0$, $\Phi(1) = 0{,}3413$, $\Phi(2) = 0{,}4772$, $\Phi(3) = 0{,}4986$, $\Phi(\infty) = 0{,}5$.

Таким образом, если в формуле (4) положить $k_2^{/} = 3$, $k_1^{/} = -3$, то получим $P_n(k_1, k_2) = 0{,}9973$.

Существует более строгая формулировка интегральной теоремы Муавра - Лапласа.

Пример. Вычислить вероятность того, что при 100-кратном бросании монеты количество гербов будет находиться в следующих пределах:

а)[45;55]; б) [40;60]; в)[35;65].

Решение

Здесь $p = 0{,}5$, $q = 0{,}5$, $n = 100$, $\sqrt{npq} = \sqrt{100.0{,}5.0{,}5}$ =5.

а) $k_1^{/} = \dfrac{45-50}{5} = -1$, $k_2^{/} = \dfrac{55-50}{5} = 1$; $P_{100}(45{,}55) \approx \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) =$
$= 0{,}6826$.

б) $k_1^{/} = \dfrac{40-50}{5} = -2$, $k_2^{/} = \dfrac{60-50}{5} = 2$; $P_{100}(40{,}60) \approx \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) =$
$= 0{,}9545$.

в) $k_1^{/} = \dfrac{35-50}{5} = -3$; $k_2^{/} = \dfrac{65-50}{5} = 3$; $P_{100}(35{,}65) \approx \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) =$
$= 0{,}9973$.

Из результатов вычислений видно, что вероятности рассматриваемых событий достаточно велики, в особенности последняя вероятность, равная 0,9973.

События, имеющие большую вероятность, называются практически достоверными.

В этом случае считается, что в результате опыта событие обязательно наступит. Насколько должна быть велика вероятность, чтобы событие считать практически достоверным? Это зависит от характера задачи: во всякой задаче замена случайного события практически достоверна? Это зависит от характера задачи: во всякой задаче замена случайного события практически достоверно содержит «элемент риска». Ясно, что в различных условиях допустимый риск различен. Все же часто останавливаются на вероятности 0,9973. Мы также примем за определение практически достоверного события такое случайное событие, вероятность которого не меньше, чем 2Ф(3)= 0,9973.

5.3. Рассмотрим схему Бернулли с большим количеством n испытаний; обозначим через σ число $\sqrt{npq}$. Из интегральной теоремы Муавра - Лапласа вытекает, что

$$P_n\left(np - 3\sigma,\ np + 3\sigma\right) = 0{,}9973. \qquad (5)$$

Действительно, при $k_1 = np - 3\sigma$, $k_2 = np + 3\sigma$, имеем $k_1^{/} = -3$, $k_2^{/} = 3$ и

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) = 0{,}9973.$$

Формула (5) позволяет для каждой схемы Бернулли указать интервал $\left(k_1, k_2\right)$ такой, что количество наступлений события A принадлежит этому интервалу с вероятностью 0,9973; иными словами, событие $k_1 \le m < k_2$ ***практически достоверно.*** Формула (3) называется правилом «трех сигм», а интервал (k_1,k_2), где $k_1 = np - 3\sqrt{npq}$, $k_2 = np + 3\sqrt{npq}$ - трех сигмовый интервал.

Заметим, что трех сигмовый интервал оказывается удивительно узким. Если любому здравомыслящему человеку, не знакомому с теорией вероятностей, предложить угадать интервал, в который с практической достоверностью попадет количество наступлений событий при последовательных испытаниях, то, как правило, в ответе будет дан гораздо более широкий интервал.

Пример. Некоторая система состоит из 10000 (независимых) элементов. Вероятность выхода из строя одного элемента равна 0,5. Пусть n - количество вышедших из строя элементов системы. Найти трех сигмовый интервал.

Решение

Имеем $n = 1000,\ p = 0,5,\ q = 0,5.$ Тогда $\sigma = \sqrt{10000 \cdot 0,5 \cdot 0,5} = 50,\ k_1 = $ $= np - 3\sigma = 5000 - 150,\ k_2 = np + 3\sigma = 5000 + 150.$ Итак, с вероятностью 0,9973 можно утверждать, что количество вышедших из строя элементов находится в пределах 5000 ± 150 (событие ***практически достоверное***).

В частности, если взять запас в 5000 элементов для замены вышедших из строя, то в 50% случаев этого запаса не хватит. Если же увеличить этот запас всего на 3%, т.е. взять 5150 элементов, то его хватит наверняка (т.е. с вероятностью большей, чем 0,9973). Оценка трех сигмового интервала этого примера «на глаз», «по здравому смыслу» приводит, как правило, к большому преувеличению истинного значения.

С помощью интегральной теоремы Муавра - Лапласа можно пояснить, почему и в каком смысле вероятность p события A в одном испытании совпадает (приближенно) с частотой $\frac{m}{n}$ наступления события A в n испытаниях. Действительно, с вероятностью 0,9973 выполняется неравенство

$$np-3\sqrt{npq}\le m<np+3\sqrt{npq},$$

откуда после деления всех его частей на n получим

$$p-3\sqrt{\frac{pq}{n}}\le\frac{m}{n}<p+3\sqrt{\frac{pq}{n}}\ .$$

Так как $3\sqrt{\frac{pq}{n}}\to\infty$ при $n\to\infty$, то частота $\frac{m}{n}$ с практической достоверностью при больших n так угодно мало отличается от p.

Следствие. Вообще говоря, используя интегральную теорему Муавра-Лапласа легко можно получить вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в n независимых испытаниях в более общем случае, т.е. формулу

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\approx2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Пример. Вероятность того, что деталь не стандартна, $p=0{,}1$. Найти вероятность того, что среди случайно отобранных 400 деталей относительная частота появления нестандартных деталей отклонится от вероятности $p=0{,}1$ по абсолютной величине не более, чем на 0,03.

Решение. По условию $n=400;\quad p=0{,}1;\quad q=0{,}9;\quad \varepsilon=0{,}03.$ Требуется найти вероятность $P\left(\left|\frac{m}{400}-0{,}1\right|\le0{,}03\right).$

Пользуясь формулой

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\approx2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right),$$

имеем:

$$P\left(\left|\frac{m}{400}-0{,}1\right|\le0{,}03\right)\approx2\Phi\left(0{,}03\sqrt{\frac{400}{0{,}1\cdot0{,}9}}\right)=2\Phi(2).$$

По таблице значений функции Лапласа находим $2\Phi(2) = 0{,}9544$.

Итак, искомая вероятность приближенно равна 0,9544.

Смысл полученного результата таков: если взять достаточно большое число проб по 400 деталей в каждой, то примерно в 95,44% этих проб отклонение относительной частоты от постоянной вероятности $p = 0{,}1$ по абсолютной величине не превысит 0,03.

Пример. Вероятность того, что деталь не стандартна $p = 0{,}1$. Найти, сколько деталей надо отобрать, чтобы с вероятностью равной 0,9544 можно было утверждать, что относительная частота появления нестандартных деталей (среди отобранных) отклонится от постоянной вероятности p по абсолютной величине не более, чем на 0,03.

Решение

По условию

$$p = 0{,}1; \quad q = 0{,}9; \quad \varepsilon = 0{,}03\ ;\ P\left(\left|\frac{m}{n} - 0{,}1\right| \le 0{,}03\right) = 0{,}9544\ .$$

Требуется найти n .

Воспользуемся формулой

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

В силу условия,

$$2\Phi\left(0{,}03\sqrt{\frac{n}{0{,}1\cdot 0{,}9}}\right) = 2\Phi\left(0{,}1\sqrt{n}\right) = 0{,}9544.$$

Следовательно, $\Phi\left(0{,}1\sqrt{n}\right) = 0{,}4772 =$ 0,4772. По таблице значений функции Лапласа находим

$$\Phi(2) = 0{,}4772\ .$$

Для отыскания числа n получаем уравнение

$$0{,}1\sqrt{n} = 2.$$

Отсюда искомое число деталей $n = 400$.

Смысл полученного результата таков: если взять достаточно большое число проб по 400 деталей, то в 95, 44% этих проб относительная частота появления нестандартных деталей будет отличаться от постоянной вероятности $p = 0{,}1$ по абсолютной величине не более, чем на 0,03, т.е. относительная частота будет заключена в границах от 0,07 (0,1 - 0,03 = 0,07) до 0,13 (0,1 + 0,03 = 0,13).

Другими словами, число нестандартных деталей в 95,44% проб будет заключено от 28 (7% от 400) до 52 (13% от 400).

Если взять лишь одну пробу из 400 деталей, то с большой уверенностью можно ожидать, что в этой пробе будет нестандартных деталей не менее 28 и не более 52. Возможно, хотя и маловероятно, что нестандартных деталей окажется меньше 28, либо больше 52.

Более строгая формулировка утверждения о близости частоты и вероятности дана в теореме Бернулли (один из вариантов закона больших чисел), которую рассмотрим в одном из следующих параграфов.

5.4. Представляет интерес схема Бернулли с малой вероятностью p появления события A в одном испытании и с большим количеством n испытаний. Пусть при большом n малая вероятность p такова, что $np = \lambda$, где λ - некоторое число. Вероятность $P_n(k)$ в такой схеме Бернулли описывается следующей теоремой.

Теорема 4 (теорема Пуассона). Пусть $n \to \infty$, $\lambda > 0$ постоянно и $p = \dfrac{\lambda}{n}$. Тогда в схеме Бернулли из n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность наступления события A равна p, имеет место приближенное равенство

$$P_n(k) = P(k) \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}. \qquad (6)$$

Комментарий к теореме 3. Обратим внимание на следующее обстоятельство: вероятность наступления события A ровно k раз не зависит от n, что выглядит неправдоподобно. Это можно объяснить так. Пусть n велико; увеличивая n в μ раз и уменьшая p во столько же раз (так что np не изменяется), мы в самом деле имеем $P_n(k,p) \approx P_{\mu n}\left(k, \frac{p}{\mu}\right)$. Таким образом, независимость вероятности рассматриваемого события от n объясняется тем, что она вычислена в разных схемах Бернулли.

Теорему примем без доказательства.

Пример. Учебник издан тиражом 100000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит ровно 5 бракованных книг.

Решение. По условию, $n = 100000$, $p = 0{,}0001$, $k = 5$. События, состоящие в том, что книги сброшюрованы неправильно, независимы, число n велико, а вероятность p мала, поэтому воспользуемся формулой (4). Найдём $\lambda = np = 100000 \cdot 0{,}0001 = 10$. Тогда

$$P_{100000}(5) = e^{-10}\frac{10^5}{5} = 10^5 \cdot \frac{0{,}000045}{120} = 0{,}0375.$$

Пример. На лекции по теории вероятностей присутствует 200 человек. Вероятность того, что день рождения случайно выбранного студента приходится на определённый день года, составляет 1/36. Найти вероятность того, что один человек из присутствующих родился 1 января, и два человека родились 8 марта.

Решение

Пусть событие A состоит в том, что случайно выбранный студент родился 1 января, событие N - в том, что k человек из 200 родились 1 января. Тогда по условию $p = P(A) = \frac{1}{365}$. Предположим, что опрос $n = 200$ студентов относительно даты их рождения удовлетворяет условиям, которые накладываются на испытания Бернулли, в каждом из которых событие A может наступить, а может и не наступить. Тогда, поскольку $n = 200$ велико, а произведение $np = \frac{200}{365} = 0,548$, для подсчёта вероятности события N можно воспользоваться формулой Пуассона

$$P_{200}(k) \approx e^{-0,548} \frac{(0,548)^k}{k!}$$

и при $k = 1$ получаем

$$P_{200}(k) \approx e^{-0,548}(0,548) = 0,317.$$

Пусть событие M - в том, что m человек из 200 родились 8 марта. Тогда в соответствии с формулой умножения вероятностей, $p(NM) = p(N)\,p_N(M)$, где $p_N(M) = P_{n-k}(m)$ - вероятность того, что из $(n-k)$ студентов m родились 8 марта. Так как число $(n-k) = 200 - 1 = 199$ велико, а $(n-k)\,p = \frac{198}{365} = 0,542$, для расчёта вероятности события M можно вновь воспользоваться формулой Пуассона

$$P_{n-k}(m) \approx e^{-0,542} \frac{(0,542)^m}{m!}.$$

При $n = 200$, $k = 1$, $m = 2$ получаем

$$p_N(M) = P_{199}(2) = e^{-0542} \frac{(0,542)^2}{2} = 0,086,$$

поэтому искомая вероятность $p(NM) = 0,317 \cdot 0,086 = 0,027.$

Упражнения

1. В условиях предыдущего примера найти вероятность того, что число родившихся 1 января и 8 марта не больше двух.

2. Владельцы кредитных карт ценят их и теряют весьма редко - вероятность потерять кредитную карту в течение недели для случайно выбранного вкладчика составляет 0,001. Банк выдал кредитные карты 2000 клиентам. Найти: а) вероятность того, что за предстоящую неделю будет утеряна ровно одна кредитная карта; б) вероятность того, что за предстоящую неделю будет утеряна хотя бы одна кредитная карта; в) наиболее вероятное число кредитных карт, теряемых за месяц.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется схемой Бернулли?

2. Приведите примеры последовательности испытаний, которые не образуют схему Бернулли.

3. Какие задачи рассматриваются в связи со схемой Бернулли?

4. Сформулируйте теорему Бернулли.

5. На чем основывается доказательство теоремы Бернулли?

4. Что называется наивероятнейшим числом?

5. В чем заключаются затруднения, возникающие при вычислении вероятностей в схеме Бернулли при больших n?

6. Сформулируйте локальную теорему Муавра-Лапласа. Приведите свойства функции $\varphi(x)$, которая упоминается в этой теореме.

7. Исходя из локальной теоремы Муавра-Лапласа прокомментируйте поведения вероятностей $P_n(k)$, при $n \to \infty$ и $k \approx np$.

8. Напишите вид гауссовской функции.

9. В чем заключается сходство функции $P_n(k)$ и гауссовской функции?

10. Сформулируйте интегральную теорему Муавра-Лапласа.

11. Как называется функция $\Phi(x)$, упоминаемая в интегральной теореме Муавра-Лапласа? Назовите ее свойства.

12. Что представляет собой «трех сигмовый интервал»?

13. Сформулируйте теорему Пуассона. Прокомментируйте теорему.

§46. Случайные величины и законы их распределения

Ключевые слова: *случайная величина, дискретная случайная величина, непрерывная случайная величина, ряд распределения, функция распределения, функция плотности распределения, биномиальное и пуассоновское распределения, нормальное, равномерное и показательное распределения.*

Случайные события могут быть представлены через случайные величины. Понятия «случайная величина» расширяет область применения методов теории вероятностей в решении практических задач. Поэтому понятие «случайной величины» является одним из важнейших понятий теории вероятностей.

1. Определение случайной величины. Задание дискретной случайной величины

Определение 1. *Случайной величиной* называется функция $X = X(\omega)$, определенная на некотором множестве элементарных событий Ω.

Если Ω конечно, или счетно, то на функцию $X(\omega)$ не накладывается никаких ограничений, т.е. это может быть любая функция. Если Ω континуум, то $X(\omega)$ должна быть такой, что для любого события вида

$$A = \{\omega : X(\omega) \le x_0\},$$

где x_0 – любое число и $x_0 \in R^1$, могла быть определена его вероятность

$$p(A) = p\{X < x_0\}.$$

Следует отметить, что при изучении случайных величин и их свойств почти никогда не вспоминают об области их определения, т.е. о Ω.

Все встречающиеся в природе процессы и объекты, так или иначе, характеризуются численными значениями своих параметров. Причем по целому ряду причин эти значения должны рассматриваться нами как случайные. Поэтому понятие случайные величины имеет очень большую практическую значимость. Примеров случайных величин можно привести бесконечное количество – это и температура воздуха на завтра, и курс доллара на банковских торгах, и количество покупателей в магазине, и масса, даже стандартно упакованного, пакета некоторого продукта, и т.д. Фактически теория случайных величин составляет основную часть содержания теории вероятностей, и всю математическую статистику.

Определение 2. Конкретные значения, которые принимала случайная величина в ходе соответствующих экспериментов или наблюдений, называются *реализациями* данной случайной величины.

Например, X – курс доллара, установленный Центральным банком Узбекистана, это случайная величина. А, $x_1 = 8092{,}13$ курс на 12 сентября 2017 года, $x_1 = 8092{,}13$ курс на 17 апреля 2018 года - это реализации данной случайной величины.

Чаще всего случайная величина обозначается заглавными латинскими буквами, например, X, Y, Z аргумент при этом обычно опускают. А их реализации – соответствующими строчными буквами – $x, y, z,$ и т.д.

Определение 3. Говорят, что случайная величина X *задана*, или задан ее *закон распределения*, если для любого множества $\mathrm{B} \subset R^1$ определена вероятность

$$p\{x \in \mathrm{B}\},$$

т.е. вероятность того, что при очередном эксперименте реализация x окажется лежащей в этом множестве.

Определение 4. Случайная величина X называется *дискретной*, если множество ее возможных значений конечно, или счетно.

Если случайная величина X имеет конечное количество возможных значений, то задать ее можно простым **перечислением** этих значений x_i, $i = \overline{1, n}$, и их соответствующих вероятностей

$$p\{X = x_i\} = p_i.$$

Очевидно, что последнее означает, что «p_i есть вероятность события $X = x_i$». Ясно, что события

$$X = x_1,\ \ X = x_2,\ \ \ldots\ \ , X = x_n \qquad (*)$$

попарно несовместны, а их сумма есть событие достоверное (при каждом осуществлении опыта величина X принимает одно и только одно из своих значений), т.е. наступает одно и только одно из событий (*), т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} p\{X = x_i\} = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

(эта единица как-то распределена между значениями случайной величины, отсюда и термин *«распределение»*).

Такое перечисление обычно записывают в виде таблицы (табл. 1), которую называют *рядом распределения* данной случайной величины.

Таблица 1

x_i	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n

Итак, простейшей формой задания закона распределения дискретной случайной величины X является ряд распределений данной случайной величины.

Пример 1. Пусть X – случайная величина числа очков при подбрасывании игральной кости. Это дискретная случайная величина, а ее ряд распределения имеет вид, указанный в табл. 2.

Таблица 2

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Сложив вероятности, получим

$$\sum_{i=1}^{6} p_i = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1.$$

Пример 2. Для случайной величины X - числа бросаний монеты из примера 2.4 §3 при $n = 10$, $p = 1/2$ таблица распределения такова:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

p_i	$\frac{1}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{252}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{1}{1024}$

Сложение вероятностей дает

$$\sum_{i=0}^{11} p_i = \frac{1}{1024} + \frac{10}{1024} + \frac{45}{1024} + \frac{120}{1024} + \frac{210}{1024} +$$
$$+\frac{252}{1024} + \frac{210}{1024} + \frac{120}{1024} + \frac{45}{1024} + \frac{10}{1024} + \frac{1}{1024} = 1.$$

Если случайная величина имеет счетное количество возможных значений, то ее задают с помощью формульного описания этих значений и их вероятностей. При этом формульные выражения зависят от i, т.е. номера значения

$$p\{X = x_i(i)\} = p_i(i), \quad i = \overline{1,\infty}.$$

При этом должно выполняться

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

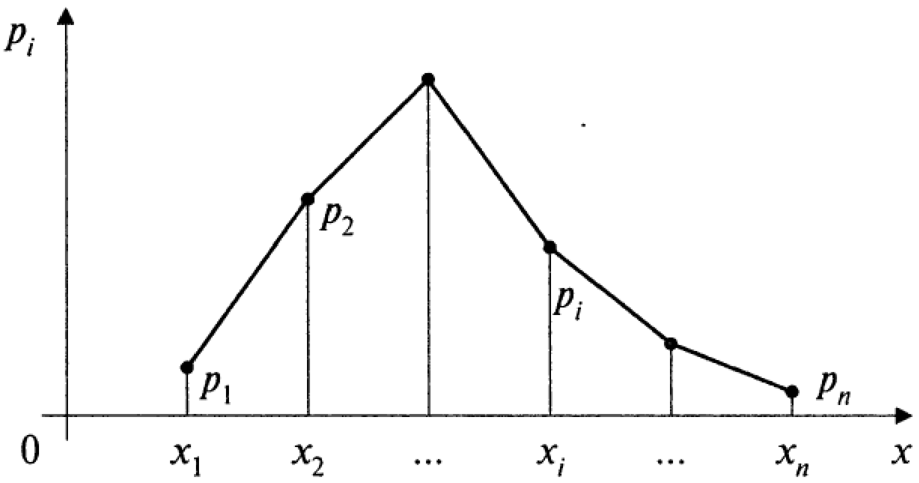


Рис. 1

Ряд распределения может быть изображен графически, если по оси абсцисс откладывать значения случайной величины, а по оси ординат - соответствующие их вероятности. Соединение полученных точек образует ломаную, называемую *многоугольником* или *полигоном* распределения вероятностей (рис. 1).

Пример 3. В лотерее разыгрываются: автомобиль стоимостью 5000 ден. ед., 4 телевизора стоимостью 250 ден. ед., 5 видеомагнитофонов стоимостью 200 ден. ед. Всего продается 1000 билетов по 7 ден. ед. Составить закон распределения чистого выигрыша, полученного участником лотереи, купившим один билет.

Решение

Возможные значения случайной величины X - чистого выигрыша на один билет - равны $0-7 = -7$ ден. ед. (если билет не выиграл), $200-7=193$, $250-7=243$, $5000-7=4993$ ден. ед. (если на билет выпал выигрыш, соответственно, видеомагнитофона, телевизора или автомобиля). Учитывая, что из 1000 билетов число не выигравших составляет 990, а указанных выигрышей, соответственно, 5, 4 и 1, и, используя классическое определение вероятности, получим:

$$p\{X=-7\}=\frac{990}{1000}=0,990; \qquad p\{X=193\}=\frac{5}{1000}=0,005;$$
$$p\{X=243\}=\frac{4}{1000}=0,004; \qquad p\{X=4993\}=\frac{1}{1000}=0,001,$$

т.е. ряд распределения

x_i	-7	193	243	4993
p_i	0,990	0,005	0,004	0,001

и $\sum_{i=1}^{4} p_i = 0,990+0,005+0,004+0,001=1.$

Пример 4. Вероятности того, что студент сдаст семестровый экзамен в сессию по дисциплинам А и Б, равны, соответственно, 0,7 и 0,9. Составить закон распределения числа семестровых экзаменов, которые сдаст студент.

Решение

Возможные значения случайной величины X - числа сданных экзаменов - 0, 1, 2.

Пусть A_i - событие, состоящее в том, что студент сдаст i-й экзамен $(i=1,2)$. Тогда вероятности того, что студент сдаст в сессию 0, 1, 2 экзамена, будут, соответственно, равны (считаем события A_1 и A_2 независимыми):

$$p\{X=0\}=p\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\right)=p\left(\overline{A_1}\right)p\left(\overline{A_2}\right)=(1-0,7)(1-0,9)=0,3\cdot 0,1=0,03;$$

$$p\{X=1\}=p\left(A_1\overline{A_2}+\overline{A_1}A_2\right)=p(A_1)\,p\left(\overline{A_2}\right)+p\left(\overline{A_1}\right)p(A_2)=$$
$$=0,7\cdot 0,1+0,3\cdot 0,9=0,34;$$

$$p\{X=2\}=p(A_1A_2)=p(A_1)\,p(A_2)=0,7\cdot 0,9=0,63.$$

Итак, ряд распределения

x_i	1	2	3
p_i	0,03	0,34	0,63

и $\sum_{i=1}^{3} p_i = 0,03+0,34+0,63=1.$

На рис. 2 полученный ряд распределения представлен графически в виде многоугольника (полигона) распределения вероятностей.

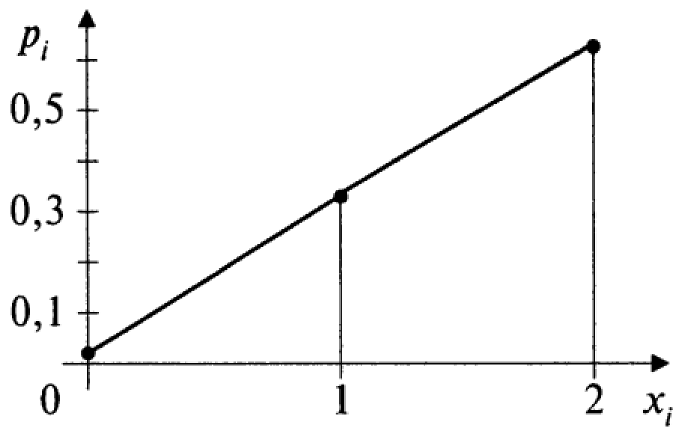


Рис. 2

Упражнения

1. Клиенты банка, не связанные друг с другом, не возвращают кредиты в срок с вероятностью 0,1. Составить закон распределения числа возвращенных в срок кредитов из 5 выданных.

2. Найти закон распределения числа пакетов трех акций, по которым владельцем будет получен доход, если вероятность получения дохода по каждому из них равна, соответственно, 0,5; 0,6; 0,7.

3. Контрольная работа состоит из трех вопросов. На каждый вопрос приведено 4 ответа, один из которых правильный. Составить закон распределения числа правильных ответов при простом угадывании.

4. В среднем по 10% договоров страховая компания выплачивает страховые суммы в связи с наступлением страхового случая. Составить закон распределения числа таких договоров среди наудачу выбранных четырех.

5. В билете три задачи. Вероятность правильного решения первой задачи равна 0,9, второй - 0,8, третьей - 0,7. Составить закон распределения числа правильно решенных задач в билете.

6. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8 и уменьшается с каждым выстрелом на 0,1. Составить закон распределения числа попаданий в цель, если сделано три выстрела.

7. Произведено два выстрела в мишень. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,8, вторым - 0,7, Составить закон распределения числа попаданий в мишень (каждый стрелок делает по одному выстрелу).

8. Из пяти гвоздик две белые. Составить закон распределения и найти функцию распределения случайной величины, выражающей число белых гвоздик среди двух одновременно взятых.

9. Из 10 телевизоров на выставке 4 оказались фирмы «Сони». Наудачу для осмотра выбрано 3. Составить закон распределения числа телевизоров фирмы «Сони» среди 3 отобранных.

10. Среди 15 собранных агрегатов 6 нуждаются в дополнительной смазке. Составить закон распределения числа агрегатов, нуждающихся в дополнительной смазке, среди пяти наудачу отобранных из общего числа.

Пример 5. Пусть X - случайная величина числа бросаний монеты до первого выпадения герба. Ясно, что эта случайная величина имеет счетное количество возможных значений, и

$$p\{X = i\} = \frac{1}{2^i}, \quad i = \overline{1,\infty}.$$

Ряд распределения:

x_i	1	2	3	$\dots$	i	$\dots$
p_i	$1/2$	$1/2^2$	$1/2^3$	$\dots$	$1/2^i$	$\dots$

Ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i$ представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, первый член которой $b_1 = \frac{1}{2}$, а знаменатель $q = \frac{1}{2}$. Этот ряд сходится, его сумма $S = \frac{b_1}{1-q} = 1$. Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i = 1.$$

Следует отметить, что реальных примеров счетных случайных величин не очень много.

Пример 6. Изделия испытывают на прочность при работе в перегрузочных режимах. Вероятность для каждого изделия пройти испытание равна 5/6 и не зависит от исходов испытаний других изделий. Испытания заканчиваются сразу же после того, как появится первое изделие, не выдержавшее проверку на прочность. Найти ряд распределения случайной величины X - числа производимых испытаний.

Решение

Вероятность для каждого изделия пройти испытание равна $p = 5/6$; вероятность того, что изделие не пройдет испытание, равна $q = 1 - p = 1/6$. Испытания заканчиваются на k-м изделии (k = 1, 2,3, ...), если первые $k-1$ изделий пройдут испытания, а k-е изделие не выдержит испытания.

Случайная величина X - число проводимых испытаний, ее возможные значения: 1, 2, 3, ... , k, ... (теоретически число испытаний может быть бесконечно большим). Вероятности возможных значений величины X найдем по теореме умножения вероятностей независимых событий:

$$p\{X = k\} = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{6}\right), \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Рассматриваемая случайная величина X имеет следующий ряд распределения:

x_i	1	2	3	$\ldots$	k	$\ldots$

p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6^2}$	$\frac{5^2}{6^3}$	$\cdots$	$\frac{5^{k-1}}{6^k}$	$\cdots$

Особенность рассматриваемой случайной величины X состоит в том, что теоретически последовательность ее возможных значений является неограниченной. Число производимых испытаний может быть бесконечно большим, однако вероятность того, что это произойдет, стремится к нулю:

$$\lim_{k\to\infty} p\{X = k\} = \frac{5^{k-1}}{6^k} = 0.$$

Убедимся в том, что полученная последовательность вероятностей характеризует закон распределения X, т. е. что $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$

Найдем

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \frac{1}{6} + \frac{5}{6^2} + \frac{5^2}{6^3} + \ldots + \frac{5^{k-1}}{6^k} + \ldots = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{5}{6} + \frac{5^2}{6^2} + \ldots + \frac{5^{k-1}}{6^{k-1}} + \ldots\right) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}.$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$ представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, первый член которой $b_1 = 1$, а знаменатель $q = \frac{5}{6}$. Этот ряд сходится, его сумма $S = \frac{b_1}{1-q} = 6$. Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \frac{1}{6}S = \frac{1}{6}\cdot 6 = 1.$$

Закон распределения полностью характеризует случайную величину, указывая возможные значения и вероятности, с которыми эти значения появляются в результате испытаний. Для первого из рассмотренных законов распределений (пример 1) все значения равновероятны (пример 1), а для второго (пример 2) значения резко различаются по своим вероятностям: значение 10 имеет вероятность, в 252 раза меньшую, чем значение 5. Это, в частности, означает, что случайная величина принимает значение 5 в 252 раза чаще, чем 10 и т.д.

Упражнения

1. В рекламных целях торговая фирма вкладывает в каждую десятую единицу товара денежный приз размером 1 тыс. д.е. Составить закон распределения случайной величины-размера выигрыша при пяти сделанных покупках.

2. Вероятность поражения вирусным заболеванием куста земляники равна 0,2. Составить закон распределения числа кустов земляники, зараженных вирусом, из четырех посаженных кустов.

3. Стрелок ведет стрельбу по цели с вероятностью попадания при каждом выстреле 0,2. За каждое попадание он получает 5 очков, а в случае промаха очков ему не начисляют. Составить закон распределения числа очков, полученных стрелком за 3 выстрела.

4. Возможные значения случайной величины таковы: $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 8$. Известны вероятности первых двух возможных значений: $p_1 =$ 0,4, $p_2 =$ 0,15. Найти вероятность x_3.

5. Игральная кость брошена 3 раза. Написать закон распределения числа появлений шестерки.

6. Составить закон распределения вероятностей числа появления события A в трех независимых испытаниях, если вероятность появления события в каждом испытании равна 0,6.

7. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одной минуты равна 0,004. Найти вероятность того, что в течение одной минуты обрыв произойдет в пяти веретенах.

8. Найти среднее число опечаток на странице рукописи, если вероятность того, что страница рукописи содержит хотя бы одну опечатку, равна 0,95. Предполагается, что число опечаток распределено по закону Пуассона.

Указание: задача сводится к отысканию параметра λ из уравнения $e^{-\lambda} = 5.$

9. Коммутатор учреждения обслуживает 100 абонентов. Вероятность того, что в течение одной минуты абонент позвонит на коммутатор, равна

0,02. Какое из двух событий вероятнее: в течение одной минуты позвонит 3 абонента; позвонит 4 абонента?

10. Рукопись объемом в 1000 страниц машинописного текста содержит 1000 опечаток. Найти вероятность того, что наудачу взятая страница содержит: а) хотя бы одну опечатку; б) ровно 2 опечатки; в) не менее двух опечаток. Предполагается, что число опечаток распределено по закону Пуассона.

Ниже ознакомимся с двумя важными примерами дискретных случайных величин. Соответствующие им законы носят названия: *биномиальное распределение, пуассоновское распределение.*

Определение 6. Распределение случайной величины X, равной количеству наступлений события A в схеме Бернулли из n испытаний, называется *биномиальным распределением.*

В этом распределении значению $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$ случайной величины X соответствует вероятность $P_n(k) = C_n^k\, p^k q^{n-k}$, где p – вероятность наступления события A в одном испытании, $q = 1 - p$.

Комментарий к определению 6

Биномиальное распределение дискретно (т.е. является распределением дискретной случайной величины X).

Биномиальное распределение широко используется в теории и практике статистического контроля продукции, при описании функционирования систем массового обслуживания, в теории стрельбы и в других областях.

Примером биномиального распределения служит последняя таблица из примера 2. Здесь $n = 10,\ p = 1/2$.

Определение 7. Распределение случайной величины X, принимающей значения $k \in \{0, 1, 2, ...\}$ с вероятностями $\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, где $\lambda > 0$ - некоторый параметр, называется *пуассоновским распределением* или *распределением Пуассона*.

Комментарий к определению 7

Пуассоновское распределение дискретно, т.е. является распределением дискретной случайной величины.

По пуассоновскому распределены, например, число рождения четверяшек, число сбоев на автоматической линии, число отказов сложной системы в «нормальном режиме», число «требований на обслуживание», поступивших в единицу времени в системах массового обслуживания и др.

2. Непрерывная случайная величина. Функция распределения

Определение 5. Случайная величина называется *непрерывной,* если область ее возможных значений имеет более чем счетную мощность, т.е. включает, хотя бы один непрерывный интервал числовой оси.

На практике, как правило, встречаются непрерывные случайные величины. Непрерывными считают даже денежные суммы, человеческие ресурсы, и т.д. Тем более таковыми являются различные физические величины, или относительные экономические показатели, и т.д.

Ясно, что задать непрерывную случайную величину **простым перечислением ее значений и их вероятностей** невозможно.

Отметим, что если при рассмотрении дискретных случайных величин мы могли ограничиться событиями, представляющимися в виде суммы конечного или счетного множества элементарных событий $X = x_i$, то при переходе к непрерывным случайным величинам нам следует, прежде всего, расширить класс событий. В необходимости такого расширения можно убедиться на примере. Пусть с испытательной целью определяется полное время работы электрической лампы; для этого выпущенную заводом лампу эксплуатируют без перерыва до выхода ее из строя. Результатом такого испытания является величина X – срок службы лампы. Очевидно, эта величина является случайной – предсказать заранее ее значение невозможно. Элементарным событием в данном примере будет любое событие вида $X = a$, где a - неотрицательное число. Однако в отличие от дискретного случая каждое отдельно взятое элементарное событие не представляет теперь большого интереса. Действительно, возможных значений для X существует несчетное множество, между тем в любой серии испытаний мы имеем дело всегда с конечным числом ламп. Поэтому ясно, что данное фиксированное значение a в серии испытаний, как правило, не будет встречаться вообще или же будет наблюдаться чрезвычайно редко. Другими словами, вероятность события $X = a$, будет равна нулю.

В то же время события, выражаемые при помощи неравенств, скажем, $X < 1000$ (лампа перегорела, не прослужив 1000 часов), представляются значительно более важными. Вероятности таких событий дают существенную информацию о распределении значений величины X и тем самым – о качестве ламп. Разумеется, вслед за событиями такого рода мы должны привлечь к рассмотрению и их комбинации, получаемые при помощи конечного или счетного числа операций сложения, умножения и перехода к противоположному событию. В первую очередь, с помощью такого рода событий можно ввести понятия распределения непрерывной случайной величины.

Оказывается, что любое множество числовой оси можно представить в виде не более чем счетного объединения непересекающихся интервалов вида

$$[a;\ b],\ (a;\ b],\ [a;\ b),\ (a;\ b),$$

или их дополнений. Такие интервалы называют *простыми множествами*. Поэтому достаточно определить вероятность попадания реализации некоторой случайной величины в любой такой интервал, и тогда, на основании теоремы сложения вероятностей, эта случайная величина будет задана. Рассмотрим, как это можно сделать.

Определение 8. *Функцией распределения* случайной величины X называется такая функция $F(x)$, что для любого $x \in R^1$ выполняется

$$F(x) = p\{X \le x\}.$$

Покажем, что с помощью функции распределения можно определить вероятность попадания реализации случайной величины в любое простое множество:

1) для $(a;\ b]$ это почти очевидно, так как

$$p\{X \le b\} = p\{X \le a\} + p\{a < X \le b\}$$

$$\text{или}\ \ p\{a < X \le b\} = p\{X \le b\} - p\{X \le a\},$$

тогда

$$p\{a < X \le b\} = F(b) - F(a);$$

2) для $[a;\ b]$. Пусть x_i – некоторая числовая последовательность, стремящаяся к a слева, т.е. это последовательность чисел меньших a, и таких что

$$\lim_{i\to\infty} x_i = a,$$

но тогда и для последовательности интервалов справедливо

$$(x_i,\ b] \to [a;\ b],$$

а тем самым

$$p\{a < X \le b\} = F(b) - \lim_{i\to\infty} F(x_i)$$

если только соответствующий предел слева функции $F(x)$ существует. Но для большинства реальных случайных величин это выполняется;

3) аналогично и для $[a;\ b)$, $(a;\ b)$.

Таким образом, функция распределения полностью задает любую случайную величину, в том числе и непрерывную.

Для дискретной случайной величины, имеющей ряд распределения

x_i	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n

ее функция распределения имеет кусочно-постоянный, ступенчатый вид.

Пример 7. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения:

x_i	-2	0	3	7
p_i	0,3	0,1	0,5	0,1

Найти функцию распределения $F(x)$ и построить график этой функции.

Решение

1. На промежутке $-\infty < x \le -2$ случайная величина X не принимает ни одного значения, меньшего числа -2, поэтому

$$F(x) = F(-2) = p\{X < -2\} = 0.$$

2. На промежутке $-2 < x \le 0$ величина X принимает одно значение $X = 0$, функция распределения $F(x) = F(0) = p\{X < 0\}$. Вероятность того, что X меньше 0, равна 0,3. На рассматриваемом промежутке

$$F(x) = F(0) = p\{X < 0\} = 0{,}3.$$

3. На промежутке $0 < x \le 3$ случайная величина X принимает одно значение $X = 3$, функция распределения $F(x) = F(3) = p\{X < 3\}$. При $X < 3$ случайная величина X может принять или значение - 2 с вероятностью 0,3, или же значение 0 с вероятностью 0,1, поэтому, одно из этих значений, безразлично какое, X может принять (по теореме сложения вероятностей несовместных событий) с вероятностью $0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}4$. Таким образом,

$$F(x) = F(3) = p\{X < 3\} = p\{X = -2\} + p\{X = 0\} = 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}4.$$

4. На промежутке $3 < x \le 7$ случайная величина X принимает одно значение $X = 7$, функция распределения $F(x) = F(7) = p\{X < 7\}$. При $X < 7$ величина X может принять или значение - 2 с вероятностью 0,3, или значение 0 с вероятностью 0,1, или значение 3 с вероятностью 0,5, поэтому одно из этих значений, безразлично какое, X может принять (по теореме сложения вероятностей несовместных событий) с вероятностью $0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}5 = 0{,}9$. Таким образом, на рассматриваемом промежутке

$$F(x) = F(3) = p\{X < 7\} = p\{X = -2\} + p\{X = 3\} + p\{X = 0\} =$$
$$= 0,3 + 0,1 + 0,5 = 0,9.$$

5. На промежутке $7 < x < \infty$ величина X может принять любое из всех своих возможных значений, поэтому функция распределения

$$F(x) = p\{X < \infty\} = 1.$$

Итак, рассматриваемая случайная величина X на всей числовой оси характеризуется следующей функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad x \le -2, \\ 0,3 & \textit{при} \quad -2 < x \le 0, \\ 0,4 & \textit{при} \quad 0 < x \le 3, \\ 0,9 & \textit{при} \quad 3 < x \le 7, \\ 1 & \textit{при} \quad x > 7. \end{cases}$$

График этой функции приведен на рис. 3.

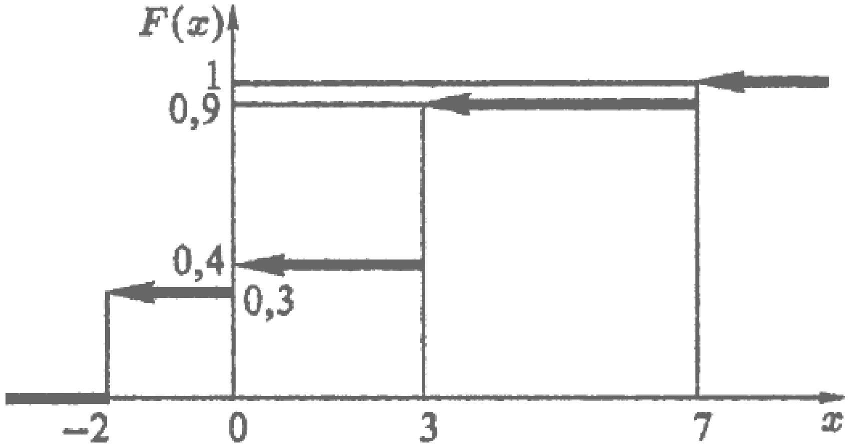


Рис. 3

Заметим, что при подходе слева к точкам разрыва функция сохраняет свое значение (про такую функцию говорят, что она непрерывна слева).

Этот пример позволяет прийти к утверждению, что функция распределения любой дискретной случайной величины есть разрывная ступенчатая функция, скачки которой происходят в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины и равны вероятностям этих значений. Сумма всех скачков функции $F(x)$ равна 1.

Пример 8. Дискретная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 2,\\ 0{,}5 & \text{при } 2<x\le 4,\\ 0{,}7 & \text{при } 4<x\le 8,\\ 1 & \text{при } x>8.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что X примет значение не меньшее 4 и меньшее 8.

Решение

Искомую вероятность $p\{4\le X<8\}$ найдем по формуле

$$p\{4\le X<8\}=F(8)-F(4)=0{,}7-0{,}5=0{,}2.$$

Упражнения

1. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения:

x_i	1	2	3	4
p_i	0,4	0,3	0,1	0,2

Найти функцию распределения $F(x)$ и построить график этой функции.

2. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения:

x_i	-1	3	6	7	8
p_i	0,1	0,4	0,3	0,1	0,1

Чему равна вероятность $p\{3<X\le 7\}$.

3. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения:

x_i	1	3	5	7	9
p_i	0,25	a	b	c	0,15

и вероятность $p\{1\le X\le 5\}=0{,}6$. Тогда чему равны значения a, b и c.

