МИРЗО УЛУҒБЕК НОМИДАГИ ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

Ғ.НАСРИТДИНОВ, М.АБДУРАИМОВ

ИҚТИСОДЧИЛАР УЧУН МАТЕМАТИКА

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА
МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ
МИРЗО УЛУҒБЕК НОМИДАГИ ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ
УНИВЕРСИТЕТИ

Ғ. Насритдинов, М. Абдураимов

ИҚТИСОДЧИЛАР УЧУН МАТЕМАТИКА
(ўқув қўлланма)

ТОШКЕНТ
«УНИВЕРСИТЕТ»
2001

Ушбу ўқув қўлланмада олий математика элементлари иқтисодиёт бўйича ихтисослашадиган талабаларга мослаштириб баён этилган. У икки қисмдан иборат. Биринчи қисмда матрицалар, детерминантлар ва уларнинг хоссалари, иқтисодиётда қўлланиладиган функциялар, лимитлар, узлуксизлик, ҳосила каби мавзулар баёни келтирилган. Иккинчи қисм ноаниқ ва аниқ интеграллар, дифференциал тенгламалар ва уларнинг иқтисодиётга қўлланилиши, қаторлар, кўп аргументли функциялар каби мавзуларга бағишланган.

Ўқув қўлланма олий ўқув юртларининг иқтисодиёт бўйича ихтисослашадиган талабалари учун мўлжалланган.

Масъул муҳаррирлар: Компьютер технологоялари факультети декани проф. Х.А.Музафаров, иқтисодиёт факультети декани, проф. А. В. Ваҳобов

Тақризчилар: ЎзРФАнинг академиги Т.А.Азларов, физ.-мат. фанлари доктори, проф. Ф. Ў. Носиров, доц. Ф. Эгамбердиев.

Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий Университети Илмий-методик Кенгашининг 2001 йил 29 январ мажлиси қарори билан нашрга тавсия этилган (3 сонли баённома).

СЎЗ БОШИ

Иқтисодиётнинг барча мутахассисликлари бўйича таълим олувчи талабалар «Иқтисодчилар учун математика» фанидан маърузалар эшитадилар ва амалий машғулотлар ўтказадилар. Бу фан иқтисодчилар учун ғоятда муҳим аҳамият касб этади. Унда математиканинг асосий бўлимлари қисқача баён этилади ҳамда математик тушунчаларнинг иқтисодий маънолари келтирилади. Шу билан бирга турли иқтисодий масалаларни ечишда математик усулларнинг қўлланилиши намойиш этилади. Учрайдиган иқтисодий тушунчалар ё талабаларга маълум бўлади, ёки уларни осонлик билан тушунтириб бериш мумкин бўлади.

Мазкур ўқув қўлланма 12 та мавзу бўйича 28 та маърузани ўқиш жараёнида юзага келди. Амалий машғулотлар самарали бўлишини таъминлаш мақсадида индивидуал вазифалар тизими (улар 13 та) тавсия этилган. Шу индивидуал вазифалар тизимидан сиртдан ўқиётган талабалар ҳам фойдаланишлари мумкин.

Ушбу қўлланмага «Иқтисодчилар учун математика» фанидан дастур, ўқув соатлари тақсимоти (мустақил билим олишга ажратилган соатлар билан бирга) ҳамда адабиётлар рўйхатидан иборат **меъёрий ҳужжатлар** тўплами ҳам киритилган.

Мазкур қўлланмада назарий материаллар қисқача баён этилган. Турли тасдиқлар (теоремалар, формулалар) кўпинча исботсиз келтирилган, аммо уларни қўллашга оид мисоллар етарли берилган. Деярли ҳар бир мавзунинг иқтисодиётга боғлиқлиги ёритилган. Бу иқтисодиёт факультети талабаларида математиканинг иқтисодиётда қай даражада муҳим эканига қизиқиш уйғотади.

Индивидуал вазифалар тизимидан амалий машғулотларда машқ учун фойдаланиш мумкин.

КИРИШ

Математика ҳақиқий дунёнинг миқдорий муносабатлари ва фазовий формалари ҳақидаги фандир.

Кишилар ўзларининг халқ хўжалиги ва жамиятга оид барча фаолиятларида математикадан фойдаланишади. Ҳозирги вақтда математика кириб бормаган фан ва халқ хўжалигининг математикадан фойдаланилмаётган соҳаси қолмади. Математиканинг иқтисодиётдаги аҳамияти беқиёс. Замонавий талабларга жавоб берадиган иқтисодчи–мутахассис иқтисодиётни, математикани ва компьютерни билиши шарт.

Математика ривожланиб замонавий ҳолатига эришгунча 4 та даврни ўз бошидан кечирган (А.Н.Колмогоров таъбири билан):

1. Математиканинг уйғониш даври (эрамиздан аввалги VI–V асргача).

2. Элементар математика даври (эрамиздан аввалги VI–V асрлардан эрамизнинг XVII асригача).

3. Ўзгарувчи миқдорлар математикаси даври (XVII–XIX асрлар).

4. Замонавий математика даври (XIX–XX асрлар).

Математика ёрдамида бир йўла бир неча жараёнларни ўрганиш мумкин. Масалан, аҳоли сонининг ўзгариши учун Мальтус тавсия этган қонун $\dot{L}=\eta L(L-L(t)$ дан t бўйича олинган ҳосила) ҳамда радиоактив моддаларнинг парчаланиш қонуни $m=v-m$ шакли жиҳатидан бир хил. Улар $\dot{x}=A\cdot x$, $A=const$ кўринишдаги биринчи тартибли дифференциал тенгламани ифодалайди. Математика ёрдамида чексиз кўп имкониятлар ичидан биз учун зарур, оптимал ечимни топиб олиш мумкин.

Математика тадбиқий масалаларни ечишнинг қудратли қуроли ва фаннинг универсал тили бўлибгина қолмай, балки у умумий маданият элементи ҳам. Шунинг учун замонавий иқтисодчини тайёрлашда математик таълим энг муҳим ташкил этувчи деб қараш лозим.

Математиканинг ривожланишига Ўрта Осиё ва Шарқ олимлари катта ҳисса қўшганлар. Муҳаммад Мусо ал Хоразмий, Абу Райҳон Беруний, Улуғбек ва уларнинг кўп сонли шогирдлари шулар жумласидандир.

Математиканинг ривожланишига улкан ҳисса қўшган Оврупо олимларини санаб ўтамиз: Архимед (эр. авв. 287–212), Р.Декарт (1596-1650), И.Ньютон (1643-1727), Г.Лейбниц (1646-1716), Л.Эйлер (1707-1783), Ж.Лагранж (1736-1813), К.Гаусс (1777-1855), О.Коши (1789-1857), Иоганн Бернулли (1667-1748), Якоб Бернулли (1654-1705) ва бошқалар.

Замонавий математиканинг ривожланишига ўзбек олимлари ўзларининг салмоқли ҳиссаларини қўшиб келмоқдалар. Ўзбек олимларини тайёрлашда академиклар Т.Қори Ниёзий, Т.А.Са-римсоқов, С.Ҳ.Сирожиддиновлар бош қош бўлишган. Ҳозирги кунда ҳормай толмай меҳнат қўшиб келаётган таниқли олим-ларимиз академиклар: М.С.Салоҳитдинов, Т.Ж.Жўраев, Ш.О.Алимов, Ш.А.Аюпов, Т.А.Азларов, Ш.Фармонов, Н.Ю.Сатимов, А.Сагдуллаев ва бошқалар номини мамнуният билан айтиб ўтамиз.

