НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА ИМ. МИРЗО УЛУГБЕКА
КАФЕДРА «ЭКОНОМЕТРИКА И ЭКОНОМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ»

“Математика для экономистов

Часть 1. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Конспекты лекций

Составитель: к.ф.м.н., доцент Шамсуддинов Б.Р.

ТОШКЕНТ – 2017

Оглавление

Тема 1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.1 Матрицы. Основные понятия и определения

Определение 1. Матрицей размера $m \times n$, где m- число строк, n- число столбцов, называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке. Эти числа называются элементами матрицы. Место каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится. Элементы матрицы обозначаются a_{ij}, где i- номер строки, а j- номер столбца.

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или, в сокращенной записи,

$$A = (a_{ij}); \quad i = 1,2,\dots,m; \quad j = 1,2,\dots,n.$$

Например, $\underset{2\times 3}{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$. Наряду с круглыми скобками используются и другие обозначения матрицы: $[\ ]$, $\|\ \|$.

Две матрицы A и B одного размера называются **равными,** если они совпадают поэлементно, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$ для любых $i = 1,2,\dots m; \quad j = 1,2,\dots,n.$

Виды матриц. Матрица, состоящая из одной строки, называется **матрицей-строкой (вектором-строкой),** а из одного столбца – **матрицей–столбцом (вектором-столбцом):**

$A = (a_{11}\, a_{12}, \dots, a_{1n})$ – матрица-строка; $B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$ – матрица-столбец.

Матрица называется **квадратной** n-го порядка, если число её строк равно числу столбцов и равно n.

Например, $A = \begin{pmatrix} -5 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ - квадратная матрица третьего порядка.

Элементы матрицы a_{ij}, у которых номер столбца равен номеру строки $(i = j)$, называются **диагональными** и образуют **главную диагональ** матрицы. Для квадратной матрицы главную диагональ образуют элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$. Если все недиагональные элементы квадратной матрицы равны нулю, то матрица называется **диагональной.**

Например, $A=\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ - диагональная матрица третьего порядка.

Если у диагональной матрицы n-го порядка все диагональные элементы равны единице, то матрица называется **единичной** матрицей n-го порядка, она обозначается буквой E.

Например, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - единичная матрица третьего порядка.

Матрица любого размера называется **нулевой**, если все её элементы равны нулю:
$\underset{m\times n}{O}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & ... \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

1.2. Математические операции над матрицами.

Определение 1. Произведением матрицы A на число α называется матрица $B=\alpha A$, элементы которой $b_{ij}=\alpha a_{ij}$ при $i=1,2,\dots,m;\quad j=1,2,\dots,n$.

Следствие. Общий множитель всех элементов матрицы можно выносить за знак матрицы.

В частности, произведение матрицы A на число 0 есть нулевая матрица, т.е. $0\cdot A=O$.

Определение 2. Суммой двух матриц A и B одинакового размера $m\times n$ называется матрица $C=A+B$, элементы которой $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ при $i=1,2,\dots,m;\quad j=1,2,\dots,n$ (т.е. матрицы складываются поэлементно). В частном случае $A+O=A$.

Определение 3. Разность двух матриц одинакового размера определяется через предыдущие операции: $A-B=A+(-1)\cdot B$.

Определение 4. Умножение матрицы А на матрицу В определено, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Тогда произведением матриц $\underset{m\times k}{A}\cdot\underset{k\times n}{B}$ называется такая матрица $\underset{m\times n}{C}$, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы А на соответствующие элементы j-го столбца матрицы В:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{ik}b_{kj}=\sum_{s=1}^{k}a_{is}b_{sj},\quad i=1,2,\dots,m;\quad j=1,2,\dots,n.$$

Определение 5. Целой положительной степенью $A^m\,(m>1)$ квадратной матрицы А называется произведение m матриц, равных А, т.е.:
$A^m=A\cdot A\cdot\dots\cdot A.$

Заметим, что операция возведения в степень определяется только для квадратных матриц. По определению полагают $A^0=E,\quad A^1=A.$ Нетрудно показать, что $A^m\cdot A^k=A^{m+k},\quad (A^m)^k=A^{mk}.$

Транспонирование матрицы – переход от матрицы А к матрице A', в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка. Матрица A' называется **транспонированной** относительно матрицы А:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Из определения следует, что если матрица А имеет размер $m\times n$, то транспонированная матрица A' имеет размер $n\times m$.

Например, $A_{2\times3}=\begin{pmatrix} 7 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; $A'_{3\times2}=\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$.

В литературе встречаются и другие обозначения транспонированной матрицы, например $A^{т}$.

Решение типовых примеров

Пример 1. Умножить матрицу на число 5, если $A=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$.

$$5A=\begin{pmatrix} -10 & 20 \\ 15 & 40 \end{pmatrix}$$

Пример 2. Вынести общий множитель за знак матрицы:

$$\begin{pmatrix} 20 & 12 & 6 \\ 52 & 2 & 0 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 10 & 6 & 3 \\ 26 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Найти матрицу С=А+В, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

$$C=A+B=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 8 & 10 & 7 \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Найти произведение матриц $A=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

$$AB=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot2 & 1\cdot4 & 1\cdot1 \\ 4\cdot2 & 4\cdot4 & 4\cdot1 \\ 3\cdot2 & 3\cdot4 & 3\cdot1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$BA=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}=2\cdot1+4\cdot4+1\cdot3=2+16+3=21.$$

Пример 5. Найти произведение матриц $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$AB = (1 \quad 2)\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix} = (3+10 \quad 4+12) = (13 \quad 16).$$

Пример 6. Найти A^2, где $A = \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 8 & 4\end{pmatrix}$.

Решение. $A^2 = \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 8 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 8 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}17 & 6\\ 24 & 32\end{pmatrix}$.

Задания для решения в аудитории

1. Найти матрицу C=A+B, если $A = \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ -5 & 6 & 7\\ 2 & -3 & -4\end{pmatrix}$

2. Найти матрицу D=C - F, если $C = \begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 4 & -2 & 1\\ 5 & 6 & -7\end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & -4\\ 2 & 5 & 6\end{pmatrix}$

3. Найти матрицу E=4S+2G, если $S = \begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\ 0 & 5 & 6\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix}4 & 6 & -1\\ 0 & -5 & 1\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix}$

4. Найти матрицу X=A·B, если $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 5 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}5 & 3 & -7\\ -1 & 6 & -3\\ 2 & -4 & 1\end{pmatrix}$

5. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 4 & 1\\ 1 & -4 & 2\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1\\ 3\\ 2\end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$ и число $\alpha = 2$. Найти $A^TB+\alpha C$.

1.3 Определители квадратных матриц

Определение 1 Определителем квадратной матрицы $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}$ называется число, которое может быть вычислено по элементам матрицы по формуле:

$$\mathbf{det\,A} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_{1k}M_{1k}\,, \quad \text{где}$$

$M_{1к}$ – детерминант матрицы, полученной из исходной вычеркиванием первой строки и k – го столбца. Следует обратить внимание на то, что определители имеют только квадратные матрицы, т.е. матрицы, у которых число строк равно числу столбцов.

Предыдущая формула позволяет вычислить определитель матрицы по первой строке, также справедлива формула вычисления определителя по первому столбцу:

$$\mathbf{det\ A} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_{k1}M_{k1}$$

Вообще говоря, определитель может вычисляться по любой строке или столбцу матрицы, т.е. справедлива формула:

$$\mathbf{detA} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+i}a_{ik}M_{ik}\,, \quad \mathbf{i = 1,2,\ldots,n.}$$

Очевидно, что различные матрицы могут иметь одинаковые определители. Определитель единичной матрицы равен 1.

Определение 2. Минором $\mathrm{M_{ij}}$ **элемента** $\mathrm{a_{ij}}$ матрицы А n-го порядка называется определитель матрицы (n-1)-го порядка, полученной из матрицы А вычеркиванием i-й строки и j-го столбца. Например, минором элемента $\mathrm{a_{12}}$ матрицы А третьего порядка будет:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}.$$

Каждая матрица n-го порядка имеет n^2 миноров (n-1)-го порядка.

Определение 3. Алгебраическим дополнением $\mathrm{A_{ij}}$ элемента $\mathrm{a_{ij}}$ матрицы n-го порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{\mathrm{i+j}}$: $\quad \mathrm{A_{ij}} = (-1)^{\mathrm{i+j}}\mathrm{M_{ij}}$, т.е. алгебраическое дополнение совпадает с минором, если сумма номеров строки и столбца $(\mathrm{i}+\mathrm{j})$ - четное число, и отличается от минора знаком, если $(\mathrm{i}+\mathrm{j})$ - нечетное число.

Например, $\mathrm{A_{23}} = (-1)^{2+3}\mathrm{M_{23}} = -\mathrm{M_{23}}; \qquad \mathrm{A_{31}} = (-1)^{3+1}\mathrm{M_{31}} = \mathrm{M_{31}}.$

Свойства определителей;

Свойство1. Важным свойством определителей является следующее соотношение:

$$\mathbf{det\ A = det\ A^T;}$$

Свойство 2. det (AB) = detA·detB

Свойство 3. Если в квадратной матрице поменять местами какие-либо две строки (или столбца), то определитель матрицы изменит знак, не изменившись по абсолютной величине.

Свойство 4. При умножении столбца (или строки) матрицы на число ее определитель умножается на это число.

Определение 4: Столбцы (строки) матрицы называются **линейно зависимыми**, если существует их линейная комбинация, равная нулю, имеющая нетривиальные (не равные нулю) решения.

Свойство 5. Если в матрице А строки или столбцы линейно зависимы, то ее определитель равен нулю.

Свойство 6. Если матрица содержит нулевой столбец или нулевую строку, то ее определитель равен нулю. (Данное утверждение очевидно, т.к. считать определитель можно именно по нулевой строке или столбцу.)

Свойство 7. Определитель матрицы не изменится, если к элементам одной из его строк(столбца) прибавить(вычесть) элементы другой строки(столбца), умноженные на какое-либо ненулевое число.

Свойство 8. Если для элементов какой- либо строки или столбца матрицы верно соотношение:

$\boldsymbol{d = d_1 \pm d_2}$ **,** $\boldsymbol{e = e_1 \pm e_2}$ **,** $\boldsymbol{f = f_1 \pm f_2}$ **,** то верно:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & l & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ k & l & m \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ k & l & m \end{vmatrix}$$

Например,

Решение типовых примеров

Пример 1. Вычислить определитель второго порядка, если $A = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

Решение. $\Delta = |A| = \begin{vmatrix} -2 & 8 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -2 \cdot 5 - 8 \cdot 1 = -18.$

Пример 2. Вычислить определитель третьего порядка $|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение. $\Delta = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 6 = 21.$

Пример 3. Найти алгебраические дополнения всех элементов матрицы

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\mathrm{A}_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0; \qquad \mathrm{A}_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3; \qquad \mathrm{A}_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6;$$

$$\mathrm{A}_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14; \qquad \mathrm{A}_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1; \qquad \mathrm{A}_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -5;$$

$$\mathrm{A}_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7; \qquad \mathrm{A}_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5; \qquad \mathrm{A}_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

Пример 4. Вычислить определитель четвертого порядка $|A| = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix}$.

