O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI

OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI
“MATEMATIKA” KAFEDRASI

“IQTISODCHILAR UCHUN MATEMATIKA”

FANI BO‘YICHA
O‘QUV-USLUBIY MAJMUA

R.A.Sharipov – UrDU Fizika-matematika fakulteti “Matematika” kafedrasi katta o‘qituvchisi

X.Kamolov – UrDU Fizika-matematika fakulteti “Matematika” kafedrasi o‘qituvchisi

Urganch - 2016

O‘QUV-USLUBIY MAJMUANING TARKIBIY TUZILISHI

Majmuaning qisqacha annotatsiyasi

Majmuaning asosiy maqsadi – avvalambor fan oʻqituvchisi, xuddi shuningdek talaba uchun, fanni har tomonlama sermazmun, chuqur nazariy, uslubiy va amaliy tarzda yetkazish(talaba uchun – oʻzlashtirish) uchun yagona oʻquv – uslubiy va axborot – resurs manbaini yaratish hisoblanadi.

Oʻquv-uslubiy majmua iqtisodiyot bakalavriat ta’lim yoʻnalishlari uchun moʻljallangan boʻlib, u jumladan quyidagi tarkibiy tuzilishga ega:

- ***fanning me’yoriy-uslubiy ta’minoti,***
- ***fanning mazmuni va axborot-resurs ta’minoti,***
- ***fanni oʻqitishning interaktiv texnologiyalari,***
- ***talabalarning bilimini baholash uslubiyoti,***
- ***qoʻshimcha electron ta’lim resurslarini*** oʻz ichiga oladi.

Ilgʻor xorijiy tajriba bilan hamkorlik.

Mazkur majmua ilgor xorijiy tajribani keng oʻrganish, umumlashtirish va undan ta’lim va tadqiqotlar jarayonida samarali foydalanish mahsulidir.

Oʻzbekiston Respublikasi Prezidentining 2016 yil 26 may qarorida oily oʻquv yurti “jahonning rivojlangan mamlakatlaridagi yetakchi universitetlarva oily oʻquv yurtlari bilan qalin hamkorlik doirasida keng koʻlamda ishtirok etgan holda 2016/2017 oʻquv yili boshlangunga qadar barcha oʻquv rejalari va dasturlari tubdan qayta ishlab chiqilishini nihoyasiga yetkazishni ta’minlasin, fanlarni oʻqitishning eskirgan, umri oʻtab boʻlgan yondashuv va usullaridan batamom voz kechishni, bakalavriat va magistraturada jahon fani va ilgʻor pedagogik texnologiyalarning zamonaviy yutuqlariga asoslangan yangi oʻquv rejalari va dasturlarini joriy etishni sifatini oshirish uchun … yetakchi xorijiy olimlar va oʻqituvchilarni jalb etishni nazarda tutsin”[1] deb alohida ta’kidlangan.

Ushbu qarorda belgilangan vazifalarni amalga oshirish maqsadida ta’lim va tadqiqotlarning mazkur axborot – resurs manbaini ishlab chiqishda Bremen Universiteti (Germaniya), Mannheim Universiteti (Germaniya), Bonn Universiteti (Germaniya), Xalqaro Westminster Universiteti (Buyuk Britaniya), London Iqtisodiyot va Huquq fanlari maktabi (Buyuk Britaniya), Chicago Universiteti (AQSh), Waseda Universiteti (Yaponiya), SolBridge Business maktabi(Janubiy koreya), Zurich (Shvesariya) va boshqa yetakchi xorijiy universitetlar boy ijobiy tajribasidan samarali foydalanildi.

“**Iqtisodchilar uchun matematika”** fanining vazifalari:

– talabalarni matematikaning zaruriy ma’lumotlari bilan tanishtirish hamda talabalarda matematik modellar yordamida iqtisodiy masalalarni tahlil qilishga va istiqbollashni amalga oshirish yoʻllarini,

[1] Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2016 йил 26 майдаги “2016/2017 ўқув йилида Ўзбекистон Республикаси олий таълим муассасаларида ўқишга қабул қилиш тўғрисида”ги қарори. “Халқ сўзи” газетаси, 2016 йил 27 май, №103 (6538). Б. 1

- iste’molchilar va ishlab chiqaruvchilar bozorida vujudga kelishi mumkin bo‘lgan vaziyatlarni mantiqiy va iqtisodiy matematik modellar orqali tahlil qilish va istiqbollashni amalga oshirishga,

- masalalarning optimal yechimlarni topishga va qarorlar qabul qilishga,

– talabalarni mantiqiy fikirlashga, nazariy bilimlarni amaliyotga bevosita tatbiq etishga, to‘g‘ri xulosa chiqarish va qaror qabul qilishga o‘rgatishdan iboratdir.

“Iqtisodchilar uchun matematika” fani fundamental fan bo‘lib, deyarli barcha fanlar bilan bog‘liq, boshqa iqtisodiy fanlarni chuqur o‘rganishda asos bo‘lib xizmzt qiladi.

FAN DASTURI

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ

ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

Рўйҳатга олинди
№_____________
201__ йил «__»____

Ўзбекистон Республикаси
Олий ва ўрта махсус таълим
вазирининг
201__ йил «__» _____даги
«__» - сонли буйруғи билан
тасдиқланган

ИҚТИСОДЧИЛАР УЧУН МАТЕМАТИКА
фанининг
ЎҚУВ ДАСТУРИ

Билим соҳаси : 200000 **-** Ижтимоий соҳа, иқтисод ва ҳуқуқ
Таълим сохаси: 230000 – Иқтисод
Таълим йўналиши: Барча иқтисодий йўналишлар учун

Тошкент – 201__

Фаннинг ўқув дастури Олий ва ўрта махсус, касб – ҳунар таълими ўқув-услубий бирлашмалари фаолиятини Мувофиқлаштирувчи Кенгашнинг 201__ йил «___»_______даги «____»– сон мажлис баёни билан маъқулланган.

Фаннинг ўқув дастури Тошкент Давлат Иқтисодиёт Университетида ишлаб чиқилди.

Тузувчилар:

Шарахметов Ш - Тошкент Давлат Иқтисодиёт университети “Олий математика” кафедраси профессори, физика-математика фанлари доктори.

Курбанов О.Т - Тошкент Давлат Иқтисодиёт университети “Олий математика” кафедраси доценти, физика-математика фанлари номзоди.

Жабборов Н. – ЎзМУ университети “Математик анализ” кафедраси мудтри, доценти, физика-математика фанлари номзоди.

Тақризчилар:

Асрақулова Д.С – Тошкент Давлат Иқтисодиёт “Олий математика” кафедраси доценти, физика-математика фанлари номзоди.

Алиқулов Т.Н – ЎзМУ университети “Дифференциал тенгламалар ва математик физика” кафедраси доценти, физика-математика фанлари номзоди.

Фаннинг ўқув дастури Тошкент Давлат Иқтисодиёт Университети Илмий – методик кенгашида тавсия қилинган. (201__ йил “___”_______даги “____”– сонли баённома).

Кириш

Иқтисодий йўналишлар учун “Иқтисодчилар учун математика” фани математиканинг аналитик геометрия, олий ва чизиқли алгебра, математик анализ, дифференциал тенгламалар бўлимларини ўз ичига олади. “Иқтисодчилар учун математика” фани деярли барча фанлар билан боғлиқ, кўп фанлар учун асос бўлганлиги учун улардан олдин, асосан 1курсда ўтилади.

Ўқув фанининг мақсади ва вазифалари

“Иқтисодчилар учун математика” фанининг асосий мақсади – талабаларни математиканинг зарурий маълумотлари билан таништириш ҳамда талабаларда математик моделлар ёрдамида иқтисодий масалаларни таҳлил қилишга ва истиқболлашни амалга ошириш йўлларини, истеъмолчилар ва ишлаб чиқарувчилар бозорида вужудга келиши мумкин бўлган вазиятларни мантиқий ва иқтисодий математик моделлар орқали таҳлил қилиш ва истиқболлашни амалга оширишга, масалаларнинг оптимал ечимларни топишга ва қарорлар қабул қилишга ўргатишдан иборатдир.

“Иқтисодчилар учун математика” фанининг асосий вазифалари – талабаларни мантиқий фикрлашга, назарий билимларни амалиётга бевосита татбиқ этишга, тўғри хулоса чиқариш ва қарор қабул қилишга ўргатишдан иборатдир.

Фан бўйича талабаларнинг билим, малака ва кўникмага қўйиладиган талаблар

“Иқтисодчилар учун математика” фани бўйича билим, малака ва кўникмага қўйиладиган талаблар:

Талабалар

- математик усуллар оламни идрок этишда асосий усуллардан бири эканлиги;

-математика тушунчаларининг умумийлиги ҳакида;

-математик моделлаштириш ҳақида ***тасаввурга эга бўлиши;***

- чизиқли алгебра, матрицавий анализ, аналитик геометрия, математик анализга кириш, бир ва кўп ўзгарувчили функциялар дифференциал ҳисоби, бир ва кўп ўзгарувчили функциялар дифференциал ҳисоби, қаторлар назарияси ва дифференциал тенгламалар назариясининг асосий тушунчаларини;

-математик белгилар ва иқтисоддаги оддий тизимлар ёрдамида жараёнларнинг математик моделлаштиришни;

-муайян жараён учун моделлар қуриш, қурилган модел доирасида хисоблар олиб бориш;

-функционал ва хисоблаш топшириғини ечишни ***билиши ва улардан фойдалана олиши;***

-объектлар микдорий ва сифат муносабатларини ифодалаш учун математик символлардан фойдаланиш;

- кузатув натижалари асосида моделлар қура олиш;

- олинган натижаларнинг фойдаланиш чегарасини ва улар иерархик тузилишини хисобга олиб моделларни ўрганиш;

-алгебрик тенгламаларни аналитик ва рақамли ечиш;

-тенгламалар системаларини аналитик ва рақамли ечиш;

-иккинчи тартибли чизиқ ва сиртлар тенгламаларини содда шаклга келтириш ва параметрларидан фойдаланиш;

-бир ва кўп ўзгарувчили функциялар учун дифференциаллаш, интеграллаш;

- оддий дифференциал тенгламаларни аналитик ва рақамли ечишни тадқиқ этиш;

- иқтисодий жараёнларнинг математик моделлари учун тўла тенгламалар системаси мавжуд бўлган ҳолларни билишлари ва уларга мисол тариқасида қаралган масалаларни математик ечиш усулларини ўзлаштирган бўлишлари ҳамда мазкур ечимлардан фойдаланиш **кўникмаларига эга бўлиши керак**.

Фаннинг ўқув режадаги бошқа фанлар билан ўзаро боғлиқлиги ва услубий жиҳатдан узвий кетма-кетлиги

“Иқтисодчилар учун математика” фани деярли барча фанлар билан боғлиқ, кўп фанлар учун асос бўлганлиги учун улардан олдин ўрганилади.

“Иқтисодчилар учун математика” фани «Иқтисодий математика», «Статистика», «Эканометрика асослари», «Молиявий математика», «Макроиқтисодёт», «Микроиқтисодёт», «Ахборот – комуникацион тизимлар ва технологиялар», «Тавккалчиликни бошқариш» фанлари билан узвий боғланишга эга.

“Иқтисодчилар учун математика” фани чизиқли алгебра, матрицавий анализ, аналитик геометрия, математик анализга кириш, бир ва кўп ўзгарувчили функциялар дифференциал ҳисоби, бир ва кўп ўзгарувчили функциялар дифференциал ҳисоби, қаторлар назарияси ва дифференциал тенгламалар назарияси бўлимларини ўз ичига олади.

Фаннинг ишлаб чиқаришдаги ўрни

“Иқтисодчилар учун математика” фани иқтисодиётнинг кўплаб соҳаларни ўрганишда муҳим аҳамиятга эга. Дастурнинг ҳар бир бўлим доирасида иқтисодий жараёнларнинг моделлари ўрганилади. Бу мазкур фанни чуқур ўрганган ҳар бир талаба олган билим ва кўникмаларини амалий иш фаолиятида, илмий-тадқиқот ишларида, шунингдек, таьлим тизимида самарали фойдаланиш имконини беради.

Фанни ўқитишда замонавий ахборот ва педагогик технологиялар

Талабаларга “Иқтисодчилар учун математика” фанидан баъзи мавзулар бўйича дарслар электрон воситалар ёрдамида ташкил қилинади. Талабаларнинг “Иқтисодчилар учун математика” фанини ўзлаштиришлари учун ўқитишнинг илғор ва замонавий усулларидан фойдаланиш, янги информацион-педагогик технологияларни тадбиқ этиш муҳим аҳамиятга эга. Фанни ўзлаштиришда дарслик, ўқув ва услубий қўлланмалар, маъруза матнлари, тарқатма материаллардан, шунингдек ўқитиш жараёнида дастур ва мавжуд электрон дарсликлар, веб-сайтлардан фойдаланилади. Маъруза, амалий ва лаборатория дарсларида мос равишда илғор педагогик технологиялардан фойдаланилади. Ўқув жараёнида ўқитишнинг интерфаол усуллари, муаммоли ўқитиш технологияси, танқидий фикрлаш ривожланишининг педагогик стратегиялари, шахсий йўналганлик асосидаги педагогик технологиялар, ўқитишни дифференциаллаш, ўқитишнинг индивидуаллаштириш технологияси, ўқитишнинг комплекс усуллари (ақлий ҳужум, тармоқли ривожлантириш усули ва б.) каби педагогик технологиялар ва ўқитиш усулларидан фойдаланилади.

Асосий қисм (маърузалар)

Чизиқли алгебра. Детерминантлар. Матрицалар ва улар устида амаллар. Тескари матрица. Чизиқли тенгламалар системани матрицавий усул,Крамер қоидаси ва Гаусс усулида ечиш. Комплекс сонлар. Кўп тармоқли иқтисод учун баланс модели.

Матрицавий анализ. Чизиқли фазо ва унинг элементлари. Чизиқли алмаштириш матрицаси. Чизиқли операторлар. Евклид фазоси . Квадратик формалар. Алмаштиришнинг чизиқли модели.

Аналитик геометрия. Тўғри чизиқ тенгламалари. Иккинчи тартибли чизиқлар. Иккинчи тартибли чизиқнинг умумий тенгламасини каноник кўринишга келтириш.Векторларнинг скаляр, вектор ва аралаш кўпайтмалари. Фазода текислик ва тўғри чизиқ тенгламалари.

Математик анализга кириш. Кетма-кетлик ва функция лимити. Функция узлуксизлиги ва узилиш турлари.

Бир ва кўп ўзгарувчили функцияларнинг дифференциал ҳисоби. Функция ҳосиласи. Ҳосила ҳисоблаш қоидалари. Юқори тартибли ҳосилалар. Дифференциал. Дифференциал хисобнинг асосий теоремалари. Тейлор ва Маклорен формулалари. Лопитал қоидаси. Функцияни текширишда дифференциал ҳисобнинг тадбиқлари. Хусусий хосилалар ва тўла дифференциал. Кўп ўзгарувчили функция экстремумлари. Дифференциал ҳисобнинг иқтисодиётдаги тадбиқлари.

Бир ва кўп ўзгарувчили функцияларнинг интеграл ҳисоби. Аниқмас интеграл. Аниқмас интеграл жадвали. Бўлаклаб интеграллаш. Интеграллаш усуллари. Эгри чизиқли трапеция юзи. Аниқ интеграл. Ньютон-Лейбниц формуласи. Хосмас интеграллар. Икки ва уч каррали интеграллар. Интеграл ҳисобнинг иқтисодиётдаги тадбиқлари.

Қаторлар назарияси. Сонли қаторларнинг яқинлашиш аломатлари. Лейбниц қатори. Шартли ва абсолют яқинлашиш. Функционал қаторлар. Даражали қаторлар. Абель теоремаси. Даражали қаторларнинг яқинлашиш радиуси ва соҳаси.

Дифференциал тенгламалар назарияси. Биринчи тартибли ўзгарувчилари ажраладиган, бир жинсли, чизиқли ва уларга келтириладиган оддий

дифференциал тенгламалар. Тўла дифференциал тенгламалар. Тартиби пасаядиган юқори тартибли дифференциал тенгламалар. Ўзгармас коэффициентли, чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламалар. Ўзгармас коэффициентли, чизиқли, бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламалар. Ўзгармас коэффициентли чизиқли дифференциал тенгламалар системалари.
Дифференциал тенгламалар назариясининг иқтисодиётдаги тадбиқлари.

Амалий машғулотларини ташкил этиш бўйича кўрсатма ва тавсиялар

Амалий машғулотлардан мақсад маъруза машғулотларида олинган назарий билимларни амалий масалаларни ечишда қўллаш орқали билим ҳамда кўникмаларини чуқурлаштириш ва кенгайтиришдир. Бунда бакалаврлар амалий машғулотларда мисол ва масалаларни ечишда, ечимларни таҳлил қилишда олган назарий билимларини қўллай олишлари назарда тутилади.

Амалий машғулотлар учун тавсия этилаётган тахминий мавзулар рўйхати

1. Детерминантлар ва уларнинг хоссалари. Юқори тартибли детерминантларни ҳисоблаш.
2. Матрицалар, матрицалар устида амаллар.
3. Тескари матрица. Матрицанинг ранги тушунчаси
4. Чизиқли системани матрицавий усулда ечиш.
5. Чизиқли тенгламалар системасини ечишнинг Крамер қоидаси ва Гаусс усули.
6. Кронекер-Копелли теоремаси.
7. Комплекс сонлар ва уларнинг формалари. Муавр формулалари.
8. Кўп тармоқли иқтисод учун баланс модели.
9. Чизиқли фазо тушунчаси.Чизиқли боғлиқлик, ўлчам ва базис тушунчалари. Чизиқли алмаштириш матрицаси.
10. Чизиқли операторлар. Хос сон ва хос илдиз.Характеристик кўпҳад.
11. Евклид фазолари .
12. Квадратик формалар.
13. Алмаштиришнинг чизиқли модели.
14. Тўғри чизиқнинг турли хил тенгламалари ва уларга доир асосий масалалар:икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак, нуқтадан тўғри чизиққача масофа
15. Иккинчи тартибли чизиқлар: айлана, эллипс, гипербола, парабола ва уларнинг каноник тенгламалари.
16. Иккинчи тартибли чизиқнинг умумий тенгламасини каноник кўринишга келтиришда текисликдаги ҳаракатлар: координаталар системасини буриш ва параллел кўчириш формулаларидан фойдаланиш.
17. Фазода декарт координаталар системаси.
18. Векторларнинг скаляр, вектор ва аралаш кўпайтмалари, уларнинг геометрик маънолари.
19. Фазода текислик тенгламалари ва уларга доир асосий масалалар.
20. Фазода тўғри чизиқ тенгламалари ва уларга доир асосий масалалар.

Фазода текислик ва тўғри чизиққа доир асосий масалалар.

21. Тўпламлар ва улар устида амаллар. Функциялар, уларнинг аниқланиш ва ўзгариш соҳалари,асосий хоссалари.
22. Кетма-кетлик ва функция лимити.
23. Функция узлуксизлиги ва узилиш турлари.
24. Функция асимптоталари.
25. Функция ҳосиласи. Ҳосиланинг геометрик,иқтисодий ва физик маънолари. Ҳосила ҳисоблаш қоидалари. Ҳосилалар жадвали.
26. Юқори тартибли ҳосила. Дифференциал. Дифференциаллаш жадвали ва ҳисоблаш қоидалари. Юқори тартибли дифференциаллар.
27. Дифференциал ҳисобнинг асосий теоремалари: Ферма, Ролль, Лагранж, Коши теоремалари.
28. Тейлор ва Маклорен формулалари. Лопитал қоидалари.
29. Функцияларни текшириш: ўсиш ва камайиш, экстремумлар, ботиқлик ва қавариқлик, Экстремум топиш қоидалари.
30. Функцияни тўлиқ текшириш схемаси.
31. Кўп ўзгарувчили функциялар, аниқланиш ва ўзгариш соҳалари. Каррали ва такрорий лимитлар. Хусусий ҳосилалар ва тўла дифференциал. Мураккаб функциянинг ҳосиласи.
32. Икки ўзгарувчили функция учун Тейлор ва Маклорен формулалари.
33. Икки ўзгарувчили функция экстремумлари. Шартли экстремум.
34. Дифференциал ҳисобнинг иқтисодиётдаги тадбиқлари.
35. Аниқмас интеграл. Аниқмас интеграл жадвали. Ўзгарувчиларни алмаштириш ва бевосита интеграллаш.
36. Кўп учрайдиган интеграллар. Бўлаклаб интеграллаш. Рационал касрларни интеграллаш.
37. Алгебраик иррационалликларни интеграллаш.
38. Тригонометрик функциялар қатнашган ифодаларни интеграллаш.
39. Аниқ интеграл интеграл йиғинди лимити сифатида. Аниқ интеграл хоссалари.
40. Ньютон-Лейбниц формуласи.
41. Аниқ интегралда интеграллаш усуллари.
42. Хосмас интеграллар.
43. Икки ва уч каррали интеграллар.
44. Интеграл ҳисобнинг иқтисодиётдаги тадбиқлари.
45. Қаторлар. Сонли қаторлар яқинлашишининг таққослаш, Даламбер, Коши ва Кошининг интеграл аломатлари.
46. Лейбниц қатори. Шартли ва абсолют яқинлашиш.
47. Даражали қаторлар. Абель теоремаси. Даражали қаторларнинг яқинлашиш радиуси ва соҳаси. Ҳадма-ҳад дифференциаллаш ва интеграллаш.
48. Биринчи тартибли ўзгарувчилари ажраладиган ва унга келтириладиган дифференциал тенгламалар.
49. Бир жинсли ва унга келтириладиган дифференциал тенгламалар.

50. Чизиқли ва унга келтириладиган дифференциал тенгламалар.
51. Тўла дифференциал тенгламалар. Интегралловчи кўпайтувчи
52. Тартиби пасаядиган юқори тартибли дифференциал тенгламалар.
53. Ўзгармас коэффициентли, чизиқли, бир жинсли дифференциал тенгламалар.
54. Ўзгармас коэффициентли, чизиқли, бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламалар.
55. Дифференциал тенгламалар системалари.
56. Дифференциал тенгламалар назариясининг иқтисодиётдаги тадбиқлари.

Изоҳ: Ишчи дастурни шакллантириш жараёнида мазкур машғулот турига ишчи ўқув режада ажратилган соат ҳажмига мос мавзулар танлаб ўқитиш тавсия этилади.

Мустақил ишларни ташкил этиш шакли ва мазмуни

"Иқтисодчилар учун математика" фанини ўрганувчи талабалар аудиторияда олган назарий билимларини мустаҳкамлаш ва амалий масалаларни ечишда кўникма ҳосил қилиш учун мустақил таълим тизимига асосланиб, ўқитувчилари раҳбарлигида мустақил иш бажарадилар. Бунда улар қўшимча адабиётларни ўрганиб, ҳамда интернет сайтларидан фойдаланиб, амалий машғулот мавзусига доир уй вазифаларини бажарадилар ва слайдлар тайёрлайдилар. Мустақил ишнинг мақсади олинган назарий билимларни мустаҳкамлаш, белгиланган мавзулар асосида қўшимча билим олишдан иборат. Бунда:

-амалий машғулотларга тайёргарлик;
-назарий машғулотларга тайергарлик кўриш;
-уй вазифаларини бажариш;
- ўтилган материаллар мавзуларини қайтариш;
- мустақил иш учун мўлжалланган назарий билим мавзуларини ўзлаштириш назарда тутилган.

Бунда талабалар маърузаларда олган билимларини амалий машғулотларни бажаришлари билан мустаҳкамлаши ҳамда баъзи мавзуларини мустақил ўрганиши ҳамда уларга оид масалаларни ечишлари керак.

Мустақил иш мавзулари.

1. Чизиқли алгебра элементлари.
2. Матрицавий анализ элементлари.
3. Текисликда аналитик геометрия ва
4. Тўпламлар ва функциялар. Лимит.
5. Кўп ўзгарувчили функциялар.
6. Функция ҳосиласи ва дифференциали. Функцияни тўлиқ текшириш.
7. Аниқмас интеграл. Аниқ интеграл.
8. Қаторлар.
9. Биринчи тартибли ва юқори тартибли дифференциал тенгламалар.

Изоҳ: Мустақил таълим соатлари ҳажмларидан келиб чиққан ҳолда ишчи дастурда мазкур мавзулар ичидан мустақил таълим мавзулари шакллантирилади.

Тавсия этилган адабиётлар рўйҳати

Асосий адабиётлар

1. Sharaxmetov Sh., Naimjonov. B., Iqtisodchilar uchun matematika. “Fan va texhologiya”, - T.: 2007. - 302 b.
2. Жураев Т.Ж., Худойберганов Р.Х., Ворисов А.К., Мансуров Х. Олий математика асослари. 1 ва 2 қисм . -Т. Ўзбекистан, 1995, 1999.- 290 бет.
3. Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов . –М.: ЮНИТИ, 1997, -497 с.
4. Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y. -535 p.
5. Knut Sydsæter and Peter Hammond, EssentialMathematics for Economic Analysis. London EC1N 8TS. Pearson Education Limited. 2012, -745 p.

Қўшимча адабиётлар

1. Sharaxmetov Sh., Asraqulova D.C, Qurbonov J.J., Iqtisodchilar uchun oliy matematikadan masalalar to‘plami, “Iqtisodiyot” -T.: TDIU. 2012 y.- 246 b.
2. Данко П.Е. ва бошқалар. “Олий математика мисол ва масалаларда”. -Т.: 2007, -416 бет.
3. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. – М.: 2004, -368 с.
4. Michael Hoy, John Livernois, Chris McKenna, Ray Rees, Thanasis Stengos, Mathematics for Economics, England, USA, The MIT Press, 2001 y.-1129p.
5. Vassilis C. Mavron and Timothy N. Phillips. Elements of Mathematics for Economics and Finance. –UK.; Springer-Verlag London Limited, 2007, -321 p.
6. Laurence D.Hoffmann and Michael Orkin. Finite mathematics with calculus. –USA.; McGraw-Hill , 1995, -1127 p.

Электрон манбалар

1. http//www.el.tfi.us/pdf/enmcoq22.uzk.pdf/
2. http:// www.a-geometry.narod.ru
3. http://allmath.ru/highermath/mathanalis/
4. http://www.eknigu.com/lib/mathematics/;
5. http://www.mcce.ru, http://lib.mexmat.ru
6. http://www.msu.ru/ - Московский государственный университет;
7. http://www.nlr.ru/ - Российская национальная библиотека;
8. http://www.nsu.ru/icem/grants/etfm/ ;
9. http://www.rsl.ru/ - Российская государственная библиотека;
10. www.lib.homelinux.orgfmath.

ISHCHI FAN DASTURI

O`ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O`RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI

Ro‘yxatga olindi:

№ ____________________

2016 yil “___” ________

«TASDIQLAYMAN»
Urganch davlat universiteti
o‘quv ishlari bo‘yicha prorektori:
____________dots. S.Xo‘janiyazov
“___” ___________2016 yil

«IQTISODCHILAR UCHUN MATYEMATIKA»
fanining
ISHCHI O‘QUV DASTURI

Bilim sohasi:	200000	–	Ijtimoiy soha, iqtisod va huquq
Ta’lim sohasi:	230000	–	Iqtisod
Ta’lim yo‘nalishi:	5230100	–	Iqtisodiyot

Urganch - 2016 yil

Ishchi fan dasturi o‘quv, ishchi o‘quv reja va o‘quv dasturiga muvofiq ishlab chiqildi.

Tuzuvchilar: **R.A.Sharipov** - UrDU, “Matematika” kafedrasi katta o‘qituvchisi
X.Kamolov – UrDU “Matematika” kafedrasi o‘qituvchisi

Taqrizchi: **A.A.Atamuratov** - UrDU, “Matematika” kafedrasi dotsenti

Ishchi o‘quv dastur «Matematika» kafedrasida ____________ 2016 yilda muhokama qilindi (bayonnoma №1)

Kafedra mudiri: dots. M.D. Vaisova

Ishchi o‘quv dastur fizika-matematika fakulteti kengashida ___________ 2016 yilda tasdiqqa tavsiya qilindi

Fakultet dekani: dots. J.U. Xujamov

Kirish

Hozirda mamlakatimizda kechayotgan iqtisodiy islohatlar samarasi, iqtisodni erkinlashtirish va rivojlantirishdan iboratdir. Bu esa oʻz navbatida, iqtisodiyotni rivojlantirish uchun zarur matematik modellarga asoslangan optimal boshqarish usullarini talab etiladi.

Ilm-fanning eng soʻnggi yangiliklarini oʻzlashtirish, ishlab chiqarishga yangi texnologiyalarni tadbiq etish, aholini yangi ish joylari bilan ta’minlash hozirgi davrning asosiy masalalaridandir.

“Iqtisodchilar uchun matematika” fanining muhim jihati uning amaliyot zarurati tufayli yuzaga kelganligidir va barcha iqtisodiy tal’im fanlari uchun asos vazifasini oʻtashidir. Bozor iqtisodiyoti sharoitida iqtisodiyotni boshqarishda tejamkorlik asosiy masalalardan biri boʻlib,uning negizida iqtisodiy jarayonlarni matematik modellar yordamida optimal boshqarish yotadi. “Iqtisodchilar uchun matematika” fani talabalarda matematik modellarni qoʻllash va iqtisodiy holatlarni chuqur tahlil qilish sohasidagi bilimlarini toʻldiradi. Shuning uchun iqtisodiy muammolarni hal qilishda mazkur fanning optimal usullaridan foydalanish hozirgi zamon talabidir.

Iqtisodiy yoʻnalishlar uchun “Iqtisodchilar uchun matematika” fani matematikaning analitik geometriya, oliy va chiziqli algebra, matematik analiz, differentsial tenglamalar boʻlimlarini oʻz ichiga oladi. “Iqtisodchilar uchun matematika” fani deyarli barcha fanlar bilan bogʻliq, koʻp fanlar uchun asos boʻlganligi uchun ulardan oldin, asosan 1kursda oʻtiladi.

Faning maqsad va vazifalari

“Iqtisodchilar uchun matematika” fanini oʻqitishning asosiy maqsadi:

- talabalarni mantiqiy, algoritmik, abstrakt fikrlashga;
- matematik taffakurini shakllantirish va rivojlantirishga;
- fikr mulohazalar va xulosalarni asosli va aniq tarzda bayon eta olishga oʻrgatishdan iboratdir.

“Iqtisodchilar uchun matematika” fanini oʻqitishning asosiy vazifalar:

- talabalarda iqtisodning nazariy va amaliy masalalarini yechishga yetarli matematik apparatni egallashiga;
- iqtisodiy masalalarning matematik modelini tuzish va tahlil qila olishga oʻrgatishdan iboratdir.

Fan boʻyicha talabalarning bilimiga, koʻnikmasiga va malakasiga qoʻyiladigan talablar

“Iqtisodchilar uchun matematika” fani boʻyicha bilim, malaka va koʻnikmaga qoʻyiladigan talablar:

Talaba:

– matematik usullar olamni idrok etishda asosiy usullardan biri ekanligi hakida;
– matematika tushunchalarining umumiyligi hakida;
– matematik modellashtirish hakida ***tasavvurga ega boʻlishi;***
– chiziqli algebra, matritsaviy analiz, analitik geometriya, matematik analizga kirish, bir va koʻp oʻzgaruvchili funktsiyalar differentsial hisobi, bir va koʻp

o‘zgaruvchili funktsiyalar differentsial hisobi, qatorlar nazariyasi va differentsial tenglamalar nazariyasining asosiy tushunchalarini;

– matematik belgilar va iqtisoddagi oddiy tizimlar yordamida jarayonlarning matematik modellashtirishni;
– muayyan jarayon uchun modellar qurish, qurilgan model doirasida xisoblar olib borish;
– funktsional va xisoblash topshirig‘ini yechishni ***bilishi va ulardan foydalana olishi*;**
– ob’ektlar mikdoriy va sifat munosabatlarini ifodalash uchun matematik simvollardan foydalanish;
– kuzatuv natijalari asosida modellar qura olish;
– olingan natijalarning foydalanish chegarasini va ular ierarxik tuzilishini xisobga olib modellarni o‘rganish;
– algebrik tenglamalarni analitik va raqamli yechish;
– tenglamalar sistemalarini analitik va raqamli yechish;
– ikkinchi tartibli chiziq va sirtlar tenglamalarini sodda shaklga keltirish va parametrlaridan foydalanish;
– bir va ko‘p o‘zgaruvchili funktsiyalar uchun differentsiallash, integrallash;
– oddiy differentsial tenglamalarni analitik va raqamli yechishni tadqiq etish;
– iqtisodiy jarayonlarning matematik modellari uchun to‘la tenglamalar sistemasi mavjud bo‘lgan hollarni bilishlari va ularga misol tariqasida qaralgan masalalarni matematik yechish usullarini o‘zlashtirgan bo‘lishlari hamda mazkur yechimlardan foydalanish ***ko‘nikmalariga ega bo‘lishi;***

ob’ektlar mikdoriy va sifat munosabatlarini ifodalash uchun matematik simvollardan foydalanish; eksperiment ma’lumotlarini ishlab chiqishning asosiy usul va yo‘riqlaridan foydalanish; ikkinchi tartibli chiziqlarni sodda shaklga keltirish; algebrik tenglamalarni analitik; tenglamalar sistemalarini analitik; bir va ko‘p o‘zgaruvchili funktsiyalar uchun differentsiallash, integrallash; differentsial tenglamalarni analitik yechish; iqtisodiy jarayonlarning matematik modellari uchun to‘la tenglamalar sistemasi mavjud bo‘lgan hollarni bilishlari va ularga misol tariqasida qaralgan masalalarni matematik yechish usullarini o‘zlashtirgan bo‘lishlari hamda mazkur yechimlardan foydalanish ***malakalariga ega bo‘lishi kerak.***

O‘quv rejadagi boshqa fanlar bilan bog‘liqligi

“Iqtisodchilar uchun matematika” asosiy fan hisoblanib, 1 va 2-semestrlarda o‘qitiladi.

Bu dasturni amalda bajarish uchun talabalar o‘rta maktab, AL va KXK dasturlardagi matematikaga oid fanlaridan yetarlicha ma’lumotga ega bo‘lishlari lozim.

“Iqtisodchilar uchun matematika” fani deyarli barcha fanlar bilan bog‘liq, ko‘p fanlar uchun asos bo‘lganligi uchun ulardan oldin o‘rganiladi.

“Iqtisodchilar uchun matematika” fani «Iqtisodiy matematika», «Statistika», «Ekanometrika asoslari», «Moliyaviy matematika», «Makroiqtisodyot», «Mikroiqtisodyot», «Axborot – komunikatsion tizimlar va texnologiyalar», «Tavkkalchilikni boshqarish» fanlari bilan uzviy bog‘lanishga ega.

“Iqtisodchilar uchun matematika” fani chiziqli algebra, matritsaviy analiz, analitik geometriya, matematik analizga kirish, bir va ko‘p o‘zgaruvchili funktsiyalar differentsial hisobi, bir va ko‘p o‘zgaruvchili funktsiyalar differentsial hisobi, qatorlar nazariyasi va differentsial tenglamalar nazariyasi bo‘limlarini o‘z ichiga oladi.

Fanni o‘qitishda zamonaviy axborot va pedagogik texnologiyalar

O‘quv jarayoni bilan bog‘liq ta’lim sifatini belgilovchi holatlar quyidagilar: yuqori ilmiy-pedagogik darajada dars berish, muammoli ma’ruzalar o‘qish, darslarni savol-javob tarzida qiziqarli tashkil qilish, ilg‘or pedagogik texnologiyalardan va multimedia vositalaridan foydalanish, tinglovchilarni undaydigan, o‘ylantiradigan muammolarni ular oldiga qo‘yish, talabchanlik, tinglovchilar bilan individual ishlash, erkin muloqot yuritishga, ilmiy izlanishga jalb qilish.

“Iqtisodchilar uchun matematika” kursini loyihalashtirishda quyidagi asosiy kontseptual yondoshuvlardan foydalaniladi:

Shaxsga yo‘naltirilgan ta’lim. Bu ta’lim o‘z mohiyatiga ko‘ra ta’lim jarayonining barcha ishtirokchilarining to‘laqonli rivojlanishini ko‘zda tutadi. Bu esa ta’limni loyihalashtirayotganda, albatta, ma’lum bir ta’lim oluvchining shaxsini emas, avvalo, kelgusidagi mutaxassislik faoliyati bilan bog‘liq o‘qish maqsadlaridan kelib chiqqan holda yondashilishni nazarda tutadi.

Tizimli yondashuv. Ta’lim texnologiyasi tizimning barcha belgilarini o‘zida mujassam etmog‘i lozim: jarayonning mantiqiyligi, uning barcha bo‘g‘inlarini o‘zaro bog‘langanligi, yaxlitligi.

Faoliyatga yo‘naltirilgan yondashuv. Shaxsning jarayonli sifatlarini shakllantirishga, ta’lim oluvchining faoliyatini aktivlashtirish va intensivlashtirish, o‘quv jarayonida uning barcha qobiliyati va imkoniyatlari, tashabbuskorligini ochishga yo‘naltirilgan ta’limni ifodalaydi.

Dialogik yondashuv. Bu yondashuv o‘quv munosabatlarini yaratish zaruratini bildiradi. Uning natijasida shaxsning o‘z-o‘zini faollashtirishi va o‘z-o‘zini ko‘rsata olishi kabi ijodiy faoliyati kuchayadi.

Hamkorlikdagi ta’limni tashkil etish. Demokratik, tenglik, ta’lim beruvchi va ta’lim oluvchi faoliyat mazmunini shakllantirishda va erishilgan natijalarni baholashda birgalikda ishlashni joriy etishga e’tibor qaratish zarurligini bildiradi.

Muammoli ta’lim. Ta’lim mazmunini muammoli tarzda taqdim qilish orqali ta’lim oluvchi faoliyatini aktivlashtirish usullaridan biri. Bunda ilmiy bilimning ob’ektiv qarama-qarshiligi va uni hal etish usullarini, dialektik mushohadani shakllantirish va rivojlantirishni, amaliy faoliyatga ularni ijodiy tarzda qo‘llashni mustaqil ijodiy faoliyati ta’minlanadi.

Axborotni taqdim qilishning zamonaviy vositalari va usullarini qo‘llash - yangi kompyuter va axborot texnologiyalarini o‘quv jarayoniga qo‘llash.

O‘qitishning usullari va texnikasi. Ma’ruza (kirish, mavzuga oid, vizuallash), muammoli ta’lim, keys-stadi, pinbord, paradoks va loyihalash usullari, amaliy ishlar.

O‘qitishni tashkil etish shakllari: dialog, polilog, muloqot hamkorlik va o‘zaro o‘rganishga asoslangan frontal, kollektiv va guruh.

O‘qitish vositalari: o‘qitishning an’anaviy shakllari (darslik, ma’ruza matni, o‘quv-uslubiy majmua) bilan bir qatorda - kompyuter va axborot texnologiyalari.

Kommunikatsiya usullari: tinglovchilar bilan tezkor teskari aloqaga asoslangan bevosita o‘zaro munosabatlar.

Teskari aloqa usullari va vositalari: kuzatish, blits-so‘rov, oraliq va joriy va yakunlovchi nazorat natijalarini tahlili asosida o‘qitish diagnostikasi.

Boshqarish usullari va vositalari: o‘quv mashg‘uloti bosqichlarini belgilab beruvchi texnologik karta ko‘rinishidagi o‘quv mashg‘ulotlarini rejalashtirish, qo‘yilgan maqsadga erishishda o‘qituvchi va tinglovchining birgalikdagi harakati, nafaqat auditoriya mashg‘ulotlari, balki auditoriyadan tashqari mustaqil ishlarning nazorati.

Monitoring va baholash: o‘quv mashg‘ulotida ham butun kurs davomida ham o‘qitishning natijalarini rejali tarzda kuzatib borish. Kurs oxirida test topshiriqlari yoki yozma ish variantlari yordamida tinglovchilarning bilimlari baholanadi.

“Iqtisodchilar uchun matematika” fanini o‘qitish jarayonida kompyuter texnologiyasidan, Yexsel dasturining programmalaridan foydalaniladi. Ayrim mavzular bo‘yicha talabalar bilimini baholash test asosida va kompyuter yordamida bajariladi. “Internet” tarmog‘idagi rasmiy iqtisodiy ko‘rsatkichlaridan foydalaniladi, tarqatma materiallar tayyorlanadi, test tizimi hamda tayanch so‘z va iboralar asosida oraliq va yakuniy nazoratlar o‘tkaziladi.

“Iqtisodchilar uchun matematika” fanidan mashg‘ulotlarning mavzular va soatlar bo‘yicha taqsimlanishi:

№	**Semetr**	**Auditoriya soatlari**			**Mustaqil ta’lim**	**Jami**
		Jami	**Shu jumladan**			
			ma’ruza	**amaliy mashg‘ulot**		
	II	152	76	76	102	254
Jami		**152**	**76**	**76**	**102**	**254**

ASOSIY QISM

MA’RUZA VA AMALIY MASHG‘ULOTLAR

Chiziqli algebra. Matritsalar va ular ustida amallar. Determinantlar.Teskari matritsa. Chiziqli tenglamalar sistemani matritsaviy usul, Kramer qoidasi va Gauss usulida yechish. Kompleks sonlar. Ko‘p tarmoqli iqtisod uchun balans modeli.

Qo‘llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta’lim,blits-so‘rov, munozara, o‘z-o‘zini nazorat.*

Abadiyotlar: A:[1]; [2]; [3];[4]; [5] Q: [1]-[6]

Matritsaviy analiz. Chiziqli fazo va uning elementlari. Chiziqli almashtirish matritsasi. Chiziqli operatorlar. Yevklid fazosi. Kvadratik formalar. Almashtirishning chiziqli modeli.

Qo‘llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta’lim,blits-so‘rov, munozara, o‘z-o‘zini nazorat.*

Abadiyotlar: A:[1]; [2]; [3];[4]; [5] Q: [1]-[6]

Analitik geometriya. To‘g‘ri chiziq tenglamalari. Ikkinchi tartibli chiziqlar. Ikkinchi tartibli chiziqning umumiy tenglamasini kanonik ko‘rinishga keltirish.Vektorlarning skalyar, vektor va aralash ko‘paytmalari. Fazoda tekislik va to‘g‘ri chiziq tenglamalari.

Qo‘llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta’lim,blits-so‘rov, munozara, o‘z-o‘zini nazorat.*

Abadiyotlar: A:[1]; [2]; [3];[4]; [5] Q: [1]-[6]

Matematik analizga kirish. Ketma-ketlik va funktsiya limiti. Funktsiya uzluksizligi va uzilish turlari.

Qo‘llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta’lim,blits-so‘rov, munozara, o‘z-o‘zini nazorat.*

Abadiyotlar: A:[1]; [2]; [3];[4]; [5] Q: [1]-[6]

Bir va ko‘p o‘zgaruvchili funktsiyalarning differentsial hisobi. Funktsiya hosilasi. Hosila hisoblash qoidalari. Yuqori tartibli hosilalar. Differentsial. Differentsial xisobning asosiy teoremalari. Teylor va Makloren formulalari. Lopital qoidasi. Funktsiyani tekshirishda differentsial hisobning tadbiqlari. Xususiy xosilalar va to‘la differentsial. Ko‘p o‘zgaruvchili funktsiya ekstremumlari. Differentsial hisobning iqtisodiyotdagi tadbiqlari.

Qo‘llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta’lim,blits-so‘rov, munozara, o‘z-o‘zini nazorat.*

Abadiyotlar: A:[1]; [2]; [3];[4]; [5] Q: [1]-[6]

Bir va ko‘p o‘zgaruvchili funktsiyalarning integral hisobi. Aniqmas integral. Aniqmas integrallar jadvali. Bo‘laklab integrallash. Integrallash usullari. Egri chiziqli trapetsiya yuzi. Aniq integral. Nyuton-Leybnits formulasi. Xosmas integrallar. Ikki va uch karrali integrallar. Integral hisobning iqtisodiyotdagi tadbiqlari.

Qo‘llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta’lim,blits-so‘rov, munozara, o‘z-o‘zini nazorat.*

Abadiyotlar: A:[1]; [2]; [3];[4]; [5] Q: [1]-[6]

Qatorlar nazariyasi. Sonli qatorlarning yaqinlashish alomatlari. Leybnits qatori. Shartli va absolyut yaqinlashish. Funktsional qatorlar. Darajali qatorlar. Abel teoremasi. Darajali qatorlarning yaqinlashish radiusi va sohasi.

Qo‘llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta’lim,blits-so‘rov, munozara, o‘z-o‘zini nazorat.*

Abadiyotlar: A:[1]; [2]; [3];[4]; [5] Q: [1]-[6]

Differentsial tenglamalar nazariyasi. Birinchi tartibli o‘zgaruvchilari ajraladigan, bir jinsli, chiziqli va ularga keltiriladigan oddiy differentsial tenglamalar. To‘la differentsial tenglamalar. Tartibi pasayadigan yuqori tartibli differentsial tenglamalar. O‘zgarmas koeffitsientli, chiziqli bir jinsli differentsial tenglamalar. O‘zgarmas

koeffitsientli, chiziqli, bir jinsli bo‘lmagan differentsial tenglamalar. O‘zgarmas koeffitsientli chiziqli differentsial tenglamalar sistemalari.
Differentsial tenglamalar nazariyasining iqtisodiyotdagi tadbiqlari.

Qo‘llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta’lim,blits-so‘rov, munozara, o‘z-o‘zini nazorat.*

Abadiyotlar: A:[1]; [2]; [3];[4]; [5] Q: [1]-[6]

«Iqtisodchilar uchun matematika” fani bo‘yicha ma’ruza mashg‘ulotlari

t/r	Ma’ruza mavzulari	Ajratilgan soatlar
	II-semestr	
	CHIZIQLI ALGEBRA	**8**
1-ma’ruza mashg‘uloti		**2**
1	Matritsalar	
2	Matritsalar ustida amallar	
3	Determinantlar	
2-ma’ruza mashg‘uloti		**2**
1	Yuqori tartibli determinantlar	
2	Teskari matritsa	
3	Matritsa rangi	
3-ma’ruza mashg‘uloti		**2**
1	Chiziqli tenglamalar sistemasi	
2	Tenglamalar sistemani matritsaviy usulda yechish	
3	Tenglamalar sistemani Kramer qoidasida yechish	
4	Tenglamalar sistemani Gauss usulida yechish	
5	Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi	
4-ma’ruza mashg‘uloti		**2**
1	Kompleks sonlar	
2	Muavr formulasi	
3	Ko‘p tarmoqli iqtisod uchun balans modeli	
	MATRITSAVIY ANALIZ	**6**
5-ma’ruza mashg‘uloti		**2**
1	Chiziqli fazo tushunchasi	
2	Chiziqli bog‘liqlik, o‘lcham va bazis tushunchalari	
3	Bir bazisdan boshqa bazisga o‘tish matritsasi	
6-ma’ruza mashg‘uloti		**2**
1	Chiziqli almashtirish matritsasi	
2	Xarakteristik ko‘phad.	
3	Xos son va xos ildiz	
7-ma’ruza mashg‘uloti		**2**
1	Yevklid fazosi	
2	Kvadratik formalar	
3	Almashtirishning chiziqli modeli	
ANALITIK GEOMETRIYA		**8**
8-ma’ruza mashg‘uloti		**2**
1	To‘g‘ri chiziq tenglamalari	
2	To‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak	
3	Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha masofa	
9-ma’ruza mashg‘uloti		**2**

1	Ikkinchi tartibli chiziqlar	
2	Tekislikdagi harakatlar	
3	Ikkinchi tartibli chiziqning umumiy tenglamasini kanonik ko‘rinishga keltirish	
10-ma’ruza mashg‘uloti		**2**
1	Vektorlarning skalyar, vektor va aralash ko‘paytmalari	
2	Fazoda tekislik tenglamalari	
11-ma’ruza mashg‘uloti		**2**
1	Fazoda tekislik va to‘g‘ri chiziq tenglamalari	
2	Tekislik va to‘g‘ri chiziqning o‘zaro joylashuvi	
MATEMATIK ANALIZGA KIRISH		**6**
12-ma’ruza mashg‘uloti		
1	Sonli ketma-ketlik	
2	Ketma-ketlik limiti	
3	Funktsiya limiti	
13-ma’ruza mashg‘uloti		**2**
1	Ajoyib limitlar	
2	Funktsiya uzluksizligi	
3	Uzluksiz funktsiyalarning asosiy xossalari	
14-ma’ruza mashg‘uloti		**2**
1	Funktsiya uzilish	
2	Uzilish turlari	
3	Funktsiya asimptotalari	
BIR O‘ZGARUVCHILI FUNKTSIYALARNING DIFFERENTSIAL HISOBI		**10**
15-ma’ruza mashg‘uloti		**2**
1	Funktsiya hosilasi	
2	Hosilaning geometrik, iqtisodiy va mexanik ma’nolari	
3	Hosila hisoblash qoidalari. Hosilalar jadvali	
16-ma’ruza mashg‘uloti		**2**
1	Yuqori tartibli hosilalar	
2	Differentsial.	
3	Differentsiallash jadvali va xisoblash qoidalari.	
17-ma’ruza mashg‘uloti		**2**
1	Differentsial xisobning asosiy teoremalari. Ferma, Roll, Lagranj, Koshi teoremalari.	
2	Teylor va Makloren formulalari	
3	Lopital qoidasi	
18-ma’ruza mashg‘uloti		**2**
1	Funktsiyalarni tekshirish.	
2	Funktsiyaning o‘sish va kamayishi oraliqlari.	
3	Funktsiyaning ekstremumlari.	
19-ma’ruza mashg‘uloti		**2**
1	Funktsiyaning botiqlik va qavariqligi	
2	Funktsiyaning egilish nuqtalari	
3	Ekstremumga doir masalalar	
4	Bir o‘zgaruvchili funksiya differentsial hisobining iqtisodiyotdagi tadbiqlari.	
KO‘P O‘ZGARUVCHILI FUNKTSIYALARNING DIFFERENTSIAL HISOBI		**6**

20-ma'ruza mashg'uloti		**2**
1	Ko'p o'zgaruvchili funktsiyalar. Karrali va takroriy limitlar	
2	Xususiy xosilalar	
3	To'la differentsial	
21-ma'ruza mashg'uloti		**2**
1	Ko'p o'zgaruvchili funktsiya ekstremumlari	
2	Ekstremumning zaruriy sharti	
3	Ekstremumning yetarli sharti	
22-ma'ruza mashg'uloti		**2**
1	Shartli ekstremumlar	
2	Yopiq sohadagi ekstremumlar	
3	Ko'p o'zgaruvchili funktsiyalarning differentsial hisobi hisobning iqtisodiyotdagi tadbiqlari	
BIR VA KO'P O'ZGARUVCHILI FUNKTSIYALARNING INTEGRAL HISOBI.		**12**
23-ma'ruza mashg'uloti		**2**
1	Aniqmas integral	
2	Aniqmas integral hisoblash usullari	
3	Aniqmas integrallar jadvali	
4	Bo'laklab integrallash	
24-ma'ruza mashg'uloti		**2**
1	Ratsional kasrlarni integrallash	
2	Trigonometrik funktsiyalar qatnashgan ifodalarni integrallash	
3	Algebraik irratsionalliklarni integrallash	
25-ma'ruza mashg'uloti		**2**
1	Egri chiziqli trapetsiya yuzi	
2	Aniq integral	
3	Nyuton-Leybnits formulasi	
26-ma'ruza mashg'uloti		**2**
1	Aniq integralni o'zgaruvchilarni almashtirish va bo'laklab integrallash usullari.	
2	Yassi shakl yuzalarini hisoblash	
3	Aylanish jismlarining hajmini hisoblash	
27-ma'ruza mashg'uloti		**2**
1	Xosmas integrallar	
2	Taqqoslash usuli	
3	Ikki va uch karrali integrallar	
28-ma'ruza mashg'uloti		**2**
1	Integral hisobning iqtisodiyotdagi tadbiqlari	
2	Daromadning notekis taqsimoti koeffitsenti	
3	Zahiralarni boshqarishning Vilson modeli	
QATORLAR		**8**
29-ma'ruza mashg'uloti		**2**
1	Sonli qatorlar	
2	Sonli qatorlar yaqinlashishining zaruriy sharti	
3	Sonli qatorlarning yaqinlashish alomatlari. Taqqoslash alomati	
30-ma'ruza mashg'uloti		**2**
1	Dalamber alomati	
2	Koshi alomati. Koshining integral alomati	
3	Leybnits qatori	

4	Shartli va absolyut yaqinlashish	
31-ma'ruza mashg'uloti		**2**
1	Funktsional qatorlar	
2	Darajali qatorlar	
32-ma'ruza mashg'uloti		**2**
1	Abel teoremasi	
2	Darajali qatorlarning yaqinlashish radiusi va sohasi	
DIFFERENTSIAL TENGLAMALAR NAZARIYASI		**12**
33-ma'ruza mashg'uloti		**2**
1	Differentsial tenglama haqida umumiy tushunchalar	
2	O'zgaruvchilari ajraladigan va unga keltiriladigan differentsial tenglamalar	
3	Bir jinsli va unga keltiriladigan differentsial tenglamalar	
34-ma'ruza mashg'uloti		**2**
1	Chiziqli differentsial tenglamalar	
2	Bernulli tenglamasi	
3	Rikkati tenglamasi	
35-ma'ruza mashg'uloti		**2**
1	To'la differentsial tenglamalar	
2	Integrallovchi ko'paytuvchi	
3	Yuqori tartibli differentsial tenglamalar..	
4	Tartibi pasayadigan yuqori tartibli differentsial tenglamalar	
36-ma'ruza mashg'uloti		**2**
1	O'zgarmas koeffitsientli, chiziqli bir jinsli differentsial tenglamalar	
2	Xarakteristik tenglama	
3	Fundamental yechimlar sistemasi	
37-ma'ruza mashg'uloti		**2**
1	O'zgarmas koeffitsientli, chiziqli, bir jinsli bo'lmagan differentsial tenglamalar	
2	Tanlash usuli	
38-ma'ruza mashg'uloti		**2**
1	O'zgarmas koeffitsientli chiziqli differentsial tenglamalar sistemalari.	
2	Differentsial tenglamalar nazariyasining iqtisodiyotdagi tadbiqlari	
3	Keynsning dinamik modeli	
Jami		**76**

«Iqtisodchilar uchun matematika" fani bo'yicha amaliy mashg'ulotlarning kalendar tematik rejasi

t/r	Amaliy mashg'ulot mavzulari	Ajratilgan soatlar
1	**2**	**3**
	II-semestr	
CHIZIQLI ALGEBRA		**8**
1-amaliy mashg'ulot		**2**
1	Matritsalar	
2	Matritsalar ustida amallar	
3	Determinantlar	
2- amaliy mashg'ulot		**2**

1	Yuqori tartibli determinantlar	
2	Teskari matritsa	
3	Matritsa rangi	
3- amaliy mashg‘ulot		**2**
1	Chiziqli tenglamalar sistemasi	
2	Tenglamalar sistemani matritsaviy usulda yechish	
3	Tenglamalar sistemani Kramer qoidasida yechish	
4	Tenglamalar sistemani Gauss usulida yechish	
5	Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi	
4- amaliy mashg‘ulot		**2**
1	Kompleks sonlar	
2	Muavr formulasi	
3	Ko‘p tarmoqli iqtisod uchun balans modeli	
	MATRITSAVIY ANALIZ	**6**
5- amaliy mashg‘ulot		**2**
1	Chiziqli fazo tushunchasi	
2	Chiziqli bog‘liqlik, o‘lcham va bazis tushunchalari	
3	Bir bazisdan boshqa bazisga o‘tish matritsasi	
6- amaliy mashg‘ulot		**2**
1	Chiziqli almashtirish matritsasi	
2	Xarakteristik ko‘phad.	
3	Xos son va xos ildiz	
7- amaliy mashg‘ulot		**2**
1	Yevklid fazosi	
2	Kvadratik formalar	
3	Almashtirishning chiziqli modeli	
ANALITIK GEOMETRIYA		**8**
8- amaliy mashg‘ulot		**2**
1	To‘g‘ri chiziq tenglamalari	
2	To‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak	
3	Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha masofa	
9- amaliy mashg‘ulot		**2**
1	Ikkinchi tartibli chiziqlar	
2	Tekislikdagi harakatlar	
3	Ikkinchi tartibli chiziqning umumiy tenglamasini kanonik ko‘rinishga keltirish	
10- amaliy mashg‘ulot		**2**
1	Vektorlarning skalyar, vektor va aralash ko‘paytmalari	
2	Fazoda tekislik tenglamalari	
11- amaliy mashg‘ulot		**2**
1	Fazoda tekislik va to‘g‘ri chiziq tenglamalari	
2	Tekislik va to‘g‘ri chiziqning o‘zaro joylashuvi	
MATEMATIK ANALIZGA KIRISH		**6**
12- amaliy mashg‘ulot		
1	Sonli ketma-ketlik	
2	Ketma-ketlik limiti	
3	Funktsiya limiti	
13- amaliy mashg‘ulot		**2**
1	Ajoyib limitlar	
2	Funktsiya uzluksizligi	

3	Uzluksiz funktsiyalarning asosiy xossalari	
14- amaliy mashg‘ulot		**2**
1	Funktsiya uzilish	
2	Uzilish turlari	
3	Funktsiya asimptotalari	
BIR O‘ZGARUVCHILI FUNKTSIYALARNING DIFFERENTSIAL HISOBI		**10**
15- amaliy mashg‘ulot		**2**
1	Funktsiya hosilasi	
2	Hosilaning geometrik, iqtisodiy va mexanik ma’nolari	
3	Hosila hisoblash qoidalari. Hosilalar jadvali	
16- amaliy mashg‘ulot		**2**
1	Yuqori tartibli hosilalar	
2	Differentsial.	
3	Differentsiallash jadvali va xisoblash qoidalari.	
17- amaliy mashg‘ulot		**2**
1	Differentsial xisobning asosiy teoremalari. Ferma, Roll, Lagranj, Koshi teoremalari.	
2	Teylor va Makloren formulalari	
3	Lopital qoidasi	
18- amaliy mashg‘ulot		**2**
1	Funktsiyalarni tekshirish.	
2	Funktsiyaning o‘sish va kamayishi oraliqlari.	
3	Funktsiyaning ekstremumlari.	
19- amaliy mashg‘ulot		**2**
1	Funktsiyaning botiqlik va qavariqligi	
2	Funktsiyaning egilish nuqtalari	
3	Ekstremumga doir masalalar	
4	Bir o‘zgaruvchili funksiya differentsial hisobining iqtisodiyotdagi tadbiqlari.	
KO‘P O‘ZGARUVCHILI FUNKTSIYALARNING DIFFERENTSIAL HISOBI		**6**
20- amaliy mashg‘ulot		**2**
1	Ko‘p o‘zgaruvchili funktsiyalar. Karrali va takroriy limitlar	
2	Xususiy xosilalar	
3	To‘la differentsial	
21- amaliy mashg‘ulot		**2**
1	Ko‘p o‘zgaruvchili funktsiya ekstremumlari	
2	Ekstremumning zaruriy sharti	
3	Ekstremumning yetarli sharti	
22- amaliy mashg‘ulot		**2**
1	Shartli ekstremumlar	
2	Yopiq sohadagi ekstremumlar	
3	Ko‘p o‘zgaruvchili funktsiyalarning differentsial hisobi hisobning iqtisodiyotdagi tadbiqlari	
BIR VA KO‘P O‘ZGARUVCHILI FUNKTSIYALARNING INTEGRAL HISOBI.		**12**
23- amaliy mashg‘ulot		**2**
1	Aniqmas integral	
2	Aniqmas integral hisoblash usullari	

3	Aniqmas integrallar jadvali	
4	Bo‘laklab integrallash	
24- amaliy mashg‘ulot		**2**
1	Ratsional kasrlarni integrallash	
2	Trigonometrik funktsiyalar qatnashgan ifodalarni integrallash	
3	Algebraik irratsionalliklarni integrallash	
25-ma’ruza mashg‘uloti		**2**
1	Egri chiziqli trapetsiya yuzi	
2	Aniq integral	
3	Nyuton-Leybnits formulasi	
26- amaliy mashg‘ulot		**2**
1	Aniq integralni o‘zgaruvchilarni almashtirish va bo‘laklab integrallash usullari.	
2	Yassi shakl yuzalarini hisoblash	
3	Aylanish jismlarining hajmini hisoblash	
27- amaliy mashg‘ulot		**2**
1	Xosmas integrallar	
2	Taqqoslash usuli	
3	Ikki va uch karrali integrallar	
28-amaliy mashg‘uloti		**2**
1	Integral hisobning iqtisodiyotdagi tadbiqlari	
2	Daromadning notekis taqsimoti koeffitsenti	
3	Zahiralarni boshqarishning Vilson modeli	
	QATORLAR	**8**
29- amaliy mashg‘ulot		**2**
1	Sonli qatorlar	
2	Sonli qatorlar yaqinlashishining zaruriy sharti	
3	Sonli qatorlarning yaqinlashish alomatlari. Taqqoslash alomati	
30- amaliy mashg‘ulot		**2**
1	Dalamber alomati	
2	Koshi alomati. Koshining integral alomati	
3	Leybnits qatori	
4	Shartli va absolyut yaqinlashish	
31- amaliy mashg‘ulot		**2**
1	Funktsional qatorlar	
2	Darajali qatorlar	
32- amaliy mashg‘ulot		**2**
3	Abel teoremasi	
4	Darajali qatorlarning yaqinlashish radiusi va sohasi	
	DIFFERENTSIAL TENGLAMALAR NAZARIYASI	**12**
33- amaliy mashg‘ulot		**2**
1	Differentsial tenglama haqida umumiy tushunchalar	
2	O‘zgaruvchilari ajraladigan va unga keltiriladigan differentsial tenglamalar	
3	Bir jinsli va unga keltiriladigan differentsial tenglamalar	
34- amaliy mashg‘ulot		**2**
1	Chiziqli differentsial tenglamalar	
2	Bernulli tenglamasi	
3	Rikkati tenglamasi	
35- amaliy mashg‘ulot		**2**

1	To'la differentsial tenglamalar	
2	Integrallovchi ko'paytuvchi	
3	Yuqori tartibli differentsial tenglamalar..	
4	Tartibi pasayadigan yuqori tartibli differentsial tenglamalar	
36- amaliy mashg'ulot		**2**
1	O'zgarmas koeffitsientli, chiziqli bir jinsli differentsial tenglamalar	
2	Xarakteristik tenglama	
3	Fundamental yechimlar sistemasi	
37- amaliy mashg'ulot		**2**
1	O'zgarmas koeffitsientli, chiziqli, bir jinsli bo'lmagan differentsial tenglamalar	
2	Tanlash usuli	
38- amaliy mashg'ulot		**2**
1	O'zgarmas koeffitsientli chiziqli differentsial tenglamalar sistemalari.	
2	Differentsial tenglamalar nazariyasining iqtisodiyotdagi tadbiqlari	
3	Keynsning dinamik modeli	
Jami		**76**

MUSTAQIL TA'LIMNI TASHKIL ETISHNING SHAKLI VA MAZMUNI

"Iqtisodchilar uchun matematika" fani bo'yicha talabaning mustaqil ta'limi shu fanni o'rganish jarayonining tarkibiy qismi bo'lib, uslubiy va axborot resurslari bilan to'la ta'minlangan. Talabalar auditoriya mashg'ulotlarida professor-o'qituvchilarning ma'ruzasini tinglaydilar, amaliy misol va masalalar yechadilar. Auditoriyadan tashqarida talaba darslarga tayyorlanadi, adabiyotlarni konspekt qiladi, uy vazifa sifatida berilgan topshiriqlarni bajaradi. Bundan tashqari ayrim mavzularni kengroq o'rganish maqsadida qo'shimcha adabiyotlarni o'qib, referat (taqdimot)lar tayyorlaydi hamda mavzu bo'yicha masala va testlar yechadi. Mustaqil ta'lim natijalari reyting tizimi asosida baholanadi.

Uyga berilgan vazifalarni bajarish, yangi bilimlarni mustaqil o'rganish, kerakli ma'lumotlarni izlash va ularni topish yo'llarini aniqlash, Internet tarmoqlaridan foydalanib ma'lumotlar to'plash va ilmiy izlanishlar olib borish, ilmiy to'garak doirasida yoki mustaqil ravishda ilmiy manbalardan foydalanib ilmiy maqola (tezis) va ma'ruzalar tayyorlash kabilar talabalarning darsda olgan bilimlarini chuqurlashtiradi, ularning mustaqil fikrlash va ijodiy qobiliyatini rivojlantiradi. Shuning uchun ham mustaqil ta'limsiz o'quv faoliyati samarali bo'lishi mumkin emas. Uy vazifalarini tekshirish va baholash amaliy mashg'ulot olib boruvchi o'qituvchi tomonidan, konspektlarni va mavzuni o'zlashtirish darajasini tekshirish va baholash esa ma'ruza darslarini olib boruvchi o'qituvchi tomonidan har darsda amalga oshiriladi.

"Iqtisodchilar uchun matematika" fanidan mustaqil ish majmuasi fanning barcha mavzularini qamrab olgan quyidagi mavzu ko'rinishida shakllantirilgan:

Talabalar mustaqil ta'limining mazmuni va hajmi

t/r	Mustaqil ta'lim mavzulari	Berilgan topshiriqlar	Bajarish muddati	Ajratilgan soatlar
2-semestr				
1.	Chiziqli algebra elementlari.	Fandan yaratilgan uslubiy ko'rsatma bo'yicha masalalarni ishlaydi	1- 4 –haftalar	12
2.	Matritsaviy analiz elementlari.	Fandan yaratilgan uslubiy ko'rsatma bo'yicha masalalarni ishlaydi	5- 7 -haftalar	8
3.	Analitik geometriya.	Fandan yaratilgan uslubiy ko'rsatma bo'yicha masalalarni ishlaydi	8-10 -haftalar	8
4.	To'plamlar va funktsiyalar. Limit.	Fandan yaratilgan uslubiy ko'rsatma bo'yicha masalalarni ishlaydi	11-13 - haftalar	10
5.	Funktsiya hosilasi va differentsiali	Fandan yaratilgan uslubiy ko'rsatma bo'yicha masalalarni ishlaydi.	14-16 - haftalar	6
6.	Funktsiyani to'liq tekshirish	Fandan yaratilgan uslubiy ko'rsatma bo'yicha masalalarni ishlaydi.	17-18 - haftalar	10
7.	Ko'p o'zgaruvchili funktsiyalar	Fandan yaratilgan uslubiy ko'rsatma bo'yicha masalalarni ishlaydi.	1-3 -haftalar	6
8.	Aniqmas integral	Fandan yaratilgan uslubiy ko'rsatma bo'yicha masalalarni ishlaydi.	4-6 -haftalar	6
9.	Aniq integral	Fandan yaratilgan uslubiy ko'rsatma bo'yicha masalalarni ishlaydi.	7-9 -haftalar	10
10.	Qatorlar.	Fandan yaratilgan uslubiy ko'rsatma bo'yicha masalalarni ishlaydi.	10-13- haftalar	10
11.	Birinchi tartibli differentsial tenglamalar	Fandan yaratilgan uslubiy ko'rsatma bo'yicha masalalarni ishlaydi.	14-15 - haftalar	6
12.	Yuqori tartibli differentsial tenglamalar.	Fandan yaratilgan uslubiy ko'rsatma bo'yicha masalalarni ishlaydi.	16-18 - haftalar	10
Jami				**102**

Dasturning axborot-uslubiy ta'minoti

Mazkur fanni o'qitish jarayonida ta'limning zamonaviy ilg'or interfaol usullaridan, pedagogik va axborot-kommunikatsiya texnologiyalarining prezentatsiya (taqdimot), multimedia va elektron-didaktik texnologiyalardan foydalaniladi. Amaliy mashg'ulotlarda aqliy hujum, klaster, blits-so'rov, guruh bilan ishlash, insert, taqdimot kabi usul va texnikalardan keng foydalaniladi.

“Iqtisodchilar uchun matematika” fanidan talabalar bilimini reyting tizimi asosida baholash mezoni

Reyting nazoratlari oʻtkazilishining jadvali

№	Nazorat turlari	Soni	Ball				maksimal ball	Saralash ball
1.	**O.N.**	**1**	**9- haftada**					
	Oraliq nazorat yozma ravishda oʻtkaziladi. Har bir oraliq nazorat biletida 3 tadan savol boʻlib, har bir savol maksimal 10 baldan baholanadi.	1	1-savol (nazariy) - 10 ball 2-savol (nazariy) - 10 ball 3- misol - 10 ball				**30**	**16,5**
2.	**J.N.**	**4**	**$J.N_1$**	**$J.N_2$**	**$J.N_3$**	**$J.N_4$**		
			6- haftada umumlashtiriladi	11- haftada umumlashtiriladi	13- haftada umumlashtiriladi	16- haftada umumlashtiriladi		
	Amaliy va seminar mashgʻulotlarni bajarish	2	2×5=10	2×5=10		2×5=10	30	
	Talaba mustaqil ishi – berilgan individual topshiriqlarni bajarish	1			1x10=10		10	
			10	**10**	**10**	**10**	**40**	**22**
3.	**O.N.+ J.N.**		**17- haftada**				**70**	**38,5**
4.	**Y.N.**	**1**	**17-18 haftada**					
	Yakuniy nazorat yozma ravishda oʻtkaziladi. Har bir yakuniy nazorat biletida 3 tadan savol boʻlib, har bir savol maksimal 10 baldan baholanadi.	1	1-savol (nazariy) - 10 ball 2- misol - 10 ball 3-sodda savollar – 10 ball				**30**	**16,5**
5.	**(O.N.+ J.N)+ Y.N.**						**100**	**55**

Fan boʻyicha talabalarning O.N dan toʻplaydigan ballarning namunaviy mezonlari

№	Koʻrsatkichlar	ON ballari	
		Maksimal	**Oʻzgarish oraligʻi (butun sonlarda)**
1	**1 ta nazariy savolga**	**10**	**0-10**
	agar talaba mavzuga oid tushunchaga ega boʻlmasa yaʼni savollarga va tushunchalarga umuman javob bera olmasa yoki mavzu boʻyicha aniq tasavvurga ega boʻlmagan holda baʼzi bir tushunchalarga ega boʻlsa	5	0-5
	agar talaba mavzu mohiyatini ochib bera olsa, mavzuga doir tushunchalarni toʻgʻri taʼriflay olsa, tasdiqlarni isbotsiz keltirib oʻtsa.	7	6-7
	agar talaba mavzu mohiyatini ochib bera olsa, mavzuga doir tushunchalarni toʻgʻri taʼriflay olsa va tasdiqlarni keltirib, isbotlashda hatoliklarga yoʻl qoʻysa	8	7-8
	agar talaba mavzu mohiyatini ochib bera olsa, mavzuga ijodiy yondoshgan holda tushunchalarni toʻgʻri taʼriflay olsa va tasdiqlarni toʻliq isbotlasa	10	9-10
2	**1 ta misolga**	**10**	**0-10**
	talaba misolni yechish uchun umuman xarakat qilmagan boʻlsa yoki talaba misolni yechishga harakat qilgan va yondashuvda xatoligi boʻlsa	5	0-5
	talaba misolni yechgan va texnik kamchiliklar bilan xatoga yoʻl	7	6-7

	qo‘ygan bo‘lsa		
	talaba misolni to‘liq, to‘g‘ri yechgan natijaga erishgan, lekin foydalangan usullar asoslanmagan.	8	7-8
	talaba misolni to‘liq, to‘g‘ri yechgan va foydalangan usullar asoslangan bo‘lsa	10	9-10

Fan bo‘yicha talabalarning J.N dan to‘playdigan ballarning namunaviy mezonlari

№	Ko‘rsatkichlar	JN ballari				
		Maksimal	$J.N_1$	$J.N_2$	$J.N_3$	$J.N_4$
1	Darslarga qatnashganlik va o‘zlashtirishi darajasi. Amaliy mashg‘ulotlardagi faolligi, amaliy mashg‘ulot daftarlarining yuritilishi va holati	30	0-10	0-10		0-10
2	Mustaqil ta’lim topshiriqlarining o‘z vaqtida va sifatli bajarilishi. Mavzular bo‘yicha uy vazifalarini bajarilish va o‘zlashtirishi darajasi.	10			0-10	

Fan bo‘yicha talabalarning Y.N dan to‘playdigan ballarning namunaviy mezonlari

№	Ko‘rsatkichlar	ON ballari	
		maksimal	**O‘zgarish oralig‘i (butun sonlarda)**
1	**1 ta nazariy savolga**	**10**	**0-10**
	agar talaba mavzuga oid tushunchaga ega bo‘lmasa ya’ni savollarga va tushunchalarga umuman javob bera olmasa yoki mavzu bo‘yicha aniq tasavvurga ega bo‘lmagan holda ba’zi bir tushunchalarga ega bo‘lsa	5	0-5
	agar talaba mavzu mohiyatini ochib bera olsa, mavzuga doir tushunchalarni to‘g‘ri ta’riflay olsa, tasdiqlarni isbotsiz keltirib o‘tsa.	7	6-7
	agar talaba mavzu mohiyatini ochib bera olsa, mavzuga doir tushunchalarni to‘g‘ri ta’riflay olsa va tasdiqlarni keltirib, isbotlashda hatoliklarga yo‘l qo‘ysa	8	7-8
	agar talaba mavzu mohiyatini ochib bera olsa, mavzuga ijodiy yondoshgan holda tushunchalarni to‘g‘ri ta’riflay olsa va tasdiqlarni to‘liq isbotlasa	10	9-10
2	**1 ta misolga**	**10**	**0-10**
	talaba misolni yechish uchun umuman harakat qilmagan bo‘lsa yoki talaba misolni yechishga harakat qilgan va yondashuvda xatoligi bo‘lsa	5	0-5
	talaba misolni yechgan va texnik kamchiliklar bilan xatoga yo‘l qo‘ygan bo‘lsa	7	6-7
	talaba misolni to‘liq to‘g‘ri yechgan natijaga erishgan lekin foydalangan usullar asoslanmagan.	8	7-8
	talaba misolni to‘liq to‘g‘ri yechgan va foydalangan usullar asoslangan bo‘lsa	10	9-10
3	**1 ta sodda savolga**	**2**	**0-2**
	Talaba ta’rif va tushunchalarni to‘liq va to‘g‘ri ta’riflay olmasa		**0**
	Talaba ta’rif va tushunchalarni to‘liq ta’riflay olmasa		**1**
	Talaba ta’rif va tushunchalarni to‘liq, to‘g‘ri ta’riflay olsa		**2**

FOYDALANILADIGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI

Asosiy adabiyotlar

1. Sharaxmetov Sh., Naimjonov. B., Iqtisodchilar uchun matematika. “Fan va texhologiya”, - T.: 2007. - 302 b.
2. Жураев Т.Ж., Худойберганов Р.Х., Ворисов А.К., Мансуров Х. Олий математика асослари. 1 ва 2 қисм . -Т. Ўзбекистан, 1995, 1999.- 290 бет.
3. Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов . –М.: ЮНИТИ, 1997, -497 с.
4. Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y. -535 p.
5. Knut Sydsæter and Peter Hammond, EssentialMathematics for Economic Analysis. London EC1N 8TS. Pearson Education Limited. 2012, -745 p.

Qo‘shimcha adabiyotlar

1. Sharaxmetov Sh., Asraqulova D.C, Qurbonov J.J., Iqtisodchilar uchun oliy matematikadan masalalar to‘plami, “Iqtisodiyot” -T.: TDIU. 2012 y.- 246 b.
2. Данко П.Е. ва бошқалар. “Олий математика мисол ва масалаларда”. -Т.: 2007, -416 бет.
3. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. – М.: 2004, -368 с.
4. Michael Hoy, John Livernois, Chris McKenna, Ray Rees, Thanasis Stengos, Mathematics for Economics, England, USA, The MIT Press, 2001 y.-1129p.
5. Vassilis C. Mavron and Timothy N. Phillips. Elements of Mathematics for Economics and Finance. –UK.; Springer-Verlag London Limited, 2007, -321 p.
6. Laurence D.Hoffmann and Michael Orkin. Finite mathematics with calculus. – USA.; McGraw-Hill , 1995, -1127 p.

Электрон манбалар

11.http//www.el.tfi.us/pdf/enmcoq22.uzk.pdf/
12.http:// www.a-geometry.narod.ru
13.http://allmath.ru/highermath/mathanalis/
14.http://www.eknigu.com/lib/mathematics/;
15.http://www.mcce.ru, http://lib.mexmat.ru
16.http://www.msu.ru/ - Московский государственный университет;
17.http://www.nlr.ru/ - Российская национальная библиотека;
18.http://www.nsu.ru/icem/grants/etfm/ ;
19.http://www.rsl.ru/ - Российская государственная библиотека;
20. www.lib.homelinux.orgfmath.

Ma'ruza mavzulari

1-MAVZU. CHIZIQLI ALGEBRA

1-mashg'ulot

1.1. Matrisalar
1.2. Matrisalar ustida amallar
1.3. Determinantlar

Tayanch iboralar: *jadval, qator, ustun, indeks, o'lchov, kvadrat matrisa, birlik matrisa, matrisalarni qo'shish, ayirish, songa ko'paytirish, determinant, tartib, uchburchak usuli, yoyilma.*

1.1. Matrisalar

Matrisalarni algebraik nuqtai nazaridan sonlar to'plami deb qarash mumkin. Har bir belgini, odatda, bir "element" sifatida aniqlanadi. Har bir matritsa to'g'ri to'rtburchaklar shaklda bo'lib, barch satr va ustun elementlar bilan to'ldirilgan bo'lishi zarur. Masalan, agar matrisa 5 satr va 3 ustundan iborat bo'lsa, har bir satrda 5 element va har bir ustunda 3 element bo'lishi kerak. Ba'zi elementlar nol bo'lishi mumkin. Matritsaning o'lchovi uning "tartibi" deb ataladi. Tartibi quyidagicha aniqlanadi:

(Qatorlar soni) × (ustunlar soni)

Misol uchun, yuqoridagi A matrisa 5 satr va 3 ustundan iborat va shuning uchun uning o'lchovi 5 × 3. Bitta nsatr yoki ustundan iborat matrisalarni odatda vektor deb qabul qilingan.Misol uchun, avtomobil ijara narxlarini belgilanganda biz 1 × 5 satr-matrisani vektor sifatida

$$p = \begin{bmatrix} 139 & 160 & 205 & 340 & 430 \end{bmatrix}$$

va birinchi hafta uchun zarur avtomobillarni 5 × 1 ustun-matrisani ustun-vektor deb qarash mumkin[2]

$$A = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 12 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ta'rif. *O'lchamlari $m \times n$ bo'lgan matritsa deb, satrlar soni m ga, ustunlar soni n ga teng bo'lgan va $m \cdot n$ ta sondan tashkil topgan to'g'ri to'rtburchak shaklidagi sonli jadvalga aytiladi.*

Ta'rif. *Agar dioganal matritsada barcha $i = \overline{1,n}$ lar uchun $a_{ii} = 1$ bo'lsa, bunday matritsa birlik matritsa deb ataladi va* E *bilan belgilanadi, ya'ni*

[2] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0\cdots0\cdots0\\ 0 & 1\cdots0\cdots0\\ 0 & 0\cdots1\cdots0\\ 0 & 0\cdots0\cdots1\end{pmatrix}$$

1.2. Matrisalar ustida amallar

Bir xil o‘lchovli matrisalarni qo‘shish va ayirish mumkin. Bunda matrisalarning mos elementlari qo‘shiladi va ayiriladi.

Misol. A va B do‘konlarda Q va P turdagi ikki xil mahsulot sotilayotgan bo‘lsin. A va B matrisalar orqali oxirgi 4 hafta davomida bu do‘konlarda sotilgan mahsulot miqdori quyidagi matrisa ko‘rinishiba ifodalanib, bunda ustunlar haftalarni va satrlar mos ravishda Q va R mahsulotlar miqdorini ifodalaydi.

$$A=\begin{bmatrix}5 & 4 & 12 & 7\\ 10 & 12 & 9 & 14\end{bmatrix} \quad \text{va} \quad B=\begin{bmatrix}8 & 9 & 3 & 4\\ 8 & 18 & 21 & 5\end{bmatrix}$$

4 hafta davomida sotilgan mahsulot hajmni aniqlovchi matrisani toping.

Yechish. A va B matrisalar yig‘indisi har bir hafta uchun sotilgan mahsulot hajmini aniqlaydi. Masalan, 1- haftada sotilgan mahsulot hajmini 5+8=13 bo‘ladi. Umumiy sotuv hajmi esa quyidagi matrisa orqali aniqlanadi[3]

$$T=A+B=\begin{bmatrix}5 & 4 & 12 & 7\\ 10 & 12 & 9 & 14\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}8 & 9 & 3 & 4\\ 8 & 18 & 21 & 5\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}5+8 & 4+9 & 12+3 & 7+4\\ 10+8 & 12+18 & 9+21 & 14+5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}13 & 13 & 15 & 11\\ 18 & 30 & 30 & 19\end{bmatrix}$$

Ta’rif. *Bir xil* $m\times n$ *o‘lchamli* $A=(a_{ij})$ *va* $B=(b_{ij})$ *matritsalar uchun ularning yig‘indisi deb shunday* $m\times n$ *o‘lchamli* $C=(c_{ij})$ *matritsaga aytiladiki, istalgan* $i=\overline{1,n}$ *va* $j=\overline{1,m}$ *lar uchun* c_{ij}*-element,* $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ *tenglik orqali aniqlanadi va matritsalar yig‘indisi A+B shaklda belgilanadi, ya’ni C=A+B .*

Matsisani biror songa yoko matrisaga ko‘paytirish mumkin. Matsisani biror songa ko‘paytirganda uning barcha elementlari shu songa ko‘paytiriladi. Matrisalarni matrisaga ko‘paytirish murakkabroq bo‘lib, keying bo‘limda o‘rganiladi.

Misol. Agar 17,5 % QQS (Qo‘shimcha qiymat solig‘i) qo‘yilganda avtomashina ijarasiga bo‘lgan narxlar $p=\begin{bmatrix}139 & 160 & 205 & 340 & 430\end{bmatrix}$.

v soliqsiz narx vektori aniqlang.

Yechish. Dastlab biz narx vektorining qo‘llanilashi mumkin bo‘lgan quyi skalyar qiymatini aniqlashimiz zarur. Soliq stavkasi 17,5 % bo‘lganligi uchun QQS da asosiy foiz stavkasi 117,5% bo‘ladi. Suning uchu soliqsiz narx vektori

[3] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

$$v=\left(\frac{1}{1.175}\right)\cdot p=\left(\frac{1}{1.175}\right)\cdot\begin{bmatrix}139 & 160 & 205 & 340 & 430\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\left(\frac{1}{1.175}\right)139 & \left(\frac{1}{1.175}\right)160 & \left(\frac{1}{1.175}\right)205 & \left(\frac{1}{1.175}\right)340 & \left(\frac{1}{1.175}\right)430\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}118.30 & 136.17 & 174.47 & 289.36 & 365.96\end{bmatrix}$$

$m \times n$ o‘lchovli A matrisa berilgan bo‘lsin.

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

Har bir a_{ij} element uchun indeksdagi i element joylashgan satr nomerini va j indeks element joylashgan ustun nomerini anglatadi.

Masalan:

$a_{11} =$ element 1 satr, 1 ustunda joylashgan

$a_{12} =$ element 1 satr, 2 ustunda joylashgan

$a_{1n} =$ element 1 satr, *n* ustunda joylashgan

$a_{mn} =$element *m satr, n* ustunda joylashgan anglatadi.

Agar *m*×*n* o‘lchovli A matrisani *n*×*r* o‘lchovli B matrisaga ko‘paytirganda *m* × *r* o‘lchovli AB matrisa hosil bo‘ladi. Shuning uchun

$$AB=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r}\\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nr}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & \dots & \dots & c_{1r}\\ c_{21} & c_{22} & \dots & \dots & c_{2r}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & \dots & c_{mr}\end{bmatrix}=c$$

deb yoza olamiz, bu yerda

$$\begin{aligned}c_{11} &= a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\dots+a_{1n}b_{n1}\\ c_{12} &= a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+\dots+a_{1n}b_{n2}\\ &\vdots\\ c_{mr} &= a_{m1}b_{1r}+a_{m2}b_{2r}+\dots+a_{mn}b_{nr}\end{aligned}$$

Misol.

$$A=\begin{bmatrix}4 & 2 & 12\\ 6 & 0 & 20\\ 1 & 8 & 5\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}10 & 0.5 & 1 & 7\\ 6 & 3 & 8 & 2.5\\ 4 & 4 & 2 & 0\end{bmatrix}$$ bo‘lsa **,** C = AB =?

Yechish. C matrisa elementlarini matrisalar ko‘paytirish qoidasiga ko‘ra aniqlaymiz:

$c_{11} =$ 4 × 10 + 2 × 6 + 12 × 4 = 40 + 12 + 48 = 100

$c_{12} =$ 4 × 0.5 + 2 × 3 + 12 × 4 = 2 + 6 + 48 = 56

$c_{13} =$ 4 × 1 + 2 × 8 + 12 × 2 = 4 + 16 + 24 = 44

$c_{14} =$ 4 × 7 + 2 × 2.5 + 12 × 0 = 28 + 5 + 0 = 33

$c_{21} =$ 6 × 10 + 0 × 6 + 20 × 4 = 60 + 0 + 80 = 140

$c_{22} =$ 6 × 0.5 + 0 × 3 + 20 × 4 = 3 + 0 + 80 = 83

$c_{23} =$ 6 × 1 + 0 × 8 + 20 × 2 = 6 + 0 + 40 = 46

$c_{24} =$ 6 × 7 + 0 × 2.5 + 20 × 0 = 42 + 0 + 0 = 42

Endi o‘zingiz mustaqil oxirgi satr elementlarini hoisoblang. Unda siz

$$c_{31} = 78,\ c_{32} = 44{,}5,\ c_{33} = 75,\ \ c_{34} = 27$$

natijaga ega bo‘lshingiz kerak.
Shuning uchun matrisalar ko‘paytmasi

$$C = AB = \begin{bmatrix} 100 & 56 & 44 & 33 \\ 140 & 83 & 46 & 42 \\ 78 & 44.5 & 75 & 27 \end{bmatrix}$$

bo‘ladi.

O‘lcho‘vi katta bo‘lmagan matrisalar uchun matrisalar ko‘paytmasini hisoblash mumkin, lekin o‘lchovi katta matrisalar ko‘paytmasi murakkab bo‘ladi va ko‘p vaqtni oladi. Iqtisodiyot tadbiqlarida matrisalar ko‘paymasidan foydalanish unch muhim hisoblanmaydi. Agar matrisalar ko‘paytmasidan foydalanish zarurati tug‘ilsa, Excel dasturidan foydalanish mumkin.[4]

Ta’rif. *$A = (a_{ij})_{m\times n}$ va $B = (b_{ij})_{n\times k}$ matritsalar ko‘paytmasi deb, o‘lchami $m\times k$ bo‘lgan shunday $C = (c_{ij})_{m\times k}$ matritsaga aytiladiki, uning c_{ij} - elementi,*

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} \cdot b_{sj}\,, \quad i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,k}$$

tenglik orqali aniqlanib, matritsalar ko‘paytmasi $A\cdot B$ ko‘rinishda ifodalanadi, ya’ni $C = A\cdot B$.

$$A^k = \underbrace{A\cdot A\cdot ...\cdot A}_{k-marta} \text{ - } A \text{ matritsaning « k-darajasi» }.$$

Ta’rif. *Agar A matritsa elementlarining tartib raqamlarini o‘zgartirmagan holda satrlarini ustun yoki ustunlarini satr qilib almashtirsak, hosil bo‘lgan yangi matritsa A matritsaning transponirlangani deb nomlanib, $A^{/}$ (yoki A^T) shaklda belgilanadi.*

Amallarning xossalari

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $\lambda\cdot(A + B) = \lambda\cdot A + \lambda\cdot B$
4. $A\cdot(B + C) = A\cdot B + A\cdot C$, $(A + B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$;
5. $\lambda\cdot(A\cdot B) = (\lambda A)\cdot B = A\cdot(\lambda B)$;
6. $A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C$.

Shuni ta'kidlash kerakki $A\cdot B$ va $B\cdot A$ ko‘paytmalar mavjud bo‘lgan taqdirda ham $A\cdot B = B\cdot A$ tenglik o‘rinli bo‘lmasligi mumkin.

[4] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

Misol. $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&1&0\\0&2&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6&2&6\\10{,}5&6&3\\3&6&3\end{pmatrix}$ matrisalar uchun ko‘paytmani aniqlang.

Yechish.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&1&0\\0&2&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}6&2&6\\10{,}5&6&3\\3&6&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot6+0\cdot10{,}5+2\cdot3&1\cdot2+0\cdot6+2\cdot6&1\cdot6+0\cdot10{,}5+2\cdot3\\3\cdot6+1\cdot10{,}5+0\cdot3&3\cdot2+1\cdot6+0\cdot6&3\cdot6+1\cdot3+0\cdot3\\0\cdot6+2\cdot10{,}5+0\cdot3&0\cdot2+2\cdot6+0\cdot6&0\cdot6+2\cdot3+0\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&14&12\\28{,}5&12&21\\21&12&6\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}6&2&6\\10{,}5&6&3\\3&6&3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&2\\3&1&0\\0&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&14&12\\28{,}5&12&21\\21&12&6\end{pmatrix}.$$

$$A^k=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{k-marta}$$

A matritsaning « k-darajasi» ni aniqlaymiz.

Shartli ravishda $A^0=E$ va $A^1=A$ deb qabul qilinadi.

Agar A matritsa elementlarining tartib raqamlarini o‘zgartirmagan holda satrlarini ustun yoki ustunlarini satr qilib almashtirsak, hosil bo‘lgan yangi matritsa A matritsaning transponirlangani deb nomlanib, A' (yoki A^T) shaklda belgilanadi.

Masalan, $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&5\end{pmatrix}$ bo'lsa, $A'=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&5\end{pmatrix}$ bo ‘ladi.

A matritsani A' ga almashtirish matritsani transponirlash deb nomlanadi. Transponirlash quyidagi xossalarga ega:

1. $(A')'=A$ 2. $(\lambda A)'=\lambda\cdot A'$

3. $(A+B)'=A'+B'$ 4. $(A\cdot B)'=B'\cdot A'$

Matrisalarning iqtisodiyotdagi tadbiqlari

Misol 1. T vaqtda neftga bo‘lgan talab chiziqli bo‘lsin

$$q^t=\beta_0+\beta_1x_1^t+\beta_2x_2^t+\beta_3x_3^t+\beta_4x_4^t+\beta_5x_5^t$$

bu yerda yuqorigi indekslardagi t vaqt davrini ifodalaydi(darajani emas)

$x_1=$ neft narxi, $x_2=$ o‘rtacha daromad, $x_3=$ o‘rinbosar yoqilg‘i narxi, $x_4=$komplemanın narxi (masalan, avtomobil), $x_5=$ aholi.

Neftga bo‘lgan T vaqtdagi bu chiziqli talab vektor ko‘rinishida quyidagicha ifodalanilishi mumkin

$$q^t=\beta x^t=\begin{bmatrix}\beta_0&\beta_1&\beta_2&\beta_3&\beta_4&\beta_5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\x_1^t\\x_2^t\\x_3^t\\x_4^t\\x_5^t\end{bmatrix}$$

Misol 2. Neftga bo‘lan talab (million barrelda) ni $q = bx$ modelida tushuntirish mumkin va bunda

$$\beta = \begin{bmatrix}\beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4.2 & -0.1 & 0.4 & 0.2 & -0.1 & 0.2\end{bmatrix}$$

bo‘lsin,deb faraz qilaylik.

Tavsiflovchi o‘zgaruvchilar vektori

$$x = \begin{bmatrix}1 \\ x_1^t \\ x_2^t \\ x_3^t \\ x_4^t \\ x_5^t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{Constant} \\ \text{Price} \\ \text{Income} \\ \text{Price of substitute} \\ \text{Price of complement} \\ \text{Population (in m.)}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 \\ 30 \\ 18.5 \\ 52 \\ 12.8 \\ 61\end{bmatrix}$$

bo‘lganda neftga bo‘lgan talabni hisoblang.

Yechish. Neftga bo‘lgan talabni quyidagicha hisoblanadi

$$q = \beta x = \begin{bmatrix}4.2 & -0.1 & 0.4 & 0.2 & -0.1 & 0.2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 \\ 30 \\ 18.5 \\ 52 \\ 12.8 \\ 61\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}29.92\end{bmatrix}$$

Shunday qilib javob 29,92 million barrel.[5]

Misol 3. Telefon apparatlarini ta’mirlovchi usta 70% telefonlarni past darajada, 20% o‘rta darajada va 10% to‘liq ta’mirdan chiqardi. Statistik ma’lumotlarga ko‘ra 70% past darajada ta’mirlangan telefonlarni bir yildan keyin qayta 10% past darajada, 60% o‘rta darajada, 30% ni to‘liq ta’mirlashadi. O‘rta darajada ta’mirlangan telefonlarni bir yildan keyin qayta 20% past darajada, 50% o‘rta, 30% ni to‘liq ta’mirlashadi. To‘liq ta’mirlangan telefonlarni bir yildan keyin qayta 60% past darajada, 40% o‘rta darajada ta’mirlashadi. Agar masala sharti shu tarzda davom etsa 1, 2, 3 – yillardan keyingi har bir darajada ta’mirlangan telefonlar ulushini aniqlashda matrisalar algebrasidan foydalanish qulay.

$$X_0 = \begin{pmatrix}0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}4 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} X_1 &= X_0 \cdot A = \begin{pmatrix}0{,}17 & 0{,}56 & 0{,}27\end{pmatrix} \\ X_2 &= X_1 \cdot A = \begin{pmatrix}0{,}291 & 0{,}490 & 0{,}219\end{pmatrix} \\ X_3 &= X_2 \cdot A = \begin{pmatrix}0{,}2585 & 0{,}5072 & 0{,}2343\end{pmatrix}\end{aligned}$$

1.3. Determinantlar

2 tartibli (2×2 o‘lchovli) matris determinant deb qarama-qarshi burchakdagi elementlar ko‘paytmasining ayirishdah hosil bo‘lgan songa aytiladi. Odatda determinantlarni matrisalardan farqlash uchun ikki tomonidan vertical to‘g‘ri chiziqlar bilan belgilanadi, matrisa kabi kvadrat qavslar emas.

2×2 o‘lchovli A matrisa determinant |**A**| kabi belgilanadi.

---

[5] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

Shuning uchun

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Misol.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$$ matrisa determinanti topilsin.

Yechish. Yuqoridagi formuladan foydalanib hisoblaymiz

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 5 \times 9 - 7 \times 4 = 45 - 28 = 17$$

Agar matrisa satrlari yoki ustunlari orasida chiziqli bog‘lanish mavjud bo‘lsa, uning determinant nolga teng bo‘ladi va u xos matrisa deyiladi.

Masalan, $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 10 & 16 \end{bmatrix}$ matrisa determinanti

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 5 \times 16 - 8 \times 10 = 80 - 80 = 0,$$

shunig uchu A matrisa xos matrisadir.

Uchinchi tartibli determinant

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

uchinchi tartibli martisa uchun |**A**| determinant quyidagicha hisoblanadi:

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Bu birinchi satr elementlarini shu element turgan satr va ustunni o‘chirishdan hosil bo‘lgan matrisa determinantiga ko‘paytirishdan hosil qilinmoqda. Masalan, 3x3 o‘lchovli berilgan matrisa 1 satr va 1 ustunu o‘chirilishidan hosil bo‘lgan determinant elementga ko‘paytirilgan. Agar biz a_{11} belgilashga e’tibor bersak, u holda bu usulni satr bo‘yicha qo‘llaganda ishora almashadi. Demak, ikkinchi qo‘shiluvchi manfiy ishorali bo‘ladi.

Misol.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 9 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$ matrisa determinanti topilsin.

Yechish. Yuqoridagi formulaga ko‘ra, birinchi satr elementlari bo‘yicha yoyilma quyidagicha bo‘ladi[6]

[6] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

$$|A| = 4\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 9 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 4(20-0) - 6(8-18) + (0-45) = 80 + 60 - 45 = 95$$

Ta'rif. *n-tartibli kvadrat* $A=(a_{ij})$ *matritsaning determinanti deb, quyidagi tenglik bilan aniqlangan songa aytiladi:*

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \ A_{1k}$$

Bu ta'rifdan foydalanib 2 va 3 tartibli determinantlarni hisoblash uchun quyidagi formulalarni hosil qilamiz:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{2} a_{1k} A_{1k} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{3} a_{1k} A_{1k} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

$$+ a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

1-xossa*. Agar* A*-matritsaning biron-bir satridagi (ustunidagi) barcha elementlari nolga teng bo'lsa, u holda uning determinanti nolga teng bo 'ladi.*

2-xossa*. Agar* A*-matritsaning biron-bir satr (ustun) elementi* λ *soniga ko'paytirilsa, determinant qiymati ham* λ *soniga ko'payadi, ya'ni* $\lambda \cdot |A|$ *ga teng bo 'ladi.*

3-xossa*.* A*-matritsa va uning transponirlangani* A' *matritsalarning determinantlari teng bo'ladi, ya'ni* $|A| = |A'|$ *tenglik o'rinlidir.*

4-xossa*. Agar* A*- matritsaning ikkita qo'shni satrlari o'rnini almashtirsak, hosil bo'lgan yangi* A_1 *matritsaning determinanti* A*-matritsa determinantining teskari ishora bilan olinganiga teng bo 'ladi, ya'ni* $|A_1| = -|A|$ *tenglik o'rinli bo'ladi.*

5-xossa*. Agar* A*-matritsa bir xil ikki satrga (ustunga) ega bo'lsa, u holda uning determinanti nolga teng , ya'ni* $|A| = 0$ *bo 'ladi.*

6-xossa*. Agar* A*-matritsada ikki satrning (ustun) mos elementlari proporsional bo'lsa, u holda uning determinanti nolga teng, ya'ni* $|A| = 0$ *bo 'ladi.*

7-xossa*. Agar* A *matritsaning biron satr (ustun) elementlarini boshqa satr (ustun) mos elementlarining algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytirib yig'indi hosil qilsak, bunday yig'indi nolga teng bo'ladi, ya'ni* $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \ A_{jk} = 0, \quad i \neq j$ *.*

8- xossa*.* A *matritsaning biron-bir satri (ustuni) elementlarini bir xil songa ko'paytirib, boshqasiga qo'shishdan hosil bo'lgan* A_1*- matritsaning determinanti* A *matritsa determinantiga teng bo'ladi, ya'ni* $|A_1| = |A|$*.*

9-xossa*.* $b_1, \ b_2, \ldots, b_n$ *sonlarni n-tartibli* A *matritsaning berilgan satr (ustun) mos elementlarining algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytmasining yig'indisi,* A

matritsaning berilgan satr (ustun) elementlarining $b_1,\ b_2,\ldots,b_n$ *sonlari bilan almashtirilgan matritsa determinantiga teng bo ʻladi.*

10-xossa*. n-tartibli kvadrat* A *va* B *matritsalar uchun* $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$ *tenglik oʻrinli boʻladi, ya'ni matritsalar koʻpaytmasining determinanti, ularning determinantlari koʻpaytmasiga teng boʻladi.*

Misol. $\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -5 & 3\\ 2 & 7 & -1\end{vmatrix}=?$

Yechish. $\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -5 & 3\\ 2 & 7 & -1\end{vmatrix}=5+12+21+10-21+6=33.$

Nazorat savollari

1. *Iqtisodchilar uchun matematika fanining predmeti.*
2. *Matritsa nima?*
3. *Matritsalar ustida qanday amallar bajarilishi mumkin?*
4. *Qanday matritsalarni koʻpaytirish mumkin?*
5. *Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlarni hisoblash formulasini yozing.*

2-mashg'ulot

2.1. Yuqori tartibli determinantlar
2.2. Teskari matritsa
2.3. Matritsa rangi

2.1. Yuqori tartibli determinantlar

Laplas yoyilmasi yordamida har qanday tartibli determinantni hisoblash mumkin. Lekin buning uchun ba'zi tushunchalar bilan tanishishimiz kerak (ba'zilaridan biz foydalandik ham).

Minorlar

A matrisa |**M*ij*** | minori deb ***i*** satr va ***j*** ustunni o'chirishdan hosil bo'lgan determinantga aytiladi.

Masalan,

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

matrisa uchun

$$|M_{11}|=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Misol.

$A=\begin{bmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 1 & 9 & 4 \\ 4 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ matrisa uchun $|M_{31}|$ minorni hisoblang.

Yechish. Uchinchi satr va birinchi ustunni o'chirib

$$|M_{31}|=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix}=8-27=-19$$

minorni hosil qilamiz.

Minor ta'rifidan foydalanib, 3 tartibli determinant hisoblash formulasini quyidagicha yozish mumkin

$$|A|=a_{11}|M_{11}|-a_{12}|M_{12}|+a_{13}|M_{13}|$$

Algebraik to'ldiruvchi

$\left(-1\right)^{i+j}$ ishora aniqlikdagi |**M**ij | minorga $\left|C_{ij}\right|$ algebraik to‘ldiruvchi deyiladi. $\left|C_{ij}\right|$ algebraik to‘ldiruvchi ishorasi $\left(-1\right)^{i+j}$. Shunday qilib, satr va ustun nomerlari yig‘indisi toq bo‘lsa,u holda ishora manfiy bo‘ladi. Masalan, 3 tartibli **A** matrisada $\left|C_{12}\right|$ algebraik to‘ldiruvchini toppish uchun 1 satr va 2 ustunni o‘chiramiz, $i+j=3$ bo‘lgani uchun hosil bo‘lgan determinantni $\left(-1\right)^3$ ga ko‘paytiramiz. Demak,

$$\left|C_{12}\right| = \left(-1\right)^3 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \left(-1\right) \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Misol. $A = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 1 & 9 & 4 \\ 4 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ matrisa uchun $\left|C_{22}\right|$algebraik to‘ldiruvchini toping.

Yechish. $i + j = 4$ bo‘lgani uchun

$$\left|C_{22}\right| = \left(-1\right)^4 \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = \left(+1\right)\left(48-12\right) = 36$$

Algebraic to‘ldiruvchi ta’rifidan foydalanib, 3 tartibli determinant hisoblash formulasini quyidagicha yozish mumkin

$$|A| = a_{11}\left|C_{11}\right| + a_{12}\left|C_{12}\right| + a_{13}\left|C_{13}\right| \qquad (1)$$

Bu munosabat xuddi A determinantni hisoblash formulasidek ko‘ringani bilan, shuni ta’kidlash kerakki, bu yerdagi ikkinchisi element ishorasi musbatligiga qaramasdan unga mos algebraik to‘ldiruvchilardan manfiydir.

Laplas yoyilmasi

Har qanday n tartibli matrisa determinantini Laplas yoyilmasidan foydalanib hisoblash mumkin

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\left|C_{ij}\right| , \quad j = 1,2,3,...,n$$

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left|C_{ij}\right| , \ i = 1,2,3,...,n$$

bunda yig‘indi 1 dan n gacha ustun bo‘yicha ham(j) yoki satr bo‘yicha ham (i) bo‘lishi mumkin. Agar siz (1) 3 tartibli determinant hisoblash formulasiga e’tibor bersangiz, u Laplas yoyilmasini ifodalaganini anglaysiz. Agar berilgan matrisa 4 yoki yuqori tartibli bo‘lsa, u holda algebraic to‘ldiruvchilar 3 tartibli yoki yuqori tartibli bo‘ladi. shunday qilib, Laplas yoilmasi tarbni pasytirish orqali hisoblashdir,ya’ni berilgan determinantning tartibi bittaga pasayadi. Har qanday yuqori tartibli determinantni

Laplas yoyilmasidan foydalanib hisoblaganda unu tartibini ikkinchi tartibgacha tushirib hishoblash qulay.

Determinant tartibi yetarli katta bo‘lganda ko‘p hisoblashlar bajarishga to‘g‘ri keladi va shuning uchun tezroq hisoblash usullari zarur bo‘ladi.

Oldin bu usulda hisoblashga misol ko‘raylik.

Misol. Laplas yoyilmasidan foydalanib, quyidagi matrisa determinantni hisoblang

$$A=\begin{bmatrix} 8 & 10 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 & 10 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Yechish. Matrisa determinantini hisoblash uchun uni birinchi ustun elementlari bo‘yicha yoyamiz(bu ustonda nol elementi bo‘lgani uchun hisoblashda bitta kam uchinchi tartibli determinant hisoblash qulaylik tug‘diradi)

$$|A|=8\begin{vmatrix} 5 & 7 & 10 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{vmatrix}-0\begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 10 \\ 4 & 4 & 0 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 10 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Endi uchinchi tartibli har bir determinantni yana birinchi ustun elementlari bo‘yicha yoyamiz:

$$\begin{aligned}
|A| &= 8\left(5\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 7 & 10 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}+4\begin{vmatrix} 7 & 10 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}\right)+2\left(10\begin{vmatrix} 7 & 10 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}-5\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 10 \end{vmatrix}\right)- \\
&-3\left(10\begin{vmatrix} 7 & 10 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}-5\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 10 \end{vmatrix}\right)= \\
&=8\left[5(-16)-2(-40)+4(18)\right]+2\left[10(-40)-5(-12)+4(-1)\right]- \\
&-3\left[10(18)-5(5)+2(-1)\right]= \\
&=8[-80+80+72]+2[-400+60-4]-3[180-25-2]= \\
&=8(72)+2(-344)-3(153)= \\
&=576-688-459=-571
\end{aligned}$$

Determinantlarni hisoblashda Excel dasturidan foydalanish

Determinant qiymatini hisoblashda Excel dasturining MDETERM functionksiyasi qulay hisoblanadi. Hisoblanayongan determinantni kiriting.

Determinantni o‘lchovini klavish yordamida belgilab yoki bevosita uni deapozonini ko‘rsatgan holda aniqlash mumkin. Maslan, 15.14 misoldagi 4 × 4 matrisani B2 to E5 joylashtirib, = MDETERM (B2:E5) kirinsangiz,uning qiymatini G2 katakda hosil bo‘ladi. [7]

[7] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

Ta'rif. *n-tartibli kvadrat $A=(a_{ij})$ matritsa a_{ij} elementining M_{ij}-minori deb, A-matritsaning i-satri va j-ustunini o'chirishdan keyin hosil bo'lgan $(n-1)$ tartibli matritsa determinantiga aytiladi.*

Ta'rif. *n-tartibli $A=(a_{ij})$ matritsa a_{ij}-elementining algebraik to'ldiruvchisi A_{ij} - deb quyidagi songa aytiladi $A_{ij}=(-1)^{i+j}\ M_{ij}$.*

Yig'indi $\sum_{s=1}^{n} a_{is}\ A_{is}$ – i-satr bo'yicha yoyilma, $\sum_{k=1}^{n} a_{kj}\ A_{kj}$ yig'indi esa, j-ustun bo'yicha yoyilma deb ataladi.

Ta'rif. *n-tartibli kvadrat $A=(a_{ij})$ matritsaning determinanti deb, quyidagi tenglik bilan aniqlangan songa aytiladi:*

$$|A|=\sum_{k=1}^{n} a_{1k}\ A_{1k}$$

Teorema (Laplas teoremasi). *Istalgan i va j lar uchun*

$$\sum_{s=1}^{n} a_{is}\ A_{is}=\sum_{k=1}^{n} a_{kj}\ A_{kj}=|A| \quad i=\overline{1,n}; \quad j=\overline{1,n}$$

tenglik o'rinli bo 'ladi.

Misol. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -5 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -4 & 2 \end{vmatrix}$ determinant hisoblansin.

I usul. Dastlab, to'rtinchi satr elementlari bo'yicha yoyib hisoblaymiz

$$|A|=a_{41}A_{41}+a_{42}A_{42}+a_{43}A_{43}+a_{44}A_{44}=-a_{41}M_{41}+a_{42}M_{42}-a_{43}M_{43}+a_{44}M_{44}.$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -5 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -4 & 2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix}+5\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -5 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix}+4\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & 4 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix}=546.$$

II usul. Endi, determinantning xossalaridan foydalanib, uchinchi ustun elementlarini nolga aylantiramiz va shu ustun bo'yicha yoyib hisoblaymiz:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -5 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -4 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 17 & -10 & 0 & 6 \\ -5 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 4 \\ -19 & 17 & 0 & -6 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 17 & -10 & 6 \\ -3 & -2 & 4 \\ -19 & 17 & -6 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 17 & -10 & 6 \\ -3 & -2 & 4 \\ -2 & 7 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=2\begin{vmatrix} -10 & 6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}+7\begin{vmatrix} 17 & 6 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}=2(-40+12)+7\left(68+18\right)=546.$$

Bu usulni "*determinantni tartibini pasaytirib hisoblash usuli*" deb ham yuritiladi.

2.2. Teskari matritsa

Teskari matrisa formulasini topishdan oldin ba'zi zarur tushunchalar bilan tanishamiz.

Transponirlangan matrisa

Marisa mos satrlarini uning mos ustunlariga almashtirishdan hosil bo'lgan matrisaga transponoirlangan matrisa deyiladi. A matrisaning trasponirlangani A^T kabi belgilanadi.