I ҚИСМ

1–БОБ. МАТРИЦАЛАР ВА ДЕТЕРМИНАНТЛАР, УЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ. ТЕСКАРИ МАТРИЦА ВА УНИ ҲИСОБЛАШ

1–§. Матрицалар ва улар устида амаллар

Иқтисодий жараёнларни ўрганиш турли иқтисодий кўрсаткичларнинг қийматларидан тузилган жадвални таҳлил қилиш ёрдамида олиб борилади. Унда турли гипотезалар текширилади, талаб ва таклиф функцияларининг эластиклиги ҳисобланади, иқтисодий жараённи ифодалаб берадиган эмпирик формулалар, математик моделлар қурилади ва ҳ.к.. Гапнинг лўндасини айтганда, статистик маълумотлардан тузилган жадвал иқтисодчилар учун муҳим аҳамият касб этади.

Маълумки, ҳар қандай жадвалнинг сатрлари ва устунлари бор.

1–таъриф. $m\times n$ ўлчовли матрица деб, m та сатр ва n та устундан ташкил бўлган сонлар жадвалига айтилади. Матрицани ташкил этадиган сонлар матрицанинг элементлари дейилади.

Матрица катта ҳарфлар A, B, C,... билан, унинг элементлари кичик ҳарфлар a_{ij} билан белгиланади. Унда i–сатр номерини, j–устун номерини, ij–эса a_{ij} элементнинг жойлашган жойини англатади. Қисқача $(m\times n)$ ўлчовли A матрица

$$A=(a_{ij}),\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

кўринишда, тўлиқ ёзилса қуйидагича ёзилади:

$$\underset{m*n}{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Мисол сифатида иқтисодиётнинг учта тармоғи бўйича ресурсларнинг тақсимоти жадвалини келтирайлик (шартли бирликларда):

Ресурслар	Иқтисодиётнинг тармоқлари	
	Саноат	қишлоқ хўжалиги
Электр энергияси	5,3	4,1
Меҳнат ресурслари	2,8	2,1
Сув ресурслари	4,8	5,1

Жадвалда 5,3 саноат қанча электр энергиясини истеъмол қилишини, 2,1 сон қишлоқ хўжалигида қанча меҳнат ресурсларидан фойдаланилаётганини англатади. Жадвални матрица кўринишида қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\underset{3*2}{A}=\begin{pmatrix}5{,}3 & 4{,}1\\ 2{,}8 & 2{,}1\\ 4{,}8 & 5{,}1\end{pmatrix},$$

бунда $a_{11}=5{,}3$; $a_{12}=4{,}1$; $a_{21}=2{,}8$; $a_{22}=2{,}1$; $a_{31}=4{,}8$; $a_{32}=5{,}1$.

Ихтиёрий хақиқий сон 1×1 ўлчовли матрица деб қаралиши мумкин. $m\times1$ ўлчовли матрица устун матрица (устун вектор), $1\times n$ ўлчовли матрица сатр матрица (сатр вектор) деб юритилади.

2-таъриф. Агар матрица n та сатр ва шунча устундан иборат бўлса, уни n–тартибли <u>квадрат матрица</u> дейилади.

Ихтиёрий ҳақиқий сонни 1×1 ўлчовли квадрат матрица деб қараш мумкин. Ушбу

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3\\ 0{,}4 & -0{,}1 & 0\\ -0{,}3 & 0{,}5 & -0{,}2\end{pmatrix},$$

матрицалар мос равишда 2×2 ва 3×3 ўлчовли квадрат матрицалардир. $A=(a_{ij})$ матрицада $i=j$ бўлган элементлар унинг <u>бош диагоналини</u> ташкил этади. Юқоридаги A ва B матрицаларда мос равишда 2 ва 4 ҳамда 0,1; –0,1: –0,2 элементлар бош диагонал элементларидир.

3-таъриф. Агар матрицада барча нодиагонал элементлар нолга тенг бўлса, уни <u>диагонал матрица</u> дейилади.

4-таъриф. Агар диоганал матрицанинг барча диагонал элементлари бирга тенг бўлса, уни <u>бирлик матрица</u> дейилади ва E ҳарфи билан белгиланади.

Масалан,

$$\underset{2*2}{E}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \underset{3*3}{E}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Бирлик ва диагонал матрица тушунчалари фақат квадрат матрицалар учун киритилган.

Матрицалар устида сонлар устидаги каби қатор амалларни бажариш мумкин, аммо баъзилари ўзига хос хусусиятга эга:

1°. Матрицани сонга кўпайтириш:

$$\lambda A=\lambda(a_{i,j})=(\lambda a_{i,j});\ 0\cdot A=(0\cdot a_{i,j})=(0_{i,j}).$$

2°. Матрицаларни қўшиш:

$$A+B=(a_{i,j})+(b_{i,j})=(a_{i,j}+b_{i,j})=(c_{i,j}).$$

Масалан,

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 5\\ 1 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 7\\ -2 & 10\end{pmatrix};$$

3°. Матрицаларни айириш:

$$A-B=A+(-1)\cdot B=(a_{i,j})+(-b_{i,j})=(a_{i,j}-b_{i,j})=(c_{i,j}).$$

Шундай қилиб, матрицаларни қўшиш ва айириш амали бир хил ўлчовли матрицалар учун киритилган. Демак, матрицаларни қўшиш (айириш) учун бир хил ўринда турган элементлар мос равишда қўшилади (айирилади).

4°. Матрицаларни кўпайтириш. Бу амал биринчи A матрицанинг устунлари сони иккинчи B матрицанинг сатрлари сонига тенг бўлганда бажарилиши мумкин. Шу ҳолда $\underset{m*k}{A}*\underset{k*n}{B}$ кўпайтма деб шундай $\underset{m*n}{C}$ матрицага айтиладики, унда ҳар бир $c_{i,j}$ элемент A матрицанинг i–сатри элементларини B матрицанинг мос j–устуни элементларига кўпайтмалари йиғиндисига тенг бўлади:

$$c_{i,j}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ik}b_{kj}=\sum_{s=1}^{k}a_{is}b_{sj},\quad i=1,2,\ldots,m,\quad j=1,2,\ldots,n.$$

Мисоллар:

1) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 5 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot(-2)+2\cdot 5 & 1\cdot 3+2\cdot(-4)\\ 3\cdot(-2)+4\cdot 5 & 3\cdot 3+4\cdot(-4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -5\\ 14 & -7\end{pmatrix};$

2) $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\ 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 3+(-1)\cdot 5\\ 3\cdot 3+4\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 29\end{pmatrix};$

3) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 4\\ -4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot(-1)+0\cdot(3)+2\cdot(-4) & 1\cdot 2+0\cdot 4+2\cdot 5\\ 3\cdot(-1)+1\cdot 3+0\cdot(-4) & 3\cdot 2+1\cdot 4+0\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9 & 12\\ 0 & 10\end{pmatrix}.$

Матрицалар устида юқорида келтирилган 1°–4° амаллардан қуйидаги амалларнинг тўғрилиги келиб чиқади:

1) $A+B=B+A$;
2) $(A+B)+C=A+(B+C)$;
3) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$;
4) $A(B+C)=AB+AC$;
5) $(A+B)C=AC+BC$;
6) $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$;
7) $A(BC)=(AB)C$.