4. Для дискретной случайной величины X,

x_i	2	3	4	5
p_i	p_1	p_2	p_3	p_4

функция распределения имеет вид:

$$F\left(x\right)=\begin{cases}0 & при\ \ x\le 2,\\ 0,25 & при\ \ 2<x\le 3,\\ 0,40 & при\ \ 3<x\le 4,\\ 0,75 & при\ \ 4<x\le 5,\\ 1 & при\ \ x>5.\end{cases}$$

Найти значения вероятностей p_1, p_2, p_3 и p_4.

Для так называемой *равномерно распределенной* на отрезке $\left[a;b\right]\subset R^1$ случайной величины, функция распределения задается следующим кусочно-аналитическим выражением

$$F\left(x\right)=\begin{cases}0 & при\ \ x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a} & при\ \ a\le x\le b,\\ 1 & при\ \ x>b.\end{cases}$$

Определение 9. Случайная величина называется *абсолютно непрерывной*, если ее функция распределения непрерывна на всей числовой оси.

Множеством возможных значений абсолютно непрерывной случайной величины, обычно является один единственный непрерывный интервал числовой оси, быть может, с бесконечными границами. Большинство встречающихся на практике случайных величин являются абсолютно непрерывными, поэтому в дальнейшем, говоря «непрерывная случайная величина», мы будем подразумевать абсолютно непрерывную случайную величину.

Достаточно очевидны следующие важные свойства функции распределения.

***Свойства функции распределения*:**

1) $0\le F\left(x\right)\le 1$, для любого $x\in R^1$;

2) $F\left(x\right)$ – неубывающая функция;

3) $F\left(x\right)\to 0$, при $x\to -\infty$; $F\left(x\right)\to 1$, при $x\to +\infty$.

3. Функция плотности распределения случайной величины

Следующее понятие является чрезвычайно важным.

Определение 10. Функция $f(x)$ называется *функцией плотности распределения* случайной величины X (или просто *плотностью*), если для любого $(a, b] \subset R^1$ выполняется

$$p\{x \in (a, b]\} = \int_a^b f(x)dx.$$

Ясно, что плотность тоже полностью задает случайную величину. Из сказанного выше следует

$$\int_a^b f(x)dx = p\{x \in (a, b]\} = F(b) - F(a),$$

т.е. функция распределения является первообразной для плотности, т.е.

$$F'(x) = f(x), \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi.$$

Таким образом, зная плотность всегда можно найти функцию распределения, и наоборот. Однако на практике для задания случайной величины почти всегда используется плотность. Это связано со следующим обстоятельством.

Вспомним геометрический смысл определенного интеграла (рис. 4), а именно, что он численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной соответствующим участком графика функции на интервале интегрирования и самим этим интервалом.

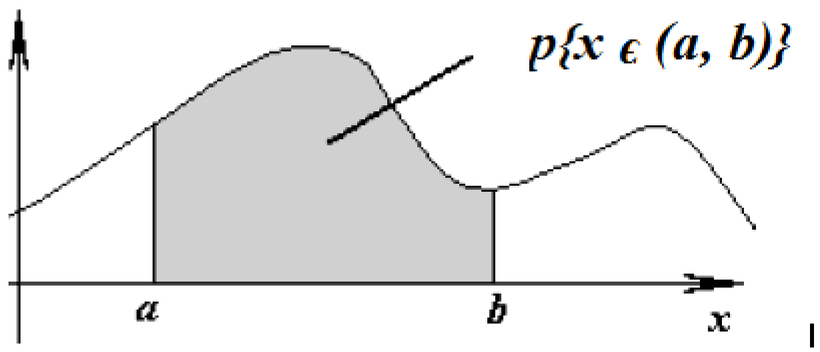


Рис. 4

Таким образом, на тех участках числовой оси, где больше значения функции плотности, там и больше площадь под ее графиком, а тем самым и вероятность появления реализаций данной случайной величины. Поэтому график плотности весьма хорошо иллюстрирует закон распределения данной случайной величины. Этого нельзя сказать о графике функции распределения.

Пример 9. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 2,\\ (x-2)^2 & \text{при } 2<x\le 3,\\ 1 & \text{при } x>3.\end{cases}$$

Найти:

а) функцию плотности распределения $f(x)$;

б) графики функций $F(x)$ и $f(x)$;

в) по известной функции $F(x)$ и по найденной функции $f(x)$ вероятность того, что в результате испытания X примет значение, не меньшее 2,1 и меньшее 2,5.

Дать геометрическую интерпретацию величины, найденной вероятности $p\{2{,}1\le X<2{,}5\}$.

Решение

а) Плотность распределения вероятностей $f(x)$ равна производной от функции распределения $F(x)$, поэтому имеем $f(x)=\left((x-2)^2\right)'=2(x-2)$ при $2{,}1\le x<2{,}5$ и $f(x)=0$ при $x\le 2$ и $x>3$. Таким образом, функция плотности распределения характеризуется выражением:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 2,\\ 2(x-2) & \text{при } 2<x\le 3,\\ 0 & \text{при } x>3.\end{cases}$$

б) Графики функции $F(x)$ и $f(x)$ представлены ниже (рис. 5 и 6):

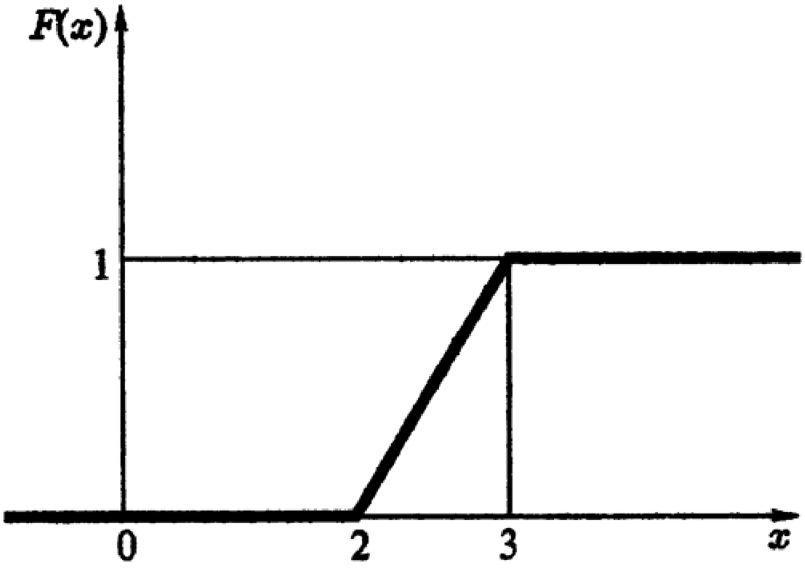


Рис. 5

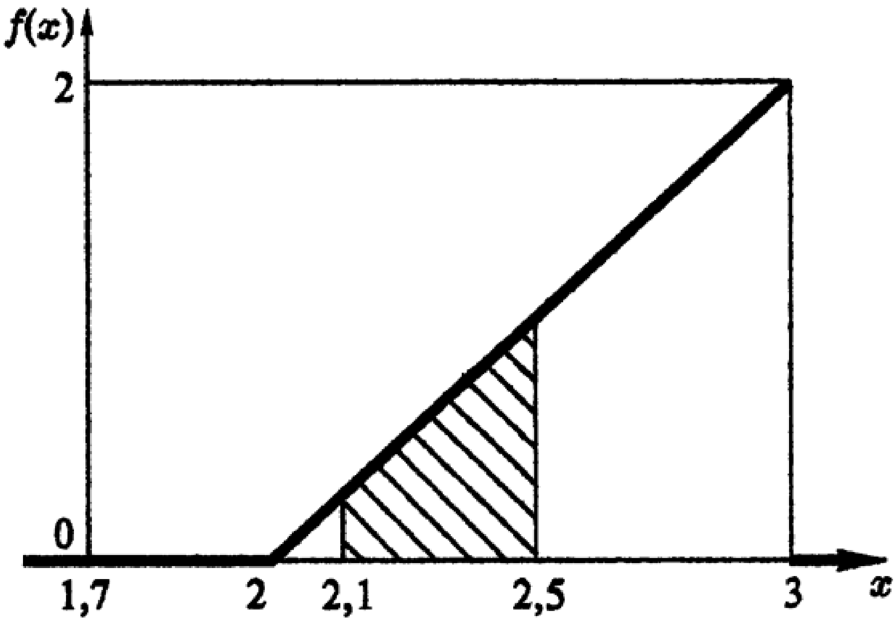


Рис. 6

в) Вероятность попадания случайной величины в интервал [2,1; 2,5) определим как приращение функции распределения в этом интервале:

$$p\{2{,}1 < X < 2{,}5\} = F(2{,}5) - F(2{,}1) = (0{,}5)^2 - (0{,}1)^2 = 0{,}24.$$

Эту же вероятность найдем по известной функции плотности распределения:

$$p\{2{,}1 < X < 2{,}5\} = \int\limits_{2{,}1}^{2{,}5} f(x)\,dx = 2\int\limits_{2{,}1}^{2{,}5} (x-2)^2\,dx = (x-2)^2\Big|_{2{,}1}^{2{,}5} = 0{,}24.$$

Полученную вероятность $p\{2{,}1 \le X < 2{,}5\}$ можно интерпретировать геометрически как площадь заштрихованной криволинейной трапеции, приведенной на рис. 6.

Пример 10. Случайная величина X задана функцией плотности распределения

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \ \ x\le \dfrac{\pi}{4},\\ 2\sin 2x & при \ \ \dfrac{\pi}{4}<x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 0 & при \ x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

Решение

Если $x\le \dfrac{\pi}{4}$, то $f(x)=0$, следовательно,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi=\int_{-\infty}^{x}0\cdot d\xi=0.$$

Если $\dfrac{\pi}{4}<x\le \dfrac{\pi}{2}$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{\frac{\pi}{4}}0\cdot d\xi=\int_{\frac{\pi}{4}}^{x}2\sin 2\xi\, d\xi=\cos 2\xi\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{x}=-cos2x.$$

Если $x>\dfrac{\pi}{2}$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{\frac{\pi}{4}}0\cdot d\xi=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}2\sin 2x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}0\cdot d\xi=0-\cos 2x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}+0=1.$$

Таким образом, функция распределения характеризуется выражением:

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \ \ x\le \dfrac{\pi}{4},\\ -\cos 2x & при \ \ \dfrac{\pi}{4}<x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 1 & при \ x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Ниже приведем функции плотности трех важных непрерывных случайных величин.

Упражнения

1. График функции плотности распределения $f(x)$ случайной величины X имеет вид, изображенный на рис. 7.

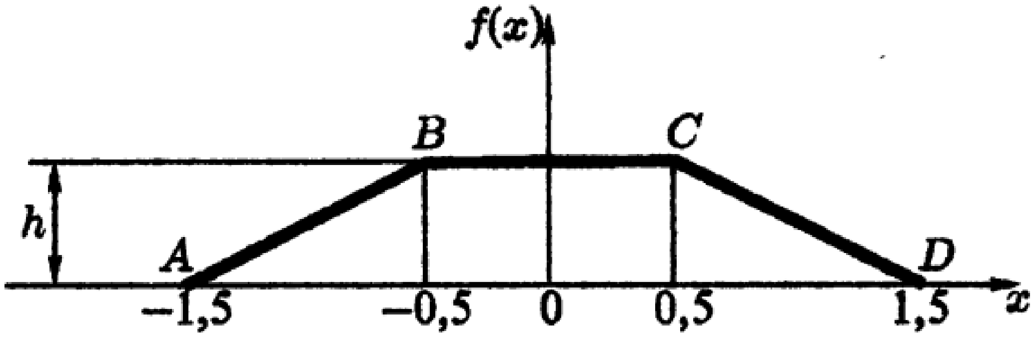


Рис. 7

Найти аналитическое выражение для $f(x)$ на всей числовой оси.

2. Случайная величина X подчинена закону Симпсона (закону равнобедренного треугольника) на отрезке $x \in [-c; c]$ (рис. 8). Найти: а) функцию плотности распределения вероятностей этой случайной величины; б) вероятность попадания величины X в интервал $(c/2; c)$.

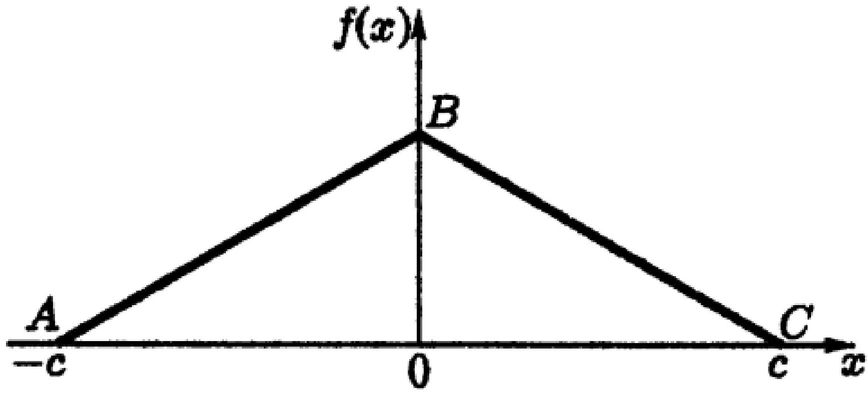


Рис. 8

Равномерно распределенная на отрезке $[a; b] \subset R^1$ случайная величина. Выражения для функции плотности распределения

$$f(x)=\begin{cases}0 & при\ \ x<a,\\ \dfrac{1}{b-a} & при\ \ a\le x\le b,\\ 0 & при\ \ x>b.\end{cases}$$

Ее график имеет вид рис. 9.

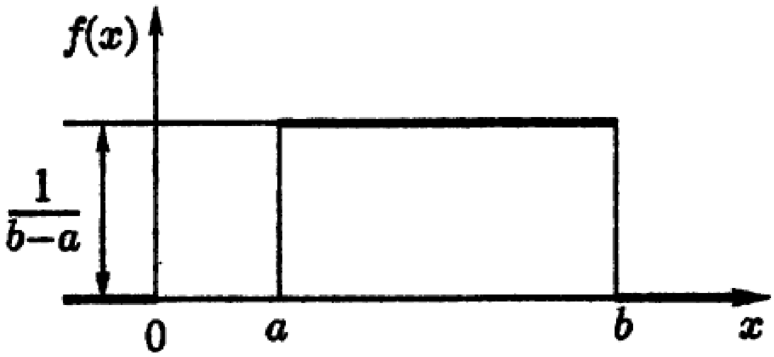


Рис. 9

А график ее функции распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ \ x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a} & при\ \ a\le x\le b,\\ 1 & при\ x>b\end{cases}$$

имеет вид рис.10.

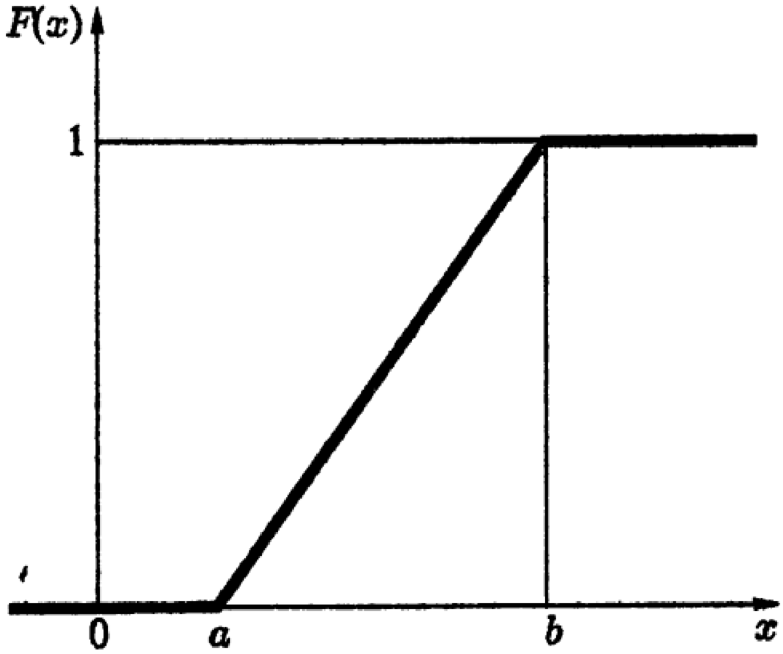


Рис. 10

Равномерный закон распределения используется при анализе ошибок округления при проведении числовых расчетов (например, ошибка округления числа до целого распределена равномерно на отрезке [-0,5; +0,5]), в ряде задач массового обслуживания, при статистическом моделировании наблюдений, подчиненных заданному распределению. Так, случайная величина X, распределенная по равномерному закону на отрезке [0;1], называемая «*случайным числом* от 0 до 1», служит исходным материалом для получения случайных величин с любым законом распределения.

Пример 11. Поезда метрополитена идут регулярно с интервалом 2 мин. Пассажир выходит на платформу в случайный момент времени. Какова вероятность того, что ждать пассажиру придется не больше полминуты.

Решение

Случайная величина X – время ожидания поезда на временном (в минутах) отрезке [0;2] имеет равномерный закон распределения

$$\varphi(x)=\begin{cases} 0 & \text{\textit{при}}\ \ x<0, \\ \dfrac{1}{2} & \text{\textit{при}}\ 1\le x\le 2, \\ 0 & \text{\textit{при}}\ \ x>2. \end{cases}$$

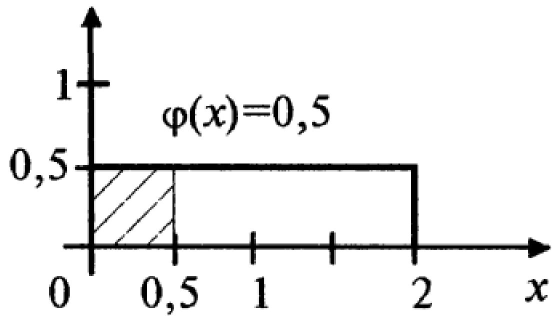


Рис. 11

Поэтому вероятность того, что пассажиру придется ждать не более полминуты, равна 1/4 от равной единице площади прямоугольника (рис. 11), т.е.

$$p\{X\le 0{,}5\}=\int_0^{0{,}5}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}x\Big|_0^{0{,}5}=\frac{1}{4}.$$

Нормальное распределение, называемое еще *гауссовским* распределением, играет важнейшую роль в теории вероятностей, математической статистике и на практике. Главная особенность, выделяющая его среди других законов, состоит в том, что он является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения при весьма часто встречающихся типичных условиях (см. §6).

Говорят, что случайная величина X имеет *нормальный закон распределения*, если ее плотность задается выражением

$$\varphi_N(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где $\sigma > 0$, a - заданные числа, параметры этого распределения. Графики функции плотности (рис. 12а) и функции распределения нормального распределения (рис. 12б) с параметрами σ^2 и a, т.е. $N(a;\sigma^2)$ приведены ниже.

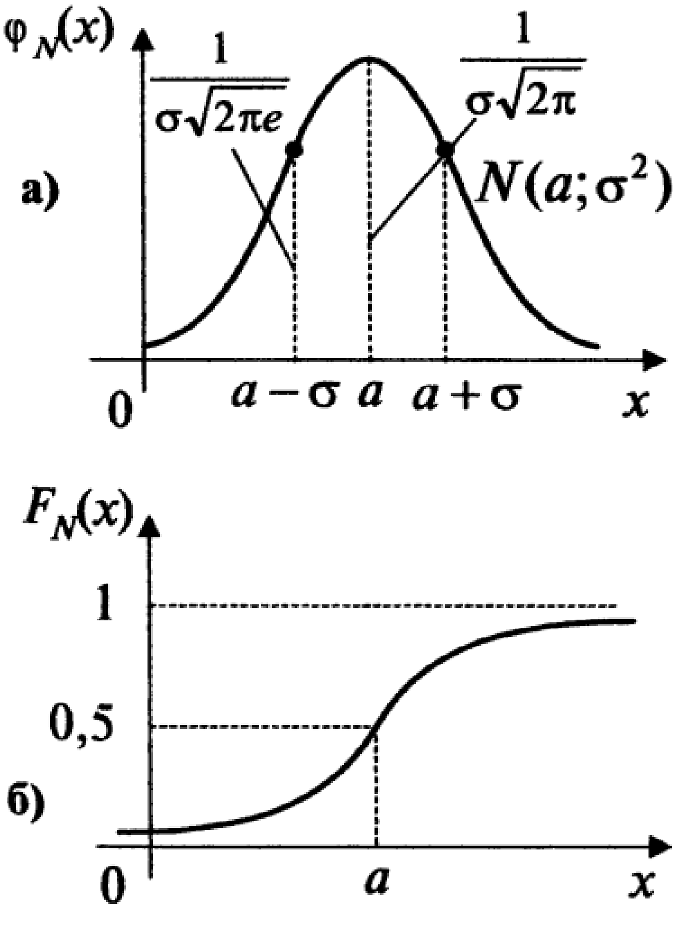


Рис. 12

Говорят, что случайная величина X имеет *показательный (экспоненциальный) закон распределения,* если ее плотность задается выражением

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & при \;\; x\geq 0,\\ 0 & при \;\; x<0,\end{cases}$$

где λ - некоторый параметр.

Функция распределения $F(x)$ показательной случайной величины X имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-ax} & при \;\; x>0,\\ 0 & при \;\; x>0.\end{cases}$$

Графики функции плотности (рис. 13а) и функции распределения нормального распределения (рис. 13б) приведены ниже.

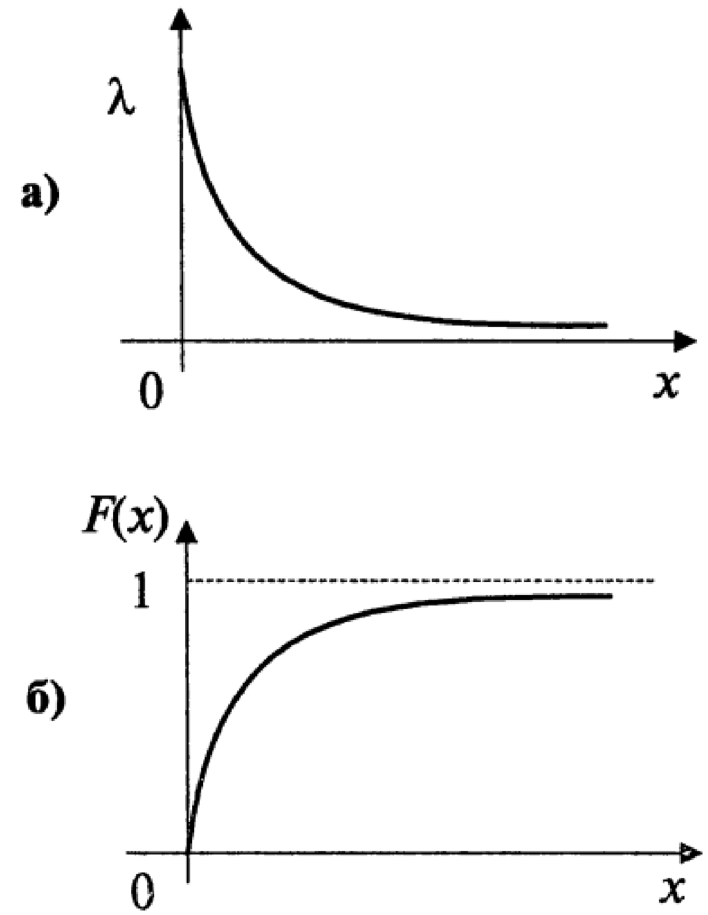


Рис. 13

Показательный закон распределения играет большую роль в теории массового обслуживания и теории надежности. Так, например, интервал времени T между двумя соседними событиями в простейшем потоке имеет показательное распределение с параметром λ - интенсивностью потока.

Свойства функции плотности распределения:

1) $f(x) \geq 0$ во всех точках $x \in R^1$, где существует $F'(x)$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1;$

3) $f(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty.$

Пример 12. Случайная величина X распределена по показательному закону, заданному плотностью распределения вероятностей $f(x) = 0,5e^{-0,5x}$ при $x \geq 0$; при $x < 0$ функция $f(x) = 0$. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение из интервала (2; 4).

Решение

Искомая вероятность того, что X примет значение из интервала (2; 4), равна

$$p\{2 < X < 4\} = \int\limits_{2}^{4} 0,5e^{-0,5x}dx = -e^{-0,5x}\Big|_2^4 = e^{-0,5\cdot4} - e^{-0,5\cdot2} = 0,3678 - 0,1353 = 0,2325.$$

Пример 13. Случайная величина X, все возможные значения которой принадлежат интервалу $(0; \pi/3)$, задана в этом интервале функцией плотности распределения $f(x) = C\sin 3x$. Найти коэффициент C.

Решение

Если функция $f(x)$ представляет собой функцию распределения непрерывной случайной величины X, заданной в интервале $(a; b)$, то выполняется условие: $\int\limits_a^b f(x)dx = 1$. Неизвестный коэффициент C в выражении функции $f(x) = C\sin 3x$ определим так, чтобы это условие выполнялось для данной случайной величины X. Для этого найдем

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} C \cdot \sin 3x dx = -\frac{C}{3}(\cos\pi - \cos 0) = -\frac{C}{3}(-1-1) = \frac{2C}{3}$$

и приравняем этот результат к единице: $\frac{2C}{3}=1$. Из последнего равенства получим $C=\frac{3}{2}$.

Упражнение

Дана функция $y=\frac{A}{x^4}$. Найти значение постоянного множителя A, при котором эта функция могла бы характеризовать плотность распределения вероятностей случайной величины X при условии, что все возможные значения величины X находятся на луче $(2;+\infty)$.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется случайной величиной?

2. Приведите примеры случайных величин.

3. Какие бывают случайные величины?

4. Что представляют возможные значения: а) дискретной случайной величины? б) непрерывной случайной величины?

5. Что называется законом распределения случайной величины?

6. Что называется рядом распределения дискретной случайной величины?

7. Что называется функцией распределения непрерывной случайной величины? Приведите свойства функции распределения.

8. Что называется функцией плотности распределения непрерывной случайной величины? Приведите свойства функции плотности распределения.

9. Что представляет собой биномиальное распределение?

10. Что представляет собой пуассоновское распределение?

11. Что называется равномерным законом распределения?

12. Что называется нормальным законом распределения?

13. Что называется показательным (экспоненциальным) законом распределения?

§47. Числовые характеристики случайных величин

Ключевые слова: *математическое ожидание, дисперсия, среднеквадратическое отклонение, ковариация, коэффициент корреляции, моменты случайных величин, начальный момент $k-$го порядка, относительный момент $k-$го порядка, центральный момент $k-$го порядка, коэффициент асимметрии, эксцесс (коэффициент эксцесса), начальный момент порядка k,l, относительный момент порядка k,l, центральный момент порядка k,l.*

Из предыдущего параграфа известно, что исчерпывающей характеристикой случайных величин является их закон распределения: ряд распределения для дискретных случайных величин; функция распределения или функция плотности распределения для непрерывных случайных величин. Но далеко не в каждой задаче нужно знать весь закон распределения. В ряде случаев можно обойтись одним или несколькими числами, отражающими наиболее важные особенности закона распределения: например, числом имеющим смысл «среднего значения» случайной величины, или же числом, характеризующим средний размер отклонения случайной величины от своего среднего значения, и т.д. Такого рода числа называют *числовыми характеристиками случайной величины* (или соответствующего закона распределения). Их роль в теории вероятностей чрезвычайно велика; многие задачи удается решить до конца, оставляя в стороне законы распределения и оперируя только числовыми характеристиками.

Определение 1. Любая числовая величина, так или иначе характеризующая закон распределения некоторой случайной величины, называется *параметром* этого распределения.

Из бесконечного количества всевозможных параметров, важнейшее значение имеют два: *математическое ожидание* и *дисперсия* случайной величины.

1. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины

Определение 2. *Математическим ожиданием дискретной случайной величины* X , имеющей ряд распределения, называется число

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Математическое ожидание дискретной случайной величины X имеет следующий вероятностный смысл.

Пусть проведено N испытаний случайной величины X , в результате чего получены значения $x_1, x_2, ..., x_N$. Среднее арифметическое этих чисел

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_N}{N}$$

при больших n близко к $M(X)$. Строгую формулировку этого утверждения приведем в §6 (теорема Чебышева).

Таблица 1

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Здесь мы приведем нестрогое рассуждение, поясняющее причины такого явления. Если величина X дискретна и ее ряд распределения имеет вид табл.1, то в результате N испытаний мы получим p_1N раз значение x_1; p_2N раз - значение x_2;...; p_nN раз - значение x_n. Действительно, если вероятность события A равна p, то в N испытаниях событие A наступит примерно Np раз (согласно статистическому определению вероятности (см. §1)). После N испытаний сумма значений будет приближенно равна

$$x_1p_1N+x_2p_2N+\cdots+x_np_nN.$$

Среднее арифметическое полученных в результате испытаний значений равно

$$\frac{x_1p_1N+x_2p_2N+\cdots+x_np_nN}{N}=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i,$$

что совпадает с $M(X)$.

В связи с этим математическое ожидание называют также средним значением случайной величины.

Пример 1. Пусть X количество очков при бросании игральной кости. Ряд распределения этой величины имеет вид

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Найдем математическое ожидание

$$M(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{2}.$$

Пример 2. По многолетним статистическим данным известно, что вероятность рождения мальчика равна $0{,}515$. Составить закон распределения случайной величины X - числа мальчиков в семье из 4 детей. Найти математическое ожидание этой случайной величины.

Решение

Число мальчиков в семье из $n=4$ представляет случайную величину X со множеством значений $X=m=0,1,2,3,4$ вероятности, которые определяются по формуле Бернулли:

$$p\{X=m\}=C_n^m p^m q^{n-m}, \text{ где } q=1-p.$$

В нашем случае $n=4$, $p=0{,}515$, $q=1-p=1-0{,}515=0{,}485$.

Вычислим

$$p\{X=0\}=C_4^0 0{,}515^0\cdot 0{,}485^4=0{,}055;$$

$$p\{X=1\}=C_4^1 0{,}515^1\cdot 0{,}485^3=0{,}235;$$

$$p\{X=2\}=C_4^2 0{,}515^2\cdot 0{,}485^2=0{,}375;$$

$$p\{X=3\}=C_4^3 0{,}515^3\cdot 0{,}485^1=0{,}265;$$

$$p\{X=4\}=C_4^4 0{,}515^4\cdot 0{,}485^0=0{,}070.$$

Ряд распределения имеет вид

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,055	0,235	0,375	0,265	0,070

Убеждаемся, что $\sum_{i=1}^{5} p_i = 0,055 + 0,235 + 0,375 + 0,265 + 0,070 = 1$.

Найдем математическое ожидание

$$M(X) = 0 \cdot 0,055 + 1 \cdot 0,235 + 2 \cdot 0,375 + 3 \cdot 0,265 + 4 \cdot 0,070 = 2,06.$$

Математическое ожидание дискретной случайной величины X, имеющей счетное множество значений, равно

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i,$$

причем математическое ожидание существует, если ряд в правой части равенства сходится абсолютно.

Так как этот ряд может и расходиться, то соответствующая случайная величина может и не иметь математического ожидания. Например, случайная величина X с рядом распределения

x_i	2	2^2	2^3	$\dots$	2^i	$\dots$
p_i	$1/2$	$1/2^2$	$1/2^3$	$\dots$	$1/2^i$	$\dots$

не имеет математического ожидания, ибо сумма ряда равна ∞. На практике, как правило, множество возможных значений случайной величины распространяется лишь на ограниченный участок оси абсцисс и, значит, математическое ожидание существует.

Пример 3. После ответа студента на вопросы экзаменационного билета экзаменатор задает студенту дополнительные вопросы. Преподаватель прекращает задавать дополнительные вопросы, как только студент обнаруживает незнание заданного вопроса. Вероятность того, что студент ответит, на любой заданный дополнительный вопрос равна 0,9. Требуется:

а) составить ряд распределения случайной дискретной величины X - числа дополнительных вопросов, которые задаст преподаватель студенту;

б) найти математическое ожидание этой случайной величины.

Решение

а) Дискретная случайная величина X - число заданных дополнительных вопросов - имеет следующие возможные значения: $1,2,3,\ldots,k,\ldots$. Найдем вероятности этих возможных значений.

Величина X примет возможное значение 1 (экзаменатор задаст только один вопрос), если студент не ответит на первый вопрос. Вероятность этого возможного значения равна $1-0,9=0,1$. Таким образом,

$$p\{X=1\}=0,1.$$

Величина X примет возможное значение 2 (экзаменатор задаст только два вопроса), если студент ответит на первый вопрос (вероятность этого события равна 0,9) и не ответит на второй (вероятность этого события равна 0,1). Таким образом,

$$p\{X=2\}=0,9\cdot 0,1=0,09.$$

Аналогично найдем

$$p\{X=3\}=0,9^2\cdot 0,1=0,081; \qquad p\{X=k\}=0,9^{k-1}\cdot 0,1; \ldots.$$

Напишем искомый закон распределения:

x_k	1	2	3	…	k	…
p_k	0,1	0,09	0,081	…	$0,9^{k-1}\cdot 0,1$	…

Проверяем, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 0,1+0,1\cdot 0,9+0,1\cdot 0,9^2+\cdots+0,1\cdot 0,9^{k-1}+\cdots=$$

$$=0,1\left(1+0,9+0,9^2+\cdots\right)=0,1\cdot\frac{1}{1-0,9}=\frac{0,1}{0,1}=1.$$

Здесь использовали формулу суммы сходящегося $\left(|q|<1\right)$ геометрического ряда: $S=\dfrac{u}{1-q}$ при $u=1,\ q=0,9.$

Вычислим математическое ожидание

$$M(X)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = 1\cdot 0,1+2\cdot 0,09+3\cdot 0,081+\cdots+k\cdot 0,1\cdot 0,9^{k-1}+\cdots=$$

$$=0{,}1\left(1+2\cdot 0{,}9+3\cdot 0{,}9^2+\cdots+k\cdot 0{,}9^{k-1}+\cdots\right).$$

Для вычисления суммы полученного ряда воспользуемся формулой:

$$S(x)=1+2x+3x^2+\cdots+k\,x^{k-1}+\cdots=\left(x+x^2+\cdots+x^k+\cdots\right)'=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},$$

(т.е. сумма данного ряда является производной сходящегося геометрического ряда со знаменателем $|q|=|x|<1$). При $x=0{,}9$ имеем: $S(0{,}9)=\dfrac{1}{(1-0{,}9)^2}=100.$

Тогда $M(X)=0{,}1\cdot 100=10.$

Упражнения

1. Торговый агент имеет 5 телефонных номеров потенциальных покупателей и звонит им до тех пор, пока не получит заказ на покупку товара. Вероятность того, что потенциальный покупатель сделает заказ, равна 0,4. Составить ряд распределения числа телефонных разговоров, которые предстоит провести агенту. Найти математическое ожидание этой случайной величины.

2. Охотник, имеющий 4 патрона, стреляет по дичи до первого попадания или до израсходования всех патронов. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,6, при каждом последующем - уменьшается на 0,1. Необходимо: а) составить ряд распределения числа патронов, израсходованных охотником; б) найти математическое ожидание этой случайной величины.

3. Из поступивших в ремонт 10 часов 7 нуждаются в общей чистке механизма. Часы не рассортированы по виду ремонта. Мастер, желая найти часы, нуждающиеся в чистке, рассматривает их поочередно и, найдя такие часы, прекращает дальнейший просмотр. Составить ряд распределения числа просмотренных часов. Найти математическое ожидание этой случайной величины.

4. Имеются 4 ключа, из которых только один подходит к замку. Составить ряд распределения числа попыток открывания замка, если испробован-

ный ключ в последующих попытках не участвует. Найти математическое ожидание этой случайной величины.

5. Радист вызывает корреспондента, причем каждый последующий вызов производится лишь в том случае, если предыдущий вызов не принят. Вероятность того, что корреспондент примет вызов, равна 0,4. Составить ряд распределения числа вызовов, если: а) число вызовов не более 5; б) число вызовов не ограничено. Найти математическое ожидание этой случайной величины.

Определение 3. Пусть X - непрерывная случайная величина и $f(x)$ - ее функция плотности распределения. Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X называется число

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

(если этот интеграл сходится).

Математическое ожидание непрерывной случайной величины имеет такой же вероятностный смысл, что и математическое ожидание дискретной случайной **величины.**

Пример 4. Функция $f(x)$ задана в виде:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le 1, \\ \dfrac{A}{x^4} & при \quad x > 1. \end{cases}$$

Найти: а) значение постоянной A, при которой $f(x)$ будет функцией плотности некоторой случайной величины X; б) математическое ожидание случайной величины X.

Решение

а) Для того чтобы $f(x)$ была функцией плотности случайной величины X, она должна быть неотрицательна, т.е. $f(x) \ge 0$ или $\dfrac{A}{x^4} \ge 0$, откуда $A \ge 0$ для нее $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{1} 0\cdot dx + \int_{1}^{+\infty} \frac{A}{x^4}dx = 0 + \lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b} \frac{A}{x^4}dx = \frac{A}{3}\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^3}\bigg|_1^b\right) =$$

$$= \frac{A}{3}\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^3}\bigg|_1^b\right) = \frac{A}{3}\lim_{b\to+\infty}\left(1-\frac{1}{b^3}\right) = \frac{A}{3} = 1,$$

откуда $A = 3$.

б) По формуле $M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ вычислим математическое ожидание

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{1} x\cdot 0\cdot dx + \int_{1}^{+\infty} x\frac{3}{x^4}dx = 0 + 3\lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b}\frac{dx}{x^3} =$$

$$= 3\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2x^2}\bigg|_1^b\right) = \frac{3}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(1-\frac{1}{b^2}\right) = \frac{3}{2}.$$

Пример 5. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{4} & \textit{при} \quad 0 < x \le 2, \\ 1 & \textit{при} \quad x > 2. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание случайной величины X .

Решение

Сначала найдем функцию плотности

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad x \le 0,\ x > 2, \\ \dfrac{x}{2} & \textit{при} \quad 0 < x \le 2. \end{cases}$$

Теперь по формуле $M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ вычислим математическое ожидание

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x\cdot 0\cdot dx + \int_{0}^{2} x\frac{x}{2}dx = \int_{2}^{+\infty} x\cdot 0\cdot dx = 0 + \frac{x^3}{6}\bigg|_0^2 + 0 = \frac{2^3}{6} = \frac{4}{3}.$$

Упражнения

1. Дана функция

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x<0,\\ Cxe^{-x} & при \quad x\geq 0.\end{cases}$$

При каком значении параметра C эта функция является функцией плотности распределения некоторой непрерывной случайной величины X.

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

2. Случайная величина X распределена по закону Коши:

$$f(x)=\frac{A}{1+x^2}.$$

Найти: а) коэффициент A; б) математическое ожидание случайной величины X.

3. Случайная величина X распределена по закону Лапласа:

$$f(x)=Ae^{-\lambda|x|}.$$

Найти: а) коэффициент A; б) математическое ожидание случайной величины X.

Свойства математического ожидания

1) $M(\lambda)=\lambda$, $\lambda-$любая константа (постоянное число формально можно рассматривать как случайную величину, принимающую единственное значение $\lambda-$ с вероятностью единицы);

2) $M(\lambda X)=\lambda M(X)$ для любой случайной величины X и произвольного числа λ.

3) $M(X+Y)=M(X)+M(Y)$ для произвольных случайных величин X, Y;

4) $M(XY)=M(X)M(Y)$ для произвольных независимых случайных величин X и Y (см. п. 2.)

Доказательство этих свойств опускаем.

Отметим еще раз, что математическое ожидание является (постоянным, не зависящим от опыта) числом, характеризующим определенное свойство случайной величины, а именно - устойчивость среднего арифметического полученного в результате испытаний значений.

Эта характеристика является важной, но далеко не полной.

Следующее понятие также сопоставляет случайной величине некоторое число, характеризующее определенное свойство этой величины.

Определение 4. *Дисперсией* случайной величины X называется число

$$D(X)=M\left(X-M(X)\right)^2,$$

т.е. математическое ожидание случайного квадрата отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания.

Таким образом, дисперсия характеризует величину рассеяния или разброса возможных значений случайной величины вокруг ее среднего значения. Ясно, что это тоже очень важный параметр.

Заметим, что в качестве характеристики рассеяния нельзя брать математическое ожидание отклонения случайной величины от ее математического ожидания $M(X-a)$ (где $a=M(X)$), ибо согласно свойствам математического ожидания эта величина равна нулю для любой случайной величины.

Выбор дисперсии, определяемой по формуле $D(X)=M\left(X-M(X)\right)^2$ в качестве характеристики рассеяния значений случайной величины X, оправдывается также тем, что математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от постоянной величины C минимально именно тогда, когда эта постоянная C равна математическому ожиданию $M(X)=a$, т.е.

$$\min_C = M(X-C)^2 = M(X-a)^2 = D(X).$$

Используя свойства математического ожидания, легко доказать следующую, более удобную для практических расчетов, формулу дисперсии

$$D(X)=M\left(X^2-2X\cdot M(X)+\left[M(X)\right]^2\right)=M\left(X^2\right)-2\left[M(X)\right]^2+\left[M(X)\right]^2=$$

$$=M\left(X^2\right)-\left[M(X)\right]^2,$$

т.е.

$M\left(X^2\right)=\sum_i x_i^2 p_i$ – для дискретной случайной величины;

$$M\left(X^2\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx -$$ для непрерывной случайной величины.

Таким образом, справедливы следующие формулы, упрощающие вычисление дисперсии:

$D(X)=\sum\limits_i x_i^2 p_i - \left[\sum\limits_i x_i\, p_i\right]^2$ – для дискретной случайной величины;

$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx\right]^2$ – для непрерывной случайной величины.

Дисперсия, по сути, является квадратическим показателем. Иногда более удобно использовать аналогичный линейный параметр, называемый *среднеквадратическим отклонением* случайной величины

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Пример 6. Пусть ряд распределения величины X имеет вид

x_i	-1	5
p_i	0,3	0,7

Найти дисперсию и среднеквадратическое отклонение этой случайной величины.

Решение

Найдем

$$M(X)=(-1)\cdot 0,3+5\cdot 0,7=3,2;$$

$$M\left(X^2\right)=(-1)^2\cdot 0,3+5^2\cdot 0,7=17,8.$$

Тогда

$$D(X)=M\left(X^2\right)-\left[M(X)\right]^2=17,8-(3,2)^2=7,56;$$

$$\sigma=\sqrt{D(X)}=\sqrt{7,56}\approx 2,7495.$$

Пример 7. Найти дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайной величины X из примера 4.