Решение. Преобразуем матрицу так, чтобы в 3-й строке все элементы, кроме одного, обращались в нуль. Для этого умножим, например, элементы 3-го столбца на (-4) и на 2 и прибавим их соответственно к элементам 1-го и 2-го столбцов. Раскладывая полученный определитель по элементам третьей строки, найдем:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 2 & -2 & 4 \\ 13 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & 12 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 13 & -4 & 1 \\ -10 & 12 & 6 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель третьего порядка можно вычислить по правилу треугольников или с помощью свойства 6, однако можно продолжить упрощение матрицы. «Обнулим» в матрице третьего порядка элементы 2-й строки (кроме одного). Для этого элемента 3-го столбца матрицы, предварительно умножив на (-13) и на 4, сложим с элементами 1-го и 2-го столбцов соответственно:

$$|A| = \begin{vmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 12 & -4 & 1 \\ -10 & 12 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -40 & 18 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -88 & 36 & 6 \end{vmatrix}.$$

Раскладывая по элементам второй строки и вынося общие множители, получаем:

$$|A| = 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -40 & 18 \\ -88 & 36 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-8) \cdot 18 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = -144.$$

Пример 5. Вычислить определитель треугольной матрицы

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

(Квадратная матрица называется треугольной, если все ее элементы, расположенные ниже (или выше) главной диагонали, равны нулю).

Раскладывая по первому столбцу, получаем:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 = 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 0 + 0 =$$

$$= 2 \cdot 3(-1) \cdot 4 + 0 = -24.$$

Задания для решения в аудитории

1. Вычислить определители:

1) $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$ 2) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ 3) $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

4) $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ 5) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$ 6) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

1.4 Обратная матрица

Определение. Если существуют квадратные матрицы X и A одного порядка, удовлетворяющие условию:

$$\mathbf{XA = AX = E,}$$

где E - единичная матрица того же самого порядка, что и матрица A, то матрица X называется **обратной** к матрице A и обозначается A^{-1}.

Из определения следует, что только квадратная матрица имеет обратную; в этом случае и обратная матрица является квадратной того же порядка. Необходимо отметить, что для существования матрицы A^{-1} является требование $|A| \neq 0$.

Если определитель матрицы отличен от нуля $(|A| \neq 0)$, то такая квадратная матрица называется **невырожденной**, или **неособенной**; в противном случае $(\text{при } |A| = 0)$ - **вырожденной**, или **особенной**.

Укажем следующие свойства обратных матриц:

1) $\mathbf{(A^{-1})^{-1} = A;}$
2) $\mathbf{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$
3) $\mathbf{(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}.}$

Алгоритм вычисления обратной матрицы:

1. Находим определитель исходной матрицы. Если $|A| = 0$, то матрица A – вырожденная и обратная матрица A^{-1} не существует. Если $|A| \neq 0$, то матрица A – невырожденная и обратная матрица существует.

2. Находим матрицу A', транспонированную к A.

3. Находим алгебраические дополнения элементов транспонированной матрицы $A'_{ij} = A_{ji}\ (i = 1,2,...,n;\ j=1,2...n)$ и составляем из них присоединенную матрицу $\tilde{A}$: $\tilde{a}_{ij} = A'_{ij} = A_{ji} (i = 1,2,...,n;\ j=1,2,...n)$.

4. Вычисляем обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A};\ (|A| \neq 0)$.

5. Проверяем правильность вычисления обратной матрицы A^{-1} исходя из ее определения $A^{-1}A = A \cdot A^{-1} = E$ (п. 5 не обязателен).

Решение типовых примеров

Пример 1. Найти матрицу, обратную к данной, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. 1. Определитель матрицы $|A| = 21 \neq 0$, т.е. матрица А – невырожденная и обратная матрица A^{-1} существует.

2. Находим матрицу A', транспонированную к А:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A' и составляем из них присоединенную матрицу $\tilde{A}$, учитывая, что $A'_{ij} = A_{ji}$: $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 14 & -7 \\ -3 & -1 & 5 \\ 6 & -5 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Вычисляем обратную матрицу $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 0 & 14 & -7 \\ -3 & -1 & 5 \\ 6 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{0}{21} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{3}{21} & -\frac{1}{21} & \frac{5}{21} \\ \frac{6}{21} & -\frac{5}{21} & \frac{4}{21} \end{pmatrix}.$$

5. Поверяем правильность вычисления обратной матрицы по формулам: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

Задание для решения в аудитории

Найти обратные матрицы для матриц:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, 2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, 3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1.5 Ранг матрицы

В матрице А размером $m \times n$ вычеркиванием каких-либо строк и столбцов можно вычленить квадратные подматрицы k-го порядка, где $k \leq \min(m;n)$. Определители таких подматриц называются **минорами k-го порядка матрицы А**.

Например, из матрицы $A_{3\times4}$ можно получить подматрицы первого, второго и третьего порядков.

Рангом матрицы А называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.

Ранг матрицы А обозначается rang A, rg A или r (A). Из определения следует:

а) ранг матрицы $A_{m\times n}$ не превосходит меньшего из ее размеров, т.е. $r(A)\le \min(m;n)$;

б) $r(A)=0$ тогда и только тогда, когда элементы матрицы равны нулю, т.е. A=O;

в) для квадратной матрицы n-го порядка $r(A)=n$ тогда и только тогда, когда матрица А – невырожденная.

В общем случае определение ранга матрицы перебором всех миноров достаточно трудоемко. Для облегчения этой задачи используются преобразования, сохраняющие ранг матрицы. Назовем **элементарными преобразованиями** матрицы следующие:

1. Отбрасывание нулевой строки (столбца).
2. Умножение всех элементов строки (столбца) матрицы на число, не равное нулю.
3. Изменение порядка строк (столбцов) матрицы.
4. Прибавление к каждому элементу одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число.
5. Транспонирование матрицы.

Теорема 1. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы.

При изучении свойств определителей было показано, что при преобразованиях квадратных матриц их определители либо сохраняются, либо умножаются на число, не равное нулю. В результате сохраняется наивысший порядок отличных от нуля миноров исходной матрицы, т.е. ее ранг не изменяется.

С помощью элементарных преобразований можно привести матрицу к так называемому ступенчатому виду, когда вычисление ее ранга не представляет труда.

Матрица А называется **ступенчатой**, если она имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rk} \end{pmatrix},$$

где $a_{ii}\neq 0,\ i=1,2,\dots,r;\ r\le k$.

Замечание. Условие $r\le k$ всегда может быть достигнуто транспонированием матрицы.

Очевидно, что ранг ступенчатой матрицы равен r, так как имеется минор r-го порядка, не равный нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{rr}\neq 0.$$

Покажем на примере вычисление ранга матрицы с помощью окаймляющих миноров и элементарных преобразований.

Решение типовых примеров

Пример 1. Вычислить ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & 4\\ 3 & 2 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0 & -3\end{pmatrix}$

Решение. Для матрицы $A_{3\times 4}$ ранг $r(A)\le \min(3;4)=3$. Проверим, равен ли ранг трём, для этого вычислим все миноры третьего порядка, т.е. определители всех подматриц третьего порядка (их всего 4, они получаются при вычеркивании одного из столбцов матрицы):

$$\begin{vmatrix}3 & 0 & 4\\ 2 & 0 & 1\\ -1 & 0 & -3\end{vmatrix}=0;\quad \begin{vmatrix}1 & 0 & 4\\ 3 & 0 & 1\\ 2 & 0 & -3\end{vmatrix}=0;\quad \begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & -1 & -3\end{vmatrix}=0;\quad \begin{vmatrix}1 & 3 & 0\\ 3 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}=0.$$

Поскольку все миноры третьего порядка нулевые, $r(A)\le 2$. Так как существует ненулевой минор второго порядка, например $\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-7\ne 0$, то $r(A)=2$.

Пример 2. Найти ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 3 & 0 & 2\\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3\\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0\\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3\end{pmatrix}$.

Решение. 1. Если $a_{11}=0$, то при перестановке строк или столбцов добиваются того, что $a_{11}\ne 0$. В данном примере поменяем местами, например, 1-ю и 2-ю строки матрицы.

2. Если $a_{11}\ne 0$, то, умножая элементы 2-й, 3-й и 4-й строк на подходящие числа (именно на $-a_{21}/a_{11}=0,\ -a_{31}/a_{11}=2,\ -a_{41}/a_{11}=1)$ и прибавляя полученные числа соответственно к элементам 2-й, 3-й и 4-й строк, добьемся того, чтобы все элементы 1-го столбца (кроме a_{11}) равнялись нулю:

$$\begin{pmatrix}2 & -4 & 1 & 5 & 3\\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2\\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0\\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2 & -4 & 1 & 5 & 3\\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2\\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6\\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6\end{pmatrix}.$$

3. Если в полученной матрице $a_{22}\ne 0$ (в данном случае $a_{22}=-1\ne 0$), то, умножая элементы 3-й и 4-й строк на подходящие числа (а именно на $-a_{32}/a_{22}=-3,\ -a_{42}/a_{22}=-3)$, добьемся того, чтобы все элементы 2-го столбца (кроме a_{12}, a_{22}) равнялись нулю. Если в процессе преобразований получаются строки (или столбцы), целиком состоящие из нулей (как в данном примере), то отбрасываем эти строки (или столбцы):

$$\begin{pmatrix}2 & -4 & 1 & 5 & 3\\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2 & -4 & 1 & 5 & 3\\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Последняя матрица имеет ступенчатый вид и содержит миноры второго порядка, не равные нулю, например $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. Поэтому ранг полученной ступенчатой, а, следовательно, и данной матрицы равен двум.

Задания для решения в аудитории

Найти ранг матрицы:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 2 & 4 & 18 \\ -3 & 18 & 6 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 7 & 2 & 11 \end{pmatrix}$

3) .A= $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ 4) A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 5) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & -2 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 7 \end{pmatrix}$

Тема 2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1.Метод обратной матрицы, формулы Крамера, метод Гаусса

Система m линейных уравнений с n переменными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

где $a_{ij}, b_i \left(i = 1, 2 \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n\right)$ - произвольные числа, называемые соответственно **коэффициентами при переменных** и **свободными членами** уравнений. В более краткой записи с помощью знаков суммирования систему можно записать в виде:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad \left(i = 1, 2, \ldots, m\right)$$

Решением системы (1) называется такая совокупность n чисел $\left(x_1 = k_1,\ x_2 = k_2, \ldots, x_n = k_n\right)$, при подстановке которых каждое уравнение системы обращается в верное равенство.

Система уравнений называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместной**, если она не имеет решений. Совместная система уравнений называется **определенной**, если она имеет единственное решение, и **неопределенной**, если она имеет более одного решения.

Например, система уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 = 10, \\ x_1 - x_2 = 10 \end{cases}$ - совместная и определенная, так как имеет единственное решение (10;0); система $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10, \\ 2x_1 + x_2 = 15 \end{cases}$ несовместная, а система уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 = 20 \end{cases}$ - совместная и неопределенная, так как имеет более одного, а точнее, бесконечное множество решений $\left(x_1 = c,\ x_2 = 10 - 2c, \text{ где } \ c - \text{любое число}\right)$.

Две системы уравнений называются **равносильными**, или **эквивалентными**, если они имеют одно и то же множество решений.

Запишем систему (1) в матричной форме. Обозначим:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix},$$

где A – матрица коэффициентов при переменных, или матрица системы, X – матрица-столбец переменных; B – матрица-столбец свободных членов.

