Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

С. И. Дудов, А. П. Хромов, И. Ю. Выгодчикова

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

Учебное пособие
для студентов экономико-математических специальностей

Саратов, 2013

Дудов С. И., Хромов А. П., Выгодчикова И. Ю. Линейное программирование для экономистов: учеб. пособие. Саратов, 2013. 53 с.

В пособии кратко, но с доказательствами приведены основные факты теории решения линейных экстремальных задач. Главное внимание отводится симлекс-методу, как основному численному методу решения задач линейного программирования. Кроме того, пособие содержит задачи, упражнения и примеры их решения.

Для студентов экономического и механико-математического факультетов, изучающих курсы "Математические методы в экономике" и "Методы оптимизации" соответственно, составной частью которых является материал, посвященный задаче линейного программирования.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....4
1. Примеры задач линейного программирования.....5
2. Постановка и формы записи задач ЛП.....7
3. Геометрическая интерпретация задачи ЛП.....9
4. Симплекс-метод.....10
4.1. Понятие базисного плана и его базиса.....10
4.2. Описание итерации симплекс-метода.....12
4.3. Доказательство теорем Данцига.....13
4.4. Возможные ситуации перехода к очередному базисному плану.....16
4.5. Симплекс-таблица.....17
4.6. Построение исходного базисного плана.....19
5. Двойственная задача ЛП.....20
5.1. Теоремы двойственности.....20
5.2. Экономическая интерпретация двойственной задачи ЛП.....22
6. Задачи и упражнения.....23
6.1.Приведение задачи ЛП к заданной форме.....23
6.2. Геометрическое решение задач ЛП.....25
6.3. Отыскание базиса заданного базисного плана.....28
6.4. Решение задач ЛП симплекс-методом.....29
6.5. Отыскание исходного базисного плана.....37
6.6. Использование теории двойственности при решении задач ЛП.....39
6.7. Задания для контрольной работы.....41
Ответы и решения.....48
Список литературы.....53

ВВЕДЕНИЕ

Линейное программирование (ЛП) как раздел теории экстремальных задач рассматривает задачи оптимизации линейных функций на допустимых множествах аргументов, заданных с помощью линейных ограничений. Такие задачи находят обширные приложения в различных сферах человеческой деятельности. Систематическое изучение задач такого типа началось в 1939 – 1940 гг. в работах Л.В. Канторовича.

В данном пособии приводятся основные факты теории решения задач линейного программирования. Основное внимание уделено изложению симплекс-метода как численного метода решения. Этот метод, являющийся доныне основным методом решения задач ЛП, был предложен американским математиком Дж. Данцигом в 1946 году. Отметим, что в 1979 – 1980 гг. появились новые идеи в построении численных методов решения задач ЛП, так называемые полиномиальные алгоритмы (см., например, [8, 9]).

Изложение материала в значительной мере использует книгу С.А. Ашманова и А.В. Тимохова [1]. Для углублённого изучения линейного программирования читатель может воспользоваться списком литературы, указанным в конце пособия.

Приводимые типовые задачи снабжены решениями. После них даются серии упражнений, представленные 20 вариантами. Это позволяет выдавать студентам одной группы индивидуальные, но равноценные задачи.

1. ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Существует большое количество примеров задач линейного программирования (ЛП) в различных сферах практической деятельности. Приведём три примера, ставшие классическими.

Пример 1. (*Задача планирования производства*). Пусть некоторое предприятие производит n типов товаров, затрачивая при этом m типов ресурсов. Известны следующие параметры:
a_{ij} — количество i-го ресурса, необходимое для производства единицы товара j-го вида, $a_{ij} \geq 0$ ($i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$);
b_i — запас i-го ресурса на предприятии, $b_i > 0$;
c_j — прибыль от реализации единицы товара j-го вида на рынке, $c_j \geq 0$.
Предполагается, что технология производства линейна, т.е. затраты ресурсов растут прямо пропорционально объему производства. Пусть x_j показывает планируемый объем производства j-го товара. Тогда допустимым является только такой набор производимых товаров (план производства) $x = (x_1, ..., x_n)$, при котором суммарные затраты ресурса не превосходят его запаса:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1,m}. \tag{1.1}$$

Кроме того, имеем естественное ограничение

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}. \tag{1.2}$$

Прибыль от продажи набора товаров выражается величиной

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j . \tag{1.3}$$

Задача планирования производства ставится следующим образом: среди всех векторов x, удовлетворяющих ограничениям (1.1)-(1.2), найти такой, при котором величина (1.3) принимает наибольшее значение.

Пример 2. (*Задача о рационе*). При организации питания больших коллективов людей, например в армии, больницах и т.п., возникает задача о наиболее экономном рационе питания, удовлетворяющем определенным медицинским требованиям. Пусть имеется n продуктов питания (хлеб, мясо, молоко, картофель и т.п.), в которых учитывается m полезных веществ (жиры, белки, углеводы, витамины и т.п.). Известны следующие параметры:

a_{ij} — содержание i-го вещества в единице j-го продукта, $a_{ij} \geq 0$ $(i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n})$;

b_i — минимальное количество i-го вещества, которое должно потребляться индивидуумом в расчете, скажем, на месяц, $b_i > 0$ $(i = \overline{1,m})$;

c_j — цена единицы j-го продукта, $c_j \geq 0$ $(j = \overline{1,n})$.

Задача о рационе формулируется следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = \overline{1,m},$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n},$$

где x_j — обозначает количество j-го продукта, потребляемого индивидуумом в течение месяца. Иными словами, среди всех рационов питания $x = (x_1, ..., x_n)$, покрывающих минимальные потребности индивидуума в полезных веществах, необходимо выбрать наиболее дешевый.

Пример 3. (*Транспортная задача*). Пусть некоторый однородный продукт (уголь, кирпич, картофель и т.п.) хранится на m складах и потребляется в n пунктах. Известны следующие параметры:

a_i — запас продукта на i-м складе, $a_i > 0$ $(i = \overline{1,m})$;

b_j — потребность в продукте в j-м пункте потребления, $b_j > 0$ $(j = \overline{1,n})$;

c_{ij} — стоимость перевозки единицы продукта с i-го склада в j-й пункт, $c_{ij} > 0$ $(i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n})$.

При этом суммарные запасы равны суммарным потребностям:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{1.4}$$

Транспортная задача имеет следующую математическую запись:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i=\overline{1,m}, \tag{1.5}$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \;\; j=\overline{1,n},$$
$$x_{ij} \geq 0, \quad i=\overline{1,m},\; j=\overline{1,n},$$

где x_{ij} — показывает количество продукта, перевозимого с i-го склада в j-й пункт. Иными словами, требуется так организовать перевозки продукта со складов в пункты потребления, чтобы при полном удовлетворении потребностей минимизировать суммарные транспортные расходы. Заметим, что условие (1.4) является необходимым и достаточным для существования по крайней мере одной матрицы перевозок $X=(x_{ij})$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, удовлетворяющей ограничениям задачи (1.5).

Главное обстоятельство, объединяющее данные задачи и выделяющее их, как экстремальные задачи определенного типа, это линейная зависимость целевой функции и функций, определяющих допустимое множество аргументов, от этих аргументов.

2. ПОСТАНОВКА И ФОРМЫ ЗАПИСИ ЗАДАЧ ЛП

Как известно, множество

$$\pi = \{x \in R^n / \langle a, x\rangle = b\},$$

где $a \in R^n$, $a \neq O_n$, $b \in R$, называется гиперплоскостью в R^n, а множества

$$\pi^+ = \{x \in R^n / \langle a, x\rangle \geq b\}, \;\; \pi^- = \{x \in R^n / \langle a, x\rangle \leq b\}$$

полупространствами, порожденными этой гиперплоскостью. Вектор a называется нормалью к гиперплоскости π. Он ортогонален к π и направлен в сторону полупространства π^+.

Определение 1. Множество $\Omega \subset R^n$ называется *полиэдром*, если его можно представить как множество решений системы конечного числа линейных неравенств или (что то же самое) как пересечение конечного числа полупространств, т.е. если

$$\Omega = \{x \in R^n / \langle a_i, x\rangle \leq b_i,\; i=\overline{1,m}\} = \{x \in R^n / Ax \leq b\},$$

где $b=(b_1,...,b_m)^T \in R^m$, $x=(x_1,...,x_n)^T \in R^n$, A — матрица размерности $m \times n$, составленная из компонент векторов $a_i \in R^n$, $i=\overline{1,m}$.

Определение 2. Пусть $c=(c_1,...,c_n) \in R^n$ — фиксированный вектор. Задачей линейного программирования (ЛП) называется задача максимизации или минимизации линейной функции $Z(x)=\langle c, x\rangle$ на полиэдре, т.е. задачу ЛП можно записать в виде

$$\langle c,x\rangle \to \max,\quad Ax\le b. \tag{2.1}$$

Задачу ЛП вида (2.1) называют *основной*. Укажем другие распространенные формы записи задачи ЛП на максимум, различающиеся способами представления допустимого множества.

Стандартная задача ЛП:

$$\langle c,x\rangle \to \max,\quad Ax\le b,\quad x\ge O_n, \tag{2.2}$$

где $O_n=(0,...,0)\in \mathbf{R}^n$.

Каноническая задача ЛП:

$$\langle c,x\rangle \to \max,\quad Ax=b,\quad x\ge O_n. \tag{2.3}$$

Общая задача ЛП:

$$\begin{aligned}
&\langle c,x\rangle \to \max,\\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i,\quad i=\overline{1,k},\\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\quad i=\overline{k+1,m},\\
&x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,s}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Формально говоря, каждая из задач (2.1)–(2.3) является частным случаем общей задачи (2.4):

при $k=m$ и $s=0$ получаем задачу (2.1),

при $k=m$ и $s=n$ получаем задачу (2.2),

при $k=0$ и $s=n$ получаем задачу (2.3).

Однако, в свою очередь, общая задача может быть представлена в форме любой из трех остальных. Так задача (2.4) принимает основную форму, если заменить в ней систему ограничений-равенств на эквивалентную систему неравенств

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i,\quad -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le -b_i,\quad i=\overline{k+1,m}. \tag{2.5}$$

Если к тому же сделать замену переменных

$$x_j=u_j-v_j,\ u_j\ge 0,\ v_j\ge 0,\quad j=\overline{s+1,n}, \tag{2.6}$$

то задача (2.4) примет стандартную форму. Если ограничения-неравенства в (2.4) записать в виде

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + w_i = b_i,\ w_i\ge 0,\ i=\overline{1,k}, \tag{2.7}$$

где w_i — дополнительные переменные, формально входящие в целевую функцию с нулевыми коэффициентами, и вновь использовать замену переменных (2.6), то задача (2.4) превратится в каноническую.

Вообще любую задачу ЛП на максимум или минимум с неравенствами, направленными в ту или иную сторону, можно представить в любой из указанных форм. Для этого наряду с приемами (2.5)-(2.7) необходимо использовать умножение целевой функции или ограничений неравенств на –1, что позволяет переходить от минимизации к максимизации и менять знаки неравенств.

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЗАДАЧИ ЛП

Рассмотрим задачу ЛП в основной форме (2.1). Ее допустимым множеством является полиэдр, а множества уровня (одного и того же значения) целевой функции

$$L(\alpha)=\{x\in R^n / \langle c,x\rangle=\alpha\},\quad \alpha\in R$$

представляют собой систему гиперплоскостей с общей нормалью c, направленной в сторону возрастания $\langle c,x\rangle$. Поэтому, чтобы решить задачу геометрически, надо "переходить" с одного множества уровня на другое в направлении вектора c до тех пор, пока полиэдр не останется от множества уровня по одну сторону от него (в отделяемом полупространстве), но при этом имеет с ним хотя бы одну общую точку. Эта точка, или любая из них, дает решение задачи. Этот способ достаточно эффективен при $n=2$ и небольшом m.

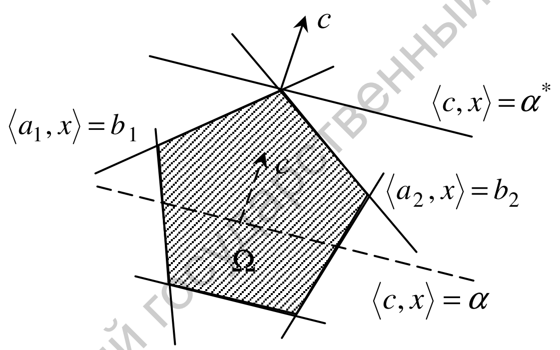

Рис.1

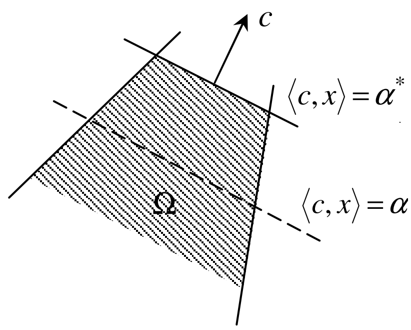

Рис. 2

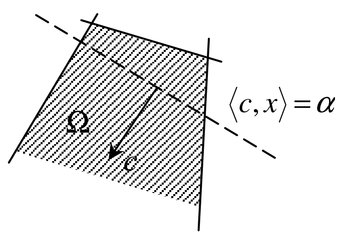

Рис. 3

Геометрически наглядно, что решение может быть как единственным, так и неединственным (рис.1 и рис.2). Если при всех сколь угодно больших α пересечение гиперплоскости $\pi(\alpha)=\{x\in R^n / \langle c,x\rangle=\alpha\}$ с полиэдром Ω не пусто (рис. 3), то значение целевой функции на допустимом множестве может быть сколь угодно большим и, следовательно, задача ЛП в этом случае не имеет решения. Ясно также, что если решение задачи существует, а у полиэдра Ω есть вершины, то, по крайней мере, одна из них является решением задачи.