Решение

Вначале найдем

$$M\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\left(\frac{3}{x^4}\right)dx=3.$$

Вычисление интеграла производим аналогично вычислению математического ожидания в примере 4. Теперь учитывая, что $M(X)=\frac{3}{2}$ (см. пример 4) имеем:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-\left[\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx\right]^2=3-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4};$$

$$\sigma=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Упражнения

1. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения

x_i	-1	0	3
p_i	0,4	0,4	0,2

Найти дисперсию и среднеквадратическое отклонение этой случайной величины.

2. Дисперсия дискретной случайной величины X, заданной рядом распределения, равна 0,06.

x_i	1	x_2
p_i	0,4	0,6

Найти значение $x_2>0$.

3. Непрерывная случайная величина X задана функцией плотности

$$f(x)=\begin{cases}0 & при\ \ x\le 0,\\ \frac{3x^2}{64} & при\ \ 0<x\le 4,\\ 0 & при\ \ x>4.\end{cases}$$

Найти дисперсию и среднеквадратическое отклонение этой случайной величины.

4. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \;\; x\le 0, \\ \dfrac{x}{7} & при \;\; 0<x\le 7, \\ 1 & при \;\; x>7. \end{cases}$$

Найти дисперсию и среднеквадратическое отклонение этой случайной величины.

5. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения вероятностей:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \;\; x\le 0, \\ \dfrac{x^2}{36} & при \;\; 0<x\le 6, \\ 1 & при \;\; x>6. \end{cases}$$

Найти дисперсию и среднеквадратическое отклонение этой случайной величины.

Приведем свойства дисперсии и среднеквадратического отклонения.

Свойства дисперсии

1) $D(X)\ge 0$, где X – любая случайная величина;

2) $D(\lambda)=0$, где λ – любая константа (постоянное число формально можно рассматривать как случайную величину, принимающую единственное значение λ – с вероятностью единицы);

3) $D(\lambda X)=\lambda^2 D(X)$ для любой случайной величины X и произвольного числа λ.

4) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$ для независимых случайных величин X и Y (см. п. 2.).

Доказательство этих свойств опускаем.

Свойства среднеквадратического отклонения

1) $\sigma(\lambda)=0,$ т.е. среднеквадратическое отклонение постоянной равно нулю.

2) $\sigma(\lambda X)=|\lambda|\sigma(X)$ $\sigma(\lambda X)=|\lambda|\sigma X$ для любой случайной величины X и произвольного числа λ.

3) $\sigma(X+Y)=\sqrt{\left[\sigma(X)\right]^2+\left[\sigma(Y)\right]^2}$ для независимых случайных величин X и Y (см. п. 2).

Эти свойства непосредственно вытекают из свойств дисперсии и определения среднеквадратического отклонения.

2. Независимость случайных величин. Математические операции над случайными величинами

Определение 5. Две случайные величины называются *независимыми*, если закон распределения одной из них не меняется от того, какие возможные значения приняла другая величина.

Так, если дискретная случайная величина X может принимать значения x_i, $i=1,2,....,n$, а случайная величина Y - значения y_j, $j=1,2,....,n$, то независимость дискретных случайных величин X и Y означает независимость событий $\{X=x_i\}$ и $\{Y=y_j\}$ при любых $i=1,2,....,n$ и $j=1,2,....,n$. В противном случае случайные величины называются *зависимыми.*

Например, если имеются билеты двух различных денежных лотерей, то случайные величины X и Y, выражающие, соответственно, выигрыш по каждому билету (в денежных единицах), будут независимыми, так как при любом выигрыше по билету одной лотереи (например, при $X=x_i$) закон распределения выигрыша по другому билету (Y) не изменится. Если же случайные величины X и Y выражают выигрыш по билетам одной денежной лотереи, то в этом случае X и Y являются зависимыми, ибо любой выигрыш по одному билету $\{X=x_i\}$ приводит к изменению вероятностей выигрыша по другому билету (Y), т.е. к изменению закона распределения Y.

Определим ***математические операции*** над дискретными случайными величинами.

Пусть даны две случайные величины - X и Y:

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

y_j	y_1	y_2	$\cdots$	y_n
p_j	p_1	p_2	$\cdots$	p_m

Произведением kX случайной величины X на постоянную величину k называется случайная величина, которая принимает значения kx_i с теми же вероятностями p_i.

$m-й$ степенью случайной величины X, т.е. X^m, называется случайная величина, которая принимает значения x_i^m с теми же вероятностями p_i.

Пример 8. Дана случайная величина X:

x_i	-2	1	2
p_i	0,5	0,3	0,2

Найти закон распределения случайных величин: а) $Y = 3X$; б) $Z = X^2$.

Решение

а) Значения случайной величины Y будут: $3(-2) = -6$; $3 \cdot 1 = 3$; $3 \cdot 2 = 6$ с теми же вероятностями 0,5; 0,3; 0,2, т.е.

y_i	-6	3	6
p_i	0,5	0,3	0,2

б) Значения случайной величины Z будут: $(-2)^2 = 4$, $1^2 = 1$, $2^2 = 4$ с теми же вероятностями 0,5; 0,3; 0,2. Так как значение $Z = 4$ может быть получено возведением в квадрат значений (-2) с вероятностью 0,5 и (+2) с вероятностью 0,2, то по теореме сложения $p\{Z = 4\} = 0,5 + 0,2 = 0,7$. Итак, закон распределения случайной величины Z:

z_i	1	4
p_i	0,3	0,7

Суммой (разностью или произведением) случайных величин X *и* Y называется случайная величина, которая принимает все возможные значения вида $x_i + y_j$ $\left(x_i - y_j\right.$ или $\left.x_i \cdot y_j\right)$, где $i = 1, 2, ..., n$; $j = 1, 2, ..., m$, с вероятностями p_{ij} того, что случайная величина X примет значение x_i, а Y - значение y_j:

$$p_{ij} = p\left[\left\{X = x_i\right\}\left\{Y = y_j\right\}\right].$$

Если случайные величины X и Y независимы, т.е. независимы любые события $\left\{X = x_i\right\}$, $\left\{Y = y_j\right\}$, то по теореме умножения вероятностей для независимых событий

$$p_{ij} = p\left\{X = x_i\right\} \cdot p\left\{Y = y_j\right\} = p_i \cdot p_j .$$

Замечание. Приведенные выше определения операций над дискретными случайными величинами нуждаются в уточнении, так как в ряде случаев одни и те же значения x_i^m, $x_i \pm y_j$, $x_i y_j$ могут получаться разными способами при различных значениях x_i, y_j, вообще говоря, с различными вероятностями p_i, p_j (см. примеры 8б и 9).

Пример 9. Даны законы (ряды) распределения двух независимых случайных величин X и Y:

x_i	0	2	4
p_i	0,5	0,2	0,3

y_i	-2	0	2
p_i	0,1	0,6	0,2

Найти закон распределения случайных величин: а) $Z = X - Y$; б) $U = XY$.

Решение

а) Для удобства нахождения всех значений разности $Z = X - Y$ и их вероятностей составим вспомогательную таблицу, в каждой клетке которой поместим в левом углу значения разности $Z = X - Y$, а в правом углу - вероятности этих значений, полученные в результате перемножения вероятностей соответствующих значений случайных величин X и Y.

	y_j	-2	0	2
x_i	p_j p_i	0,1	0,6	0,3
0	0,5	2 $0,05$	0 $0,30$	-2 $0,15$
2	0,2	4 $0,02$	2 $0,12$	0 $0,06$
4	0,3	6 $0,03$	4 $0,18$	2 $0,09$

Например, если $X = 4$ (последняя строка таблицы), а $Y = -2$ (третий столбец таблицы), то случайная величина $Z = X - Y$ принимает значение

$$Z = 4 - (-2) = 6$$

с вероятностью

$$p\{Z = 6\} = p\{X = 4\} p\{Y = -2\} = 0,3 \cdot 0,1 = 0,03.$$

Эти числа $Z = 6$ и $p = 0,03$ находятся в клетке на пересечении последней строки и третьего столбца.

Так как среди 9 значений Z имеются повторяющиеся, то соответствующие вероятности их складываем по теореме сложения вероятностей. Например, значение $Z = X - Y = 2$ может быть получено, когда $X = 0$, $Y = -2$ (с вероятностью 0,05); $X = 2$, $Y = 0$ А=2, Г=0 (с вероятностью 0,12); $X = 4$, $Y = 2$ (с вероятностью 0,09), поэтому

$p\{Z=2\}=0,05+0,12+0,09=0,26$ и т.д.

В результате получим ряд распределения для Z:

z_k	-2	0	2	4	6
p_k	0,15	0,36	0,26	0,20	0,03

Убеждаемся в том, что условие $\sum_{i=1}^{5} p_i = 1$ выполнено.

б) Ряд распределения для $U = XY$ находится аналогично п. а).

u_k	-8	-4	0	4	8
p_k	0,03	0,02	0,80	0,06	0,09

Замечание. Выше ввели понятие независимости случайных величин X и Y, основанное на независимости связанных с ними событий $\{X = x_i\}$ и $\{Y = y_j\}$ при любых i и j. Ниже можно дать общее определение независимых непрерывных случайных величин, основанное на независимости событий $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$. Напомним, что необходимость введения события такого рода мы обсудили в §4.

Определение 6. Непрерывные величины X и Y независимы, если независимы события $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$, где x и y две любые действительные числа.

Иначе говоря, величины X и Y независимы, если при любых x и y справедливо равенство

$$p\{X < x,\ Y < y\} = p\{X < x\} \cdot p\{Y < y\}, \tag{1}$$

или в эквивалентной записи

$$F(x,y) = F_1(x)F_2(y), \tag{2}$$

где $F(x,y)$, $F_1(x)$ и $F_2(y)$, обозначают, соответственно, функции распределения для системы (X, Y), величины X и величины Y.

Из соотношения (2), очевидно, следует

$$F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) = \left[F(x_2) - F(x_1)\right] \cdot \left[F(y_2) - F(y_1)\right],$$

т.е.

$$p\{x_1 \le X < x_2,\ y_1 \le Y < y_2\} = p\{x_1 \le X < x_2\}\, p\{y_1 \le Y < y_2\}. \qquad (3)$$

Это значит, что независимыми являются не только события $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$, но и любые два события вида $\{x_1 \le X < x_2\}$, $\{y_1 \le Y < y_2\}$.

Формула (3) вскрывает смысл определения независимости величин X и Y: вероятность того, что величина Y примет значение из того или иного промежутка, не зависит от того, в каком промежутке окажется величина X. На более простом языке это означает:

Величины X и Y ***принимают свои значения независимо друг от друга.***

В случае, когда система (X, Y) - дискретного типа, условие независимости величин X и Y можно представить в более обозримом виде:

$$p\{X = \alpha, Y = \beta\} = p\{X = \alpha\}\, p\{Y = \beta\}, \qquad (4)$$

где α - любое возможное значение случайной величины X, а β - любое возможное значение величины Y.

Доказательство эквивалентности (4) и (3) (для системы дискретного типа) предоставляем провести в качестве упражнения.

Иллюстрацией независимости случайных величин может служить следующий пример.

Пример 10. Пусть в опыте с двукратным бросанием игральной кости величина X есть число очков, выпадающих при первом бросании, а Y - число очков при втором бросании. В этом случае равенство (4) выполняется для любых двух чисел α, β из множества {1, 2, 3, 4, 5, 6}, и, следовательно, величины X и Y независимы.

Вернемся снова к общей теории.

Допустим, что система (X, Y) имеет некоторую функцию плотности $f(x, y)$. Постараемся для этого случая привести условие независимости X и Y к более простому виду.

Функцию плотности для X обозначим $f_1(x)$, а функцию плотности для Y - $f_2(x)$. Тогда условие независимости X и Y - условие (3) - перепишется в виде:

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)dxdy = \int_{x_1}^{x_2} f_1(x)dx \int_{y_1}^{y_2} f_2(y)dy$$

или

$$\iint_G f(x, y)dxdy = \iint_G f_1(x) f_2(y)dxdy, \tag{5}$$

где G обозначает прямоугольник, определенный неравенствами

$$x_1 \le X < x_2,\ y_1 \le Y < y_2.$$

Таким образом, для любого прямоугольника G со сторонами, параллельными координатным осям, выполняется соотношение (5). Но в таком случае подынтегральные выражения должны совпадать:

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y). \tag{6}$$

Соотношение (6) можно рассматривать как условие независимости величин X и Y, для случая, когда (X, Y) имеет некоторую функцию плотности.

Комментарий к свойствам $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$

1. Свойство 3 математического ожидания является на первый взгляд удивительным. Это свойство справедливо для произвольной пары случайных величин X, Y (безразлично, зависимых или независимых). Как известно, в случае зависимых величин совместное распределение пары не определяется распределением слагаемых. Формула $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$ определяет $M(X+Y)$ без использования закона распределения $X+Y$ (он в принципе неизвестен). Оказывается, что для вычисления $X+Y$ достаточно иметь

(неполную) информацию о распределении $X+Y$, которую дают распределения X и Y.

2. Свойство 4 математического ожидания справедливо лишь для независимых случайных величин. Естественно измерять «степень зависимости» между X и Y разностью $M(XY)=M(X)M(Y)$ (которая равна нулю в том случае, когда величины независимы). На этой идее основаны понятия *ковариации* и *коэффициента корреляции* (см. ниже (см. п. 3)).

3. Свойства $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ позволяют легко вычислить среднее значение, дисперсию и среднеквадратическое отклонение *биномиальной случайной величины* (см. §4).

Пусть X - количество наступлений события A в серии из n независимых испытаний схемы Бернулли. Очевидно, что

$$X = X_1 + X_2 + \cdots X_n,$$

где $X_i -$ количество наступлений события A в $i-$м испытании $(i=1,2,...,n)$. Так в каждом испытании событие A наступает с вероятностью p и не наступает с вероятностью q, то ряд распределения случайной величины X_i имеет вид

0	1
q	p

(одно наступление события A - с вероятностью p и ноль наступления события $\overline{A}$ - с вероятностью q). Очевидно, что

$$M(X_i)=0\cdot q+1\cdot p=p, \quad D(X_i)=\left(0^2\cdot q+1^2\cdot p\right)-p^2=p-p^2=p(1-p)=pq.$$

Далее, используя свойство 3) математического ожидания, имеем

$$M(X)=M(X_1+\cdots+X_n)=M(X_1)+\cdots+M(X_n)=\underbrace{p+p+\cdots+p}_{n\ \text{слагаемых}}=np. \qquad (7)$$

Наконец, используя свойство 4) дисперсии, находим

$$D(X)=D(X_1+\cdots+X_n)=D(X_1)+\cdots+D(X_n)=\underbrace{pq+pq+\cdots+pq}_{n\ \text{слагаемых}}=npq, \qquad (8)$$

откуда

$$\sigma(X)=\sqrt{npq}. \qquad (9)$$

4. Из свойства математического ожидания и дисперсии в качестве следствия вытекает важный теоретико-вероятностный факт, лежащий в основе законов больших чисел (см. §6, теорема Чебышева).

Пусть $X_1, X_2, ..., X_n$ - независимые случайные величины с одинаковыми математическими ожиданиями $M(X_i)=a$ и среднеквадратическим отклонением $\sigma(X_i)=\sigma$ т.е. $D(X_i)=\sigma^2$. Тогда для случайной величины

$$X=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)$$

справедливы равенства

$$M(X)=a, \qquad D(X)=D\left(\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{n\sigma^2}{n^2}=\frac{\sigma^2}{n},$$

$$\sigma(X)=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Таким образом, дисперсия случайной величины X уменьшается с ростом n, рассеяние значений X относительно $M(X)$ уменьшается, сама величина X теряет случайный характер.

3. Ковариация и коэффициент корреляции

Как уже было отмечено (см. п. 2), с помощью числа

$$k(X,Y)=M(XY)-M(X)M(Y) \qquad (10)$$

можно измерять степень зависимости случайных величин X и Y. Свойство 4) математического ожидания означает, что $k(X,Y)=0$ для независимых случайных величин. Естественно считать, что чем больше $k(X,Y)$ по абсолютной величине, тем больше степень зависимости. Так как $k(X,Y)$ имеет размерность XY, то при изменении единицы масштаба его значение будет подвержено изменению. Чтобы избежать этого, введем коэффициент

$$r(X,Y)=\frac{k(X,Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}=\frac{M(XY)-M(X)M(Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}, \tag{11}$$

где $\sigma(X), \sigma(Y)$ - среднеквадратические отклонения случайных величин X, Y.

Коэффициент $r(X,Y)$ является безразмерным: он не зависит от единиц измерения величин X и Y.

Определение 7. Пусть X, Y - случайные величины, XY - их произведение, $M(X)$, $M(Y)$, $M(XY)$ - математические ожидания этих величин, $\sigma(X)$, $\sigma(Y)$ - среднеквадратические отклонения величин X и Y. Коэффициент $k(X,Y)$, определенный формулой (9), называется *коэффициентом ковариации,* а коэффициент $r(X,Y)$, определенный формулой (10), - *коэффициентом корреляции.*

Для теории вероятностей и ее приложений большее значение имеет коэффициент корреляции (основная причина этого - его безразмерность).

Свойства коэффициента корреляции

1) $r(X,Y)=0$ для независимых случайных величин X и Y.

2) $-1\le r(X,Y)\le 1$ для любых двух случайных величин X и Y.

3) Если $|r(X,Y)|=1$, то случайные величины X и Y связаны соотношением

$$Y=aX+b, \tag{12}$$

где a и b - некоторые постоянные.

Обратно, если X и Y связаны условием (11), то $|r(X,Y)|=1$ $\left(r(X,Y)=-1 \text{ при } a<0 \text{ и } r(X,Y)=1 \text{ при } a>0\right)$.

Доказательство свойств коэффициента опускаем.

Комментарий к свойствам коэффициента корреляции

Свойства 1) – 3) означают, что коэффициент корреляции измеряет степень зависимости случайных величин X, Y в следующем смысле.

Для независимых величин X и Y коэффициент корреляции $r(X,Y)$ равен нулю. Крайние возможные значения $r(X,Y)$, равные 1 и - 1, соответствуют функциональной зависимости между X и Y, имеющей вид $Y = aX + b.$ Функциональная зависимость между X и Y - самый тесный вид зависимости.

В общем случае независимость величин X и Y означает, что условное распределение величины Y при заданном значении $X = X_0$ совпадает с безусловным распределением Y; если же Y является функцией от X, то при $X = X_0$ она принимает вполне определенное значение, так что при условии $X = X_0$ величина Y даже не является случайной.

Зависимостям, близким к зависимости вида $Y = aX + b$ соответствуют значения $r(X,Y),$ близкие к 1 или - 1 (при $a > 0$ или $a < 0,$ соответственно). Если величины X и Y слабо зависимы, то значения $r(X,Y)$ близки к нулю.

Следует иметь в виду, что существуют зависимые величины X и Y, коэффициент корреляции которых равен нулю; их называют *некоррелированными*.

Если величины X и Y связаны нелинейной функциональной зависимостью, то $r(X,Y)$ может отличаться от 1 и -1.

Итак, коэффициент корреляции измеряет степень линейной зависимости между случайными величинами X и Y.

Для дискретных случайных величин коэффициенты $k(X,Y)$ и $r(X,Y)$ можно вычислить

$$k(X,Y) = \sum x_i y_j p_{ij} - \left(\sum x_i p_i\right)\left(\sum y_j p_j\right). \tag{13}$$

$$r(X,Y) = \frac{\sum x_i y_j p_{ij} - \left(\sum x_i p_i\right)\left(\sum y_i q_j\right)}{\sqrt{\sum x_i^2 p_i - \left(\sum x_i p_i\right)^2}\sqrt{\sum y_j^2 p_i - \left(\sum y_j q_j\right)^2}}. \tag{14}$$

Здесь x_i и y_j - значения случайных величин X и Y, p_i и q_j- соответствующие им вероятности, p_{ij}- вероятность совместного появления событий $\{X = x_i\}$ и $\{Y = y_j\}$.

Суммы, входящие в правые части равенств (13) и (14), можно выразить через математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение:

$$\sum x_i y_j p_{ij} = M(X,Y), \qquad \sum x_i p_i = M(X), \qquad \sum y_j q_j = M(Y),$$

$$\sqrt{\sum x_i^2 p_i - \left(\sum x_i p_i\right)^2} = \sqrt{D(X)} = \sigma(X),$$

$$\sqrt{\sum y_j^2 p_i - \left(\sum y_j q_j\right)^2} = \sqrt{D(Y)} = \sigma(Y).$$

Эти формулы вытекают из определения математического ожидания и дисперсии, и величины XY.

Полезно также использовать равенства

$$k(X,Y) = \sum \big(x_i - M(X)\big)\big(y_j - M(Y)\big) p_{ij}, \tag{15}$$

$$r(X,Y) = \frac{\sum \big(x_i - M(X)\big)\big(y_j - M(Y)\big) p_{ij}}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}. \tag{16}$$

Согласно формуле (15), коэффициент ковариации равен математическому ожиданию произведения случайных величин $X - M(X)$ и $Y - M(Y)$.

Вывод формул (15), (16) осуществить самостоятельно.

Справедливы формулы, дающие выражение коэффициентов ковариации и корреляции через функции распределения непрерывных случайных величин X, Y и через функцию их совместного распределения. Эти формулы аналогичны (15), (16).

Пример 11. Определить ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин X и Y, имеющие следующие ряды распределения:

x_i	1	2
p_i	0,8	0,2

y_i	-1	0	1	2
p_i	0,2	0,3	0,3	0,2

Решение

Найдем математические ожидания и средние квадратические отклонения этих случайных величин:

$M(X)=1\cdot 0,8+2\cdot 0,2=1,2;\quad M(X^2)=1^2\cdot 0,8+2^2\cdot 0,2=1,6;$

$D(X)=1,6-(1,2)^2=0,16;\quad \sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0,16}=0,4;$

$M(Y)=(-1)\cdot 0,2+0\cdot 0,3+1\cdot 0,3+2\cdot 0,2=0,5;$

$M(Y^2)=(-1)^2\cdot 0,2+0^2\cdot 0,3+1^2\cdot 0,3+2^2\cdot 0,2=1,3;$

$D(Y)=1,3-(0,5)^2=1,05;\quad \sigma(Y)=\sqrt{D(Y)}=\sqrt{1,05}=1,025.$

Для нахождения математического ожидания $M(XY)$ произведения случайных величин X и Y нужно составить закон распределения произведения двух дискретных случайных величин (как это сделано выше при решении примера 9), а затем по нему найти $M(XY)$.

Закон распределения XY имеет вид:

$(x,y)_k$	-2	-1	0	1	2	4
p_k	0,1	0,1	0,3	0,3	0,15	0,05

Тогда имеем:

$M(XY)=(-2)\cdot 0,1+(-1)\cdot 0,1+0\cdot 0,3+1\cdot 0,3+2\cdot 0,15+4\cdot 0,05=0,5.$

Вычислим ковариацию по формуле (10):

$$k(X,Y)=M(XY)-M(X)M(Y)=0,5-1,2\cdot 0,5=-0,1.$$

Вычислим коэффициент корреляции по формуле (11):

$$r(X,Y) = \frac{k(X,Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)} = \frac{-0,1}{0,4\cdot 1,025} = -0,244,$$

т.е. между случайными величинами X и Y существует отрицательная линейная зависимость; следовательно, при увеличении (уменьшении) одной из случайных величин другая имеет некоторую тенденцию уменьшаться (увеличиваться).

4. Моменты случайных величин

Пусть X - случайная величина (для определенности - дискретная); x_i - ее значения; p_i - соответствующие им вероятности $(i = 1, 2, ..., n)$; $M(X)$ - математическое ожидание X; a - произвольное число.

Рассмотрим следующие суммы:

$$m_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i, \quad m'_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^k p_i, \quad m''_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^k p_i. \tag{17}$$

m_k называют *начальным моментом* k-го порядка, m'_k - *относительным моментом* k-го порядка (относительно числа a), m''_k - *центральным моментом*. Заметим, что важнейшие характеристики случайной величины X математическое ожидание и дисперсия - представляют собой моменты этой величины, а именно, $M(X) = m_1$, $D(X) = m''_2$.

Существуют и другие характеристики случайной величины, описывающие ее различные свойства; эти характеристики, так же как $M(X)$ и $D(X)$, сравнительно просто выражаются через начальные и центральные моменты.

Выше отмечено, что математическое ожидание $M(X)$, или первый начальный момент, характеризует среднее значение или положение распределения случайной величины X на числовой оси; дисперсия $D(X)$ или второй центральный момент - степень рассеяния распределения X относительно

$M(X)$. Моменты высших порядков служат для более подробного описания распределения.

Третий центральный момент служит для характеристики асимметрии (скошенности) распределения. Он имеет размерность куба случайной величины. Чтобы получить безразмерную величину, ее делят на σ^3, где σ - среднее квадратическое отклонение случайной величины X. Полученная величина A называется *коэффициентом асимметрии* случайной величины:

$$A = \frac{m_3''}{\sigma^3}.$$

Если распределение симметрично относительно математического ожидания, то коэффициент асимметрии $A = 0$.

На рис. 1 показаны две кривые распределения: I и II. Кривая I имеет положительную (правостороннюю) асимметрию $(A > 0)$, а кривая II - отрицательную (левостороннюю) $(A < 0)$.

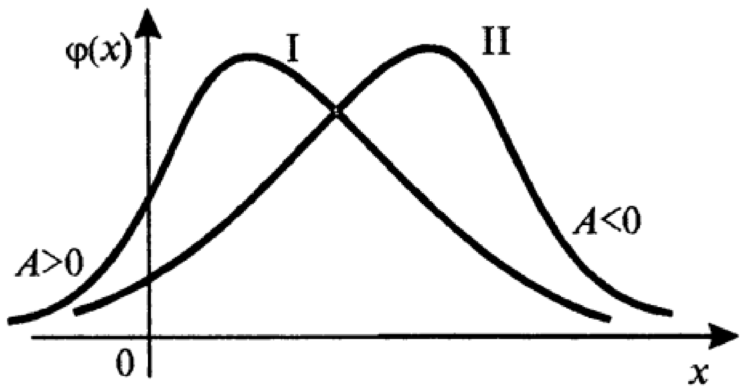


Рис. 1

Четвертый центральный момент служит для характеристики крутости (островершинности или плосковершинности) распределения.

Эксцессом (или коэффициентом эксцесса) случайной величины называется число

$$E = \frac{m_4''}{\sigma^4} - 3.$$

Число 3 вычитается из отношения $\frac{m''_4}{\sigma^4}$ потому, что для наиболее часто встречающегося нормального распределения (о нем идет речь в §6) отношение $\frac{m''_4}{\sigma^4}=3$. Кривые, более островершинные, чем нормальная, обладают положительным эксцессом, более плосковершинные - отрицательным эксцессом (рис.2).

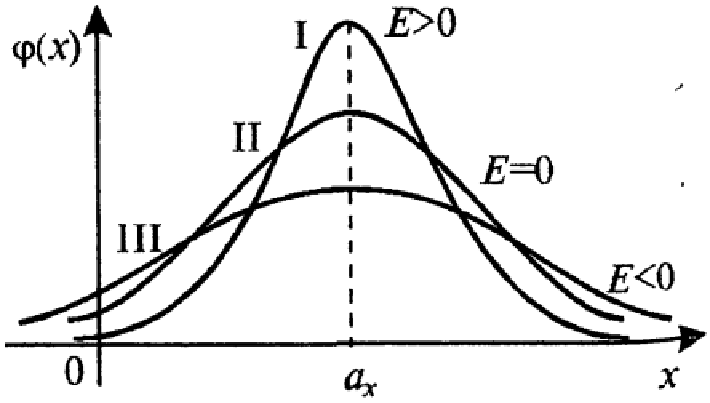


Рис. 2

Вычисление центральных моментов несколько облегчается, если сначала найти относительные (относительно некоторого подходящего числа) моменты, а затем преобразовать их в центральные по формулам:

$$m''_2 = m'_2 - \left(m'_1\right)^2,$$

$$m''_3 = m'_3 - 3m'_2m'_1 + 2\left(m'_1\right)^2, \qquad (18)$$

$$m''_4 = m'_4 - 4m'_3m'_1 + 6m'_2\left(m'_1\right)^2 - 3\left(m'_1\right)^3.$$

Вывод формул (18) предоставляем читателю самостоятельно.

Пример 12. Найти коэффициент асимметрии и эксцесс случайной величины, распределенной по так называемому закону Лапласа с функцией плотности $\varphi(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$.

Решение

Так как распределение случайной величины X симметрично относительно оси ординат, то все нечетные как начальные, так и центральные моменты равны 0, т.е. $m_1 = 0, m_3 = 0,\ m_3'' = 0$ и силу $A = \dfrac{m_3''}{\sigma^3}$ коэффициент асимметрии $A = 0.$

Для нахождения эксцесса необходимо вычислить четные начальные моменты m_2 и m_4:

$$m_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \left(\frac{1}{2}e^{-|x|}\right)dx = 2\cdot\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-x}\,dx = 2.$$

Следовательно,

$$D(X) = m_2'' = m_2 - m_1^2 = 2 - 0^2 = 2 \text{ и } \sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{2}.$$

$$m_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \left(\frac{1}{2}e^{-|x|}\right)dx = 2\cdot\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} x^4 e^{-x}\,dx = 24 \text{ и } m_4'' = 24.$$

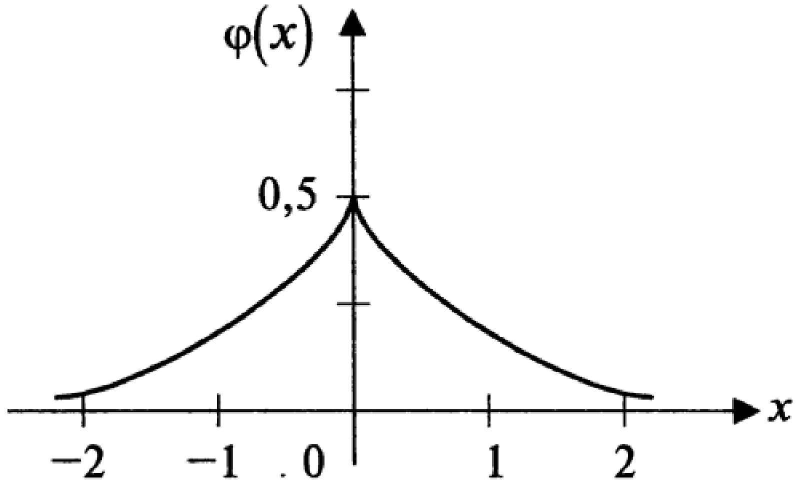


Рис. 3

Теперь вычислим эксцесс

$$E = \frac{m_4''}{\sigma^4} - 3 = \frac{24}{\left(\sqrt{2}\right)^4} - 3 = 3.$$

Эксцесс распределения положителен, что говорит об островершинности кривой распределения $\varphi(x)$ (рис. 3).

Для пары дискретных случайных величин X, Y рассмотрим следующие суммы:

$$m_{kl} = \sum x_i^k y_j^l p_{ij}, \; m'_{kl} = \sum (x_i - a)^k (y_j - b)^l p_{ij},$$
$$m''_{kl} = \sum (x_i - M(X))^k (y_j - M(Y))^l p_{ij}, \; (k,l = 0,1,2,....). \quad (19)$$

Они имеют следующие названия: m_{kl}- *начальный момент* порядка k,l; m'_{kl}- *относительный момент* порядка k,l (относительно чисел a и b); m''_{kl}- *центральный момент* порядка k,l.

При $k=0$ или $l=0$ моменты пары превращаются в моменты случайных величин.

Коэффициент ковариации, как видно из сравнения формул (19) и (15), совпадает с m''_{11}, математическое ожидание произведения XY равно m_{11}.

Моменты пары (X,Y) можно истолковать как математические ожидания некоторых функций от случайных величин X,Y, а именно:

$$m_{kl} = M(X^k Y^l), \; m'_{kl} = M((X-a)^k (Y-b)^l)$$
$$m''_{kl} = \sum (X - M(X))^k (Y - M(Y))^l p_{ij}, \; (k,l = 0,1,2,....).$$

Эти формулы определяют моменты не только для дискретных, но и для непрерывных величин.

Можно написать формулы, дающие явное выражение моментов через функции совместного распределения пары случайных величин. Написания этих формул предоставляем читателю.

Многие важные характеристики пары случайных величин X и Y достаточно просто выражаются через моменты этой пары величины.

Вопросы для самопроверки

1. Разъясните необходимость введения числовых характеристик для случайных величин.
2. Дайте определение понятия математического ожидания.
3. Какой вероятностный смысл имеет математическое ожидание?
4. Дайте определение дисперсии.
5. Какой вероятностный смысл имеет дисперсия?
6. Что называется среднеквадратичным отклонением?

7. Приведите свойства математического ожидания и прокомментируйте их.

8. Приведите свойства математической дисперсии и прокомментируйте их.

9. Приведите свойства среднеквадратического отклонения и прокомментируйте их.

10. Что представляет собой коэффициент корреляции?

11. Приведите свойства коэффициента корреляции и прокомментируйте их.

12. Что называют: начальным моментом k-го порядка, относительным моментом k-го порядка, центральным моментом?

13. Что называют: начальным моментом порядка k,l; относительным моментом порядка k,l; центральным моментом порядка k,l?

§48. Наиболее известные дискретные и непрерывные законы распределения

Ключевые слова: *биномиальное распределение, пуассоновское распределение, геометрическое распределение, гипергеометрическое распределение, равномерный закон распределения, показательный закон распределения, нормальный закон распределения, логарифмически-нормальный закон распределения, логарифмически-нормальное распределение,* χ^2 *–распределение, распределение Стюдента, распределение Фишера-Снедекора.*

В этом параграфе описаны основные законы распределения дискретных и непрерывных случайных величин, используемых для построения теоретико-вероятностных моделей реальных социально-экономических явлений.

1. Наиболее известные дискретные законы распределения

Напомним, что в §46 мы ознакомились с двумя важными примерами дискретных случайных величин: *биномиальное распределение, пуассоновское распределение.*

Ниже приведем определения и некоторые числовые характеристики этих и других известных дискретных законов распределения.

Биномиальный закон распределения

Определение 1. Распределение случайной величины X, равной количеству наступлений события A в схеме Бернулли из n испытаний, называется *биномиальным распределением.*

В этом распределении значению $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$ случайной величины X соответствует вероятность $P_n(k) = C_n^k\, p^k q^{n-k}$, где p – вероятность наступления события A в одном испытании, $q = 1 - p$.

Ряд распределения биномиального закона имеет вид:

x_i	0	1	2	$\dots$	k	$\dots$	n
p_i	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	$\dots$	$C_n^k p^k q^{n-k}$	$\dots$	p^n

Очевидно, что определение биномиального закона корректно, так как основное свойство ряда распределения $\sum_{i=0}^{n} p_i = 1$ выполнено, ибо $\sum_{i=0}^{n} p_i$ есть не что иное, как сумма всех членов разложения бинома Ньютона:

$$q^n + C_n^1 p q^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + \cdots + C_n^k p^k q^{n-k} + p^n = (p+q)^n = 1$$

(отсюда и название закона - биномиальный).

Теорема. Математическое ожидание случайной величины X, распределенной по биномиальному закону,

$$M(X) = np,$$

а ее дисперсия

$$D(X) = npq.$$

Доказательство см. в §46.

Биномиальное распределение широко используется в теории и практике статистического контроля продукции, при описании функционирования систем массового обслуживания, в теории стрельбы и в других областях.

Пример 1. По многолетним статистическим данным известно, что вероятность рождения мальчика равна 0,515. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X - числа мальчиков в семье из 4 детей.

Решение

Закон распределения случайной величины X - числа мальчиков в семье из 4 детей - биномиальный с параметрами $n = 4,\ p = 0{,}515$. Тогда

$$M(X) = np = 4 \cdot 0{,}515 = 2{,}06 \text{ и } D(X) = 4 \cdot 0{,}515 \cdot 0{,}485 = 0{,}999.$$

Мы получили бы такие же результаты, если математическое ожидание и дисперсию вычислили по ряду (закону) распределения этой случайной величины, которую мы составили при решении примера 2 из §47.

Упражнение

В магазин поступила обувь с двух фабрик в соотношении 2:3. Куплено 4 пары обуви. Найти закон распределения числа купленных пар обуви, изготовленной первой фабрикой. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

Закон распределения Пуассона

Определение 2. Распределение случайной величины X, принимающей значения $k \in \{0, 1, 2, ...\}$ с вероятностями $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, где $\lambda > 0$ - некоторый параметр, называется *пуассоновским распределением* или *распределением Пуассона*.

Ряд распределения закона Пуассона имеет вид:

x_i	0	1	2	$\ldots$	k	$\ldots$
p_i	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	$\cdots$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	$\cdots$

Очевидно, что определение закона Пуассона корректно, так как основное свойство ряда распределения $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$ выполнено, ибо сумма ряда

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i = e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} + \cdots + \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} + \cdots =$$
$$= e^{-\lambda}\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \cdots + \frac{\lambda^k}{k!} + \cdots\right) = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$$

Здесь учтено, что в скобках записано разложение в ряд функции e^x при $x = \lambda$.

Теорема. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона, совпадают и равны параметру λ этого закона, т.е.

$$M(X)=\lambda, \quad D(X)=\lambda.$$

Найдем математическое ожидание случайной величины X

$$M(X)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_i=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda}=$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\left(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2!}+\cdots+\frac{\lambda^k}{k!}+\cdots\right)=\lambda e^{-\lambda}\cdot e^{-\lambda}=\lambda.$$

Для того чтобы найти дисперсии случайной величины X сначала вычислим

$$M\left(X^2\right)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2 p_i=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda}=$$

$$=e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left((\lambda-1)+1\right)^k}{(k-1)!}=\lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=$$

$$=\lambda^2 e^{-\lambda}\left(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2!}+\cdots\right)+\lambda e^{-\lambda}\left(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2!}+\cdots\right)=\lambda^2 e^{-\lambda}e^{\lambda}+\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda^2+\lambda.$$

Теперь

$$D(X)=\left(\lambda^2+\lambda\right)-\lambda^2=\lambda.$$

При достаточно больших n (вообще при $n\to\infty$) и малых значениях p $(p\to 0)$ при условии, что произведение np - постоянная величина ($np\to\lambda=const$), закон распределения Пуассона является хорошим приближением биномиального закона, так как в этом случае функция вероятностей Пуассона хорошо аппроксимирует функцию вероятностей, определяемую по формуле Бернулли. Иначе, при $p\to 0$, $n\to\infty$, $np\to\lambda=const$ закон распределения Пуассона является ***предельным случаем*** биномиального закона. Так как при этом вероятность p события A в каждом испытании мала, то закон распределения Пуассона называют часто *законом редких явлений.*

Наряду с «предельным» случаем биномиального распределения закон Пуассона может возникнуть и в ряде других ситуаций.

Можно показать, что для простейшего потока событий число событий, попадающих на произвольный отрезок времени, есть случайная величина, имеющая пуассоновское распределение.

По пуассоновскому распределены, например, число рождения четверняшек, число сбоев на автоматической линии, число отказов сложной системы в «нормальном режиме», число «требований на обслуживание», поступивших в единицу времени в системах массового обслуживания и др.

Отметим еще, что если случайная величина представляет собой сумму двух независимых случайных величин, распределенных каждая по закону Пуассона, то она также распределена по этому закону.

Упражнение

Доказать, что сумма двух независимых случайных величин, распределенных по закону Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2, также распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

Геометрическое распределение

Определение 3. Распределение случайной величины X, принимающей значения $k \in \{1, 2, ...\}$ с вероятностями pq^{k-1}, где $0 < p < 1$, называется *геометрическим распределением.*

Ряд геометрического распределения имеет вид:

x_i	1	2	3	$\dots$	k	$\dots$
p_i	p	pq	pq^2	$\cdots$	pq^{k-1}	$\cdots$

Нетрудно видеть, что вероятности p_i образуют геометрическую прогрессию с первым членом p и знаменателем q (отсюда название «геометрическое распределение»).

Определение геометрического распределения корректно, так как сумма ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = p + pq + \cdots + pq^{k-1} + \cdots = p\left(1 + q + \cdots + q^{k-1} + \cdots\right) = p \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$$

Случайная величина $X = k$, имеющая геометрическое распределение, представляет собой число k испытаний, проведенных по схеме Бернулли, с вероятностью p наступления события в каждом испытании до первого положительного исхода.

Теорема. Математическое ожидание случайной величины X, имеющей геометрическое распределение с параметром p,

$$M(X) = \frac{1}{p},$$

а ее дисперсия

$$D(X) = \frac{q}{p^2}.$$

Доказательство теоремы, связанное с суммированием членов бесконечного ряда предоставляем провести читателю самостоятельно.

Пример 2. Радист вызывает корреспондента, причем каждый последующий вызов производится лишь в том случае, если предыдущий вызов не принят. Вероятность того, что корреспондент примет вызов, равна 0,4. Составить ряд распределения числа вызовов. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Решение

Так, например, число вызовов радистом корреспондента до тех пор, пока вызов не будет принят, есть случайная величина, имеющая геометрическое распределение с параметром $p = 0{,}4$. Поэтому ряд распределения имеет вид:

x_i	1	2	3	4	…	k	…
p_i	0,4	0,24	0,144	0,0864	…	$0,4\cdot(0,6)^{k-1}$	…

Теперь непосредственно можно вычислять математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины. Математическое ожидание и дисперсию можно найти, пользуясь утверждением теоремы:

$$M(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{0,4}=2,5 \text{ и } D(X)=\frac{0,6}{(0,4)^2}=3,75.$$

Упражнение

Проводится проверка большой партии деталей до обнаружения бракованной (без ограничения числа проверенных деталей). Составить закон распределения числа проверенных деталей. Найти его математическое ожидание и дисперсию, если известно, что вероятность брака для каждой детали равна 0,1.

Гипергеометрическое распределение

Определение 4. Распределение случайной величины X, принимающей значения $k\in\{0, 1, 2,..., \min\{n,K\}\}$ с вероятностями $\dfrac{C_K^N C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}$, где $k\le N$, $n\le N$; $n, K, N-$натуральные числа, называется *гипергеометрическим распределением.*

Гипергеометрическое распределение имеет случайная величина $X=k$- число объектов, обладающих заданным свойством, среди n объектов, случайно извлеченных (без возврата) из совокупности N объектов, K из которых обладают этим свойством.