Так как число столбцов матрицы $A_{m\times n}$ равно числу строк матрицы $X_{n\times 1}$, их произведение $AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_x + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$ есть матрица-столбец.

Элементами полученной матрицы являются левые части системы (1). На основании определения равенства матриц систему (1) можно записать в виде:

$$AX = B. \tag{2}$$

Пусть число уравнений системы (1) равно числу переменных, т.е. $m = n$. Тогда матрица системы является квадратной, а ее определитель $\Delta = |A|$ называется **определителем системы**.

Для получения решения системы (1) при $m = n$ предположим, что квадратная матрица системы $A_{n\times n}$ невырожденная, т.е. ее определитель $|A| \neq 0$. В этом случае существует обратная матрица A^{-1}.

Умножая слева обе части матричного равенства (2) на матрицу A^{-1}, получим $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$. Так как $A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = EX = X$, то решением системы методом обратной матрицы будет матрица-столбец:

$$X = A^{-1}B \tag{3}$$

Теорема Крамера. Пусть Δ - определитель матрицы системы (2), а Δ_j- определитель матрицы, получаемой из матрицы A заменой j-го столбца столбцом свободных членов. Тогда, если $\Delta \neq 0$, система имеет единственное решение, определяемое по формулам:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Формулы (4) получили название формул Крамера.

Метод Гаусса – метод последовательного исключения переменных – заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого (или треугольного) вида. Из нее последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные.

Предположим, что в системе (1) коэффициент при переменной x_1 в первом уравнении $a_{11} \neq 0$ (если это не так, то перестановкой уравнений местами добьемся того, что $a_{11} \neq 0$).

Шаг 1. Умножая первое уравнение на подходящие числа (а именно на $-a_{21}/a_{11}$, $-a_{31}/a_{11}, \ldots, -a_{m1}/a_{11}$) и прибавляя полученные уравнения соответственно ко второму, третьему, …, m-му уравнению системы (1), исключим переменную x_1, из всех последующих уравнений, начиная со второго. Получим:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{in}^{(1)}x_n = b_i^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)}, \end{cases},$$

где буквами с верхним индексом (1) обозначены новые коэффициенты, полученные после первого шага.

Шаг 2. Предположим, что $a_{22}^{(1)} \neq 0$ (если это не так, то соответствующей перестановкой уравнений или переменных с изменением их номеров добьемся того, чтобы $a_{22}^{(1)} \neq 0$). Умножая второе уравнение на подходящие числа $\left(-a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)}, -a_{42}^{(1)}/a_{22}^{(1)}, \ldots, \ldots, -a_{m2}^{(1)}/a_{22}^{(1)} \right)$ и прибавляя полученные уравнения соответственно к третьему, четвертому, …, m–му уравнению системы, исключим переменную x_2 из всех последующих уравнений, начиная с третьего.

Продолжая процесс последовательного исключения переменных $x_3, x_4, \ldots, x_{r-1}$, после $(r-1)$–го шага, получим систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2r}^{(1)}x_r + a_{2,r}^{(1)}x_{r+1} + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{rr}^{(r-1)}x_r + a_{r,r+1}^{(r-1)}x_{r+1} + \ldots + a_{2n}^{(r-1)}x_n = b_r^{(r-1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad 0 = b_{r+1}^{(r-1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad 0 = b_m^{(r-1)}. \end{cases} \qquad (5)$$

Число нуль в последних $m-r$ уравнениях означает, что их левые части имеют вид $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n$. Если хотя бы одно из чисел $b_{r+1}^{(r-1)}, \ldots, b_m^{(r-1)}$ не равно нулю, то соответствующее равенство противоречиво, и система (2) несовместна.

Таким образом, для любой совместной системы числа $b_{r+1}^{(r-1)}, \ldots, b_m^{(r-1)}$ в системе (5) равны нулю. В этом случае последние $m-r$ уравнений в системе (5) являются тождествами и их можно не принимать во внимание при решении системы (1). Очевидно, что после отбрасывания «лишних» уравнений возможны два случая: а) число уравнений системы (5) равно числу переменных, т.е. $r = n$ (в этом случае система (5) имеет треугольный вид); б) $r < n$ (в этом случае система (5) имеет ступенчатый вид). Переход системы (1) к равносильной ей системе (5) называется **прямым ходом** метода Гаусса, а нахождение переменных из системы (5) – **обратным ходом.**

Преобразования Гаусса удобно проводить, осуществляя преобразования не с самими уравнениями, а с матрицей их коэффициентов. Рассмотрим матрицу:

$$A_1=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} & & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} & & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots a_{mn} & & b_m \end{array}\right),$$

называемую **расширенной матрицей системы** (1), так как в нее, кроме матрицы системы А, дополнительно включен столбец свободных членов.

Решение типовых примеров

Пример 1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}.$$

а) методом обратной матрицы; б) по формулам Крамера.

Решение. а) Обозначим $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Тогда в матричной форме данная система имеет вид $AX=B$. Найдем определитель $|A|=5$. Так как $|A|\neq 0,$ матрица А – невырожденная, и существует обратная матрица:

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix};\ X=A^{-1}B=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

т.е. решение системы (4; 2; 1).

б) Найдем определитель системы $\Delta=|A|=5$. Так как $\Delta\neq 0$, по теореме Крамера система имеет единственное решение.

Вычислим определители матриц $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, полученных из матриц А, заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix}=20;\ \Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix}=10;\ \Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix}=5.$$

Теперь по формулам Крамера (4):

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{20}{5}=4;\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{10}{5}=2;\ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{5}{5}=1,$$

т.е. решение системы (4; 2; 1).

Пример 2. Решить методом Гаусса систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6, \\ 2x_1+4x_2-2x_3-3x_4=18, \\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=4, \\ 2x_1-3x_2+2x_3+x_4=-8. \end{cases}$$

Решение. Расширенная матрица системы имеет вид:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & -2 & -3 & 18 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right).$$

Шаг 1. Так как $a_{11} \neq 0$, исключим переменную x_1 из всех строк, начиная со второй, умножая вторую, третью и четвертую строки матрицы на числа (-2), (-3), (-2) и прибавляя полученные строки соответственно ко второй, третьей, четвертой строкам.

Заметив, что в новой матрице $a_{22}^{(1)}=0$, поменяем местами вторую и третью строки:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & 20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array}\right).$$

Шаг 2. Так как теперь $a_{22}^{(1)}=-4 \neq 0$, исключим переменную x_2 из всех строк, начиная с третьей, умножая вторую строку на $\left(-7/4\right)$ и прибавляя полученную строку к четвертой:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 13{,}5 & 9 & 4{,}5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{117}{16} & \frac{117}{8} \end{array}\right).$$

Шаг 3. Учитывая, что $a_{33}^{(2)}=-8 \neq 0$, умножаем третью строку на $13{,}5/8=27/16$ и, прибавляя полученную строку к четвертой, исключим из нее переменную x_3. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6, \\ \quad -4x_2-10x_3+8x_4=-14, \\ \qquad\qquad -8x_3+x_4=6, \\ \qquad\qquad\quad -\dfrac{117}{16}x_4=\dfrac{117}{8}, \end{cases}$$

откуда, используя обратный ход метода Гаусса, найдем из четвертого уравнения $x_4=-2$; из третьего $x_3=\dfrac{6-x_4}{-8}=\dfrac{6+2}{-8}=-1$; из второго $x_2=\dfrac{-14-8x_4+10x_3}{-4}=\dfrac{-14-8(-2)+10(-1)}{-4}=2$ и из первого уравнения

$x_1 = 6 + 2x_4 - 3x_3 - 2x_2 = 6 + (-2) - 3(-1) - 2 \cdot 2 = 1$, т.е. решение системы $(1;\ 2;\ -1;\ 2)$.

Пример 3. Решить методом Гаусса систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 16. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & -7 & 3 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Итак, уравнение, соответствующее третьей строке последней матрицы, противоречиво – оно привелось к неверному равенству $0 = -1$, следовательно, данная система несовместна.

Задания для решения в аудитории

1. Решить систему линейных уравнений матричным методом, по формулам Крамера и методом Гаусса:

1) $\begin{cases} x + y - z = 36 \\ x - y + z = 13 \\ -x + y + z = 7. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x + y + z = 5 \\ 6x + 3y + 4z = 1 \\ 7x + 2y + 5z = 2 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + 2y - 4z = 1 \\ 2x + y - 5z = -1 \\ x - y - z = -2 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ x + 2y + 3z = -1 \\ x - 3y - 2z = 3 \end{cases}$

2. Определить совместность системы линейных уравнений:

1) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4 \end{cases}$ (Ответ: система несовместна)

2) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 4 \\ 7x_1 + 10x_2 = 12 \\ 5x_1 + 6x_2 = 8 \\ 3x_1 - 16x_2 = -5 \end{cases}$ (ответ: система совместна. $x_1 = 1$; $x_2 = 1/2$.)

ТЕМА 3.ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

3.1 Линейные операции над векторами. Линейная зависимость векторов

Определение 1. Геометрическим вектором, или просто вектором, называется **направленный отрезок.**

Вектор обозначается символом $\overrightarrow{AB}$, где точки A и B - начало и конец данного вектора, либо $\vec{a}$. Начало вектора называют **точкой его приложения**.

Определение 2. Вектор называется **нулевым,** если начало и конец его совпадают.

Нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину, равную нулю. Это позволяет при записи отождествлять нулевой вектор с вещественным числом нуль.

Определение 3. Векторы называются **коллинеарными**, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.

Определение 4. Три вектора называются **компланарными**, если они лежат в одной плоскости.

Определение 5. Два вектора называются **равными**, если они коллиннеарны, имеют одинаковую длину и одинаковое направление.

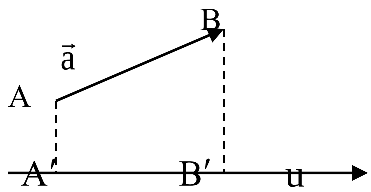
Все нулевые векторы считаются равными.

Определение 6. Суммой $\vec{a}+\vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется **вектор**, идущий из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ при условии, что вектор $\vec{b}$ приложен к концу вектора $\vec{a}$.

Определение 7. Разностью $\vec{a}-\vec{b}$ вектора $\vec{a}$ и вектора $\vec{b}$ называется такой **вектор** $\vec{c}$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ дает вектор $\vec{a}$.

Определение 8. Произведением $\alpha\vec{a}$ вектора $\vec{a}$ на действительное число α называется вектор $\vec{b}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$, имеющий длину, равную $|\alpha|\cdot|\vec{a}|$, и имеющий направление, совпадающее с направлением вектора $\vec{a}$ при $\alpha>0$ и противоположное направлению вектора $\vec{a}$ при $\alpha<0$.

Обозначим буквами A' и B' основания перпендикуляров, опущенных на ось u из точек A и B соответственно.



Определение 9. **Проекцией вектора** $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ на ось u называется величина $A'B'$ направленного отрезка $\overrightarrow{A'B'}$ оси u и обозначается $\text{пр}_u\vec{a}$. $\text{пр}_u\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi$, где φ - угол между вектором $\vec{a}$ и осью u.

Любой вектор $\vec{a}$ может быть разложен по декартову прямоугольному базису $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$: $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

Числа $x,\ y,z$ - называется декартовыми прямоугольными координатами вектора $\vec{a}$. Обозначим буквами α,β и γ углы наклона вектора $\vec{a}$ к осям координат; $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ называются направляющими косинусами вектора $\vec{a}$.