4. СИМПЛЕКС-МЕТОД

Симплекс-метод является основным численным методом решения задач ЛП. В этом параграфе будет дано его описание применительно к канонической задаче ЛП:

$$\begin{aligned} &\langle c, x\rangle \to \max, \\ &Ax = b, \quad x \geq O_n, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где $x = (x_1,...,x_n)^T \in R^n$, $c = (c_1,...,c_n)^T \in R^n$, $b = (b_1,...,b_m)^T \in R^m$, матрица A размерности $m\times n$. Это не ограничивает общность метода, так как любая задача ЛП может быть представлена в форме (4.1) (см. п.2). Будем считать, что $m < n$ и $\operatorname{rank} A = m$, т.е. все строки матрицы А линейно независимы. К этому можно прийти, исключив из системы $Ax = b$ линейно зависимые уравнения. Кроме того, естественно считать $b \neq O_m$, так как иначе задача (4.1) становится тривиальной.

4.1. Понятие базисного плана и его базиса

В соответствии со сложившейся в линейном программировании традиции будем называть вектора, принадлежащие полиэдру

$$\Omega = \{x \in R^n \,/\, Ax = b,\ \ x \geq O_n\} \tag{4.2}$$

допустимыми планами задачи (4.1). Допустимые планы, на которых целевая функция $\langle c, x\rangle$ принимает максимальное значение, будем называть *оптимальными* планами задачи (4.1). Очень важным для дальнейшего является также понятие *базисного* плана.

Определение 3. Допустимый план $x = (x_1,...,x_n)^T$ называется *базисным* планом задачи (4.1), если у него найдется $n - m$ нулевых компонент и при этом остальным компонентам $x_{j_1},..., x_{j_m}$ будут соответствовать линейно независимые столбцы матрицы *A*: $A_{j_1},..., A_{j_m}$. Набор этих столбцов называется *базисом* этого базисного плана. Если у базисного плана *m* положительных компонент, т.е. $x_{j_1} > 0,..., x_{j_m} > 0$, то он называется *невырожденным*. В противном случае, т.е. если у него положительных компонент меньше *m*, его называют *вырожденным*.

Можно доказать, что, в геометрическом смысле, базисный план является вершиной полиэдра (4.2). Известно, что если полиэдр (4.2) не пуст, то у него имеется, по крайней мере, одна вершина. Кроме того, как следует из геометрической интерпретации задачи ЛП, если задача (4.1) разрешима, то одна из вершин полиэдра является оптимальным планом. Следовательно, если мы найдем все базисные планы и подсчитаем на них значение целевой функции, то мы найдем оптимальный план.

Как следует из определения 3, базисные планы можно получать следующим образом. Выбираем m линейно независимых столбцов матрицы A: $A_{j_1},..., A_{j_m}$. Поскольку $\operatorname{rank} A = m$, то хотя бы один такой набор столбцов существует. Они образуют квадратную матрицу $Б = (A_{j_1},..., A_{j_m})$ размерности $m\times m$, определитель которой $\det Б \neq 0$. Далее решаем систему линейных уравнений $Бy = b$, $y = (y_1,..., y_m) \in R^m$. Эта система имеет единственное решение. Если все компоненты решения неотрицательны: $y_i \geq 0$, $i = \overline{1,m}$, то возьмем в качестве $x \in R^n$ вектор, у которого компоненты $x_{j_i} = y_i$, $i = \overline{1,m}$, а остальные $n - m$ компонент равны нулю. В соответствии с построением и определением 3 такой вектор будет не только допустимым планом, т.е. удовлетворяющим $Ax = b, x \geq O_n$, но и базисным планом. Из этой процедуры, в частности, следует, что невырожденному базисному плану может соответствовать только один базис, в то время как вырожденному базисному плану может соответствовать несколько базисов.

Важно отметить, что при больших значениях n и m такое построение и перебор всех базисных планов представляет собой очень объемную вычислительную работу. Рассматриваемый далее симплекс-метод избавляет от необходимости вычисления всех базисных планов. Он позволяет осуществлять переход от одного базисного плана к другому так, чтобы значение целевой функции при этом не убывало.

Предложен этот метод был американским математиком Дж. Данцигом в 1946 году. Из других специалистов, внесших фундаментальный вклад в линейное программирование, отметим советского математика и экономиста Л.В.Канторовича (1912-1986 г.г.), лауреата Нобелевской премии 1975 года. Именно он положил начало систематическому изучению задач ЛП в 1939-1940 гг.

Симплекс-метод представляет собой вычислительную процедуру, которая по заданному исходному базисному плану x^0 генерирует последовательность базисных планов $x^1, x^2, ..., x^p$ вместе с их базисами. На очередной p-й итерации в зависимости от текущего значения параметров делается один из выводов:

1) либо x^p — решение задачи (4.1),
2) либо задача (4.1) не имеет решения (неограничена),
3) либо строится следующий базисный план x^{p+1}. Если при этом базисный план x^p невырожден, то

$$\left\langle c, x^{p+1} \right\rangle > \left\langle c, x^{p} \right\rangle. \tag{4.3}$$

Если же x^p — вырожденный базисный план, то либо выполняется (4.3), либо $x^{p+1} = x^p$, а итогом итерации является замена одного базиса плана x^p на другой. Перебор базисов может продолжаться несколько итераций, но обязательно появляется базис, при котором осуществляется переход на новый базисный план с бóльшим значением целевой функции.

Эта процедура за конечное число шагов итераций обязательно приводит либо к выводу 1) либо к выводу 2), поскольку число базисных планов конечно.

4.2. Описание итерации симплекс-метода

Пусть уже получен базисный план x^p и его базис — столбцы $A_{j_1},..., A_{j_m}$. Обозначим $x = x^p$, $J = \{j_1, j_2,..., j_m\}$, то есть $\{A_j / j \in J\}$ — базис базисного плана *x*.

Поскольку столбцы $\{A_j / j \in J\}$ линейно независимы, то они образуют базис в R^m. Поэтому все столбцы матрицы *A* можно однозначным образом представить, как линейные комбинации столбцов этого базиса:

$$A_k = \sum_{j \in J} A_j \lambda_{jk}, \quad k = \overline{1,n}, \tag{4.4}$$

где числа λ_{jk} — соответствующие коэффициенты разложения столбцов по базису. Вычислим величины

$$\Delta_k = \sum_{j \in J} c_j \lambda_{jk} - c_k, \quad k = \overline{1,n}. \tag{4.5}$$

Параметры λ_{jk} принято называть *коэффициентами замещения*, а параметры Δ_k — *оценками замещения*. Для любого $k \in J$, очевидно, имеем

$$\lambda_{jk} = \begin{cases} 1, \text{ если } j = k, \\ 0, \text{ если } j \in J \setminus \{k\}, \end{cases} \qquad \Delta_k = 0. \tag{4.6}$$

Выводы 1), 2), 3), описанные в предыдущем пункте 4.1, делаются в зависимости от знаков коэффициентов и оценок замещения. Обязательно выполняется хотя бы одно из трех условий:

I. Для любого номера $k \in [1:n]$ выполняется $\Delta_k \geq 0$.

II. Существует номер $s \notin J$ такой, что $\Delta_s < 0$ и $\lambda_{js} \leq 0$ для всех $j \in J$.

III. Существует номер $s \notin J$ такой, что $\Delta_s < 0$ и $\lambda_{js} > 0$ при некотором $j \in J$.

Каждому из этих условий соответствует одно из следующих трех правил симплекс-метода.

Теорема 1 (1-я теорема Данцига, правило оптимальности). *Если выполняется условие I, то базисный план x является оптимальным, т.е. решением задачи (4.1).*

Теорема 2 (2-я теорема Данцига, правило отсутствия решения). *Если выполняется условие II, то задача (4.1) не имеет решения.*

Ясно, что если выполняется условие I или условие II, то решение задачи на этом заканчивается. Пусть теперь выполняется условие III. Для указанного там номера s положим

$$\varepsilon = \min_{j \in J, \lambda_{js} > 0} \frac{x_j}{\lambda_{js}}. \qquad (4.7)$$

Пусть минимум в (4.7) достигается на номере r, т.е.

$$\varepsilon = \frac{x_r}{\lambda_{rs}}, \quad r \in J, \quad \lambda_{rs} > 0. \qquad (4.8)$$

Введем множество индексов

$$J' = \{J \setminus \{r\}\} \cup \{s\} \qquad (4.9)$$

и точку $x^{\varepsilon} \in R^n$ с компонентами

$$x_j^{\varepsilon} = \begin{cases} x_j - \varepsilon \lambda_{js}, & \text{если } j \in J \setminus \{r\}, \\ \varepsilon, & \text{если } j = s, \\ 0, & \text{если } j \notin J'. \end{cases} \qquad (4.10)$$

Теорема 3 (3-я теорема Данцига, правило перехода к новому базисному плану). *Если выполняется условие III, то* x^{ε} *является базисным планом задачи (4.1), а* $\{A_j \,/\, j \in J'\}$ *его базисом, причем*

$$\langle c, x^{\varepsilon} \rangle = \langle c, x \rangle - \varepsilon \Delta_s. \qquad (4.11)$$

Этот базисный план x^{ε} и его базис берутся для расчетов на следующей $(p+1)$-й итерации: $x^{p+1} = x^{\varepsilon}$. При этом говорят, что столбец A_r выводится из базиса, а столбец A_s вводится в базис. Элемент λ_{rs} называется *ведущим*.

4.3. Доказательство теорем Данцига

Для упрощения выкладок, но без потери общности рассуждений в доказательствах, будем считать, что для базисного плана $x = x^p$ задачи (4.1) множество

$$J = \{1, 2, \ldots, m\}, \qquad (4.12)$$

т.е. столбцы $A_1, A_2, \ldots, A_m$ образуют базис базисного плана x.

Обозначим через $Б = (A_i)_{i=\overline{1,m}}$ – матрицу размерности $m \times m$ образованную компонентами столбцов базиса;

$x^0 = (x_1, ..., x_m)^T \in R^m$ — вектор, составленный их первых m компонент вектора x. Так что

$$x = ((x^0)^T, O_{n-m})^T \; ; \tag{4.13}$$

$c^0 = (c_1, ..., c_m)^T \in R^m$ — вектор, составленный из первых m компонент вектора c;

$\Lambda = Б^{-1}A$ — матрица размерности $m{\times}n$ и следовательно

$$A_k = Б\Lambda_k, \quad k = \overline{1,n}, \tag{4.14}$$

т.е. столбец Λ_k матрицы Λ составлен из коэффициентов замещения (см. (4.4)):

$$\Lambda_k = (\lambda_{1k}, ..., \lambda_{mk})^T \; ;$$

вектор оценок замещения $\Delta = (\Delta_1, ..., \Delta_n)$ (см.(4.5)) можно в нашей ситуации записать в виде

$$\Delta = \Lambda^T c^0 - c \, . \tag{4.15}$$

Легко видеть, что вектор x^0 удовлетворяет равенству

$$Бx^0 = b \, . \tag{4.16}$$

Докажем вспомогательный факт.

Лемма 1. *Если x' допустимый план задачи (4.1), то*

$$\langle c, x \rangle = \langle c, x' \rangle + \Delta^T x' \, . \tag{4.17}$$

Доказательство. То, что x' является допустимым планом задачи (4.1), в частности, означает

$$Ax' = b \, . \tag{4.18}$$

Используя (4.13), (4.16) и (4.18) получаем

$$\langle c,x \rangle = c^T x = c^{0^T} x^0 = c^{0^T} Б^{-1} b = c^{0^T} Б^{-1} A x' = c^{0^T} \varLambda x' - c^T x' + c^T x' =$$

$$= \langle c,x' \rangle + (c^{0^T} \varLambda - c^T) x' = \langle c,x' \rangle + (\Lambda^T c^0 - c)^T x' = \langle c,x' \rangle + \Delta^T x' \, . \qquad \square$$

1-я теорема Данцига. *Если базисный план x таков, что* $\Delta \geq O_n$, *то x является оптимальным планом.*

Доказательство следует непосредственно из леммы 1, если учесть, что компоненты любого допустимого плана x' неотрицательны. $\square$

Сопоставим нашему базисному плану x, индексу $s \notin J$ (т.е., учитывая (4.12), $s \in [m+1:n]$), и числу ε вектор x^ε следующей структуры

$$x^\varepsilon = ((x^0 - \varepsilon \Lambda_s)^T, 0, ..., 0, \underset{s}{\varepsilon}, 0, ..., 0)^T \in R^n \, . \tag{4.19}$$

Докажем, что справедлива

Лемма 2. *Если* $s \in [m+1:n]$, *то для вектора* x^ε *выполняется*

$$Ax^\varepsilon = b \, , \; \langle c, x^\varepsilon \rangle = \langle c, x \rangle - \varepsilon \Delta_s \, .$$

Доказательство. Используя структуру вектора x^{ε}, а также соотношения (4.14)-(4.16), получаем

$$Ax^{\varepsilon} = Б(x^0 - \varepsilon\Lambda_s) + \varepsilon A_s = Бx^0 - \varepsilon Б\Lambda_s + \varepsilon A_s = Бx^0 = b,$$

$$\left\langle c, x^{\varepsilon} \right\rangle = c^{0^T}(x^0 - \varepsilon\Lambda_s) + \varepsilon c_s = c^{0^T}x^0 - \varepsilon(c^{0^T}\Lambda_s - c_s) = \langle c, x \rangle - \varepsilon\Delta_s. \quad \blacksquare$$

Учитывая (4.12) и принятые обозначения, теорема 2 принимает вид:

2-я теорема Данцига. *Если при некотором $s \in [m+1:n]$ компонента $\Delta_s < 0$, а все компоненты столбца Λ_s неположительны, то задача (4.1) не имеет решения.*

Доказательство. Из условий теоремы и леммы 2 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ выполняется $Ax^{\varepsilon} = b$ и $x^{\varepsilon} \ge O_n$, т.е. x^{ε} — допустимый план. С другой стороны, в силу той же леммы 2,

$$\left\langle c, x^{\varepsilon} \right\rangle = \langle c, x \rangle - \varepsilon\Delta_s \to +\infty \text{ при } \varepsilon \to +\infty,$$

т.е. задача (4.1) неограниченна сверху на допустимом множестве. $\blacksquare$

Рассмотрим теперь случай выполнения условий теоремы 3, т.е. когда существует индекс $s \in [m+1:n]$ такой, что $\Delta_s < 0$ и при этом среди компонент столбца Δ_s есть положительные. Пусть в соответствии с (4.7)-(4.8)

$$\varepsilon = \min_{\substack{j \in [1:m] \\ \lambda_{js} > 0}} \frac{x_j}{\lambda_{js}} = \frac{x_r}{\lambda_{rs}}, \quad r \in [1:m], \quad \lambda_{rs} > 0. \qquad (4.20)$$

При таком ε компоненты вектора x^{ε} из (4.19) выражаются формулой (4.10).