Masalan, $A=\begin{bmatrix} 5 & 20 \\ 16 & 9 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}$ uchun transponirlangan matrisa $A^T=\begin{bmatrix} 5 & 16 & 12 \\ 20 & 9 & 6 \end{bmatrix}$

Kofaktor matrisa

Matrisa har bir elementini uning algaebraik to'ldiruvchisi bilan almashtirishdan hosil bo'lgan matrisa kofaktor matrisa deyiladi va u C bilan belgilanadi.

Masalan, $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ uchun $C=\begin{bmatrix} 25 & -15 & -12 \\ -14 & -2 & 12 \\ -15 & 9 & -2 \end{bmatrix}$

Bu matrisa elementlari qanday hisoblanganini o'rganaylik. **A** matrisa $|C_{ij}|$ algebraik to'ldiruvchisini hisoblash uchun shu element joylashgan I satr va j ustu o'chirilib, hosil bo'lgan determinant $(-1)^{i+j}$ ishora aniqligida olinadi.

C matrisa elementlari quyidagicha hisoblangan

$$c_{11}=|C_{11}|=(-1)^{(1+1)}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=(-1)^2\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=(25-0)=25$$

$$c_{21}=|C_{21}|=(-1)^{(2+1)}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=(-1)^3\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=(-1)(20-6)=-14$$

va h.k.

C matrisa qolgan elementlarni o'zingiz tekshiring.

Biriktirilgan matrisa

Kofaktor matrisaning trasponirlangan matrisasiga biriktirilgan matrisa deyiladi va a matrisaning biriktirilgan matrisasi Adj A kabi belgilanadi.

Masalan, $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ matrisa uchun $AdjA=\begin{bmatrix} |C_{11}| & |C_{21}| & |C_{31}| \\ |C_{12}| & |C_{22}| & |C_{32}| \\ |C_{13}| & |C_{23}| & |C_{33}| \end{bmatrix}$

Yuqoridagi misoldagi $A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 3\\ 3 & 5 & 0\\ 4 & 2 & 5\end{bmatrix}$ matrisa uchun kofaktor matrisa $C=\begin{bmatrix}25 & -15 & -12\\ -14 & -2 & 12\\ -15 & 9 & -2\end{bmatrix}$ va biriktirilgan matrisa $AdjA=C^T=\begin{bmatrix}25 & -14 & -15\\ -15 & -2 & 9\\ -12 & 12 & -2\end{bmatrix}$.

Teskari matrisa

Xos bo‘lmagan, ya’ni | A | determinant nol bo‘lmagan, A matrisaning teskari matrisasi

$$A^{-1}=\frac{AdjA}{|A|}$$

formula yordamida hisoblanadi..

Misol. $A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 3\\ 3 & 5 & 0\\ 4 & 2 & 5\end{bmatrix}$ matrisaga A^{-1} teskari matrisa topilsin.

Yechish. Bu matrisa uchun yuqoridagi misolda biriktirilgan matrisa topgan edik. Bu matrisa determinantini hisoblaymiz

$$\begin{aligned}|A| &= 3\begin{vmatrix}3 & 5\\ 4 & 2\end{vmatrix}-0+5\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 5\end{vmatrix}=\\ &=3(6-20)+5(10-12)=\\ &=3(-14)+5(-2)=\\ &=-42-10=-52\end{aligned}$$

Shuning uchun,

$$\mathbf{AdjA}=\begin{bmatrix}25 & -14 & -15\\ -15 & -2 & 9\\ -12 & 12 & -2\end{bmatrix}$$

Bo‘lgani uchun teskari matrisa quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi

$$A^{-1}=\frac{AdjA}{|A|}=\frac{\begin{bmatrix}25 & -14 & -15\\ -15 & -2 & 9\\ -12 & 12 & -2\end{bmatrix}}{-52}=\begin{bmatrix}-0.48 & 0.27 & 0.29\\ 0.29 & 0.04 & -0.17\\ 0.27 & -0.23 & 0.04\end{bmatrix}$$

Bu matrisani hisoblash ko‘p vaqt talab etadi, lekin siz bu usul asosiyligini bilishingiz kerak, elektron jadvalda hisoblashdan oldin. Endi misol yordamida har bir etapni aniqlaylik. Soddalik uchun 2x2 o‘lchovli holni qaraylik.

Misol. $A=\begin{bmatrix}20 & 5\\ 6 & 2\end{bmatrix}$ matrisaga A^{-1} teskari matrisa toping.

Yechish. A matrisa to‘rt elementli bo‘lgani uchun, kofaktor matrisa bosh diagonal elementlari qarama-qarshi ishorali bo‘ladi.

Bu matrrisaga kofaktor matrisa

$$C=\begin{bmatrix}2 & -5\\ -5 & 20\end{bmatrix}$$

matrisa bo‘ladi.

Bu matrisaga biriktirilgan matrisa

$$\mathbf{AdjA}=\begin{bmatrix}2 & -5\\ -5 & 20\end{bmatrix}$$

bo‘ladi.

Bu matrisa determinanti

$$|A|=20\times 2-5\times 6=40-30=10.$$

Demak bu matrisaga teskari matrisa[8]

$$A^{-1}=\frac{AdjA}{|A|}=\frac{\begin{bmatrix}2 & -5\\ -6 & 20\end{bmatrix}}{10}=\begin{bmatrix}0.2 & -0.5\\ -0.6 & 2\end{bmatrix}.$$

Ta’rif. *A kvadrat matritsaga teskari matritsa deb, shunday A^{-1} matritsaga aytiladiki, uning uchun quyidagi $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$ tenglik o‘rinli bo‘lsin.*

Ta’rif. *Agar A matritsa uchun $|A|\neq 0$ bo‘lsa, bunday matritsa xos bo‘lmagan matritsa, aks holda, ya’ni $|A|=0$ bo‘lsa xos matritsa deyiladi.*

***Teorema**. A kvadratik matritsaga teskari A^{-1} matritsa mavjud va yagona bo‘lishi uchun, uning xos bo‘lmagan matritsa bo‘lishi zarur va yetarlidir.*

A-matritsa xos bo‘lmagan matritsa bo‘lsin, ya’ni $|A|\neq 0$ bo‘lsin. U holda

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\dots A_{j1}\dots A_{n1}\\ A_{12} & A_{22}\dots A_{j2}\dots A_{n2}\\ A_{1k} & A_{2k}\dots A_{jk}\dots A_{nk}\\ A_{1n} & A_{2n}\quad A_{jn}\dots A_{nn}\end{pmatrix}.$$

Misol. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -5 & 3\\ 2 & 7 & -1\end{pmatrix}$ matrisaga teskari matrisani toping..

Yechish. $|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -5 & 3\\ 2 & 7 & -1\end{vmatrix}=5+12+21+10-21+6=33\cdot$

$A_{11}=-16,\ A_{12}=9,\ A_{13}=31$

$A_{21}=9,\ A_{22}=-3,\ A_{23}=-3$

$A_{31}=11,\ A_{32}=0,\ A_{33}=-11$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}-16 & 9 & 11\\ 9 & -3 & 0\\ 31 & -3 & -11\end{pmatrix}=\frac{1}{33}\begin{pmatrix}-16 & 9 & 11\\ 9 & -3 & 0\\ 31 & -3 & -11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{16}{33} & \frac{3}{11} & \frac{1}{3}\\ \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} & 0\\ \frac{31}{33} & -\frac{1}{11} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

[8] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

Teskari matrisani Excel dasturida hisoblash

Teskari matrisani Excel dasturida qulay hisoblash mumkin.
Buning uchun Excel MINVERSE formulasi qo‘llaniladi:
- Matrisa kiritiladi.
- teskari matrisa uchun joy ajratiladi.
- ekrannig yuqori bar qismiga:

=MINVERSE *(matrisa o‘lchovi)* formulani kiritimg
- Ctrl va ENTER klavishlarini birga bosing.

Formula {} figurali qavsda ajratilgan joyda teskari matrisani hisoblab beradi.[9]

2.3. Matritsa rangi

Ta'rif. *A matritsaning rangi deb uning noldan farqli minorlarining eng yuqori tartibiga aytilib, $r\ (A)$ orqali belgilanadi.*

Ta'rif. *Matritsa ustidagi elementar almashtirishlar deb quyidagi almashtirishlarga aytiladi:*
1. Barcha elementlari noldan iborat satrni (ustunni) tashlab yuborish.
2. Satrning (ustunning) barcha elementlarini noldan farqli songa ko‘paytirish.
3. Satr (ustun) o‘rinlarini almashtirish.
4. Berilgan satr (ustun) elementlariga boshqa satr (ustun) elementlarini biron songa ko‘paytirib qo‘shish.
5. Matritsani transponirlash.

Teorema. *Matritsa rangi uning ustida elementar almashtirishlarni bajarish natijasida o‘zgarmaydi.*

Matritsa rangi uchun quyidagi xossalar o‘rinli

1. $r(A+B)\le r(A)+r(B)$ 2. $r(A+B)\ge |r(A)-r(B)|$

3. $r(AB)\le \min\{r(A),r(B)\}$ 4. $r(A'A)=r(A)$

Ta'rif. *Agar* $I_1=(a_{11},a_{12},\ldots,a_{1n}),\ I_2=(a_{21},\ a_{22},\ \ldots,a_{2n}),\cdots,I_m=(a_{m1},a_{m2},\cdots,a_{mn})$ *satrlar va* $\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_m$ *sonlar uchun* $\lambda_1 I_1+\lambda_2 I_2+\cdots+\lambda_m I_m=0$ *tenglik faqat* $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_m=0$ *shartdagina o‘rinli bo‘lsa, u holda* $I_1,\ I_2,\ldots,I_m$ *satrlar chiziqli erkli satrlar , aks holda esa ular chiziqli bog‘liq satrlar deyiladi.*

Teorema. *Matritsa uchun uning chiziqli erkli satrlarning maksimal soni chiziqli erkli ustunlarning maksimal soniga teng bo‘ladi.*

Teorema. *Matritsa rangi undagi chiziqli erkli satrlarning (ustunlarning) maksimal soniga teng bo‘ladi.*

Matritsa rangini “rang ta’rifi” bo‘yicha hisoblash doim ham oson ish bo‘lavermaydi. Matritsa rangini topish uchun matritsa ustida elementar almashtirishlar bajarish natijasida bu matritsani uchburchak yoki trapetsiya ko‘rinishiga olib kelish mumkin.

[9] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

Misol. Berilgan matrisalarning rangini toping. $A=\begin{pmatrix}5&2&1&3\\3&-1&1&2\\1&2&4&8\\3&-1&1&2\end{pmatrix}$

Yechish.

$$\boxed{-1}\ \boxed{-4}\ \boxed{-1}\quad \begin{pmatrix}5&2&1&3\\3&-1&1&2\\1&2&4&8\\3&-1&1&2\end{pmatrix}\ + \ + \ \to\begin{pmatrix}5&2&1&3\\-2&-3&0&-1\\-19&-6&0&-4\\-2&-3&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&5&3\\0&-3&-2&-1\\0&-6&-19&-4\\0&-3&-2&-1\end{pmatrix}\ \boxed{-2}\ \boxed{-1}\ + \ +$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&5&3\\0&-3&-2&-1\\0&0&-15&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Demak, $rang(A) = 3$.

Nazorat savollari

1. *Minor va algebraik to‘ldiruvchi orasida qanday farq bor?*
2. *Teskari matritsa deb qanday matritsaga aytiladi?*
3. *Teskari matritsa qanday topiladi?*
4. *Matritsa rangi ta'rifini keltiring.*
5. *Matritsa rangini hisoblash usullarini keltiring.*

3-mashg'ulot

1.3.1. Chiziqli tenglamalar sistemasi.
1.3.2. Tenglamalar sistemani matrisaviy usulda yechish.
1.3.3. Tenglamalar sistemani Kramer qoidasida yechish.

Tayanch iboralar: *noma'lum, yechim, matritsa, determinant , birgalikdagi sistema, aniqmas sistema, aniq sistema, birgalikda bo'lmagan sistema, matrisaviy usul, Kramer formulalari.*

1.3.1. Chiziqli tenglamalar sistemasi

Matrisalarda “bo‘lish” amali teskari matrisa tushunchasi yodamida tushuntiriladi.

Bu tushunchaning kiritilishiga sabablardan biri matrisaviy shaklagi chiziqli tenglamalar sistemasini yechimlarini topishni aniqlashda teskari matrisa usulini qollash mumkinligidir.

Masalan, to‘r noma’lumli chiziqli tenglamalar sistemasini qaraylik:

$$3x_1 + 8x_2 + x_3 + 2x_4 = 96$$

$$20x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 0.5x_4 = 69$$

$$11x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 75$$

$$x_1 + 12x_2 + x_3 + 8x_4 = 134$$

Ushbu tenglamalarni matritsaviy shaklida quyidagicha ifodalash mumkin:

• x_1, x_2, x_3 va x_4 to‘rt noma’lum o‘zgarmaydigan koeffitsientlari 4 × 4 o‘lchamli **A** matrisani aniqlaydi

• to‘rt noma’lum o‘zgaruvchilarning o‘zlari esa 4 × 1 o‘lchovli *x* vectorni aniqlaydi

• tenglamaning o‘ng tomondagi o‘zgarmas sonlar 4 × 1 o‘lchovli ***b*** vectorni aniqlaydi.

Sitemani quyidagicha yoza olamiz

$$Ax = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 1 & 2 \\ 20 & -2 & 4 & 0.5 \\ 11 & 3 & 3 & -5 \\ 1 & 12 & 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 96 \\ 69 \\ 75 \\ 134 \end{bmatrix} = b$$

Bu yozuvni to‘g‘riligini ***Ax*** matrisalar ko‘paytirish qoidasidan foydalanib soda tekshirib ko‘rish mumkin. ***A*** vektorning satr elementlari ***x*** vektorning ustun bo‘yicha mos elementlariga ko‘paytirilib, qo‘shiladi. Agar siz ***Ax*** ko‘paytma matrisa barcha elementlarini hisoblab, ***b*** matrisa mos elementlariga tenglashtirsangiz, u holda birgalikdagi chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilasiz.

Masalan, ***A*** matrisa birinchi satr elementlarini ***x*** vectorning mos elementlariga ko‘paytirib, ***Ax*** ko‘paytmaning birinchi elementini beradi

$$3x_1 + 8x_2 + x_3 + 2x_4.$$

Uni ***b*** mvektorning birinchi elementiga 96 ga tenglab, birinchi tenglamani hosil qilamiz.

Bu tenglamalar sistemasini biror standart usullar yordamida yechish mumkin, lekin matrisaviy usulning afzalliklari mavjud bo‘lib, ular bilaan keingi bo‘limlarda tanishamiz.

Umumiy hol uchun ham matrisaviy usulni qollash mumkin.

n ta $x_1, x_2, \dots, x_n$ noma’lumli n chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lsin. $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ ozod hadlar.

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{matrix}$$

Bu n noma’lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasini ***Ax = b*** matrisaviy ko‘rinishda yozish mumkin, bu yerda ***A*** $n \times n$ o‘lchovli koeffisientlar matrisasi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ - noma’lumlar matrisasi, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ - ozod hadlar matrisasi.

Bu birgalikdagi ***Ax=b*** tenlamalar sistemasini qanday ***x*** no‘malumlar uchun yechish mumkin? Agar ***Ax = b*** tenlamada *A* va *b* matrisa bo‘lamasdan son bo‘lganida, u holda bu munosabatdan ***x*** noma’lumni $x = A^{-1} \cdot b$ korinishida soda toppish mumkin bo‘lar edi. ***x, A*** va ***b*** matrisalar bo‘lganda ham shi manoda yechim topishga harakat qilamiz.[10]

n ta noma’lum va m ta tenglamadan iborat chiziqli tenglamalar sistemasi deb quyidagi sistemaga aytiladi.

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1j}\,x_j + \cdots + a_{in}\,x_n = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}x \;\; + \cdots + a_{2j}\;\; x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_{i1}\;x_1 + a_{i2}\,x_2 + \cdots + a_{ij}\,x_j + \cdots + a_{in}\;x_n = b_i \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_{m1}x_1 \quad a_{m2}\;\; x_2 + \cdots + a_{mj}\;x_i + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

,

[10] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

bu yerda $a_{ij}, b_i\,(i=\overline{1,m};\, j=\overline{1,n})$- berilgan sonlar bo‘lib, a_{ij} – noma’lumlar oldidagi koeffitsientlar, b_i – ozod hadlar deyiladi.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\dots a_{2n} \\ -\ -\ -\ - \\ a_{m1}\ a_{m2}\dots a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

bu yerda A koeffitsientlar (1) yoki sistema matritsasi, B - ozod hadlar matritsasi deyiladi. U holda berilgan tenglamalar sistemasini quyidagi ko‘rinishda yoza olamiz: $AX=B$

Ta'rif. *Agarda tenglamalar sistemasi yechimga ega bo‘lsa, u birgalikda deyiladi, aks holda birgalikda emas deyiladi.*

Ta'rif. *Birgalikda bo‘lgan tenglamalar sistemasi yagona (cheksiz ko‘p) yechimga ega bo‘lsa, u aniq (noaniq) deyiladi.*

Bizga tenglamalar sistemasidan tashqari, quyidagi

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \dots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a'_{m1}x_1 + a'_{m2}x_2 + \dots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi ham berilgan bo‘lsin.

Ta'rif. *Agar tenglamalar sistemalarining yechimlar to‘plami ustma-ust tushsa, u holda ular teng kuchli (ekvivalent) deyiladi.*

1.3.2. Tenglamalar sistemani matrisaviy usulda yechish

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\dots a_{2n} \\ -\ -\ -\ - \\ a_{m1}\ a_{m2}\dots a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

bu yerda A koeffitsientlar sistema matritsasi, B - ozod hadlar matritsasi deyiladi. U holda berilgan tenglamalar sistemasini quyidagi ko‘rinishda yoza olamiz:

$$AX=B$$

Tenglamalar sistemasida tenglamalar soni noma’lumlar soniga teng, ya’ni $m=n$, bo‘lsin. Bu holda sistema matritsasi A kvadrat matritsa bo‘ladi. Agar $\Delta\neq 0$ bo‘lsa, ya’ni A-xos bo‘lmagan matritsa bo‘lsa, u holda A^{-1} teskari matritsa mavjud bo‘ladi, u holda $AX=B$ tenglikdan quyidagilarni hosil qilamiz:

$A^{-1}(AX)=A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$ bu munosabatdan:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11}\ A_{21}\cdots A_{nn} \\ A_{12}\ A_{22}\cdots A_{n2} \\ ------ \\ A_{1j}\ A_{2j}\cdots A_{n2} \\ A_{1n}\ A_{2n}\cdots A_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Oxirgi tenglikdan $x_j = \dfrac{1}{\Delta}(b_1\ A_{1j} + b_2\ A_{2j} + \dots + b_n\ A_{nj}) = \dfrac{\Delta j}{\Delta},\ \Delta_j = \overline{1,n}$ ekanligi kelib chiqadi.

Masalan. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=1 \\ x_1+2x_2+3x_3=0 \\ 3x_1+4x_2+6x_3=1 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini matrisa usulida yechaylik.

Sistemaga mos asosiy, ozod hadlar va noma’lumlar matrisalari mos ravishda quyidagicha bo‘ladi: $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$

$|A|=24+27+16-24-24-1=1\neq 0$ bo‘lgani uchun $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ bo‘ladi.

U holda, $X=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Demak, $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1.$

1.3.3. Tenglamalar sistemani Kramer qoidasida yechish

Kramer usuli ham chiziqli tenglamalar sistemasining yechishning bir usuli bo‘lib, bunda yechimlar determinantlar orqali sodda topiladi. Bu usul biror aniq noma’lumni topishda matrisaviy usulga nisbatan samaraliroqdir. Excel dasturida teskari matrisa topish va ko‘paytirishni bilishingizga qarasmasdan, qo‘lda hisoblashdagi vaqt muhim emas. Shuning uchun iqtisodiy jarayonlarni o‘rganishda Kramer usuli qulay hisoblanadi. Murakkabroq iqtisodiy matematika uchun Kramer qoidasi quyida algebraik formula ko‘rinishida keltiriladi.

Ma’lumki, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n ta noma’lumli chiziqli tenglamalar sistemasining matrisaviy ko‘rinishi $Ax = b$ bo‘lib**,** bunda

A parameterlarning $n \times n$ o‘lchovli matrisasi,
x noma’lumlarning $n \times 1$ o‘lchovli vectori va
b ozod hadlarning $n \times 1$ o‘lchovli matrisasi.

Kramer qoidasi har qanday x_i nomalumni toppish uchun A matrisa i ustuniga b matrisa elementlarini qo‘yib, hosil bo‘lgan matrisa determinantini berilgan A matrisa determinantiga bo‘lishdan hosil qilishini anglatadi.
Demak,

$$x_i=\frac{|A_i|}{|A|}$$

Misol. x_1 va x_2 noma’lumlarni Kramer qoidasi yordamida toping

$$5x_i+0.4x_2=12$$
$$3x_1+3x_2=21$$

Yechish. Bu sistemaning matrisaviy ko‘rinishi

$$Ax = \begin{bmatrix} 5 & 0.4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 21 \end{bmatrix} = b$$

Kramer qoidasini qo‘llab, x_1 noma’lumni aniqlaymiz

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 0.4 \\ 21 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 0.4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{36 - 8.4}{15 - 1.2} = \frac{27.6}{13.8} = 2$$

Xuddi shu kabi x_2 noma’lum ham aniqlanadi[11]

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1.2 \\ 3 & 21 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 0.4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{105 - 36}{15 - 1.2} = \frac{69}{13.8} = 5$$

Kramer teoremasi. *Agar sistema determinanti* $\Delta \neq 0$ *bo‘lsa, u holda (1) sistema yagona yechimga ega bo‘lib, bu yechim quyidagi formulalar orqali topiladi.*

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \qquad j = \overline{1, n}$$

$x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = \overline{1, n}$ formulalar Kramer formulalari deb ,tenglamalar sistemasini bu formulalar orqali yechilishi esa Kramer yoki determinantlar usuli deyiladi.

tenglamalar sistemasini Kramer usulida yeching.

Misol. Tenglamalar sistemasini yeching. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$

Yechish. $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -16$. Asosiy determinan Δ = -16 $\neq$ 0 bo‘lgani uchun sistema yagona yechimga ega va uni Kramer formulalaridan topamiz

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -32$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 16$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -16$. $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 1$.

1. *Birgalikdagi chiziqli tenglamalar sistemasi deb qanday sistemaga aytiladi?*
2. *Aniq sistemasi deb qanday sistemaga aytiladi?*
3. *Aniqmas sistemasi deb qanday sistemaga aytiladi?*
4. *Birgalikda bo’lmagan sistemasi deb qanday sistemaga aytiladi?*
5. *Chiziqli tenglamalar sistemasi matrisaviy usulda qanday yechiladi?*
6. *Chiziqli tenglamalar sistemasi Kramer usulda qanday yechiladi?*

[11] Mike

4-mashg'ulot

1.4.1. Tenglamalar sistemani Gauss usulida yechish.
1.4.2. Kronekker-Kopelli teoremasi.
1.4.3. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi.

Tayanch iboralar: *asosiy matrisa, kengaytirilgan matrisa, rang, o'lchov va rang, bir jinsli sitema, yechimlar to'plami.*

1.3.4. Chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usulida yechish

Yuqorida keltirilgan usullarni tenglamalar soni noma'lumlar soniga teng bo‘lgan holdagina qo‘llash mumkin. Umumiy holda qo‘llaniladigan usul - Gauss usulidir. Gauss usuli noma'lumlarni ketma-ket yo‘qotish usuli deb ham nomlanadi.

Chiziqli tenglamalar sistemasi ustida bajariladigan elementar almashtirish deb quyidagilarga aytiladi:

- sistemadagi biron-bir tenglamani noldan farqli songa ko‘paytirish,
- tenglamalar o‘rnini almashtirish,
- biron-bir tenglamani songa ko‘paytirib, boshqa bir tenglamaga qo‘shish.

Mana shu almashtirishlar natijasida hosil bo‘lgan yangi tenglamalar sistemasi avvalgisiga ekvivalent, ya’ni yechimlar to‘plami ikkala sistema uchun bir xil bo‘ladi.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x + \cdots + a_{2j}\ x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_{m1}x_1 \quad a_{m2}\ x_2 + \cdots + a_{mj}x_i + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

sistema matritsasi va ozod hadlar ustuni yordamida kengaytirilgan matritsa hosil qilamiz,

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 \cdots x_n & \end{array} \\ \bar{A} = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\cdots a_{1n} & | \, b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\cdots a_{2n} & | \, b_2 \\ - - - - & - - - - & - - - - & | \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}\cdots a_{mn} & | \, b_m \end{pmatrix} \end{array}$$

Kroneker-Kapelli teoremasi. *Agar sistema matritsasi rangi kengaytirilgan matritsa rangiga teng bo‘lsa, ya’ni* $r(A) = r(\bar{A})$ *bo‘lsa, u holda sistema birgalikda bo‘ladi, ya’ni yechimga ega bo‘ladi.*

Demak, biz quyidagi xulosalarni qilishimiz mumkin ekan.

1. Agar $r(A) = r(\bar{A})$ bo‘lsa, sistema birgalikda bo‘ladi.
2. Agar $r(A) \neq r(\bar{A})$ bo‘lsa, sistema birgalikda bo‘lmaydi.
3. Agar $r(A) = r(\bar{A}) = n$ bo‘lsa, sistema yagona yechimga ega bo‘ladi.
4. Agar $r(A) = r(\bar{A}) < n$ bo‘lsa, sistema cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi.

Misol. Sistemani Gauss usuli bilan yeching.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 20 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 17 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -4 \end{cases}.$$

Yechish. Sistemani Gauss usuli bilan yechamiz. Sistemaning kengaytirilgan matrisasini yozib: $a_{11} = 1$ hisoblashlar uchun qulaydir. Shuning uchun birinchi va to‘rtinchi satrlarning or’nini almashtiramiz

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & -1 & 3 & 20 \\ 5 & -1 & 2 & -1 & 17 \\ -3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 5 & -1 & 2 & -1 & 17 \\ -3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 20 \end{array}\right) \quad \boxed{-5} \quad \boxed{3} \quad \boxed{-} \quad + \quad + \quad +$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & -18 & 9 & 37 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & 13 \\ 0 & 3 & -9 & 7 & 28 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & 13 \\ 0 & 4 & -18 & 9 & 37 \\ 0 & 3 & -9 & 7 & 28 \end{array}\right) \quad \boxed{4} \quad \boxed{3}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 26 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 24 & -5 & -5 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 26 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{19}{13} & \frac{19}{13} \end{array}\right).$$

Kengaytirilgan matrisa zinapoya ko‘rinishiga keltirildi. Unga mos keluvchi sistemaning ko‘rinishi quyidagicha:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -4 \\ -x_2 - 11x_3 - 4x_4 = -11 \\ 26x_3 - 7x_4 = -7 \\ \frac{19}{13}x_4 = \frac{19}{13} \end{cases}$$

oxirgi tenglamadan $x_4 = 1$, uchinchidan $x_3 = \frac{-7 + 7x_4}{26} = 0$, ikkinchidan $x_2 = 11 + 11x_3 - 4x_4 = 7$ va birinchidan $x_1 = -4 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 5$ yechimlarni olamiz.

1.3.5. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi

Agar chiziqli tenglamalar sistemasida ozod hadlar nolga teng bo‘lsa, ya'ni $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$ bo‘lsa, hosil bo‘lgan tenglamalar sistemasi bir jinsli tenglamalar sistemasi deyiladi, ya'ni

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \cdots + a_{1n}\, x_n = 0 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \cdots + a_{2n}\, x_n = 0 \\ ----------------- \\ a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + \cdots + a_{mn}\, x_n = 0 \end{cases}$$

Bu sistema kengaytirilgan matritsaning oxirgi ustuni elementlari nolga teng bo‘lgani uchun sistema matritsasi va kengaytirilgan matritsalar rangi teng bo‘ladi, ya'ni $r(A)=r(\overline{A})$ bo‘ladi. Shuning uchun Kroneker-Kaspelli teoremasiga ko‘ra bir jinsli tenglamalar sistemasi har doim birgalikda bo‘ladi. Masalan, (0,0,..., 0)=0 sistemaning trivial yechimi (nol yechim) bo‘ladi.

Tenglamalar sistemasining matritsa ko‘rinishi quyidagidan iborat:

$$\mathrm{AX}=0.$$

Yuqorida keltirilgan 1-4 xulosalarga ko‘ra, agar $r(A)=n$ bo‘lsa sistema yagona, nol yechimga ega, agarda $r(A)<n$ bo‘lsa, cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi. Demak $m=n$ bo‘lgan holda sistema noldan farqli yechimga ega bo‘lishi uchun uning determinanti nolga teng bo‘lishi zarur va yetarli bo‘lar ekan.

Ta'rif*. Agar sistemaning* $\mathrm{X}_1,\ \mathrm{X}_2,\cdots,\mathrm{X}_k$ *-chiziqli erkli yechimlar sistemasi berilgan bo‘lib, bu sistemaning istalgan* X *yechimi ularning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo‘lsa, ya'ni shunday* $\lambda_1,\ \lambda_2,\cdots,\lambda_k$ *sonlar mavjud bo‘lsaki,*

$$\mathrm{X}=\lambda_1\mathrm{X}_1+\lambda_2\mathrm{X}_2+\cdots+\lambda_k\mathrm{X}_k$$

bo‘lsa, u holda bu sistema fundamental yechimlar sistemasi deyiladi

Teorema*. Agar sistema uchun* $r(A)<n$ *bo‘lsa, u holda istalgan fundamental yechimlar sistemasi* $k=n-r(A)$ *ta yechimdan iborat bo‘ladi.*

Masalan.
$$\begin{cases}3x_1+x_2-8x_3+2x_4+x_5=0\\ 2x_1-2x_2-3x_3-7x_4+2x_5=0\\ x_1+11x_2-12x_3+34x_4-5x_5=0\\ x_1-5x_2+2x_3-16x_4+3x_5=0\end{cases}$$

bir jinsli tenglamalar sistemasining fundamental yechimlar sistemasini topaylik.
Sistemaning oxirgi tenglamasini birinchi o‘ringa yozamiz, so‘ngra uni zinapoya shakliga keltiramiz:

$$\begin{pmatrix}1&-5&2&-16&3\\3&1&-8&2&1\\2&-2&-3&-7&2\\1&11&-12&34&-5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-5&2&-16&3\\0&16&-14&50&8\\0&8&-7&25&-4\\0&16&-14&50&-8\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-5&2&-16&3\\0&8&-7&25&-4\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Matrisa rangi $r(A)=2$. x_1 va x_2 o‘zgaruvchilarning bazis minori $\begin{vmatrix}1&-5\\0&8\end{vmatrix}\neq 0$,

x_1 va x_2 o‘zgaruvchilarni asosiy o‘zgaruvchilar sifatida tanlab olamiz va ularni asosiy bo‘lmagan $x_3,x_4\ x_5$ noma’lumlar orqali ifodalaymiz

$$\begin{cases}x_1-5x_2+2x_3-16x_4+3x_5=0\\ \quad 8x_2-7x_3+25x_4-4x_5=0\end{cases}$$

Umumiy yechimlar sistemasini hosil qilish uchun asosiy bo‘lmagan $x_3,x_4\ x_5$ o‘zgaruvchilarni *E* birlik matrisa satr elementlari bilan almashtiramiz. $x_3=1,x_4=0,\ x_5=0$ deb olinsa, sistemaning ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi

$$\begin{cases}x_1-5x_2+2=0\\ \quad 8x_2-7=0\end{cases}$$

bundan $x_1=\frac{19}{8}$, $x_2=\frac{7}{8}$, ya'ni birinchi bazis yechimni hosil qilamiz: $X_1=\left(\frac{19}{8};\ \frac{7}{8};\ 1,\ 0,\ 0\right)$

Shunga o'xshash yana ikkita bazis yechimni topamiz

$$x_3=0, x_4=1,\ x_5=0 \text{ bo'lganda } \quad X_2=\left(\frac{3}{8};\ -\frac{25}{8};\ 0,1,0\right);$$

$$x_3=0, x_4=0,\ x_5=1 \text{ bo'lganda } \quad X_3=\left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ 0,0,1\right).$$

Topilgan X_1, X_2, X_3 yechimlar berilgan sistemaning fundamental yechimlar sistemasini tashkil qiladi. Qulaylik uchun X_1, X_2, X_3 yechimlarning kompanentlarini mos ravishda 8, 8, 2 sonlarga ko'paytirib, butun kompanentli fundamental yechimlar sistemasini hosil qilamiz:

$$\overline{X}_1=(19;\ 7;\ 8;\ 0;\ 0),\ \overline{X}_2=(3;\ -25;\ 0;\ 8;\ 0),\ X_3=(-1;1;\ 0;\ 0;\ 2).$$

Sistemaning umumiy yechimi esa

$$X=\lambda_1(19;\ 7;\ 8;\ 0;\ 0)+\lambda_2(3;-25;0;8;0)+\lambda_3(-1;1;0;0;2)$$

ko'rinishida bo'ladi.

Agar n ta noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasida sistema asosiy matritsasining rangi noma'lumlan sonidan bittaga kam bo'lsa, ya'ni $r(A)=n-1$, u holda chiziqli tenglamalar sistemasining yechim sifatida $n-1$ ta tenglamalar sistemasi matritsasining birinch, ikkinchi va h.k ustunlarini o'chirishdan hosil bo'lgan, ishoralari almashinuvchi minorlari sistemasini qabul qilish mumkin. Agar bu minorlar noldan farqli bo'lsa, u holda bu chiziqli tenglamalar sistemasining barcha yechimlari shu sonlarga karrli bo'ladi.

Masalan, $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0 \\ x_1-x_2+3x_3=0 \\ 2x_1+x_2+2x_3=0 \end{cases}$ bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining barcha yechimlarini topaylik.

Dastlad , sistemaga mos matrisa rangini hisoblaylik.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demak, tenglamalar sistemasi matrisaning rangi $r(A)=2$ga teng va u noma'lumlar sonidan bittaga kam. Shuning uchun, tenglamalar sistemasining fundamental yechimlar sistemasi k=3-2=1 ta bo'ladi. Sistema ixtiyoriy ikkita tenglamasini olamiz, masalan, birinch va ikkinchi tenglamalarini

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0 \\ x_1-x_2+3x_3=0 \end{cases}.$$

Tenglamalar sistemasiga mos matritsasining birinch, ikkinchi ba uchinchi ustunlarini o'chirishdan hosil bo'lgan, ishoralari almashinuvchi minorlari hisoblaymiz,

$$x_1=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\cdot k=5k,\quad x_2=-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\cdot k=-4k,\quad x_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\cdot k=-3k,$$

bunda k ixtiyoriy son.

Demak, sistemaning umumiy yechimi $\{5k; -4k\ ; 3k\}$, bunda k ixtiyoriy son.

Excel yordamida birgalikdagi tenglamalar sistemasini yechish

Qisqa vaqtda ko‘p sonly chiziqli tenglamalar sistemasini teskari matrisa usulida qanday tez yechish mumkinligini o‘rganamiz. Quyidagi misolda olti noma’lumli oltita tenglamar sistemasini Excel dasturi yordamida qanday soda va tez yechilishi tushuntiriladi. Shundan so‘ng siz bu kabi misollarni Excel dasturi yordamida tez bqjarishni bilib olaziz.

Misol.

$$
\begin{aligned}
&4x_1 + x_2 + 2x_3 - 17x_4 - 5x_5 + 8x_6 = 21\\
&8x_1 + 9x_2 + 23x_3 + 15x_4 + 11x_5 + 39x_6 = 593\\
&24x_1 + 41x_2 + 9x_3 + 3x_4 \qquad\qquad + x_6 = 317\\
&6x_1 + 5x_2 \qquad\qquad - x_4 + 3x_5 + 7x_6 = 35\\
&9x_1 + 11x_2 + 39x_3 + 23x_4 + 15x_5 \qquad = 678\\
&28x_1 + 49x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 9x_5 + 7x_6 = 391
\end{aligned}
$$

x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 va x_6 noma’lumlarni toping.

Yechish. 1.5-jadvalda ko‘rsatilgani kabi *A* va *b* matrisa elementlarini Excel electron doskasiga kiriting. Bu jadvalda *A* matrisa elementlarini (A3;F8) yacheykalariga, *b* matrisa elementlari esa (H3;H8) yacheykalariga joylashtiriladi.

(A10; F15) yacheykalarida 6×6 o‘lchovli blok ajrating va =MINVERSE(A3:F8) formulasini Ctrl va Shift klavishlarini bir vaqtda ushlagan holfda kiriting.

6×1 o‘lchovli (H10; H15) ustun matrisani ajratib, keyin =MMULT(A10; F15; H3; F15) satr formulasini kiritib Ctrl va Shift klavishlarini bir vaqtda bosing. Quyidagi natija hosil bo‘ladi $x_1 = 5,\ x_2 = 2,\ x_3 = 12,\ x_4 = 1,\ x_5 = 8$ va $x_6 = 4$.

Bu misolda ko‘p sonlar 5 birlik aniqlikda yaxlitlangan. Shunga qaramasdan, nolga juda yaqin sonlar Excel dasturida exponeta ko‘rinishida ifodalangan. Masalan, 10^{17} son -1E-17 kabi.[12]

1.5- jadval

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Example 1.17							
2	**A MATRIX**							**b**
3	4	1	2	-17	-5	8		21
4	8	9	23	15	11	39		593
5	24	41	9	3	0	1		317
6	6	5	0	-1	3	-7		35
7	9	11	39	23	15	0		678
8	28	49	4	5	9	7		391
9	Inverse A^-1						A^-1*b=	x
10	-0.0453	0.08783	0.11969	0.32077	-0.0634	-0.1339	solution	5
11	0.02431	-0.0509	-0.0504	-0.1805	0.03194	0.08268	values	2
12	0.03398	-0.0162	-1E-17	-0.0512	0.03343	-1E-17		12
13	-0.0723	0.03416	0.06457	0.05788	-0.0253	-0.0591		1

[12] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

14	0.03184	-0.0257	-0.1339	-0.0156	0.0331	0.11024		8
15	0.00247	0.02302	-5E-18	-0.0118	-0.0137	4.5E-18		4

Nazorat savollari

1. *Sistemaning asosiy va kengaytirilgan matrisasi qanday tuziladi?*
2. *Sistema matrisasi rangi qanday hisoblanadi?*
3. *Kroneker- Kapelli teoremasi.*
4. *Qaysi hollarda sistema yagona yechimga, qaysi hollarda cheksiz ko‘p yechim bo‘ladi va qanday holda sistema yechimga ega emas?*
5. *Bir jinsli sistema yechimlari to’plami qanday topiladi?*
6. *Bir jinsli va bir jinsli bo’lmagan chisizli sistema yechimlari orasidagi bog’lanish qanday bo’ladi?*

5- mashg'ulot

1.4.1. Kompleks sonlar
1.4.2. Muavr formulasi
1.4.3. Ko'p tarmoqli iqtisod uchun balans modeli

Tayanch iboralar: *haqiqiy son, mavhum birlik, qo'shma kompleks son, amallar, radius vektor, burchak, darajaga ko'tarish, ildiz chiqarish, balans modeli, texnologik matrisa, texnologik koeffisent, samaradorlik.*

1.4.1. Kompleks sonlar

Ta'rif. *Agar x va y haqiqiy sonlar hamda i begi uchun :*

1) $x+0\cdot i=x$, $0+i\cdot y=iy$, $1\cdot i=i$,$-1\cdot i=-i$,

2) *faqat* $x=x_1$, $y=y_1$ *bo'lgandagina* $x+yi=x_1+y_1i$ *boladi,*

3) $(x+yi)\pm(x_1+y_1i)=(x\pm x_1)+(y\pm y_1)i,$

4) $(x+yi)\cdot(x_1+y_1i)=(x\cdot x_1-y\cdot y_1)+(x\cdot y_1+x_1\cdot y)i$

5) $\dfrac{x+yi}{a+bi}=\dfrac{ax+by}{a^2+b^2}+\dfrac{ay-bx}{a^2+b^2}i$

munosabatlar o'rinli bo'lsa, u holda $x+yi$ *ifodaga* ***kompleks son*** *deyiladi.*
1) va 4) shartlardan: $i^2=i\cdot i=-1$, $i^3=-i$,$i^4=1$, $i^5=i$ *va h.k.*

$i=\sqrt{-1}$ *belgini odatda mavhum birlik deyiladi.*

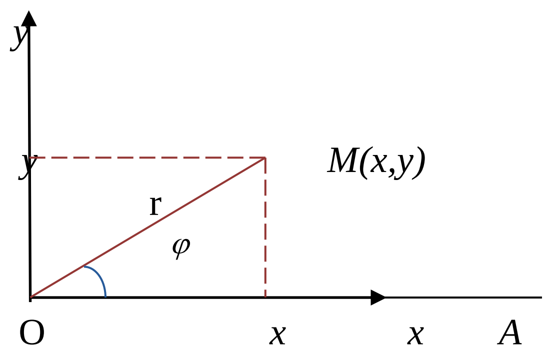
$x+yi$ *kompleks sonda* x *– kompleks sonning haqiqiy qismi ,* yi *- – kompleks sonning mavhum qismi deyiladi.*

$x+yi$ *va* $x-yi$ *o'zaro qo'shma kompleks sonlar deyiladi.*

Kompleks sonlarni qo'shish,ayirish,ko'paytirish va darajaga ko'tarish ko'phadlar ustidagi kabi bajariladi.Bo'lish va ildiz chiqarish amallari esa mos ravishda ko'paytirish va darajaga ko'tarish amallariga teskari amallar kabi aniqlanadi.

Kompleks sonning trigonometrik ko'rinishi

$x+yi$ kompleks son ($x;y$) haqiqiy sonlar jufti bilan aniqlanadi.Shuning uchun $x+yi$ kompleks son tekislikdagi M($x;y$) nuqta yoki uning $r=\overrightarrow{OM}$ radius - vektori bilan ifodalanadi.



Bu vektorning uzunligi $r=\sqrt{x^2+y^2}$ –kompleks sonning moduli, bu vector bilan Ox o‘q orasidagi φ - burchak kompleks sonning argumenti deyiladi.

$x=r\cos\varphi$, $y=\sin\varphi$ *bo‘lgani uchun* $x+y\cdot i=r\cdot(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$ *boladi va bu ifodaga kompleks sonning trigonometrik ko‘rinishi deyiladi.*

Trigonometrik ko‘rinishidagi kompleks sonlarni ko‘paytirish va bo‘lish.

$z_1=x_1+y_1\cdot i=r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\cdot\sin\varphi_1)$, $z_2=x_2+y_2\cdot i=r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\cdot\sin\varphi_2)$ berilgan bo‘lsa, u holda

$$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right),\ \frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\left(\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right)\right).$$

$$z_1=x_1+y_1\cdot i=r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\cdot\sin\varphi_1),\ z_2=x_2+y_2\cdot i=r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\cdot\sin\varphi_2),\dots,z_n=x_n+y_n\cdot i=$$
$$=r_n\cdot(\cos\varphi_n+i\sin\varphi_n)$$

$$z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_n=r_1\cdot r_2\cdot\ldots\cdot r_n\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)+i\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)\right).$$

1.4.2. Muavr formulasi

Agar $z_1=z_2=\ldots=z_n=z=r(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$ bolsa , u holda $z^n=r^n(\cos n\varphi+i\cdot\sin n\varphi)$ munosabatni hosil qilamiz.

Bu formulaning r = 1 bo‘lgandagi ko‘rinishiga Muavr formulasi deyiladi:

$$(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\cdot\sin n\varphi.$$

Xuddi shu kabi $\left(\dfrac{1}{r(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)}\right)^n=r^{-n}(\cos n\varphi-i\cdot\sin n\varphi).$

Kompleks sondan ildiz chiqarish

$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$, bu yerda k=0,1,2,…,n-1.

$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi$ - Eyler formulasi deyiladi.

Misol. z = -2+2i . a) $z^4=?$ $b)$ $\sqrt[3]{z}$.

Yechish. a) $r=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$, $\varphi=\pi+arctg\dfrac{2}{-2}=\dfrac{3\pi}{4}.$

$z^4=(2\sqrt{2})^4\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)^4=64\left(\cos 4\cdot\dfrac{3\pi}{4}+i\sin 4\cdot\dfrac{3\pi}{4}\right)=64(\cos 3\pi+i\sin 3\pi)=64(-1+0)=-64.$ b)

$$\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{-2+2i}=\sqrt[3]{\sqrt{8}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}\right),k=0,1,2.$$

$k=0$ da $\sqrt[3]{z}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=1+i.$

$k=1$ da $\sqrt[3]{z}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)=-\frac{\sqrt{3}+1}{2}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

$k=2$ da $\sqrt[3]{z}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}+1}{2}.$

Algebraning asosiy teoremasi

$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ – kompleks sonlar maydonidagi n- darajali ko‘phad bo‘lsin.

Ta'rif. *Agar x ning* α *son qiymatida* $f(x)$ *ko‘phad nolga aylansa, u holda* α *soni* $f(x)$ *ko‘phadning ildizi deyiladi.*

Demak, $x=\alpha$ son $f(x)$ ko‘phadning ildizi bo‘lsa $f(\alpha)=0$ bo‘ladi.

Teorema (Bezu teoremasi). $f(x)$ *ko‘phadni* $x-\alpha$ *ga bo‘lgandagi qoldig‘i* $f(\alpha)$*ga teng.*

Teorema. $x=\alpha$ *son* $f(x)$ *ko‘phadning ildizi bo‘l ishi uchun u* $x-\alpha$ *ga qoldiqsiz bo‘linishi zarur va yetarli.*

Teorema (Algebraning asosiy teoremasi). *Kompleks sonlar maydonida nolinchi darajadan yuqori darajali har bir* $f(x)$ *ko‘phadning eng kamida bitta kompleks ildizi bor.*

Teorema. *Kompleks sonlar maydonida n - darajali* $f(x)$ *ko‘phadning n ta ildizi bor.*

$f(x)=a_0\cdot(x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)\cdot...\cdot(x-\alpha_n)$ ifoda ko‘phadning chiziqli ko‘paytuvchilarga yoyilmasi deyiladi.

Haqiqiy sonlar maydonidagi $f(x)$ ko‘phad uchun $x+yi$ kompleks son ildiz bo‘lsa, u holda $x-yi$ qo‘shma kompleks son ham ildiz bo‘ladi $(y\neq 0)$.

Haqiqiy sonlar maydonidagi $f(x)$ ko‘phadning kompleks ildizlari soni faqat juft bo‘lishi mumkin.

Haqiqiy sonlar maydonidagi juft daragali $f(x)$ ko‘phadning haqiqiy ildizlari soni faqat juft bo‘la oladi.

Haqiqiy sonlar maydonida toq daragali $f(x)$ ko‘phadning haqiqiy ildizlari soni faqat toq bo‘la oladi.

Haqiqiy sonlar maydonidagi har bir $f(x)$ ko‘phadni shu maydondagi birinchi va ikkinchi darajali ko‘phadlar ko‘paytmasi ko‘rinishida ifodalash mumkin.

Misol. Ko‘paytuvchilarga ajrating. $f(x)=x^4+1.$ z = -2+2i.

a) $z^4=?$ $b)$ $\sqrt[3]{z}$.

Yechish. $f(x)=x^4+1$ ko‘phadning ildizlarini topamiz.

$$x^4+1=0,\ x^4=-1,\ x=\sqrt[4]{-1}=\sqrt[4]{\cos\pi+i\sin\pi}=\cos\frac{2k+1}{4}+i\sin\frac{2k+1}{4},\ k=0,1,2,3.$$

$$k=0,\ \alpha_1=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2},k=1,\ \alpha_2=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$k=3,\ \alpha_3=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2},k=4,\ \alpha_4=\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\ .$$

$$f(x)=x^4+1=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4).$$

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)=\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=x^2-\sqrt{2}x+1,$$

$$(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)=\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=x^2+\sqrt{2}x+1.$$

Demak , $f(x)=x^4+1=\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\cdot\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)$.

1.4.3. Ko‘p tarmoqli iqtisod uchun balans modeli

Balans modelining asosiy masalasi: n ta tarmoqli xo‘jalikning har bir ishlab chiqargan mahsulot miqdori qanday bo‘lganda ehtiyoj to‘la qondiriladi? Bu yerda shuni e’tiborga olish kerakki, n ta tarmoqning har biri ishlab chiqargan mahsulotning bir qismi shu tarmoq ehtiyoji uchun, bir qismi boshqa tarmoqlar ehtiyoji uchun va yana bir qismi ishlab chiqarish bilan bog‘liq bo‘lmagan ehtiyojlar uchun sarf etiladi.

Tarmoqlar orasidagi turli mahsulotlarni ishlab chiqarish va iste’mol qilish orqali bog‘lanishni hisoblash masalasi ancha murakkab. Bu masalani birinchi bo‘lib mashhur amerika iqtisodchisi V.V. Leontev 1936 yil matematik model ko‘rinishida ifodalagan. U 1929-1932 yillarda amerika iqtisodiy inqirozini tahlil qilishga urungan bu model matrisalar algebrasiga asoslagan.

Ishlab chiqarishning ma’lum bir davridagi, aytaylik, bir yillik faoliyatini qaraylik. x_i deb i- tarmoqning shu davr davomida ishlab chiqargan yalpi mahsulot hajmining pul birligida ifodalangan qiymatini, bu yerda $i=1,2,\cdots,n$. x_{ij} deb $i-$tarmoq mahsulotining $j-$tarmoq ehtiyoji uchun sarf etilgan hajmining pul miqdorini belgilaymiz. y_i deb i tarmoq mahsulotining noishlab chiqarish ehtiyoji hajmining pul miqdorini belgilaymiz. Tabiiyki, i tarmoq ishlab chiqargan yalpi mahsulot hajmi x_i, n ta tarmoq ehtiyojlari va noishlab chiqarish ehtiyojlari uchun sarf etilgan mahsulotlar hajmlarining pul miqdorlari yig‘indisiga teng bo‘lishi kerak, ya’ni $x_i=\sum_{j=1}^{n}x_{ij}+y_i,\quad i=1,2,\cdots,n$ - tenglamalar balans munosabatlari deb nomlanadi.

Agar $a_{ij}=\dfrac{x_{ij}}{x_j}$ $(i,\ j=1,2,\cdots,n)$ belgilash kiritsak, a_{ij} – j-tarmoqning mahsulot hajmi birligi uchun sarf etilgan i-tarmoq mahsulot hajmi qiymatini bildiradi. a_{ij}-bevosita xarajatlar koeffitsienti deb nomlanadi. a_{ij}-koeffitsientlarni qaralayotgan davrdagi ishlab chiqarish jarayonida qo‘llanilayotgan texnologiya aniqlaydi. Qanchalik yangi, samarador texnologiya qo‘llanilsa, a_{ij}-koeffitsientlar shunchalik kichik, sarf-xarajatlar shunchalik kam bo‘lib, samaradorlik yuqori bo‘ladi. Qaralayotgan davr ichida a_{ij} koeffitsientlarni o‘zgarmas deb olib, ya’ni sarf- xarajatlarni yalpi xarajatlarga chiziqli bog‘liq deb qaraymiz.

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j, \quad (i,\ j = 1,2,\ldots,n)$$

Shu munosabat bilan ko‘rilgan ko‘p tarmoqli iqtisodiyot modelini chiziqli balans modeli deb ham nomlanadi. Bu holda tenglamalar sistemasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i, \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

Quyidagi belgilashlarni kiritaylik,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \cdots a_{2n} \\ ------ \\ a_{n1}\ a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

bu yerda A -texnologik matritsa, X-yalpi mahsulot vektori, Y-yakuniy mahsulot vektori deb nomlanadi. Bu belgilashlarga asosan tenglamalar sistemasini quyidagi ko‘rinishida yozish mumkin.

$$\mathrm{X} = \mathrm{AX} + \mathrm{Y}\,.$$

Ko‘p tarmoqli balansning asosiy masalasi berilgan yakuniy mahsulot vektori va bevosita xarajatlar matritsasi A- ga ko‘ra X-yalpi mahsulot vektorini topishdan iborat bo‘ladi, ya’ni oxirgi tenglamani noma’lum vektor X ga nisbatan yechish kerak. Buning uchun uni quyidagi ko‘rinishga olib kelamiz $(E - A)\mathrm{X} = \mathrm{Y}$.

Agar det $(E - A) \neq 0$ bo‘lsa, u holda teskari $(E - A)^{-1}$ matritsa mavjud bo‘lib, yechim quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.

$$\mathrm{X} = (E - A)^{-1}\,\mathrm{Y}$$

$S = (E - A)^{-1}$ -matritsa bevosita xarajatlar matritsasi deb nomlanadi. Bu matritsaning iqtisodiy ma’nosini tushunish uchun $\mathrm{Y}_i = (0,0,\cdots,1,\cdots0)$, $(i = 1,2,\cdots,n)$ i-o‘rnida 1, qolgan joylarda 0 bo‘lgan yakuniy mahsulot birlik vektorlarini qaraymiz. Ularga mos keluvchi tenglama yechimlari quyidagiga teng bo‘ladi.

$$\mathrm{X}_1 = \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ \vdots \\ s_{n1} \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{X}_2 = \begin{pmatrix} s_{12} \\ s_{22} \\ \vdots \\ s_{n2} \end{pmatrix}, \ \cdots, \quad \mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} s_{1n} \\ s_{2n} \\ \vdots \\ s_{nn} \end{pmatrix}.$$

Demak, $S = (s_{ij})$ matritsaning s_{ij}-elementi i-tarmoqning j-tarmoq birlik yakuniy mahsuloti Y'_j ni, ishlab chiqarish uchun sarf qilinishi zarur bo‘lgan mahsulot miqdori qiymatini bildiradi.

Qaralayotgan masalaning iqtisodiy ma’nosiga ko‘ra, (11) tenglamada $y_i \geq 0,\ \left(i = \overline{1,n}\right),\ a_{ij} \geq 0\ \left(i, j = \overline{1,n}\right)$ bo‘lib, tenglama yechimi uchun $x_i \geq 0\ \left(i = \overline{1,n}\right)$ bo‘lishi kerak. Bu holatni biz $\mathrm{Y} \geq 0$, $\mathrm{A} \geq 0$ va $X \geq 0$ deb belgilaymiz.

Agar istalgan $Y \geq 0$ vektor uchun $X \geq 0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi (11) ning yechimi mavjud bo‘lsa. $A \geq 0$ matritsa samarali matritsa deyiladi. Bu holda Leontev modeli ham samarali model deyiladi.

Misol 1. Quyidagi jadvalda tarmoqlarning reja davriga mo‘ljallangan xarajat koeffisentlari va chekli mahsuloti shartli pul birligida berilgan.

Tarmoq		Iste’mol		Chekli mahsulot
		Sanoat	Qishloq xo‘jaligi	
Ishlab chiqarish	Sanoat	0,3	0,25	300
	Qishloq xo‘jaligi	0,15	0,12	100

Quyidagilarni

a) Tarmoqlarning rejalashtirilgan yalpi mahsulot miqdorini, tarmoqlararo mahsulot yetkazib berish, tarmoqlarning so*f* mahsulotini;

b) Agar qishloq xo‘jaligining chekli mahsuloti 20% ga, sanoatniki 10% ga oshirilsa, har bir tarmoqning zarur yalpi ishlab chiqarish miqdorini topish kerak.

Yechish. a) To‘g‘ridan – to‘g‘ri xarajatlar koeffisentini A matrisa va chekli mahsulot vektori Y ni yozib olamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,25 \\ 0,15 & 0,12 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \end{pmatrix}$$

bundan $E - A = \begin{pmatrix} 1-0,3 & -0,25 \\ -0,15 & 1-0,12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,25 \\ -0,15 & 0,88 \end{pmatrix}$ matrisani yozib olamiz.

U holda to‘la xarajatlar matrisasi

$$S = (E-A)^{-1} = \frac{1}{0,5785}\begin{pmatrix} 0,88 & 0,15 \\ 0,25 & 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,52 & 0,26 \\ 0,43 & 1,21 \end{pmatrix}.$$

Yalpi mahsulot vektorini aniqlaymiz:

$$X = \begin{pmatrix} 1,52 & 0,26 \\ 0,43 & 1,21 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 482 \\ 250 \end{pmatrix}$$

Tarmoqlar mahsulot yetkazib berish miqdori x_{ij} ni $x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j$ formuladan topamiz. Masalan $x_{11} = a_{11} \cdot x_1 = 0.3 \cdot 482 = 144.6.$

Tarmoqlarning yalpi mahsuloti, tarmoqlararo mahsulot yetkazib berish, shuningdek tarmoqlarning so*f* mahsulotlarini hisoblab topib, quyidagi jadvalni tuzamiz.

Tarmoq		Iste’mol		Chekli mahsulot	Yalpi mahsulot
		Sanoat	Qishloq xo‘jaligi		
Ichlab chiqarish	Sanoat	144,6	62,5	300	482
	Qishloq xo‘jaligi	72,3	30	100	150
Sof mahsulot		265,1	157,5		
Yalpi mahsulot		482	250		

b) Shartga ko‘ra chekli mahsulot vektori $Y = \begin{pmatrix} 300 \cdot 1{,}1 \\ 100 \cdot 1{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 330 \\ 120 \end{pmatrix}$

U holda mahsulot vektori quyidagicha bo‘ladi: $X = S \cdot Y = \begin{pmatrix} 1{,}52 & 0{,}26 \\ 0{,}43 & 1{,}21 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 330 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 532{,}8 \\ 287{,}1 \end{pmatrix}$.

Shunday qilib sanoatdagi ishlab chiqarishni 532,8 shartli pul birligigacha, qishloq xo‘jaligida 287.1 shartli pul birligigacha oshirish kerak.

Nazorat savollari

1.Qanday songa kompleks son deyiladi?
2.Kompleks sonning argument deganda nimani tushunasiz?
3.Kompleks sonning moduli deganda nimani tushunasiz?
4.Kompleks sonni trigonometric ko’rinishini keltiring.
5. Kompleks sonni darajaga ko’tarish qanday bajariladi?
6. Kompleks son dan qanday ildiz hisoblanadi?
7 .Balans modeli nima?
8. Texnologik koeffisent qanday aniqlanadi?
9. Texnologik matrisa nima?
10. Qanday samardorlik shartlarini bilasiz?

2-MAVZU. MATRISAVIY ANALIZ

1- mashg'ulot

2.1.1. Chiziqli fazo tushunchasi
2.1.2. Chiziqli bog'liqlik, o'lcham va bazis tushunchalari
2.1.3. Bir bazisdan boshqasiga o'tish

Tayanch iboralar: *to'plam, akslantirish, vektor, chisiqli erkli, chiziqli bog'liq, chiziqli kombinatsiya, fazo o'lchovi, bazis, o'tish matrisasi.*

2.1. 1. Chiziqli fazo tushunchasi

Ta'rif. *Agar bo'sh bo'lmagan L-to'plamning istalgan* x, y, z *elementlari va* λ *son uchun qo'shish-* $x+y \in L$, *songa ko'paytirish-* $\lambda x \in L$ *aniqlangan bo'lib, bu amallar uchun quyidagi xossalar o'rinli bo'lsa:*

1. $x+y=y+x$,   *2.* $x+(y+z)=(x+y)+z$,

3. L *da shunday 0 (nol) element mavjudki, istalgan* $x \in L$ *uchun* $x+0=x$,

4. Har bir $x \in L$ *uchun,* L *da shunday -* x *elementi mavjudki, uning uchun* $x+(-x)=0$,

5. α *va* β *sonlar va* $x \in L$ *uchun* $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$,   *6.* $1 \cdot x = x$,

7. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$,   *8.* $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$,

u holda u chiziqli yoki vektor fazo deyiladi.

Yuqoridagi ta'rifda songa ko'paytirish amali deganda ikki holatni farqlash kerak. Agar ta'rifdagi sonlar haqiqiy sonlar to'plami $R=(-\infty,+\infty)$ dan olingan deb qaralsa, bunday chiziqli fazo haqiqiy chiziqli fazo deyiladi, agarda bu sonlar kompleks sonlar to'plami C dan olingan deb qaralsa, bunday chiziqli fazo kompleks chiziqli fazo deyiladi.

Ta'rif. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *sonlar uchun* $x=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\ldots+\lambda_n a_n$ *tenglik o'rinli bo'lsa, u holda chiziqli fazo elementi* x *vektor* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *vektorlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat deyiladi.*

2.1.2. Chiziqli bog'liqlik, o'lcham va bazis tushunchalari

Ta'rif. *Agar hammasi ham nolga teng bo'lmagan shunday* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *sonlar topilib, ular uchun*

$$\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\ldots+\lambda_n a_n=0 \qquad (1)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq vektorlar sistemasi deyiladi, aks holda, ya'ni (1) tenglik o'rinli ekanligidan* $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$ *bo'lsa, ular chiziqli erkli vektorlar sistemasi deyiladi.*

Agar $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vektorlar orasida nol vektor bo‘lsa, u holda ular chiziqli bog‘liq bo‘ladi. Agar $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vektorlardan bir nechtasi chiziqli bog‘liq bo‘lsa, u holda ularning o‘zi ham chiziqli bog‘liq bo‘ladi.

Ta’rif*. Agar L chiziqli fazoda n tasi chiziqli erkli va istalgan $n+1$ tasi bog‘liq bo‘lgan vektorlar mavjud bo‘lsa, ya’ni chiziqli erkli vektorlarning maksimal soni n ga teng bo‘lsa, u holda L fazo n o‘lchovli chiziqli fazo deyiladi.*

Ta’rif*. n o‘lchovli chiziqli fazodagi istalgan n ta chiziqli erkli vektorlar sistemasi chiziqli fazoning bazisi deyiladi.*

Teorema. *Chiziqli fazoning har bir elementini yagona usul bilan bazisning chiziqli kombinatsiyasi ko‘rinishida ifoda qilish mumkin.*

2.1.3. Bir bazisdan boshqasiga o‘tish

$\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n$ vektorlar bazis bo‘lib, x vektor ularning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo‘lsin, ya’ni $x = x_1\ell_1 + x_2\ell_2 + \cdots + x_n\ell_n$, u holda $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sonlar x vektorning $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n$ bazis bo‘yicha koordinatalari deb yuritiladi.

n o‘lchovli L chiziqli fazoda ikkita $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n$ va $\ell_1^*, \ell_2^*, \cdots, \ell_n^*$ bazislar berilgan bo‘lsin, u holda $\ell_1^*, \ell_2^*, \cdots, \ell_n^*$ lar uchun

$$\begin{array}{l}
\ell_1^* = a_{11}\ell_1 + a_{12}\ell_2 + \cdots + a_{1n}\ell_n \\
\ell_2^* = a_{21}\ell_1 + a_{22}\ell_2 + \cdots + a_{2n}\ell_n \\
-------------- \\
\ell_n^* = a_{n1}\ell_1 + a_{n2}\ell_2 + \cdots + a_{nn}\ell_n
\end{array}$$

tengliklarni hosil qilamiz, bu yerda

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ ------ \\ a_n & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}$$

matritsa $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n$ bazisdan $\ell_1^*, \ell_2^*, \cdots, \ell_n^*$ bazisga o‘tish matritsasi deyiladi. A matritsa xos bo‘lmagan matritsa bo‘ladi, shuning uchun unga teskari A^{-1} matritsa mavjud bo‘lib, bu matritsa $\ell_1^*, \ell_2^*, \cdots, \ell_n^*$ bazisdan $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n$ bazisga o‘tish matritsasi bo‘ladi.

Nazorat savollari

1. *Chiziqli fazo nima?*
2. *Chiziqli erkli va chiziqli bog‘liq vektorlarning ta'rifini keltiring.*
3. *Chiziqli fazo o‘lchami nima?*
4. *Bazis nima?*
5. *Berilgan bazisda vektorlarning yoyilmasi nima?*
6. *O’tish matrisasi qanday aniqlanadi?*

2-mashg'ulot

2.2.1. Chiziqli almashtirish matrisasi
2.2.2. Xarakteristik ko'phad
2.2.3. Xos son va xos ko'phad

***Tayanch** iboralar: element, qoida, qonun, akslantirish, operator, chiziqli operator, xarakteristik tenglama, xos son, xos vektor.*

2.2.1. Chiziqli almashtirish matrisasi

***Ta'rif**. Agar L_1 chiziqli fazoning har bir elementi $x \in L_1$ uchun biron qoida, qonunga asosan L_2 chiziqli fazoning aniq elementi mos qo'yilgan bo'lsa, L_1 ni L_2 ga akslantiruvchi operator berilgan deyiladi. Bu operatorni A deb belgilab, akslantirishni $A: L_1 \to L_2$ shaklda ifoda etiladi, bu akslantirishda x ning y ga mos kelishi $Ax = y$ kabi yoziladi.*

***Ta'rif**. Agar istalgan $x \in L_1,\ y \in L_2$ va λ son uchun*

$$A(x+y) = Ax + Ay$$
$$A(\lambda\, x) = \lambda\, Ax$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $A: L_1 \to L_2$ operator chiziqli operator deyiladi.

Agar $A: L \to L$ va $B: L \to L$ chiziqli operatorlar bo'lsa, bunday operatorlar uchun $A+B,\ \lambda \cdot A$ va $A \cdot B$ chiziqli operatorlarni aniqlashimiz mumkin bo'ladi. L chiziqli fazoning o'zini-o'ziga akslantiruvchi barcha chiziqli operatorlar to'plamini $\Im(L)$ deb belgilaymiz, operatorlarni qo'shish va songa ko'paytirishga nisbatan $\Im(L)$ to'plam chiziqli fazoni tashkil etadi.

***Ta'rif**. Agar $A \in \Im(L)$ operator uchun shunday λ son mavjud bo'lib,*

$$Ax = \lambda x,\quad x \neq 0$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda x vector A operatorning xos vektori deyiladi.

$A: R^n \to R^m$ chiziqli operator bo'lsin. Biz A operatorning matritsa ko'rinishini hosil qilamiz. Buning uchun R^n da $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ va R^m da esa $\ell_1^*, \ell_2^*, \ldots, \ell_m^*$ bazislarni olaylik. $x \in R^n, Ax = y \in R^m, A\ell_i \in R^m$ uchun ushbu tengliklarni yoza olamiz:

$$x = x_1\ell_1 + x_2\ell_2 + \cdots + x_n\ell_n$$
$$Ax = y = y_1\ell_1^* + y_2\ell_2^* + \cdots + y_m\ell_m^*$$
$$A\ell_i = a_{1j}\ell_1^* + a_{2j}\ell_2^* + \cdots + a_{mj}\ell_m^*,\ j = 1,2,\ldots,n$$

Bu yerdan quyidagilarni hosil qilamiz:

$$Ax = \sum_{j=1}^{n} x_j A\ell_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\ell_i^* = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\ell_i^*, \quad Ax = y = \sum_{i=1}^{m} y_i \ell_i^*$$

demak, $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1,2,\ldots,m$ tengliklar hosil bo'ladi. Agar biz ushbu matritsalarni kiritsak,

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ - - - - & - - - - \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix},$$

u holda yuqoridagi tengliklarni quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$AX = Y$$

bu yerda A matritsa qaralayotgan A operatorning berilgan bazislardagi matritsasi deyiladi. $A \in \Im(R^n)$ bo'lsin, u holda bunday operatorga mos keladigan matritsa kvadratik matritsa bo'ladi.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ - - - - & - - - - \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

2.2.2. Xarakteristik ko'phad. Xos son va xos ildiz

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ vektor A chiziqli operatorning λ xos soniga mos keluvchi xos vektor, ya'ni $Ax = \lambda x$ bo'lsin.

Agar $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ vektor matritsa bo'lsa, u holda ushbu tenglik hosil bo'ladi

$$AX = \lambda \mathrm{X}.$$

Bu yerdan E birlik matritsa uchun, quyidagi $(A - \lambda E)\mathrm{X} = 0$ tenglikni yoza olamiz. Bu bir jinsli tenglamalar sistemasi har doim nol $x = 0$ yechimga ega. U noldan farqli yechimga ega bo'lishi uchun, ya'ni xos vektorning mavjud bo'lishi uchun $|A - \lambda E| = 0$ bo'lishi, ya'ni

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \cdots a_{2n} \\ - - - - - & - - - - - - \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

ekanligi zarur va yetarlidir. Bu determenant λ ga nisbatan n-tartibli ko'phaddan iborat bo'ladi, uni A operatorning yoki A matritsaning xarakteristik ko'phadi, (1) tenglama A operatorning (matritsaning) xarakteristik tenglamasi deyiladi. Shuni ta'kidlash lozimki, xarakteristik ko'phad qaralayotgan bazisga bog'liq bo'lmaydi.

A operator n ta chiziqli erkli $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ xos vektorlarga ega bo'lib, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ xos sonlari bo'lsin, u holda A operatorning $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ bazisga mos keluvchi A matritsasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ - & - & - & -\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix},$$

ya'ni A matritsa diagonal matritsa bo'lar ekan.

Aksincha, biron-bir bazisda A operator matritsasi dioganal ko'rinishga ega bo'lsa, u holda bu bazis vektorlari A operatorning xos vektorlari bo'lib, matritsa dioganallaridaga sonlar uning xos sonlaridan iborat bo'ladi.

Agar A operator n ta turli xos sonlarga ega bo'lsa, u holda ularga mos keluvchi xos vektorlar chiziqli erkli bo'lib, shu vektorlar hosil qilgan bazisda A operator matritsasi diogonal ko'rinishga ega bo'ladi.

Misol. $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ operatorning matritsasini biror bazisda diagonal ko'rinishga keltiraylik.

Matrisaning xarakteristik tenglamasi tuzib, xos sonlarni topamiz

$$\begin{vmatrix}3-\lambda & 2\\ 1 & 4-\lambda\end{vmatrix}=0, \text{bundan } \lambda^2-7\lambda+10=0,\ \lambda_1=2,\ \lambda_2=5.$$

Xos vektorlarni topish uchun

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}, \begin{cases}(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2=0\\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2=0\end{cases}$$

ko'rinishdagi bir jinsli tenglamalar sistemasini yechamiz.

$\lambda_1=2$ xos songa mos keluvchi xos vektori $\begin{cases}x_1+2x_2=0\\ x_1+2x_2=0\end{cases}$ sistemaning yechimi bo'lib, $x_1=\begin{pmatrix}-2b\\ b\end{pmatrix}$ bo'ladi.

$\lambda_2=5$ xos songa mos keluvchi xos vektor esa $\begin{cases}-2x_1+2x_2=0\\ x_1-x_2=0\end{cases}$ sistemaning yechimi bo'lib, erkli o'zgaruvchini $x_2 = c$ deb olsak. $x_1=\begin{pmatrix}c\\ c\end{pmatrix}$ bo'ladi. b va c ixtiyoriy sonlar bo'lgani uchun bitta xos songa bir nechta har xil xos vektorlar mos kelishi mumkin. Xususan, $b=c=1$ bo'lsa, bir jinsli sistemaning fundamental yechimlariga mos keluvchi xos vektorlar $x_1=\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$ va $x_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ ko'rinishda bo'ladi.

Bu xos vektorlardan tuzilgan $B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ matrisa $x_1=\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$ va $x_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ bazisdagi $B^{-1}\cdot A\cdot B$ almashtirishda berilgan A matrisani diagonal matritsa ko'rinishiga keltiradi.

$B^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ ekanligini hisobga olib, $B^{-1}\cdot A\cdot B$ almashtirishni hisoblaylik

$$B^{-1}\cdot A\cdot B=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -2\\ -5 & -10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-6 & 0\\ 0 & -15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}.$$

Demak, qaralayotgan bazisda A operatorning matritsasi dioganal ko‘rinishga ega bo‘lib, matritsa diogonalidagi sonlar A operatorning xos sonlaridan iborat bo‘lar ekan.

Teorema. *A^2 matritsaning xos sonlari, berilgan A matritsa xos sonlari kvadratiga teng, hamda ikkala matritsaning xos vektorlari bir xildir.* $Aq = \lambda q$.

Teorema. *A^n matritsaning xos sonlari, berilgan A matritsa xos sonlari n-darajaga oshirilganiga teng, ammo ikkala matritsaning xos vektorlari bir xildir.*

Teorema. *A^{-1} matritsaning xos sonlari berilgan A matritsaning xos sonlariga teskari bo‘ladi, hamda matritsalarning xos vektorlari bir xil.*

Teorema. *Idempotent matritsaning har bir xos soni yoki nolga teng yoki birga.*

Nazorat savollari

1.Operatpr deganda nimani tushunasiz?
2. Chiziqli operatorni qanday tushunasiz?
3. Matritsaning xarakteristik tenglamasi deganda qanday tenglamani tushunasiz?
4. Operatorning xos soni va xos vektori qanday aniqlanadi?
5. Har qanday matritsaning xos son va hos vektorlari mavjudmi?
6. Xos son va xos vektorning qanday xossalarini bilasiz?

3-mashg’ulot

2.3.1. Evklid fazosi
2.3.2. Kvadratik formalar
2.3.3. Almashtirishning chiziqli modeli

***Tayanch iboralar**: fazo, chiziqli fazo, skalyar ko’paytma, Evklid fazosi, norma, uchburchak tehgsizligi, Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi, bir jinsli funksiya, kvadratik forma, simmetrik ko’rinish, kanonik ko’rinish, inersiya qonuni, chiziqli operator bilan bog’liqlik, xalqaro savdo modeli.*

2.3.1. Evklid fazosi

***Ta’rif**. Agar L chiziqli fazo berilgan bo‘lib, $\forall x, y \in L$ elementlar uchun shunday $(x; y)$ son mos qo‘yilgan bolsa va u quyidagi xossalarni qanoatlantirsa:*

1. $(x, y) = (y, x), (x, y \in L)$, *2.* $(x, y + z) = (x, y) + (x, z), (x, y, z \in L)$;

3. $(\alpha x, y) = \alpha (x, y), (\alpha \in R,\ x, y \in L)$, *4.* $(x, x) \geq 0$ *va faqat* $x = 0 (x \in L)$ *bo‘lganda* $(x; x) = 0$, *U holda bu chiziqli fazoda skalyar ko'paytma aniqlangan deyiladi.*

Skalyar ko'paytma kiritilgan chiziqli fazo evklid fazosi deyiladi.

Skalyar ko'paytma yordamida vektorning normasi (uzunligi) tushunchasini kiritish mumkin. x vektorning uzunligi (normasi) $|x|$ deb, quyidagicha aniqlangan songa aytiladi. $|x| = \sqrt{(x,x)}$

Norma quyidagi xossalarga ega bo'ladi.

1. $|x| = 0$ faqat va faqat $x = 0$, bo'lsa. 2. Istalgan λ son uchun $|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|$

3. $|(x,y)| \le |x| \cdot |y|$-Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi. 4. $|x+y| \le |x| + |y|$ uchburchak tengsizligi

Ikkita x va y vektorlar orasidagi burchak θ quyidagi tenglik bilan aniqlanadi:

$\cos\vartheta = \dfrac{(x,y)}{|x| \cdot |y|}$, bu yerda $0 \le \vartheta \le \pi$ deb qaraladi.

Teorema. Har qanday n o'lchovli L evklid fazosida ortonormal bazis mavjuddir.

R^n Evklid fazoda $\ell_1 = (1,0,\ldots,0)$, $\ell_2 = (0,1,\ldots,0),\cdots,\ell_n = (0,0,\ldots,1)$ vektorlar ortonormal bazisni tashkil etadi.

2.3.2. Kvadratik formalar

Kvadratik formalar maxsus matritsaviy funksiya bo'lib, ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning maksimumi va minimumlarini topishda qo'llaniladi. Ekonometrikaning ko'pgina modellari parametrlarini baholashda ma'lum bir kvadratik formalarni minimallashtirish yechim ko'rinishini olish imkonini beradi.

Ta'rif. *n ta o'zgaruvchining kvadratik formasi deb*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i x_j$$

tenglik orqali aniqlangan f funksiyaga aytiladi.

Bu yerda a_{ij}-lar kvadratik formaning koeffitsientlari deyiladi. Ular haqiqiy sonlar bo'lib, $a_{ij} = a_{ji}$ shartlarni qanoatlantiradi. Shu koeffitsientlar yordamida tuzilgan $A = (a_{ij})$ $(i, j = 1,2,\ldots,n)$ matritsa kvadratik formaning matritsasi deyiladi, $a_{ij} = a_{ji}$ shart bajarilgani uchun bunday matritsalarni simmetrik matritsalar ko'rinishida ifoda qilish mumkin:

$$f(X) = X'AX \qquad (3)$$

bu yerda $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ - matritsa ustundan iboratdir.

$C = (c_{ij})\,(i, j = 1,2,\ldots,n)$ n-tartibli xos bo'lmagan matritsa bo'lib, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ va $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)'$ lar $X = CY$ tenglik orqali bog'langan bo'lsin. U holda (3) tenglikdan quyidagilarni hosil qilamiz,

$$f = X'AX = (CY)'A(CY) = (Y'C')A(CY) = Y'(C'AC)Y = Y'A^*Y$$

Demak, $X = CY$ xos bo‘lmagan chiziqli almashtirishda f kvadratik formaga mos keluvchi matritsa quyidagicha bo‘lar ekan

$$A^* = C'AC$$

Agarda barcha $i \neq j$ lar uchun $a_{ij} = 0$ bo‘lsa, ya’n’ $f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2$ ko‘rinishda bo‘lsa, demakki kvadratik formaning matritsasi diagonal ko‘rinishda bo‘lsa u holda $f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ forma kanonik kvadratik forma deyiladi.

Misol. $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_5^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ kvadratik formani kanonik ko‘rinishga keltiraymiz.

Kvadratik formanga mos matrisa $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ ko‘rinishda bo‘ladi.

Shu matrisaning xos son va xos vektorlarini topamiz.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 1 \\ -3 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 . \quad -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 36 = 0 . \quad \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 6.$$

Xos vektorlarni topamiz.

a) $\lambda_1 = -2$ uchun $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ yoki $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$ yoki $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$

Bu sistemani notriveal yechimlaridan biri $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) λ_2=3 uchun xuddi a) punktdagi kabi mulohazalarda $e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) λ_3=6 uchun ham xuddi a) punktdagi kabi mulohazalarda $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ yechimlarni hosil qilamiz.

Normal vektorlar uchun $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ shart o‘rinli ekanligini inobatga olib, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vektorni $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ga ko‘paytirib, $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ normal vektorni hosil qilamiz. Xuddi shu kabi, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ qolgan normal vektorni hosil qilamiz.

e_1, e_2, e_3 xos vektorlar o‘zaro juft-juft orthogonal,yani $e_1^T \cdot e_2 = e_1^T \cdot e_3 = e_2^T \cdot e_3 = 0$ bo‘lgani uchun C matritsa quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi

$$C=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix}$$

O‘zgaruvchilarning $X=CY$ orthogonal almashtirilishida berilgan kvadratik forma quyidagi $F(y_1,y_2,y_3)=3y_1^2+6y_2^2-2y_3^2$ kanonik ko‘rinishga keladi, bunda

$$y_1=-\frac{x_1}{\sqrt{3}}+\frac{x_2}{\sqrt{3}}+\frac{x_3}{\sqrt{3}}\ ,\ y_2=\frac{x_1}{\sqrt{6}}-\frac{x_2}{\sqrt{6}}+\frac{2x_3}{\sqrt{6}}\ ,\ y_3=\frac{x_1}{\sqrt{2}}+\frac{x_2}{\sqrt{2}}$$

va aksincha

$$x_1=-\frac{y_1}{\sqrt{3}}+\frac{y_2}{\sqrt{6}}+\frac{y_3}{\sqrt{2}}\ ,\ x_2=\frac{y_1}{\sqrt{3}}-\frac{y_2}{\sqrt{6}}+\frac{y_3}{\sqrt{2}}\ ,\ x_3=\frac{y_1}{\sqrt{3}}+\frac{2y_2}{\sqrt{6}}\ .$$

Ta’rif. *Agar barcha* $x\neq 0$, *uchun* $q(x)=x^TAx>0$ *bo‘lsa,* $q(x)$ *kvadratik forma va A matritsa* ***musbat aniqlangan*** *deyiladi.*

Agar barcha $x\neq 0$, *uchun* $q(x)=x^TAx\geq 0$ *bo‘lsa,* $q(x)$ *kvadratik forma va A matritsa* ***yarim musbat aniqlangan*** *deyiladi.*

Agar barcha $x\neq 0$, *uchun* $q(x)=x^TAx<0$ *bo‘lsa,* $q(x)$ *kvadratik forma va A matritsa* ***manfiy aniqlangan*** *deyiladi.*

Agar barcha $x\neq 0$, *uchun* $q(x)=x^TAx\leq 0$ *bo‘lsa,* $q(x)$ *kvadratik forma va A matritsa* ***yarim manfiy aniqlangan*** *deyiladi.*

Agar ba’zi ***x*** *lar uchun kvadratik forma musbat va boshqa* ***x*** *lar uchun manfiy aniqlangan bo‘lsa, u holda A matritsa uchun* ***aniqmas(xosmas)*** *deyiladi.*

Teorema. *Agar matritsaning xos sonlari musbat aniqlangan bo‘lishi uchun A haqiqiy simmetrik matritsa musbat aniqlangan bo‘lishi zarur va yetarlidir.*

Agar A haqiqiy simmetrik matritsa yarim musbat aniqlangan bo‘lishi uchun matritsaning xos sonlari noldan katta yoki nolga teng bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Agar matritsaning xos sonlari manfiy aniqlangan bo‘lishi uchun A haqiqiy simmetrik matritsa manfiy aniqlangan bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Agar A haqiqiy simmetrik matritsa yarim manfiy aniqlangan bo‘lishi uchun matritsaning xos sonlari noldan kichik yoki nolga teng bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Teorema*. Istalgan kvadratik formani xos bo‘lmagan chiziqli almashtirish yordamida kanonik ko‘rinishga olib kelish mumkin.*

Kvadratik formaning kanonik ko‘rinishi koeffitsientlari ma’n’sida yagona bo‘lmaydi. Lekin quyidagi teorema o‘rinlidir.

Teorema*. (Kvadratik forma uchun inertsiya qonuni). Kvadratik formaning barcha kanonik ko‘rinishlaridagi musbat va manfiy hadlari soni bir xil bo‘ladi.*

Teorema*.* $f=X'AX$ *kvadratik forma musbat aniqlangan bo‘lishi uchun* A *matritsaning barcha bosh minorlari musbat bo‘lishi zarur va yetarlidir, ya’n’*

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2i} \\ - - - & - - - - \\ a_{i1} & a_{i2} \cdots a_{ii} \end{vmatrix} > 0, \ i = 1, 2, \cdots, n$$

bo'lishi zarur va yetarlidir.

Kvadratik forma manfiy aniqlangan bo'lishi uchun esa $(-1)^i \Delta_i > 0,\ i = 1,\ 2, \ldots, n$ *shartning bajarilishi zarur va yetarlidir.*

Teorema. *A matritsaning musbat aniqlangan bo'lishi uchun A matritsa bosh minorlari musbat aniqlangan bo'lishi zarur va yetarlidir.*

A matritsa bosh minorlari quyidagi matritsa determinantlaridan tuziladi:

$$A_1 = a_{11},\ A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \ldots$$

Misol. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matritsa musbat yoki manfiy aniqlanganlikka tekshiring.

Yechish. Berigan matritsaning xos sonlari $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$ va $\lambda_3 = 3$, uyqoridagi teoremaga ko'ra kvadratik forma musbat aniqlangan.
Quyidagicha yozish mumkin:

$$q(x) = (x_1 \quad x_2 \quad x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 \cdot$$

Ixtiyoriy x_1, x_2, x_3 qiymatlarni olganda ham $q(x)$ musbatdir. Hamda barcha asosiy minorlar ham musbat aniqlangan. Natijada berilgan matritsa ham musbat aniqlangan.

Misol. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ matritsa musbat yoki manfiy aniqlanganlikka tekshiring.

Yechish. Berigan matritsaning xos soni $\lambda = -1$ ikki karralidir. Uyqoridagi teoremaga ko'ra kvadratik forma manfiy aniqlangan, hamda quyidagicha yoziladi:

$$q(x) = (x_1 \quad x_2) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -x_1^2 - x_2^2.$$

x o'zgaruvchi vektor oldidagi ishora manfiy.

2.3.3. Almashtirishning chiziqli modeli

$S_1, S_2, \cdots, S_n$ n-ta mamlakat bo'lib, ularning milliy daromadlari mos ravishda $x_1, x_2, \ldots, x_n$ larga teng bo'lsin. a_{ij} - S_j -mamlakatning S_i -mamlakatdan sotib olgan tovarlarga sarf qilgan milliy daromadning ulushi bo'lsin. Milliy daromad to'laligicha mamlakat ichida va boshqa mamlakatlardan tovar xaridi uchun sarf bo‘ladi deb hisoblaymiz, ya’ni

$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n$ tenglik o‘rinli bo‘lishi kerak.

Quyidagi matritsani qaraylik $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ - - - & - - - - \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}$,

bu matritsa savdo-sotiqning strukturaviy matritsasi deb nomlanadi. Istalgan $S_i \ (i = \overline{1, n})$ mamlakat uchun ichki va tashqi savdodan hosil bo‘lgan tushumi $P_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$ tenglik orqali aniqlanadi. Mamlakat olib borayotgan savdo-sotiqning muvozanatda bo‘l’shi uchun har bir mamlakat savdosi kamomadsiz bo‘lishi kerak, ya’n’ har bir mamlakat savdosidan hosil bo‘lgan tushum uning milliy daromadidan kam bo‘lmasligi kerak. Ya’ni

$$P_i \geq x_i, \ i = \overline{1, n}$$

Agar $P_i > x_i$ deb faraz qilsak, u holda quyidagini hosil qilamiz:

$$Pi = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k > x_i, \quad i = \overline{1, n}$$

bu yerdan $\sum_{i=1}^{n} P_i > \sum_{i=1}^{n} x_i$,ya’ni $\sum_{i=1}^{n} P_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\right)x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k > \sum_{k=1}^{n} x_i$

ekanligi kelib chiqadi, bu esa qarama-qarshilikdir. Demak, $P_i \geq x_i$ tengsizlik o‘rniga $P_i = x_i$ tenglik o‘rinli bo‘lishi kelib chiqadi. Iqtisodiy nuqtai nazardan bu tushunarli holatdir, chunki mamlakatlarning barchasi bir paytda foyda ko‘rolmaydi. Mamlakatlar milliy daromadi uchun $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ vektorni kiritsak u holda $P_i = x_i$, ya’ni $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = x_i, \ \ i = \overline{1, n}$ tengliklardan quyidagi tenglamani hosil qilamiz: $\mathrm{AX} = \mathrm{X}$, ya’ni, qaralayotgan masala A matritsaning $\lambda = 1$ xos soniga mos keladigan xos vektorini topish masalasiga kelar ekan.

Misol 1. To‘rtta mamlakat savdosining strukturaviy matrisasi $A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ budjetlar yig‘indisi $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6270$ (shartli pul birligi) bo‘lsa, har bir mamlakatning budjeti topilsin.

Dastlab,berilgan strukturaviy matrisaning $\lambda = 1$ xos songa mos keluvchi xos vektorni topish kerak, ya’ni $(A - E)\bar{x} = 0$ tenglamani yechish kerak.

$$\begin{pmatrix} -0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & -0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & -0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & -0{,}6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bu sistemaning rangi uchga teng bo‘lgani uchun, noma’lumlardan bittasi erkli o‘zgaruvchi va qolganlari shu erkli o‘zgaruvchi orqali ifodalanadi. Sistemani Gauss usuli bilan yechib, x xos vektorning kompanentlarini topamiz

$$x_1 = \frac{140}{121}c, \quad x_2 = \frac{146}{121}c, \quad x_3 = \frac{20}{11}c, \quad x_4 = c.$$

Topilgan qiymatni berilgan budjetlar yig‘indisiga qo‘yib c kattalikni topamiz:c=1210, bundan defitsitsiz savdoda mamlakatlar budjetining izlanayotgan kattaligini topamiz. $x_1 = 1400$, $x_2 = 1460$, $x_3 = 2200$, $x_4 = 1210$.

Misol 2. X_1, X_2, X_3 davlat byudjetiga ega uchta mamlakat savdosini qaraylik. Butun davlat byudjeti har bir mamlakat uchun yoki mamlakat ichida tovar olish uchun yoki boshqa mamlakatlardan import olish uchun sarflanadi deb hisoblaymiz. Aytaylik, birinchi mamlakat o‘z byudjetining yarimini mamlakat ichidagi tovar ayirboshlashga, byudjetning $\frac{1}{4}$ qismini ikkinchi mamlakatdan va qolgan $\frac{1}{4}$ qismini uchinchi mamlakatdan mahsulot olishga sarflansin. Ikkinchi mamlakat ichki tovar uchun ham, birinchi va uchinchi mamlakatdan mahsulot olish uchun ham byudjetni teng miqdorda taqsimlasin. Uchinch mamlakat byudjetning $\frac{1}{2}$ qismiga birinchi mamlakatdan, qolgan $\frac{1}{2}$ qismiga ikkinchi mamlakatdan tovar sotib olib, mamlakat ichida hech qanday mahsulot ayirboshlamasin. Shu xalqaro savdo modelining X xos vektori topaylik.

Bu xalqaro savdoning strukturaviy matritsasini kiritamiz.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} I & II & III \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Bunda, $a_{ij} - j-$mamlakatning $i-$mamlakatdan sotib olgan mahsulotining davlat byudjetidagi qismi. Bu matritsa har bir ustuni elementlarining yig‘indisi birga teng.

i mamlakat bir yillik savdodan so‘ng quyidagi tushumga ega bo‘ladi:

$$P_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3$$

Masalan, birinchi mamlakat uchun tushum quyidagicha bo‘ladi:

$$P_1 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{2}X_3$$

Savdoning muvozanatli bo‘lishi uchun har bir mamlakat uchun savdoning tanqissizligini talab qilish zarur, yayni barcha $i = 1,\ 2,\ 3$ uchun $P_i = X_i$ bo‘lishi kerak. Matritsaviy ko‘rinishda bu tenglik $AX = X$ kabi ifodalanadi,bu erda $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Demak, qaralayotgan hol uchun X ni aniqlovchi tenglamalar sistemasi

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

ko‘rinishiga ega.

Bu sistemaning umumiy yechimi $\begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = \dfrac{3}{2}x_3 \end{cases}$ korinishda bo‘ladi.

Shuning uchun xos vektor deb $\bar{x} = x^T = (4;\ 3;\ 2)$ vektorni olish mumkin. Xususan, bu savdoda ishtirok etayotgan mamlakatlar savdolarini muvozanatlashlari uchun ularning davlat byudjetlari $x_1 : x_2 : x_3 = 4:3:2$ kabi nisbatda bo‘lgandagina erishishlari mumkinligini anglatadi.

Nazorat savollari

1. Skalyar ko’paytma deganda nimani tushunasiz?
2. Evklid fazosini ta'riflang.
3. Evklid fazosida norma qanday aniqlanadi?
4. Norma qanday xossalarga ega?
5. Kvadratik forma nima?
6. Kvadratik formaning simmetrik ko‘rinishi qanday bo‘ladi?
7. Kvadratik formaning kanonik ko‘rinishi qanday bo‘ladi?
8. Inersiya qonyni ayting.
9. Xalqaro cavdo modelini tushuntiring?

3-MAVZU. ANALITIK GEOMETRIYA

1-mashg'ulot

3.1.1. To'g'ri chiziq tenglamalari
3.1.2. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak
3.1.3. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha masofa

Tayanch iboralar: *nuqta, o'q, koordinata, burchak, tenglama,burchak koeffisent, parallel, perpendikulyar*

3.1.1. To'g'ri chiziq tenglamalari

X to'plamda har bir *x* songa biror qoida yoki qonunga ko'ra *Y* to'plamning bitta *y* soni mos qo'yilgan bo'lsa, *X* to'plamda funkiya aniqlangan deb ataladi.

xOy tekislikning *y=f(x)* munosabatni qanoatlantiruvchi *M(x,y)* nuqtalar to'plami *y=f(x)* funksiyaning grafigi deyiladi.

Faraz qilaylik, o'rta hisobda bir haftada uy-ro'zg'or xarajatlari oziq-ovqat (*C*) uchun, haftalik foyda (*Y*) bilan bog'langan bo'lib, *C=12+0.3Y* bo'lsin. Y ning ihtiyoriy qiymati uchun *C* ni baxolash mumkin.

Misol uchun, agar *Y*=90 bo'lsa, u holda *C*=12+27=39 *Y* – ga bog'liq bo'lgan holda *C* ning yagona qiymati mavjud. Bu funksiyaga misol bo'ladi. Bir yoki bir necha o'zgaruvchilar orasidagi bog'liqlik, bir funksiya yoki bir necha funksiyalar orqali aniqlanadi.

Masalan, talab funksiyasining umumiy ko'rinishi

$$Q_d = f(P)$$

Bunda tovarlar talab miqdori (*Q*) uning narxi (*P*) ga bog'liq. "*f* algebraik simvol emas, balki *P* ning funkiyasi hisoblanadi" va "*f* ko'paytiruv *P*" hisoblanmayadi. *P* "erkli o'zgaruvchi", *Q* esa *P* ga bog'langan va *P* orqali aniqlanadi. Funksiyalar bir necha erkli o'zgaruvchilarga ega bo'lishi mumkin. Masalan, ishlab chiqarish funktsiyasi umumiy shaklda

$$Q = f(K, L)$$

Bu ishlab chiqarish (*Q*) ikki erkli o'zgaruvchilar kapital (*K*) va mehnat (*L)* ga bog'liq deb aytiladi.

Funksiyaning aniq ko'rinishi bizga shuni ko'rsatadiki, erksiz o'zgaruvchi erkli o'zgaruvchi va o'zgarmaslarga bog'liq. Talab funksiysining aniq ko'rinishi

$$Q_d = 120 - 2P$$

bo'lsin. Istalgan berilgan qiymat uchun muayyan funksiya qiymatini hisoblash mumkin.

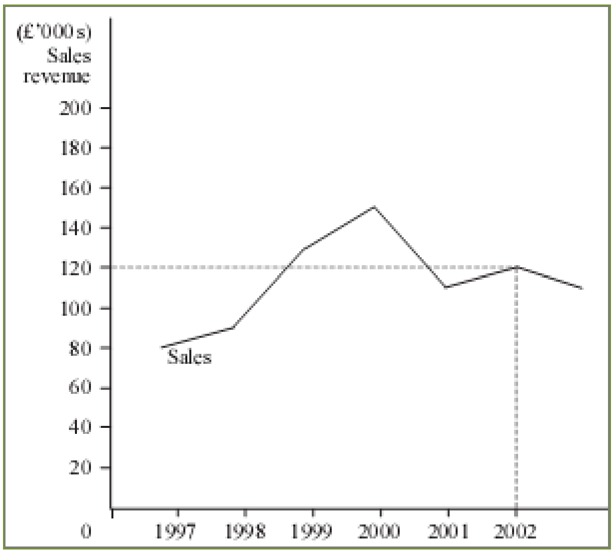
Misol. Agar *P* = 10 bo'lsa, u holda

$$Q_d = 120 - 2(10) = 120 - 20 = 100$$

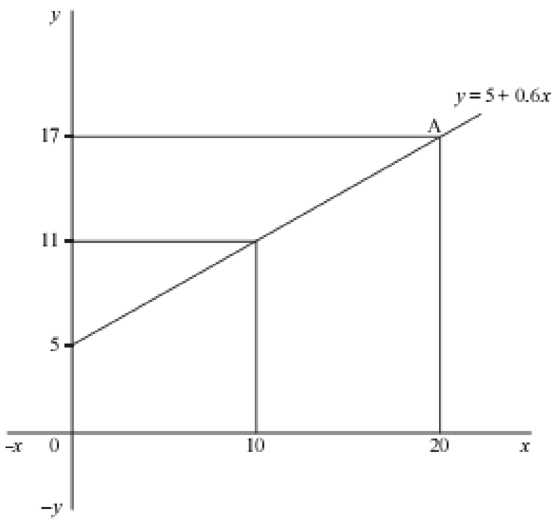
Agar *P*=45 bo'lsa, u holda

$$Q_d = 120 - 2(45) = 120 - 20 = 30$$

4.1- rasmda berilgan funksiyalar bilan tanishmiz. Bu kompaniyaning yillik savdo ko‘rsatkichlarini ko‘rsatadi. 2002 yilda uning savdosi qandayligini topish uchun, avval, gorizontal o‘qi bo‘yicha 2002 topish, "savdo" chizig‘i va bu holatda £ 120,000 bo‘lgan vertikal o‘qi bo‘ylab harakat qilish kerak. Ularning qiymatlarini oson ko‘rish uchun, ushbu grafiklar ko‘pincha, jadval sifatida beriladi.



4.1-rasm.



4.2-rasm.

Matematik funksiyalar ma’lumki “Dekart koordinatalar”da tasvirlanadi. Yuqoridagi rasmda *x* o‘zgaruvchi gorizontal o‘q bo‘iycha, *y* vertikal o‘q boyicha o‘lchanadi. *x* va *y* lar musbat va manfiy yonalishlarda o‘lchanadilar. Shu bilan birga, dekart o‘qlari -∞ dan + ∞ gacha o‘zgaradi. (yani minus cheksizdan plus cheksizgacha)

Grafikdagi ihtiyoriy nuqta ikkita “koordinataga” ega, *x* va *y* o‘qlari bo‘iycha. Misol, *A* nuqtaning koordinatalarini topish uchun x o‘qi bo‘yicha 20 birlik yurib vertical chiziq o‘tkazamiz va *y* o‘qi boyicha 17 birlik yurib gorizontal chiziq o‘tkazamiz. Koordinatalari (20, 17) nuqtani aniqlaydi. Ikkita son bir nuqtani ifodalaydi va uni grafikda ko‘rsatish mumkin. Bitta o‘q erkli o‘zgaruvchi, ikkinchisi erksiz.

4.2- rasm orqali funksiyani shaklini aniqlash mumkin. 4.2 - rasmda dekart koordinatalarni qurib, quydagi funksiya shaklini chizamiz. Turli o‘zgaruvchilarda y qiymatlarini hisoblaymiz:

Agar x=0 u holda y=5+0.6(0)=5

Agar x=10 u holda y=5+0.6(10)=5+6=11

Agar x=20 u holda y=5+0.6(20)=5+12=17

Agar erkli o‘zgaruvchi sohasida hech qanday chegaralar berilmagan bo‘lsa u holda u ihtiyoriy tabiatiga qarab manfiy yoki musbat qiymat qabul qilishi mumkin. Lekin iqtisodiyotda ba’zi bir o‘zgaruvchilar faqat musbat qiymat qabul qiladi. Faqat musbat qiymatli o‘zgaruvchilarga ega bo‘lgan chiziqli funksiya bitta o‘q bilan bog‘lanishi mumkin. Ikkita nuqta orqali bitta tog‘ri chiziq o‘tkazish mumkin.

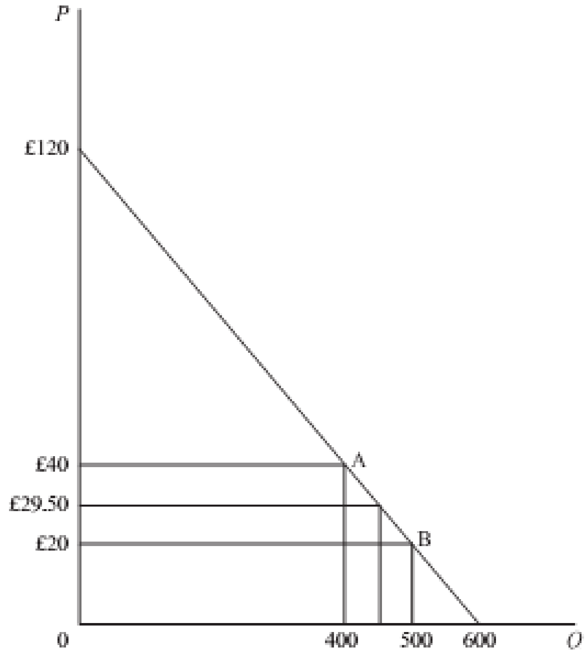
Masalan, korxona talabi chiziqli funksiya bilan bogliq, 400 ta maxsulot narxi £ 40 va 500 ta maxsulot narxi £20 bo‘lsin. 4.6 rasmda ikkita narx nuqtasi berilgan bo‘lsa talab funksiyasi grafikning qolgan qismini chizing. Bu bizga narxni tog‘ri belgilashga yordam beradi. Masalan, narx £ 29,50 bo‘lganda maxsulot miqdori taxminan 450 bo‘ladi.

Talab va narx orasidagi prognozni aniq berish mumkin, agarda boshlang‘ich ma’lumotning algebraik ko‘rinishi to‘g‘ri berilgan bo‘lsa.

Chiziqli talab funksiya shakli berilgan, *a* va *b* biz aniqlamoqchi bo‘lgan parametrlar. 4.5- rasmdan agar $p = 40$, u holda $Q = 400$ bundan $40 = a\text{-}400b$ (1)

agar $p = 20$, u holda $Q = 500$ bundan $20 = a\text{-}500b$ (2)

(1) va (2) tenglamalar ma’lumki chiziqli tenglamalar *a* va *b* topish tenglamalar sistemasining yechimini topishdir.



4.5-rasm.

Keyinchalik, biz faqat shakl va gravikdan foydalanamiz. Rasmdan ko‘rinib turibdiki B va A nuqtalar orasidagi narxning £20 oshishi, talab miqdorining 100 taga kamayishiga olib keladi. A nuqtada miqdor 400 bo‘ladi. £80 ga narxni qimmatlashtirish 400 miqdorni nolga olib keladi. 4×£20 = £80 ga narxni qimmatlashtirish bu degani talab miqdorini 4 × 100 = 400 birlikka kamaytirish demakdir.

Buning ma’nosi shuki, bu funksiyani o‘q bilan kesishmasi £80 va £40 narxlar yigindisini beradi. (A narxi), £120 ni yig‘indisini beradi. Bu *a* parametrning qiymati bo‘ladi.

b-parametr qiymatini topish uchun bir birlik talabni oshirish uchun qanday narxlar zarur bo‘ladi? £20 100 o‘sishni ta’minlagani sababli, berilgan £20/100=£0.2 ga oshirish bir bilikka o‘shishni ta’minlaydi.Bundan tashqari, narh £0,2 o‘sganda talab bir birlik ko‘payadi. Shuning uchun, b = 0,2 .

Bu funksiya quyidagiga teng

$$P = 120 - 0,2Q$$

Bu Q almashtirish yordamida to‘g‘ri P ning qiymatlarini topamiz

Agar Q = 400 bo‘lsa P = 120-0.2 (400) = 120-80 = 40 bo‘ladi.
Agar Q = 500 bo‘lsa P = 120-0.2 (500) = 120-100 = 20 bo‘ladi.

Bu P qiymatlarni grafikka qo‘yib 4.6-rasmdan A va B nuqtalar orqali chiziq chizamiz va P = 120-0.2Q chiziqli funktsiya hosil qilamiz.

Ushbu funktsiya uchun Q = 600-5P hisoblanadi. Endi siz P ning berilgan qiymatlari uchun Q ning aniq qiymatini topishingiz mumkin, masalan, agar P = £ 29.50 bo‘lsa Q = 600-5 (29,50) = 452,5[13]

$ax+by+c=0$ tenglama to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi.

1) agar $c=0$ bo‘lsa, $ax+by=0$ -to‘g‘ri chiziq koordinata boshidan o‘tai.

2) agar $b=0$ bo‘lsa, $x=-\frac{c}{a}=const$ - to‘g‘ri chiziq OY o‘qqa parallel bo‘ladi.

3) agar $a=0$ bo‘lsa, $y=-\frac{c}{b}=const$ - to‘g‘ri chiziq OX o‘qqa parallel bo‘ladi.

4) agar $b=0$ va $c=0$ bo‘lsa $x=0$- to‘g‘ri chiziq OY o‘q bilan ustma-ust tushadi.

5) agar $b\neq 0$, $a=0$ va $c=0$ bo‘lsa, $y=0$ to‘g‘ri chiziq OX o‘q bilan ustma-ust tushadi.

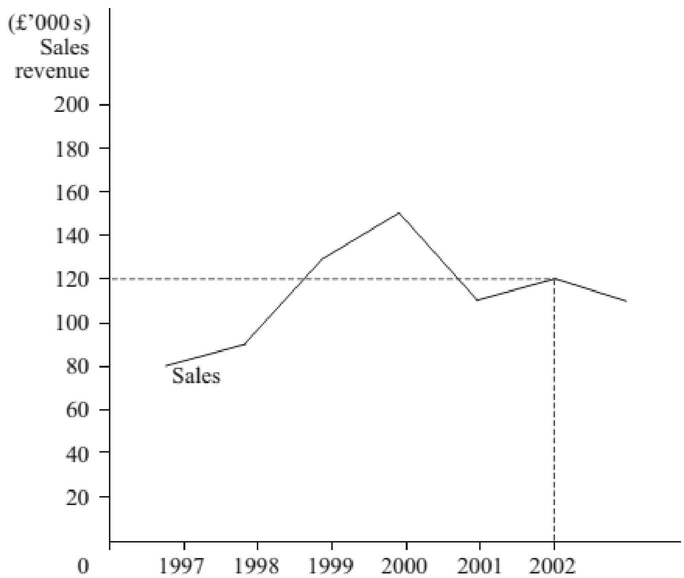
$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$- to‘g‘ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasini.

$y=kx+d$ -to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi.

$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ - $A(x_1,y_1)$ va $B(x_2,y_2)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi.

Misol. Talab funksiyasi Q = 200-4P, teskari talab funksiyani aniqlang.

Yechish. $Q=200-4P,\ \ 4P+Q=200,\ \ 4P=200-Q,\ \ P=50-0,25Q.$

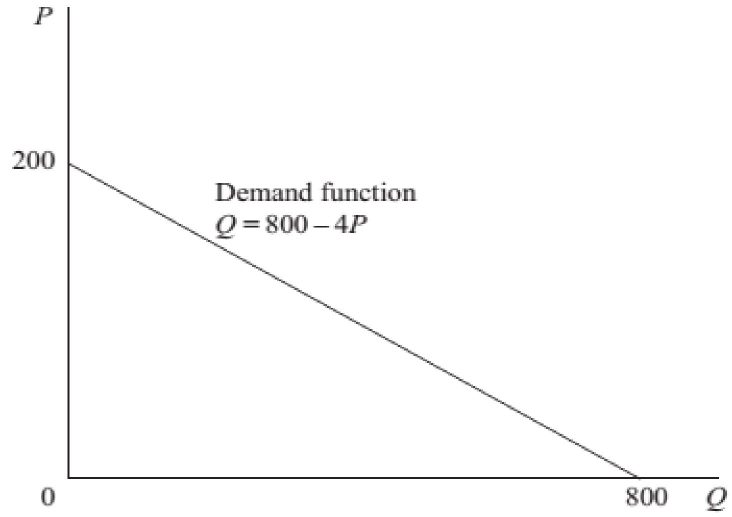


[13] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

Yuqoridagi rasmda kompaniyaning yillik savdo ko‘rsatkichlarini ko‘rsatadi. 2002 yilda uning savdosi qandayligini topish uchun, avval, gorizontal o‘qi bo‘yicha 2002 ni topish, " savdo " chizig‘i va bu holatda £ 120,000 bo‘lgan vertikal o‘qi bo‘ylab kesishgan nuqta olinadi.

Misol. Q=800−4P talab funksiyasi grafigini chizing.

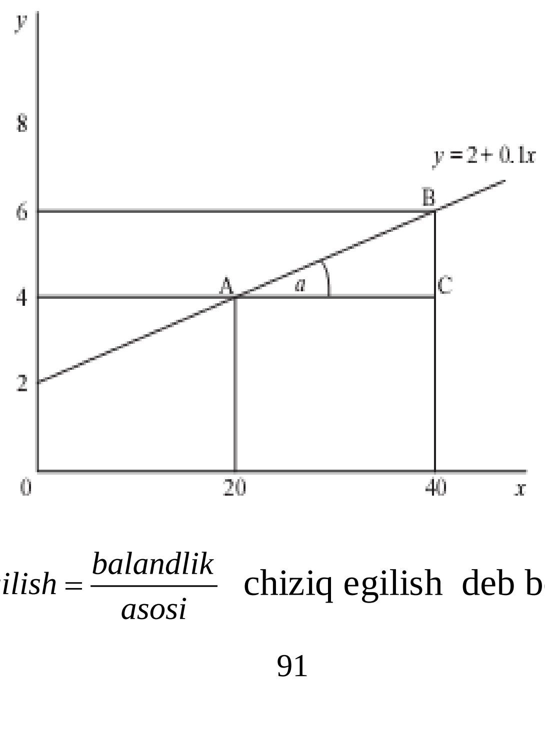
Yechish. Q=0 da P=200 va P=0 da esa Q=800.



3.1.2. Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak

Britaniya yo‘l belgilari xavfli yo‘l (egilish) larni ogohlantirish uchun xizmat qiladi. Agar uni tahrirlasak ‘1 dan 10’ ma’nosi yol vertikal bo‘yicha 1 dan 10 futgacha gorizontal yonalishda ko‘tariladi. Nishab ko‘rsatgichi tik tepaliklar ogohlantirish uchun ishlatiladi. Hozirda Evropada "1- 10" ko‘rsatilgan belgidan 10% foydalaniladi. Matematikada ham, egilish tushunchasi ishlatiladi .

Quyidagi rasm $y = 2 + 0{,}1x$ funktsiyani ko‘rsatadi, shubhasiz, nishab joylashishidan qattiy nazar qiyaligi bir xil o‘lchanadi.