Длина вектора через его координаты имеет вид:

$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Направляющие косинусы вектора вычисляются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};\ \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};\ \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

откуда следует $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Определение 10. Ортом вектора $\vec{a}$ называется вектор $\vec{a}^0$, удовлетворяющий условиям:

1) $\vec{a}^0$ коллинеарен вектору $\vec{a}$,

2) $|\vec{a}^0| = 1$.

Координатами орта вектора являются направляющие косинуса.

Если два вектора $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ заданы в декартовых прямоугольных координат $\vec{a}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{a}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, то:

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k},$$

$$\alpha\vec{a} = (\alpha x_1)\vec{i} + (\alpha y_1)\vec{j} + (\alpha z_1)\vec{k}.$$

Условие коллинеарности векторов имеет вид:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Решение типовых примеров

Задача 1. Найти вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, если $\vec{a} = (2;3;-1)$, $\vec{b} = (5;9;7)$.

Решение. $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (2+5;3+9;-1+7) = (7;12;6)$.

Задача 2. Найти вектор $\vec{d} = 4\vec{p} + 5\vec{q}$, если $\vec{p} = (4;5;-6)$, $\vec{q} = (8;2;1)$.

Решение. $4\vec{p} = (4\times4;5\times4;-6\times4) = (16;20;-24)$

$5\vec{q} = (8\times5;2\times5;1\times5) = (40;10;5)$

Тогда:

$\vec{d} = 4\vec{p} + 5\vec{q} = (16+40;20+10;-24+5) = (56;30;-19)$.

Задача 3. Разложить вектор $\vec{S} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ по трем некомпланарным векторам: $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{r} = 2\vec{b} + 3\vec{c}$.

Решение. $\vec{S} = \alpha\vec{p} + \beta\vec{q} + \gamma\vec{r}$.

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \alpha(\vec{a} + \vec{b}) + \beta(\vec{a} - \vec{b}) + \gamma(2\vec{b} + 3\vec{c}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b} + \beta\vec{a} - \beta\vec{b} + 2\gamma\vec{b} + 3\gamma\vec{c}.$$

Приравняем коэффициенты справа и слева:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1, \\ \alpha - \beta + 2\gamma = 1, \\ -2\alpha + 3\gamma = 1, \end{cases} \text{ тогда } \alpha = \frac{2}{5};\ \beta = \frac{3}{5};\ \gamma = \frac{3}{5} \text{ и } \vec{S} = \frac{2}{5}\vec{p} + \frac{3}{5}\vec{q} + \frac{3}{5}\vec{r}.$$

Задача 4. Даны точки $A(1;\ 7;\ 0)$, $B(5;\ 7;\ 3)$, $C(7;\ 6;\ 5)$. Разложить вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$ по ортам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ и найти его длину, направляющие косинусы, орт вектора $\vec{a}$.

Решение. Найдем координаты векторов:

$\overrightarrow{AC} = (7-1; 6-7; 5-0) = (6; -1; 5)$
$\overrightarrow{BC} = (7-5; 6-7; 5-3) = (2; -1; 2)$.
Вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = (6-2;\ -1-(-1); 5-2) = (4;\ 0;\ 3)$.
Тогда $|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 0 + 3^2} = \sqrt{25} = 5,$ следовательно,
$\cos\alpha = \frac{4}{5}, \quad \cos\beta = 0, \quad \cos\gamma = \frac{3}{5}, \quad \vec{a}^{\,0}\left\{\frac{4}{5};\ 0;\ \frac{3}{5}\right\}.$

Задания для решения в аудитории

1. Найти вектор $\vec{c} = \vec{a} - 3\vec{b}$, если $\vec{a} = (-4; 13; 1)$, $\vec{b} = (2; 3; 4)$.

2. Найти вектор $\vec{p} = 7\vec{m} + 9\vec{n}$, если $\vec{m} = (7; 1; -25)$, $\vec{n} = (21; -3; -8)$.

3. Разложить вектор $\vec{S} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ по трем некомпланарным векторам: $\vec{p} = \vec{a} - \vec{b},\ \vec{q} = \vec{a} + \vec{b},\ \vec{r} = 4\vec{b} + 5\vec{c}$.

4. Даны точки $A(-2; 3; 6)$, $B(1; 2; 5)$, $C(-2; 7; 3)$. Разложить вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$ по ортам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ и найти его длину, направляющие косинусы, орт вектора $\vec{a}$.

3.2 Скалярное произведение векторов

Определение 11. Скалярным произведением ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению их модулей на косинус угла между ними:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\alpha$$

Модулем вектора $\vec{a} = (x; y; z)$ (или длиной вектора $\vec{a}$) называется корень квадратный из суммы квадратов координат вектора:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Свойства скалярного произведения:

1) $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$ - произведение векторов коммутативно.
2) Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля:

$$\bar{a}^{\,2} = |\bar{a}|^2$$

$$\bar{a}^{\,2} = \bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}| \cdot |\bar{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\bar{a}|^2 \Rightarrow \boxed{|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^{\,2}}}$$

3) Если $\bar{a} \perp \bar{b}$, то их скалярное произведение равно нулю:

$$\boxed{\bar{a} \cdot \bar{b} = 0}$$

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\cos 90^\circ=0$$

$$\bar{i}\cdot\bar{i}=\left|\bar{i}\right|^2=1;\quad \bar{i}\cdot\bar{j}=\left|\bar{i}\right|\cdot\left|\bar{j}\right|\cdot\cos 90^\circ=0$$

Причем, произведение одноименных орт равно единице, а разноименных орт равно нулю (см. таблицу):

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	1	0	0
$\bar{j}$	0	1	0
$\bar{k}$	0	0	1

4) Скалярное произведение векторов, заданных координатами равно сумме произведений одноименных координат:

$$\left(x_1\cdot\bar{i}+y_1\cdot\bar{j}+z_1\cdot\bar{k}\right)\cdot\left(x_2\cdot\bar{i}+y_2\cdot\bar{j}+z_2\cdot\bar{k}\right)=$$

$$=x_1\cdot\bar{i}\cdot x_2\cdot\bar{i}+\cancel{x_1\cdot\bar{i}\cdot y_2\cdot\bar{j}}+\cancel{x_1\cdot\bar{i}\cdot z_2\cdot\bar{k}}+$$
$$+\cancel{y_1\cdot\bar{j}\cdot x_2\cdot\bar{i}}+y_1\cdot\bar{j}\cdot y_2\cdot\bar{j}+$$

$$+\cancel{y_1\cdot\bar{j}\cdot z_2\cdot\bar{k}}+\cancel{z_1\cdot\bar{k}\cdot x_2\cdot\bar{i}}+$$
$$+\cancel{z_1\cdot\bar{k}\cdot y_2\cdot\bar{j}}+z_1\cdot\bar{k}\cdot z_2\cdot\bar{k}=$$

$$=\boxed{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}$$

5) Из формулы скалярного произведения векторов можно найти косинус угла между двумя векторами:

$$\cos\alpha=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|}$$

В координатной форме:

$$\cos\alpha=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

Решение типовых примеров

Задача 1. Перпендикулярны ли два вектора $\bar{a}=(3;-2;6)$; $\bar{b}=(7;4;9)$. Найти угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Решение. $3\cdot7+(-2)\cdot4+6\cdot9=21-8+54=67\neq0$, следовательно, векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не перпендикулярны.

Задача 2. Даны два вектора $\bar{a}=(1;2;-2)$; $\bar{b}=(2;-1;2)$. Найти угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Решение. $\cos\varphi = \dfrac{1\cdot 2 + 2\cdot(-1) + (-2)\cdot 2}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = -\dfrac{4}{3\cdot 3} = -\dfrac{4}{9}$

Тогда:

$$\varphi = \pm\arccos\left(-\frac{4}{9}\right) + 2\pi n = \pm(\pi - \arccos\frac{4}{9}) + 2\pi n, n\in Z$$

Задача 3. Найти угол α между векторами $\overline{p} = 2\overline{a} + \overline{b}$ и $\overline{q} = \overline{a} - \overline{b}$, если $\overline{a} = (4;1;-2)$; $\overline{b} = (1;2;3)$.

Решение. Зная, что $\cos\varphi = \dfrac{\overline{p}\cdot\overline{q}}{|\overline{p}|\cdot|\overline{q}|}$, определим координаты векторов $\overline{p}$ и $\overline{q}$:

$\overline{p} = (2\cdot 4 + 1; 2\cdot 1 + 2; 2\cdot(-2) + 3) = (9;4;-1)$

$\overline{q} = (4-1; 1-2; -2-3) = (3;-1;-5)$

Найдем скалярное произведение векторов по их координатам:

$\overline{p}\cdot\overline{q} = 9\cdot 3 + 4\cdot(-1) + (-1)\cdot(-5) = 27 - 4 + 5 = 28$

Их длины равны:

$|\overline{p}| = \sqrt{9^2+4^2+(-1)^2} = \sqrt{81+16+1} = \sqrt{98}$

$|\overline{q}| = \sqrt{3^2+(-1)^2+(-5)^2} = \sqrt{9+1+25} = \sqrt{35}$

Тогда,

$$\cos\varphi = \frac{28}{\sqrt{98}\cdot\sqrt{35}} = \frac{28}{\sqrt{3430}},$$

следовательно,

$$\alpha = \pm\arccos\frac{28}{\sqrt{3430}} + 2\pi n, n\in Z.$$

Задания для решения в аудитории

1. Перпендикулярны ли векторы:

   а) $\overline{a} = (7;-3;2)$; $\overline{b} = (1;7;7)$

   б) $\overline{a} = (10;6;2)$; $\overline{b} = (2;3;1)$

   в) $\overline{a} = (-4;9;5)$; $\overline{b} = (4;-9;-5)$

2. Даны два вектора $\overline{a} = (7;1;-25)$, $\overline{b} = (21;-3;-8)$. Найти угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

3. Даны вершины треугольника. Определить его внутренние углы, если A=(2;5;4), B=(3;1;-5), C=(0;-7;1).

4. Раскрыть скобки в выражении: $(2i - j)\cdot j + (j - 2k)\cdot k + (i - 2k)^2$

3.3. Векторное произведение векторов.

<u>**Определение.**</u> **Векторным произведением** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

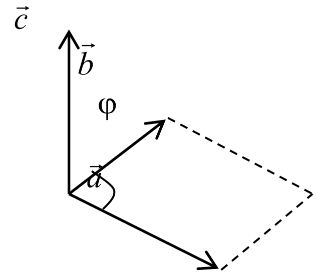
1) $|\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi$, где φ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$,

$\sin\varphi \geq 0; \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$

2) вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$

3) $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов.

Обозначается: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ или $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$.