3-я теорема Данцига. *Пусть существует индекс $s \in [m+1:n]$ такой, что $\Delta_s < 0$ и при этом среди компонент столбца Δ_s есть положительные. Тогда план x^{ε}, определяемый (4.19)-(4.20) является базисным, а $\{A_j \,/\, j \in J'\}$, где J' определяется (4.9) и (4.20), его базисом, причем*

$$\left\langle c, x^{\varepsilon} \right\rangle = \langle c, x \rangle - \varepsilon\Delta_s. \qquad (4.21)$$

Доказательство. Из выбора числа ε в соответствии с (4.20) и (4.19) следует $x^{\varepsilon} \ge O_n$. Кроме того, в силу леммы 2, имеет место равенство $Ax^{\varepsilon} = b$. Таким образом x^{ε}, является допустимым планом.

Покажем, что x^{ε} является базисным планом с базисом $\{A_j \,/\, j \in J'\}$, где $J' = (\{1:m\} \setminus \{r\}) \bigcup \{s\}$. Действительно, во-первых, поскольку компонента вектора x^{ε} с номером *r*, как следует из (4.19)-(4.20), равна нулю, то у x^{ε} не более m ненулевых компонент. В соответствии с определением 3 нам осталось показать, что система столбцов $\{A_j \,/\, j \in J'\}$ является линейно независимой. Допустим противное, т.е. существуют числа $\{\alpha_i\}$, $i=\overline{1,m}$, не все равные нулю и такие, что

$$\alpha_1 A_1 + ... + \alpha_{r-1} A_{r-1} + \alpha_r A_r + \alpha_{r+1} A_{r+1} + ... + \alpha_m A_m = 0. \qquad (4.22)$$

Очевидно, что

$$\alpha_r \neq 0, \qquad (4.23)$$

так как иначе получаем противоречие с линейной независимостью столбцов базиса $\{A_j / j \in J\}$, где по предположению (см. (4.12)) $J = [1:m]$. В силу (4.14) имеем разложение столбца A_s по базису $\{A_j / j \in J\}$:

$$A_s = \lambda_{1s} A_1 + ... + \lambda_{ms} A_m.$$

Подставив его в (4.22) получим нулевую линейную комбинацию столбцов базиса $\{A_j / j \in J\}$, причем коэффициент при A_r будет равен $\alpha_r \cdot \lambda_{rs}$. В силу (4.20) и (4.23), он не равен нулю и, таким образом, получаем противоречие с линейной независимостью столбцов базиса $\{A_j / j \in J\}$. Тем самым мы показали, что набор столбцов $\{A_j / j \in J'\}$ является базисом базисного плана x^{ε}. Для завершения доказательства теоремы осталось заметить, что формула (4.21) следует непосредственно из леммы 2. ▨

4.4. Возможные ситуации перехода к очередному базисному плану

Если число ε из (4.7) является положительным, то из (4.11) и условия $\Delta_s < 0$ следует, что $\langle c, x^{p+1} \rangle > \langle c, x^p \rangle$. Неравенство $\varepsilon > 0$ заведомо выполнено, если базисный план x^p невырожден. Если же он вырожден, то не исключено, что найдется $r \in J$, для которого $\lambda_{rs} > 0$ и $x_r = 0$. Тогда (см. (4.7)) окажется, что $\varepsilon = 0$ и $x^{p+1} = x^p$, т.е. итогом вычислений по формулам (4.7)-(4.11) будет лишь замена базиса $\{A_j / j \in J\}$ на базис $\{A_j / j \in J'\}$.

Процедура вычислений (4.7)-(4.10) содержит некоторую неопределенность. Там не уточняется, как выбирать номер s из условия III и номер r их условий (4.8)-(4.9), если таких s и r несколько. Существуют примеры, показывающие, что, при определенном выборе этих номеров, описанная процедура может привести к циклическому перебору базисов одного и того же базисного плана. В таком случае говорят, что произошло *зацикливание* симплекс-метода. Существуют особые правила выбора r и s, устраняющие явление зацикливания. Простейшее правило такого сорта заключается в следующем.

Теорема 4 (правило Блэнда устранения зацикливания). *Пусть при выполнении условия III выбирается «первое подходящее» s, а затем «первое подходящее» r, т.е.*

$$s = \min\{k \notin J \,/\, \Delta_k < 0\},$$

$$r = \min\{ j \in J \,/\, \lambda_{js} > 0, \frac{x_j}{\lambda_{js}} = \varepsilon\},$$

где ε определено в (4.7)-(4.8). Тогда зацикливание симплекс-метода невозможно.

На очередной $(p+1)$-й итерации необходимо опять считать коэффициенты λ'_{jk} и оценки Δ'_k замещения для нового базиса. Это, вообще говоря, требует решения соответствующих систем линейных уравнений и является достаточно трудоемкой операцией. Но оказывается, что λ'_{jk} и Δ'_k можно легко рассчитать по известным нам λ_{jk} и Δ_k.

Теорема 5 (связь между старыми и новыми параметрами замещения). *При любом $k = 1, 2, ..., n$ выполняются соотношения*

$$\lambda'_{jk} = \begin{cases} \lambda_{jk} - \dfrac{\lambda_{js}}{\lambda_{rs}} \cdot \lambda_{rk}, & \text{если } j \in J \setminus \{r\}, \\ \dfrac{\lambda_{rk}}{\lambda_{rs}}, & \text{если } \; j = s, \end{cases} \tag{4.24}$$

$$\Delta'_k = \Delta_k - \frac{\Delta_s}{\lambda_{rs}} \lambda_{rk}. \tag{4.25}$$

4.5. Симплекс-таблица

При организации вычислений по симплекс-методу основной конструкцией является так называемая симплекс-таблица T, соответствующая данному базисному плану x и его базису $\{A_j \,/\, j \in J\}$. Эта таблица представляет собой матрицу размера (m+1)×(n+1).

Симплекс-таблица T

	A_1	….	….	A_k	….	….	A_s	….	….	A_n	x
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$			$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
A_j	λ_{j1}	….	….	λ_{jk}	….	….	λ_{js}	….	….	λ_{jn}	x_j
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$			$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
A_r	λ_{r1}	….	….	λ_{rk}	….	….	λ_{rs}	….	….	λ_{rn}	x_r
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$			$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
Δ	Δ_1	….	….	Δ_k	….	….	Δ_s	….	….	Δ_n	$\langle c, x \rangle$

Над столбцами таблицы записываются буквенные обозначения $A_1,..., A_n$, x, столбцов матрицы A и очередного базисного плана задачи (4.1), а с левой стороны таблицы – обозначения $\{A_j \,/\, j\in J\}$ столбцов, образующих базис, и обозначение вектора Δ. На указанные места таблицы заносятся численные значения параметров λ_{jk}, x_j, Δ_k, $\langle c,x\rangle$.

После заполнения таблицы T проводится ее анализ на основе правил симплекс-метода. Если выполняется условие I или II, то расчеты заканчиваются. Если же выполняется условие III, то осуществляется переход к симплекс-таблице T′, соответствующей новому базисному плану x^{ε} и его базису $\{A_j \,/\, j\in J'\}$.

Симплекс-таблица T′

	A_1	....	....	A_k	....	....	A_s	....	....	A_n	x
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$			$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
A_j	λ'_{j1}	....	....	λ'_{jk}	....	....	0	....	....	λ'_{jn}	x'_j
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$			$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
A_s	λ'_{s1}	....	....	λ'_{sk}	....	....	1	....	....	λ'_{sn}	x'_s
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$			$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
Δ	Δ'_1	....	....	Δ'_k	....	....	0	....	....	Δ'_n	$\langle c,x\rangle$

Для этого выбираются номера s и r, удовлетворяющие условиям III и (4.7)-(4.8). А в случае неопределенности выбора используется еще и правило Блэнда. Ведущий элемент λ_{rs} в таблице T помечается для наглядного указания на то, что столбец A_r должен быть выведен из базиса, а столбец A_s введен в него. В таблице T′ вместо A_r ставится A_s, а остальные буквенные обозначения остаются неизменными. Из формул (4.7)-(4.11), (4.24)-(4.25) ясно, что вычисление параметров таблицы T′ сводится к следующим элементарным операциям над строками таблицы T:

1) для получения строки A_j таблицы T′ при $j\notin J\setminus\{r\}$ из строки A_j таблицы T вычитается ее строка A_r, умноженная на коэффициент $\lambda_{js}/\lambda_{rs}$;
2) для получения строки A_s таблицы T′ строка A_r таблицы T делится на коэффициент λ_{rs};
3) для получения строки Δ таблицы T′ из строки Δ таблицы T вычитается ее строка A_r, умноженная на коэффициент Δ_s/λ_{rs}.

При этом естественно (в соответствии с (4.4)) элемент столбца A_s таблицы T′, стоящий на пересечении со строкой A_s, оказывается равным единице, а все остальные его элементы равны нулю. Затем проводится анализ таблицы T′. Если выполняется условие III, то осуществляется переход к следующей таблице T″ и т.д.

4.6. Построение исходного базисного плана

При описании симплекс-метода мы предполагали, что уже известен некоторый начальный базисный план задачи. Здесь рассмотрен один из общих способов его построения — метод искусственного базиса.

Пусть дана задача (4.1). Без потери общности будем считать, что $b \geq O_m$. Рассмотрим задачу

$$\sum_{i=1}^{m} u_i \to \min, \qquad (4.26)$$
$$Ax + u = b, \quad x \geq O_n,\ u \geq O_m,$$

где $u = (u_1, ..., u_m) \in R^m$. Эта задача имеет решение, так как целевая функция является линейной и ограниченной на допустимом множестве. Причем вектор $z^0 = (o_n, b) \in R^{m+n}$ является базисным планом задачи (4.26) с базисом $\{e^1, ..., e^m\}$, где e^i — i-й единичный орт в R^m. Применим к задаче (4.26) симплекс-метод, используя в качестве начального базисный план z^0. В результате найдем оптимальный базисный план $z^* = (x^*, u^*) \in R^{m+n}$ задачи (4.26). Теперь вопрос о начальном базисном плане для исходной задачи (4.1) решается в соответствии со следующим утверждением.

Теорема 6. *Если $u^* \neq O_m$, то допустимое множество в задаче (4.1) пусто. Если же $u^* = O_m$, то x^* является базисным планом задачи (4.1).*

Доказательство. Предположим, что $\Omega \neq \varnothing$, т.е. существует хотя бы один допустимый план $x \in \Omega$. Тогда легко проверить, что план $(x^*, O_m) \in R^{m+n}$ является не только допустимым, но и оптимальным для задачи (4.26), причем оптимальное значение целевой функции равно нулю. Поэтому, если только предположить, что $u^* \neq O_m$, что говорит о наличии хотя бы одной положительной компоненты у вектора u^*, то получается, что значение целевой функции задачи (4.26) на плане (x^*, u^*) является положительным. Это противоречит его оптимальности. Тем самым первое утверждение теоремы доказано.

Пусть теперь

$$u^* = O_m. \qquad (4.27)$$

Легко видеть, что $Ax^* = b$, $x^* \geq O_n$, т.е. план x^* является допустимым для задачи (4.1). Из базисности плана (x^*, u^*) для задачи (4.26) и условия (4.27) следует, что у вектора x^* не более m положительных компонент, и им соответствуют линейно независимые столбцы матрицы A. Если этих положительных компонент меньше чем m, то их можно дополнить до m штук за счет нулевых так, чтобы в целом выделенным компонентам соответствовали линейно независимые столбцы матрицы A. Это всегда можно сделать, так как $\operatorname{rank} A = m$. Это говорит о том, что x^* — базисный план задачи (4.1).

5. ДВОЙСТВЕННАЯ ЗАДАЧА ЛП

Каждой задаче ЛП можно сопоставить другую задачу ЛП, называемую двойственной. Их совместное изучение составляет предмет теории двойственности, являющейся важным разделом линейного программирования. Теория двойственности обнаруживает тесную связь между обеими задачами, составляющими единую пару. Совместный анализ пары двойственных задач оказывается плодотворным как при построении численных методов решения, так и при различных качественных исследованиях.

Рассмотрим задачу ЛП в канонической форме

$$\begin{aligned} & c^T x \to \max, \\ & Ax = b, \quad x \geq O_n, \end{aligned} \tag{5.1}$$

где $c, x \in R^n$, $b \in R^m$, A — матрица размерности $m \times n$, $m < n$, $\operatorname{rank} A = m$.

Двойственной к ней назовем следующую задачу ЛП

$$\begin{aligned} & b^T y \to \min, \\ & A^T y \geq c, \end{aligned} \tag{5.2}$$

где $y \in R^m$, A^T — транспонированная матрица A.

5.1. Теоремы двойственности

Приводимые ниже факты демонстрируют глубокую связь между задачами двойственной пары.