Теорема. Математическое ожидание случайной величины X, имеющей гипергеометрическое распределение с параметрами n,K,N - есть

$$M(X) = n\frac{K}{N},$$

а ее дисперсия

$$D(X) = n\frac{K}{N-1}\left(1-\frac{K}{N}\right)\left(1-\frac{n}{N}\right).$$

Доказательство опускаем.

Пример 3. Среди 10 изготовленных приборов 3 неточных. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X - число неточных приборов среди взятых наудачу четырех.

Решение

Нетрудно заметить, что случайная величина X - число неточных приборов среди взятых наудачу четырех имеет гипергеометрическое распределение с параметрами $n = 4, K = 3, N = 10$.

Математическое ожидание и дисперсию можно найти, пользуясь утверждением теоремы:

$$M(X) = n\frac{K}{N} = 4\cdot\frac{3}{10} = 1,2 \text{ и}$$

$$D(X) = n\frac{K}{N-1}\left(1-\frac{K}{N}\right)\left(1-\frac{n}{N}\right) = 4\cdot\frac{3}{9}\left(1-\frac{3}{10}\right)\left(1-\frac{4}{10}\right) = 0,56.$$

Упражнение

В лотерее «Спортлото 6 из 45» денежные призы получают участники, угадавшие 3, 4, 5 и 6 видов спорта из отобранных случайно 6 видов из 45 (размер приза увеличивается с увеличением числа угаданных видов спорта). Найти закон распределения случайной величины X - числа угаданных видов спорта среди случайно отобранных шести. Какова вероятность получения денежного приза? Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X .

Случайную величину $X = k,$ распределенную по биномиальному закону, можно интерпретировать как число k объектов, обладающих данным свойством, из общего числа n объектов, случайно извлеченных из некоторой воображаемой бесконечной совокупности, доля p объектов которой обладает этим свойством. Поэтому гипергеометрическое распределение можно рассматривать как модификацию биномиального распределения для случая конечной совокупности, состоящей из N объектов, K из которых обладают этим свойством.

Можно показать, что при $N \to \infty$ функция вероятностей гипергеометрического распределения стремится к соответствующей функции биномиального закона.

Гипергеометрическое распределение широко используется в практике статистического приемочного контроля качества промышленной продукции, в задачах, связанных с организацией выборочных обследований, и других областях.

2. Наиболее известные непрерывные законы распределения

Напомним, что в §46 мы ознакомились с тремя важными примерами непрерывных случайных величин: *равномерный, показательный и нормальный законы распределения.*

Ниже приведем некоторые числовые характеристики этих распределений, а также определения и числовые характеристики других известных непрерывных законов распределения.

Равномерный закон распределения

Определения, функцию распределения, функцию плотности равномерного закона мы рассмотрели в §46.

Рассмотрим теорему, устанавливающую теоретико-вероятностный смысл параметров равномерного закона.

Теорема. Математическое ожидание случайной величины X, имеющей равномерный закон распределения, есть

$$M(X)=\frac{a+b}{2},$$

а ее дисперсия

$$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Доказательство. Выражения для функции плотности равномерного закона (см. §46) имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x<a,\\ \dfrac{1}{b-a} & при \quad a\le x\le b,\\ 0 & при \quad x>b.\end{cases}$$

Вычислим математическое ожидание случайной величины X:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_a^b \frac{xdx}{b-a}=\frac{1}{b-a}\left(\left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b\right)=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}.$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-M(X)\right)^2 f(x)dx=\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\frac{dx}{b-a}=$$

$$=\frac{1}{3(b-a)}\left.\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3\right|_a^b=\frac{1}{3(b-a)}\left[\frac{(b-a)^3}{8}-\frac{(a-b)^3}{8}\right]=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Показательный (экспоненциальный) закон распределения

Определения, функцию распределения, функцию плотности показательного (экспоненциального) закона мы также рассмотрели в §46.

Рассмотрим теорему, устанавливающую теоретико-вероятностный смысл параметров показательного (экспоненциального) закона.

Теорема. Математическое ожидание случайной величины X, имеющей показательный закон распределения, есть

$$M\left(X\right)=\frac{1}{\lambda},$$

а ее дисперсия

$$D\left(X\right)=\frac{1}{\lambda^{2}}.$$

Доказательство. Выражения для функции плотности показательного (экспоненциального) закона (см. §4) имеет вид:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & при \quad x\geq 0,\\ 0 & при \quad x<0,\end{cases}$$

где λ - некоторый параметр.

Найдем математическое ожидание случайной величины X, используя при вычислении метод интегрирования по частям:

$$M\left(X\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xf\left(x\right)dx=\lim_{b\to\infty}\int\limits_{0}^{b}x\lambda e^{-\lambda x}dx=\lim_{b\to\infty}\left(-\int\limits_{0}^{b}xde^{-\lambda x}\right)=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(-xe^{-\lambda x}\Big|_{0}^{b}+\int\limits_{0}^{b}e^{-\lambda x}dx\right)=\lim_{b\to\infty}\left(-be^{-\lambda b}-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_{a}^{b}\right)=0-\frac{1}{\lambda}\lim_{b\to\infty}\left(e^{-\lambda b}-1\right)=\frac{1}{\lambda}.$$

Аналогично вычислим, что $M\left(X^{2}\right)=\frac{2}{\lambda^{2}}$. Тогда имеем

$$D\left(X\right)=\frac{2}{\lambda^{2}}-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{2}=\frac{1}{\lambda^{2}}.$$

Нормальный закон распределения

Определения, функцию распределения, функцию плотности нормального закона уже мы рассмотрели в §46. Там мы отметили, что нормальный закон распределения наиболее часто встречается на практике. Главная особенность, выделяющая его среди других законов, состоит в том, что он является ***предельным законом,*** к которому приближаются другие законы распределения при весьма часто встречающихся типичных условиях (см. ниже в п.2).

Напомним определения нормального закона распределения.

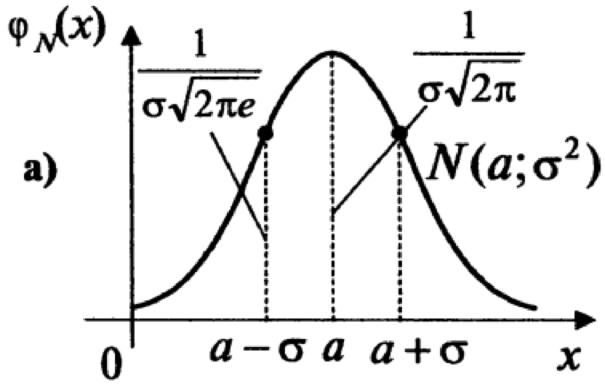
Определение 5. Непрерывная случайная величина X имеет *нормальный закон распределения (закон Гаусса)* с параметрами a и σ^2, если ее функция плотности имеет вид:

$$\varphi_N(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (1)$$

Комментарий к определению 5

Термин «нормальный» не совсем удачный. Многие признаки подчиняются нормальному закону, например, рост человека, дальность полета снаряда и т.п. Но если какой-либо признак подчиняется другому, отличному от нормального, закону распределения, то это вовсе не говорит о «ненормальности» явления, связанного с этим признаком.

Кривую нормального закона распределения называют *нормальной или гауссовой кривой*. На рис. 12 а, б §46 приведены нормальная кривая с параметрами σ^2 и a, т.е. $N(a;\sigma^2)$ и график функции распределения случайной величины X, имеющей нормальный закон. Обратим внимание на то, что нормальная кривая симметрична относительно прямой $x=a$, имеет максимум в точке $x=a$, равный $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$, т.е. $\varphi_{\max}(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \approx \frac{0,3989}{\sigma}$ и две точки перегиба $x = a \pm \sigma$ ординатой $\varphi_{пер}(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}} \approx \frac{0,2420}{\sigma}$. Можно заметить, что в выражении плотности нормального закона параметры обозначены буквами a и σ^2, которыми мы обозначаем математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$. Такое совпадение неслучайно.



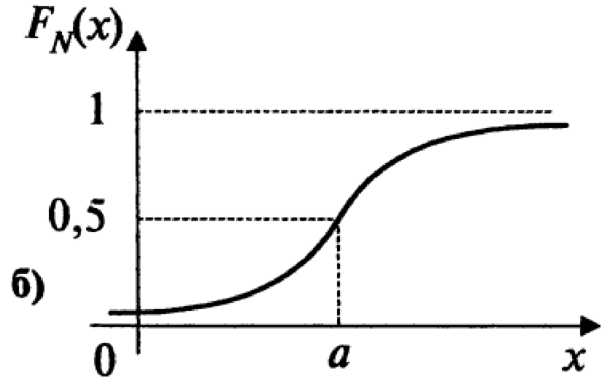


Рис. 1

Рассмотрим теорему, устанавливающую теоретико-вероятностный смысл параметров нормального закона.

Теорема. Математическое ожидание случайной величины X, распределенной по нормальному закону, равно параметру a этого закона, т.е.

$$M(X)=a,$$

а ее дисперсия - параметру σ^2, т.е.

$$D(X)=\sigma^2.$$

Доказательство. Математическое ожидание случайной величины X:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi_N(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Произведем замену переменной, положив $t=\dfrac{x-a}{\sigma\sqrt{2}}$. Тогда $x=a+\sigma\sqrt{2}\,t$ и $dx=\sigma\sqrt{2}\,tdt$, пределы интегрирования не меняются и, следовательно,

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left(a+\sigma\sqrt{2}\,t\right)e^{-t^2}\sigma\sqrt{2}dt=$$

$$=\frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-t^2}dt+\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=0+\frac{a}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{\pi}=a\cdot$$

Первый интеграл равен нулю как интеграл от нечетной функции по симметричному относительно начала координат промежутку, а второй интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$ - интеграл Эйлера - Пуассона.

Дисперсия случайной величины X :

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2\varphi_N(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Сделаем ту же замену переменной $x=a+\sigma\sqrt{2}t$ как при вычислении предыдущего интеграла. Тогда

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma^2 2t\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-t^2}\sigma\sqrt{2}dt=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-t^2}dt=\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}tde^{-t^2}.$$

Применяя метод интегрирования по частям, получим

$$D(X)=-\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}te^{-t^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=0+\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{\pi}=\sigma^2.$$

Выясним, как будет меняться нормальная кривая при изменении параметров a и σ^2 (или σ). Если $\sigma=const$, и меняется параметр $a\left(a_1<a_2<a_3\right)$, т.е. центр симметрии распределения, то нормальная кривая будет смещаться вдоль оси абсцисс, не меняя формы (рис. 2).

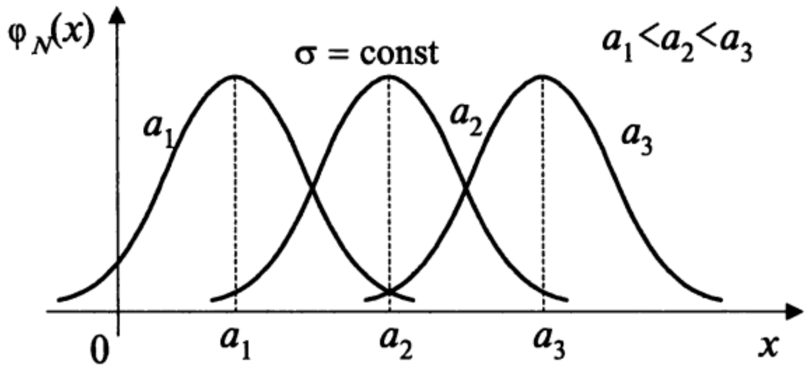


Рис. 2

Если $a = const$ и меняется параметр σ^2 (или σ), то меняется ордината максимума кривой $\varphi_{\max}(a) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. При увеличении σ ордината максимума кривой уменьшается, но так как площадь под любой кривой распределения должна оставаться равной единице, то кривая становится более плоской, растягиваясь вдоль оси абсцисс; при уменьшении σ, напротив, нормальная кривая вытягивается вверх, одновременно сжимаясь с боков. На рис. 3 показаны нормальные кривые с параметрами σ_1, σ_2 и σ_3, где $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$. Таким образом, параметр a (он же математическое ожидание) характеризует ***положение,*** а параметр σ^2 (он же дисперсия) - ***форму*** нормальной кривой.

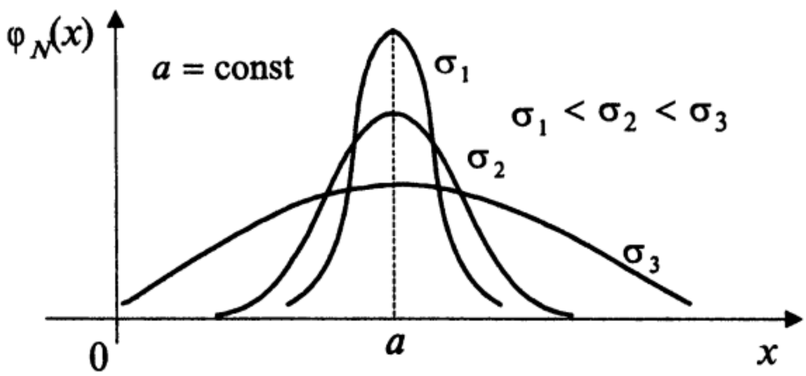


Рис. 3

Нормальный закон распределения случайной величины с параметрами $a = 0$, $\sigma^2 = 1$, т.е. $N(0;1)$, называется *стандартным или нормированным, а* соответствующая нормальная *кривая* - *стандартной или нормированной.*

Сложность непосредственного нахождения функции распределения случайной величины, распределенной по нормальному закону, по формуле

$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi.$ и вероятности ее попадания на некоторый промежуток по формуле $p\{a < X \le b\} = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ связана с тем, что интеграл от функции (1) является «не берущимся» в элементарных функциях. Поэтому их выражают через функцию

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \qquad (2)$$

- *функцию (интеграл вероятностей) Лапласа,* для которой составлены таблицы. Напомним, что функция Лапласа уже встречалась нам при рассмотрении интегральной теоремы Муавра - Лапласа. Там же были рассмотрены и ее свойства. Геометрически функция Лапласа представляет собой площадь под стандартной нормальной кривой на отрезке $[-x;x]$(рис. 4).

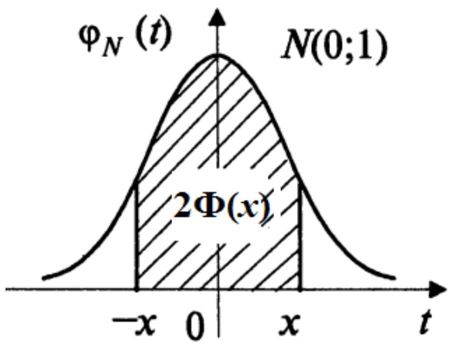


Рис. 4

Теорема. Функция распределения случайной величины X, распределенной по нормальному закону, выражается через функцию Лапласа $\Phi(x)$ по формуле:

$$F_N(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right). \qquad (3)$$

Доказательство рекомендуется провести самостоятельно.

Геометрически функция распределения представляет собой площадь под нормальной кривой на интервале $(-\infty, x)$ (рис. 5). Как видим, она состоит из двух частей: первой, на интервале $(-\infty, a)$, равной 1/2, т.е. половине всей площади под нормальной кривой, и второй, на интервале (a,x) равной $\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$.

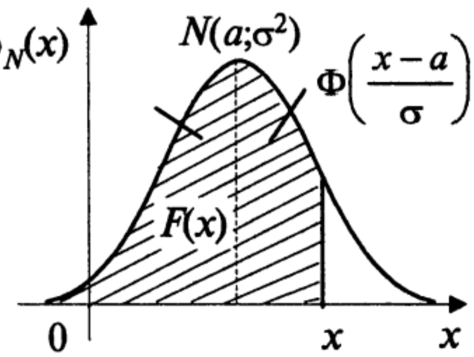


Рис. 5

Рассмотрим свойства случайной величины, распределенной по нормальному закону.

1. Вероятность попадания случайной величины X, распределенной по нормальному закону, в интервал $[x_1;x_2]$ равна

$$p\{x_1 \le X \le x_2\} = \Phi(t_2) - \Phi(t_1), \tag{4}$$

где

$$t_1 = \frac{x_1 - a}{\sigma}, \qquad t_2 = \frac{x_2 - a}{\sigma}. \tag{5}$$

Доказательство. Учитывая, что вероятность $p\{x_1 \le X \le x_2\}$ есть приращение функции распределения на отрезке $[x_1;x_2]$, и формулу (3), получим

$$p\{x_1 \le X \le x_2\} = F(x_2) - F(x_1) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right)\right) - \left(\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right)\right) = \Phi(t_2) - \Phi(t_1),$$

где t_1 и t_2 определяются по формуле (5) (рис. 6)

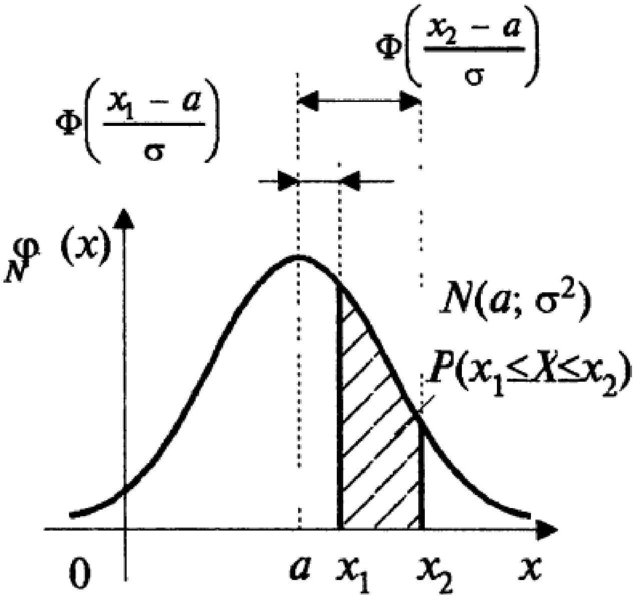


Рис. 6

2. Вероятность того, что отклонение случайной величины X, распределенной по нормальному закону, от математического ожидания a не превысит величину $\Delta > 0$ (по абсолютной величине), равна

$$p\{|X-a| \le \Delta\} = 2\Phi(t), \tag{6}$$

где

$$t = \frac{\Delta}{\sigma}. \tag{7}$$

Доказательство. $p\{|X-a| \le \Delta\} = p\{a-\Delta \le X \le a+\Delta\}$. Учитывая (4) и (5), а также свойство нечетности функции Лапласа, получим

$$p\{|X-a| \le \Delta\} = \left(\Phi\left(\frac{(a+\Delta)-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{(a-\Delta)-a}{\sigma}\right)\right) =$$

$$= \left(\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\Delta}{\sigma}\right)\right) = \left(\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right)\right) = 2\Phi(t),$$

где $t = \frac{\Delta}{\sigma}$ рис. 7.

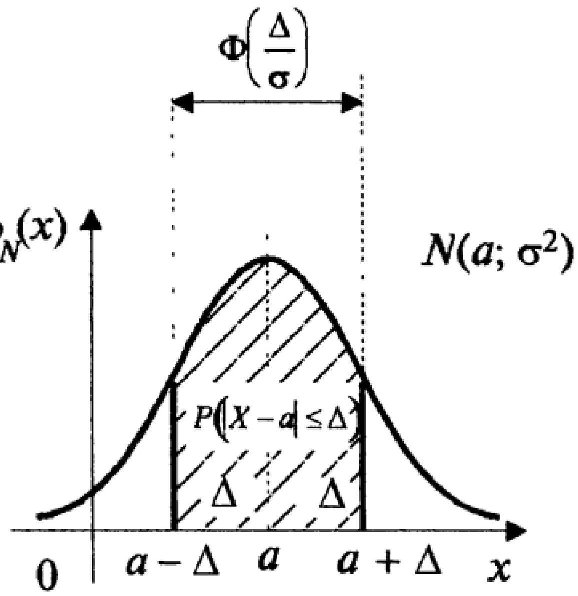


Рис. 7

Замечание. Рассмотренная в §45 приближенная интегральная формула Муавра – Лапласа (формула (4) из §45) следует из свойства (4) нормально распределенной случайной величины при $x_1 = k_1',\ x_2 = k_2',\ a = np$ и $\sigma = \sqrt{npq}$, так как биномиальный закон распределения случайной величины $X = m$ с параметрами n и p, для которого получена эта формула, при $n \to \infty$ стремится к нормальному закону (см. п. 2).

Аналогично и следствие $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$, и другие следствия интегральной формулы Муавра-Лапласа (см. §45) для числа $X = m$ появления события в n независимых испытаниях и его частоты $\frac{m}{n}$ вытекают из свойств (4) и (6) нормального закона.

Вычислим по формуле (6) вероятности $p\left\{|X - a| \le \Delta\right\}$ при различных значениях Δ (используем соответствующую таблицу из приложений). Получим при

$$\Delta = \sigma: \quad p\left\{|X - a| \le \sigma\right\} = 2\Phi(1) = 0{,}6826;$$

$$\Delta = \sigma: \quad p\left\{\left|X - a\right| \le 2\sigma\right\} = 2\Phi\left(2\right) = 0{,}9544;$$

$$\Delta = 3\sigma: \quad p\left\{\left|X - a\right| \le 3\sigma\right\} = 2\Phi\left(1\right) = 0{,}9973 \text{ (рис. 8).}$$

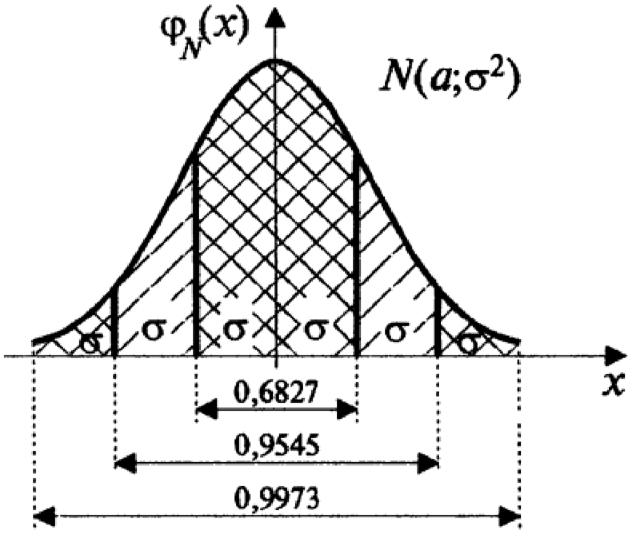


Рис. 8

Отсюда вытекает *«правило трех сигм»*.

Если случайная величина X имеет нормальный закон распределения с параметрами σ^2 и a, т.е. $N\left(a;\sigma^2\right)$, то практически достоверно, что ее значения заключены в интервале $\left(a - 3\sigma;\ a + 3\sigma\right)$.

Нарушение «правила трех сигм», т.е. отклонение нормально распределенной случайной величины X больше, чем на 3σ (по абсолютной величине), является событием практически невозможным, так как его вероятность весьма мала:

$$p\left\{\left|X - a\right| > 3\sigma\right\} = 1 - p\left\{\left|X - a\right| \le 3\sigma\right\} = 1 - 0{,}9973 = 0{,}0027.$$

Найдем ***коэффициент асимметрии*** и ***эксцесс*** случайной величины X, распределенной по нормальному закону.

Очевидно, в силу симметрии нормальной кривой относительно вертикальной прямой $x = a,$ проходящей через центр распределения $a = M\left(X\right)$ *коэффициент асимметрии нормального распределения* $A = 0$.

Эксцесс нормально распределенной случайной величины X найдем по формуле $E=\frac{m_4''}{\sigma^4}-3$ (см. §47), т.е.

$$E=\frac{m_4''}{\sigma^4}-3=\frac{3\sigma^4}{\sigma^4}-3=0,$$

где

$$m_4''=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^4\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=3\sigma^4.$$

Вычисление интеграла опускаем.

Таким образом, эксцесс нормального распределения равен нулю, и крутость других распределений определяется по отношению к нормальному (об этом мы уже упоминали в п.4 §47).

Пример 4. Полагая, что рост мужчин определенной возрастной группы есть нормально распределенная случайная величина X с параметрами $a=173$ и $\sigma^2=36$.

Найти: а) выражение функции плотности распределения случайной величины X; б) доли костюмов 4-го роста (176 -182 см) и 3-го роста (170 -176 см), которые нужно предусмотреть в общем объеме производства для данной возрастной группы.

Сформулировать «правило трех сигм» для случайной величины X.

Решение

а) По формулам (1) и (3) запишем

$$\varphi_N(x)=\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-173)^2}{2\cdot 36}};$$

$$F_N(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-173)^2}{2\cdot 36}}=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-173}{6}\right).$$

б) Доля костюмов 4-го роста (176 -182 см) в общем объеме производства определится по формуле (4) как вероятность

$$p\{176 \le X \le 182\} = \Phi(t_2) - \Phi(t_1) = \Phi(1{,}50) - \Phi(0{,}50) = 0{,}4232 - 0{,}1915 = 0{,}2417,$$

где $t_1 = \dfrac{176-173}{6} = 0{,}50$, $t_2 = \dfrac{182-173}{6} = 1{,}50$ (рис. 8).

Долю костюмов 3-го роста (170-176 см) можно было определить аналогично по формуле (4), но проще это сделать по формуле (6), если учесть, что данный интервал симметричен относительно математического ожидания $a = M(X) = 173$, т.е. неравенство $176 \le X \le 182$ равносильно неравенству $|X - 173| \le 3$:

$$p\{176 \le X \le 182\} = p\{|X-173| \le 3\} = 2\Phi\left(\frac{3}{6}\right) = 2\Phi(0{,}50) = 2 \cdot 0{,}1915 = 0{,}3830$$

(рис. 9).

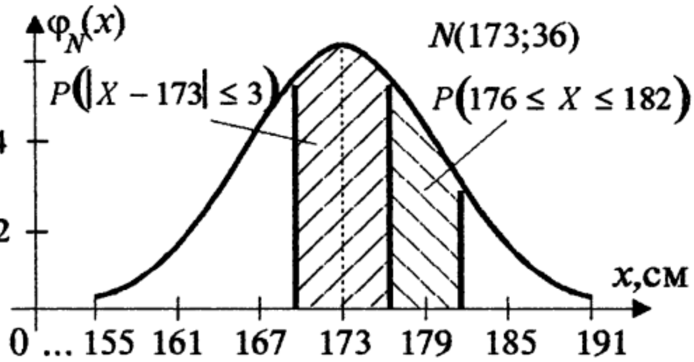


Рис. 9

«Правило трех сигм» для случайной величины X можно сформулировать следующим образом:

Практически достоверно, что рост мужчин данной возрастной группы заключен в границах от $a - 3\sigma = 173 - 3 \cdot 6 = 155$ *до* $a + 3\sigma = 173 + 3 \cdot 6 = 191$, *т.е.* $155 \le X \le 191$ (*см*).

Упражнения

1. Текущая цена акции может быть смоделирована с помощью нормального закона распределения с математическим ожиданием 15 ден. ед. и

средним квадратическим отклонением 0,2 ден. ед. 1. Найти вероятность того, что цена акции: а) не выше 15,3 ден. ед.; б) не ниже 15,4 ден. ед.; в) от 14,9 до 15,3 ден. ед. 2. С помощью правила трех сигм найти границы, в которых будет находиться текущая цена акции.

2. Цена некой ценной бумаги нормально распределена. В течение последнего года 20% рабочих дней она была ниже 88 ден. ед., а 75% - выше 90 ден. ед. Найти:

а) математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение цены ценной бумаги; б) вероятность того, что в день покупки цена будет заключена в пределах от 83 до 96 ден. ед.; в) с надежностью 0,95 определить максимальное отклонение цены ценной бумаги от среднего (прогнозного) значения (по абсолютной величине).

В силу особенностей нормального закона распределения, отмеченного в начале п. 1 и ниже, он занимает центральное место в теории и практике вероятностно-статистических методов. Большое теоретическое значение нормального закона состоит в том, что с его помощью получен ряд важных распределений: *логарифмически-нормальное распределение,* χ^2 *−распределение, распределение Стюдента, распределение Фишера-Снедекора и др.*

Из них ниже приведем определения и числовые характеристики логарифмически-нормального распределения, а другие законы из перечисленных рассматривать не будем. С ними можно ознакомиться в более объемной и специальной учебной литературе по теории вероятностей и математической статистике. Отметим, что эти законы составляют необходимый аппарат для построения в дальнейшем статистических критериев и оценок, применяемых в математической статистике.

Логарифмически-нормальное распределение

Определение 6. Непрерывная случайная величина X имеет *логарифмически-нормальное* (сокращенно *логнормальное распределение*), если ее логарифм подчинен нормальному закону.

Так как при $x > 0$ неравенства $X < x$ и $\ln X < \ln x$ равносильны, то функция распределения логнормального распределения совпадает с функцией нормального распределения для случайной величины $\ln X$, т.е.

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\ln x} e^{-\frac{(t-\ln a)}{2\sigma^2}} dt . \tag{8}$$

Дифференцируя (8) по x, получим выражение для функции плотности логнормального распределения (рис. 10)

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\ln a)}{2\sigma^2}} . \tag{9}$$

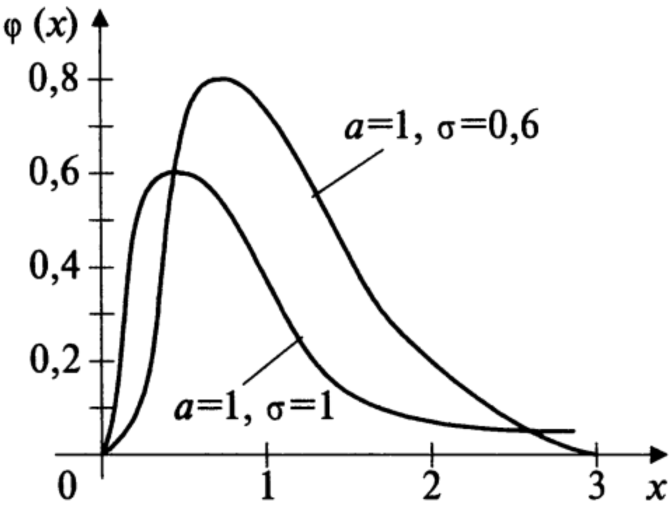


Рис. 10

Можно доказать, что числовые характеристики случайной величины X, распределенной по логнормальному закону (9), имеют вид: математическое ожидание

$$M(X) = ae^{\frac{\sigma^2}{2}},$$

а дисперсия

$$D(X)=a^2e^{\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right).$$

Логнормальное распределение используется для описания распределения доходов, банковских вкладов, цен активов, месячной заработной платы, посевных площадей под разные культуры, долговечности изделий в режиме износа и старения и др.

Пример 5. Проведенное исследование показало, что вклады населения в данном банке могут быть описаны случайной величиной X, распределенной по логнормальному закону (9) с параметрами $a=530$, $\sigma^2=0,64$.

Найти: а) средний размер вклада; б) долю вкладчиков, размер вклада которых составляет не менее 1000 ден. ед.

Решение

а) Найдем средний размер вклада, т.е.

$$M(X)=ae^{\frac{\sigma^2}{2}}=530e^{\frac{0,64}{2}}=730\ (\textit{ден.ед}).$$

б) Доля вкладчиков, размер вклада которых составляет не менее 1000 ден. ед., есть

$$p\{X\geq 1000\}=1-p\{X<1000\}=1-F(1000).$$

При определении $F(1000)$ воспользуемся тем, что функция логнормального распределения случайной величины X совпадает с функцией нормального распределения случайной величины $\ln X$, т.е. с учетом (3) имеем:

$$F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{\ln x-\ln a}{\sigma}\right);$$

$$F(1000)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{\ln 1000-\ln 530}{\sqrt{0,64}}\right)=\frac{1}{2}+\Phi(0,79)=0,5+0,2852=0,7852.$$

Теперь

$$p\{X\geq 1000\}=1-F(1000)=1-0,7852=0,2148.$$

Упражнение

Месячный доход семей можно рассматривать как случайную величину, распределенную по логнормальному закону. Полагая, что математическое ожидание этой случайной величины равно 1000, а среднеквадратическое отклонение 800, найти долю семей, имеющих доход: а) не менее 1000; б) менее 500.

Вопросы для самопроверки

1. Перечислите наиболее известные дискретные законы распределения.

2. Приведете определения, некоторые числовые характеристики наиболее известных дискретных законов распределения.

3. Перечислите наиболее известные непрерывные законы распределения.

4. Приведете определения, некоторые числовые характеристики наиболее известных непрерывных законов распределения.

5. Сформулируйте лемму (неравенства) Чебышева.

6. Приведите обе формы записи неравенства Чебышева.

7. Сформулируйте теорему Чебышева и прокомментируйте ее.

8. Сформулируйте теорему Бернулли.

§47. Закон больших чисел. Центральная предельная теорема

Ключевые слова: *закон больших чисел, неравенство Чебышева, теорема Бернулли, теорема Чебышева, центральная предельная теорема Ляпунова, характеристическая функция, преобразования Фурье***.**

1. Закон больших чисел

Из повседневного опыта известно, что массовые случайные явления обладают свойствами устойчивости средних. Это означает, что при независимых испытаниях случайной величины X среднее арифметическое

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

полученных значений при больших n стабилизируется. Случайные колебания значений каждого испытания взаимно компенсируются, и случайная величина $\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$, где X_i есть $i-$е испытание $\left(i = 1, 2, \ldots, n\right)$ величины X, при больших n теряет свой случайный характер. Теоремы, описывающие такие ситуации, называются *законами больших чисел.*

Мы строго сформулируем и докажем два варианта закона больших чисел - теоремы Бернулли и Чебышева.

В основе доказательства этих теорем лежит неравенство Чебышева, составляющего содержание следующей леммы.

Лемма (неравенство Чебышева). Пусть X - произвольная случайная величина; $M\left(X\right)$ и $D\left(X\right)$- соответственно, ее математическое ожидание и дисперсия, $\varepsilon > 0$ - произвольное число. Тогда справедливо неравенство

$$p\left\{\left|X - M\left(X\right)\right| < \varepsilon\right\} > 1 - \frac{D\left(X\right)}{\varepsilon^2}, \qquad (1)$$

где $p\left\{\left|X - M\left(X\right)\right| < \varepsilon\right\}$ означает вероятность того, что отклонение случайной величины X от своего математического ожидания меньше, чем ε.

Комментарий к лемме

Неравенство (1) и теорема об устойчивости среднего арифметического (см. ниже) доказаны П. Л. Чебышевым.

Доказательство. Пусть X - дискретная случайная величина, распределение, которой задано таблицей

x_1	x_2	$\dots$	x_n
p_1	p_2	$\dots$	p_n

Имеем

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-MX)^2 p_i=\sum{}^{/}\left(x_i-M(X)\right)^2 p_i+\sum{}^{//}\left(x_i-M(X)\right)^2 p_i\,,$$

где $\sum{}^{/}\left(x_i-M(X)\right)^2 p_i$ означает сумму всех слагаемых вида $\left(x_i-M(X)\right)^2 p_i$ таких, что $\left(x_i-M(X)\right)^2<\varepsilon^2$, а $\sum{}^{//}\left(x_i-M(X)\right)^2 p_i$ - сумму всех слагаемых вида $\left(x_i-M(X)\right)^2 p_i$ таких, что $\left(x_i-M(X)\right)^2\ge\varepsilon^2$. При этих условиях $\sum{}^{//}\left(x_i-M(X)\right)^2 p_i\ge\sum{}^{/}\left(x_i-M(X)\right)^2 p_i$, $\sum{}^{/}\left(x_i-M(X)\right)^2 p_i\ge 0$, откуда

$$D(X)\ge\varepsilon^2\sum{}^{//}p_i\,,$$

где под знаком $\sum{}^{//}$ собраны вероятности всех тех значений x_i, для которых $\left(x_i-M(X)\right)^2\ge\varepsilon^2$. Поэтому $\sum{}^{//}p_i=p\left(\left|x_i-M(X)\right|\ge\varepsilon\right)$ и, следовательно,

$$DX\ge\varepsilon^2 p\left(\left|X-MX\right|\ge\varepsilon\right)=\varepsilon^2\left[1-p\left(\left|X-MX<\varepsilon\right|\right)\right].$$

Из последнего соотношения получим

$$p\left\{\left|X-M(X)\right|<\varepsilon\right\}>1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Аналогично доказывается неравенство Чебышева для непрерывной случайной величины X с функцией плотности распределения $f(x)$.

Замечание. Неравенство Чебышева $P(\left|X-M(X)\right|<\varepsilon)>1-\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$ можно записать в другом виде

$$P\left(\left|X-M(X)\right|\ge\varepsilon\right)\ge\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Теорема (теорема Бернулли). Пусть k - количество наступлений события A в серии из n испытаний схемы Бернулли, p - вероятность наступления события A в одном испытании. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} p\left\{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1. \tag{2}$$

Комментарий к теореме Бернулли

Теорема Бернулли утверждает, что вероятность малого (меньшего, чем ε) отклонения вероятности p от частоты $\frac{k}{n}$ велика (при большом n). Иными словами, почти всегда будет наблюдаться малое отклонение частоты наступления события A в n испытаниях от вероятности наступления A в одном испытании.

В частности, теорема объясняет, почему при многократном бросании монеты количество гербов составляет примерно половину от числа бросаний.

Теорема Бернулли была исторически первым, строго доказанным математическим фактом из числа тех утверждений, которые носят название закона больших чисел. Доказательство дано швейцарским математиком Я. Бернулли.

Доказательство теоремы Бернулли. Как известно, для случайной величины $X=k$, имеющее биномиальное распределение

$$M(X)=np, \qquad D(X)=npq.$$

Следовательно,

$$M\left(\frac{k}{n}\right)=p,\ D\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n^2}\cdot npq=\frac{pq}{n}.$$

Здесь использованы свойства математического ожидания и дисперсии: $M(\lambda X)=\lambda MX$, $D(\lambda X)=\lambda^2 DX$.

Запишем неравенство Чебышева для $X=\frac{k}{n}$:

$$p\left\{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}>1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}. \tag{3}$$

Правая часть неравенства (3) при $n \to \infty$ стремится к единице, поэтому и

$$\lim_{n\to\infty} p\left\{\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Теорема 2 (теорема Чебышева). Пусть X_i $(i = 1, 2, ..., n)$ - попарно независимые случайные величины, имеющие одинаковые распределения: $M(X_i) = a,\ D(X_i) = \sigma^2$. Тогда имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} p\left\{\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right\} = 1. \tag{4}$$

Комментарий к теореме Чебышева

Можно считать, что дана одна случайная величина X, которая (независимо) испытывается n раз; случайное значение i – го испытания определяет случайную величину X_i. Теорема Чебышева утверждает, что малое (меньшее, чем ε) отклонение среднего арифметического $\dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ от математического ожидания a весьма вероятно. Иными словами, почти всегда будет наблюдаться малое отклонение (при больших n).

Доказательство теоремы Чебышева. Имеем

$$M\left(\frac{1}{n}\left(X_1 + X_2 + \cdots + X_n\right)\right) = \frac{1}{n}\left(M(X_1) + M(X_2) + \cdots + M(X_n)\right) = \frac{1}{n} na,$$

$$D\left(\frac{1}{n}\left(X_1 + X_2 + \cdots + X_n\right)\right) = \frac{1}{n^2}\left(D(X_1) + D(X_2) + \cdots + D(X_n)\right) = \frac{1}{n^2}\sigma^2 n = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Здесь использованы формулы $M(\lambda X) = \lambda MX,\ D(\lambda X) = \lambda^2 DX)$.

Неравенство Чебышева для $X = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ дает

$$p\left\{\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right| < \varepsilon\right\} > 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}. \tag{5}$$

Правая часть неравенства (5) при $n \to \infty$ стремится к единице; отсюда и следует утверждение (4).

Теорему Бернулли можно рассматривать как частный случай теоремы Чебышева, если считать, что $X_i = k_{(i)}$ $(i = 1, 2, .n.$, где $k_{(i)}$ - количество наступлений события A в $i-$м испытании схемы Бернулли. Тогда частота наступления события A есть

$$\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}=\frac{1}{n}\left(k_{(1)}+k_{(2)}+\cdots+k_{(n)}\right)=\frac{k}{n};\quad a=p;\quad \sigma^2=np.$$

Пример. Для определения средней продолжительности горения электроламп в партии из 200 одинаковых ящиков было взято на выборку по одной лампе из каждого ящика. Оценить вероятность того, что средняя продолжительность горения отобранных 200 электроламп отличается от средней продолжительности горения ламп во всей партии не более чем на 5 ч (по абсолютной величине), если известно, что среднее квадратическое отклонение продолжительности горения ламп в каждом ящике меньше 7 ч.

Решение

Пусть X_i-продолжительность горения электролампы, взятой из $i-$го ящика (ч). По условию дисперсия $D\left(X_i\right)<7^2=49$. Очевидно, что средняя продолжительность горения отобранных ламп равна

$$\frac{X_1+X_2+...+X_{200}}{200},$$

а средняя продолжительность горения ламп во всей партии

$$\frac{M\left(X_1\right)+M\left(X_2\right)+...+M\left(X_{200}\right)}{200}.$$

Тогда вероятность искомого события:

$$p\left\{\left|\frac{X_1+X_2+...+X_{200}}{200}-\frac{M\left(X_1\right)+M\left(X_2\right)+...+M\left(X_{200}\right)}{200}\right|<5\right\}>1-\frac{49}{200\cdot 5^2}\approx 0{,}9902,$$

т.е. не менее чем 0,9902.

Пример. Сколько надо провести измерений данной величины, чтобы с вероятностью не менее 0,95 гарантировать отклонение средней арифметической этих измерений от истинного значения величины не более чем на 1 (по абсолютной величине), если среднеквадратическое отклонение каждого из измерений не превосходит 5?

Решение

Пусть X_i – результат i–го измерения $(i=1,2,...,n)$ - истинное значение величины, т.е. $M(X_i)=a$ при любом i. Необходимо найти n, при котором

$$p\left\{\left|\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}-a\right|<1\right\}>0,95.$$

Данное неравенство выполняется, если

$$1-\frac{D(X)}{n\varepsilon^2}=1-\frac{5^2}{n\cdot 1^2}>0,95.$$

Откуда $\frac{25}{n}<0,05$ и $n>\frac{25}{0,05}=500$, т.е. потребуется не менее 501 измерений.