Свойства векторного произведения векторов:

1) $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$;

2) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, если $\vec{a} \,||\, \vec{b}$ или $\vec{a} = 0$ или $\vec{b} = 0$;

3) $(m\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (m\vec{b}) = m(\vec{a} \times \vec{b})$;

4) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;

5) Если заданы векторы $\vec{a}\,(x_a, y_a, z_a)$ и $\vec{b}\,(x_b, y_b, z_b)$ в декартовой прямоугольной системе координат с единичными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$$

6) Геометрическим смыслом векторного произведения векторов является площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

<u>Пример.</u> Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

$\vec{a} = (2, 5, 1)$; $\quad \vec{b} = (1, 2, -3)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -17\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k}.$$

<u>Пример.</u> Вычислить площадь треугольника с вершинами A(2, 2, 2), B(4, 0, 3), C(0, 1, 0).

$$\overrightarrow{AC} = (0-2; 1-2; 0-2) = (-2; -1; -2)$$

$$\overrightarrow{AB} = (4-2; 0-2; 3-2) = (2; -2; 1)$$

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}(-1-4) - \vec{j}(-2+4) +$$

$$+ \vec{k}(4+2) = -5\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}.$$

$$\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{25+4+36} = \sqrt{65}. \qquad S_{\Delta} = \frac{\sqrt{65}}{2}\ (\text{ед}^2).$$

Пример. Доказать, что векторы $\vec{a} = 7\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 7\vec{j} + 8\vec{k}$ и $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ компланарны.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & 8 \\ 7 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$, т.к. векторы линейно зависимы, то они компланарны.

Пример. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} + 3\vec{b}$; $3\vec{a} + \vec{b}$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$; $\vec{a} \wedge \vec{b} = 30^0$.

$$(\vec{a} + 3\vec{b}) \times (3\vec{a} + \vec{b}) = 3\vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} + 9\vec{b} \times \vec{a} + 3\vec{b} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} + 9\vec{b} \times \vec{a} = 8\vec{b} \times \vec{a}$$

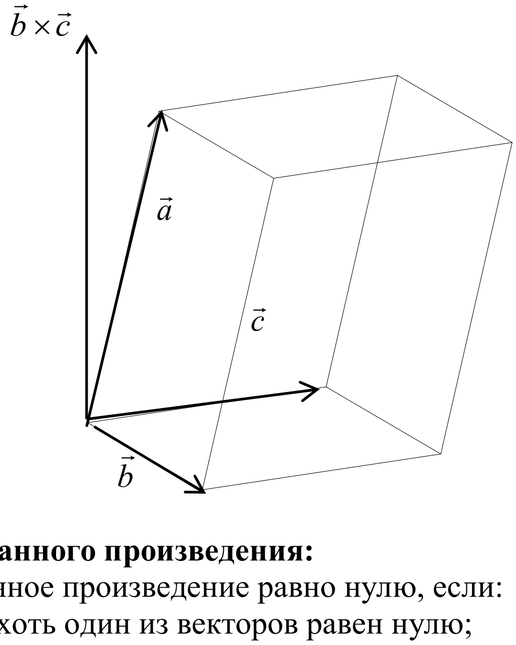
$S = 8|\vec{b}||\vec{a}|\sin 30^0 = 4$ (ед^2).

3.4. Смешанное произведение векторов.

Определение. Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на вектор, равный векторному произведению векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Обозначается $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ или ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$).

Смешанное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.



Свойства смешанного произведения:

1)Смешанное произведение равно нулю, если:

а) хоть один из векторов равен нулю;

б) два из векторов коллинеарны;

в) векторы компланарны.

2) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

3) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$

4) $(\lambda\vec{a}_1 + \mu\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}) = \lambda(\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}) + \mu(\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c})$

5) Объем треугольной пирамиды, образованной векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, равен $\frac{1}{6}\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|$

6)Если $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$, $\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$, то

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

<u>Пример.</u> Доказать, что точки A(5; 7; 2), B(3; 1; -1), C(9; 4; -4), D(1; 5; 0) лежат в одной плоскости.

Найдем координаты векторов:

$$\overrightarrow{AB}=(-2;-6;1)$$
$$\overrightarrow{AC}=(4;-3;-2)$$
$$\overrightarrow{AD}=(-4;-2;2)$$

Найдем смешанное произведение полученных векторов:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

Таким образом, полученные выше векторы компланарны, следовательно точки A, B, C и D лежат в одной плоскости.

<u>Пример.</u> Найти объем пирамиды и длину высоты, опущенной на грань BCD, если вершины имеют координаты A(0; 0; 1), B(2; 3; 5), C(6; 2; 3), D(3; 7; 2).

Найдем координаты векторов:

$$\overrightarrow{BA}=(-2;-3;-4)$$
$$\overrightarrow{BD}=(1;4;-3)$$
$$\overrightarrow{BC}=(4;-1;-2)$$

Объем пирамиды

$$V=\frac{1}{6}=\begin{vmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix}=\frac{1}{6}(-2(-8-3)+3(-2+12)-4(-1-16))=$$

$$=\frac{1}{6}(22+30+68)=20(ед^3)$$

Для нахождения длины высоты пирамиды найдем сначала площадь основания BCD.

$$\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix}=\vec{i}(-8-3)-\vec{j}(-2+12)+\vec{k}(-1-16)=-11\vec{i}-10\vec{j}-17\vec{k}.$$

$$\left|\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{11^2+10^2+17^2}=\sqrt{121+100+289}=\sqrt{510}$$

$S_{осн}=\sqrt{510}/2$ (ед^2)

Т.к. V = $\frac{S_{осн}\cdot h}{3}$; $h=\frac{3V}{S_{осн}}=\frac{120}{\sqrt{510}}=\frac{4\sqrt{510}}{17}$. (ед)

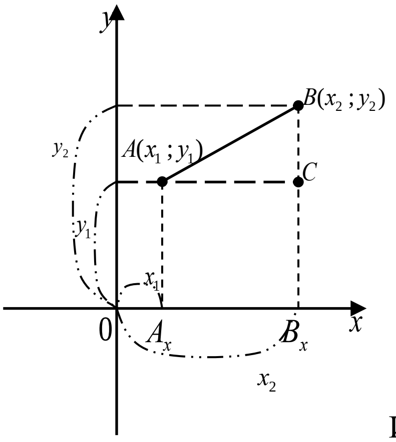
Тема 4. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

4.1 Понятие уравнения линии. Расстояние между двумя точками. Деление отрезка в данном отношении

Линия – геометрическое место точек (совокупность точек), обладающих определенным свойством.
Произвольная точка *M* линии называется ***текущей точкой*** линии, а ее координаты - ***текущими координатами***.

Уравнение, связывающее переменные ***x*** и ***y***, называется ***уравнением линии***, если ему удовлетворяют координаты любой точки линии и только они.

Пусть в прямоугольной системе координат заданы две точки с координатами $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$. Найдем расстояние между ними.



Из ΔABC по теореме Пифагора имеем: $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}$, но $AC=A_xB_x=|x_2-x_1|$; $CB=A_yB_y=|y_2-y_1|$.

Подставим в формулу: $AB=\sqrt{|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2}$ или

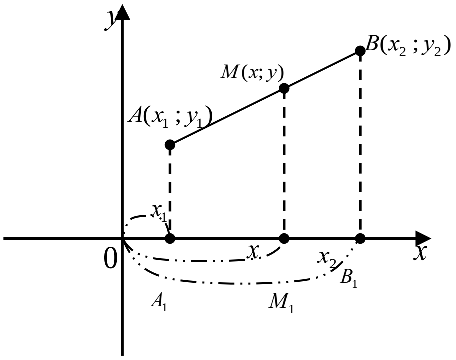
$$\boxed{d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$$

Значит, ***расстояние между двумя точками*** равно корню квадратному из суммы квадратов разностей соответствующих координат.

Пример: Определить расстояние между двумя точками *A* (2; 3); *B* (5; -1).

$$AB=\sqrt{(5-2)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

Пусть даны точки $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$. Найти координаты третьей точки *M*, которая делит отрезок *AB* так, что отношение $\dfrac{AM}{MB}$ равно положительному числу λ.



Составим пропорцию: $\dfrac{AM}{MB}=\dfrac{A_1M_1}{M_1B_1}$

Т.к. $\dfrac{AM}{MB}=\lambda$, $A_1M_1=x-x_1$ и $M_1B_1=x_2-x$, то получим

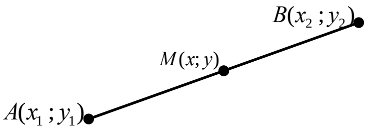
$\lambda=\dfrac{x-x_1}{x_2-x}$; $x_2\lambda-x\lambda=x-x_1$

Перегруппируем: $x+x\lambda=x_2\lambda+x_1$; $x(1+\lambda)=x_1+x_2\lambda$.

Отсюда: $\boxed{x=\dfrac{x_1+x_2\lambda}{1+\lambda}}$. Совершенно аналогично можно получить $\boxed{y=\dfrac{y_1+y_2\lambda}{1+\lambda}}$.

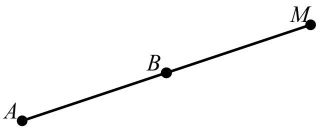
Замечания:

1).



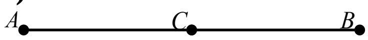
Если $\dfrac{AM}{MB}=\lambda>0$, то точка *M* делит отрезок *AB* внутренним образом.

2).



Если $\dfrac{AM}{MB}=\lambda<0$, то точка *M* делит отрезок *AB* внешним образом.

3)



Пусть делящая точка является серединой отрезка *AB*. Следовательно, $\dfrac{AC}{CB}=1$.Тогда $\boxed{x=\dfrac{x_1+x_2}{2}}$ и $\boxed{y=\dfrac{y_1+y_2}{2}}$, т. е. ***координаты середины отрезка равны полусумме координат концов отрезка.***

Для того чтобы найти ***точки пересечения двух линий***, достаточно совместно решить систему двух уравнений этих линий.

4.2 Прямая линия на плоскости

Прямая линия ℓ задается уравнением первой степени относительно x и y.

$$\ell:\mathrm{Ax}+\mathrm{By}+\mathrm{C}=0. \qquad (1)$$

Это <u>общее уравнение</u> прямой ℓ. Здесь коэффициенты A и B есть координаты нормального вектора $\vec{\mathrm{N}}=(\mathrm{A},\mathrm{B})$ (рис. 1).

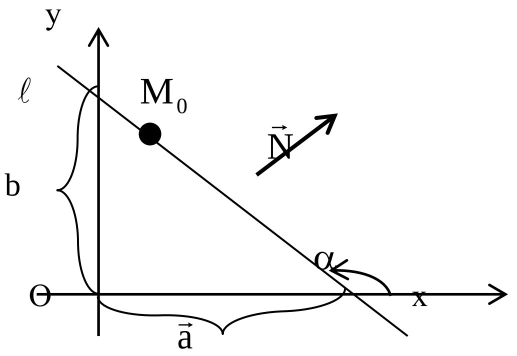


Рис. 1

Существуют другие виды уравнения прямой ℓ. Так, решив уравнения (1) относительно y, получим (если $B \neq 0$):

$$\ell: y = kx + b, \quad k = -\frac{A}{B}, \quad b = -\frac{C}{B}.$$

Это ***уравнение прямой с угловым коэффициентом.***

Здесь $k = \mathrm{tg}\alpha$ - угловой коэффициент прям… о прямой на оси OY (рис. 1). Если $C \neq 0$, то ура… :
$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Здесь a и b - величины отрезков, которые прямая ℓ отсекает на осях OX и OY (рис. 1).