Аммо таъкидлаб айтамизки, агар $A{\cdot}B$ кўпайтма мавжуд бўлса, $B{\cdot}A$ кўпайтма мавжуд бўлиш ҳам, мавжуд бўлмаслиги ҳам мумкин. Агар $B{\cdot}A$ ҳам мавжуд бўлганда $A{\cdot}B$ ва $B{\cdot}A$ лар турли ўлчовли бўлиши мумкин (юқоридаги 3-мисолга қаранг).

Агар AB ва BA лар мавжуд ҳамда бир хил ўлчовли бўлса, умуман айтганда, $AB \neq BA$. Хусусий ҳолда матрицалар квадрат матрицалар бўлиб, улардан бири бирлик матрица бўлса, унда $A{\cdot}E=E{\cdot}A=A$ бўлади.

5°. ***Даражага кўтариш.*** Бутун мусбат k даражали квадрат A^k ($k>1$) матрица дейилганда k та A га тенг бўлган матрицалар кўпайтмаси тушунилади:

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k \text{ та}}.$$

Кўринадики, даражага кўтариш амали фақат квадрат матрицалар учун киритилган. Таъриф бўйича $A^0=A$, $A^1=A$, $A^p\,A^q=A^{p+q}$, $(A^p)^q=A^{pq}$.

Иккита квадрат матрица кўпайтмаси нол матрица бўлиши мумкин. Масалан,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аммо $A^k=0$ тенгликдан $A=(0)$ экани доим келиб чиқавермайди. $A^k=0$ тенглик $A\neq(0)$ учун ҳам ўринли бўлиши мумкин. Масалан, $a\neq0$ бўлганда

$$A = \begin{pmatrix} a & a \\ -a & -a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a & a \\ -a & -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & a \\ -a & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} a & a \\ -a & -a \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6°. ***Матрицани транспонирлаш.*** Матрицанинг сатрлари ва устунлари ўринларини алмаштириш матрицани транспонирлаш деб юритилади ва A матрица учун транспонирланган матрицани A' ёки A^T деб белгиланади. Бунда A ва A^T нинг ўлчовлари ўзгариб кетиши мумкин, аммо квадрат матрицалар учун ўлчовлар ўзгармайди.

Транспонирлаш хоссалари:

1) $(A')'=A$; 3) $(A+B)'=A'+B'$;

2) $(\lambda A)'=\lambda A'$; 4) $(AB)'=B'A'$.

Битта иқтисодий масала кўрамиз: Корхона уч турли маҳсулот ишлаб чиқаради, бунда у 2 турли хом ашёдан фойдаланади. Хом ашёни сарфлаш матрицаси қуйидагича:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}.$$

Бунда, масалан, 5 сон биринчи тур хом ашёдан 2 тур маҳ–сулотнинг бир–бирлигини ишлаб чиқаришдаги сарфини анг–латади. Ишлаб чиқариш режаси $C=(100,80,130)$ сатр–матрица билан, хомашёнинг бир бирлиги баҳоси

$$B=\begin{pmatrix}30\\ 50\end{pmatrix}$$

устун–матрица билан берилган. Режани бажариш учун сарф этиладиган хомашё миқдори ва хом ашёнинг умумий баҳоси топилсин.

Ечиш. Сарф этилган хомашё миқдори $S=C\cdot A$ формула билан, хомашёнинг умумий баҳоси $Q=S\cdot B$ формула билан ҳисобланади:

$$S=C\cdot A=(100,80,130)\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}=(730,980),\ Q=S\cdot B=(730,980)\begin{pmatrix}30\\ 50\end{pmatrix}=70900\,.$$

2-§. Квадрат матрицаларнинг детерминантлари

<u>Детерминант</u> тушунчаси фақат квадрат матрицалар учун киритилган бўлиб, у матрицани характерлайди. Бу тушунча чизиқли тенгламалар системасини ечиш билан бевосита боғланган. A матрицанинг детерминанти $|A|$ ёки Δ каби бел–гиланади.

Биринчи тартибли матрица $A=(a_{11})$ нинг <u>детерминанти</u> деб a_{11} элементнинг ўзига айтилади: ı$=|A|=a_{11}$; $A=(3)$ бўлса, ı$=|A|=3$.

Иккинчи тартибли матрица $A=(a_{ij})$, i, j=1, 2, детерминанти деб қуйидаги

$$\Delta_2=|A|=\begin{vmatrix}a_{11}\,a_{12}\\ a_{21}\,a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

формула билан ҳисобланадиган сонга айтилади. Масалан, агар

$$A=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}2\\ 0{,}3 & 0{,}4\end{pmatrix}$$

бўлса, $\Delta_2=|A|=\begin{vmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 \end{vmatrix}=0,04-0,06=-0,02.$

Энди учинчи тартибли матрица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

берилган бўлсин. Шу матрицанинг <u>детерминанти</u> деб қуйидаги

$$\Delta_3=|A|=(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13})-(a_{31}a_{22}a_{13}+a_{12}a_{21}a_{33}+a_{32}a_{23}a_{11})$$

формула билан ҳисобланадиган сонга айтилади. Бу формула 6 та қўшилувчидан иборат бўлиб, ҳар бир қўшилувчи ҳар бир сатр ва устундан биттадан олинган элементлар кўпайтмасидан иборат. Мазкур формулани <u>учбурчак</u> ёки <u>Саррус</u> қоидаси ёрдамида ҳосил қилиш мумкин.

Масалан,

$$A=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=[(-1)\cdot 1\cdot 1+1\cdot 2\cdot 2+1\cdot 1\cdot 1(-1)]-[1\cdot 1\cdot 2+1\cdot 1\cdot 1+(-1)(-1)\cdot 2]=$$

$$=2-5=-3.$$

n–тартибли матрица детерминанти тушунчасини ҳам киритиш мумкин. Аммо амалда маълум хосса ёрдамида юқори тартибли детерминантларни ҳисоблаш масаласи тартиби ундан қуйи бўлган детерминантларни ҳисоблаш масаласига келтирилади.

Буни тушунтириш учун матрица элементининг <u>минори</u> ҳамда алгебраик тўлдирувчиси тушунчаларини киритамиз.

n-тартибли A матрица a_{ij} элементининг <u>минори</u> M_{ij} деб шу матрицанинг i–сатри ва j–устунини чизиб ташлаш натижасида ҳосил бўлган $(n-1)$–тартибли матрица детерминантига айтилади.