Упражнения

1. Выход цыплят в инкубаторе составляет в среднем 70% числа заложенных яиц. Сколько нужно заложить яиц, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,95, ожидать, что отклонение числа вылупившихся цыплят от математического ожидания их не превышало 50 (по абсолютной величине)? Решить задачу с помощью: а) неравенства Чебышева; б) интегральной теоремы Муавра - Лапласа.

2. Опыт работы страховой компании показывает, что страховой случай приходится примерно на каждый пятый договор. Оценить с помощью неравенства Чебышева необходимое количество договоров, которые следует заключить, чтобы с вероятностью 0,9 можно было утверждать, что доля страховых случаев отклонится от 0,1 не более чем на 0,01 (по абсолютной величине). Уточнить ответ с помощью следствия из интегральной теоремы Муавра - Лапласа.

2. Центральная предельная теорема

Кроме законов больших чисел, описывающих устойчивость средних значений и изложенных в п.1, в теории вероятностей имеет место еще одно замечательное явление. Как и законы больших чисел, это явление заключается в том, что при большом количестве случайных слагаемых, каждое из которых вносит лишь небольшой вклад в общую сумму, распределение каждого из слагаемых не влияет на суммарный результат. Точнее, при указанных условиях вид распределения суммы не зависит от распределения слагаемых.

Более строгое утверждение сформулировано в следующей теореме.

Теорема (центральная предельная теорема Ляпунова). Пусть

$$X_1, X_2, ..., X_n$$

- одинаково распределенные независимые случайные величины с математическим ожиданием $M\left(X_i\right)=a$ и дисперсией $D\left(X_i\right)=\sigma^2$. Тогда, при большом n распределение суммы $Y=X_1+X_2+\cdots+X_n$ близко к нормальному распределению.

Комментарии к теореме Ляпунова

1. Когда говорят, что последовательность распределений $Z_1, Z_2, ..., Z_n$ стремится к некоторому распределению Z, имеют в виду, что функции плотности $f_i(x)$ распределений Z_i стремятся к функции плотности $f(x)$ распределения Z.

2. Так как $M\left(Y\right)=\sum M\left(X_i\right)=na$ и $D\left(Y\right)=\sum D\left(X_i\right)=n\sigma^2$, то величины $a=\dfrac{M\left(X\right)}{n}$, $\sigma^2=\dfrac{M\left(X\right)}{n}$ малы при больших n. Величины X_i вносят «равномерно малый вклад», о чем шла речь выше.

3. Утверждение о нормальном законе распределения суммы

$$X_1+X_2+\cdots+X_n$$

справедливо при менее ограничительных условиях, чем те, которые фигурируют в условии теоремы. В частности, справедлив более сильный вариант теоремы Ляпунова, устанавливающий, что сумма $X_1+X_2+\cdots+X_n$ имеет нормальное распределение при весьма общих предположениях относительно величин $X_1, X_2, ..., X_n$.

Доказательство центральной предельной теоремы использует аппарат характеристических функций и в общих чертах следует такой схеме. Каждой случайной величине соответствует характеристическая функция, сумме случайных величин соответствует произведение характеристических функций. Это произведение при неограниченном увеличении числа n слагаемых стремится к некоторой функции, которая оказывается характеристической функцией нормального распределения. Отсюда и следует утверждение центральной предельной теоремы (впрочем, важным обстоятельством, пропущенным в вышеуказанных рассуждениях, является тот факт, что если последовательность характеристических функций $f_i(x)$ сходится к функции $f(x)$, то последовательность распределений, соответствующих функциям $f_i(x)$, сходится к распределению, соответствующему функции $f(x)$; в действительности именно доказательство этого факта является самым трудным местом в доказательстве предельной теоремы).

Понятие характеристической функции распределения, играющее столь важную роль в доказательстве центральной теоремы, является сложным понятием математики. Оно связано с важным общематематическим понятием преобразования Фурье. Это выходит за рамки математического образования студентов-экономистов. Поэтому выше вместо строгого доказательства теоремы мы ограничивались приведением схемы доказательства в общих чертах.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте лемму (неравенства) Чебышева.

2. Приведите обе формы записи неравенства Чебышева.

3. Сформулируйте теорему Чебышева и прокомментируйте ее.

4. Сформулируйте теорему Бернулли.

5. Сформулируйте центральную предельную теорему Ляпунова и прокомментируйте ее.

6. На чем основывается доказательство центральной предельной теоремы Ляпунова.

§50. Корреляционные зависимости. Уравнения регрессии

Ключевые слова: *генеральная совокупность, случайная выборка, повторная и бесповторная выборки, статистическая оценка параметра, несмещенная оценка, смещенная оценка, состоятельная оценка, эффективная оценка, выборочная средняя, выборочная дисперсия, доверительный интервал, стандартные статистические распределения, гистограмма, размах выборки, полигон частот, оценки метода моментов, выборочные начальные моменты, выборочные центральные моменты, оценки метода максимального правдоподобия, функция правдоподобия, логарифмическая функция правдоподобия, функция правдоподобия Фишера, функциональная зависимость, статистическая (вероятностная или стохастическая) зависимость, корреляционная зависимость, условные средние, уравнения регрессии, функция регрессии, линия регрессии, выборочный коэффициент корреляции, выборочное уравнение прямой линии регрессии, метод наименьших квадратов, выборочный коэффициент корреляции.*

1. Некоторые предварительные понятия

1.1. Основные понятия выборочного метода

Математическая статистика является одним из наиболее широко используемых на практике разделов прикладной математики.

Определение 1. Генеральной совокупностью называется вероятностное пространство и определенная на этом пространстве случайная величина X.

Проще говоря, под генеральной совокупностью подразумевают всю совокупность изучаемых объектов, или все множество возможных значений изучаемой случайной величины.

Определение 2. Случайной выборкой или просто выборкой объема n значений случайной величины X называется набор чисел

$$x_1, x_2, ..., x_n,$$

являющихся реализациями случайной величины X, полученными в ходе n соответствующих независимых наблюдений или экспериментов.

Иногда выборку также называют статистическими данными, или статистикой реализаций случайной величины X, или просто статистикой.

Различают повторные и бесповторные выборки. Говорят о собственно-случайных, механических, серийных и типических выборках.

Основной задачей математической статистики является оценка и анализ параметров распределения изучаемой случайной величины, или самого вида этого распределения (непараметрическое оценивание) по данным выборки ее значений. Часто отмечают, что основная задача математической статистики является, в некотором смысле, обратной к задачам теории вероятностей.

Основными целями оценивания являются:

1) прогнозирование поведения изучаемой случайной величины в будущем;

2) проверка соответствия значений полученных оценок некоторым регламентированным характеристикам.

И то и другое часто может служить обоснованием выбора наиболее оптимального варианта управленческих решений.

Определение 3. Истинное значение того или иного параметра распределения изучаемой случайной величины X называют его теоретическим, или генеральным значением.

Определение 4. Статистической оценкой некоторого параметра Θ распределения случайной величины X называется функция, определенная на множестве выборок значений этой случайной величины

$$\Theta^* = \Theta^*\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right),$$

значения которой, в некотором статистическом смысле, близки к теоретическому значению у.

Определение 5. Конкретное значение статистической оценки на данной конкретной выборке называют выборочным значением этой оценки, или точечным значением, или выборочной оценкой.

Важно четко понимать разницу между теоретическим значением параметра и его выборочными оценками. Теоретическое значение того или иного параметра распределения случайной величины в общем случае определяется только его плотностью распределения, т.е. бесконечной информацией. Данные же выборки всегда конечны. Поэтому никогда нет возможности найти точное теоретическое значение параметра.

Очень важно также, что выборочное значение параметра само является случайной величиной, поскольку рассчитывается по данным случайной выборки.

Иногда приходится говорить не о конкретной выборке, а вообще, абстрактно. Как, например, при выводе различных статистических формул и доказательствах теорем. Тогда приходится использовать следующее понятие.

Определение 6. Теоретической выборкой объема n значений случайной величины X будем называть совокупность независимых случайных величин

$$X_1, X_2, ..., X_n,$$

каждая из которых имеет то же распределение, что и X, т.е. $X = X_i,\quad i = \overline{1,n}$.

1.2. Требования, предъявляемые к статистическим оценкам, или свойства статистических оценок

Для оценок, которые предполагается использовать на практике, очевидно, очень желательны следующие свойства.

Определение 7. Оценка Θ^* некоторого параметра Θ называется несмещенной, если

$$M\left(\Theta^*\right) = \Theta.$$

Несмещенность оценки означает, что она не дает какой-либо регулярной (постоянной) ошибки. Иногда на практике используют и смещенные оценки.

Определение 8. Оценка Θ_n^* называется состоятельной, если для любого $\varepsilon > 0$ справедливо

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\Theta_n^* - \Theta\right| \le \varepsilon\right\} = 1.$$

Таким образом, состоятельность оценки означает, что чем больше объем выборки, тем относительно точнее выборочная оценка. Примеры несостоятельных оценок достаточно редки.

Справедлива теорема.

Теорема 1. Если Θ_n^* - несмещенная оценка параметра Θ и

$$\lim_{n\to\infty} D\left(\Theta_n^*\right) = 0,$$

то Θ_n^* - состоятельна.

Доказательство этой теоремы легко вытекает из неравенства Чебышева.

Определение 9. Оценка называется эффективной, если она имеет минимальную дисперсию среди всех других оценок данного параметра.

1.3. Оценка математического ожидания случайной величины

Из теории вероятностей известно, что среди всех параметров распределения случайной величины важнейшую роль играют математическое ожидание и дисперсия. Напомним, что нормальное распределение полностью задается этими двумя параметрами. Поэтому и в математической статистике их оценки занимают центральное место.

Поэтому, для решения основной задачи математической статистики зачастую бывает достаточно оценить именно эти два параметра.

Пусть X - некоторая случайная величина. Как всегда, будем обозначать

$$M(X) = a, \quad D(X) = \sigma^2,$$

где a, σ - неизвестны. Пусть имеется выборка значений этой случайной величины

$$x_1, x_2, \ldots, x_n.$$

Вспоминая определение и смысл математического ожидания в качестве его оценки естественно предложить следующую

$$a^* = \overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

Величину $\overline{X}$ называют выборочным средним, и действительно используют в качестве оценки математического ожидания. Изучим ее свойства как статистической оценки.

Оказывается

$$M\left(\overline{X}\right) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right).$$

Переходя к теоретической выборке и используя свойства математического ожидания, имеем

$$M\left(\overline{X}\right) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M\left(X_i\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} a}{n} = a.$$

Таким образом, выборочное среднее - несмещенная оценка дисперсии.

Рассмотрим состоятельность. Используя свойства дисперсии, имеем

$$D\left(\overline{X}\right) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} D\left(X_i\right)}{n^2} = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n} \to 0, \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Тогда по теореме 1, $\overline{X}$ - состоятельная оценка математического ожидания.

Рассмотрим эффективность. Все возможные линейные оценки математического ожидания имеют вид

$$\Theta^*\left(C_1, C_2, ..., C_n\right) = \sum_{i=1}^{n} C_i x_i \ ,$$

где C_i, - любые весовые коэффициента, т.е. $\sum_{i=1}^{n} C_i = 1$.

Отметим, что все такие оценки и не смещены, и состоятельны.

Найдем, при каких значениях коэффициентов C_i дисперсия соответствующей взвешенной суммы будет наименьшей, т.е. имеем задачу

$$D\left(\Theta^*\left(C_1,C_2,...,C_n\right)\right)\to\min.$$

при ограничении

$$\sum_{i=1}^{n}C_i=1.$$

Это задача на условный экстремум, которую мы решим методом множителей Лагранжа. Составляем функцию Лагранжа:

$$L=D\left(\Theta^*\left(C_1,C_2,...,C_n\right)\right)+\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}C_i-1\right),$$

где

$$D\left(\Theta^*\left(C_1,C_2,...,C_n\right)\right)=D\left(\sum_{i=1}^{n}C_ix_i\right)=\sum_{i=1}^{n}C_i^2D\left(X_i\right)=\sigma^2\sum_{i=1}^{n}C_i^2.$$

Тогда

$$L=\sigma^2\sum_{i=1}^{n}C_i^2+\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}C_i-1\right).$$

Система необходимых условий минимума функции Лагранжа

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial C_I}=2C_i\sigma^2+\lambda=0,\ i=\overline{1,n},\\ \dfrac{\partial L}{\partial\lambda}=\sum\limits_{i=1}^{n}C_i-1=0.\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda}{2\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}C_i-1=-1.\ \lambda=-\frac{2\sigma^2}{n}.\ \Rightarrow C_i=\frac{1}{n}.$$

Таким образом, минимум дисперсии достигается при тех самых коэффициентах, которые входят в X, т.е. X - эффективная оценка.

1.4. Оценки дисперсии случайной величины

Возможны два случая:

1) a - известно. Тогда в качестве оценки дисперсии естественно предложить следующую функцию

$$S_a^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^2.$$

Изучаем несмещенность

$$M\left(S_a^2\right)=M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^2\right)=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\left(X_i-a\right)^2\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}D\left(X_i\right)=D\left(X\right)=\sigma^2,$$

т.е. рассматриваемая оценка является несмещенной.

Рассмотрим состоятельность этой оценки

$$\lim_{n\to\infty}D\left(S_a^2\right)=\lim_{n\to\infty}D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-a\right)^2\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2aX_i-a^2\right)}{n^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{nD\left(X^2-2aX\right)}{n^2}=0,$$

если только

$$D\left(X^2-2aX\right)<\infty,$$

т.е. дисперсия случайной величины $\left(X^2-2aX\right)$ конечна, что является весьма не обременительным предположением.

Эффективность доказывается по схеме, аналогичной той, что была применена для математического ожидания.

2) a - неизвестно. При этом, естественно предложить оценку

$$\tilde{S}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{X}\right)^2.$$

Изучаем ее несмещенность

$$M\left(\tilde{S}^2\right)=M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\right)=M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-a-\left(\overline{X}-a\right)\right)^2\right)=$$

$$=M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\left(X_i-a\right)^2-2\left(\overline{X}-a\right)\left(X_i-a\right)+\left(\overline{X}-a\right)^2\right)\right)=$$

$$=M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-a\right)^2-\frac{2}{n}\left(\overline{X}-a\right)\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-a\right)+\left(\overline{X}-a\right)^2\right)=$$

$$=M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-a\right)^2-2\left(\overline{X}-a\right)\left(\overline{X}-a\right)+\left(\overline{X}-a\right)^2\right)=$$

$$=M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-a\right)^2-\left(\overline{X}-a\right)^2\right)=M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-a\right)^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-a\right)\right)^2\right)=$$

$$=M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-a\right)^2-\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-a\right)\sum_{j=1}^{n}\left(X_j-a\right)\right)=$$

$$=M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-a\right)^2-\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(X_i-a\right)\left(X_j-a\right)\right)=\ldots,$$

здесь при $i\neq j$,

$$M\left(\left(X_i-a\right)\left(X_j-a\right)\right)=0,$$

так как X_i - независимые случайные величины

$$\ldots=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\left(X_i-a\right)^2-\frac{1}{n^2}M\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-a\right)\right)=\frac{1}{n}\cdot n\cdot\sigma^2-\frac{1}{n^2}\cdot n\cdot\sigma^2=\sigma^2-\frac{\sigma^2}{n}\neq\sigma^2.$$

Таким образом, рассматриваемая оценка является смешенной. Однако видим, что это легко исправить, перейдя к оценке

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)}{n-1},$$

которую так и называют несмещенной или исправленной оценкой дисперсии.

Аналогично рассмотренному выше, не сложно доказать состоятельность как $\tilde{S}^2$, так и S^2.

Очевидно, дисперсия оценки S^2 больше, чем у $\tilde{S}^2$, и поэтому S^2 не является эффективной. Тем не менее, свойство несмещенности считается практически более значимым, и для оценки дисперсии обычно используется именно S^2. Однако и $\tilde{S}^2$ находит практическое применение, в частности, величина $\tilde{S}$ называется стандартной ошибкой выборки.

1.5. Оценка доли признака

Для весьма широкого спектра задач важным является следующий параметр.

Определение 10. Генеральной долей признака называется величина

$$p=\frac{M}{N},$$

где N - общее количество объектов, составляющих некоторую генеральную совокупность, M - количество объектов из этой совокупности, обладающих некоторым соответствующим признаком. Например, N - количество всех работников на предприятии, M - число женщин из них.

Во многих маркетинговых, социологических и прочих исследованиях требуется оценить генеральную долю признака. Например, долю потенциальных покупателей, предпочитающих некоторый определенный товар. При этом невозможно протестировать всю совокупность N, а следует сделать выводы только на основании некоторой выборки объема n.

Определение 11. Выборочной долей признака называется величина

$$w = \frac{m}{n},$$

где n - общее количество протестированных объектов из соответствующей генеральной совокупности, m - количество объектов из n, обладающих интересующим нас признаком.

Следует ли считать, что w можно использовать, как оценку p?

Вспомним, что выборки бывают повторные и бесповторные. При оценке доли признака, тип выборки имеет большое значение. В случае повторной выборки, тестируемый объект возвращается в генеральную совокупность, и может оказаться выбранным еще, и еще раз. Например, на бензозаправке решили выяснить, какова доля иномарок среди всех автомобилей. Ясно, что при этом за исследуемый день возможно неоднократное посещение одной и той же иномаркой данной бензозаправки. В случае бесповторной выборки тестируемый объект помечается и в дальнейшем не учитывается, т.е. исключается из генеральной совокупности. Чаще имеют место именно такие ситуации.

Не сложно понять, что при бесконечном количестве объектов в генеральной совокупности разницы между повторной и бесповторной выборками нет.

Рассмотрим сначала более простой случай повторной выборки.

Тогда каждый раз вероятность выбора объекта, обладающего признаком, по классическому определению вероятности, составляет

$$p = \frac{M}{N},$$

а вероятность, что из n отборов объектов с признаком попадется ровно m, выражается формулой Бернулли, т.е. в этом случае $\frac{m}{n}$ - случайная величина имеющая, так называемое, дробно биномиальное распределение, для которого, как известно.

$$M\left(\frac{m}{n}\right) = p,$$

т.е. w - несмещенная оценка генеральной доли. Дисперсия дробно биномиальной случайной величины

$$D\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{pq}{n} \to 0,$$

при $n \to \infty$, т.е. w - состоятельная оценка.

В случае бесповторной выборки эксперимент соответствует «урновой» схеме, и m имеет, так называемое, гипергеометрическое распределение. Тогда

$$M\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} i\,\frac{C_{N-M}^{n-i}}{C_N^n},$$

и можно доказать, что

$$M\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{M}{N} = p,$$

т.е. опять w - несмещенная оценка. При этом

$$D\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{pq}{n}\cdot\frac{N-n}{N-1} \to 0,$$

при $n \to \infty$. А, точнее говоря, предельно возможное значение для n это N и при $n = N$ эта дисперсия равна нулю, т.е. опять w - состоятельная оценка.

1.6. Стандартные статистические распределения и их критические границы

Во многих формулах математической статистики используются, так называемые, стандартные статистические распределения. К ним, прежде всего, относят: стандартное гауссовское распределение, а также распределения Пирсона. Стьюдента и Фишера.

Определение 12. Говорят, что случайная величина X имеет *стандартное, гауссовское распределение*, если

$$X \sim N(0,1).$$

Определение 13. Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ - независимые стандартные гауссовские случайные величины, тогда распределение случайной величины

$$z = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$$

называют *распределением Пирсона* с n степенями свободы и пишут

$$z \sim \chi^2(n).$$

График плотности χ^2- распределения зависит от числа степеней свободы, однако схематически он имеет вид, представленный на рис. 1.

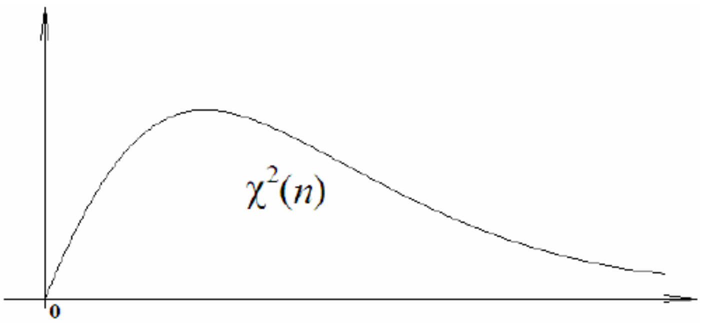


Рис. 1

Определение 14. Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ - независимые стандартные гауссовские случайные величины, тогда распределение случайной величины

$$z = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2}}$$

называют *распределением Стьюдента* с n степенями свободы, и пишут

$$z \sim t(n).$$

График плотности t- распределения зависит от числа степеней свободы, однако в целом он подобен стандартному гауссовскому.

Замечание. Распределение Стьюдента с n степенями свободы можно было бы определить и так

$$t = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\frac{1}{n}\chi^2}} \cdot$$

Определение 14. Пусть, $z_1 \sim \chi^2(n)$, $z_2 \sim \chi^2(m)$ - независимые случайные величины, тогда распределение случайной величины

$$z = \frac{\frac{1}{n} z_1}{\frac{1}{n} z_2}$$

называют *распределением Фишера* с n степенями свободы числителя и m знаменателя, и пишут

$$z = F\left(\frac{n}{m}\right).$$

График плотности F - распределения зависит от числа степеней свободы, однако в целом он подобен распределению Пирсона.

Определение 15. Будем называть распределение симметричным, если график его плотности симметричен относительно оси ординат.

Так, например, стандартное гауссовское и распределение Стьюдента - симметричные распределения, а Пирсона и Фишера - нет.

Огромную важность имеют следующие понятия.

Определение 16. Односторонней критической границей уровня значимости α некоторого распределения $P(x)$ случайной величины X (рис. 2), называется такое число z_α, что

$$P\{x \le z_\alpha\} = 1 - \alpha .$$

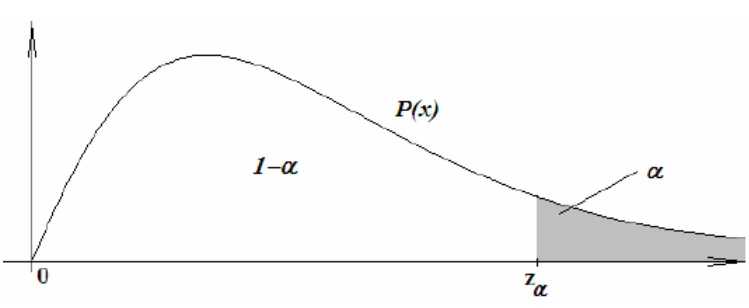


Рис. 2

Определение 17. Двухсторонней критической границей уровня значимости α некоторого симметричного распределения $P(x)$ случайной величины X (рис. 3) называется такое число $z_{\alpha/2}$, что

$$P\{-z_{\alpha/2} \le x \le z_{\alpha/2}\} = 1 - \alpha .$$

Отметим, что односторонняя критическая граница уровня значимости $\alpha / 2$ некоторого симметричного распределения одновременно является его двухсторонней границей уровня значимости α.

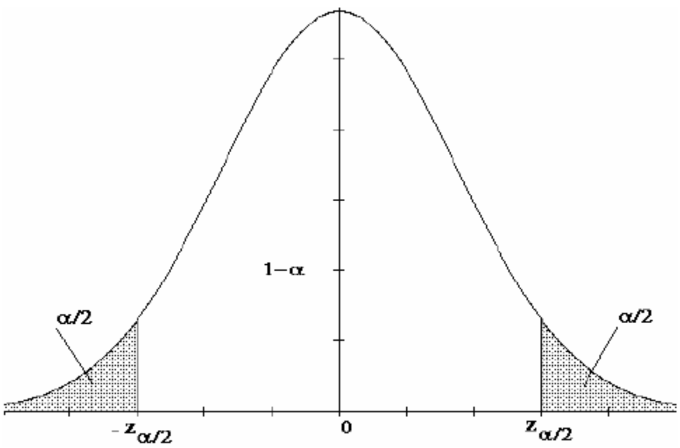


Рис. 3

Критические границы различных уровней значимости, стандартных статистических распределений приводятся в виде справочных таблиц, в соответствующей литературе (например, в учебниках и задачниках по математической статистике).

1.7. Понятие доверительного интервала

Как уже говорилось, конкретное значение оценки некоторого параметра, рассчитанное по числовым данным конкретной выборки, называют точечной оценкой данного параметра.

Поскольку у нас нет информации о точности этих оценок, то на практике конкретные управленческие решения, выработанные на основе сведений о значениях точечных оценок, не являются достаточно обоснованными. То есть, пока мы не установили меры близости между теоретическим значением интересующего нас параметра и его точечной оценкой, невозможно говорить о допустимости практического использования последней.

Поэтому большую важность в теории статистического оценивания имеет следующее понятие.

Определение 18. Доверительным интервалом уровня значимости α некоторого параметра Θ называется любой интервал $[a,b] \subset R^1$ такой, что

$$P\{\Theta \in [a,b]\} = 1-\alpha .$$

Величину $\gamma = 1-\alpha$ при этом называют доверительной вероятностью или уровнем доверия.

Иначе говоря, доверительный интервал - это интервал, в котором с заданной (желаемой) вероятностью содержится теоретическое значение оцениваемого параметра. Обычно строят доверительные интервалы при $\alpha = 0{,}1$ или чаще всего при $\alpha = 0{,}05$, или, в особо ответственных случаях, при $\alpha = 0{,}01$.

Доверительные интервалы часто называют интервальными оценками данного параметра.

Ясно, что доверительный интервал уже несет информацию о мере точности наших знаний об истинном значении параметра. Именно эта информация и может действительно служить основанием для тех или иных конкретных практических выводов.

1.8. Доверительный интервал для математического ожидания нормальной случайной величины

Рассмотрим задачу построения интервальной оценки для математического ожидания нормально распределенной случайной величины $X \sim N(a,\sigma^2)$.

Отметим, что для выборочного среднего

$$M(\overline{X}) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{nM(X)}{n} = a,$$

$$D\left(\overline{X}\right)=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D\left(X_i\right)=\frac{\sigma^2}{n},$$

т.е.

$$\overline{X}\sim N\left(a,\frac{\sigma^2}{n}\right).$$

Тогда, из свойств математического ожидания и дисперсии, получаем

$$\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}-a\right)}{\sigma}\sim N\left(0,1\right)$$

- стандартная гауссовская случайная величина.

И если $u_{\alpha/2}$ - двухсторонняя критическая граница уровня значимости α стандартного гауссовского распределения, то с вероятностью $\gamma=1-\alpha$ выполняется неравенство

$$-u_{\alpha/2}\le\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}-a\right)}{\sigma}\le u_{\alpha/2}.$$

Отсюда с той же вероятностью выполняется неравенство

$$\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\le a\le\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2},$$

которое и определяет искомый доверительный интервал для математического ожидания нормально распределенной случайной величины при известной дисперсии σ^2.

Рассмотрим гораздо более важный для практики случай, когда дисперсия неизвестна.

Справедлива теорема.

Теорема 2. Пусть случайная величина $X\sim N\left(a,\sigma^2\right)$ и задана выборка ее значений $x_1,x_2,...,x_n$, тогда

$$\left(n-1\right)\frac{S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2\left(n-1\right),$$

где S^2 - несмещенная оценка дисперсии случайной величины X по этой выборке.

Поскольку

$$(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2}=\frac{\sum\left(x_i-X\right)^2}{\sigma^2},$$

то для случайной величины q

$$q=\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}-a\right)}{S}=\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}-a\right)}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{X}\right)^2}}=\frac{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\overline{X}-a\right)}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{X}\right)^2}{\sigma^2}}}=\frac{N(0,1)}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\chi^2(n-1)}},$$

т.е.

$$q\sim t(n-1).$$

Отсюда получаем, что с вероятностью $\gamma=1-\alpha$ выполняется неравенство

$$-t(n-1)\le\frac{n\left(\overline{X}-a\right)}{S}\le t(n-1),$$

где $t_{\alpha/2}(n-1)$ - табличное значение двухсторонней критической границы уровня значимости α распределения Стьюдента с $(n-1)$ степенями свободы. Или, с той же вероятностью, неравенство

$$\overline{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\le a\le\overline{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},$$

которое и определяет искомый доверительный интервал для математического ожидания нормально распределенной случайной величины при неизвестной дисперсии.

Отметим, что тот же интервал можно выразить через формулу

$$\overline{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{\tilde{S}}{\sqrt{n-1}}\le a\le\overline{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{\tilde{S}}{\sqrt{n-1}}.$$

Все полученные доверительные интервалы строились в предположении, что X имеет нормальное распределение. В этом случае $\overline{X}$ имеет в точности нормальное распределение, что и является, в действительности, единственным необходимым условием корректности всех выкладок. Однако и при любом распределении X при $n\to\infty$, $\overline{X}$ будет асимптотически нормальной случайной величиной в соответствии с центральной предельной теоремой. Эта близость, разумеется, зависит от объема выборки n, но можно сказать, что уже при $n > 5 \div 10$ ее можно считать достаточной.

Пример

Производитель шин заинтересован в получении оценки средней износоустойчивости шин одной особой модели. Над 10 случайно выбранными шинами произвели специальные испытания, оказалось, что средняя длина пробега $\overline{X} = 22500$ миль, при стандартном отклонении $\tilde{S} = 3000$ миль. Найдем 95 и 99 % - ные доверительные интервалы для $M(X) = a$, X - длина пробега.

Решение

По таблицам находим $t_{0,025}(10-1) = 2,26$; $t_{0,005}(9) = 3,25$; тогда с вероятностью:

- $\gamma = 0,95$ износоустойчивости будет лежать в пределах

$22500 \pm 2,26 \cdot \dfrac{3000}{\sqrt{9}} = 22500 \pm 2260$ миль, отклонение от $\overline{X}$ при этом составляет ± 10 % ;

- $\gamma = 0,99$ в пределах 22 500 ± 3250, отклонение ± 14%.

Практически считается, что чем меньше размах доверительного интервала, тем оценка достовернее. В разных случаях считается по-разному, но обычно исходят из того, что при размахе до 10 % от значения $\overline{X}$ полученная информация достаточно точно отражает реальную ситуацию. При размахе более 20 – 30 % достоверность прогноза мала. Очевидно, уменьшить размах интервала можно увеличив объем выборки.

1.9. Доверительный интервал для дисперсии нормального распределения

Пусть опять случайная величина $X \sim N(a, \sigma^2)$ и задана выборка ее значений $x_1, x_2, ..., x_n$.

Рассмотрим вопрос построения доверительного интервала для ее дисперсии. Опять разберем два случая:

1) a - известно, тогда

$$n\frac{S_a^2}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-a}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n),$$

поскольку

$$\frac{X_i-a}{\sigma}\sim N(0,1).$$

Тогда с вероятностью $\gamma=1-\alpha$ выполняется неравенство

$$\chi^2_{1-\alpha/2}(n)\le\frac{nS_a^2}{\sigma^2}\le\chi^2_{\alpha/2}(n),$$

где $\chi^2_{\alpha/2}(n)$, $\chi^2_{1-\alpha/2}(n)$ соответствующие односторонние критические границы распределения Пирсона. Отсюда и получаем требуемый доверительный интервал уровня и значимости α, для истинного значения σ^2

$$\frac{nS_a^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}\le\sigma^2\le\frac{nS_a^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}.$$

2) a - неизвестно, тогда по теореме 2

$$(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1).$$

И аналогично, доверительный интервал с уровнем доверия $\gamma=1-\alpha$ имеет вид

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\le\sigma^2\le\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}.$$

1.10. Доверительный интервал для генеральной доли признака

При достаточно большом количестве наблюдений (считается, что при $n>20$) на основании центральной предельной теоремы, можно считать, что выборочная доля

$$w=\frac{m}{n},$$

имеет распределение, достаточно близкое к нормальному, параметры которого были указаны в п. 5.

Тогда, например, для повторной выборки, с вероятностью $1-\alpha$, выполняются неравенства

$$-u_{\alpha/2} \le \frac{w-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \le u_{\alpha/2} \Rightarrow w-u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \le p \le w+u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}.$$

Последнее из них дает границы искомого доверительного интервала в неявном виде. Для их явного выражения решаем соответствующее квадратное уравнение

$$(w-p)^2 \le (u_{\alpha/2})^2 \frac{p(1-p)}{n}.$$

Откуда получаем, что эти границы задаются выражениями

$$p_{1,2} = \frac{1}{1+\frac{u_{\alpha/2}^2}{n}}\left(w+\frac{u_{\alpha/2}^2}{2n} \pm u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}+\left(\frac{u_{\alpha/2}}{2n}\right)^2}\right).$$

Для бесповторной выборки аналогично получаем следующие границы интервальной оценки

$$p_{1,2} = \frac{1}{1+\frac{u_{\alpha/2}^2}{n}\theta}\left(w+\frac{u_{\alpha/2}^2}{2n}\theta \pm u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}\theta+\left(\frac{u_{\alpha/2}}{2n}\theta\right)^2}\right), \quad \text{где } \theta = \frac{N-n}{N-1}.$$

Если объем данных выборки не достаточно велик ($n < 20$), то для построения границ p_1 и p_2 искомого интервала строят специальные уравнения на основе конкретных выражений для вероятностей значений биномиального или гипергеометрического распределений.

1.11. Определение необходимого объема выборки

Формулы доверительных интервалов рассмотренных параметров позволяют ответить на следующий весьма важный вопрос: выборку какого объема мы должны иметь, чтобы оценить интересующий нас параметр с заданной точностью?

1. Для оценки математического ожидания. Отметим, что размах интервала

$$\lim_{n\to\infty}\left(t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)\to 0,$$

поскольку

$$\lim_{n\to\infty}t_{\alpha}(n)\to u_{\alpha}, \qquad \lim_{n\to\infty}S\to\sigma.$$

Итак, с ростом и доверительный интервал сжимается. Для определения достаточного объема выборки:

а) сначала находят S по некоторой пробной выборке;

б) для объема пробной выборки (или большего) принимают соответствующую критическую границу t-распределения;

в) далее корректируют объем.

Пример. Пусть было отобрано $n=25$ пакетов некоторого стандартно расфасованного продукта, средний вес которых оказался $\overline{X}=1020$ г при стандартном отклонении $\tilde{S}=12$ г. Каким должен быть объем выборки, чтобы установить 99 % - ный интервал с размахом не более ±5 г.

Решение

Принимаем, например, $t_{0,005}(n-1)=t_{0,005}(40)=2,797$.

Получаем

$$2,797\frac{12}{\sqrt{n}}\le 5\Rightarrow\sqrt{n}\ge 6,71\Rightarrow n\ge 45,06\Rightarrow n=46.$$

Далее можно скорректировать $t_{0,005}(45)=2,41$ и т.д.

При известной генеральной дисперсии задача решается еще проще.

2. Для оценки дисперсии. Как известно

$$\lim_{n\to\infty}\chi_{\alpha}^{2}(n)\to n\left(1-\frac{2}{9n}+u_{\alpha}\sqrt{\frac{2}{9n}}\right),$$

т.е. и для дисперсии размах интервала с ростом n уменьшается. С помощью несложных численных процедур можно подобрать необходимое n. Опять следует использовать данные пробной выборки.

3. Для оценки генеральной доли. Задача решается непосредственным выбором достаточно большого n, если только этот объем выборки может быть практически реализован.

1.12. Оценка функции распределения

Определение 19. Выборка значений случайной величины, упорядоченная по возрастанию, называется *вариационным рядом.*

В качестве оценки $F_n^*(x)$ функции распределения $F(x)$ случайной величины X естественно предложить следующую кусочно-постоянную функцию

$$F_n^*(x)=\begin{cases}0 & при\ \ x<x_1,\\ \dfrac{k-1}{n} & при\ \ x_{k-1}<x<x_k,\\ 1 & при\ \ x>x_n,\end{cases}$$

где x_k – элементы вариационного ряда.

Функция $F_n^*(x)$ называется *эмпирической функцией распределения*. Заметим, она соответствует всем необходимым свойствам функции распределения.

Необходимо определить точность этой оценки. В качестве меры уклонения $F_n^*(x)$ от $F(x)$ обычно рассматривают величину

$$F_n^*(x)D_n=\max_{1\le k\le n} d_k,$$

где

$$d_k=\max_{1\le k\le n}\left\{\frac{k}{n}-F(x_k),\ \ F(x_k)-\frac{k-1}{n}\right\},$$

т.е. D_n - это наибольшее отклонение $F_n^*(x)$ от $F(x)$ в точках вариационного ряда.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Если $F_n^*(x)$ непрерывна, то при $z>0$ и $n\to\infty$

$$p\left\{\sqrt{n}D_n < z\right\} \to K(z).$$

В этой теореме $K(z)$- так называемое *распределение Колмогорова*, которое имеет свойство

$$\lim_{z\to\infty} K(z) = 1.$$

Из теоремы 3 получаем, что с вероятностью $p=1-\alpha$ выполняется неравенство

$$\left|F_n^*(x) - F(x)\right| \le \frac{z_\alpha}{\sqrt{n}},\ \forall x \in R^1,$$

где z_α - соответствующая критическая граница распределения Колмогорова. Последнее неравенство, очевидно, может выполнять роль доверительного интервала для $F(x)$. Например, при $\alpha = 0,05$

$$F_n^*(x) - \frac{1,358}{\sqrt{n}} \le F(x) \le F_n^*(x) + \frac{1,358}{\sqrt{n}}.$$

Существуют и другие меры уклонения $F_n^*(x)$ от $F(x)$, например, мера Мизеса.

1.13. Оценка функции плотности распределения

Плотность распределения также может быть оценена, причем несколькими способами:

1. Гистограмма. Находят $x_{\min}$ и $x_{\max}$ - минимальный и максимальный элементы выборки. Интервал $[x_{\min}, x_{\max}]$, длина которого называется *размахом выборки*, делят на k под интервалов одинаковой длины

$$\Delta = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k}.$$

Рекомендуется, согласно известной формуле Стерджеса, принимать

$$k = 1 + 3,322 \cdot \ln n,$$

так как здесь имеется ввиду ближайшее целое число.

Далее, находят величины v_i - количество элементов выборки, попадающих в $i-$й под интервал

$$\left[x_{\min}+\Delta i,\ x_{\min}+\Delta(i+1)\right),\ i=\overline{1,k-1}.$$

Затем над каждым таким интервалом строят прямоугольник высотой

$$h_i=\frac{v_i}{n},$$

где n - объем выборки (рис. 4).

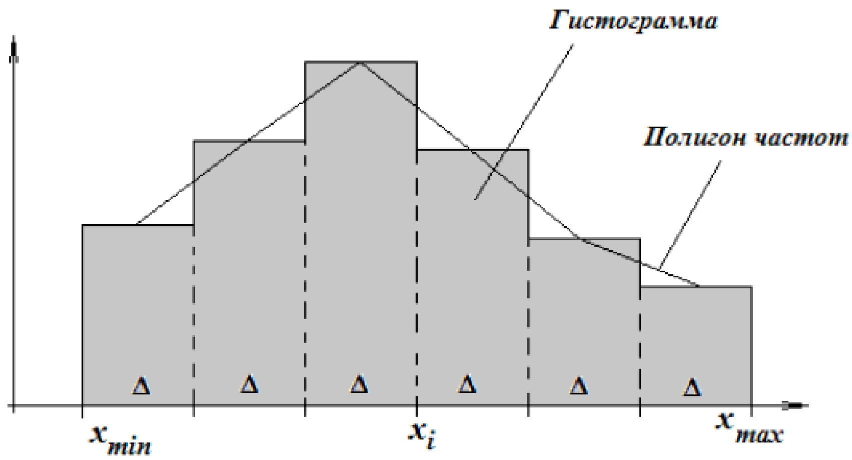


Рис. 4

2. Полигон частот – это ломаная, соединяющая середины соседних ступеней гистограммы. Если случайная величина X непрерывна, то полигон частот лучше оценивает плотность распределения.

Известна теорема, дающая оценку точности аппроксимации плотности посредством полигона частот.

Теорема 4 (Смирнова). Для любого $(a,b)\in R$

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\max_{a\le x\le b}\frac{\left|P^*(x)-P(x)\right|}{\sqrt{P(x)}}<\frac{\lambda+\dfrac{z}{\lambda}}{\sqrt{n\Delta}}\right\}=e^{-2e^{-z}},$$

где $\lambda-$решение уравнения $\Phi(\lambda)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt[4]{n}},$ $P(x)$- теоретическая плотность распределения.

1.14. Метод моментов

Рассмотренные выше точечные оценки параметров строились эвристически и лишь затем доказывалось, что они действительно являются оценками интересующих нас параметров. Оказывается, имеются регулярные методы построения статистических оценок. Одним из них являются метод моментов.

Определение 20. Пусть случайная величина X имеет плотность распределения $P(x)$, тогда величины

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k P(x)dx, \ d_k \equiv m_k'' = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^k P(x)dx$$

называется, соответственно, *теоретическими начальными и центральными моментами* $k-$го порядка.

Отметим, что математическое ожидание является начальным моментом первого порядка, а дисперсия – *центральным* второго порядка.

Определения 21. Пусть имеется выборка $x_1, x_2, \ ..., x_n$ значений случайной величины X. Тогда величины

$$m_k^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^k}{n}, \quad d_k^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^k}{n}$$

называются, соответственно, *выборочными начальными и центральными моментами* $k-$го порядка.

Пусть $P(x,\gamma)-$ плотность распределения случайной величины X, и $\gamma-$ неизвестный параметр этой плотности. Достаточно часто теоретические моменты могут быть выражены явно через неизвестный параметр γ . Идея метода моментов состоит в приравнивании теоретических и выборочных моментов. Решая соответствующие уравнения, получают искомую оценку неизвестного параметра. Если неизвестных параметров несколько, то приравнивая несколько моментов получают целую систему уравнений, которую также достаточно часто удается разрешить относительно оцениваемых параметров. Полученные таким образом статистические оценки называют *оценками метода моментов*.

Примеры

1. Пусть X равномерно распределена на отрезке $[c, d] \in R$. Ясно, что c, d являются параметрами данного распределения. Построим для них оценки, используя метод моментов.

Ранее мы видели, что для равномерного распределения

$$M(X) = \frac{c+d}{2}, \quad D(X) = \frac{(d-c)^2}{12}.$$

Приравнивая $M(X)$ и $D(X)$ с соответствующими выборочными моментами получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{c+d}{2} = \overline{X}, \\ \dfrac{(d-c)^2}{12} = \tilde{S}^2, \end{cases}$$

решая которую находим

$$\begin{cases} c = \bar{X} - \sqrt{3}\tilde{S}, \\ d = \bar{X} + \sqrt{3}\tilde{S}. \end{cases}$$

Полученные равенства и являются оценками метода моментов искомых параметров.