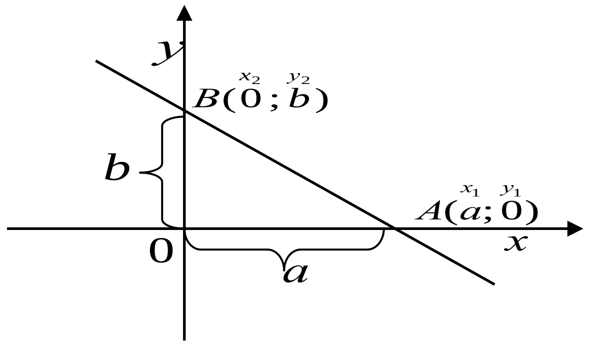
Если ***прямая проходит через две заданные точки*** $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, то ее уравнение имеет вид:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Пусть нам дана точка $A(x_0; y_0)$ и угловой коэффициент прямой *k*. Возьмем уравнение прямой с угловым коэффициентом $y = kx + b$. Так как точка $A \in l$, то ее координаты удовлетворяют данному уравнению, следовательно, $y_0 = kx_0 + b$. Вычтем из (1)-го уравнения (2)-е, получим:

$$-\begin{array}{l} y = kx + b \\ y_0 = kx_0 + b \end{array} \quad \Rightarrow \quad y - y_0 = k(x - x_0)$$ - ***уравнение пучка прямых***.

Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки. Подставим в него вместо $(x_1; y_1)$ координаты точки *A*, а вместо $(x_2; y_2)$ координаты точки *B*.



Получим: $\frac{y - 0}{b - 0} = \frac{x - a}{0 - a}$;

$$\frac{y}{b} = \frac{x - a}{-a} \quad ; \quad \frac{y}{b} = \frac{x}{-a} + 1, \quad \frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 1.$$

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ - ***уравнение прямой в отрезках на осях,***
где *a* и *b* – отрезки, отсекаемые прямой на осях *OX* и *OУ*.

Если у двух пересекающихся прямых l_1 и l_2 известны угловые коэффициенты k_1 и k_2, то можно найти угол между двумя прямыми:

$\operatorname{tg}\alpha_1 = k_1 \quad ; \ \operatorname{tg}\alpha_2 = k_2 \quad ; \ \alpha = \alpha_2 - \alpha_1 \quad \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1)$, а по формуле тангенса разности имеем:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_2 \cdot \operatorname{tg}\alpha_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$$

или

$$\operatorname{tg}\alpha = \left| \ \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \ \right|.$$

<u>Частные случаи:</u>

1) Пусть $l_1 \parallel l_2$, тогда угол между ними равен нулю $(\alpha = 0)$. Тогда:

$$\operatorname{tg}\alpha = 0 \quad ; \quad \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = 0 \quad \Rightarrow$$ т.е.,

$$\Rightarrow k_2 - k_1 = 0 \quad ; \quad \boxed{k_1 = k_2}$$

если угловые коэффициенты равны, то прямые параллельны.

2) Пусть $l_1 \perp l_2$, тогда α = 90˚, а тангенс 90˚ - не существует

$$\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = \text{не существует} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + k_1 \cdot k_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k_2 = -\frac{1}{k_1}}$$, т.е.

если угловые коэффициенты обратны по величине и противоположны по знаку, то прямые перпендикулярны.

3) Возможны следующие расположения прямых $l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$:

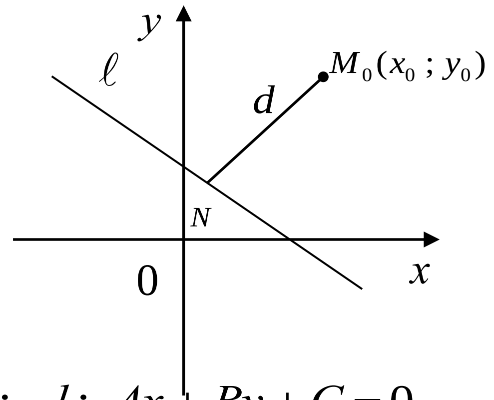
а) если $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$, то прямые пересекаются;

б) если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$, то прямые параллельны;

в) если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$, то прямые совпадают.

4.3 Расстояние от точки до прямой

Под расстоянием от точки M_0 до прямой l понимают длину перпендикуляра $M_0N = d$, опущенного из точки M на прямую l.



$$M_0 \notin l \quad ; \quad l:\; Ax + By + C = 0,$$

тогда:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Решение типовых примеров

Задача 1. Написать уравнение прямой ℓ, проходящей через точки $M_1(-1;4)$ и $M_2(5;2)$. Найти угловой коэффициент прямой ℓ и отрезки, которые она отсекает на осях координат.

Решение. $\dfrac{x+1}{5+1} = \dfrac{y-4}{2-4}, \quad \dfrac{x+1}{6} = \dfrac{y-4}{-2}, \quad -2x-2 = 6y-24, \quad x+3y-11=0$ - общее уравнение прямой. Отсюда следует, что $3y = -x+11$ или $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{11}{3}$ - уравнение прямой с угловым коэффициентом. Здесь $k = -\dfrac{1}{3}$. Из уравнения $x+3y-11=0 \Rightarrow x+3y=11, \quad \dfrac{x}{11} + \dfrac{3y}{11} = 1, \quad \dfrac{x}{11} + \dfrac{y}{11/3} = 1$. Итак, a=11, b=$\dfrac{11}{3}$.

Задача 2. Найти угол между прямыми $\ell_1 : x+2y+6=0$ и $\ell_2 : 3x+y-2=0$.

Решение. Так как $\ell_1 : y = -1/2x - 3,$ то $k_1 = -1/2$. Аналогично, $\ell_1 : y = -3x+2,$ то $k_2 = -3$.

Тогда

$$tg\Theta = \frac{-3+1/2}{1+(-3)\cdot(-1/2)} = -1, \quad \Theta = 135^0.$$

Задача 3. Совпадают, параллельны или пересекаются следующие прямые:

а) $l_1\!: 2x + y - 1 = 0$ и $l_2\!: x + 5y + 5 = 0$;

б) $l_1\!: -x + 6y + 2 = 0$ и $l_2\!: x - 6y - 2 = 0$;

в) $l_1\!: 3x + 6y + 7 = 0$ и $l_2\!: x + 2y + 14 = 0$.

Решение. Найдем соотношение соответствующих коэффициентов прямых:

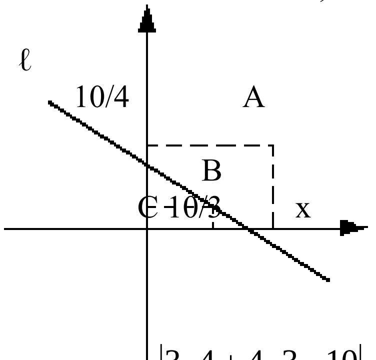
а) $\dfrac{2}{1} \neq \dfrac{1}{5}$, следовательно, прямые пересекаются;

б) $\frac{-1}{1}=\frac{6}{-6}=\frac{2}{-2}$, следовательно, прямые совпадают;

в) $\frac{3}{1}=\frac{6}{2}\neq\frac{7}{14}$, следовательно, прямые параллельны.

Задача 4. Найти расстояние от точек A(4;3), B(2;1) и C(1;0) до прямой *3x+4y-10=0* . Построить точки и прямую.

Решение. A=3, B=4, C=-10



$$d_A=\frac{|3\cdot 4+4\cdot 3-10|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|12+12-10|}{5}=\frac{14}{5}$$

$$d_B=\frac{|3\cdot 2+4\cdot 1-10|}{5}=0$$

$$d_C=\frac{|3\cdot 1+4\cdot 0-10|}{5}=\frac{7}{5}$$

Уравнение данной прямой в отрезках $\ell:\ \frac{x}{\frac{10}{3}}+\frac{y}{\frac{10}{4}}=1$

Задача 5. Даны координаты вершин треугольника $\mathrm{A}(2,5),\ \mathrm{B}(5,1),\ \mathrm{C}(11,3)$.

1) Вычислить длину стороны BC.

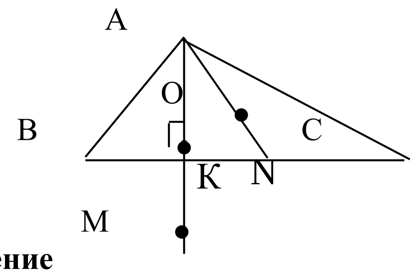
2) Составить уравнения сторон AB и BC.

3) Найти точку пересечения медиан.

4) Найти тангенс угла B.

5) Составить уравнение высоты, проведенной из вершины A, и найти ее длину.

6)Найти координаты точки M, расположенной симметрично точке A, относительно прямой BC.



Решение

1) Длину стороны BC определим как расстояние между двумя точками: $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$, тогда $|BC|=\sqrt{(11-5)^2+(3-1)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$.

2) Уравнение прямой BC: $\frac{x-x_в}{x_с-x_в}=\frac{y-y_в}{y_с-y_в}$; $\frac{x-5}{6}=\frac{y-1}{2}$; $x-3y-2=0$.

Уравнение прямой AB: $\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}$; $\frac{x-2}{3}=\frac{y-5}{-4}$; $4x+3y-23=0$.

3) Найдем координаты точки N – середины стороны ВС:

$$x_N = \frac{x_в + x_с}{2} = \frac{5+11}{2} = 8;\ y_N = \frac{y_в + y_с}{2} = \frac{1+3}{2} = 2;\ N(8,2).$$

Точка пересечения медиан O делит каждую медиану на отрезки в отношении $\lambda = 2:1$.

Используем формулы деления отрезка в данном отношении λ:

$$x_0 = \frac{x_A + \lambda x_N}{1+\lambda};\ y_0 = \frac{y_A + \lambda y_N}{1+\lambda};$$

$$x_0 = \frac{2+2\cdot 8}{3} = 6;\ y_0 = \frac{5+2\cdot 2}{3} = \frac{9}{3} = 3;\ O(6,\ 3).$$

4) Тангенс угла при вершине B найдем по формуле $tg\angle B = \frac{k_{AB}-k_{BC}}{1+k_{AB}\cdot k_{BC}}$.

Уравнение прямой ВС: $x-3y-2=0$, тогда $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3},\ \ k_{BC}=\frac{1}{3}$.

Уравнение прямой AB: $4x+3y-23=0$, тогда $y=-\frac{4}{3}x+\frac{23}{3},\ \ k_{AB}=-\frac{4}{3}$.

$$tg\angle B = \frac{-\frac{4}{3}-\frac{1}{3}}{1+(-\frac{4}{3})\cdot\frac{1}{3}} = \frac{-\frac{5}{3}}{\frac{5}{9}} = -\frac{9}{3} = -3.$$

5) Уравнение высоты АК запишем как уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,5)$ перпендикулярно прямой BC. Так как $AK \perp BC$, то

$$k_{AK} = -\frac{1}{k_{BC}} = -\frac{1}{\frac{1}{3}} = -3.$$

Тогда уравнение AK найдем по формуле: $y-y_A = k_{AK}(x-x_A)$.

$y-5=-3(x-2),\ y+3x-11=0$.

Длину высоты АК можно найти как расстояние от точки А до прямой ВС:

$$|AK| = d = \frac{|1\cdot 2-3\cdot 5-2|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}} = \frac{15}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{2}.$$

6) Точка М, симметричная точке А относительно прямой ВС, расположена на прямой АК, перпендикулярной к прямой ВС, на таком же расстоянии от прямой, как и точка А. Координаты точки К найдем как решение системы $\begin{cases} x-3y-2=0, \\ 3x+y-11=0. \end{cases}$ Систему решим по формулам Крамера: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 10;$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 11 & 1 \end{vmatrix} = 35;$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 5;$

$x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{35}{10} = \dfrac{7}{2};\ y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2};$ следовательно, $K\left(\dfrac{7}{2};\ \dfrac{1}{2}\right)$.