Мисоллар:

1) $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $M_{12}=a_{21}$, $M_{11}=a_{22}$, $M_{21}=a_{12}$, $M_{22}=a_{11}$;

2) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, $M_{12}=\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=-8-2=-10.$

n–тартибли A матрица a_{ij} элементининг алгебраик тўлдирувчиси T_{ij} деб шу элемент минорининг $(-1)^{i+j}$ ишора билан олинган миқдорига айтилади, яъни

$$T_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}=\begin{cases} M_{ij},\ i+j-жуфт, \\ -M_{ij},\ i+j-тоқ. \end{cases}$$

Лаплас теоремаси. Квадрат матрицанинг детерминанти унинг ихтиёрий сатри (устуни) элементларини уларнинг алгебраик тўлдирувчиларига кўпайтмалари йиғиндисига тенг, яъни

$$\Delta=a_{i1}T_{i1}+a_{i2}T_{i2}+\ldots+a_{in}T_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}T_{ij}$$

(i–сатр элементлари бўйича ёйилма)

ёки

$$\Delta=a_{1j}T_{1j}+a_{2j}T_{2j}+\ldots+a_{nj}T_{nj}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}T_{ij}$$

(j–устун элементлари бўйича ёйилма).

Мисоллар.

1) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; $|A|=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=2+6=8$;

$T_{11}=2,\ T_{12}=-3;\ T_{21}=2,\ T_{22}=1;$

$\Delta=|A|=1\cdot 2+(-2)(-3)=8;\ \Delta=|A|=1\cdot 2+3\cdot(+2)=8;$

2) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$; $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}=(4+4+18)-(3-16-6)=45;$

$T_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}=10;\ T_{12}=-\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=10;\ T_{13}=\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=5;$

$\Delta=|A|=1\cdot 10+2\cdot 10+3\cdot 5=45.$

3-§. Детерминантларнинг хоссалари

Қуйида детерминантларнинг муҳим хоссаларини келтирамиз:

1–хосса. Агар матрицанинг бирор сатри (устуни) элементлари фақат ноллардан иборат бўлса, шу матрицанинг детерминанти нолга тенг бўлади.

2–хосса. Агар матрицанинг бирор сатри (устуни) элемент– ларини ҳақиқий сон λ га ($\lambda\neq0$) кўпайтирилса, матрица де– терминанти λ га кўпайтирилади.

Агар $|A|=\Delta$ бўлса, $\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\lambda|A|$ бўлади.

3–хосса. Транспонирлаш натижасида матрица детерми– нанти ўзгармайди: $|A'|=|A|$.

4–хосса. Икки сатр (устун) элементлари ўрни алмаштири– лиши натижасида детерминант ишораси қарама–қаршига ўз– гаради.

5–хосса. Агар квадрат матрицанинг иккита бир хил сатри (устуни) бўлса, детерминанти нолга тенг бўлади.

6–хосса. Агар квадрат матрицанинг иккита сатри (устуни) элементлари пропорционал бўлса, детерминанти нолга тенг бўлади.

7–хосса. Матрицанинг бирор сатри (устуни) элементлари– нинг бошқа сатри (усутуни) элементлари алгебраик тўлдирув– чиларига кўпайтмалари йиғиндиси нолга тенг.

8–хосса. Агар матрицанинг бирор сатри (устуни) элемент– ларига унинг бошқа сатри (устуни) элементларини мос ра– вишда бир хил сонга кўпайтириб қўшилса, матрица детерми– нанти ўзгармайди.

Юқорида келтирилган хоссалар юқори тартибли детерми– нантларни осонроқ ҳисоблашга ёрдам беради. Бунда матрица элементларини шундай ўзгартириш керакки, бирор сатр (ус- тун) элементлари иложи борича кўпроқ ноллардан ташкил топган бўлсин.

4-§. Тескари матрица ва уни ҳисоблаш

Тескари матрица тушунчаси квадрат матрицаларга мансуб.

1–таъриф. Агар A ва B матрицалар бир хил тартибли квадрат матрицалар бўлиб, $A\cdot B=E$ тенглик ўринли бўлса, B матрица A матрицага (ёки A матрица B матрицага) тескари матрица дейилади ва $B=A^{-1}$ деб белгиланади.

2-таъриф. Агар $|A|\neq 0$ бўлса, A матрица номахсус, акс ҳолда махсус матрица дейилади.

Теорема. Агар A матрица номахсус бўлса, унга тескари матрица A^{-1} мавжуд ва у ягона.

Тескари матрицани ҳисоблашнинг турли усуллари мавжуд. Энг содда ҳолда у алгебраик тўлдирувчилар ёрдамида ёзилиши мумкин:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} T_{11} & T_{21} & \cdots & T_{n1} \\ T_{12} & T_{22} & \cdots & T_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ T_{1n} & T_{2n} & \cdots & T_{nn} \end{pmatrix}=\frac{1}{|A|}\widetilde{T}, \quad (|A|\neq 0),$$

бунда $\widetilde{T}$ матрица $T=(T_{ij})$ матрицадан транспонирлаш ёрдамида ҳосил қилинади.

Тескари матрицани ҳисоблаш алгоритми қуйидагича:

1) Берилган A матрица детерминантини ҳисоблаймиз;

2) Агар $|A|\neq 0$ бўлса, A матрица элементларининг алгебраик тўлдирувчилари T_{ij} ни ҳисоблаймиз;

3) $T=(T_{ij})$ тузиб, уни транспонирлаб, $\widetilde{T}$ матрицани ҳосил қиламиз;

4) A^{-1} ни юқоридаги формула ёрдамида ҳисоблаймиз;

5) Тескари матрица тўғри топилганини $A\cdot A^{-1}=E$ бўлиши кераклигига асосланиб текширамиз.

Энди мисоллар кўрамиз:

1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $A^{-1}=?$

$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=4-6=-2\neq 0$; $T_{11}=4$; $T_{12}=-3$; $T_{21}=-$; $T_{22}=1$;

$A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$;

$AA^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$; $|A|=45\neq 0$;

$T_{11}=10$; $T_{12}=10$; $T_{13}=5$;

$$T_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}=-17;\ T_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=1;\ T_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=5;$$

$$T_{31}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1;\ T_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}=-8;\ T_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=5;$$

$$A^{-1}=\frac{1}{45}\begin{pmatrix} 10 & -17 & 1 \\ 10 & 1 & -8 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix};$$

$$AA^{-1}=\frac{1}{45}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & -17 & 1 \\ 10 & 1 & -8 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{45}\begin{pmatrix} 45 & 0 & 0 \\ 0 & 45 & 0 \\ 0 & 0 & 45 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Номахсус матрицалар учун қуйидаги хоссалар ўринли:

1. $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$; 3. $(A^k)^{-1}=(A^{-1})^k$;

2. $(A^{-1})^{-1}=A$; 4. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

Адабиётлар

1. Высшая математика для экономистов (коллектив авторов: проф. Н.Ш.Кремер и др.). Москва, «Банки и биржи», изд—е объединение «Юнити», 1997.

2. Головина Л. И. «Линейная алгебра и некоторые её приложения». Москва, «Наука», 1985.

2–БОБ. ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИ. КРАМЕР ФОРМУЛАЛАРИ. КЎП ТАРМОҚЛИ ИҚТИСОДИЁТ УЧУН ЛЕОНТЬЕВ МОДЕЛИ

1–§. Асосий тушунчалар ва таърифлар

Чизиқли тенгламалар системасини ечишга кўпгина тадбиқий масалалар, шу жумладан, иқтисодий масалалар келтирилади. Шунинг учун бундай системаларни ўрганиш муҳим аҳамиятга эга. Чизиқли тенгламалар системаси икки турли бўлади; 1. Чизиқли тенгламаларнинг бир жинсли бўлмаган системаси; 2. Чизиқли тенгламаларнинг бир жинсли системаси.