2. Аналогично для нормального распределения получаем систему

$$\begin{cases} a = \bar{X}, \\ \sigma^2 = \tilde{S}^2, \end{cases}$$

которая в целом соответствует полученным ранее оценкам. Однако видим, что оценка дисперсии получилась смещенной. Это происходит часто и при использовании других методов построения оценок и не считается серьезным недостатком, так как смещенные оценки обычно удается «исправить».

Достоинством метода моментов является его относительно простая вычислительная реализация. Важнейшим недостатком – неоднозначность получения оценок. Приравнивая различные моменты мы, вообще говоря, можем получить различные оценки для одних и тех же параметров. Кроме того, оценки метода моментов часто менее эффективны, чем некоторых других методов, например, следующего.

1.15. Метод максимального правдоподобия

Пусть $P(x,\gamma)$ – плотность распределения случайной величины X, где γ – неизвестный, подлежащий оценке параметр. И пусть имеется выборка $x_1, x_2, ..., x_n$ значений этой случайной величины. Идея метода максимального правдоподобия состоит в том, что в качестве оценки γ следует принять такое значение, при котором вероятность появления именно этой имеющейся выборки максимальна.

А эта вероятность, условно говоря, пропорциональна функции

$$L(\gamma) = P(x_{1,}\gamma)P(x_{2,}\gamma)\cdots P(x_{n,}\gamma),$$

которую называют *функцией правдоподобия Фишера*. Таким образом, мы приходим к задаче на нахождение экстремума функции $L(\gamma) \to \max$.

Необходимое условие экстремума дает уравнение

$$\frac{\partial L(\gamma)}{\partial \gamma} = 0,$$

которое, будучи разрешенным относительно γ, и определяет оценку метода максимального правдоподобия. Если неизвестных параметров несколько $\gamma_1, ..., \gamma_k$, то, аналогично, получаем систему необходимых условий экстремума

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(\gamma_1, ..., \gamma_k)}{\partial \gamma_1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial L(\gamma_1, ..., \gamma_k)}{\partial \gamma_k} = 0, \end{cases}$$

из которой выражаются необходимые оценки.

Часто оказывается удобнее использовать не $L(\gamma)$, а

$$\tilde{L}(\gamma) = \ln\big(L(\gamma)\big) = \ln\big(P(x_1,\gamma)P(x_2,\gamma)\cdots P(x_n,\gamma)\big) = \sum_{i=1}^{n} \ln\big(P(x_i,\gamma)\big),$$

которая называется *логарифмической функцией правдоподобия*. В силу свойств логарифма, и $L(\gamma)$, и $\tilde{L}(\gamma)$ достигают максимума при одном и том же значении.

Примеры

1. Найдем оценки максимального правдоподобия для параметров нормального распределения. Функция правдоподобия имеет вид

$$L(a,\sigma^2)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-a)^2}{2\sigma^2}},$$

а логарифмическая функция правдоподобия

$$\tilde{L}(a,\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln(\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2.$$

Ясно, что удобнее максимизировать последнюю. Система необходимых условий экстремума

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\tilde{L}(a,\sigma^2)}{\partial a}=\dfrac{1}{\sigma^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)=0,\\ \dfrac{\partial\tilde{L}(a,\sigma^2)}{\partial a}=-\dfrac{n}{2}\dfrac{1}{\sigma^2}+\dfrac{1}{2(\sigma^2)^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2=0.\end{cases}$$

Выражая из этой системы a и σ^2 получаем искомые оценки

$$\begin{cases}a^*=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i,\\ \left(\sigma^*\right)^2=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})^2=0,\end{cases}$$

т.е. получили хорошо знакомый результат. В данном случае, оценки максимального правдоподобия совпадают с оценками метода моментов, что на самом деле случается редко.

2. Найдем оценки максимального правдоподобия границ интервала распределения равномерно распределенной случайной величины.

Подлежащая максимизации функция правдоподобия в данном случае имеет вид

$$L(c,d)=\frac{1}{(d-c)^n}\to\max$$

и, очевидно, что должны выполняться ограничения

$$c\le x_{\min},\ x_{\max}\le d,$$

где $x_{\min}$, $x_{\max}$ – соответственно, минимальный и максимальный элементы выборки. Решением задачи, а значит искомыми оценками являются значения

$$c^*=x_{\min},\quad d^*=x_{\max}.$$

Как видим, они не совпадают с полученными ранее оценками метода моментов.

2. Статистические и корреляционные зависимости

2.1. Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости

Во многих задачах требуется установить и оценить зависимость изучаемой случайной величины Y от одной или нескольких других величин. Рассмотрим сначала зависимость (связь) Y от одной случайной (или неслучайной) величины X.

В некоторых случаях эта связь является настолько тесной, что, зная, какое значение приняла величина X, можно однозначно предсказать значение Y; это означает, что связь между величинами X и Y - функциональная. Возможен, однако, и другой крайний случай, когда зависимость между X и Y отсутствует вовсе, т.е. величины X и Y независимы. Точное определение независимости случайных величин было дано ранее.

В общем случае связь между величинами X и Y находит свое выражение в том, что при фиксированном значении x величины X, величина Y остается случайной, но с законом распределения, зависящим от X. Иначе говоря, каждому значению $X = x$ отвечает свой закон, распределения величины Y. Рассмотренные выше крайние случаи – функциональная зависимость и полная независимость - вполне укладываются в эту общую схему; функциональная зависимость $Y = f(X)$ означает, что при фиксированном значении $X = x$ величина Y принимает единственное значение $f(x)$ (с вероятностью 1), а полная независимость означает, что при любом значении x величины X закон распределения величины Y - один и тот же (он не зависит от выбранного нами значения величины X).

Связь между двумя случайными величинами, проявляющаяся в том, что изменение одной из них влечет за собой изменение закона распределения другой, называется статистической (или вероятностной или стохастической).

Вероятностная связь между двумя случайными величинами X и Y появляется обычно тогда, когда имеются общие случайные факторы, влияющие как на X, так и на Y (наряду с другими факторами, неодинаковыми для X и Y). Например, если X представляет собой некоторую функцию от случайных величин U и V:

$$X = f(U,V),$$

а Y есть функция от той же самой величины и другой случайной величины W:

$$X = f(U,V),$$

то величины X и Y будут связаны между собой вероятностной связью.

Определение. Статистической называют зависимость, при которой изменение одной из величин влечет изменение распределения другой. В частности, статистическая зависимость проявляется в том, что при изменении одной из величин изменяется среднее значение другой; в этом случае статистическую зависимость называют корреляционной.

Приведем пример случайной величины Y, которая не связана с величиной X функционально, а связана корреляционно. Пусть Y - урожай зерна, X - количество удобрений. С одинаковых по площади участков земли при равных количествах внесенных удобрений снимают различный урожай, т.е. Y не является функцией от X. Это объясняется влиянием случайных факторов (осадки, температура воздуха и др.). Вместе с тем, как показывает опыт, средний урожай является функцией от количества удобрений, т.е. Y связан с X корреляционной зависимостью.

2.2. Условные средние. Корреляционная зависимость

Уточним определение корреляционной зависимости, для чего введем понятие условной средней.

Предположим, что изучается связь между случайной величиной Y и случайной величиной X. Пусть каждому значению X соответствует несколько значений Y. Например, пусть при $x_1 = 2$ величина Y приняла значения: $y_1 = 5$, $y_2 = 6$, $y_3 = 10$. Найдем среднее арифметическое этих чисел:

$$\overline{y}_2 = \frac{5+6+10}{3} = 7.$$

Число $\overline{y}_2$ называют условным средним; черточка над буквой y служит обозначением среднего арифметического, а число 2 указывает, что рассматриваются те значения Y, которые соответствуют $x_1 = 2$.

Применительно к примеру предыдущего пункта эти данные можно истолковать так: на каждый из трех одинаковых участков земли внесли по 2 единицы удобрений и сняли, соответственно, 5; 6 и 10 единиц зерна; средний урожай составил 7 соответствующих единиц.

Определение. Условным средним $\overline{y}_x$ называют среднее арифметическое значений Y, соответствующих значению $X = x$.

Если каждому значению x соответствует одно значение условной средней, то, очевидно, условная средняя есть функция от x; в этом случае говорят, что случайная величина Y зависит от X корреляционно.

Определение. Корреляционной зависимостью Y от X называют функциональную зависимость условной средней $\overline{y}_x$ от x:

$$\overline{y}_x = f(x). \qquad (*)$$

Определение. Уравнение (*) называют уравнением регрессии Y на X; функцию $f(x)$ называют регрессией Y на X, а ее график - линией регрессии Y на X.

Аналогично определяется условная средняя $\overline{x}_y$, и корреляционная зависимость X от Y.

Условным средним $\overline{x}_y$ значений X, соответствующих $Y = y$.

Определение. Корреляционной зависимостью X от Y называют функциональную зависимость условной средней $\overline{x}_y$ от y:

$$\overline{x}_y = \phi(x). \qquad (**)$$

Определение. Уравнение (**) называют уравнением регрессии X и Y функцию $\phi(x)$ называют регрессией X на Y, а ее график - линией регрессии X на Y.

2.3. Две основные задачи теории корреляции

Первая задача теории корреляции - установить форму корреляционной связи, т.е. вид функции регрессии (линейная, квадратичная показательная и т.д.). Наиболее часто функции регрессии оказываются линейными. Если обе функции регрессии $f(x)$ и $\phi(x)$ линейны, то корреляцию называют линейной; в противном случае - нелинейной. Очевидно, при линейной корреляции обе линии регрессии являются прямыми линиями.

Вторая задача теории корреляции - оценить тесноту (силу) корреляционной связи. Теснота корреляционной зависимости Y от X оценивается по величине рассеяния значений Y вокруг условного среднего $\overline{y}_x$. Большое рассеяние свидетельствует о слабой зависимости Y от X либо об отсутствии зависимости. Малое рассеяние указывает наличие достаточно сильной зависимости; возможно даже, что Y и X связаны функционально, но под воздействием второстепенных случайных факторов эта связь оказалась размытой, в результате чего при одном и том же значении x величина Y принимает различные значения.

Аналогично (по величине рассеяния значений X вокруг условного среднего $\overline{x}_y$) оценивается теснота корреляционной связи X от Y.

3. Уравнения регрессии

3.1. Отыскание параметров выборочного уравнения прямой линии регрессии по не сгруппированным данным

Допустим, что количественные признаки X и Y связаны линейной корреляционной зависимостью. В этом случае обе линии регрессии будут прямыми.

Предположим, что для отыскания уравнений этих прямых проведено n независимых испытаний, в результате которых получены n пар чисел:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_n, y_n).$$

Поскольку наблюдаемые пары чисел можно рассматривать как случайную выборку из генеральной совокупности всех возможных значений случайной величины (X, Y), то величины и уравнения, найденные по этим данным, называют выборочными.

Для определенности будем искать выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X.

Рассмотрим простейший случай: различные значения x признака X и соответствующие им значения y признака Y наблюдались по одному разу. Очевидно, что группировать данные нет необходимости. Также нет надобности использовать понятие условной средней, поэтому искомое уравнение

$$\overline{y}_x = kx + b$$

можно записать так:

$$Y = kx + b.$$

Угловой коэффициент прямой линии регрессии Y на X принято называть выборочным коэффициентом регрессии Y на X и обозначать через ρ_{yx}.

Итак, будем искать выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X вида:

$$Y = \rho_{yx} x + b. \tag{1}$$

Поставим своей задачей подобрать параметры ρ_{yx} и b так, чтобы точки $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_n, y_n)$, построенные по данным наблюдений на плоскости XOY, как можно ближе лежали вблизи прямой (1).

Уточним смысл этого требования. Назовем отклонением разность

$$Y_i - y_i \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где Y_i - вычисленная по уравнению (1) ордината, соответствующая наблюдаемому значению x_i; y_i - наблюдаемая ордината, соответствующая x_i.

Подберем параметры ρ_{yx} и b так, чтобы сумма квадратов отклонений была минимальной (в этом состоит сущность метода наименьших квадратов).

Так как каждое отклонение зависит от отыскиваемых параметров, то и сумма квадратов отклонений есть функция F этих параметров (временно вместо ρ_{yx} будем писать ρ):

$$F(\rho, b) = \sum_{i-1}^{n} (Y_i - y_i)^2, \quad \text{или} \qquad F(\rho, b) = \sum_{i-1}^{n} (\rho x_i + b_i - y_i)^2 .$$

Для отыскания минимума приравняем нулю соответствующие частные производные:

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = 2\sum_{i-1}^{n} (\rho x_i + b_i - y_i) x_i ;$$
$$\frac{\partial F}{\partial b} = 2\sum_{i-1}^{n} (\rho x_i + b_i - y_i)$$

(для простоты записи вместо $\sum_{i=1}^{n}$ будем писать $\sum$).

Выполнив элементарные преобразования, получим систему двух линейных уравнений относительно ρ и b

$$\begin{cases} \left(\sum x^2\right)\rho + \left(\sum x\right) b = \sum xy, \\ \left(\sum x\right)\rho + nb = \sum y. \end{cases} \tag{2}$$

Решив эту систему, найдём искомые параметры:

$$\begin{gathered} \rho_{yx} = \frac{n\sum xy - \sum x \cdot \sum y}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}, \\ b = \frac{\sum x^2 \cdot \sum y - \sum x \cdot \sum xy}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}. \end{gathered} \tag{3}$$

Аналогично можно найти выборочное уравнение прямой линии регрессии X на Y:

$$\overline{x}_y = \rho_{xy} y + c,$$

где ρ_{xy} – выборочный коэффициент регрессии X на Y.

Пример. Найти выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X по данным $n = 5$ наблюдений:

x	1	1,5	3	4,5	5
y	1,25	1,4	1,5	1,75	2,25

Решение

Составим расчетную табл. 1.

Таблица 1

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1,00 1,50 3,00 4,50 5,00	125 1,40 1,50 1,75 2,25	1,00 2,25 9,00 20,25 25,00	1,250 2,100 4,500 4,875 11,250
$\sum \boldsymbol{x}_i = 15$	$\sum x_i^2 = 57,50$	$\sum x_i^2 = 57,50$	$\sum x_i y_i = 26,975$

Найдем искомые параметры, для чего подставим вычисленные по таблице суммы в соотношения (3):

$$\rho_{yx} = \frac{5 \cdot 26,975 - 15 \cdot 8,15}{5 \cdot 57,5 - 15^2} = 0,202;$$

$$b = \frac{57,5 \cdot 8,15 - 15 \cdot 26,975}{5 \cdot 57,5 - 15^2} = 1,024.$$

Напишем искомое уравнение регрессии:

$$y = 0,202x + 1,024.$$

Для того чтобы получить представление, насколько хорошо вычисленные по этому уравнению значения Y_i согласуются с наблюдаемыми значениями y_i, найдем отклонения $Y_i - y_i$. Результаты вычислений сведены в табл. 2.

Таблица 2

x_i	Y_i	y_i	$Y_i - y_i$
1,00	1,226	1,25	-0,024
1,50	1,327	1,40	-0,073
3,00	1,630	1,50	0,130
4,50	1,993	1,75	0,083
5,00	2,034	2,25	-0,216

Как видно из таблицы, не все отклонения достаточно малы. Это объясняется малым числом наблюдений.

3.3. *Корреляционная таблица*

При большом числе наблюдений одно и то же значение x может встретиться n_x раз, одно и то же значение y может встретиться n_y раз, одна и та же пара чисел (x, y) может наблюдаться n_{xy} раз. Поэтому данные наблюдений группируют, т.е. подсчитывают частоты n_x , n_y , n_{xy} . Все сгруппированные данные записывают в виде таблицы, которую называют корреляционной.

Поясним устройство корреляционной таблицы на примере (табл. 3).

Таблица 3

X / Y	10	20	30	40	n_y
0,4	5	-	7	14	26
0,6	-	2	6	4	12
0,8	3	19	-	-	22
n_x	8	21	13	18	$n = 60$

В первой строке таблицы указаны наблюдаемые значения (10; 20; 30; 40) признака X , а в первом столбце - наблюдаемые значения (0,4; 0,6; 0,8) признака Y . На пересечении строк и столбцов вписаны частоты n_{xy} наблюдаемых пар значений признаков. Например, частота 5 указывает, что пара чисел (10; 0,4) наблюдалась 5 раз. Все частоты помещены в прямоугольнике, клетки которого выделены. Черточка означает, что соответственная пара чисел, например, (20; 0,4) не наблюдалась.

В последнем столбце записаны суммы частот строк. Например, сумма частот первой строки прямоугольника, клетки которого выделены, равна $n_y = 5 + 7 + 14 = 26$; это число указывает, что значение признака Y, равное 0,4 (в сочетании с различными значениями признака X) наблюдалось 26 раз.

В последней строке записаны суммы частот столбцов. Например, число 8 указывает, что значение признака X, равное 10 (в сочетании с различными значениями признака Y) наблюдалось 8 раз.

В клетке, расположенной в нижнем правом углу таблицы, помещена сумма всех частот (общее число всех наблюдений n). Очевидно

$$\sum n_x = \sum n_y = n.$$

В нашем примере $\sum n_x = 8 + 21 + 13 + 18 = 60$ и $\sum n_y = 26 + 12 + 22 = 60$.

3.4. Отыскание параметров выборочного уравнения прямой линии регрессии по сгруппированным данным. Выборочный коэффициент корреляции

В п. 3.1 для определения параметров уравнения прямой линии регрессии Y на X была получена система уравнений (2):

$$\begin{cases} \left(\sum x^2\right)\rho_{yx} + \left(\sum x\right)b = \sum xy, \\ \left(\sum x\right)\rho_{yx} + nb = \sum y. \end{cases} \tag{4}$$

Предполагалось, что значения X и соответствующие им значения Y наблюдались по одному разу. Теперь же допустим, что получено большое число данных (практически для удовлетворительной оценки искомых параметров должно быть хотя бы 50 наблюдений), среди них есть повторяющиеся, и они сгруппированы в виде корреляционной таблицы. Запишем систему

(4) так, чтобы она отражала данные корреляционной таблицы. Воспользуемся тождествами:

$$\sum x = n\bar{x} \text{ следствие } \bar{x} = \frac{\sum x}{n};$$

$$\sum y = n\bar{y} \text{ следствие } \bar{y} = \frac{\sum y}{n};$$

$$\sum x^2 = n\overline{x^2} \text{ следствие } \overline{x^2} = \frac{\sum x^2}{n}.$$

$\sum n_x = \sum n_y$ (учтено, что пара чисел (x, y) наблюдалась n_{xy} раз).

Подставив правые части тождеств в систему (4) и сократив обе части второго уравнения на n, получим:

$$\begin{cases} \left(n\overline{x^2}\right)\rho_{yx} + \left(n\bar{x}\right)b = \sum n_{xy}xy, \\ \left(\bar{x}\right)\rho_{yx} + b = \bar{y}. \end{cases} \tag{5}$$

Решив эту систему, найдем параметры ρ_{yx} и b и, следовательно, искомое уравнение:

$$\bar{y}_x = \rho_{yx}x + b. \tag{*}$$

Однако более целесообразно, введя новую величину - коэффициент корреляции, написать уравнение регрессии в ином виде. Сделаем это.

Найдем b из второго уравнения (5):

$$b = \bar{y} - \rho_{yx}x.$$

Подставив правую часть этого равенства в уравнение (*), получим:

$$\bar{y}_x - \bar{y} = \rho_{yx}\left(x - \bar{x}\right). \tag{6}$$

Найдем из системы (4) коэффициент регрессии, учитывая, что $\overline{x^2} - \left(\bar{x}\right)^2 = \sigma_x^2$:

$$\rho_{yx} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\bar{x}\bar{y}}{n[\overline{x^2} - \left(\bar{x}\right)^2]} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\sigma_x^2}.$$

Умножим обе части равенства на дробь $\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$:

$$\rho_{yx} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\overline{xy}}{n\sigma_x\sigma_y} \ .$$

Обозначим правую часть равенства через $r_{\text{в}}$ и назовем ее выборочным коэффициентом корреляции:

$$\rho_{yx} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = r_{\text{в}}, \quad \text{или} \quad \rho_{yx} = r_{\text{в}} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}.$$

Подставив правую часть этого равенства в (6), окончательно получим выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X вида

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_{\text{в}} \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \overline{x}\right) \ .$$

Замечание 1. Аналогично находят выборочное уравнение прямой линии регрессии X на Y вида

$$\overline{x}_y - \overline{x} = r_{\text{в}} \frac{\sigma_x}{\sigma_y}\left(y - \overline{y}\right),$$

где

$$r_{\text{в}} \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \rho_{xy} .$$

Как следует из предыдущего, выборочный коэффициент корреляции определяется равенством

$$r_{\text{в}} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\overline{x}\,\overline{y}}{n\sigma_x\sigma_y},$$

где x, y - варианты (наблюдавшиеся значения) признаков X и Y;

n_{xy} - частота наблюдавшейся пары вариант $\left(x, y\right)$;

n - объем выборки (сумма всех частот);

$\overline{x}$, $\overline{y}$ - выборочные средние;

σ_x, σ_y - выборочные среднеквадратические отклонения.

Замечание 2. Выборочный коэффициент корреляции имеет важное самостоятельное значение. В §51 приведем свойства выборочного коэффициента корреляции следствия из них.

Вопросы для самопроверки

1. В чем заключается основная задача математической статистики?
2. Что такое выборочное среднее?
3. Какие вы знаете оценки дисперсии?
4. Что такое генеральная доля?
5. В чем недостаток точечных оценок?
6. Какие стандартные статистические распределения вы знаете?
7. Постройте оценку максимального правдоподобия для параметра экспоненциального распределения.
8. Постройте доверительный интервал для математического ожидания экспоненциального распределения.
9. Что такое распределение Колмогорова, и для чего оно может быть использовано?
10. Зачем нужны методы построения статистических оценок?
11. Дайте определение функциональной зависимости.
12. Дайте определение статистической зависимости.
13. Что называется условным средним?
14. Дайте определение корреляционной зависимости.
15. Дайте определения уравнения регрессии.
16. В чем состоит задача теории корреляции?
17. Что представляет собой метод наименьших квадратов (МНК)?
18. Что такое наблюдаемая ордината в МНК?

19. Напишите параметры выборочного уравнения прямой линии регрессии в случае, когда данные не сгруппированы?

20. Поясните устройство корреляционной таблицы.

21. Напишите параметры выборочного уравнения прямой линии регрессии в случае, когда данные сгруппированы?

22. Как определяется выборочный коэффициент корреляции?

§51. Выборочный коэффициент корреляции и выборочное корреляционное отношение

Ключевые слова: *выборочный коэффициент корреляции, выборочное корреляционное отношение, теснота корреляционной зависимости, криволинейные корреляции, множественная корреляция.*

1. Выборочный коэффициент корреляции

Как следует из предыдущего параграфа, выборочный коэффициент корреляции определяется равенством

$$r_{\text{в}} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\bar{x}\,\bar{y}}{n\sigma_x\sigma_y},$$

где x, y - варианты (наблюдавшиеся значения) признаков X и Y;

n_{xy} - частота наблюдавшейся пары, вариант (x, y);

n - объем выборки (сумма всех частот);

$\bar{x}$, $\bar{y}$ - выборочные средние;

σ_x, σ_y - выборочные среднеквадратические отклонения.

Ниже приведем свойства выборочного коэффициента корреляции, из которых следует, что он служит для оценки тесноты линейной корреляционной зависимости.

1^0. Абсолютная величина выборочного коэффициента корреляции не превосходит единицы.

2^0 . Если выборочный коэффициент корреляции равен нулю и выборочные линии регрессии прямые. Тогда X и Y не связаны линейной корреляционной зависимостью.

Замечание. Если выборочный коэффициент корреляции равен нулю, то признаки X и Y могут быть связаны нелинейной корреляционной или даже функциональной зависимостью.

3^0. Если $|r_{\text{в}}| = 1$, то наблюдаемые значения признаков связаны линейной функциональной зависимостью.

4^0. С возрастанием абсолютной величины выборочного коэффициента корреляции линейная корреляционная зависимость становится более тесной и при $|r_{\text{в}}| = 1$ переходит в функциональную зависимость.

Из приведенных свойств вытекает смысл $|r_в|$: выборочный коэффициент корреляции характеризует ***тесноту линейной связи*** между количественными признаками в выборке: чем ближе $|r_в|$ к 1, тем связь сильнее; чем ближе $|r_в|$ к 0, тем связь слабее.

2. Выборочное корреляционное отношение

Для оценки тесноты линейной корреляционной связи между признаками в выборке служит выборочный коэффициент корреляции. Для оценки тесноты нелинейной корреляционной связи вводят новые сводные характеристики:

η_{yx} - выборочное корреляционное отношение Y к X;

η_{xy} - выборочное корреляционное отношение X к Y.

Выборочным корреляционным отношением Y к X называют отношение

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{\bar{y}_x}}{\sigma_y} .$$

Здесь

$$\sigma_{\bar{y}_x} = \sqrt{\frac{\sum n_x \left(\bar{y}_x - \bar{y}\right)^2}{n}} ; \qquad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum n_y \left(y - \bar{y}\right)^2}{n}} ,$$

где n – объем выборки (сумма всех частот);

n_x - частота значения x признака X;

n_y - частота значения y признака Y;

$\bar{y}$ - общая средняя признака Y;

$\bar{y}_x$ - условная средняя признака Y.

Аналогично определяется выборочное корреляционное отношение X к Y:

$$\eta_{xy} = \frac{\sigma_{\bar{x}_y}}{\sigma_x} .$$

Пример. Найти η_{yx} по данным корреляционной таблицы.

X / Y	10	20	30	n_y
15	4	28	6	38
25	6	--	6	12
n_x	10	28	12	$n=50$
$\overline{y}_x$	21	15	20	

Решение

Найдем общюю среднюю

$$\overline{y}=\frac{\sum n_y y}{n}=\frac{38\cdot 15+12\cdot 25}{50}=17{,}4.$$

Найдем

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{\sum n_y\left(y-\overline{y}\right)^2}{n}}=\sqrt{\frac{38(15-17)^2+12(25-17{,}4)^2}{50}}=4{,}27.$$

$$\sigma_{\overline{y}_x}=\sqrt{\frac{\sum n_x\left(\overline{y_x}-\overline{y}\right)^2}{n}}=\sqrt{\frac{10(21-17{,}4)^2+28(15-17{,}4)^2+12(20-16{,}4)^2}{50}}=2{,}73.$$

Искомое корреляционное отношение

$$\eta_{yx}=\frac{\sigma_{\overline{y}_x}}{\sigma_y}=0{,}64$$

Свойства выборочного корреляционного отношения

Поскольку η_{yx} обладает теми свойствами, что и η_{xy}, перечислим свойства только выборочного корреляционного отношения η_{yx}, которое далее для упрощения записи будем обозначать через η , и для простоты речи «корреляционным отношением».

1^0. Корреляционное отношение удовлетворяет двойному соотношению:

$$0\le\eta\le 1.$$

2^0. Если η=0, то и признак Y с признаком X корреляционной зависимостью не связан и обратно.

3^0. Если η=1, то признак Y связан с признаком X функциональной зависимостью и обратно.

4^0. $\eta \le |r_в|$.

5^0. Если $\eta = |r_в|$, то имеет место точная линейная корреляционная зависимость.

В свойстве 2^0 выборочного корреляционного отношения было отмечено, при $\eta = 0$ признаки не связаны корреляционной зависимостью; при $\eta = 1$ имеет место функциональная зависимость.

В рассуждениях не делалось никаких допущений о форме корреляционной связи. Поэтому η служит мерой тесноты связи для любой, в том числе и линейной формы. В этом преимущество корреляционного отношения перед коэффициентом корреляции, который оценивает тесноту лишь линейной зависимости. Вместе с тем корреляционное отношение обладает недостатком: оно не позволяет судить, насколько близко расположены точки, найденные по данным наблюдений, к кривой определенного вида, например, к параболе, гиперболе и т.д. Это объясняется тем, что при определении корреляционного отношения форма связи во внимание не принималась.

3. Криволинейные корреляции

Если график регрессии $\overline{y_x} = f(x)$ или $\overline{x_y} = \phi(y)$ изображается кривой линией, то корреляцию называют криволинейной.

Например, функции регрессии Y на X могут иметь вид: $\overline{y_x} = ax^2 + bx + c$ - параболическая корреляция, $\overline{y_x} = a + \dfrac{b}{x}$ - гиперболическая корреляция, $\overline{y_x} = ab^x$ - показательная корреляция и т.д.

Теория криволинейной корреляции решает те же задачи, что и теория линейной корреляции – установление формы и тесноты корреляционной связи.

Неизвестные параметры уравнения регрессии ищут методом наименьших квадратов. Для оценки тесноты криволинейной корреляции служат выборочные корреляционные отношения.

Рассмотрим параболическую корреляцию, предположив, что данные выборки позволяют считать, что имеет место именно такая корреляция. В этом случае выборочное уравнение регрессии Y на X имеет вид:

$$\overline{y}_x = Ax^2 + Bx + C, \qquad (1)$$

где A,B,C – неизвестные параметры.

Пользуясь МНК, получают систему линейных уравнений относительно неизвестных параметров (вывод опущен, поскольку он не содержит ничего нового сравнительно с п.1 лек.№14.)

$$\begin{aligned}
&\left(\sum n_x x^4\right)A + \left(\sum n_x x^3\right)B + \left(\sum n_x x^2\right)C = \sum n_x \overline{y}_x x^2,\\
&\left(\sum n_x x^3\right)A + \left(\sum n_x x^2\right)B + \left(\sum n_x x\right)C = \sum n_x \overline{y}_x x,\\
&\left(\sum n_x x^2\right)A + \left(\sum n_x x\right)B + nC = \sum n_x \overline{y}_x.
\end{aligned} \qquad (2)$$

Найденные из этой системы параметры A,B,C подставляют в (1) в итоге получают искомое уравнение регрессии.

4. Понятие о множественной корреляции

Если исследовать связь между несколькими признаками, то корреляцию называют множественной.

В простейшем случае число признаков равно трем, и связь между ними линейная:

$$z = ax + by + c.$$

В этом случае возникают задачи:

1) найти по данным наблюдений выборочное уравнение связи вида

$$z = Ax + Bx + C, \qquad (3)$$

т.е. требуется найти коэффициенты регрессии A, B и параметр C;

2) оценить тесноту связи между Z и обоими признаками X,Y;

3) оценить тесноту связи между Z и X (при постоянном Y), между Z и Y (при постоянном X).

Первая задача решается МНК, причем вместо уравнения (3) удобнее искать уравнение связи вида

$$z - \overline{z} = A\left(x - \overline{x}\right) + B\left(y - \overline{y}\right),$$

где

$$A = \frac{r_{xz} - r_{yz}r_{xy}}{1 - r_{xy}^2} \cdot \frac{\sigma_z}{\sigma_x}; \qquad B = \frac{r_{yz} - r_{xz}r_{xy}}{1 - r_{xy}^2} \cdot \frac{\sigma_z}{\sigma_y}.$$

Здесь r_{xz}, r_{yz}, r_{xy} –коэффициенты корреляции, соответственно, между признаками X и Z, Z и X, X и Y; $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ - среднеквадратическое отклонение.

Теснота связи признака *Z* с признаками *X, Y* оценивается выборочным совокупным коэффициентом корреляции:

$$R = \sqrt{\frac{r_{xz}^2 - 2r_{xy}r_{xz}r_{yz} + r_{yz}^2}{1 - r_{xy}^2}},$$

причем $0 \le R \le 1$.

Теснота связи между *Z* и *X* (при постоянном *Y*), между *Z* и *Y* (при постоянном *X*) оценивается, соответственно, частными выборочными коэффициентами корреляции:

$$r_{xz(y)} = \frac{r_{xz} - r_{xy}r_{yz}}{\sqrt{\left(1 - r_{xy}^2\right)\left(1 - r_{yz}^2\right)}}; \qquad r_{yz(x)} = \frac{r_{yz} - r_{xy}r_{xz}}{\sqrt{\left(1 - r_{xy}^2\right)\left(1 - r_{xz}^2\right)}}.$$

Эти коэффициенты имеют те же свойства и тот же смысл, что и обыкновенный выборочный коэффициент корреляции, т.е. служат для оценки линейной связи между признаками.

Вопросы для самопроверки

1. Как определяется выборочный коэффициент корреляции?

2. Приведите свойства выборочного коэффициента корреляции?

3. Что характеризует коэффициент корреляции?

4. Напишите формулу для оценки коэффициента корреляции нормально распределенной генеральной совокупности при больших *n*?

5. Как оценивают тесноту нелинейной корреляционной связи?

6. Приведите свойства выборочного корреляционного отношения.

7. В чем проявляется недостаток корреляционного отношения?

8. Какую задачу решает теория криволинейной корреляции?

9. Какой метод используется для нахождения коэффициентов регрессионных уравнений в теории криволинейной корреляции?

10. Что называется множественной корреляцией?

11. Как выясняется теснота связи между признаками во множественной корреляции?

§52. Статистические гипотезы и их статистическая проверка

Ключевые слова: *статистическая гипотеза, простая гипотеза, сложная гипотеза, основная или нулевая гипотеза, альтернативная или конкурирующая гипотеза, критическая граница, статистическая гипотеза, критерий согласия Пирсона, критерий Колмогорова-Смирнова.*

1. Общая схема проверки статистических гипотез

Определение 1. Статистической гипотезой называется любое высказывание о конкретных значениях параметров распределения некоторой случайной величины, или о виде этого распределения.

В первом случае гипотеза называется параметрической, во втором - непараметрической.

Нередко конкретные управленческие решения могут или должны быть приняты на основе анализа статистической информации о рассматриваемом процессе или явлении. Причем эти решения напрямую определяются тем, каковы конкретные параметры этого процесса.

Примеры

1. Станок производит фасовку некоторого продукта в стандартные упаковки весом по 1 кг. Средний вес 50-ти, случайным образом отобранных упаковок оказался равным $X = 0{,}98$ кг, при $S = 0{,}05$ кг. Можно ли считать, что имеющееся отклонение является результатом случайности и что станок настроен правильно? Или следует останавливать производство для переналадки станка?

2. В сельскохозяйственном районе опробуются два новых сорта пшеницы. Средняя урожайность первого составила 22 ц/га, второго – 22,5 ц/га. Следует ли считать, что второй сорт действительно урожайнее первого? Или имеющуюся разницу можно объяснить всегда присутствующими случайными причинами.

3. Имеется статистика страховых случаев по поводу угонов автомобилей различных марок. Следует ли считать, что частота случаев зависит от

марки автомобилей? Очевидно, что если да, то страховая компания должна учитывать это в условиях страхования.

Оказывается, в этих и во многих других подобных случаях, ответ на поставленный вопрос можно свести к проверке соответствующей статистической гипотезы. Именно имеющиеся в математической статистике методики проверки таких гипотез делают ее одним из самых практически значимых разделов прикладной математики.

Общую схему проверки статистических гипотез кратко сформулировать непросто. Но можно выделить в ней следующие моменты:

1. *Во-первых*, формулируют, так называемую, основную или нулевую гипотезу. Ее обычно обозначают H_0. Различают простые и сложные гипотезы.

Определение 2. Гипотеза называется простой, если она состоит в равенстве одного или нескольких параметров заданным числам. Если множество допустимых, для справедливости гипотезы, значений параметров состоят более, чем из одного элемента, то ее называют сложной. Например,

$H_0:\ a = 5$ - простая гипотеза;

$H_0:\ a = 5,\ \sigma^2 = 10$ - простая гипотеза;

$H_0:\ 4 \le a \le 5$ - сложная гипотеза.

2. Одновременно рассматривается некоторая гипотеза называемая альтернативной или конкурирующей, ее обычно обозначают H_1. Различают односторонние и двухсторонние конкурирующие гипотезы. Например,

$H_0:\ a > 5$ - односторонняя гипотеза;

$H_0:\ a < 5$ - односторонняя;

$H_0:\ a \ne 5$ - двусторонняя сложная гипотеза.

Выбор вида альтернативной гипотезы определяется смыслом задачи.

3. Всегда имеется некоторая величина Θ, которая рассчитывается из данных выборки, и поэтому ее называют выборочной статистикой или критерием проверки гипотезы. Причем из теории бывает известно, какое распределение $P(\Theta)$ будет иметь данная величина, если верна нулевая гипотеза.

4. Из данных конкретной выборки находится расчетное значение $\Theta_{расч}$, и если оно плохо соответствует теоретическому распределению $P(\Theta)$, то отсюда делается вывод, что в действительности случайная величина Θ имеет другое распределение, а значит, и нулевая гипотеза H_0 не верна. Она отклоняется, и принимается альтернативная гипотеза H_1.

5. При этом всегда имеется вероятность сделать неправильный вывод. Ошибкой I-го рода называют отклонение, на самом деле истинной, нулевой гипотезы. Вероятность этой ошибки называют уровнем значимости проверки гипотезы, и обычно обозначают α. Ошибкой II-го рода называют принятие на самом деле ложной, нулевой гипотезы. Вероятность этой ошибки обычно обозначают β, а величину $1-\beta$ называют мощностью критерия. В общем случае α и β не связаны каким-либо однозначным соотношением, хотя для конкретных критериев это возможно. Считается, что хороший критерий должен обладать свойством $\alpha < \beta$.

Определение 3. Область Q при попадании, в которую выборочной статистики $\Theta_{расч}$ отвергается основная гипотеза, называется критической областью.

Говорят об уровне значимости критической области. В соответствии с видом альтернативной гипотезы различают односторонние и двухсторонние критические области.

Иногда говорят, что критерием проверки статистической гипотезы называется правило построения критической области. Отметим еще, что иногда критерием называют теоретическое распределение $P(\Theta)$.

2. Критерий согласия

Выборки, полученные из нормально распределенной генеральной совокупности, обеспечивают наивысшую достоверность статистических выводов только в тех случаях, когда они получены из нормально распределенной генеральной совокупности. При отклонениях от нормального распределения точность оптимальных критериев существенно падает, поэтому, чтобы уверенно применять оптимальные критерии необходимо проверить предположение о нормальном распределении генеральной совокупности. Для этого используются критерии согласия. Здесь нулевая гипотеза H_0 представляет собой утверждение о том, что распределение генеральной совокупности, из которой получена выборка, не отличается от нормального. Существует несколько разновидностей критериев согласия. Рассмотрим те из них, которые получили наибольшее распространение на практике.

2.1. Предварительная проверка соответствия нормальному распределению

Критерии согласия требуют достаточно большой вычислительной работы, поэтому целесообразно перед тем, как их использовать, проверить с помощью более простых методов соответствие имеющихся экспериментальных данных нормальному распределению. Эти методы, естественно, обладают меньшей мощностью и позволяют установить только значительные расхождения с нормальным распределением, но если такие расхождения будут установлены, то необходимость в применении более точных, но более сложных критериев, как правило, отпадает.

Для предварительной проверки эмпирического распределения на нормальность можно использовать основные свойства нормального распределения, изложенные ранее. При этом эмпирическое распределение представляется в виде вариационного ряда или гистограммы (см. §51). Если в качестве параметров a и σ нормального распределения принять их выборочные оценки $\overline{X}$ и S, то для проверки можно использовать следующие свойства нормального распределения:

1) практически все отклонения от среднего значения (99,7 %) должны быть меньше $\pm 3S$;

2) примерно 2/3 всех отклонений (68,3 %) должны быть меньше $\pm S$;

3) половина всех отклонений от среднего значения должна быть меньше $\pm 0657S$;

4) можно использовать такое свойство нормального распределения, что его коэффициенты асимметрии и эксцесса равны нулю.

Для проверки по этому свойству необходимо вычислить выборочные оценки этих параметров по формулам:

$$A = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \left(x_i - \overline{X} \right)^3}{nS^3}, \qquad E = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \left(x_i - \overline{X} \right)^4}{nS^4},$$

где n_i – частоты интервалов группировки; k – число интервалов группировки; S – выборочное стандартное отклонение.

Значения коэффициентов A и E сравниваются с критическими значениями на уровне значимости α, и если критические значения превышены, то делается вывод о том, что распределение генеральной совокупности, из которой получена выборка, не согласуется с нормальным. В противном случае модель нормального распределения может быть принята. Таблица критических значений A и E содержится в литературе по статистике. Здесь не будем подробно останавливаться на этих приближенных критериях. Отметим лишь еще раз, что они могут использоваться только совместно с более точными критериями, рассмотренными ниже.

2.2. *Критерий согласия* χ^2 *– Пирсона*

Критерий согласия χ^2 – Пирсона разработан лучше других критериев и чаще других используется. Он основан на сравнении эмпирических частот интервалов группировки с теоретическими (ожидаемыми) частотами, рассчитываемыми по формулам нормального распределения.

Условия применения: объем выборки $n \geq 40$, выборочные данные сгруппированы в интервальный вариационный ряд с числом интервалов не менее 7, ожидаемые (теоретические) частоты интервалов не должны быть меньше 5.

Гипотеза H_0: $f(x) = f'(x)$ – плотность распределения $f(x)$ генеральной совокупности, из которой взята выборка, соответствует теоретической модели $f'(x)$ нормального распределения.

Альтернатива H_1: $f(x) \neq f'(x)$.

Уровень значимости: α.

Порядок применения:

1. Формулируется гипотеза, выбирается уровень значимости α.

2. Получается выборка объема $n \geq 40$ независимых наблюдений и представляется эмпирическое распределение в виде интервального вариационного ряда.

3. Рассчитываются выборочные характеристики $\overline{X}$ и S. Их используют в качестве генеральных параметров a и σ нормального распределения, с которым предстоит сравнить эмпирическое распределение.

4. Вычисляются значения теоретических частот n_i' попадания в i – интервал группировки. Для этого необходимо вероятность попадания в этот интервал, определенную по формулам (4), (5) §6, умножить на объем выборки n:

$$n_i' = n\left[\Phi_0\left(\frac{x_{вi} - \overline{x}}{S}\right) - \Phi_0\left(\frac{x_{нi} - \overline{x}}{S}\right)\right], \qquad (1)$$

где $\Phi_0(u)$ – функции Лапласа (см. табл. Приложения); $x_{вi}$ и $x_{нi}$ верхняя и нижняя границы интервала группировки.

Если окажется, что вычисленные ожидаемые частоты n_i' некоторых интервалов группировки меньше 5, то соседние интервалы объединяются так, чтобы сумма их ожидаемых частот была больше или равна 5. Соответственно, складываются и эмпирические частоты объединяемых интервалов.