Точка К является серединой отрезка АМ.

$x_K = \dfrac{x_A + x_M}{2};\ \dfrac{7}{2} = \dfrac{2 + x_M}{2};\ x_M = 5;\ y_K = \dfrac{y_A + y_M}{2};\ \dfrac{1}{2} = \dfrac{5 + y_M}{2};\ y_M = -4;$ $M(5, -4)$.

Задания для решения в аудитории

1. Прямая ℓ проходит через точки $M_1(5;7)$ и $M_2(-3;12)$. Написать уравнение прямой ℓ. Найти угловой коэффициент и отрезки, которые она отсекает на осях координат.

2. Даны две прямые $\ell_1: 5x - 7y - 1 = 0$ и $\ell_2: y - 2x = 10$. Найти угол между этими прямыми.

3. Определить взаимное расположение прямых:

а) $l_1: 6x + 2y - 7 = 0$ и $l_2: 3x + y - 3{,}5 = 0$;

б) $l_1: x + y + 12 = 0$ и $l_2: x - y + 3 = 0$;

в) $l_1: -5x + 2y + 7 = 0$ и $l_2: 5x - 2y + 7 = 0$.

4. Найти расстояние от точек А(2;-6), В(5;1) и С(0;3) до прямой $-5x + 2y + 7 = 0$.

5. Даны координаты вершин треугольника $A(1;\ 4)$, $B(-3;0)$, $C(5;9)$.

1) Вычислить длину стороны BC.

2) Составить уравнения сторон AB и BC.

3) Найти точку пересечения медиан.

4) Найти тангенс угла В.

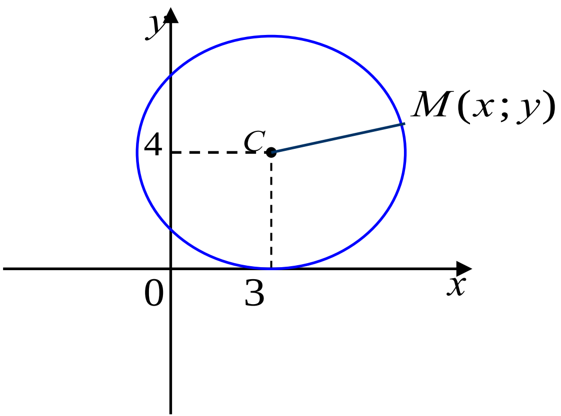
5) Составить уравнение высоты, проведенной из вершины А, и найти ее длину.

6) Найти координаты точки М, расположенной симметрично точке А, относительно прямой ВС.

4.4 Кривые второго порядка

Линии, описывающиеся уравнениями второй степени относительно x и y, называются кривыми второго порядка. К ним относятся окружность, эллипс, гипербола и парабола.

Окружность.



Уравнение окружности с центром в точке C $(a;\ b)$ и радиусом R имеет вид:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$ - ***нормальное уравнение окружности.***

Если центр окружности находится в начале координат, то $a = b = 0$ и уравнение примет вид:

$x^2 + y^2 = R^2$ ***- каноническое уравнение окружности***

Эллипс.

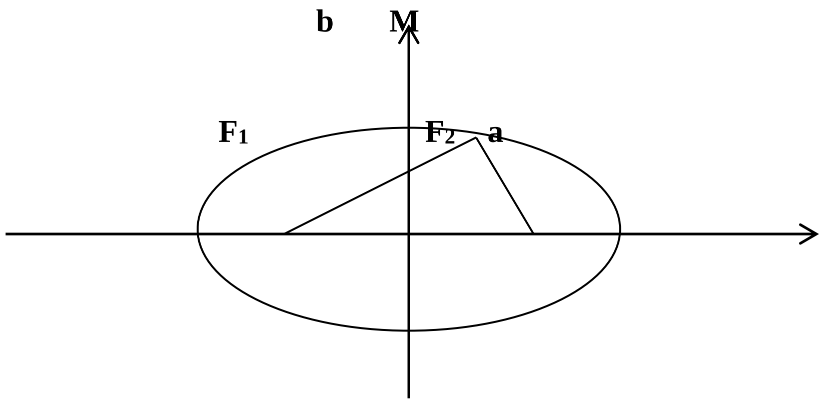
Множество точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная *2a*, называется *эллипсом.*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$ ***- каноническое уравнение эллипса,***

где a – большая полуось;

b – малая полуось.

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$ ***- нормальное уравнение эллипса.***



F_1, F_2 – фокусы. F_1 = (c; 0); F_2(-c; 0)

c – половина расстояния между фокусами;

Фокусное расстояние и полуоси эллипса связаны соотношением:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Форма эллипса определяется характеристикой, которая является отношением фокусного расстояния к большей оси и называется э**ксцентриситетом**:

$\varepsilon = \dfrac{c}{a}$. Т.к. $c < a$, то $\varepsilon < 1$.

Гипербола.

Множество точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний, которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная равная *2a*, называется ***гиперболой***.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$ ***- каноническое уравнение гиперболы,***

где a – действительная полуось;

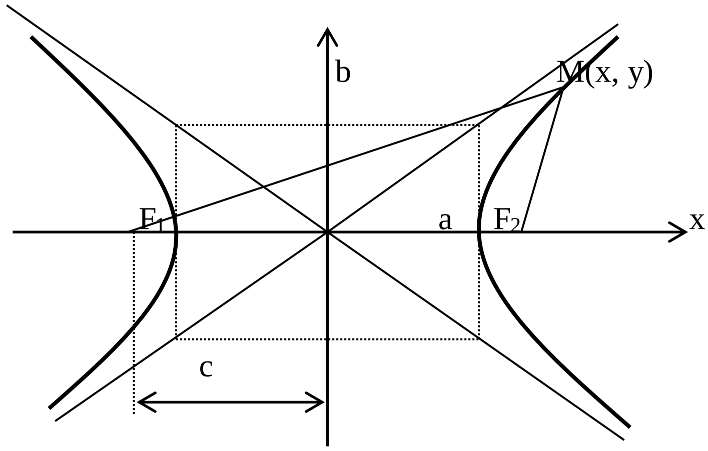
b - мнимая полуось.

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$ ***- нормальное уравнение гиперболы,***

$y = \pm \dfrac{b}{a} x$ ***- уравнение асимптот гиперболы.***

F_1, F_2 – фокусы гиперболы.

$F_1F_2 = 2c$. $c^2 = a^2 + b^2$

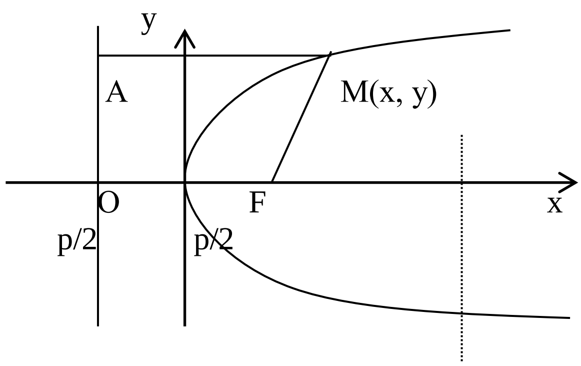


Отношение $\varepsilon = \dfrac{c}{a} > 1$ называется **эксцентриситетом** гиперболы, где с – половина расстояния между фокусами, а – действительная полуось.

Парабола.

Множество точек плоскости, равноудаленных от одной точки, называемой фокусом, и одной прямой, называемой директрисой, называется ***параболой***.

Расположим начало координат посередине между фокусом и директрисой.



$y^2 = 2px$ ***- каноническое уравнение параболы***

$(y-b)^2 = 2p(x-a)$ ***- уравнение параболы со смещенной вершиной (нормальное уравнение параболы)***

Величина р (расстояние от фокуса до директрисы) называется **параметром** параболы.

Уравнение директрисы: х = -р/2.

Фокус параболы $F(\frac{p}{2};0)$

Эксцентриситет параболы считается равным 1.

Задания для решения в аудитории

1. Составить уравнение окружности, если окружность проходит через A(2;6) и ее центр совпадает с точкой C(-1;2).
2. Найти точки пересечения окружности радиуса $R=2$ с центром в начале координат и прямой $x-2y+2=0$.
3. Составить уравнение касательной к окружности $x^2+y^2=5$ в точке $A(-1;2)$.
4. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что :

а) его большая ось равна 10, а расстояние между фокусами $2c=8$;

б) его большая ось равна 20, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$.

5. Дан эллипс $9x^2+25y^2=225$. Найти:
   1. его полуоси
   2. фокусы
   3. эксцентриситет
   4. уравнения директрис.

6. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, что:
   1) $2c=10,\ 2в=8$
   2) 2a = 16 , $\varepsilon = \frac{5}{4}$
   3) $y = \pm\frac{4}{3}x$ - уравнения асимптот, 2c = 20 .
   4) расстояние между директрисами равно $22\frac{2}{13}$ и $2c=26$
   5). Уравнения асимптот $y = \pm\frac{3}{4}x$ и расстояние между директрисами равно $12\frac{4}{5}$.

7. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что:

1) парабола расположена симметрично относительно оси $0x$ и проходит через точку $B(-1;3)$;

2) парабола расположена симметрично относительно оси $0y$ и проходит через точку $C(1;1)$.

8. Привести к каноническому виду. Определить вид кривой. Построить кривую.

1) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}y^2 - x + \frac{2}{3}y - 1 = 0$

2) $2x^2-4x+2y-3=0$

4.5.Уравнение линии и плоскости в пространстве.

Как на плоскости, так и в пространстве, любая линия может быть определена как совокупность точек, координаты которых в некоторой выбранной в пространстве системе координат удовлетворяют уравнению:

$$F(x, y, z) = 0.$$

Это уравнение называется уравнением линии в пространстве.

Кроме того, линия в пространстве может быть определена и иначе. Ее можно рассматривать как линию пересечения двух поверхностей, каждая из которых задана каким-либо уравнением.

Пусть F(x, y, z) = 0 и Ф(x, y, z) = 0 – уравнения поверхностей, пересекающихся по линии L.

Тогда пару уравнений

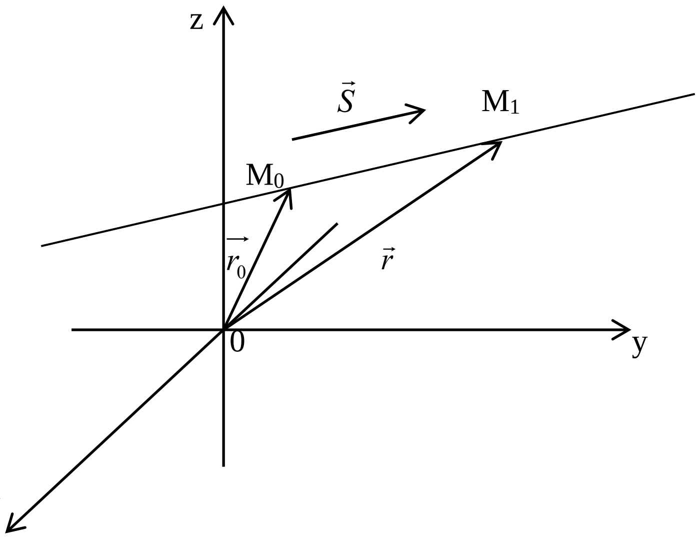
$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ \Phi(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

назовем **уравнением линии в пространстве**.