Ҳозир биз бир жинсли бўлмаган системаларни ўрганамиз. Бундай системалар қуйидагича ёзилади:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n = b_k. \end{cases} \tag{1}$$

Бунда a_{ij}, $i=1, 2, ..., k$; $j=1, 2, ..., n$ сонлар система коэффициентлари, b_i, $i=1, 2, ..., k$ сонлар озод ҳадлар ёки системанинг ўнг томони деб аталади. (1) системани қисқача ушбу

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad (i=1, 2, ..., k) \tag{2}$$

кўринишда ёзиш мумкин.

(1) Системанинг ечими деб n та сонларнинг шундай мажмуасига айтиладики, уларни (1) системага қўйганда ҳар бир тенглама тўғри тенгликка айланади.

Агар тенгламалар системаси ҳеч бўлмаса битта ечимга эга бўлса, у биргаликда, ечимга эга бўлмаса, биргаликда эмас дейилади.

Агар тенгламаларнинг иккита системаси бир хил ечимлар тўпламига эга бўлса, улар тенг кучли, ёки барибир, эквивалент системалар дейилади.

Тенгламалар системасини ечиш дейилганда унинг барча ечимларини топишни ёки у ечимга эга эмаслигини кўрсатишни тушунилади.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_k \end{pmatrix},$$

бунда A–система коэффициентлари матрицаси, X–номаълум–ларнинг устун–матрицаси (устун–вектор), B–озод ҳадлари ус–тун–матрицаси (устун–вектор). Шу белгилашлар ёрдамида (1) системани ушбу

$$AX=B \tag{3}$$

вектор–матрицали кўринишда ёзиш мумкин.

2–§. *n* номаълумли *n* та чизиқли тенгламалар системаси: тескари матрица усули ва Крамер формулалари

Маълумки, мактабда чизиқли системаларни ечишнинг икки: 1. Ўрнига қўйиш; 2. Чиқариш (қўшиш) усуллари ўргатилади.

Чиқариш усули умумий ҳолда Гаусс усули деб аталади. Биз мазкур маърузада яна икки усулни кўриб чиқамиз.

1. Тескари матрица усули.

2. Крамер формулаларидан фойдаланиш усули.

Аввал тескари матрица усулини кўрамиз. (1) система учун A матрица номахсус бўлсин, яъни $|A|\neq0$. Бу ҳолда A га тескари матрица A^{-1} мавжуд. Энди (3) вектор–матрицали тенгламанинг иккала томонини чапдан A^{-1} га кўпайтирамиз:

$$A^{-1}(AX)=A^{-1}B, \qquad (A^{-1}A)X=A^{-1}B, \qquad A^{-1}A=E, \qquad EX=X.$$

Бундан системанинг ечими ушбу

$$X=A^{-1}B \tag{4}$$

кўринишда ёзилиши келиб чиқади.

Энди системани Крамер формулаларидан фойдаланиб ечишга тўхталамиз: системанинг матрицаси A, унинг детерминанти Δ бўлсин. Δ_j деб A матрица j–устунни озод ҳад билан алмаштириш натижасида ҳосил бўлган матрица детерминантини белгилаймиз.

Крамер теоремаси. Агар $\Delta\neq0$ бўлса, у ҳолда (1) система ягона ечимга эга бўлади ва у қуйидаги формулалар ёрдамида ҳисобланади:

$$x_j=\frac{\Delta_j}{\Delta}, \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{5}$$

(5) формулалар Крамер формулалари деб юритилади.

Мисол. Ушбу

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

система *а*) тескари матрица усули билан; *б*) Крамер формулалари бўйича ечилсин.

Ечиш. *а*) Бу система учун

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Аввал A матрицанинг детерминантини ҳисоблаймиз:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=(-6+1-2)-(-4-3+1)=-7+6=-1;\ |A|=-1\neq 0.$$

Энди A матрицанинг алгебраик тўлдирувчиларини топамиз:

$$T_{11}=-1;\ T_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=0;\ T_{13}=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=-1;$$

$$T_{21}=-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-4;\ T_{22}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=1;\ T_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=-5;$$

$$T_{31}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=-4;\ T_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=1;\ T_{33}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-7;$$

$$A^{-1}=-\begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -5 & -7 \end{pmatrix};$$

$$AA^{-1}=-\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -5 & -7 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Юқорида биз тескари матрицани топдик ва $AA^{-1}=E$ тенгликни ҳам текширдик. Натижада A^{-1} матрица тўғри топилгани келиб чиқди. Энди номаълумларни $X=A^{-1}B$ формула ёрдамида топамиз:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&4\\0&-1&-1\\1&5&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

Текшириб кўриш мумкин: $X_1=1$, $X_2=-1$, $X_3=2$ сонлар берилган системанинг тенгламаларини тўғри тенгликка айлантиради.

б) Шу системани Крамер формулалари ёрдамида ечайлик. Унда равшанки, $\Delta=|A|=-1$; Энди Δ_1, Δ_2, Δ_3 ларни ҳисоблаймиз:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-1&1&-1\\2&-3&-1\\-1&2&1\end{vmatrix}=(3+1-4)-(-3+2+2)=-1;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2&-1&-1\\1&2&-1\\-1&-1&1\end{vmatrix}=(4-1+1)-(2+2-1)=1;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2&1&-1\\1&-3&2\\-1&2&-1\end{vmatrix}=(6-2-2)-(-3-1+8)=-2.$$

Энди Крамер формулаларидан фойдаланамиз:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-1}{-1}=1;\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{1}{-1}=-1;\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-2}{-1}=2.$$

Шундай қилиб, $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=2$. Шу натижа аввалги усулда ҳам келиб чиққан эди.

Эслатма. Тадбиқий масалаларни ечишда жуда катта ўлчовли матрицалар билан иш кўришга тўғри келади. Агар юқорида келтирилган усуллардан фойдаланилса, катта ҳажмда ҳисоблашларни бажаришга мажбур бўламиз. Шунинг учун мутахассислар томонидан ҳисоблашлар ҳажмини камайтириш юзасидан анча тадқиқотлар қилинган. Бу борадаги ишлардан биттаси системадаги номаълумларни бирин-кетин чиқариб юборишга тааллуқли ишдир. Бу усул умумий ҳолда Гаусс усули дейилади, мактабда тенгламалар сони 2 та ёки 3 та бўлганда қўлланиладиган чиқариш (қўшиш) усули шу Гаусс усулининг хусусий ҳолидир.

3-§. Чизиқли бир жинсли тенгламалар системаси

Агар n номаълумли k та чизиқли тенгламалар системасида барча озод ҳадлари (ўнг томони) нолга тенг бўлса, бундай система <u>чизиқли бир жинсли тенгламалар системаси</u> дейилади ва у қуйидагича ёзилади:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = 0. \end{array}\right\} \qquad (6)$$

(6) системанинг тенгламалари доим биргаликда бўлади, чунки у ҳеч бўлмаганда (0, 0, ..., 0)–нол ечимга эга.

Агар $k=n$ бўлиб, $\Delta\neq 0$ бўлса, Крамер формулаларидан $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$ экани келиб чиқади. Бу ҳолда $\Delta_1=\Delta_2=\ldots=\Delta_n=0$.