5. Значение χ^2 - критерия рассчитывается по формуле:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}, \qquad (2)$$

где n_i – эмпирические частоты; n_i' –ожидаемые (теоретические) частоты; k – число интервалов группировки после объединения.

6. Из соответствующей таблицы Приложения находится критическое значение χ^2_α критерия согласия χ^2 – Пирсона для уровня значимости α и числа степеней свободы $\nu = k - 3$.

7. **Вывод:** если $\chi^2 \geq \chi^2_\alpha$, то эмпирическое распределение не соответствует нормальному распределению на уровне значимости α, в противном случае нет оснований отрицать это соответствие.

Пример 1. Воспользуемся данными табл. 1, где представлены результаты в беге на 100 м группы школьников $n = 50$ для проверки соответствия эмпирического распределения нормальному распределению.

Исходные данные помещены в графы 2, 3 табл. 2 (графа 2 – границы интервалов группировки, графа 3 – эмпирические частоты интервалов). В табл. 1 верхние границы уменьшены на 0,1 для удобства подсчета частот. В табл. 2 верхние границы оставлены без изменений.

Таблица 1

Табличное представление данных о результате в беге на 100 м

Номер интервала i	**Границы интервалов** $x_{нi} - x_{вi}$	**Среднее значение интервалов,** x_i	**Распределение данных**	**Частоты** n_i	**Накопленные частоты** n_{xi}	**Относительные частоты** f_i	**Отношения** n_{xi} **к объему выборки** F_i
1	12,4-13,1	12,8	/	1	1	0,02	0,02
2	13,2-13,9	13,6	//	2	3	0,04	0,06
3	14,0-14,7	14,4	/////////	9	12	0,18	0,24
4	14,8-15,5	15,2	///////////////	15	27	0,30	0,54
5	15,6-16,3	16,0	//////////////// /	17	44	0,34	0,88
6	16,4-17,1	16,8	/////	5	49	0,10	0,98
7	17,2-17,9	17,6	/	1	50	0,02	1,00
	Сумма			50		1,00	

1. Формулируем гипотезу $H_0 : f(x) = f'(x)$, выбираем уровень значимости $\alpha = 0,05$.

2. Получаем выборку объема $n = 50$, строим интервальный вариационный ряд с числом интервалов $k = 7$ (см. табл. 1).

3. Выборочные характеристики по этим данным рассчитаны в примере 3.6:

$$\overline{X} = 15,4, \quad S = 0,9.$$

4. Вычисляем значения теоретических частот по формуле (1) с использованием соответствующей таблицы Приложения. Предварительно нормируем границы интервалов группировки:

$$u_{вi} = \frac{x_{вi} - \overline{X}}{S}, \qquad u_{нi} = \frac{x_{нi} - \overline{X}}{S}\cdot$$

Нормированные границы занесены в графу 4, а вычисленные теоретические частоты – в графу 5 табл. 2.

Поскольку для интервалов с номерами 1, 2, 7 теоретические частоты оказались меньше 5, объединяем интервалы 1 и 2 с 3-м, а интервал 7 с 6-м интервалами. Суммируем эмпирические и ожидаемые частоты интервалов, которые мы объединили. После объединения получилось $k = 4$ интервала.

Таблица 2

Расчет критерия χ^2 – Пирсона

№ п/п	Границы интервалов $x_{нi}$; $x_{вi}$	Частоты интервалов n_i	Нормированные границы интервалов $u_{нi^*}, u_{вi}$	Теоретические частоты n_i'	$n_i - n_i'$	$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$
1	2	3	4	5	6	7
1	12,4; 13,2		−3,33; −2,44			
2	13,2; 14,0	$\left.\begin{matrix}1\\2\\9\end{matrix}\right\}12$	−2,44; −1,56	$\left.\begin{matrix}0,345\\2,603\\9,603\end{matrix}\right\}12,551$	−0,551	0,024
3	14,0; 14,8		−1,56; −0,67			
4	14,8; 15,6	15	−0,67; 0,22	16,780	−1,780	0,189
5	15,6; 16,4	17	0,22; 1,11	13,973	3,027	0,658
6	16,4; 17,2	$\left.\begin{matrix}5\\1\end{matrix}\right\}6$	1,11; 2,0	$\left.\begin{matrix}5,538\\1,04\end{matrix}\right\}6,578$	−0,578	0,051
7	17,2; 18,0		2;0; 2,89			
Сумма		50		49,882		0,922

5. Значение критерия χ^2, определяемое по формуле (2) , равно:

$$\chi^2 = 0,922.$$

Промежуточные расчеты отражены в графах 6 и 7 табл. 2.

6. Из соответствующей таблицы Приложения находим для уровня значимости $\alpha = 0,05$ и числа степеней свободы $\nu = 4 - 3 = 1$:

$$\chi^2_{0,05} = 2,84.$$

7. **Вывод:** поскольку $\chi^2 < \chi^2_{0,05}$ считаем, что эмпирическое распределение соответствует нормальному на уровне значимости 0,05.

2.3. Критерий λ Колмогорова - Смирнова

Другим критерием, часто используемым для проверки гипотезы о нормальности распределения, является критерий λ Колмогорова - Смирнова.

Здесь гипотеза H_0 формулируется по отношению к функциям распределения $F(x)$ и $F'(x)$. $F(x)$ функция распределения генеральной совокупности, из которой получена выборка, а $F'(x)$ - функция непрерывного теоретического распределения (нормального распределения).

Условия применения: объем выборки $n \geq 35$, эмпирическое распределение представлено в виде интервального вариационного ряда.

Гипотеза $H_0 : F(x) = F'(x)$.

Альтернатива $H_1 : F(x) \neq F'(x)$.

Уровень значимости: α.

Порядок применения:

1. Формулируется гипотеза H_0, назначается уровень значимости α.

2. Получают выборку объема $n \geq 35$ независимых наблюдений, она группируется в интервальный вариационный ряд.

3. Вычисляются выборочные характеристики $\overline{X}$ и S.

4. Рассчитываются значения эмпирических накопленных частот n_{xi} и теоретических накопленных частот n'_{xi} по формуле:

$$n'_{xi} = n\left[\frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{x_i - \overline{X}}{S}\right)\right], \tag{3}$$

где n – объем выборки; $\Phi_0(u)$ – функция Лапласа; x_i – срединные значения интервалов группировки.

5. Вычисляются значения критерия λ:

$$\lambda = \frac{\max\limits_i \left|n_{x_i} - n'_{x_i}\right|}{\sqrt{n}}, \tag{4}$$

где $\max\limits_i \left|n_{x_i} - n'_{x_i}\right|$ – максимальное значение модуля (абсолютной величины) разности между эмпирическими n_{x_i} и n'_{x_i} накопленными частотами.

6. Определяется критическое значение критерия λ_α Колмогорова-Смирнова при уровне значимости α. Для стандартных уравнений значимости критические значения равны:

$$\lambda_{0,05} = 0,895; \qquad \lambda_{0,01} = 1,035.$$

Они соответствуют рассматриваемому варианту применения критерия Колмогорова – Смирнова, когда для вычисления теоретических накопленных частот используются выборочные характеристики $\bar{x}$ и S в качестве параметров μ и σ нормального распределения.

7. **Вывод:** если $\lambda \geq \lambda_\alpha$, то эмпирическое распределение не соответствует нормальному на уровне значимости α, в противном случае принимается гипотеза о согласии распределения генеральной совокупности с нормальным распределением.

Пример 2

Воспользуемся данными предыдущего примера 1 для проверки их соответствия нормальному распределению по критерию Колмогорова – Смирнова.

В табл. 3 в столбцах 2, 3 приведены срединные значения интервалов группировки и эмпирические накопленные частоты, взятые из табл. 1.

Таблица 3

Расчет критерия λ Колмогорова − Смирнова

№ п/п	**Срединные значения интервалов** x_i	**Накопленные частоты** n_{xi}	**Нормированные срединные значения** u_i	**Теоретические накопленные частоты** u'_{xi}	$\frac{\lvert n_{x_i} - n'_{x_i} \rvert}{\sqrt{n}}$
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	12,8	1	−2,89	0,098	0,127
2	13,6	3	−2,0	1,138	0,263
3	14,4	12	−1,11	6,675	0,753
4	15,2	27	−0,22	20,648	0,898
5	16,0	44	0,67	37,428	0,929
6	16,8	49	1,56	47,03	0,279
7	50	50	2,44	49,633	0,052

1. Формулируем гипотезу $H_0 : F(x) = F'(x)$ и выбираем уровень значимости $\alpha = 0,05$.

2. Имеем выборку объема $n = 50$, сгруппированную в интервальный вариационный ряд с семью интервалами.

3. Выборочные характеристики рассчитаны в предыдущем примере:

$$\overline{X} = 15,4; \qquad S = 0,9.$$

4. Эмпирические накопленные частоты приведены в графе 3, а теоретические, рассчитанные по формуле (3) – в графе 5.

5. Значение критерия λ составляет

$$\lambda = \frac{\max\limits_{i} \left| n_{x_i} - n'_{x_i} \right|}{\sqrt{n}} = 0,929.$$

6. Критическое значение для $\alpha = 0,05$ равно $\lambda_{0,05} = 0,895$.

7. **Вывод:** поскольку $\lambda > \lambda_{0,05}$, мы вынуждены отклонить гипотезу о том, что выборка взята из нормально распределенной генеральной совокупности.

Оба рассмотренных критерия χ^2 – Пирсона и λ Колмогорова−Смирнова применимы в одних и тех же условиях $(n \geq 40)$. Сравнение мощностей этих критериев для общего случая затруднительно, но из опыта известно, что критерий λ Колмогорова – Смирнова является более мощным (чаще обнаруживает отклонения от нормальности), если среднее и дисперсия теоретического нормального распределения оцениваются по выборке. Рассмотренные выше примеры 1 и 2 подтверждают это: для одних и тех же данных на одинаковом уровне значимости критерий λ Колмогорова – Смирнова обнаружил несоответствие нормальному распределению, а χ^2 - критерий позволяет принять гипотезу о нормальности.

Упражнение

Проверить гипотезу о нормальном распределении выборки из 55 наблюдений.

13,5	20,3	15,4	17,2	19,2	23,3	18,1	21,9	15,3	16,8	13,2
17,8	20,4	16,5	19,7	20,5	14,3.	20,1	16,8	14,7	20,8	19,5
11,8	15,3	19,3	17,8	16,2	15,7	22,8	21,9	12,5	10,1	21,1
18,6	18,3	14,7	14,5	18,1	18,4	13,9	19,1	18,5	20,2	23,8
19,1	16,7	20,4	19,5	17,2	19,6	17,8	21,3	17,5	19,4	1 7,8

Принять $\alpha = 0{,}1$.

Вопросы для самопроверки

1. Какие вы можете привести примеры статистических гипотез? Какие из них простые гипотезы?

2. Что такое статистический критерий и его теоретическое распределение?

3. Что такое мощность критерия?

4. Что такое критическая область?

5. Сформулируйте кратко общую схему проверки статистических гипотез.

6. Какие вопросы решает критерий согласия?

7. Какие критерии согласия приводятся выше ?

8. На чем основан критерий согласия χ^2 – Пирсона?

9. Сформулируйте порядок применения критерия согласия χ^2 – Пирсона.

10. На чем основан критерий λ Колмогорова - Смирнова. По отношению к чему формулируется гипотеза H_0?

11. Сформулируйте порядок применения критерия λ Колмогорова - Смирнова.

12. Что можно сказать по поводу сравнения мощностей этих критериев?

§53. Элементы теории игр. Матричные игры

Ключевые слова: *игра, матричная игра, равновесная ситуация, седловая точка в матричной игре, смешанная стратегия, правило доминирования.*

1. Предмет и задачи теории игр

В экономике сталкиваются с ситуациями, когда эффективность решений одних участников экономического процесса зависит от решений, принятых другими участниками. Например, объем выпускаемой предприятием продукции зависит от объема аналогичной продукции, выпускаемой другими предприятиями. При этом каждое предприятие сознательно стремится добиться наилучших результатов за счет других. Такие ситуации называются *конфликтными*. При этом ни одна из сторон не может полностью контролировать положение, так как все участники процесса принимают решения в условиях неопределенности. В реальных условиях нередко возникают ситуации, когда антагонизм отсутствует, но существуют противоречия. Например, для нормальной работы производства необходимо наличие запасов, но их чрезмерное увеличение приводит к дополнительным затратам на содержание и хранение. Конфликтные ситуации возникают как в результате сознательной деятельности людей, так из-за их недостаточной информированности об условиях проведения планируемой операции.

Построением математических моделей конфликтных ситуаций и разработкой методов решения возникающих в этих ситуациях задач занимается теория и др.

Методы и рекомендации теории игр применимы к многократно повторяющимся конфликтным ситуациям. Если конфликтная ситуация реализуется ограниченное число раз, то рекомендации теории игр теряют смысл.

Игра – это упрощенная математическая модель конфликтной ситуации.

Игра ведется по определенным правилам. Суть игры состоит в том, что каждый участник принимает такое решение, которое, как он полагает, обеспечит ему наилучший исход. Исходом игры называется значение некоторой функции, называемой *функцией выигрыша* (*платежной функцией*), которая может задаваться в матричном или аналитическом виде.

Величина выигрыша зависит от стратегии, принимаемой игроком.

Стратегия – это совокупность правил, однозначно определяющих последовательность действий игрока в каждой конкретной ситуации, складывающиеся в процессе игры.

Оптимальной называется стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечивает данному игроку максимально возможный средний выигрыш. Количество стратегий у каждого игрока может быть конечным или бесконечным. В зависимости от этого игры подразделяются на *конечные* и *бесконечные*.

Игра состоит из отдельных партий.

Партия – это каждый вариант реализации игры.

Ход – это выбор и реализация игроком одного из допустимых вариантов поведения.

В игре могут сталкиваться интересы двух или нескольких игроков, поэтому игры бывают парные и множественные. В зависимости от взаимоотношений участников различают игры *некооперативные* (бескоалиционные), когда частники не имеют права заключать соглашения, и *кооперативные* (коалиционные).

В экономике нередко приходится сталкиваться с ситуацией, когда один из участников безразличен к результату игры. Такие игры называются *играми с природой*. Под термином «природа» понимают всю совокупность внешних обстоятельств, в которых сознательному игроку приходится принимать решения. Например, определение объема выпуска сезонной продукции в ожидании наиболее выгодного для ее реализации уровня спроса. В качестве второго игрока здесь выступает уровень спроса. В играх с природой степень неопределенности для сознательного игрока возрастает. Поскольку «природа» безразлична к результатам игры, то она может реализовать такие состояния, которые невыгодны ей, а выгодны сознательному игроку.

2. Матричные игры

Пусть в игре два игрока. Игрок A имеет m стратегий, а игрок B – n стратегий.

Обозначим стратегии игрока A как $A_1, A_2, ..., A_m$, а стратегии игрока B – как $B_1, B_2, ..., B_n$.

Если игрок A выбрал стратегию A_i, а игрок B – стратегию B_k, то выигрыш игрока A составит a_{ik}, а игрока B - b_{ik}, причем

$$a_{ik} = -b_{ik}. \qquad (1)$$

Поэтому при анализе такой игры достаточно рассмотреть выигрыш только одного игрока, например, выигрыш a_{ik} игрока A. Зная выигрыш a_{ik} по формуле (1) легко определить выигрыш b_{ik}.

Матричные игры называются *парными играми с нулевой суммой*, в которых выигрыш одного игрока равен проигрышу другого.

Если известны не значения a_{ik} для каждой пары стратегий $\{A_i B_k\}$, $i = 1, 2, ..., m$, $k = 1, 2, ..., n$, то их удобно записать в виде прямоугольной таблицы, строки которой соответствуют стратегиям игрока A, а столбцы – стратегиям игрока B (табл. 1).

Таблица 1

	B_1	B_2	…	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

Чаще эти выигрыши записывают в виде платежной матрицы (матрицы игры) размера $m \times n$, поэтому такие игры называют *матричными играми* $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матричные игры относятся к разряду антагонистических, т.е. игр, в которых интересы игроков противоположны.

Пример 1. Игроки A и B одновременно и независимо друг от друга записывают числа 1 или 2. Если записанные числа одинаковы, то игрок A выигрывает одно очко, если разные, то одно очко выигрывает игрок B. Построить платежную матрицу данной игры.

Решение

У игрока A две стратегии: A_1 - записать число 1 и A_2 - записать число 2. У игрока B также две стратегии: B_1 - записать число 1 и B_2 - записать число 2.

Матрица выигрышей игрока A в этой игре 2×2 имеет вид

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В данной матрице строки соответствуют стратегиям игрока A, а столбцы – стратегиям игрока B.

Действительно, если игрок A делает ход A_1, а игрок B - ход B_1, то одно очко выигрывает игрок A и $a_{11}=1$. Если игрок A делает ход A_1, а игрок B - ход B_2, то одно очко выигрывает игрок B, соответственно, игрок A это очко проигрывает, т.е. $a_{12}=-1$ и т.д.

В примере 1 рассмотрена простейшая математическая модель конечной конфликтной ситуации, когда имеются два участника и выигрыш одного равен проигрышу другого. Такая модель называется *антагонистической игрой двух лиц с нулевой суммой*.

3. Равновесная ситуация

Пусть матричная игра $m\times n$ задана платежной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Строки этой матрицы соответствуют стратегиям игрока A, а столбцы – стратегиям игрока B. В теории игр предполагается, что оба игрока действуют разумно, т.е. стремятся к получению максимального выигрыша, считая, что соперник действует наилучшим для себя образом.

Определим оптимальные стратегии каждого из игроков. Начнем с анализа стратегий игрока A. На стратегию A_i игрока A игрок B отметит такой стратегией B_k, при которой выигрыш игрока A будет минимальным. Аналогично игрок B будет отвечать на все m стратегий игрока A. Другими словами, найдем в каждой строке матрицы минимальный элемент (минимальные выигрыши игрока A):

$$\alpha_i = \min_k a_{ik},\ i = 1,\ 2, \dots, m$$

и запишем их в правом столбце табл. 2.

Таблица 2

	B_1	B_2	**…**	B_k	**…**	B_n	**Минимальные выигрыши игрока** A
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{ik}	…	a_{1n}	α_1
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2k}	…	a_{2n}	α_2
…	…	…	…	…	…	…	…
A_i	a_{i1}	a_{i2}	…	a_{ik}	…	a_{in}	α_n
…	…	…	…	…	…	….	…
A_m	a_{m1}	a_{m1}	…	a_{mk}	…	a_{mn}	α_m
Максимальные выигрыши игрока А	β_1	β_2	…	β_k	…	β_n	

Действуя разумно, игрок A остановится на той стратегии A_i, для которой a_i окажется максимальным. Поэтому среди чисел $\alpha_i = \min_k a_{ik}$ выбираем максимальное число

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_k a_{ik}. \quad (3)$$

Число a называется *нижней ценой игры.*

Принцип построения стратегии игрока A, основанный на максимизации минимальных выигрышей, называется принципом максимина $(\max\min)$.

Проведем анализ стратегий игрока B. Для этого найдем в каждом столбце матрицы максимальный элемент (максимальные выигрыши игрока A):

$$\beta_k = \max_i a_{ik},\ k = 1, 2, \ldots, n$$

и запишем их в нижней строке табл. 2. Действуя разумно, игрок B остановится на той стратегии B_k, для которых β_k окажется минимальным. Поэтому среди чисел $\beta_k = \max_i a_{ik}$ выбираем минимальное число

$$\beta = \min_k \beta_k = \min_k \max_i a_{ik}. \tag{4}$$

Число β называется *верхней ценой игры.*

Принцип построения стратегии игрока B основан на минимизации максимальных выигрышей. Он называется принципом минимакса $(\min\max)$.

Нижняя цена игры a и верхняя цена игры β связаны неравенством

$$\alpha \le \beta. \tag{5}$$

Если $\alpha = \beta = a_{i,opt;k,opt}$ или

$$\max_k a_{ik} = \min_k \max_i a_{ik} = a_{i,opt;k,opt}, \tag{6}$$

то ситуация $\left(A_{i,opt}, B_{k,opt}\right)$ оказывается равновесной, и ни один игрок не заинтересован в том, чтобы ее нарушить. В том случае, когда верхняя цена игры равна нижней, их называют просто *ценой игры*.

Если $\alpha = \beta$, то такую игру называют также *игрой с седловой точкой*, а пара оптимальных стратегий $\left(A_{i,opt}, B_{k,opt}\right)$ - с*едловой точкой матрицы*. Цена игры обозначается буквой v. Тогда $v = a_{i,opt;k,opt}$.

Седловых точек в матричной игре может быть несколько, но все они имеют одно и то же значение.

Заметим, что седловой элемент $a_{i,opt;k,opt}$ является наименьшим в i-й строке i_{opt}, содержащей седловой элемент, и наибольшим в k-м столбце k_{opt}, также содержащем седловой элемент:

$$a_{i;k,opt} \le a_{i,opt;k,opt} \le a_{i,opt;k}. \qquad (7)$$

Пример 2. Игроки A и B записывают одну из трех цифр: 1, 2 или 3. Затем сравнивают эти цифры и расплачиваются друг с другом, так как показано в платежной матрице размера 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определить оптимальные стратегии.

Решение

Здесь строки соответствуют стратегиям игрока A, а столбцы – стратегиям игрока B.

Стратегии игрока A: $A_1 = 1$; $A_2 = 2$; $A_3 = 3$.

Стратегии игрока B: $B_1 = 1$; $B_2 = 2$; $B_3 = 3$.

Определим оптимальные стратегии каждого из игроков. Начнем с анализа стратегий игрока A. Игрок A анализирует свою стратегию на максимин $(\max\min)$, т.е. на максимальный из своих минимальных выигрышей. На стратегию A_1 игрока A игрок B ответит стратегию B_1, т.е. той стратегией, при которой выигрыш игрока A будет минимальным (выигрыш – 2 игрока A означает его проигрыш +2). На стратегию игрока A игрок B ответит стратегией B_2 (минимальный выигрыш игрока A равен 1), на стратегию A_3 - стратегией B_2 (минимальный выигрыш игрока A равен – 3). Запишем минимальные выигрыши игрока A в правом столбце табл. 3.

Таблица 3

	B_1	B_2	B_3	**Мин.-й выигрыш игрока** A
A_1	-2	2	- 1	-2

A_2	2	1	1	1
A_3	3	-3	1	-3
Макс. -й выигрыш игрока	3	2	1	

Игрок A, проанализировав правый столбец таблицы, остановит свой выбор на стратегии A_2, при которой его минимальный выигрыш максимален. Это максимальное значение называется максимин $(\max\min)$. В данном случае $\max\min = 1$. Если игрок A будет придерживаться этой стратегии, то ему гарантирован выигрыш, не меньший 1, при любом поведении противника.

Аналогично проведем анализ стратегий игрока B. Игрок B анализирует свою стратегию на минимакс $(\min\max)$, т.е. на минимальный из максимальных выигрышей игрока A. На стратегию B_1 игрока B игрок A ответит стратегией A_3, т.е. той стратегией, при которой его выигрыш будет максимальным и равным 3. На стратегию B_2 игрока B игрок A ответит стратегией A_1 (его максимальный выигрыш равен 2), на стратегию B_3 – стратегией A_3 (его максимальный выигрыш равен 1). Запишем максимальные выигрыши игрока A в нижней строке табл. 3. В данном случае $\min\max = 1$. Если игрок B будет придерживаться этой стратегии, то он проиграет не больше 1 при любом поведении противника.

Таким образом, в рассматриваемой игре $\max\min$ и $\min\max$ совпали:

$$\max\min = \min\max = 1.$$

Таким образом, ситуация оказывается равновесной, матрица игры имеет седловую точку

$$\alpha = \beta = 1.$$

Упражнение

Найдите нижнюю и верхнюю цены и определите седловую точку игры, представленной матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 7 \\ 3 & -5 & -1 & 6 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 7 & -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Смешанные стратегии

Если платежная матрица не имеет седловой точки, т.е. $\alpha < \beta$, то поиск решения игры приводит к применению сложной стратегии с определенными частотами. Такая сложная стратегия называется *смешанной*.

В табл. 4 приведен пример, когда нижняя цена игры α не совпадает с верхней ценой игры β.

Таблица 4

	B_1	B_2	B_3	**Минимальные выигрыши игрока** A
A_1	4	1	-3	-3
A_2	-2	1	3	-2
A_3	0	2	-3	-3
Максимальные выигрыши игрока A	4	2	3	

Здесь $\alpha = -2$, а $\beta = 2$. Таким образом, игрок A может выиграть не менее -2 (знак «$-$» перед цифрой означает проигрыш игроком B двух единиц), а игрок B может ограничить свой проигрыш (выигрыш игрока A) двумя единицами. Область между числами -2 и 2 остается нейтральной, и каждый игрок может попытаться улучшить свой результат за счет области. Для компромиссного распределения разности $\beta - \alpha$ при многократном повторении игры игроками используется случайное применение своих чистых стратегий. Это обеспечивает наибольшую скрытность выбора стратегии, поскольку результат выбора не может быть известен противнику, так как он неизвестен самому игроку.

Обратимся к общему случаю матричной игры, представленной в табл. 2. Обозначим через $p_1, p_2, \ldots, p_m$ вероятности, с которыми игрок A использует в ходе игры свои чистые стратегии $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Для этих вероятностей выполняются условия

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1;\ p_1 \ge 0,\ p_2 \ge 0, \ldots, p_m \ge 0. \tag{8}$$

Вектор $\overline{p} = \overline{p}(p_1, p_2, \ldots, p_m)$, проекция которого удовлетворяет условиям (8), полностью определяет характер игры игрока A и называется его *смешанной стратегией*. Механизм случайного выбора чистых стратегий, которым пользуется игрок A, обеспечивает ему бесконечное множество смешанных стратегий.

Аналогично, вектор $\overline{q} = \overline{q}(q_1, q_2, \ldots, q_n \ge 0)$, проекция которого удовлетворяет условиям (9),

$$\sum_{k=1}^{n} q_k = 1;\ q_1 \ge 0,\ q_2 \ge 0, \ldots, q_n \ge 0 \tag{9}$$

полностью определяет характер игры игрока B и называется *смешанной стратегией игрока* B. Игрок B, как и игрок A, располагает бесконечным множеством смешенных стратегий.

Пусть игроки A и B применяют смешанные стратегии $\overline{p}$ и $\overline{q}$, соответственно, т.е. игрок A использует стратегию A_i с вероятностью p_i, а игрок B - стратегию B_k с вероятностью q_k. Поскольку события A_i и B_k независимы, то вероятность появления комбинации (A_i, B_k) равна произведению вероятностей p_i и q_k , т.е. $p_i\, q_k$. При использовании смешанных стратегий игра приобретает случайный характер, случайными становятся и величины выигрышей игроков. Поэтому выигрыш игрока A (проигрыш игрока B) определяют его математическим ожиданием, рассчитываемым по формуле

$$E(A, \overline{p}, \overline{q}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, p_i q_k\ . \tag{10}$$

Функция (10) называется *платежной функцией игры с матрицей*, заданной табл.5.

Нижней ценой игры называется число α, рассчитываемое по формуле:

$$\alpha = \max_{\bar{q}} \max_{\bar{p}} E\left(A, \bar{p}, \bar{q}\right). \tag{11}$$

Верхней ценой игры называется число β, рассчитываемое по формуле:

$$\alpha = \max_{\bar{q}} \max_{\bar{p}} E\left(A, \bar{p}, \bar{q}\right). \tag{12}$$

Таблица 5

	B_1	B_2	$\dots$	B_k	...	B_n	
A_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1k}	$\dots$	a_{1n}	p_1
A_2	a_{21}	a_{22}	$\dots.$	a_{2k}	$\dots$	a_{2n}	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_i	a_{i1}	a_{i2}	$\dots$	a_{ik}	$\dots$	a_{in}	p_i
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mk}	$\dots$	a_{mn}	
Вероятности использования чистых стратегий игроком B	q_1	q_2	$\dots$	q_k	$\dots$	q_n	

Оптимальными смешанными стратегиями называются стратегии, удовлетворяющие соотношению (сравнить с формулой (6))

$$\max_{\bar{q}} \min_{\bar{q}} E(A, \bar{p}, \bar{q}) = \min_{\bar{q}} \max_{\bar{p}} E(A, \bar{p}, \bar{q}) = E\left(A, \bar{p}_{opt}, \bar{q}_{opt}\right). \tag{13}$$

Величину

$$v = E\left(A, \bar{p}_{opt}, \bar{q}_{opt}\right),$$

определенную соотношением (13), называют *ценой игры*.

Дадим другое определение оптимальных смешанных стратегий.

Векторы $\bar{p}_{opt}$ и $\bar{q}_{opt}$ называются **оптимальными смешанными стратегиями**, если они образуют седловую точку платежной функции игры $E\left(A, \bar{p}, \bar{q}\right)$, т.е. удовлетворяют неравенству (сравнить с неравенством (7))

$$E\left(A, \bar{p}, \bar{q}\right) \le E\left(\bar{p}_{opt}, \bar{q}_{opt}\right) \le E\left(A, \bar{p}_{opt}, \bar{q}\right). \tag{14}$$

Из отношения (14) следует, что в седловой точке $\left(\overline{p}_{opt}, \overline{q}_{opt}\right)$ платежная функция $E\left(A, \overline{p}, \overline{q}\right)$ достигает максимума по смешанным стратегиям $\overline{p}$ игрока A и минимума по смешанным стратегиям $\overline{q}$ игрока B. Возникают два вопроса:

1. Какие матричные игры имеют решение в смешанных стратегиях?
2. Как находить решение матричной игры, если оно существует?

Ответы на данные вопросы дают две следующие теоремы.

Теорема 1. Основная теорема теории матричных игр (Дж. фон Нейман). Для матричной игры с любой матрицей A величины $\max_{\overline{p}} \min_{\overline{q}} E\left(A, \overline{p}, \overline{q}\right)$ и $\min_{\overline{q}} \max_{\overline{p}} E\left(A, \overline{p}, \overline{q}\right)$ существуют и равны между

$$\max_{\overline{p}} \min_{\overline{q}} E\left(A, \overline{p}, \overline{q}\right) = \min_{\overline{q}} \max_{\overline{p}} E\left(A, \overline{p}, \overline{q}\right).$$

Более того, существует хотя бы одна ситуация в смешанных стратегиях $\left(\overline{p}_{opt}, \overline{q}_{opt}\right)$, для которой выполняется соотношение

$$E\left(A, \overline{p}_{opt}, \overline{q}_{opt}\right) = \max_{\overline{p}} \min_{\overline{q}} E\left(A, \overline{p}, \overline{q}\right) = \min_{\overline{q}} \max_{\overline{p}} E\left(A, \overline{p}, \overline{q}\right).$$

Теорема 2. Основные свойства оптимальных смешанных стратегий. Пусть

$\overline{p}_{opt} = \overline{p}_{opt}\left(p_{1,opt}, p_{2,opt}, \ldots, p_{m,opt}\right)$, $\quad \overline{q}_{opt} = \overline{q}_{opt}\left(q_{1,opt}, q_{2,opt}, \ldots, q_{m,opt},\right)$ - оптимальные смешанные стратегии и $v = E\left(A, \overline{p}_{opt}, \overline{q}_{opt}\right)$ - цена игры.

Оптимальная смешанная стратегия $\overline{p}_{opt}$ игрока A складывается только из тех чистых стратегий A_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ (т.е. только те вероятности p_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ могут отличаться от нуля), для которых

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} q_{k,opt} = v.$$

Аналогично, только те вероятности q_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, могут отличаться от нуля, для которых

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ik} p_{i,opt} = v.$$

Имеют место соотношения

$$v = \min_{1\le k\le n} \sum_{i=1}^{m} a_{ik} p_{i,opt} = \max_{\bar{p}} \min_{1\le k\le n} \sum_{i=1}^{m} a_{ik} p_i =$$

$$= \min_{\bar{q}} \max_{1\le i\le m} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} q_k = \max_{1\le i\le m} \sum_{k=1}^{n} a_{jk} q_{k,opt} = v.$$

Рассмотрим методы решения некоторых матричных игр.

5. Графические решения матричных игр

Графический метод применим к тем играм, в которых хотя бы один игрок имеет две стратегии.

Рассмотрим игру $2\times n$, представленную в табл. 6. Эта игра не имеет седловой точки. Согласно теореме 2. имеем

$$v = \min_{1\le k\le n} \sum_{i=1}^{2} a_{jk} p_{i,opt} =$$

$$\min_{1\le k\le n}\left(a_{1k} p_{opt} + a_{2k}\left(1-p_{opt}\right)\right) = \max_{\bar{p}} \min_{1\le k\le n}\left(a_{1k} p + a_{2k}\left(1-p\right)\right). \qquad (15)$$

Таблица 6

	B_1	B_1	…	B_1	…	B_1	**Вероятности использования чистых стратегий игроком** A
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1k}	…	a_{1n}	p
A_1	a_{21}	a_{22}	…	a_{2k}	…	a_{2n}	$1-p$
Вероятности использования чистых стратегий игроком B	q_1	q_2	…	q_k	…	q_n	

Максимум функции

$$\min_{1\le k\le n}\left(a_{1k} p + a_{2k}\left(1-p\right)\right) \qquad (16)$$

найдем, построив ее график. Для этого поступаем следующим образом. Построим графики прямых

$$w_k = a_{1k} p + a_{2k}\left(1-p\right) = \left(a_{1k} - a_{2k}\right)p + a_{2k} \qquad (17)$$

для каждого $k = 1, 2, ..., n$ в системе координат pwO (рис. 1). В соответствии с требованием (16), на каждой из построенных прямых определяются и отмечаются наименьшие значения. На рис. 2 эти значения выделены полужирной ломаной линией. Эта ломанная огибает снизу все семейство построенных прямых и называется *нижней огибающей семейства*.

В соответствии с (15) цену игры v определяет верхняя точка построенной нижней огибающей. Координаты этой точки являются оптимальной стратегией игрока A:

$$\overline{p}_{opt} = \overline{p}_{opt}\left(p_{opt}; \left(1 - p_{opt}\right)\right).$$

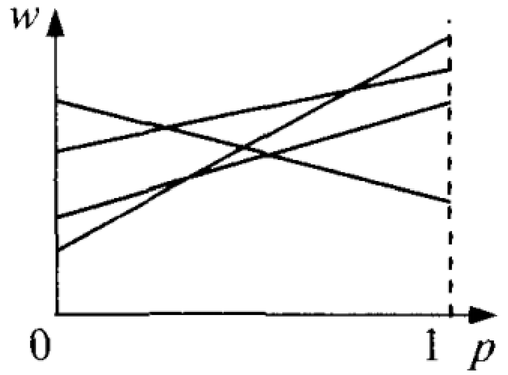


Рис.1

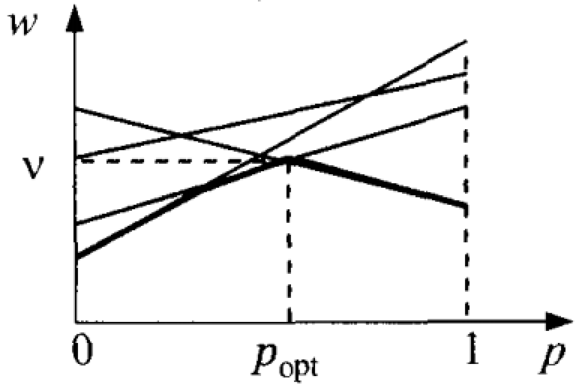


Рис. 2

Пример 3. Найти решение игры вида $2 \times n$, приведенной в табл. 7.

Таблица 7

	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_1	**Вероятности использования чистых стратегий игроком A**
A_1	6	4	3	1	-1	0	p
A_1	-2	-1	1	0	5	4	$1 - p$
Вероятности использования чистых стратегий игроком B	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	

Решение

Проведем анализ игры на наличие седловой точки. Нижняя цена игры равна -1, верхняя равна 1. Седловой точки нет. Решение надо искать в смешанных стратегиях.

Построим график нижней огибающей (16). Предварительно запишем уравнения прямых (17):

$$w_1 = 6p - 2(1-p) = 8p - 2\ ;$$

$$w_2 = 4p - 1\cdot(1-p) = 5p - 1\ ;$$

$$w_3 = 3p + (1-p) = 2p + 1\ ;$$

$$w_4 = p + 0\cdot(1-p) = p\ ;$$

$$w_5 = -p + 5(1-p) = -6p + 5;$$

$$w_6 = 0\cdot p + 4(1-p) = -4p + 4.$$

Графики данных прямых, построенных в системе координат pOw, представлены на рис. 3.

Нижняя огибающая выделена на рис. 3 полужирной ломаной линей. Точка максимума нижней огибающей лежит на пересечении прямых w_4 и w_5. Решая уравнение $p = -6p + 5$, получим $p_{opt} = \frac{5}{7}$. Цена игры, являющаяся математическим ожиданием выигрыша игрока A, равна $v = E\left(A, \overline{p}_{opt}, \overline{q}_{opt}\right) = \frac{5}{7}.$

Таким образом, цена игры и оптимальная стратегия игрока A равны:

$$v = \frac{5}{7};\ \overline{p}_{opt} = \left(\frac{5}{7}; \frac{2}{7}\right).$$

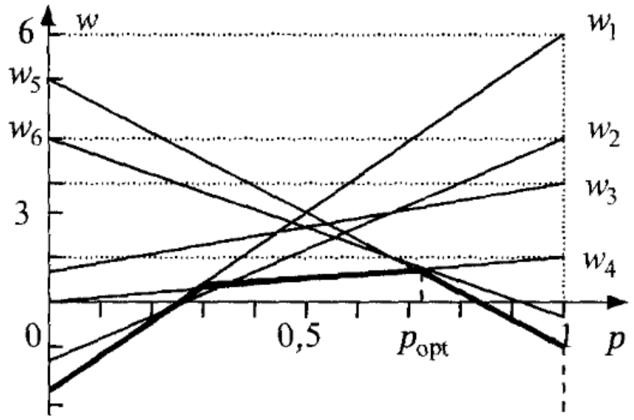


Рис. 3

Иногда решение матричной игры сводится только к поиску оптимальных смешанных стратегий игрока A. При этом стратегии противника могут не интересовать исследователя. Однако в целом ряде случаев необходимо знать оптимальные смешанные стратегии обоих игроков.

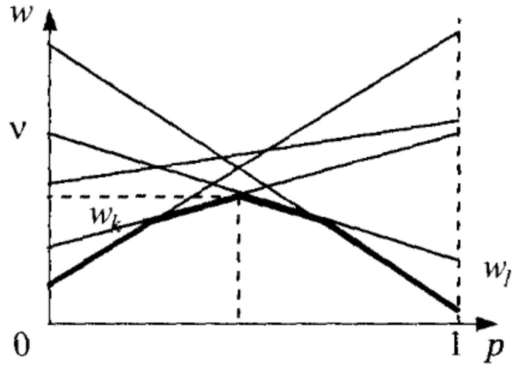


Рис. 4

Пусть в наивысшей точке нижней огибающей пересекаются прямые w_k и w_l (рис. 4), при этом прямая w_k - имеет положительный наклон, а прямая w_l - отрицательный. Оптимальная смешанная стратегия игрока B получается, если положить

$$q_k = q,\ q_l = 1 - q,\ q_j = 0 \text{ при } j \neq k,\ l,$$

где q находят из уравнения

$$a_{1k} q + a_{1l}(1-q) = a_{2k} q + a_{2l}(1-q).$$

Таким образом, игрок B применяет стратегию B_k с вероятностью $q_k = q$, а стратегию B_l - с вероятностью $q_l = 1 - q$.

Упражнение

Найдите решения следующих матричных игр:

а) $C = \begin{pmatrix} -5 & 8 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$. б) $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

в) $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & -1 \\ -4 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. г) $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Пример 4. Для условий примера 3 определить смешанные стратегии строки B.

Решение

В наивысшей точке нижней огибающей пересекаются прямые w_4 и w_5 (рис. 3), при этом прямая w_4 имеет положительный наклон, а прямая w_5 - отрицательный. Составим уравнение:

$$q-(1-q)=0\cdot q+5(1-q) \text{ или } 7q=6.$$

Отсюда находим

$$q_{opt}=\frac{6}{7}.$$

Таким образом, цены игры и оптимальная стратегия игрока B равны

$$v=\frac{5}{7};\ \bar{q}_{opt}=\left(0;\ 0;\ 0;\ \frac{6}{7};\ \frac{1}{7};\ 0\right).$$

Для решения игры $m\times 2$ (табл. 8) также может быть применен графический метод.

Таблица 8

	B_1	B_2	**Вероятности использования чистых стратегий игроком** B
A_1	a_{11}	a_{12}	p_1
A_2	a_{21}	a_{22}	p_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_i	a_{i1}	a_{i2}	p_i
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	p_m
Вероятности использования чистых стратегий игроком B	q	$q-1$	

Эта игра не имеет седловой точки. Согласно теореме 2 имеем

$$v=\max_{1\le i\le m}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}q_{k,opt}=\max_{1\le i\le m}\left(a_{i1}q_{opt}+a_{i2}(1-q)\right)=\min_{q}\max_{l\le i\le m}\left(a_{i1}q+a_{i2}(1-q)\right). \quad (18)$$

Графиком функции

$$\max_{1\le k\le n}\left(a_{i1}q+a_{i2}(1-q)\right) \quad (19)$$

является верхняя огибающая семейства прямых (15.20)

$$w_i=a_{i1}q+a_{i2}(1-q)=(a_{i1}-a_{i2})q+a_{i2}, \quad 20)$$

соответствующих чистым стратегиям игрока A (рис. 5).

Абсцисса нижней точки верхней огибающей семейства прямых (20) является оптимальной стратегией игрока B:

$$\bar{q}_{opt} = \bar{q}_{opt}\left(q_{opt};\left(1-q_{opt}\right)\right),$$

а ордината – ценой игры v.

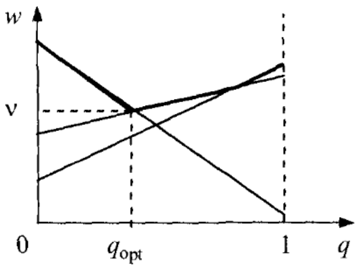


Рис. 5

Отыскание оптимальной смешанной стратегии игрока A проводится по той же схеме, которая позволяет находить оптимальную смешанную стратегию игрока B в игре $2\times n$.