Уравнение прямой в пространстве по точке и направляющему вектору.

Возьмем произвольную прямую и вектор $\vec{S}$(m, n, p), параллельный данной прямой. Вектор $\vec{S}$ называется **направляющим вектором** прямой.

На прямой возьмем две произвольные точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и M(x, y, z).



Обозначим радиус- векторы этих точек как $\vec{r_0}$ и $\vec{r}$, очевидно, что $\vec{r} - \vec{r_0} = \overrightarrow{M_0M}$.

Т.к. векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{S}$ коллинеарны, то верно соотношение $\overrightarrow{M_0M} = \vec{S}$t, где t – некоторый параметр.

Итого, можно записать: $\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{S}$t.

Т.к. этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки прямой, то полученное уравнение – **параметрическое уравнение прямой**.

Это векторное уравнение может быть представлено в координатной форме:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

Преобразовав эту систему и приравняв значения параметра t, получаем канонические уравнения прямой в пространстве:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Определение. Направляющими косинусами прямой называются направляющие косинусы вектора $\vec{S}$, которые могут быть вычислены по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}; \quad \cos\beta = \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}; \quad \cos\gamma = \frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Отсюда получим: $m : n : p = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma$.

Числа m, n, p называются **угловыми коэффициентами** прямой. Т.к. $\vec{S}$ - ненулевой вектор, то m, n и p не могут равняться нулю одновременно, но одно или два из этих чисел могут равняться нулю. В этом случае в уравнении прямой следует приравнять нулю соответствующие числители.

Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки.

Если на прямой в пространстве отметить две произвольные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то координаты этих точек должны удовлетворять полученному выше уравнению прямой:

$$\frac{x_2-x_1}{m} = \frac{y_2-y_1}{n} = \frac{z_2-z_1}{p}.$$

Кроме того, для точки M_1 можно записать:

$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}.$$

Решая совместно эти уравнения, получим:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Это уравнение прямой, проходящей через две точки в пространстве.

Общие уравнения прямой в пространстве.

Уравнение прямой может быть рассмотрено как уравнение линии пересечения двух плоскостей.

Как было рассмотрено выше, плоскость в векторной форме может быть задана уравнением:

$\vec{N}\cdot\vec{r}$ + D = 0, где

$\vec{N}$ - нормаль плоскости; $\vec{r}$ - радиус- вектор произвольной точки плоскости.

Пусть в пространстве заданы две плоскости: $\overrightarrow{N_1}\cdot\vec{r} + D_1 = 0$ и $\overrightarrow{N_2}\cdot\vec{r} + D_2 = 0$, векторы нормали имеют координаты: $\overrightarrow{N_1}$ (A_1, B_1, C_1), $\overrightarrow{N_2}$ (A_2, B_2, C_2); $\vec{r}$ (x, y, z).

Тогда общие уравнения прямой в векторной форме:

$$\begin{cases} \overrightarrow{N_1}\cdot\vec{r} + D_1 = 0 \\ \overrightarrow{N_2}\cdot\vec{r} + D_2 = 0 \end{cases}$$

Общие уравнения прямой в координатной форме:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Практическая задача часто состоит в приведении уравнений прямых в общем виде к каноническому виду.

Для этого надо найти произвольную точку прямой и числа m, n, p.

При этом направляющий вектор прямой может быть найден как векторное произведение векторов нормали к заданным плоскостям.

$$\vec{S} = \overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \vec{i}m + \vec{j}n + \vec{k}p.$$

<u>Пример.</u> Найти каноническое уравнение, если прямая задана в виде:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ 5x + 4y - z - 7 = 0 \end{cases}$$

Для нахождения произвольной точки прямой, примем ее координату x = 0, а затем подставим это значение в заданную систему уравнений.

$$\begin{cases} y = 3z - 1 \\ 4y - z - 7 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3z - 1 \\ 12z - 4 - z - 7 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3z - 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$, т.е. A(0, 2, 1).

Находим компоненты направляющего вектора прямой.

$$m = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -11; \quad n = -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 17; \quad p = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 13.$$

Тогда канонические уравнения прямой:

$$-\frac{x}{11} = \frac{y-2}{17} = \frac{z-1}{13}.$$

<u>Пример.</u> Привести к каноническому виду уравнение прямой, заданное в виде:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 16z - 7 = 0 \\ 3x + y - 17z = 0 \end{cases}$$

Для нахождения произвольной точки прямой, являющейся линией пересечения указанных выше плоскостей, примем z = 0. Тогда:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 16z - 7 = 0 \\ 3x + y - 17z = 0 \end{cases}; \quad y = -3x;$$

2x – 9x – 7 = 0;

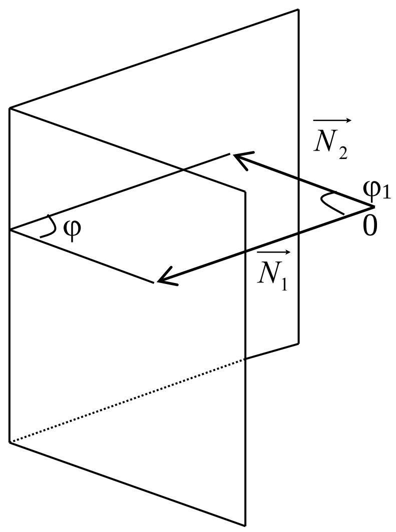
x = -1; y = 3;

Получаем: A(-1; 3; 0).

Направляющий вектор прямой: $\vec{S} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -16 \\ 3 & 1 & -17 \end{vmatrix} = -35\vec{i} - 14\vec{j} - 7\vec{k}$.

Итого: $\frac{x+1}{-35} = \frac{y-3}{-14} = \frac{z}{-7}; \qquad \frac{x+1}{5} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{1};$

Угол между плоскостями.



Угол между двумя плоскостями в пространстве φ связан с углом между нормалями к этим плоскостям φ_1 соотношением: $\varphi = \varphi_1$ или $\varphi = 180^0 - \varphi_1$, т.е.
$\cos\varphi = \pm\cos\varphi_1$.

Определим угол φ_1. Известно, что плоскости могут быть заданы соотношениями:

$$\begin{cases} \overrightarrow{N_1} \cdot \vec{r} + D_1 = 0 \\ \overrightarrow{N_2} \cdot \vec{r} + D_2 = 0 \end{cases}, \text{ где}$$

$\overrightarrow{N_1}$ (A_1, B_1, C_1), $\overrightarrow{N_2}$ (A_2, B_2, C_2). Угол между векторами нормали найдем из их скалярного произведения:

$$\cos\varphi_1 = \frac{\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N_2}}{\left|\overrightarrow{N_1}\right|\left|\overrightarrow{N_2}\right|}.$$

Таким образом, угол между плоскостями находится по формуле:

$$\cos\varphi = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Выбор знака косинуса зависит от того, какой угол между плоскостями следует найти – острый, или смежный с ним тупой.

Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

На основе полученной выше формулы для нахождения угла между плоскостями можно найти условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

Для того, чтобы плоскости были перпендикулярны необходимо и достаточно, чтобы косинус угла между плоскостями равнялся нулю. Это условие выполняется, если:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Плоскости параллельны, векторы нормалей коллинеарны: $\overrightarrow{N_1} \mid\mid \overrightarrow{N_2}$.Это условие выполняется, если: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

Угол между прямыми в пространстве.

Пусть в пространстве заданы две прямые. Их параметрические уравнения:

$$l_1: \quad \vec{r} = \overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{S_1}t$$

$$l_2: \quad \vec{r} = \overrightarrow{r_2} + \overrightarrow{S_2}t$$

$\vec{r} = (x, y, z); \quad \overrightarrow{r_1} = (x_1, y_1, z_1); \quad \overrightarrow{r_2} = (x_2, y_2, z_2); \quad \overrightarrow{S_1} = (m_1, n_1, p_1); \quad \overrightarrow{S_2} = (m_2, n_2, p_2).$

Угол между прямыми φ и угол между направляющими векторами φ этих прямых связаны соотношением: $\varphi = \varphi_1$ или $\varphi = 180^0 - \varphi_1$. Угол между направляющими векторами находится из скалярного произведения. Таким образом:

$$\cos\varphi = \pm \frac{\overrightarrow{S_1} \cdot \overrightarrow{S_2}}{\left|\overrightarrow{S_1}\right|\left|\overrightarrow{S_2}\right|} = \pm \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} .$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве.

Чтобы две прямые были параллельны необходимо и достаточно, чтобы направляющие векторы этих прямых были коллинеарны, т.е. их соответствующие координаты были пропорциональны.

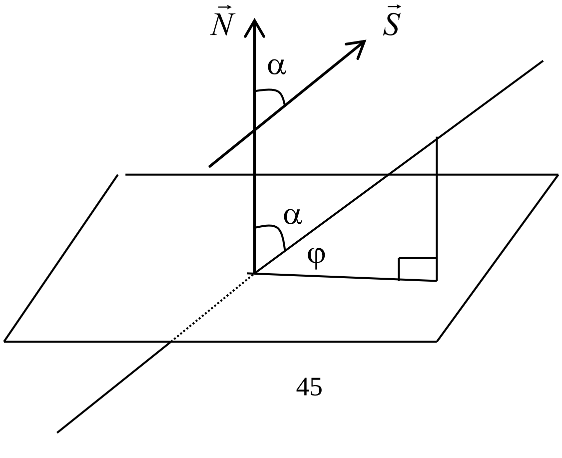
$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

Чтобы две прямые были перпендикулярны необходимо и достаточно, чтобы направляющие векторы этих прямых были перпендикулярны, т.е. косинус угла между ними равен нулю.

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$

Угол между прямой и плоскостью.

<u>Определение.</u> Углом между прямой и плоскостью называется любой угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.



Пусть плоскость задана уравнением $\vec{N}\cdot\vec{r}+D=0$, а прямая - $\vec{r}=\overrightarrow{r_0}+\vec{S}t$. Из геометрических соображений (см. рис.) видно, что искомый угол α = 90^0 - φ, где α - угол между векторами $\vec{N}$ и $\vec{S}$. Этот угол может быть найден по формуле:

$$\cos\alpha=\frac{\vec{N}\cdot\vec{S}}{\left|\vec{N}\right|\left|\vec{S}\right|}$$

$$\sin\varphi=\pm\cos\alpha=\pm\frac{\vec{N}\cdot\vec{S}}{\left|\vec{N}\right|\left|\vec{S}\right|}$$

В координатной форме: $\sin\varphi=\pm\dfrac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$

Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости в пространстве.

Для того, чтобы прямая и плоскость были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы вектор нормали к плоскости и направляющий вектор прямой были перпендикулярны. Для этого необходимо, чтобы их скалярное произведение было равно нулю.

$$\vec{N}\perp\vec{S},\quad \vec{N}\cdot\vec{S}=0,\quad \sin\varphi=0,\qquad Am+Bn+Cp=0.$$

Для того, чтобы прямая и плоскость были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы вектор нормали к плоскости и направляющий вектор прямой были коллинеарны. Это условие выполняется, если векторное произведение этих векторов было равно нулю.

$$\vec{N}\times\vec{S}=0;\qquad \frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$$