Matematikada $egilish = \dfrac{balandlik}{asosi}$ chiziq egilish deb belgilangan.

To‘g‘ri uchburchak asosi va tomonlarning balandligi o‘lchanadi. Balandlikning asosga nisbati egilishni beradi.

Misol. Talab funktsiyasi $Q = 830 - 2,5P$, P grafikda vertikal o‘qi bo‘yicha olingan bo‘lsa egilish qanday bo‘ladi?

Yechish. Agar $Q = 830 - 2,5P$ bo‘lsa u xolda $2,5P = 830 - Q$ $P = 332 - 0,4Q$ bo‘ladi.

Binobarin, egilish -0.4 teng Q koeffitsienti hisoblanadi.

x chiziqli funksiya koeffitsienti nolga teng bo‘lsa, egilish xam nol bo‘ladi, ya’ni chiziq gorizontal bo‘ladi. Misol uchun, y=20 funksiya x ning barcha qiymatlari uchun 20 qiymatini oladi , degan ma’noni anglatadi. Aksincha, egilish vertikal chiziq bo‘yicha cheksizga teng. (Ammo y qiymat x ning bir qiymatli funksiyasi sifatida bo‘lmaydi)

Talab egilishi va talab elastikligi 2 bo‘limda bayon etilgan va yoy egilishi tushuntirilgan.

Talabning egiluvchanligi talab elastiklik egri chizmadan farq qilishi mumkin, aslida elastiklik "o‘rtacha " ko‘rinish sifatida ishlatiladi. Chiziqning elastikligini biz grafikda muayyan nuqtada egiluvchanligi ko‘rish mumkin. Bu " nuqtada talabning elastikligi " deb ataladi va quyidagicha aniqlanadi

$$e = (-1)\frac{P}{Q}\left(\frac{1}{egilish}\right)$$

P va Q - nuqtada narx va hajmi hisoblanadi. Nuqtadagi egilish chiziqli funksiyaning barcha nuqtalarida bir xil bo‘ladi. Bu tenglamani chiziqli bo‘lmagan talab funksiyasiga qo‘llash 8 bo‘limda ko‘rsatiadi va izohlanadi.

Misol. Talab grafikida nuqtaviy talab elastikligini hisoblang?

$P = 60 - 0,2Q$

Agar (I)narx nol ,

(II)narx £ 20,

(III) narx £ 40,

(IV) narx £ 60 bo‘lganda .

Yechish. Bu talab jadvali, ilgari 4.9-rasmda ko‘rsatilgan. Uning barcha nuqtalarda egilishi $-0,2$ ga teng, chunki bu chiziqli funksiya va u x ning koeffisentidir. Q ning qiymatini topish uchun, biz teskari funksiyani topishimiz kerak. Quydagi berilgan shartda

$P = 60 - 0,2Q$ undan $0,2Q = 60 - P$ $Q = 300 - 5P$ 0.2Q=60−P

(I) agar B nuqtada P nol bo‘lsa, u holda Q = 300-5 (0) = 300. Shuning uchun, egiluvchanlik nuqtasi $e = (-1)\frac{P}{Q}\left(\frac{1}{egilish}\right) = (-1)\frac{0}{300}\left(\frac{1}{-0,2}\right) = 0$

(II) P = 20, u xolda Q = 300-5 (20) = 200 .

$$e = (-1)\frac{20}{200}\left(\frac{1}{-0,2}\right) = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{0,2}\right) = \frac{1}{2} = 0,5$$

(III) P = 40, u xolda Q = 300-5 (40) = 100 .

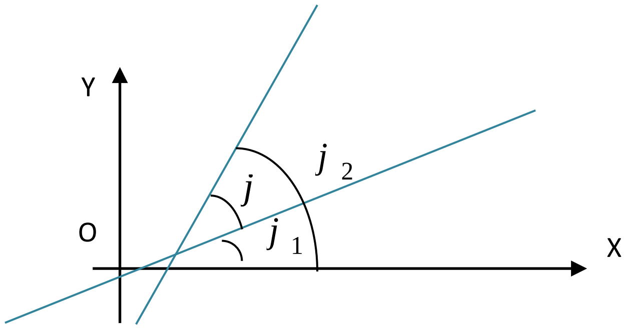
$$e=(-1)\frac{40}{100}\left(\frac{1}{-0,2}\right)=\frac{2}{5}\left(\frac{1}{0,2}\right)=\frac{2}{1}=2$$

(IV) agar P = 60 bo‘lsa Q = 300-5 (60) = 0 .

Agar Q=0, bo‘lsa unda $P/Q\to\infty$

Demak , $e=(-1)\frac{P}{Q}\left(\frac{1}{egilish}\right)=(-1)\frac{60}{0}\left(\frac{1}{-0,2}\right)\to\infty$ [14]

$y=k_1x+d_1$ va $y=k_2x+d_2$ to‘g‘ri chiziqlar berilgan bo‘lsin. Bu to‘g‘ri chiziqlar kesishish nuqtasi atrofida, birinchi to‘g‘ri chiziqni soat strelkasiga teskari yo‘nalishda aylantirish natijasida ikkinchi to‘g‘ri chiziq bilan ustma-ust tushguncha hosil bo‘lgan burchak φ, ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak deyiladi.



$$\varphi=\varphi_2-\varphi_1\Rightarrow tg\varphi=\frac{tg\varphi_2-tg\varphi_1}{1+tg\varphi_2\cdot tg\varphi_1}=\frac{k_2-k_1}{1+k_2\cdot k_1}$$

To‘g‘ri chiziqlarning paralellik va perpendikulyarlik shartlari

Agar to‘g‘ri chiziqlar burchak koeffisentli tenglamalar bilan berilgan bo‘lsa, ya’ni $y_1=k_1x+b_1$, $y_2=k_2x+b_2$,u hola

$k_2=-\frac{1}{k_1}$ - bu to‘g‘ri chiqlarning perpendikulyarlik sharti ,

$k_2=k_1$ - bu to‘g‘ri chiqlarning paralellik sharti.

3.1.3. Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha masofa

$M(x_0,y_0)$nuqtadan $ax+by+c=0$ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

formulani yordamida hisoblanadi.

Misol. Uchlari A(-7; 2); B(5; -3); C(8; 1) nuqtalarda bo‘lgan ABC uchburchakni B uchidan chiqarilgan mediana, balandlik, bissektrisa tenglamalarini tuzing.

[14] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

Yechish. B(5; -3) nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar to‘plamini tuzamiz: $y+3=k(x-5)$

D nuqtaning koordinatalari

$$x_D=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{-7+8}{2}=\frac{1}{2},\ y_D=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2},\ D(\frac{1}{2};\frac{3}{2})$$

BD mediana burchak koeffisenti $k_{BD}=\frac{y_D-y_B}{x_D-x_B}=\frac{3/2+3}{1/2-5}=-1$ bo‘ladi.

BD mediana tenglamasi: $y+3=-(x-5)$ yoki $x+y-2=0$.

BE balandlik tenglamasini tuzamiz, bunda AC va BE to‘g‘ri chiqlarning perpendikulyarlik shartidan foydalanamuiz. AC to‘g‘ri chiziq burchak koeffitsenti $k_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{1-2}{8+7}=-\frac{1}{15}$.

AC va BE to‘g‘ri chiqlar perpendikulyar bo‘lganligi uchun $k_{BE}=-\frac{1}{k_{AC}}=15$.

BE to‘g‘ri chiziq tenglamasi: y+3 = 15(x-5) yoki 15x-y-78 = 0.

BE bissektrisa tenglamasini tuzamiz: $\angle ABF=\angle FBC\Rightarrow\ tg\angle ABF=tg\angle FBC\Rightarrow$

$$\frac{k_{BF}-k_{BC}}{1+k_{BF}\cdot k_{BC}}=\frac{k_{AB}-k_{BF}}{1+k_{AB}\cdot k_{BF}}\Rightarrow\frac{k_{BF}-\frac{4}{3}}{1+\frac{4}{3}k_{BF}}=\frac{-\frac{5}{12}-k_{BF}}{1--\frac{5}{12}k_{BF}}\Rightarrow 33k_{BF}^2+11k_{BF}-33=0$$

$(k_{BF})_1=-\frac{11}{3},\ (k_{BF})_2=\frac{3}{11}$. BF bissektrisa Ox o‘q bilan o‘tmas burchak tashkil qilganligi uchun $(k_{BF})_1=-\frac{11}{3}$ yechimni olamiz. Demak, BF bissektrisa tenglamasi $y+3=-\frac{11}{3}(x-5)$ yoki 11x+3y-46 = 0 ko‘rinishda bo‘ladi.

Nazorat savollari

1. Tekislikda to‘g‘ri chiziq tenglamalarining qanday ko‘rinishlari mavjud?
2. To‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak qanday topiladi.?
3. To‘g‘ri chiziqlarning parallellik va perpendikuliyarlik sartlari qanday?
4. Ikki nuqtaorasidagi masofa qanday topiladi?
5. Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha masofa qanday topiladi?

2 - mashg'ulot

3.2.1. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar

3.2.2. Tekislikdagi harakatlar

3.2.3. Ikkinchi tartibli egri chiziqlarni kanonik ko'rinishga keltirish

Tayanch iboralar: *o'q, markaz, radius, fokus, ekstsentrisitet,direktrissa, radius vektor, umumiy tenglama, koeffisent, markazga ega chiziq, markazga ega emas chiziqlar, parallel ko'chirish, burish, kanonik ko'rinish.*

3.2.1. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar

Agar $y = f(x)$ funksiyada x -ning biror darajasi birdan farqli bo'lsa, u holda bu funksiya chiziqli bo'lmagan deyiladi.

Misol.

$y = x^2$ - chiziqli bo'lmagan funksiya

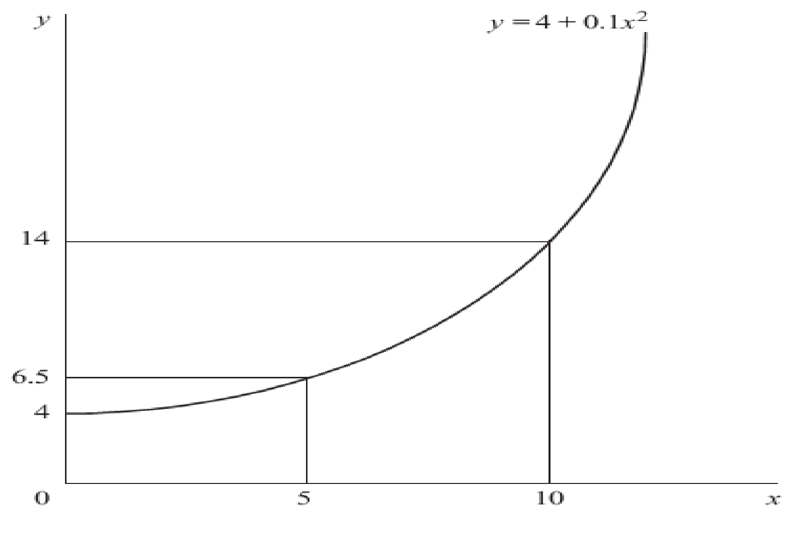
$y = 6 + x^{0,5}$ - chiziqli bo'lmagan funksiya.

Chiziqli bo'lmagan funksiyalar turli ko'rinishlarda bo'lishi mumkin. Kelgusida biz ba'zi bir iqtisodiy o'zgaruvchilarga ega funksiyalarni ko'ramiz.

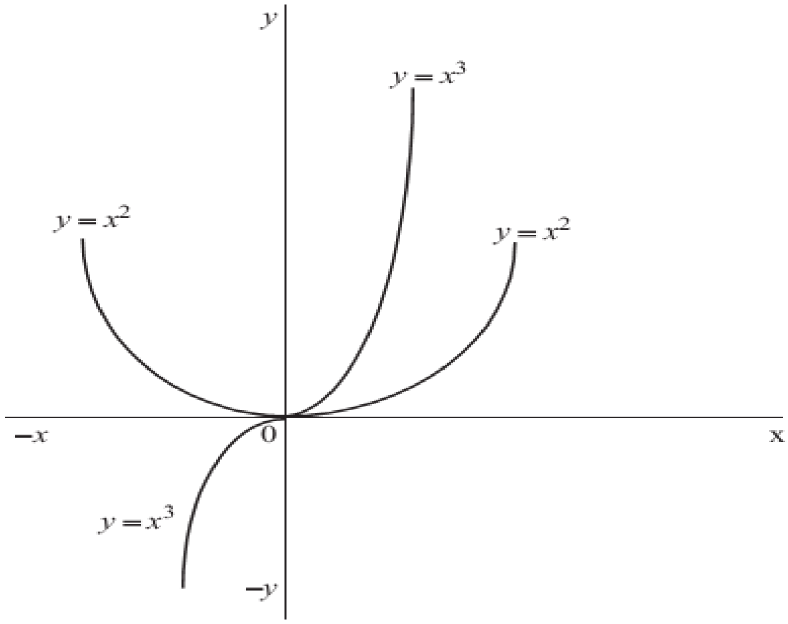
Agar $y = f(x)$ da x -ning darajasi birdan yuqori va x- musbat bo'lsa n x o'sishi bilan xad xam o'sadi.

$y = x^2$ va $y = x^3$ funksiyalarning grafigi yuqoriga intiladi, y x ga nisbatan tezroq o'sadi. x=0 da y=0 bo'lgani uchun, funksiya koordinata boshidan o'tadi. Jadvaldan ko'rinib turibdiki, x ning darajasi yuqori bo'lsa y tezroq o'sadi.[15]

x	0	1	2	3	4	5	6
$y = x^2$	0	1	4	9	16	25	36
$y = x^3$	0	1	8	27	64	125	216



[15] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y



Ta'rif. *Tekislikda berilgan* $M(x_{0,}y_0)$ *nuqtadan bir xil R masofada yotuvchi barcha nuqtalarning geometrik o'rni aylana deyiladi. Berilgan* $M(x_{0,}y_0)$ *nuqta aylana markazi, R esa aylana radiusi deb ataladi.*

Markazi $M(x_0, y_0)$ nuqtada , radiusi *R* ga teng aylananing kanonik tenglamasi

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$

Aylananing umumiy tenglamasini

$$x^2+y^2+mx+ny+p=0 \quad .$$

Ta'rif*. Ellips deb tekislikda berilgan ikki nuqtagacha bo'lgan masofalar yig'indisi avvaldan berilgan o'zgarmas songa teng bo'lgan barcha nuqtalarning geometrik o'rniga aytiladi.*

Ellipsning kanonik tenglamasi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Bu tenglama bilan berilgan ellips koordinata o'qlariga va koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi. a va b musbat sonlar bo'lib ,ular ellipsning yarim o'qlari deyiladi. $a>b$ *bo'lsa, uning fokuslari OX o'qida joylashgan bo'lib, fokuslar koordinata boshidan* $c=\sqrt{a^2-b^2}$ *masofada yotadi.* $\frac{c}{a}=\varepsilon<1$ *nisbat ellipsning ekstsentrisiteti deyiladi. Ellipsda yotgan* $M(x,y)$ *nuqtadan fokuslargacha bo'lgan masofalar fokal radius-vektorlar deb nomlanib, ular quyidagi tenglik orqali topiladi:* $r_1=a-\varepsilon x,\ r_2=a+\varepsilon x$.

Misol. O'z harakati davomida $x=9$ to'g'ri chiziqqa nisbatan $A(1;0)$ nuqtaga uch marta yaqinroq bo'lgan nuqtalar harakatining trayektoriyasini ifodalovchi chiziq tenglamasini tuzaylik.

$|AM|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$, $|MM_1|=\sqrt{(9-x)^2}$. Bu yerda M_1-M nuqtadan $x=9$ to'g'ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyarning asosi belgilangan.

U holda $3\cdot\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{(9-x)^2}$. Tenglikning ikkala tomonini kavadratga ko‘tarib,

$$8x^2+9y^2=72$$

yoki $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$ ellips tenglamasini hosil qilamiz.

***Ta’rif**. Giperbola deb berilgan ikki nuqtagacha bo‘lgan masofalar ayirmasining moduli avvaldan berilgan o‘zgarmas songa teng bo‘lgan barcha nuqtalarning geometrik o‘rniga aytiladi.*

$o<a<c$ bo‘lgani uchun $c^2-a^2=b^2$, giperbolaning kanonik ko‘rinishdagi tenglamasi $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Bu tenglama ko‘rinishida berilgan giperbola koordinata o‘qlari va koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo‘ladi. a va b parametrlar musbat son bo‘lib, a- haqiqiy yarim o‘q, b- mavhum yarim o‘q deb nomlanadi. Giperbola OX o‘qni giperbola uchlari deb ataluvchi $A_1(-a,o)$ va $A_2(a,o)$, nuqtalarda kesib o‘tadi. $c=\sqrt{a^2+b^2}$ son fokuslardan koordinata boshigacha bo‘lgan masofaga teng bo‘ladi. $\frac{c}{a}=\varepsilon>1$ nisbat giperbola ekstsentrisiteti deb nomlanadi. $y=\frac{b}{a}x$ va $y=-\frac{b}{a}x$ to‘g‘ri chiziqlar giperbola asimptotalari deyiladi. Giperbolada yotuvchi $M(x,y)$ nuqtadan fokuslargacha bo‘lgan masofalar fokal radius-vektorlar deb atalib, quyidagicha topiladi: $r_1=|\varepsilon x-a|,\quad r_2=|\varepsilon x+a|$.

Misol. Tenglamasi $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{5}=1$ bo‘lgan ellips berilgan. Uchlari ellipsning fokuslaridan, fokuslari esa uning uchlarida bo‘lgan giperbola tenglamasini tuzaylik.

Masala shartiga ko‘ra $a_g=c_e$, $c_g=a_e$, $a_e=\sqrt{8}$, $b_e=\sqrt{5}$ shuning uchun $a_g=c_e=\sqrt{8-5}=\sqrt{3}$, $b_g=\sqrt{c_g^2-a_g^2}=\sqrt{5}$. Demak izlanayotgan giperbola tenglamasi $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1$ bo‘ladi.

Ta’rif. Berilgan nuqta va berilgan to‘g‘ri chiziqdan teng masofada yotuvchi barcha nuqtalarning geometrik o‘rni parabola deb aytiladi.

Ta’rifdagi nuqta parabola fokusi, to‘g‘ri chiziq uning direktrisasi deyiladi.Parabola fokusi $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ nuqta, direktrisa tenglamasi esa $x=-\frac{p}{2}$ bo‘lsin $(p>o)$. Agar $M(x,y)$ nuqta parabolada yotsa, u holda ta’rifga ko‘ra $MF=\left|x+\frac{p}{2}\right|$ tenglik o‘rinli bo‘lishi kerak, ya’ni

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|\Rightarrow\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2\Rightarrow y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(x-\frac{p}{2}\right)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2=2px$$

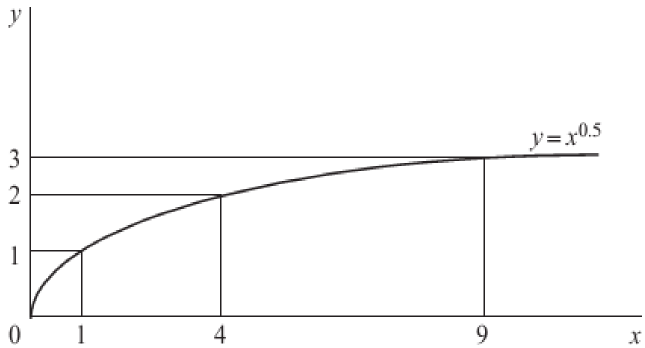
Berilgan dekart koordinatalariga nisbatan ikkinchi darajali tenglamalar bilan aniqlangan egri chiziq ikkinchi tartibli egri chiziq deyiladi.

Misol. Berilgan $F(2;0)$ nuqtadan va $y=2$ to‘g‘ri chiziqdan bir xil uzoqlikda joylashgan nuqtalar geometrik o‘rnining tenglamasini tuzaylik.

$M(x,y)$ izlanayotgan chiziqning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin, u holda $|MF|=|MA|$ yoki $\sqrt{(x-2)^2+y^2}=\sqrt{(y-2)^2}$, bu yerda $A(x;2)-M$ nuqtadan $y=2$ to‘g‘ri chiziqqa o‘tkazilgan perpendikulyarning kesishish nuqtasi. Bu tenglikning ikkala tomonini kavadratga ko‘tarib $x^2-4x+4+y^2=y^2-4y+4$ yoki $y=-\frac{1}{4}x^2+x$ parabola tenglamasini hosila qilamiz.

Masalan, $y=x^{0,5}$ funksiya grafigi

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$y=x^{0.5}$	0	1	1.414	1.732	2	2.236	2.449	2.646	2.828	3



Misol. Korxona mol-mulk lizingi uchun £90,000 belgilangan yillik xarajatlarni to‘lashi lozim. O‘rta belgilangan yillik xarajat funksiyasini keltirib chiqaring. (AFC).

Yechish. $AFC=\dfrac{umumiy\, tayinlangan\, xarajat}{Q}=\dfrac{90,000}{Q}=90,000Q^{-1}$

Q^{-1} ning xamma qiymatlari 90,000 ko‘paygani bilan , bu funksiyaning umumiy o‘zgarishiga ta’sir qilmidi va yuqoridagi rasmda berilgan $y=x^{-1}$ funksiya grafigiga o‘xshaydi.

Misol. Korxona belgilangan narx funksiyasi bilan ish olib boradi.

$$AFC=200x^{-1}$$

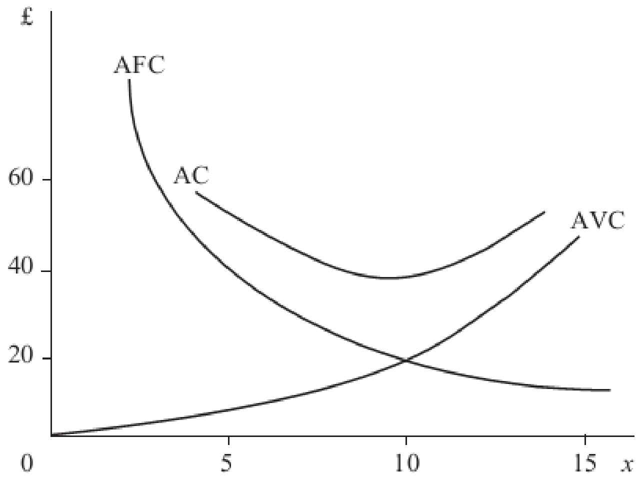
bu erda x – xom ashyo. O‘rtacha o‘zgaruvchan narx funksiyasi (AVC) $AVC=0,2x^2$ va o‘rta umumiy narx funksiyasi qanday shaklda bo‘ladi(AC)?

Yechish. Ta’rif bo‘yicha $AC=AFC+AVC$.

Demak, o‘rta umumiy narx

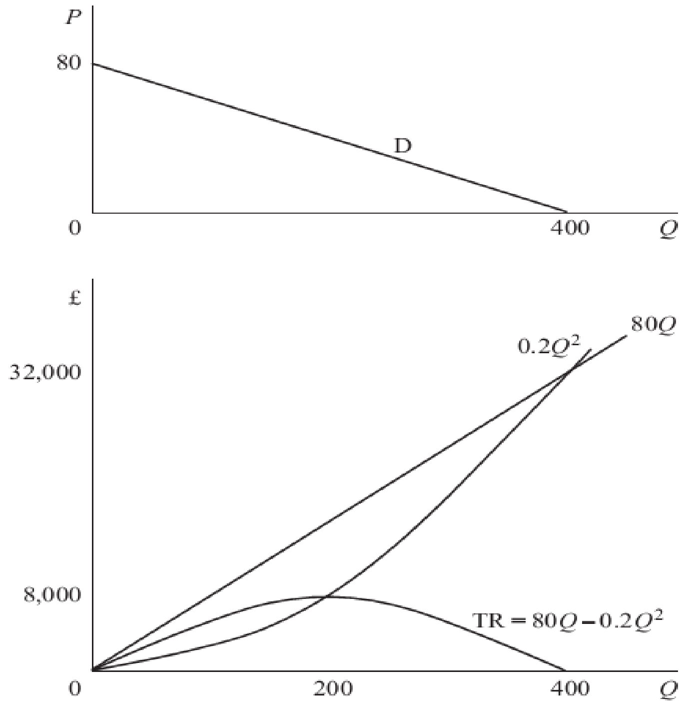
$$AC=200x^{-1}+0,2x^2.$$

x o‘ssa, AFC qiymati nolga intiladi, bundan esa AC AVC ga intiladi. Bundan, AC funksiya quyida ko‘rsatilgan U-tasvirdagi shaklni oladi



Misol. Agar talab funksiya grafigi $P = 80 - 0,2Q$ berilgan bo‘lsa, umumiy yillik foyda qanday shaklni oladi?

Yechish. Umumiy foyda (TR) – bu maxsulot sototilganda olingan umumiy pul miqdori. $TR = PQ$, $TR = (80 - 0,2Q)Q = 80Q - 0,2Q^2$.



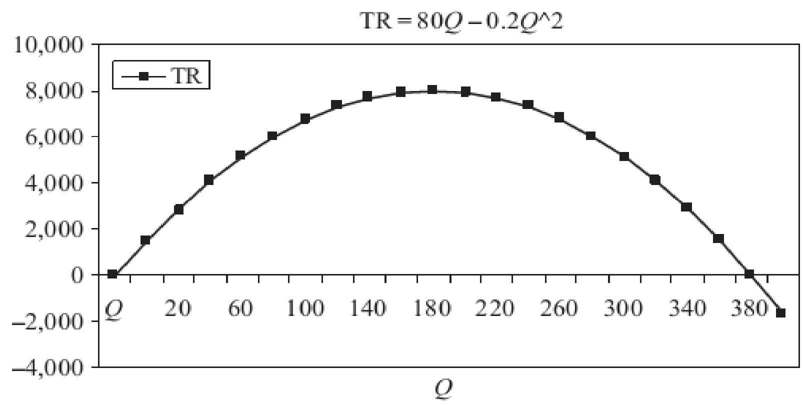
$80Q$ kompanenta – to‘g‘ri chiziq koordinata boshidan o‘tadi va o‘suvchi.

$0,2Q^2$ kompanenta - parabola, o‘suvchi funksiya bo‘ladi. Q ning kichik qiymatlari uchun $Q, 80Q > 0,2Q^2$. Ammo, Q ning o‘sishi bilan Q^2, demak $0,2Q^2$ ham tez o‘sadi va 80Q oshadi.

Misol. $TR = 80Q - 0,2Q^2$ funktsiyasi qiymatlarini hisoblash uchun Excel daeturidan foydalaning. Q va TR ning aniqlanish sohasi, yani musbat bo‘lishini inobatga oling. So‘ngra grafigini chizing.

Yechish.[16]

	A	B	C	D	E
1	Ex 4.17	TR = 80 - 0.2Q^2			
2					
3	Q	TR			
4	0	0			
5	20	1520			
6	40	2880			
7	60	4080			
8	80	5120			
9	100	6000			
10	120	6720			
11	140	7280			
12	160	7680			
13	180	7920			
14	200	8000			
15	220	7920			
16	240	7680			
17	260	7280			
18	280	6720			
19	300	6000			
20	320	5120			
21	340	4080			
22	360	2880			
23	380	1520			
24	400	0			
25	420	-1680			

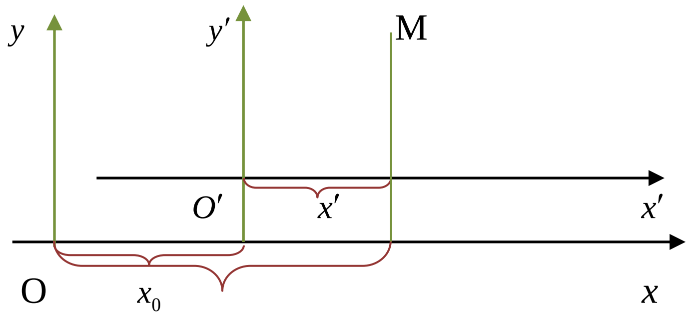


3.2.2. Tekislikdagi harakatlar

1. Koordinata o‘qlarini parallel ko‘chirish

Ikkita dekart koordinatalar sistemasida bir xil ismli o‘qlar parallel ,bir xil yo‘nalgan va o‘qlarning har birida bir xil masshtab birligi aniqlangan bo‘lsin. “Yangi” koordinatalar sistemasi ‘eski”sini parallel ko‘chirishdan hosil qilingan bo‘lib, $(x_0; y_0)$ - yangi koordinatalar sistemasining eski sistemaga nisbatan koordinatalari bo‘lsin.U holda,quyidagi chizmaga ko‘ra

[16] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

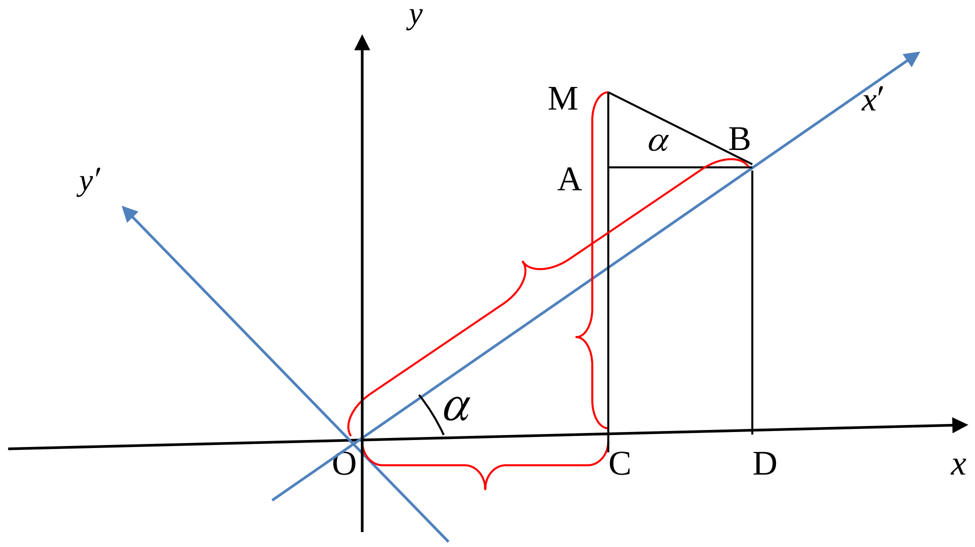


$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$$

koordinatalarni almashtirishning o‘qlarni parallel ko‘chirish formulasi hosil bo‘ladi.

2. Koordinata o‘qlarini burish

Tekislikda umumiy koordinata boshi O nuqta bo‘lgan Oxy (eski) koordinatalar sistemasi va bu sistemani α burchakka burishdan hosil qilingan $Ox'y'$ (yangi) koordinatalar sistemasi berilgan bo‘lsin.Tekislikdagi ixtiyoriy M nuqtaning eski koordinatalarini yangi koordinatalari orqali ifodalovchi formulani keltirib chiqaramiz.



Bu holda, yuqoridagi chizmaga ko‘ra *OC=OD-AB*, *CM=BD+MA* bo‘lganidan

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

o‘qlarni burish formulalarini hosil qilamiz.

3.2.3. Ikkinchi tartibli egri chiziqlarni kanonik ko‘rinishga keltirish

Ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Aylana,ellips,giperbola va paraboladan boshqa ikkinchi tartibli

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

tenglama bilan aniqlanadigan egri chiziqlar mavjudmi?

Koeffisentlarning qiymatiga bog‘liq ikkinchi tartibli

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

tenglama umumiy holda aylanani,ellipsni,giperbolani, parabolani,kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar juftini,parallel to‘g‘ri chiziqlar juftini,ustma-ust tushuvchi to‘g‘ri chiziqlar juftini,nuqtani aniqlashi va hech qanday chiziqni aniqlamasligi mumkin.

$\begin{cases} x=x'+x_0 \\ y=y'+y_0 \end{cases}$ - koordinatalarni almashtirishning o‘qlarni parallel ko‘chirish formulalari.

$\begin{cases} x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha \\ y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha \end{cases}$ - o‘qlarni burish formulalarini hosil qilamiz.

$\begin{cases} Ax_0+By_0+D=0 \\ Bx_0+Cy_0+E=0 \end{cases}$ va $\begin{cases} x=x'+x_0 \\ y=y'+y_0 \end{cases}$ - almashtirishdan umumiy tenglama quyidagich ko‘rinishda bo‘ladi: $Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2+F_1=0$, $F_1=Dx_0+Ey_0+F.$

Koordinata o‘qlarini parallel ko‘chirishda umumiy tenglama joriy koordinatalarning birinch darajalari qatnashgan hadlaridan ozod bo‘ladi.

Kanonik tenglamada koordinatalar ko‘paytmasi qatnashmagani uchun, tenglamadagi bu hadni kordinata o‘qlarini burish yordamida bartaraf etamiz.

$$\begin{cases} x'=\bar{x}\cos\alpha-\bar{y}\sin\alpha \\ y'=\bar{x}\sin\alpha+\bar{y}\cos\alpha \end{cases}$$

α burchakka burish formulasini tenglamaga qo‘yib: $A_1\bar{x}^2+2B_1\bar{x}\bar{y}+C_1\bar{y}^2+F_1=0$, bunda

$$A_1=A\cos^2\alpha+2B\sin\alpha\cos\alpha+C\sin^2\alpha,$$
$$B_1=(C-A)\sin\alpha\cos\alpha+B(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha),$$
$$C_1=A\sin^2\alpha-2B\sin\alpha\cos\alpha+C\cos^2\alpha.$$

α burchakni shunday tanlaymizki,bunda B_1 koeffisent nolga aylansin,yani

$$(C-A)\sin\alpha\cos\alpha+B(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=0$$

yoki $Btg^2\alpha-(C-A)tg\alpha-B=0$ munosabat bajarilsin.Bu tenglamani yechib burish burchagi aniqlanadi.

Yangi koordinatalar sistemasida (9) tenglama

$$A_1\bar{x}^2+C_1\bar{y}^2+F_1=0$$

kanonik ko‘rinishni oladi.

Misol. $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$ tenglama bilan berilgan egri chiziq tenglamasini kanonik ko‘rinishga keltiring ba chizing.

Yechish: Tenglama koeffisentlarini yoziz:A=5,B=4,C=5,D=-9,E=-9,F=9.

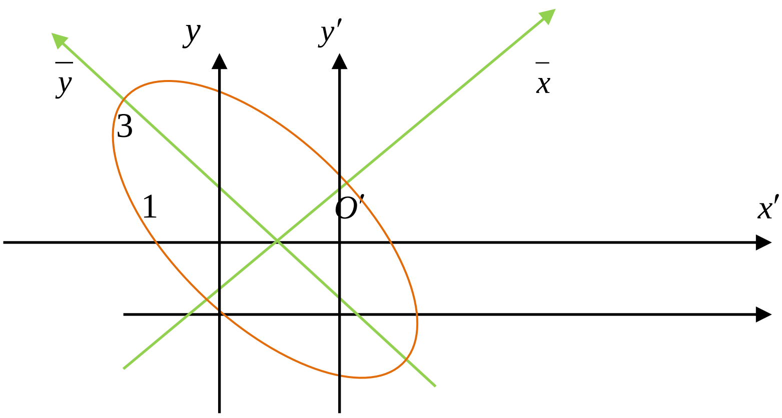
$\Delta = AC - B^2 = 25 - 16 = 9 > 0$, u holda chiziq ellipsni ifodalaydi.

Chiziq markazini aniqlaymiz:

$$\begin{cases} 5x_0 + 4y_0 - 9 = 0 \\ 4x_0 + 5y_0 - 9 = 0, \end{cases} \quad \Delta = 9 > 0,\ \Delta_x = 9,\ \Delta_y = 9.\ x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 1,\ y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 1.$$

Koordinatalar boshini $O'(1;1)$ nuqtaga ko‘chirqamiz: $\begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' + 1 \end{cases}$. Bu holda egri chiziq tenglamasi $5x'^2 + 8x'y' + 5y'^2 - 9 = 0$ ko‘rinishni oladi.

Koordinata o‘qlarini α burchakka buramiz. Burish burchagi α ni (15) formula bo‘yicha $4tg^2\alpha - 4 = 0, tg\alpha = \pm 1$ tenglamadan aniqlaymiz. Yechim uchun $tg\alpha = 1, \alpha = 45^0$ bo‘lgan holni qaraylik. Bu holda (11) formulaga asosan koordinatalar $\bar{x} = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}$, $\bar{y} = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$ munosabat bilan bog‘lanib, tenglama $9\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 9$, yoki $\frac{\bar{x}^2}{1} + \frac{\bar{y}^2}{9} = 1$ - ellipsning kanonik tenglamasini hosil qiladi.



Agar $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = 0$ bo‘lsa, u holda quyidagi ikki hol bo‘lishi mumkin.

I. *Sistema yechimga ega emas, egri chiziq markazga ega emas. Bu holda egri chiziq tenglamasini soddalashtirishni koordinata o‘qlarini burishdan boshlash qulay bo‘ladi va doim parabolaning kanonik tenglamasi hosil bo‘ladi.*

II. *Sistema cheksiz ko‘p yechimga ega. Bu holda egri chiziq parallel to‘g‘ri chiziqlar jufti yoki mavhum nuqtani ifodalaydi.*

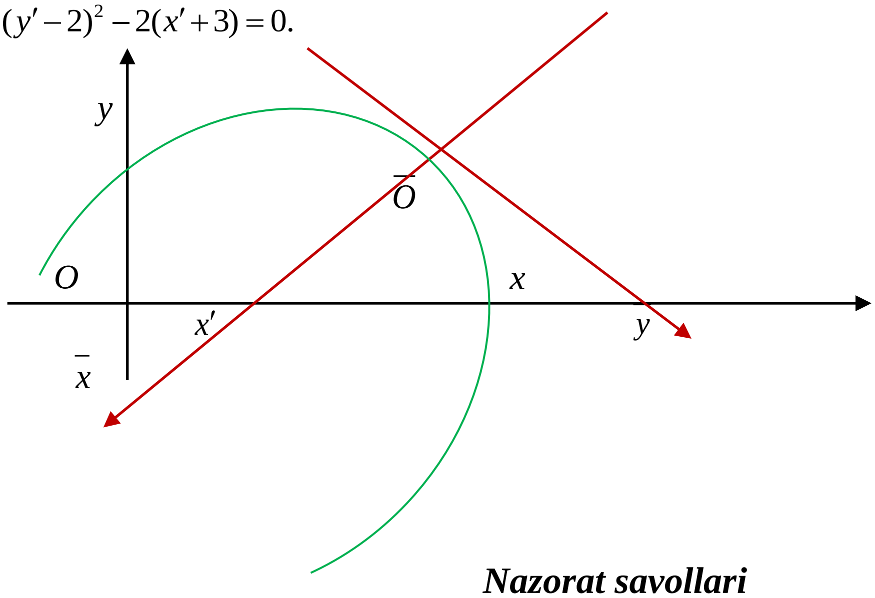
Masalan. $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$ tenglama bilan berilgan egri chiziq tenglamasini kanonik ko‘rinishga keltiraylik.

$\Delta = AC - B^2 = 144 - 144 = 0$, demak bu chiziq parabolani ifodalaydi va shuning uchun soddalashtirishni koordinatalar o‘qini burishdan boshlash qulay bo‘ladi. (12) formulalarni berilgan tenglamaga qo‘yib va $x'y'$ had oldidagi koeffisentni nolga tenglab quyidagiga ega bo‘lamiz: $12tg^2\alpha + 7tg\alpha - 12 = 0$.

Bu tenglanani yechib

$tg\alpha_1 = 0{,}75\ (\sin\alpha_1 = 0{,}6; \cos\alpha_1 = 0{,}8);\ tg\alpha_1 = -\frac{4}{3}\ (\sin\alpha_2 = -0{,}8; \cos\alpha_1 = 0{,}6).$

$x'^2,\ y'^2,\ x',\ y'$ o‘zgaruvchilar oldidagi koeffisentlarni hisoblansa, yangi sistemada berilgan tenglama quyidagi ko‘rinishni oladi $y'^2 - 4y' - 2x' - 2 = 0$ yoki $(y'-2)^2 - 2(x'+3) = 0.$



Nazorat savollari

1. Qandau chiziqqa aylana deyiladi?
2. Qandau chiziqqa ellips deyiladi?
3. Qandau chiziqqa giperbola deyiladi?
4. Qandau chiziqqa parabola deyiladi deyiladi?
5. Umumiy ko’rinishdagi chiziqning markazga ega yoki ega emasligi qanday aniqlanadi?
6. Qanday harakatlarni bilasiz?
7. Umumiy ko’rinishdagi markazga ega chiziqn qanday usulda kanokin ko’rinishga keltiriladi?

3 - mashg’ulot

3.3.1. Vektorlarning skalyar , vektor va aralash ko’paytmalari
3.3.2. Fazoda tekislikning tenglamalari
3.3.3. Fazoda to’g’ri chiziq tenglamalari
3.3.4. To’g’ri chiziq va tekislikning o’zaro joylashuvi

Tayanchiboralar: *koordinata, vektor, chiziqli amal, skalyar ko’paytma, vektor ko’paytma, aralash ko’paytma,komplanarlik, normal vektor, yo’naltiruvchi vektop, burchak, paralellik, perpendikulyarlik.*

3.3.1. Vektorlarning skalyar , vektor va aralash ko‘paytmalari

Ta’rif. Boshi A nuqtada, oxiri B nuqtada bo‘lgan yo‘naltirilgan kesmaga ***vektor*** deb ataladi va $\overline{AB}$ yoki $\vec{a}$ kabi belgilanadi.

$\vec{a}$ vektorning uzunligi uning moduli deb ataladi va $|\vec{a}|$ kabi belgilanadi. Oxiri boshi bilan ustma – ust tushadigan vektor nol vektor deb ataladi va 0 bilan belgilanadi. Agar $|\vec{a}|$ = 1 bo‘lsa, u holda $\vec{a}$ birlik vektor deyiladi.

Bir to‘g‘ri chizqda yoki paralell to‘g‘ri chiziqlarda yotuvchi vektorlar ***kolleniar*** vektorlar deyiladi.

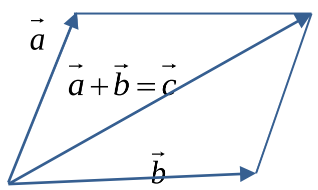
Agar ikki vektor o‘zaro kolleniar, bir xil yo‘nalgan va modullari teng bo‘lsa, bu vektorlar teng vektorlar deyiladi.

Bir tekislikda yoki paralell tekisliklarda yotuvchi vektorlar ***komplanar*** vektorlar deyiladi.

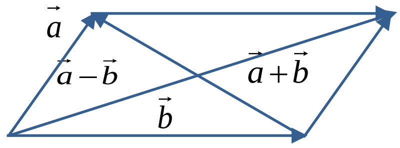
$\vec{a}$ vektorning л soniga ko‘paytmasi deb, $\vec{a}$ ga kolleniar, (л > 0 da u bilan yo‘nalishdosh,

л < 0 da esa yo‘nalishi qarama – qarshi) hamda moduli $|\lambda|\cdot|\vec{a}|$ga teng bo‘lgan л$\bar{a}$ (yoki $\bar{a}$л) vektorga aytiladi.

Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$vektorlarning yig‘indisi deb uchburchak yoki paralellogram qoidasi bo‘yicha aniqlanadigan $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ $\bar{a}+\bar{b}$ vektorga aytiladi.



Ikkita $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning ayirmasi deb $\bar{c} = \bar{a} + (-\bar{b})$ vektorga aytiladi



$\bar{a}$ vektorning (x, y, z) koordinatalari deb, boshlang‘ich nuqtasi koordinata boshi bilan ustma - ust tushganda, oxirgi nuqtasining koordinatalariga aytiladi.

$\bar{a}(x, y, z)$ vektorni $\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ ko‘rinishida ifodalanishi mumkin, bu yerda $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ - birlik vektorlar (ortlar), mos ravishda Ox, Oy, Oz o‘qlarining musbat yo‘nalishi bilan mos tushadi

$$|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1. \qquad (2)$$

$|\bar{a}|$ vektorning uzunligi $|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (3)

formula bilan aniqlanadi.

Vektorning yo‘naltiruvchi kosinuslari deb $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ sonlariga aytiladi, bunda mos ravishda $\alpha, \beta, \gamma - \vec{a}$ vektorning Ox, Oy, Oz o‘qlari bilan hosil qilgan burchaklari: $\cos\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $\cos\beta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, (4)

$\cos\gamma = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; bunda $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ (5)

Ikkita $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ va $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ yig‘indisining koordinatalari va $\vec{a}$ vektorning λ songa ko‘paytmasi quyidagi formulalar bo‘yicha aniqlanadi:

$$\vec{a} + \vec{b}(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \ (6) \qquad \lambda\vec{a}(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) \ (7)$$

$\vec{a}$ vektorning l o‘qdagi proeksiyasi deb $pr_l\,\vec{a}$

$pr_l\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi$ **(8)**

songa aytiladi, bu yerda φ $\vec{a}$ vektor va l o‘q orasidagi burchak.

Misol. Berilgan $\bar{a} = (2; -1; -2)$ va $\bar{b} = (8; -4; 0)$ vektorlar bo‘yicha quyidagilarni toping:

a) $\bar{c} = 2a$ va $\bar{d} = \bar{b} - \bar{a}$;

b) $\bar{c}$ va $\bar{d}$ vektorlarning uzunliklarini;

c) $\bar{d}$ vektorning skalyar kvadratini;

d) $(\bar{c}, \bar{d})$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasini;

e) $\bar{c}$ va $\bar{d}$ vektorlar orasidagi burchakni

Yechish. a) Ta’rifga asosan $\bar{c} = 2a = (4; -2; -4)$; $\bar{d} = \bar{b} - \bar{a} = (6; -3; 2)$.

b) (3) formulaga asosan, $\bar{c}$ va $\bar{d}$ vektorlarning uzunliklarini

$|\bar{c}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = 6$; $|\bar{d}| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2} = 7.$

c) Vektorning skalyar kvadrati (4.11) formulaga asosan $(\bar{d}, \bar{d}) = \bar{d}^2 = |\bar{d}|^2 = 7^2 = 49.$

d)Vektorlarning skalyar ko‘paytmasi formulasiga asosan: $(\bar{c}, \bar{d}) = 4 \cdot 6 + (-2)(-3) + (-4) \cdot 2 = 22$

e)Vektorlar orasidagi burchak: $\cos\varphi=\frac{(\bar{c},\,\bar{d})}{|\bar{c}||\bar{d}|}=\frac{22}{6\cdot 7}\approx 0.52$ bundan $\varphi=\arccos 0.52\approx 58^{\circ}$.

Skalyar ko'paytma

Ta'rif. *$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb bu vektorlarning uzunliklarini ular hosil qilgan burchak kosinusiga ko'paytirishdan hosil bo'lgan songa aytiladi va $(\vec{a},\vec{b})$ yoki $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ko'rinishida belgilanadi.*

Demak, $\left(\vec{a},\vec{b})\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cdot\cos\varphi$.

$\vec{a}(x_1,\,y_1,\,z_1)$ va $\vec{b}(x_2,\,y_2,\,z_2)$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi $(\bar{a},\,\bar{b})=\bar{a}\cdot\bar{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$ formula bilan aniqlanadi.

Vektorning skalyar kvadrati $(\vec{a},\,\vec{a})=\vec{a}^{\,2}=|\vec{a}|^2=x^2+y^2+z^2$ yoki $|a|=\sqrt{\bar{a}^2}$.

$\vec{a}(x_1,\,y_1,\,z_1)$ va $\vec{b}(x_2,\,y_2,\,z_2)$ vektorlar orasidagi burchak

$$\cos\varphi=\frac{(a,\,b)}{|a||b|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}+z_1^{\,2}}\sqrt{x_2^{\,2}+y_2^{\,2}+z_2^{\,2}}}$$

formula yordamida hisoblanadi.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar ortogonal deyiladi, agar ularning skalyar ko'paytmsi nolga teng bo'lsa, ya'ni $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, yoki $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$.

$\vec{a}(x_1,\,y_1,\,z_1)$ va $\vec{b}(x_2,\,y_2,\,z_2)$ vektorlar kolleniar bo'lsa ,ya'ni $\vec{a}=k\vec{b}$,u holda $\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}=\frac{z_2}{z_1}=k$ - vektorlarning kolleniarlik sharti.

Vektor ko'paytma

Ta'rif. *$\vec{a}$ vektorning $\vec{b}$ vektorga vektor ko'paytmasi deb, $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ ko'rinishda belgilanuvchi va quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $\vec{c}$ vektorga:*

1. $\vec{c}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning har biriga perpendikulyar;

2. $\vec{c}$ vektor uchidan qaralganda $\vec{a}$ vektordan $\vec{b}$ vektorga eng qisqa burilishi soat mili yo'nalishiga teskari yo'nalishda kuzatiladi ($\vec{a},\vec{b}$, $\bar{c}$ vektorlarning bunday joylashuvini o'ng uchlik deyiladi);

3. $\vec{c}$ vektorning moduli $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga qurilgan paralellogramning S yuzasini ifodalovchi songa teng, ya'ni $|\vec{c}|=S=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$ (φ - $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak).

Vektor ko'paytmasining asosiy xossalari:

1. $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$; *2.* $\left(\lambda\vec{a}\right)\times\vec{b}=\vec{a}\times\left(\lambda\vec{b}\right)=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$; *3.* $\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$;

4. Agar $\vec{a}=0$, *yoki* $\vec{b}=0$, *yoki* $\vec{a}\|\vec{b}$ *bo'lsa, u holda* $\vec{a}\times\vec{b}=0$. *Xususan* $\vec{a}\times\vec{b}=0$.

Koordinata o'qlari ortlarining vektor ko'paytmasi:

$$\begin{matrix}\vec{i}\times\vec{i}=0,\ \vec{j}\times\vec{j}=0,\vec{k}\times\vec{k}=0;\\ \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}.\end{matrix}\quad \textit{agar}\quad \begin{matrix}\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},\\ \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\end{matrix}\quad \textit{bo'lsa, u holda}\quad \vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ a_x&a_y&a_z\\ b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$$

Agar $\vec{a}$ *va* $\vec{b}$ *vektorlar kolleniar bo'lsa, u holda* $\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$.

Masalan. $\vec{a}=4\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k}$ *va* $\vec{b}=\vec{j}+3\vec{k}$ *vektorlarga qurilgan parallelogram yuzasini hisoblaylik.*

$\vec{a}$ *vektorning* $\vec{b}$ *vektorlar vektor ko'paytmani*

hisoblaymiz $\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -2 & -3\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}=-3\vec{i}-12\vec{j}+4\vec{k}$.

$S=\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|$ *bo'lgani uchun,* $S=\sqrt{(-3)^2+(-12)^2+4^2}=\sqrt{9+144+16}=\sqrt{169}=13$

Uch vektorning aralash ko'paytmasi

Ta'rif. $\vec{a}$ *,*$\vec{b}$ *va* $\vec{c}$ *vektorlarning* $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$ *aralash ko'paytmasi deb, (*$\vec{a}\times\vec{b}$*) vektor ko'paytmaning* $\vec{c}$ *vektorga skalyar ko'paytmasiga aytiladi.*

Aralash ko'paytmaning xossalari:

1.($\bar{a}\times\bar{b}$*)·*$\bar{c}=\bar{a}\cdot$*(*$\bar{b}\times\bar{c}$*).* *2.* $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\bar{b}\bar{c}\bar{a}=\bar{c}\bar{a}\bar{b}$. *3.* $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=-\bar{b}\bar{c}\bar{a}$, $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=-\bar{c}\bar{b}\bar{a}$, $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=-\bar{a}\bar{c}\bar{b}$,

4.agar vektorlardan aqalli bittasi nol vektor yoki $\vec{a}$ *,*$\vec{b}$ *,* $\vec{c}$ *vektorlar komplanar bo'lsa, u holda* $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ *=0 bo'ladi.*

Agar $\begin{aligned}\bar{a}&=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}\\ \bar{b}&=b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+a_z\bar{k}\\ \bar{c}&=c_x\bar{i}+c_y\bar{j}+c_z\bar{k}\end{aligned}$ *bo'lsa , u holda* $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$.

Agar $\vec{a}$ *,*$\vec{b}$ *,* $\vec{c}$ *vektorlar komplanar bo'lsa, u holda* $\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=0$.

Aralash ko'paytma ko'paytiriluvchi vektorlarda qurilgan parallelopiped hajmiga ishora aniqligida teng, ya'ni $V=\pm\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$.

Misol. a) $\bar{a}=\bar{i}+3\bar{j}$ va $\bar{b}=3\bar{j}-4\bar{k}$ vektorlarga qurilgan parallelogram yuzasini hisoblang.

Yechish. $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogrammning S yuzasi shu vektorlarning vektor ko'paytmasining moduliga teng: $S=\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|$. Vektor ko'paytmani topamiz: $\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & 3 & 0\\ 3 & 0 & -4\end{vmatrix}=-12\bar{i}+4\bar{j}-9\bar{k}$. Demak, $S=\sqrt{(-12)^2+4^2+(-9)^2}=\sqrt{241}$ kv birlik.

Misol. Uchlari A(1, 2, 0); B(-1, 2, 1); C(0; -3; 2) va D(1, 0, 1) nuqtalarda bo'lgan piramidaning hajmini hisoblang.

Yechish. Piramidaning A uchidan chiqqan qirralariga mos keluvchi vektorlarni topamiz: $\overrightarrow{AB}=\{-2;\ 0;\ 1\}, \overrightarrow{AC}=\{-1;\ -5;\ 2\},\ \ \overrightarrow{AD}=\{0;\ -2;\ 1\}$.

Piramidaning hajmi shu vektorlarga qurilgan parallelopiped hajmining $\frac{1}{6}$ qismiga teng bo‘lganligi sababli $V=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix}-2 & 0 & 1\\ -1 & -5 & 2\\ 0 & -2 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\cdot 4=\frac{2}{3}$ kub birlik.

3.3.2. Fazoda tekislikning tenglamalari

Dekart koordinatalar sistemasida biror tekislik berilgan bo‘lsin.Shu tekislikdagi biror $M\left(x_0, y_0, z_0\right)$ nuqtani va shu tekislikka perpendikulyar $\vec{n}\left(A,B,C\right)$ - vektorni olaylik. $\vec{n}\left(A,B,C\right)$ - vector tekislikning normal vektori deyiladi. $M\left(x,y,z\right)$ - ixtiyoriy nuqta berilgan tekislikda yotishi uchun $\vec{n}\left(A,B,C\right)$ va $\overrightarrow{M_0M}\left(x-x_0; y-y_0; z+z_0\right)$ vektorlar o‘zaro perpendikulyar bo‘lsa.

U holda $\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$ yoki $A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z+z_0\right)=0$.
Qavslarni ochib va $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$ belgilashdan so‘ng $Ax+By+Cz+D=0$ - tekislikning umumiy ko‘rinishdagi tenglamasini hosil qilamiz. Bu yerda $\vec{n}\left(A,B,C\right)$ vektor tekislikning normal vektori deyiladi.
Agar $D=0$ bo‘lsa, u holda $Ax+By+Cz=0$ tekislik koordinata boshidan o‘tadi.
Agar $A=0$ bo‘lsa, $By+Cz+D=0$ tekislik OX o‘qqa parallel bo‘ladi.
Agar $A=0, D=0$ bo‘lsa, $By+Cz=0$ tekislik OX o‘qdan o‘tadi.
Agar $A=0,\ B=0$ bo‘lsa, $Cx+D=0$ tekislik OXY tekislikka parallel bo‘ladi.
Agar $A=0,\ B=0,\ D=0$ bo‘lsa, $Cz=0$ (yoki $z=0$) tekislik OXY tekislik bilan ustma-ust tushadi.

Umumiy tenglamani ozod hadga nisbatan yechib : $Ax+By+Cz=D$ va tenglikning har ikkala qismini D koeffisentga bo‘lib

$\frac{x}{\frac{D}{A}}+\frac{y}{\frac{D}{B}}+\frac{z}{\frac{D}{C}}=1$ yoki $\frac{D}{A}=a, \frac{D}{B}=b, \frac{D}{C}=c$ deb belgilab

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ -tekislikning kesmalardagi tenglamasini hosil qilamiz.

Umumiy tenglamaning barcha koeffisentlarini $\left|\vec{n}\right|=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ - birkik vektorning uzunligiga bo‘lib
$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z+\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0$. munosabatga ega bo‘lamiz.

Odatda $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\cos\alpha$, $\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\cos\beta$, $\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\cos\gamma$ lar tekislikning yo‘naltiruvchi kosinuslari deyiladi va ular tekislik normal vektorining koordinata o‘qlari bilan hosil qilgan burchak cosinislardir.

$\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=p$ deb,

$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma+p=0$ - tekislikning normal tenglamasini hosil qilamiz.

Uch nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasi

$M_1(x_1,y_1,z_1), M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$ nuqtalardan o‘tuvchi tekislik tenglamasini

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Masalan. $M_1(3;-1;2)$, $M_2(4;-1;-1)$, $M_3(2;0;2)$ nuqtalardan o‘tuvchi tekislik tenglamasini tuzaylik.

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 4-3 & -1+1 & 0-2 \\ 2-3 & 0+1 & 2-2 \end{vmatrix}=0 \text{ yoki } \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Ikki tekislik orasidagi burchak

$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ ikki tekislik orasidagi φ burchak ularga perpendikulyar bo‘lgan $\vec{n_1}(A_1,B_1,C_1)$ va $\vec{n_2}(A_2,B_2,C_2)$ vektorlar orasidagi burchakka teng bo‘ladi. Shuning uchun φ burchak quyidagi tenglikdan topiladi

$$\cos\varphi=\frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|}=\frac{A_1A_2+B_1\cdot B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$ - tekisliklarning paralellik sharti va

$A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2=0$ - ekisliklarning perpendikulyarlik sharti.

Nuqtadan tekislikkacha bo‘lgan masofa

$M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadan $Ax+By+Cz+D=0$ tekislikkacha bo‘lgan masofani hisoblaymiz. Buning uchun $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadan $Ax+By+Cz+D=0$ tekislikka tushirilga perpendikulyarning asosini N deb belgilaylik. $\overrightarrow{HM_0}$ vector $\vec{n}(A,B,C)$

tekislikning normal vektoriga kolleniar bo‘ladi. $\overrightarrow{HM_0}$ va $\vec{n}(A,B,C)$ vectorlarning skalyar ko‘paytmasini hisoblaylik:

$$\overrightarrow{HM_0}\cdot\vec{n}=\left|\overrightarrow{HM_0}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{HM_0}\cdot\vec{n}\right)=d(M_0;\ddot{I}\ )\left|\vec{n}\right|(\pm1).$$

Bundan $d=\dfrac{\left|\overrightarrow{HM_0}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}$. $H(x_1,y_1,z_1)$ tekislikdagi nuqta bo‘lsin, u holda

$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$ yoki $-(Ax_1+By_1+Cz_1)=D$.

Demak, $\overrightarrow{HM_0}\cdot\vec{n}=A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)=Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1)=Ax_0+By_0+Cz_0+D$

va $\left|\vec{n}\right|=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ .U holda $d=\dfrac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

Masalan. $M_0(2; -3; 1)$ nuqtadan x - $2y$ +2 z + 2 = 0 tekislikkacha bo‘lgan masofani topaylik. $d=\dfrac{\left|1\cdot2-2\cdot(-3)+2\cdot1+2\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\dfrac{12}{3}=3.$

3.3.3. Fazoda to‘g‘ri chiziq tenglamalari

$M(x_1,y_1,z_1)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi: $\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{k}$

$M(x_1,y_1,z_1)$ va $K(x_2,y_2,z_2)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi :

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{k}$ - $M(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadan o‘tib, $\vec{p}(m,n,k)$ vektorga parallel bo‘lgan fazodagi to‘g‘ri chiziqning kanonik ko‘rinishdagi tenglamasi.

To‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasi:
$$x=mt+x_0,\quad y=nt+y_0,\quad z=kt+z_0.$$

Agar tekisliklar parallel bo‘lmasa, ular to‘g‘ri chiziq bo‘yicha kesishadi, bu to‘g‘ri chiziq tenglamasi quyidagi tenglamalar sistemasi orqali topiladi va to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi:

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

Masalan. $M_1(2;-1;-1)$ va $M_2(3;3;-1)$ nuqtalar orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi

$$\frac{x-2}{3-2}=\frac{y+1}{3+1}=\frac{z+1}{-1+1}\ \text{yoki}\ \frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{4}=\frac{z+1}{0}$$

Ikkita to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak

Ikkita to‘g‘ri chiziqning o‘zlarining kanonik tenglamalari bilan berilgan bo‘lsin:

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{k_1}, \quad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{k_2}$$

Bu to‘g‘ri chiziqlarning yo‘naltiruvchi vektorlari $S_1(m_1, n_1, p_1)$ va $S_2(m_2, n_2, p_2)$ bo‘ladi. Ikkita to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak deb bu to‘g‘ri chiziqlar yo‘naltiruvchi vektorlari hosil qilgan burchak tushiniladi.

Demak, $$\cos\varphi=\frac{S_1\cdot S_2}{|S_1|\cdot|S_2|}\pm\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

Ikkita to‘g‘ri chiziqning parallellik sharti: $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$,

Ikkita to‘g‘ri chiziqning perpendikuliyarlik sharti: $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$.

3.3.4. To‘g‘ri chiziq va tekislikning o‘zaro joylashuvi

$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{k}$ to‘g‘ri chiziq va $Ax+By+Cz+D=0$ tekislik orasidagi φ burchak quyidagi formuladan topiladi:

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Ck|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+k^2}}.$$

To‘g‘ri chiziq va tekislikning parallellik sharti : $Am+Bn+Ck=0$.

To‘g‘ri chiziq va tekislikning perpendikulyarlik sharti: $\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{k}$.

To‘g‘ri chiziq bilan tekislikning kesishgan nuqtasini topish uchun, to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasi va tekislikning umumiy tenglamasi orqali hosil bo‘lgan sistemani yechish lozim, ya’ni

$$\begin{cases} x=mt+a \\ y=nt+b \\ z=kt+c \\ Ax+By+Cz+D=0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yechish kerak.

Misol. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+1}{-1}$ to‘g‘ri chiziq va $M(2;\ 0;\ 1)$ nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish. Tekislik M nuqtadan o‘tganligi uchun $A(x - 2) + B(y) + C(z - 1) = 0$. $\bar{p}(1;\ 2;\ -1)$ to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori $\bar{n}(A;\ B;\ C)$ tekislikning normal vektoriga perpendikulyar bo‘lgani uchun $\bar{p} * \bar{n}=0$ yoki $A+2B-C = 0$ bo‘ladi.

Ikkinchi tomondan $A(1;\ -1;\ -1)$ nuqta to‘g‘ri chiziqda yotadi, demak u tekislikka ham tegishli : $A(1 - 2) + B(-1) + C(-1-1) = 0$, $-A - B - 2C = 0$.

$$\begin{cases} A+2B-C=0 \\ A+B+2C=0 \end{cases} => \begin{cases} B=3C \\ A=-5C \end{cases}$$

Demak, $(-5(x-2)+3y+(z-1))\,C=0$ $(C\neq 0)$ va izlanayotgan $5x-3y-z-9=0$ tekislik tenglamasi hosil bo‘ladi.

Nazorat savollari

1. Vektorlar ustida qanday chiziqli amallarni bilasiz?
2. Qanday ko’paytmaga skalyar ko’paytma deyiladi?
3. Qanday ko’paytmaga vector ko’paytma deyiladi?
4. Qanday ko’paytmaga aralash ko’paytma deyiladi?
5. Fazoda tekislikning qanday tenglamalarini bilasiz?
6. Tekisliklar orasidagi burchak qanday aniqlanadi?
7. Fazoda to’g’ri chisiqning qanday tenglamalarini bilasiz?

4-MAVZU. MATEMATIK ANALIZGA KIRISH

1-mashg’ulot

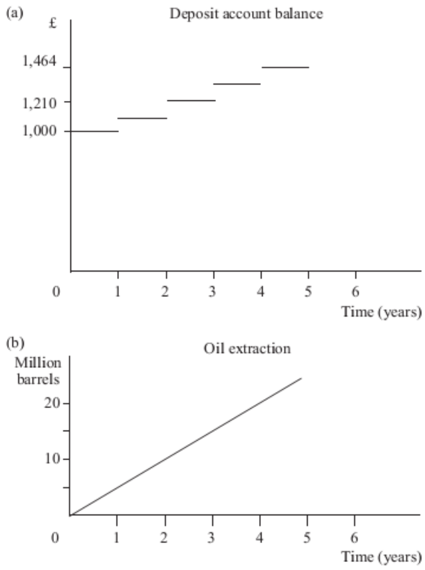
4.1.1. Sonli ketma-ketlik
4.1.2. Ketma – ketlik limiti
4.1.3. Funksiya limiti

Tayanch iboralar: *to’plam, natural son, moslik, ketma-ketlik, yaqinlashish, uzoqlashish, cheksiz kichik ketma-ketlik, limit, xossalar, funksiya, argument, aniqmaslik, aniqmaslik turlari, ajoyib limitlar.*

4.1.1. Sonli ketma-ketlik

Iqtisodiyotda biz ko‘p o‘zgarishlar, ya’ni ma’lum vaqt davomida o‘suvchi yoki kamayuvchi miqdorlarga duch kelamiz. Pul miqdori, sarmoya depozit hisobining o‘sib borishi unga to‘langan foizlarning yig‘ilishidan iboratdir. Ko‘p yillar davomida ishlab chiqarish davom etaversa, u holda neft zahirasining miqdori kamayib boradi. Vaqt bo‘yicha o‘zgarishlar bilan bog‘liq bo‘lgan myammoni hal qilishda matematika qanday yordam berishi tushuntiriladi. Moliyalashtirish tadbiq etishlarning asosiy sohasi bo‘lib, unda baholash metodlari, investitsiyaning turli ko‘rinishlari o‘rganiladi. Bundan boshqa qo‘shimcha qilib aytish mumkinki, yildan yilga tezlik bilin kamayib ketayotgan tabiiy resurslarni boshqarish ham moliyalashtirishga bog‘liq.

Depozit hisobiga qo‘yilgan pulga odatda belgillangan vaqt oraliqlarida foiz to‘lanadi. Shunday qilib, qo‘yilgan pulni qaytarish aniq vaqt oralilarida amalga oshadi.



Misol uchun, yuqoridagi rasmda ixtiyoriy berilgan vaqt momentida depozitga qo‘yilgan £1000 pulni yillik 10% stavkadagi jamg‘arilgan pul miqdori ko‘rsatilgan. Depozit hisobida vaqt va umumiy jamg‘arma orasida o‘zgarmas bog‘liqlik mavjud emas. Buning o‘rniga hisobga pul tushganda har bir yil oxirida “sakrash” holati yuz beradi. Foizlar qo‘shilayotgan davrlar orasida hech qanday o‘zgarish bo‘lmaydi. Diskret funktsiyalar, bundan kelib chiqadiki, narx erkli o‘zgaruvchining aniq qiymatlarida o‘zgaruvchiga bog‘liq ravishda aniqlanishi mumkin. Bundan, bir o‘zgaruvchi bir qator qiymatlarni qabul qiladi, ammo kontinium qiymatlarni emas. Faraziy masshtablarga ko‘ra xizmat davrining muddati va maosh orasidagi bog‘liqlik quyidagicha bo‘lishi mumkin:

0 yillar=£20,000, 1 yil=£21,800, 2 yil=£23,600, 3 yil=£25,400

O‘qituvchining maoshi va xizmat qilish davri orasidagi munosabat diskret funktsiya. Vaqtning har qanday momentida maosh qancha bo‘lishi ma’lum, ammo vaqt va maosh orasida bog‘liqlik uzluksiz emas. Uzluksiz funktsiyaga misol 7(b) rasmda ko‘rsatilgan. Bu neft mavjud bo‘lgan joydan yiliga 5 mln. barrel neft qazilmasi olinadigan neftning umumiy miqdorini ko‘rsatadi. Olinadigan neft miqdori va vaqt davrlari orasidagi bog‘liqlikni ko‘rsatuvchi uzluksiz silliq funktsiy mavjud. Biz bu bobda bir qator diskret o‘zgaruvchilik masalalarni tahlil qilamiz.[17]

Har bir natural son uchun *s(n)* natural argumentli funksiya bilan ishlashimizga to‘g‘ri keladi. Odatda bunday funksiya **cheksiz (sonli) ketma-ketlik** yoki oddiy **ketma-ketlik** deyiladi. Uning *s(1), s(2), s(3),..., s(n),...* hadlari odatda $s_1, s_2, s_3, ..., s_n, ...$ kabi belgilanadi. Biz ketma-ketlikni ifodalash uchun $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ belgidan yoki oddiy $\{s_n\}$ kabi belgilashdan foydalanamiz.

[17] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

Masalan, $s_n = \frac{1}{n}$, n=1,2,3,... bo‘lsa, u holda ketma-ketlik hadlari:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

Agar biz *n* ni yetarlicha katta qilsak, u holda bu ketma-ketlik hadlari yetarlicha kichik bo‘ladi. bunday holda ketma-ketlik 0 ga yaqinlashadi deymiz.

Ta’rif*. Natural sonlar to‘plamida aniqlangan funksiyaga sonlar ketma-ketligi deyiladi, ya’ni,*

$$f : N \to R.$$

Agar $x_n = f(n),\ n \in N$, *deb belgilash kiritsak, sonlar ketma-ketligini,* $\{x_n\}_1^{\infty}$ *yoki* $x_1, x_2 \ldots, x_n \ldots$ *ko‘rinishda ifoda etish ham qabul qilingan. Bu yerda* x_n *-ketma-ketlikning n-hadi deyiladi.*

Masalan, $f(n) = \frac{1}{n}$ ketma-ketlikni $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ yoki $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots.$ ko‘rinishlarda ifoda etish mumkin. Bu ketma-ketlik monoton kamayuvchi, chegaralangan ketma-ketlikdir.Chunki $n \in N, m \in N$ uchun n<m bo‘lsa $\frac{1}{n} > \frac{1}{m}$ bo‘lib, istalgan $n \in N$ uchun $\frac{1}{n} \le 1$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Ta’rif. $\varepsilon > 0$ *va a son uchun* $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ *interval a ning* ε*-atrofi deyiladi. Agar a=o bo‘lsa,* $(-\varepsilon, \varepsilon)$ *interval qisqacha* ε*-atrof deyiladi.*

Ta’rif*. Agar istalgan* $\varepsilon > 0$ *son uchun,* ε*-atrofdan tashqarida* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ketma-ketlikning chekli sondagi hadi bo‘lsa, u holda* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik deyiladi.*

Ta’rif*. Agar istalgan* $M > 0$ *son uchun* $(-M; M)$ *atrof ichida* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ketma-ketlikning chekli sondagi hadi bo‘lsa, u holda bu ketma-ketlik cheksiz katta ketma-ketlik deyladi.*

4.1.2. Ketma – ketlik limiti

Murakkab foizda investitsiyaning imkoniyatlarini ko‘rib chiqamiz:

A dastlabki investitsiya qiymati, *F* investitsiyaning keyingi qiymati, *i* bir davrdagi foiz stavka (o‘nli kasrlarda) va *n* vaqt muddatlari.

Har yil oxiridagi investitsiyaning narxi, dastlabki qo‘yilgan omonatdan 1+*i* marta katta bo‘ladi. £648 miqdor 2-nchi yil boshida oxirgi investitsiya dastlabki investitsiya £600 ning 1,08 ga ko‘paytirishdan hosil qilingan edi (misol 7.3). 3-nchi yil boshidagi investitsiya narxi, 2-nchi yil boshidagi investitsiyaga 1,08 ga ko‘paytirishdan hosil qilinadi. Shunday qilib, har qanday investitsiya uchun

1 yildan keyingi qiymat $= A(1+i)$

2 yildan keyingi qiymat $= A(1+i)(1+i) = A(1+i)^2$

3 yildan keyingi qiymat $= A(1+i)^2(1+i) = A(1+i)^3$ va h.k.

Biz ko‘ryapmizki, har bir davrdagi keyingi qiymatlar A ni $(1+i)$ ga ko‘paytirishdan hosil bo‘lyapti. Ularni hadlab qo‘shib, n yildan keyingi investitsiya A ni $(1+i)^n$ ga ko‘paytmasiga tengligini ko‘ramiz.

Bu formula i foiz stavkadagi n davrdagi bolang‘ich investitsiya A bo‘lgandagi F oxirgi qiymatni topishni ifoda etadi

$$F = A(1+i)^n$$

Misol. Agar £600 miqdordagi investitsiya 3 yilga 8% foiz stavkada investitsiya qilinsa formuladan A=£300 n=3 i =8%=0.08

Oxirgi qiymat

$$F = A(1+i)^n = 600(1.08)^3 = 600(1,259715) = £755,83$$

Misol. Agar £4,000 miqdordagi pul 10 yil uchun yillik 11% da investitsiya qilingan bo‘lsa, investitsiyaning oxirgi narxini toping.

Yechish.

$A = £4,000 \qquad n = 10 \qquad i = 11\% = 0,11$

$$F = A(1+i)^n = 4,000(1,11)^{10}$$
$$= 4,000(2,8394205)$$
$$= £11,357,68$$

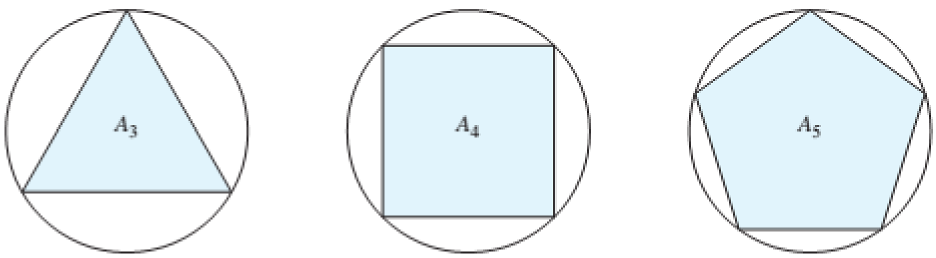
Agar n ning yetarli katta qiymatlarida $\{s_n\}$ ketma-ketlik s ga yetarlicha yaqin bo‘lsa, u holda $\{s_n\}$ ketma-ketlik s limitga ega deyiladi va quyidagicha yoziladi $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ yoki $n\to\infty$ da $s_n \to s$

Biror bir haqiqiy songa intilmaydigan ketma-ketlik uzoqlashuvchi deyiladi.

Masalan, $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$ va $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketliklar uzoqlashuvchidir.

Misol. $n \geq 3$ lar uchun A_n radiusi 1 bo‘lgan aylanaga ichki chizilgan muntazam ko‘pburchak yusi(ya’ni teng tomonli vat eng burchakli n burchak).

n = 3 da A_3 muntazam uchburchak yusi, n = 4 da A_4 muntazam to‘trburchak yusi, n = 5 da A_5 muntazam beshburchak yusi va h.k.(1 rasm)



1 – rasm.

n ning ortishi bilan ko‘pburchak yuzi ortib bormoqda, lekin radiusi 1 doira yuzi π dan katta bo‘la olmaydi.

Intuitive tarzda, n yetarli katta bo'lganda A_n and π orasidagi ayirmani yetarlicha kichik qilish mumkin, u holda $n\to\infty$ da $A_n\to\pi$.

Bu misolda A_1 va A_2 ma'noga ega emas, demak ketma – ketlik hadlari A_3 dan boshlanadi.

Ta'rif. *Agar* $\{x_n - a\}_{n=1}^{\infty}$ *ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lsa, u holda* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ketma-ketlik limiti* a *songa teng (yoki* a *songa yaqinlashadi) deyiladi, Bu hol* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *shaklda ifoda etiladi.*

Demak, agar $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - a) = 0$ tenglik o'rinli bo'lsa, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ deyiladi. Bunday ketma-ketlik yaqinlashuvchi ketma-ketlik deyiladi.

1. Istalgan α va β sonlar uchun $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha a + \beta b$,
2. Yaqinlashuvchi ketma-ketlik chegaralangandir.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n x_n = a\cdot b$.
4. $y_n \neq 0,\ n \in N$ va $b \neq 0$ bo'lsa, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$ tenglik o'rinli bo'ladi.
5. Biror nomerdan boshlab $x_n \le y_n$ bo'lsa, u holda $a \le b$.

Teorema. *Agar* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *o'suvchi (kamayuvchi) ketma-ketlik bo'lib, yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo'lsa, u holda* $\{x_n\}$ *yaqinlashuvchi va* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\limits_n\{x_n\}$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\limits_n\{x_n\}\right)$ *bo'ladi.*

Teorema. *Agar barcha natural* n *lar uchun* $x_n \le z_n \le y_n$ *bo'lib,* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ *bo'lsa, u holda* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

Teorema. *(Ichma-ich joylashgan segmentlar ketma-ketligi haqidagi teorema).*

Agar har bir natural n *uchun* $[a_n, b_n]$ $(a_n < b_n)$ *segment berilgan bo'lib, barcha* n *larda* $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ *munosabat o'rinli va* $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ *bo'lsa, u holda* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *va* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ *limitlar mavjud bo'lib* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$ *, va istalgan natural* n *uchun* $a_n \le c \le b_n$ *tengsizlik o'rinlidir.*

Misol 1. $\lim\limits_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$, $e = 2.718...$. Agar $h = \dfrac{1}{n}$ deb belgilasak, $n \to \infty$ da $h \to 0$ bo'lgani uchun quyidagi muhim limitga ega bo'lamiz: $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

Misol 2. $$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n+4}{4n^2+n-3} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2(3+\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2})}{n^2(4+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2})} =$$

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(3+2/n+4/n^2)}{\lim\limits_{n\to\infty}(4+1/n-3/n^2)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}(2/n)+\lim\limits_{n\to\infty}(4/n^2)}{\lim\limits_{n\to\infty}4+\lim\limits_{n\to\infty}(1/n)-\lim\limits_{n\to\infty}(3/n^2)} = \frac{3+0+0}{4+0-0} = \frac{3}{4}.$$

4.1.3. Funksiya limiti

Misol 3. $F(x)=\frac{e^x-1}{x}$ formula bilan berilgan funksiyani tekshiring.

Agar $x=0$ bo‘lsa, $e^0=1$ bo‘lgani uchun, bu funksiya $x=0$ nuqtada “0/0” tipidagi aniqmaslikni ifodalaydi. $x=0$ nuqtada F(x) funksiya aniqlanmagani uchun bu funksiyaning x argument 0 ga yaqinlashgandagi holatini bilish muhim hisoblanadi. Hisoblash yordamida (x=0 holdan boshqa holler uchun) bu funksiya uchun quyidagi jadvaldagi keltirilgan qiymatlarni hosil qilamiz.

x	−1	−0.1	−0.001	−0.0001	0.0	0.0001	0.001	0.1	1
F(x)	0.632	0.956	0.999	1.000	∗	1.000	1.001	1.052	1.718

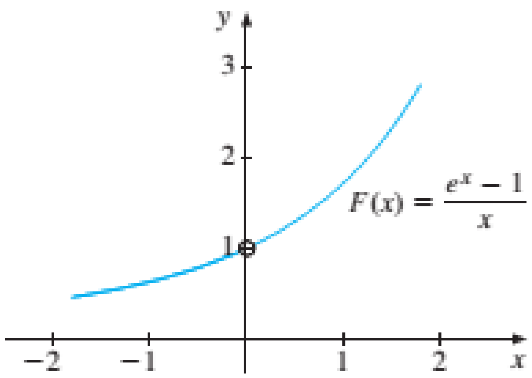
∗ aniqlanmagan

Jadvaldan ko‘rinib turibdiki, x 0 ga qancha yaqinlashsa, $F(x)$ funksiya qiymatlari 1 ga shuncha yaqinlashmoqda. Shuning uchun x miqdor 0 ga intilganda $F(x)$ funksiya 1 ga intiladi deyishga haqlimiz. Bu mulohazani quyidagicha yozamiz

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \text{ yoki } x\to 0 \text{ da } \frac{e^x-1}{x}\to 1$$

$F(x)$ funsiya x=0 nuqtadan boshqa barcha nuqtalarda aniqlangan va $\lim_{x\to 0}F(x)=1$.

(Chizmada kichik aylana yordamida (0,1) nuqtaning mos kichik atrofi tasvirlangan).



Ta’rif. *Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biron-bir atrofida aniqlangan bo‘lib (x_0 nuqtada aniqlangan bo‘lishi shart emas) istalgan $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta>0$ son mavjud bo‘lsaki, $0<|x-x_0|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x lar (ya’ni istalgan $x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$) uchun $|f(x)-a|<\varepsilon$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda x argument x_0 ga intilganda $f(x)$ funksiyaning limiti a ga teng deyiladi, (bu hol $\lim_{x\to x_0} f(x)=a$ shaklda ifoda etiladi.)*

Misol 4. $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h+1}-1}{h}$ limitni hisoblash yordamida hisoblang.

Yechish. h ning 0 ga yaqin qiymatlarida quyidagi jadvalga ega bo‘lamiz:

h	-0.5	-0.2	-0.1	-0.01	0.0	0.01	0.1	0.2	0.5
F(h)	0.586	0.528	0.513	0.501	*	0.499	0.488	0.477	0.449

Bundan ko'rinib turibdiki, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{h+1}-1}{h}=0.5.$

Ta'rif. *Agar* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ *bo'lgan istalgan* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ketma-ketlik uchun* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=a$ *tenglik o'rinli bo'lsa, u holda* x *argument* x_0 *ga intilganda* $f(x)$ *funksiyaning limiti* a *ga teng deyiladi.*

Ta'rif. *Agar* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ $\left(\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0\right)$ *bo'lsa, u holda* $x\to x_0$ $(x\to\infty)$ *da* $f(x)$ *funksiya cheksiz kichik miqdor deyiladi.*

Ta'rif. *Agar* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty\right)$ *bo'lsa, u holda* $x\to x_0$ $(x\to\infty)$ *da* $f(x)$ *funksiya cheksiz katta miqdor deyiladi.*

Limit hisoblash qoidalari

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ va $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$ bo'lsin, u holda

(a) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right)=A\pm B$ (b) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=A\cdot B$

(c) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{A}{B}$ $(B\neq 0)$ (d) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\right)^r=A^r$ $\left(r \textit{ ixtiyoriy haqiqiy son va } A^r \textit{ aniqlanganda}\right)$

(e) Agar $\lim\limits_{x\to b} f(x)=a$ va $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$ bo'lsa, u holda $f(g(x))$ murakkab funksiya uchun $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=a$

Misol 5. Quyidagi limitlarni hisoblang: $(a)\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{h+1}-1}{h}$ $(b)\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{4\sqrt{x}-8}.$

Yechish. (a) Ko'rinib turibdiki, kasrning surat va maxraji h 0 ga intilgnda 0 ga intiladi. Kasrning surat va maxrajini $\sqrt{h+1}+1$ ifodaga ko'paytirib, irratsionallikdan qutqaramiz va o'xshash hadlarni ixchamlaymiz

$$\frac{\sqrt{h+1}-1}{h}=\frac{\left(\sqrt{h+1}-1\right)\cdot\left(\sqrt{h+1}+1\right)}{h\cdot\left(\sqrt{h+1}+1\right)}=\frac{h+1-1}{h\cdot\left(\sqrt{h+1}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{h+1}+1}$$

Barcha $h\neq 0$ (va h≥−1) berilgan funksiya $\dfrac{1}{\sqrt{h+1}+1}$ ifodaga teng bo'lib, u h 0 ga intilgnda $\dfrac{1}{2}$ ga intiladi. (b) x =4 bo'lganda $\dfrac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslik hosil bo'lgani uchun kasrning suratini kopaytuvchilarga ajrataylik.

$$\frac{x^2-16}{4\sqrt{x}-8}=\frac{(x+4)(x-4)}{4\left(\sqrt{x}-2\right)}=\frac{(x+4)\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{4\left(\sqrt{x}-2\right)} \qquad (*)$$

Barcha x≥0 uchun $(x-4)=\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)$ ko'paytma o'rinli.

(*) qoidani yana qo'llab $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{4\sqrt{x}-8}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x+4)\left(\sqrt{x}+2\right)}{4}=\dfrac{(4+4)\left(\sqrt{4}+2\right)}{4}=8$

Aniqmaslikning turlari

$y=x^2$ va $g=x^3$ funksiyalar $x\to 0$ da nolga intiluvchi funksiyalardir. Bu funksiyalardan tuzilgan $y\pm g=x^2\pm x^3$, $y\cdot g=x^2\cdot x^3$ funksiyalar ham $x\to 0$ da nolga intiluvchi funksiyalardir. Suning uchun bu ifodalarning $x\to 0$ da aniq ifodalardir.

$\frac{y}{g}$ va $\frac{g}{y}$ $x\to 0$ da $\frac{0}{0}$ ko‘rinishida bo‘lib,

$$\lim_{x\to +0}\frac{y}{g}=\lim_{x\to +0}\frac{x^2}{x^3}=\lim_{x\to +0}\frac{1}{x}=+\infty\ ,\ \lim_{x\to -0}\frac{y}{g}=\lim_{x\to -0}\frac{x^2}{x^3}=\lim_{x\to -0}\frac{1}{x}=-\infty\ ,\lim_{x\to 0}\frac{g}{y}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to 0}x=0\ .$$

Demak, bu limit nolga intilish holatiga bog‘liq bo‘lib, uning qiymati chekli ham cheksiz ham bo‘lishi mumkin ekan. Odatda bunday ifodalarning natijasini oldindan aytib bo‘lmaydi. Natijasini oldindan aytib bo‘lmaydigan bunday ifodalar *aniqmasliklar* deyiladi.

Ketma-ketlik va funksiyalar limitlarini hisoblayotganda quyidagi ko‘rinishdagi aniqmasliklar yuzaga kelishi mumkin: $\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},0\cdot\infty,\ \infty-\infty,1^{\infty},\ 0^0,\ \infty^0$

Bu aniqmasliklarning ayrimlarini boshqasi orqali ifodalash mumkin. Limitning xossasiga ko‘ra $\frac{1}{\infty}=0,\ \ \frac{1}{0}=\infty$ simvollarni kiritishimiz mumkin. Shunga ko‘ra

$$\frac{\infty}{\infty}=\frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}}=\frac{0}{0},\ 0\cdot\infty=0\cdot\frac{1}{\frac{1}{\infty}}=\frac{0}{\frac{1}{\infty}}=\frac{0}{0},\ 1^{\infty}=e^{\infty\ln 1}=e^{\infty\cdot 0},\ 0^0=e^{0\ln 0}=e^{\infty\cdot 0},\ \infty^0=e^{0\ln\infty}=e^{0\cdot\infty}$$

aniqmasliklar tengligini yoza olamiz, shuni ta’kidlash kerakki, bu tengliklar sonlar tengligi ma’nosiga ega bo‘lmay, balki bir ko‘rinishdagi aniqmaslikni ikkinchi xil ko‘rinishdagi aniqmaslikka olib kelish mumkinligini anglatadi. Shu holatni e’tiborga olib $\frac{0}{0}$ va $\infty-\infty$ ko‘rinishidagi aniqmasliklarga misollar keltiramiz:

1. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0}x=0$, 2. $\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$, 3. $\lim_{x\to 0}\frac{a\cdot x}{x}=a\lim_{x\to 0}1=a$,

4. $\chi(x)=\begin{cases}1, agar\ \ x-ratsional\ son\ bo`lsa\\ 0, agar\ \ x-irratsional\ son\ bo`lsa\end{cases}$, $\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\chi(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\chi(x)-$limit mavjud emas.

Nazorat savollari

1. *Qanday sonlarga natural sonlar deyiladi?*
2. *Sonli ketma-ketlik deb nimaga aytiladi?*
3. *Qanday sonli ketma-ketliklar yaqinlashuvchi deyiladi?*
4. *Qanday sonli ketma-ketliklar uzoqlashuvchi deyiladi?*
5. *Limiti mavjud bo'lmagan ketma-ketliklarga misollar keltiring.*
6. *Yaqinlashuvch ketma-ketlik limiti xossalarini keltiring.*
7. *Aniqmaslik turlarini ayting.*
8. *Funksiya limitini ta’riflang.*
9. *Funksiya limitini xossalarini ayting.*

2-mashg'ulot

4.2.1. Ajoyib limitlar
4.2.2. Funksiya uzluksizligi
4.2.3. Uzluksiz funksiyalarning asosiy xossalari

Tayanch iboralar: *aniqmaslik, ajoyb limit, uzluksizlik, xossalar, Koshi teoremalari. Vevvershtrass teoremalari.*

4.2.1. Ajoyib limitlar

Matematika shunday son mavjudki, ko'rsatkichli funksiyalar uchun asosi sifatida olsak, bir qancha foydali natijalar beradi: Bu son

2.7182818.....

va odatda 'e' harfi bilan belgilanadi. Siz o'z kankulyatoringizda bu sonni hosil qilishingiz zarur, ya'ni kankulyatorda 1 sonini bosib, keyin $\left[e^x\right]$ funksiya tugmasini bosishingiz zarur.

e^x funksiyaning x ixtiyoriy qiymatini topish uchun, siz kankulyatoringizda odatdagidek (x) sonini terib va keyin $\left[e^x\right]$ funksiya tugmasini bosishingiz kerak. Buni tekshirish maqsadida, quyida berilgan ko'rsatkichli sonlarni kalkulyator yordamida hisoblashingiz mumkin:

$$e^{0.5} = 1.6487213$$

$$e^{4} = 54.59815$$

$$e^{-2.624} = 0.0725122$$

Agar siz bu natijakarni olmasangiz, unda o'qituvchingizga murojaat qiling. Agar kankulyatoringizda $\left[e^x\right]$ funksiya tugmasi bo'lmasa, unda ko'rsatkichli funksiyasi bor kankulyator sotib oling yoki uni Excel dasturi yordamida EXP funksiyadan foydalaning. Kalkuyatorda bu funksiya paydo bo'lishidan oldin, talabalar ko'rsatkichli qiymatlar jadvalini ishlab chiqishgan.

Iqtisodiyotda asosi e sonli bo'lgan ko'rsatkichli funksiyalar o'sish suratini taxlillashda juda muhim foydasi bor. Bu e son, natural logarifmlar asosida ham foydalaniladi.

'e' soni qulay bo'lmagan qiymat hisoblanib, uni tushunib olish maqsadida, 7 bobda ishlab chiqilgan investitsiyani qiymatini hisoblashda qo'llaniladigan usulga qaytamiz.

Boshlang'ich *(A)* investitsiya bilan, t diskret vaqtda i foiz stavkada qo'yilgan pulning *(F)* oxirgi qiymati quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$F = A(1+i)^t$$

Agar fozi stavkasi 100% bo'lsa, unda i = 1 va formula quyidagi ko'rinishga keladi

$$F = A(1+1)^t = A(2)^t$$

Faraz qilaylik, boshlang'ich pul investitsiyasi A = 1 bo'lsin. Agar har yil oxirida foiz to'lansa, unda birinchi yil oxiri investitsiya qiymati quyidagicha bo'ladi

$$F_1 = (1+1)^t = A(2)^t$$

7 bobda foizlar har oylik stavkasi bo'yicha to'lanadi, chunki so'nggi nominal yillik stavkadan ko'ra 12 oy bo'yicha bo'linsa, unda foiz har oyda qayta investitsiyalashga yo'nalgan bo'ladi. Agar nominal yillik fozi stavkasi 100% (i = 1) bo'lsa, va boshlang'ich qo'yilgan pul 1ga teng deb qabul qilinsa, u holda 12 oydan so'ng har oylik $\frac{1}{12}$ (100%) foziiz stavkasi bilan qo'yilgan pulning oxirgi qiymati quyidagicha bo'ladi:

$$F_{12} = \left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} = 2.6130353$$

Agar qo'yilgan sarmoya har kunlik $\frac{1}{365}$(100%) foiz stavkasi bilan bo'lsa, un holda so'nggi pul qiymati quyidagicha

$$F_{12} = \left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} = 2.7145677$$

Agar qo'yilgan sarmoya har soatlik $\frac{1}{8760}$(100%) foiz stavkasi bilan qo'yilgan bo'lsa (bir yildagi 365 kun 8,760 osatdan iborat), u holda so'nggi pul qiymati quyidagicha

$$F_{8,760} = \left(1+\frac{1}{8,760}\right)^{8,760} = 2.7181267$$

Yuqorida keltirilgan foizli kreditlar so'nggi yig'ilgan qiymatlari 'e' qiymati 2.7182818 soniga yaqinligini ko'rishimiz mumkin. Agar qisqa vaqt muddatda qo'yilgan sarmoya 100 % yillik nominal foiz bo'yicha qo'yilgan bo'lsa, unda o'sish uzluksiz bo'ladi va 'e' qiymat qo'yilgan pulning so'nggi qiymatiga teng bo'ladi. Bundan

$$e = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = 2.7182818 \quad \text{bu yerda} \quad n\to\infty$$

Bu shuni anglatadiki, bir yil uchun A pul yillik nominal 100 % stavkada qo'yilgan bo'lsa, unda qo'yilgan summa uzluksiz bo'ladi va oxirgi to'plangan qiymat quyidagicha

$$F = eA = 2.7182818$$

Bu esa yillik ekvivalent tezlikka olib keladi, ya'ni

AER = 2.7182818 − 1 = 1.7182818 = 171.83% (to 2 dp).

Garchi bank foizlari zudlik bilan to'lab bo'lmaydi, qo'yilgan pul har daqiqada uzluksiz o'sib boradi. Har kunlik sifatida qo'yilgan sarmoya, ko'p qo'llaniladigan holat hisoblanib, yillik stvakasiga ekvivalent bo'ladi, ya'ni amalda uzluksiz tezlik bilan ustma-ust tushadi. Uzluksiz o'sish boshqa hollarda ham iqtisodga taaluqli sohalarda qo'llaniladi, ya'ni aholi soni, tabiiy resurslarni qazib olishda ishlatiladi. Boshqa uzluksiz o'zgaruvchilar ma'lum vaqt mobaynida soni kamayib boradi, masalan qayta tiklanmaydigan tabiiy resurslar ta'minoti. [18]

Ushbu $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ - limit birinchi ajoyib limit,

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$, $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}=e$ - esa ikkinchi ajoyib limit deb nomlanadi.

Bundan tashqari quyidagi umumiy holdagi formulalarni keltirib o‘tamiz:

1. $\lim\limits_{x\to a}\left(1+\dfrac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e,$ bunda $x\to a$ bo‘lganda $f(x)\to\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to a}(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=e,$ bunda $x\to a$ bo‘lganda $\varphi(x)\to 0$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{mx}=e^{km}$; $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x/m]{1+kx}=\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{m}{x}}=e^{km}$

Misollar

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 4x+\sin 7x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{2\cdot\sin\frac{11x}{2}\cdot\cos\frac{3x}{2}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{11x}{2}}{\sin\frac{11x}{2}}\cdot\frac{5\cdot\frac{1}{11}}{\cos\frac{3x}{2}}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{11x}{2}}{\sin\frac{11x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{5}{11}}{\cos\frac{3x}{2}}=\frac{5}{11}.$$

2. $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{mx+l}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^{\frac{k}{x}\cdot(mx+l)}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^{\frac{k}{x}\cdot mx}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{l}=e^{km}\cdot 1=e^{km}.$$

3. $$\lim_{x\to 0}\sqrt[ax]{1+bx}=\lim_{x\to 0}(1+bx)^{\frac{1}{ax}}=\lim_{x\to 0}=\lim_{x\to 0}\left[(1+bx)^{\frac{1}{bx}}\right]^{\frac{bx}{ax}}=e^{\frac{b}{a}}.$$

[18] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{4x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+1}{2x-3}-1\right)^{4x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x-3}\right)^{4x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{4}{2x-3}\right)^{\frac{2x-3}{4}}\right)^{\frac{4(4x-1)}{2x-3}}=$

$$=\left(\left(1+\frac{4}{2x-3}\right)^{\frac{2x-3}{4}}\right)^{\frac{4(4-\frac{1}{x})}{2-\frac{3}{x}}}=e^{8}.$$

5. $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}=\left|\begin{array}{l} t=x-e\\ x=t+e\\ x\to e\\ t\to 0\end{array}\right|=\lim\limits_{t\to0}\frac{\ln(t+e)-1}{t}=\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{t}\cdot\ln\frac{e+t}{e}=\lim\limits_{t\to0}\ln(1+\frac{t}{e})^{\frac{1}{t}}=\lim\limits_{t\to0}\left[\ln\left(1+\frac{t}{e}\right)^{\frac{e}{t}}\right]^{\frac{1}{e}}=\ln e^{\frac{1}{e}}=\frac{1}{e}.$

4.2.2.Funksiya uzluksizligi

r uzluksiz o'sish va i diskret o'sish ko'rsatkichlarining to'g'ridan - to'g'ri taqqoslash A boshlang'ich miqdor bilan berilgan bir yildagi yakuniy F xil miqdorda yig'ilib borashini natural logarifm yordamida topish mumkin va u quyidagicha:

Uzluksiz o'sish yakuniy qiymati $F=Ae^{r}$

Diskret o'sish yakuniy qiymati $F=A(1+i)$

Bundan

$$Ae^{r}=A(1+i)$$

$$e^{r}=(1+i)$$

Logarimflab r va i terminlaga nisbatan kerakli funksiyani olamiz:

$$r=\ln(1+i) \qquad (1)$$

i olish uchun, (1) tenglikni ikkala tomonini ko'rsatkichli darajaga oshiramiz va quyidagini olamiz:

$$e^{r}=e^{\ln(1+i)}$$

$$e^{r}=1+i$$

$$e^{r}-1=i$$

Misol. (i) Quyidagi diskret yillik o'sish tezligiga teng bo'lgan uzluksiz o'sish tezligini toping:

(a) 0% (b) 10% (c) 50% (d) 100%

(ii) Yuqoridagi uzluksiz yillik o'sish tezligiga teng bo'lgan diskret o'sish tezligini toping: (a), (b), (c) va (d).

Yechish.

(i) $r=\ln(1+i)$ formuladan foydalanib, javoblar quyidagicha:

(a) i = 0% = 0 $r = \ln(1 + 0) = \ln 1$ = 0%

(b) i = 10% = 0.1 $r = \ln(1 + 0.1) = \ln 1.1$ = 0.09531 = 9.53%

(c) i = 50% = 0.5 $r = \ln(1 + 0.5) = \ln 1.5$ = 0.405465 = 40.55%

(d) i = 100% = 1 $r = \ln(1 + 1) = \ln 2$ = 0.6931472 = 69.31%

(ii) $i=e^{r}-1$ formuladan foydalanib, javoblar quyidagicha

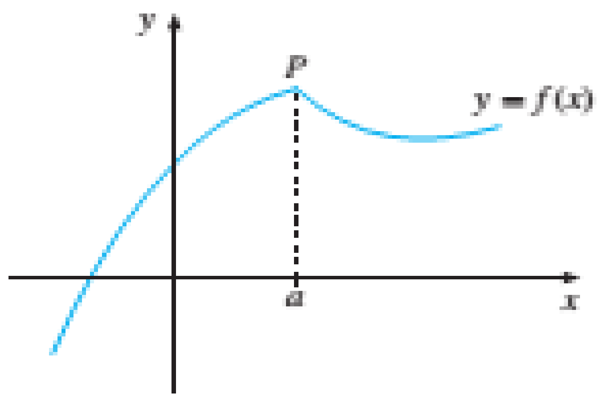
(a) $r=0\%=0 \quad i=e^{0}-1=1-1=0\%$

(b) $r=10\%=0.1 \quad i=e^{0.1}-1=1.10517-1=0.10517=10.52\%$

(c) $r=50\%=0.5 \quad i=e^{0.5}-1=1.64872-1=0.64872=64.87\%$

(d) $r=100\%=1 \quad i=e^{1}-1=2.7182818-1=1.7182818=171.83\%$

Taxminan aytganda, x erkli o‘zgaruvchining yetarli kichik o‘zgarishiga y o‘zgaruvchining ham kichik o‘zgarishi mos kelsa, u holda $y=f\left(x\right)$ uzluksiz deyiladi. Geometrik nuqtai nazardan, fuksiya grafigi barcha nuqtalarda birikkan bo‘lsa, ya’ni qaralayotgan oraliqda uzilmasa. Quyidagi rasmda bu hol ko‘rsatilgan.



1 - rasm. Uzluksiz funksiya.

Odatda, matematikaning tabiat fanlari va iqtisodiyotdagi tadbiqlarida funksiya bu vaqt o‘tishi bilan ifodalovchi bog‘lanishni ifodalaydi. Funksiya uzluksizligi esa kuzatilayotgan jarayonning sakrashlarsiz, birdan o‘zgarmasdan, ketma-ket ro‘y berishini ifodalaydi. Misol uchun, inson tanasining harorati vaqtning funksiyasi sifatida vaqt o‘tishi bilan turli qiymatlarni qabul qiladi.

Ikkinchi tomondan, Brent markali neftning bozor narxi qisqa vaqt uchun uzilishga ega funksiyani ifodalaydi. Bunga sabablardan biri narxning(dollar yoki boshqa valyuta o‘lchovida) doim ratsional sonlarda ifodalanishidir. Ikkinchi, qiziqroq holat, narxning tasodifiy sakrashiga sabablardan biri bu talab yoki ga kuchli ta’sir ko‘rsatuvchi birdan yangiliklarning yoki mish-mishlarning paydo bo‘lishi – masalan, neft etqazib beruvchi asosiy davlatning soliq tizimiga tegishli o‘zgarishlar kiritishi.

Uzluksizlik tushunchasi, bizlar shu vaqtgacha muhokama qilgan uzluksizlik tushunchasiga nisbatan matematik nuqtai nazardan qatiy aniqlangan bo‘lishi kerak.

Ta’rif. *x_0 nuqtaning biron-bir atrofida aniqlangan $f(x)$ funksiya uchun $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deb ataladi.*

Agar $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$, $\left(\lim\limits_{x\to x_0-0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right)\right)$ bo‘lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada o‘ngdan (chapdan) uzluksiz deyiladi.

Teorema. *Agar* $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$ *bo'lsa,* $f(x)$ *funksiya* x_0 *nuqtada uzluksiz bo'ladi.*

Teorema. *Agar* $f(x)$ *va* $g(x)$ *funksiyalar* x_0 *nuqtada uzluksiz bo'lsa, quyidagi funksiyalar ham uzluksiz bo'ladi*

$$\alpha f(x)\pm\beta g(x),\ \ f(x)\cdot g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}$$

bu yerda α *va* β *istalgan sonlar bo'lib,* $g(x_0)\neq 0$ *deb faraz qilinadi.*

Teorema. *Agar* $f(x)$ *funksiya* $x=b$ *nuqtada uzluksiz,* $g(x)$ *funksiya esa* $x=x_0$ *nuqtada uzluksiz bo'lib,* $g(x_0)=b$ *tenglik o'rinli bo'lsa, u holda murakkab* $f(g(x))$ *funksiya* $x=x_0$ *nuqtada uzluksiz bo'ladi.*

Ta'rif. *Agar* $f(x)$ *funksiya biron* A*- to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, bu funksiya* A*- to'plamda uzluksiz deyiladi.*

4.2.3. Uzluksiz funksiyalarning asosiy xossalari

Boltsano-Koshining birinchi teoremasi. *Agar* $f(x)$ *funksiya* $[a,b]$ *oraliqda aniqlangan va uzluksiz bo'lib, oraliq chegaralarida turli ishorali qiymatlarni qabul qilsa, ya'ni* $f(a)\cdot f(b)<0$ *bo'lsa, u holda* (a,b) *oraliqda shunday* c *nuqta mavjudki, bu nuqtada funksiya nolga teng, ya'ni* $f(c)=0$.

Boltsano–Koshining ikkinchi teoremasi. $f(x)$ *funksiya* $[a,b]$ *oraliqda uzluksiz bo'lib, oraliq chegarasida turli qiymatlarni qabul qilsa, ya'ni* $f(a)=A$, $f(b)=B$ *bo'lib,* $A\neq B$ *bo'lsa, u holda* A *va* B *sonlari orasida yotuvchi istalgan* C *son uchun* (a,b) *intervalda shunday* c *nuqta mavjudki, bu nuqta uchun* $f(c)=C$ *tenglik o'rinli bo'ladi.*

Veyershtrassning birinchi teoremasi. *Agar* $f(x)$ *funksiya* $[a,b]$ *oraliqda uzluksiz bo'lsa,* $f(x)$ *funksiya bu oraliqda chegaralangan bo'ladi, ya'ni shunday* m *va* M *sonlari mavjud bo'ladiki, istalgan* $x\in[a,b]$ *uchun* $m\leq f(x)\leq M$ *tengsizlik o'rinli bo'ladi.*

Veyershtarssning ikkinchi teoremasi. *Agar* $f(x)$ *funksiya* $[a,b]$ *oraliqda uzluksiz bo'lsa, bu oraliqda* $f(x)$ *funksiya o'zining yuqori aniq* $\sup\{f(x):x\in[a,b]\}$ *va quyi aniq* $\inf\{f(x):x\in[a,b]\}$ *chegaralariga erishadi, ya'ni* $[a,b]$ *oraliqda shunday* x_0 *va* x_1 *nuqtalar mavjudki,* $f(x_0)=\sup\{f(x)\}$ *va* $f(x_1)=\inf\{f(x)\}$.

Nazorat savollari

1. Ajoyib limitlarni yozing.
2. Aniqmasliklarga misollar keltiring.
3. Uzluksiz funksiya ta'rifini aytib, misollar keltiring.
4. Uzluksiz funksiya xossalari.
5. Koshi va Veyyershtrass teoremalarini ayting.
6

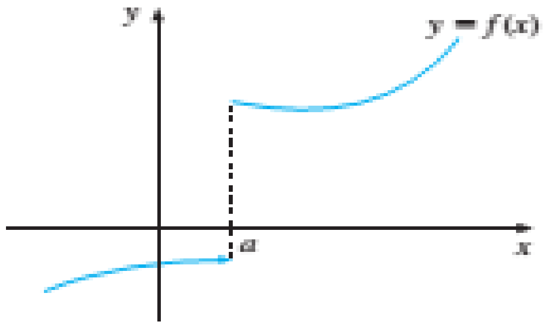
3-mashg'ulot

4.3.1. Funksiyaning uzilish
4.3.2. Uzilish turlari
4.3.3. Funksiya asimptotalari

Tayanch iboralar: *uzilish, I tur uzilish, II tur uzilish, bartaraf etiladigan uzilish, asimptotalar, vertikal, gorizontal , og'ma.*

4.3.1. Funksiyaning uzilish

Odatda, ko'pincha funksiya grafigini qalamni ko'tarmasdan chizish mumkin bo'lsa, bu funksiyani uzluksiz deyishadi. Agar funksiyani chizganda u bir yoki bir nechta sakrashlarga ega bo'lsa, u holda $f(x)$ funsiya uzilishga ega deyiladi. Grafigi quyidagi rasmda tasvirlangan funksiya $x=a$ nuqtada uzilishga ega, lekin barcha boshqa nuqtalarda uzluksiz.



Uzluksiz va uzilishga ega funksiyalarni farqini bilish nima uchun muhim hisoblanadi? Asosiy sabablardan biri, sonly yaqinlashishlar bilan ishlashimizga to'g'ri keladi. Masalan, funksiya formula ko'rinishida berilgan bo'lib va biz $f\left(\sqrt{2}\right)$ qiymatini hisoblashimiz zarur bo'lsa, biz odatda $f\left(1{,}4142\right)$ qiymat eng maqbuli va biz hisoblay oladigan hamda $f\left(\sqrt{2}\right)$ qiymatga eng yaqini deb qabul qilishga odatlanganmiz. Haqiqatda esa mana shu faraz,qabul qilish funksiyaning uzluksizligini taminlayotgan edi. U holda , 1.4142 son $\sqrt{2}$ qancha yaqin bo'lsa, $f\left(1{,}4142\right)$qiymat ham $f\left(\sqrt{2}\right)$ qiymatga shuncha yaqin bo'lishi kerak.

4.3.2. Uzilish turlari

f(x) funksiya uchun uzluksizlik shartlaridan aqalli bittasi bajarilmasa, bu funksiya *x* nuqtada uzilishga ega deyiladi.

Agar $f(x)$ funksiya berilgan x_0 nuqtada uzluksiz bo'lmasa, u holda $f(x)$ funksiya berilgan x_0 nuqtada uzilishga ega deyiladi.

Uzilish quyidagi turlari mavjud:

I – tur uzilish:funksiyaning chap va o‘ng chekli limitlari mavjud, lekin ular teng emas.

II – tur uzilish:bir tomonlama chap va o‘ng limitlardan biri cheksiz yoki mavjud emas.

I – tur uzilishga bartara*f* qilinadigan uzilish deyiladi, bunda $x \to x_0$ da funksiyaning limiti mavjud, lekin funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymatiga teng emas.

I – tur uzilishni $x \to x_0$ da funksiyaning o‘ng va chap limitlari teng, lekin funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymatiga teng bo‘lmagan holda , ya’ni

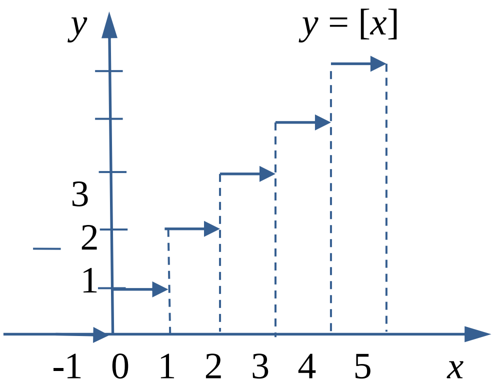
$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$$

bo‘lganda bartaraf etish mumkin. Bunday holda I – tur uzilishni bartara*f* qilinadigan uzilish deyiladi.

f(*x*)=[*x*] funksiya (o‘qilishi “ant’e iks”), bu yerda [*x*] – *x* dan katta bo‘lmagan eng katta butun sonni ifodalaydi. Masalan, [2.6] = 2, [-2.6] = -3.