Лемма 3. *Если x и y допустимые планы задач (5.1) и (5.2) соответственно, то*

$$c^T x \leq b^T y. \tag{5.3}$$

При этом, если для некоторых допустимых планов x^* и y^* в (5.3) выполняется равенство, то x^* и y^* являются оптимальными планами соответствующих задач.

Доказательство. Непосредственно используя допустимость планов, получаем (5.3):

$$c^T x \le (A^T y)^T x = y^T Ax = y^T b = b^T y.$$

Второе утверждение леммы легко следует из (5.3).

Следствие. *Если целевая функция одной из пары двойственных задач не ограничена на множестве допустимых планов, то вторая задача не имеет ни одного допустимого плана.*

Теорема 7 (1-я теорема двойственности). *Пусть* $\Omega \ne \varnothing$. *Если одна из задач двойственной пары (5.1)-(5.2) имеет решение, то и другая задача разрешима. При этом для любых оптимальных планов* x^* *и* y^* *задач (5.1) и (5.2) имеет место равенство*

$$c^T x^* = b^T y^*. \qquad (5.4)$$

Доказательство.

а) Пусть задача (5.1) является разрешимой. Из теорем 3 и 4 следует, что найдется оптимальный базисный план x^*, для которого все компоненты вектора Δ, определяемые формулой (4.5), являются неотрицательными

$$\Delta_k \ge 0,\ k = \overline{1,n}. \qquad (5.5)$$

Как и в п. 4.3, без потери общности, примем предположение о том, что $\{A_j / j \in J\}$, где $J = [1:m]$, является базисом для x^*, и те же обозначения. Тогда (5.5) эквивалентно неравенству

$$\Lambda^T c^0 - c \ge 0. \qquad (5.6)$$

Обозначим через $y^* = (Б^{-1})^T c^0$. Тогда, используя (5.6), имеем

$$A^T y^* = (Б^{-1} A)^T c^0 = \Lambda^T c^0 \ge c,$$

т.е. вектор y^* является допустимым планом задачи (5.2). Кроме того, получаем

$$c^T x^* = c^{0^T} x^0 = c^{0^T} Б^{-1} b = ((Б^{-1})^T c^0)^T b = yb = b^T y^*.$$

Следовательно, в силу леммы 3, вектор y^* является оптимальным планом задачи (5.2) и имеет место равенство (5.4).

б) Предположим теперь, что задача (5.2) имеет решение. Поскольку $\Omega \ne \varnothing$, то в силу леммы 3 целевая функция задачи (5.1) ограничена на множестве допустимых планов Ω. Отсюда, учитывая ее линейность, и следует существование решения задачи (5.1).

Теорема 8 (2-я теорема двойственности). *Для того, чтобы допустимые планы* x^* *и* y^* *пары двойственных задач (5.1) и (5.2) были оптимальными необходимо и достаточно, чтобы они удовлетворяли системе уравнений*

$$y^{*T}(Ax^* - b) = 0, \qquad (5.7)$$

$$x^{*T}(A^T y^* - c) = 0. \qquad (5.8)$$

Доказательство.

Необходимость. Если x^* и y^* — оптимальные планы, то, по теореме 7, выполняется равенство (5.4). Учитывая, что $Ax^* = b$, легко увидеть, что оно эквивалентно (5.8). Выполнение равенства (5.7) следует из допустимости плана x^*.

Достаточность. Из (5.8) следует (5.4), что, по лемме 3, означает оптимальность допустимых планов x^* и y^*.

Замечание 1. Особенно эффективность теории двойственности проявляется в тех случаях, когда двойственная задача решается проще, чем прямая. Если ее решение y^* найдено, то, учитывая, что $A^T y^* \ge c$ и $x^* \ge 0$, из (5.8) получаем систему уравнений для решения прямой задачи (5.1):

$$x_j^* (\sum_{i=1}^{m} y_i^* a_{ij} - c_j) = 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Замечание 2. Укажем соответствующие пары двойственных задач еще в двух наиболее важных частных случаях

а) Если прямая задача записана в основной форме

$$\langle c, x \rangle \to \max,$$
$$Ax \le b,$$

то двойственная ей задача имеет каноническую форму

$$\langle b, y \rangle \to \min,$$
$$A^T y = c, \; y \ge O_m.$$

б) Если прямая задача записана в стандартной форме

$$\begin{aligned} &\langle c, x \rangle \to \max, \\ &Ax \le b, \quad x \ge O_n, \end{aligned} \tag{5.9}$$

то двойственная ей задача также имеет стандартную форму

$$\begin{aligned} &\langle b, y \rangle \to \min, \\ &A^T y \ge c, \quad y \ge O_m. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Отметим, что и для этих пар двойственных задач, приведённые выше утверждения (лемма 3 и теоремы 7-8) также справедливы.

5.2. Экономическая интерпретация двойственной задачи ЛП

Предположим, что мы рассматриваем задачу планирования производства из §1. То есть задача (5.9) соответствует задаче определения оптимального плана производства товаров, обеспечивающего максимальную прибыль. Пусть предприятие решило прекратить производство товаров и продать ресурсы, идущие на их изготовление. Обозначим через y_i цены на единицу ресурсов *i*-го вида, $i = \overline{1,m}$. Эти цены должны удовлетворять двум условиям: во-первых, они не должны быть слишком высокими, иначе ресурсы трудно продать; а во-вторых, цены должны быть такими, чтобы прибыль от их реализации была бы не меньше прибыли от реализации готовой продукции. Первое условие выражается в минимизации линейной формы $b^T y$, где $y = (y_1,..., y_m)^T$, а второе условие неравенством $A^T y \ge c$. Учитывая, что все компоненты вектора y неотрицательны, получаем задачу (5.10). Таким образом, двойственная задача (5.10) соответствует следующей экономической задаче: по каким минимальным ценам следует продавать ресурсы, чтобы прибыль от их реализации была не меньше прибыли, полученной от реализации продукции, изготовленной с использованием этих ресурсов.

6. ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

6.1. Приведение задач ЛП к заданной форме

1. Привести к канонической форме задачу

$$x_1 + x_2 \to \max,$$
$$x_1 - x_2 \le 1, \quad 2x_1 + x_2 = 2,$$
$$x_1 \ge 0.$$

Решение. Начнем с преобразования смешанной системы ограничений в систему уравнений. Для того, чтобы первое ограничение записать в форме равенства, введем неотрицательную переменную x_3. В результате система ограничений запишется в виде

$$x_1 - x_2 + x_3 = 1, \quad 2x_1 + x_2 = 2, \tag{6.1}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_3 \ge 0. \tag{6.2}$$

Перейдем к преобразованию условий неотрицательности. Неравенствами (6.2) не охвачена только переменная x_2. Можно воспользоваться двумя приемами.

Первый прием технически выполняется без всяких дополнительных вычислений, но зато приводит к увеличению числа переменных и поэтому к более сложным вычислениям в дальнейшем. Суть его заключается в том, что переменная x_2, на значение которой не наложено требование неотрицательности, заменяется разностью двух неотрицательных переменных:

$$x_2 = u_1 - v_1, \quad u_1 \ge 0, \quad v_1 \ge 0.$$

После этого преобразования исходная задача запишется в канонической форме

$$x_1 + u_1 - v_1 \to \max,$$
$$x_1 - u_1 + v_1 + x_3 = 1, \quad 2x_1 + u_1 - v_1 = 2,$$
$$x_1 \ge 0, \quad u_1 \ge 0, \quad v_1 \ge 0, \quad x_3 \ge 0.$$

Второй прием, более сложный на начальном этапе, наоборот упрощает дальнейшие расчеты, так как связан с уменьшением числа переменных и уравнений. Сущность его заключается в следующем. Найдем из какого-либо уравнения системы (6.1), например второго, переменную x_2, на значение которой не наложено требование неотрицательности, и исключим эту переменную из оставшихся уравнений системы и из целевой функции. После этого преобразования исходная задача запишется в канонической форме

$$-x_1 \to \max,$$
$$3x_1 + x_3 = 3,$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

2. Преобразовать к основной, стандартной и канонической формам задачу ЛП:

$$2x_1 - x_2 - 5x_3 \to \max,$$
$$4x_1 + 3x_2 + x_3 = 4,$$
$$-x_1 + 6x_2 - x_3 \geq 2,$$
$$7x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 5,$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

3. Преобразовать задачу ЛП к канонической форме так, чтобы число переменных в новой задаче не превышало трех:

$$-x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 \to \max,$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 5,$$
$$4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 6,$$
$$-x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 = -3,$$
$$x_3 \geq 0, \; x_4 \geq 0.$$

Привести задачи 4–7 к канонической форме двумя приемами (см. задачу 1) и сравнить результаты.

4.
$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + x_3 \to \max, \\ & x_1 - x_3 \leq 1, \\ & x_2 + x_3 \geq 1, \\ & x_1 \geq 0. \end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned} & x_1 - x_2 - x_3 + 10x_4 \to \min, \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ & x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ & x_3 + x_4 = 1. \end{aligned}$$

6.
$$\begin{aligned} & x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \to \max, \\ & x_1 + x_2 - x_4 \leq 1, \\ & -x_1 + x_2 + x_4 = 1, \\ & x_2 + x_3 = 1, \\ & x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

7.
$$\begin{aligned} & x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 \to \min, \\ & x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ & -x_1 - x_4 \leq 5, \\ & x_2 + x_3 \geq 10, \\ & x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

8. Привести следующую задачу ЛП к стандартной форме:

$$4x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max,$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \;\sim 1,$$
$$3x_2 + x_3 \;\approx 2,$$
$$-x_1 + 5x_2 + 2x_3 \;\infty\; 4.$$
$$x_2 \ge 0,\;\; x_3 \ge 0:$$

	~	≈	∞		~	≈	∞		~	≈	∞		~	≈	∞
1	≥	=	≤	6	=	≤	=	11	=	≥	=	16	≤	≤	=
2	=	≤	≥	7	≤	=	≥	12	=	=	≤	17	≥	≥	≤
3	≤	=	=	8	≥	=	=	13	≥	≥	=	18	≥	≤	=
4	=	≥	≥	9	=	≥	≤	14	≤	≥	≥	19	≥	≤	≥
5	≥	=	≥	10	≤	≥	=	15	=	=	≥	20	≤	≤	≥

9. Привести следующую задачу ЛП к канонической форме:

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \to \min,$$
$$x_1 + 3x_2 - x_4 \;\sim 2,$$
$$-x_1 + x_2 + x_4 \;\approx 1,$$
$$x_2 + x_3 \;\infty\, 3,$$
$$x_1 \ge 0,\; x_2 \ge 0,\;\; x_3 \ge 0:$$

	~	≈	∞		~	≈	∞		~	≈	∞		~	≈	∞
1	≥	=	≤	6	=	≤	≤	11	≥	≤	≤	16	=	=	≥
2	≥	≥	≤	7	≤	≥	≤	12	=	≤	≥	17	≥	=	≥
3	≥	≤	≥	8	≤	≤	≥	13	≥	≥	=	18	≤	≥	=
4	=	≥	≥	9	≤	≥	≥	14	≤	=	≤	19	=	=	≤
5	≥	≤	=	10	≤	≤	=	15	=	≥	≤	20	≤	=	≥

6.2. Геометрическое решение задач ЛП

10. Используя геометрические построения, найти решения следующих задач ЛП:

а) $x_1 + 2x_2 \to \max,$

$3x_1 - 2x_2 \le 6,$

$-x_1 + 2x_2 \le 4,$

$3x_1 + 2x_2 \le 12,$

$x_1 \ge 0;$

б) $2x_1 + x_2 \to \max,$

$-x_1 + x_2 \le 2,$

$x_1 + 2x_2 \le 7,$

$4x_1 - 3x_2 \le 6,$

$x_1 \ge 0,\;\; x_2 \ge 0;$

в) $7x_1 + 5x_2 \to \min$,
$x_1 + x_2 \ge 3$,
$x_1 + 5x_2 \ge 5$,
$2x_1 + x_2 \ge 4$;

г) $-x_1 + 2x_2 \to \min$,
$2x_1 - 3x_2 \ge 0$,
$x_1 - x_2 \le 3$,
$2x_1 - x_2 = 4$.

11. Используя метод исключения переменных и геометрические построения, найти решения следующих задач ЛП:

а) $8x_1 - 2x_2 - 3x_3 \to \max$,
$-x_1 + 3x_2 + x_3 \le 4$,
$7x_1 - 2x_3 \le 16$,
$2x_1 - x_2 - x_3 = 2$,
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$;

б) $x_1 + x_3 - 7x_4 + x_5 \to \max$,
$x_1 - x_2 + 6x_4 - 2x_5 = -7$,
$x_2 - x_3 - 4x_4 + 6x_5 = 24$,
$x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 32$,
$x_j \ge 0,\quad j = \overline{1,5}$;

в) $-x_1 + x_2 + x_4 + 3x_5 \to \min$,
$x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_4 + 2x_5 = -5$,
$x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 5x_5 = -2$,
$-2x_2 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 6$,
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$;

г) $x_1 + x_2 + 2x_3 - 9x_4 \to \max$,
$2x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 \le 6$,
$x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 5$,
$5x_1 + x_2 - 3x_4 = 11$,
$3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 7$,
$x_j \ge 0,\quad j = \overline{1,4}$.

12. Найти все значения параметра *a*, при которых указанные точки x^* являются решениями соответствующих задач ЛП:

а) $ax_1 + 2x_2 \to \max$,
$2x_1 + x_2 \le 10$,
$x_1 + 2x_2 \le 14$,
$4x_1 + x_2 \le 16$,
$x^* = (2,6)$;

б) $x_1 + 3x_2 \to \max$,
$ax_1 + x_2 \ge 4$,
$2x_1 - x_2 \le 2$,
$3ax_1 + 2x_2 \le 8$,
$x^* = (0,4)$.