Қачон бир жинсли система нолдан фарқли ечимларга ҳам эга бўлади?–деган саволга қуйидагича жавоб берилади.

Бир жинсли системада тенгламалар сони номаълумлар сонидан кам бўлса, ёки бир жинсли системанинг детерминанти нолга тенг бўлса, бундай система чексиз кўп нолдан фарқли ечимларга эга бўлади.

(6) системанинг бирор нолдан фарқли ечимини (бу ҳол ё $n>k$, ёки $k=n$, $|A|=\Delta=0$ бўлганда мумкин) x^0, $x^0=(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)'$ деб белгилаймиз, унда x^0–устун вектор. Шу ечим қуйидаги хоссаларга эга:

1. Агар x^0 ечим бўлса, λx^0 ҳам ечим бўлади.

2. Агар $x^{(1)}$ ва $x^{(2)}$ лар ечим бўлса, ихтиёрий c_1 ва c_2 лар учун шу ечимларнинг чизиқли комбинацияси

$$c_1x^{(1)}+c_2x^{(2)}=(c_1x_1^{(1)}+c_2x_1^{(2)}, c_1x_2^{(1)}+c_2x_2^{(2)}, \ldots, c_1x_n^{(1)}+c_2x_n^{(2)})$$

ҳам ечим бўлади.

Мисол. Иккита ун омборидан иккита нон заводига маълум миқдорда ун ташилмоқчи. I_0–биринчи ун омборидан 95 тонна, II_0–ун омборидан 105 тонна унни I_3–биринчи нон заводига 110 тонна, II_3–иккинчи нон заводига 90 тонна ташишни ташкил қилинмоқчи. Ун ташишни неча усул билан амалга ошириш мумкин?

Ечиш. I_0 дан I_3 га x_1 тонна, I_0 дан II_3 га x_2 тонна ун ташилган бўлсин, бунда $95=x_1+x_2$ бўлади. Яна II_0 дан I_3 га x_3 тонна, II_0 дан II_3 га x_4 тонна ун ташилган дейлик, бунда $x_3+x_4=105$ бўлади. Равшанки, I_3 завод $x_1+x_3=110$ тонна унни, II_3 завод $x_2+x_4=90$ тонна унни қабул қилиб олади. Шундай қилиб, қуйидаги тенгламалар системасига эга бўлдик: $x_1+x_2=95$, $x_3+x_4=105$, $x_1+x_3=110$, $x_2+x_4=90$.

Бу система 4 номаълумли 4 та тенгламадан иборат. Аммо унинг ҳар бир тенгламаси қолган учта тенгламаси натижасидан иборат. Масалан, 4–тенгламани ҳосил қилиш учун биринчи иккитасини қўшиб, учинчисини айириш етарли. Шунинг учун 4–сини ташлаб юборишимиз мумкин. Унда биз 4 номалумли учта тенгламага эга бўламиз. Агар x_1 ни ихтиёрий танласак, x_2, x_3, x_4 ларни шу x_1 орқали ифодалаш мумкин:

$$x_2=95-x_1,\quad x_3=110-x_1,\quad x_4=105-x_3=105-(110-x_1)=-5+x_1.$$

Аммо маъноси бўйича $x_1\geq 0$, $x_2\geq 0$, $x_3\geq 0$, $x_4\geq 0$ бўлгани сабабли $95-x_1\geq 0$; $110-x_1\geq 0$; $-5+x_1\geq 0$. Бундан $5\leq x_1\leq 95$ экани келиб чиқади. x_1 га шу $5\leq x_1\leq 95$ оралиқдан ихтиёрий қийматлар бераверсак, x_2, x_3, x_4 лар учун ҳам чексиз кўп қийматлар чиқаверади. Демак, система чексиз кўп ечимга эга. Аввало қаралаётган система бир жинсли бўлмаган система. Бу бир жинсли бўлмаган, чексиз кўп ечимга эга бўладиган системага оид иқтисодий масала. Бир жинслига оид масалани кейинги параграфда кўрамиз. У Леонтьевнинг ёпиқ чизиқли моделидан иборат.

4–§. Кўп тармоқли иқтисодиёт учун Леонтьев модели

Бу моделни баланс таҳлили деб ҳам юритишади. Баланс таҳлилидан мақсад макроиқтисодиётда пайдо бўладиган ва кўп тармоқли хўжаликни самарадор бошқариш билан боғланган қуйидаги саволга жавоб беришдан иборат: n та тармоқ n турли маҳсулот ишлаб чиқаради, турли тармоқлар турли маҳсулотлар ишлаб чиқаради. Ҳар бир тармоқ хомашё сифатида ўз маҳсулотидан ва бошқа тармоқлар маҳсулотидан фойдаланиши мумкин. n турли маҳсулотларга талабни қондириш учун ҳар бир тармоқнинг ишлаб чиқарадиган маҳсулоти миқдори қандай бўлиши лозим? Бу саволга жавобни 1936–йилда Америка иқтисодчиси В.Леонтьев берган. У очиқ ва ёпиқ чизиқли модел деб юритиладиган моделни ишлаб чиққан. Ҳозир шу моделлар моҳиятини баён этамиз.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз.

x_i– i–тармоқнинг маҳсулоти (хом ашёси) миқдори, $i=1, 2, ..., n$.

Ишлаб чиқариш бошланди дейлик. Унда y_i деб i–тармоқнинг ишлаб чиқарган маҳсулоти миқдорини белгилаймиз. Масалан, 1–тармоқ y_1 ҳажмда махсулот ишлаб чиқариш учун x_1 нинг a_{11} қисмини, x_2 нинг a_{12} қисмини, ва ҳ.к., x_n нинг a_{1n} қисмини ишлатади. Унда $y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n$ формула келиб чиқади. Худди шунга ўхшаш формулаларни $y_2, \ldots, y_n$ лар учун ҳам ёзиш мумкин бўлади. Демак биз қуйидаги тенгликларга эгамиз:

$$y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n, \quad a_{1j}\geq 0, \quad j=1, 2, \ldots, n,$$
$$y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n, \quad a_{2j}\geq 0, \quad j=1, 2, \ldots, n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n, \quad a_{nj}\geq 0, \quad j=1, 2, \ldots, n.$$

Ишлаб чиқариш жараёнида $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ларнинг ҳаммаси, ёки уларнинг қисмлари ишлатилиши мумкин, яъни хом ашёлар-нинг ишлатилмай қолган қисми ҳам бўлиши мумкин. Шунинг учун қуйидаги муносабатлар ўринли:

$$x_1-y_1=b_1\geq 0, \; x_2-y_2=b_2\geq 0, \; \ldots, \; x_n-y_n=b_n\geq 0.$$

Бунда $y_1, y_2, \ldots, y_n$ лар ўрнига юқоридаги ифодаларни қўйиб, ушбу

$$\begin{cases} (1-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n = b_1, \\ -a_{21}x_1 + (1-a_{22})x_2 - \ldots - a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots + (1-a_{nn})x_n = b_n \end{cases}$$

чизиқли тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Уни вектор-матрицали кўринишда қуйидагича ёзиш мумкин:

$$(E-A)X=B,$$

бунда

$$E-A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Агар $B=0$ бўлса, $(E-A)X=0$ муносабат Леонтьевнинг ёпиқ чи-зиқли модели дейилади. Бунда $AX=X$ бўлиб, ишлаб чиқариш жараёнида барча хом ашёлардан фойдаланилади.