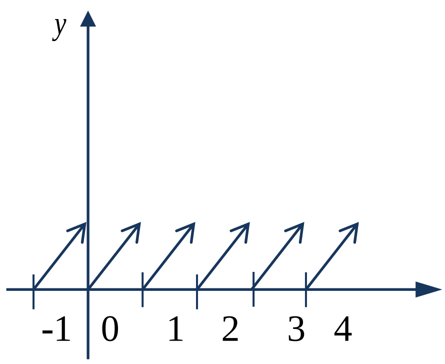
$x = \frac{3}{2}$ nuqtada *f*(*x*) = [*x*], funksiya uzluksiz, yani $\lim_{x\to\frac{3}{2}} f(x) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 1$, *x* = 1 nuqtada esa funksiya aniqlangan *f*(1) = 1, lekin I - tur uzilishga ega, chunki chap va o‘ng chekli limitlar mavjud,lekin ular teng emas: $\lim_{x\to 1-0} f(x) = 0$ va $\lim_{x\to 1+0} f(x) = 1$).

1. *f*(*x*) = [*x*] barcha haqiqiy sonlar to‘plamida aniqlangani bilan uzluksiz funksiya emas. (1 – rasm).



1 - rasm

2. $y = \{x\} = x - [x]$ - *x* sonining butun qismini ifodalovchi funksiya. (2–rasm).



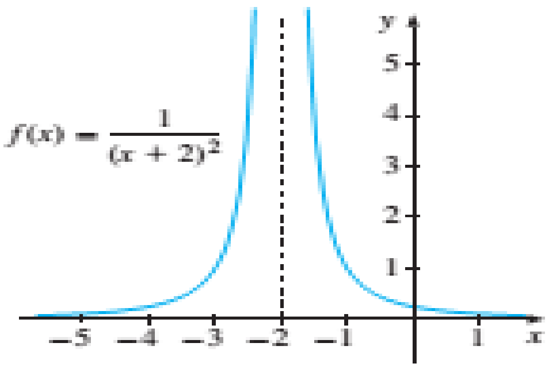
2 – rasm

4. 3.3. *Funksiya asimptotalari*

Funksiya ***grafigini*** chizishda grafik asimptotasi deb nomlanuvchi to‘g‘ri chiziqlarnning yordami kattadir.

Ta’rif. *Agar funksiya grafigining* $M=(x,f(x))$ *nuqtasidan berilgan to‘g‘ri chiziqgacha bo‘lgan* $d(M)$ *masofa uchun* $\lim\limits_{|M|\to+\infty} d(M)=0$ *tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda shu to‘g‘ri chiziq* $y=f(x)$ *funksiya grafigining asimtotasi deyiladi, bu yerda* $|M|=\sqrt{x^2+f^2(x)}$- M *nuqtadan koordinata boshigacha bo‘lgan masofa.*

Ta’rif. *Agar* $\lim\limits_{x\to x_0}|M|=+\infty$ *bo‘lsa u holda asimptota vertikal asimptota deyiladi. Vertikal asimptota* $x=x_0$ *to‘g‘ri chiziq bilan ifodalanadi.*

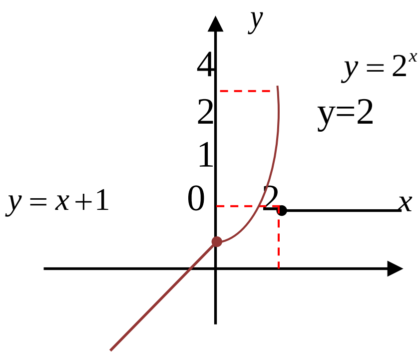


Masalan. $f(x)=\begin{cases} x+1, \ agar \ \ x<2 \\ 2^x, \ \ agar \ \ 0\le x<2 \\ 2\ , \ \ agar \ \ x\ge 2 \end{cases}$ funksiyaning uzilish nuqtalarini topamiz va grafigini chizaylik.

Bu funksiya $x=0$ va $x=2$ nuqtalarda uzilishga ega bo‘lishi mumkin. Shuning uchun shu nuqtalardagi bir tomonli limitlarni hisoblaymiz.

$f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0-0}(x+1)=1,$ $f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0+0}2^x=1.$Demak, $x=0$ nuqtada funksiya uzluksiz.

$f(2-0)=\lim\limits_{x\to 2-0}2^x=4,$ $f(2+0)=\lim\limits_{x\to 2+0}2=2.$Demak, $x=2$ nuqtada funksiyaI I tur uzlilishga ega.



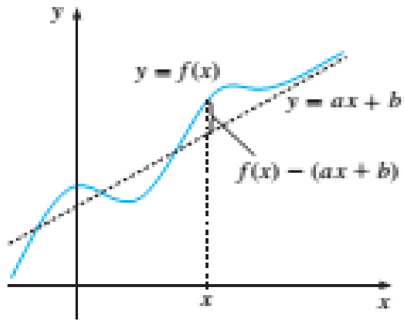
Ta'rif. *Agar* $\lim\limits_{x\to+\infty}|M| = +\infty$ *yoki* $\lim\limits_{x\to-\infty}|M| = +\infty$ *bo'lsa, asimptota og'ma asimptota deyiladi.*

Og'ma asimptota $y = kx + b$ ko'rinishda bo'ladi.

$y = kx + b$ og'ma asimptotani topish uchun ushbu tenglikdan

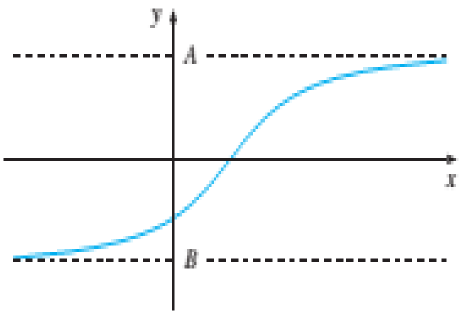
$$\lim_{x\to\infty}[f(x) - (kx + b)] = 0$$

foydalanish mumkin, bu yerdan $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0$,ya'ni $k = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ ekanligi kelib chiqadi. U holda $b = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - kx]$.



Ta'rif. *Agar og'ma asimptota uchun* $k = 0$ *bo'lsa, ya'ni asimptota* $y = b$ *ko'rinishda bo'lsa, bunday asimptota gorizontal asimptota deyiladi.*

$x = x_0$ vertikal asimptota, $y = f(x)$ funksiyani cheksizlikka aylantiruvchi x_0 nuqta bilan ifodalangani uchun, x_0 nuqtani $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \infty$ yoki $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \infty$ tengliklarni qanoatlantiruvchi nuqta deb qarash kerak.



Limitlar nazariyasi va uzluksizlikning iqtisodiyotdagi ba'zi tadbiaqlari. Uzluksiz foizlar formulasi

Yilning boshida A_0 sh.p.b. miqdorda jamg'arma mavjud bo'lsin. Qanday qilib yilning oxirigacha shu miqdordagi jamg'armadan maksimal foyda olish masalasi qiziqarlidir. Mavjud bo'lgan usullardan biri – biror bank xizmatidan foydalanishdir. Faraz qilaylik, bank 100% yillik ustama bersin. Bu bir yilda jamg'arma 100% ga ortishini, boshqa qisqa muddatlarda esa jamg‘arma shu muddatga mos proporsional (masalan, bir oyda jamg‘arma $\frac{100}{12}$%ga) o‘sishni anglatadi.

Demak, bir yildan so‘ng jamg‘arma $A_0 + A_0 = 2A_0$ miqdorga, ya’ni ikki marta ko‘payadi. Bundan ham yuqoriroq samaraga erishish uchun 0.5 yildan so‘ng jamg‘arma hisobini yopib va shu ondayoq qolgan yarim yil uchun uni yana qayta ochirilsa, bu holda yilning birinchi yarim oxirida jamg‘arma miqdori $A_0 + \frac{1}{2}A_0 = A_0\left(1+\frac{1}{2}\right)$, yilning oxirida esa $A_0\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2.25\,A_0$ miqdorda bo‘ladi. Agar hisob raqami yopish va ochish amalini yil davomida qancha marotaba ko‘p bajarilsa, u holda shuncha marta ko‘p samara olish mumkin. Masalan, bu amalni har oyning oxirida bajarilsa, yilning oxirida jamg‘arma $A_0\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} \approx 2.613\,A_0$, agar hisob har kuni yopib – ochilsa, yilning oxirida jamg‘arma $A_0\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} \approx 2.715\ A_0$ bo‘ladi.

Agar ochish – yopish amali uzluksiz bajarilsa (albatta, natija nazariy hisoblanadi) u holda yilning oxirida jamg‘arma miqdorda quyidagiga teng bo‘ladi

$$A_0 \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = A_0\cdot e \approx 2.7182818284...\cdot A_0 .$$

Demak, 100% nominal miqdorda samarali miqdor 171 % ni tashkil etishi mumkin.

Xuddi shu mulohazalarni bankning nominal foiz miqdori p% bo‘lganda ham aynan takrorlash mumkin. Bunda (nazariy) jamg‘armaning mumkin bo‘lgan miqdori quyidagiga teng bo‘ladi.

$$A_0 \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{100n}\right)^n = A_0 \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{\frac{100n}{p}}\right]^{\frac{p}{100}} = A_0\, e^{\frac{p}{100}}$$

Umumiyroq holda A_0 jamg‘arma bankka p% yillik stavkada bir yil emas, biror t yil uchun saqlansin. Vaqtning $[0,\, t]$ oralig‘ini n ta bo‘laklarga bo‘lib va n ni cheksizlikka intiltirib, mumkin bo‘lgan nazariy summani olamiz:

$$A_0 \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{100n}t\right)^n = A_0 \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{\frac{100n}{pt}}\right]^{\frac{pt}{100}} = A_0\, e^{\frac{pt}{100}}$$

$A = A_0 e^{\frac{p}{100}t}$ - uzluksiz foizlar formulasi deyiladi.

Masalan, $p=100\%$ yillik stavkada ikkinchi yilning $(t=2)$ oxirida $A_0e^2 \approx 7.414\cdot A_0$, ya'ni boshlang'ich jamg'arma etti martadan ko'proq ortadi.

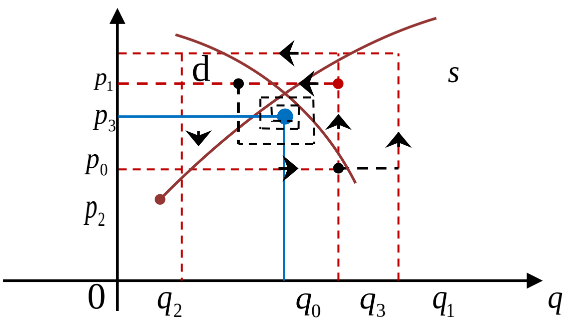
Bozorning to'r (o'rgimchak ini) modeli

Funksiya uzluksizligining xossalaridan biri (ildiz haqidagi teorema) bozorning matematik modelida o'zining ajoyib tadbig'iga egadir. Ma'lumki, talab va taklif – bu bozorning asosiy munosabatlari kategoriyasidir. Ular juda ko'p faktorlarga bog'liq bo'lib, mahsulot narxi – bu faktorlarning asosiysidir. p orqali mahsulotning narxini, d orqali talab hajmini, s orqali taklif miqdorini belgilaymilik(bu harflar so'zlarining birinchi harflaridir: *price* – narx, *demand* – talab, *supply* – taklif). Yetarli kichik p narxlarda $d(p)-s(p)>0$ (talab taklifdan ustun), katta p narxlarda esa teskarisi, ya'ni $d(p)-s(p)<0$ bo'ladi. $d(p)$ va $s(p)$miqdorlarni narxning funksiyalari deb hisoblab, ular uchun shunday p_0 narx mavjudki, bunda $d(p_0)=s(p_0)$ bo'ladi, ya'ni talab taklifga teng degan holatga duch kelamiz. Bunday p_0 narx muvozanat narx, shu narxdagi talab va taklif bozorning muvozanat nuqtasi deyiladi.

Bozorning asosiy masalalaridan biri – bu muvozanat narxni o'rnatishdir. Muvozanat narxni topish uchun o'rgimchak ini modeli deb ataluvchi sodda modelni qaraymiz. U ma'lum mahsulot uchun sotuv hajmi va narxining regulyar takrorlashuvchi siklik o'zgarishi fenomenini tushuntirib beradi.

Faraz qilaylik, mahsulot ishlab chiqarish hajmi haqidagi qaror oldingi davrdagi mahsulot narxiga bog'liq holda qabul qilinsin.

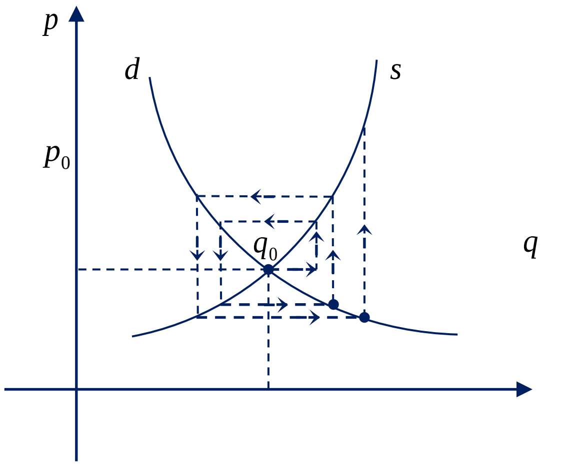
Quyidagi rasmdagi holatni tahlil qilamiz:



Dastlabki nuqtada mahsulotning taklif hajmi q_1 bo'lib, u mahsulotning oldingi davrdagi p_1 narxiga bog'liq holda tanlangan. Bu narx muvozanat narxdan yuqoriligi sababli d talab chizig'i bo'yicha unga bo'lgan xarid hajmi q_2 boladi.

Bozor holati haqidagi ma'lumotdan foydalanib ishlab chiqaruvchi mahsulot narxini p_2 miqdorgacha tushurishga majbur bo'ladi. p_2 muvozanat narxdan past bo'lgani uchun mahsulotga bo'lgan talab q_3 miqdorgacha ortadi. s taklif chizig'i bo'yicha bu miqdorga p_3 taklif narxi mos keladi va h.k. Bu holda spiral $(q_0,\ p_0)$ bozorning muvozanat nuqtasiga yaqinlashadi.

Ba'zi hollarda bu spiral "yig'ilmasdan" "yoyilishi" ham mumkin.



Nazorat savollari

1. Funksiya usilish turlarini ayting.

2. Qanday uzilishni bartaraf etish mumkin?

3.Funksiya asimtotasini ta'riflang.

4. Aqnday asimptotaga vertical asimptota deyiladi?

5. Aqnday asimptotaga og'ma asimptota deyiladi?

6. Aqnday asimptotaga gorizontal asimptota deyiladi?

1- mashg'ulot

5.1.1. Funksiya hosilasi
5.1.2. Hosilaning geometrik,iqtisodiy va mexanik ma'nolari
5.1.3. Hosila hisoblash qoidalari. Hosilalar jadvali

Tayanch iboralar: *Argument ortirmasi,funksiya ortirmasi,limit.*

5.1.1. Funksiya hosilasi

Ushbu bobda matematik analizning ba'zi asosiy usullari va ularni iqtisodiy masalalarni tahlil qilishdagi tadbiqlari yoritilgan. Biz bu yerda "differensial hisob" deb nomlanuvchi bo'limni o'rganamiz.

Differensiallash usuli yordamida funksiyaning ixtiyoriy nuqtadagi nishabligini aniqlash mumkin. Bu usul, o'z-o'zidan foydali instrument bo'lishiga qaramasdan, u yana optimizatsiya masalalarini yechishda eng qulay usullardan hisoblanadi hamda bu usul ushbu va bundan keyingi boblarda tushuntiriladi.

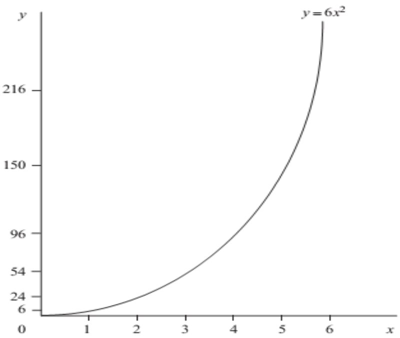
Differensiallash usullari misollarda juda qulay va sodda qo'llanilgan. Bir o'zgaruvchili quyidagi funksiyani qaraylik $y=6x^2$ barcha x nuqtalardagi qiymatlarda funksiya burchak koeffisenti ifodasini aniqlash uchun differensiallashning asosiy qoidalari bizdan:

(a) o'ng tomondagi ifodani x darajasidagi songa ko'paytirishni va

(b) x darajasidagi sondan 1 sonini ayirishni talab qiladi

$$2\times 6x^{2-1}=12x$$

Bu y dan x bo'yicha hosila bo'lib, u odatda $\frac{dy}{dx}$ kabi belgilanadi va u "dy dan dx" kabi o'qiladi.



1- rasm

Biz bu tasdiqni 1-rasmdagi $y=6x^2$ funksiya grafigiga qarab taxminiy tekshitishimiz mumkin. x ning barcha o'suvchi qiymatlarida x^2 funsiya qiymatlari ham o'sib boradi. Boshqacha aytganda, x ning qiymatlari o'sganda bu funksiya og'ishi ham o‘sib boradi. Bu funksiyadan x bo‘yicha hosila og‘ishi, yuqorida hisobladik, $12x$ bo‘ladi. x ning barcha o‘suvchi qiymatlarida $12x$ ham tabiiyki o‘sadi va shunday qilib bu funksiyaning og‘ishi haqiqatdan ham yuqorida keltirib chiqargan formula kabi bo‘lmoqda, deb tasdiqlay olamiz.

$y = 6x^2$ funsiyaning berilgan x ning qiymatidagi og‘ishini aniqllash uchun, bu qiymatni funksiya differensialidagi formulaga qo‘yib hisoblash yetarlidir

Og‘ish=$12x$

Agar x=4 da og‘ish=48, x=5 da esa og‘ish=60 va h.k.

Misol. Agar x miqdor 8 ga teng bo‘lsa $y = 4x^2$ funksiya qanday og‘ishga ega?

Yechish. y ni differensiallab

Og‘ish$= \frac{dy}{dx} = 2 \times 4x^{2-1} = 8x$ ni hosil qilamiz

Agar x=8 bo‘lsa burchak koeffisent $= 8 \cdot 8$=64.

Misol. x ning barcha qiymatlarida $y = 6x^3$ funksiya uchun og‘ish formulasini toping.

Yechish. x ning barcha qiymatlarida burchak koeffisent $= \frac{dy}{dx} = 3 \times 6x^{3-1} = 18x^2$

$x - x_0 = \Delta x$ - argument orttirmasi deyiladi. $x \to x_0$ da y $\Delta x \to 0$. $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$ - funksiya orttirmasi deyilib, $\lim\limits_{x \to 0}[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ tenglikni hosil bo‘ladi. Demak, $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lsa, argument orttirmasi Δx nolga intilganda, ya’ni Δx cheksiz kichik miqdor bo‘lganda, unga mos keluvchi funksiya orttirmasi $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ham cheksiz kichik miqdor bo‘lishi kelib chiqadi. Shuni e’tiborga olsak, x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lgan $y = f(x)$ funksiya uchun,ushbu $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ limit $\frac{0}{0}$ ko‘rinishdagi noaniqlik bo‘lishligi kelib chiqadi.

Differensiallash qoidasini quyidagicha ifodalash mumkin.

Agar $y = ax^n$ bo‘lsa, u holda

$\frac{dy}{dx} = nax^{n-1}$ bo‘ladi, bu erda a va n berilgan parametrlar.

Agar funksuya x ning turli yig‘indi yoki ayirma funksiyalaridan iborat bo‘lsa, u holda bu qoida har bir qo‘shilayotgan yoki ayrilayotgani fodalar uchun alohida-alohida qo‘llaniladi. (ko‘paytma va bo‘linma uchun qoidalar keying b’limlarda alohida o‘rganiladi.)

Misol. Funktsiyani differensiallang. $y = 3x^2 + 10x^3 - 0,2x^4$

Yechish.

$$\frac{dy}{dx} = 2 \times 3x^{2-1} + 3 \times 10x^{3-1} = 4 \times 0.2x^{4-1} = 6x + 30x^2 - 0.8x^3$$ [19]

Ta’rif. *Agar ushbu limit qiymati* $\lim\limits_{\Delta x \to} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ *chekli bo‘lsa, u holda* $y = f(x)$ *funksiya* $x = x_0$ *nuqtada hosilaga ega deyiladi.*

---

[19] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

Limit qiymati $y=f(x)$ funksiyaning $x=x_0$ nuqtadagi hosilasi deyiladi, va quyidagicha belgilanishi mumkin. $y'(x_0)$, $f'(x_0)$, $\frac{dy(x_0)}{dx}$, $\frac{df(x_0)}{dx}$, $y'_x(x_0)$

Demak, $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

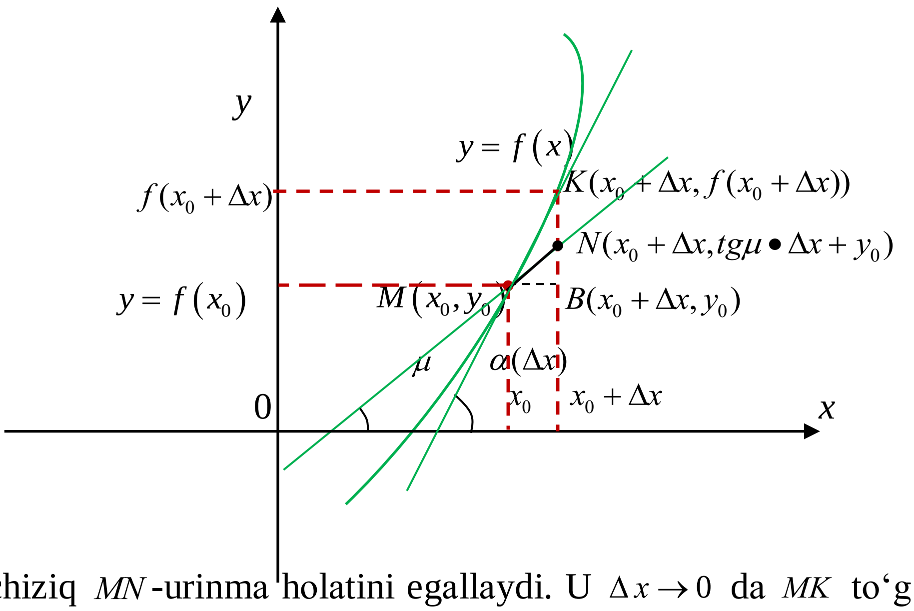
Hosila ta'rifidan, agar $y=f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, bu funksiya $x=x_0$ nuqtada uzluksiz ekanligi kelib chiqar ekan. Teskari tasdiq doim ham o'rinli emas. Uzluksiz $f(x)=|x|$ funksiyaning $x=0$ nuqtada hosilasi mavjud emas. Haqiqatan ham,

$$\lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1,\quad \lim_{\Delta x\to-0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$$

$\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$-limitning mavjud emasligini ko'rsatadi, ya'ni $f(x)=|x|$ funksiya $x=0$ nuqtada hosilaga ega emas, ammo $f(x)=|x|$ uzluksiz funksiya.

5.1.2. Hosilaning geometrik,iqtisodiy va mexanik ma'nolari

1. Hosilaning geometrik ma'nosi. Tekislikda berilgan $y=f(x)$ funksiya grafigining $M(x_0,y_0)$, (bu yerda $y_0=f(x_0)$) nuqtasiga o'tkazilgan urinmani qaraymiz. Bu urinmani hosil qilish uchun quyidagi chizmada, avval *MK* kesuvchi to'g'ri chiziq o'tkazamiz. So'ngra Δx-orttirmani nolga intiltirsak, grafikdagi K-nuqta, M-nuqtaga yaqinlasha borib,



MK to'g'ri chiziq *MN*-urinma holatini egallaydi. U $\Delta x\to0$ da *MK* to'g'ri chiziq OX-o'qining musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan $\alpha(\Delta x)$ burchagi, *MN*-urinma hosil qilgan φ burchakka intiladi. Bu yerda *MN* to'g'ri chiziq tenglamasi $y-y_0=tg\varphi\cdot(x-x_0)$ ko'rinishda bo'lib, $x-x_0=\Delta x$ va $tg\varphi=k$-*MN* to'g'ri chiziq OX o'qining musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchak koeffitsienti ekanligini e'tiborga olsak, *MN* to'g'ri chiziq tenglamasi $y=k\cdot\Delta x+y_0$ ko'rinishda bo'ladi. 1- chizmada *MKB* uchburchak uchun $MB=\Delta x$, $KB=\Delta y$ va $tg\alpha(\Delta x)=\frac{\Delta y}{\Delta x}$

Demak, $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0} tg\alpha(\Delta x)=tg\varphi=k$ ya'ni $f'(x_0)=k$ tenglikni hosil qilamiz. Shunday qilib, $y=f(x)$ funksiyaning $x=x_0$ nuqtadagi $f'(x_0)$ hosilasi shu funksiya grafigining $M(x_{0,}y_0)$ nuqtasiga o'tkazilgan MN urinmaning burchak koeffitsientiga teng bo'lar ekan. MN-urinmaning $y=k\cdot\Delta x+y_0$ tenglamasida $\Delta x=x-x_0,\ y_0=f(x_0)\ va\ k=f'(x_0)$. U holda $y=f(x)$ funksiya grafigining $M(x_0,y_0)$ nuqtasida o'tkazilgan urinma tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'lar ekan. $y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$

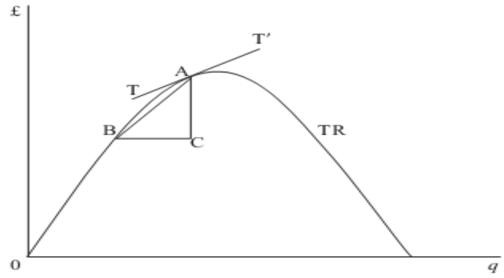
2. Hosilaning mexanik ma'nosi. $S=s(t)$ funksiya harakat qilayotgan jismning t-vaqt davomida bosib o'tgan yo'lini bildirsa, shu jismning $t=t_0$ vaqtdagi oniy tezligi $\vartheta(t_0)$ ni topish masalasini qaraymiz. Buning uchun t-vaqtga Δt orttirma beraylik, u holda mana shu vaqt davomida jism ma'lum bir masofa $\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$ni bosib o'tadi, u holda jismning Δt vaqt davomidagi o'rtacha tezligini $\vartheta_{o'r}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$ tenglik orqali topish mumkin. Tabiiyki o'rtacha tezlik, $t=t_0$ vaqtdagi oniy tezlik $\vartheta(t_0)$ga qandaydir xatolik bilan teng bo'ladi. Biz $|\Delta t|$ vaqt kattalikni qanchalik kichik qilib olsak, $\vartheta_{o'rta}$- o'rtacha tezlik $\vartheta(t_0)$ oniy tezlikka shunchalik yaqin bo'lib, xatolik kam bo'ladi. Shuning uchun, $\vartheta(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\vartheta_{o'rta}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=S'(t_0)$tenglik o'rinli deya olamiz. Natijada jismning $S=s(t)$ harakat tenglamasida, yo'ldan t-vaqt bo'yicha olingan hosila, shu jismning ayni t-vaqtdagi tezligiga teng bo'lar ekan, ya'ni $S'(t)=\vartheta(t)$.

3. Hosilaning iqtisodiy ma'nosi. Shuni ta'kidlash lozimki, hosilaning iqtisodiy ma'nosi ko'p qirrali bo'lib, muayyan ob'ektga yo'naltirilgan maqsaddan kelib chiqadi. Biz shu masalalardan birini keltiramiz. $U=U(t)$ funksiya t-vaqt davomida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi o'zgarishini bildirsin. Ishlab chiqarishning $t=t_0$ vaqtdagi mehnat unumdorligini topish masalasini ko'raylik. Buning uchun t-vaqtga Δt- orttirma beramiz, u holda mana shu vaqt davomida ma'lum miqdordagi $\Delta U=U(t_0+\Delta t)-U(t_0)$ mahsulot ishlab chiqariladi, o'rtacha mehnat unumdorlik $Z_{o'rta}=\frac{\Delta U}{\Delta t}$ tenglik orqali topiladi. Yuqoridagi mulohazalarga o'xshash $t=t_0$ vaqtdagi mehnat unumdorligi uchun quyidagi tenglikni hosil qilamiz: $Z(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}Z_{o'rta}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta U}{\Delta t}=U'(t_0)$

Demak, mahsulot hajmini vaqt bilan bog'lovchi $U(t)$ funksiyaning vaqt bo'yicha $U'(t)$ hosilasi, ishlab chiqarishning $Z(t)$ unumdorligini berar ekan, ya'ni $U'(t)=Z(t)$.

Marginal daromad va umumiy daromad

Odatda, ba'zan iqtisodiyotda MR (MR- marginal revenue) chegaraviy daromad savdodagi sotuv hajmining 1 birlikka ortgandagi TR (TR - total revenue) umumiy daromadning qancha miqdorga ortishini ifodalaydi. Bu chegaraviy daromadning taxminiy qiymatini ifodalab va u o'lchov birligi o'zgarganda o'zgaradi. Chegaraviy daromadni yanada aniqroq ta'riflash uchun ishlab chiqarish hajmining umumiy daromadga nisbatan o'zgarish tezligi deb hisoblanash aniqlaydi.



$\frac{\Delta TR}{\Delta Q} = \frac{AC}{BC} = \text{AB}$ chiziqning og'ishini anglatib, shu oraliqdagi chegaraviy daromadning taqribiy qiymatini ifodalaydi.

B nuqta *TR* chiziq bo'ylab *A* tomonga yaqinlashsa, og'ish burchagi *A* nuqtada o'tkazilgan TT' urinmaning burchak koeffisentiga yaqinlashadi. Ishlab chiqarish hajmining kichik o'zgarishida, *MR A* nuqtadagi *TR* ning og'ish burchagiga teng bo'ladi. Agar o'zgarish yetarli kichik bo'lsa, u holda MR deyarli *TR* ning *A* nuqtadagi og'ishiga teng bo'ladi. Demak, har qanday berilgan vaqtdagi ishlab chiqarishda *MR TR* funksiyaning shu vaqtdagi og'ishiga teng bo'ladi. Ma'lumki, funksiya og'ishini differensiallash yordamida topish mumkin va u

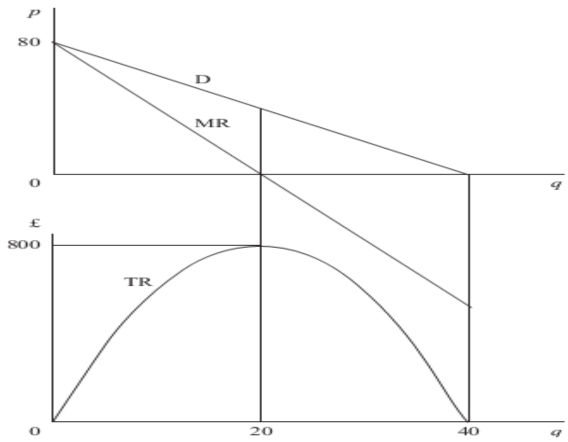
$$MR = \frac{dTR}{dq}$$

munosabat orqali ifodalanadi.

Misol. $TR = 80q - 2q^2$ funksiya berilgan bo'lsa, MR uchun funnksiyani aniqlang.

Yechish. $MR = \frac{dTR}{dq} = 80 - 4q$. Bu natija TR va MR o'rtasidagi ba'zi munosabatlar xususiyatlari tushuntirishga yordam beradi.

Talabning $p = 80 - 2q$ chiziqli D grafigi quyidagi rasmda ko'rsanilgan



Ma'lumki, $TR = pq$. Demak, $TR = (80 - 2q)q = 80q - 2q^2$.Bu TR funksiya rasmning quyidagi qismida joylashgan va MR funksiya esa shu rasmning yuqori qismida tasvirlangan.

Chizmadan ko‘rinib turibdiki, TR o‘sganda kutilganidek MR musbat va TR kamaysa MR manfiy. TR o‘zining maksimumiga erishsa, MR nolga teng bo‘ladi.

MR funksiya yordamida TR funksining maksimum qiymatini topish oson.TR maksimal nuqtasida gorizontal va og‘ish burchagi nolga teng, shuning uchu MR ham nolga teng bo‘ladi. Demak, TR maksimumga erishganda

$$MR = 80 - 4q = 0, \quad 80 = 4q, \quad 20 = q$$

Rasmda MR funksiyaning vertical o‘qda talab funksiyasi bilan bir nuqtada kesishishini va ikki marta katta og‘sh burchagiga egaligini ko‘rish mumkin. Bu natijani har qanday chiziqli funksiya uchun ham o‘rinliligini ko‘rsatish mumkin.

Marginal (chegaraviy) xarajat va umumiy xarajat

Xuddi *MR* funksiya *TR* funktsiyaning o‘zgarishi tezligini aniqlaganidek ko‘rsatish mumkinki, marginal xarajat (MC- the marginal cost) umumiy xarajat (TC- the total cost) funktsiyasining o‘zgarish tezligini aniqlaydi. Aslida, yetarli kichik o‘zgarishda, marginal funksiya berilgan funksiyaning o‘zgarish tezligini ifodalaydi.

Misol. $TC = 6 + 4q^2$ funksiyaga ko‘ra MC funksiyani toping.[20]

Yechish. $MC = \frac{dTC}{dq} = 8q$

5.1.3. Hosila hisoblash qoidalari

1. $(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x), \quad a = const$
2. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
3. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
4. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
5. $y = f(u), \quad u = g(x), (f(u))_x' = f_x'(u) \cdot u_x'$.
6. $y = f(x)$ va $x = g(y)$ o‘zaro teskari funksiyalar uchun, $x_y' = \frac{1}{y_x'}$.
7. $y = f(kx+b)$ funksiya uchun $y' = kf'(kx+b)$

Hosilalar jadvali

[20] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

$1.\ c' = 0$

$2.\ x' = 1$

$3.\ (x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

$4.\ \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

$5.\ (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$6.\ (a^x)' = a^x \cdot \ell na$

$7.\ (e^x)' = e^x$

$8.\ (\ell og_a^x)' = \frac{\ell og_a e}{x} = \frac{1}{x \cdot \ell na}$

$9.\ (\ell nx)' = \frac{1}{x}$

$10.\ (\sin x)' = \cos x$

$11.\ (\cos x)' = -\sin x$

$12.\ (tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$13.\ (ctgx)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$

$14.\ (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$15.\ (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$16.\ (arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$

$17.\ (arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Nazorat savollari

1. *Hosila ta'rifini ayting.*
2. *Hosilaning ma'nolari .*
3. *Elementar funksiyalar hosilalarining jadvalini keltiring.*

Quyidagi funksiyalar hosilasini hosilaning ta'rifi yordamida hisoblang.

a) $y=x^3$ *b) $y=lnx$* *c) $y=cosx$*

2- mashg'ulot

5.2.1. Yuqori tartibli hosilalar
5.2.2. Differensial
5.2.3. Differensiallash jadvali va hisoblash qoidalari

Tayanch iboralar: *Argument ortirmasi,funksiya ortirmasi,limit*

5.2.1. Yuqori tartibli hosilalar

Agar $y=f(x)$ funksiya uchun (a,b) oraliqning har bir nuqtasida hosila mavjud bo'lsa, u holda (a,b) oraliqda yangi $f'(x)$ funksiyani hosil qilamiz. Bu $f'(x)$ funksiya $x=x_0\in(a,b)$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u holda $x=x_0$ nuqtada $y=f(x)$ funksiya ikkinchi tartibli hosilaga ega deyilib, bu xosila

$$y''(x_0),\ f''(x_0),\ \frac{d^2y(x_0)}{dx^2},\ \frac{d^2f(x_0)}{dx^2},\ y''_{x^2}(x_0)$$

shakldа belgilanadi. Demak, ikkinchi tartibli hosila quyidagi tenglik orqali topilar ekan:
$$f''(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}$$

Xuddi shuningdek, $y=f(x)$ funksiya uchun uchinchi, to'rtinchi va n- tartibli hosilani aniqlash mumkin. Umumiy holda, agar $y=f(x)$ funksiya uchun (a,b) oraliqning har bir nuqtasida $(n-1)$-tartibli hosilaga ega bo'lib, mana shu hosil bo'lgan funksiyani $f^{(n-1)}(x)$ deb belgilasak, o'z navbatida $f^{(n-1)}(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, bu hosila $y=f(x)$ funksiyaning $x=x_0$ nuqtadagi n-tartibli hosilasi deyiladi. n-tartibli hosilani quyidagi ko'rinishlarda ifoda etish mumkin.

$$y^{(n)}(x_0),\ f^{(n)}(x_0),\ \frac{d^ny(x_0)}{dx^n},\ \frac{d^nf(x_0)}{dx^n},\ y^{(n)}_{x^n}(x_0)$$

Demak, ta'rifga ko'ra n-tartibli hosila

$$f^{(n)}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x_0+\Delta x)-f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}$$

tenglik orqali aniqlanar ekan. Bu tenglikni umumiy holda quyidagicha yozishimiz mumkin

$$f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)',n=1,2,3...$$

bu yerda $f^{(0)}(x)=f(x)$.

Yuqori tartibli hosila uchun quyidagi tengliklar o‘rinli bo‘ladi.

$$1.\ (cf(x))^{(n)}=c\cdot f^{(n)}(x) \qquad c=const$$

$$2.\ (f(x)+g(x))^{(n)}=f^{(n)}(x)+g^{(n)}(x)$$

$$3.\ (f(ax+b))^{(n)}=a^n f^{(n)}(ax+b)$$

$$4.\ (f(x)\cdot g(x))^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(n-k)}(x)\cdot g^{(k)}(x)$$

Bu tengliklarning barchasini matematik induktsiya usuli bilan isbot qilish mumkin.
4-tenglik Leybnits formulasi deb nomlanadi.

Endi ayrim elementar funksiyalarning yuqori tartibli hosilalarini keltiramiz. Bu formulalar ham matematik induktsiya usuli bilan isbot qilinadi.

1. $\left(x^m\right)^{(n)}=m\cdot(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)x^{m-n}$, m-istalgan haqiqiy son. Agar m natural son bo‘lsa, $n>m$ uchun $\left(x^m\right)^{(n)}=0$ *ва* $n=m$ uchun $\left(x^m\right)^{(m)}=m!$.
2. $\left(a^x\right)^{(n)}=a^x\cdot(\ell na)^n$, xususan $\left(e^x\right)^{(n)}=e^x$
3. $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$
4. $(\cos)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$

5.2.2. Differensial

Agar, x va y o‘zgaruvchilardagi o‘zgarish cheksiz kichik bo‘lsa, unda ushbu chiziqsiz funktsiya

$$\Delta y=\frac{dy}{dx}\Delta x$$

“differentsial” deb hisoblanadi.

Ta’rif: *Agar $\Delta x\to 0$ da, funksiya orttirmasi Δy ni quyidagi ko‘rinishda ifodalash mumkin bo‘lsa,* $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)$

bu yerda $A-$o‘zgarmas son, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x}=0$, u holda $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differentsiallanuvchi deyiladi va funksiyaning x_0 nuqtadagi differentsiali $A\cdot\Delta x$ ga teng deb ataladi. Bu differentsial $A\cdot\Delta x=df(x_0)$ shaklda belgilanadi.

Teorema. *x_0 nuqtaning biron-bir atrofida berilgan $f(x)$ funksiya shu nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega bo‘lsa, u holda x_0 nuqtada $f(x)$ funksiyaning $df(x_0)$ differentsiali mavjud bo‘lib, bu differentsial uchun* $df(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x$
tenglik o‘rinli.

Taqribiy hisoblashlarni funksiya orttirmasini uning differentsiali bilan almashtirish orqali bajarish mumkin, ya’ni $\Delta y\approx df(x_0)$

Agar $f(x)$ funksiya (a,b) intervalning har bir nuqtasida differentsiallanuvchi bo‘lsa, $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda differentsiallanuvchi deyiladi.

$f(x)=x$ funksiya $(-\infty,+\infty)$ da differentsiallanuvchi bo‘lib,

$$dx = (x)' \cdot \Delta x = \Delta x$$

o‘rinli bo‘ladi, ya’ni erkli o‘zgaruvchi uchun, uning differentsiali va orttirmasi teng bo‘lar ekan.

Bu tenglikdan funksiya differentsiali uchun

$$df(x) = f'(x) \cdot dx \quad \text{yoki} \quad dy = y'dx$$

tenglikni yoza olamiz. Demak, $f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx}, \ y' = \dfrac{dy}{dx}$.

5.2.3. Differensiallash jadvali va hisoblash qoidalari

Differensiallash jadvali

1. $d(c) = 0 \qquad c = const$
2. $d(x^{\alpha}) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}dx$
3. $d(a^x) = a^x \ell na\, dx, \ d(e^x) = e^x \ dx$
4. $d(\ell og_a x) = \dfrac{1}{x\,\ell na}dx, \ d(\ell nx) = \dfrac{1}{x}dx$
5. $d(\sin x) = \cos x \ dx$
6. $d(\cos x) = -\sin x \ dx$
7. $d(tg\, x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}dx$
8. $d(ctg\, x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}dx$
9. $d(\arcsin x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
10. $d(\arccos x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
11. $d(arctg\, x) = \dfrac{1}{1+x^2}dx$
12. $d(arcctg\, x) = -\dfrac{1}{1+x^2}dx$

Differentsiallash qoidalari

1. $d(cf(x)) = c \cdot df(x), \quad c = const$
2. $d[f(x) \pm g(x)] = df(x) \pm dg(x)$
3. $d[f(x) \cdot g(x)] = g(x)df(x) + f(x)dg(x)$
4. $d\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{g^2(x)}$

Nazorat savollari

1. *Yuqori tartibli hosilani hisoblash qoidalarini keltiring.*
2. *Funksiya differentsialining ta'rifini ayting.*
3. *Differentsial hisobning asosiy teoremalarini ayting.*
4. *Quyidagi funksiyalar hosilasini hosilaning ta’rifi yordamida hisoblang.*
   a. *a)* $y=x^3$ *b)* $y=\ln x$ *c)* $y=\cos x$
5. 2. *a)* $y = tgx$, $y''' = ?$ *b)* $y = 2^x + 2^{-x}$, $d^{(n)} = ?$
6. 3. *a)* $y = x^2 \sin 2x$. $y' = ?$ *b)* $y = \left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$. $y' = ?$ *c)* $x = a \cos t, \ y = a \sin t$. $Y_x' = ?$
7. 4. *a)* $y = -\dfrac{4}{11}x^5\sqrt{x} + \dfrac{2}{15}x\sqrt[7]{x}$. $y' = ?$ *b)* $y = \arcsin \dfrac{2x^2}{1+x^4}$. $y' = ?$ *c)* $x = e^{2t}, \ y = e^{3t}$. $Y_x' = ?$

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

3- mashg’ulot

5.3.1. Differentsial hisobning asosiy teoremalari

5.3.2. Teylor va Makloren formulalari

5.3.1. Differentsial hisobning asosiy teoremalari

Ferma teoremasi. *Agar* $f(x)$ *funksiya* x_0 *nuqtaning biron-bir* $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)(\delta>0)$ *atrofida berilgan bo'lib,* x_0 *nuqtada eng katta (eng kichik) qiymatga erishib,* $f'(x_0)$*- hosilasi mavjud bo'lsa, u holda bu hosila nolga teng, ya'ni* $f'(x_0)=0$.

Roll teoremasi. $f(x)$ *funksiya* $[a,b]$ *oraliqda uzluksiz va* (a,b) *intervalda hosilaga ega bo'lib, oraliq chegaralarida bir xil qiymatlarni qabul qilsa, ya'ni* $f(a)=f(b)$ *bo'lsa, u holda intervalda shunday* c *nuqta topiladiki, uning uchun* $f'(c)=0$ *tenglik o'rinli b* (a,b)*o'ladi.*

Lagranj teoremasi. $f(x)$ *funksiya* $[a,b]$ *oraliqda uzluksiz va* (a,b) *intervalda hosilaga ega bo'lsin, u holda* (a,b) *intervalda shunday* c *nuqta mavjudki, uning uchun quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi.*

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Koshi teoremasi. *Agar* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ *limit* $\frac{0}{0}$ *yoki* $\frac{\infty}{\infty}$ *ko'rinishdagi noaniqlik bo'lib,* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ *limit mavjud bo'lsa, (cheksiz bo'lishi ham mumkin), u holda*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

5.3.2. Teylor va Makloren formulalari

$f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biron-bir atrofida berilgan va bu atrofda uning $(n-1)$ tartibli hosilasi mavjud va x_0 nuqtada $f(x)$ funksiyaning n-tartibli hosilasi mavjud bo'lsin. Bu shartlarda x_0 ning qaralayotgan atrofida quyidagi $p(x)$-ko'phadni aniqlay olamiz:

$$p(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\tau_n(x),$$

bu yerda $\tau_n(x)$ formulaning qoldiq hadi deyiladi.

$\tau_n(x)=0\left((x-x_0)^{(n)}\right)$, ya'ni x o'zgaruvchi x_0 dan yetrarlicha kam farq qilsa, $\tau_n(x)$ ifoda 0 dan shunchalik kam farq qiladi. Demak, hisoblashlarda ushbu

$$f(x)\approx f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

taqribiy formuladan foydalanishimiz mumkin ekan.

$x-x_0=\Delta x$ deb belgilasak, Teylor formulasining quyidagi ko'rinishlarini hosil qilamiz:

$$f(x)-f(x_0)=\Delta f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\frac{1}{2!}f''(x_0)\Delta x^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\Delta x^n+\theta(\Delta x^n)$$

$$\Delta f(x_0)=df(x_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}d^nf(x_0)+\theta(\Delta x^n).$$

Agar , Teylor formulasida $x=0$ deb olinsa, Makloren formulasi deb nomlanuvchi ushbu formulani hosil bo'ladi:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\theta(x^n).$$

Ayrim elementar funksiyalarning Makloren qatoriga yoyolmalari:

1) $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+0(x^n)$.

2) $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)}+\theta(x^{2k})$.

3) $\cos x=1-\frac{x^2}{2:}+\frac{x^4}{4:}-+\cdots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+\theta(x^{2k+1})$.

Hosil qilingan yoyilmalar e^x, $\sin x$ va $\cos x$ funksiyalar qiymatini topish x ga nisbatan ko'phad bo'lgan qiymatini topishga olib kelishini ko'rsatadi.

5.3.3. Lopital qoidasi

Limitlarni hisoblashda uchraydigan $\frac{0}{0}$ va $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi noaniqliklarni ochishda, quyidagi Lopital qoidasi deb nomlanadigan qoidani asoslab beruvchi, teoremani keltiramiz.

Teorema. *Agar* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ *limit* $\frac{0}{0}$ *yoki* $\frac{\infty}{\infty}$ *ko'rinishdagi noaniqlik bo'lib,* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ *limit mavjud bo'lsa, (cheksiz bo'lishi ham mumkin), u holda* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Masalan. $\lim\limits_{x\to+0} x\cdot \ln x=\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+0}(-x)=0$. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}$.

Misol. CES (“constant elasticity of substitution”) (doimiy o'rnini elastiklik) funksiyasini qaraylik $F(K,L)=A\left(aK^{-\rho}+(1-a)L^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}}$ (*) bu yerda A>0, K>0, L>0, $a\in(0,1)$ va $\rho\neq0$. A, K, L va a larni fiksirlangan deb, $\rho\to0$ da $z=\ln\left[\frac{F(K,L)}{A}\right]$ funksiyaga Lopital qoidasini qo‘llab, F(K,L) funksiyaning Kobba-Duglas funksiyasiga yaqinlashishini ko‘rsating.

Yechish. $\rho\to0$ da $z=\ln\left(aK^{-\rho}+(1-a)L^{1-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}}=-\frac{\ln\left(aK^{-\rho}+(1-a)L^{-\rho}\right)}{\rho}\to\frac{0}{0}$.

Chunki, $\frac{d}{d\rho}\left(K^{-\rho}\right)=-K^{-\rho}\ln K$ va $\frac{d}{d\rho}\left(L^{-\rho}\right)=-L^{-\rho}\ln L$

Loital qoidasini qo‘llab

$$\lim_{\rho\to0}z=\lim_{\rho\to0}\frac{\left(\frac{aK^{-\rho}\ln K+(1-a)L^{-\rho}\ln L}{aK^{-\rho}+(1-a)L^{-\rho}}\right)}{1}=a\ln K+(1-a)\ln L=\ln K^aL^{1-a}$$

Demak, $e^z=K^aL^{1-a}$ bu esa so‘ralayotgan tasdiqdir.

Nazorat savollari

1. Funksiya differentsialining ta'rifini ayting.
2. Differentsial hisobning asosiy teoremalarini ayting
3. . Quyidagi funksiyalar hosilasini hosilaning ta’rifi yordamida hisoblang.
   a. a) $y=x^3$ b) $y=\ln x$ c)y=cosx
4. a) $y=tgx$, $y'''=?$ b) $y=2^x+2^{-x}$, $d^{(n)}=?$
5. a) $y=x^2\sin 2x$. $y'=?$ b) $y=\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$. $y'=?$ c) $x=a\cos t$, $y=a\sin t$. $Y_x{}'=?$
6. a) $y=-\frac{4}{11}x^5\sqrt{x}+\frac{2}{15}x\sqrt[7]{x}$. $y'=?$ b) $y=\arcsin\frac{2x^2}{1+x^4}$. $y'=?$ c)

4- mashg'ulot

5.4.1. Funksiyani tekshirish
5.4.2. Funksiyaning o'sish va kamayish oraliqlari
5.4.3. Funksiya ekstremumlari

Tayanch iboralar: *hosila,o'sish,kamayish,ekstemum nuqtalari.*

5.4.1. Funksiyanni tekshirish

Teorema. *$f(x)$ funksiya (a,b) intervalda o'zgarmas bo'lishi uchun, uning hosilasi shu intervalda nolga teng bo'lishi zarur va yetarli.*

Natija. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uchun (a,b) intervalda $f'(x)=g'(x)$ tenglik o'rinli bo'lsa, shu intervalda

$$f(x)=g(x)+c, \qquad c=const$$

tenglik o'rinlidir.

5.4.2. Funksiyaning o'sish va kamayish oraliqlari

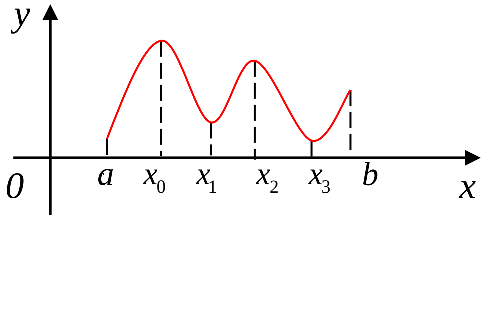
Teorema. *Agar $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda hosilaga ega bo'lib, barcha $x\in(a,b)$ uchun $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi.*

Izoh. Agar $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda o'suvchi (kamayuvchi) bo'lib, shu intervalda $f'(x)$ hosila mavjud bo'lsa, hosila uchun $f'(x)\geq 0$ $(f'(x)\leq 0)$ tengsizlik o'rinli bo'ladi, deyish mumkin, ya'ni o'suvchi (kamayuvchi) funksiyaning ayrim nuqtalaridagi hosilasi nolga teng bo'lishi mumkin. Masalan $y=x^3$ funksiya $(-\infty,+\infty)$ oraliqda o'suvchi bo'lib, uning hosilasi $y'=3x^2$, $x=0$ da $y'(0)=0$ bo'ladi.

5.4.3. Funksiya ekstremumlari

Funksiya grafigini chizishda uning maksimum va minimum nuqtalari muhim o'rin egallaydi.

Ta'rif. *Agar x_0 nuqtaning shunday atorfi $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ $(\delta>0)$ mavjud bo'lsaki, shu oraliqdan olingan istalgan $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ uchun $f(x)\leq f(x_0)$ $(f(x)\geq f(x_0))$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada lokal maksimumga (lokal minimumga) erishadi deyiladi. Funksiyaning lokal maksimum va lokal minimum nuqtalari funksiyaning lokal ekstremumlari yoki shunchaki funksiya ekstemumlari deb yuritiladi.*



Funksiya berilgan $[a,b]$ oraliqda bir necha lokal ekstremumlarga ega bo'lishi mumkin. Masalan, rasmda x_0, x_1, x_2, x_3 nuqtalarda funksiya lokal ekstremumlarga erishadi. $[a,b]$ oraliqdagi funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari funksiyaning global ekstremumlari deyiladi. Funksiya global ekstremumga oraliq chegaralarida erishishi mumkin. Masalan, rasmdagi funksiya uchun $f(x_0) = \max\limits_{x\in[a;b]}\{f(x)\}$ ekanligini ko'rish mumkin.

Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada lokal ekstremumga erishib, bu nuqtada $f'(x_0)$ hosila mavjud bo'lsa, Ferma teoremasiga ko'ra $f'(x_0)=0$. Lekin, $f'(x_0)=0$ ekanligidan, x_0 nuqtada funksiya ekstremumga erishadi deya olmaymiz. Masalan, $y=x^3$ funksiya, $(-\infty,+\infty)$ da o'suvchi bo'lgani uchun uning ekstremum nuqtalari mavjud emas, lekin $y'=3x^2$ hosila $x=0$ da nolga teng bo'ladi. Shu bilan birga $y=\sqrt[3]{x^2}$ funksiya $x=0$ nuqtada lokal ekstremumga ega bo'lib, bu nuqtada funksiya lokal minimumga erishgani bilan, $x=0$ nuqtada funksiya hosilasi mavjud emas.

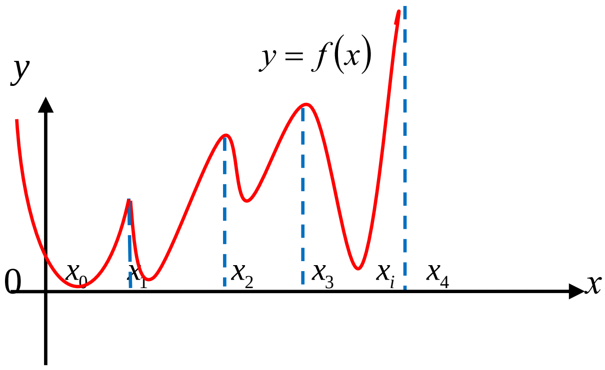
Funksiya hosilasi nolga teng bo'lgan nuqtalar funksiyaning statsionar nuqtalari deyiladi.

Funksiya hosilasi mavjud bo'lmagan yoki cheksiz bo'lgan nuqtalar funksiyaning kritik nuqtalari deyiladi.

Demak, lokal ekstremumning zaruriy shartini quyidagi ifodalash mumkin.

$f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga erishishi uchun, bu nuqta funksiya uchu yoki statsionar nuqta yoki kritik nuqta bo'lishi zarur.

Demak, funksiyaning ekstremum nuqtalarini uning statsionar yoki kritik nuqtalari orasidan izlashimiz kerak.



Chizmadagi $y=f(x)$ funksiya uchun x_1 , x_4 nuqtalar kritik nuqtalar bo'lib, ($f'(x_1)$ mavjud emas, $f(x_4)=\infty$), x_0, x_2 , x_3 va x_i nuqtalar ekstremum nuqtalar bo'ladi.

Funksiya ekstremumining birinchi yetarli sharti

Quyidagi $TR=60q-0,2q^2$ umumiy foyda funksiyasini qaraylik.

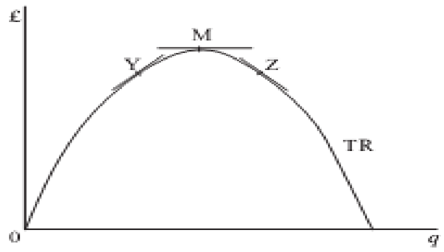
Bu funksiya grafigi 9.1 rasmda keltirilgan bo'lib, u U shaklning teskarilangani kabidir. "Qachon TR funksiya maksimumga erishadi?" degan savolni qo'yaylik. Bu savolga javob egri chiziqning eng yuqori M nuqtasida ekanligi ravshandir. Bu maksimal qiymatda funksiya grafigi yassi bo‘ladi. M nuqtaning chap qismida TR o‘sadi va musbat og‘ishga ega, M nuqtadan o‘ngda esa TR funksiya kamayadi va manfiy og‘ishga ega. M nuqtada esa og‘ish nolga teng.

Shuning uchun biz bu shakldagi funksiya uchun maksimal nuqtada uning og‘ishi nol bo‘ladi deya olamiz. Bu, og‘ishning maksimal nuqtada nolga teng bo‘lishi, maksimumga erishishning zaruriy shartidir. Og‘ishning nolga tengligi funksiyani bu nuqtada maksimumga erishishini ta’minlamaydi, bu keyingi bo‘limda ko‘rsatiladi va ikkinchi tartibli hosila yordamida yetarli shart keltirilib chiqariladi. Shunga qaramasdan, bu qaralayotgan misol uchun og‘ishning nol qiymati funksiya maksimal qiymatiga mos keladi. 8 bobda funksiya og‘ishi hosila orqali aniqlanganini bilamiz. Demak,

$$TR = 60q \; - \; 0.2q^2$$

funksiya uchun

$$Og'ish = \frac{dTR}{dq} = 60 - 0.4q \, .$$



O‘gish nol bo‘lganda TR maksimumga erishadi

$$60q \; - 0.4q = 0, \quad 60 = 0.4q, \quad q = 150$$

Shuning uchun, 150 miqdordagi ishlab chiqarishda TR maksimumga erishadi.[21]

Teorema. *Agar x_0 kritik nuqta atrofida x nuqta chapdan o‘ngga qarab o‘zgarganda, $f(x)$ funksiya hosilasi o‘z ishorasini musbatdan manfiyga (manfiydan musbatga) o‘zgartirsa, bu x_0 nuqta lokal maksimum (lokal minimum) nuqta bo‘ladi.*

$y = f(x)$ funksiyani ekstremumga tekshirishni quyidagi algoritm bo‘yicha bajarish mumkin:

1. $y' = f'(x)$ hosilani topish.

2. $f'(x) = 0$ tenglama yechimlarini topish va $f'(x)$ mavjud bo‘lmagan nuqtalarni aniqlash, ya’ni barcha kritik nuqtalarni topish.

3. $f'(x) > 0$ va $f'(x) < 0$ tengsizliklarni yechib, $f'(x)$ hosilaning kritik nuqta atrofidagi ishoralarini aniqlash lozim.

Agar statsionar nuqtadan chapda va o‘ngda hosila turli ishoralarga ega bo‘lsa, funksiya shu nuqtada ekstremumga erishadi, aks holda bu statsionar nuqta ekstremum nuqta bo‘lmaydi. Statsionar nuqta atrofida funksiya hosilasi ishorasi chapda + va o‘ngda – bo‘lsa, bu nuqta lokal maksimum, chapda – va o‘ngda + bo‘lsa, bu nuqta lokal minimum nuqta bo‘ladi.

4. Funksiyaning ekstremum qiymatlarini topish.

---

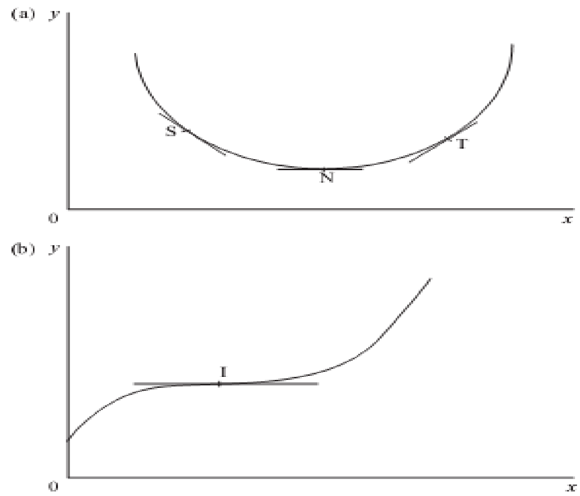
[21] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

Funksiya ekstremumining ikkinchi yetarli sharti

TR funksiya uning og‘ishi nolga teng bo‘lgan nuqtada maksimumga erishgan edi, chunki bu holda biz funksiyaning teskari U shaklda ekanligini bilgan edik.

Quyidagi shaklga ega funksiyani qaraylik. Bu funksiyaning N nuqtadagi og‘ishi nolga teng, lekin funksiya bu nuqtada maksimumga ham minimumga ham erishmaydi. Ikkinchi shaklga ega funksiya ham I nuqtadagi og‘ishi nolga teng, lekin nuqta funksiyaning maksimum ham minimum ham nuqtasi emas.

Og‘ish no‘l bo‘lgan nuqta maksimum uchun yetarli shart bo‘lmasligini ko‘rsatmoqda. No‘l og‘ish bu funksiyaning “statsionar nuqta”si, ya’ni funksiya og‘ishi o‘smaydigan ham kamaymaydigan ham nuqtadir. Ba’zi statsionar nuqtalar burilish nuqtalaridir, ya’ni o‘gish musbatdan manfiyga (yoki teskarisi) o‘zgaradi, ba’zilarida esa funksiya maksimumga (minimumga) erishadi.



Nuqta funksiya maksimum yoki minimumga erishishi yoki burilish nuqtasi ekanligini bilish uchun ikkinchi tartibli shartlarni bilishimiz kerak. (birinchi tartibli shart og‘ish nol bo‘lishidir)

Ikkinchi tartibli shartlar bizga funksiya og‘ish tezligi haqida ma’lumot beradi. Agar funksiya og‘ish tezligi manfiy bo‘lsa, u holda gorizontal o‘q bo‘yicha o‘zgaruvchi o‘ssa og‘ish kamayishini anglatadi. Agar og‘ish nol og‘ish nuqtadagi ogi’shdan kichik bo‘lsa, bu funksiya og‘ishi chap nuqtalar uchun musbatligini va o‘ngroqdagi nuqtalar uchun manfiyligini anglatadi. Rasmda shu holat ifodalangan: og‘ish Y nuqtada musbat, M nuqtada nol va Z nuqtada manfiy. Demak, agar og‘ish nol bo‘lgan nuqtada og‘ish tezligi manfiy bo‘lsa, bu nuqta funksiya uchun maksimum nuqta bo‘ladi. Bu maksimum uchun ikkinchi tartibli shartdir.

Biz shu vaqtgacha teskari U shakldagi funksiya og‘sh nol bo‘lgan nuqtada maksimumga erishishini ko‘rsatdik. Endi ikkinchi tartibli shart asosida statsionar nuqta maksimum bo‘lishini qat’iy tekshiramiz.

Bu fuksiya og‘ish tezligini topishga sodda misoldir. Ma’lumki, $y = f(x)$ funksiya og‘ishini differensiallash orqali sodda hisoblash mumkin. Shuning uchun, agar biz funksiyani differensialini, ya'ni dy/dx, differensiallasak funksiya og'ishining tezligini hosil qilamiz. Bu ikkinchi tartibli hosila deb atalib, odatda d^2y/dx^2 kabi belgilanadi.

Misol. $y = 60x - 0,2x^2$ funksiyani x = 150 nuqtada ikkinchi tartibli shart asosida maksimumga erishishini ko'rsating.

Yechish. Bu funksiyaning og'ishi statsionar nuqtada nolga teng. Shuning uchun

$$\frac{dy}{dx} = 60 - 0,4x = 0 \qquad (1)$$

$$x = 150$$

Shuning uchun maksimum uchun x = 150 nuqtada birinchi tartibli shart o'rinli. Og'ish tezligini aniqlash uchun bu (1) ifodadan yana x bo'yicha hosila olamiz

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -0,4$$

Bu ikkinchi tartibli hosila barcha x larda manfiy bo'ladi. Shunday qilib, x = 150 nuqtada ikkinchi tartibli shart ham o'rinli va shuning uchun bu nuqta maksimum nuqtadir.

Yuqoridagi misolda ikkinchi tartibli hosila ishorasi statsionar nuqtadagi x ning qiymatiga bog'liq emas edi, lekin boshqa misollarda bu qiymat erkli o'zgaruvchi qiymatiga bog'liq bo'lishi mumkin.[22]

Teorema. *Agar x_0 nuqta atrofida $f(x)$ funksiya hosilaga ega va $f'(x_0) = 0$, hamda x_0 nuqtada funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi mavjud bo'lib, $f''(x_0) > 0$ $(f''(x_0) < 0)$ bo'lsa, u holda x_0 nuqtada $f(x)$ funksiya lokal minimumga (lokal maksimumga) erishadi.*

Izoh. Agar kritik nuqtada $f''(x_0) = 0$ bo'lsa, u holda bu nuqtada funksiya ekstremumga erishishi ham erishmasligi ham mumkin.

n- natural son uchun

$$f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \text{ va } f^{(n)}(x_0) \neq 0 \text{ bo'lsin.}$$

Bu holda:

a) agar n – juft son bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada $f^{(n)}(x_0) < 0$ bo'lsa maksimumga va $f^{(n)}(x_0) > 0$ bo'lsa minimumga erishadi.

b) agar n – toq son bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada ekstremumga erishmaydi.

Masalan.

1. $f(x) = -x^2 + 2x - 2\cos(x-1)$ funksiyani ekstremumga tekshirayli.

$$f'(x) = -2x + 2 + 2\sin(x-1), \quad f'(1) = 0, \quad f''(x) = -2 + 2\cos(x-1), \quad f''(1) = 0,$$

$$f'''(x) = -2\sin(x-1), \quad f'''(1) = 0, \quad f^{(4)}(x) = -2\cos(x-1), \quad f^{(4)}(1) = -2.$$

Demak, $f(x) = -x^2 + 2x - 2\cos(x-1)$ funksiya $x_0 = 1$ nuqtada maksimumga erishadi.

---

[22] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

2. $f\left(x\right)=x^2+4x-2e^{x+1}$ funksiyani ekstremumga tekshirayli.

$$f'\left(x\right)=2x+4-2e^{x+1},\quad f'\left(-1\right)=0,\quad f''\left(x\right)=2-2e^{x+1},\qquad f''\left(-1\right)=0,$$

$$f'''\left(x\right)=-2e^{x+1},\qquad f'''\left(-1\right)=-2.$$

Demak, $f\left(x\right)=x^2+4x-2e^{x+1}$ funksiya $x_0=-1$ nuqtada ekstremumga erishmaydi.

Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo‘lsa, bu oraliqda $f(x)$ funksiya o‘zining eng katta va eng kichik qiymatlariga, ya’ni global ekstremumiga erishadi. Global ekstremumga $f(x)$ funksiya oraliqning chegaraviy nuqtalarida erishish mumkinligini e’tiborga olib, ularni topish uchun quyidagi algoritmni keltiramiz:

1. $f'(x)$ hosilani topish.
2. $f(x)$ funksiyaning kritik nuqtalarini topish
3. $f(a), f(b)$ qiymatlarni aniqlash va barcha kritik nuqtalarda $f(x)$ funksiya qiymatlarini topib, bu qiymatlar orasidan eng kattasi va eng kichigini topish.

Foydani maksimiziatsiyalash

Foydani maksimallashtirish uchun MC = MR qoidani foydalanamiz.

Misol. *p=460−2q* talab funksiyasi va $TC=20+0.5q^2$ xarajat funksiyasi berilgan bo‘lsin.Foydani maksimallashtirish uchun qancha miqdorda mahsulot sotish kerak? (Xarajatlar va narxlar £ o‘lchovida.)

Yechish. Muvozanat nuqta uchun MC = MR bo‘lgani uchu MC va MR funksiyalarni aniqlash zarur. Berilgan $TC=20+0.5q^2$ uchun

$$MC=\frac{dTC}{dq}=q\ . \tag{1}$$

$$TR=pq=\left(460-2q\right)q=460q-2q^2 \tag{2}$$

bo‘lgani uchun $MR=\frac{dTR}{dq}=460-4q$.

Foydani maksimallashtirish uchun MR=MC bo‘lishi kerak. Shuning uchun, (1) va (2) munosabatlarni tenglab

$$460-4q=q,\quad 460=5q,\quad 92=q.$$

Maksimal foyda 92 qiymatda bo‘ladi

$$TR-TC=\left(460q-2q^2\right)-\left(20+0.5q^2\right)=460q-2q^2-20-0.5q^2=$$

$$=460q-2.5q^2-20=460\left(92\right)-2.5\left(8.464\right)-20=$$

$$=42.320-21.160-20=21.140$$

Misol. $p=194,4-0,2q^2$ chiziqsiz talab funksiyasi uchun *q*=18 qiymat *TR* funksiyasi uchun maksimum ekanligini ko‘rsating.

Yechish. $TR=pq=\left(194,4-0,2q^2\right)q=194,4q-0,2q^3$

Statsionar nuqtada bu kub funsiya hosilasi nolga teng bo‘lishi kera, ya’ni

$$\frac{dTR}{dq} = 194,4 - 0,6q^2 = 0$$

$$194,4 = 0,6q^2$$

$$324 = q^2$$

$$18 = q$$

q= 18 qiymatda ikkinchi tartibli hosila

$$\frac{d^2TR}{dq^2} = -1,2q = -1,2(18) = -21,6 < 0$$

Shunday qilib, maksimum uchun q=18 nuqtada ikkinchi tartibli shart bajarilmoqda va TR bu nuqtada maksimumga erishadi.(Bu misolda ikkinchi tartibli hosila $-1,2q < 0$ q qiymatning musbatlarida o‘rinlidir.)

Misol. $TC = 18q$ umumiy xarajat funksiyasiga va $TR = 240 + 14q$ umumiy foyda funksiyasiga ega firma uchun foydani maksimallashtiruvchi ishlab chiqarish hajmi mavjud emasligini ko‘rsating.

Yechish. Foyda funksiyasi quyidagicha aniqlahnadi

$$\pi = TR - TC$$

$$= 240 + 14q - 18q =$$

$$= 240 - 4q$$

Uning q ga nisbatan o‘zgarishi esa $\frac{d\pi}{dq} = -4$

Korinib turibdiki, bu yerda birinchi shart bajarilmayapti va demak statsionar nuqta mavjud emas. Shuning uchun foydani maksimallaovchi ishlab chiqarish hajmini aniqlab bo‘lmaydi.[23]

[23] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

5- mashg'ulot

5.5.1. Funksiya qavariqligi va botiqligi
5.5.2. Funksiyaning egilish nuqtalari
5.5.3. Ekstremum topish qoidalari
5.5.4. Bir o'zgaruvchili funksiya differensial hisobning iqtisodiyotdagi tadbiqlari

Tayanch iboralar: *hosila,o'sish,kamayishekstremal nuqtalar*

5.5.1. Funksiya qavariqligi va botiqligi

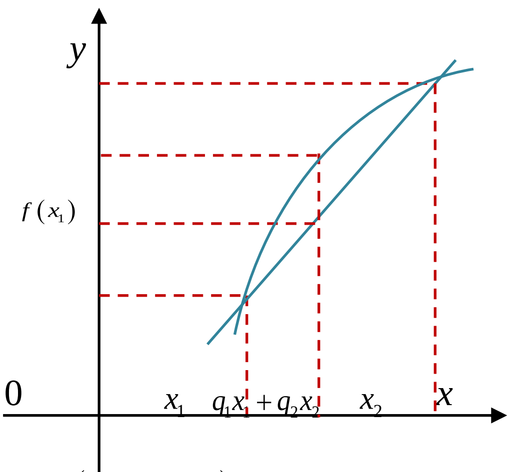
Ta'rif. *Agar (a,b) intervaldan olingan istalgan x_1 va x_2 lar va $q_1+q_2=1$ munosabatni qanoatlantiruvchi istalgan $q_1\ge 0$ va $q_2\ge 0$ sonlar uchun*

$$f\left(q_1x_1+q_2x_2\right)\ge q_1f(x_1)+q_2f(x_2)$$

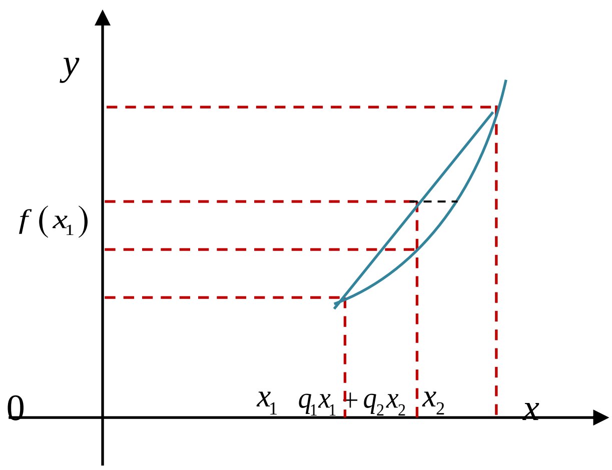
$$\left(f\left(q_1x_1+q_2x_2\right)\le q_1f(x_1)+q_2f(x_2)\right)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda qavariq (botiq) deyiladi.

Bu ta'rifning geometrik ma'nosi shundan iboratki, agar funksiya (a,b) oraliqda qavariq (botiq) bo'lsa, (a,b) oraliqdan olingan istalgan x_1 va x_2 lar uchun grafikning $(x_1;f(x_1))$ va $(x_2;f(x_2))$ nuqtalarini tutashtiruvchi kesma funksiya grafigidan ordinatalar o'qining yo'nalishiga nisbatan quyida (yuqorida) yotadi.



$$f\left(q_1x_1+q_2x_2\right)\ge q_1f(x_1)+q_2f(x_2)$$



$$f\left(q_1x_1+q_2x_2\right)\le q_1f(x_1)+q_2f(x_2)$$

Teorema. *(a,b) intervalda hosilaga ega bo'lgan $f(x)$ funksiya, bu oraliqda qavariq (botiq) bo'lishi uchun, uning $f'(x)$ hosilasi (a,b) intervalda kamayuvchi (o'suvchi) bo'lishi zarur va yetarlidir.*

***Teorema**. Agar $f(x)$ funksiyaning (a,b) intervalda ikkinchi tartibli hosilasi mavjud bo'lib, bu intervalda $f''(x)<0\left(f''(x)>0\right)$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda qavariq (botiq) bo'ladi.*

5.5.2. Funksiyaning egilish nuqtalari

***Ta'rif**. Agar x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning botiqlik va qavariqlik intervallarini ajratib turuvchi chegaraviy nuqta bo'lsa, u holda x_0 nuqta atrofida berilgan $f(x)$ funksiya uchun bu nuqta egilish nuqtasi deyiladi.*

***Teorema.** (Egilish nuqtasining zaruriy sharti). Ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lgan $f(x)$ funksiya uchun x_0 nuqta egilish nuqtasi bo'lsa, u holda $f''(x_0)=0$.*

***Teorema**. (Egilish nuqtasining yetarli sharti). Agar ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lgan $f(x)$ funksiya uchun $f''(x)$ hosila x_0 nuqta atrofida o'z ishorasini o'zgartirsa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning egilish nuqtasi bo'ladi.*

5.5.3. Ekstremum topish qoidalari

Berilgan $f(x)$ funksiyaning qavariqligi,botiqlik oraliqlarini va egilish nuqtalarini topish algoritm:

1. $f''(x)$ hosilani topish;
2. $f''(x)=0$ tenglamani yechish va $f''(x)$ hosila mavjud bo'lmagan nuqtalarni topish.
3. $f'(x)$ ning kritik nuqtalari atrofida $f''(x)$ hosilaning ishoralarini aniqlash. $f''(x)>0$ va $f''(x)<0$ tengsizliklarni yechish lozim.
4. Egilish nuqtalarida funksiya qiymatini hisoblash.

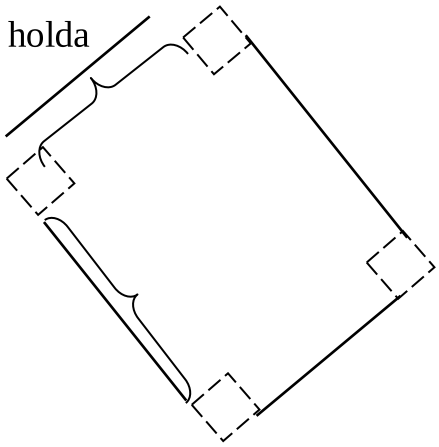
Funksiyani tekshirish quyidagi algoritm bo'yicha amalga oshirsa bo'ladi.

1. $y=f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasini, imkon bo'lsa o'zgarish sohasini ham topish.
2. Funksiyani juftlik, toqlik va davriylikka tekshirish.
3. $f(x)=0$ tenglama, $f(x)>0$ va $f(x)<0$ tengsizliklarni yechish, ya'ni funksiya nollarini, musbatlik va manfiylik intervallarini topish.
4. Funksiyani uzluksizlikka tekshirish.
5. Funksiyaning vertikal va og'ma asimptotalarini topish.
6. $f'(x)$ hosilani topish, hosila mavjud bo'lmagan nuqtalarni aniqlash, $f'(x)=0$ tenglama va $f'(x)>0, f'(x)<0$ tengsizliklarni yechish, ya'ni funksiyaning kritik nuqtalarini, o'sish va kamayish oraliqlarini topish. Funksiya ekstremumlarini topish.
7. $f''(x)$ hosilani topib, $f''(x)$mavjud bo'lmagan nuqtalarni aniqlash, $f''(x)=0$ tenglama va $f''(x)>0$, $f''(x)<0$ tengsizliklarni yechish, ya'ni funksiyaning qavariqlik, botiqlik oraliqlari va egilish nuqtalarini topish.
8. Funksiya grafigiga aniqliklar kirituvchi ayrim nuqtalarni topish.

5.5.4. Bir o'zgaruvchili funksiya differensial hisobning iqtisodiyotdagi tadbiqlari
Ekstremumga doir masala

1.To'g'ri to'rtburchak shaklidagi $2{,}4\times1{,}5m^2$ kartondan qopqoqsiz quti yasash talab qilinadi. Kartonning to'rttala burchagidan tomoni qanday bo'lgan kvadrat kesib olinganda, yasalgan qutining hajmi maksimal bo'ladi.

Yechish. tomoni *x* m bo'lgan kvadrat qirqib olinsin. U holda kvadratning tomonlari uzunliklari 2,4-2*x* va 1,5-2*x* m dan bo'lib qoladi. Hosil qilingan to'g'ri burchakli paralelopiped uchun *h* = *x*, asosining tomonlari 2,4-2*x* va 1,5-2*x* m bo'ladi. Demak hosil qilingan qutining hajmi *V* (*x*)= *x*(2,4-2*x*)(1,5-2*x*) bo'lib bu funksiyaning maksimum qiymatini topamiz.



V (*x*)= *x*(2,4-2*x*)(1,5-2*x*) = $4x^3-7{,}8x^2+3{,}6x$. $V'(x)=12x^2-15{,}6x+3{,}6$, *V*(*x*) maksimumini $V'(x)=0$ tenglamani yechib, $V(x_0)$ qiymatlarning eng kattasi olinadi.
$12x^2-15{,}6x+3{,}6=0\Rightarrow x_1=1,\ x_2=0{,}3$. $x_1=1$ bo'lganda *V*(*x*) funksiyaning qiymati manfiy bo'ladi,(hajm manfiy son bo'lmaydi) demak qirqib olingan kvadrat tomoni *x* = 0,3 m .

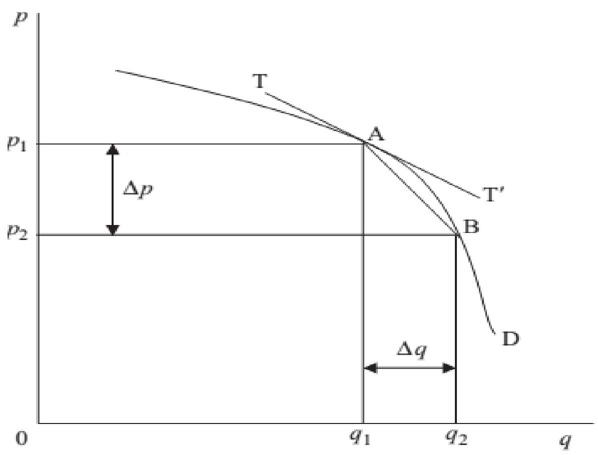
2.Agar erta pishar kartoshka terimini avgustning boshida boshlansa, u holda har bir sotihdan 200 kg dan hosil olish mumkin va har bir kilogrami 12 p/b. dan sotiladi. Terimni bir haftaga kechiktirish har sotihdan 50 kg dan hosildorlikni oshiradi, lekin narx har hafta 2 p/b. ga arzonlashadi. Agar terim muddati 5 hafta bo'lsa, kartoshkani sotishdan olinadigan foyda eng ko'p bo'lishi uchun hosilni qaysi haftada yig'ib olish kerak.

Yechish. Hosilni *t* – haftada yig'ib olganda foyda eng ko'p bo'lsin($1\le t\le5$). U holda shu haftada kartoshkani bir kilogramining narxi
12-2(*t*-1) = 14-2*t* p/b. bo'ladi. Hosildorlik esa har gektaridan 200+50(*t*-1) = 150+50*t* kg dan bo'ladi. Bir gektar hosilni umumiy foyda tenglamasini tuzib olamiz: $\pi(t)=(200+50(t-1))(12-2(t-1))=100(3+t)(7-t)=100(21+4t-t^2)$. Demak umumiy foyda eng ko'p bo'lishi uchun $\pi(t)=100(21+4t-t^2)$funksiya maksimum qiymatini topish kerak. Buning uchun esa $\pi'(t)=0$tenglamani yechib, aniqlangan *t* sonini umumiy foyda tenglamsiga qo'ysak har bir gektar yerdan olinadigan *max* daromad kelib chiqadi. $\pi'(t)=0\Rightarrow 4-2t=0,\ t_0=2.$Demak $\pi(2)=100(21+8-4)=2500$mavsum davomida bir gektar yerdan olinshi mumkin bo'lgan eng ko'p daromad. Shunday qilib hosilni ikkinchi haftada yig'ib olish kerak ekan.

Talabning nuqtaviy elastikligi (egiluvchanligi)

Talabning narxga nisbatan elastikligi quyidagicha aniqlanadi:

$$e=(-1)\frac{miqdorning\ \ foiz\ o'zgarishi}{narxning\ \ foiz\ o'zgarishi}$$



Chizmadan ko‘rinib turibdiki, D grafik bo‘yicha A va B nuqtalar orasidagi narx va miqdor o‘zgarishida qaralsa, sizda tabiiy “foiz hisobidagi miqdor o‘zgarishi nimaga teng?” savol tug‘iladi. Albatta, Δq miqdorning bir oz ko‘proq foizda o‘zgarishi q_1 miqdorning q_2 ga nisbatan ko‘proq o‘zgarishini anglatadi. Elastiklik yoyi “o‘rtacha” taqribiy elastiklik o‘lchovini aniqlashiga qaramqasdan, aniq elastiklik o‘lchovining qiymati talab grafigi bo‘yicha olingan nuqtadagi qiymati orqali aniqlanadi. Chiziqli grafik bo‘lgan holda nuqtaviy elestiklik sodda hisoblanadi. Chiziqsiz bo‘lgan holdagi nuqtaviy elestiklikni o‘rganamiz.

D chiziq bo‘yicha B dan A gacha harakat juda kichik bo‘lsa (masofa yetarlicha kichik bo‘lsa), u holda $p_1 = p_2 = p$ va $q_1 = q_2 = q$ deb taxmin qila olamiz va shuning uchun

$$e = (-1)\frac{\Delta q / q}{\Delta p / p} = (-1)\frac{p}{q}\frac{1}{\Delta p / \Delta q}$$

bo‘ladi, deyish mumkin.

B A ga qancha yaqin bo‘lsa, AB og‘ish to‘g‘ri chizig‘iga ega $\frac{\Delta p}{\Delta q}$ miqdor A nuqtadagi TT' urinma og‘ish burchagiga yetarlicha yaqin bo‘ladi. (Bu misoldagi narxning kamayishida, Δp manfiy, manfiy og‘ish qiymatlar mos kelishiga e’tibor berig.) Demak, A ga yetarli yaqin qiymatlarda D chiziq bo‘yicha A nuqtadagi $\frac{\Delta p}{\Delta q} = \frac{dp}{dq} =$ og‘sh

Shunday qilib, bu natijani yuqoridagi (1) ga qoyib, talabning nuqtaviy elastikligi formulasini hosil qilamioz $e = (-1)\frac{p}{q}\frac{1}{dp / dq}$

Misol. Narx talab funktsiyasi uchun 12 bo‘lsa, elastiklik nuqta nimaga teng? $p = 60 - 3q$.

Yechish. $\frac{dp}{dq} = -3$. $p = 60 - 3q$ berilga , u holda $3q = 60 - p$, $q = \frac{60 - p}{3}$.

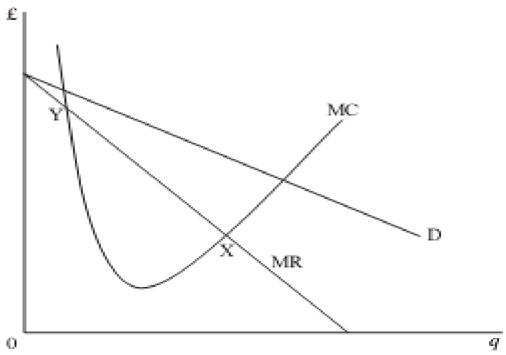
Agar $p = 12$, u holda $q = \frac{60 - 12}{3} = \frac{48}{3} = 16$

Shuning uchun[24], $e=(-1)\frac{p}{q}\frac{1}{dp/dq}=(-1)\frac{12}{16}\times\frac{1}{-3}=0.25$.

Foydani maksimallashtirish

Foyda funksiyasini maksimallashtirish iqtisodiy masalalarning keng tarqalgan optimizatsiya masalalaridan bo‘lib, bu bo‘limda biz ikkinchi shart asosida foyda funksiyasini maksimallashtirishni mukammal o‘rganamiz va u *MC* va *MR* funksiyalarining kesishish nuqtalariga bog‘liqligini ko‘ramiz.

Foydaning maksimumga erishishining birinchi qoidasi bu $MC=MR$. Lekin, $MC=MR$ bo‘ladigan ikki X va Y nuqta mavjud. Faqat X nuqta foyda maksimizatsiyasi uchun ikkinchi shartni qanoatlantiradi, chunki bu yerda *MC MR* ni quyidan kesmoqda.



Misol. $TC=4+97q-8{,}5q^2+1/3q^3$ umumiy xarajat funksiyasi va $TR=58q-0{,}5q^2$ to‘la foyda funksiyasi bo‘yicha foyda maksimumga erishadigan ishlab chiqarish hajmni toping.

Yechish. Dastlab, *MC* va *MR* funksiyalarini

$$MC=\frac{dTC}{dq}=97-17q+q^2 \qquad (1)$$

$$MR=\frac{dTC}{dq}=58-q \qquad (2)$$

va ular kesishadigan nuqtani aniqlaymiz. MC = MR da ular kesishadi.

$$97-17q+q^2=58-q,\ 39-16q+q^2=0 \qquad (3)$$

$$(3-q)(13-q)=0$$

Demak, $q=3$ yoki $q=13$.

Bu ikki ishlab chiqarishda, *MC* va *MR* grafiklar kesishgan nuqtada, maksimizatsiyaning ikkinchi sharti bajariladimi? Bu savolga javob berish uchun, daromad funksiyasini aniqlaymiz va uni maksimumini topamiz. Demak, daromad

$$\pi=TR-TC=58q-0{,}5q^2-\left(4+97q-8{,}5q^2+1/3q^3\right)=$$

$$=58q-0{,}5q^2-4-97q+8{,}5q^2-1/3q^3=$$

$$=-39q+8q^2-4-1/3q^3$$

Differensiallab va nolga tenglab

[24] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

$$\frac{d\pi}{dq} = -39 + 16q - q^2 = 0 \qquad (4)$$

$$0 = 39 - 16q + q^2 \qquad (5)$$

(5) va (3) tenglamalar yechishga ega emas, demak, ikkita $q=3$ yoki $q=13$ yechishlar bor. Shunga qaramasdan, ikkinchi shart yordamida tekshiramiz.

(4) dan ikkinchi hosila hisoblab $\frac{d^2\pi}{dq^2} = 16 - 2q$

$q=3$ bo‘lsa, $d^2\pi / dq^2 = 16 - 6 = 10$ va π minimumga erishadi.

$q=13$ bo‘lsa, $d^2\pi / dq^2 = 16 - 26 = -10$ va π maximumga erishadi.

Shuning uchun *MR* va *MC* chiziqlarining faqat bitta kesishish nuqtasi maksimumga erishishning ikkinchi shartini qanoatlantiradi. Bu *MC MR* ni quyidan kesgan nuqtadir. Bu tasdiqni quyidagicha isbotlaylik:

(1) ni differensiallab $og'ish \quad MC = \frac{dMC}{dq} = -17 + 2q$

(2) ni differensiallab $og'ish \quad MR = \frac{dMR}{dq} = -1$

$q=3$ da *MC* og‘ishi $-17 + 2(3) = -17 + 6 = -11 < -1$ (ya’ni, MR manfiy qiya og‘adi).

$q=13$ da MC og‘ishi $-17 + 2(3) = 9$ (ya’ni, MR musbat og‘adi).

Shuning uchun $q=3$ da *MC* *MR* ga nisbatan mafigi qiya og‘ishga ega bolib, uni yuqoridan kesadi. $q=13$ da MC musbat og‘ishga ega bolib, MR ni quyidan kesadi.[25]

Zahiralarni boshqarish

Tadbiqlarda funksiya maksimumi yoki minimumini topishda og‘ishi nol bo‘lgan nuqtada ikkikchi shartlar albatta qo‘llanilishi kerakligini tushuntiramiz. Tahlilning bu tadbiqlari firma uchun buyurma hajmi optimallashtirish va saqlash xarajatlarini minimallashtirish uchun zarur hisoblanadi. Ishlab chiqarish kompaniyasi komponentalar narxidan tashqari xarajatlarni ham hisobga olishi kerak. Bu xarajatlarga

(a) Qaytma xarajatlar:har bir buyurma o‘zida ishga xarajatni, yetqazib berish xarajatini, tushurish va h.k kabi xarajarlarni mujassamlashtiradi.

(b) saqlashga xarajatlar: qancha ko‘p mahsulot bo‘lsa shuncha ko‘p joy kerak. Shuningdek firma kapitalining alternative qiymati ham mavjud.

Agar firma bi nechta katta buyurtma bersa, saqlash xarajatlari katta bo‘ladi, ikkinchi tomondan agar ko‘p mayda buyurtma bersa buyurtma xarajatlari katta bo‘ladi. u holda optimal hajmdagi buyurtma miqdorini qanday aniqlash mumkin?

Yil davomida (Q) komponentaga bo‘lgan talab teng taqsimlangan bo‘lsin. Har bir yangi buyurma miqdori bir xil *q* bo‘lib, zahiradagi mahsulotlar keying partiya buyurma kelgunicha to‘la tarqatilsin. Har bir buyurmaga xarajatlar doimiy *F* va bir birlik mahsulot saqlash xarajatlari *S* bo‘lsin. Agar *q* hajmdagi buyurtma bir xil tezlikda kamaysa, u holda o‘rtacha buyurtma miqdor *q/2* bo‘ladi. (bu hol 9.5 rasmda

[25] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

ko‘rsatilgan bo‘lib, T buyurtmalar orasidagi interval.) Shunday qilib, butun yil davomidagi umumiy saqlash uchun xarajatlar *(q/2)S* bo‘ladi.

Yil davomidagi buyurtmalar soni *Q/q* bo‘ladi. demak, yil davomidagi umumiy xarajatlar *(Q/q)F* bo‘ladi.

Firma umumiy xarajatlari hajmi plyus saqlash xarajatlari minimum bo‘ladigan TC buyurtma mahsulot hajmini aniqlashidan manfaatdordir.

Matematik nuqtai nazardan, bu q ning shunday miqdorini aniqlash zarurki, bunda

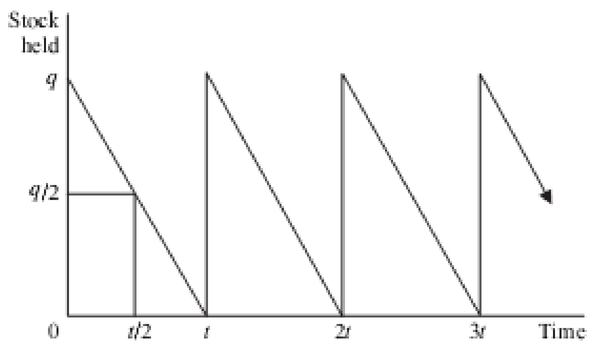
$$TC = \left(\frac{Q}{q}\right)F + \left(\frac{q}{2}\right)S$$

funksiya minimumga erishishini anglatadi, bu yerda Q, F va S berilgan sonlar. Bu ifodani q bo‘yicha differensiallab quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{dTC}{dq} = \frac{-QF}{q^2} + \frac{S}{2} \qquad (1)$$

Statsionar nuqtani topish uchun

$$0 = -\frac{QF}{q^2} + \frac{S}{2}, \quad \frac{QF}{q^2} = \frac{S}{2}, \quad \frac{2QF}{S} = q^2$$



Shuning uchun buyurtmaning optimal miqdori quyidagicha bo‘ladi:

$$q = \sqrt{\frac{2QF}{S}} \qquad (2)$$

Demak, q miqdor Q umumiy yillik talab va F va S berilganlarning kvadrat ildiziga teng ekan.

Ikkinchi tartibli shartlar asosida bu buyurtma miqdori minimal ekanligini tekshirish zarur. Agar (1) ni quyidagicha yozsak,

$$\frac{dTC}{dq} = -QFq^{-2} + \frac{S}{2}$$

u holda

$$\frac{d^2TC}{dq^2} = 2QFq^{-3} > 0$$

Bu yerda Q, F va q musbat sonlar.

Shuning uchun, birinchi shartni bajaruvchi har qanday (2) ko‘rinishdagi q musbat son uchun minimum uchun ikkinchi shart ham bajarilishi zarur.

Misol. Firma yil davomida bit xil talab bilan 200 000 birlik mahsulotdan foydalanmoqda. Har bir birlik qo‘shimcha mahsulot uchun narxga £80 miqdor qo‘shiladi. Bir birlik mahsulotning bir yil davomida saqlanishi uchun £8 miqdorda sarf talab qilinadi. Buyurtmaning optimal qiymati qanday?

Yechish. Optimal miqdor qiymati q bo‘lganda o‘rtacha zahira miqdor $q/2$ bo‘ladi. Bunda buyurtmalar soni

$$\frac{Q}{q}=\frac{200.000}{q}$$

Har bir buyurtma £80 narxda amalga oshirilgani va har bir birlik mahsulotni saqlashga £8 xarajat qilinayotgani uchun

TC = buyurtma + zahira-saqlash narxlari=

$$=\frac{200,000(80)}{q}+\frac{8q}{2}=16,000,000q^{-1}+4q$$

Statsionar nuqtada

$$\frac{dTC}{dq}=-16.000.000q^{-2}+4=0, \qquad 4=\frac{16.000.000}{4}=4.000.000$$

$$q^2=\frac{16.000.000}{4}=4.000.000, \qquad q=\sqrt{(4.000.000)}=2.000$$

Bu statsionar nuqtada minimumning ikkinchi shartlari bajariladi, ya’ni barcha $q>0$ uchun

$$\frac{d^2}{dq^2}32,000,000q^{-3}>0.$$

Shuning uchun buyurtmaning optimal miqdori 2000 birlikni tashkil etadi. Bu qiymatni oldin topilgan (2) formula bilan ham topishimiz mumkin.[26]

$$q=\sqrt{\frac{2QF}{8}}=\sqrt{\frac{2\times 200.000\times 80}{8}}=2.000.$$

Keyns multiplikatori

Eng oddiy Keynes makroiqtisodiy modeli, davlat sektori ishtirok etmaganda va tashqi savdo o‘rnatilmagan holda,

$$Y=C+I \qquad (1)$$

$$C=a+bY \qquad (2)$$

deb qabul qilinadi, bu yerda Y milliy daromad, C iste’mol va I investitsiya, shartli belgilangan, a va b parametrlar.

Milliy daromad o‘sishi bilan iste’molga bo‘lgan tezlikning o‘zgarishi iste’molga bo‘lgan chegaraviy moyillik *MPC* (MPC- The marginal propensity to consume) bo‘lib, uning qiymati $\frac{dC}{dY}=b$ ga teng. Investitsiyaga bo‘lgan chegaraviy moyillik esa $\frac{dY}{dI}$ orqali aniqlanadi.

(2) ni (1) ga qo‘yib

$$Y=a+bY+I \quad ,Y(1-b)=a+I \quad , \quad Y=\frac{a+I}{1-b}=\frac{a}{1-b}+\frac{I}{1-b}$$

[26] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

Shu sababli multiplikator uchun formula quyidagicha bo‘ladi

$$\frac{dY}{dI}=\frac{1}{1-b}$$

Bu ko‘paytuvchidan berilgan darajadagi milliy daromadga erishish uchun zarur invistitsiya miqdorini qanchaga oshirish kerakligini hisoblashda foydalanish mumkin.

Misol. Asosiy Keynes makroiqtisodiy modelida $Y=C+I$ deb faraz qilib, bu yerda $I=250$ va $C=0.75Y$. Y uchum muvozanat darajasi nimaga teng? Y ni 1200 ga oshirish uchun I miqdorni qancha miqdorga oshirish zarur?

Yechish. $Y=C+I=0.75Y+250, \quad 0.25Y=250, \quad Y=1000.$

Y uchun muvozanat darajasi Y=1000.

I ning har qanday o‘zgarishiga mos Y o‘zgarishi

$$\Delta Y = K\Delta I \qquad (1)$$

formula orqali hisoblanadi, bu yerda K multiplikator. Ma’lumki, $K=\dfrac{1}{1-MPC}$

Bu masalada $MPC=dC/dY=0.75$. Shuning uchun

$$K=\frac{1}{1-0.75}=\frac{1}{0.25}=4 \qquad (2)$$

Y talab o‘zgarishi esa $\Delta Y=1.200-1.000=200$ (3)

Shuning uchun, (2) va (3) ni (1) ga qo‘yib $200=4\Delta I, \quad \Delta I=50$

Bu esa izlanayotgan I investitsiyani oshirish zarur bo‘lgan miqdordir. [27]

Nazorat savollari

1. *Funksiya differentsialining ta'rifini ayting.*
2. *Differentsial hisobning asosiy teoremalarini ayting.*
3. *Teylor formulasini yozing.*
4. *Funksiya ekstremumini topish shartlarini ayting.*
5. *11. Funksiyani to’la tekshiring va grafigini chizing.* $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-4x+3}$.
6. *12. Funksiyani to’la tekshiring va grafigini chizing.* $y=\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2$
7. *13. Funksiyani to’la tekshiring va grafigini chizing.* $y=\dfrac{1+3x}{1-x^2}$.

[27] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

6-MAVZU. KO‘P O‘ZGARUVCHILI FUNKSIYALAR DIFFERENSIAL HISOBI

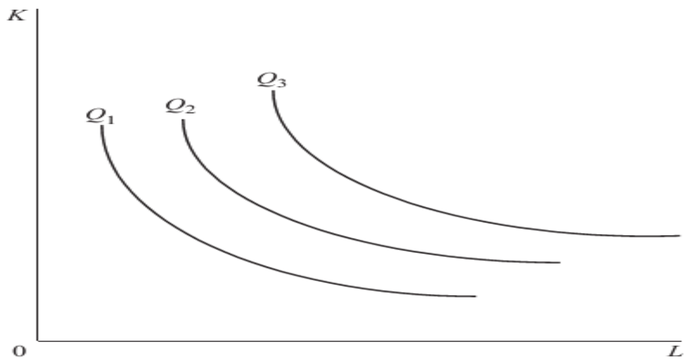
1-mashg’ulot

6.1.1. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar. Karrali va takroriy limitlar
6.1.2. Xususiy hosilalar
6.1.3. To’la differensial

Tayanch iboralar: *limit,hususiy argument ortirmasi,funktsiya orttirmasi.*

6.1.1. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar. Karrali va takroriy limitlar

Ikki o‘lchovli tekislikda bittadan ortiq oz’garuvchili funksiyani tasvirlay olmaymiz, chunki bunga ikki o‘qdan ko‘progi kerak (ikkita erkli o‘zgaruvchi va bitta ularga bog‘liq o‘zgaruvchi). Lekin iqtisodiyotda bizga ikki va undan ko‘p o‘zgaruvchilardan foydalaniladi. Agar erkli o‘zgaruvchilar birdan ortiq bo‘lsa, ularni tasvirlash ham murakkab (matematik analizdan foydalanish kerak). Lekin ikki o‘zgaruvchili bo‘lsa ‘kontur chiziq’lardan foydalanib tasvirlasa bo‘ladi.
$Q = f(K,L)$ ishlab chiqarish funksiyasini qaraymiz.



1 -jadval

K	L	$K^{0.5}$	$L^{0.5}$	Q
64	4	8	2	320
16	16	4	4	320
4	64	2	8	320
256	1	16	1	320
1	256	1	16	320

Faraz qilaylik, Q funksiya K va L ga bog‘liq bo‘lsin. Iqtisodiyotda maxsulot ishlab chiqarishning ‘o‘sishi’ geografiya fanidagi kontur chiziqlardan foydalanish orqali tasvirlanadi. Kartada baland cho'qqilar to'q kontur chiziqlar bilan tasvirlangan. Ishlab chiqarish nazariyasida kontur chiziq bu Q bir xil qiymat qabul qiladigan turli K va L larni birlashtiruvchi chiziq. Bu chiziq Natijaviy foydalanilganda 'izokvanta' chizig'i deyiladi. 4.18 - rasmda 'izokvanta kartasi' tasvirlangan. Izokvantalar xom ashyo ishlab chiqarishiga bog'liq. Izokvantalar bir biridan uzoq bo'lsa, ishlab chiqarish rivojlanish sekinlashadi va izokvantalar bir biriga yaqin bo'lsa rivojlanish tezlashadi. Izokvantani joylashishini ishlab chiqarish funksiasidan bilsa bo'ladi. Ba'zi masalalarda faqat grafik orqali ham aniqlasa bo'ladi. K va L ning kombinasiyasida Q funksiyaning qiymati 320 bo'lsia, ishlab chiqarish funksiyasi $Q=20K^{0,5}L^{0,5}$ 4.7-jadvalda ko'rsatilgan. Hususiy holda simmetrik chiziq "To'g'ri burchakli giperbola" xosil bo'ladi. Izokvantani shaklini aniqlashning eng oson yoli ikki o'zgaruvchili funksiyaga almashtirishdir.

Misol. Ishlab chiqarish funktsiyasi $Q=20K^{0,5}L^{0,5}$ uchun $Q=100$ da ikki o'zgaruvchili funksiya $K=f(L)$ izokvantini aniqlang?

Yechish. $20K^{0,5}L^{0,5}=Q=100$ shunday qilib $K^{0,5}L^{0,5}=5$ $K^{0,5}=\frac{5}{L^{0,5}}$ har ikki tomonni kvadratga ko'tarib izlanayotgan funksiyani topamiz $K=\frac{25}{L}=25L^{-1}$

Bo'lim 4.7 dan bilamiz K ning qiymati nolga yaqinlashganda L ning qiymati o'sadi va funksiya qavariq ko'rinishda bo'lib, egri chiziqni beradi.

Misol. Ishlab chiqarish funksiyasi uchun $20K^{0,5}L^{0,5}=Q=100$ ikki o'zgaruvchili $K=f(L)$ ko'rinishdagi funksiyani xosil qiling . Mos ishlab chiqarish 54 birlikkaga teng.

Yechish.

$$Q=54=4,5K^{0,4}L^{0,7}$$

$$12=K^{0,4}L^{0,7}$$

$$12L^{-0,7}=K^{0,4}$$

Ikkala tomonini 4.5- darajaga oshirib

$$12^{2,5}L^{-1,75}=K$$

$$K=498,83L^{-1,75}$$

Bu funksiy xam koordinata boshiga qavariq egri chiziqni beradi. $L^{-1,75}$ bo'lgani uchun L o'sgan sari K nolga yaqinlashadi.[28]

Kobb - Duglas ishlab chiqarish funktsiyasi

Bu bo'limda ishlab chiqarish funksiyalari berilgan. Bu "Kobb-Duglas" funksiyalari deyiladi. Ikkita xom-ashyo K va L da ishlab chiqarish funksiyasi

$$Q=AK^{\alpha}L^{\beta}$$

[28] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

bu yerda A, α va β - parametrlar. (α –yunoncha harf " alfa ", β- «Beta» deyiladi). Ko‘p yillar oldin, ikki iqtisodchilar Cobb va Duglas bu ko‘rinishdagi funksiyani aniqlashgan . Berilgan statistik ma’lumotlarga qarab Ishlab chiqarish va xom ashyo orasidagi bog‘lanish o‘rnatishgan. Iqtisodchilar ishlab chiqarish funksiyalarini yanada murakkab turlarini ishlab chiqgan bo‘lsalar-da, Cobb – Duglas funksiyasi bu asosiy ishlab chiqarish funktsiyasi bo‘lib, talablar, narxlar, ishlab chiqariash darajasi, iste’mol bilan kompaniyaning munosabatlarni tekshirishda boshlang‘ich nuqta hisoblanadi .

Cobb - Duglas ishlab chiqarish funktsiyasi matematikaning bir jinsli funktsiyalari turkumiga kiradi. Umuman olganda, funksiya m darajali bir jinsli funksiya deyiladi, agar $y = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ da $y\lambda^m = f\left(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n\right)$ bo‘lsa, λ musbat son (λ – unon harfi " lyambda " dir). Birinchi tartibli bir jinsli ishlab chiqarish funksiyasi sifatida $Q = 20K^{0,5}L^{0,5}$ ni olishimiz mumkin.

Cobb - Duglas funksiyasi ishlab chiqarish darajasi va xarajatlarning darajasi o‘rtasidagi mavjud munosabatlarni aniqlaydi .

Faraz qilaylik, iste’molning dastlabki hajmlari K_1 va L_1 bo‘lsin , u holda ishlab chiqarish darajasi $Q = 20K_1^{0,5}L_1^{0,5}$ bo‘ladi.

Agar hajmlar ikki barobar ko‘paysa (ya’ni , λ = 2) , yangi hajm quydagiga teng

$$K_2 = 2K_1\ ,\ L_2 = 2L_1$$

va bu ishlab chiqarishning yangi darajasini beradi

$$Q_2 = 20K_2^{0,5}L_2^{0,5} \qquad (1)$$

Buni boshlang‘ich ishlab chiqarish darajasi bilan solishtirish mumkin , K_2 ning o‘rniga $2K_1$ va L_2 ning o‘rniga $2L_1$ qo‘iyb solishtirsak

$$Q_2 = 20\left(2K_1\right)^{0,5}\left(2L_1\right)^{0,5} = 20\left(2^{0,5}K_1^{0,5}2^{0,5}L_1^{0,5}\right) = 2Q_1$$

Binobarin, iste’mol ikkilanganda ishlab chiqarish ikki barobarga ko‘payadi , shuning uchun bu ishlab chiqarish funktsiyasi xarajatlarini doimiy bog‘liqligini ko‘rsatadi.

Cobb - Duglas ishlab chiqarish funktsiyasi indeks darajasi o‘zgaruvchilar xarajatlari bilan oson aniqlanadi. Buni ikki xarajatlar funktsiyalari uchun ko‘rsatish mumkin

$$Q_2 = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

Agar biz xarajatlarni boshlang‘ich miqdorini K_1 va L_1 deb belgilasak, unda $Q_1 = AK_1^{\alpha}L_1^{\beta}$.

Agar barcha xarajatlarni o‘zgarmas λ ga ko‘paytirsak, yangi miqdorlar

$K_2 = \lambda K_1$ va $L_2 = \lambda L_1$

bo‘ladi.

U holda yangi ishlab chiqarish darajasi

$$Q_2 = AK_2^{\alpha}L_2^{\beta} = A(\lambda K_1)^{\alpha}(\lambda L_1)^{\beta} = \lambda^{\alpha+\beta}AK_1^{\alpha}L_1^{\beta} = \lambda^{\alpha+\beta}Q_1$$

λ, α va β –musbat sonlar , bu natija bizga α va β va uch toifa xarajatlari orasidagi o‘zaro bog‘liqlikni ko‘rsatadi.

1. Agar α + β = 1 bo‘lsa $\lambda^{\alpha+\beta} = \lambda$ shuning uchun $Q_2 = \lambda Q_1$, yani masshtab kattaligiga nisbatan o‘zgarmas.

2. Agar α + β > 1 bo‘lsa $\lambda^{\alpha+\beta} > \lambda$, shuning uchun $Q_2 > \lambda Q_1$ va masshtab kattaligiga nisbatan o‘suvchi.

3. Agar α + β < 1 bo‘lsa $\lambda^{\alpha+\beta} < \lambda$ bo‘lsa $Q_2 < \lambda Q_1$ va masshtab kattaligiga nisbatan kamayuvchi .

Misol. Quydagi ishlab chiqarish funksiyasi qaysi turdagi bog‘liqlikni aniqlaydi $Q = 45K^{0,4}L^{0,4}$?

Yechish. Indekslarni qo‘shsak 0,4 + 0,4 = 0,8. Shunday qilib daraja 1 dan kam, shuning uchun kamayuvchi bog‘liqlik.