13. Используя геометрические построения, найти решение следующей задачи ЛП:

$$
\begin{gathered}
x_1 + ax_2 \to \max, \\
x_1 + 2x_2 \le 10, \\
3x_1 + 2x_2 \le 18, \\
x_1 - x_2 \ge -b, \\
cx_1 - x_2 \le 8c + 3\ :
\end{gathered}
$$

	a	*b*	*c*		*a*	*b*	*c*		*a*	*b*	*c*		*a*	*b*	*c*
1	5	7	2	6	–1/4	10	2	11	–5/6	8	1/4	16	–3/4	13/2	1/2
2	1	6	3	7	4	12	1/2	12	3	13/2	2	17	3/2	7	2
3	– 1	6	1/8	8	5/4	9	1/3	13	1	9	1	18	3	6	1
4	5	9	1	9	– 1	6	1/2	14	–1/3	10	2	19	4	8	3/4
5	3/4	7	1	10	5/6	7	1	15	7/4	6	3	20	– 1	15/2	1/3

14. Используя геометрические построения, найти решение следующей задачи ЛП:

$$
\begin{aligned}
ax_1 + x_2 &\to \min, \\
x_1 + (b-3)x_2 &\ge b, \\
(c-4)x_1 + x_2 &\ge c, \\
3x_1 + 2x_2 &\ge 11, \\
x_1 \ge 0, \quad x_2 &\ge 0\ :
\end{aligned}
$$

	a	*b*	*c*		*a*	*b*	*c*		*a*	*b*	*c*		*a*	*b*	*c*
1	1/4	5	9	6	1/2	7	6	11	7/2	5	7	16	1/2	4	9
2	5/4	4	6	7	1/6	8	8	12	9/2	6	9	17	5/3	8	6
3	9/2	7	8	8	5/2	4	7	13	1/5	7	7	18	3/4	5	6
4	7/4	8	7	9	13/3	5	8	14	7/2	4	8	19	1/4	6	8
5	5/2	6	6	10	2/3	6	7	15	1/3	8	9	20	11/2	7	9

15. Используя метод исключения переменных и геометрические построения, найти решение следующей задачи ЛП:

$$
\begin{aligned}
& ax_2 - 3x_3 \to \max, \\
& 2x_1 + bx_2 + x_3 \le 15, \\
& 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 \le 0, \\
& cx_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \\
& x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0\ :
\end{aligned}
$$

	a	*b*	*c*		*a*	*b*	*c*		*a*	*b*	*c*		*a*	*b*	*c*
1	10	2	3	6	–2	2	2	11	–1	5	3	16	–2	5	2
2	–1	1	2	7	2	3	4	12	6	6	4	17	4	4	3
3	3	5	4	8	5	5	3	13	10	1	2	18	12	2	4
4	–3	4	2	9	11	1	4	14	–3	3	3	19	5	3	2
5	12	3	3	10	7	7	2	15	7	3	4	20	–1	3	4

16. Используя метод исключения переменных и геометрические построения, найти решение следующей задачи ЛП:

$$
\begin{aligned}
& x_1 + x_3 + ax_4 + bx_5 \to \max, \\
& x_1 - x_2 + 6x_4 - 2x_5 = c - 15, \\
& x_2 - x_3 - 4x_4 + 6x_5 = 24, \\
& x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 7x_5 = c + 24, \\
& x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}\ :
\end{aligned}
$$

	a	*b*	*c*		*a*	*b*	*c*		*a*	*b*	*c*		*a*	*b*	*c*
1	3	5	6	6	1	1	7	11	1	2	8	16	2	2	6
2	5	2	7	7	6	3	8	12	8	4	6	17	1	3	7
3	1	5	8	8	2	1	6	13	2	5	7	18	7	4	8
4	3	–1	6	9	3	0	7	14	9	5	8	19	6	2	6
5	4	3	7	10	5	7	8	15	7	–1	6	20	3	3	7

17. Привести примеры таких значений параметров p и q, при которых задача

$$
\begin{aligned}
&ax_1 + bx_2 \to \max,\\
&x_1 + px_2 \le 1,\\
&x_1 - \quad x_2 \ge q,\\
&x_1 \ge 0:
\end{aligned}
$$

а) имеет пустое допустимое множество;
б) имеет оптимальное значение целевой функции равное $+\infty$;
в) имеет единственное решение; г) имеет бесконечно много решений:

	a	b		a	b		a	b		a	b
1	3	5	6	2	1	11	7	3	16	2	5
2	3	7	7	6	5	12	7	4	17	5	2
3	2	3	8	3	7	13	3	2	18	2	7
4	8	3	9	5	8	14	5	3	19	7	2
5	3	4	10	4	7	15	5	6	20	3	1

18. Найти все значения параметра k, при которых точка $x^* = (b, a)$ является решением задачи

$$
\begin{aligned}
&kx_1 + (2-k)bx_2 \to \max,\\
&ax_1 - \qquad bx_2 \le 0,\\
&2x_1 + \qquad 3x_2 \le c,\\
&x_1 + \qquad x_2 \le a + b:
\end{aligned}
$$

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	4	–3	7	6	3	1	13	11	3	–1	8	16	5	1	20
2	3	2	14	7	3	–1	9	12	3	–2	7	17	5	2	20
3	2	–1	5	8	4	–1	12	13	4	2	16	18	5	–3	11
4	5	–2	13	9	4	–2	10	14	4	3	19	19	6	–5	10
5	5	4	25	10	4	1	15	15	5	–1	14	20	6	–4	11

6.3. Отыскание базиса заданного базисного плана

19. Пусть полиэдр в $\mathbf{R}^6$ задается системой

$$
\begin{aligned}
4x_1 + 7x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 + 4x_6 &= 4,\\
-x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \qquad - x_6 &= -1,\\
x_2 - 3x_3 - x_4 - x_5 + 2x_6 &= 0,\\
x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6}&.
\end{aligned}
$$

Найти все базисы его вершины $x^0 = (0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0)$.

Решение. Из вида базисного плана и определения 3 следует, что индексы 2 и 4 входят в соответствующее множество индексов столбцов матрицы условий, которые образуют базис. Осталось выяснить, какие из систем столбцов $\{A_j, A_2, A_4\}$, где индекс $j \in \{1,3,5,6\}$, линейно независимы.

С этой целью вычислим четыре определителя

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3, \quad \begin{vmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 4 & 7 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2.$$

Отсюда заключаем, что базисами плана x^0 служат системы $\{A_3, A_2, A_4\}$ и $\{A_6, A_2, A_4\}$.

20. Пусть полиэдр в $\mathbf{R}^5$ задается системой

$$\begin{aligned} kx_1 + x_2 + 3x_3 \qquad + 5x_4 + 6x_5 &= 3, \\ -x_2 + x_3 + (k-5)x_4 + 2x_5 &= 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad + 5x_4 + 2x_5 &= 1, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{aligned}$$

Найти все базисы его вершины $x^0 = (0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0)$ в зависимости от параметра *k*.

21. Пусть полиэдр в $\mathbf{R}^6$ задается системой

$$\begin{aligned} ax_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 + 2x_6 &= -1, \\ bx_1 + bx_2 - 2x_3 + x_4 + bx_5 + x_6 &= -1, \\ -2x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 + cx_5 - x_6 &= 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{aligned}$$

Найти все базисы его вершины $x^0 = (0, 0, 1, 1, 0, 0)$.

	a	*b*	*c*		*a*	*b*	*c*		*a*	*b*	*c*		*a*	*b*	*c*
1	1	2	– 3	6	1	5	– 8	11	1	1	– 2	16	6	0	2
2	1	1	2	7	– 4	2	2	12	– 4	2	– 3	17	– 4	2	– 3
3	11	– 1	2	8	– 19	5	– 8	13	1	1	– 4/3	18	26	– 4	7
4	6	0	1/3	9	– 14	4	1	14	3	– 1	2	19	3	2	– 3
5	2	4	– 19/3	10	– 9	3	2	15	2	4	1	20	1	– 4	7

6.4. Решение задач ЛП симплекс-методом

22. Сформулируем три утверждения относительно задачи ЛП и ее базисного плана x^0:

А. x^0 — решение задачи.

Б. Задача не имеет решения.

В. Существует базисный план на котором целевая функция принимает большее значение, чем в x^0.

Используя правила симплекс-метода, выяснить, какое из этих утверждений имеет место в задаче:

$$
\begin{aligned}
&2x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 \to \max,\\
&-5x_1 + 6x_2 - 7x_3 + x_4 + 14x_5 = -7,\\
&x_1 - 5x_2 - 10x_3 - 4x_4 + 20x_5 = -10,\\
&x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5},\\
&x^0 = (2, 0, 0, 3, 0)^T .
\end{aligned}
$$

Решение. Единственным базисом базисного плана x^0 является система столбцов $\{A_1, A_4\}$. Выразим через этот базис столбцы A_2, A_3, A_5. Составляем систему

$$A_1\lambda_{12} + A_4\lambda_{42} = A_2,$$

т.е.

$$
\begin{aligned}
-5\lambda_{12} + \lambda_{42} &= 6,\\
\lambda_{12} - 4\lambda_{42} &= -5.
\end{aligned}
$$

Находим $\lambda_{12} = -1, \quad \lambda_{42} = 1$.

Аналогично из систем

$$A_1\lambda_{13} + A_4\lambda_{43} = A_3, \quad A_1\lambda_{15} + A_4\lambda_{45} = A_5$$

находим $\lambda_{13} = 2, \quad \lambda_{43} = 3, \ \lambda_{15} = -4, \quad \lambda_{45} = -6$. Вычислим оценки замещения

$$
\begin{aligned}
\Delta_2 &= 2\lambda_{12} - \lambda_{42} + 4 = 1,\\
\Delta_3 &= 2\lambda_{13} - \lambda_{43} - 1 = 0,\\
\Delta_5 &= 2\lambda_{15} - \lambda_{45} - 3 = -5.
\end{aligned}
$$

Поскольку $\Delta_5 < 0, \ \lambda_{15} < 0, \ \lambda_{45} < 0$, то, согласно теореме 2, имеет место утверждение Б.

23. Используя правила симплекс-метода, выяснить, какое из утверждений А, Б или В (см. задачу 22) имеет место в следующих задачах:

а)
$$
\begin{aligned}
&-x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 + 2x_5 \to \max,\\
&5x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 = -1,\\
&-4x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 5,\\
&x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5},\\
&x^0 = (0, 1, 2, 0, 0)^T ;
\end{aligned}
$$

б)
$$
\begin{aligned}
&3x_2 - 7x_3 + x_4 - x_5 \to \max,\\
&-2x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 1,\\
&10x_1 + 4x_2 - 9x_3 + 2x_4 - x_5 = 3,\\
&x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5},\\
&x^0 = (0, 1, 0, 0, 1)^T ;
\end{aligned}
$$

в)
$$
\begin{aligned}
&x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 - 3x_5 \to \min,\\
&-x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -1,\\
&2x_1 - 2x_3 - 6x_4 + 2x_5 = 4,\\
&x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5},\\
&x^0 = (2, 1, 0, 0, 0)^T .
\end{aligned}
$$

24. Используя правила симплекс-метода, выяснить, какое из утверждений А, Б или В (см. задачу 22) имеет место в следующих случаях:

а) $$-2x_1 + 5x_2 - 7x_3 + ax_4 + 3x_5 \to \max,$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + bx_4 + 4x_5 = 15,$$
$$-x_1 + cx_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = -4,$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5},$$
$$x^0 = (1, 0, 0, 0, 3)^T:$$

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	1	– 1	1	6	1	– 7	2	11	2	– 5	–2	16	3	– 1	– 1
2	0	– 7	1	7	2	– 1	–1	12	–1	– 6	–3	17	– 2	– 8	1
3	2	– 1	1	8	1	2	1	13	1	– 5	2	18	– 1	– 6	3
4	1	– 1	– 1	9	5	– 6	1	14	6	–7	3	19	3	– 5	– 2
5	1	– 5	– 2	10	3	–1	1	15	2	– 5	2	20	7	– 6	2

б) $$x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 \to \max,$$
$$x_1 + ax_2 + x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 3,$$
$$x_1 - bx_2 - x_3 + cx_4 = 1,$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5},$$
$$x^0 = (2, 0, 1, 0, 0):$$

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	– 1	5	2	6	0	2	3	11	2	1	– 3	16	– 2	1	2
2	0	1	2	7	– 2	– 1	1	12	– 3	–2	1	17	2	3	1
3	– 1	0	– 3	8	– 6	2	3	13	0	2	– 3	18	– 1	3	– 5
4	6	1	– 2	9	2	– 1	3	14	– 1	2	1	19	2	1	5
5	4	2	3	10	– 4	1	–4	15	– 5	3	– 3	20	3	– 4	1

в) $$x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \max,$$
$$2x_1 + 3x_2 + ax_3 + 7x_4 + 9x_5 = b,$$
$$x_1 - x_2 + x_4 + cx_5 = 2,$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5},$$
$$x^0 = (0, 0, (b-14)/a, 2, 0)^T:$$

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	– 1	5	2	6	– 7	12	6	11	– 2	8	2	16	– 6	8	2
2	– 6	12	3	7	– 6	10	3	12	– 8	12	3	17	4	19	1
3	2	18	3	8	2	15	2	13	– 3	10	6	18	– 1	12	3
4	– 4	10	5	9	3	19	1	14	– 7	8	2	19	– 2	5	2
5	– 3	8	4	10	1	19	3	15	3	15	4	20	5	16	2

25. Используя теорию симплекс-метода, найти все значения параметра k, при которых точка x^* является решением соответствующей задачи:

а) $$x_1 + k^2 x_2 - 2x_3 + 2kx_4 + 5x_5 - 10x_6 \to \max,$$
$$\begin{aligned} -2x_1 - x_2 + x_4 + 2x_6 &= 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2, \\ -2x_1 - x_3 + x_4 + 2x_5 &= 2, \end{aligned}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6},$$
$$x^* = (0, 1, 1, 3, 0, 0)^T;$$