Пусть в самой нижней точке верхней огибающей пересекаются прямые w_i и w_j, при этом прямая w_i имеет отрицательный наклон, а прямая w_j - положительный. Оптимальная смешанная стратегия игрока A получается, если положить

$$p_i = p,\;\; p_j = 1-p\,,\;\; p_r = 0 \text{ при } r \neq i,\;\; j,$$

где p находят из уравнения

$$a_{i1}p + a_{j1}\left(1-p\right) = a_{i2}p + a_{j2}\left(1-p\right).$$

Пример 5. Найти решение игры вида $m\times 2$, приведенной в табл. 9.

Таблица 9

	B_1	B_2	**Вероятности использования чистых стратегий игроком** A
A_1	3	-1	p_1
A_2	-1	3	p_2
A_3	1	0	p_3
Вероятности использования чистых стратегий игроком B	q	$1-q$	

Решение

Проведем анализ игры на наличие седловой точки. Нижняя цена игры равна 0, верхняя цена игры равна 3. Седловой точки нет. Решение надо искать в смешанных стратегиях.

Построим график верхней огибающей (19), предварительно запишем уравнения прямых (20):

$$w_1 = 3q - (1-q) = 4q - 1;$$

$$w_2 = -q + 3(1-q) = -4q + 3;$$

$$w_3 = q + 0 \cdot (1-q) = q.$$

Графики этих прямых, построенных в системе координат qwO, представлены на рис. 6.

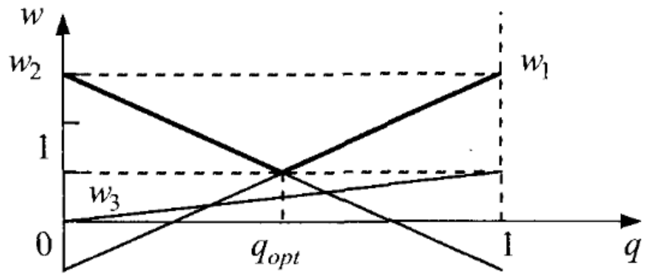


Рис. 6

Верхняя огибающая выделена на рис. 6 полужирной ломанной линией. Точка минимума верхней огибающего лежит на пересечении прямых w_1 и w_2.

Решая уравнение $4q - 1 = -4 + 3$, получим $q_{opt} = \frac{1}{2}$. Цена игры, являющаяся математическим ожиданием выигрыша игрока B, равна

$$v = E\left(A, \overline{p}_{opt}, \overline{q}_{opt}\right) = 4q_{opt} - 1 = 4 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 1.$$

Найдем оптимальную стратегию игрока A. В самой нижней точке верхней огибающей пересекаются прямые w_1 и w_2 (рис. 6), при этом прямая w_1 имеет положительный наклон, а прямая w_2 - отрицательный. Составим уравнение:

$$-p + 3(1-p) = 3p - (1-p) \text{ или } 8p = 4.$$

Отсюда находим

$$p_{opt} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, цена игры и оптимальные стратегии игроков A и B равны

$$v = 1;\ \ \overline{p}_{opt} = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right);\ \overline{q}_{opt} = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right).$$

Пример 6 (локальный конфликт). Рассмотрим войну между двумя государствами A и B, которая ведется в течение 30 дней.

Для бомбардировки моста, принадлежащего стране B, страна A использует два имеющихся у нее самолета. Разрушенный мост восстанавливается в течение суток, а каждый самолет совершает один полет по одному из двух возможных маршрутов, соединяющих эти страны. У страны B есть два зенитных орудия, при помощи которых можно сбить самолеты страны A. Если самолет собьют, то страна A закупает новый самолет в течение суток у некоторой третьей страны.

Страна A может посылать самолеты либо по одному маршруту, либо по разным.

Страна B может поместить обе зенитки либо на одном маршруте, либо по одной зенитке на каждом маршруте.

Если один самолет летит по маршруту, на котором расположена одна зенитка, то этот самолет будет сбит.

Если два самолета летят по маршруту, на котором расположены две зенитки, то оба самолета будут сбиты.

Если два самолета летят по маршруту, на котором расположена одна зенитка, то сбит будет только один самолет.

Если самолет доберется до цели, то мост будет уничтожен.

Таким образом, у каждой из стран есть две стратегии:

A_1 - послать самолеты по разным маршрутам;

A_2 - послать самолеты по одному маршруту;

B_1 - поместить зенитки на разных маршрутах;

B_2 - поместить зенитки на одном маршруте.

Если стана A выберет стратегию A_1, а страна B - стратегию B_1, то самолеты будут сбиты, т.е. вероятность разрушения моста равна нулю.

Если страна A выберет стратегию A_2, а страна B - стратегию B_1, то хотя бы один самолет достигнет цели, т.е. вероятность разрушения моста равна единице.

Если страна A выберет стратегию A_1, а страна B - стратегию B_2, то хотя бы один самолет достигнет цели, т.е. вероятность разрушения моста равна единице.

Если страна A выберет стратегию A_2, а страна B - стратегию B_2, то вероятность достижения цели равна 0,5, т.е. вероятность разрушения моста равна 0,5. Найти решение этой игры.

Решение

Матрица игры имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1{,}0 \\ 1 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Решим задачу графическим методом. Проведем анализ игры на наличие седловой точки. Нижняя цена игры равна 0,5, верхняя равна 1.

Построим график нижней огибающей (16), предварительно запишем уравнения прямых (17):

$$w_1 = 0 \cdot p + (1 - p) = -p + 1,$$

$$w_2 = p + 0{,}5(1 - p) = 0{,}5p + 0{,}5.$$

График этих прямых, построенных в системе координат pOw, представлен на рис. 7. Нижняя огибающая выделена на этом рисунке полужирной ломаной линией. Точка максимума нижней огибающей лежит на пересечении двух прямых. Решая уравнение $-p + 1 = 0{,}5 + 0{,}5$, получим $p_{opt} = \frac{1}{3}$. Цены игры, являющиеся математическим ожиданием выигрыша игрока A, равна

$$v = E\left(A, \bar{p}_{opt}, \bar{q}_{opt}\right) = w_{1,opt} = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}.$$

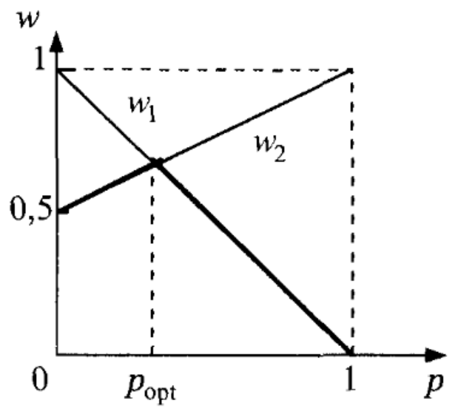


Рис. 7

Для определения оптимальной смешанной игры игрока B подставим в уравнение

$$a_{1k}q + a_{1l}(1-q) = a_{2k}q + a_{2l}(1-q).$$

Соответствующие значения из матрицы игры:

$$0 \cdot q + (1-q) = q + 0{,}5 \cdot (1-q) \text{ или } 1{,}5q = 0{,}5.$$

Отсюда находим $q = \frac{1}{3}$.

Таким образом, цена игры и оптимальные стратегии игроков A и B равны

$$v = \frac{2}{3}; \ \bar{p}_{opt} = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right); \qquad \bar{q}_{opt} = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

Это означает, что если страна A будет случайным образом посылать самолеты по разным маршрутам в течение десяти дней из тридцати, а по одному маршруту – в течение двадцати дней, то в среднем она будет иметь 66,7% удачных вылетов. Если страна B будет случайным образом помещать зенитки по разным маршрутам в течение десяти дней из тридцати, а по одному маршруту – в течение двадцати дней, то в среднем она не позволит бомбить мост чаще, в 66,7% случаев.

6. Правило доминирования

Важным приемом, позволяющим уменьшить размеры платежной матрицы игры, является правило доминирования. Оно основано на отбрасывании тех чистых стратегий платежной матрицы, которые не вносят никакого вклада в искомые оптимальные смешанные стратегии. Отбрасывание подобных стратегий позволяет заменить первоначальную матрицу меньших размеров.

Одна из возможностей снижения размеров матрицы заключается в сравнении ее строк и столбцов.

Считают, что i-я строка называется *доминируемой*, а j-я строка – *доминирующей*. При этом говорят, что стратегия A_j игрока A доминирует стратегию A_i. Считают, что игрок A поступит разумно, если будет избегать стратегий, которым в матрице игры соответствуют доминируемые строки.

Считают также, что k-й столбец матрицы не меньше его l-го столбца, если одновременно выполняются неравенства

$$a_{1k} \geq a_{1l},\ a_{2k} \geq a_{2l}, \ldots,\ a_{nk} \geq a_{nl}.$$

В этом случае k-й столбец называется *доминируемым*, а l-й столбец – *доминирующим*. При этом говорят, что стратегия B_l игрока B доминирует стратегию B_k. Считают, что игрок B поступит разумно, если будет избегать стратегий, которым в матрице игры отвечают доминируемые столбцы.

Если в матрице игры одна из строк (один из столбцов) доминирует другую строку (другой столбец), то число строк (столбцов) в этой матрице можно уменьшить путем отбрасывания доминируемой строки (доминируемого столбца).

Оптимальные смешанные стратегии в игре с матрицей, полученной усечением исходной за счет доминируемых строк и столбцов, дадут оптимальное решение в исходной игре. Вероятности, соответствующие доминируемым чистым стратегиям, следует взять равными нулю.

При отбрасывании доминируемых строк и столбцов некоторые из оптимальных стратегий могут быть потеряны. Однако цена игры не изменится, и по усеченной матрице может быть найдена хотя бы одна пара оптимальных смешанных стратегий.

Пример 7. Заменить исходную матрицу

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

на матрицу выигрышей меньших размеров и решить игру.

Решение

Первая строка совпадает с последней, т.е. они дублируют друг друга. Поэтому одну из этих строк можно вычеркнуть. В результате получим

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Первая строка доминирует вторую, поэтому вторую строку можно отбросить. Тогда матрица примет вид

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

В этой матрице четвертый столбец доминирует третий. В результате получим

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решим игру 2×3 графическим способом. Проведем анализ игры на наличие седловой и точки. Нижняя цена игры равна -1, верхняя равна 0. Седловой точки нет. Решение надо искать в смешанных стратегиях.

Построим график нижней огибающей (16). Предварительно запишем уравнения прямых (17):

$$w_1 = -p + 2(1-p) = -3 + 2;$$

$$w_2 = 0 \cdot p + (1-p) = -p + 1;$$

$$w_3 = p - 2(1-p) = 3p - 2.$$

Графики этих прямых, построенных в системе координат pOw, представлены на рис. 8.

Решая уравнение $-3p + 2 = 3p - 2$, получим $p_{opt} = \frac{2}{3}$. Цена игры

$$v = -3p_{opt} + 2 = -3 \cdot \frac{2}{3} - 2 = 0.$$

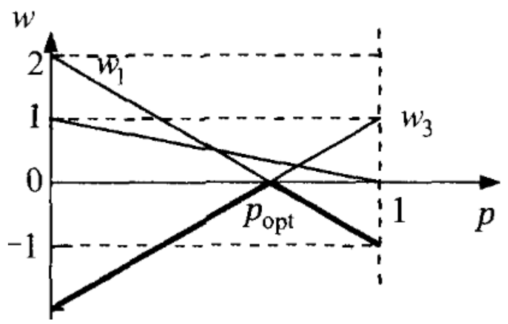


Рис. 8

В наивысшей точке нижней огибающей пересекаются прямые w_3 и w_1 (рис. 8), при этом прямая w_3 имеет положительный наклон, а прямая w_1 - отрицательный. Составим уравнение:

$$q - (1-q) = -2q + 2(1-q) \text{ или } 6q = 3.$$

Отсюда находим $q_{opt} = \frac{1}{2}$.

Таким образом, цена игры 2×3и оптимальные стратегии игроков равны

$$v = 0; \ \overline{p}_{opt} = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right); \overline{q}_{opt} = \left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right).$$

Возвращаясь к исходной игре 4×4, получим окончательный ответ:

$$v = 0;\ \bar{p}_{opt} = \left(\frac{2}{3}; 0; \frac{1}{3}; 0\right);\ \bar{q}_{opt} = \left(\frac{1}{2}; 0; 0; \frac{1}{2}\right).$$

Таким образом, при использовании правила доминирования используется следующий алгоритм решения матричной игры:

1. Проводится проверка наличия или отсутствия равновесия в чистых стратегиях. При наличии равновесной ситуации указывается отсутствующие оптимальные стратегии игроков и цена игры.

2. Проводится поиск доминирующих стратегий и усечения матрицы.

3. Ищется цена игры и оптимальные смешанные стратегии.

Упражнение

Используя правило доминирования, найдите решение матричной игры:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Вопросы для самопроверки

1. Определите предмет и задачи теории игр.

2. Дайте понятие матричных игр.

3. Когда достигается равновесная ситуация матричной игры?

4. Что такое седловая точка в матричной игре?

5. Какие стратегии матричной игры называются смешанными?

6. Назовите теоремы теории матричных игр.

7. Приведите алгоритм графического решения матричных игр.

8. Рассмотрите на примере процедуру снижения размеров матрицы при помощи правила доминирования.

§54. Сведение матричных игр к задачам линейного программирования

Ключевые слова: *матричная игра, линейное программирование.*

1. Схема сведения матричных игр к задачам линейного программирования

Рассмотрим один из методов нахождения решения игр путем сведения матричных игр к задачам линейного программирования.

При решении игр с помощью линейного программирования часто приходится использовать следующую теорему:

Теорема. Пусть $\overline{p_{opt}}$ и $\overline{q_{opt}}$ - оптимальные смешанные стратегии игроков A и B в игре $m\times n$ с матрицей (a_{ik}) и ценой игры v. Тогда $\overline{p_{opt}}$ и $\overline{q_{opt}}$ будут оптимальными в игре с матрицей $(ba_{ik}+c)$ и ценой игры $v'=bv+c$, где $b>0$.

Рассмотрим случай игры $m\times n$, когда $\alpha\neq\beta$, а все элементы платежной матрицы $a_{ik}\geq 0$. Последнего условия всегда можно добиться, используя теорему 3 из предыдущей лекции. В этом случае и цена игры $v>0$. Найдем сначала оптимальную смешанную стратегию $\overline{q_{opt}}$ игрока B. Применяя ее, игрок B проиграет не более v при любой частой стратегии A_i игрока A, т.е. равенство теоремы 2 из предыдущей лекции можно записать в виде неравенства:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}q_k\leq v,\ i=1,2,\ldots,m. \tag{1}$$

Разделив обе части неравенства (21) из предыдущей лекции на v, получим:

$$\sum_{k=11}^{n} a_{ik}\frac{q_k}{v}\leq 1,\ i=1,2,\ldots,m. \tag{2}$$

Введя обозначения

$$y_k=\frac{q_k}{v}, k=1,2,\ldots,n, \tag{3}$$

получим

$$\sum_{k=11}^{n} a_{ik} y_k \le 1,\ i = 1, 2, \ldots, m, \tag{4}$$

$$y_k \ge 0,\ k = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

Кроме того, y_k удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^{n} y_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k}{v} = \frac{1}{v} \sum_{k=1}^{n} q_k = \frac{1}{v}. \tag{6}$$

Игрок B стремится сделать свой проигрыш v как можно меньше, т.е. как можно больше величину

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} y_k = \frac{1}{v}. \tag{7}$$

Учитывая сказанное, приходим к следующей задаче линейного программирования:

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} y_k \to \max \tag{8}$$

при условиях

$$\sum_{k=11}^{n} a_{ik} y_k \le 1,\ i = 1, 2, \ldots, m, \tag{9}$$

$$y_k \ge 0,\ k = 1, 2, \ldots, n. \tag{10}$$

Решая эту задачу, находим оптимальный вектор

$$\overline{y_{opt}} = \left(y_{1,opt}, y_{2,opt}, \ldots, y_{n,opt}\right)$$

и максимальное значение целевой функции $\varphi_{opt} = \varphi_{\max}$, а затем, используя формулы (7) и (3), цену игры и компоненты оптимальной смешанной стратегии:

$$v = \frac{1}{\varphi_{\max}};\ q_{k,opt} = v y_{k,opt},\ k = 1, 2, \ldots, n. \tag{11}$$

Аналогично приходим к задаче линейного программирования для нахождения оптимальной смешанной стратегии $\overline{p_{opt}}$ игрока A:

$$\psi = \sum_{i=1}^{m} x_i \to \min \tag{12}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ik} x_i \geq 1,\ k = 1,2,\ldots,n, \tag{13}$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1,2,\ldots,m. \tag{14}$$

Решая эту задачу, находим оптимальный вектор $\overline{x_{opt}} = \left(x_{1,opt}, x_{2,opt}, \ldots, x_{n,opt}\right)$ и минимальное значение целевой функции $\psi_{opt} = \psi_{\max}$, а затем цену игры и компоненты оптимальной смешанной стратегии:

$$v = \frac{1}{\psi_{\max}};\ p_{i,opt} = v x_{i,opt},\ i = 1,2,\ldots,m_{x^2}^{2}\ \cdot \tag{15}$$

2. Сведение одной матричной игры к задаче линейного программирования

Пример. Фирмы A и B производят однородный сезонный товар, пользующийся спросом n единиц времени. Доход от продажи товара в единицу времени составляют C ден. ед. Фирма B, будучи более состоятельной, в ходе конкурентной борьбы стремится вытеснить фирму A с рынка сбыта, способствуя своими действиями минимизации ее дохода, не считаясь при этом с временными потерями своего дохода в надежде наверстать упущенное в будущем. Действующее законодательство не позволяет прибегать к демпинговым ценам. Единственным допустимым способом достижения своих целей для фирм A и B остается повышение качества товара, и выбор момента времени поставки его на рынок. Уровень спроса на товар и выбор момента времени поставки его на рынок зависит от его качества, и в данный момент реализуется тот товар, качество которого выше. Повышение же качества требует дополнительных затрат времени на совершенствование технологии его изготовления и переналадки оборудования. В связи с этим, будем предполагать, что качество товара тем выше, чем позже он поступает на рынок.

Придать описанной ситуации игровую схему и дать рекомендации фирмам A и B по оптимальным срокам поставки товара на рынок, обеспечивающим фирме A наибольший средний доход, а фирме B - наименьшие потери.

Решение

Фирма A выбирает некий момент времени поставки товара на рынок (обозначим его через i) с целью максимизировать свой доход. Фирма B выбирает момент времени k поставки товара на рынок с целью минимизировать доход фирмы A.

Функцию выигрышей игрока A можно записать в виде

$$a_{ik} = \begin{cases} C(k-i), & i < k; \\ 0{,}5C(n-i+1), & i = k; \\ C(n-i+1), & i > k. \end{cases}$$

Действительно, если $i < k$, то фирма A, не имея конкурентов в течение $k-i$ единиц времени, получит за этот период доход $C(k-i)$ ден. ед. В момент k на рынке появляется товар фирмы B более высокого качества, и фирма A теряет рынок (первая строка в (16)).

Если $i = k$, то товар фирм A и B имеет одинаковое качество и реализуется с одинаковым спросом. Поэтому доходы фирм A и B за период времени $n-i+1$ равны друг другу и вычисляются по формуле $0{,}5C(n-i+1)$ (вторая строка в (16)).

Если $i > k$, то фирма A, предлагая товар более высокого качества, в течение $n-i+1$ единиц времени единолично получит за этот период доход, равный $C(n-i+1)$ ден. ед. (третья строка (16)).

По формулам (16) можно построить платежную матрицу. Например, для количества единиц времени $n=5$ платежная матрица имеет вид, представленный в табл. 1.

Проведем анализ игры на наличие седловой точки. Нижняя цена игры равна C, верхняя равна $2C$. Седловой точки нет. Решение надо искать в смешанных стратегиях.

Таблица 1

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	p_i
A_1	$2{,}5C$	C	$2C$	$3C$	$4C$	p_1
A_2	$4C$	$2C$	C	$2C$	$3C$	p_2
A_3	$3C$	$3C$	$1{,}5C$	C	$2C$	p_3
A_4	$2C$	$2C$	$2C$	C	C	p_4
A_5	C	C	C	C	$0{,}5C$	p_5
q_k	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	

Упростим платежную матрицу, умножим все элементы на $\frac{1}{C}$. В результате получим матрицу, представленную в табл. 2.

Таблица 2

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	p_i
A_1	2,5	1	2	3	4	p_1
A_2	4	2	1	2	3	p_2
A_3	3	3	1,5	1	2	p_3
A_4	2	2	2	1	1	p_4
A_5	1	1	1	1	0,5	p_5
q_k	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	

В этой матрице первая строка доминирует пятую. Отпуская доминируемую строку, получим матрицу, представленную в табл. 3.

Таблица 3

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	p_i
A_1	2,5	1	2	3	4	p_1
A_2	4	2	1	2	3	p_2
A_3	3	3	1,5	1	2	p_3
A_4	2	2	2	1	1	p_4
q_k	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	

В полученной матрице элементы второго столбца доминируют первый, а четвертый столбец доминирует пятый. Поэтому первый и пятый столбцы можно отпустить. Тогда получим матрицу (табл. 4).

Таблица 4

	B_2	B_3	B_4	p_i
A_1	1	2	3	p_1
A_2	2	1	2	p_2
A_3	3	1,5	1	p_3
A_4	2	2	1	p_4
q_k	q_2	q_3	q_4	

В результате выполненных преобразований установлено, что в оптимальных смешанных стратегиях $p_{5,opt}=0,\ q_{1,opt}=0$ и $q_{5,opt}=0$, а цена $v=C\cdot v'$, где v' - цена игры с упрощенной матрицей табл. 4.

По табл. 4 составляем задачу линейного программирования (12) – (14):

$$\psi = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \min$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 \ge 1, \\ 2x_1 + x_2 + 1{,}5x_3 + x_4 \ge 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \ge 1, \end{cases} \qquad (17)$$

$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0.$$

Приведем задачу к канонической форме:

$$\psi = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \min$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_6 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 1{,}5x_3 + 2x_4 - x_7 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_8 = 1, \end{cases} \qquad (18)$$

$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0.;\ x_6 \ge 0; x_7 \ge 0; x_8 \ge 0.$$

В качестве базисных неизвестных принимаем x_6, x_7, x_8. Тогда, производя в (18) перенос свободных неизвестных в правую часть, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_6 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 1, \\ x_7 = 2x_1 + x_2 + 1{,}5x_3 + 2x_4 - 1, \\ x_8 = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 1. \end{cases} \qquad (19)$$

Составим первую симплекс-таблицу (табл. 5).

Таблица 5

Базисные неизвестные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	x_7	x_8
x_6	-1	-1	-2	-3	-2	1	0	0
x_7	-1	-2	-1	-1,5	-2	0	1	0
x_8	-1	-3	-2	-1	-1	0	0	1
ψ	0	-1	-1	-1	-1	0	0	0

Свободные члены являются отрицательными, поэтому первое базисное решение недопустимо. Выбираем первое уравнение (отмечено горизонтальной стрелкой) и заменяем основную переменную x_6 на переменную x_1. Перестроим табл. 5. Для этого умножаем выделенную строку на $-\frac{1}{1}$ и записываем результат вместо этой строки табл. 6.

Умножаем первую строку табл. 6 на -2, складываем с соответствующими значениями второй строки табл. 5 и результат вписываем во вторую строку табл. 6. Заметим, что в столбце x_1 при этой операции появился ноль.

Таблица 6

Базисные неизвестные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	x_7	x_8
x_1	1	1	2	3	2	-1	0	0
x_7	1	0	3	4,5	2	-2	1	0
x_8	2	0	4	8	5	-3	0	1
ψ	1	0	1	2	1	-1	0	0

Умножаем первую строку табл. 6 на -3, складываем с соответствующими значениями третьей строки табл. 5 и результат вписываем в третью строку табл. 6.

Умножаем первую строку табл. 6 на 1, складываем с соответствующими значениями четвертой строки табл. 5 и результат вписываем в последнюю строку табл. 6.

В последней строке табл. 6 имеются три положительных коэффициента. Принимаем в качестве разрешающего столбец x_3, отметим его вертикальной стрелкой. Положительными являются также числа во всех строках базисных неизвестных. Находим отношения: $-\frac{\alpha}{\alpha_3}=\frac{1}{3}, -\frac{\beta}{\beta_3}=\frac{1}{4{,}5}=\frac{2}{9}, -\frac{\gamma}{\gamma_3}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}.$ Наименьшим из них является $-\frac{\beta}{\beta_1}=\frac{2}{9}$. Тот факт, что первым из базисных неизвестных обращается в ноль x_6, служит для нас сигналом к замене базиса $\{x_1, x_7, x_8\}$ на базис x_1, x_3, x_8. Выделяем горизонтальной стрелкой строку при базисном неизвестном x_3. Разрешающим элементом здесь является 4,5. Перестроим табл. 6. Для этого умножаем выделенную строку на дробь $\frac{1}{4{,}5}=\frac{2}{9}$ и записываем результат вместо этой строки в новую таблицу (табл. 7).

Таблица 7

Базисные неизвестные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	x_7	x_8
x_1	$\frac{1}{3}$	1	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0
x_2	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{9}$	$-\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	0
x_8	$\frac{2}{9}$	0	$-\frac{4}{3}$	0	$\frac{13}{9}$	$\frac{5}{9}$	$-\frac{16}{9}$	1
ψ	$\frac{5}{9}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{4}{9}$	0

Умножаем вторую строку табл. 7 на -3, складываем с соответствующими значениями первой строки табл. 6 и результат вписываем в первую строку табл. 7.

Умножаем вторую строку табл. 7 на -8, складываем с соответствующими значениями третьей строки табл. 6 и результат вписываем в третью строку табл. 7.

Умножаем вторую строку табл. 7 на -2, складываем с соответствующими значениями четвертой строки табл. 6 и результат вписываем в последнюю строку табл. 7.

В последней строке имеется положительный коэффициент в столбце x_4. Выделяем этот столбец стрелкой. Выделяем стрелкой также строку x_8.

Перестроим табл. 7. Для этого умножаем выделенную строку на дробь $\frac{9}{13}$ и записываем результат вместо этой строки в табл. 8.

Таблица 8

Базисные неизвестные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	x_7	x_8
x_1	$\frac{3}{13}$	1	$\frac{8}{13}$	0	0	$\frac{1}{13}$	$\frac{2}{13}$	$-\frac{6}{13}$
x_3	$\frac{2}{13}$	0	$\frac{14}{13}$	0	0	$-\frac{8}{13}$	$\frac{22}{39}$	$-\frac{4}{9}$
x_4	$\frac{2}{13}$	0	$-\frac{12}{13}$	1	1	$\frac{5}{13}$	$-\frac{16}{13}$	$\frac{9}{13}$
ψ	$\frac{7}{13}$	0	$-\frac{3}{9}$	0	0	$-\frac{2}{13}$	$-\frac{4}{13}$	$-\frac{1}{13}$

Укажем вторую строку табл. 8 на $-\frac{2}{3}$, складываем с соответствующими значениями первой строки табл. 7.

Умножаем вторую строку табл. 8 на $-\frac{4}{9}$, складываем с соответствующими значениями третьей строки табл. 7.

Умножаем вторую строку табл. 8 на $-\frac{1}{9}$, складываем с соответствующими значениями четвертой строки табл. 6.

В табл. 8 последняя строка не имеет положительных чисел в последних семи столбцах. Значит, достигнуто оптимальное решение. Таким образом, оптимальное решение имеет вид

$$x_{1,opt} = \frac{3}{14},\ x_{2,opt} = 0,\ \ x_{3,opt} = \frac{2}{13},\ x_{4,opt} = \frac{2}{13}.$$

Минимальным значением целевой функции является свободный член в последней строке, т.е. $\psi_{opt} = \dfrac{7}{13}$.

Цена игры и компоненты оптимальной смешанной стратегии фирмы A определяются соотношениями (15):

$$v' = \frac{1}{\psi_{\min}} = \frac{13}{7};\ \ p_{1,opt} = v\,x_{1,opt} = \frac{13}{7}\cdot\frac{3}{17} = \frac{3}{7};\ \ p_{2,opt} = 0;$$

$$p_{3,opt} = \frac{13}{7}\cdot\frac{2}{13} = \frac{2}{7};\ p_{4,opt} = \frac{13}{7}\cdot\frac{2}{13} = \frac{2}{7};\, p_{5,opt} = 0.$$

Теперь по табл. 4 составляем задачу линейного программирования (12)-(14):

$$\varphi = y_1 + y_2 + y_3 \to \max \tag{20}$$

при условиях

$$\begin{cases} y_2 + 2y_3 + 3y_4 \le 1, \\ 2y_2 + y_3 + 2y_4 \le 1, \\ 3y_2 + 1{,}5y_3 + y_4 \le 1, \\ 2y_2 + 2y_3 + y_4 \le 1, \end{cases} \tag{21}$$

$$y_1 \ge 0;\ y_2 \ge 0;\ y_3 \ge 0.$$

Задачу на максимум сведем к задаче на минимум, для чего целевую функцию умножим на -1. Приведем задачу к канонической форме:

$$\varphi = -y_1 - y_2 - y_3 \to \min \tag{22}$$

$$\begin{cases} y_2 + 2y_3 + 3y_4 + y_6 = 1, \\ 2y_2 + y_3 + 2y_4 + y_7 = 1, \\ 3y_2 + 1{,}5y_3 + y_4 + y_8 11, \\ 2y_2 + 2y_3 + y_4 + y_9 = 1, \end{cases} \tag{23}$$

$$y_2 \ge 0;\ y_3 \ge 0;\ y_4 \ge 0; y_6 \ge 0;\ y_7 \ge 0;\ y_8 \ge 0; y_9 \ge 0.$$

В качестве базисных неизвестных принимаем $y_6, y_7,\ y_8, y_9$. Тогда, произведя в (23) перенос свободных неизвестных в правую часть, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} y_6 = 1 - y_2 - 2y_3 - 3y_4, \\ y_7 = 1 - 2y_2 - y_3 - 2y_4, \\ y_8 = 1 - 3y_2 - 1{,}5y_3 - y_4, \\ y_9 = 1 - 2y_2 - 2y_3 - y_4. \end{cases} \qquad (24)$$

Сопоставим (24) с (19), получим следующие соответствия:

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_6 & x_7 & x_8, \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & y_2 & y_3 & y_4. \end{matrix}$$

Из последней строки табл. 8 и приведенных соответствий находим решение двойственной задачи:

$$y_2 = \frac{2}{13}; y_3 = \frac{4}{13}; y_4 = \frac{1}{13}.$$

Определим компоненты оптимальной смешанной стратегий игрока B по формуле с учетом полученных выше результатов

$$q_{i,opt} = v' y_{k,opt}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

$$q_{1,opt} = 0;\ q_{2,opt} = \frac{13}{7} \cdot \frac{2}{13} = \frac{2}{7};\ q_{3,opt} = \frac{1}{7};\ q_{4,opt} = \frac{1}{7};\ q_{5,opt} = 0.$$

Таким образом, фирма должна поставлять свой товар на рынок в первую, третью и четвертую единицы времени с вероятностями $\frac{3}{7}$; $\frac{2}{7}$ и $\frac{2}{7}$, соответственно, и совсем не поставлять во вторую и пятую единицы времени. В этом случае ожидаемый доход фирмы A будет равен $\frac{13}{7}C$. Фирме B следует поставлять свою продукцию на рынок во вторую, третью и четвертую единицы времени с вероятностями $\frac{2}{7}$; $\frac{4}{7}$; и $\frac{1}{7}$, соответственно, и совсем не поставлять в первую и пятую единицы времени. В этом случае ее ожидаемые потери не превысят $\frac{13}{7}C$.

Упражнение

Методом сведения игры к задаче линейного программирования найдите решение. Матрица игры имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Упражнение

Борьба за рынки. Фирмы A и B производят однородный товар, который могут сбыть на одном из двух рынков. Фирма B является более состоятельной. Фирмы выбирают для борьбы один из рынков независимо друг от друга. Если фирмы выберут один и тот же рынок, то в конкурентной борьбе фирма A потерпит поражение. Если фирмы выберут разные рынки, то фирма A, не встречая противодействия, захватит выбранный рынок. Пусть платежные матрицы игроков имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из этих матриц следует, что если фирмы выберут один и тот же рынок, то победа достанется фирме B. При выборе стратегий (A_1, B_1) выигрыш игрока B равен 5, а при выборе стратегий (A_2, B_2) его выигрыш равен 1. Это говорит о том, что первый рынок более выгоден, например, удобно расположен, хорошо посещаем и т.д. Проигрыш игрока A при выборе (A_1, B_1) равен -10, а при выборе стратегий (A_2, B_2) - -1. Если фирмы выберут разные ранки, то при выборе стратегий (A_1, B_2) выигрыш игрока A равен 2, а при выборе стратегий (A_2, B_1) его выигрыш равен 1. Здесь игрок A выигрывает больше на более выгодном ранке. Потери, которые несет при этом игрок B, оказываются прямо противоположными. Определить параметры равновесной ситуации.

Вопрос для самопроверки

1. Приведите алгоритм решения игр с помощью линейного программирования.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вероятностные таблицы

Таблица значений плотности стандартного нормального распределения

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,0	0,3989	0,3989	0,3988	0,3987	0,3986	0,3984	0,3982	0,3979	0,3976	0,3973
0,1	0,3969	0,3965	0,3960	0,3955	0,3950	0,3944	0,3938	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3866	0,3856	0,3846	0,3836	0,3825
0,3	0,3813	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3711	0,3697
0,4	0,3682	0,3667	0,3652	0,3637	0,3621	0,3605	0,3588	0,3572	0,3555	0,8538
0.5	0,3520	0,3502	0,3484	0,3466	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2896	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1827	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0789	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0619	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0296	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0271	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0162	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2.6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0016	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0059	0,0058	0,0056	0,0054	0,0053	0,0051	0,0050	0,0049	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0035	0,0034	0,0033
3,1	0,0032	0,0031	0,0031	0,0029	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0024
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0.0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0.0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001
4,0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001

Таблица значений функции Лапласа

$$\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999

Критические точки распределения Стьюдента

α / k	0,1	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,3137	12,706	31,82	63,656	318,31	636,62
2	2,9199	4,3026	6,9645	9,9248	22,327	31,599
3	2,3533	3,1824	4,5407	5,8409	10,215	12,924
4	2,1318	2,7764	3,7469	4,6040	7,1732	8,6103
5	2,0150	2,5705	3,3649	4,0321	5,8934	6,8688
6	1,9431	2,4469	3,1426	3,7074	5,2076	5,9588
7	1,8945	2,3646	2,9979	3,4994	4,7853	5,4079
8	1,8595	2,3060	2,8964	3,3553	4,5008	5,0413
9	1,8331	2,2621	2,8214	3,2498	4,2968	4,7809
10	1,8124	2,2281	2,7637	3,1692	4,1437	4,5869
11	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058	4,0247	4.4370
12	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545	3,9296	4,3178
13	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123	3,8520	4,2208
14	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768	3,7874	4,1405
15	1,7530	2,1314	2,6025	2,9467	3,7328	4,0728
16	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208	3,6862	4,0150
17	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982	3,6458	3,9651
18	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784	3,6105	3,9216
19	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609	3,5794	3,8834
20	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453	3,5518	3,8495
21	1,7207	2,0796	2,5176	2,8314	3,5372	3,8193
22	1.7171	2,0739	2,5083	2,8188	3,5050	3,7921
23	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073	3,4850	3,7676
24	1,7109	2,0639	2,4922	2,7969	3,4668	3,7454
25	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874	3,4502	3,7251
26	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787	3,4350	3,7066
27	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707	3,4210	3,6896
28	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633	3,4082	3,6739
29	1,6991	2,0452	2,4620	2,7564	3,3962	3,6594
30	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500	3,3852	3,6460
32	1,6930	2,0369	2,4487	2,7385	3,3653	3,6218
34	1,6909	2,0322	2,4411	2,7284	3,3479	3,6007
36	1,6883	2,0281	2,4345	2,7195	3,3326	3,5821
38	1,6860	2,0244	2,4286	2,7116	3,3190	3,5657
40	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045	3,3069	3,5510
42	1,6820	2,0181	2,4185	2,6981	3,2960	3,5377
44	1,6802	2,0154	2,4141	2,6923	3,2861	3,5258
46	1,6787	2,0129	2,4102	2,6870	3,2771	3,5150
48	1,6772	2,0106	2,4066	2,6822	3,2689	3,5051
50	1,6759	2,0086	2,4033	2,6778	3,2614	3,4960
55	1,6730	2,0040	2,3961	2,6682	3,2561	3,4764
60	1,6706	2,0003	2,3901	2,6603	3,2317	3,4602
65	1,6686	1,9971	2,3851	2,6536	3,2204	3,4466
70	1,6669	1,9944	2,3808	2,6479	3,2108	3,4350
80	1,6641	1,9901	2,3739	2,6387	3,1953	3,4163
90	1,6620	1,9867	2,3685	2,6316	3,1833	3,4019

Критические точки распределения χ^2

α / k	**0,01**	**0,025**	**0,05**	**0,95**	**0,975**	**0,99**
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14.4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5.	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2.09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24.7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26.3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27.6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9.39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38.9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

ЛИТЕРАТУРА

1. Hoy M., Livernois J., McKenna Ch., Rees R., Stengos T. Mathematics for Economics. Second edition. The MIT Press: Cambridge, Massachusetts; London, England, 2001.

2. Harrison M., Waldron P. Mathematics for economics and finance. London and New York, 2011.

3. Vassilis C. Mavron and Timothy N. Phillips. Elements of Mathematics for Economics and Finance. Springer-Verlag London Limited, 2007.

4. Knut Sydsaeter and Peter Hammond with Arne Strom. Essential mathematics for economic analysis. Fourth edition. 2012.

5. Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. Second Edition. Routledge: Taylor & Francis Group. London and New York, 1993, 2003.

6. Tao T. Analysis 1, 2. Hindustan Book Agency. India, 2014.

7. Robert M. Leekley. Applied Statistics for Businiess and Economics. USA, 2010.

8. Alpha C. Chiang, Kevin Wainwright, Fundamental Methods of Mathematical Economics. NY, 2005.

9. John E. Floyd. Statistics For Economists: a beginning. University of Toronto, 2010.

10. David G. Luenberger, Yinyu Ye. Linear and Nonlinear Programming. Springer, 2008

11. Таха Х. Введение в исследование операций. В 2-х кн. М.: Мир,1991.

12. Walras L. Elements d’Economie Politique pure. Lausanne, 1874. /Англ. перевод: Elements of Pure Economis. London, 1954.

13. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории вероятностей. М.: Радио и связь, 1983.

14. Данциг Дж. Линейное программирование, его обобщение и применение. М.: Прогресс, 1966.

15. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. М.: Наука, 1965.

16. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б. Математическое программирование. М.: Высшая школа, 1980.

17. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. Минск: БГУ, 1975.

18. Бережной В.И., Бережная Е.В. Математические методы моделирования экономических систем. М.: Финансы и статистика, 2001.

19. Бережной В.И., Бережная Е.В. Экономико-математические методы и модели в примерах и задачах. Ставрополь: Интеллект-сервис, 1996.

20. Бабаджанов Ш.Ш. Математика для экономистов: Учебное пособие. Т.: Iqtisod – Moliya, 2018.

21. Бабаджанов Ш.Ш. Экономическая математика: Учебное пособие. Т.: Iqtisod – Moliya, 2018.

22. Бабаджанов Ш.Ш. Сборник задач по дисциплине «Математика для экономистов»: Методическое пособие. Т.: ТФИ, 2017.

23. Бабаджанов Ш.Ш. Высшая математика: Учебное пособие. Т.: Iqtisod- Moliya, 2008. Ч. I.

24. Бабаджанов Ш.Ш. Высшая математика: Учебное пособие. Т.: Iqtisod- Moliya, 2015. Ч. II.

25. Бабаджанов Ш.Ш. Сборник задач по высшей математике: Учебно-методическое пособие. Т.: ТФИ, 2009. Ч.I.

26. Бабаджанов Ш.Ш. Математическое программирование: Учебное пособие. Т.: Iqtisod – Moliya, 2006.

27. Бабаджанов Ш.Ш. Материалы для самостоятельных работ по теории вероятностей и математической статистике: Учебное пособие. Т.: Iqtisod – Moliya, 2006.

28. Бабаджанов Ш.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Курс лекций. Т.: ТФИ, 2004.

29. Малугин В.А. Математика для экономистов: Линейная алгебра: Курс лекций. М.: Эксмо, 2006. 224 с.

30. Малугин В.А. Математика для экономистов: Математический анализ: Курс лекций. М.: Эксмо, 2005. 272 с.

31. Макаров С.И. Математика для экономистов: Учебное пособие. М.: КНОРУС, 2008. 264 с.

32. Красс М.С, Чупрынов Б.П. Математика для экономистов. СПб.: Питер, 2005.

33. Клюшин В.Л. Высшая математика для экономистов: Учебное пособие. М.: ИНФРА, 2009..

34. Малыхин В.И. Высшая математика: Учебное пособие М.: ИНФРА-М, 2009.

35. Колемаев В.А., Калинина В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник. М.: Инфра - М, 1997.

36. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: ЮНИТИ, 2001.

36. Математическое программирование /Под ред. Н.Ш. Кремера. М.: Финстатинформ,1996.

37. Калихман И.Л., Войтенко М.А. Динамическое программирование в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 1979.

38. К.С. Сафаева, Э. Адигамова, Ш.Ш. Бабаджанов, Э. Мамуров. Математическое программирование: Сборник задач. Т.: Iqtisod – Moliya, 2006.

39. Солодовников А.С. Теория вероятностей: Учебное пособие. М.: Просвещение, 1983.

40. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1982.

41. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1971.

42. Коваленко И.Н., Филиппова Д.А. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 1982.

43. Севастьянов Б.А., Чистяков В.П., Зубков А.М. Сборник задач по теории вероятностей. М.: Наука, 1980.

44. Емельянов Г.В., Скитович В.П. Задачник по теории вероятностей и математической статистики. М.: МГУ, 1967.

45.Э.А. Вуколов, А.В. Ефимов, В.Н. Земсков, А.Ф. Каракулин, А.С. Поспелов, А.М. Терещенко. Сборник задач по математике для втузов: Специальные курсы. М.: Наука, 1984.

46. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. С-П., М.: Лань, 2011.

О Г Л А В Л Е Н И Е

БАБАДЖАНОВ Шопулат Шомашрабович,
НАИМОВ Алижан Набиджанович,
ХАШИМОВ Абдукомил Рисбекович

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

Учебник