Cobb-Duglas ishlab chiqarish funksiyasi parametrlarini baxolash uchun bu funksiyani logarifmlash kerak . Standard chiziqli regresiyon tahlil qilish usuli (buni siz statistika modulida o‘qishingiz kerak bo‘lgan) berilgan p va q lar yordamidaa chiziqli funksiya $p = a + bq$ ning a va b parametrlarini baholashda yordam beradi.

Agar funksiya chiziqli bo‘lmasa, chiziqli ko‘rinishga olib kelish uchun ifodani logarifmlab, parametrlarni baxolashda chiziqli regressiya tahlilidan foydalanamiz.

Misol uchun, Cobb-Duglas ishlab chiqarish funksiyasi $Q = AK^aL^b$ ni logariflab

$$\log Q = \log A + a\log K + b\log L$$

ko‘rinishga olib kelamiz.

Iqtisodiyot kursida byudjet cheklashlar , ishlab chiqarish funksiyalari va izokvant kartasidan foydalanib, kompaniya uchun eng ma’qul usullarni topamiz. Bu tushunchalarga 8 va 11 bo‘limda qaytamiz. Optimal masalalarni xisoblashda matematik yechimlardan foydalanamiz.[29]

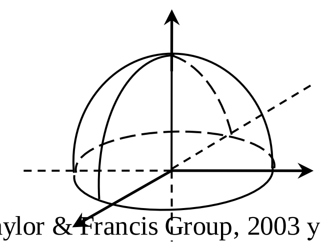
$X = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots x_n \in A_n\}$, $A_i \subset R$, $i = \overline{1,n}$ va $Y \subset R$ to‘plamlar berilgan bo‘lsin.

Ta'rif. *Agar biror f - qoida va qonunga ko‘ra* X *to‘plamning har bir* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *elementiga Y to‘plamning aniq bir* y *qiymati mos qo‘yilsa, ko‘p o‘zgaruvchili (n-o‘zgaruvchili)* $y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ *funksiya berilgan deyiladi.*

Masalan, $f(x, y) = x^2 + y^2$ - ikki o'zgaruvchili, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ esa n o‘zgaruvchili funksiyaga misol bo‘ladi.

X to‘plam f funksiyaning aniqlanish sohasi deyiladi va D(f) kabi, Y to‘plam esa qiymatlari yoki o‘zgarish sohasi deyiladi va E(f) kabi belgilanadi.

1 misol. $Z = \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}$



Bu funksiyaning aniqlanish sohasi

$D(z) = \{(x_1; x_2) : x_1^2 + x_2^2 \le R^2\}$ to‘plamdan iborat.

Bu to‘plam markazi koordinata boshida,

[29] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

radiusi R $(R>0)$ bo‘lgan doiradir.

Iqtisodda uchraydigan asosiy tushunchalardan biri, bu foydalilik funksiyasidir. Ko‘p o‘zgaruvchili foydalilik funksiyasiga misol tariqasida quyidagini funksiyani keltirish mumkin: $Z=\sum_{i=1}^{n} a_i \ell n(x_i - c_i)$, bu yerda $a_i>0\ va\ x_i>c_i\geq 0$. Funksiyaning aniqlanish sohasi $D(Z)=\{x:\ x_i>c_i,\ i=1,n\}$ to‘plamdan iborat. Bu funksiya o‘zgarmas egiluvchanlik funksiyasi deyiladi.

$Z=b_0 x_1^{b_1} x_2^{b_2}$. Bu funksiya Kobba-Duglas funksiyasi deyiladi. Bu yerda x_1- mehnat xarajatlari, x_2- ishlab chiqarish fondlari hajmini bildiruvchi o‘zgaruvchilardir. b_0, b_1 *ва* b_2 ishlab chiqarish texnologiyasi orqali aniqlanadigan parametrlardir.

$Z=a_0\left(a_1 x_1^{-\beta}+a_2 x_2^{-\beta}\right)^{-\frac{h}{\beta}}$. Bu funksiya almashtirishning o‘zgarmas egiluvchanlik funksiyasi deyiladi.

$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in R^n$ va $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in R^n$ bo‘lsin. Bu nuqtalar orasidagi masofa $d(x,y)$ deb quyidagi tenglik orqali aniqlangan songa aytilishini eslatib o‘tamiz.

$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

Ta’rif*. Markazi* $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *nuqtada, radiusi* $R>0$ *ga teng ochiq shar* $-S(x,R)$ *deb, quyidagi to‘plamga aytiladi.*

$$S(x,R)=\{y: d(x,y)<R\}$$

Izoh. $\varepsilon>0$ son uchun $S(x,\varepsilon)$- x nuqtaning, «ε-atrofi» ham deyiladi. $\bar{S}(x,R)=\{y: d(x,y)\leq R\}$ to‘plam esa yopiq shar deyiladi.

Ta’rif*. Agar* $\lim\limits_{d(x,x_0)\to 0} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=a$ *tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda* a *son* $Z=f(x_1,\,x_2,\ldots,x_n)$ *funksiyaning,* $x=(x_1,\,x_2,\ldots,x_n)$ *nuqta* $x_0=\left(x_1^{(0)},\,x_2^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}\right)$ *ga intilgandagi limiti deyiladi. Bu hol quyidagicha yoziladi*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a$$

1- misol.

$$\lim_{\substack{x_1\to 0\\ x_2\to 0}}\frac{x_1^2+x_2^2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+1}-1}=\lim_{\substack{x_1\to 0\\ x_2\to 0}}\frac{\left(x_1^2+x_2^2\right)\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+1}+1\right)}{x_1^2+x_2^2+1-1}=\lim_{\substack{x_1\to 0\\ x_2\to 0}}\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+1}+1\right)=2.$$

2 - misol.

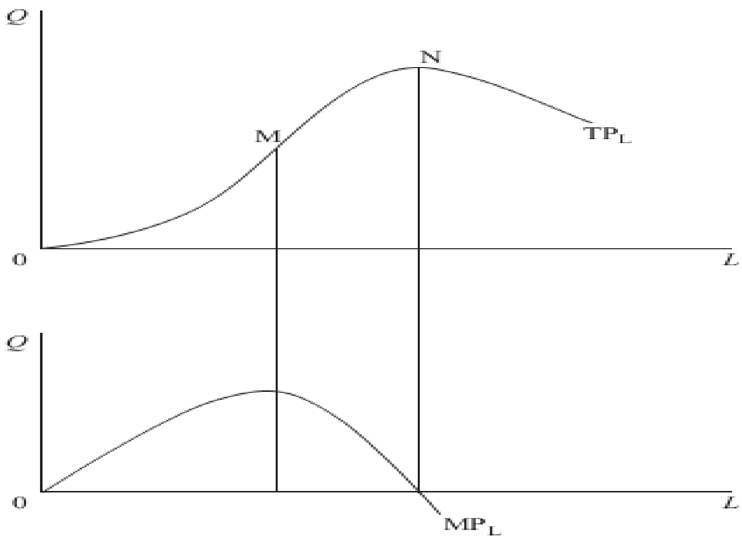
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\ln(1-x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ limitlarni hisoblashda x va y nuqtalar orasidagi masofani $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ deb belgilaylik. $x\to 0$, $y\to 0$ bo‘lganda $\rho\to 0$ ekanligi kelib chiqadi.

Demak, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\ln(1-x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\ln(1-\rho^2)}{\rho}=\lim\limits_{p\to 0}\frac{(\ln(1-\rho^2))'}{\rho'}=\lim\limits_{p\to 0}\frac{\frac{1}{1-\rho^2}\cdot(-2\rho)}{1}=0$

6.1.2. Xusussiy hosilalar

Ikki L va K erkli o‘zgaruvchili $Q = f(K,L)$ ishlab chiqarish funktsiyasining o‘zgarishida bir o‘zgaruvchi o‘ssa boshqasi o‘zgarmas bo‘ladi. Agar K o‘zgarmasdan L o‘ssa, u holda umumiy mahsulot ishlab chiqarish uchun mehnatga taqsimot (TP_L) o‘zgarishini kuzatamiz (TP_L xuddi Q ishlab chiqarish elementi kabi). Bu qoida, rasmdagi shakl ko‘rinishida bo‘ladi. Mikroekonomikada L(MP_L) marjinal mahsulot, L ning bir birlik orttirmasi, K ning biror berilgan qiymati shartida aniqlanadi. Yana ham aniqroq ta’rif, bu MP_L L bo‘yicha TP_L ning o‘zgarish tezligidir . Shunday qilib 10.1- rasmda M nuqtada MP_L taklif funktsiya o‘zining maksimumiga erishadi va TP_L funktsiya o‘zining maksimumiga N nuqtada erishsa, u holda MP_L taklif funktsiya nolga teng bo‘ladi.

Xususiy hosilani hisoblash, bu funktsiya, bir o‘zgaruvchi bo‘yicha o‘zgarganda, boshqa argumentlari o‘zgarmasdan qolganda, funktsiyaning o‘zgaruvchan argument bo‘yicha tezligini topish usulidir. Shuning uchun, $Q = f(K,L)$ ishlab chiqarish funktsiyasining L bo‘yicha xususiy hosilasi hisoblanganda, K ni o‘zgarmas deb, umumiy mahsulotdagi L ning o‘zgarish tezligini hosil qilamiz, boshqacha aytganda *MPL*.



Xususiy hosilaning asosiy qoidasi, funktsiyadan bir o‘zgaruvchi bo‘yicha hosila olinsa, boshqalari o‘zgarmas deb hisoblanadi. ∂ belgi xususiy hosilalarda, ‘d’ belgisi esa bir o‘zgaruvchili funktsiyalardan olingan hosilalarda qo‘llaniladi. Masalan, Q ishlab chiqarish funktsiyasidan L bo‘yicha olingan xususiy hosila quyidagicha ∂Q/∂L yoziladi.

Misol. Agar $y = 14x + 3z^2$ bo‘lsa, bu funktsiyadan x va z bo‘yicha hususiy hosilalarni toping.

Yechish. y dan x bo‘yicha olingan xususiy hosila $\frac{\partial y}{\partial x} = 14$

($3z^2$ o‘zgarmas deb olinadi va faqat x bo‘yicha differentsiallanadi). Shu kabi, y dan z bo‘yicha olingan xususiy hosila

$$\frac{\partial y}{\partial z} = 6z$$

($14x$ o‘zgarmas hisoblanib yo‘qoladi. $3z^2$ ifoda faqat z bo‘yicha differentsiallanadi).

Misol. Ishlab chiqarish funktsiyasi uchun $Q = 20K^{0.5}L^{0.5}$

1) Funktsiyani keltirib chiqaring;
2) MP_L ning kamayishini ko‘rsating.

Yechish.

1) Ishlab chiqarish $Q = 20K^{0.5}L^{0.5}$ funktsiyasidan, L bo‘yicha xususiy hosila olib MP_L ni topamiz. Demak

$$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = 10K^{0.5}L^{-0.5} = \frac{10K^{0.5}}{L^{0.5}}$$

MP_L funktsiyaga e’tibor bersak, bu funktsiya 10.1 rasmdagi funktsiyadan farq qilib, uzluksiz pastga qarab ketadi.

2) Agar MP_L funktsiyani maxraji va suratini $2L^{0.5}$ ga ko‘paytirsak, quyidagini hosil qilamiz

$$MP_L = \left(\frac{2L^{0.5}}{2L^{0.5}}\right)\left(\frac{10K^{0.5}}{L^{0.5}}\right) = \frac{20K^{0.5}L^{0.5}}{2L} = \frac{Q}{2L} \qquad (1)$$

K va L larning kombinatsiyasi bitta chiqish signalini beradi. Demak, agar Q o‘zgarmas qolib, L o‘ssa, u holda (1) funktsiya kamayadi.

Endi biz Kobba-Duglas funktsiyasini $Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$ formatda, ixtiyoriy $0 < \alpha, \beta < 1$ larda, limitik ishlab chiqarish kamaюvchi ekanligini ko‘ramiz. Agar K fiksirlangan bo‘lib, L o‘zgaruvchi miqdor bo‘lsa, limitik mahsulot L xususiy hosila yordamida topiladi. Demak

$$Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

$$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = \beta AK^{\alpha}L^{\beta-1} = \frac{\beta AK^{\alpha}}{L^{1-\beta}}$$

Agar K o‘zgarmas deb olinsa, shuningdek α, β, A berilgan bo‘lsa, βAK^{α} surat ham o‘zgarmas bo‘lib qoladi. Maxrajdagi L o‘ssa, $L^{1-\beta}$ ham kattalashadi va funktsiya MP_L kamayadi, ya’ni, limitik mahsulot L kamayadi.

Shuningdek, L o‘zgarmas deb olinib K o‘suvchi bo‘lsa,

$$MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = \alpha AK^{\alpha-1}L^{\beta} = \frac{\alpha AK^{\beta}}{K^{1-\alpha}}$$

kamayadi.

Ishlab chiqarish funktsiyasida o‘zgaruvchilar soni ikkitadan ko‘p bo‘lsa ham shu printsip takrorlanadi.

Masalan, agar $Q = AX_1^aX_2^bX_3^cX_4^d$

bu yerda X_1, X_2, X_3 va X_4 ko‘rsatkichlar, u holda X_3 ko‘rsatkichning marjinal ishlab chiqarish darajasi

$$\frac{\partial Q}{\partial X_3} = cAX_1^aX_2^bX_3^{c-1}X_4^d = \frac{cAX_1^aX_2^bX_4^d}{X_3^{c-1}}$$

bo‘lib, X_3 kamaygan sari o‘sadi. Bunda X_1, X_2, X_3 va X_4 kiruvchi o‘zgaruvchilar bo‘lsa, u holda X_3 o‘zgaruvchi bo‘yicha marjinal mahsulot quyidagicha bo‘lib

$$\frac{\partial Q}{\partial X_3} = cAX_1^a X_2^b X_3^{c-1} X_4^d = \frac{cAX_1^a X_2^b X_4^d}{X_3^{c-1}}$$

bo‘lib X_3 kamaygan sari, u o‘sadi.

Kobba-Duglas ishlab chiqarish funktsiyasining marjinal mahsuloti uzluksiz nolgacha kamayib, Lning chekli qiymatlarida “eng kichik limitik” qiymatga ega bo‘lmaydi; ya’ni, ular hech qachon minimal nuqtaga erishmaydi. Agar, masalan,

$$Q = 25K^{0.4}L^{0.5}$$

$$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = 12.5K^{0.4}L^{-0.5}$$

Minimumning birinchi tartibli sharti

$$\frac{12.5K^{0.4}}{L^{0.5}} = 0$$

Q=0, faqat *K=0* bo‘lsagina o‘rinlidir yoki *L* cheksiz katta bo‘lsa, o‘rinli. SHuningdek, *L* ning chekli qiymatlari uchun *L* qancha katta bo‘lmasin MP_L musbatligicha qolaveradi, bu shuni bildiradiki izokvanta chizig‘i bo‘yicha ikki o‘zgaruvchili Kobba-Duglas ishlab chiqarish funktsiyalari hech qachon orqaga qayrilmaydi, ya’ni u noiqtisodiy sohadir.
Ishlab chiqarish funktsiyasining boshqa mumkin bo‘lgan ko‘rinishlari. Masalan, agar
$Q = 4.6K^2 + 3.5L^2 - 0.012K^3L^3$
Bo‘lsa, avval MP_L o‘sib, keyin kamayadi

$$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = 7L - 0.036K^3L^2$$

L ning o‘sishi bilan, MP_L funktsiyaning bukilishi, musbatdan manfiy qiymatga qarab o‘zgaradi

bukilish $= \frac{\partial MP_L}{\partial L} = 7L - 0.072K^3L$

MP_L funktsiyaning qiymati va ko‘rinishi K ga bog‘liq bo‘lib qoladi

Misol. Agar $q = 20x^{0.6}y^{0.2}x^{0.3}$ bo‘lsa, q ning x, y, z bo‘yicha o‘zgarish tezligini (hosilasini) toping.

Yechish. Bunda hozir uchta bog‘liq bo‘lmagan o‘zgaruvchi qatnashyapti, lekin bunda ham юqoridagi qoidalarga amal qilinadi, ya’ni, ikkita o‘zgaruvchi o‘zgarmas deb qaraladi. Shuning uchun *y* va *z* o‘zgarmas bo‘lsin

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 12x^{-0.4}y^{0.2}x^{0.3}$$

Shu kabi, *x* va *z* o‘zgarmas bo‘lsin

$$\frac{\partial q}{\partial y} = 4x^{0.6}y^{-0.8}z^{0.3}$$

va *x* va *y* o‘zgarmas bo‘lsin

$$\frac{\partial q}{\partial z} = 6x^{0.6}y^{0.2}z^{-0.7}$$

Ko‘p o‘zgaruvchili funktsiyalardan xususiy hosila olayotganda xato qilmaslik uchun, o‘zgarmaydigan o‘zgaruvchilarni birinchi bo‘lib yozib olib, so‘ng differentsiallash kerak. Masalan *x* bo‘yicha differentsiallashda $y^{0.2}z^{0.3}$ ni yozib olib, *y* va *z* o‘zgarmas deb olindi.

Agar funktsiya juda ko‘p o‘zgaruvchilardan tashkil topsa, xususiy hosilani belgilash quyidagi kabi bo‘ladi. Masalan, $f = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ funktsiya uchun $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ ning o‘rniga f_1 ni, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ ning o‘rniga f_2 ni va hokazolarni yozish mumkin.

Misol. f_j ni toping bunda j ishlab chiqarish funktsiyasining kirish nomerlari

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \sum_{i=1}^{n} 6x_i^{0.5}$$

Yechish. Bu funktsiya qo‘shiluvchilar yig‘indisidan iborat. Faqat bitta j chi had uchun x_j mavjud. Agar x_j bo‘yicha differentsiallasak, qolgan hadlar o‘zgarmas bo‘ladi va yo‘qoladi. Shuning uchun, $6x_j^{0.5}$ hadni x_j bo‘yicha differentsiallash quyidagicha bo‘ladi $f_j = 3x_j^{-0.5}$

Bu qisqa belgi ikkinchi tartibli xususiy hosilalarda ham qo‘llaniladi. Masalan,

$$f_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$$

Ikkincha tartibli xususiy hosila funktsiyaning birincha tartibli xususiy hosilasini differentsiallash yo‘li bilan topiladi. Agar funktsiya ikkita bog‘liq bo‘lmagan o‘zgaruvchidan iborat bo‘lsa, to‘rtta ikkincha tartibli xususiy hosila hosil bo‘ladi. Misol tariqasida,

$$Q = 25K^{0.4}L^{0.3}$$

Ikkita birincha tartibli xususiy hosila mavjud

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = 10K^{-0.6}L^{0.3} \qquad \frac{\partial Q}{\partial L} = 7.5K^{0.4}L^{-0.7}$$

Ular K va L ga bog‘liq bo‘lgan limitik mahsulot funktsiyasidan iborat. Bu funktsiyalarni ikki marta differentsiallab quyidagini hosil qilamiz

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} = -6K^{-1.6}L^{0.3} \qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = -5.25K^{0.4}L^{-0.7}$$

Bu ikkincha tartibli xususiy hosila, limitik mahsulot funktsiyasining o‘zgarish tezligini ifodalaydi. Bu misoldan ko‘rinadiki, MR_L (ya’ni $\partial^2 Q/\partial L^2$) ning og‘ishi doimo manfiy bo‘ladi (K va L musbat qiymatlar qabul qilsa), L ning o‘sishi bilan, boshqa bir teng shartlarda, bu og‘ishning absolыot qiymati kamayadi.

Undan tashqari biz $\partial Q/\partial K$ o‘zgarish tezligini L bo‘yicha o‘zgaruvchilar, hamda $\partial Q/\partial L$ o‘zgarish tezligini K bo‘yicha o‘zgaruvchilar tezligi yordamida aniqlashimiz mumkin. SHunda ular:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K \partial L} = 3K^{-0.6}L^{0.7} \qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial L \partial K} = 3K^{-0.6}L^{-0.7}$$

kabi ifodalanadi va kesishuvchi xususiy hosilalar deyiladi.

Bular shuni ko‘rsatadiki, Qning biror kirim bo‘yicha o‘zgarish tezligi, boshqa kirim bo‘yicha ham o‘zgarar ekan. Bu misoldan quyidagini hosil qilamiz

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K \partial L} = \frac{\partial^2 Q}{\partial L \partial K}$$

Aslida kesishuvchi xususiy hosilalar har doim mos ravishda bir biriga teng bo‘ladi.

Demak, ixtiyoriy ikkita bog‘liq bo‘lmagan o‘zgaruvchidan iborat bo‘lgan funktsiya uchun, to‘rtta ikkincha tartibli xususiy hosila mavjud bo‘lar ekan:

$$(1)\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (2)\ \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \qquad (3)\ \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z} \qquad (4)\ \frac{\partial^2 y}{\partial z \partial x}$$

(3) va (4) xususiy hosilalar doimo bir-biriga teng, ya’ni

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial z \partial x}$$

Misol. Ishlab chiqarish funktsiyasi uchun, to‘rtta ikkinchi tartibli xususiy hosilani keltirib chiqaring

$$Q = 6K + 0.3K^2L + 1.2L^2$$

va ular qiymatini interpretatsiya qiling.

Yechish.

Ikkita birinchi tartibli xususiy hosila

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = 6 + 0.6KL \quad \frac{\partial Q}{\partial K} = 0.3K^2 + 2.4L$$

va ular mahsulotlarning limitik MP_K va MP_L funktsiyalaridan iborat.

To‘rtta ikkinchi tartibli xususiy hosila quyidagidan iborat:

$$(1)\ \frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} = 0.6L$$

Bu MP_K funktsiyaning og‘ishidan iborat. Bu shundan iboratki, ixtiyoriy berilgan L ning qiymatlari uchun, funktsiya grafigi doimo og‘ishdan iborat, agar L o‘ssa bu funktsiya o‘sadi.

$$(2)\ \frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = 2.4$$

Bu funktsyaning og‘ishini bildiradi va to‘g‘ri chiziqning og‘ishi 2,4 ga tengdir. Bu og‘ish K ning qiymatiga bog‘liq emas.

$$(3)\ \frac{\partial^2 Q}{\partial K \partial L} = 0.6K$$

Bular shuni ko‘rsatadiki, agar L o‘ssa, MP_K o‘sadi. L ning o‘sishi bilan MP_K ning o‘sishi Kning miqdoriga bog‘liq.

$$(4)\ \frac{\partial^2 Q}{\partial L \partial K} = 0.6K$$

Bu shundan iboratki, agar K o‘ssa MP_L ham o‘sadi, bu esa Kning miqdoriga bog‘liq. Shuning uchun, grafikning og‘ishi 2,4 ga teng bo‘lsa ham uning holati Kning miqdoriga bog‘liqlir. Ikkinchi tartibli xususiy hosila tadbiqining boshqa ko‘rinishlari quyida keltirilgan.[30]

$Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning barcha x_i argumentlariga Δx_i orttirma beramiz, u holda funksiya quyidagi Δz orttirmani

$$\Delta z = f(x_1 + \Delta x_1,\ \ x_2 + \Delta x_2, \cdots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

[30] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

hosil qiladi. Bu orttirma funksiyaning to‘liq orttirmasi deyiladi. Agar $Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ funksiyaning faqat i- argumenti bo‘lgan x_i o‘zgaruvchiga Δx_i orttirma berib, qolgan o‘zgaruvchilarni o‘zgarmas deb qarasak, u holda funksiya hosil qilgan orttirma $\Delta_{x_i} z$ quyidagicha aniqlanib,

$$\Delta_{x_i} z = f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$$

bu orttirma funksiyaning xususiy orttirmasi deyiladi.

Masalan, $z = xy$ funksiyaning to‘liq va xususiy orttirmalarini topaylik:

$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = x \cdot \Delta y + y \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \Delta y$$
$$\Delta_x z = (x + \Delta x) \cdot y - xy = y \cdot \Delta x,$$
$$\Delta_y z = x \cdot (y + \Delta y) - xy = x \cdot \Delta y$$

Ta’rif. $Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning* x_i *o‘zgaruvchisi bo‘yicha xususiy hosilasi deb,* x_i *o‘zgaruvchidan boshqa o‘zgaruvchilarni o‘zgarmas deb qaraganda hosil bo‘lgan bir o‘zgaruvchili, ya’ni* x_i *-o‘zgaruvchili funksiyaning,* x_i *- o‘zgaruvchi bo‘yicha olingan hosilaga aytilib,* $\frac{\partial z}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_i}$ *yoki* f'_{x_i} *shaklda belgilanadi, ya’ni xususiy hosila quyidagi limit orqali topiladi:*

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} z}{\Delta x_i}$$

Masalan. $z = x \cdot y$ funksiya uchun uning xususiy hosilalari xossalari quyidagicha bo‘ladi

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x.$$

$z = arctg\,\frac{x}{y}$ funksiya uchun esa,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{y^2 + x^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2 + x^2}.$$

$z = x^y$ funksiya uchun esa

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \ln x.$$

$\frac{\partial z}{\partial x_i}$ xususiy hosila, o‘z navbatida, yana ko‘p o‘zgaruvchili funksiya bo‘lgani uchun, uning yana xususiy hosilalarini topish mumkin. Bu xususiy hosilalar ikkinchi tartibli xususiy hosilalar deyiladi. Xuddi shunga o‘xshash uchinchi va h.k. tartibli xususiy hosilalarni kiritish mumkin.

Bu hosilalar quyidagicha belgilanadi.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \, \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right) - ikkinchi\ tartibli\ xususiy\ hosila;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x_i^2\,\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2}\right) - uchinchi\ \ tartibli\ \ xususiy\ \ hosila;$$

$$\frac{\partial^n z}{\partial x_{i_1}^{k_1}\,\partial x_{i_2}^{k_2}\ldots\partial x_{i_m}^{k_m}}, \qquad n - \ tartibli\ \ xususiy\ \ hosila.$$

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$$

Umuman, aralash hosilalarda tartibning ahamiyati yo‘q, ya’ni masalan, quyidagi tenglik o‘rinlidir,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i\,\partial x_j} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_j \partial x_i},$$

bu aralash hosilalarni uzluksiz deb qarash kerak.

6.1.3. To‘la differensial

Agar, x va y o‘zgaruvchilardagi o‘zgarish cheksiz kichik bo‘lsa, unda ushbu chiziqsiz funktsiya

$$\Delta y = \frac{dy}{dx}\Delta x$$

“differentsial” deb hisoblanadi. Agar, y funktsiyada birdan ortiq o‘zgaruvchi bo‘lsa, misol uchun $y = f(x,z)$ va barcha o‘zgaruvchilardagi o‘zgarish cheksiz kichik bo‘lsa, unda to‘la differentsial

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial y}{\partial z}\Delta z$$

ko‘rinishida bo‘ladi.

Bu “to‘la differentsial” deyiladi, chunki u y ning umumiy ta’sirini barcha erkli o‘zgaruvchilarda aks ettiradi.

Cheksiz kichik o‘zgaruvchlarni odatda $\Delta y, \Delta x, \Delta z$ larning o‘rniga, dy, dx, dz deb yozamiz, chunki $\Delta y, \Delta x, \Delta z$ larar bilan odatda cheklangan o‘zgaruvchilarni belgilashadi, shunday qilib quyidagini hosil qilamiz:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x}dx + \frac{\partial y}{\partial z}dz$$

Misol. To‘la differentsialni aniqlang $y = 6x^2 + 8z - 0{,}3xz$?

Yechish. To‘la differentsial

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x}dx + \frac{\partial y}{\partial z}dz =$$
$$= (12x - 0{,}3z)dx + (16z - 0{,}3x)dz$$

Endi to‘la differentsial tushunchasini iqtisodiyotda qo‘llanishiga oid misollarni ko‘rib chiqishimiz mumkin.

Ishlab chiqrish nazariyasida izokvantaning qiyaligi ikki o‘zgaruvchi orasidagi texnikaviy almashtirishning marjinal tezligi (TAMT) ni ko‘rsatib beradi. To‘la differentsialni qo‘llash TAMT nini ikki o‘zgaruvchi marjinal mahsulotlarining nisbatiga teng bo‘lishini ko‘rsatib berishga yordam beradi

Iqtisodiyotga kirishda K ning L ga bo‘lgan TAMT (odatda TAMT_{KL} deb beriladi) odatda K ning miqdori deb belgilanadi, bu L ning yo‘qotgan birligini qoplash uchun kerak, natijada ishlab chiqarish hajmi o‘zgarmaydi. Bu shunchaki taxminiy o‘lchov, $TAMT_{Kl}$ izokvanta nuqtasida aniqlansa, u aniqroq natijaga erishishi mumkin. *K* va *L* dagi cheksiz kichik o‘zgarishlar uchun $TAMT_{KL}$ *K* ning *L* ga almashtirish kerak bo‘lgan tezlikni o‘lchaydi, chiqimni o‘zgarishsiz saqlab qolish uchun, ya’ni *K* va *L* larning belgilangan qiymatlari izokvanta og‘masini manfiy kattaligiga teng, qachonki *K* vertikal o‘q va *L* gorizontal o‘q bo‘yicha o‘lchansa.

Har qanday berilgan chiqim darajasi uchun *K* – bu *L* ning samarali funktsiyasidir (va aksincha) va shu sababli izokvanta bo‘ylab harakat qiladi

$$MRTS_{KL} = -\frac{dK}{dL} \qquad (1)$$

$Q = f(K, L)$ ishlab chiqarish funktsiyasi uchun, to‘la differentsial quyidagicha bo‘ladi

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial K}dK + \frac{\partial Q}{\partial L}dL$$

Agar biz izokvanta bo‘ylab xuddi shu harakatga ko‘z tashlasak, chiqim o‘zgarishsiz bo‘ladi, demak dQ va shunday qilib

$$\frac{\partial Q}{\partial K}dK + \frac{\partial Q}{\partial L}dL = 0 \qquad -\frac{\partial K}{\partial L} = \frac{\dfrac{\partial Q}{\partial L}}{\dfrac{\partial Q}{\partial K}} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial K}dK = -\frac{\partial Q}{\partial L}dL$$

Biz allaqachon $dQ/\partial L$ va $dQ/\partial K$ larni K va L larning marjinal mahsulotlarni aniqlashini bilamiz. SHu sababli, (1) va (2) lardan

$$MRTS_{KL} = -\frac{MP_L}{MP_K}$$

kelib chiqadi.[31]

Ta’rif. $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning differentsiali deb,* dZ *- shakldа belgilanib quyidagicha aniqlangan ifodaga aytiladi:*

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial Z}{\partial x_2}\Delta x_2 + \dots + \frac{\partial Z}{\partial x_n}\Delta x_n$$

Bu yerda $dx_i = \Delta x_i$ *- tenglikni e’tiborga olsak,* dZ *- differentsial uchun quyidagi tenglikni yoza olamiz.*

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial Z}{\partial x_2}dx_2 + \dots + \frac{\partial Z}{\partial x_n}dx_n$$

Ta’rif*. Agarda* $x-$*nuqtaning yetarli kichik atrofida, uning to‘liq orttirmasi* ΔZ *ni quyidagicha ifodalash mumkin bo‘lsa,*

$$\Delta Z = dZ + 0\left(\sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_n^2}\right),$$

u holda $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *ko‘p o‘zgaruvchili funksiya* $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ *nuqtada differentsiallanuvchi deyiladi.*

Shuni ta’kidlash lozimki, ko‘p o‘zgaruvchili funksiya uchun uning berilgan nuqtada barcha birinchi tartibli xususiy hosilalarining mavjudligidan, shu nuqtada funksiyaning differentsiallanuvchi ekanligi kelib chiqmaydi. Quyidagi teorema ko‘p o‘zgaruvchili funksiyani differentsiallanuvchi bo‘lishligining yetarli shartini ifoda etadi.

[31] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

Teorema. *Agar* $Z=f(x_1, x_2,\dots,x_n)$ *ko'p o'zgaruvchili funksiyaning* $x=(x_1, x_2,\dots,x_n)$ *nuqtaning biron–bir atrofida barcha birinchi tartibli* $\frac{\partial z}{\partial x_i}, i=1,2,\dots,n$, *xususiy hosilalari mavjud bo'lib, bu xususiy hosilalar* x *nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda* $Z=f(x_1, x_2,\dots,x_n)$ *funksiya shu nuqtada differentsiallanuvchi bo'ladi.*

Biz bu teoremani isbotsiz qabul qilamiz. Shuni ta'kidlash lozimki, xuddi bir o'zgaruvchili funksiyalardagi kabi, ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun ham yuqori tartibli differentsial tushunchasini kiritish mumkin.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Nazorat savollari

1. Qanday shartda karrali va takroriy limitlar teng bo'ladi?
2. Xususiy hosila hisoblash tartibini tushuntiring.
3. Qanday shartda karrali va takroriy xususiy hosilalar teng bo'ladi?
4. To'la differensial hisolash usulini tushuntiring?
5. Yuqri tartibli to'la differensillar qanday hisoblanadi?
6. Leybnis formulasini tushuntiring.

2- mashg'ulot

6.2.1. Ko'p o'zgaruvchili funksiya ekstremumlari
6.2.2. Ekstremumning zaruriy sharti
6.2.3. Ekstremumning yetarli sharti

Tayanch iboralar: *limit,hususiy hosilalar,determinant.*

6.2.1. Ko'p o'zgaruvchili funksiya ekstremumlari

Ta'rif. *Agar* $z=f(x_1,\,x_2,\ldots,x_n)$ *funksiya* $x_0=\left(x_1^{(0)},\,x_2^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}\right)$ *nuqtaning biron-bir atrofida aniqlangan bo'lib, shu atrofdan olingan istalgan* x *uchun* $f(x)\le f(x_0)$, $\left(f(x)\ge f(x_0)\right)$ *tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda* x_0 *nuqta* z *funksiya uchun lokal maksimum (lokal minimum) nuqta deyiladi.*

Xuddi bir o'zgaruvchili funksiyadagi kabi, ko'p o'zgaruvchili funksiya uchun ham ekstremumning zaruriy va yetarli shartlari haqidagi teoremalarni isbot qilish mumkin.

6.2.2. Ekstremumning zaruriy sharti

Ikki o'zgaruvchili funktsiya $y=f\left(x,z\right)$ uchun maksimum va minimumda birinchi tartibli shartlar bajarilishi kerak

$$\frac{\partial y}{\partial x}=0 \quad \text{va} \quad \frac{\partial y}{\partial z}=0$$

Bu bir o'zgaruvchili funktsiyaning optimizatsiyasi shartlariga o'xshash, u esa 9-bo'limda yozilgan. Maksimum yoki minimum bo'lishi uchun funktsiya ikki o'zgaruvchiga nisbatan statsionar no'qtaga ega bo'lishi kerak.[32]

Teorema. *(Ekstremumning zaruriy sharti). Agar* x_0 *nuqta* $f(x)$ *funksiya uchun ekstremum nuqtasi bo'lib, shu nuqtada funksiya differentsiallanuvchi bo'lsa, u holda*

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}=0,\quad i=1,2,\ldots,n$$

ya'ni x_0 *nuqtada funksiya gradienti nol vektorga teng bo'ladi:* $\nabla f(x_0)=(0,\,0,\,\ldots,0)$

Bu teoremadan, agar x_0 nuqta differentsiallanuvchi funksiyaning ekstremum nuqtasi bo'lsa, x_0 nuqtadagi istalgan yo'nalish bo'yicha funksiyaning hosilasi nolga tengligi kelib chiqadi, chunki

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}=\nabla f\cdot\vec{a}=\sum_{i=1}^{n}0\cdot\cos\alpha_i=0\,.$$

Ta'rif. *Agar* $z=f(x)$ *funksiya uchun* $\nabla f(x_0)=0$ *bo'lsa,* x_0 *nuqta* $f(x)$ *funksiyaning statsionar yoki kritik nuqtasi deyiladi.*

6.2.3. Ekstremumning yetarli sharti

[32] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

Bir o‘zgaruvchili funktsiya uchun qo‘llanilgan, ikkinchi tartibli shartlar va ularning sabablarini, ikki yoki undan ortiq o‘zgaruvchilar qatnashgan funktsiyalar uchun mantiqiy tushuntirish oson emas. SHuning uchun biz shunchaki 2-tartibli shartlarni bu erda keltiramiz va ba’zi bir qo‘llanishlarga qarab qisqacha tushuncha beramiz. Ko‘p o‘zgaruvchili funktsiyaning optimizatsiyasi uchun, 2-tartibli shartlar matritsalar algebrasidan foydalanib, ko‘p o‘zgaruvchili funktsiyaning optimizatsiyasi uchun 2-tartibli yig‘ma shartlar mavjud
(ixtiyoriy=f(x,z)).

(1) maksimum uchun $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} < 0$ va $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} < 0$

minimum uchun $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} > 0$ va $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} > 0$

Ular bir o‘zgaruvchili funktsiyaning optimizatsiyasi uchun 2-tartibli shartlarga o‘xshash, funktsiyaning o‘zgarish tezligi, ya’ni og‘ma statsionar nuqtada kamaюvchi bo‘lishi kerak. Statsionar nuqtada kamaюvchi bo‘lsa, bu nuqtada funktsiya maksimumga erishadi va o‘suvchi bo‘lsa, bu statsionar nuqtada funktsiya minimumga erishadi. Bu erda farq shundaki ikkita erkli o‘zgaruvchilar bo‘yicha o‘zgarish saqlanib qolishi kerak.

(2) Bu boshqa ikkinchi tartibli shart

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right) > \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z}\right)^2$$

Bu ikkala maksimum va statsionar nuqtalarda bajarilishi kerak $\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right) > \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z}\right)^2$

E’tibor bering юqoridagi shartlar funktsiyanng lokal maksimum yoki minimum shartlarini qanoatlantiradi. Global maksimum yoki minimum bo‘lmasligi ham mumkin. Agar siz ikki tushuncha orasidagi farqni eslay olmasangiz 9-bo‘lmga murojaat qiling. Endi esa bu qoidalarning ba’zi bir qo‘llanishlarini ikki o‘zgaruvchili funktsiyani optimallashtirish uchun ko‘rib chiqamiz.

Misol. Firma bozorda sotiladigan ikki xil mahsulot ishlab. Talab funktsiyalari $p_1 = 600 - 0.3q_1$ $\quad p_2 = 500 - 0.2q_2$

Ishlab chiqarish xarajatlari bir biri bilan quyidagicha bog‘langan va firma umumiy xarajat funktsiyasiga ega.

$$TC = 16 + 1.2q_1 + 1.5q_2 + 0.2q_1q_2$$

Agar firma umumiy foydani maksimallashtirmoqchi bo‘lsa, har bir mahsulotdan nechtadan sotish kerak? Va maksimal foyda qancha bo‘ladi?

Yechish.

Umumiy daromad

$$\begin{aligned} TR &= TR_1 + TR_2 \\ &= p_1q_1 + p_2q_2 \\ &= (600 - 0.3q_1)q_1 + (500 - 0.2q_2)q_2 \end{aligned}$$

Bundan foyda

$$\pi = TR - TC$$
$$= 600q_1 - 0.3q_1^2 + 500q_2 - 0.2q_2^2 - (16 + 1.2q_1 + 1.5q_2 + 0.2q_1q_2)$$
$$= 600q_1 - 0.3q_1^2 + 500q_2 - 0.2_2^2 - 16 - 1.2q_1 - 1.5q_2 - 0.2q_1q_2$$
$$= -16 + 598.8q_1 - 0.3q_1^2 + 498.5q_2 - 0.2q_2^2 - 0.2q_1q_2$$

Foyda funktsiyani maksimallashtirish uchun quyidagi shart

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = 598.8 - 0.6q_1 - 0.2q_2 = 0$$

va $\frac{\partial \pi}{\partial q_2} = 498.5 - 0.4q_2 - 0.2q_1 = 0$

Birinchi va ikkinchi tenglamalar birgalikda echiladi va optimal q_1 va q_2 qiymat topiladi.

2 ni 3ga ko‘paytirib $1{,}495{,}5 - 1{,}2q_2 - 0.6q_1 = 0$

1ni guruhlab $\underline{598{,}8 - 0{,}2q_2 - 0.6q_1 = 0}$

Ayirish natijasi $896{,}7 - q_2 = 0$

Optimal qiymatni beradi $896{,}7 = q_2$

Bu qiymatni birinchi formulaga qo‘yib q_2 uchun bu qiymatni almashtirib quyidagilarni hosil qilamiz

$$598.8 - 0.6q_1 - 0.2(896.7) = 0$$
$$598.8 - 179.34 = 0.6q_1$$
$$419.46 = 0.6q_1$$
$$699.1 = q_1$$

Ikkinchi tartibli shartlarni tekshirish 1 va 2ni yana differentsiallab topiladi:

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial q_1^2} = -0.6 < 0 \qquad \frac{\partial^2 \pi}{\partial q_2^2} = -0.4 < 0$$

Bu maksimum uchun 2-tartibli shartning birinchi yig‘masini qanoatlantiradi. Aralash xususiy hosila

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial q_1 \partial q_2} = -0.2$$

Shuning uchun

$$\left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial q_1^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial q_2^2}\right) = (-0.6)(-0.4) = 0.24 > 0.04 = (-0.2)^2 = \left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial q_1 \partial q_2}\right)^2$$

va maksimum uchun qolgan 2-tartibli shartlar bajariladi. Sof foyda optimal qiymatlarni $q_1 = 699{,}1$ va $q_2 = 896{,}7$ foyda funktsiyaga qo‘yish bilan topiladi. Bu[33]

[33] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

$$\pi = -16 + 598.8q_1 - 0.3q_1^2 + 498.5q_2 - 0.2q_2^2 - 0.2q_1q_2$$
$$= -16 + 598.8(699.1) - 0.3(699.1)^2 + 498.5(896.7) - 0.2(896.7)^2$$
$$- 0.2(699.1)(896.7)$$
$$= £432,797.02$$

Hessian matrisasi

Ikki noma'lumli f*(x, y)* funksiya uchun Hessian matrisasi barcha ikkinchi tartibli hosilarni o'z ichiga olib, quyidagi ko'rsatilgan

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

ko'rinishida bo'ladi.

Hessian har doim kvadrat matrisa bo'ladi. Hessian matrisasining bosh minorlari birinchi satr bosh elementni o'z ichiga olgan kvadrat matrisa determinantlari bo'ladi hamada kyingilari satr va ustunni qo'shish bilan kengaytiriladi.

Masalan, 2 × 2 ikki noma'lumli funksiya uchun bosh minorlar

$$|H_1| = |f_{xx}| \text{ va } |H_2| = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

Ikkinchi tartibli bosh minor Hessian matrisasining determinant ekaniga e'tibor bering.

Maximum va minimum uchun ikkinchi tartibli shartlar endi minorlar orqali quyidagicha ifodalanadi.

maximum uchun $|H_1| < 0$ va $|H_2| > 0$ *(*Hessian manfiy aniqlangan*).*

minimum uchun $|H_1| > 0$ va $|H_2| > 0$ *(*Hessian musbat aniqlangan*)*

("Manfiy aniqlangan" va "musbat aniqlangan" iborasi uyqoridagi shartlarni qanoatlantiruvchi Hessianlar uchun qo'llaniladi)

Bu shartlar ikki o'zgaruvchili funksiya uchun oldin o'rnatilgan shartlar bilan mosligini ko'rsatish mumkin. Maksimum uchun

$$f_{xx} < 0,\ f_{yy} < 0 \qquad (1)$$

va

$$f_{xx} f_{yy} > (f_{xy})^2 \qquad (2)$$

bo'lishi zarur.

Haqiqatan ham

$$|H_1| < 0 \quad \text{ifoda} \quad f_{xx} < 0 \qquad (3)$$

$$|H_2| > 0 \text{ ifoda esa } f_{xx} f_{yy} - f_{xy} f_{yx} > 0 \qquad (4)$$

bo'lishini anglatadi.

$f_{xy} = f_{yx}$ ekanligidan esa (4) munosabatdan

$$f_{xx} f_{yy} > (f_{xy})^2$$

va (2) shart bajarildi.

$\left(f_{xy}\right)^2 > 0$ bolganligi uchun

$$f_{xx} f_{yy} > 0 \qquad (5)$$

$f_{xx} < 0$ bo‘lgani uchun (5) dan, (3) da ko‘rsatilgani kabi

$$f_{yy} < 0$$

munosabat hosil bo‘ladi. Shuning uchun (1) ham o‘rinli.

Shunday qilib, matrisaviy shakldagi ikkinchi tartibli shartlar oldin o‘rganilgan ikki o‘zgaruvchili funksiya optimizatsiya shartlari bilan bir xilda ekan. 10 bobda o‘rganilgan narxlar diskriminatsiyasi tahliliga qaytib, standart usullar yordamida optimizatsiya va Hessian yordamida ikkinchi tartibli shartlar asosida ba’zi masalalarni hal qila olamiz.

Misol. Firmning ishlab chiqarish funsiyasi TC = 120 + 0.1q^2 bo‘lib u mahsulotini turli ikki bozorda quyidagi talab funsiyalari asosida sotmoqda

$q_1 = 800 - 2p_1$ va $q_2 = 750 - 2.5p_2$.

Ishlab chiqarishning maksimal miqdorini Hassian shartidan foydalanib hisoblang.

Yechish.

Talab funksiyalaridan foydalanib

$p_1 = 400 - 0.5q_1$ $\qquad TR_1 = 400_{q1} - 0.5q_1^2$ $\qquad MR_1 = 400 - q_1$

$p_2 = 300 - 0.4q_2$ $\qquad TR_2 = 300_{q2} - 0.4q_2^2$ $\qquad MR_2 = 300 - 0.8q_2$

Umumiy ishlab chiqarish hajmi $q = q_1 + q_2$ ekanligidan

$$TC = 120 + 0.1q^2 = 120 + 0.1\left(q_1 + q_2\right)^2 =$$
$$= 120 + 0.1q_1^2 + 0.2q_1q_2 + 0.1q_2^2$$

Demak,

$$\pi = TR_1 + TR_2 - TC =$$
$$= 400q_1 - 0.5q_1^2 + 300q_2 - 0.4q_2^2 - 120 - 0.1q_1^2 - 0.2q_1q_2 - 0.1q_2^2 =$$
$$= 400q_1 - 0.6q_1^2 + 300q_2 - 0.5q_2^2 - 120 - 0.2q_1q_2$$

Maximum uchun BTSh dan

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = 400 - 1.2q_1 - 0.2q_2 = 0 \quad \text{bundan} \quad 400 = 1.2q_1 + 0.2q_2 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_2} = 300 - q_2 - 0.2q_1 = 0 \quad \text{bundan} \quad 300 = 0.2q_1 + q_2 \qquad (2)$$

(1) va (2) tenglamalar sistemasini quyidagicha matrisaviy ko‘rinishda ifodalash mumkin

$$\mathbf{Aq}= \begin{bmatrix} 1.2 & 0.2 \\ 0.2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 300 \end{bmatrix} = b$$

Har bir bozordagi sotuv hajmini aniqlovchi bu sistemani Kramer usulida yechamiz

$$q_1 = \frac{\begin{vmatrix} 400 & 0.2 \\ 300 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1.2 & 0.2 \\ 0.2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{400-60}{1.2-0.04} = \frac{340}{1.16} = 293.1$$

$$q_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1.2 & 400 \\ 0.2 & 300 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1.2 & 0.2 \\ 0.2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{360-80}{1.2-0.04} = \frac{280}{1.16} = 241.4$$

Ikkinchi tartibli shartdan foydalanish uchun birinchi tartibli xususiy hosilalarga qaytib, ularning karrali va aralash xususiy hosilalarini hisoblaymiz. Demak,

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = 400 - 1.2q_1 - 0.2q_2 \quad \text{and} \quad \frac{\partial \pi}{\partial q_2} = 300 - q_2 - 0.2q_1$$

hosilalardan foydalanib quyidagilarni hosil qilamiz

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial q_1^2} = -1.2, \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial q_1 \partial q_2} = -0.2 \qquad \frac{\partial^2 \pi}{\partial q_2^2} = -1, \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial q_2 \partial q_1} = -0.2$$

Shuning uchun Hessian matrisasi

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.2 & -0.2 \\ -0.2 & -1 \end{bmatrix}$$

va bosh minorlar

$$|H_1| = -1.2 < 0$$

va

$$|H_2| = \begin{vmatrix} -1.2 & -0.2 \\ -0.2 & -1 \end{vmatrix} = 1.2 - 0.04 = 1.16 > 0$$

$|H_1| < 0$ va $|H_2| > 0$ bo‘lgani uchun Hessian manfiy aniqlangan bo‘ladi. Shunuing uchun ISh ga ko‘ra maximumga erishadi.[34]

Uchinchi tartibli Hassian

Uch o‘zgaruvchili $y = f(x_1, x_2, x_3)$ funksiya uchun ikkiknchi tartibli hosilalardan tuzilgan 3×3 o‘lchovla matrisa quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}$$

va uning bosh minorlari

[34] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

$$|\mathbf{H}_1| = |f_{11}| \qquad |\mathbf{H}_2| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} \quad |\mathbf{H}_3| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}$$

Uch o‘zgaruvchili funksiya uchun shartsiz optimaizatsiyaning IESh quyidagicha bo‘ladi:

(a) Maximum uchun $|\mathbf{H}_1| < 0$, $|\mathbf{H}_2| > 0$ va $|\mathbf{H}_3| < 0$ (Hessian manfiy aniqlangan)

(b) Minimum uchun $|\mathbf{H}_1|> 0$, $|\mathbf{H}_2|>0$ va $|\mathbf{H}_3|>0$ (Hessian musbat aniqlangan)

Misol. Uch zavodda q_1, q_2 va q_3 miqdordagi mahsulot ishlab chiqarilib, undan kelayotgan foyda funksiyasi quyidagicha bo‘lsin

$$\pi = -24 + 839q_1 + 837q_2 + 835q_3 - 5.05q_1^2 - 5.03q_2^2 - 5.02q_3^2 -$$
$$-10q_1q_2 - 10q_1q_3 - 10q_2q_3$$

q_1, q_2 va q_3 mahsulot ishlab chiqarishning shunday miqdorini aniqlangki, bunda fouda maksimal bo‘lsin.

Yechish. Differentiating this π funksiyani mos ravishda q_1, q_2 va q_3 o‘zgaruvchilar bo‘yicha differensiallab va nolga tenglab, birinchi shart bo‘yicha optimallikka erishish nuqtasini hosil qilamiz:

$\pi_1 = 839 - 10.1q_1 - 10q_2 - 10q_3 = 0$ (1)

$\pi_2 = 837 - 10q_1 - 10.06q_2 - 10q_3 = 0$ (2)

$\pi_1 = 839 - 10.1q_1 - 10q_2 - 10q_3 = 0$ (3)

Bu sistemani quyidagicha yozib olish mumkin

$$839 = 10.1q_1 + 10q_2 + 10q_3$$
$$837 = 10q_1 + 10.10q_2 + 10q_3$$
$$835 = 10q_1 + 10q_2 + 10.04q_3$$

Bu bergalikdagi sistemani matrisaviy usulda yechib, uchun ni qo‘llash mumkin va q_1, q_2 vaq_3 larga mos 42, 36.6 va 4.9 yechishlarni olamiz.

(Yechishni olish to‘liq hisoblari ketirimadi, asosiy maqsad ekstremumni tekshirishada Hessian qanday qo‘llanilishini ko;rsatisdir, lekin siz uni Excel dasturida yechib tekshirishingiz mumkin).

(1), (2) va (3) larni differensiallab xususiy hosilalardan tusilgan Hessianni hosil qilamiz

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} \\ \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10.1 & -10 & -10 \\ -10. & -10.06 & -10 \\ -10 & -10 & -10.04 \end{bmatrix}$$

Bosh minorlarni hisoblaymiz

$$|\mathbf{H}_1| = |\pi_{11}| = -10.1$$

$$|\mathbf{H}_2| = |\pi_{11}|\begin{vmatrix}\pi_{11} & \pi_{12}\\ \pi_{21} & \pi_{22}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-10.1 & -10\\ -10 & -10.06\end{vmatrix} = 101.606 - 100 = 1.606$$

$$|\mathbf{H}_3| = \begin{bmatrix}\pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13}\\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23}\\ \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-10.1 & -10 & -10\\ -10. & -10.06 & -10\\ -10 & -10 & -10.04\end{bmatrix} = -0.1242$$

(H_3 qiymatini Excel MDETERM funksiyasi yordamida hisoblashlashingiz mumkin.)

$$|\mathbf{H}_1| = -10.1 < 0,\ |\mathbf{H}_2| = 1.606 > 0,\ |\mathbf{H}_3| = -0.1242 < 0$$

bo‘lgani uchun Hessian manfiy aniqlangan va maksimumga erishish sharti bajarildi.

Demak, foyda maksimum bo‘lishi uchun ishlab chiqarish hajmi q_1=42, q_2 = 36 va q_3=5 bo‘lishi kerak.[35]

Yuqori tartibli Hessian

Erkli o‘zgaruvchilari uchtadan ko‘p bo‘lgan funksiya uchun ISh ning Hassian ko‘rinishi

(*a*) *Maximum*

Bosh minorlar ishoralari $|\mathbf{H}_1| < 0$ (manfiy aniqlangan) minordan boshlab almashinadi.

Demak, *i* tartibli $|\mathbf{H}_i|$ bosh minor $(-1)^i$ ishoraga ega bo‘ladi.

(*b*) *Minimum*

Barcha bosh minorlar $|\mathbf{H}_i| > 0$ (musbat qniqlangan)

$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning $x_0 = \left(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ nuqtaning biron-bir atrofida barcha ikkinchi tartibli xususiy hosilalari mavjud va uzluksiz funksiya bo'lsin. U holda istalgan $1 \le i,\ j \le n$ uchun

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Agar

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = a_{ij}(x)$$

belgilashni kiritsak, ushbu kvadratik matritsa,

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x)\ a_{12}(x)\ldots\ a_{1n}(x)\\ a_{21}(x)\ a_{22}(x)\ldots\ a_{2n}(x)\\ -------------\\ a_{n1}(x)\ a_{n2}(x)\ldots\ a_{nn}(x)\end{pmatrix}$$

$a_{ij} = a_{ji}$ bo‘lgani uchun simmetrik matritsa bo‘ladi. Avval ko‘rganimizdek har bir simmetrik kvadratik matritsa kvadratik forma hosil qiladi. $A(x)$ matritsaga mos keluvchi kvadartik formani $L(x)$ bilan belgilaymiz.[36]

---

[35] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

[36] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

***Teorema**. Agar $f(x)$ funksiya uchun $x_0=\left(x_1^{(0)},\, x_2^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}\right)$ statsionar nuqtaning biron-bir atrofida ikkinchi tartibli hosilalari mavjud va uzluksiz bo'lib, shu x_0 nuqtada $L(x_0)$ kvadratik forma musbat (manfiy) aniqlangan bo'lsa, u holda x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning lokal minimum (lokal maksimum) nuqtasi bo'ladi.*

Xususan, agar biz $z=f(x,y)$ ikki o'zgaruvchili funksiya uchun shu teoremani qo'llasak quyidagini hosil qilamiz.

(x_0,y_0) nuqta $z=f(x,y)$ funksiyaning statsionar nuqtasi, ya'ni

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=0$$

bo'lib, nuqtaning biron-bir atrofida

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=a_{11},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=a_{12},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=a_{22}$$

ikkinchi tartibli hosilalar mavjud bo'lsin. U holda,

$$A(x,y)=\begin{pmatrix} a_{11}(x,y) & a_{12}(x,y)\\ a_{21}(x,y) & a_{22}(x,y)\end{pmatrix}$$

simmetrik kvadratik matritsaga mos keluvchi $L(x,\,y)$ kvadratik formaning (x_0,y_0) nuqtada musbat aniqlangan bo'lishi uchun

$$a_{11}(x_0,y_0)>0,\qquad \begin{vmatrix} a_{11}(x_0,y_0) & a_{12}(x_0,y_0)\\ a_{21}(x_0,y_0) & a_{22}(x_0,y_0)\end{vmatrix}>0$$

bo'lishi lozim. Demak, statsionar (x_0,y_0) nuqta $z=f(x,y)$ funksiya uchun lokal minimum nuqta bo'lishi uchun

$$a_{11}(x_0,y_0)>0,\ a_{11}(x_0,y_0)\cdot a_{22}(x_0,y_0)-a_{12}^2(x_0,y_0)>0$$

shartlarning bajarilishi yetarli bo'lar ekan. (x_0,y_0) nuqta lokal minimum nuqta bo'lishligi uchun esa

$$a_{11}(x_0,y_0)<0,\qquad \begin{vmatrix} a_{11}(x_0,y_0) & a_{12}(x_0,y_0)\\ \\ a_{21}(x_0,y_0) & a_{22}(x_0,y_0)\end{vmatrix}>0$$

ya'ni

$$a_{11}(x_0,y_0)<0,\ a_{11}(x_0,y_0)\,a_{22}(x_0,y_0)-a_{12}^2(x_0,y_0)>0$$

shartlarning bajarilishi yetarli.

$z=f(x,y)$ funksiyaning (x_0,y_0) statsionar nuqtasi uchun

$$a_{11}(x_0,y_0)\,a_{22}(x_0,y_0)-a_{12}^2(x_0,y_0)<0$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, (x_0,y_0) nuqta ekstremum nuqta emasligi kelib chiqadi.

Masalan. $z=x^3+y^3-3xy$ funksiyani ekstremumga tekshiraylik. Buning uchun dastavval uning xususiy hosilalarini, keyin statsionar nuqtalarini, so'ngra ikkinchi tartibli hosilalar yordamida ekstremum nuqtalarni aniqlaymiz.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-3y,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=3y^2-3x$$

$$\begin{cases}3x^2-3y=0\\ 3y^2-3x=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2-y=0\\ y^2-x=0\end{cases}\Rightarrow x^4-x=0\Rightarrow x\left(x^3-1\right)=0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1 \Rightarrow (0,\ 0)\ va\ (1,\ 1)$$

nuqtalar statsionar nuqtalar ekan.

$$a_{11} = \frac{\partial^2 z}{\partial\ x^2} = 6x, \qquad a_{12} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3, \ a_{22} = \frac{\partial^2 z}{\partial\ y^2} = 6y$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}(x,y) & a_{12}(x,y) \\ a_{21}(x,y) & a_{22}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix} = 36xy - 9$$

bo‘lgani uchun $(0,\ 0)$ ekstremum nuqta bo‘lmaydi, chunki

$$\begin{vmatrix} a_{11}(0,0) & a_{12}(0,0) \\ a_{21}(0,0) & a_{22}(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0$$

Lekin $(1,\ 1)$ nuqta funksiyaning lokal minimum nuqtasi bo‘ladi, chunki

$$a_{11}(1,\ 1) = 6 > 0 \text{ va } \begin{vmatrix} a_{11}(1,1) & a_{12}(1,\ 1) \\ a_{21}(1,1) & a_{22}(1,\ 1) \end{vmatrix} = 36 - 9 = 27 > 0.$$

$$\min z(x;y) = z(1;1) = -1.$$

Nazorat savollari

1. Ko’p o’zgaruvchili funksiyalarda ekstremumni qanday tushunasiz?
2. Ko’p o’zgaruvchili holda ekstremumning zaruriy shartini ayting va asoslang.
3. Ko’p o’zgaruvchili holda ekstremumning yetarli shartini ayting.
4. Ekstremumlar uchun matrisabiy analiz tadbiqlarini tushuntiring.

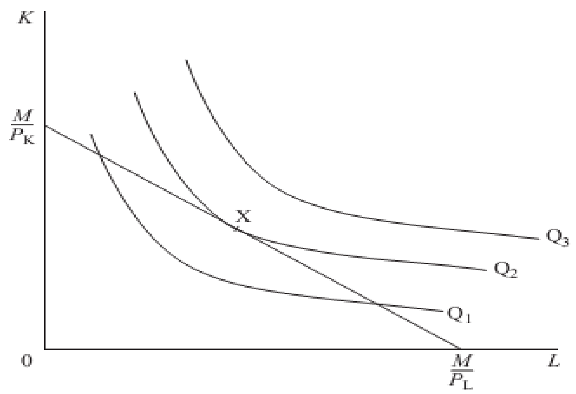
3- mashg'ulot

6.3.1. Shartli ekstremumlar
6.3.2. Yopiq sohadagi ekstremumlar
6.3.3. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar diffrensial hisobining iqtisodiyotga tatbiqlari

Tayanch iboralar: *limit,hususiy hosila, determinent.*

6.3.1. Shartli ekstremumlar

Ishlab chiqarish $Q = f(K,L)$ ni maksimallashtirmoqchi firmani misol qilib ko'raylik, bunda K va L xom ashyolarni tayinlangan PK va PL narxda sotib olishga ketadigan M budjet fiksatsiya qilingan. Bu masala quyidagi rasmda tasvirlangan. Firma uni M/P_K va M/P_L kesishmalari bo'lgan budjet chegaralar ostidagi mumkin izokvantalarning eng yuqoridagisida joylashgan X optimum nuqtasiga yetkazuvchi K va L ning kombinatsiyasini topishi kerak.



Bu turdagi iqtisodiy mablag'larni taqsimlash masalasini yechish uchun biz uni matematik chegaralangan optimizatsiya masalasiga aylantirishimiz kerak. Quyidagi misollar buni amalga oshirish yo'llarini ko'rsatadi.

Misol. Firmaning ishlab chiqarish funksiyasi $Q = 12K^{0.4}L^{0.4}$ va u K va L homashyolarni bir birligini mos ravishda £40 va £5 dan sotib oladi. respectively. Agar u £800 budjetga ega bo'lsa, K va L larning qanday kombinatsiyasini ishlatganda u mumkin bo'lgan maksimum mahsulotni islab chiqaradi?

Yechish. Masala $Q = 12K^{0.4}L^{0.4}$ funksiyani

$$40K + 5L = 800 \qquad (1)$$

budjyet chegarasida maksimallashtirishdan iborat. (Bu bobdagi barcha masalalarda har bir budjet olingan, ya’ni shu misolda to‘liq ishlatilgan deb hisoblanadi.)

Firma nazariyasi bizga shuni ta’kidlaydiki, firma fiksatsiya qilingan budjetni optimal ishlatgan bo‘lishi uchun u har bir homashyoga ishlatilgan ohirgi £1 ishlab chiqarishga huddi shunday miqdor qo‘shilsa, ya’ni, hamma homashyo uchun narx ustidan marginal mahsulot teng bo‘lishi kerak. Bu optimizatsiya sharti quyidagicha yozilishi mumkin

$$\frac{MP_K}{P_K} = \frac{MP_L}{P_L}$$

Marginal mahsulotlar bo‘laklab differentsiallash orqali aniqlanishi mumkin:

$$MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = 4.8K^{-0.6}L^{0.4} \qquad (3)$$

$$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = 4.8K^{0.4}L^{-0.6} \qquad (4)$$

(3) va (4) hamda P_K va P_L uchun berilgan narxlarni (2) ga qo‘ysak

$$\frac{4.8K^{-0.6}L^{0.4}}{40} = \frac{4.8K^{0.4}L^{-0.6}}{5}$$

Ikkala tomonni 4.8 ga bo‘lsak va 40ga ko‘paytirsak

$$K^{-0.6}L^{0.4} = 8K^{0.4}L^{-0.6}$$

Ikkala tomonni $K^{0.6}L^{0.6}$ ga ko‘paytirsak

$$L = 8K \qquad (5)$$

L uchun (5)ni (1) budjet chegaralariga qo‘ysak

$$40K + 5(8K) = 800$$

$$40K + 40K = 800$$

$$80K = 800$$

Shunday qilib *K* ning optimal qiymati $K = 10$ va (5) dan *L* ning optimal qiymati $L = 80$.

Shuni ta’kidlash lozimki, bu usul bizga K va L uchun yuqoridagi (2) shartni qanoatlantiruvchi optimal qiymatlarni topishda qo‘l kelsada, u ushbu Yechish yagonaligini tekshirib bera olmaydi, ya’ni ikkinchi tartibli tecshirih sharti yo‘q. Lekin bu bo‘limdagi barcha masalalarda optimumga oid asosiy iqtisodiy qoidalar bajarilganda haqiqiy funksia maksimallangan (yoki savolga qarab minimallangan) deb hisoblasa bo‘ladi.

Yuqoridagi usul almashtirish orqali bu masalani yechishning yagona yo‘li emas. Quyida tushuntirilgan o‘zgacha tadqiqot maksimallanishi zarur bo‘lgan funksiya ichidagi chegarani qisqalashtirishi, keyin bu yangi haqiqiy funksiyani maksimallashi kerak.

Ko‘p hollarda berilgan ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning ekstremumlarini, uning argumentlari ma'lum shartlarni qanoatlantirishi asosida topish masalasi qo‘yiladi. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar uchun shartli ekstremumlar deb nomlanuvchi tushuncha umumiy holda quyidagicha bayon etiladi.

Lagranj ko‘paytuvchisini qanday ishlatilishini tushuntirishning eng yaxshi yo‘li bu misol orqali va shuning uchun ohirgi bo‘limdagi 11.1 Misoldagi masalani Lagranj ko‘paytuvchisi usuli yordamida ishlaymiz.

Firma $Q=12K^{0,4}L^{0,4}$ mahsulotni maksimallashga urinmoqda, bunda budjet chegarasi 40K+5L=800. Birinchi bosqichda budjet chegarasini shunday o‘rin almashtirish kerakki, tenglikning bir tomonida nol paydo bo‘lsin.
Demak

$$0=800-40K-5L \qquad (1)$$

Keyin biz ‘Lacranj tenglamasi’ yoki ‘Lagranjian’ni

$$G=(\,function\ to\ be\ optimized\,)+\lambda(constraint)$$

ko‘rinishda yozamiz, bu yerda *G* Lagranj funksiyasining qiymati va λ ‘Lagranj ko‘paytuvchisi’ sifatida ma’lum. (Bu atamalar qayerdan kelganligi yoki ularning haqiqiy qiymatlari qandayligi haqida qayg‘urmang. Ular faqatgina tahlilni osonlashtirish uchun kiritilgan. Boshqa matnlarda Lagranj funksiyasini ifodalash uchun ko‘pincha ‘jingalak L’ ishlatilishini ta’kidlaylik. Bu talabalarni hijolat qilishi mumkin, chunki iqtisodiy masalalarda ko‘pincha optimallashtirilayotgan funksiyadagi o‘zgaruvchilardan biri bo‘lmish mehnat L orqali ifodalanadi. Bu tushinmovchilikni oldini olish uchun ushbu matn ‘G‘ belgilashni ishlatadi. Ammo agar siz ‘jingalak L’ ni ishlatishga o‘rganib qolgan bo‘lsangiz, unda o‘ziz uchun masalalarga javob berayotganingizda uni ishlataverishingiz mumkin, albatta. Tahlillarni tushunayotgan bo‘lsangiz, qanday belgilarni ishlatayotganingizni ahamiyati yo‘q.

Bu masalada, shunday qilib, Lagranj funksiyasi

$$G=12K^{0,4}L^{0,4}+\lambda(800-40K-5L) \qquad (2)$$

Keyin G ning K, L, va λ bo‘yicha hususiy hosilalari topiladi va nolga tenglashtiriladi, ya’ni G ning maksimumning birinchi tartibli shartlarini qanoatlantiruvchi statsionar nuqtalari topiladi.

$$\frac{\partial G}{\partial K}=4,8K^{-0,6}L^{0,4}-40\lambda=0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial G}{\partial L}=4,8K^{0,4}L^{-0,6}-5\lambda=0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}=800-40K-5L=0 \qquad (5)$$

Shuni ta’kidlaymizki, (5) (1) budjet chegaralari bilan bir xil. Biz endi K va L ga nisbatan yechilishi kerak bo‘lgan uch o‘zgaruvchili uchta chiziqli bir jinsli tenglama sistemasiga egamiz. λ Lagranj ko‘paytuvchisi quyidagicha bartaraf etilishi mumkin, (3) dan

$$0,12K^{-0,6}L^{0,4}=\lambda$$

va (4) dan

$$0,96K^{0,4}L^{-0,6}=\lambda$$

Demak

$$0,12K^{-0,6}L^{0,4}=0,96K^{0,4}L^{-0,6}$$

Ikkala tomonni $K^{0,6}L^{0,6}$ ga ko‘paytirsak

$$0,12L=0,96K \qquad (6)$$

$$L = 8K$$

(6) ni (5) ga qo‘ysak,

$$800 - 40K - 5(8K) = 0$$

$$800 = 80K$$

$$10 = K$$

Qaytadan (5) ga qo‘ysak,

$$800 - 40(10) - 5L = 0$$

$$400 = 5L$$

$$80 = L$$

Bu o‘rniga qo‘yish usulida hosil qilingan K va L larning huddi o‘sha qiymatlari. Demak, G Lagranj funksiyasining maksimal qiymati uchun birinchi tartibli shartini qanoatlantiruvchi K va L larning qiymatlari berilgan budjet chegarasidagi ishlab chiqarishni maksimallaydigan qiymatlardir. Biz bu natijani nega shundayligini isbotiga chuqurlashmasdan faqatgina qabul qilamiz.

Aniqroq aytganda biz endi haqiqatan minimumdan ko‘ra maksimumga ega ekanligimizga amin bo‘lish uchun yuqoridagi masalada ikkinchi tartibli shartlarni tekshirishimizga to‘g‘ri keladi. Lekin ular funksiya statsionar nuqta va uning atrofida tekshirilganida kompleks bo‘lgan hol keyingi bo‘limda muhokama qilingan. Hozir siz Lagranj funksiyasining statsionar nuqtalari topilgan paytda maksimum uchun ikkinchi tartibli shartlar avtomatik ravishda bajarilgan deb tahmin qilishingiz mumkin.

$Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$ $n+m$ o‘zgaruvchili funksiyaning ushbu, bog‘lovchi tenglamalar deb nomlanuvchi,

$$\phi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) = 0$$

$$i = 1, 2, \ldots, m,\ x = (x_{1,} x_{2,\ldots\ldots,}\ x_{n+m})$$

tenglamalarni qanoatlantiruvchi nuqtalar ichidan topilgan ekstremumlari uning shartli ekstremumlari deyiladi.[37]

***Ta'rif**. Agar $Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n+m})$ ko‘p o‘zgaruvchili funksiya $x_0 = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots x_{n+m}^{(0)}\right)$ nuqtaning biron-bir atrofida aniqlangan bo‘lib, bog‘lovchi tenglamalarni qanoatlantiruvchi barcha x nuqtalar uchun $f(x) \le f(x_0)$ $(f(x) \ge f(x_0))$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda x_0 nuqtada shartli maksimumga (minimumga) erishadi deyiladi.*

Berilgan $Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n+m})$ funksiyaning bog‘lovchi tenglamalarni qanoatlantiruvchi shartli ekstremumini topish uchun Lagranjning noma'lum koeffitsientlar usulini keltiramiz. Buning uchun quyidagi yordamchi funksiyani kiritamiz

$$F(x) = f(x) + \lambda_1 \phi_1(x) + \cdots + \lambda_m \phi_m(x),$$

bu yerda $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ noma'lum ko‘paytuvchilar deb nomlanuvchi sonlardan iborat.

Kiritilgan $F(x)$ funksiyaning shartsiz ekstremumi (ya'ni avval kiritilgan ko‘p o‘zgaruvchili funksiya ekstremumi ma'nosida), biz qarayotgan $Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

[37] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

funksiyaning shartli ekstremumi bo‘ladi. Biz qidirayotgan $x_0 = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots x_{n+m}^{(0)}\right)$ nuqtani va $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ sonlarni topish uchun

$$\begin{cases} \phi_1(x) = 0, & i = 1, 2, \ldots, m \\ \dfrac{\partial F(x)}{\partial x_j} = 0, & j = 1, 2, \ldots n+m \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yechish yetarli bo‘ladi, chunki noma'lumlarning umumiy soni va sistemadagi tenglamalar soni $n + 2m$ ga teng.

Masalan, $z = xy$ funksiyaning $x^2 + y^2 = 2$ tenglikni qanoatlantiruvchi shartli ekstremumini topish uchun yordamchi $F(x, y) = xy + \lambda \cdot \left(x^2 + y^2\right)$ Lagranj funksiyani kiritib, bu funksiyaning shartsiz ekstremumini topamiz. λ noma'lum ko‘paytuvchi va ekstremum nuqtasi uchun quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} = y + 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = x + 2\lambda y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ (x - y)(1 - 2\lambda) = 0 \\ (x + y)(1 + 2\lambda) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ \lambda = \dfrac{1}{2}, \; x = -y \\ x = y, \; \lambda = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{1}{2}, (1, -1), (-1, 1) \\ (1,1), (-1,-1), \lambda = -\dfrac{1}{2} \end{array} \right.$$

Demak, $\lambda = \frac{1}{2}$ bo‘lganda $F(x, y) = xy + \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$.

$(1, -1)$ va $(-1, 1)$ statsionar nuqtalarda funksiyani tekshiramiz.

$(1, -1)$ nuqtada $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 1$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 1$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 1$ va $d^2F = (dx + dy)^2 \geq 0$ bo‘lgani uchun, $F(x, y)$ funksiya $(1, -1)$ va $(-1, 1)$ nuqtalarda minimumga erishadi. U holda $z = xy$ funksiya esa shu nuqtalarda shartli minimumga erishadi va $z_{\min} = -1$.

Agar $\lambda = -\frac{1}{2}$ bo‘lsa, $F(x, y) = xy - \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$ va F(x,y) funksiya $(1, 1)$ va $(-1, -1)$ statsionar nuqtalarda maksimumga erishadi, u holda $z = xy$ funksiya esa bu nuqtalarda shartli maksimumga erishadi va $z_{\max} = 1$.

Shartli ekstremum va chegaralangan Hessian

Shartli ekstremum topishda maqsad funksiyaga ikkinchi tartibli hosilalarni qo‘llab, uni matrisaviy ko‘rinishda ifodalanilishi odatda chegaralangam Hessian deyiladi.

Masalan, byudjetga $M - P_1 X_1 - P_2 X_2 = 0$ chegaralar o‘rnatilganda $U(X_1, X_2)$ fodalilik funksiyasini maksimallashtirish masalasini o‘rganaylik. Bu holda Lagranj funksiyasi

$$G = U(X_1, X_2) + \lambda(M - P_1 X_1 - P_2 X_2)$$

Birinchi tartibli hosilalarni nolga tenglab, zaruriy sart yordamida quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$G_1 = U_1 - \lambda P_1 = 0 \qquad (1)$$

$$G_2 = U_2 - \lambda P_2 = 0 \qquad (2)$$

$$G_\lambda = M - P_1 X_1 - P_2 X_2 = 0 \qquad (3)$$

Bundan X_1 and X_2 optimallikga erishiladigan nuqtalar aniqlanadi.

(1), (2) va (3) larni mos ravishda X_1, X_2 va λ bo‘yicha differensiallab, ikkinchi tartibli xususiy hosilalar yordamida chegaralangan Hessianni hosil qilamiz

$$\mathbf{H}_B = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & -P_1 \\ U_{21} & U_{22} & -P_2 \\ -P_1 & -P_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Ko‘rib turibdiki, $\mathbf{H}_B$ chegaralangan Hessiandan ko‘rinib turibdiki, u odatdagi Hessiandan bitta ortiq satr va ustunga ega bolib, unda odatda manfiy ishorali narxlar joylashgan bo‘ladi.

Lagranj ushulini shartlar soni ko‘p bo‘lgan holda ham qo‘llash mumkin, lekin biz soddalik uchun faqat bitta shatli masalani o‘rganamiz.

Bir shartli ekstremum uchun Lagranj optimallik shartlari:

Maximim uchun

• Agar maqsad funksiyasi ikki o‘zgaruvchili bo‘lsa($\mathbf{H}_B$ 3×3 o‘lchovli matrisa), u holda $|\mathbf{H}_B| > 0$.

• Agar maqsad funksiyasi uch o‘zgaruvchili bo‘lsa($\mathbf{H}_B$ 4×4 o‘lchovli matrisa), u holda $|\mathbf{H}_B| < 0$ va tartiblablangan bosh minorlar $|\mathbf{H}_B| > 0$.

Minimum uchun

• Agar maqsad funksiyasi ikki o‘zgaruvchili bo‘lsa($\mathbf{H}_B$ 3×3 o‘lchovli matrisa), u holda $|\mathbf{H}_B| < 0$.

• Agar maqsad funksiyasi uch o‘zgaruvchili bo‘lsa($\mathbf{H}_B$ 4×4 o‘lchovli matrisa), u holda $|\mathbf{H}_B| < 0$ va tartiblablangan bosh minorlar $|\mathbf{H}_B| < 0$.

Misol. $U = 4X^{0.5}Y^{0.5}$ foydalilik funksiyasi bo‘yicha X mahsulatdan J2 birlik va Y mahsulotdan J8 birlik olish imkoniyati maqul bo‘lsin. Agar unuing jamgarmasi J100 bo‘lsa, X va Y mahsulotlarning shunday kombinatsiyasini tuzingki, bunda foydalilik maksimal bo‘lsin va uni chegaralangan Hessiandan foydalanib tekshiring.

Yechish. Lagranj funksiyasi

$$G = 4X^{0.5}Y^{0.5} - \lambda\left(100 - 2X - 8Y\right)$$

Masimumning BESh dan foydalanib, differnsiallab va nolga tenglab

$$G_X = 2X^{-0.5}Y^{0.5} - 2\lambda = 0 \qquad (1)$$

$$G_Y = 2X^{0.5}Y^{-0.5} - 8\lambda = 0 \qquad (2)$$

$$G_\lambda = 100 - 2X - \left(-8Y\right) = 0 \qquad (3)$$

(1) dan

$$X^{-0.5}Y^{0.5} = \lambda$$

(2) dan

$$0.25X^{-0.5}Y^{0.5} = \lambda$$

Shu sababli

$$X^{-0.5}Y^{0.5} = 0.25X^{0.5}Y^{-0.5}$$

Har ikki tomonni $4X^{0.5}Y^{0.5}$ ga ko‘paytirib

$$4Y = X \qquad (4)$$

(4) ni (3) ga qo‘yib

$$100 - 2(4Y) - 8Y = 0$$

$$Y = 6.25$$

va shunday qilib (4) dan $X = 25$

(1), (2) va (3) ifodalarni differensiallab, ikkinchi tartibli hususiy hosilalardan tuzilgan Hassian matrisasini hosil

$$\mathbf{H}_B = \begin{bmatrix} U_{XX} & U_{XY} & -P_X \\ U_{YX} & U_{YY} & -P_Y \\ -P_X & -P_Y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -X^{-1.5}Y^{0.5} & X^{-0.5}Y^{-0.5} & -2 \\ X^{-0.5}Y^{-0.5} & -X^{0.5}Y^{-1.5} & -8 \\ -2 & -8 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -0.02 & 0.08 & -2 \\ 0.08 & -0.32 & -8 \\ 2 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

Bu matrisa determinantini uning uchinchi satr elementlari bo‘yicha yoyib hisoblaymiz

$$|\mathbf{H}_B| = -2(-0.64 - 0.64) + 8(0.16 + 0.16) = 2.56 + 2.56 = 5.12 > 0$$

va maksimum uchun shart bajarildi. [38]

Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya uchun ko‘p sonly shartlar asosidagi ekstremum

Quyida erkli o‘zgaruvchilari uchtadan ko‘p bo‘lgan funksiya uchun bitta shartga ega shartli ekstremum masalasini qaraymiz.

Shartlar bir nechta bo‘lgan holda ham Lagranj funksiyasini tuzish mumkin. m o‘zgaruvchili r ta chegaraviy shartli masala uchun ikkinchi tartibli hosilalar yordamida maqsad funksiya uchun optimallik shartlari, bosh minorlarning ishoralari $\mathbf{H}_B$ uchun

maximum uchun $(-I)^{m-r}$

minimum uchun $(-I)^{r}$

bo‘lishi kerak.

“Chegaraviy saqlash” deganda asosiy Hessiandan chegaralarni yo‘qotish emas, ya’ni oxirga satr va ustunlar, narxlarni aniqlovchi qiymatlarni o‘chirish emas. Bu faqat tartibi $\geq(1+2r)$ katta bosh minorlarga tegishli. Masalan, byudjetga $M = P_1X_1 + P_2X_2 + P_3X_3$ chegara qo‘yilganda, $U = U(X_1, X_2, X_3)$ foydalilik funksiyasini maksimizatsiyalash uchun r=1 ta shart mavjud. Shuning uchun tartibi

$$(1 + 2r) = (1 + 2) = 3$$

---

[38] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

dan katta bo‘lgan bosh minorlarni qaraymiz

Uch o‘zgaruvchili to‘rtinchi tartibli Hessian uchun $\mathbf{H_B}$ bosh minor musbat deb qatash, tartibi 3 yoki undan yuqori bo‘lishi kerak. Talab funksiyasi uchun maksimum:

m=4 bo‘lganda $|\mathbf{H}_B|$ bosh minor

$$(-1)^{m-r}=(-1)^{4-1}=(-1)^3=-1<0$$

ishoraga ega va uchinchi tartibli $|\mathbf{H}_B|$ bosh minor

$$(-1)^{m-r}=(-1)^{3-1}=(-1)^2=+1>0$$

ishoraga ega bo‘lishi kerak.

Ular yuqorida o‘rganilgan ush o‘lchovli asaiy qoidalari kabidir. Quyidagi misollarda optimizatsiya uchun ikkinchi tartibli shartlar uncha ko‘p bo‘lmagan o‘zgaruvchili va ko‘p bo‘lmagah shartlar asosida Hassiandan foydalanish zarurligini ko‘rsatadi. Iqtisodiy matematikani chuqurroq o‘rganmoqchi bo‘lgan talabalar bu usuni murakkab masalalarni hal qilishda naqadar foydaliligini anglab yetadilar.[39]

6.3.2. Yopiq sohadagi ekstremumlar

***Teorema**. (**Veyershtrass teoremasi**). Agar $z=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ ko‘p o‘zgaruvchili funksiya chegaralangan yopiq B to‘plamda uzluksiz bo‘lsa, u holda bu funksiya B to'plamda chegaralangan bo‘lib, shu to‘plamda o‘zining eng katta va eng kichik qiymatlariga (global ekstremumlarga) erishadi, ya'ni shunday $K>0$ musbat son, $x_0=\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\dots,x_n^{(0)}\right)\in B$ va $y_0=\left(y_1^{(0)},y_2^{(0)},\dots,y_n^{(0)}\right)\in B$ nuqtalar mavjudki, ular uchun quyidagi munosabatlar o‘rinli bo‘ladi: $|f(x)|\le K \quad \forall x\in B$ va*

$$f(x_0)=\sup_{x\in B}\{f(x)\},\qquad f(y_0)=\inf_{x\in B}\{f(x)\}$$

Shuni ta'kidlash lozimki, funksiya global ekstremum qiymatlarga B to‘plamning chegaraviy nuqtalarida ham erishishi mumkin.

1 - misol. $z=e^{-x^2-y^2}\cdot(2x^2+3y^2)$ funksiyaning $x^2+y^2\le 4$ tengsizlik bilan berilgan $\bar{S}(0,2)$ yopiq shardagi eng katta va eng kichik qiymatlarini topaylik.

Dastavval $S(0,2)$ ochiq sohadagi statsionar nuqtalarni topamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{-x^2-y^2}\left[-2x(2x^2+3y^2)+4x\right]=2x\cdot e^{-x^2-y^2}\left[2-(2x^2+3y^2)\right]$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{-x^2-y^2}\left[-2y(2x^2+3y^2)+6y\right]=2y\cdot e^{-x^2-y^2}\left[3-(2x^2+3y^2)\right]$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0\\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\ \Rightarrow\ y\cdot(1-y^2)=0\\[2ex] y=0\Rightarrow x\cdot(1-x^2)=0\end{cases}\Rightarrow$$

Demak, $(0,0),(0,\pm1)$ va $(\pm1,0)$ nuqtalar qaralayotgan funksiyaning statsionar nuqtalari bo‘ladi. Ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni keltiramiz:

[39] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{-(x^2+y^2)}\left(8x^4 + 12x^2y^2 - 20x^2 - 6y^2 + 4\right) = a_{11}(x,y)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{-(x^2+y^2)}\left(8x^3y + 12xy^3 - 20xy\right) = a_{12}(x,y)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{-(x^2+y^2)}\left(12y^4 + 8x^2y^2 - 30y^2 - 4x^2 + 6\right) = a_{22}(x,y)$$

Bundan $(0,0)$ nuqtada $a_{11}(0,0) = 4,\ a_{12}(0,0) = 0,\ a_{22}(0,\,0) = 6$ bo‘lib $a_{11} > 0$ va $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 24 > 0$ bo‘lgani uchun $(0,0)$ nuqta lokal minimum nuqtasi bo‘ladi va $z(0,0) = 0$.

$(0,\pm 1)$ nuqtada $a_{11}(0,\pm 1) = -2e^{-1},\ a_{12}(0,\pm 1) = 0,\ a_{22}(0,\pm 1) = -10 \cdot e^{-1}$ bo‘lib, $a_{11} < 0$ va $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 20 \cdot e^{-2} > 0$ bo‘lgani uchun, $(0,\,\pm 1)$ nuqta lokal maksimum nuqtasi bo‘ladi va $z(0,\pm 1) = 3 \cdot e^{-1}$.

$(\pm 1,0)$ nuqtada $a_{11}(\pm 1,0) = -8e^{-1},\ a_{12}(\pm 1,0) = 0,\ a_{22}(\pm 1,0) = 2e^{-1}$ bo‘lib, $a_{11} < 0$ va $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = -16e^{-2} < 0$ bo‘lgani uchun, $(\pm 1,0)$ nuqta ekstremum nuqta emas.

Endi berilgan funksiyani $\bar{S}(0,2)$ sharning chegaraviy nuqtalarida, ya'ni $x^2 + y^2 = 4$ tenglikni qanoatlantiruvchi nuqtalarda tekshiramiz. $x^2 + y^2 = 4$ bo‘lsin, u holda
$$Z = e^{-(x^2+y^2)}\left(2x^2 + 3y^2\right) = e^{-4}\left[2\left(x^2 + y^2\right) + y^2\right] = e^{-4}\left(8 + y^2\right).$$
Bundan $x^2 + y^2 = 4$ bo‘lganda quyidagi tengsizlik kelib chiqadi
$$8 \cdot e^{-4} \le z = e^{-4}\left(8 + y^2\right) \le e^{-4} \cdot 12,$$
ya'ni $z(\pm 2,0) = \frac{8}{e^4}$ va $z(0,\pm 2) = \frac{12}{e^4}$ sonlar funksiyaning $\bar{S}(0,2)$ shar chegarasidagi eng kichik va eng katta qiymatlarini beradi.

Berilgan funksiyaning $\bar{S}(0,2)$ yopiq shardagi global ekstremumlari, ya'ni uning eng katta va eng kichik qiymatlarini topish uchun funksiyaning $S(0,2)$ ochiq shardagi va chegaradagi maksimumlari ichidan eng kattasini olsak va shuningdek $S(0,2)$ ochiq shardagi va chegaradagi minimumlar ichidan eng kichigini olsak, mos ravishda global maksimum va global minimumlarni hosil qilamiz. Qaralayotgan holda funksiya $(0,\,\pm 1)$ nuqtada $z(0,\pm 1) = \frac{3}{e}$ lokal maksimumga erishadi. Chegaradagi maksimum qiymat esa $z(0,\pm 2) = \frac{12}{e^4}$ ga teng. $\frac{12}{e^4} < \frac{3}{e}$ bo‘lgani uchun, funksiya $\bar{S}(0,2)$ shardagi eng katta qiymatga $(0,\,\pm 1)$ nuqtada erishdi va $Z_{\max} = \frac{3}{e}$.

$S(0,2)$ ochiq sharda funksiya $(0,\,0)$ nuqtada minimumga erishadi va $z(0,\,0) = 0$. Chegaraviy nuqtalardagi minimum $z(\pm 2,0) = \frac{8}{e^4} > 0$ bo‘lgani uchun, funksiya $\bar{S}(0,2)$ sharda eng kichik qiymatga $(0,\,0)$ nuqtada erishadi va $Z_{\min} = 0$.

2 - misol. $z = 2x^2 + y^2 + 4x - 2$ funksiyaning $x^2 + y^2 \le 9$ doiradagi eng katta va eng kichik qiymatlarini topamiz.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 4x + 4 = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y = 0. \end{cases}$$

sistemani yechib, funksiyaning statsionar nuqtalarni aniqlaymiz: $M(-1;0)$-yagona statsionar nuqta qaralayotgan sohaga tegishli. Funksiyaning shu nuqtagi qiymatini hisoblaymiz: $z(-1;0) = -4$.

Endi funksiyaning $x^2 + y^2 = 9$ aylanadagi qiymatlarini o'rganamiz. $y^2 = 9 - x^2$ ifodani berilgan funksiyaga qo'yib $z = x^2 + 4x + 7$ bir o'zgaruvchili funksiyani hosil qilamiz. Shu bir o'zgaruvchili funksiyani ekstremumga tekshiramiz. $z' = 2x + 4 = 0,\ x = -2.$ Funksiyani statsionar nuqtadagi va sohaning chetlaridagi $(-3 \le x \le 3)$ qiymatlarini hisoblaymiz: $z(-3) = 4,\ z(-2) = 3,\ z(3) = 28.$

Demak, $z = 2x^2 + y^2 + 4x - 2$ funksiyaning $x^2 + y^2 \le 9$ doiradagi eng kichik qiymatiga sohaning $(-1;0)$ ichki nuqtasida erishadi: $z_{\min} = z(-1;0) = -4$, eng katta qiymatiga esa $(3;0)$-sohaning cherasida erishadi: $z_{\max} = z(3;0) = 28.$

6. 3.3. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar diffrensial hisobining iqtisodiyotga tatbiqlai

Tovarning har xil turlarini ishlab chiqarishdan daromad olish.

Faraz qilaylik $x_1, x_2, \ldots, x_m$–ishlab chiqarilayotgan m turdagi turli xil tovarning miqdori, ularning birlik miqdordagi narxi mos ravishda $P_1, P_2, \ldots P_m$ bo'lsin. Bu tovarlarni ishlab chiqarishga ketadigan xarajat funksiyasi berilgan bo'lsin: $C = C(x_1, x_2, \ldots x_m)$.

U holda qo'shimcha qiymat funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi.

$$\Pi = P_1x_1 + P_2x_2 + ... + P_mx_m - C(x_1, x_2, ..., x_m) \qquad (1)$$

Tabiiyki, qo'shimcha qiymat maksimumini izlash, (1)-ko'p o'zgaruvchili funksiyaning $x_i \ge 0$ da (boshqa cheklanishlar qo'yilmaganda) lokal ekstremumini izlash kabidir:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1,2,...,m.$$

Bu shart x_i o'zgaruvchilarga nisbatan algebraik tenglamalar sistemasiga olib keladi:

$$P_i - \frac{\partial C}{\partial x_i} = 0,\ i = 1,2,...,m, \qquad (2)$$

(2) tenglamalar sistemasi iqtisodiyotning ma'lum qoidasini amalga oshiradi: tovarning oxirgi qiymati (narxi) bu tovarni ishlab chiqarishga sarflangan xarajatlarga teng.

Shuni ta'kidlash kerakki, (2) tenglamalar sistemasini yechish jarayoni xarajat funksiyasining ko'rinishiga bog'liq va ancha murakkab bo'lishi mumkin.

Masalan, korxona narxi $p_1 = 8$ pul birligida bo'lgan mahsulotdan x miqdorda, narxi $p_2 = 10$ pul birligida bo'lgan mahsulotdan y miqdorda ishlab chiqarayotgan bo'lsin. C-xarajat funksiyasi $C = x^2 + xy + y^2$ ko‘rinishda bo‘lsin. U holda, (1) formulaga asosan, qo‘shimcha qiymat funksiyasi ikki o‘zgaruvchining funksiyasidan bo‘ladi:

$$\Pi(x, y) = 8x + 10y - x^2 - xy - y^2.$$

Ekstremumning zaruriy sharti chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga olib keladi:

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x + 2y = 10 \end{cases}.$$

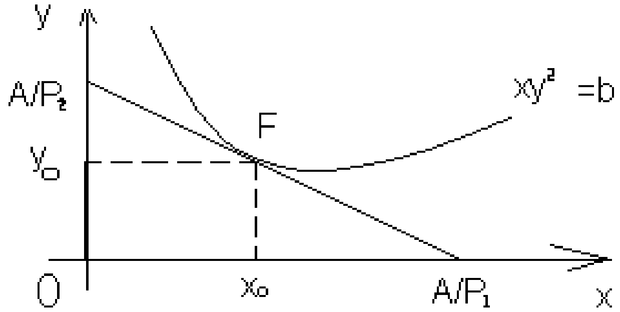
Sistemaning yechimi $(2;4)$ nuqtada $a_{11} = \dfrac{\partial^2 \Pi(2;4)}{\partial x^2} = -2 < 0$ va $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 3 > 0$ bo‘lgani uchun ,bu nuqta qo‘shimcha qiymat funksiyasining lokal maksimumini aniqlaydi va $\Pi_{\max} = \Pi(2;4) = 28.$

Resurslarni eng yaxshi natija beradigan qilib taqsimlash. Faraz qilaylik X va Y resurslarning xarajat funksiyasi $u = p_1 x + p_2 y$ ko‘rinishga ega bo‘lsin, bu yerda p_1 va p_2- mos ravishda bu faktorlarning bahosi. Ishlab chiqarish funksiyasi $u = a_0 xy^2$ bo‘lganda resurslarni optimal taqsimlash masalasini qaraylik, a_0-?

Resurslarni optimal taqsimlashni aniqlaydigan $F(x_{0,}y_0)$ nuqtada xarajat va chiqarish funksiyalari urinadi.

Bu chiziqlar mos ravishda $a_0 xy^2 = c,$ $p_1 x + p_2 y = A$ yoki $y = (b/x)^{1/2},$ $y = -(p_1/p_2)x + A/p_2$ tenglamalar bilan aniqlanadi, bu yerda C>0 va A>0 – o‘zgarmas sonlar, $b = c/a_0$. Bu chiziqlarning urinish sharti quyidagi tenglama bilan beriladi:

$$\left. \left[\left(b/x \right)^{1/2} \right]' \right|_{x_0} = -p_1/p_2$$



Bu tenglamadan $x_0 = b^{1/3}(p_2/2\ p_1)^{1/3}$ qiymat topiladi. U holda chiqarish funksiyasidagi $y_0 = \left(b/x_0 \right)^{1/2} = b^{1/3}\left(2\,p_1/p_2 \right)^{1/6}$ qiymat topiladi. Demak, resurslarnig optimal taqsimlanishi $x_0 / y_0,\ p_1 : 2p_2$ munosabat orqali aniqlanar ekan.

Mahsulot ishlab chiqarishning qo‘shimcha qiymatini maksimallashtirish

Qo‘shimcha qiymat funksiyasi odatda quyidagi formula bilan ifodalanadi:

$$\Pi(K, L) = pF(K, L) - WL - kK, \qquad (3)$$

bu yerda $F(K,L)$- ishlab chiqarish funksiyasi, p- mahsulot bahosi. W va k-mos ravishda mehnatga va kapital xarajatlarga faktor narxlar, L va K mos ravishda mehnat resurslari va kapitalning xarajatlari.

Qo‘shimcha qiymat maksimumini aniqlashga doir misollar qaraymiz.

1. Agar (K_0, L_0) nuqtada qo‘shimcha qiymat funksiyasi (3) maksimal qiymatni qabul qilsa, (K_0, L_0) nuqta optimal reja deyiladi. Optimal reja F da ishlab chiqarish funksiyasi F ni o‘rniga qo‘yib oxirgi normasini toping.

Lokal ekstremum nuqtasida qo‘shimcha qiymat funksiyasi $\Pi(K,L)$ ning birinchi hosilalari nolga teng, ya'n’

$$pF'_K(K_{0,}L_0) - k = 0,$$
$$pF_L(K_{0,}L_0) - W = 0.$$

Ma'l’mki, almashtirishning oxirgi normasi $\mu = -{F'_l}/{F'_k}$ formula bo‘yicha hisoblanadi, bundan optimal reja uchun $\mu = -W/k$ kelib chiqadi.

2. Agar $F(K,L) = 2(KL)^{1/3}$ bo‘lsa, qo‘shimcha qiymat funksiyasi (3) ning maksimumi va optimal rejani toping.

Qo‘shimcha qiymat funksiyasi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi

$$\Pi(K,L) = 2p(KL)^{1/3} - WL - RK.$$

Lokal ekstremum shartlari optimal rejaning K_0 va L_0 koordinatalariga nisbatan, ikkita chiziqli tenglamalar sistemasiga olib keladi.

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3} h L_0^{\frac{1}{3}} K_0^{\frac{2}{3}} = k \\ \dfrac{2}{3} P K_0^{\frac{1}{3}} L_0^{-\frac{2}{3}} = W \end{cases}$$

Bundan optimal rejaning koordinatalarini topamiz:

$$K_0 = {\left({2p}/{3}\right)^3}\Big/{\left({R^2}/{W}\right)}, \quad L_0 = {\left({2P}/{3}\right)^3}\Big/{\left(RW^2\right)}$$

Bu qiymatlarni qo‘shimcha qiymat funksiyasiga qo‘ysak П funksiya maksimumini hosil qilamiz:

$$\prod\nolimits_{max} = {\left({2p}/{3}\right)^3}\Big/{(R\mathrm{W})}$$

Eng kichik kvadratlar usuli

Eng kichik kvadratlar usuli approksimatsiya yoki funksiyani ayrim nuqtalarda ma’lum qiymatlari bo‘yicha taxminan tiklash masalasiga tegishlidir. Tajribada ko‘pincha formulalarni eng yaxshi yo‘l bilan empirik tanlash masalasi kelib chiqadi. Masala quyidagicha ifodalanadi: y noma'lum kattalikning n ta nuqtalarda kuzatishlari berilgan:

$$M_1, M_2, \ldots, M_n \tag{4}$$

va mos qiymatlar olingan

$$U_1, U_2, \ldots, U_n \tag{5}$$

Shunday $U = f(M)$ funksiyani tanlab olish kerakki, u o‘lchanadigan kattalik Y ning o‘lchash nuqtalari $\{M_i\}$ va natijalari $\{U_i\}$ orasidagi bog‘liqlikni imkoni boricha aniq ifoda etsin.

Shunday qilib, empirik formulalarni topish masalasi ikki bosqichdan iborat:

1) $f(M)$ bog‘lanishning umumiy ko‘rinishini topish yoki f funksiyaning o‘zgarmas parametrlari (koeffitsientlari) aniqlik darajasini ko'rsatish;

2) noma'lum koeffitsientlar (4) kuzatish nuqtalarida shunday tanlab olinadiki, $f(M)$ funksiya berilgan (5) qiymatlarga iloji boricha aniq javob bersin.

Faraz qilaylik 1-bosqichda empirik formula o‘z ichiga ma'lum baza funksiyalar majmuini hosil qilsin.

$$y_1(M),\ y_2(M), \ldots, y_m(M) \tag{6}$$

ya'ni empirik formula quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$f(M) = a_1 y_1(M) + a_2 y_2(M) + \ldots + a_m y_m(M) \tag{7}$$

bu yerda,

$$a_1, a_2, \ldots, a_m \tag{8}$$

empirik funksiyaning noma'lum parametrlari.

2-bosqich noma'lum parametrlar (8) ni aniqlashdan iborat. Ularni shunday tanlab olish kerakki, (7) funksiyaning qiymatlari (4) nuqtalarda (5) o‘lchangan qiymatlardan iloji boricha kam farq qilsin.

Eng kichik kvadratlar usuli $\delta_i = U_i - f(M)$ xatoliklarning kvadratlari yig‘indisini minimallashtirishdan iborat. Demak, (7) funksiya uchun, ushbu

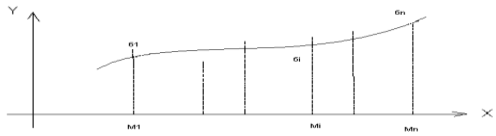
$$S(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (U_i - f(M_i))^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(U_i - \sum_{k=1}^{m} a_k y_k(M_i) \right) \tag{9}$$

funksiya barcha m argumenti bo‘yicha xususiy hosilalarni topish kerak va ularni 0 ga tenglash lozim. Bundan m ta noma'lum $a_1, a_2, \ldots, a_m$ parametrlarga nisbatan m ta chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi:

$$A_{j1} a_1 + A_{j2} a_2 + \ldots + A_{jm} a_m = B_j,\ \ j = 1,2,\ldots,m. \tag{10}$$

Bu tenglamaning koeffitsientlari va ozod hadlari quyidagi formulalar bo‘yicha aniqlanadi:

$$A_{jk} = A_{kj} = \sum_{j=1}^{n} y_j(M_i) y_k(M_i),\ \ B_j = \sum_{i=1}^{n} U_i y_i(M_i),\ \ j,k = 1,2,\ldots m$$



$S(a_1,..,a_n)$ (9) funksiya musbat, pastga qavariq, va chegaralangan bo‘lgani uchun, (10) tenglamalar sistemasining yechimi, S-funksiyaning lokal maksimumi nuqtasining koordinatalaridan iborat bo‘ladi.

Iqtisodiy statistikada ma'lumotlarni qayta tekshirishda empirik formulaga yaqinlashish masalasini hal etishda $U = f(M)$ funksiyani bir o‘zgaruvchining chiziqli funksiyasi ko‘rinishida izlash keng tarqalgan. Bu holda (4) o‘lchash nuqtalarining majmui $x_1 \dots x_n$ qiymatlaridan iborat bo‘lib, (6) funksiyalar majmui esa, ikkita funksiya, $y_1(x) = x$ va $y_2(x) = x$ dan iborat.

Empirik formula (7) ning ko'rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$y = ax + b.$$

No'malum parametrlar a va b uchun ushbu chiziqli tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi:

$$\begin{cases} A_{11}\ a + A_{12}\ b = B_1 \\ A_{21}\ a + A_{22}\ b = B_2 \end{cases};$$

bu yerda koeffitsient va ozod hadlar quyidagi tengliklar bilan topiladi.

$$A_{11} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\ ,\ A_{12} = A_{21} = \sum_{i=1}^{n} x_i\ ,\ A_{22} = n$$

$$B_1 = \sum_{i=1}^{n} U_i x_i\ ,\ B_2 = \sum_{i=1}^{n} U_i\ .$$

Masala,

x_i	*50*	*70*	*90*	*110*	*130*
y_i	*0,2*	*0,5*	*0,8*	*1,1*	*1,3*

avtomobil poygasi haqida yuqoridagi ma’lumotlar saosida(bunda *x* - masofa(ming km.) va *y* – yonilg‘i sarfi (l /ming km.).), *x* va *y* o‘zgaruvchilar orasidagi bog‘lanishni chiziqli ekanligini bilgan holda, *y* = *ax* + *b* empirik formulani eng kichik kvadratlar usulida tuzaylik.

$\sum_{i=1}^{n} x_i,\ \sum_{i=1}^{n} y_i,\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2,\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i -$ yigindilarni hisoblaymiz.

Hisoblashlar quyidagi jadvalda ko‘rsatilgan.

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1	50	0,2	10	2500
2	70	0,5	35	4900
3	90	0,8	72	8100
4	110	1,1	121	12100
5	130	1,3	169	16900
$\sum$	**450**	**3,9**	**407**	**44500**

Normal tenglamalar sistemasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\begin{cases} 44500a + 450b = 407 \\ 450a + 5b = 3{,}9 \end{cases}$$

Sistemening yechimi $a = 0{,}014, \quad b = -0{,}48$.

Demak, chiziqli bog‘lanish $y = 0{,}014x - 0{,}48$ ko‘rinishda bo‘ladi.

Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya xususiy hosilalarini iqtisodiyotda qo‘llanishi

Umumiy holda X tovarga bo‘lgan talab ko‘p o‘zgaruvchi funktsiya bo‘ladi, ya’ni sotib olinayotgan tovarning miqdori Q_x uning narxi P_x, ikkilamchi xom-ashyo narxi – P_y, iste’molchining o‘rtacha daromad darajasi Y, yil fasllari t va hokazolarga bog‘liq.

$\frac{\partial Q_x}{\partial P_x}$ xususiy hosila Q_x talabning faqat P_x tovar narxi o‘zgarganda o‘zgarish tezligining o‘lchov birligi bo‘lib xizmat qiladi, bu holda qolgan barcha o‘zgaruvchilar o‘zgarmas deb faraz qilinadi. Xuddi shunga o‘xshash xususiy hosila $\frac{\partial Q_y}{\partial Q_y}$ xom-ashyoning narxi P_y o‘zgarganda X tovarga bo‘lgan talab qanday tezlikda o‘zgarishini ko‘rsatadi.

Xususiy hosilalarning ishorasidan foydalanib X va Y tovarlarning xarakterini topish mumkin, aynan:

agar, $\frac{\partial Q_x}{\partial P_y} > 0$ va $\frac{\partial Q_y}{\partial P_x} > 0$ bo‘lsa, X va Y tovarlar o‘rin bosuvchi.

agar, $\frac{\partial Q_x}{\partial P_y} < 0$ va $\frac{\partial Q_y}{\partial P_x} < 0$ bo‘lsa, X va Y tovarlar o‘rin to‘ldiruvchi tovarlar hisoblanadi.

Masalan. Avtomobillarga ehtiyot qismlari ishlab chiqaradigan firma o‘z mahsulotini ichki va tashqi bozorga chiqarish imkoniyatiga ega.

Bu yerda, $P_1 + 8Q_1 = 421$ tashqi bozordagi talab, $P_2 + 2{,}5Q_2 = 80$ esa ichki bozordagi talab, Q_1 va Q_2 mos ravishda tashqi va ichki bozordagi mahsulot miqdorlari hajmi, P_1 va P_2 mos ravishda tashqi va ichki bozordagi narxlar.

Firmaning umumiy harajatlari $TC = 250 + 5Q$, bu erda $Q = Q_1 + Q_2$.

Agar firma narxlarning o‘zgartirish siyosatini o‘tkazish imkoniyatiga ega bo‘lsa, maksimal foydaga ega bo‘lish uchun har qaysi bozorda firmaning mahsulotiga qanday narx o‘rnatishi kerakligini va firmaning foydasini aniqlaylik.

Firmaning umumiy daromadi tashqi va ichki bozordagi daromadlar yig‘indisiga teng, ya’ni

$$R = R_1 + R_2 = P_1Q_1 + P_2Q_2 = \left(421 - 8Q_1\right)Q_1 + \left(80 - 2{,}5Q_2\right)Q_2 =$$
$$= 421Q_1 - 8Q_1^2 + 80Q_2 - 2{,}5Q_2^2.$$

Firmaning umumiy xarajati: $TC = 250 + 5\left(Q_1 + Q_2\right)$.

Demak, foyda funktsiyasi

$$\Pi = R - TC = 421Q_1 - 8Q_1^2 + 80Q_2 - 2,5Q_2^2 - 250 - 5Q_1 - 5Q_2.$$

Endi firmaning foydasi maksimum bo‘lganda Q_1 va Q_2 miqdorlarning qiymatini aniqlash masalasini qaraymiz. Buning uchun ekstremumning zaruriy shartidan foydalanamiz.

$$\begin{cases} \partial\pi/\partial Q_1 = 421 - 16Q_1 - 5, \\ \partial\pi/\partial Q_2 = 80 - 5Q_2 - 5; \end{cases} \quad \begin{cases} 416 - 16Q_1 = 0 \\ 75 - 5Q_2 = 0 \end{cases}$$

Bu tenglamalar sistemasini yechib $Q_1 = 26$, $Q_2 = 15$ qiymatlarni topamiz.

Ekstremumning yetarli shartni shu nuqtada tekshiramiz:

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial Q_1^2} = -16 < 0, \quad \frac{\partial^2\Pi}{\partial Q_2^2} = -5, \quad \frac{\partial^2\Pi}{\partial Q_1 \partial Q_2} = 0.$$

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial Q_2^2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial Q_1^2} - \left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial Q_1 \partial Q_2}\right)^2 = (-16)\cdot(-5) - 0 = 80 > 0$$

Demak, foyda funksiyaning maksimumga erishish sharti bajariladi. Shunday qilib, firma maksimum foydaga ega bo‘lishi uchun tashqi bozorga 26 hajmda, ichki bozorga esa 15 hajmdagi mahsulot chiqarishi kerak. Q_1 va Q_2 miqdorlarning bu qiymatilarini talab funksiyaga qo‘yib P_1 va P_2 narxlarni topamiz

$$P_1 = 421 - 8Q_1 = 421 - 8\cdot 26 = 213, P_2 = 80 - 2,5Q_2 = 80 - 2,5\cdot 15 = 42,5.$$

Demak, tovarning tashqi bozordagi narxi 213 pul birligi, ichki bozordagi narxi esa 42,5 pul birligi bo‘lib, bu holda firmaning foydasi

$$\Pi = R - TC = 421Q_1 - 8Q_1^2 + 80Q_2 - 2,5Q_2^2 - 250 - 5Q_1 - 5Q_2 =$$
$$= 421\cdot 26 - 8\cdot 26^2 + 80\cdot 15 - 2,5\cdot 1,5^2 - 250 - 5\cdot 26 - 5\cdot 15 = 5720,5$$

pul birligini tashkil etadi.

Ishlab chiqarishning x va y faktoriga bog‘liq $z = f(x, y)$ ishlab chiqarish funksiyasi berilgan bo‘lsin.

Ishlab chiqishning chegaraviy unumdorlik faktorlari quyidagicha aniqlanadi

$$\omega_x = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad \omega_y = \frac{\partial z}{\partial y},$$

bunda $\omega_x - x$ faktorning chegaraviy unumdorligi,

$\omega_y - y$ faktorning chegaraviy unumdorligi.