б) $$x_1 + 3kx_2 + 2x_3 + 15x_4 - k^2 x_5 + 5x_6 \to \max,$$
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &= 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 &= 4, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 &= 4, \end{aligned}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6},$$
$$x^* = (0, 3, 0, 0, 1, 1)^T;$$

в) $$-3x_1 + kx_2 + 2x_3 + x_4 - 2kx_5 + 5x_6 \to \max,$$
$$\begin{aligned} 5x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 + x_6 &= 4, \\ 2x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &= 4, \\ -7x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 - x_6 &= -5, \end{aligned}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6},$$
$$x^* = (0, 0, 1, 2, 0, 1)^T;$$

26. Используя симплекс-метод, найти все значения параметра k, при которых точка $x^* = (1, 2, 0, 1, 0)^T$ является решением задачи:
$$3x_1 + ax_2 + kx_3 - 5x_4 - 2kx_5 \to \max,$$
$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 &= 0, \\ 3x_1 - x_3 + 2x_4 - x_5 &= 5, \\ bx_1 + cx_2 + x_3 + x_5 &= b + 2c, \end{aligned}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}:$$

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	12	−1	−3	6	3	0	−1	11	8	−1	−3	16	10	1	1
2	7	1	1	7	17	2	3	12	7	−2	−5	17	1	−2	−5
3	15	2	3	8	8	1	1	13	9	1	1	18	9	0	−1
4	5	0	−1	9	0	−1	−3	14	15	−3	−7	19	19	2	3
5	3	−2	−5	10	21	2	3	15	−1	0	−1	20	−5	−1	−3

27. Решить симплекс-методом задачу ЛП, используя начальный базисный план $x^0 = (0, 0, 1, 5)^T$:

$$\begin{gathered} 5x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \to \max, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 5, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{gathered}$$

Решение. Для этой задачи $n = 4$, $m = 2$, $c = (5, 1, 2, 1)^T$, $b = (1, 5)^T$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко убедиться, что x^0 является базисным планом, а столбцы, $A_3 = (1, 0)^T$, $A_4 = (0, 1)^T$ — его базисом. Эти столбцы образуют естественный базис в $\mathbf{R}^2$ и поэтому коэффициенты разложения по нему столбцов A_1 и A_2 совпадают с их компонентами

Таблица T_0

	A_1	A_2	A_3	A_4	x^0
A_3	$\lambda_{31} = 1$	$\lambda_{32} = -1$	$\lambda_{33} = 1$	$\lambda_{34} = 0$	$x_3 = 1$
A_4	$\lambda_{41} = 2$	$\lambda_{42} = 1$	$\lambda_{43} = 0$	$\lambda_{44} = 1$	$x_4 = 5$
Δ	$\Delta_1 = -1$	$\Delta_2 = -2$	$\Delta_3 = 0$	$\Delta_4 = 0$	$\langle c, x^0 \rangle = 7$

Поскольку для x^0 множество индексов $J = \{3;\ 4\}$, то, в соответствии с формулой (4.5):

$$\begin{gathered} \Delta_1 = c_3\lambda_{31} + c_4\lambda_{41} - c_1 = -1, \\ \Delta_2 = c_3\lambda_{32} + c_4\lambda_{42} - c_2 = -2, \\ \Delta_3 = c_3\lambda_{33} + c_4\lambda_{43} - c_3 = 0, \\ \Delta_4 = c_3\lambda_{34} + c_4\lambda_{44} - c_4 = 0, \\ \langle c, x^0 \rangle = 7. \end{gathered}$$

Для построенной таблицы выполнено условие III п.4.2, причем в качестве столбца, вводимого в базис, можно взять A_1 или A_2. Следуя правилу Блэнда, выберем A_1, т.е. полагаем $s = 1$. Поскольку $\dfrac{x_3}{\lambda_{31}} = 1$, $\dfrac{x_4}{\lambda_{41}} = \dfrac{5}{2}$, то из базиса надо вывести A_3, т.е. положить $r = 3$. Таким образом, ведущим является элемент λ_{31}, а новый набор индексов $J = \{1;\ 4\}$.

Теперь осуществим переход к следующей таблице T_1 в соответствии с формулами (4.24) - (4.25), т.е. операциями 1) - 3) п.4.5.

1) Для получения строки A_4 таблицы T_1, поскольку $j = 4 \in J \setminus \{r\}$, из строки A_4 таблицы T_0 вычитаем ее строку A_3, умноженную на коэффициент $\frac{\lambda_{js}}{\lambda_{rs}} = 2$;

2) Для получения строки A_1 таблицы T_1 строку A_3 таблицы T_0 делим на $\lambda_{rs} = 1$;

3) Для получения строки Δ таблицы T_1 из строки Δ таблицы T_0 вычитаем ее строку A_3, умноженную на $\frac{\Delta_s}{\lambda_{rs}} = \frac{\Delta_1}{\lambda_{31}} = -1$

Таблица T_1

	A_1	A_2	A_3	A_4	x^1
A_1	$\lambda_{11} = 1$	$\lambda_{12} = -1$	$\lambda_{13} = 1$	$\lambda_{14} = 0$	$x_1 = 1$
A_4	$\lambda_{41} = 0$	$\lambda_{42} = 3$	$\lambda_{43} = -2$	$\lambda_{44} = 1$	$x_4 = 3$
Δ	$\Delta_1 = 0$	$\Delta_2 = -3$	$\Delta_3 = 1$	$\Delta_4 = 0$	$\langle c, x^1 \rangle = 8$

Для таблицы T_1 выполнено условие III, причем ведущим является элемент λ_{42}, т.е. $r = 4$, $s = 2$. Переходим к следующей симплекс-таблице T_2. При этом, в соответствии с операциями 1) - 3) из п.4.5:

1) Строка A_1 новой таблицы получается вычитанием из строки A_1 таблицы T_1 строки A_4, умноженной на $\frac{\lambda_{js}}{\lambda_{rs}} = -\frac{1}{3}$;

2) Строка A_2 новой таблицы получается из строки A_4 таблицы T_1, деленной на $\lambda_{rs} = 3$;

3) Строка Δ новой таблицы получается из строки Δ таблицы T_1 вычитанием из нее строки A_4, умноженной на $\frac{\Delta_s}{\lambda_{rs}} = \frac{\Delta_2}{\lambda_{42}} = -1$.

Таблица T_2

	A_1	A_2	A_3	A_4	x^2
A_1	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$x_1 = 2$
A_2	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$x_2 = 1$
Δ	0	0	-1	1	$\langle c, x^2 \rangle = 11$

Для таблицы T_2 ведущим является элемент $\lambda_{13} = 1/3$. Строим очередную симплекс-таблицу.

Таблица T_3

	A_1	A_2	A_3	A_4	x^3
A_3	3	0	1	1	6
A_2	2	1	0	1	5
Δ	3	0	0	2	17

Здесь выполняется условие I. Следовательно, $x^* = (0, 5, 6, 0)^T$ — решение задачи, а $\langle c, x^* \rangle = 17$ максимальное значение целевой функции.

28. Решить симплекс-методом следующие задачи ЛП, начав с указанных базисных планов:

а) $x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \to \max,$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 &= 3, \\ -x_1 + x_2 + x_3 \qquad &= 1, \end{aligned}$$

$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}.$

$x^0 = (0, 0, 1, 3)^T$;

б) $3x_1 + 7x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 2x_5 + 2x_6 \to \max,$

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + 3x_6 &= 3, \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 + x_5 - 7x_6 &= -2, \end{aligned}$$

$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6}.$

$x^0 = (0, 0, 1, 0, 1, 0)^T$;

в) $x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 2x_5 \to \min,$

$$\begin{aligned} -x_1 \qquad + x_3 - 2x_4 \qquad &= -2, \\ x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 &= 0, \\ 2x_1 + x_2 \qquad + 5x_4 + x_5 &= 7, \end{aligned}$$

$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}.$

$x^0 = (3, 1, 1, 0, 0)^T$;

г) $3x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 \to \max,$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 2, \\ -4x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 - 3x_5 &= -4, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 \qquad &= 3, \end{aligned}$$

$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}.$

$x^0 = (1, 0, 0, 0, 0)^T$;

д) $x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 + 3x_6 \to \max,$

$$
\begin{aligned}
x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + x_6 &= 1,\\
x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= -1,\\
x_1 + x_2 + x_4 + x_5 &= 1,\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 &= 1,\\
x_j \ge 0, \quad j &= \overline{1,6}.
\end{aligned}
$$

$x^0 = (0, 1, 0, 0, 0, 0)^T$.

29. Решить симплекс-методом следующие задачи ЛП, начав с указанных базисных планов:

а) $ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \max,$

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 &= b,\\
x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 &= c,\\
x_j \ge 0, \quad j &= \overline{1,5},
\end{aligned}
$$

$x^0 = (0, 0, (b-7c)/5, c, 0)^T$:

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	2	8	1	6	3	32	4	11	4	15	2	16	5	22	3
2	1	9	1	7	2	33	4	12	2	16	2	17	1	23	3
3	5	10	1	8	1	34	4	13	3	17	2	18	4	24	3
4	4	11	1	9	5	35	4	14	5	18	2	19	3	25	3
5	3	12	1	10	4	36	4	15	1	19	2	20	2	26	3

б) $x_1 + ax_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 - x_6 \to \max,$

$$
\begin{aligned}
-x_1 + x_2 + x_3 + (b-6)x_4 + (c+1)x_5 + x_6 &= 3,\\
2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2(b+3)x_4 + (2c+1)x_5 + 5x_6 &= 6,\\
3x_1 + x_2 + 2x_3 - 3(b+2)x_4 + (2c+1)x_5 + 6x_6 &= 6,\\
x_j \ge 0, \quad j &= \overline{1,6},
\end{aligned}
$$

$x^0 = (0, 0, 3, 0, 0, 0)^T$, начальный базис — $\{A_1, A_2, A_3\}$:

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	−1	4	5	6	−5	4	1	11	−2	3	2	16	−4	4	4
2	−3	3	4	7	−4	3	2	12	−3	4	3	17	−3	3	3
3	−4	2	3	8	−1	2	3	13	−4	5	4	18	−2	2	2
4	−5	1	2	9	−2	1	4	14	−1	2	5	19	−1	1	1
5	−2	5	1	10	−3	5	5	15	−5	1	1	20	−6	5	5

в) $$\begin{aligned} &ax_1 + x_3 + 5x_5 + 6x_6 \to \max,\\ &2x_1 + x_2 + x_3 + (b+1)x_4 + (c-3)x_5 - 2x_6 = 1,\\ &3x_1 + 3x_2 + x_3 + bx_4 + (c-12)x_5 - 11x_6 = 3,\\ &-x_1 + 2x_2 - x_3 - (b+3)x_4 - (c+11)x_5 - 12x_6 = 2,\\ &x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6}, \end{aligned}$$

$x^0 = (0, 1, 0, 0, 0, 0)$, начальный базис — $\{A_1, A_2, A_3\}$:

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	– 4	2	2	6	– 4	3	3	11	– 7	6	4	16	– 6	4	2
2	– 6	3	2	7	– 7	5	3	12	– 5	3	2	17	– 7	2	2
3	– 3	2	1	8	– 8	6	2	13	– 6	5	5	18	– 5	4	3
4	– 7	4	2	9	– 5	4	1	14	– 4	3	1	19	– 8	5	1
5	– 9	3	1	10	– 8	7	5	15	– 9	6	3	20	– 7	3	1

6.5. Отыскание исходного базисного плана

30. Для каждой из указанных ниже систем обозначим через Ω множество ее решений. Используя метод искусственного базиса, определить, является ли полиэдр Ω непустым множеством. В случае $\Omega \ne \varnothing$ найти базисный план x^0, исключить линейно зависимые уравнения и указать соответствующий базис для x^0:

а) $$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1,\\ &x_1 - x_3 + 2x_4 = 1,\\ &x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{aligned}$$

Решение. В соответствии с методом искусственного базиса, требуется решить симплекс-методом задачу

$$\begin{aligned} &-x_5 - x_6 \to \max,\\ &x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 1,\\ &x_1 - x_3 + 2x_4 + x_6 = 1,\\ &x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6}, \end{aligned}$$

начав с базисного плана $x = (0, 0, 0, 0, 1, 1)^T$. Процесс вычисления показан в следующей таблице

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	x
A_5	1	1	2	2	1	0	1
A_6	1	0	– 1	2	0	1	1
Δ	– 2	– 1	– 1	0	0	0	– 2
A_1	1	1	2	2	1	0	1
A_6	0	– 1	– 3	0	– 1	1	0
Δ	0	1	1	4	2	0	0

Таким образом, $x^* = (1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$ — оптимальный базисный план вспомогательной задачи. А поскольку значение целевой функции в ней равно нулю, то , в соответствии с теоремой 6, $x^0 = (1, 0, 0, 0)^T$ — базисный план исходной задачи. В базис этого плана, кроме столбца A_1 войдет один из столбцов A_j, $j = 2, 3$;

б)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 4, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 5, \\ 3x_1 + 7x_3 + 2x_4 &= 13, \\ x_j \geq 0, \quad j &= \overline{1,4}, \end{aligned}$$

в)
$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 6, \\ x_j \geq 0, \quad j &= \overline{1,4}, \end{aligned}$$

г)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 5, \\ -4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 &= 9, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 &= 12, \\ x_j \geq 0, \quad j &= \overline{1,5}, \end{aligned}$$

д)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 3, \\ -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= 5, \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 2, \\ x_j \geq 0, \quad j &= \overline{1,4}, \end{aligned}$$

е)
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 7x_3 + x_4 &= 6, \\ x_2 + x_3 - 2x_4 &= 3, \\ x_1 + 2x_3 + x_4 &= 1, \\ x_j \geq 0, \quad j &= \overline{1,4}. \end{aligned}$$