Агар $B\neq 0$ бўлса, биз $(E-A)X=B$ кўринишдаги чизиқли бир жинсли бўлмаган тенгламалар системасига эгамиз. Буни Ле-онтьевнинг очиқ чизиқли модели дейилади. $B=(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ век-торни сўнгги эҳтиёж вектори дейилади. У буюртманинг вектор-ҳажмини англатади. Агар $(E-A)X=B$ система $X\geq 0$ ечимга эга бўлса, В ҳажмдаги буюртмани бажариш мумкин деган маъно чиқади.

Қачон $X \geq 0$ номанфий ечим мавжуд бўлади? Бунинг учун етарли шарт деб аталадиган шартлар бажарилиши керак:

1) $|E-A| \neq 0$;

2) $0 \leq a_{ij} \leq 1$, $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1$, $j=1, 2, \ldots, n$; $\sum_{i=1}^{n} a_{ij_0} < 1$.

Шу шартлар бажарилганда $(E-A)^{-1}$ мавжуд ва $(E-A)^{-1} \geq 0$.

Энди $(E-A)X=B$ дан $X=(E-A)^{-1}B \geq 0$ келиб чиқади.

Агар $A \geq 0$ матрица учун $B \geq 0$ ихтиёрий бўлганда $(E-A)X=B$ тенглама $X \geq 0$ ечимга эга бўлса, шу А матрица ва Леонтьев модели самарадор дейилади.

Иқтисодий масала. Леонтьевнинг очиқ моделида

$$A=\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

бўлсин. Унда x_1 ва x_2 ни топиш керак.

Мазкур модель самарадор, чунки $0{,}1+0{,}3=0{,}4<1$; $0{,}2+0{,}4=0{,}6<1$ ҳамда $(E-A)X=B$ тенглама номанфий ечимга эга. Ҳақиқатан,

$$E-A=\begin{pmatrix} 0{,}9 & -0{,}2 \\ -0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix}; \quad |E-A|=\begin{vmatrix} 0{,}9 & -0{,}2 \\ -0{,}3 & 0{,}6 \end{vmatrix}=0{,}54-0{,}06=0{,}48 \neq 0;$$

$$T_{11}=0{,}6; \quad T_{12}=0{,}3; \quad T_{21}=0{,}2; \quad T_{22}=0{,}9;$$

$$(E-A)^{-1}=\frac{1}{0{,}48}\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}9 \end{pmatrix};$$

$$(E-A)(E-A)^{-1}=\frac{1}{0{,}48}\begin{pmatrix} 0{,}9 & -0{,}2 \\ -0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\frac{1}{0{,}48}\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\frac{1}{0{,}48}\begin{pmatrix} 1{,}8 \\ 3{,}3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{180}{48} \\ \frac{330}{48} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\frac{3}{4} \\ 6\frac{7}{8} \end{pmatrix}.$$

Шундай қилиб, биринчи тур маҳсулотдан $3\frac{3}{4}$, иккинчисидан–$6\frac{7}{8}$ бирлик ишлаб чиқарилади ҳамда мос равишда 2 ва 3 бирлик маҳсулот буюртмани бажаришга сарфланди.

5–§. Квадратик формалар

Кўпгина татбиқий масалаларни ечишда, жумладан, кўп аргументли функциялар учун шартсиз ёки шартли экстремум масалаларини ечишда (бу масалалар «Математик дастурлаш» фа–

нининг асосий масалаларидир), квадратик формалар ва уларнинг мусбат (манфий) аниқланганлиги мавзуларидан фойдаланилади.

Таъриф. n аргументли $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ квадратик форма деб ушбу

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\ , \quad a_{ij}=a_{ji}$$

кўринишдаги функцияга айтилади. Унда a_{ij} лар ҳақиқий сонлар бўлиб, $A=(a_{ij})$ матрица квадратик форманинг матрицаси дейилади, у $a_{ij}=a_{ji}$ бўлгани учун симметрик матрицадан иборат.

Квадратик формани вектор–матрицали кўринишда ҳам ёзиш мумкин:

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)=Q(x)=X'AX.$$

Тўлароқ, координаталарда ёзамиз:

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)=(x_1, x_2, \ldots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\ .$$

Мисол. Ушбу $Q(x_1,x_2)=2x_1^2+4x_1x_2-3x_2^2$ квадратик форма берилган. Уни вектор–матрицали кўринишда ёзилсин.

Аввал квадратик форманинг матрицасини топамиз. Унинг бош диагонали элементлари x_1^2 ва x_2^2 лар олдидаги коэффициентлардан иборат, яъни $a_{11}=2$, $a_{22}=-3$; ёрдамчи диагонал элементлари эса x_1x_2 олдидаги коэффициентнинг ярмидан иборат, яъни 4:2=2. Шундай қилиб,

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix},\quad Q(y_1, y_2)=(x_1, x_2)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Агар $C=(c_{ij})$ номахсус матрица бўлса, $X=CY$ алмаштириш натижаси қуйидагича бўлади:

$$Q=X'AX=(CY)A(CY)=(Y'C')A(CY)=Y'(C'AC)Y.$$

Демак, алмаштириш натижасида ҳосил бўлган квадратик форма матрицаси $A^*=C'AC$ кўринишда бўлади.

Мисол. $Q=2x_1^2+4x_1x_2-3x_2^2$; $x_1=y_1+y_2$, $x_2=-y_1+y_2$.

Ечиш. $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $|C|=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=2\neq0$, $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$;

$$A^*=C'AC=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}=5\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Шундай қилиб,

$$Q(y_1, y_2)=5(y_1, y_2)\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=5(-y_1+y_2,\ y_1+y_2)\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=$$

$$=5(-y_1^2+y_1y_2+y_1y_2+y_2^2).$$

Баъзи ҳолларда шундай C матрицани топиш мумкин бўладики, квадратик формада фақат ўзгарувчиларнинг квадратлари қатнашади.

Агар $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ квадратик формада барча a_{ij}, $i\neq j$ коэффициентлар нолга тенг бўлса, яъни

$$Q=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2$$

ҳол содир бўлса, квадратик форма **каноник кўринишга эга** дейилади.

Теорема. Ихтиёрий квадратик формани ўзгарувчиларни номахсус чизиқли алмаштириш ёрдамида **каноник** кўринишга келтириш мумкин.

Буни мисолда намойиш этамиз. Аввал кўрилган $Q=2x_1^2+4x_1x_2-3x_2^2$ квадратик формани оламиз. x_1^2 олдидаги коэффициент нолдан фарқли бўлгани учун x_1 бўйича тўлиқ квадратга келтирамиз:

$$Q=2(x_1^2+2x_1x_2)-3x_2^2=2(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-x_2^2)-3x_2^2=2(x_1+x_2)^2-5x_2^2$$

Агар $y_1=x_1+x_2$, $y_2=x_2$ десак, $Q=2y_1^2-5y_2^3$ –каноник кўриниш ҳосил бўлади. Иккинчи томондан, $x_1=y_1-y_2$, $x_2=y_2$ демак,

$$C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

–чизиқли алмаштириш матрицаси ҳосил бўлади.