Ishlab chiqarish ikki faktorining chegaraviy aralashish me’yori esa quyidagicha aniqlanadi

$$\eta_{xy} = -\frac{\omega_y}{\omega_x} = -\frac{\partial z}{\partial y} : \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \eta_{yx} = -\frac{\omega_x}{\omega_y} = -\frac{\partial z}{\partial x} : \frac{\partial z}{\partial y}$$

bunda η_{xy} – ishlab chiqarish x faktorining ishlab chiqarish y faktoriga chegaraviy aralashish me’yori.

η_{yx} – ishlab chiqarish y faktorining x faktoriga chegaraviy aralashish me’yori.

Mahsulot ishlab chiqarishning ma’lum faktori bo‘yicha elastikligining xususiy qiymatlari quyidagicha aniqlanadi

$$\varepsilon_x = \frac{\partial z}{\partial x} : \frac{z}{x} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{x}{z} \quad \text{va} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial z}{\partial y} : \frac{z}{y} = \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{y}{z}$$

bunda ε_x – ishlab chiqarish hajmining x faktor bo‘yicha elastikligi,

ε_y – ishlab chiqarish hajmining y faktor bo‘yicha elastikligi.

Elastiklik koeffisienti ishlab chiqarishning bir faktori 1% ga o‘zgarganda va ikkinchi faktor o‘zgarmas bo‘lganda ishlab chiqarish hajmi qancha foizga o‘zgarishini anglatadi.

Misollar.

1 misol. $z = 4x^3 - xy^2 - 5y$ ishlab chiqarish funksiyasi bo‘lib, bunda $x-$mehnat kuchlariga xarajatlar, $y-$ investisiya xarajatlari. $x=1$ va $y=2$ bo‘lganda funksiya xususiy elastikligini hisoblaylik.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(4x^3 - xy^2 + 5y\right)'_x = 12x^2 - y^2, \frac{\partial z}{\partial y} = \left(4x^3 - xy^2 + 5y\right)'_y = -2xy + 5.$$

$$\mathrm{E}_x = \frac{x}{z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{4x^3 - xy^2 + 5y}\cdot\left(12x^2 - y^2\right), \mathrm{E}_y = \frac{y}{z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{4x^3 - xy^2 + 5y}\cdot(5 - 2xy).$$

$$\mathrm{E}_x(1;2) = \frac{1}{4-4+10}(12-4) = \frac{8}{10} = 0.8, \mathrm{E}_y(1;2) = \frac{2}{4-4+10}(5-4) = \frac{2}{10} = 0.2.$$

Demak, mehnat kuchlariga xarajatlar 1%ga ortsa,ishlab chiqarish hajmi 0.8%ga, investisiya xarajatlar 1% ga ortsa,ishlab chiqarish hajmi 0.2% ga ortadi.

2 misol. $\mathrm{Y} = F(K;\, L) = A\cdot K^{\alpha}\cdot L^{\beta}$ Kobba – Duglas ishlab chiqarish funksiyasining asosiy parametr va xarakteristikalarini aniqlaylik, bunda – Y – ishlab chiqarilayotgan mahsulot hajmi, L – mehnat xarajatlari, K – ishlab chiqarish fondlari hajmi, A, α, β – ishlab chiqarish funksiyasi ko‘rsatkichlarini ifodalovchi o‘zgarmas sonlar, bunda $A > 0$, $0 \le \alpha + \beta \le 1$.

Birinchi tartibli xususiy hosilalarni hisoblaymiz:

$\omega_L = \mathrm{Y}'_L = A\cdot\beta\cdot K^{\alpha}\cdot L^{\beta-1}$ – chegaraviy mehnat unumdorligi;

$\omega_K = \mathrm{Y}'_K = A\cdot\alpha\cdot K^{\alpha-1}\cdot L^{\beta}$ – chegaraviy mehnat invesitisiya unumdorligi iqtisodda ω_K chegaraviy jamg‘arma unumdorligi deyiladi.

Kobba – Duglas funksiyasining elastiklikni hisoblaylik

$$\mathrm{E}_K(F) = \frac{K}{F}\cdot\frac{\partial F}{\partial K} = \frac{K}{A\cdot K^{\alpha}\cdot L^{\beta}}\cdot A\cdot\alpha\cdot K^{\alpha-1}\cdot L^{\beta} = \alpha,$$

$$\mathrm{E}_L(F) = \frac{L}{F}\cdot\frac{\partial F}{\partial K} = \frac{K}{A\cdot K^{\alpha}\cdot L^{\beta}}\cdot A\cdot\beta\cdot K^{\alpha}\cdot L^{\beta-1} = \beta$$

Demak, $\alpha-$jamg‘armalar (investitsiyalar) bo‘yicha mahsulot ishlab chiqarish elastikligi, $\beta-$mahsulot ishlab chiqarishning mehnat xarajatlari bo‘yicha elastikligi.

K ishlab chiqarish fondlarining nisbiy 1% ga o‘zgarishi mahsulot ishlab chiqarishning nisbiy miqdorini taxminan α% ga o‘zgarishini keltirib chiqaradi.

Agar L mehnat xarajatlarining 1%ga o‘zgarishi mahsulot ishlab chiqarish miqdorini taxminan β % ga o‘zgartiradi.

Ikki faktorning aralash me’yorini aniqlaymiz.

$\eta_{KL} = -\frac{\omega_L}{\omega_K} = -\frac{A\beta K^{\alpha}L^{\beta-1}}{A\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta}} = -\frac{\beta K}{\alpha L}$ - asosiy jamg‘armalarning mehnat bilan chegaraviy aralashish normasi.

$\eta_{LK} = -\frac{\omega_K}{\omega_L} = -\frac{\alpha L}{\beta K}$ - mehnatning asosiy jamg‘armalar bilan aralashish chegaraviy me’yori.[40]

Keynes multiplikatori

Davlat sektori va xalqaro savdo o‘rganilganda, asosiy Keynes makroiqtisodiy modeli o‘ziga xos hisob hisoblanadi.

$$Y = C + I + G + X - M \qquad (1)$$

Iste’mol funksiyaning funksional munosabatlari

$$C = cY_d \qquad (2)$$

bu yerda c istemol uchun marjinal moillik va

$$M = mY_d \qquad (3)$$

bu by erda M import miqdori va m import uchun marjinal moillik va

$$Y_d = (1-t)Y \qquad (4)$$

bu yerda Y birlamchi daromad va t – to‘lovor miqdori, I investitsiya, G hukumat xarajatlari va X eksport - qat’iy belgilangan va C,m,t – berilgan parametrlar.

(2), (3) va (4) ni (1) ga qo‘yib quyidagini olamiz

$$Y = c(1-t)Y + I + G + X - m(1-t)Y$$

$$Y\left[1 - c(1-t) + m(1-t)\right] = I + G + X$$

$$Y = \frac{I+G+X}{1-c(1-t)+m(1-t)} = \frac{I+G+X}{1-(c-m)(1-t)} \qquad (5)$$

G va X mavjud bo‘lmagan holda, Keynesning asosiy modeli investitsiya moyillik darajasini dY/dI bo‘ladi. Ammo, investitsiya darajasini keltirib chiqarish uchun ko‘rilgan modelda G va X o‘zgarmas deb tasavur qilaylik. Shunda investitsiya darajasini (1) bo‘yicha xususiy hosila olish orqali topiladi. Demak,

$$\frac{\partial Y}{\partial I} = \frac{1}{1-(c-m)(1-t)}$$

Bundan tashqari davlat xarajatlari va eksport xajmi quyidagicha ifodalanadi:

$$\frac{\partial Y}{\partial I} = \frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{\partial Y}{\partial X} = \frac{1}{1-(c-m)(1-t)}$$

Misol.

$$Y = C + I + G + X - M$$

$$C = 0.8Y_d \quad M = 0.2Y_d \quad Y_d = (1-t)Y$$

$$t = 0.2 \quad G = 400 \quad I = 300 \quad X = 288$$

Keynesning makroiqtisodiy tizimga ko‘ra Y ning ko‘rinishi qanday bo‘ladi? Y qiymatini 2500 gacha oshirish uchun G ni qanchaga oshirish kerak ? Xarajatlar

---

[40] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

oshganda davlat budjeti qay tarafda o'zgaradi (profistit yoki difitsit)? To'lovlar balansichi ?

Yechish. C va Y orasida bogliqlikni aniqlaylik.

$$C = 0.8Y_d = 0.8(1-t)Y = 0.8(1-0.2)Y \qquad (1)$$

Keyin Y topish uchun biz (1) dagi va boshqa funksional bogliqliklardan

$$\begin{aligned} Y &= C + I + G + X - M \\ &= 0.8(1-0.2)Y + 300 + 400 + 288 - 0.2(1-0.2)Y \\ &= 0.64Y + 988 - 0.16Y \end{aligned}$$

$$(1-0.48)Y = 988$$

$$Y = \frac{988}{0.52} = 1.900$$

Soliqning umumiy darajasi quyidagicha $tY = 0.2(1.900) = 380$

Ko'tarilgan soliqning hajmidan oshib borayotgan davlat xarajatining ortiqligi ya'ni budjet difitsiti : $G - tY = 400 - 380 = 20$

Importga sarflangan hajm: $M = 0.2Y_d = 0.2(0.8Y) = 0.16 \times 1.900 = 304$

va to'lovlar balansi: $X - M = 288 - 304 = -16$ - defitsit 16 ga teng.

Davlat xarajatlari miqdori

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{1}{1-(c-m)(1-t)} = \frac{1}{1-(0.8-0.2)(1-0.2)}$$

$$= \frac{1}{1-(0.6)(0.8)} = \frac{1}{1-0.48} = \frac{1}{0.52} \qquad (2)$$

Y 1900 bo'lganda, talab qilingan 2500 miqdorga yetish uchun Y ning osishi:

$$\Delta Y = 2.500 - 1.900 = 600 \qquad (3)$$

Bundan, Y darajasiga ta'sir doim

$$\Delta G \frac{\partial Y}{\partial G} = \Delta Y \qquad (4)$$

ΔG davlat xarajatlaridagi o'zgarish bo'lganda, (2) va (3) ni (4) ga qo'yib:

$$\Delta G \frac{1}{0.52} = 600 \qquad \Delta G = 600(0.52) = 312$$

Bu Y 2500 ga ko'tarishdag talab qilingan G ning o'sishini anglatadi. Milliy daromadning yangi bosqichida ko'payuvchi soliq miqdori esa:

$$tY = 0.2(2.500) = 500$$

Yangi davlat xarajatlari darajasi 312 ni o'z ichiga olib quyidagicha bo'ladi: $400 + 312 = 712$

Shunday qilib, budjet difitsiti quyidagicha bo'ladi: $Q - tY = 712 - 500 = 212$

Importning yangi darajasi $M = 0.2(0.8)2.500 = 400$ va to'lovlarning yangi balansi $X - M = 288 - 400 = -112$. Chunki difitsit 96 miqdorga o'sadi.[41]

[41] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

Nazorat savollari

1. Qanday maslarga shartli ekstremum masalalari deyiladi?

2. Shartli ekstremum masalalarini yechishning qanday usulini bilasiz?

3. Lagrang usulini tushuntiring.

4. Yopiq sohada ko'p o'zgaruvchili funksiya ekstremumi qanday hisoblanadi?

5. Yopiq sohada ko'p o'zgaruvchili funksiya ekstremumga soha chegarasi qanday ta'sir qiladi?

6. Keynes multiplikatori qanday hisoblanadi?

7-MAVZU. BIR VA KO'P O'ZGARUVCHILI FUNKSIYALARNING INTEGRAL HISOBI

1-mashg'ulot

7.1.1. Aniqmas integral
7.1.2. Aniqmas integralni integrallash usullari
7.1.3. Aniqmas integrallar jadvali
7.1.4. Bo'laklab integrallash

Tayanch iboralar: *boshlang'ich funksiya, aniqmas integral, usul, qodalar, jadval, bo'laklab integrallash.*

7.1.1. Aniqmas integral

Integrallash bu, differentsiallangan funktsiyadan, boshlang'ich funktsiyani qayta aniqlashdan iborat. Bu, differentsiallash amaliga teskari amal bo'lib, differentsiallash ham o'z navbatida integrallash amaliga teskari amaldir. Optimizatsiya masalalarida ko'p qo'llaniladigan differentsiallashga nisbatan, integrallashning matematik usullari kam qo'llanilgani uchun, uni qo'llashning ba'zi tomonlarini ko'rib chiqamiz. Quyidagi funktsiyani integrallash talab etilsin

$$f'(x) = 12x + 24x^2$$

Bu shuni bildiradiki, shunday $y = f(x)$ funktsiyani topish kerakki

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 12x + 24x^2$$

differentsiallagandan keyin u quyidagi ko'rinishga kelsin

$$y = 6x^2 + 8x^3$$

keyin

$$\frac{dy}{dx} = 12x + 24x^2$$

Lekin shunga qaramasdan, bu hosilani boshqa funktsiyalardan ham hosil qilish mumkin. Masalan, agar $y = 35 + 6x^2 + 8x^3$ bo'lsa ham, quyidagini hosil qilamiz

$$\frac{dy}{dx} = 12x + 24x^2$$

Bunda, o'zgarmas son qatnashishidan qat'iy nazar, hosila olingandan so'ng yuqoridagi funktsiya hosil bo'ladi. Funktsiya differentsiallangandan keyin o'zgarmas son yo'qoladi va funktsiya integrallangandan keyin o'zgarmas son hosil bo'ladi. Shuning uchun integralda C o'zgarmas son qatnashadi. Integralni belgilash

$$y = \int f'(x)\,dx$$

Bu shuni bildiradiki, y funktsiyadan $f'(x)$ olingan integraldir. $\int$ belgi, integral belgisidir. Bunda, dx shuni bildiradiki, *u, x* bo'yicha differentsiallangandan keyin natija

$f'(x)$ ga teng bo‘ladi. Shuning uchun yuqorida keltirilgan misoldagi integralni quyidagicha yozishimiz mumkin

$$y = \int \left(12x + 24x^2\right) dx = 6x^2 + 8x^3 + C \qquad (4)$$

Ifodadagi alohida hadlarni umumiy integrallash qoidalari

$$\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C$$

bunda *a* va *n* o‘zgarmas parametrlarva $n \neq -1$. Integrallash, differentsiallash qoidasiga teskari protseduradir.

Misol.

Quyidagi integrallarni toping:	Yechimlari:
(i) $\int 30x^4 dx$	$y = 6x^5 + C$
(ii) $\int (24 + 7,2x) dx$	$y = 24x + 3,6x^2 + C$
(iii) $\int 0,5x^{-0,5} dx$	$y = x^{0,5} + C$
(iv) $\int \left(48x - 0,4x^{-1,4}\right) dx$	$y = 24xx^2 + x^{-0,4} + C$
(v) $\int \left(65 + 1,5x^{-2,5} + 1,5x^2\right) dx$	$y = 65x - x^{-15} + 0,5x^3 + C$

Murakkab funktsiyalarni integrallash qoidalari mavjud bo‘lib,bu bo‘laklab integrallashdan iborat. Undan foydalanish qulay, lekin hozir u zarur bo‘lmagani uchun, u bu erda keltirilmaydi. $n = -1,$ maxsus hol bo‘lib, integral $\int (1/x) dx$ ni, ko‘rsatkichli funktsiyalar bilan keltiramiz.

Avvalgi boblarda biz ko‘rdikki, umumiy narxni, umumiy daromadni va boshqa funktsiyalarni differentsiallaganimizda mos ravishda limitik funktsiya kelib chiqqan edi. Masalan, odatdagi belgilashlardan foydalanamiz

$$\frac{dTC}{dq} = MC \qquad \frac{dTR}{dq} = MR$$

Shuning uchun limitik funktsiyani integrallash, noma’lum o‘zgarmasni va boshqa umumiy funktsiyani beradi. Xarajatlar funktsiyasini fiksirlangan va o‘zgaruvchi komponentalardan iborat bo‘lagan funktsiyalarga bo‘lish mumkin. Limitik funktsiyalarni integrallash, o‘zgaruvchi xarajatlar yig‘indisi va integrallash o‘zgarmas, ya’ni u o‘zgarmas xarajatlardan iborat. Masalan, bizga umumiy o‘zgaruvchi xarajat berilgan bo‘lsa

$$TVC = 25q - 6q^2 + 0,8q^3$$

va umumiy fiksirlangan xarajatlar

$$TFC = 10$$

u holda, ta’rifga ko‘ra,

$$TC = TVC + TFC = 10 + 25q - 6q^2 + 0,8q^3$$

Shuning uchun, marjinal xarajatlar quyidagicha bo‘ladi

$$MC = \frac{dTC}{dq} = 25 - 12q + 2,4q^2$$.

Boshqa tomondan, agar biz umumiy fiksirlangan xarajatlar 10 ga teng bo‘lgan axborotni bilsak

$$MC = 25 - 12q + 2,4q^2$$

u holda, biz umumiy o‘zgaruvchi xarajatlarni integrallash bilan topgan bo‘lar edik

$$TVC = \int MCdq - TFC = 25q - 6q^2 + 0,8q^3$$

Shuning uchun

$$TC = TFC + TVC = 10 + 25q - 6q^2 + 0,8q^3$$

Misol. Agar firma o‘zgarmas xarajatlar uchun £650 ni sarflasa va limitik xarajatlar funktsiyasi $MC = 82 - 16q + 1,8q^2$? bo‘lsa, umumiy xarajatlar funktsiyasi nimaga teng?

Yechish. Biz bilamizki, ixtiyoriy xarajat funktsiyasi

$$\int MCdq = TC$$

Shuning uchun

$$\int \left(82 - 16q + 1,8q^2\right) dq = TC$$

$$82q - 8q^2 + 0,6q^3 + TFC = TC$$

Biz bilamizki, o‘zgarmas xarajatlar uchun £650 sarflangan

$$TC = 650 + 82q - 8q^2 + 0,6q^3$$

Agar firmaning limitik tushum funktsiyasi berilgan bo‘lsa, u holda bu funktsiyani integrallab, umumiy daromadlar funktsiyasini topamiz. Masalan, agar

$$MR = 360 - 2,5q$$

$$TR = \int MRdq = 360q - 1,25q^2 + C$$

Q nolga teng bo‘lsa, TR ham nolga teng bo‘ladi. SHuning uchun, S = 0 va quyidagini hosil qilamiz

$$\int MR\, dq = 360q - 1,25q^2 = TR \qquad (1)$$

Misol. Agar $MR = 520 - 3q^{0,5}$ bo‘lsa, TR funktsiya nimaga teng?

Yechish.

$$TR = \int MR\, dq = \int \left(520 - 3q^{0,5}\right) dq = 520q - 2q^{1,5}$$.

Misol. Agar firma narxlarni £715 da ushlab turib, uning limitik daromadlar funktsiyasi $MR = 960 - 0,15q^2$?bo‘lsa, firmaning umumiy daromadi nimaga teng?

Yechish. Biz aniqladikki, bu shakldagi MR funktsiyasidan integral olganimizda, o‘zgarmas bo‘lmaydi.

$$TR = \int MR\, dq = \int \left(960 - 0,15q^2\right) dq = 960q - 0,05q^3$$

Bu misolda narxni topish uchun, TR funktsiyasidan foydalanamiz. Bundan $TR = pq$ keyin $p = TR/q$ va quyidagini hosil qilamiz

$$p = \frac{1}{q}\left(960q - 0,05q^3\right) = 960 - 0,05q^2$$

$$0,05q^2 = 960 - p$$

$$q^2 = 19,200 - 20p$$

$$q = (19,200 - 20p)^{0,5}$$

Qachonki $p = 715$ keyin

$$q = (19,200 - 14,300)^{0,5} = 4,900^{0,5} = 70$$

Shuning uchun umumiy xarajat

TR = pq = 715(70) = £50,050

Agar MC, MR funktsiyalar ko‘rsatilgan bo‘lsa, integrallashdan foydalanish mumkin.[42]

Ta’rif. Agar barcha $x \in (a,b)$ lar uchun $F'(x) = f(x)$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda $F(x)$ funksiya (a,b) intervalda $f(x)$ funksiyaga boshlang‘ich funksiya deyiladi.

Masalan. $F_1(x) = \frac{x^2}{2} + 1$ funksiya $(-\infty, +\infty)$ oraliqda $f(x) = x$ funksiya uchun boshlang‘ich funksiya bo‘ladi, chunki $\left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{1}{2} \cdot 2x = x$ tenglik barcha $x \in (-\infty, +\infty)$ lar uchun o‘rinlidir.

Ta’rif. $f(x)$ funksiyaning (a,b) intervaldagi barcha boshlang‘ich funksiyalari $\int f(x)dx$ ko‘rinishda belgilanib, bu ifoda $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali deb ataladi. Bu yerda $f(x)$ integral osti funksiyasi, $f(x)dx$- integral ostidagi ifoda deb ataladi.Bu tenglik $\int f(x)dx = F(x) + C$ kabi ifoda etiladi.

7.1.2. Aniqmas integralni integrallash usullari

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.   **2.** $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$ **3.** $\int dF(x) = F(x) + C$

4. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$ **5.** $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Misol. Integralni hisoblang: $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}dx$.

Yechish. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}dx = \int \left(x^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{3}{2}}\right)dx = 2x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + C$.

7.1.3. Aniqmas integrallar jadvali

[42] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

$$1.\int o\,dx = C$$

$$2.\int 1\cdot dx = \int dx = x + c$$

$$3.\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha}}{\alpha+1} + c, \qquad \alpha \neq -1$$

$$4.\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{dx}{x} = \ell n|x| + c$$

$$5.\int \frac{1}{1+x^2}dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + c$$

$$6.\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\ \sin x + c$$

$$7.\int a^x dx = \frac{a^x}{\ell na} + c, \qquad \int e^x dx = e^x + c$$

$$8.\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$9.\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$10.\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$$

$$11.\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$$

Ko‘p uchraydigan integrallar

$$1).\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{d(x-a)}{x-a} = \ell n|x-a| + \tilde{n}, \qquad (x-a=t);$$

$$2).\int \frac{dx}{(x-a)^m} = \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^m} = \int (x-a)^{-m}d(x-a) = \frac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1} + c = -\frac{1}{(m-1)(x-a)^{m-1}} + c,$$

$m \neq 1;$

$$3).\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{\grave{a}}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\grave{a}}\right)^2}} = arc\sin\frac{x}{\grave{a}} + \tilde{N}, \qquad a>0, \qquad \left(\frac{x}{\grave{a}} = t\right)$$

$$4).\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \left(\frac{x}{a} = t\right) = \frac{1}{a}arc\,tg\frac{x}{a} + \tilde{n}$$

$$5).\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ell n\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \qquad a \neq 0$$

$$6).\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ell n\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + \tilde{N}$$

$$7).\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b}\ell n\left|\frac{x+b}{x+a}\right| + \tilde{N}$$

$$8.\ \Im_m = \int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^m}, \Im_{m+1} = \frac{x}{2a^2m\left(x^2-a^2\right)^m} + \frac{2m-1}{2a^2m}\Im_m$$

7.1.4. Bo‘laklab integrallash

Quyidagi, bo‘laklab integrallash formulasi deb nomlanuvchi formula o‘rinli bo‘ladi:

$$\int udv = u\cdot v - \int vdu.$$

Misol. Integralni hisoblang: $\int x\cdot e^{-5x}dx.$

Yechish. $u = x$ va $dv = e^{-5x}dx$ deb olamiz, u holda

$$\int xe^{-5x}dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x,\ \ du = dx \\ dv = e^{-5x}dx, v = \int e^{-5x}dx = -\frac{1}{5}e^{-5x} \end{array} \right\} = -\frac{x}{5}e^{-5x}dx - \frac{1}{25}e^{-5x} + C.$$

Nazorat savollari

1. Qanday funksiga berilgan funksiyaning boshlang'ich funksiyasi deyiladi?

2. Qanday funksiga berilgan funksiyaning aniqmas integrali deyiladi?

3. Qanday iIntegrallash qoudalarini bilasiz?

4. Qanday elementar funksiyalar boshlang'ich funksiyalarini bilasiz?

5. Bo'laklab integrallash formulasini keltirib chiqaring.

2- mashg'ulot

7.2.1. Kasr-ratsional funksiyarni integrallash
7.2.2. Trigonometrik funksiyalar qatnashgan ifodalarni integrallash
7.2.3. Ba'zi algebraik irratsionalliklarni integrallash

Tayanch iboralar: *Kasr-ratsional funksiyarni, aniqmas koeffisentlar, umumiy maxraj, trigonometriya, universal almashtirish, toq va juft funksiya, irratsionallik, irratsionallikdan qutilish, Eyler almashtirishlari.*

7.2.1. Kasr-ratsional funksiyarni integrallash

$\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$- qisqarmaydigan to'g'ri kasrning aniqmas integrali uchun ushbu tenglikni yoza olamiz:

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx = \frac{1}{a}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{k_i}\int \frac{A_{it}}{(x-a_i)^t}dx + \sum_{j=1}^{s}\sum_{\ell=1}^{m_j}\int \frac{B_{j\ell}x + C_{j\ell}}{\left(x^2+p_jx+q_j\right)^{\ell}}dx\right)$$

$\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ uchun (3) tenglikdagi A_{it}, $B_{j\ell}$ va $C_{j\ell}$ larning qiymatlarini topish uchun noma'lum koeffitsientlar usulidan foydalanamiz. (3)- tenglikning o'ng ta'rafidagi kasrlarni umumiy maxrajga keltirsak, bu maxraj $Q_m(x)$ ga teng bo'lib, uning suratida A_{it}, $B_{j\ell}$ va $C_{j\ell}$ koeffitsientlar qatnashgan, darajasi $Q_m(x)$ ning darajasidan oshmaydigan $\tilde{P}_n(x)$ polinomni hosil qilamiz. Agar biz (3)- tenglikni ayniyat deb qarasak tenglikning ikki tarafidagi maxrajlar bir xil, ya'ni $Q_m(x)$ bo'lgani sababli, $P_n \equiv \tilde{P}_n(x)$ ayniyatni hosil qilamiz. Bu ayniyatda x larning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarni tenglashtirish natijasida A_{it}, $B_{j\ell}$ va $C_{j\ell}$ noma'lum koeffitsientlar uchun chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu sistemani yechib, (3) ayniyatdagi A_{it}, $B_{j\ell}$ va $C_{j\ell}$ larning qiymatlarini topamiz.

Misol. Integralni hisoblang

$$\int \frac{3x^2+x+3}{(x-1)^3\left(x^2+1\right)}dx$$

Yechish. Noma'lum koeffitsientlar usuliga ko'ra, quyidagi ayniyatni yoza olamiz

$$\frac{3x^2+x+3}{(x-1)^3\left(x^2+1\right)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Bu tenglikning o'ng tarafini umumiy maxrajga keltirib, so'ngra maxrajini tashlab yuborish natijasida, quyidagi ayniyatni hosil qilamiz:

$$3x^2+x+3 = A_1\cdot(x-1)^2\left(x^2+1\right) + A_2(x-1)\left(x^2+1\right) + A_3\left(x^2+1\right) + (Bx+C)(x-1)^3.$$

Demak,

$$3x^2+x+3=(A_1+B)x^4+(-2A_1+A_2-3B+C)x^3+(2A_1-A_2+A_3+3B-3C)x^2+$$
$$+(-2A_1-B+3C)x+(A_1-A_2+A_3-C).$$

Bu ayniyatdagi x larning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarni tenglashtirib, quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} A_1 \qquad\qquad +B \qquad = 0 \\ -2A_1+A_2 \qquad -3B+C=0 \\ 2A_1-A_2+A_3+3B-3C=3 \\ -2A_1+A_2 \qquad -B+3C=1 \\ A_1-A_2+A_3 \qquad\quad -C=3 \end{cases}$$

Bu sistemani Gauss yechb $A_1=-\frac{1}{4},\ A_2=0,\ A_3=\frac{7}{2},\ B=\frac{1}{4},\ C=\frac{1}{4}$ ekanligini hosil qilamiz, ya’ni

$$\frac{3x^2+x+3}{(x-1)^3(x^2+1)}=-\frac{1}{4(x-1)}+\frac{7}{2(x-1)^3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{x+1}{x^2+1}.$$

$$\int\frac{2x^2+x+3}{(x-1)^3(x^2+1)}dx=-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{7}{2}\int\frac{dx}{(x-3)^3}+\frac{1}{4}\int\frac{x+1}{x^2+1}dx=$$
$$=-\frac{1}{4}\ell n|x-1|+\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{(-2)(x-1)^2}+\frac{1}{4}\int\frac{x\,dx}{x^2+1}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+1}=$$
$$=-\frac{1}{4}\ell n|x-1|-\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{8}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}+\frac{1}{4}\ arc\ tgx+C=$$
$$=-\frac{1}{4}\ell n|x-1|-\frac{7}{4(x-1)^2}+\frac{1}{8}\ell n(x^2+1)+\frac{1}{4}\ arc\ tgx+C=$$
$$=\frac{1}{8}\ell n\frac{x^2+1}{(x-1)^2}-\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{4}arc\ tgx+C$$

7.2.2. Trigonometrik funksiyalar qatnashgan ifodalarni integrallash

$R(u,v)$ -ifoda u va v o‘zgaruvchilarning ratsional funksiyasi bo‘lsin. $\int R(\sin x,\cos x)dx$ integralni hisoblaylik. Bunday integralda $t=tg\frac{x}{2}$ universal almashtirishni bajarib $R(\sin x,\ \cos x)dx$ ifodani t-o‘zgaruvchining ratsional ifodasiga olib kelish mumkin. Haqiqatan ham

$R(u,v)$ $$\sin x=\frac{2t\frac{\tilde{o}}{2}}{1+tg^2\frac{\tilde{o}}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-tg^2\frac{\tilde{o}}{2}}{1+tg^2\frac{\tilde{o}}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.\quad \tilde{o}=2arctg\ t,\quad dx=2\frac{1}{1+t^2}dt$$

bo‘lgani uchun $\int R(\sin x,\cos x)dx=2\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{1}{1+t^2}dt$, bu yerda $R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{1}{1+t^2}$ ifoda $-t$ ning ratsional funksiyasi bo‘lgani uchun, ushbu integralni hisoblab, t ning o‘rniga $tg\frac{x}{2}$ ni qo‘yib, dastlabki integralni topamiz.

Misol. Integralni hisoblang $\int \frac{\sqrt{\tilde{o}}}{\left(1+\sqrt[3]{\tilde{o}}\right)^2}dx = \int \tilde{o}^{\frac{1}{2}}\left(1+\tilde{o}^{\frac{1}{3}}\right)^{-2}dx \int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$

Yechish. $t = tg\frac{x}{2}$ almashtirishdan foydalanamiz:

$$\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} = \int \frac{2}{\frac{4t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{2dt}{4t - 1 + t^2 + 5 + 5t^2} =$$

$$= \int \frac{2dt}{6t^2 + 4t + 4} = \int \frac{dt}{3t^2 2t + 2} = \int \frac{dt}{3\left(t+\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{3}} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{d\left(t+\frac{1}{3}\right)}{\left(t+\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{3}} arc\,tg\frac{t+\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} + C = \frac{1}{\sqrt{5}} arc\,tg\frac{3tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}} + C$$

Xususiy hollar

Agar $R(-\sin x, \cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$ bo‘lsa, integralda $\cos x = t$, agar $R(\sin x - \cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$ bo‘lsa, $\sin x = t$ almashtirishni bajarish mumkin.

Agar $R(-\sin x - \cos x) \equiv R(\sin x, \cos x)$ bo‘lsa, $tgx = t$ almashtirishni bajarish orqali integralni ratsional funksiyani integrallashga olib kelsa bo‘ladi.

7.2.3. Ba’zi algebraik irratsionalliklarni integrallash

Irratsional ifodalarda o‘zgaruvchi qandaydir darajadagi ildiz ostida qatnashishini eslatib o‘tamiz.

Ikki o‘zgaruvchili $R(u,v)$ ratsional funksiya uchun ushbu

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$$

aniqmas integralni, a,b,c va d lar haqiqiy sonlar bo‘lib, $ad - bc \neq 0$ va m- natural son bo‘lgan holda qanday hisoblash mumkinligini ko‘rsatamiz. Buning uchun $t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, $t^m = \frac{ax+b}{cx+d}$, yangi o‘zgaruvchi kiritsak, $x = \varphi(t) = \frac{dt^m - b}{a - ct^m}$ va

$$dx = \varphi'(t)dt = \frac{(ad-bc)\cdot m\cdot t^{m-1}}{\left(a - ct^m\right)^2}dt$$

Bundan $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx = \int R(\varphi(t), t)\varphi'(t)dt$ tenglikni hosil qilamiz.

Misol. Integralni hisoblang.

$$\int \frac{dx}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2}\right)}=\int \frac{dx}{x\left[\left(\sqrt[10]{x}\right)^5+\left(\sqrt[10]{x}\right)^4\right]}$$

Yechish. Bu yerda $\sqrt[10]{x}=t$ deb, yangi o‘zgaruvchi kiritamiz. Demak, $x=t^{10}$ va $dx=10t^9dt$

$$\int \frac{dx}{x\left[\left(\sqrt[10]{x}\right)^5+\left(\sqrt[10]{x}\right)^4\right]}=\int \frac{10\cdot t^9dt}{t^{10}\left(t^5+t^4\right)}=10\int \frac{dt}{t^5(t+1)}$$

bo‘lgani uchun, .

Noma’lum koeffitsientlar usuliga ko‘ra $\frac{1}{t^5(t+1)}=\frac{A_1}{t}+\frac{A_2}{t^2}+\frac{A_3}{t^3}+\frac{A_4}{t^4}+\frac{A_5}{t^5}+\frac{A_6}{t+1}$

$$1=A_1t^4(t+1)+A_2t^3(t+1)+A_3t^2(t+1)+A_4t\cdot(t+1)+A_5(t+1)+A_6\cdot t^5=$$

$$(A_1+A_6)t^5+(A_1+A_2)t^4+(A_2+A_3)t^3+(A_3+A_4)t^2+(A_4+A_5)t+A_5$$

A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 va A_6 koeffitsientlar uchun quyidagi tenglamalar sistemasi kelib chiqadi

$$\left.\begin{array}{r}\grave{A}_1+\grave{A}_6=0\\ \grave{A}_1+\grave{A}_2=0\\ \grave{A}_2+\grave{A}_3=0\\ \grave{A}_3+\grave{A}_4=0\\ \grave{A}_4+\grave{A}_5=0\\ \grave{A}_5=1\end{array}\right\},\ ya'ni\ \ \grave{A}_5=1,\ \grave{A}_4=-1, \grave{A}_3=1,\ \ \grave{A}_2=-1,\ \ \grave{A}_1=1,\ \grave{A}_6=-1$$

Demak,

$$10\int\frac{dt}{t^5(t+1)}=10\left(\int\frac{dt}{t}-\int\frac{dt}{t^2}+\int\frac{dt}{t^3}-\int\frac{dt}{t^4}+\int\frac{dt}{t^5}-\int\frac{dt}{t+1}\right)=$$

$$=10\left[\ell n\left|\frac{t}{t+1}\right|+\frac{1}{t}-\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{3t^3}-\frac{1}{4t^4}\right],+C$$

u holda, $t=\sqrt[10]{x}$ ekanligini e’tiborga olsak

$$\int\frac{dx}{\tilde{o}\left(\sqrt{\tilde{o}}+\sqrt[5]{x^2}\right)}=\ell n\frac{|\tilde{o}|}{\left(1+\sqrt[10]{\tilde{o}}\right)^{10}}+\frac{10}{\sqrt[10]{\tilde{o}}}-\frac{5}{\sqrt[5]{\tilde{o}}}+\frac{10}{3\sqrt[10]{\tilde{o}^3}}-\frac{5}{2\sqrt[5]{\tilde{o}^2}}+\tilde{N}$$

.

Eyler almashtirishlari

$\int R\left(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ ko‘rinishdagi integrallarni hisoblashda Eyler almashtirishlari deb nomlanuvchi almashtirishlar qo‘llaniladi. Bular quyidagilardan iborat:

1-hol. Agar $a>0$ bo‘lsa, $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm\sqrt{a}\cdot x$.

2-hol. Agar $c>0$ bo‘lsa, $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}$.

3-hol. Agar $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}$ bo‘lsa, $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=t\cdot(x-x_1)$.

Misol. Integralni hisoblang

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$$

Yechish. 1-holga ko‘ra quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$\sqrt{x^2+x+1}=t-x \Rightarrow x^2+x+1=t^2-2tx+x^2 \Rightarrow x=\frac{t^2-1}{2t+1},$$

$$dx=\frac{2t(2t+1)-2\cdot(t^2-1)}{(2t+1)^2}dt=\frac{2t^2+2t+2}{(2t+1)^2}dt$$

Bundan,

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=\int \frac{2(t^2+t+1)}{t\cdot(2t+1)^2}dt=\frac{3}{2(2t+1)}+\frac{1}{2}\ell n\frac{t^4}{|2t+1|}+C=$$

$$=\frac{3}{2\left(2x+2\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}+\frac{1}{2}\ell n\frac{\left(x+\sqrt{x^2+x+1}\right)^4}{\left|2x+2\sqrt{x^2x+1}+1\right|^3}+C$$

Nazorat savollari

1. *Kasr-ratsional funksiyani integrallashning aniqmas koeffisentlar usulini ayting.*
2. *Har qanday kasr-ratsional funksiyani integrallash mumkinmi?*
3. *Trigonometrik funksiya integrallashning qanday usullarini bilasiz?*
4. *Universal almashtirish qanday bajariladi?*
5. *Trigonometrik funksiya integrallashning qanday xususiy hollarini bilasiz?*
6. *Irratsional ifodalashni qanday usullarini bilasiz?*
7. *Eyler almashtirishlarini ayting.*

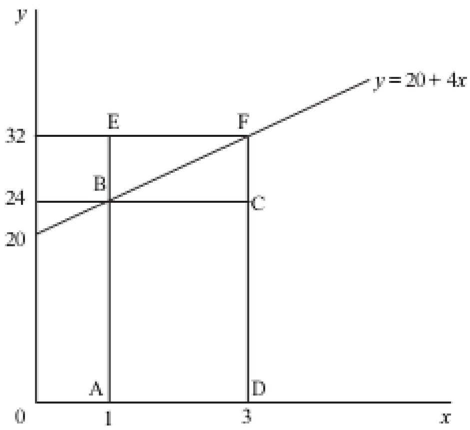
3-mashg'ulot

7.3.1. Egri chiziqli trapetsiyaning yuzi
7.3.2. Aniq integral
7.3.3. N'yuton-Leybnits formulasi

Tayanch iboralar: *egri chiziq, yuza, trapesiya, bo'lish, to'rburchak. Aniq integral, usullar, N'yuto –leybnis.*

7.3.1. Egri chiziqli trapetsiyaning yuzi

Faraz qilamiz, sizdan rasmda ko‘rsatilgan $y = 20 + 4x$ funktsiya grafigi, $x = 1$ va $x = 3$ lar bilan chegaralangan BFDA soha yuzasini topish talab etilsin



Bu quyidagi aniq integralga tengdir

$$\int_1^3 (20+4x)dx = \left[20x - 2x^2\right]_1^3$$
$$= (60+18) - (20+2) =$$
$$= 78 - 22 = 56$$

(rasmda x va y o‘qlarning masshtablari har-xil bo‘lsa ham, ular "kvadrat birlik" larda o‘lchanadi).

Bu misolda chiziqli funktsiya qo‘llanilgani uchun, integrallash yo‘li bilan topilgan natijani geometrik usul orqali tekshirish mumkin. To‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi ABCD $= 2 \times 24 = 48$

Uchburchak yuzi BFC = $\frac{1}{2}$, EBCF = $\frac{1}{2}(2\times 8) = 8$

Jami yuza [43] BFDA = ABCD + BFC = 56

Yuqoridan manfiy bo‘lmagan $y = f(x)$ funksiya bilan, quyidan OX o‘q, yon tomonlardan $x = a$ va $x = b$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiya

[43] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

yuzini hisoblash masalasini qaraymiz.Buning uchun $[a,b]$ oraliqni $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ nuqtalar bilan, $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,1,\ldots n-1$, kichik oraliqlarga bo‘lamiz. Har bir oraliqdan biron-bir $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ nuqta olib, $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$, $i = 0,1,\ldots,n-1$, belgilash kiritib, quyidagi yig‘indini tuzib olamiz. $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\cdot \Delta x_i$

Bu yig‘ndida $f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$ qo‘shiluvchini biz qaralayotgan figuraning $[x_i, x_{i+1}]$ oraliqqa mos keluvchi bo‘lagining yuzasini, balandligi $f(\xi_i)$ va asosi Δx_i ga teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak yuzasiga taqriban teng deb qarasak, u holda yuqoridagi yig‘indini biz egri chiziqli trapetsiya yuzasining taqribiy qiymati deb qarashimiz mumkin:

$$S \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Agar taqribiy tenglikdagi xatolikni kamaytirmoqchi bo‘lsak, $[x_i, x_{i+1}]$ kesmalar uzunliklarini, ya’ni Δx_i larni yetarlicha kichik qilib olishimiz kerak. Buning uchun oraliqni bo‘luvchi nuqtalar soni n ni shunday oshira borishimiz kerakki, $n \to \infty$ da $\max\limits_{0\le i\le n-1}\{\Delta x_i\} \to 0$ bo‘lsin.

Demak, $\max\{\Delta x_i\} \to 0$ limitda qidirilayotgan egri chiziqli trapetsiya yuzini hosil qilamizi

$$S = \lim_{\max\{\Delta x_i\}\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \, .$$

7.3.2. Aniq integral

Shu paytgacha ko‘rgan integrallarimiz «aniqmas integrallar» deyilar edi. Integralning boshqa shakli «aniqintegrallar» deyiladi». Bu erkli o‘zgaruvchining ikkita qiymati bilan aniqlanadi (integralning quyi va yuqori qismida joylashgan belgilar bilan) vaintegral, integral qiymatini yuqori qismidan quyi qismi orasidagi farqdan iborat.

Masalan, aniq integral $\int_3^8 6x^2dx = 2x^3 + C$ ning qiymati, olingan natijadagi x ning o‘rniga avval 8 soni qo‘yilganidan, x ning o‘rniga 3 qo‘yib ayirilganiga teng. Shuning uchun

$$\int 6x^2dx = 2x^3 + C$$

keyin quyidagini hosil qilamiz

$$\int_3^8 6x^2dx = \left[2(8)^3 + C\right] - \left[2(3)^3 + C\right] = 1024 + C - 54 - C = 970$$

Ixtiyoriy aniq integralda ikkita o‘zgarmas integrallash chegaralari uni to‘la aniqlaydi. Belgilashda, aniq integralni baholashda, kvadrat qavslarni ichiga berilgan funktsiyaning integralini yozib, qavsdan tashqarida esa integrallash chegaralarini yozish kerak. Masalan

$$\int_3^8 6x^2dx = \left[2x^3\right]_3^8 = 2(8)^3 - 2(3)^3 = 1024 - 54 = 970$$

Shu kabi protsedura,boshqa murakkab funktsiyalar uchun ham o‘rinli.[44]

[44] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

Ta'rif. *$[a,b]$ oraliqda berilgan $y=f(x)$ uchun, shu oraliqni kichik bo'lakchalarga bo'luvchi $a=x_0<x_1,\ldots,<x_n=b$ va $\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}$ nuqtalar uchun $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$ yig'indi integral yig'indi deb ataladi.*

Ta'rif. *$[a,b]$ oraliqda berilgan $y=f(x)$ funksiya uchun $\max\{\Delta x_i\}\to 0$ da $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$ integral yig'indining chekli limiti mavjud bo'lib, bu limit bo'linish nuqtalari $x_0,x_1,\ldots,x_n$ va oraliqlardan olinayotgan $\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_n$ nuqtalarga bog'liq bo'lmasa, $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi va limitning qiymati uning aniq integrali deyilib, bu limit quyidagicha belgilanadi:*

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\max\{\Delta x_i\}\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Bu yerda $f(x)$ integral ostidagi funksiya, $f(x)dx$- integral ostidagi ifoda, a- integralning quyi chegarasi, b- integralning yuqori chegarasi deyiladi.

$\int_a^b f(x)dx$ integral qiymatini topish $f(x)$ funksiyani $[a,b]$ oraliqda integrallash deb ataladi.

Misol. Integralni ta'rif yordamida hisoblang $\int_0^1 x^2dx$.

Yechish. [0;1] kesmani n ta teng qismlarga bo'lamiz,u holda har bir oraliq uzunligi $\Delta x_k=\frac{b-a}{n}=\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n}$ va har bir oraliqdan $\xi_k=x_k$ nuqtalarni tanlaymiz. Bu holda quyidagiga ega

$$x_0=0, x_1=\frac{1}{n}, x_2=\frac{2}{n}, x_3=\frac{3}{n},\ldots, x_{n-1}=\frac{n-1}{n}, x_n=\frac{n}{n}=1,$$

bo'lamiz:

$$f(\xi_1)=\left(\frac{1}{n}\right)^2, f(\xi_2)=\left(\frac{2}{n}\right)^2,\ldots, f(\xi_n)=\left(\frac{n}{n}\right)^2; f(\xi_k)\cdot\Delta x_k=\left(\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}.$$

Demak,

$$\int_0^1 x^2dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{6}=\frac{1}{3}.$$

Aniq integralning xossalari

1. $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

2. $\int_a^b k\cdot f(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$

3. $\int_a^b k\cdot f(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$

4. $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b g(x)dx$

5. Agar $a<b$ bo'lib, $[a,b]$ oraliqda $f(x)\le g(x)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$$

Xususan, $[a,b]$ oraliqda $m\le f(x)\le M$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$

Teorema. *(Aniq integral mavjudligining yetarli sharti). Agar* $y=f(x)$ *funksiya* $[a,b]$ *oraliqda uzluksiz bo'lsa, bu funksiya shu oraliqda integrallanuvchi bo'ladi.*

Teorema. *Agar* $y=f(x)$ *funksiya* $[a,b]$ *oraliqda integrallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiya shu oraliqda chegaralangan bo'ladi.*

Teorema. *(O'rta qiymat haqidagi teorema). Agar* $f(x)$ *funksiya* $[a,b]\,(a<b)$ *oraliqda integrallanuvchi bo'lib, bu oraliqda* $m\le f(x)\le M$ *tengsizliklar o'rinli bo'lsa, u holda shunday* μ *son mavjudki, uning uchun* $m\le\mu\le M$ *tengsizlik o'rinli bo'lib,*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\mu\cdot(b-a)$$

$f(x)$ *funksiya* $[a,b]$ *oraliqda integrallanuvchi bo'lsin, u holda istalgan* $x\in[a,b]$ *uchun,* $f(x)$ *funksiya* $[a,x]$ *oraliqda ham integrallanuvchi bo'ladi. Shuning uchun* $[a,b]$ *oraliqda berilgan quyidagi funksiyani aniqlay olamiz:*

$$\hat{O}(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

Teorema. $[a,b]$ *oraliqda integrallanuvchi* $f(x)$ *funksiya uchun* $\Phi(x)$ *funksiya* $[a,b]$ *oraliqda uzluksiz bo'ladi.*

7.3.3. Nyuton-Leybnits formulasi

Teorema. *Agar* $f(x)$ *funksiya* $[a,b]$ *oraliqda uzluksiz bo'lsa, u holda* $\Phi(x)$ *funksiya* (a,b) *intervalda* $f(x)$ *funksiya uchun boshlang'ich funksiya bo'ladi, ya'ni* (a,b) *intervalda* $\Phi'(x)=f(x)$ *tenglik o'rinli bo'ladi.*

Teorema. *(N'yuton-Leybnits formulasi)* $f(x)$ *funksiya* $[a,b]$ *oraliqda uzluksiz bo'lib,* $F(x)$ *uning istalgan boshlang'ich funksiyasi bo'lsin, u holda*

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

Misoln. Integralni hisoblang $\int_a^b \frac{dx}{x^2},(ab\ne 0).$

Yechish. $\int_a^b \frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_a^b=-\frac{1}{b}+\frac{1}{a}=\frac{b-a}{ab}\ ,(ab\ne 0).$

Nazorat savollari

1. Qanday sohaga egri chiziqli trapesiya deyiladi?

2. Egri chiziqli trapesiya yuzi qanday hisoblash mumkin?

3. Aniq integral xossalarini ayting.

4. N'yuton –Leybnits formulasini keltirib chiqaring.

4-mashg'ulot

7.4.1. Aniq integralda o'zgaruvchilarni almashtirish va bo'laklab integrallash
7.4.2. Yassi shakl yuzalarini hisoblash
7.4.3. Aylanish jismlarining hajmlarini hisoblash

Tayanch iboralar: *o'zgaruvchi, murakab funksiya, sodda funksiya, bo'laklab integrallash, yuzalar kombinatsiyasi, hajm, aylanish.*

7.4.1. Aniq integralda o'zgaruvchilarni aimashtirish va bo'laklab integrallash

Teorema. *(Yangi o'zgaruvchi kiritib integrallash). Agar* $\varphi(t)$ *funksiya* $[\alpha,\beta]$ *oraliqda uzluksiz hosilaga ega bo'lib,* $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$ *bo'lsa,* $[a,b]$ *oraliqda uzluksiz bo'lgan* $f(x)$ *funksiya uchun* $\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ *tenglik o'rinlidir.*

Teorema. *(Bo'laklab integrallash usuli).* $u=u(x)$ *va* $v=v(x)$ *funksiyalar* $[a,b]$ *oraliqda uzluksiz hosilalarga ega bo'lsa, quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:*

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$$

Misol. *Integralni hisoblang* $\int_0^1 xe^{-x}dx$.

Yechish. Integralni hisoblash uchun bo'laklab integrallash usulidan foydalanamiz,bunda $\left|\begin{array}{l} u=x \\ dv=e^{-x}dx \\ du=dx \\ v=-e^{-x} \end{array}\right|$.

U holda $\int_0^1 xe^{-x}dx=-xe^{-x}\Big|_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx=-e^{-1}-e^{-x}\Big|_0^1=-2e^{-1}+1=\dfrac{e-2}{e}$.

7.4.2. Yassi shakl yuzalarini hisoblash

$[a,b]$ oraliqda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uzluksiz bo'lib, $g(x)\le f(x)$ tengsizlik o'rinli bo'lsin. $x=a$ *ва* $x=b$ to'g'ri chiziqlar hamda $f(x)$ va $g(x)$ funksiya grafiklari bilan chegaralangan S-yuzani hisoblash uchun, quyidagi formula o'rinlidir:

$$S=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$$

Agar egri chiziqli trapetsiya Oy o‘qqa yopishgan bo‘lib,u o‘ngdan $x=x(y)>0$, quyidan $y=y_1$ va yuqoridan $y=y_2$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan bo‘lsa,u holda bu egri chiziqli trapetsiya yuzi quyidagi formula yordamida hisoblanadi: $S=\int_{y_1}^{y_2} x(y)dy$.

Qutb koordinatalar sistemasida egri chiziqli sektor yuzi quyidagi formula yordamida hisoblanadi: $S=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)d\varphi$.

Egri chiziqli yoy uzunligini hisoblash

1. $y=f(x)$ egri chiziq AB yoyining uzunligi quyidagi formula yordamida hisoblanadi: $l=\int_{x_A}^{x_B}\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx.$

2. $x=f(t), y=\varphi(t)$ egri chiziq AB yoyining uzunligi quyidagi formula yordamida hisoblanadi: $l=\int_{t_A}^{t_B}\sqrt{x^2+y^2}\,dt.$

3. $r=r(\varphi)$ egri chiziq AB yoyining uzunligi quyidagi formula yordamida hisoblanadi: $l=\int_{\varphi_A}^{\varphi_B}\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi.$

7.4.3. Aylanish jismlarining hajmlarini hisoblash

$[a,b]$ oraliqda $f(x)$ funksiya uzluksiz bo‘lib, $f(x)\geq 0$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsin. Biz $y=f(x)$funksiya grafigini OX o‘q atrofida aylanitirishdan, hamda $OXYZ$ fazodagi $x=a$ va $x=b$ tekisliklar bilan chegaralangan aylanma jismning V hajmi quyidagi formula yordamida hisoblanadi: $V=\int_a^b \pi f^2(x)dx$

Oy o‘qqa yopishgan egri chiziqli trapetsiyaning Oy o‘q atrofida aylanishidan hosil bop’lgan jismning hajmi quyidagi formulayordamida hisoblanadi: $V=\pi\int_{y_1}^{y_2} x^2(y)dy.$

Nazorat savollari

1. *Qanday funksiyaga murakkab funksiya deyiladi?*
2. *Qachon integrallashda o’zgaruvchilarni almashtirish qulay?*
3. *Qachon integrallashda bo’laklab integrallash qulay?*
4. *Aylanish jism hajmlari integral yordamida qanday hisoblanadi?*

5-mashg'ulot

7.5.1. Xosmas integrallar
7.5.2. Taqqoslash usuli
7.5.3. Ikki va uch karrali integrallar

Tayanch iboralar: *chegara, cheksiz, II tur uzilish, yaqinlashish, taqqoslash, karrali, integral, usul.*

7.5.1. Xosmas integrallar

Ta'rif. *$f(x)$ funksiyaning $[a,+\infty)$ oraliqdagi xos bo'lmagan $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integrali deb ushbu $\lim_{t\to+\infty}\Phi(t)$ limitga aytiladi, ya'ni:* $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx$.

Agar bu limit mavjud va chekli bo'lsa, xos bo'lmagan integral yaqinlashuvchi, aks holda uzoqlashuvchi deyiladi.

$(-\infty,+\infty)$ cheksiz oraliqdagi xos bo'lmagan integral esa quyidagicha aniqlanadi: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx$.

$y = f(x)$ funksiya $[a,b)$ yarim ochiq oraliqda uzluksiz bo'lib, $\lim_{x\to b-0} f(x) = \infty$ bo'lsin.

Ta'rif. *$\lim_{\delta\to+0}\int_a^{b-\delta} f(x)dx$ limit qiymati $y = f(x)$ funksiyaning $[a,b)$ yarim ochiq oraliqdagi xos bo'lmagan integrali deyiladi. Agar bu limit mavjud va chekli bo'lsa, xos bo'lmagan integral yaqinlashuvchi, aks holda uzoqlashuvchi deyilad:* $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to+0}\int_a^{b-\delta} f(x)dx$

Misol. Integralni hisoblang: $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

Yechish.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{b\to+\infty\\ a\to-\infty}} arctgx\Big|_a^b = \lim_{b\to+\infty} arctgb - \lim_{a\to-\infty} arctga = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi.$$

7.5.2. Taqqoslash usuli

Xosmas integrallarning yaqinlashishi ko'pincha taqqoslash usuli yordamida soda hisoblanadi.

Agar x>a bo‘lganda $|f(x)|\le|\varphi(x)|$ o‘rinli bo‘lsa va $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi bo‘lsa,u holda $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ xosmas integral ham yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Agar x>a bo‘lganda $|f(x)|\le|\varphi(x)|$ o‘rinli bo‘lsa va $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ xosmas integral uzoqlashuvchi bo‘lsa,u holda $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ xosmas integral ham uzoqlashuvchi bo‘ladi.

7.5.3. Ikki va uch karrali integrallar

Ikki karrali integrallar

Oxy tekislikda L chiziq bilan chegaralangan D sohada uzluksiz $z=f(x,y)$ funksiya berilgan bo‘lsin.

D sohani ixtiyoriy chiziqlar bilan n ta bo‘laklarga bo‘lamiz va bo‘lakchalarning yuzalarini $\Delta s_1,\Delta s_2,...,\Delta s_n$ orqali belgilaymiz.Har bir Δs_i yuzalardan p_i nuqtalarni tanlaymiz.

$z=f(x,y)$ funksiyaning shu p_i nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz: $f(p_1), f(p_1),..., f(p_n)$.

$$V_n = f(p_1)\Delta s_1 + f(p_2)\Delta s_2 + ... + f(p_n)\Delta s_n = \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta s_i \quad (1)$$

yug‘indiga $z=f(x,y)$ funksiyaning D sohadagi integral yig‘indisi deyiladi.

Agat D sohada $f(x,y)\ge 0$ bo‘lsa ,u holda har bir $f(p_i)\Delta s_i$ qo‘shiluvchini, geometrik jihatdan asosi Δs_i va balandligi $f(p_i)$ bo‘lgan silindrning hajmi deb qarash mumkin.

Berilgan D soha uchun $f(x,y)$ fuksiya yordamida tuzilgan integral yig‘indining D sohani Δs_i bo‘laklarga turli usullarda bo‘lishdan hosil bo‘lgan ixtiyoriy $V_{n_1}, V_{n_2},...,V_{n_k},...$ (2) ketma-ketlikni qaraymiz.

Teorema. *Agar $f(x,y)$ fuksiya yopiq D sohada uzluksiz va $n\to\infty$da Δs_i yuzalarning maksimal diametri nolga intilsa,(1) itegral yig‘indidan hosil bo‘lgan (2) ketma-ketlikning limiti mavjud bo‘lib,u sohaning bo‘linish usuli va p_i nuqtalarni tanlanishiga bog‘liq emas.*

Bu limit $f(x,y)$ fuksiyaning D soha bo‘yicha olingan ikki o‘lchovli integrali deyiladi va $\iint_D f(P)ds$ yoki $\iint_D f(x,y)dxdy$ kabi belgilanadi.

Demak, $\iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{\max\Delta s_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta s_i.$

D - integrallash sohasi deyiladi.

1. $\iint\limits_D [f(x,y)\pm\varphi(x,y)]dxdy=\iint\limits_D f(x,y)dxdy\pm\iint\limits_D \varphi(x,y)dxdy$.

2. $D=D_1\cup D_2$, $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy+\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$.

3. $\iint\limits_D kf(x,y)dxdy=k\iint\limits_D f(x,y)dxdy.$

D sohaning ichki nuqtasidan koordinata o‘qlariga parallel o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq uni ikki nuqtada kessa ,u holda D soha qavariq deyiladi.

$D=\{a\le x\le b,\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$.

Ta'rif. $I_D=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx$ *- $f(x,y)$ fuksiyaning D soha bo‘yicha olingan ikki karrali integrali deyiladi.*

Bu integralni hisoblash uchun x ni o‘zgarmas deb,qavs ichini y bo‘yicha integrallaymiz. Natijada x ning funksiyasini hosil qilamiz: $R(x)=\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$. Bu funksiyani x bo‘yicha a dan b gacha integrallab $I_D=\int\limits_a^b R(x)dx$ ikki karrali integralning son qiymatyini hosil qilamiz.

Misol. Ikki karrali integralni hisoblang. $I_D=\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{x^2}(x^2+y^2)dy\right)dx.$

Yechish.

$R(x)=\int\limits_0^{x^2}(x^2+y^2)dy=\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{x^2}=x^4+\frac{x^6}{3}.\ I_D=\int\limits_0^1\left(x^4+\frac{x^6}{3}\right)dx=\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{21}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{5}+\frac{1}{21}=\frac{26}{105}.$

Teorema. *Uzluksiz $f(x,y)$ fuksiyaning D qavariq soha bo‘yicha olingan ikki o‘lchovli ittegrali shu soha bo‘yicha bu funksiyaning ikki karrali integraliga teng:* $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx.$

$D=\{\psi_1(x)\le x\le\psi_2(x),c\le y\le d\}$ *bo‘lsa ,u holda* $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_c^d\left(\int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)dx\right)dy.$

Ikki karrali integralning tadbiqlari

1. $z=f(x,y)$ sirt , z=0 tekislik va yasovchisi Oz o‘qiga parallel bo‘lgan jism halmi $V=\iint\limits_D f(P)ds$.

2.Tekis sohaning uyzi. $f(x,y)=1$ deb, $S=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy\right)dx=\int\limits_a^b(\varphi_2(x)-\varphi_1(x))dx$.

Uch karrali integrallar

Fazoda S yopiq sirt bilan chegaralangan V soha berilgan bo‘lib,uning chegarasida $f(x,y,z)$ uzluksiz funksiya aniqlangan bo‘lsin. V sohani ixtiyoriy $\Delta v_1, \Delta v_2, ..., \Delta v_n$ sohalarga bo‘lamiz va bo‘lakchalarning har biridan P_i nuqtalarni tanlaymiz hamda $f(P_1), f(P_1), ..., f(P_n)$ larni hisoblaymiz.

$$V_n = f(P_1)\Delta v_1 + f(P_2)\Delta v_2 + ... + f(P_n)\Delta v_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta v_i \quad (1)$$

integral yig‘indi deyiladi.

Ta’rif. *Agar (1) ketma-ketlikning* $\max \Delta v_i \to 0$ *dagi limiti mavjud bo‘lib, u V sohaning bo‘lish usuli va* P_i *nuqtanng tanlanishiga bog‘liq bo‘lmasa,u holda shu limitga* $f(x,y,z)$*funksiyaning V soha bo‘yicha uch o‘lchovli integrali deyiladi va* $\iiint\limits_V f(P)dv$ *kabi belgilanadi.*

Demak, $\iiint\limits_V f(P)dv = \lim\limits_{\max \Delta v_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta v_i$ yoki $\iiint\limits_V f(P)dv = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz.$

V sohaning Oxy tekislikdagi proeksiyasi D bo‘lib, $D = \{(x,y) : a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$ bo‘lsin.

$f(x,y,z)$ uzluksiz funksiyaning V soha bo‘yicha ikki karrali integrali deb quyidagi integralga aytiladi:

$$I_V = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dy \right) dx.$$

Z bo‘yicha integrallash va katta qavs ichidagi ifodalarning cheraralarini qo‘yib, x va y ning funksiyalari hosil bo‘ladi.So‘ngra hosil bo‘lgan ikki o‘lchovli integral D soha bo‘yicha hisoblanadi.

Misol. $V : x = 0, y = 0, x + y + z = 1$- tekisliklar bilan chegaralangan soha. $\iiint\limits_V xyzdxdydz = ?$

Yechish. V - qavariq soha bo‘lib,u yuqoridan z=0 ,quyidan z=1-x-y tekisliklar bilan chegaralangan.Uning Oxy tekislikdagi proeksiyasi $D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x\}.$

Demak,

$$I_V = \iint\limits_D \left(\int_0^{1-x-y} xyzdz \right) dv = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left[\int_0^{1-x-y} xyzdz \right] dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \frac{xyz^2}{2} \Bigg|_{z=0}^{z=1-x-y} dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \frac{xy}{2} [1 - x - y]^2 dy \right) dx = \int_0^1 \frac{x}{24}(1-x)^4 dx = \frac{1}{720}.$$

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dv = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dy \right) dx$$

bu yerda $\psi_1(x,y)$ *va* $\psi_2(x,y)$- V sohani ostidan va ustidan chegaralovchi sirtlar, $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x), x = a$, $x = b$ chiziqlar esa V sohaning Oxy tekislikdagi proeksiyasi bo‘lgan D sohani chegaralovchi chiziqlardir.

Uch karrali integral yordamida jism hajmini hisoblash.

Agar $f(x,y,z)=1$ bo‘lsa, u holda V soha bo‘yicha olingan uch karrali integral V sohaning hajmini ifodalaydi: $V=\iiint\limits_V dxdydz$.

Nazorat savollari

1. I tur xosmas integral deb qanday integralga aytiladi?

2. II tur xosmas integral deb qanday integralga aytiladi?

3. Qanday xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi?

4. Xosmas integral uchun taqqoslash alomatini ayting.

5. Qanday integralga ikki karrali integral deyiladi?

6. Qanday integralga uch karrali integral deyiladi?

7. Karrali integral hisoblashning qanday usullarini bilasiz?

6- mashg’ulot

7.6.1. Integral hisobning iqtisodiyotdagi tadbiqlari
7.6.2. Daromadning notekis taqsimoti koeffisienti
7.6.3. Zahiralarni boshqarishda Vilson modeli

Tayanch iboralar: *umumiy darmad, maksimal qiymat, diskont, Jini koeffisenti, iste’molchi,ishlab chiqaruvchi , yutuq, zahira, taqsimot, Vilson modeli.*

7.6.1. Integral hisobning iqtisodiyotdagi tadbiqlari

Aniq integralning bu tushunchasi iqtisodiyotda bir necha qo‘llanishga ega. Ushbu mahsulot qiymati TVC funksiyani baholash uchun, har biri TVC funksiyasiga almashtiriladi. Bu nol va ushbu miqdor orasidagi aniq integralni baholashga mos keladi.

Masalan, *TVC* qiymatni topish kerak deb taxmin qilaylik. $q = 8$ bo‘lib, $MC=7.5+0.3q^2$ funksiya berilgan bo‘lsa, bu qiymat quyidagiga teng bo‘ladi:

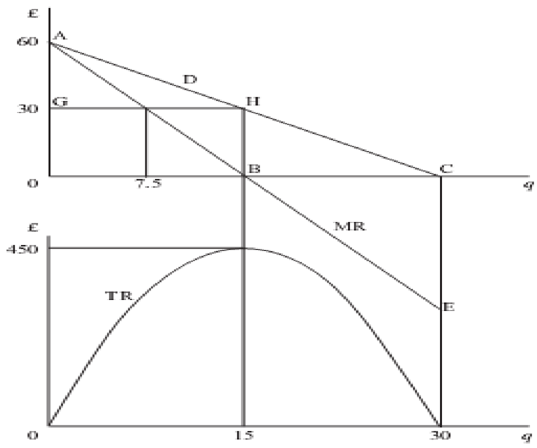
$$\int_0^8\left(7.5+0.3q^2\right)dq=\left[7.5q+0.1q^3\right]_0^8=60+51.2=111.2$$

Shuning uchun TVC nol va ushbu miqdor o‘rtasidagi MC grafikka mos holda sohaga teng.

Ikki miqdor o‘rtasida TVCning oshishi ushbu miqdorlar orasidagi tegishli MC grafikka ko‘ra sohaga teng ekanini ko‘rish mumkin.[45]

Yakuniy daromad funksiyalarining aniq integrallari

Chiziqli talab grafigi = 60−2q va chiziqli yakuniy daromad MR = 60−4q bo‘lsin. Umumiy daromadning tegishli grafigi $TR = 60q - 2q^2$ diagrammaning quyiroq qismida ko‘rsatilgan. $MR = 60 - 4q = 0,\quad q = 15$ bo‘lganda uning maksimumidagi umumiy daromadni tashkil etadi.



Shunig uchun

$$p = 60 - 2(15) = 30$$

Shunday qilib, maksimal qiymat TR – pq = 450. Chiziqli talab va oxirgi daromad grafiklarini hisobga olgan holda TR 0 dan 450 gacha oshadi, bunda q 0 dan 15 gacha bo‘lganda, so‘ngra 0 ga qaytganda q 15 dan 30 gacha oshadi. Bu o‘zgarishlar TRda bu miqdor doirasi bo‘yicha muayyan integrallar qimmatiga mos kelib, MR grafigi va miqdor o‘qi orasidagi soha orqali tasvirlangan. q 15ga teng bo‘lganda TR 0AB sohasiga teng bo‘lib, u quyidagicha ifodalangan:

$$\int_0^{15} MR\, dq = \int_0^{15} (60 - 4q)\, dq = \left[60q - 2q^2\right]_0^{15} = 900 - 450 = 450$$

q 15dan 30 gacha jshganda TR dagi o‘zgarish BCE sohasi bilan “manfiy” bo‘lib, u MR grafigidan yuqori va miqdor o‘qidan pastda joylashadi. Bu quyidagiga teng bo'ladi

$$\int_{15}^{30} MR\, dq = \int_{15}^{30} (60 - 4q)\, dq = \left[60q - 2q^2\right]_{15}^{30} = (1{,}800 - 1.800) - (900 - 450) = -450$$

---

[45] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

Bu dastlabki baholash bilan tekshiriladi. Umumiy daromadni 450ga oshirish va bir xil miqdorda tomonidan tushadi. Nihoyat, 0-30 mahsulot doirasi bo‘yicha MR funksiyasining aniq integralida nima sodir bo‘lishini ko‘rib chiqaylik:

$$\int_0^{30} MR\,dq = \int_0^{30} (60 - 4q)\,dq = \left[60q - 2q^2\right]_0^{30} = 1{,}800 - 1{,}800 = 0$$

Agar q 30ga teng bo‘lsa, manfiy soha BCE nolli TRni bergan holda musbat soha 0ABga aniq muvozanatlidir.[46]

Integrallash va iste’molchi ortiqchaligi

Iste’molchi ortiqchaligini aniqlash uchun 12.2 - rasmdagi talab grafigidan foydalanamiz. Bu soha, talab grafigidan pastda, lekin narxdan yuqorida yotadi. 12.2 - rasmga qaytsak, agar narx nolga teng bo‘lsa, u holda iste’molchi ortiqchaligi, talab grafigi ostidagi OAC uchburchak yuzasidan iborat bo‘ladi. Bu soha geometrik usulda quyidagicha aniqlanadi

$$\frac{1}{2}(height \times base) = \frac{1}{2}(60 \times 30) = 900$$

Talab funktsiyasidan olingan aniq integraldan foydalanib quyidagini, hosil qilamiz

$$\int_0^{30} (60 - 2q)\,dq = \left[60q - q^2\right]_0^{30} = 1{,}800 - 900 = 900$$

Ikkala javob ham bir xil. Agar narx 30 bo‘lsa, iste’molchi ortiqchaligiAHG yuzadan iborat. Mos miqdorlar 15dan iborat va AHB0 yuza aniq integral orqali aniqlanadi. SHuning uchun, iste’molchi ortiqchaligi= AHG = AHB0 − GHB0 = 675 − 450 = 225dan iborat.

Yuqoridagi chiziqli funktsiyalardan foydalanishimizdan maqsad, integral yordamida grafik ostidagi yuzalarni va bu yuzalarni geometrik mosligini taqqoslashdan iborat edi. SHu kabi tamoyillar chiziqsiz funktsiyalar uchun ham qo‘llaniladi.

Misol. Talabning chiziqsiz funktsiyasiga$p$ = 1,800 − 0.6q^2 mos bo‘lgan, daromadning limitik funktsiyasi MR = 1,800 − 1.8q^2berilgan, aniq intagraldan foydalanib quyidagilarni toping:

(i) agar q =10 bo‘lsa TRni toping;

(ii) agar q, 10 dan 20gacha o‘ssa, TRning o‘zgarishini aniqlang;

(iii)) agar q =10 bo‘lsa iste’molchi ortiqchasinini toping.

Yechish.

(i) agar q =10 bo‘lsa TR quyidagicha bo‘ladi

$$\int_0^{10} MR\,dq = \int_0^{10} \left(1{,}800 - 1.8q^2\right)dq =$$

$$= \left[1{,}800q - 0.6q^3\right]_0^{10} =$$

$$= 18{,}000 - 600 = J17{,}400$$

(ii) agar q, 10 dan 20gacha o‘ssa, TRning o‘zgarishi quyidagicha bo‘ladi

[46] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

$$\int_{10}^{20} MR\,dq = \int_{10}^{20}\left(1{,}800 - 1.8q^2\right)dq =$$
$$= \left[1{,}800q - 0.6q^3\right]_{10}^{20} =$$
$$= (36{,}000 - 4{,}800) - (18{,}000 - 600) = J13{,}800$$

(iii)agar q =10 bo‘lsa,iste’molchi ortiqchasi, talab funktsiyasi va iste’molchilar xarajati orasidagi farqning aniq integralidan iborat. Bu integral quyidagichadir $\int_{0}^{10}\left(1{,}800 - 0.6q^2\right)dq = \left[1{,}800 - 0.2q^3\right]_{0}^{10} = 18{,}000 - 200 = J17{,}800$

va $TR = pq = 1{,}800q - 0.6q^3 = 18{,}000 - 600 = J17{,}400$

[47]Shuning uchun, iste’molchi ortiqchasi= J17,800 − J17,400 = J400.

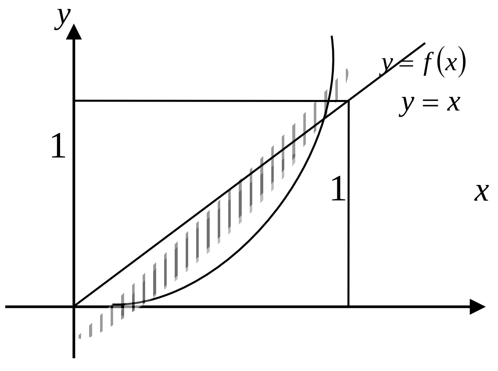
Diskontlash

p foizli stavka bilan ma’lum t vaqtdan so‘ng olingan summa oxirgi qiymati bo‘yicha dastlabki qo‘yilgan jamg‘armani aniqlash diskontlash deyiladi.

$f(t)$ t vaqt bo‘yicha o‘zgaruvchi foydani aniqlovchi funksiya bo‘lib, nisbiy foiz normasi $i = \frac{p}{100}$ va foizlar uzluksiz qo‘shib hisoblansin. Bu holda T vaqt davomidagi diskontlash K foyda quyidagi formula bo‘yicha hisoblanadi: $K = \int_0^T f|t|e^{-it}dt$

7.6.2. Daromadning notekis taqsimoti koeffisienti

$y = f(x)$ funksiyasini qaraymiz, bunda y – bu umumiy daromadning x kam ta’minlangan aholi oladigan ulushi. Masalan, $y(0.8) = 06$ tenglik umumiy daromadning 60 %ini, 80% kam ta’minlangan aholi oladi. Tabiiyki, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $y \le x$. $y(0) = 0$ ya’ni nol daromadli aholi yo‘q va $y(1) = 1$ ya’ni butun daromad butun aholidan undiriladi.



Rasmda $y = f(x)$ funksiya grafigi keltirilgan. U Lorenus egri chizig‘i deyiladi. Agar daromad taqsimoti mukammal bo‘lsa, u holda umumiy daromadning 10%ini 10% aholi olgan 20%i 20% aholi va h.k. bo‘lardi.

Bu holda daromad taqsimoti $y = x$ egri chiziq bo‘lardi.

Haqiqiy daromad taqsimotining ideal taqsimotdan og‘ishi $y = x$ va $y = f(x)$ Lorens chizig‘i bilan chegaralan-

[47] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

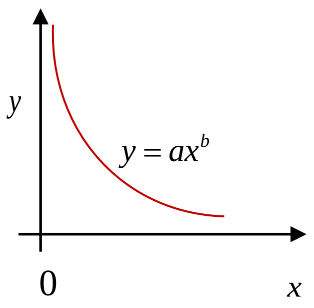
gan soha yuzi L ning $y = x$, $x = 0$ va $x = 1$ chiziqlar bilan chegaralangan soha yuziga nisbati bilan o‘lchanadi va y odatda daromadning notekis taqsimoti koeffisienti deyiladi.

$0 \le L \le 1$ ekanligi ravshan. $L = 0$ qiymat daromad taqsimoti mukamalligini bildiradi.

Hisob chizig‘i

Ko‘pincha qo‘shimcha miqdorda mahsulot ishlab chiqarish uchun qancha vaqt kerakligini bilish muhim hisoblanadi. Shu kabi hisoblarda hisob chizig‘i deb ataluvchi chiziqdan foydalaniladi.

$T = F(x)$ – birinchi x birlik mahsulotni ishlab chiqarish uchun zarur bo‘lgan vaqt, odam soat o‘lchovida bo‘lsin. U holda $f(x) = F'(x)$, $(x+1)$dagi mahsulot birligini ishlab chiqarish uchun zarur vaqtni anglatadi. Odatda ko‘pincha $f(x) = ax^b$ ko‘rinishidagi funksiya qo‘llaniladi, bunda $a > 0$, $-1 \le b < 0$.



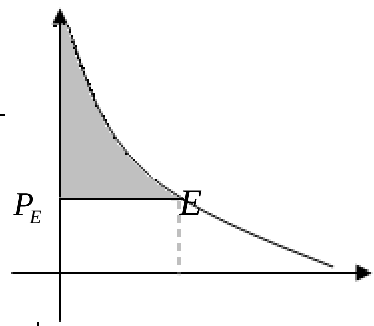
$y = ax^b$ – oddiy hisob chizig‘i.

$y = f(x)$ kamayuvchi funksiyadir, chunki biror amalni bajarish uchun zarur vaqt takrorlashlar soni ortish bilan kamayadi.

$(n_1 + 1)$dan $n_2$ta birlik mahsulot ishlab chiqish uchun zarur ΔT vaqt $\Delta T \int_{n_1}^{n_2} f(x)dx$ formula yordamida hisoblanadi.

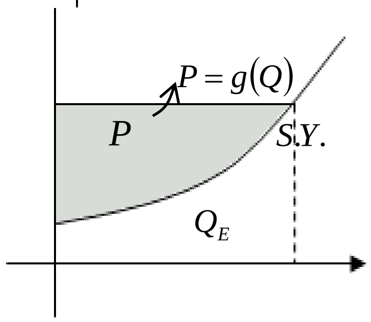
Ishlab chiqaruvchi va iste’molchi yutug‘i.

Talab va taklifning funksiyalarining kesishgan nuqtasi muvozanat nuqta deyiladi. Tovarni o‘z narxidan ko‘ra ancha arzon bo‘lgan muvozanat narxida sotib olgan iste’molchi yutuqqa erishadi.Barcha iste’molchilar tomonidan tejalgan pullarning yig‘indisi iste’mol yutug‘i deyiladi. Talab egri chizig‘i $P = f(Q)$ va $P = P_E$ - tovarning muvozanat narxi bo‘lsin. Iste’mol yutug‘i yuqoridan talab egri chizig‘i, quyidan $P = P_E$ to‘g‘ri chiziq bilan chegaralan – gan egri chiziqli trapesiyaning yuzini beradi. (rasmdagi shtrixlangan yuza)



Iste’mol (xarid) yutug‘ini hisoblash formulasi

$I.Y. = \int_0^{Q_E} [f(Q) - P_E]dQ$.Xuddi shuningdek ishlab chiqaruvchining tovarni mo‘ljallaganidan yuqori muvozanat narxda sotishdan olgan qo‘shimcha summasi ishlab chiqaruvchi (sotuv)



yutug‘i deyiladi va $S.Y. = \int_0^{Q_E} [P_E - g(Q)]dQ$

formula bilan hisoblanadi.

Misol. Tovarga bo‘lgan talab va taklif funksiyalari berilgan: $P_D = -q^2 - 5q + 249,\ P_S = q^2 + 4q + 6, \quad 0 < q < 13.$ Bu yerda q – tovar miqdori, P – esa tovarning so‘mdagi narxi. Topish kerak:

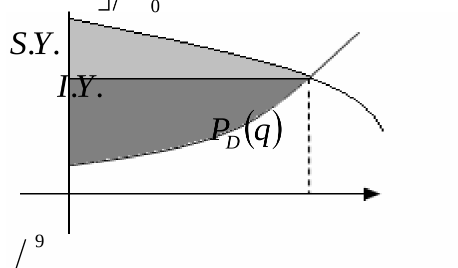
a) Tovarning muvozanat narx va miqdori; *b*) Xarid yutug‘i; *c*) Sotuv yutug‘i.

Yechish.

a) Muvozanat narx va miqdor talab va taklif teng bo‘lgan nuqtadir, ya’ni: $P_D = P_s$

$\begin{cases} P_D = -q^2 - 5q + 249 \\ P_S = q^2 + 4q + 6 \end{cases} \Rightarrow 2q^2 + 9q - 243 = 0$ kvadrat tenglamaning ildizlari $q_1 = -135;\ q_2 = 9.$ q = 9 ni tenglamalar sistemasiga qo‘yib, tovarning muvozanat narxini hosil qilamiz P = 123. Demak muvozanat nuqta P(9; 123).

b) Iste’mol yutug‘i $I.Y. = \int_0^9 \left(-q^2 - 5q + 249 - 123\right)dq = \left[-\frac{q^3}{3} - \frac{5q^2}{2} + 126q\right]\Big/_0^9 = 688{,}5.$



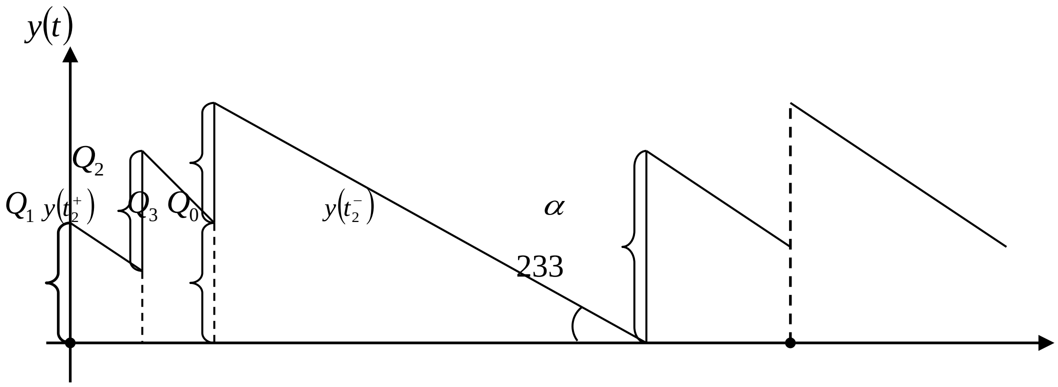
c) Ishlab chiqaruvchining yutug‘i

$S.Y. = \int_0^{Q_E} [P_E - g(Q)]dQ$

formulaga ko‘ra $S.Y. = \int_0^9 \left[123 - q^2 - 4q - 6\right]dq = \left(117q - \frac{q^3}{3} - 2q^2\right)\Big/_0^9 = 648.$

7.6.3. Zahiralarni boshqarishda Vilson modeli

$y(t) -$ t $(t \geq 0)$ vaqtdagi ma’lum mahsulotning ombordagi zahirasi bo‘lsin. $t \geq 0$ vaqtda $y(t) \geq 0$ bo‘lsin,ya’ni omborda mahsulot tanqisligiga yo‘l qo‘yilmasin.Mahsulotdan μ intensivlik bilan teng taqsimotda foydalanilsin,ya’ni Δt vaqtda ombordan zahiraning $\mu\Delta t$ qismi olinsin.Boshqa tomondan,vaqtning $t_0 = 0, t_1, t_2, t_3, ...$ holatlarida omborga $Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, ...$ miqdorda mahsulot keltirilsin. Ombordagi $y(t)$ – mahsulot zahirasining o‘zgarishini quyidagi b’lakli-silliq chiziqlar bilan tasvirlash mumkin,bunda og‘ma kesmalar parallel va $\mu = tg\alpha$.



$0 \quad t_1 \quad t_2 \quad T \quad x$

$y(t_2^-)$ –

orqali t_2 – navbatdagi vaqt uchun ombordagi shu vaqtgacha bo‘lgan mahsulot zahirasini, $y(t_2^+)$ – orqali t_2 – vaqtda omborga Q_2 miqdordagi mahsulot keltirilgandan so‘nggi mahsulot zahirasini belgilaylik.Demak, $y(t_2^+) = y(t_2^-) + Q_2$.

s - birlik vaqt davomida bir birlik mahsulotni saqlash uchun xarajatlar,g - bir partiya mahsulot hajmini yetqazish uchun xarajatlar bo‘lsin.

U holda T vaqtdagi o‘rtacha xarajatlar

$f_T(y(t), 0 \le t \le T) = \frac{1}{T}(s\int_0^T y(t)dt + gn(T))$ munosat bilan aniqlanadi,bunda *n(T)* – [0;T] vaqt oralig‘idagi mahsulot yetkazishlar soni.

Zahirani boshqarish tizimini optimallashtirish uchun $t_0 = 0, t_1, t_2, t_3, ...$ - mahsulot yetqazish vaqtlarini va $Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, ...$ - mahsulot miqdorlarini shunday tanlash zarurki,bunda $f_T(y)$ funksiya fiksirlangan T qiymatda minimumga erishsin.Bunda T davrni rejalashtirish gorizonti deyiladi.

Ta’rif . Agar barcha yetkazilayotgan mahsulot miqdorlari teng,ya’ni $Q_0 = Q_1 = Q_2 = Q_3 = ... = Q$ va barcha vaqt oraliqlari teng , ya’ni $\Delta t_i = \frac{Q}{\mu}, i \in N$ bo‘lsa ,u holda Q mahsulot miqdorini yetkazishga mos rejaga Vilson rejasi deyiladi.

Teorema. Har qanday T vaqt uchun $f_T(y)$ funksiya minimumga erishadigan optimal reja mavjud va u Vilson rejasidir.

Q – [*0; T*] vaqt oralig‘ida *n(T)* - mahsulot yetkazishlar soniga mos mahsulot yetkazish hajmi bo‘lsin,ya’ni $\mu T = Qn(T)$.U holda

$$f_T(y(t), 0 \le t \le T) = \frac{1}{T}\left(\frac{s\mu}{2} \cdot \frac{T^2}{n(T)} + gn(T)\right) = \frac{sQ}{2} + \frac{g\mu}{Q}.$$

Bu funksiya $Q_0 = \sqrt{\frac{2\mu g}{s}}$ qiymatda o‘zining minimumga erishadi.Bunda ,agar $\frac{\mu T}{Q}$ butun son bo‘lsa , Q_0 - mahsulot yetkazishning optimal o‘lchovini ifodalaydi va demak unga mos reja Vilson rejasidir.

Nazorat savollari

1. Marjinal daromadga nisbatan berilgan davrda umumiy daromad qanday hisoblanadi?
2. Daromadning notekis taqsimoti koeffisienti (Jini indeksi) qanday hisoblanadi?
3. Jamgarmaga niebatan uning boshlang’ich qiymati uzluksiz jarayonda qabday aniqlanadi?
4. Ishlab chiqaruvchi va iste’molchi yutug’I qanday hisoblanadi?
5. Zahiralar taqsimotining Vilson modelini tushuntirib bering.

8-MAVZU. QATORLAR NAZARIYASI

1-mashg'ulot

8.1.1. Sonli qatorlar
8.1.2. Qatorlar yaqinlashishining zaruriy sharti
8.1.3. Taqqoslash alomati

Tayanch iboralar: *ketma-ketlik, qato, yaqinlashish, uzoqlashish, zaruriy shart, yetarli sart, taqqoslash.*

8.1.1. Sonli qatorlar

Koʻp hollarda ishlab chiqarishning sarmoyaviy loyihalarida moliyaviy omonatlar bir xil toʻlovlar oqimi bilan qaytariladi va bundan boshqa toʻlov turlari mavjud. Uni "annuitet" deb yuritishadi.

Masalan, kimdir fiksirlangan summani kafolatlangan pensiya toʻlovlari uchun £14,000 ni 5 yil davomida toʻlashi mumkin. Bir xil toʻlovlar oqimi bilan n yil davomida i% foiz stavkada £a bilan qaytariladigan boʻlsa uning hozirgi narxi

$$PV = a(1+i)^{-1} + a(1+i)^{-2} + \ldots + a(1+i)^{-n}$$

Bu ketma-ketlik ma'lumki, geometrik progressiyadan iborat. U erda bunday ketma-ketliklarni yigʻindisini hisoblashning matematik formulasi mavjud, shuning uchun har bir qoʻshiluvchini alohida hisoblab keyin yigʻindisini olish shart emas. Bu ravshanki, NPV dasturi boʻlgan kompьyuter bilan ishlab masalani oson hal qilish mumkin, agar sizda imkon boʻlmasa bu formula yordam beradi. Shunday annuitetlar mavjudki, har yilgi toʻlovlar har doim amalga oshiriladi, muddati chegaralanmagan holda, ya'ni uni muddatsiz annuitet deb yuritiladi. Masalan, nominal £100 dan foyda fiksirlangan 6% da toʻlansa, £6 pul qiymati, "abadiy" renta deb yuritiladi. Bunday annuitetning i foiz stavkadagi NPV si

$$\frac{6}{1+i} + \frac{6}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{6}{(1+i)^n} + \ldots$$

bunda n cheksiz davom etadi. Har bir keyingi had kamayib boradi, lekin bu ketma-ketlik yigʻindisi oʻsishda davom etadi. Bu cheksiz sonlar ketma-ketligini yigʻindisini cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya formulasisiz tasavvur qilolmaysiz.

Geometrik progressiyaning hadlarini qoʻshib uning yigʻindisini topish mumkin. Buni oddiy choʻntak kalkulyatoridan foydalanib hisoblash mumkin. Murakkabroq progessiyalar yigʻindisini topish uchun yigʻindi uchun formula keltirib chiqarish kerak.

Geometrik progressiyaning dastlabki n ta hadining yigʻindisi

$$GP_n = a + ak + ak^2 + \ldots + ak^{n-1} \qquad (1)$$

Har bir qoʻshiluvchilarga k ni koʻpaytirib

$$kGP_n = ak + ak^2 + \ldots + ak^{n-1} + ak^n$$

(1) $GP_n = a + ak + ak^2 + \ldots + ak^{n-1}$ dan ayiramiz, ushbuga ega bo‘lamiz

$$(k-1)GP_n = -a + ak^n$$

Bundan

$$GP_n = \frac{-a+ak^n}{k-1} = \frac{-a\left(1-k^n\right)}{k-1} = \frac{(-1)a\left(1-k^n\right)}{(-1)(1-k)} = \frac{a\left(1-k^n\right)}{1-k}$$

SHunday qilib, geometrik progressiya yig‘indisining formulasi

$$GP_n = \frac{a\left(1-k^n\right)}{1-k}$$

Quyida keltirilgan misollar shuni ko‘rsatadiki, sodda sonli ketma-ketliklarni yig‘indisini hisoblashda formula qanday tadbiq etilganini ko‘ramiz.

Misol. Geometrik progressiya yig‘indisi formulasidan foydalanib ushbu geometrik progressiya yig‘indisini toping.

15 45 135 405 1,215 3,645

Yechish. Bu 6 ta haddan iborat geometrik progressiya bo‘lib, birinchisidan boshqa hadlari har bir keyingisini 3 ga ko‘paytirishdan hosil qilingan, shunday qilib

$a = 15 \qquad k = 3 \qquad n = 6$

Bu qiymatlarni geometrik progressiya hadlarining yig‘indisi formulasidan biz quyidagini olamiz

$$GP_n = \frac{a\left(1-k^n\right)}{1-k} = \frac{15\left(1-3^6\right)}{-2} = \frac{15(1-729)}{-2} = \frac{15(-728)}{-2} = 15\times 364 = 5,460$$

n yil muddat va i foiz stavka uchun yillik to‘lovni R deb belgilaymiz, u holda

$$PV = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{R}{(1+i)^n}$$

Bu geometrik progressiyada birinchi had

$$a = \frac{R}{1+i}$$

maxraji

$$k = \frac{1}{1+i}$$

Bundan

$$PV = \frac{a\left(1-k^n\right)}{1-k} = \frac{\frac{R}{1+i}\left[1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{1+i}} = \frac{R\left[1-\frac{1}{(1+i)^n}\right]}{1+i-1} = \frac{R\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i}$$

Shunday qilib, annuitet uchun

$$PV = \frac{R\left[1-(1+i)^n\right]}{i}$$

Siz maktabda o‘qib yurganingizda quyidagi masalaga o‘xshash misol bilan tanishgansiz. Qurbaqa doira shaklidagi basseynning o‘rtasida joylashgan taxtagacha ustida o‘tiribdi. Basseynning radiusi 10 m va qurbaqa uchinchi sakrashda 1,25 va h.k. Basseynning chetiga etishi uchun qurbaqa necha marta sakraydi?

Qurbaqa har sakraganda taxtacha ustiga tushadi deb faraz qilinadi.

Bu savolga javob aytib bo‘lmaydi. *n* marta sakrashdagi qurbaqaning yurgan yo‘li geometrik progressiyadan iborat

$$5+(0,5)5+(0,5)^2 5+\ldots+(0,5)^{n-1}5$$

n etarlicha katta qiymatlarida yuqoridagi yig‘indi o‘sadi, lekin hech qachon 10 metrga etmaydi. Agar sakrashlar soni cheksiz ko‘p bo‘lsa umumiy masofa 10 metrga etadi. Shunday qilib, bu misolda biz geometrik qatorga ega bo‘lamiz, bu qator 10 metrga yaqinlashadi.

Geometrik progressiya uzoqlashuvchi bo‘lishi mumkin. Masalan, ushbu ketma-ketlik

40 60 90 135...

uni geometrik progressiya shaklida yozish mumkin

$$40 \qquad 40(1.5) \qquad 40(1.5)^2 \quad \ldots \quad 40(1,5)^n$$

Ko‘rinib turibdiki, har bir keyingi had oldingisidan katta. SHunday qilib, qo‘shiluvchilar soni cheksizlikka intiladi hamda yig‘indi cheksiz katta bo‘ladi. Oxirgi had $40(1,5)^n$ ning o‘zi cheksiz katta bo‘ladi. Geometrik progressiyali qatorning yaqinlashish yoki uzoqlashishi uning maxraji *k* ga bog‘liq bo‘ladi.

Agar |k|>1 bo‘lsa, u holda ketma-ketlikning hadlari katta bo‘lib ketaveradi va bu holda qator uzoqlashadi.

Agar |k|<1 bo‘lsa ketma-ket keladigan hadlar kichkina bo‘lib boradi va qator yaqinlashadi.

Absolyut qiymat belgisini ishlatishga sabab progressiyaning maxraji manfiy bo‘lishi ham mumkin.

Yaqinlashuvchi geometrik progressiyaning yig‘indisini (masalan, abadiy renta kabi) hisoblash formulasini qaraymiz

$$GP_n=\frac{a\left(1-k^n\right)}{1-k}$$

Buni quyidagicha yozish mumkin

$$GP_n=\frac{a}{1-k}-\left(\frac{a}{1-k}\right)k^n \tag{1}$$

Agar $-1<k<1$ bo‘lsa $k^n\to 0$ bo‘ladi n→∞ da va shuning uchun ikkinchi had yo‘qoladi va yig‘indi ushbuga teng

$$GP_n=\frac{a}{1-k} \tag{2}$$

Endi biz (2) formuladan qurbaqa haqidagi misolga tadbiq etamiz. Sakrashning umumiy masofasi $\sum_{n=0}^{\infty}5(0,5)^n$

Bu geometrik progressiyada *k=0.5* va *a=5*. CHeksiz qo‘shiluvchilar yig‘indisi

$$\frac{a}{1-k}=\frac{5}{1-0,5}=\frac{5}{0,5}=10 \text{ metr}$$

Bu formuladan foydalanib abadiy annuitet uchun PV ni topish mumkin. Buni keyingi misolda tushuntiramiz.

Misol. Chegaralanmagan muddatga yiliga £6 miqdorda to‘lanadi, bunda birinchi to‘lov 12 oydan so‘ng amalga oshiriladigan bo‘lsa, bu annuitetning PV sini toping. Mablag‘ investitsiya qilish 15% foiz stavkada deb qabul qilamiz.

Yechish.

$$PV = \frac{6}{1{,}15} + \frac{6}{1{,}15^2} + \ldots + \frac{6}{1{,}15^n}\ , \qquad \text{bunda } n \to \infty.$$

Bu geometrik progressiyada $a = \frac{6}{1.5}$ va $k = \frac{1}{1{,}5}$. $|k| < 1$ bo‘lgani uchun, progressiya yaqinlashuvchi.

Bundan

$$NPV = \frac{a}{1-k} = \frac{\frac{6}{1{,}15}}{1-\frac{1}{1{,}15}} = \frac{6}{1{,}15\left(1-\frac{1}{1{,}15}\right)} = \frac{6}{1{,}15-1} = \frac{6}{0{,}15} = £40$$

PV uchun soddalashtirilgan formula yozish mumkin.

Faraz qilaylik, annuitet har yili R miqdorda 12 oydan boshlab to‘laydi, mablag‘ narxi i%. Bu annuitet uchun

$$PV = R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + \ldots + R(1+i)^{-n}\ , \text{ bunda } n \to \infty$$

Bu geometrik progressiyada birinchi had $a = R(1+i)^{-1}$ va maxraji $k = (1+i)^{-1}$.

Shuning uchun, cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyasi formulasidan

$$PV = \frac{a}{1-k} = \frac{R(1+i)^{-1}}{1-(1+i)^{-1}} = \frac{R}{(1+i)\left[1-(1+i)^{-1}\right]} = \frac{R}{1+i-1} = \frac{R}{i}$$

Shunday qilib, abadiy renta uchun PVni hisoblash formulasi

$$PV = \frac{R}{i}$$

Misolga bu formulani qo‘llab

$$PV = \frac{6}{0{,}15} = £40$$

topamiz. Bu formula hisoblashni osonlashtiradi. [48]

Ta’rif*. Sonli $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots,$ ketma-ketlik hadlaridan tuzilgan*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \equiv a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \ldots$$

ifodaga sonli qator deyiladi.

Bu yerda $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ qator hadlari, a_n esa qatorning umumiy hadi deyiladi. Yuqoridagi ta’rifdan ko‘rinadiki qator ma’lum qonuniyat bilan tuzilgan sanoqli sondagi qo‘shiluvchilar yig‘indisi bilan aniqlanar ekan.

Qatorning dastlabki chekli sondagi hadlaridan tuzilgan ushbu

[48] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, .. S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

yig‘indilarga, shu qatorning xususiy yig‘indilari deyiladi.

Agar qator hadlari sanoqli ekanligini e’tiborga olsak $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ xususiy yig‘indilar ham o‘z navbatida sonli ketma-ketlikni tashkil etishini ko‘ramiz.

***Ta’rif**. Agar xususiy yig‘indilarning $\{S_n\}$ ketma-ketligi $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ chekli limitga ega bo‘lsa , u holda ushbu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ yaqinlashuvchi qator, limit S esa qator yig‘indisi deyiladi va $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$ ko‘rinishda yoziladi.*

***Ta’rif**. Agar $\{S_n\}$ ketma-ketlik chekli limitga ega bo‘lmasa (limiti cheksiz yoki mavjud emas), u holda (1) uzoqlashuvchi qator deyiladi.*

Masalan. Qatorni tekshiring

$$b + bq + bq^2 + ... + bq^{n-1} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} bq^{n-1}, (b \neq 0)$$

Uning dastlabki n ta hadlari yig‘indisi

$$S_n = \frac{b + bq^n}{1-q} = \frac{b}{1-q} + \frac{b}{1-q} q^n$$

formula bilan aniqlanadi.

Bu qator yig‘indisi uchun oldingi tasdiqlar bevosita q ga bog‘liqdir.

1) agar $|q| < 1$ bo‘lsa, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ bo‘lgani sababli $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{b}{1-q}$ chekli limitga ega bo‘lamiz. Ya’ni $|q| < 1$ bo‘lganda qator yaqinlashuvchi bo‘lib, uning yig‘indisi $S = \dfrac{b}{1-q}$ formula bilan hisoblanadi.

2) Agar $|q| > 1$ bo‘lsa $\lim\limits_{n\to\infty} |q| n = \infty$ ekanligi ravshan. Shu sababli, $q < -1$ da $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ mavjud bo‘lmaydi, $q > 1$ da $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ bo‘lib qator , uzoqlashuvchi bo‘ladi.

3) Agar $q = 1$ desak $S_n = b + b + ... + b = b \cdot n$ ko‘rinishni oladi. Bu holda ham $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ bo‘lgani sababli qator uzoqlashuvchi bo‘ladi.

4) Agar $q = -1$ deb olinsa qator $b - b + b - b + ... + (-1)^{n-1} b + ...$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bunday qator uchun $S_n = S_{2m} = 0,\ S_n = S_{2m+1} = b,\ (m = 1,2,3...)$. Bu esa $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ mavjud emasligini bildiradi. Shuning uchun $q = -1$ bo‘lgan holda ham qator uzoqlashuvchi bo‘ladi.

***Teorema.** Agar (1) qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, uning har qanday qoldig‘i ham yaqinlashuvchi bo‘ladi va aksincha, qator qoldig‘i yaqinlashuvchi bo‘lsa, uning o‘zi ham yaqinlashuvchi bo‘ladi.*

Agar $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ yaqinlashuvchi qator bo‘lib, yig‘indisi S bo‘lsa, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} k a_n$ qator ham yaqinlashuvchi qator bo‘lib, yig‘indisi, $k \cdot S$ ga teng bo‘ladi.

Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ va $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ yaqinlashuvchi qatorlar bo‘lsa, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ qatorlar ham yaqinlashuvchi qatorlar bo‘lib, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

8.1.2. Qatorlar yaqinlashishining zaruriy sharti

***Teorema** (Qatorlar yaqinlashishining zaruriy shart). Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yaqinlashuvchi qator bo‘lsa, had tartib raqami cheksiz o‘sib borganda qator umumiy hadi a_n nolga intiladi, ya’ni $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

***Natija**. Agar qator uchun $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ shart bajarilmasa, u holda qator uzoqlashuvchidir.*

Masalan. $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n^2})$ uzoqlashuvchi qatordir, chunki $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = 1 \neq 0$.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ bo‘lishi qator yaqinlashishining faqat zaruriy sharti bo‘la oladi. Ya’ni $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yaqinlashuvchi bo‘lsa, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Lekin $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ bo‘lganda, har doim ham $\sum_{n=\infty}^{n} a_n$ yaqinlashuvchi qator bo‘lavermaydi.

Masalan, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{4}+\cdots$ garmonik qator uchun $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{n} = 0$ shart bajarilsada, bu garmonik qator uzoqlashuvchi qatordir.

8.1.3. Taqqoslash alomati

Ta’rif. Agar barcha $n = 1,2,3,\ldots$ lar uchun $a_n > 0$ bo‘lsa, $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n-1}^{\infty} a_n$ musbat hadli qator deyiladi.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ musbat hadli qatorlar berilgan bo‘lsin.

Teorema. Agar barcha $n = 1,2,3,\cdots$ lar uchun $a_n \le b_n$, bo‘lib $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ yaqinlashsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yaqinlashuvchi qator bo‘ladi.

Teorema. Agar barcha $n = 1,2,3,\ldots$ lar uchun $a_n \le b_n$ bo‘lib, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uzoqlashuvchi bo‘lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ham uzoqlashuvchi qatordir.

Misol. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots$ qator tekshirilsin.

Yechish. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ garmonik qatorni olaylik, $n=1,2,3,\ldots$ bo‘lganda $\frac{1}{n}\le\frac{1}{\sqrt{n}}$ ekanligini ko‘ramiz, hamda garmonik qator uzoqlashuvchi qatordir. Shuning uchun teoremaga asosan, berilgan qator uzoqlashuvchidir.

Nazorat savollari

1. *Sonli qatorni tariflang.*
2. *Qachon qator yaqinlashuvchi deyiladi?*
3. *Qachon qator yaqinlashuvchi deyiladi?*
4. *Qator yaqinlashishining zaruriy shartini ayting.*
5. *Qator yaqinlashishining taqqoslash alomatini ayting.*

2- mashg’ulot

8.2.1. Dalamber alomati
8.2.2. Koshi alomati. Koshining integral alomati
8.2.3. Leybnits qatori
8.2.4. Shartli va absolyut yaqinlashish

Tayanch iboralar: *Dalamber alomatini, Koshi alomati, integral, ishora, almashish, Leybnis teoremasi, sharli yaqinlashish, absolyut yaqinlashish.*

8.2.1. Dalamber alomati

Teorema. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *musbat hadli qator bo‘lib* $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=b$ *limit mavjud bo‘lsin.*

1) agar $b<1$ *bo‘lsa, qator yaqinlashuvchi;*
2) agar $b>1$ *bo‘lsa, qator uzoqlashuvchi bo‘ladi.*

Misol. Qatorni yaqinlashishini tekshiring. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n^2-1)}{n!}$.

Yechish. $a_n=\frac{3^n(n^2-1)}{n!}$, $a_{n+1}=\frac{3^{n+1}((n+1)^2-1)}{(n+1)!}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}((n+1)^2-1)}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{3^n(n^2-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot n^2\left(1+\frac{2}{n}\right)}{(n+1)n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)}=0<1.$$

Demak, qator yaqinlashuvchi.

8.2.2.Koshi alomati

Teorema. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \geq 0)$ *qator uchun* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ *bo'lib:*
$q<1$ *bo'lganda qator yaqinlashuvchi,* $q>1$ *bo'lganda qator uzoqlashuvchi bo'ladi.*

Bu yerda ham $q=1$ *bo'lib qolsa, qator yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligi ochiq qoladi.*

Misol. Qatorning yaqinlashishini tekshiring. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2+4n+5}{6n^2-3n-1} \right)^{n^2}$.

Yechish. $a_n = \left(\frac{3n^2+4n+5}{6n^2-3n-1} \right)^{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2+4n+5}{6n^2-3n-1} \right)^{n} = \lim_{n\to\infty} e^{n\cdot \ln \frac{3n^2+4n+5}{6n^2-3n-1}} = \lim_{n\to\infty} e^{n\cdot \ln \frac{6}{12}} = \lim_{n\to\infty} e^{-n\ln 2} = 0 < 1$$

Qator yaqinlashuvchi.

Koshining integral alomati

Teorema . *Agar* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *sonli qator berilgan bo'lsa, uning umumiy hadini natural sonlar to'plamida aniqlangan* $a_n = f(n)$ *funksiya deb qarash mumkin, ya'ni* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

Teorema*. Agar* $f(x)$ *funksiya* $x \geq 1$ *bo'lganda musbat uzluksiz funksiya bo'lib,* $\int_1^{\infty} f(x)dx$ *xosbo'lmagan integral yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *yaqinlashuvchi qator bo'ladi va ushbu xosbo'lmagan integral uzoqlashsa, qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi.*

Misol. Qatorlarning yaqinlashuvchiligini tekshiring.

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + ... + \frac{1}{n^\alpha} + ..., \alpha \geq 2$$

Yechish. $a_n = \frac{1}{n^2}$, $\alpha \geq 2$. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_1^{\infty} = \frac{1}{1-\alpha}\left(0 - \frac{1}{1-\alpha}\right) = -\frac{1}{(\alpha-1)^2}$. Qator yaqinlashuvchi.

8.2.3. Leybnits qatori

$\{a_n\}$ musbat hadli ketma-ketlik hadlaridan quyidagicha tuzilgan

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ...$$

qatorga ishorasi almashuvchan qator deyiladi.

***Teorema (Leybnits teoremasi)**: Agar ishorasi almashuvchan qatorda* $a_1 > a_2 > a_3 > .... > a_n > ....$ *bo'lib, uning umumiy hadi nolga intilsa* $(\lim_{n\to\infty} a_n = 0)$*, u holda ishorasi almashinuvchi yaqinlashuvchi qator bo'ladi.*

***Misol**.* $\frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \cdots$ qator yaqinlashishi tekshirilsin.

Yechish. 1) $\frac{1}{3} > \frac{2}{9} > \frac{1}{9} > \frac{4}{81} > \cdots$

2) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3^n} = 0$ .Demak, Leybnits teoremasi shartlari bajariladi va qator yaqinlashuvchi.

8.2.4. Shartli va absolyut yaqinlashish

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator berilgan bo'lsin. Bu qator hadlari modullaridan iborat bo'lgan, ushbu $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n| + \cdots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ qatorni qaraymiz.

***Teorema**. Agar* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.*

Teskari tasdiq o'rinli emas, ya'ni $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yaqinlashuvchi bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ yaqinlashuvchi bo'lishi shart emas.

Shunday holatlar bo'ladiki $\sum a_n$ yaqinlashuvchi, ammo $\sum |a_n|$ uzoqlashuvchidir. Bunday hollarni tartibga keltiruvchi ayrim tushunchalarni kiritamiz.

***Ta'rif**. Agar berilgan* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *qator hamda uning hadlari modullaridan tuzilgan* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *qator ham yaqinlashuvchi bo'lsa,u holda* $\sum a_n$ *absolyut yaqinlashuvchi qator deyiladi.*

***Ta'rif**. Agar* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *yaqinlashuvchi qator bo'lib,* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *uzoqlashuvchi bo'lsa,* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *qator shartli yaqinlashuvchi qator deyiladi.*

Misol. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \cdots$ qator tekshirilsin.

Yechish. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ qator, maxraji $q = \frac{1}{2} < 1$ bo'lgan cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyaning barcha hadlari yig'indisi sifatida yaqinlashuvchi qatordir. Demak, $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots$ qator absalyut yaqinlashuvchi qator bo'ladi.

Misol. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \equiv \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ qator tekshirilsin.

Yechish. Bu qator ishorasi almashuvchan qator bo'lib, Leybnits teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi, ya'ni yaqinlashuvchi qator.

Lekin uning hadlari modullaridan tuzilgan: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$

qator garmonik qator bo'lib, uning uzoqlashuvchi qator ekanligi bizga ma'lum.

Shu sababli, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ shartli yaqinlashuvchi qator ekan.

Nazorat savollari

1. Dalamber alomatini ayting.

2. Koshi alomatini ayting.

3. Integral alomatini ayting.

4. Leybnis teoremasini ayting.

5. Shartli yaqinlashishni ta'riflang.

6. Absolyut yaqinlashuvchi qatorga misol keltiring.

3-mashg'ulot

8.3.1. Funksional qatorlar
8.3.2. Darajali qatorlar
8.3.3. Abel teoremasi
8.3.4. Darajali qatorlarning yaqinlashish radiusi va sohasi

Tayanch iboralar: *funksiya, qator, yaqinlashish, Abel teoremasi, darajali qator, radius, soha, chegara.*

8.3.1. Funksional qatorlar

Ta'rif. *Hadlari funksiyalardan iborat bo'lgan* $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ *ko'rinishdagi qatorlarga funksional qator deyiladi.*

Misollar. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\ell n^n x=\ell nx+\ell n^2x+\ell n^3x+\cdots$, 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}=\sin x+\frac{\sin 2x}{2^2}+\frac{\sin 3x}{3^2}+\cdots$

Funksional qator uchun asosiy masala uning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini aniqlash, bu holat sonli qatornikidan farqlidir. Funksional qatorning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo'lishi asosan x o'zgaruvchining qanday qiymat qabul qilishiga bevosita bog'liq bo'ladi.