31. Найти методом искусственного базиса исходный базисный план и его базис для задач ЛП, допустимое множество которых задается системой:

$$\begin{aligned} x_1 + ax_2 - 2x_3 - x_4 &= b, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 &= c, \\ -4x_2 + x_3 + x_4 &= 8, \\ x_j \geq 0, \quad j &= \overline{1,4}: \end{aligned}$$

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	2	1	2	6	7	1	3	11	5	1	4	16	3	1	5
2	3	2	3	7	8	2	4	12	6	2	5	17	4	3	6
3	4	3	4	8	2	3	5	13	7	3	6	18	5	3	7
4	5	4	5	9	3	4	6	14	8	4	7	19	6	4	8
5	6	5	6	10	4	5	7	15	2	5	8	20	7	5	9

6.6. Использование теории двойственности при решении задач ЛП

32. Построить задачи, двойственные к следующим задачам ЛП:

а)
$$
\begin{aligned}
&17x_1 - 5x_2 + x_3 + x_4 - 8x_5 \to \max,\\
&3x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 + 7x_5 \le 11,\\
&x_1 - 5x_2 - 5x_3 + x_4 + 2x_5 \ge -8,\\
&x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 \le 4,\\
&x_1 \ge 0, \quad x_4 \ge 0;
\end{aligned}
$$

б)
$$
\begin{aligned}
&4x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 \to \min,\\
&x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 \ge -5,\\
&2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 \ge 1,\\
&-2x_1 - x_2 - x_4 - x_5 \le 3;
\end{aligned}
$$

в)
$$
\begin{aligned}
&3x_2 - 2x_3 + x_4 \to \min,\\
&-x_1 + x_3 - x_4 = 5,\\
&2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 \le 7,\\
&x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4};
\end{aligned}
$$

г)
$$
\begin{aligned}
&4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \to \max,\\
&4x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \ge 9,\\
&x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 6x_5 \le 10,\\
&-x_1 - 3x_2 + 5x_3 \le 1,\\
&x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}.
\end{aligned}
$$

33. Используя теорию двойственности и геометрические построения, найти решения следующих задач ЛП:

а)
$$
\begin{aligned}
&7x_1 + x_3 - 4x_4 \to \max,\\
&x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \le 6,\\
&2x_1 + x_2 - x_3 \le -1,\\
&x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}.
\end{aligned}
$$

Решение. Перейдем к двойственной задаче:

$$
\begin{aligned}
&6y_1 - y_2 \to \min,\\
&y_1 + 2y_2 \ge 7,\\
&-y_1 + y_2 \ge 0,\\
&2y_1 - y_2 \ge 1,\\
&-y_1 \ge -4,\\
&y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

С помощью геометрических построений находим ее решение $y^* = (9/5, 13/5)$. Учитывая неотрицательность компонент допустимых планов данной пары двойственных задач, из теоремы 8 имеем

$$
x_j^*\Big(\sum_{i=1}^{2} a_{ij} y_j^* - c_j\Big) = 0, \quad j = \overline{1,4}, \qquad y_i^*\Big(\sum_{j=1}^{4} a_{ij} x_j^* - b_i\Big) = 0, \quad i = \overline{1,2}.
$$

Поскольку второе и четвертое неравенства из ограничений для двойственной задачи для y^* выполняются строго, то из первого равенства следует $x_2^* = x_4^* = 0$. А так как $y_1^* > 0$ и $y_2^* > 0$, то из второго следует, что компоненты x_1^* и x_3^* удовлетворяют системе

$$x_1^* + 2x_3^* = 6,$$
$$2x_1^* - x_3^* = -1.$$

Отсюда $x_1^* = 4/5$, $x_3^* = 13/5$. Следовательно, $x^* = (4/5, 0, 13/5, 0)^T$.

б) $x_1 + x_3 + x_5 \to \max,$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 \le 6,$$
$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 \le 5,$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5};$$

в) $4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 \to \min,$

$$-3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1,$$
$$-4x_1 - 6x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 = -1,$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5};$$

34. Используя теорию двойственности и геометрические построения, найти решение следующей задачи ЛП:

$$3ax_1 + 11x_2 + 5bx_3 + x_4 \to \min,$$
$$-3x_1 + x_2 + (2+b)x_3 - x_4 \ge c,$$
$$(2+a)x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 3x_4 \ge 7,$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}.$$

	a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c
1	1	1	4	6	2	1	1	11	3	1	3	16	4	1	2
2	1	2	1	7	2	2	3	12	3	2	2	17	4	2	4
3	1	3	3	8	2	3	2	13	3	3	4	18	4	3	1
4	1	4	2	9	2	4	4	14	3	4	1	19	4	4	3
5	1	5	4	10	2	5	1	15	3	5	3	20	4	5	2

6.7. Задания для контрольной работы

Вариант 1

1. Привести ЗЛП к канонической форме

$2bx_1 - ax_2 + x_3 \longrightarrow \min$

$x_1 + (a/10)x_2 + x_3 \le 11 + a, \quad x_1 - (10 + a)x_2 + 6x_3 \ge 1, \quad x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0$.

Варианты параметров a=9, b=1

2. Предприятие изготавливает два вида продукции – $П_1$ и $П_2$, которая поступает в оптовую продажу. Для производства продукции используется два вида сырья – α и β. Суточный расход сырья на единицу продукции вида $П_1$ и вида $П_2$ и запасы сырья даны в таблице.

Сырьё	Расход сырья в кг на 1 кг продукции		Запас сырья, кг
	$П_1$	$П_2$	
α	0,1	0,2	10
β	0,3	0,2	18

Опыт работы показал, что суточный спрос на продукцию $П_2$ никогда не превышает спроса на продукцию $П_1$ более чем на 7 ед. Кроме того, известно, что спрос на продукцию $П_1$ никогда не превышает 26 кг в сутки. Оптовая цена единицы продукции $П_1$ составляет 15 руб, а $П_2$ – 25 руб.

Какое количество продукции каждого вида должно производить предприятие, чтобы доход от реализации продукции был максимальным? Для решения задачи воспользоваться геометрическими построениями.

3. Решить симплекс-методом задачу ЛП, начав с указанного базисного плана:

$$ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \max,$$

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = b,$$

$$x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 = c,$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}, \qquad x^0 = (0, 0, (b - 7c)/5, c, 0)^T : a{=}2,\ b{=}8,\ c{=}1.$$

Вариант 2

1. Привести ЗЛП к канонической форме

$2bx_1 - ax_2 + x_3 \longrightarrow \min$

$x_1 + (a/10)x_2 + x_3 \le 11 + a, \quad x_1 - (10 + a)x_2 + 6x_3 \ge 1, \quad x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0$.

Варианты параметров a=8, b=1

2. В цехе предприятия решено установить дополнительное оборудование, для размещения которого выделено 5 м^2 площади. На приобретение

оборудования предприятие может израсходовать 25 000 руб., при этом оно может приобретать оборудование двух видов. Комплект оборудования первого вида стоит 6 000 руб., а комплект оборудования второго вида стоит 4 000 руб. Приобретение одного комплекта оборудования первого вида позволяет увеличить выпуск продукции за смену на 3, а одного комплекта оборудования второго вида – на 2 единицы. Зная, что для установки одного комплекта оборудования первого вида требуется 1 м^2 площади, а для установки одного комплекта оборудования второго вида – 1,5 м^2 площади, определить такой набор дополнительного оборудования, который позволит максимально увеличить выпуск продукции.
Для решения задачи воспользоваться геометрическими построениями.

3. Решить симплекс-методом задачу ЛП, начав с указанного базисного плана:

$$ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \max,$$
$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = b,$$
$$x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 = c,$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}, \qquad x^0 = (0, 0, (b - 7c)/5, c, 0)^T : a=1, b=9, c=1.$$

Вариант 3

1. Привести ЗЛП к канонической форме

$2bx_1 - ax_2 + x_3 \longrightarrow \min$

$x_1 + (a/10)x_2 + x_3 \le 11 + a, \quad x_1 - (10 + a)x_2 + 6x_3 \ge 1, \quad x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0$.

Варианты параметров a= –1,b= –1

2. При откорме каждое животное ежедневно должно получать не менее 9 единиц питательного вещества А, не менее 8 единиц вещества В и не менее 16 единиц вещества С. Для составления рациона используют 2 вида корма. Содержание количества единиц питательных веществ в 1 кг каждого вида корма и стоимость 1 кг корма приведены в таблице.

Питательные вещества	Количество единиц питательных веществ в 1 кг корма	
	Корм 1 вида	Корм 2 вида
A	3	1
B	1	2
C	1	6
Стоимость 1 кг корма, руб.	4	3

Необходимо составить дневной рацион нужной питательности, причём затраты на него должны быть минимальными.

Для решения задачи воспользоваться геометрическими построениями.

3. Решить симплекс-методом задачу ЛП, начав с указанного базисного плана:

$$ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \max,$$
$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = b,$$
$$x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 = c,$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}, \qquad x^0 = (0, 0, (b - 7c)/5, c, 0)^T : a=5, b=10, c=1.$$

Вариант 4

1. Привести ЗЛП к канонической форме

$2bx_1 - ax_2 + x_3 \longrightarrow \min$

$x_1 + (a/10)x_2 + x_3 \leq 11 + a, \quad x_1 - (10 + a)x_2 + 6x_3 \geq 1, \quad x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0$.

Варианты параметров a=2, b=5

2. Для изготовления двух видов продукции $П_1$ и $П_2$ используется три вида сырья С1, С2, С3. Запасы сырья, количество единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, а также величина прибыли, получаемая от реализации продукции, приведены в таблице.

Вид сырья	Запас сырья	Количество единиц сырья, идущих на изготовление единицы продукции	
		$П_1$	$П_2$
С1	20	2	5
С2	40	8	5
С3	30	5	6
Прибыль от реализации единицы продукции, руб.		50	40

Необходимо составить такой план выпуска продукции, чтобы при её реализации получить максимальную прибыль.
Для решения задачи воспользоваться геометрическими построениями.

3. Решить симплекс-методом задачу ЛП, начав с указанного базисного плана:

$$ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \max,$$
$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = b,$$
$$x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 = c,$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}, \qquad x^0 = (0, 0, (b - 7c)/5, c, 0)^T : a=4, b=11, c=1.$$

Вариант 5

1. Привести ЗЛП к канонической форме

$$2bx_1 - ax_2 + x_3 \longrightarrow \min$$

$$x_1 + (a/10)x_2 + x_3 \le 11 + a, \quad x_1 - (10+a)x_2 + 6x_3 \ge 1, \quad x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0 \quad .$$

Варианты параметров a=9, b=2

2. Предприятие изготавливает два вида продукции – $П_1$ и $П_2$, которая поступает в оптовую продажу. Для производства продукции используется два вида сырья – α и β. Суточный расход сырья на единицу продукции вида $П_1$ и вида $П_2$ и запасы сырья даны в таблице.

Сырь	Расход сырья в кг на 1 кг продукции		Запас сырья, кг
	$П_1$	$П_2$	
α	0,2	0,1	10
β	0,3	0,2	18

Опыт работы показал, что суточный спрос на продукцию $П_2$ никогда не превышает спроса на продукцию $П_1$ более чем на 7 ед. Кроме того, известно, что спрос на продукцию $П_1$ никогда не превышает 26 кг в сутки. Оптовая цена единицы продукции $П_1$ составляет 15 руб, а $П_2$ – 5 руб.

Какое количество продукции каждого вида должно производить предприятие, чтобы доход от реализации продукции был максимальным? Для решения задачи воспользоваться геометрическими построениями.

3. Решить симплекс-методом задачу ЛП, начав с указанного базисного плана:

$$ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \max,$$
$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = b,$$
$$x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 = c,$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}, \quad x^0 = (0, 0, (b-7c)/5, c, 0)^T : a=1, b=34, c=4.$$

Вариант 6

1. Привести ЗЛП к канонической форме

$$2bx_1 - ax_2 + x_3 \longrightarrow \min$$

$$x_1 + (a/10)x_2 + x_3 \le 11 + a, \quad x_1 - (10+a)x_2 + 6x_3 \ge 1, \quad x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0 \quad .$$

Варианты параметров a=1, b= –3

2. В цехе предприятия решено установить дополнительное оборудование, для размещения которого выделено 10 м^2 площади. На приобретение оборудования предприятие может израсходовать 25 000 руб., при этом оно может приобретать оборудование двух видов. Комплект оборудования первого вида стоит 6 000 руб., а комплект оборудования второго вида стоит 5 000 руб. Приобретение одного комплекта оборудования первого вида позволяет увеличить выпуск продукции за смену на 3, а одного комплекта оборудования второго вида – на 2 единицы. Зная, что для установки одно-

го комплекта оборудования первого вида требуется 1 м^2 площади, а для установки одного комплекта оборудования второго вида – 1,5 м^2 площади, определить такой набор дополнительного оборудования, который позволит максимально увеличить выпуск продукции.
Для решения задачи воспользоваться геометрическими построениями.

3. Решить симплекс-методом задачу ЛП, начав с указанного базисного плана:

$$ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \max,$$
$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = b,$$
$$x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 = c,$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}, \qquad x^0 = (0, 0, (b-7c)/5, c, 0)^T : a=2, b=33, c=4.$$

Вариант 7

1. Привести ЗЛП к канонической форме

$$2bx_1 - ax_2 + x_3 \longrightarrow \min$$
$$x_1 + (a/10)x_2 + x_3 \leq 11 + a, \quad x_1 - (10+a)x_2 + 6x_3 \geq 1, \quad x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0 \quad .$$

Варианты параметров $a = -1$, $b=3$.

2. При откорме каждое животное ежедневно должно получать не менее 9 единиц питательного вещества А, не менее 8 единиц вещества В и не менее 16 единиц вещества С. Для составления рациона используют 2 вида корма. Содержание количества единиц питательных веществ в 1 кг каждого вида корма и стоимость 1 кг корма приведены в таблице.