Ta'rif*. Agar* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *qator* $x = x_1$ *bo'lganda yaqinlashsa, u holda* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *qator* $x = x_1$ *nuqtada yaqinlashuvchi deyiladi.*

Ta'rif*.* x *o'zgaruvchining* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *qator yaqinlashadigan barcha qiymatlari to'plamiga, ushbu qatorning yaqinlashish sohasi deyiladi va* $D(\Sigma)$ *bilan belgilanadi.*

8.3.2. Darajali qatorlar

Ta'rif*.* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$

ko'rinishdagi funksional qatorga darajali qator deyiladi. Bu erda a_n *- darajali qator koeffitsentlari deyiladi.*

Masalan*.*1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots;$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} x^{2(n-1)} = 1 + 2x^2 + 4x^4 + 8x^6 + \cdots$

Ta'rif*.* x *o'zgaruvchining* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ *darajali qator yaqinlashadigan barcha qiymatlari to'plamiga, ushbu darajali qatorning yaqinlashish sohasi deyiladi va* $D(\Sigma)$ *bilan belgilanadi.*

Masalan. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$ darajali qator x o'zgaruvchining (-1, 1) oraliqdan olingan har bir qiymatida cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya yig'indisi sifatida yaqinlashuvchi bo'ladi. Demak bu qator uchun $D(\Sigma) = (-1,1)$.

8.3.3. Abel teoremasi. Darajali qatorlarning yaqinlashish radiusi va sohasi

Teorema (Abel teoremasi)*. Agar (1) darajali qator biror* $x = x_0$ *da yaqinlashsa, u holda bu qator* $|x| < |x_0|$ *shartni qanoatlantiruvchi barcha* x *larda ham yaqinlashuvchi bo'ladi.*

Agar darajali qator x ning ba'zi qiymatlarida yaqinlashuvchi, ba'zi qiymatlarida esa uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda yagona shunday $M > 0$ son topiladiki, darajali qator x ning $|x| < M$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi qiymatlarida absolyut yaqinlashuvchi, x ning $|x| > M$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi qiymatlarida esa uzoqlashuvchi bo'ladi.

Bu teorema yordamida topilgan M soniga darajali qatorning yaqinlashish radiusi, $(-M, M)$ interval esa uning yaqinlashish intervali deyiladi.

Qatorning berilishiga qarab M chekln son yoki $R = \infty$ bo'lishi mumkin.

Agar M chekli son bo'lsa, u holda darajali qatorning yaqinlashish radiusi

$M = \ell im_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ yoki $M = \ell im_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ formula bilan aniqlanadi. Umuman darajali qatorning yaqinlashish radiusi R bilan belgilanadi $(M = R)$.

Agar R chekli son bo‘lsa, Abel teoremasidan (8) darajali qatorning $D(\Sigma)=(-R;R)$ sohada yaqinlashishi kelib chiqsada, $x=-R$ va $x=R$ da qatorning yaqinlashishi yoki uzoqlashishi ochiq qoladi. Bu masala har bir darajali qator uchun alohida - alohida ko‘rib chiqiladi.

Masalan. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$ qatorning yaqinlashish radiusi aniqlansin.

Yechish. Berilgan qatorda $a_n = 1,\ n = 1,2,3,\ldots$. $R = \ell im_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \ell im_{n\to\infty} 1 = 1$.

Darajali qatorlarni hadma-had differentsiallash va integrallash

Darajali qator o‘zining $(-R;R)$ yaqinlashish sohasida x o‘zgaruvining $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ funksiyasini aniqlaydi.

Bu $f(x)$ funksiya $(-R;R)$ yaqinlashish sohasida uzluksiz bo‘lib, istalgan tartibli uzluksiz hosilalarga egadir. Shu bilan birga $f'(x)$ hosila yuqoridagi qator hadlarining hosilalari yig‘indisiga tengdir, ya’ni

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n\,a_n x^{n-1} + \cdots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Xuddi shuningdek, $f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$ $f'''(x)=\sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)a_n x^{n-3}$ va hakazo.

Bu xossa, odatda «darajali qatorni hadma-had differensiallash» xossasi deb yuritiladi.

Ya’ni $(-R;R)$ oraliqdan olingan har qanday x uchun

$$\int f(x)dx = C + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2 x^3}{3} + \cdots + \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

Qatorlar nazariyasining iqtisodiyotdagi tadbiqlari
To‘lovlar oqimining hozirgi qiymati

Oldingi mavzularda $PV_t = V/(1+r)^t$ ketma-ketlik hozirgi pul qiymatlar yig‘indisini ifodalab, kelajakdagi T vaqt oraliqda V pul qiymatli olingan. Ko‘p iqtisodiy sharoitda, biz bunday miqdorda bir qator joriy qiymati teng bo‘lishigini talab qilishimiz kerak. Masalan, yuridik va jismoniy shaxlarga berilgan uzoq vaqtli kredit yoki ipoteka mablag‘i kelajakda kelib tushadigan pul miqdoriga oqimi evaziga beriladi. Shunday qilib, r foizli stavkada T yil uchun jismoniy shaxs har yil oxirida pul to‘lab borsa, u holda bu to‘lovlar oqimi hozirgi qiymati quyidagicha

$$P_T=\sum_{t=1}^{T}\frac{V}{(1+r)^t}=\frac{V}{(1+r)^1}+\frac{V}{(1+r)^2}+...+\frac{V}{(1+r)^T}. \qquad (1)$$

(1) formuladagi o‘zgaruvchilarning o‘zaro munosabatlari ipoteka jadvalidan kelib chiqqan. Qoida bo‘yicha ular har oylik to‘lov asosda hisoblanib, bu holatda mos keluvchi foiz stavkasi *r*/12 bo‘ladi, bu yerda *r* yillik o‘sish va *T* yillik to‘lov emas balki oylik to‘lov hisoblanadi. Shu bilan birga, yillik to‘lov asosida to‘lanadigan quyidagi misolni qaraylik. Yiliga 8 %li $100.000 miqdordagi 25 yil uchun olingan kreditni har yili yopish uchun *V*=$9,367.88 pul miqdorni to‘lab borishi kerak. Agar bu kredit 50 yil uchun olingan bo‘lsa, u holda yillik to‘lov *V*=$8,174.28 ni tashkil etadi. Agar to‘lovlar muddatsiz berilgan bo‘lsa, u holda biz $a=V/(1+r)$, $p=1/(1+r)$ cheksiz geometrik progressiyadan foydalanishimiz mumkin, unda

$$\lim_{n\to\infty}P_T=\sum_{t=1}^{T}\frac{V}{(1+r)^t}=\frac{V/(1+r)}{1-(1/(1+r))}=\frac{V}{r}. \qquad (2)$$

Shunday qilib, yuqoridagi misolimiz uchun *V=rP=$8,000* ega bo‘lamiz, bu esa 50 yil uchun berilgan kreditni yillik to‘loviga yaqin pul miqdoridir. Buning sababi shuni ko‘rsatadiki, shu kundan boshlab 50 yil $8,000 oladi, bu yerda yillik fozi stavkasi 8% bo‘lib, $\$8,000/(1+0.08)^{50}=\$170.57$ tashkil etadi. Hozirgi qiymatdagi to‘langan barcha summa $8,000, 50 yildan so‘ng olingan qiymat quyidagicha:

$$\lim_{T\to\infty}\sum_{t=50}^{T}\frac{V}{(1+r)^t}=\lim_{T\to\infty}P_T-\sum_{t=1}^{50}\frac{V}{(1-r)^t}$$

bizning misol uchun taxminan 2.1% li farqni tashkil etadi, ya’ni $2,132.13 (100,000-$97,867.87). Shunday qilib, vaqtlar soni yoki foiz stavkasi juda kichik bo‘lmasligi shartlarni hisobga olib, biz cheksiz qator formulasidan foydalanib, chekli qatorning hozirgi qiymatiga yaqin baholarni olishimiz mumkin bo‘ladi. Oxirgi shartning sababi shundaki, agar *r* nolga intilsa, unda chegirma koeffitsienti $p=1/(1+p)$ birga intiladi va shu sababli kelajakdagi to‘lovlar ko‘p miqdordagi pulni tashlab bermaydi va uni bekor qilib bo‘lmaydi. Umuman olganda, agar foiz stavka 1% 1/2 qismini tashkil etsa, u holda $ 8,000 ko‘rsatkichli cheksiz kiruvchi pul miqdorning hozirgi qiymati bir yilda $1.6 million bo‘ladi va 50 - yilda esa hozirgi to‘lovning qiymati

$$\lim_{T\to\infty}\sum_{t=50}^{T}\frac{V}{(1+r)^t}=\$1.246,858$$

hamda hamma qo‘yilgan miqdorning 78%idir, oldingi 2.1% ga aniqlik bilan solishtirganda tashkil etib, agarda foiz stavkasi yiliga 8% bo‘lsa.

Misol. Faraz qilaylik yiliga uzluksiz teng oqimli qiymatlar summasi $10,000 bo‘lib, yiliga 6% foiz stavka bilan qo‘yilsin. Unda quyidagilarni hisoblang:

(i) Hozirgi qiymatning barcha oqim foydasini; (ii) 50 - yilidan boshlab hozirgi qiymatning foydasini; (iii) Boshlang‘ich 50 yildagi foyda qiymatini.

Yechish. (i) $\lim_{T\to\infty}P_T=\sum_{t=1}^{\infty}\frac{\$10,000}{(1.06)^t}=\frac{\$10,000}{1.06}=\$166,666.67.$

(ii) Chegaralanmagan vaqtgacha qo‘yilgan $10,000 miqdorning boshlang‘ich 50 yildagi qiymati (i) topilgan $166,666.67 summani tashkil etadi. Shunday qilib, 50 - yildagi qiymat foydasi quyidagicha: $\frac{\$166,666.67}{(1.06)^{50}} = \$9,048.06$.

(iii) Boshlang‘ich 50 yildagi foyda qiymati esa (i) topilgan qiymatdan (ii) topilgan qiymatni ayirmasiga teng, ya’ni $\$166,666.67 - \$9,048.06 = \$157,618.61$.

Yuqorida keltirilgan misollar bir qator teng to‘lovli hozirgi qiymatni topish muammosi bilan bog‘liq bo‘lgan misollardir. Ammo, umuman olganda hozirgi qiymatni ixtiyoriy turdagi to‘lovlar orqali baholash mumkin. Faraz qilaylik, misol uchun korxona SKga investitsiya kiritish masalasini qarab chiqmoqda, ya’ni sotish davomida tovar narxining ortishi hisobiga tovarlarni sotishdan tushgan foyda evaziga to‘lasin. Faraz qilaylik, ishlab chiqarish bosqichi bir yilning oxirida boshlanadi va birinchi yilda mahsulotni sotishdan tushgan sof foyda $\$\pi(1+g)$ tashkil etsin hamda keyingi har yilda bu ko‘rsatkich g tezlik bilan ko‘payib borsin. Shunday qilib, t vaqt mobaynida foyda quyidagicha bo‘ladi $a_t = \pi(1+g)^t$ va daromad (yalpi daromad) oqimining (chegirmasiz) qiymati: $GB = \lim_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T} a_t = \lim_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}\pi(1+g)^t$

bu yerda agar π va g musbat bo‘lsa, u holda qator uzoqlashuvchi qator bo‘ladi. Foydaning chegirmasiz yoki hozirgi qiymat oqimi:

$$PVB = \lim_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}\frac{\pi(1+g)^t}{(1+r)^t} \qquad (3)$$

$a = \pi(1+g)/(1+r)$ va $g = (1+g)/(1+r)$ bo‘lganda faqatgina geometrik progressiyani beradi. Shu bilan birga, $PVB = \pi(1+g)/(r-g)$ chekli bo‘ladi, faqat va faqat agar $g < r\left(\text{ya'ni } |\rho| < 1\right)$ bo‘lsa. Foydali sarmoya ekanligini aniqlashimiz uchun biz faqatgina $PVB > C$ yoki $PVB < C$ aniqlashimiz kerak. Bu diskontlash loyihaning sof foyda baholanishida ishlatiladi. Ko‘p hollarda, iqtisodiy jihatdan uzoq vaqtga qo‘yilgan sarmoyaning afzalliklaridan biri bu dastlabki davrlarda faollashadi.

Misol. Faraz qilaylik, to‘lovlar oqimi biron bir bisnez ishlab chiqarish $20,000 sarmoya bilan ish boshlab, yiliga 4% ko‘rsatkich bilan o‘sib borsin. Shu bilan birga foiz stavkasi 8% bo‘lsin. To‘lovlar oqimining hozirgi qiymatini toping.

Yechish. (3) formulaga asosan, bir yil hosobiga ko‘ra to‘lovlar oqimining hozirgi qiymati quyidagicha $PVB = \lim_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}\frac{\$20,000(1+0,04)^t}{(1+0,08)^t} = \lim_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}\$20,000\left(\frac{1,04}{1,08}\right)^t$.

Bu misol $a = \$20,000(1,04)/(1,08)$ va $p = (1,04)/(1,08)$ bilan berilgan geometrik progressiyadir. (7.5) formuladan foydalanib, cheksiz geometrik progressiyaning yig‘indisini topamiz, va quyidagiga ega bo‘lamiz: $PVB = \frac{a}{1-p} = \$520,000$.

Yuqoridagi boshlang‘ich sarmoyani qo‘shib,quyidagi natijani olamiz[49]: $540,000.

---

[49] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

Matrisalar qatori

$M(k,l)-k\times l$ o‘lchamli haqiqiy elementli matrisa to‘plami bo‘lsin.

$\{A_n\}\in M(k,l)$ matrisalar ketma – ketligi berilgan bo‘lsin, $n\in N$.

Misol. 2×2 o‘lchovli matrisalar ketma–ketligi. $A_n=\{a_{ij}^{(n)}\}$, $\{a_{ij}^{(n)}\}=\dfrac{1}{(i\,j)^n}$, $i=1,\,2,\ \ j=1{,}2$ bo‘lsa, uni quyidagicha tushunamiz:

$$A_1=\begin{pmatrix}1 & 1/2\\ 1/2 & 1/4\end{pmatrix},\ A_2=\begin{Bmatrix}1 & 1/4\\ 1/4 & 1/16\end{Bmatrix},\ \ldots,\ A_n=\begin{Bmatrix}1 & (1/2)^n\\ (1/2)^n & (1/4)^n\end{Bmatrix},\ \ldots.$$

Ta’rif. *$A=\{a_{ij}\}$ matrisa $\{A_n\}$ matrisalar ketma – ketligining limiti deyiladi, agar har qanday i va j juftlar uchun* $\lim\limits_{n\to\infty}a_{ij}^{(n)}$, $i=\overline{1,k},\ j=\overline{1,e}$ *tenglik o‘rinli bo‘lsa.*

Misoln. 2×2 o‘lchovli $A_n=\left\{\dfrac{1}{(i\,j)^n}\right\}$, $n\in N$ ketma–ketlik limiti topilsin.

Yechish: Ma`lumki,

$$A_1=\begin{pmatrix}1 & (1/2)^n\\ (1/2)^n & (1/4)^n\end{pmatrix},\ \lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix}1 & (1/2)^n\\ (1/2)^n & (1/4)^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=A$$

Ta’rif. *$\{A_n\in M(k,l)\}$, $n\in N$ matrisalar ketma – ketligi uchun*

$$A_1+A_2+\ldots+A_n+\ldots \qquad (1)$$

yig‘indi matrisalar qatori deyiladi.

$$S_1=A_1,\ \ S_2=A_1+A_2,\ldots,\ \ S_n=A_1+A_2+\ldots+A_n,\ldots \qquad (2)$$

xususiy yig‘indisi ketma – ketligi.

Ta’rif. *Agar $\{S_n\}$ xususiy yig‘indilar ketma – ketligi yaqinlashsa, (1) qator yaqin ham yaqinlashadi.* $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$ *(3)*

limit (1) qatorning yig‘indisi deyiladi.

Misol. 2×2 o‘lchovli $A_n=\begin{pmatrix}(1/2)^n & (1/3)^n\\ (1/4)^n & (1/5)^n\end{pmatrix}$ uchun $A_1+A_2+\ldots+A_n+\ldots$ qatorning yig‘indisini hisoblang.

Yechish. $S_n=A_1+A_2+\ldots+A_n$, S_n matrisa elementlari maxraji birdan kichik geometrik progressiyalardir. Shuning uchun bu qator yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\begin{pmatrix}1 & 1/2\\ 1/3 & 1/4\end{pmatrix}$$

A k o‘lchovli kvadrat matrisa bo‘lsin.

$E+A+A^2+\ldots+A^n+\ldots$ (4) qator ham muhim hisoblanadi. (4) qatorning yaqinlashishi A Leontev matrisasining (produktivligi) mahsuldorligiga ekvivalentdir.

Ta'rif. *k o'lchovli A kvadrat matrisa va $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...$ darajali qator berilgan bo'lsin.*

$$a_0 + a_1 A + a_2 A^2 + ... + a_n A^n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n A^n \qquad (5)$$

qatorga darajali matrisaviy qator deyiladi. (5) qatorning yaqinlashishi oddiy darajali qatorning yaqinlashishiga keltiriladi.

λ son A matrisaning xos qiymati deyiladi, agar shunday $x \neq 0$ vektor topilsaki

$$Ax = \lambda x$$

munosabat o'rinli bo'lsa (5) qator bilan birga

$$a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + ... + a_n \lambda^n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda^n \qquad (6)$$

qatorni qaraymiz.

Ta'rif. *(5) matrisaviy darajali qator yaqinlashuvchi bo'ladi, agar A matrisaning har qanday λ xos qiymati uchun (6) qator yaqinlashuvchi bo'lsa. Agarda A matrisaning Frobenius soni birdan kichik bo'lsa, u holda A.Leontev matrisasi mahsuldor bo'ladi. Haqiqatan ham, A nomanfiy matrisa unumdor deyiladi, agarda*

$$E + A + A^2 + A^3 + ... + A^n + ...$$

darajali matrisaviy qator yaqinlashuvchi bo'lsa. Yuqoridagi mulohazalardan ma`lumki, bu matrisaviy qator yaqinlashishi uchun A matrisaning har qanday λ xos soni uchun

$$1 + \lambda + \lambda^2 + ... + \lambda^n + ...$$

sonli qator yaqinlashsa.

Bu qator $|\lambda| < 1$ shartda yaqinlashadi. A nomanfiy matrisa bo'lgani uchun uning modul bo'yicha maksimal qiymati λ_A haqiqiy va nomanfiydir. Shuning uchun matrisaviy qatorning yaqinlashishi $\lambda_A < 1$ shartga ekvivalentdir.

Nazorat savollari

1. *Qanday qatorlarga funksional qator deyiladi?*
2. *Funksional qator yaqinlashishnini qanday tushunasiz?*
3. *Qanday funksional qatorlarga darajali qator deyiladi?*
4. *Abel teoremasini ayting*
5. *Yaqinlashish radiusi qanday aniqlanadi?*
6. *Yaqinlashish sohasi qanday aniqlanadi?*
7. *Soha chegarasida darajali qator yaqinlashishi qanday aniqlanadi?*

9-MAVZU. DIFFERENSIAL TENGLAMALAR NAZARIYASI

1-mashg'ulot

9.1.1. Differensial tenglama haqida umumiy tushunchalar
9.1.2. O'zgaruvchisi ajraladigan va unga keltiriladigan differensial tenglamalar
9.1.3. Bir jinsli va unga keltiriladigan differensial tenglamalar

Tayanch iboralar: *funktsiya, hosila,integral,differentsial.*

9.1.1. Differensial tenglama haqida tushunchalar

Biz uzluksiz bo'lmagan o'sish tezligini qanday aniqlashni va uzluksiz bo'lmagan o'sish so'nggi to'plangan qiymatga qanday ta'siri borligini yuqorida guvoh bo'lgan edik. Lekin bir qancha iqtisodiy modellarda uzluksiz boshqarishlar bo'lganda, biz differensial tenglama va uni qanaqa usulda yechish haqida tushunchalar bo'lishi zarur.

Noma'lum funksiya va uning hosilalarni o'z ichiga olgan tenglama ***differensial tenglama*** *deyiladi. Masalan*

$$\frac{dy}{dt} = 6y + 27$$

Bu differensial tenglamaning yechishdan t o'zgaruvchiga bog'liq bo'lgan y funksiya topiiadi. Bu esa bizga t o'zgaruvchining ixtiyoriy qiymatida y ni qiymatini topishga yordam beradi.

Differensial tenglamaga oid juda ko'p tenglamalar mavjud, ammo biz bu yerda faqat birinchi tartibli chiqizli differensial tenglama bilan cheklanamiz. Birinchi tartibli differensial tenglama deb, faqat noma'lumning hadning birinchi tartibli hosilasi bor tenglama tushuniladi. Shunday qilib, birinchi tartibli differensial tenglama dy/dt shartni o'z ichiga oladi, lekin quyidagicha d^2y/dt^2 hosila bo'lishi kerak emas. Chiziqli differensial tenglama deb y (dy/dt) ko'paytmani o'z ichiga olmaganga aytiladi. Iqtisodiyotdagi matematik masalalarning aksariyati yuqori tartibli va chiziqsiz differensial tenglamalarni o'z ichiga oladi.

Bizga ma'lumki birinchi tartibli hosila qatnashgan birinchi tartibli differensial tenglamada qoida bo'yicha noma'lum funksiyani o'zi ham tenglamada qatnashishi mumkin. Shunday qilib, birinchi tartibli differensial tenglama quyidagicha bo'lishi mumkin:

- *O'zgarmas(bu nolga teng bo'lishi mumkin)*
- *y noma'lum funksiya*
- *dy/dt birinchi tartibli hosila*

Noma'lum funksiyani topish uchun, integrallash usulini qo'llash birinchi navbatda ko'z oldimizga keladi. Biroq, diferensial tenglamada t ga emas, balki o'zida y shartni o'z ichiga olib, bu esa yechimini topish oson emas. Masalan, agar biz quyidagi ko'rinishda boshlang'ich hosila bilan boshlasak, $\frac{dy}{dt}=t$ unda biz integrallash usulidan foydalanib, quyidagini topishimiz mumkin $y=\int t\cdot dt=0.5t^2+C$ bu yerda C noma'lum o'zgarmas.

Lekin agar biz quyidagi differensial tenglama bilan boshlasak,

$$\frac{dy}{dt}=6y+27$$

yuqoridagi usul yordamida y ni topa olmaymiz.

Keyingi ikki mavzuda birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama yechimini qanday topishni tushuntiradi. Birinchi navbatda, bir jinsli holati hisoblanib, bunda o'zgarmas hadi bo'lmagan va quyidagi ko'rinishda bo'lgan differensial tenglamani yechishdan iborat

$$\frac{dy}{dt}=by \quad \text{bu yerda } b \text{ o'zgarmas parametr.}$$

Ikkinchisi, bu bir jinsli bo'lmagan holati hisoblanib, bunda C nol bo'lmagan o'zgarmas hadi va quyidagi ko'rinishda bo'lgan differensial tenglamani yechishdan iborat

$$\frac{dy}{dt}=by+c$$

Yuqoridagi holatlarda bo'lgan differensial tenglamalar iqtisodiyotda kamdan kam uchraydigan holatlarga mos keladi. Biz iqtisodiy o'zgaruvchining o'sishdagi tezligini va aniq bir vaqtdagi qiymatini bilishimiz mumkin, lekin uning qiymati va vaqt oralig'i o'rtasidagi to'g'ridan to'g'ri bog'liqligini bilishimiz mumkin emas. [50]

***Ta'rif**. Differensial tenglama deb erkli o'zgaruvchi(lar), noma'lum funksiya va bu funksiya hosilalari yoki differenstiallarini bog'lovchi tenglamaga aytiladi.*

***Ta'rif**. Agar izlanayotgan funksiya bir o'zgaruvchili bo'lsa, tenglama oddiy differensial tenglama, ko'p o'zgaruvchili bo'lsa-xususiy hosilali differensial tenglama deyiladi.*

***Ta'rif**. Differensial tenglamaning tartibi deb unda qatnashayotgan hosilalarning eng yuqori tartibiga aytiladi.*

Umumiy holda n-tartibli oddiy differensial tenglama quyidagicha ifodalanadi: $F\left(x,y,y',\cdots y^{(n)}\right)=0$

Umumiy, xususiy va maxsus yechim

***Ta'rif.** Birinchi tartibli oddiy differensial tenglamaning yechimi deb tenglamani ayniyatga aylantiruvchi $y=\varphi(x)$ funksiyaga aytiladi.*

***Ta'rif.** $y'=f(x,y)$ tenglamaning umumiy yechimi deb c o'zgarmasning ixtiyoriy qiymatida bu tenglamani qanoatlantiruvchi $y=\varphi(x,c)$ funksiyalar majmuiga aytiladi.*

[50] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

Ta'rif. $\{\varphi(x,c)\}$ - *differensial tenglamaning umumiy yechimi bo'lsin.* $y' = f(x,y)$ *tenglamaning* D *sohasidagi xususiy yechimi deb* $c = c_0$ *o'zgarmas qiymatda olingan* $y = \varphi(x,c_0)$ *funksiyaga aytiladi.*

Ta'rif. *Umumiy yechimlar oilasidan ajratib bo'lmaydigan yechimga maxsus yechim deyiladi.*

Yechimning mavjudligi va yagonaligi

Yechimning grafigi integral egri chiziq deyiladi. Differensial tenglamalar nazariyasida asosiy masala yechimning mavjudligi va yagonaligidir.

Koshi teoremasi. *Agar* $f(x,y)$ *funksiya va uning xususiy hosilasi* $f'_y(x,y)$ *OXY tekislikning biror* D *sohasida uzluksiz bo'lsa, u holda ixtiyoriy* $(x_0,y_0)\in D$ *nuqtaning biror atofida* $y' = f(x,y)$ *tenglamaning* $x = x_0$ *da* $y = y_0$ *shartni qanoatlantiruvchi yechimi mavjud va yagonadir*.

9.1.2. O'zgaruvchisi ajraladigan va unga keltiriladigan differensial Tenglamalar

Ko'rsatkichli funksiya differensial tenglama yechimini olishda yordam berishi mumkin. Ko'rsatkichli funksiya quyidagi xossaga ega ekanligi bizga ma'lum

agar $y = e^t$ bo'lsa, unda $\dfrac{dy}{dt} = e^t$ bo'ladi.

Bunda, differensiallashning ketma-ketlik usuli yordamida ixtiyoriy b o'zgarmas uchun quyidagi o'rinli:

agar $y = e^{bt}$ bo'lsa, unda $\dfrac{dy}{dt} = be^{bt}$ bo'ladi.

Shuning uchun, agar differensial tenglamada o'zgarmas hadi bo'lmasa va quyidagi ko'rinishda bo'lsa

$$\frac{dy}{dt} = by$$

unda bu differensial tenglamaning yechimi quyidagicha bo'lishi mumkin.

$$y = e^{bt}$$

Chunki bu quyidagini berishi mumkin

$$\frac{dy}{dt} = be^{bt} = by$$

Masalan, agar quyidagi differensial tenglamani yechimini topsak,

$$\frac{dy}{dt} = 5y$$

unda bitta quyidagi yechim mos keladi

$$y = e^{5t}$$

chunki quyidagini beradi

$$\frac{dy}{dt} = 5e^{5t} = 5y$$

Shunga qaramasdan, boshqa yechimlari ham mavjud.Masalan,

agar $y = 3e^{5t}$ bo'lsa, unda $\frac{dy}{dt} = 5\left(3e^{5t}\right) = 5y$ bo'ladi

agar $y = 7e^{5t}$ bo'lsa, unda $\frac{dy}{dt} = 5\left(7e^{5t}\right) = 5y$ bo'ladi.

Umuman olganda, agar boshlang'ich yechimga e^{5t}ga ixtiyoriy o'zgarmas parametrni ko'paytirib,hamda uni differensiallasak yana o'sha yechimni olamiz.

Shuning uchun, quyidagi ixtiyoriy differensial tenglama uchun

$$\frac{dy}{dt} = by$$

uning ***umumiy yechimini*** $y = Ae^{bt}$ ko'rinishda olishimiz mumkin, bu yerda *A* ixtiyoriy o'zgarmas.

Bu quyidagicha bo'lishi kerak:

$$\frac{dy}{dt} = bAe^{bt} = by$$

Agar *t* ning aniq bir qiymatida *y* ma'lum bo'lsa, unda *A* qiymatini topish mumkin. Bu esa bizga ***xususiy yechimini*** topishga imkon beradi. Agar *t=0* da *y* qiymati ma'lum bo'lsa, unda uni aniqlash juda oson bo'ladi. Masalan, quyida berilgan differensial tenglamaning

$$\frac{dy}{dt} = 5y$$

umumiy yechimi

$$y_t = Ae^{5t} \qquad (1)$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda agar *t* = 0 bo'lsa, unda $y_0 = 12$ qiymatni qabul qilsin. Topilgan qiymatlarni (1) tenglikka qo'yib quyidagini olamiz

$$y_0 = 12 = Ae^0$$

biz bilamizki $e^0 = 1$ bundan

$$12 = A$$

Topilgan qiymatni (1) differensila tenglamaning umumiy yechimiga qo'yib, biz aniq yechimni olamiz

$$y_t = 12e^{5t}$$

Bu aniq yechimni *t* ixtiyoriy qiymatida y_t qiymatini prognozlashda foydalanishimiz mumkin. Masalan, agar *t* = 3 bo'lsa, unda

$$y_3 = 12e^{5(3)} = 12e^{15} = 12\left(3,269,017.4\right) = 39,228,208$$

bo'ladi.

Misol. d*y*/d*t* = 1.5*y* differensial tenglamani yeching. Hamda differensila tenglama yechimidan foydalanib, $t=0$ da $y=34$ qiymatni qabul qilsa, uning aniq yechimini toping. Aniq yechim yordamida $t = 7$da y qiymatini aniqlang.

Yechish. Yuqorida tushuntirilgan usuldan foydalanib, berilgan differensial tenglamaning yechimi quyidagicha

$$y_t = Ae^{1.5t}$$

Agar $t = 0$ bo'lsa, unda

$$y_0 = 34 = Ae^0$$

bo'ladi. Bundan

$$34 = A$$

Deamk aniq yechim quyidagicha bo'ladi:

$$y_0 = 34e^{1.5t}$$

Agar $t = 7$ bo'lsa, unda aniq yechimdan foydalanib, quyidagini olamiz[51]:

$$y_7 = 34e^{1.5(7)} = 34e^{10.5} = 34(36,315.5) = 1,234,727$$

Ta'rif*. Birinchi tartibli differensial tenglama deb erkli o'zgaruvchi, noma'lum funksiya va bu funksiya birinchi tartibli hosilasi yoki differenstialini bog'lovchi tenglamaga aytiladi.*

Birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalarning umumiy ko'rinishi : $F(x, y, y') = 0$

Hosilaga nisbatan yechilgan oddiy differensial tenglama: $y' = f(x, y)$

Ta'rif. *Ushbu* $y' = f_1(x)f_2(y)$ *ko'rinishdagi tenglamalar o'zgaruvchisi ajralgan differensial tenglamalar deyiladi, bu yerda* $f_1(x)$, $f_2(y)$*- uzluksiz funksiyalar*

Bu tenglamani yechish uchun «o'zgaruvchini ajratish usuli»ni qo'llaymiz: y' hosilani uning ekvivalient formasi dy/dx ga almashtirib, tenglikning ikkala tomonini $\frac{dx}{f_2(y)}$ ga ko'paytiriladi : $\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$.

Tenglikning ikkala tomonini integrallasak, $\int dy / f_2(y) = \int f_1(x)dx + C$,bu yerda C- o'zgarmas kattalik.

Misol. $y' = \frac{x\left(\sqrt{y^2+1}\right)}{y}$ tenglamaning (0,1) nuqtadan o'tuvchi xususiy yechimini toping.

Yechish. O'zgaruvchilarni ajratamiz: $ydy / \sqrt{y^2+1} = xdx$.

Bundan, $\int ydy / \sqrt{y^2+1} = \int xdx + C,$ demak, $\sqrt{y^2+1} = \frac{x^2}{2} + c$ $\quad y^2 + 1 = (\frac{x^2}{2} + c)^2$

$$y = \sqrt{(\frac{x^2}{2} + c)^2 - 1}$$

[51] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

(0,1) nuqtadan o‘tuvchi yechim I uchun $C=\pm\sqrt{2}$ topiladi.Demak, $y=\sqrt{\left(x^2/2+\sqrt{2}\right)^2-1}$.

.1.3. Bir jinsli va unga keltiriladigan differensial tenglamalar

Ta'rif. *Agar $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^m f(x,y)$ ayniyat o`rinli bo`lsa, $f(x,y)$ m o‘lchovli bir jinsli funksiya deyiladi.*

Ta'rif. *Agar $P(x,y)$ va $Q(x,y)$ bir xil o‘lchovli bir jinsli funksiyalar bo`lsa, u holda $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglama deyiladi.*

Bu tenglama $y=ux$ alamshtirish yordamida, bu yerda u yangi nomalumli funksiya, o`zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keltiriladi.

Masalan. Differensili tenglamani yeching . $y' = \frac{x}{y}+\frac{y}{x}$.

Yechish: *y=ux* almashtirishni bajarib $u+xu' = 1/u+u$ *yoki* $xu' = \frac{1}{u}$ ni hosil qilamiz. Bundan $udu = \frac{dx}{x}$ *yoki* $\frac{1}{2}u^2=ln|Cx|$. Dastlabki o‘zgaruvchilarga qaytib $y^2=x^2ln(C^2x^2)$ yoki $y=\pm x\sqrt{\ln(c^2x^2)}$ hosil bo‘ladi.

Ushbu $\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}$ ko‘rinishdagi tenglamalar bir jinsli tenglamaga keltiriladi.

Agar $c_1=c=0$ bo‘lsa, u holda $\frac{dy}{dx}=\frac{a+b\frac{y}{x}}{a_1+b_1\frac{y}{x}}$ - bir jinsli tenglama hosil bo‘ladi.

Agar $c\neq 0, c_1\neq 0$ bo‘lsa, $x=x_1+h$, $y=y_1+k$ deb
$\frac{dy}{dx}=\frac{ax_1+by_1+ah+bk+c}{a_1x_1+b_1y_1+a_1h+b_1k+c_1}$ bo‘ladi.

H va k ni $\begin{cases} ah+bk+c=0 \\ a_1h+b_1k+c_1=0 \end{cases}$ tenglik o‘rinli bo‘ladigan qilib tanlaymiz. U holda $\frac{dy}{dx}=\frac{ax_1+by_1}{a_1x_1+b_1y_1}$- bir jinsli tenglamani hosil qilamiz.

Agar $\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\lambda$ bo‘lsa, $\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+c_1}$.Bu holda z=ax+by deb $\frac{dz}{dx}=a+b\frac{dy}{dx}$.

Nazorat savollari

1. *Differensial tenglama deb qanday tenglamaga aytiladi va uning tartibi qanday aniqlanadi?*
2. *Differensial tenglamaning yechimi ta'rifini ayting.*
3. *Birinchi tartibli oddiy differensial tenglama uchun Koshi teoremasi.*
4. *Koshi teoremasining geometrik ma'nosi.*
5. *Birinchi tartibli oddiy differensial tenglama uchun umumiy va xususiy integral tushunchalari.*
6. *O‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalar.*

2- mashg'ulot

9.2.1. Chiziqli differensial tenglamalar
9.2.2. Bernulli tenglamasi
9.2.3. Rikatti tenglamasi

Tayanch iboralar: *funktsiya, hosila, integral, differentsial, variatsialash.*

9.2.1. Chiziqli differensial tenglamalar

Agar o'zgarmas nolga teng bo'lmasa va quyidagi ko'rinishga ega bo'lsa

$$\frac{dy}{dt} = by + c$$

u holda yechim ikki qismdan iborat:
(i) bir jinsli bo'lgan qism yechimi
(ii) xususiy yechim .

Bir jinsli bo'lmagan yechim (CF) yuqorida ko'rsatilgan o'zgarmas koeffitsientli differensial tenglama yechimi bilan bir xil, ya'ni $y_t \big| = Ae^{bt}$.

Xususiy yechim (PS) to'liq differensial tenglamaning ixtiyoriy aniq yechimi hisoblanadi. Odatda u xususiy integrali deb ham nomlanadi. Ko'pkina iqtisodiy masalalarda noma'lum funksiyaning so'nggi muvozanat qiymatini aniq yechimda foydalanishingiz mumkin.

Shunday qilib, *umumiy yechim* (GS) ikki yechimdan iborat, ya'ni

GS = CF + PS

Bu quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$y_t = Ae^{bt} + PS$$

t biror bir qiymatida biror bir qiymatida biror bir qiymatida *y* aniqlangan bo'lsa, unda ixtiyoriy o'zgarmas *A* qiymatini hisoblash mumkin. Aniqlangan *A* qiymat uchun hosil bo'lgan yechim umumiy yechimning ***aniqlangan yechimi*** deyiladi(DS).

Iqtisodiy modelda bu aniqlangan yechimni quyidagicha yozib olish mumkin

y = {*muvozanatdan og'ishni ko'rsatuvchi funksiya*} + {*muvozanat qiymati*}

Quyida berilgan misollar orqali bu usulni qanday qo'llanilganligi ko'rsatilgan.

Misol. d*y*/d*t* = 6*y* + 27differensial renglamani yeching va agar *t* = 0 da *y* ning qiymati 18 ga teng bo'lsa, shu qiymatiga mos yechimni toping.

Yechish. Bir jinsli bo'lamagan yechimi topish uchun biz avval keltirilgan differensial tenglamani(RE) qaraymiz. Yuqorida berilgan tenglama uchun keltirilgan tenglama quyidagicha

$$\frac{dy}{dt} = 6y \qquad \textit{(RE)}$$

Oldingi mavzuda keltirilgan ixtiyoriy bir jinsli tenglamaning yechimidan foydalanib,

$$\frac{dy}{dt} = by \quad \text{bundan} \quad y_t = Ae^{bt}$$

keltirilgan differensial tenglamaning (RE) bir jinsli yechimi quyidagicha bo'ladi

$$y_t = Ae^{6t} \qquad \text{(CF)}$$

Agar o'suvchi y funksiya o'zining muvozanat qiymatiga erishsa va u qiymatini o'zgartirmasa, unda biz aniq yechimi quyidagicha hosil qilamiz

$$\frac{dy}{dt} = 0$$

Hosil bo'lgan bu y qiymatini K o'zgarmas bilan belgilab olamiz. Berilgan differensial tenglama uchun xususiy yechim quyidagi ko'rinishda izlanadi

$$\frac{dy}{dt} = 6y + 27$$

agar y qiymati K o'zgarmas bo'lsa, unda

$$\frac{dy}{dt} = 6K + 27 = 0$$

$$K = -4.5 \qquad \text{(PS)}$$

bo'ladi. PS va CF yechimlarni o'rniga qo'ysak, umumiy yechim quyidagicha bo'ladi

$$y_t = Ae^{6t} - 4.5 \qquad \text{(GS)}$$

y ning boshlang'ich qiymati 18 ga teng, agarda t = 0 bo'lsa, unda ($e^0 = 1$ hisobga olib)

$$y_0 = 18 = Ae^0 - 4.5$$

$$18 = A - 4.5$$

$$22.5 = A$$

A topilgan qiymatini GS qo'yib quyidagi aniq yechimni topamiz:

$$y_t = 22.5^{6t} - 4.5 \qquad \text{(DS)}$$

Agar t ning bir qancha qiymatlarini qo'ysak, unda y ning qiymatlari tezda katta bo'lib ketadi. Masalan, agar t = 3 bo'lsa, unda[52]

$$y_3 = 22.5^{6(3)} - 4.5 = 22.5e^{18} - 4.5 = 22.5(65{,}659{,}969) - 4.5 = 1{,}477{,}349{,}303$$

Ta'rif. *Birinchi tartibli chiziqli tenglama deb* $y' + p(x)y = q(x)$ *ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi, bu yerda* $p(x), q(x)$*-uzluksiz funksiyalar.*

Bu tenglamani «o'zgarmasni variatsiyalash usuli» bilan yechamiz.

Dastlab, bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi topiladi: $y' + p(x)y = 0$

[52] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

Bu o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglamadir.Shuning uchun $y\neq 0$ deb $\frac{dy}{y}=-p(x)dx$, $y=c\ e^{-\int p(x)dx}$. Endi C ni x ning funksiyasi, deb qaraymiz: C=C(x), $y=c(x)e^{-\int p(x)dx}$,(«o‘zgarmasni variatsiyalash» deb shu jarayon ko‘zda tutiladi).

Bu ifodani berilgan tenglamaga qo‘yib soddalashtirsak, $c'(x)=q(x)\ e^{\int p(x)dx}$.
Ushbu tenglikning ikkala tomonini integrallasak, $c(x)=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+c_1$, C_1-const.

Berilgan tenglamaning umumiy yechimini topamiz: $y(x)=c_1e^{-\int p(x)dx}+e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$.

Misol. Differensili tenglamani yeching . $y'-\frac{2}{x}y=2x^3$.

Yechish: Avval $y'-\frac{2}{x}y=0$ niyechamiz.

$\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}=>\frac{dy}{y}=\frac{2dx}{x}=>\ln|y|=2\ln|x|=>y=cx^2$.

$C=C(x)$, u holda $y=C(x)x^2$ uni berilgan tenglamaga qo`yib, $u(x)$ ni topamiz: $C'x^2-2xC-\frac{2}{x}x^2C=2x^3=>C'=2x=>C=x^2+C_1$ bundan berilgan tenglamaning umumiy yechimini topamiz. $y=(x^2+C_1)x^2$.

9.2.2. Bernulli tenglamasi

Ta’rif. $y'+p(x)y=q(x)y^n$, $n=const$ *ko‘rinishidagi tenglamaga Bernulli tenglamasi deyiladi.*

Agar $n=0$ bo‘lsa, chiziqli, bir jinsli bo‘lmagan, $n=1$ da chiziqli, bir jinsli tenglama hosil bo‘ladi. Shuning uchun (8) da $n\neq 0,\ n\neq 1$ deb faraz qilinadi. $z=y^{1-n}$, almashtirish Bernulli tenglamasini chiziqli tenglamaga keltiradi, bunda $z'=(1-n)y^{-n}y'$, $z'+(1-n)pz=(1-n)q$.

Misol. Differensili tenglamani yeching . $y'+xy=xy^3$.

Yechish: Bu tenglama Bernulli tenglamasidir $n=3$. $z=y^{-2}$ almashtirishni bajaramiz. U holda $z'=-2y^{-3}y'$. $z'+(-2)xz=-2x$ .Bu tenglamaning umumiy yechimini topamiz: $z(x)=Cx^2+1$.Natijada ushbu $y=\pm(Cx^2+1)^{-\frac{1}{2}}$ yechimni olamiz.

9.2.3. Rikatti tenglamasi

Ta’rif. $\frac{dy}{dx}+a(x)y+b(x)y^2=C(x)$ *ko‘rinishdagi tenglamaga Rikatti tenglamasi deyiladi.*

Bu tenglama umumiy holda kvadraturada integrallanmaydi.Lekin,agar bu tenglamaning biror $y = y_1(x)$ xususiy yechimi ma'lum bo'lsa, $y = y_1 + z$ almashtirish Rikatti tenglamasini z o'zgaruvchiga nisbatan Bernulli tenglamasiga keltiradi.

Misol. Differensil tenglamani yeching . $\frac{dy}{dx} - axy + ay^2 = 1.$

Yechish. Bu Rikatti tenglamasidir. $y = x$ bu tenglamaning xususiy yechimidir.Suning uchun $y = x + z$ almashtirish bu Rikatti tenglamasini z o'zgaruvchiga nisbatan Bernulli tenglamasiga keltiradi: $\frac{dz}{dx} + axz + az^2 = 0.$

Nazorat savollari

1. *Birinchi tartibli oddiy differensial tenglama uchun umumiy va xususiy integral tushunchalari.*
2. *O'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalar.*
3. *O'zgarmasni variatsiyalash usuli.*
4. *Ikkinchi tartibli differensial tenglama.*
5. *O'zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli ikkinchi tartibli differensial tenglama.*

3- mashg'ulot

9.3.1. To'la differensial tenglamalar
9.3.2. Integrallovchi ko'paytuvchi
9.3.3. Yuqori tartibli differensial tenglamalar
9.3.4. Tartibi pasayadigan yuqori tartibli differensial tenglamalar

Tayanch iboralar: *to'liq differentsial,yuqori tartibli hosila.*

9.3.1. To'la differensial tenglamalar

Ta'rif.*Agar* $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ *(1) tenglamada M(x,y) va N(x,y) uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar uchun* $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ *(2) munosabat o'rinli bo'lsa,u holda (1) tenglamaga to'la differensialli differensial tenglama deyiladi.*

(2) shatning bajarilishi (1) tenglamaning o‘ng tomoni biror u(x,y) funksiyaning to‘la differensiali ekanligini anglatadi.U holda (1) tenglama du(x,y)=0 yoki u(x,y)=C umumiy integralga ega bo‘ladi.Bunda $M=\frac{\partial u}{\partial x}, N=\frac{\partial u}{\partial y}$.

(1) tenglamaning umumiy yechimi $u=\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx+\int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy+C.$

Misol. Differensili tenglamani yeching . $\frac{2x}{y^3}dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0.$

Yechish. $M=\frac{2x}{y^3}$, $N=\frac{y^2-3x^2}{y^4}$. $\frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{6x}{y^4}$, $\frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{6x}{y^4}.\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$.

$u(x,y)=\int\frac{2x}{y^3}dx+\varphi(y)=\frac{x^2}{y^3}.\ \frac{\partial u}{\partial y}=N=\frac{y^2-3x^2}{y^4}$. Demak,

$-\frac{3x^2}{y^4}+\varphi'(x)=\frac{y^2-3x^2}{y^4}$ *yoki* $\varphi'(x)=\frac{1}{y^2}$.Bundan $\varphi(x)=-\frac{1}{y}+C$ va $u(x,y)=\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}+C.$

9.3.2. Integrallovchi ko‘paytuvchi

$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ (1) tenglamadagi M(x,y) va N(x,y) uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar uchun $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ (2) munosabat o‘rinli bo‘lmasligi mumkin.U holda (1) tenglamaning chap qismi biror funksiyaning to‘la differensiali bo‘lmaydi.Bunday hollarda shunday $\mu=\mu(x,y)$ funksiya topish mumkinki,tenglamaning barcha hadlarini shu funksiyaga ko‘paytirilganda tenglamaning chap qismi birob funksiyaning to‘la differensiali bo‘ladi.Bu usul bilan topilgan tenglamaning umumiy yechimi berilgan tenglamaning umumiy yechimi bilan bir xil bo‘ladi. Odatda, $\mu=\mu(x,y)$ funksiyaga (1) tenglamaning integrallovchi ko‘paytuvchisi deyiladi.

$\mu=\mu(x,y)$ funksiyaga (1) tenglamaning integrallovchi ko‘paytuvchisi bo‘lsin. Unda $\mu M(x,y)dx+\mu N(x,y)dy=0$ tenglamada $\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$ shart o‘rinli bo‘ladi.

Ya’ni $\mu\frac{\partial M}{\partial y}+M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mu\frac{\partial N}{\partial x}+N\frac{\partial\mu}{\partial x}$ yoki $M\frac{\partial\mu}{\partial y}-N\frac{\partial\mu}{\partial x}=\mu\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)$ yoki $M\frac{\partial\ln\mu}{\partial y}-N\frac{\partial\ln\mu}{\partial x}=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}$.Oxirgi tenglamani umumiy holda yechish qiyin masala.Ba’zan,xususiy hollarda bu masalani sodda yechish mumkin.

$\mu=\mu(y)$ bo‘lsa $\dfrac{\partial \ln\mu}{\partial y}=\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}$ yoki $\mu(y)=\exp\left(\int\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}dy\right)$,bu yerda $\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}$ ifoda faqat y ning funksiyasidan iborat bo‘lishi kerak.

$\mu=\mu(x)$ bo‘lsa $\dfrac{\partial \ln\mu}{\partial x}=\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}$ yoki $\mu(x)=\exp\left(\int\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx\right)$,bu yerda $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}$ ifoda faqat x ning funksiyasidan iborat bo‘lishi kerak.

Misol. Differensili tenglamani yeching . $\left(xy^2+y\right)dx-xdy=0.$

Yechish. Bu yerda $M=xy^2+y$, $N=-x.$ $\dfrac{\partial M}{\partial y}=2xy+1$, $\dfrac{\partial N}{\partial x}=-1.$ $\dfrac{\partial M}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N}{\partial x}.$

$\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}=\dfrac{-1-1-2xy}{xy^2+y}=-\dfrac{2}{y}=\mu(y).$ $\mu(y)=\exp\left(-\int\dfrac{2}{y}dy\right)=\dfrac{1}{y^2}$ .Berilgan tenglamaning har ikki qismini $\mu(y)=\dfrac{1}{y^2}$ ga ko‘paytirib: $\left(x+\dfrac{1}{y}\right)dx-\dfrac{x}{y^2}dy=0.$Bu to‘la differensialli differensili tenglamadir$\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}=-\dfrac{1}{y^2}\right)$. Bu tenglamani yechib $\dfrac{x}{y}+\dfrac{x^2}{2}+C=0$ umumiy yechimni hosil qilamiz.

9.3.3. Yuqori tartibli differensial tenglamalar

Ta’rif*. n- tartibli oddiy differensial tenglama deb,* $F\left(x,y,y',y'',...,y^{(n)}\right)=0$ *ko‘rinishdagi tenglamaga aytiladi, bu yerda* x*- erkli o‘zgaruvchi,* y*-izlanayotgan funksiya,* $y',y'',...,y^{(n)}$*-birinchi, ikkinchi va h.k n- tartibli hosilalar.*

n- tartibli hosilaga nisbatan yechilgan tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$y^{(n)}=f\left(x,y,y',..,y^{(n-1)}\right)$$

n-tartibli tenglama uchun ham mavjudlik va yagonalik teoremasi o‘rinli.

Teorema*. Agar* $y^{(n)}=f\left(x,y,y',..,y^{(n-1)}\right)$ *tenglamada* $f\left(x,y,y',...,y^{(n-1)}\right)$ *funksiya va uning* $y,y',...,y^{(n-1)}$ *argumentlari bo‘yicha xususiy hosilalari* $x=x_0,y=y_0,y'=y_0',...,y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)}$ *qiymatlarni o‘z ichiga oluvchi biror sohada uzluksiz funksiyalar bo‘lsa,otenglamaning* $y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',...,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$ *shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi mavjud va yagonadir.*

$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',...,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$- boshlang‘ich shartlar deyiladi.

Tenglamaning berilgan boshlang‘ich shartlar bilan yechimini qidirish masalasi Koshi masalasi deyiladi.

Ta'rif. *Tenglamaning umumiy yechimi deb shunday* $y=\phi(x, c_1, c_2, ..., c_n)$ *funksiyalar to'plamiga aytiladiki, ular* $\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, ..., c_n$ *o'zgarmaslarning ixtiyoriy qiymatida tenglamani qanoatlantirib, boshlang'ich shartlarga bo'ysunsa.*

Ta'rif. *Tenglamaning xususiy yechimi deb* $\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, ..., c_n$ *o'zgarmaslarning tayin* $\tilde{n}_1^0, \tilde{n}_2^0, ..., c_n^0$ *qiymatlaridagi* $y=\phi\left(x, \tilde{n}_1^0, \tilde{n}_2^0, ..., c_n^0\right)$ *funksiyasiga aytiladi.*

9.3.4. Tartibi pasayadigan yuqori tartibli differensial tenglamalar

1. $y^{(n)}=f(x)$ ko'rinishidagi tenglamalarni bevosita n marta x bo'yicha integrallash yordamida umumiy integrali topiladi.

$$y^{(n-1)}=\int_{x_0}^{x} f(x) dx+c_1, y^{(n-2)}=\int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{x} f(x) dx\right) dx+c_1\left(x-x_0\right)+c_2, ...,$$

$$y=\int_{x_0}^{x} ... \int_{x_0}^{x} f(x) dx ... dx+\frac{c_1\left(x-x_0\right)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{c_2\left(x-x_0\right)^{n-2}}{(n-2)!}+...+c_n.$$

2. $y''=f(x, y')$ ko'rinishidagi tenglamalarni $y'=p(x)$ deb ,tartibini bittaga pasaytirish mumkin: $p'=f(x, p)$.Bu tenglamani integrallab,p=p(x,c_1) umumiy yechimni topamiz. $y'=p(x)$ munosabatdan esa $y=\int p(x, c_1) dx+c_2$ umumiy integralni hosil qilamiz.

3. $y''=f(y, y')$ ko'rinishidagi tenglamalarni $y'=p(y)$ deb ,tartibini bittaga pasaytirish mumkin.Lekin, bunda $\frac{d^2 y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dx} p$.U holda $p \frac{dp}{dy}=f(x, p)$ tenglamani hosil qilamiz.Bu tenglamani integrallab,p=p(y,c_1) umumiy yechimni topamiz. $y'=p(y)$ munosabatdan esa umumiy integralni hosil qilamiz.

Nazorat savollari

1. *Chiziqli bog'liqsiz yechimlar tushunchasi*
2. *O'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalar*
3. *Bir jinsli bo'lmagan ikkinchi tartibli differensial tenglamalarning umumiy yechimi haqida teorema.*
4. *Ikkinchi tartibli differensial tenglama*
5. *O'zgarmasni variatsiyalash usuli.*
6. *Birinchi tartibli oddiy differensial tenglama uchun umumiy va xususiy integral tushunchalari.*

4- mashg'ulot

9.4.1. O'zgarmas koeffisentli, chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar
9.4.2. Xarakteristik tenglama
9.4.3. Fundamental yechimlar sistemasi

Tayanch iboralar: *harakteristik tenglama,hususiy yechim,umumiy yechim.*

9.4.1. O'zgarmas koeffisentli chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar

Ta'rif. *Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama deb* $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ *ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi. Bu yerda* y *-izlanayotgan funksiya,* $p(x), q(x), f(x)$*- biror* (a,b) *intervalda aniqlangan, uzluksiz funksiyalar.*

Agar $f(x) \neq 0$ bo'lsa, u holda ikkinchi taribli, chiziqli, bir jinsli tenglama deyiladi. Agar $f(x) \neq 0$ bo'lsa, u bir jinsli bo'lmagan chiziqli tenglama deyiladi.

Berilgan tenglamada $p(x)$ va $q(x)$ funksiyalar o'zgarmas bo'lgan holini qaraymiz. Bunday tenglamalar o'zgarmas koeffitsientli chiziqli tenglamalar deyiladi.

Demak, $y'' + py' + qy = f(x)$ ko'rinishdagi tenglamalarni qaraymiz, bu yerda p va q -ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

Ushbu chiziqli bir jinsli $y'' + py' + qy = 0$ tenglamani qaraymiz, p va q - haqiqiy sonlar.

Ta'rif. *Agar* $y'' + py' + qy = 0$ *tenglama* $y_1(x), y_2(x)$ *yechimlarning chiziqli kombinatsiyasi:* $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ *faqat* $c_1 = c_2 = 0$ *bo'lgan holdagina o'rinli bo'lsa, u holda ular chiziqli erkli, aks holda chiziqli bog'liq deyiladi.*

Teorema. *Agar* $y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ $y'' + py' + qy = 0$ *tenglamaning chiziqli erkli yechimlari bo'lsa,u holda* $y(x) = y_1(x) \pm y_2(x)$ *bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.*

Teorema. *Agar* $y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ $y'' + py' + qy = 0$ *tenglamaning chiziqli erkli yechimlari bo'lsa,u holda* $y(x) = \tilde{n}_1 y_1(x)$ *va* $y(x) = c_2 y_2(x)$ *lar ham bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.*

Teorema. *Agar* $y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ $y'' + py' + qy = 0$ *tenglamaning chiziqli erkli yechimlari bo'lsa,u holda* $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ *bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.*

n-tartibli chiziqli differensial tenglama deb quyidagi ko‘rinishdagi tenglamaga aytiladi: $y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_1(x)y'+p_0(x)y=f(x)$

bu yerda $f(x), p_0(x), \ldots, p_{n-1}(x)-(a,b)$ da berilgan uzluksiz funksiyalar.

$L[x]=y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_1(x)y'+p_0(x)y$ deb belgilasak, qisqacha ushbu tenglamani hosil qilamiz: $L[y]=f(x)$.

Unga mos bir jinsli tenglama esa: $L[y]=0$ ko‘rinishda bo‘ladi.

Teorema. $y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_1(x)y'+p_0(x)y=f(x)$ *tenglama* (a,b) *kesmada* $y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ \ldots, y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$ *boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi yagona yechimga ega.*

Teorema. *Agar* $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ *funksiyalar* $L[y]=0$ *tenglamaning yechimlari bo‘lsa, ularning chiziqli kombinatsiyasi* $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_my_m(x)$ *shu tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi.*

Ta’rif. $y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ *funksiyalar uchun*

$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=y_1y_2'-y_2y_1'$ *Wronskiy determinant yoki berilgan funksiyalarning Wronskiyani deyiladi.*

Teorema. *Agar* $y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ *[a;b] kesmada chiziqli bog‘liq bo‘lsa, u holda bu funksiyalarning Wronskiy determinanti nolga teng.*

Teorema. *Agar* $y''+py'+qy=0$ *tenglamaning* $y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ *yechimlaridan tuzilgan* $W(y_1,y_2)$ *Wronskiy determinanti tenglamaning koeffisentlari uzlusiz bo‘lgan [a;b] kesmadagi biror* $x=x_0$ *qiymatida nolga teng bo‘lmasa,u holda u bu kesmagi* x *ning hech bir qiymatida nolga aylanmaydi.*

Teorema. *Agar* $y''+py'+qy=0$ *tenglamaning* $y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ *yechimlari [a;b] kesmada chiziqli erkli bo‘lsa,u holda bu yechimlardan tuzilgan* $W(y_1,y_2)$ *Wronskiy determinanti berilgan kesmaning hech bir nuqtasida nolga aylanmaydi.*

Ta’rif. $y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_1(x)y'+p_0(x)y=0$ *tenglamaning fundamental yechimlar sistemasi deb uning* n *ta* $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ *chiziqli erkli yechimlar sistemasiga aytiladi.*

Ta’rif. *Agar* $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$ *funksiyalar* $(m-1)$ *tartibgacha hosilalarga ega bo‘lsa, u holda ushbu* m *-tartibli determinant*

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_m(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_m'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(m-1)} & y_2^{(m-1)}(x) & \cdots & y_m^{(m-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Vronskiy determinanti (vronskian) deyiladi va $W(x)$ *yoki* $W[y_1,\cdots,y_m]$ *kabi belgilanadi.*

Teorema. $y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_1(x)y'+p_0(x)y=0$ *tenglamaning* $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ *yechimlari chiziqli erkli bo‘lishi uchun ulardan tuzilgan Vronskiy determinanti noldan farqli bo‘lishi zarur va yetarlidir.*

Natija. *Agar* (a,b) *ning bitta* x_0 *nuqtasida* $W(x_0)\neq 0$ *bo'lsa, ular* (a,b) *da chiziqli erkli sistemani tashkil etadi.*

Ta'rif. $L_n[y]=y^{(n)}+p_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+p_1y'+p_0y=0$ *ko'rinishdagi tenglamalarga o'zgarmas koeffitsientli, chiziqli,bir jinsli differensial tenglamalar deyiladi,bu yerda* $p_i=i=0,1,\ldots,n-1$*-o'zgarmas sonlar.*

Bu tenglamani yechish uchun uning fundamental yechimlari sistemasi, ya'ni n ta chiziqli erkli $y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x)$ yechimlarni topish kerak. U holda uning umumiy yechimi $y=c_1y_1(x)+\cdots+c_ny_n(x)$ ko'rinishda bo'ladi, bu yerda $c_i(i=1,2,\ldots,n)-$, ixtiyoriy o'zgarmas sonlar.

9.4.2. Xarakteristik tenglama

$y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_1(x)y'+p_0(x)y=0$ tenglamaning xususiy yechimlarini $y=e^{kx}$, $k=const$, ko'rinishda izlaymiz. U holda

$$y'=ke^{kx},\ y''=k^2e^{kx},\cdots,y^{(n)}=k^ne^{kx}$$

Bularni tenglamaga qo'yib $L_n[e^{kx}]=e^{kx}[k^n+p_{n-1}k^{n-1}+\cdots+p_1k+p_0]=0$

Bu yerdan $e^{kx}\neq 0$ bo'lgani uchun $k^n+p_{n-1}k^{n-1}+\cdots+p_1k+p_0=0$.

Demak, agar k $k^n+p_{n-1}k^{n-1}+\cdots+p_1k+p_0=0$ algebraik tenglamaning yechimi bo'lsa, $y=e^{kx}$ funksiya $y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_1(x)y'+p_0(x)y=0$ ning xususiy yechimi bo'ladi.

Ta'rif. $k^n+p_{n-1}k^{n-1}+\cdots+p_1k+p_0=0$ *algebraik tenglama* $y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_1(x)y'+p_0(x)y=0$ *tenglamaning xarakteristik tenglamasi deyiladi.*

9.4.3. Fundamental yechimlar sistemasi

Xarakteristik tenglamaning ildizlari uchun quyidagi hollar bo'lishi mumkin.

1-hol. $k_1,k_2,\ldots,k_n$ - turli haqiqiy ildizlar bo'lsin. U holda n ta $e^{k_1x},e^{k_nx},\ldots,e^{k_nx}$ funksiyalar bir jinsli tenglamaning yechimlari bo'lib, $(-\infty,+\infty)$ da chiziqli erkli sistemani tashkil etadi. Shuning uchun, bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi $y=\sum_{i=1}^{n}c_ie^{k_ix}$ funksiyadir.

Agar birorta k_j kompleks son $(k_j=\alpha+i\beta,\beta\neq 0)$ bo'lsa, qolgan sonlar orasida unga qo'shma bo'lgan $k_s=\alpha-i\beta,s\neq j$, son mavjuddir. Kompleks $e^{(\alpha+i\beta)x},e^{(\alpha-i\beta)}$ funksiyalar bir jinsli tenglamaning tenglamaning yechimi bo'lgani uchun $\frac{1}{2}\left[e^{(\alpha-i\beta)x}+e^{(\alpha-i\beta)x}\right]=e^{\alpha x}\cos\beta x$ va $\frac{1}{2}\left[e^{(\alpha-i\beta)x}-e^{(\alpha-i\beta)x}\right]=e^{\alpha x}\sin\beta x$ funksiyalar ham bir jinsli tenglamaning yechimi bo‘ladi (bu yerda Eyler formulasi $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$ dan foydalaniladi).

Bu holda $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \ldots, e^{\alpha x} \cos \beta x, \ldots, e^{\alpha x} \sin \beta x, \ldots, e^{k_n x}$ yechimlar sistemasi ham chiziqli erkli ekanligini ko‘rsatish mumkin.

2-hol. k_1 xarakteristik tenglamaning m karrali ildizi bo‘lsin.

Bu holda $e^{k_1 x}, x e^{k_1 x}, \ldots, e^{m-1} e^{k_1 x}$ funksiyalar bir jinsli tenglamaning ixtiyoriy (a,b) da chiziqli erkli yechimlari bo‘ladi.

U holda bir jinsli tenglamaning fundamental yechimlari sistemasi quyidagicha bo‘ladi:

$$e^{k_1 x}, x e^{k_1 x}, \ldots, \tilde{o}^{m-1} e^{k_1 x}, e^{k_{m+1} x}, e^{k_{m+2} x}, \ldots, e^{k_n x}$$

3-hol. Agar $k_1 - m$ karrali kopmleks ildiz bo‘lsa $(k_1 = \alpha + i\beta, \beta \neq 0)$, u holda unga qo‘shma bo‘lgan m karrali $\overline{k_1} = \alpha - i\beta$ ildiz mavjuddir. Qo‘shma $\overline{k_1}$ ildizga quyidagi yechimlar mos keladi: $e^{\overline{k_1} x}, x e^{\overline{k_1} x}, \ldots, x^{m-1} e^{\overline{k_1} x}$.

Bularni mos ravishda qo‘shib, ayirib, 2ga bo‘lib, quyidagi 2 ta haqiqiy funksiyalar sistemalarini olamiz:

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, \ldots, x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x$$
$$e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x, \ldots, x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Sistemadagi kompleks funksiyalarni bu funksiyalar bilan almashtirilsa ,yana chiziqli erkli sistema hosil bo‘ladi.

Misol. Differensial tenglamani yeching. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$.

Yechish. Bu differensial tenglamaning xarakteristik tenglamasi:

$$k^3 - 2k^2 - k + 2 = 0 \ \ ya`ni, \ \ (k-2)(k^2 - 1) = 0 \ \ bo'ladi.$$

Bu algebraik tenglamaning ildizlari $k_1 = 2, k_1 = 1, k_3 = -1$. Bu ildizlarga mos keluvchi yechimlar: $c_1 e^{2x}, c_2 e^{x}, c_3 e^{-1}$.

Berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimi:

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{-x}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Nazorat savollari

1. *O‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalar.*
2. *O‘zgarmasni variatsiyalash usuli.*
3. *Ikkinchi tartibli differensial tenglama.*
4. *O‘zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli ikkinchi tartibli differensial tenglama.*
5. *Chiziqli bog‘liqsiz yechimlar tushunchasi.*
6. *Xarakteristik tenglama va uning ildizi.*

5- mashg'ulot

9.5.1. O'zgarmas koeffitsientli, chiziqli, bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamalar

9.5.2. Tanlash usuli

Tayanch iboralar: *yuqori tartibli hosila,harakteristik tenglama,hususiy yechim, umumiy yechim.*

9.5.1. O'zgarmas koeffitsientli chiziqli,bir jinsli bo'lmagan differensial Tenglamalar

n-tartibli o'zgarmas koeffitsientli chiziqli,bir jinsli bo'lmagan chiziqli differensial tenglama deb quyidagi ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi:

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x)$$

bu yerda $f(x), p_0(x), \dots, p_{n-1}(x) - (a,b)$ da berilgan uzluksiz funksiyalar.

Agar $f(x) \neq 0$ bo'lsa, u holda ikkinchi taribli, chiziqli, bir jinsli tenglama deyiladi. Agar $f(x) \neq 0$ bo'lsa, u bir jinsli bo'lmagan chiziqli tenglama deyiladi.

Ta'rif. $y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$ *tenglamaning fundamental yechimlar sistemasi deb uning* n *ta* $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ *chiziqli erkli yechimlar sistemasiga aytiladi.*

Bu tenglamani yechish uchun uning fundamental yechimlari sistemasi, ya'ni n ta chiziqli erkli $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ yechimlarni topish kerak. U holda uning umumiy yechimi $y = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda $c_i (i = 1, 2, \dots, n) -$, ixtiyoriy o'zgarmas sonlar.

9.5.2. Tanlash usuli

O'zgarmas koeffitsientli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamalarning yechimini topish quyidagi fundamental teoremaga asoslanadi.

Teorema. Bir jinsli bo'lmagan

$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x)$ -

n-tartibli, chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimi, uning xususiy yechimi va unga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi yig'indisidan iborat.

Misol. Differensial tenglamani yeching. $y'' - 5y' + 4y = 8$.

Yechish*:* Unga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topamiz: $y = c_1 e^x + e_2 c^{4x}$.

O'ng tomonning ko'rinishidan kelib chiqib, ushbu bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamaning xususiy yechimini $\tilde{y} = c$ ko'rinishda qidiramiz. Bu ifodani tenglamaga qo'ysak $c = 2$ bo'ladi.

Demak, tenglamaning umumiy yechimi: $y(x)=c_1e^x+c_2e^{4x}+2$

1-hol.Umumiy holda, xarakteristik tenglama s karrali nol ildizni o‘z ichiga olsa va bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning o‘ng tomoni n-darajali $P_n(x)$ ko‘phad bo‘lsa, tenglamaning xususiy yechimi $Q_n(x)x^s$ ko‘rinishda qidiriladi. Bu yerda $Q_n(x)$ n- darajali o‘zgarmas koeffitsientli ko‘phad.

2-hol.Umumiy holda,bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning o‘ng tomoni $P_n(x)e^{\alpha x}$ ko‘rinishda bo‘lsa, uning xususiy yechimi $\tilde{y}(x)=x^sQ_n(x)e^{\alpha x}$ ko‘rinishda qidiriladi, α- xarakteristik tenglamaning ildizi, s uning karraligi.

3-hol. Tenglamaning o‘ng tomoni $P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+Q_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$ bo‘lib , $\alpha+i\beta$ xarakteristik tenglamaning s karrali ildizi bo‘lsa, uning xususiy yechimi $\tilde{y}=x^s\left[U_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+V_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x\right]$ ko‘rinishda qidiriladi.Bu yerda $U_n(x)$ va $V_n(x)$- $P_n(x)$ va $Q_n(x)$ ko‘phadlarning umumiy ko‘rinishi.

Nazorat savollari

1. *Vronskiy determinanti.*
2. *Bir jinsli bo‘lmagan ikkinchi tartibli differensial tenglamalarning umumiy yechimi haqida teorema.*
3. *Ikkinchi tartibli differensial tenglama uchun birinchi chegaraviy masala.*

6-mashg’ulot

9.6.1. O’zgarmas koeffisentli, chiziqli differensial tenglamar sistemaslari
9.6.2. Differensial tenglamalar nazariyasining iqtisodiyotdagi tadbiqlari
9.6.3. Keynsning dinamik modeli

Tayanch iboralar: *yuqori tartibli hosila,harakteristik tenglama,hususiy yechim, umumiy yechim.*

9.6.1. O‘zgarmas koeffisentli, chiziqli differensial tenglamar sistemaslari

Odatda, differensial tenglamalar isitemalari qaralayotgaganda, funksiya argumentlari t orliqi, noma’lum funksiyalar esa $x_1(t), x_2(t),\cdots,x_n(t)$ orqali belgilanadi.

Ta'rif. *Ushbu*

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)) \end{cases} \quad (1)$$

ko'rinishdagi tenglamalar sistemasiga birinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasi deyiladi.

(1) tenglamaning $x_{10} = x_1(t_0), x_{20} = x_2(t_0), \cdots, x_{n0} = x_n(t_0)$ (2)

shartlarni qanolantiruvchi yechimini topish masalasi boshlang'ich shartli masala yoki Koshi masalasi deyiladi. (2) shartlar boshlang'ich shartlar yoki Koshi shartlari deyiladi.

Teorema *(yechimninng mavjudligi va yagonaligi). Agar* $f_i(t, x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$ $(i = 1, 2, ..., n)$ *funksiyalar va barcha* $\frac{\partial f_i(t, x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))}{\partial x_j}$ $(i = 1, 2, ..., n,\ j = 1, 2, ..., n)$ *xususiy hosilalar boshlang'ich qiymatlarning atrofida uzluksiz bo'lsa, u holda (1) tenglamaning (2) shartni qanoatlantiruvchi yechimi shu atrofda mavjud va yagonadir.*

Ta'rif. *Agar differensial tenglamalar sistemasi barcha noma'lum funksiyalar va ularning hosilalariga nisbatan chiziqli bo'lsa, u holda bunday differensial tenglamalar sistemasi ciziqli differensial tenglamalar sistemasi deyiladi.*

Ta'rif. *Ushbu*

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) + f_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) + f_2(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) + f_n(t) \end{cases} \quad (3)$$

ko'rinishdagi differensial tenglamalar sistemasiga o'zgarmas koeffisentli birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar sistemasi deyiladi.

Bu yerda $a_{ij} - const\ (i = 1, 2, ..., n,\ j = 1, 2, ..., n)$ - *sistemaning koeffisentlari deyiladi.*

Quyidagich belgilashlarni qabul qilsak ,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix},\ \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}$$

u holada (3) sistemani

$$\frac{dX}{dt} = AX + F \quad (4)$$

matrisaviy ko'rinishda yozish mumkin.

Ta'rif. *Agar (4) sistamada* $F = 0$*, hosil bo'lgan*

$$\frac{dX}{dt} = AX \quad (5)$$

sistema (4) sistemaga mos bir jinsli sistema deyiladi.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) \end{cases} \qquad (6)$$

Kursimizda chiziqli, bir jinsli, o‘zgarmas koeffisentli differensial tenglamalar sistemalarini o‘rganamiz.

Bir jinsli yoki bir jinsli bo‘lmagan o‘zgarmas koeffisentli, chiziqli differensial tenglamalar sistemasini bitta yuqori tartibli o‘zgarmas koeffisentli, chiziqli differensial tenglamaga keltirib integrallash usuli qulay hisoblanadi.

Soddalik uchun bu usulni ikki noma’lum funksiyali bir jinsli, o‘zgarmas koeffisentli, chiziqli differensial tenglama uchun o‘rganamiz.

Bu sistemening ko‘rinishi quyidagicha

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) \end{cases} \qquad (7)$$

Sistemening birinchi tenglamasini t bo‘yicha differensiallab, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = a_{11}\frac{dx_1(t)}{dt} + a_{12}\frac{x_2(t)}{dt} \quad (8).$$

(8) sistemada $\dfrac{dx_1(t)}{dt}$ va $\dfrac{x_2(t)}{dt}$ hosilalarni (7) sistemedagi ifodalarini qo‘yib:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = a_{11}(a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t)) + a_{12}(a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t)) \quad ,$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = (a_{11}^2 + a_{12}a_{21})x_1(t) + (a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22})x_2(t)$$

yoki

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = b_{11}x_1(t) + b_{12}x_2(t) \quad .$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) \\ \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = b_{11}x_1(t) + b_{12}x_2(t) \end{cases}$$

sistemada $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{11} & b_{12} \end{vmatrix} \neq 0$ bo‘lsa, u holda bu sistemani $x_1(t)$ va $x_2(t)$ noma’lumlarga nisbatan yechish mumkin. Bunda $x_1(t)$ va $x_2(t)$ noma’lum funksiyalarga $\dfrac{dx_1}{dt}$ va $\dfrac{d^2x_1}{dt^2}$ hosilalar orqali chiziqli ifodalanadi.

$$x_1(t) = a\frac{dx_1}{dt} + b\frac{d^2x_1}{dt^2} \qquad (9), \qquad x_2(t) = c\frac{dx_1}{dt} + d\frac{d^2x_1}{dt^2} \qquad (10)$$

(9) $x_1(t)$ funksiyaga nisbatan ikkinchi tartibli, bir jinsli, o‘zgarmas koeffisentli chiziqli differensial tenglamadir. Uni yechib $x_1(t)$ funksiyani hosil qilamiz. Topilgan $x_1(t)$ funksiyani ikkinchi tenglamaga qo‘yib $x_2(t)$ funksiyani hosil qilamiz.

Masalan, $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 3x_1 + 2x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 4x_1 + 5x_2 \end{cases}$ differensial tenglamalar sistemasini yechish uchun sistemaning birinchi tenglamasini t bo‘yicha differensiallab, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = 3\frac{dx_1}{dt} + 2\frac{dx_2}{dt} = 3(3x_1 + 2x_2) + 2(4x_1 + 5x_2) = 17x_1 + 16x_2 \ .$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 3x_1 + 2x_2 \\ \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = 17x_1 + 16x_2 \end{cases}$$

sistemani $x_1(t)$ *va* $x_2(t)$ noma’lumlarga nisbatan yechib:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} - 8\frac{dx_1}{dt} = -7x_1$$

$$3\frac{d^2x_1}{dt^2} - 17\frac{dx_1}{dt} = 14x_2 \ .$$

Birinchi tenglamani yechamiz.

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} - 8\frac{dx_1}{dt} + 7x_1 = 0.$$

$$k^2 - 8k + 7 = 0, \ k_1 = 1, k_2 = 7.$$

$$x_1(t) = C_1e^t + C_2e^{7t}.$$

Topilgan $x_1(t)$ yechimni ikkinchi munosabatga qo‘yib $x_2(t)$ noma’lum funksiyani hosil qilamiz.

$$x_2(t) = -C_1e^t + 2C_2e^{7t}.$$

Bir jinsli o‘zgarmas koeffisentli chiziqli differensial tenglamalar sistemasining fundamental yechimlar sistemasini bevosita ham toppish mumkin.

Buning uchun

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) \end{cases} \qquad (6)$$

tenglamalar sistemesi yechimlarini

$$x_1 = \alpha_1 e^{kt}, x_2 = \alpha_2 e^{kt}, \dots, x_n = \alpha_n e^{kt}$$

ko‘rinishida izlaymiz.(bu yerda $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ - o‘zgarmas sonlar). Ularni (3) sistemaga qo‘yib, e^{kt} ifodaga bo‘lib va barcha hadlarni nenglikning bir tomoniga yig‘ib, quyidagi sistemani hosil qilamiz

$$\begin{cases} (a_{11}-k)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22}-k)\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \cdots + (a_{nn}-k)\alpha_n = 0 \end{cases} \qquad (11)$$

Bu bir jinsli tenglamalar sistemasi noldan farqli yechimlarga ega bo‘lishi uchun uning determinant noldan farqli bo‘lishi kerak:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k_1 & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0 \qquad (12)$$

(12) tenglama (6) sistemaning xarakteristik tenglamasi deyiladi.

Quyidagi hollar bo‘lishi mumkin

I - hol. Agar (12) xarakteristik tenglamaning $k_i\ (i=1,2,...,n)$ ildizlari haqiqiy va turli bo‘lsa, ularni ketma-ket (11) sistemaga qo‘yib, ularga mos $\alpha_i^j\ (i=1,2,...,n,\ j=1,2,...,n)$ qiymatlar topiladi va ularni izlanayotgan yechim ko‘rinishiga qo‘yib, sistemaning n ta xususiy yechimlari hosil qilinadi.

$$x_1^{(j)} = \alpha_1^{(j)} e^{k_j t},\ x_2^{(j)} = \alpha_2^{(j)} e^{k_j t},\ ...,\ x_n^{(j)} = \alpha_n^{(j)} e^{k_j t}\ \ (j=1,2,...,n) \qquad (13)$$

bu yerda quyi indeks noma’lum funksiya nomeri, yuqori indeks yechim nomerini anglatadi.

Odatda bu yechimlarga sistemaning fundamental yechimlar sistemasi deyiladi.

Bu yechimlarni matrisaviy ko‘rinishda

$$X_1 = A^{(1)} e^{k_1 t},\ X_2 = A^{(2)} e^{k_2 t},\ ...,\ X^{(N)} = A^{(N)} e^{k_n t} \quad ,$$

bu yerda

$$A^{(i)} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(i)} \\ \alpha_2^{(i)} \\ \dots \\ \alpha_i^{(n)} \end{pmatrix},\ i=1,2,...,n.$$

Masalan, $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 3y \end{cases}$ differensial tenglamalar sistemasini yechaylik.

Berilgan sistemaga mos xarakteristik tenglama quyidagicha bo‘ladi

$$\begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ 4 & 3-k \end{vmatrix} = 0$$

yoki

$$k^2 - 4k - 5 = 0 \quad .$$

Bu tenglama ildizlari $k_1 = -1$, $k_2 = 5$. Ularga mos yechimlar esa

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1^{(1)} e^{-t}, \ y_1 = \alpha_2^{(1)} e^{-t} \\ x_2 = \alpha_2^{(2)} e^{5t}, \ y_2 = \alpha_2^{(2)} e^{5t} \end{cases}.$$

$x_1 = \alpha_1^{(1)} e^{-t}, \ y_1 = \alpha_2^{(1)} e^{-t}$ yechimlarni berilgan sistemaga qo‘yib

$$\begin{cases} -\alpha_1^{(1)} = \alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} \\ -\alpha_2^{(1)} = 4\alpha_1^{(2)} + 3\alpha_2^{(1)} \end{cases} \quad \text{yoki } \alpha_2^{(1)} = -\alpha_1^{(1)}.$$

Demak, $x_1 = C_1 e^{-t}$, $y_1 = -C_1 e^{-t}$, $C_1 = \alpha_1^{(1)}$.

$x_2 = \alpha_2^{(2)} e^{5t}$, $y_2 = \alpha_2^{(2)} e^{5t}$ yechimlarni berilgan sistemaga qo‘yib $\alpha_2^{(2)} = 2\alpha_1^{(2)}$ ekanligini hosil qilamiz.

Demak, $x_1 = C_2 e^{5t}$, $y_1 = 2C_2 e^{5t}$, $C_1 = \alpha_1^{(2)}$.

Sistema chiziqli bo‘lgani uchun sistemaning umumiy yechim

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t} \ , \quad y = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{5t}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

II - hol. Agar xarakteristik tenglama γ karrali k ildizga ega bolsa, u holda sistema yechimlari quyidagi ko‘rinishda izlanadi

$$X(t) = \left(A_0^{(s)} + A_1^{(s)} t + ... + A_{\gamma-1}^{(s)} t^{\gamma-1} \right) e^{k_s t}, \qquad (14)$$

bu yerda

$$A_i^{(s)} = \begin{pmatrix} \alpha_{1i}^{(s)} \\ \alpha_{2i}^{(s)} \\ ... \\ \alpha_{ni}^{(s)} \end{pmatrix}, \ \alpha_{ij}^{(s)} - const.$$

Masalan, $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$ differensial tenglamalar sistemasini yechamiz

Sistemaning xarakteristik tenglamasi

$$\begin{vmatrix} 1-k & -1 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0$$

yoki

$$k^2 - 4k + 4 = 0 \quad .$$

Bu tenglama ildizlari $k_1 = k_2 = 2$.

Demak, yechimni

$$\begin{cases} x = (\alpha_1 + \beta_1 t)\, e^{2t} \\ y = (\alpha_2 + \beta_2 t)\, e^{2t} \end{cases}$$

ko‘rinishida izlaymiz.

Yechimlarni berilgan sistemaga qo‘yib

$$2\alpha_1 + \beta_1 + 2\beta_1 t = \alpha_1 + \beta_1 t - \alpha_2 - \beta_2 t,$$

bundan esa

$$\beta_2 = -\beta_1 ,$$
$$\alpha_2 = -\alpha_1 - \beta_1 .$$

Bu yerda α_1 va β_1 ixtiyoriy o‘zgarmas sonlar bo‘lgani uchun ularni mos ravishda C_1 va C_2 orqali belgilab, quyidagi umumiy yechimga ega bo‘lamiz

$$\begin{cases} x = (C_1 + C_1 t)\, e^{2t} \\ y = -(C_2 + C_2 + C_2 t)\, e^{2t}. \end{cases}$$

III-hol. Agar xarakteristik tenglama $k_j = p + iq$ ildizga ega bo‘lsa, u holda unga mos

$$X_j = A^{(j)} e^{k_j t}$$

yechimni ikkita haqiqiy yechimga: shu ildizga mos kompleks funksiyaning haqiqiy va mavhum qismidagi funksiyalariga almashtirish mumkin.

Masalan, $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases}$ sistemani yechaylik.

Sistemaga mos xarakteristik tenglama $\begin{vmatrix} 1-k & -5 \\ 2 & -1-k \end{vmatrix} = 0$ yoki $k^2 + 9 = 0$.

Bu tenglama ildizlari $k_{1,2} = \pm 3i.$

Demak, yechimni

$$\begin{cases} x = \alpha_1\, e^{3it} \\ y = \alpha_2\, e^{3it} \end{cases}$$

ko‘rinishida izlaymiz.

Bularni sistemaga qo‘yib

$$(1-3i)\alpha_1 - 5\alpha_2 = 0.$$

Bu tenglamani, masalan, $\alpha_1 = 5$, $\alpha_2 = 1-3i$ yechimlar qanoatlantiradi. Demak,

$$\begin{cases} x = 5e^{3it} = 5(\cos 3t + i \sin 3t) \\ y = (1-3i)e^{3it} = (1-3i)(\cos 3t + i \sin 3t). \end{cases}$$

Bu yechimlarning haqiqiy va mavhum qismlari berilgan sistemaning yechimlari bo‘ladi, ularning chiziqli kom, inatsiyalari esa umumiy yechim bo‘ladi:

$$\begin{cases} x = 5C_1 \cos 3t + 5C_2 \sin 3t \\ y = C_1 (\cos 3t + 3\sin 3t) + C_2 (\cos 3t - 3\sin 3t). \end{cases}$$

9.6.2. Differensial tenglamalar nazariyasining iqtisodiyotdagi tadbiqlari

Ishlab chiqarishning tabiiy o'sish modeli

Faraz qilaylik, qandaydir mahsulot p narx bilan sotiladi, $Q(t)$ funksiya t vaqt mobaynida ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori o'zgarishini bildiradi desak, u holda t vaqt davomida $pQ(t)$ ga teng daromad olinadi. Aytaylik olingan daromadning bir qismi mahsulot ishlab chiqarish investitsiyasiga sarf bo'lsin, ya'ni

$$I(t) = mpQ(t) \qquad (1)$$

m- investitsiya normasi, o'zgarmas son va $0 < m < 1$.

Agar bozor yetarlicha ta'minlangan va ishlab chiqarilgan mahsulot to'la sotilgan degan tasavvurdan kelib chiqilsa, ishlab chiqarish tezligining yana oshishiga (akselatorga) olib keladi. Ishlab chiqarish tezligi esa investitsiyaning o'sishiga proporsional, ya'ni

$$Q' = l\,I(t), \qquad (2)$$

bu yerda $1/l$-akselator(o'sish) normasi. (1) formulani (2) ga qo'yib

$$Q' = kQ,\ k = lmp \qquad (3)$$

differensial tenglamani olamiz. (3) o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamadir. Bu tenglama umumiy yechimining ko'rinishi $Q = Ce^{kt}$, bunda C-ixtiyoriy o'zgarmas son.

Faraz qilaylik, boshlang'ich $t = t_0$ momentda mahsulot ishlab chiqarish hajmi Q_0 ma'lum bo'lsin. U holda bu shartdan C o'zgarmasni aniqlash mumkin: $Q_0 = Ce^{kt_0}$, bundan $C = Q_0 e^{-kt_0}$. Natijada (3) tenglama uchun Koshi masalasining yechimini topamiz:

$$Q = Q_0 e^{k(t-t_0)} \qquad (4)$$

Shunga e'tibor berish kerakki, matematik modellar umumiylik xossasiga ega. Aholining o'sishi dinamikasini, bakteriyalarning ko'payish jarayoni, radioaktiv parchalanish jarayonlari ham (4) formula bilan ifodalanadigan qonuniyatga bo'ysunadi.

Masalan.

1. Agar $Q' = kQ$ tenglamadagi proporsionallik koeffisiyenti 0,1 ga teng bo'lsa, realizasiya qilingan mahsulot miqdori boshlang'ich vaqtdagi bilan solishtirilganda, qancha vaqt o'tgandan keyin ikki marta ko'payadi?

Realizasiya qilingan mahsulot miqdorini ikkilanishiga ketadigan vaqtni 20% ga qisqartirish uchun investitsiya normasini qancha foizga oshirish kerak?

Mahsulot miqdori boshlang'ich vaqtdagi bilan solishtirilganda ikki marta ko'payadigan vaqtni aniqlash uchun (4) bog'lanishda $t_0 = 0, k = 0{,}1, Q = 2Q_0$ deb olish yetarli. U holda $2Q_0 = Q_0 e^{0{,}1t}$ tenglikka kelamiz, bundan $t = 10\ln 2 \approx 6{,}93$ vaqt birligi zarur bo'ladi.

Endi realizasiya qilingan mahsulot miqdorini ikkilanishiga ketadigan vaqtni20% ga qisqartirish uchun investitsiya normasini hisoblaymiz.

$$t_1 = 0{,}8t,\ k_1 = \frac{k}{0{,}8} = 1{,}25k,$$

ya'ni investitsiya normasini 25% ga oshirish kerak.

2. Talab va taklif funksiyalari mos ravishda

$$y = 25 - 2p + 3\frac{dp}{dt}, \ x = 15 - p + 4\frac{dp}{dt}.$$

Agar boshlang‘ich momentida p=9 bo‘lsa, muvozanat narxinig vaqtga bog‘liqligini topaylik.

Talab va taklifning tengligidan $25 - 2p + 3\frac{dp}{dt} = 15 - p + 4\frac{dp}{dt}$, bundan $\frac{dp}{dt} = 10 - p$, ya’ni o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglamani hosil qilamiz.Bu tenglamani yechib, $p = 10 - Ce^{-t}$ bog‘lanishni hosil qilamiz. $p(0) = 9$ shartdan, $C = 1$

kelib chiqadi, nihoyat $p = 10 - e^{-t}$ va $\lim\limits_{t\to\infty} p = \lim\limits_{t\to\infty}(10 - e^{-t}) = 10$ bo‘lib, narx turg‘unlikka ega bo‘ladi.

3. $k-$doimiy elastiklikka ega funksiya topilaylik.

Elastiklik ta’rifi va masala shartidan quyidagiga egamiz: $\frac{p}{Q}Q' = k$ ya’ni $\frac{p}{Q} \cdot \frac{dQ}{dp} = k.$

$p \neq 0$ shartda $\frac{dQ}{Q} = k \cdot \frac{dp}{p}$ munosabatni hosil qilamiz. Bu tenglikni integrallab, $\ln|Q| = k\ln|p| + \ln c$, bundan esa $Q = C \cdot p^k$ yechimni hosil qilamiz.

Raqobat sharoitida ishlab chiqarishning o‘sishi (Logistik o‘sish)

Faraz qilaylik, $p = p(Q)$-kamayuvchi funksiya bo‘lsin, ya’ni ishlab chiqarish o‘sishi bilan bozor to‘yinadi va narx pasaya boradi: $\frac{dp}{dQ} < 0$. U holda tabiiy o‘sish modeli

$$Q' = \alpha \cdot p(Q) \cdot Q \qquad (5)$$

ko‘rinishida bo‘ladi, bu erda $\alpha = \ell m$.

Tenglamaning o‘ng tomonidagi barcha ko‘paytuvchilar musbatligidan $Q' > 0$, ya’ni $Q(t)$ funksiya o‘suvchi.

Funksiyaning o‘sish xarakteri (qavariq yoki botiqligi) uning ikkinchi tartibli hosilasi bilan aniqlanadi. (5) tenglamadan ushbu

$$Q'' = \alpha\left[Q'p(Q) + Q\frac{dp}{dQ}Q'\right] = \alpha Q'\left(p + \frac{dp}{dQ}Q\right).$$

tenglik kelib chiqadi.

Talab elastikligini kiritib, bu tenglikning ko‘rinishini o‘zgartirish mumkin: $E(p) = \frac{Qdp}{pdQ}$, tenglikka ko‘ra $Q'' = \alpha Q'p\left(1 + \frac{Qdp}{pdQ}\right)$, yoki $\frac{dQ}{dp} < 0$ bo‘lgani uchun $E < 0$, nihoyat

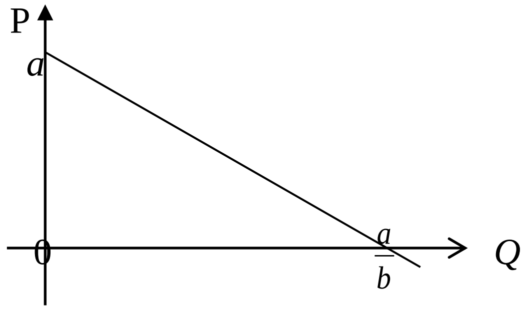
$$Q'' = \alpha Q'p\left(1 - 1/|E|\right) \qquad (6)$$

tenglik hosil bo‘ladi.

(6) tenglamadan elastik talabda, ya’ni $|E| > 1$ shartda, $Q'' > 0$ ekanligi kelib chiqadi va $Q(t)$ funksiyaning grafigi pastga qavariq ekanligi ma’lum bo‘ladi. Bu esa mahsulot hajmining progressiv o‘sishini bildiradi.

Noelastik talabda $|E|<1$ va bu holda $Q''<0$ bo‘lgani uchun $Q(t)$ funksiya yuqoriga qavariq, bu esa mahsulot hajmining sekin o‘sishini (ya’ni yetarlicha ta’minlanganlikni) bildiradi.

Soddalik uchun, $P(Q)=a-bQ, \quad a>0, b>0$ talab funksiyasi ishlab chiqarish funksiyasining chiziqli funksiyasi bo‘lgan holni qaraylik.

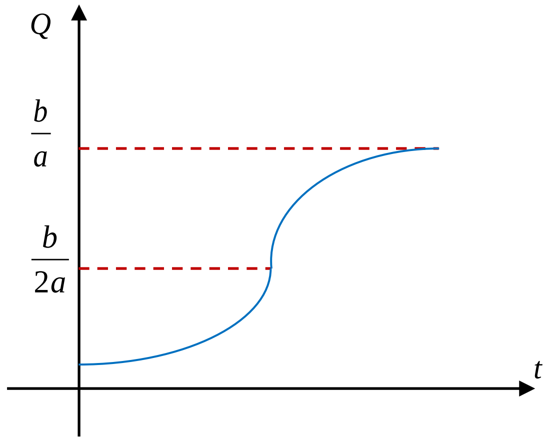


U holda (5) tenglama ushbu $Q'=\alpha(a-bQ)Q$ (7)

ko‘rinishda bo‘ladi. Agar $Q=0$ yoki $Q=\frac{b}{a}$ bo‘lsa, u holda $Q'=0$ bo‘ladi.

Demak, $Q''=\alpha Q'(a-2bQ)$. (8)

Shuningdek, $Q<\frac{b}{2a}$ bo‘lganda $Q''>0$ va $Q>\frac{b}{2a}$ bo‘lganda esa $Q''>0$ bo‘ladi.



$Q=Q(t)$ funksiya grafigining egilish nuqtasi $t=Q=a/2b$. Bu holda $Q(t)$ yechimni aniq topish mumkin. (7) tenglamada o‘zgaruvchilarni ajratib $\frac{dQ}{Q(a-bQ)}=\alpha dt$

yoki $\frac{1}{a}\left(\frac{1}{Q}+\frac{b}{a-bQ}\right)dQ=\alpha dt$.

Bu munosabatni integrallab $\ln|Q|-\ln|a-bQ|=\alpha at+\ln C$

yoki $\frac{Q}{a-by}=Ce^{\alpha at}$. Bundan $Q(t)=\frac{aCe^{\alpha at}}{1+bCe^{\alpha at}}$

Chizmada kelitirilgan bu funksiyaning grafigi ((7) differensial tenglamaning integral egri chiziqlaridan biri) *logistik egri chiziq* deyiladi.

Bunday egri chiziqlar boshqa dinamik jarayonlarni ham xarakterlaydi. Masalan, ma’lumot(reklama) tarqalishi, organik muhitda bakteriyalarning ko‘payishi, biologik organizmlarning chegaralangan muhitida epidemiyalar tarqalish dinamikasi jarayoni modellarini ifodalaydi.

9.6.3. Keynsning dinamik modeli

Asosiy Keynsian makroiqtisodiy modeli, tashqi savdo va davlat sektorida etishmasligi holda, umumiy xarajatlar (E) iste'mol xarajatlarni (C) va ekzojen belgilangan investitsiya (I) yig'indisi hisoblanadi. Shunday qilib, bu model qaerda iste'mol sifatida belgilanishi mumkin

$$E = C + I$$

$$C = a + bY$$

Muvozanatli $E = Y$ va kabi $Y = C + I$

Shunday bo'lsa-da, bu makroiqtisodiy tizimi har doim balansida bo'lmasligi mumkin. I bir ekzogen o'sish bor bo'lsa navbatda amalga taqillatib barcha ta'siri oxirigacha ishlashdan oldin misol uchun, u bir oz vaqt talab qilishi mumkin. Y tartibga soladi bilan tezligi joriy hosil nisbati *r* umumiy xarajatlar E va Y orasidagi farqi to'g'ri proportsional deb taxmin qilinadi. Bu munosabatlar sifatida yozilishi mumkin

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= r(E-Y) = r(C+I-Y)\\ &= r(a+bY+I-Y)\\ &= r(b-1)Y + r(a+I)\end{aligned}$$

r, a, b va *I* o‘zgarmas son bo‘lganda, Y bir o‘zgaruvchili *r(b* − 1*) o‘zgarmas koeffisentli* differensial tenglama va *r(a + I)* ozgarmas son yig‘indisidan iborat bo‘ladi Shunday qilib, birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama standart yechimi quyda berilgan misollarda foydalanishimiz mumkin.

Misol. Keynsian makroiqtisodiy modeli asosi

$$C = 360 + 0.8Y$$

$$I = 120$$

Agar sistema muvozanatdan chiqsa, *Y* ning o‘zgarish tezligi

$$\frac{dP}{dt} = 0.25(E-Y) = 0.25(C+I-Y).$$

Agar milliy daromad boshlang‘ich qiymati 2000 bo‘lsa, *Y* funksiani t shart ostida sistemani muvozanat vaziyatini ifodalang.

Yechish. *C* iste’mol funksiyani va berilgan investisiya *I* funksiyasini o‘rniga qo‘yish, differensial tenglamani yechishga olib keladi

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= 0.25(360+0.8Y+120-Y)\\ &= 0.25(480-0.2Y)\\ &= 120-0.05Y\end{aligned}$$

O‘zgarmas shartsiz keltirilgan differensial tenglama

$$\frac{dP}{dt} = -0.05Y \qquad \text{(KT)}$$

Shu bilan birga qo‘shimcha funksiya

$$Y_t = Ae^{-0.05t} \qquad \text{(QF)}$$

Y hususiy yechimni topishda *K* o‘zgarmas kattalik deb olsak

$$\frac{dY}{dt}=120-0.05K=0 \qquad \text{(HY)}$$

$$K=2,400$$

(QF) va (HY) tengliklar birgalikda umumiy yechimni beradi

$$Y_t = Ae^{-0.05t}+2,400 \qquad \text{(UY)}$$

Y ning boshlang‘ich sharti 2000 bo‘lganda, berilgan qiymatni o‘rniga qo‘yib UY ni xosil qilamiz

$$Y_0=2,000=Ae^0+2,400$$

$$-400=A$$

Boshlang‘ich shart ostida berilgan aniq yechim

$$Y_t=-400e^{-0.05t}+2,400 \qquad \text{(AY)}$$

t koeffisent eksponensial manfiy bo‘lmagan funksiya bo‘lgani uchun bozor turg‘un bo‘ladi. 2400 muvozanat qiymatiga yaqinlashish quyida berilganicha sekin sodir bo‘ladi.

t	$Y_t=-400e^{-0.05t}+2,400$
10	2157.388
20	2252.848
50	2367.166

Shu bilan birga t ni o'sishi bilan Y_t ni muvozanatga yaqinlashish bir tomonlama bo‘ladi. [53]

Dinamikaning asosiy komponentlari bo‘lgan iqtisodiyotning daromad va harakatlarni bog‘lovchi sodda balans modelini qaraymiz. Faraz qilaylik, $Y(t), E(t), S(t), I(t)$-mos ravishda milliy daromad, davlat xarajatlar, iste’mol va investitsiya funksiyasi bo‘lsin. U holda quyidagi munosabatlar o‘rinlidir:

$$\begin{aligned} &Y(t)=S(t)+I(t)+E(t),\\ &S(t)=a(t)Y(t)+b(t),\\ &I(t)=k(t)Y'(t)\end{aligned} \qquad (9)$$

bu yerda $a(t)$-iste’molga moyillik koeffitsienti $(0<a(t)<1), b(t)$-chekli iste’mol, $k(t)$-akseleratsiya normasi. (9) tenglamalarda ishtirok etuvchi barcha funksiyalar musbat.

(9) tenglamalarning ma’nosini oydinlashtiramiz. Barcha xarajatlarning yig‘indisi milliy daromadga teng bo‘lishi zarur - bu tenglik birinchi tenglamada ifodalangan. Xalq xo‘jaligidagi umumiy iste’mol, milliy daromadning bir qismi bo‘lgan ichki iste’mol va chegaraviy iste’moldan iborat bo‘ladi. Mana shu jarayon ikkinchi tenglamada aks ettirilgan. Nihoyat investitsiya hajmi ixtiyoriy bo‘lishi mumkin emas: u davlat texnologiyasi va infratuzilmasi xarakterlaydigan iqtisodiy ko‘rsatkich bo‘lib, akselator normasining oxirgi milliy daromadga ko‘paytmasi bilan aniqlanadi, bu jarayon uchinchi tenglik bilan ifodalangan.

[53] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

Faraz qilaylik, $a(t), b(t), k(t)$ va $E(t)$ funksiyalar berilgan. Bu funksiyalar davlat evolyutsiyasi va faoliyatini xarakterlaydi. Milliy daromad dinamikasini aniqlash, ya'ni t vaqtning funksiyasi bo'lgan Y ni topish masalasi asosiy iqtisodiy masalalardan biridir.

Ikkinchi tenglamadan $S(t)$ ni va uchinchi tenglamadan $I(t)$ ni birinchi tenglamaga qo'yamiz. $Y(t)$ funksiyaga nisbatan chiziqli bir jinsli bo'lmagan birinchi tartibli differensial tenglama hosil bo'ladi:

$$Y' = \frac{1-a(t)}{k(t)}Y - \frac{b(t)+E(t)}{k(t)} \qquad (10)$$

Biz asosiy a, b, k parametrlarni o'zgarmas sonlar deb faraz qilib, ancha sodda holni tekshiramiz. U holda (10) tenglama o'zgarmas koeffitsientli birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamaga aylanadi:

$$Y'_t = \frac{1-a}{k}Y - \frac{b+E}{k}. \qquad (11)$$

Ma'lumki, bir jinsli bo'lmagan tenglamaning umumiy yechimi uning qandaydir xususiy yechimi va unga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi yig'indisidan iborat. (11) tenglamaning xususiy yechimi $\tilde{Y}$ sifatida $Y' = 0$ dagi, ya'ni muvozanat yechimini olamiz, ya'ni

$$\tilde{y} = \frac{b+E}{1-a}. \qquad (12)$$

Bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi $Y_0^{(t)} C \exp\left(\frac{1-a}{k}t\right)$ formula bilan beriladi. Demak, (11) tenglamaning umumiy yechimi

$$Y(t) = \frac{b+E}{1-a} + Ce^{\frac{1-a}{k}t} \qquad (13)$$

(11) tenglamaning integral egri chiziqlari chizmada ko'rsatilgan.

Agar vaqtning boshlang'ich momentida $Y_0 < Y_p$ bo'lsa, u holda $C = Y_0 - Y_p < 0$ va egri chiziqlar (12) muvozanat yechimdan pastga ketadi, yani milliy daromad vaqt o'tishi bilan masalaning berilgan parametrlari a, b, k va E da kamayadi, chunki (13) da eksponenta darajasi musbat. Agar $Y_0 > Y_p$ bo'lsa, u holda $C > 0$ va vaqt o'tishi bilan milliy daromad o'sadi – integral egri chiziqlar $Y = Y_0$ muvozanat to'g'ri chizig'idan yuqoriga ketadi.

Nazorat savollari

1. *Ishlab chiqarishning tabiiy o'sish modeli.*
2. *Konkurensiya sharoitida ishlab chiqarishning o'sishi.*
3. *Keynsning dinamik modeli.*

Amaliy mashg‘ulotlar

1-*MAVZU. CHIZIQLI ALGEBRA*

Nazorat savollari

1. Iqtisodchilar uchun matematika fani predmeti.
2. Matritsa nima?
3. Matritsalar ustida qanday amallar bajarilishi mumkin?
4. Qanday matritsalarni ko‘paytirish mumkin?
5. Minor va algebraik to‘ldiruvchi orasida qanday farq bor?
6. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlarni hisoblash formulasini yozing.
7. Teskari matritsa deb qanday matritsaga aytiladi?
8. Teskari matritsa qanday topiladi?
9. Matritsa rangi ta'rifini keltiring.
10. Matritsa rangini hisoblash usullarini keltiring.
11. Chiziqli tenglamalar sistemasi deb qanday sistemaga aytiladi?
12. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning usullari.
13. Kroneker- Kapelli teoremasi.
14. Qaysi hollarda yagona yechim, qaysi hollarda cheksiz ko‘p yechim bo‘ladi?
15. Balans modeli nima?

Misol va masalalar

1. $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\\0&1&3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$ *ва* $C=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}$ bulca $A\cdot B-2\cdot C=?$

2. $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&3\\4&0&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&7\\3&2\\1&-3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2&0\\1&1\\-1&-4\end{pmatrix}$ matrisalar berilgan. $AB-2C$ ifoda hisoblansin.

3. $\begin{pmatrix}-1&3&-5&2&3\\2&-1&3&-1&0\\1&2&-2&1&3\\2&-6&10&-4&-6\end{pmatrix}$ matrisa rangi topilsin.

4. $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&1&2\\0&1&3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ bulca, $A\cdot B+\frac{1}{3}C=?$

5. $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\\0&1&3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$ *ва* $C=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}$ bulca $A\cdot B-2\cdot C=?$

6. Determinantni hisoblang. $\begin{vmatrix}6&3&-2&0\\3&-2&1&4\\0&5&-3&2\\-4&0&3&-1\end{vmatrix}$

7. Quyidagi matrisalardan qaysilariga teskari matrisa mavjud emas?

(a) $\begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 9 & 9 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 5 & 11 & 0 \\ -2 & 4 & 0.2 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}$

8. Berilgan matrisaga teskari matrisa topilsin. $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ -1 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & -7 \end{pmatrix}$

9. Chiziqli tenglamalar sistemasi: a) Kramer,b) matrisa va c)Gauss usulida yeching.

$$\begin{cases} 4x - 3y + 5z = 19 \\ 2y - z = 0 \\ 3x + y - 2z = 6 \end{cases}$$

10. Sistemasining barcha yechimlari topilsin. $\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 3x + 5y - z = 0 \\ 2x + 4y - z = 0 \end{cases}$

11. Hisoblang. $\dfrac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2}$.

12.Hisoblang. $\dfrac{16i\left(\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right)^2}{\left(-1+i\sqrt{3}\right)^4}$

13. Agar $z_1 = 4\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$, $z_2 = 1 - i$ bo‘lsa, $a)\ \dfrac{z_1^3}{z_2}$ *va* $b)\ z_2^6$ ni hisoblang.

14. Ildizni hisoblang. a) $\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}i}$,b) $\sqrt[3]{-125}$.

15. Kompleks sonlar to‘plamida tenglamaning barcha ildizlarini toping. $x^8 - 256 = 0$

Testlar

№		A	B	C	D
1.	$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$. Δ' ni toping.	$\Delta' = -\Delta$	$\Delta' = \dfrac{1}{\Delta}$	$\Delta' = 125$	* $\Delta' = \Delta$
2.	$\begin{vmatrix} 100 & 99 & 98 \\ 97 & 96 & 95 \\ 94 & 93 & 92 \end{vmatrix}$. $M_{23} = ?$	$M_{23} = -11$	$M_{23} = 24$	$M_{23} = 12$	* Ì $_{23} = -6$

3.	$A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, A^{-1} topilsin.	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$	* $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$
4.	$A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ bo‘lsa, $A^{-1}A^{1}=?$	$\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	* $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
5.	$\frac{1}{2}A+\frac{1}{3}B=?$ $A=\begin{pmatrix}2&4\\3&9\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3&-9\\-2&-4\end{pmatrix}$ $\frac{1}{2}A+\frac{1}{3}B=?$	$\begin{pmatrix}0&-1\\1&5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0\\1&-5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&-5\\\frac{5}{6}&\frac{19}{5}\end{pmatrix}$	* $\begin{pmatrix}0&-1\\\frac{5}{6}&\frac{19}{6}\end{pmatrix}$
6.	$A=\begin{pmatrix}4&4&4&4\\3&3&3&3\\2&2&2&2\\1&1&1&1\end{pmatrix}$, $r_A=?$	$r_A=4$	$r_A=3$	$r_A=0$	* $r_A=1$
7.	$A=\begin{pmatrix}10&100&1000\\0&0&100\\0&0&10\end{pmatrix}$, $r_A=?$	* $r_A=3$	* $r_A=1$	* $r_A=0$	* $r_A=2$
8.	$AX=B$ matrisaviy tenglamani eching, bu erda $A=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$	$X=A^{-1}$	cheksiz ko‘p yechimi bor	$X=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$	* $X=O$
9.	$A=\begin{pmatrix}-1&-1\\2&1\\3&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2&1\\1&-3\end{pmatrix}$ $A\cdot B=?$	$A\cdot B$ mavjud emas	$\begin{pmatrix}2&-1\\2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$	* $\begin{pmatrix}1&2\\-3&-1\\-5&0\end{pmatrix}$
10	$AX=B$ matrisaviy tenglamaning yechimi nechta? Bu erda $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$	yechimi yo‘q	2 ta	cheksiz ko‘p	* yagona

2-MAVZU. MATRISAVIY ANALIZ

Nazorat savollari

1. Chiziqli fazo nima?
2. Chiziqli erkli va chiziqli bog‘liq vektorlarning ta'rifini keltiring.
3. Chiziqli fazo o‘lchami nima? Bazis nima?
4. Evklid fazo ta'rifini keltiring.
5. Koshi-Bunyakovskiy, uchburchak tengsizliklarini keltiring.
6. Chiziqli operator nima?
7. Kvadratik forma nima?
8. Kvadratik formaning kanonik ko‘rinishi qanday bo‘ladi?
9. Xalqaro cavdo modelini tushuntiring?