Питательные вещества	Количество единиц питательных веществ в 1 кг корма	
	Корм 1 вида	Корм 2 вида
А	3	1
В	1	2
С	1	4
Стоимость 1 кг корма, руб.	5	3

Необходимо составить дневной рацион нужной питательности, причём затраты на него должны быть минимальными.
Для решения задачи воспользоваться геометрическими построениями.

3. Решить симплекс-методом задачу ЛП, начав с указанного базисного плана:

$$ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \max,$$
$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = b,$$
$$x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 = c,$$

$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}, \qquad x^0 = (0, 0, (b - 7c)/5, c, 0)^T$: a=3, b=32, c=4.

Вариант 8

1. Привести ЗЛП к канонической форме

$2bx_1 - ax_2 + x_3 \longrightarrow \min$

$x_1 + (a/10)x_2 + x_3 \leq 11 + a, \quad x_1 - (10 + a)x_2 + 6x_3 \geq 1, \quad x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0$.

Варианты параметров a=3, b=5.

2. Для изготовления двух видов продукции $П_1$ и $П_2$ используется три вида сырья С1, С2, С3. Запасы сырья, количество единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, а также величина прибыли, получаемая от реализации продукции, приведены в таблице.

Вид сырья	Запас сырья	Количество единиц сырья, идущих на изготовление единицы продукции	
		$П_1$	$П_2$
С1	20	2	5
С2	50	8	5
С3	30	4	6
Прибыль от реализации единицы продукции, руб.		50	40

Необходимо составить такой план выпуска продукции, чтобы при её реализации получить максимальную прибыль.
Для решения задачи воспользоваться геометрическими построениями.

3. Решить симплекс-методом задачу ЛП, начав с указанного базисного плана:

$$ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \max,$$
$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = b,$$
$$x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 = c,$$

$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}, \quad x^0 = (0, 0, (b - 7c)/5, c, 0)^T$: a=3, b=12, c=1.

Вариант 9

1. Привести ЗЛП к канонической форме

$2bx_1 - ax_2 + x_3 \longrightarrow \min$

$x_1 + (a/10)x_2 + x_3 \leq 11 + a, \quad x_1 - (10 + a)x_2 + 6x_3 \geq 1, \quad x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0$.

Варианты параметров a=5, b=1.

2. Предприятие изготавливает два вида продукции – $П_1$ и $П_2$, которая поступает в оптовую продажу. Для производства продукции используется два вида сырья – α и β. Суточный расход сырья на единицу продукции вида $П_1$ и вида $П_2$ и запасы сырья даны в таблице.

Сырь	Расход сырья в кг на 1 кг продукции		Запас сырья, кг
	$П_1$	$П_2$	
α	0,2	0,1	10
β	0,4	0,2	18

Опыт работы показал, что суточный спрос на продукцию $П_2$ никогда не превышает спроса на продукцию $П_1$ более чем на 7 ед. Кроме того, известно, что спрос на продукцию $П_1$ никогда не превышает 26 кг в сутки. Оптовая цена единицы продукции $П_1$ составляет 35 руб, а $П_2$ – 25 руб.

Какое количество продукции каждого вида должно производить предприятие, чтобы доход от реализации продукции был максимальным? Для решения задачи воспользоваться геометрическими построениями.

3. Решить симплекс-методом задачу ЛП, начав с указанного базисного плана:

$$ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \max,$$

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = b,$$

$$x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 = c,$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}, \quad x^0 = (0, 0, (b - 7c)/5, c, 0)^T : a=5, b=18, c=2.$$

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

2. Основная форма:

$$\begin{aligned}
&2x_1 \quad - x_2 - 5x_3 \to \max,\\
&4x_1 + 3x_2 \quad + x_3 \le 4,\\
&-4x_1 - 3x_2 \quad - x_3 \le -4,\\
&x_1 - 6x_2 \quad + x_3 \le -2,\\
&7x_1 \quad - x_2 + 2x_3 \le 5,\\
&-x_1 \qquad\qquad \le 0,\\
&\qquad -x_2 \qquad \le 0;
\end{aligned}$$

стандартная форма:

$$\begin{aligned}
&2x_1 \quad - x_2 - 5u_3 + 5v_3 \to \max,\\
&4x_1 + 3x_2 \quad + u_3 - v_3 \le 4,\\
&-4x_1 - 3x_2 \quad - u_3 + v_3 \le -4, \qquad\qquad (\mathrm{I})\\
&x_1 - 6x_2 \quad + u_3 - v_3 \le 5,\\
&x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, u_3 \ge 0, v_3 \ge 0;
\end{aligned}$$

каноническая форма:

$$\begin{aligned}
&2x_1 - x_2 - 5u_3 + 5v_3 + 0\cdot w_2 + 0\cdot w_3 \to \max,\\
&4x_1 + 3x_2 + u_3 - v_3 = 4,\\
&-x_1 + 6x_2 - u_3 + v_3 - w_2 = 2, \qquad\qquad (\mathrm{II})\\
&7x_1 - x_2 + 2u_3 - 2v_3 + w_3 = 5,\\
&x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, u_3 \ge 0, v_3 \ge 0, w_2 \ge 0, w_3 \ge 0.
\end{aligned}$$

В (I), (II) сделана замена переменной $x_3 = u_3 - v_3, u_3 \ge 0$, $v_3 \ge 0$, а в (II), кроме того, введены переменные $w_2 \ge 0$, $w_3 \ge 0$ для приведения неравенств к равенствам.

3. Вводя дополнительную переменную $x_5 \ge 0$, запишем первое ограничение в виде равенства

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5.$$

Выразим из этого и второго ограничения переменные x_1 и x_2 не связанные условием неотрицательности

$$x_1 = \quad 5x_3 \quad + x_4 - 3x_5 + 3,$$
$$x_2 = -8x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 2.$$

Подставляя данные выражения в целевую функцию и в третье ограничение, приходим к задаче

$$-36x_3 - 12x_4 + 19x_5 \to \max,$$
$$4x_3 \quad + 5x_4 \quad - x_5 = -2,$$
$$x_3 \ge 0, \quad x_4 \ge 0, \quad x_5 \ge 0.$$

10. а) $x^* = (2, 3)$; б) $x^* = (3, 2)$; в) $x^* = (1, 2)$; г) $x^* = (1, -2)$.

11. а) Из третьего ограничения имеем

$$x_3 = 2x_1 - x_2 - 2. \qquad \text{(I)}$$

Подставляя это выражение в целевую функцию и первые два ограничения, а также учитывая, что $x_3 \ge 0$, приходим к задаче

$$2x_1 \quad + x_2 \to \max,$$
$$x_1 + 2x_2 \le 6,$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 12,$$
$$2x_1 \quad - x_2 \ge 2,$$
$$x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0.$$

Геометрическим путем получаем ее решение: $x_1^* = 4, x_2^* = 0$. Подставляя эти числа в (I), получаем $x_3^* = 6$. Следовательно, $x^* = (4, 0, 6)^T$ — решение исходной задачи.

б) Выразим из системы уравнений переменные x_1, x_2, x_3:

$$x_1 = 8 \quad - x_4 \quad - x_5,$$
$$x_2 = 15 + 5x_4 - 3x_5, \qquad \text{(II)}$$
$$x_3 = -9 \; + x_4 + 3x_5.$$

Подставляя их в целевую функцию и учитывая условия неотрицательности, приходим к задаче

$$-7x_4 + 3x_5 \to \max,$$
$$x_4 \quad + x_5 \le 8,$$
$$-5x_4 + 3x_5 \le 15,$$
$$x_4 + 3x_5 \ge 9,$$
$$x_4 \ge 0, \; x_5 \ge 0.$$

Ее решение $x_4^* = 0, \; x_5^* = 5$. Подставляя в (II), получаем $x_1^* = 3, x_2^* = 0, x_3^* = 6$. Следовательно, $x^* = (3, 0, 6, 0, 5)$ — решение исходной задачи.

в) $x^* = (7/2, 0, 0, 3/2, -1/2)$;

г) $x^* = (9/4, 1/2, 0, 1/4)$.

12. а) $1/2 \le a \le 2$; б) $0 \le a \le 2/9$.

20. Если $k \ne 4$, $k \ne 15$, то базисами служат системы $\{A_1, A_2, A_3\}$, $\{A_1, A_4, A_3\}$, $\{A_2, A_4, A_3\}$; если $k = 15$, то базисами будут только первая и третья из указанных систем. При $k = 4$ базисы отсутствуют (в этом случае ранг матрицы равен 2).

23. а) Как и при решении задачи 22, проводя аналогичные вычисления, получаем $\Delta_4 = -6 < 0$, $\lambda_{34} = 3 > 0$. Тогда по теореме 3 имеет место утверждение В.

б) В данном случае $\Delta_1 = 8$, $\Delta_3 = \Delta_4 = 0$. Поэтому в силу теоремы 1 справедливо утверждение А.

в) Утверждения Б и В одновременно.

25. Нетрудно видеть, что x^* — невырожденная вершина. Решая системы

$$A_2\lambda_{2k} + A_3\lambda_{3k} + A_4\lambda_{4k} = A_k, \quad k = 1, 5, 6,$$

находим

$$\lambda_{21} = \lambda_{31} = 1, \qquad \lambda_{41} = -1;$$
$$\lambda_{25} = \lambda_{45} = 1, \qquad \lambda_{35} = -1;$$
$$\lambda_{26} = -1, \qquad \lambda_{36} = \lambda_{46} = 1.$$

Вычислим оценки замещения:

$$\Delta_1 = k^2 - 2k - 3, \ \ \Delta_5 = k^2 + 2k - 3, \ \ \Delta_6 = -k^2 + 2k + 8.$$

Из теорем 1-3 следует, что невырожденная вершина x^* является решением задачи при данном k в том и только в том случае, если $\Delta_1 \ge 0,\ \Delta_5 \ge 0,\ \Delta_6 \ge 0$. Решая эту систему неравенств, получаем ответ: $3 \le k \le 4$.

б) $k = 2$;

в) Таких k не существует.

28. а) $x^* = (3, 0, 4, 0)^T$;

б) Начальная и последующая симплекс-таблицы связаны воедино в следующею таблицу

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	x
A_3	−1	1	1	1	0	2	1
A_5	1	1	0	−1	1	−1	1
Δ	−5	−1	0	5	0	4	6
A_3	0	2	1	0	1	1	2
A_1	1	1	0	−1	1	−1	1
Δ	0	4	0	0	5	−1	11

A_6	0	2	1	0	1	1	2
A_1	1	3	1	– 1	2	0	3
Δ	0	6	1	0	6	0	13

Отсюда заключаем, что решением служит точка $x^* = (3, 0, 0, 0, 0, 2)^T$.

в) $x^* = (0, 1, 0, 1, 1)^T$. Перейти к задаче максимизации.

г) Выберем в качестве базиса вершины x^0 систему $\{A_1, A_2, A_3\}$. Процесс вычислений показан в таблице

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b
A_1	1	0	0	1	1	1
A_2	0	1	0	1	0	0
A_3	0	0	1	0	–1	0
Δ	0	0	0	–2	–1	3
A_1	1	–1	0	0	1	1
A_4	0	1	0	1	0	0
A_3	0	0	1	0	–1	0
Δ	0	2	0	0	–1	3
A_5						1
A_4						0
A_3						1
Δ	1	1	0	0	0	4

Таким образом, решением является $x^* = (0, 0, 1, 0, 1)^T$.

д) Процедура симплекс-метода (с правилом Блэнда) приводит к перебору базисов вершины x^0:

$\{A_1, A_2, A_3, A_4\} \to \{A_5, A_2, A_3, A_4\} \to \{A_5, A_2, A_6, A_4\}$.

Для третьего базиса оказывается выполненным условие теоремы 3. Следовательно x^0 — решение задачи.

30. б) Вычисления, аналогичные варианту а), приведены в таблице

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	x
A_5	1	1	2	1	1	0	0	4
A_6	1	– 2	3	0	0	1	0	5
A_7	3	0	7	2	0	0	0	13
Δ	– 5	1	– 12	– 3	0	0	1	– 22
A_1	1	1	2	1	1	0	0	4
A_6	0	– 3	1	– 1	– 1	1	0	1

A_7	0	– 3	1	– 1	– 3	0	1	1
Δ	0	6	– 2	2	5	0	0	– 2
A_1	1	7	0	3				2
A_3	0	– 3	1	– 1				1
A_7	0	0	0	0				0
Δ	0	0	0	0	3	2	0	0

Таким образом, в соответствии с теоремой 6, заключаем, что $x^0 = (2, 0, 1, 0)^T$ — базисный план исходной задачи.

в) $x^0 = (5, 6, 1, 0)^T$;

г) $x^0 = (0, 0, 7, 2, 0)^T$;

д) полиэдр Ω пуст;

е) $x^0 = (1, 3, 0, 0)^T$.

33. б) $x^* = (0,\ 0,\ 11,\ 0,\ 27)^T$; в) $x^* = (0,\ 3/19,\ 1/19,\ 0,\ 0)^T$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ашманов С.А., Тихонов А.В.* Теория оптимизации в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1991.
2. *Ашманов С.А.* Линейное программирование. М.: Наука, 1981.
3. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.
4. *Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б.* Новые направления в линейном программировании. М.: Сов. радио, 1966.
5. *Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И.* Линейное и выпуклое программирование. М.: Наука, 1967.
6. *Карманов В.Г.* Математическое программирование. М.: Наука, 1986.
7. *Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г.* Линейное программирование. М.: Наука, 1969.
8. *Хачиян Л.Г.* Полиномиальный алгоритм в линейном программировании // Докл.АН СССР. 1979. Т.244, № 5.
9. *Хачиян Л.Г.* Полиномиальные алгоритмы в линейном программировании // ЖВМ и МФ. 1980. Т.20, №1.