Misol va masalalar

1.Berilgan vektorlar sistemasi chiziqli bog`liq yoki erkli ekanligini aniqlang.
$a_1 = (0, 1, 1, 0),\ a_2 = (1, 1, 3, 1),\ a_3 = (1, 3, 5, 1),\ a_4 = (0, 1, 1, 2).$

2. $\bar{a} = \{-3;4;1;0\},\ \bar{b} = \{-1;2;-3;0\},\ \bar{c} = \{1;1;2;3\}, \vec{d} = \{2;-6;0;2\}$ vektorlarni bazis hosil qilishini tekshiring.Agar bazis hosil qilishsa ,shu bazisdagi $\vec{p} = \vec{a} - 2\vec{b} + \vec{d}$ vektorning koordinatalarini aniqlan

3. $\vec{d} = 2x^4 - 4x^3 + 5$ *bektorni* $\vec{a} = -x^4 + 2x^3$ $,\vec{b} = x^2 + x + 1$ *va* $\vec{c} = -1$ vektorlar orqali chiziqli ifodalang.

4. Barcha shunday a sonlarni topingki, bunda b vektor $a_1,\ a_2,\ a_3$ vektorlarning chizqli kombinatsiyasi orqali ifodalansin. $b = (2, a, 3),\ a_1 = (1, 2, 1),\ a_2 = (3, 4, 5),\ a_3 = (4, 5, 7).$

5. Quyidagi almashtirishga teskari almashtirishni toping. $\begin{cases} x_1 = 5y_1 + y_2 - y_3 \\ x_2 = 3y_1 + 2y_2 - 3y_3 \\ x_3 = y_1 - y_2 + 2y_3 \end{cases}$

6. Matrisaning xos sonlari va xos vektorini toping. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ matritsaning xos sonlari va xos vektorlarini toping.

8. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ matritsaning xos sonlari va xos vektorlarini toping.

9. $F = 2x_1^2 - 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ kavdratik formalarni a)to‘la kbadrat ajratish:
b)xos bo‘lmagan orthogonal almashtirishlar yordamida kanonik ko`rinishga keltiring.

10. $F = x_1^2 - 4x_2x_3 + x_3^2$ kavdratik formalarni a)to‘la kbadrat ajratish:

b)xos bo‘lmagan orthogonal almashtirishlar yordamida kanonik ko`rinishga keltiring.

Testlar

№		A	B	C	D
1.	R^3 fazoda har qanday 4 ta $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ va $\vec{d}$ vektorlar chiziqli ……..	bog‘liq emas	*bog‘liq bo‘ladi	erkli bo‘ladi	savol noaniq
2.	α va β larning qanday qiymatlarida $\vec{a} = 2\vec{i} + a\vec{j} + \vec{k}$ va $\vec{b} = 3\vec{i} - 6\vec{j} + \beta\vec{k}$ vektorlar kollinear bo‘ladi?	$\alpha = 1, \beta = 2$	$\alpha = -4, \beta = 2$	$\alpha = -4, \beta = 3$	* $\alpha = -4, \beta = \frac{3}{2}$
3.	$\vec{a} = \{2;-1;3\}, \vec{b} = \{2;-1;-3\}$ va $\vec{c} = \{0;2;1\}$ bo‘lsa, $\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c} = ?$	$\{0;2;7\}$	$*\{0;4;8\}$	$\{0;0;1\}$	$\{1;-1;2\}$
4.	Agar $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{2}$, $\lvert\vec{b}\rvert = 3$ va ular orasidagi burchak $45°$ bo‘lsa, $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ vektor uzunligini toping.	4	5	$*5\sqrt{5}$	$\sqrt{15}$
5.	Agar $\lvert\vec{a}\rvert = 7\sqrt{2}$, $\lvert\vec{b}\rvert = 4$ va ular orasidagi burchak 45° bo‘lsa, $3\vec{a} + a\vec{b}$ va $\vec{a} - 2\vec{b}$ vektorlar a ning qanday qiymatlarida perpendikulyar bo‘ladi?	1	0	31	*31,5
6.	$\vec{a} = \{0;7;1\}$ va $\vec{b} = \{0;3;4\}$ vektorlar orasidagi burchakni toping.	$*45^\circ$	π	$\arccos\frac{1}{3}$	$\arcsin\frac{3}{4}$
7.	Agar $A(1;3;4)$ va $B(3;5;7)$ nuqtalar berilgan, $\overrightarrow{AB}$ vektorning koordinatalarini aniqlang.	$*\{2;2;3\}$	$\{2 \quad 2 \quad 2\}$	$\{2 \quad 2 \quad 4\}$	$\{2; \quad 2; \quad 0\}$
8.	AB kesmaning oxiri $B(-1;2;4)$ va uni $\varphi = \frac{1}{2}$ nisbatda bo‘luvchi $C(2;0;2)$ nuqta berilgan. AB kesmaning A uchi koordinatalarini toping.	$A(1;1;1)$	$*A(3,5;-1;1)$	$A(1;2;3)$	$A(-1;1;3)$
9.	R^3 fazoda har qanday 4 ta $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ va $\vec{d}$ vektorlar chiziqli ……..	bog‘liq emas	*bog‘liq bo‘ladi	erkli bo‘ladi	savol noaniq

10.	α va β larning qanday qiymatlarida $\vec{a} = 2\vec{i} + a\vec{j} + \vec{k}$ va $\vec{b} = 3\vec{i} - 6\vec{j} + \beta\vec{k}$ vektorlar kollinear bo‘ladi?	$\alpha = 1, \beta = 2$	$\alpha = -4, \beta = 2$	$\alpha = -4, \beta = 3$	* $\alpha = -4, \beta = \frac{3}{2}$

3-MAVZU. ANALITIK GEOMETRIYA

Nazorat savollari

1. Tekislikda to‘g‘ri chiziq tenglamalarining qanday ko‘rinishlari mavjud?
2. To‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak qanday topiladi.?
3. Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha masofa qanday topiladi.?
4. Ikkinchi tartibli soda egri chiziqlar.
5. Ikkinchi tartibli egri chiziq tenglamasini kanonik ko‘rinishga keltirish.
6. Fazoda tekislik va to‘g‘ri chiziq tenglamalari.
7. Tekislik va to‘g‘ri chiziqlarning parallelik va perpendikulyarlik shartlari.

Misol va masalalar

1. Uchlari $A(7; 9)$, $B(2; -3)$, $C(3; 6)$ nuqtalarda bo`lgan uchburchakning

1) M medianalar kesishish nuqtasi koordinatalarini

2) A uchidan chiqib BC tomonini E nuqtada kesib o`tuvchi AE bessektrisasi asosi E nuqta koordinatalarini

3)uchburchakning yuzini aniqlang.

2. $C(1; 1)$ nuqtadan o`tuvchi va koordinata burchagidan yuzasi 2 kv. birlik bo`lgan uchburchak ajratadigan to`g`ri chiziq tenglamasini tuzing.

3. Uchburchakning uchta uchi koordinatalari A(-1; 3), B(3; -2), C(5; 3) berilgan.

Uning tomonlari tenglamalarini tuzing, medianalari va balandliklari kesishgan nuqtasini toping.

4. Quyidagi aylanalarning markazlari va radiuslarini toping.

$a)\ x^2 + y^2 - 6x + 4y - 23 = 0$ $\qquad b)\ x^2 + y^2 + 5x - 7y + 2{,}5 = 0$

5. Yarim o`qi 5 , ekssentrisiteti $\frac{12}{13}$ ga teng bo`lgan ellipsning kanonik tenglamasini yozing.

6. $9x^2+25y^2 = 225$ ellipsda, o`ng fokusigacha bo`lgan masofa chap fokusigacha bo`lgan masofadan to`rt marta uzun bo`lgan nuqtani toping.

7. Berilgan egri chiziqlarning kanonik tenglamasini tuzing va garfigini chizing.

$a) x^2 - 10x + y^2 + 2y + 22 = 0 \qquad b) 9x^2 + 16y^2 - 144 = 0 \qquad c) 9x^2 - 49y^2 - 441 = 0 \qquad d) y^2 = 8x$

8. $14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0$ tenglama bilan berilgan egri chiziq tenglamasini kanonik ko‘rinishga keltiring ba grafigini chizing.

9. A(2;-5;3),B(5;2;4),C(-5;6;-1), va D(3;2;-4) nuqtalar berilgan.

a) ABC tekislislik tenglamasini tuzing

b) A uchidan BCD tekislislikka perpendikulyar o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing

c) D uchidan ABC yog‘igacha masofani toping.

10. Piramidaning uchlari A(5;3;-2),B(-1;0;3),C(-4;-2;-1), va D(4;2;-1) nuqtalarda.

a) BCD tekislik tenglamasini tuzing

b) AB qirra tenglamasini tuzing

c)A uchidan BCD yog‘iga perpendikulyar o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing

d) A uchidan BCD yog‘igacha masofani toping.

11. M(2;0;-3) nuqtadan o‘tuvchi va $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{-1}$ to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

12. M (1;-2;1) nuqtadan o‘tib $\begin{cases}3x-y+2z-7=0\\ x+3y-2z+3=0\end{cases}$ to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

13. 2x-y+3z-9=0 ; x+2y+2z-3=0 ; 3x+y -4z+6=0 tekisliklarning kesishish nuqtasini toping.

14. *Ox* va *Oy* o`qlaridan $a$ = 1, $b$ = -1 kesma ajratuvchi va $A$(2; 3; 4) nuqta orqali o`tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

15. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning:a) skalyar ko‘paytmasini ;b) vektor ko‘ytmasinic). $\vec{a},\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarrning aralash ko‘paytmasini toping. $\vec{a}=\vec{i}+3\vec{j}$, $\vec{b}=-\vec{i}+\vec{k}$, $\vec{c}=-\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$

Testlar

№		A	B	C	D
1.	$\frac{x}{2}-\frac{3}{4}y=5$ to‘g‘ri chiziqning burchak koeffisenti aniqlang.	$k=3$	$k=\frac{3}{2}$	$k=-\frac{3}{2}$	* $k=\frac{2}{3}$
2.	$x^2+y^2+4x-4y=0$ aylana $y=-x$ to‘g‘ri chiziq bilan M nuqtada kesishadi. M va $A(4,4)$ nuqtalar orqali o‘tuvchi aylana tenglamasini tuzing.	$y^2+x^2-2x=0$	$x^2+y^2=32$	$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1$,	* $x^2+y^2-8y=0$
3.	Agar ellips uchun $a=5$ va $c=1,4$ bo‘lsa, uning kichik o‘qini toping.	b=4	b=5	b=3,4	* b=4,8
4.	Agar ellips uchun $a=5$ va $c=1,4$ bo‘lsa, uning ekssentrisitetini toping.	$\varepsilon=0,8$	$\varepsilon=0,18$	$\varepsilon=0,1$	* $\varepsilon=0,28$

5.	$M\left(-4;\sqrt{21}\right)$ nuqtadan o‘tuvchi va $\varepsilon=\frac{3}{4}$ bo‘lgan ellips tenglamasini tuzing.	$\frac{x^2}{25}+\left(\frac{y}{4}\right)^2=1$	$\frac{1}{13}x^2+\frac{1}{2}y^2=1$	$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{28}=1$	* $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{28}=1$
6.	$M(5,1,-1)$ nuqtadan $x-2y-2z+4=0$ tekislikgacha masofa topilsin.	d=1	d=3.5	d=2	* d=3
7.	$x^2-16y^2=256$ giperbolaning haqikiy va mavxum yarim o‘qlari topilsin.	a=-16 b=4	a=16 b=-4	a=-16 b=-4	* a=16 b=4
8.	$x^2+4x+5+y^2+2y=0$ tenglamaning geometrik ma’nosi aniqlansin.	giperbola	ellips	aylana	* nuqta
9.	$M_0(1;1;1)$ нуқтадан $x+2y+2z+4=0$ текисликкача масофани топинг.	*3	2	1	1,5
10.	$\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-5}{1}$ тўғри чизиқ йўналтирувчи вектори узунлигини топинг	*3	2	1	1,5

4-MAVZU. MATEMATIK ANALIZGA KIRISH

Nazorat savollari

1. To‘plam tushunchasi. To‘plamlar ustida amallar.
2. To‘plamlarni akslantirish.
3. Funksiyaning ta'rifi. O‘zaro teskari funksiyalar.
4. Elementar funksiyalar. Iqtisodda funksiyadan foydalanish
5. Ketma-ketlik deb nimaga aytiladi?
6. Cheksiz kichik ketma-ketlik deganda qanday ketma-ketlik tushuniladi?
7. Ketma-ketlik limiti xossalarini keltiring.
8. Limiti mavjud bo'lmagan ketma-ketliklarga misollar keltiring.
9. Ajoyib limitlarni yozing.
10. Veyershtrass teoremalarini ayting.
11. Chegaralangan ketma-ketlikka misollar keltiring.
12. Noaniqliklarni ochishga misollar keltiring.
13. Uzluksiz funksiya ta'rifini aytib, misollar keltiring.
14. Ajoyib limitlarni yozing.
15. Veyershtrass teoremalarini ayting.
16. Chegaralangan ketma-ketlikka misollar keltiring.
17. Noaniqliklarni ochishga misollar keltiring.

Misol va masalalar

1. Agar $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x$ bo‘lsa , *f(x)=?*

2. Agar $f(2x+1)+\varphi(x-1)=x$ *va* $f(2x+1)-2\varphi(x-1)=2x^2$ bo‘lsa , *f(x)=?*

3. a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}=?$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}=?$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3tg^2x\right)^{ctg^2x}$ $=?$

4. a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2-5x+6}{x^3-7x+6}=?$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x-\sin^2 x}{3x^2}=?$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n})^{3n}=?$

5. $y=\sin x$ funksiya grafigidan foydalanib, quyidagi funksiyalarning grafiklarini alohida-alohida yasang.

1) $y=2\sin(x+1)$, 2) $y=1+3\sin 2x$, 3) $y=-2\sin 3(x-1)$, 4) $y=2-\sin\frac{4-x}{2}$

6. a) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[5]{x}+1}=?$ b) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}=?$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{2x^2-x+1}\right)^{x^2}=?$

7.a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=?$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{3x^2}=?$ c) $\lim\limits_{x\to 0}tgx^{tg2x}=?$

8. a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}=?$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg2x}{tg3x}=?$ c) $\lim\limits_{x\to c}\frac{a^x-a^c}{x-c}=?$

9. Funksiyani uzilish nuqtalarini toping va grafigini chizing

a) $f(x)=\begin{cases} x-1 & agar\ \ x\ge 1 \\ x^2 & agar\ 0\le x<1 \\ x^3 & agar\ \ x<0 \end{cases}$ b) $f(x)=3^{\frac{1}{x-4}}$

10. Funksiyani uzilish nuqtalarini toping va grafigini chizing

a) $f(x)=\begin{cases} x & agar\ \ x\ge 0 \\ (x+3)^2 & agar\ -2<x<0 \\ x+3 & agar\ \ x\le -2 \end{cases}$ b) $f(x)=4^{\frac{1}{x-5}}$

Testlar

№		A	B	C	D
1.	$y=\dfrac{4}{1+\sqrt{x^2-4}}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.	$(-2,2]$	$(-\infty,+\infty)$	$[-2,2]$	* $(-\infty,-2]\bigcup[2,+\infty)$
2.	$y=\dfrac{\sin x}{x-1}$ funksiyaning uzilish nuqtasini aniqlang.	0	-1	(0,1)	1
3.	$y=\sqrt{\lvert x-1\rvert}$ funksiyaning aniqlanish soxasi topilsin.	$(-\infty,-1)$	$(1,+\infty)$	$(-1,1)$	* x∈ R
4.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$ limitni hisoblang	1	-1	-2	* 2
5.	$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-10^n}{1+10^{n+1}}$ limitni hisoblang.	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{1}{3}$	0,1,	* -0,1
6.	$y=\sqrt{\lvert x-1\rvert}$ funksiyaning aniqlanish soxasi topilsin.	$(-\infty,-1)$	$(1,+\infty)$	$(-1,1)$	* x∈ R
7.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-x^2}{x}$ limitni hisoblang.	∞	$-\infty$	$\dfrac{1}{2}$	* 1
8.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x^3}{x^2+2x+5}$ limitni hisoblang.	$+\infty$,	0	1	* $-\infty$
9.	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$ limitni hisoblang.	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	* $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$
10.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x^3}{x^2+2x+5}$ limitni hisoblang.	* $-\infty$	0	1	8

5-MAVZU. BIR O‘ZGARUVCHILI FUNKSIYALARNING DIFFERENSIAL HISOBI

Nazorat savollari

1. Hosila ta'rifini ayting.
2. Hosilaning ma'nolari .
3. Elementar funksiyalar hosilalarining jadvalini keltiring.
4. Yuqori tartibli hosilani hisoblash qoidalarini keltiring.
5. Funksiya differentsialining ta'rifini ayting.
6. Differentsial hisobning asosiy teoremalarini ayting.
7. Teylor formulasini yozing.
8. Funksiya ekstremumini topish shartlarini ayting.

Misol va masalalar

1. Quyidagi funksiyalar hosilasini hosilaning ta’rifi yordamida hisoblang.
   a) $y=x^3$ b) $y=\ln x$ c) $y=\cos x$
2. a) $y=tgx$, $y'''=?$ b) $y=2^x+2^{-x}$, $d^{(n)}=?$
3. a) $y=x^2\sin 2x$. $y'=?$ b) $y=\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$. $y'=?$ c) $x=a\cos t,\ \ y=a\sin t$. $Y_x'=?$
4. a) $y=-\dfrac{4}{11}x^5\sqrt{x}+\dfrac{2}{15}x\sqrt[7]{x}$. $y'=?$ b) $y=\arcsin\dfrac{2x^2}{1+x^4}$. $y'=?$ c) $x=e^{2t},\ \ y=e^{3t}$. $Y_x'=?$
5. a) $y=x^5\ln x$. $y'''=?$ b) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$. $d^{(n)}y=?$
6. a) $y=\ln^3\left(\sqrt{x}-2^{-x^2}\right)$. $y'=?$ b) $y=\sqrt[4]{1+\cos^2 x}$. $y'=?$ c) $\sin(x-y)=\dfrac{x}{y}$. $y'=?$
7. a) $y=\dfrac{\ln^2 x}{2}$. $y'''=?$ b) $y=5-3\cos^2 x$. $d^{(n)}y=?$
8. a) $y=\sqrt[3]{x^3-6x^2}$. $y'''=?$ b) $y=2x-\dfrac{\cos x}{x}$. $d^{(n)}y=?$
9. a) $y=\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{2x^3}{3}+x$. $y'=?$ b) $y=|x|+|x-2|$. $y'=?$ c) $5^x+5^y=xy$. $y'=?$
10. a) $y=arctg(x+\sqrt{1+x^2})$. $y'''=?$ b) $y=\ln x^2$. $d^2y=?$
11. Funksiyani to‘la tekshiring va grafigini chizing. $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-4x+3}$.
12. Funksiyani to‘la tekshiring va grafigini chizing. $y=\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2$
13. Funksiyani to‘la tekshiring va grafigini chizing. $y=\dfrac{1+3x}{1-x^2}$.
14. Funksiyani to‘la tekshiring va grafigini chizing. $y=\dfrac{x-1}{x^2-3x-4}$.
15. Funksiyani to‘la tekshiring va grafigini chizing. $y=x^3-3x^2+6x+7$.

16. p=120−3q talab funksiya berilganda TR maksimumga erishadigan MR funksiya qiymatini toping.

17. Agar $TC = 4q^3 - 20q^2 + 60q + 40$ bo‘lsa, MC funksiyani aniqlang.

18. Firmsning umumiy daromad va umumiy xarajat funsiyalari mos ravishda

$$TR = 52q - q^2 \quad ,TC - \frac{q^3}{3} - 2.5q^2 + 34q + 4$$

Qanday ishlab chiqarishda foyda maximumga erishadi?

19. Agar $TC = 65 + q^{1.5}$ u holda q=25 bo‘lganda MC nimaga teng?

20. $TR = 250q - 2q^2$ umumiy foyda maksimumga erishadigan ishlab chiqarish hajmini aniqlang.

Testlar

№		A	B	C	D
1.	$y = \frac{2x}{1-x^2}$, y' hosilasini toping.	$\frac{2}{(1-x^2)^2}$	$\frac{x^2}{1-x^2}$	$\frac{1}{1-x}$	* $\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$
2.	$y = x \cdot \sqrt{1+x^2}$, y' hosilasini toping.	* $\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\sqrt{1+x^2}$
3.	$y = e^{-x^2}$, y' hosilasini toping.	$x \cdot e^{-x^2}$	* $-2x \cdot e^{-x^2}$	$-2e^{-x^2}$	e^{-x^z}
4.	$y = \cos(\sin x)$, y' hosilasini toping.	$-\sin(\sin x)$	$\sin x$	* $-\cos x \sin(\sin x)$	$\cos(\cos x)$
5.	$y = \ln tg\frac{x}{2}$, y' hosilasini toping.	$\frac{1}{tg\frac{x}{2}}$	$\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$	1/x	* $\frac{1}{\sin x}$
6.	$y = \cos x^2$, dy differensialini toping.	* $dy = -2x\sin x^2 dx$	$dy = x\cos x dx$	$dy = 2x\cos x^2 dx$	$dy = -\sin x^2 dy$
7.	$f(x) = x^2 - 2x + 2$ funksiyaning $x_0 = 2$ nuqtadagi urinma tenglamasini yozing.	$y = 2x + 1$	* $y = 2x - 2$	$y = 2x + 2$	$y = 2x + 4$
8.	$y = 2x^2 - 4x - 7$ funksiyaning ekstremumlarini toping.	* $\min y = -9$	-7	10	0
9.	$f(x) = \ell n(x^3 + 2x^2 + 1)$ bo‘lsa, $f(0) + f'(0) = ?$	1	$\frac{2}{5}$	-10	* 0
10.	$f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ bo‘lsa, $f'(1) = ?$	0	-1	$\frac{2}{3}$	* 1

6-MAVZU. KO‘P O‘ZGARUVCHILI FUNKSIYALAR DIFFERENSIAL HISOBI

Nazorat savollari

1. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya ta'rifini ayting va misollar keltiring.
2. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya limiti ta'rifini ayting.
3. Ko‘p o‘zgaruvchili uzluksiz funksiya ta'rifini ayting.
4. Xususiy hosila qanday topiladi?
5. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya differentsiali qanday topiladi?
6. Yo‘nalish bo‘yicha hosila qanday aniqlanadi?
7. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya ekstremumining zaruriy shartini ayting.
8. Ekstremumning yetarli shartini ayting.
9. Shartli ekstremumning ta'rifini ayting.

Misol va masalalar

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y^3}{x^3+y^3}$ =?

2. $z=\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y}{x^2}$ $z'_x=?$ $z'_y=?$

3. $z=x^4+y^4-4x^2y^2$. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=?\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=?\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=?$

4. $u=e^{xyz}$ .d^2 u=?

5. $u=\sqrt{x+y+z}$. d^2 u=?

6. Funksiyani ekstremumga tekshiring: $z=x^3+y^3-15xy$.

7. Funksiyani ekstremumga tekshiring: $z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}, x+y=2.$

8. $z=x^2-xy+y^2+3x-2y+1. \min z=?$

9. $z=x^2-xy+y^2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}. \min z=?$

10. $z=xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}.$ $\min z=?$

Testlar

№		A	B	C	D
1.	$u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping .	* $x^2+y^2>1$	$x^2+y^2<1$	$x^2+y^2\geq 1$	$x^2+y^2\leq 1$
2.	$z(x,y)=x^2+2xy+y^2$ bo‘lsa, $\dfrac{\partial z(x,y)}{\partial x}=?$	$2x+y^2$	$2x+2y^2$	$2x+2xy$	* $2x+2y$
3.	$z(x,y)=xy^2+yx^2$ bo‘lsa				*

	$\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}$ topilsin.	$2xy+2y$	y^2+x^2	$x+y$	$2xy+\tilde{o}^2$
4.	Ushbu $f(x,y)=x^3+y^3-6xy$ funksiyani statsionar nuqtalari topilsin	* (0,0) va (2,2)	(0,0) va (3,3)	(0,1) va (2,3)	(0,0) va (4,2)
5.	$z(x,y)=x^2+2xy+y^2$, $\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}=?$	* $2x+2y$	$x+y^2$	$x+xy$	$y+x^2$
6.	$z(x,y)=x^2+2xy+y^2$, $\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}=?$	* $2x+2y$	$x+y^2$	$x+xy$	$y+x^2$
7.	$z(x,y)=xy^2+yx^2$, $\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}=?$	* $2xy+\tilde{o}^2$	y^2+x^2	$x+y$	xy-y
8.	$f(x,y)=x^3+8y^3-6xy+1$ funksiyaning ekstremumlarini toping.	* $\min f(1;-\frac{1}{2})=0$	$\max f(0;0)=1$	$\min f(1;2)=60$	mavjud emas
9.	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{\sin(2xy)}{x}$ limitni hisoblang.	* 2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
10.	$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.	$x>y$	$x^2+y^2>1$	$x+y\le 1$	* $x^2+y^2\le 1$

7-MAVZU. BIR VA KO‘P O‘ZGARUVCHILI FUNKSIYALARNING INTEGRAL HISOBI

Nazorat savollari

1. Boshlang‘ich funksiya deb nimaga aytiladi?
2. Aniqmas integral deb nimaga aytiladi?
3. Aniqmas integralning xossalarini yozing.
4. Aniqmas integral jadvalini keltiring va ba'zilarini isbotlang.
5. Ratsional ifodalar qanday integrallanadi?
6. Irratsional ifodalarni integrallashga misollar keltiring.
7. Trigonometrik ifodalarni integrallashga misollar keltiring.
8. Binominal integrallar nazariyasini keltiring.
9. Elementar funksiyalar bilan ifodalanmaydigan integrallarga misollar keltiring
10. Aniq integral qanday ta'riflanadi?
11. Aniq integralning iqtisodiy ma'nosini ayting
12. Aniq integralning mavjudligi va yetarli shartini ayting.
13. Aniq integral xossalarini ayting.
14. N`yuton-Leybnits formulasini yozing.
15. Aniq integral bilan yuzalarni hisoblash formulasini yozing.
16. Aniq integralni taqribiy hisoblash formulasini yozing.
17. Xos bo‘lmagan integral turlarini ayting.
18. Cheksiz oraliq uchun yaqinlashuvchi bo‘lgan xos bo‘lmagan integralga misol keltiring.
19. Maxsus nuqtali yaqinlashuvchi xos bo‘lmagan integralga misol keltiring

Misol va masalalar

1. $\int x\cdot 2^{-x}dx = ?$ 2. $\int \sin^3 6x\cos 6x dx = ?$ 3. $\int \frac{5^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = ?$ 4. $\int (\ln x)^2 dx = ?$ 5. $\int \frac{3x^2+2x-3}{x^3-x}dx = ?$

6. $\int_0^1 \frac{x\cdot arctgx}{\sqrt{1+x^2}}dx = ?$ 7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx = ?$ 8. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+x}$ 9. $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{4+x^2} = ?$

10. quyidagi chiziqlar bilan chegaralangan shaklning yuzini: $y=2x-x^2$, $y+x=0.$

11. quyidagi chiziqlar bilan chegaralangan shaklning berilgan o‘q atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jism hajmini hisoblang: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$. Oy o‘qi atrofida

12. Integralni hisoblang. $\int_1^3 dx\int_{x^2}^{x}(x-y)dy.$

13. Integralni hisoblang. $\iint_D y\ln x dxdy$, $D=\{xy=1\ ,\ y=\sqrt{x}\ ,\ x=2\}$

14. Integralni hisoblang. $\int_0^2 dx \int_0^{2\sqrt{x}} dy \int_0^{\sqrt{\frac{4x-y^2}{2}}} xdz.$

15. Integralni hisoblang. $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{x+y+z+1}}.$

Testlar

№		A	B	C	D
1.	$\int (e^x + x)dx = ?$	$e^x + \frac{x^2}{2}$	$\frac{e^x + x^2}{2} + C$	$\frac{e^x - x^2}{2} + C$	* $e^x + \frac{x^2}{2} + c$
2.	$\int \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{x}\right)dx = ?$	$\frac{x^5}{20} - x^{-2} + c$	$\frac{x^5}{5} - \ell nx$	$\frac{x^5}{5} + \ell n\|x\|$	* $\frac{x^5}{20} - \ell n\|x\| + c$
3.	$\int (\cos x + 2x^3)dx = ?$	$\sin x + x^4$	$\cos x + x^4 + c$	$\cos x + \frac{x^4}{5} + c$	* $\sin x + \frac{1}{2}x^4 + c$
4.	$\int_0^1 (x^3 + 1)dx = ?$	$\frac{17}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	* $\frac{5}{4}$
5.	$\int_0^{\pi/2} \sin x dx = ?$	0	-1	2	* 1
6.	$\int_a^b e^{2x}\, dx = ?$	$\frac{e^b - e^a}{b-a}$	$\frac{e^a + e^b}{b+a}$	$\frac{e^{2b} - e^{2b}}{b+a}$	* $\frac{1}{2}(e^{2b} - e^{2a})$
7.	y=cosx, y=o, x=0 va x=2π chiziqlar bilan chegaralangan shaklning yuzi hisoblansin.	2π	1	3	* 4
8.	$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = ?$	1	2	$\frac{\pi}{4}$	* $\frac{\pi}{2}$
9.	$y = x$ va $y = x^2$ egri chiziqlar bilan chegaralangan G soxa bo‘yicha $\iint_G (x + y^2)dxdy$ integralni hisoblang.	$\frac{5}{34}$	* $\frac{5}{42}$	$\frac{4}{21}$	3
10.	$\int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} dy$ integralning qiymatini toping.	1	2	*$1\frac{1}{6}$	0

8-MAVZU. QATORLAR NAZARIYASI

Nazorat savollari

1. Musbat hadli qatorlar yaqinlashish haqidagi solishtirish teoremalarini ayting.
2. Yaqinlashuvchi qatorlar uchun Dalamber teoremasi.
3. Koshi teoremasini ayting.
4. Koshining integral alomatini ayting.
5. Leybnits teoremasini ayting, misollar keltiring
6. Absalyut yaqinlashuvchi qatorga misol keltiring.
7. Shartli va absolyut yaqinlashishlarni tushintiring.
8. Funksional qatorlarga misollar keltiring.
9. Darajali qator nima va uning yaqinlashish radiusi qanday topiladi.
10. Darajali qatorlarni differentsiallash va integralash qoidalarini ayting.

Misol va masalalar

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+5n+6}$ =? 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+6n+5}$ =?

3. Quyidagi qatorlarning yaqinlashuvchiligini tekshiring. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5+2}}$

4. Quyidagi qatorlarning yaqinlashuvchiligini tekshiring. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n\cdot 2^n}}$

5. Quyidagi qatorlarning yaqinlashuvchiligini tekshiring. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots$

6. Quyidagi qatorlarning yaqinlashuvchiligini tekshiring. $\frac{1}{2}-\frac{4}{5}+\frac{7}{8}-\frac{10}{11}+\ldots$

7. Quyidagi qatorlarning yaqinlashish sohasini toping. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

8. Quyidagi qatorlarning yaqinlashish sohasini toping . $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$

9. Quyidagi qatorlarning yaqinlashish sohasini toping.

$$(x+1)+\frac{(x+1)^2}{2\cdot 4}+\frac{(x+1)^3}{3\cdot 4^2}+\ldots+\frac{(x+1)^n}{n\cdot 4^{n-1}}+\ldots$$

10. Qatorni hadma – had differensiallab yoki integrallab , yig`indisini toping.

a) $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+\ldots$ b) $1-3x^2+5x^4-7x^6+9x^8-\ldots$

Testlar

№		A	B	C	D
1.	$\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{6}{27}+\frac{8}{81}+\ldots$ qator tekshirilsin.	* Yaqinlashuvchi	Uzoqlashuvchi	Aniqlab bo‘lmaydi	Yaqin emas, uzoq emas.
2.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$ qatorning yig‘indisini toping.	4	5	$\frac{1}{2}$	* $\frac{2}{3}$
3.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2n}$ qatorning yig‘indisini toping.	1	$\frac{5}{6}$	2	* $\frac{1}{6}$
4.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+2^n}{10^n}$ qatorning yig‘indisini toping.	-2	1,5	2,25	* 1,25
5.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ qatorning yig‘indisini toping.	5	10	10000	* qator uzoklashuvchi
6.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{3^{n-1}n}$ qatorning yaqinlashish intervali aniqlansin.	(-3;3)	[-3;3]	(2;8)	* [-3;3)
7.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ qatorning yaqinlashish intervali aniqlansin.	$(-\infty;3)$	[-3;50]	(2;8)	* $(-\infty;+\infty)$
8.	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$ qatorning yig‘indisini toping.	$\frac{1}{3}$	3	$\frac{1}{2}$	* $\frac{3}{4}$
9.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ qatorning yaqinlashish intervali aniqlansin.	$(-\infty;3)$	[-3;50]	(2;8)	* $(-\infty;+\infty)$
10.	$1+2x+3x^2+nx^3+\ldots-?$ $(\lvert x\rvert<1)$ funksional qatorning yig‘indisini toping.	$\frac{1}{1-x}$;	$\frac{-1}{(1-x)^2}$;	* $\frac{1}{(1-x)^2}$;	$\frac{1}{1+x}$.

9-MAVZU. DIFFERENSIAL TENGLAMALAR NAZARIYASI

Nazorat savollari

1. Differensial tenglama deb qanday tenglamaga aytiladi va uning tartibi qanday aniqlanadi?
2. Differensial tenglamaning yechimi ta'rifini ayting.
3. Birinchi tartibli oddiy differensial tenglama uchun Koshi teoremasi.
4. Koshi teoremasining geometrik ma'nosi.
5. Birinchi tartibli oddiy differensial tenglama uchun umumiy va xususiy integral tushunchalari.
6. O‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalar.
7. O‘zgarmasni variatsiyalash usuli.
8. Ikkinchi tartibli differensial tenglama.
9. O‘zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli ikkinchi tartibli differensial tenglama.
10. Chiziqli bog‘liqsiz yechimlar tushunchasi.
11. Xarakteristik tenglama va uning ildizi.
12. Vronskiy determinanti.
13. Bir jinsli bo‘lmagan ikkinchi tartibli differensial tenglamalarning umumiy yechimi haqida teorema.
14. Ikkinchi tartibli differensial tenglama uchun birinchi chegaraviy masala.
15. Ishlab chiqarishning tabiiy o‘sish modeli.
16. Konkurensiya sharoitida ishlab chiqarishning o‘sishi.
17. Keynsning dinamik modeli.
18. O‘sishning noklassik modeli.
19. Oldindan aytib beriladigan narx asosida bozor modelini tuzish.

Misol va masalalar

1. Differensial tenglamani yechig. $y' - y = \sin x$
2. Differensial tenglamani yechig. $y - xy' = x + yy'$
3. Differensial tenglamani yechig. $y' - \dfrac{y}{1-x^2} - 1 - x = 0, y(0) = 0$
4. Differensial tenglamani yechig. $y' = 3\sqrt[3]{y^2}; \quad y(2) = 0$
5. Differensial tenglamani yechig. $y' - y \cdot tgx + y^2 \cdot \cos x = 0$
6. Differensial tenglamani yechig. $xy' - 4y - x^2 \cdot \sqrt{y} = 0$
7. Differensial tenglamani yechig. $xy'' + y' = 0$
8. Differensial tenglamani yechig. $y'' + y' = \sin^2 x$
9. Differensial tenglamani yechig. $y'' + y = \cos x$
10. “To‘liq differensialli” diferensial tenglamani yechig.
$$\left(3x^2 y - 4xy^2\right)dx + \left(x^3 - 4x^2 y + 12y^3\right)dy = 0.$$
11. Differensial tenglamani yechig. $y'' + y' - 2y = 0$
12. Differensial tenglamani yechig. $y'' - 4y' + 13y = 0$
13. Differensial tenglamani yechig. $y'' - 2y' = 0, y(0) = 2, y'(0) = 2.$
14. Differensial tenglamani yechig. $y'' - 6y' + 25y = 2\sin x + 3\cos x$

15. Differensial tenglamani yechig. $y'' - y' = 2 - 2x, y(0) = 1, y'(0) = 1.$

Testlar

№		A	B	C	D
1.	$x^2 y' + y = 0$ differensial tenglamaning umumiy integral topilsin.	* $y = ce^{\frac{1}{x}}$	$y = e^x + c$	$y = ce^x$	$ye^x = c$
2.	$xy' = y$ differensial tenglamaning u(1)=1 shartni kanoatlantiruvchi yechimi topilsin.	$y = 5x$	$y = -x$	$y = \ell nx$	* $y = x$
3.	$y' = y$ differensial tenglamaning u(0)=1 shartni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.	$y = 5e^{2x}$	$y = -e^{2x}$	$y = e^{2x}$	* $y = e^x$
4.	$xy' + y = 1$ differensial tenglamaning umumiy yechimi topilsin.	$x + y = 1$	$x - y = c$	$\frac{\tilde{o}}{\acute{o}} = 0$	* $xy = c$
5.	$y''' = 6$ tenglamaning umumiy yechimi topilsin.	$y = x^3 + c_1 x^2 + c_2 x + c_3$	$y = ex^3$	$y = \ell nx$	* $y = x^3 + \frac{c_1}{2} x^2 + c_2 x + c_3$
6.	$y''' - y'' = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.	$y=C_1+C_2+C_3 x^2$	$y=C_1x+C_2+C_3 x^2$	$y=C_1+C_2x+C_3 x^3$	* $y=C_1+C_2x+C_3 x^2$
7.	$y'' + y' = 0$ differensial tenglamaning y(0)=0 va $y'(0) = 2$ shartlarni kanoatlantiruvchi yechimi topilsin	$y = e^x + e^{2x}$	$y = 2e^x - 3e^{2x}$	$y = 2 - e^{2x}$	* $y = 1 - e^{-x}$
8.	$y'' - 2y' - 8y = 0$ differensial tenglamaning u(0)=0 va $y'(0) = -6$ shartlarni kanoatlantiruvchi yechimi topilsin	$y = e^x - 2e^{2x}$	$y = 2e^x - 2e^{2x}$	$y = e^{-x} - e^{2x}$	* $y = e^{-2x} - e^{4x}$
9.	y'' - $3y' + 2y = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimi topilsin.	$y = c_1 e^x - c_2 e^{2x}$	$y = 2c_1 e^x - c_2 e^{2x}$	$y = c_1 e^{-x} - c_2 e^{2x}$	* $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$
10.	$xy' = y$ differensial tenglamaning u(1)=1 shartni kanoatlantiruvchi yechimi topilsin.	$y = 5x$	$y = -x$	$y = \ell nx$	* $y = x$

QO'LLANILADIGAN PEDAGOGIK TEXNOLOGIYALARI SHARHI

QO'LLANILADIGAN PEDAGOGIK TEXNOLOGIYALARI SHARHI

1. Ma’ruza mashg’ulotlarningtashkil etishning asosiy shakllari

Ma’ruza mashg’uloti – OO’YUda o’qitishni tashkil etishning etakchi shakli hisoblanadi, bilimlarni birlamchi egallashga yo’naltirilgan.

Ma’ruzani asosiy belgilanishi – o’qitishni nazariy asosini ta’minlab berish, o’quv faoliyatga va aniq o’quv fanga qiziqishni rivojlantirish, ko’rsantlarga o’quv kursi ustidan mustaqil ishlash uchun orientirlarni shakllantirish.

Ma’ruza materiallariningmazmuni va hajmiga talablar

Ma’ruza materiallarining *mazmuni* quyidagi mezonlarga javob berishi lozim:

- yangilik, ilmiylik, asoslilik va axborot uchun belgilanganlik;
- aniq, ishonchli misol, fakt, asosnoma va ilmiy dalillarning mavjudligi;
- faktga asoslangan (statistik va v.h.) materiallarni ko’p emasligi.

Ma’ruza materiallarining *hajmi* rejalashtirilgan mavzuni yoritish uchun etarli bo’lishi kerak.

Ma’ruzalar turlari va ularga xos xususiyatlar

O’quv mashg’ulotning maqsadi	**Ma’ruza turi, uning o’ziga xos xususiyatlari**
Kirish ma’ruzasi	
Fan doirasida o’quv axborotini o’zlashtirish bo’yicha talabalar harakatiningyo’naltiruvchi asosini ta’minlash.	Ta’lim berish tuzilishida motivatsion bosqich hisoblanadi. Uningvazifasi – o’quv fani mazmuni, uningo’quv jarayonidagi o’rni va kelgusidagi tezkor-xizmat faoliyatdagi axamiyati to’g’risida dastlabki tasavvurlarni berish, talabalarni ishlash tizimida yo’naltirish, oldinda turgan mustaqil ishninguslubiyoti va tashkillashtirlishi bilan tanishtirish, hisobot berish vaqti va baholashni aniqlashtirish.
Axborotli ma’ruza	
O’quv mavzu bo’yicha tasavvurni shakllantirish	Bu an’anaviy ma’ruza turi: ma’ruza rejasiga muvofiq o’quv materialini monologik tarzda izchillikda bayon etish.
Muammoli ma’ruza	
Muammoni belgilash va uni echimini topishni tashkillashtirish/an’anaviy va zamonaviy nuqtai nazarlarni jamlash va tahlil qilish va v.h. orqali o’quv mavzusi bo’yicha tasavvurni/bilimlarni shakllantirish.	Yangi bilimlar savol/vazifa/vaziyatlarningmuammoligi orqali kiritiladi. Bu jarayonda talabalarningbilishi o’qituvchi bilan hamkorligiga va dialogiga asoslanadi, hamda izlanuvchilik faoliyatiga yaqinlashadi.
Ko’rgazma ma’ruza	
O’TUYdan keng foydalanish orqali o’quv mavzusi bo’yicha tasavvurni/	Bunday ma’ruzani o’qish, ko’rib chiqilayotgan ko’rgazmali materiallarni ochib berishga va

O’quv mashg’ulotning maqsadi	Ma’ruza turi, uning o’ziga xos xususiyatlari
bilimlarni shakllantirish.	qisqacha sharhlashga olib keladi.
Binar ma’ruza	
Talabalarga munozara madaniyatini, muammoni hamkorlikda yechishni namoyish etish orqali o’quv mavzusi bo’yicha tasavvurni/ bilimlarni shakllantirish.	Bunday ma’ruzani o’qish ikki o’qituvchi/2-maktabningilmiy vakillari/olim va amaliyotchi/o’qituvchi va talabalarningdialogini o’zida namoyon etadi.
Anjuman-ma’ruza	
O’quv axborotni izlash, tanlash va bayon etish jarayonida talabalarningfaol ishtiroklarida yoritib berish orqali o’quv mavzusi bo’yicha tasavvurni/ bilimlarni shakllantirish.	Oldindan belgilangan muammo va uni har tomonlama yoritib berish nazarda tutilgan ma’ruzalar tizimi (5-10 daq. davomiyligida) bilan, ilmiy-amaliy mashg’ulot ko’rinishida o’tkaziladi. Mashg’ulot yakunida o’qituvchi mustaqil ish va so’zga chiqishlarga yakun yasaydi, axborotni to’ldiradi/aniqlik kiritadi, asosiy xulosalarni ifodalaydi.
Umumlashtiruvchi ma’ruza	
Bilimlarni batafsil yoritish va aniqlashtirishlarsiz tizimlashtirish.	Ma’ruzada bayon etilayotgan nazariy holatlarningnegizini kursningyoki katta bo’limlarningilmiy-tushunchali va kontseptual asosi tashkil etadi.
Maslahatli-ma’ruza	
Bilimlarni chuqurlashtirish, tizimlashtirish.	Turlicha stsenariy bo’yicha o’tishi mumkin. 1. “Savol-javoblar”- o’qituvchi bo’lim yoki to’liq kurs bo’yicha talabalar savollariga javob beradi. 2. “Savol-javoblar-munozaralar”: o’qituvchi nafaqat savollarga javob beradi, balki javoblarni izlashni ham tashkillashtiradi.
YAkuniy ma’ruza	
Bilimlarni batafsil yoritish va aniqlashtirishlarsiz tizimlashtirish.	Kursni o’rganishni yakunlaydi, butun davr mobaynida o’tilganlarni umumlashtiradi. Yakuniy ma’ruzada o’qituvchi kursningasosiy g’oyalarini ajratadi, kelgusidagi tezkor-xizmat faoliyatda va boshqa fanlarni o’rganishda olgan bilimlarni qanday qo’llash yo’llarini ko’rsatadi, fan bo’yicha yakuniy nazorat xususiyatini tushuntiradi, yakuniy nazorat variantlariningmurakab savollarini tushuntiradi.

2. Amaliy mashg’ulotlarni tashkil etishningasosiy shakllari

Amaliy mashg’ulot:

- o’quvchilarni o’qituvchi bilan va o’zaro faol suhbatga kirishishiga yo’naltirilgan,
- nazariy bilimlarni amaliy faoliyatda amalga oshirish uchun sharoitni ta’minlovchi,
- olingan bilimlarni amaliy foydalanish imkoniyatlarini muhokama qilishga mo’ljallangan mashg’ulotningo’qitish shakli.

Amaliy mashg'ulotningmazmuniga quyiladigan talablar • muhokamaga munozarali savollar olib chiqiladi; • muhokama qilinuvchi savollar ilm-fanningerishgan zamonaviy yutuqlari tomoni bilan ko'rib chiqiladi; • nazariya va amaliyotni uzviy birligi ochib beriladi; • muhokama qilinuvchi materialningtalabalarningbo'lg'usi kasbiy faoliyati bilan aloqasi ta'minlanadi; • ko'rib chiqilayotgan material adabiyotda mavjud emas yoki material, qisman bayon etilgan.

Amaliy mashg'ulotlar turlari va ularga xos xususiyatlari

Amaliy mashg'ulot turi	Amaliy mashg'ulot shakli, uningo'ziga xos xususiyatlari
Talabalarningnazariy bilimlarini tizimlashtirish/ tuzilmaga keltirish/ mustahkamlash/ kengaytirish: - metodologik nuqtai nazaridan engmuhim va o'ziga xos fan mavzularining yaxshi o'rganish. - tushunish va o'zlashtirish uchun murakkab bo'lgan mavzu savollarini batafsil o'rganish. - kasbiy tayyorgarlik sifatini aniqlovchi, alohida asosiy bo'lgan mavzularni batafsil o'rganish.	***Kengko'lamli suhbat.*** Hamma uchun umumiy bo'lgan tavsiya etilayotgan majburiy va qo'shimcha adabiyotlar bilan mashg'ulotninghar bir reja savollariga talabalarni tayyorgarligini nazarda tutadi. Faollashtirishni barcha vositalarini qo'llash bilan: so'zga chiquvchiga va barcha guruhga yaxshi o'ylab tuzilgan aniq ifodalangan savollar, so'zga chiquvchi talabalarni kuchli va kuchsiz tomonlariga talbalar diqqatlarini qarata olish, talabalar diqatti va qiziqishini, ish jarayonida ochib berilayotgan, yangi tomonlarga o'sha vaqtni o'zida ajratib ko'rsatish va boshqalar asosida ko'pchilik talabalarni savollarni muhokama qilishga jalb qilish imkonini beradi. Keng ko'lamli suhbat ba'zi savollar bo'yicha alohida talabalarni avvaldan rejalashtirilgan qo'shimcha ravishda so'zga chiqishlarini istisno qilmaydi, balki, taxmin qiladi. Biroq bunday ma'lumotlar muhokama uchun asos bo'lmaydi, balki muhokama qilingan savollar uchun to'ldiruvchi bo'ladi. ***Ma'ruza va referatlar muhokamasi.*** Muhokamaga 12—15 daqiqa davomiyligidagi 2-3 ma'ruzadan ko'pbo'lmagan ma'ruzalar olib chiqiladi. Ba'zida qo'shimcha ma'ruzachi va opponentlar (muxoliflar) belgilanadi. Oxirgi chiquvchilar mazmunni qaytarmaslik uchun, ma'ruza matni bilan tanishadilar. Biroq ko'pholllarda, ma'ruzachi va opponentlar, qo'shimcha ma'ruzachilardan tashqari, hech kim seminarga jiddiy tayyorlanmaydi. So'zga chiquvchilarni o'zlari ham faqat bir savolni o'rganadilar. SHu bilan birga, odatiy seminar ishiga "quruq nazariyalik" elementini kiritib, bunday mashg'ulotlar talabalarda ba'zi qiziqishlarni uyg'otadi. Talabalarni har birini qo'shimcha ma'ruzachi yoki opponent sifatida tayyorlanib kelishga o'rgatish juda muhim hisoblanadi. Referatli ma'ruzalarni yakuniy seminarda, uningasosiy savollari avvaldan muhokama qilib bo'lingan, katta bir mavzu bo'yicha ko'rib chiqish maqsadga muvofiq bo'ladi. ***Press-konferentsiya.*** Qisqa so'zga chiqishdan so'ngbirinchi savol bo'yicha

Ilm-fanningalohida xususiy muammolarini chuqurroq ishlab chiqish.	ma'ruzachiga (agarda ma'ruzalar bir qator talabalarga berilgan bo'lsa, o'qituvchiningo'zi ulardan biriga so'z beradi) so'z beriladi. SHundan so'nghar bir talaba ma'ruza mavzusi bo'yicha unga savol berishi lozim. Savol va javoblar seminarningmarkaziy qismini tashkil etadi. Qancha ko'pjiddiy tayyorgarlik ko'rilsa, savollar shunchalik chuqur va mahoratli beriladi. Savollarga avval ma'ruzachi javob beradi, so'ngra u yoki boshqalar bo'yicha istagan bir talaba o'z fikrini bildirishi mumkin. Bunday holatlarda qo'shimcha ma'ruzachilar, agarda shundaylar belgilangan bo'lsa,faol bo'ladilar. O'qituvchi har bir muhokama qilinayotgan savol bo'yicha, yoki seminar yakunida o'z xulosasini qiladi. ***O'zaro o'qish.*** Tushunish va o'zlashtirish uchun engko'pmurakkablikdagi savollarni o'rganish asosiy maqsadga ega bo'lgan, seminar. Seminar mobaynida talabalarni o'zaro o'qishga yo'naltirish muhim hisoblanadi: har kichik-guruhga mavzuningbir savoli beriladi, bu bo'yicha ular ishlaydilar va bunga asos (ekspert varaqlar – savolni yoritish rejasi, tayyorlangan ma'lumotlarni vizual taqdim etish bo'yicha tavsiyalar) beriladi. Ekspert guruhlarningish natijalari taqdimotidan so'ngo'qituvchi xulosalar qiladi. ***YUmoloq (yozma /og'zaki) stol.*** O'tgan mavzu bo'yicha bilimlarni chiqurlashtirish va aniqlashtirish, bor bilimlarni safarbar qilish va har xil vaziyatlarda ularni qo'llash, o'z fikrlarini qisqa va asoslangan xolda bayon qilish ko'nikmalarini rivojlantirish asosiy maqsadga ega bo'lgan, seminar. Har xil stsenariylar bo'yicha o'tkazilishi mumkin. 1. «Yozma yumoloq stol» - talabaningsavoli / echimi topilishi kerak bo'lgan g'oya yozilgan varaq, doira bo'yicha uzatiladi va har bir ishtirokchi o'z mulohazalarini qo'shadi. 2. «Og'zaki yumoloq stol» - har bir talaba qo'yilgan savolningjavobiga o'z qo'shimchalarini kiritadi / oldingi ishtirokchi tomonidan taklif qilingan g'oyani qo'llab-quvvatlaydi va rivojlantiradi. ***Spetsseminar***. Bakalavriatning4 kursida, magistraturada o'tkaziladi. Ilmiy mavzu bo'yicha yosh tadqiqotchilarni muloqat maktabini ifodalaydi.Spetsseminar vaqtida talabalarningguruhlarda ishlashga va uni baholashga, ilmiy tadqiqotlar usullaridan foydalanishga intilishlari katta rol o'ynaydi. Spetsseminarningyakuniy mashg'ulotida o'quituvchi, qoidaga ko'ra, seminarlarni va talabalarningilmiy ishlarini muhokama qilingan muammolarni kelgusida tadqiqotlar qilish istiqbollarini va talabalarni ularda ishtiroq etish imkoniyatini ochib umumlashtiradi.
Maxsus (kasbiy) va	**Ta'limiy o'yin.**

***umumo'quv ko'nikma va amaliy malakalarni shakllantirish*:** - amaliy muammoli vaziyatni tahlil qilish va echish jarayonida xarakatlar algoritmini aniqlash bilan bog'liq egallagan nazariy bilimlarni amaliy qo'llash.	O'qitish samaradorligini uningishtiroqchilarini nafaqat bilimlarni olish jarayoniga faol jalb qilish, balki ularni (hozir va shu erda) foydalanish orqali oshirishga imkon beradi; o'zgaruvchan vaziyatlarda o'zini tutish taktika ko'nikmalarini shallantiradi; выrabatыvaet dinamiku rolevogo povedeniya; amaliyot imitatsiyasini ifodalaydi; aniq ko'nikma va malakalarni shakllantirishga va ishlab berishga qaratilgan. Seminar natijaviyligini uningtashkiliy-uslubiy ta'minoti belgilaydi: o'yinningtexnologik xaritasini ishlab chiqish; o'yin atributlarini va materiallar paketini: vaziyat bayoni, ishtiroksilar uchun yo'riqnomalar, personajlar ta'rifi (agar o'yin rolli yoki ishbilarmon bo'lsa)yoki vaziyatli ko'rsatmalar (agar o'yin modellashtiruvchi bo'lsa) tayyorlash. ***Amaliy topshiriqlarni bajarish.*** Amaliy topshiriqlarningko'pchiligi kichik guruhlar tarkibida bajariladi va quyidagi bosqichlarni o'z ichiga oladi: yo'riqnoma berish → o'quv topshiriqni bajarish bo'yicha yo'riqnoma bilan tanishish → topshiriqni bajarish → natijalarningommaviy taqdimoti → natijalarni umumlashtirish va baholash. ***Masalalar echish bo'yicha mashq.*** YAkka tartibda amalga oshiriladi va quyidagi bosqichlarni o'z ichiga oladi: yo'riqnoma berish – masalani echish – natijalarni tanlama taqdimoti - umumlashtirish. ***Muammoli masalalar va vaziyatlarni echish.*** Muammoli masalalar va vaziyatlarniishlab chiqish juda katta mexnat talab qiladi. Lekin talabalar tomonidan amaliy kasbiy faoliyatdan olingan muammoli masalalarni echish va muammoli vaziyatlarni ko'rib tahlil qilish nazariyani haqiqqiy amaliyot bilan bog'lashga imkon beradi. Bu o'qitishni faollashtirishga imkon beradi, talabalarga o'rganilayotgan materialni amaliy foydasini tushunishga yordam beradi. ***Ta'lim beruvchi amaliy muammoli vaziyatlarni (keyslarni) echish.*** Keys (muammoli vaziyatdan farqli ravishda) talabalarni muammoni ifodalash, muammoli vaziyatni tahlil qilish va baholash, uni maqsadga muvofiq echim variantlarini qidirishga yo'naltiruvchi tashkilotlar, insonlar guruhi yoki alohida individlarni hayotiningmuayyan sharoitlarini yozma ravishda taqdim etilgan bayonini o'z ichiga oladi. Keysni echish jarayoni quyidagi bosqichlarini o'z ichiga olish muhim: → muammoni yakka tartibda tahlil qilish va echish, → yakka tartibda topilgan echimni birgalikda (kichik guruhlarda) tahlil qilish, o'zaro maqbul echim variantini rasmiylashtirish, → guruh ishini taqdimoti, → muammoni echish usul va vositalariningengmaqbul

	variantini jamoaviy tarzda tanlash. Fiklash jarayoni, muammoli vaziyatni echish jarayonida paydo bo'lingan, mustaqil topilgan dalilllar orientirlarni, kasbiy boyliklarni topishga va mustaqkamlashtirishga, kelgusi kasbiy faoliyati bilan aloqani anglashga ko'maklashadi. ***O'quv loyihalarningtaqdimoti va baholanishi*** Ushbu o'quv mashg'ulotini tayyorlashda o'qituvchiningroli quyidagilardan iborat: loyiha topshirig'ini ishlab chiqish; talabalarga ma'lumotlarni izlashda yordam berish; o'zi axborot manbai bo'lishi; butun jarayonni muvofiqlashtiri; ishtirokchilarni qo'llab-quvvatlash va rag'batlantirish; uzluksiz qayta aloqani amalga oshirish; maslahat berish. Ushbu o'quv mashg'ulotida guruhlar o'z faoliyatiningnatijalari to'g'risida ma'ruza qilishadi va uni belgilangan shaklda taqdim etishadi (loyihaviy faoliyatningnatijalarini, hamda loyiha maxsulotini tasviriy va og'zaki taqdimot ko'rinishida). O'qituvchi guruhlarningo'zaro baholanishini tashkillashtiradi va loyiha ishtirokchiningfaoliyatini baholaydi.
Talabalarni nazariy va amaliy tayyorgarlik darajasini nazorat qilish va baholash	***Kollokvium*.** O'qituvchiningtalabalar bilan kollokviumlari (suhbatlashuvi) odatda kursningu yoki bu mavzusi bo'yicha bilimlarini aniqlash, uni chuqurlashtirish maqsadida olib boradi. U ko'pincha 1) dasturda ko'zda tutilmagan, lekin talabalarda qiziqish uyg'otgan qo'shimcha mavzular bo'yicha; 2) fanningalohida murakkab, lekin talabalar tomonidan etarli darajada o'zlashtirilmagan mavzulari bo'yicha qo'shimcha darslar mobaynida; 3) ohirgi seminar mashg'ulotlarida javob bermagan talabalarni birish darajasini aniqlash uchun. Seminar-kollokvium mobaynida ma'ruza, referat va boshq. YOzma ishlar tekshirilishi mumkin. ***Yozma (nazorat) ish.*** Talabalar nazorat savollariga javob beradilar/ testlarni echadilar/ nazorat topshiriqlarini bajaradilar. Ularningto'plamini to'g'ri tuzish muhim hisoblanadi: ular rejalashtirilayotgan o'quv materialni o'zlashtirish darajasiga mos kelishligi kerak va ularni tekshirishni ta'minlashi kerak.

3. Ma'ruza va amaliy mashg'ulotlarda qo'llaniladigan pedagogik texnologiyalar

AQLIY HUJUM METODI

Aqliy hujum (breynstroming-aqllar to'zoni) – amaliy yoki ilmiy muammolar echish g'oyasini jamoaviy yuzaga keltirishda qo'llaniladigan metod.

✍Metod chegaralangan vaqt oralig'i ichida aniq muammo (savol, masala)ni echishningnoan'anaviy yo'llarini izlash bo'yicha o'quvchilarni aqliy faoliyatini yo'naltirishga asoslangan.

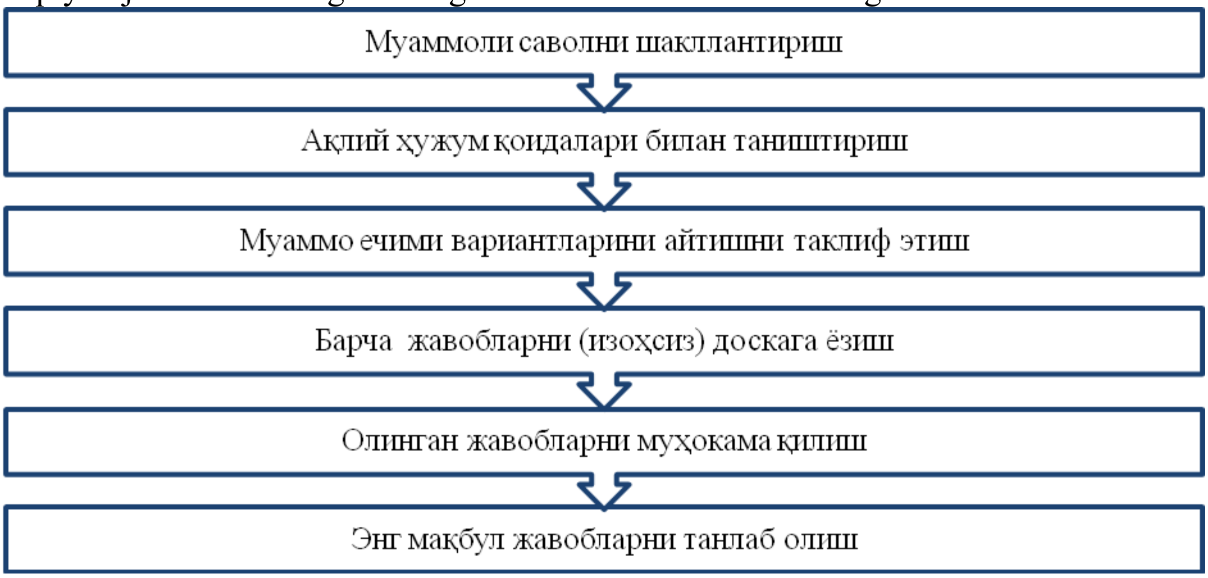
✍O'quv mashg'ulotidagi aqliy hujum uchun muammoni tanlash quyidagi tamoyillar bo'yicha amalga oshiriladi:

- tanlangan muammo nazariy va amaliy ahamiyatga ega bo'lishi hamda o'quvchilarda faol qiziqish uyg'otishi kerak;

•ko'phar xil ma'nodagi echim variantlariga ega bo'lishi kerak.

O'qitish texnologiyasini ishlab chiqishda aqliy hujum metodi o'quv mashg'ulotiningbir lavhasi yoki butun mashg'ulotni o'tkazish asosi sifatida rejalashtirilgan bo'lishi mumkin.

Aqliy hujum metodiningtexnologik chizmasi 1-rasmda keltirilgan.



Aqliy hujum metodiningtexnologik chizmasi

INSERT TEXNIKASI

INSERT (inglizcha so'zdan olingan bo'lib - **INSERT** – **I**nteraktive- interfaol **N**oting – belgilash System - tizim for-uchun **E**ffective – samarali **R**eading – o'qish and– va **T**hinking – fikrlash degan ma'noni anglatadi).

1) Samarali o'qish va fikrlash uchun matnda belgilar qo'yishninginterfaol tizimi hisoblanadi.

Matnni belgilash tizimi:

(√) - meningbilganimni tasdiqlovchi axborot;

(+) –men uchun yangi axborot;

(−) - menningbilganlarimga, zid axborot;

(?) - meni o'ylantirib qo'ydi. Bu bo'yicha menga qo'shimcha axborot kerak.

PINBORD TEXNIKASI

Pinbord–(inglizchadan: *pin*- mahkamlash, *board* – yozuv taxtasi) – o'quvchilarni tizimli va mantiqiy fikr bildirishga o'rgatadigan metod.

Pinbord texnikasi**:**

1) muammoli masalalar va vaziyatlar, aqliy hujum va amaliy o'qitish metodlari bilan birga jamoaviy tarzda (guruhlarda) muammoni echish variantlarini baholash hamda ular ichidan engyaxshisini tanlash imkonini beradi;

2) aqliy hujum va amaliy o'qitish metodlari bilan birga jamoaviy tarzda (guruhlarda) toifali sharh o'tkazish imkonini beradi.

Pinbord texnikasiningtexnologik chizmasi

KEYS–STADI METODI

KEYS – (ingl. sase – to'plam, aniq vaziyat) – nazariy bilimlarni amaliy vazifalarni echish jarayonida qo'llash imkonini beruvchi *o'qitish vositasi*.

Keysda bayon qilingan vaziyatni o'rganib va tahlil qilib, o'quvchilar o'ziningkelgusidagi kasbiy faoliyatida o'xshash vaziyatlarda qo'llashi mumkin bo'lgan tayyor echimni oladi.

Keysda bayon qilingan vaziyatlar (kasbiy), amaliy mashg'ulotlarda echiladigan vaziyatli masalalardan tubdan farq qilinadi. Agar vaziyatli masalalarda har doim shart (nima berilagan) va talab (nimani topish kerak) berilgan bo'lsa, keysda, qoidaga ko'ra, bunday parametrlar mavjud emas.

O'quvchiga taqdim etilgan ixtiyoriy keysda:

• keysningbelgilanishi va topshiriq/savollar aniq ifodalangan bo'lishi kerak;

• bayon qilingan muammoli vaziyatni echish uchun kerakli va etarli xajmda ma'lumotlarni o'z ichiga olishi kerak

• keysni echish uchun *uslubiy ko'rsatmalar* bo'lishi kerak.

Keys–stadi (ingl.sase– to'plam, aniq vaziyat, stadi-o'qitish)–amaliy o'qitish vaziyatlarmetodi.

Keys-stadi - o'qitish, axborotlar, kommunikatsiya va boshqaruvningqo'yilgan ta'lim maqsadini amalga oshirish va keys-stadida bayon qilingan amaliy muammoli vaziyatni hal qilish jarayonida prognoz qilinadigan o'quv natijalariga kafolatli etishishni vositali tarzda ta'minlaydigan bir tartibga keltirilgan optimal usullari va vositalari majmuidan iborat bo'lgan o'qitish texnologiyasidir.

Ushbu metod o'quvchilarni quyidagilarga undaydi:

• muammoni shakllantirishga;

• amaliy vaziyatni tahlil qilish va baholashga;

• muammo echimini engmaqbul variantini tanlashga.

O'quv mashg'ulotningo'qitish texnologiyasini tanlashni ikki asosiy dalil belgilaydi:

1. Keysninghajmi (qisqa, o'rtacha miqdordagi, katta)
2. O'quv topshirig'ini taqdim etish usuli:

- savolli (savollar keysdan keyin keltiriladi)
- topshiriqli (topshiriq keys kirish qisminingoxirida keltiriladi)

O'QUV LOYIHA METODI

Ushbu metodningmohiyati shundan iboratki, ma'lum muddat ichida (bitta o'quv mashg'ulot doirasidan 2-3 oy muddat ichida) ta'lim oluvchi guruhli yoki yakka tartibda berilgan mavzu yuzasidan loyiha topshirig'ini bajaradi. Uningvazifasi – muayyan foydalanuvchiga yo'naltirilgan yangi ma'lumot olish, belgilangan muddat ichida berilgan u yoki bu muammoni ilmiy, texnikaviy echimidan iborat.

O'quv loyihasi tushunchasi:

- muayyan iste'molchiga mo'ljallangan, muammolarni izlash, tadqiq qilish va echish, natijani noyob (moddiy yoki intellektual) mahsulot ko'rinishida rasmiylashtirishga qaratilgan. Talablarningmustaqil o'quv faoliyatini tashkil qilish *usuli*;
- nazariy bilimlar orqali amaliy vazifalarni echishga qaratilgan o'quv *vosita va qurollari*;
- rivojlantiruvchi, ta'lim-tarbiya hamda bilimlarni kengaytirish, chuqurlashtirish va malakalarni shakllantirishga qaratilgan *didaktik vosita*.

GRAFIK TASHKIL ETUVCHILAR

KLASTER (klaster-tutam, bog'lam)-axborot xaritasini tuzish yo'li- barcha tuzilmaningmohiyatini umumlashtirish va aniqlash uchun qandaydir biror asosiy omil atrofida g'oyalarni yig'ish asosida aniq biror mazmunni keltirib chiqaradi.

Bilimlarni faollashtirishni tezlashtiradi, fikrlash jarayoniga mavzu bo'yicha yangi o'zaro bog'lanishli tasavvurlarni erkin va kengjalb qilishda yordam beradi.

Klasterni tuzish bo'yicha o'quv topshirig'iga yo'riqnoma

1. Katta qog'oz varag'i markazida kalit so'z yoki 1-2 so'zdan iborat mavzu nomini aylana ichiga yozing.
2. Kalit so'z bilan birlashdigan yon tomoniga kichkina hajmdagi aylana- "yo'ldoshcha" ichiga mavzu bilan aloqador so'z yoki so'z birikmasini yozing. Ularni chiziq bilan "bosh" so'zga bog'lang.
3. Ushbu "yo'ldoshcha"larda "kichik yo'ldoshlar" ham bo'lishi mumkin, ular ichiga yana so'z yoki iboralar yozib ajratilgan vaqt tugagunga qadar yoki g'oyalar tugamagunga qadar davom ettiriladi.

«NIMA UCHUN?» SXEMASI –muammoningdastlabki sababini aniqlash bo'yicha fikrlar zanjiri bo'lib,tizimli, ijodiy, tahliliy mushohada qilish ko'nikmalarini rivojlantiradi.

«Nima uchun?» sxemasini tuzish bo'yicha o'quv topshirig'iga yo'riqnoma

O'quv topshiriqda ko'rsatilgan muammosababini aniqlash uchun:

1) Muammoni yozingva strelka chizig'ini chiqarib «Nima uchun?» so'rog'ini yozing.

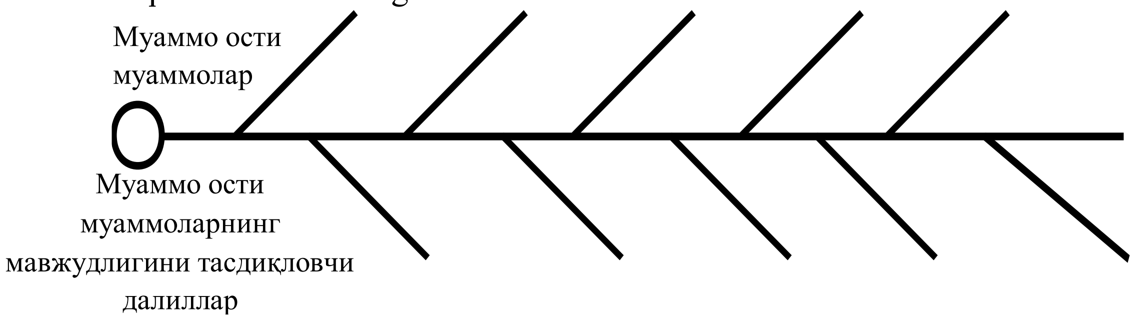
2) Savolga javob yozib nima uchun so'rog'ini takror yozib boravering. Bu jarayonni muammoningdastlabki sababi aniqlanmagunicha davom ettiring

«BALIQ SKELETI» CHIZMASI – bir qator muammolarni tasvirlash va uni echish imkonini beradi. Tizimli fikrlash, tuzilmaga keltirish, tahlil qilish ko'nikmalarini rivojlantiradi.

"Baliq skeleti" sxemasini tuzish bo'yicha o'quv topshirig'iga yo'riqnoma

O'quv topshiriqda ko'rsatilgan muammo maydonini tavsiflash uchun:

1.«Baliq skeletini" chizing:



2. «Suyak»ningchapqismida (yoki yuqori suyakda) muammo osti muammoni yozing, o'ngqismida (pastki suyakda) – muammo osti muammoni amalda mavjud ekanligini tasdiqlovchi dalillarni yozing.

«QANDAY?» IERARXIK DIAGRAMMASI - muammo to'g'risida umumiy tasavvurlarni olishga, uningechimini topish usul va vositalarini topishga imkon beruvchi mantiqiy savollar zanjiridan iborat.

Tizimli, ijodiy, tahliliy fikrlash ko'nikmalarini rivojlantiradi.

«Qanday?» diagrammasini tuzish bo'yicha o'quv topshirig'iga yo'riqnoma

«Qanday?» diagrammasini tuzishdan avval, siz quyidagilarni bilishingiz kerak: ko'phollarda Sizga muammolar hal etishda «Nima qilish kerak?» haqida o'ylashga hojat bo'lmaydi. Muammo echimini topish uchun asosan «Buni qanday qilish kerak?» qabilida bo'ladi. «Qanday?» - muammoni hal etishda asosiy savol hisoblanadi.

1. Doira chizingva uningichiga echilishi lozim bo'lgan muammoni yozing.

2. Ketma-ket ravishda «Qanday?» savolini qo'yingva shu savolga javob bering. SHu tartibda savollarni ketma-ket berib boraveringva javoblarni o'ylab o'tirmasdan, solishtirmasdan, baholamasdan, tez-tez yozishda davom eting.

Maslahat va tavsiyalar:

YAngi g'oyalarni grafik ko'rinishda qayd etishni o'zingiz hal eting: daraxt yoki kaskad ko'rinishida, yuqoridan pastga yoki chapdan o'ngga. Engmuhimi esda tuting: nisbatan ko'pmiqdordagi foydali g'oyalar va muammo echimlarini topishga imkon beradigan usul engmaqbul usul hisoblanadi.

Agarda siz muammoni echimini topish uchun to'g'ri savollar bersangiz va uningrivojlanish yo'nalishini namoyon bo'lishida ishonchni saqlasangiz, diagramma, siz har qanday muammoni amaliy jihatdan echimini topishingizni kafolatlaydi.

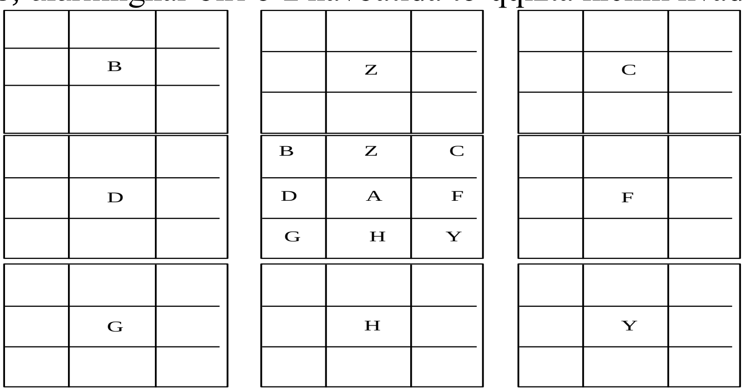
«NILUFAR GULI» CHIZMASI - muammoni hal etish vositasi. O'zida nilufar guli qiyofasini mujassam etgan. Uningasosini 9 ta katta kvadratlar tashkil etib, ularninghar biri o'z navbatida to'qqizta kichik kvadratdan iborat.

Tizimli, ijodiy, tahliliy fikrlash qo'nikmalarini shakllantiradi.

«Nilufar guli» sxemasini tuzish bo'yicha o'quv topshirig'iga yo'riqnoma

O'quv topshiriqda ko'rsatilgan muammoni hal etish vositalarini topish uchun:

1) O'zida nilufar guli qiyofasini mujassam etgan sxemani chizing. Uningasosini 9 ta katta kvadratlar tashkil etib, ularninghar biri o'z navbatida to'qqizta kichik kvadratdan iborat;



2) asosiy muammoni markaziy kvadratningmarkaziga yozing. Uni hal etish g'oyalarini markaziy kvadrat atrofida joylashgan qolgan sakkizta kvadratlarga yozing;

3) har bir ushbu sakkizta g'oyani markaziy kvadrat atrofida joylashgan sakkizta katta kvadrat markaziga o'tkazing, boshqacha aytganda, nilufar gulidan uninggul bargiga o'tkazing. Shunday qilib, ular har biri, o'z navbatida, yana bir muammo sifatida qaraladi.

MUSTAQIL TA’LIMGA OID TOPSHIRIQLAR

MUSTAQIL TA'LIMGA OID TOPSHIRIQLAR

1. Matrisalar, matrisalar ustida amallar.
2. Determinantlar va ularning xossalari. Yuqori tartibli determinantlarni hisoblash.
3. Teskari matrisa. Matrisaning rangi tushunchasi
4. Chiziqli sistemani matrisaviy usulda yechish.
5. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Kramer qoidasi va Gauss usuli.
6. Kroneker-Kopelli teoremasi.
7. Kompleks sonlar va ularning formalari. Muavr formulalari.
8. Ko'p tarmoqli iqtisod uchun balans modeli.
9. Chiziqli fazo tushunchasi.Chiziqli bog'liqlik, o'lcham va bazis tushunchalari. Chiziqli almashtirish matrisasi.
10. Chiziqli operatorlar. Xos son va xos ildiz. Xarakteristik ko'phad.
11. Yevklid fazolari .
12. Kvadratik formalar.
13. Almashtirishning chiziqli modeli.
14. To'g'ri chiziqning turli xil tenglamalari va ularga doir asosiy masalalar:ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak, nuqtadan to'g'ri chiziqqacha masofa
15. Ikkinchi tartibli chiziqlar: aylana, ellips, giperbola, parabola va ularning kanonik tenglamalari.
16. Ikkinchi tartibli chiziqning umumiy tenglamasini kanonik ko'rinishga keltirishda tekislikdagi harakatlar: koordinatalar sistemasini burish va parallel ko'chirish formulalaridan foydalanish.
17. Vektorlarning skalyar, vektor va aralash ko'paytmalari, ularning geometrik ma'nolari.
18. Fazoda tekislik tenglamalari va ularga doir asosiy masalalar.
19. Fazoda to'g'ri chiziq tenglamalari va ularga doir asosiy masalalar. Fazoda tekislik va to'g'ri chiziqqa doir asosiy masalalar.
20. To'plamlar va ular ustida amallar. Funksiyalar, ularning aniqlanish va o'zgarish sohalari,asosiy xossalari.
21. Ketma-ketlik va funksiya limiti. Ajoyib limitlar
22. Funksiya uzluksizligi va uzilish turlari.
23. Funksiya asimptotalari.
24. Funksiya hosilasi. Hosilaning geometrik,iqtisodiy va fizik ma'nolari. Hosila hisoblash qoidalari. Hosilalar jadvali.
25. Yuqori tartibli hosila. Differensial. Differensiallash jadvali va hisoblash qoidalari. Yuqori tartibli differensiallar.
26. Differensial hisobning asosiy teoremalari: Ferma, Roll, Lagranj, Koshi teoremalari.
27. Teylor va Makloren formulalari. Lopital qoidalari.
28. Funksiyalarni tekshirish: o'sish va kamayish, ekstremumlar, botiqlik va qavariqlik, Ekstremum topish qoidalari.
29. Funksiyani to'liq tekshirish sxemasi.
30. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar. Karrali va takroriy limitlar. Xususiy hosilalar va to'la differensial.
31. Ikki o'zgaruvchili funksiya uchun Teylor va Makloren formulalari.
32. Ko'p o'zgaruvchili funksiya ekstremumlari. Shartli ekstremum.
33. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar hisobining iqtisodiyotdagi tadbiqlari.
34. Aniqmas integral. Aniqmas integral jadvali. O'zgaruvchilarni almashtirish va bevosita integrallash.

35. Ko’p uchraydigan integrallar. Bo’laklab integrallash. Rasional kasrlarni integrallash.
36. Algebraik irrasionalliklarni integrallash.
37. Trigonometrik funksiyalar qatnashgan ifodalarni integrallash.
38. Aniq integral integral yig’indi limiti sifatida. Aniq integral xossalari.
39. Nyuton-Leybnis formulasi.
40. Aniq integralni integrallash usullari.
41. Xosmas integrallar.
42. Ikki va uch karrali integrallar.
43. Integral hisobning iqtisodiyotdagi tadbiqlari.
44. Qatorlar. Sonli qatorlar yaqinlashishining zaruriy sharti
45. Sonli qatorlar yaqinlashishining taqqoslash, Dalamber, Koshi va Koshining integral alomatlari.
46. Leybnis qatori. Shartli va absolyut yaqinlashish.
47. Darajali qatorlar. Abel teoremasi. Darajali qatorlarning yaqinlashish radiusi va sohasi.
48. Birinchi tartibli o’zgaruvchilari ajraladigan va unga keltiriladigan differensial tenglamalar.
49. Bir jinsli va unga keltiriladigan differensial tenglamalar.
50. Chiziqli va unga keltiriladigan differensial tenglamalar.
51. To’la differensial tenglamalar. Integrallovchi ko’paytuvchi
52. Tartibi pasayadigan yuqori tartibli differensial tenglamalar.
53. O’zgarmas koeffisientli, chiziqli, bir jinsli differensial tenglamalar.
54. O’zgarmas koeffisientli, chiziqli, bir jinsli bo’lmagan differensial tenglamalar.
55. Differensial tenglamalar sistemalari.
56. Differensial tenglamalar nazariyasining iqtisodiyotdagi tadbiqlari.

Glossariy

GLOSSARIY

Atamaning o'zbek tilida nomlanishi	Atamaning ingliz tilida nomlanishi	Atamaning rus tilida nomlanishi	Atamaning ma'nosi
Absissa	abscissa	абсцисса	Nuqtaning dekart koordinatalaridan birinchisi
Aksioma	axiom	аксиома	Isbotsiz qabul qilinadigan jumla
Teorema	theorem	теорема	Isbot talab qiladigan jumla
Algebra	algebra	алгебра	Turli miqdorlar ustida ammallarni hamda ana shu amallar bilan bog'liq bo'lgan tenglamalarni yechishni o'rganuvch matemetika bo'limi
Algoritm	algorithm	алгоритм	Berilgan ma'lumotlardan izlanayotgan natijaga o'tish jarayonini кo'rsatib beruvchi aniq qoida.
Analiz	analysis	анализ	Noma'lumdan ma'lumni, ma'lumdan ma'lum tahlil asosida isbotlovchi usul
Analitik geometriya	analytic geometry	аналитическая геометрия	Geometric obrazlarni algebra vositasidagi koordinatalar usulida asoslovchi matematematika bo'limi
Algebraik to'ldiruvchi	The algebraic addition	Алгебраическим дополнением	Ishora aniqligidagi minor
Aniqmas integral	indefinite integral	неопределенный интеграл	Differensiallashga teskari matematik amal
Applikat	applicate	аппликат	Uch o'lchovli fazodagi nuqtaning dekart koordinatalaridan uchinchisi
Asimptota	asymptote	асимптота	Shunday to'g'ri chiziqki, egri chiziq nuqtasi cheksizga intilganda shu to'g'ri chiziqqa yetarlicha yaqinlashadi
Argument	argument	аргумент	Erkli o'zgaruvchi
Birlik matrisa	identity matrix	единичная матрица	Diagonal elementlari birlardan iborat bo'lgan diogonal matrisa
Birlik vektor	unit vector	единичный вектор	Uzunligi birga teng vector
Garmonik qator	harmonic series	гармонический ряд	Natural songa teskari son ko'rinishidagi barcha sonlar yig'indisi
Giperbola	hyperbola	гипербола	Konus кesimlaridan biri
Grafik	graph	график	Funksiyani tasvirlash usullaridan biri
Davriy кasr	circulating fraction	периодический дробь	Cheкsiz o'nli кasr
Differensial	differential	дифференциал	Funksiya orttirmasining bosh chiziqli qismi
Differensial tenglama	differential equation	дифференциальная уравнения	Erkli o'zgaruvchi,no'malum funksiya va uning hosilalarini bog'lovchi munosabat
Differensial hisob	differential	дифференциальна	Funksiyani hosila ba differensiall

	calculation	я вычисления	tushunchalari yordamida tekshiruvchi matematika bo‘limi
Diogonal matrisa	diagonal matrix	диагональная матрица	Diagonal elementlaridan boshqa ellementlari noll bo‘lgan kvadrat matrisa
Ellipsning katta yarim o‘qi	Ellipse semi-major axis	большая полуось Эллипса	Uning fokuslari yotuvchi simmetriya o‘qi
Evklid fazosi	Euclidean space	евклидово пространство	Norma aniqlangan vector (chiziqli) fazo
Integral hisob	Integral calculation	Интегральная вычисления	Matematik analizning integrallar,ularningxossalari,hisoblash usullari va tadbiqlarini o‘rganadigan bo‘limi
Isbot	proof	доказательство	Tasdiqning to‘g‘riligi aniqlanadigan mushohadalar zanjiri
Kanonik tenglama	The canonical equation	Каноническое уравнение	Sodda tenglama
Kolleniar vektorlar	collinear vectors	Коллинеарные векторы	Bir to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan vektorlar
Komplanar vektorlar	coplanar vectors	компланарные векторы	Bir tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotuvchi vektorlar
Kvadratmatrisa	square matrix	квадратная матрица	Satrlari soni ustunlari soniga teng matrisa
Kvadratik forma	The quadratic form	Квадратичная форма	Ikkinchi darajali bir jinsli ko‘phad
Matematik iqtisod	mathematical economics	математическая экономика	Iqtisodiy ob’ektlar va jarayonlarning matematik modellari va ularni tadqiq etish usullari bo‘lgan nazariy fan
Limit	limit	предел	Agar o‘zgaruvchi miqdor o‘zining o‘zgarish jarayonidabiror soniga cheksiz yaqinlashsa, u holda shu soni o‘zgaruvchining limitidir
Matrisa	matrix	матрица	To‘g‘ri to‘rtburchak shaklidagi jadval
Minor	minor	минор	Element turgan satr va ustunni o‘chirishdan hosil bo‘lgan determinant
Parabola	parabola	парабола	Konus kesimlaridan biri
Vектor	vector	вектор	Yo‘naltirilgan кesma
Vektor fazo	vector space	векторное пространство	Fazo tushunchasining umumlashmasi
Xosmas integral	improper integral	несобственный интеграл	Chegarasi zeksiz yoki integral ostidagi funksiya ikkinchi tur uzilishga ega bo‘lgan integral
Chiziqli algebra	linear algebra	линейная алгебра	Chekli chiziqli fazolarda chiziqli akslanishlarni o‘rganuvchi algebra bo‘limi
Zaruriy va yetarli shartlar	Necessary and sufficient	Необходимые и достаточные	Teoremalarni yozish va talqin qilish shakli

	conditions	условия	
Zaruriy shart	Necessary condition	Необходимое условие	Xulosadan shart kelib chiqadi
Yetarli shart	Sufficient condition	достаточное условие	Shartdan xulosa kelib chiqad
Funksiya	function	функция	Bir to‘plamdagi har bir songa biror qoida yoki qonunga ko‘ra boshqa to‘plamning bitta elementining mosligi
Grafiklar	graphic arts	графика	Funksiyani tasvirlash usullaridan biri
Teskari funksiya	inverse function	Обратная функция	Berilgan funksiyani erkli o‘garuvchisini erksiz o‘zgaruvchi orqali bog‘lanishi
Funksiyaning aniqlanish sohasi.	domain of the function	область определения функции	Erkli o‘zgaruvchining qabul qilishi mumkin bo‘lgan barcha qiymatlari to‘plami
Iste’mol	consumption	потребление	Ehtiyojlarni qondirish maqsadida mahsulot va xizmatlarning ishlatilishi, foydalanilishi jarayoni
Byudjet chegaralari	budget limits	границы бюджета	Byudjet cheklovlar ikki mahsulot (yoki daromad) kombinasiyasi orasidagi munosabat, byudjet ma'lumotlar va berilgan narxlar xarid qilishni ko‘rsatadi.
Chiziqli bo'lmagan funksiya	Non-linear function	Нелинейная функция	Erkli o‘zgaruvchining darajasi birdan farqli funksiya
EXCEL	EXCEL	EXCEL	Elektron jadval
Ikki o‘zgaruvchili funksiya	A function of two variables	Функция двух переменных	Ikki erkli argumentli funksiya
Kobb - Duglas funksiya	Cobb-Douglas function	функция кобба-дугласа	Ikki argumentli ishlab chiqarish funksiyasi
Monopoliya	monopoly	монополия	Yakka egalik (ya’ni, grekcha «monoc» - yagona, bitta va «poleo» - sotaman)
Narx	Price(cost)	цена	Tovarlar qiymati va ularning nafliligi o‘zlarining namoyon bo‘lishi
Talab	demand	спрос	Pul bilan ta’minlangan ehtiyoj
Taklif	supply	предложение	Ma’lum vaqt oralig‘idagi narxlarning muayyan darajasida ishlab chiqaruvchi yoki sotuvchilar tomonidan ma’lum turdagi tovar va xizmatlarning bozorga chiqarilgan miqdori
Kapital	Capital	капитал	Daromad keltiruvchi mablag‘ va resurs
Raqobatbardoshlik	competitiveness	конкурентоспособность	Biror turdagi molning iste’mol qiymati mos keladigan boshqa tovarga solishtirish, taqqoslash ko‘rsatkichi

Firma	firm	фирма	Ishlab chiqarish, xizmat ko‘rsatish, tijorat yoki tadbirkorlik faoliyatiga qaratilgan, yuridik shaxs hisoblangan korhona
Ikki o‘zgaruvchili talab	Two variable demand	Двух переменный спрос	Sotilish narxi va miqdoriga bog‘liq talab
Aniqlovchi (determinant)	determinant	детерминант	Kvadrat matritsaga ma’lum qoidalar bo‘yicha moc qo‘yilgan son
Transponirlangan matritsa	The transposed matrix	Транспонированн ая матрица	Berilgan matritsaning qatorini ustunga almashtirishdan hosil bo'lgan matritsa
Laplas yoyilmasi			
Teskari matritsa	inverse matrix	обратная матрица	A kvadrat matritsaga teskari matritsa deb, shunday A^{-1} matritsaga aytiladiki, uning uchun quyidagi $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$ tenglik o‘rinli bo‘lsin.
Xosmas matritsa	Invertible(nonsingular) matrix	Невырожденная матрица	Matritsa determinanti noldan farqli bo'lgan matritsa
Xos matritsa	Singular matrix	Вырожденная матрица	Matritsa determinanti nolga teng bo'lgan matritsa
Birgalikdagi sistema	Full rank	Совместная система	Yechimga ega sistema
Aniq sistema	Definite system	Определённая система	Yagona yechimga ega birgalikdagi sistema
Aniqmas sistema	Indefinite system	Неопределённая система	Bittadan ortiq yechimga ega birgalikdagi sistema
Birgalikda bo‘lmagan sistema	Not full rank	Несовместная система	Yechimga ega bo‘lmagan sistema
Kramer qoidasi	Cramer's rule	Метод Крамера	Chiziqli tenglamalar sistemasi yechish usuli
Matrisaviy usul			Chiziqli tenglamalar sistemasi yechish usuli
Matrisa rangi	The rank of the matrix	Ранг матрицы	Noldan farqli minorlarining eng katta tartibi
Gauss usuli	Gauss method	методом Гаусса	Chiziqli tenglamalar sistemasi yechish usuli
Kroneker-Kapelli teoremasi	Theorem of Kronecker - Capelli	Теорема Кронекера — Капелли	Chiziqli tenglamalar sistemasi uchun kriteriyasi
Bir jinsli sistema	homogeneous system of equations	однородная система уравнений	O'ng tomoni ya'ni ozod hadi nolga teng bo'lgan sistema
Mavhum birlik	imaginary unit or unit imaginary number	Мнимая единица	Kvadrati minus birga teng bo'lgan kompleks son
Kompleks son	Complex number	Комплексное число	$x+iy$ ko'rinishdagi son
Kompleks son	The absolute	Модулем	Koordinata boshidan kompleks

moduli	valueof a complex number	(абсолютной величиной) комплексного числа	songa mos nuqtagacha bo'lgan masofa
Muavr formulasi	de Moivre's formula	Формула Муавра	Kompleks sonini darajaga ko'tarish formulasi
Bezu teoremasi	Bezout's theorem	Теорема Безу	Ko‘phadni chiziqli ko‘phadga bo‘lgandagi qoldig‘ini aniqlovchi teorema
Algebraning asosiy teoremasi	Fundamental theorem of algebra	Основная теорема алгебры	Kompleks sonlar maydonida ko‘phadning ildizi haqidagi teorema
Balans modeli	Input–output model	Межотраслевой баланс	Ko‘p tarmoqli xo‘jalikning har bir ishlab chiqargan mahsulot miqdori va unga bo‘lganda ehtiyojning to‘la qondirilishi orasidagi munosabat
Texnologik matritsa	technological matrix	технологическая матрица	Ishlab chiqarishda qo‘llanilayotgan texnologiyaga bog‘liq hosil qilingan matrisa
Samaradorlik kriteriyalari	Performance criteria	Критерии эффективности	Ishlab chiqarish samaradorligini aniqlovchi shartlar
Chiziqli fazoning o‘lchov	the dimension of the linear space	размерность линейное пространство	Chiziqli erkli vektorlarning maksimal soni
Chiziqli fazoning bazisi	Basis of linear space	базис линейное пространство	Chiziqli fazoningistalgan chiziqli erkli vektorlar sistemasi
Operator	operator	оператор	Akslantirish
Chiziqli operator	linear operator	линейный оператор	Operatorning xususiy holi
Operatorning xos sonlari	The eigenvalues	Собственные значения	Xarakteristik ko'phad yechimi
Operatorning xos vektorlari	Eigenvector	Собственный вектор	Xos songa mos keluvchi kolleniar vektorlar
Skalyar ko‘paytma	scalar product	Скалярное произведение	Natijasi son beruvchi ikki vektorlar o'rtasidagi amal
Norma	Norm	Норма	Chiziqli fazo tushunchasi
Inertsiya qonuni	Sylvester's law of inertia	закон инерции Сильвестра	Kvardatik formalarning ishorasini aniqlovchi kriteriya
Matritsa bosh minorlari	Minor	главный минор	Belgilangan ustun soni belgilangan qator soni bilan ustma-ust tushishi
Almashtirishning chiziqli modeli			Iqtisodiy matematik model hisoblanadi
Burchak koeffisent	slope	угловой коэффициент	Ox o'qidan Oy o'qiga yo'nalgan eng kichik burchak
Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha masofa	Distance from point to line	Расстояние от точки до прямой	Analitik geometriyaning asosiy formulasidan biri
Aylana	Circle	Окружность	Berilgan nuqtadan teng uzoqlikda yotgan nuqtalar to'plami
Ellips	ellipse	эллипс	Ikkinchi tartibli egri chiziq
AFC	Average fixed	Средние	Yillik xarajatlar funksiyasi

	costs	постоянные затраты	
AVC	Average variable costs	Средние переменные затраты	O‘rtacha o‘zgaruvchan narx funksiyasi
AC	average costs	средние издержки	O‘rta umumiy narx funksiyasi
Tekislikdagi harakarlar	Motion the plane	Движения плоскости	Ikki nuqta orasidagi masofani saqlagan holdagi ko‘chirishlar
Parallel ko‘chirish	Translation	Параллельный перенос	Ikkita dekart koordinatalar sistemasida bir xil ismli o‘qlar parallel, bir xil yo‘nalgan va o‘qlarning har birida bir xil masshtab birligi aniqlangan harakat.
Burish	Rotation	Поворот	Koordinatalar boshini o‘zgartirmasdan, koordinatalar sistemasini biror burchakka burishdan hosil qilingan harakat.
Kanonik ko‘rinish	canonical form	канонический вид	Umumiy tenglamani harakat yordamida sodda ko‘rinishga keltirish
Vektor	vector	вектор	Yo‘naltirilgan kesma
Vektorning moduli	vector length	модуль вектора	Vektorning uzunligi
Teng vektorlar	equipollent vector	Равные вектора	O‘zaro kolleniar, bir xil yo‘nalgan va modullari teng bo‘lgan vektorlar
Skalyar ko‘paytma	The scalar product of vectors	Скалярное произведение векторов	Ikki vektorning uzunliklarini ular hosil qilgan burchak kosinusiga ko‘paytirishdan hosil bo‘lgan son
Vektor ko‘paytma	The vector product of vectors	Векторное произведение векторов	Ikki vektorning har biriga perpendikyliyar, uzunligi shu vektorlarga qurilgan paralellogramning yuzasini ifodalovchi songa teng va bu vektor uchidan berilgan vektorlarga qaralsa, eng qisqa burilishi soat mili yo‘nalishiga teskari yo‘nalishda joylashgan vektor
Aralash ko‘paytmasi	Mixed product of vectors	Смешанное произведение векторов	Ikki vektor vektor ko‘paytmani uchinchi vektorga skalyar ko‘paytirishdan hosil bo‘lgan son
Normal vektori	The normal vector	Нормальный вектор	Tekislikka perpendikulyar vektor
Tekislikning yo‘naltiruvchi kosinuslari	The direction cosines	Направляющие косинусы	Tekislik normal vektorining koordinata o‘qlari bilan hosil qilgan burchak cosinislar
Ikki tekislik orasidagi burchak	the angle between the two planes	угол между двумя плоскостями	Tekislik normal vektorlari orasidagi burchak
Nuqtadan tekislikkacha bo‘lgan masofa	The distance from point to plane	Расстояние от точки до плоскости	Nuqtadan tekislikka tushirilga perpendikulyarkesmauzunligi

Yoʻnaltiruvchi vektor	direction vector	направляющий вектор	Fazodagi toʻgʻri chiziqqa parallel vektor
Fazodagi ikkita toʻgʻri chiziq orasidagi burchak	angle between two lines in space	угол между двумя прямыми в пространстве	Bu toʻgʻri chiziqlar yoʻnaltiruvchi vektorlari hosil qilgan burchak
Toʻgʻri chiziq va tekislik orasidagi burchak	the angle between the straight lines and planes	угол между прямым и плоскости	Toʻgʻri chiziq yoʻnaltiruvchi vektori va tekislik normalvektoriorasidagi burchakni toʻgʻri burchakka toʻldiruvchi burchak
Sonli ketma-ketlik	Sequence	Последовательность	Natural argumentli funksiya
Ketma-ketlik limiti	limit of a sequence	предел последовательность	Yetarli katta hadlardaketma-ketlik yetarlicha yaqinlashuvchi son
Aniqmaslik	uncertainty	неопределенность	Natijasini oldindan aytish mumkin boʻlmagan ifoda
Funksiya uzuksizligi	continuous function	непрерывность функции	Erkli oʻzgaruvchining yetarli kichik oʻzgarishiga funksiyaning ham kichik oʻzgarishi
Argument orttirmasi	The increment of the argument	Приращение аргумента	Argument oʻzgarishi
Funksiya orttirmasi			Funksiya oʻzgarishi
Funksiyaning nuqtadagi hosilasi	function increment	приращение функции	Funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatining argument orttirmasi nolga intilgandagi limiti
Chegaraviy daromad(MR)	MR- marginal revenue	MR- предельный доход	Sotuv hajmining 1 birlikka ortgandagi umumiy daromadning oʻzgarish miqdori
Umumiy daromad (TR)	TR - total revenue	TR - общий доход	Umumiy daromad
Chegaraviy xarajat (MC)	MC – marginal cost	MC - предельные издержки	Umumiy xarajat (TC) funktsiyasining oʻzgarish tezligi
Umumiy xarajat (TC)	TC -total cost	TC -общая стоимость	Umumiy xarajat
Funksiya differensiali	differential function	дифференциал функции	Funksiya orttirmasining bosh qismi
Ekstremumlar	extremum	экстремумы	Funksiyaningmaksimumvaminimum nuqtalari
Statsionar nuqtalar	stationary point	стационарная точка	Funksiya hosilasi nolga teng boʻlgan nuqtalar
Funksiyaning kritik nuqtalari	Critical point	Критическая точка	Funksiya hosilasi nolga teng boʻlgan va hosila mavjud boʻlmagan nuqtalar
Funksiyaning monotonlik oraliqlari	intervals of monotony	интервалы монотонности	Funksiyaning oʻsish(kamayish) oraliqlari
Funksiya botiqlik (qavariqlik)	intervals of concave and	интервалы вогнутые и	Funksiya grafigining urinmaga nisbatan yuqorira(quyida) joylashgan

oraliqlari	convex	выпуклые	noraliqlari
Egilish nuqtasi	inflection point	Точка перегиба	Funksiya grafigining botiqlikdan qavariqlikka yoki aksincha o‘tish nuqtasi
Xususiy orttirma	partial increment	частное приращение	Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning berilgan argument bo‘yicha orttirmasi
To‘la orttirma	Full increment	полное приращение	Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning barcha argumentlari bo‘yicha orttirmasi
Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning differentsiali	Differential of functions of several variables	дифференциал функции нескольких переменных	Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya to‘la orttirmasining bosh qismi
Shartli ekstremumlar	conditional extremum	условной экстремум	Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning ekstremumlarini, uning argumentlari ma’lum shartlarni qanoatlantirishi asosida topish masalasi
Talabning narxga nisbatan elastikligi	Compared to the price elasticity of demand	По сравнению с ценовой эластичности спроса	Narxvamiqdoro‘zgarishidafoiz hisobidagi miqdor o‘zgarishi
Soliq foydasi(TY)	TY -Tax yield	Налоговый доходность	Hukumat uchun yig‘iladigan majburiy to‘lovlar
MPC	MPC- The marginal propensity to consume	Предельная склонность к потреблению	Iste’molga bo‘lgan chegaraviy moyillik
$Y = C + I$, $C = a + bY$	A simple Keynesian macroeconomic model	Простая кейнсианская макроэкономическая модель	Eng oddiy Keynes makroiqtisodiy modeli, davlat sektori ishtirok etmaganda va tashqi savdo o‘rnatilmagan hol
$\frac{dY}{dI}$	Marginal investition	Предельная инвестиция	Investitsiyaga bo‘lgan chegaraviy moyillik
$\frac{1}{1 - MPC}$	The Keynesian multiplier	Мультипликатор Кейнса	Keyns multiplikatori
$\pi = TR - TC$	The profit function	Функция прибыли	Sof foyda funksiyasi
$Y = C + I + G + X - M$	The basic Keynesian macroeconomic model	Основная кейнсианская макроэкономическая модель	Asosiy Keynes makroiqtisodiy modeli
$\frac{\partial Y}{\partial I} = \frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{\partial Y}{\partial X} = \frac{1}{1-(c-m)(1-t)}$	the basic Keynesian macroeconomic model	Основная кейнсианская макроэкономическая модель	Asosiy Keynes makroiqtisodiy modeli uchun Keyns multiplikatori
$Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$	Function of production	Производственная функция	Kobb-Duglas funksiyasi
$\alpha + \beta = 1$	Production index	Показатель производство	Kobb-Duglas ishlab chiqarish funksiyasi asosida mahsulotga

			bo‘lgan talab to‘la qondiriladi
$\alpha+\beta<1$	Production index	Показатель производство	Qoldiq mahsulot hosil bo‘ladi
$\alpha+\beta>1$	Production index	Показатель производство	Daromad yetarlicha bo‘lmaydi
Hessian matrisasi	Hessian matrix	матрица Гессе	Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning maximum va minimumi uchun ikkinchi tartibli yetarli shartlarning minorlar orqali ifodasi
Empirikformula	empirical formula	эмпирическая формула	Funksiyaniayrimnuqtalardama’lumqiymatlaribo‘yichataxminantiklash
Engkichikkvadratlarusuli	Least squares	Метод наименьших квадратов	Ma’lumqiymatlarbo‘yichafunksiyani taxminantiklash usuli
Noma’lum koeffitsientlar usuli	Method of undetermined coefficients	Метод неопределенных коэффициентов	Kasr ratsional funksiyani sodda kasrlarga yoyish usuli
Universal almashtirish	Universal trigonometric substitution	Универсальная тригонометрическая подстановка	Trigonometrik funksiyani kasr-ratsional funksiyaga keltiruvchi almashtirish
Eyler almashtirishlari	Euler substitution	Подстановки Эйлера	Kvadrat uchhad qatnashgan irratsionallikni kasr-ratsional funksiyaga keltiruvchi almashtirish
N’yuton-Leybnits formulasi	The Newton Leibniz	формула ньютона лейбница	Aniq integralni hisoblash formulasi
Ikki karrali integral	double integral	двойные интегралы	Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning tekislikdagi soha bo‘yicha integrali
Uch karrali integral	triple integral	тройные интегралы	Uch o‘zgaruvchili funksiyaning fazodagi yopiq sirt bilan chegaralangan sohadagi integrali
Diskontlash	discounting	дисконтирование	Ma’lum foizli stavka bilan ma’lum vaqtdan so‘ng olingan jamg‘arma oxirgi qiymati bo‘yicha dastlabki qo‘yilgan jamg‘armani aniqlash
TVC	time-variable costs	Переменные издержки производства	Umumiy o‘zgaruvchan xarajatlar
TFC	time-fixed costs	Постоянные издержки	To‘liq qayd etilgan xarajatlar
Lorens chizig‘i	Lorenz curve	Кривая Лоренца	Haqiqiy daromad taqsimotining ideal taqsimotdan og‘ishi
Hisob chizig‘i	line account	счетом линия	Qo‘shimcha miqdorda mahsulot ishlab chiqarish uchun qancha vaqt kerakligini bilishfoydalaniladichiziq
Vilson modeli	Wilson model	модель уилсона	Zahiralarni boshqarishda modeli
Sonli qator	numerical series	числовой ряд	Sonli ketma-ketlik hadlaridan tuzilgan cheksiz yig‘indi
Qatorning xususiy yig‘indilari	The partial sum of a series of numbers	Частичная сумма числового ряда	Qatorning dastlabki chekli sondagi hadlaridan tuzilgan yig‘indilar
Qator yig‘indisi	The sum of the	Сумма числового	Xususiy yig‘indilarketma-

	number series	ряда	ketligining chekli limiti
Taqqoslash alomati	Direct comparison test	признак сравнения рядов	Qator yaqinlashishining yetarli sharti
Dalamber alomati	d'Alembert's ratio test	Признак Даламбера	Qator yaqinlashishining yetarli sharti
Koshi alomati	Cauchy ratio test	признак Коши	Qator yaqinlashishining yetarli sharti
Koshining integral alomati	Cauchy integrals ratio test	Интегральный признак Коши	Qator yaqinlashishining yetarli sharti
Leybnits qatori	Leibniz Test	Признак Лейбница	Ishorasi almashinuvchi sonly qator
Funksional qatorlar	Function series	функциональные ряды	Hadlari funksiyalardan iborat qator
Darajali qatorlar	Power series	степенные ряды	Hadlari darajali funksiyali iborat qator
Abelteoremasi	Abel's theorem	теорема Абеля	Darajali qator yaqinlashishini aniqlavchi usullardan biri
Frobenius soni	число фробениуса	Frobenius Number	Matrisaviy darajali qatormatrisaning xos qiymatlari
Differensial tenglama	Differential equation	Дифференциальное уравнение	Erkli o‘zgaruvchi(lar), noma’lum funksiya va bu funksiya hosilalari yoki differenstiallarini bog‘lovchi tenglama
Oddiy differensial tenglama	Ordinary Differential Equations	Обыкновенные дифференциальные уравнения	Izlanayotgan funksiya bir o‘zgaruvchiliIi bo‘lgan differensial tenglama
Xususiy hosilali differensial tenglama	The partial derivative of the differential equation	Частная производная от дифференциального уравнения	Izlanayotgan funksiya ko‘p o‘zgaruvchiliIi bo‘lgan differensial tenglama
Differensial tenglamaning tartibi	order differential equation	порядок дифференциальное уравнение	Differensial tenglamada qatnashayotgan hosilalarning eng yuqori tartibi
Differensial tenglamaning yechimi	solutions of differential equations	решения дифференциальное уравнение	Tenglamani ayniyatga aylantiruvchi funksiya
Umumiy yechimi	general solution	общее решение	Differensial tenglama yechimlarining oilasi
Xususiy yechim	particular solution	Частное решение	Differensial tenglama umumiy yechimlar oilasidan ajratilgan yechim
Maxsus yechim			Umumiy yechimlar oilasidan ajratib bo‘lmaydigan yechim
Bir jinsli funksiya	Homogeneous function	Однородная функция	$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y)$ shartni qanoatlantiruvchi funksiya
Variatsiyalash	Variation	Вариация	Ozgarmasni noma’lum funksiya

			deb qabul qilish
Bir jinsli differensial tenglamalar	Homogeneous differential equation	Однородные дифференциальные уравнения	Bir xil o‘lchovli bir jinsli funksiyalardan tuzilgan differensial tenglama
$y' + p(x)y = q(x)$	Homogeneous differential equations of the first order	Линейные дифференциальные уравнения первого порядка	Birinchi tartibli chiziqli tenglama
$y' + p(x)y = q(x)y^n, \quad n = const$	Bernoulli equation	уравнения Бернулли	Bernulli tenglamasi
$\frac{dy}{dx} + a(x)y + b(x)y^2 = C(x)$	Riccati equation	уравнения риккати	Rikatti tenglamasi
To‘la differensial tenglama	Full differential equation	полное дифференциальное уравнение	Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning tola differensiallashdan hosil bo‘lgan tenglama
Integrallovchi ko‘paytuvchi	A complete integral	Интегрирую-щий множитель	To‘la differensial tenglamaga keltiruvchi ko‘paytuvchi
Wronskiy determinanti	Wronskian determi nant	определитель Вронского	Xususiy yechimlar orasida chiziqli bog‘liqlikni aniqlovchi determinant
Xarakteristik tenglama	characteristic of the differential equation	характеристика дифференциального уравнения	O‘zgarmas koeffisentli, chiziqli bir jinsli differensial tenglamaga mos algebraic tenglama
Fundamental yechimlar sistemasi	Fundamental system of solutions	фундаментальная система решений	Chiziqli erkli yechimlar sistemasi

TAVSIYA ETILGAN ELEKTRON JURNALLAR VA INTERNET SAYTLARI

TAVSIYA ETILGAN ELEKTRON JURNALLAR VA INTERNET SAYTLARI

Elektron jurnallar

1. Applied Mathematics Journal www.scirp.org/journal/am
2. Advances in Pure Mathematics http://www.scirp.org/journal/apm
3. O'zbek matematika jurnali http://mathinst.uz/ozbek_matematika_jurnali.html
4. Journal of Mathematical Finance http://www.scirp.org/journal/jmf/

Internet saytlari

1. www.ziyonet.uz
2. www.el.tfi.us/pdf/enmcoq22.uzk.pdf/
3. www.a-geometry.narod.ru
4. http://allmath.ru/highermath/mathanalis/
5. http://www.eknigu.com/lib/mathematics/;
6. http://www.mcce.ru, http://lib.mexmat.ru
7. http://www.msu.ru/ - Московский государственный университет;
8. http://www.nlr.ru/ - Российская национальная библиотека;
9. http://www.nsu.ru/icem/grants/etfm/ ;
10. http://www.rsl.ru/ - Российская государственная библиотека;
11. www.lib.homelinux.orgfmath
12. www. study.com
13. www.youtube.com
14. www.freevideolectures.com
15. www.mathnet.ru
16. www.matharxiv.org
17. www.exponenta.ru