Ундан

$$A^*=C'AC=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -5\end{pmatrix}.$$

Демак, $Q=(y_1, y_2)\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=(2y_1, -5y_2)\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=2y_1^2-5y_2^2.$

Агар $Q(x)=Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ квадратик форма барча $x\neq 0$ векторлар учун мусбат (манфий) бўлса, у ҳолда квадратик форма мусбат (манфий) аниқланган дейилади.

Теорема. Ушбу $Q=X'AX$ квадратик форма мусбат (манфий) аниқланган бўлиши учун А матрицанинг барча хос сонлари мусбат (манфий) бўлиши зарур ва етарли.

А матрицанинг хос сонлари деб $|A-\lambda E|=0$ тенгламанинг ечим–ларига айтилади.

Масалан, $Q=2x_1^2-2x_1x_2+3x_2^2$ квадратик форма мусбат аниқ–ланган. Ҳақиқатдан, $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0$;

$6-5\lambda+\lambda^2-1=0$; $\lambda^2-5\lambda+5=0$; $\lambda_{1,2}=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-5}=\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Кўринадики, $\lambda_1=\frac{5+\sqrt{5}}{2}>0$, $\lambda_2=\frac{5-\sqrt{5}}{2}>0$.

Зарурий ва етарли шарт сифатида Сильвестр шартларидан ҳам фойдаланиш мумкин: $\Delta_1>0$, $\Delta_2>0$, …, $\Delta_n>0$ (Δ_i–бош минорлар).

6–§. Алмашишнинг чизиқли модели

Иқтисодий жараёнларнинг математик моделига мисол си–фатида алмашишнинг чизиқли модели (ёки барибир, халқаро савдо модели) қаралиши мумкин.

Фараз этайлик, n та S_1, S_2, …, S_n мамлакатлар ўзаро савдо қиладилар. Бу мамлакатларнинг даромадлари мос равишда x_1, x_2, …, x_n бўлсин. S_j мамлакат S_i мамлакатдан сотиб оладиган товарга сарф этиладиган миллий даромад қисми a_{ij} дейлик. Миллий даромаднинг ҳаммаси мамлакат ичида товарларни сотиб олишга, ёки импорт товарларга сарф этилсин деб қараймиз, яъни

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}=1,\ (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Ушбу

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

матрица савдонинг структура матрицаси дейилади.

Ҳар бир S_i ($i=1$, 2, …, n) мамлакат учун ички ва ташқи сав–додан тушган тушум миқдори.

$$p_i=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+...+a_{in}x_n$$
формула билан аниқланади.

Агар савдодан тушган тушум миллий даромаддан кам бўлса, савдо **балансланган савдо** дейилади.

Кўрилаётган ҳолда $p_i \geq x_i$ (i=1, 2, …, n) тенгсизлик ўринли деб қаралади. Агар $p_i > x_i$ бўлса,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n > x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n > x_2, \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n > x_n \end{cases}$$

тенгсизликлар ўринли бўлади. Уларни мос равишда қўшиб, гуруҳласак,

$$x_1(a_{11}+a_{21}+...+a_{n1})+x_2(a_{12}+a_{22}+...+a_{n2})+...+x_n(a_{1n}+a_{2n}+...+a_{nn})>x_1+x_2+...+x_n$$

тенгсизлик келиб чиқади. Қавслар ичидаги ифодалар 1 га тенг, бу эса қарама–қаршиликка олиб келади. Демак, $p_i > x_i$ тенг–сизлик содир бўла олмайди. Унда $p_i=x_i$ бўлади. Бу ҳолда AX=X вектор–матрицали тенгламага келамиз. Равшанки, бунда хос сон 1 га тенг: $AX=1 \cdot X$. Демак, масала A матрицанинг 1 га тенг бўлган хос сонига мос хос векторини топишга келтирилди.

Мисол. Учта S_1, S_2, S_3 мамлакатларнинг структура матрицаси қуйидагича бўлсин:

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

Ҳар бир мамлакатнинг балансланган савдо учун миллий даромадлари миқдори нисбати топилсин.

Ечиш. $(A-E)X=0$ ёки

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$$

вектор–матрицали тенгламани ечамиз. Унинг ечими $x_1 = \frac{2}{3}c$, $x_2=2c$, $x_3=c$, яъни $X=(\frac{3}{2}c;\ 2c;\ c)$, бунда c=const. Демак, миллий даромадлар 3:4:2 нисбатда бўлмоғи лозим.

АДАБИЁТЛАР

1. Высшая математика для экономистов (коллектив авторов: проф. Н.Ш.Кремер и др.). Москва, «Банки и биржи», изд–е объединение «Юнити», 1997.

2. Головина Л.И. «Линейная алгебра и некоторые её приложения». Москва, «Наука», 1985.

3. Насритдинов Г.Н. Математик экономика элементлари. Тошкент, «Ўқитувчи», 1984.

3–БОБ. ТЕКИСЛИКДА ТЎҒРИ ЧИЗИҚ, ЭГРИ ЧИЗИҚ. АЙЛАНА, ЭЛЛИПС, ГИПЕРБОЛА ВА ПАРАБОЛА

1–§. Текисликда тўғри чизиқ тенгламаси

Текисликда тўғри чизиқнинг турли кўринишда ёзиладиган тенгламалари мавжуд. Улар қуйидагилардан иборат:

1°. $Ax+Bx+C=0$–тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси.

2°. $y=kx+b$–тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламаси.

3°. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ –тўғри чизиқнинг кесмалар бўйича тенгламаси.

4°. $x\cos\alpha+y\cos\beta\pm d=0$–тўғри чизиқнинг нормал тенгламаси.

5°. $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ –икки $(x_1,\ y_1)$ ва $(x_2,\ y_2)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси.

6°. $y-y_1=k(x-x_1)$–берилган $(x_1,\ y_1)$нуқтадан ўтувчи ва бурчак коэффициенти k бўлган тўғри чизиқ тенгламаси.

Мазкур тенгламалардан 1°, 2°, 5° ва 6° лари мактаб математикасида учрайди. 3°–тенгламада a ва b лар тўғри чизиқнинг абсцисса ва ордината ўқларидан кесган кесмаларини англатади. 4°–тенгламада $\cos\alpha$ ва $\cos\beta$ лар тўғри чизиқнинг йўналтирувчи косинуслари деб аталади. Уларда α ва β бурчаклар тўғри чизиқнинг абсцисса ва ордината ўқлари билан ташкил этган бурчаклари. d сон эса координата бошидан тўғри чизиққача бўлган масофани англатади. Шу тенгламани умумий тенгламадан келтириб чиқариш мумкин:

$$Ax+By+C=0,\quad \sqrt{A^2+B^2}\neq 0;$$

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0;$$

$$\cos\alpha=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\quad \sin\alpha=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}},\quad \mathrm{tg}\alpha=\frac{B}{A};$$

$$\alpha+\beta=90°;\quad \beta=90°-\alpha;\quad \sin\alpha=\cos\beta.$$

Агар $c>0$ бўлса, 4°–да $+d$, $c<0$ бўлса, 4°–да $-d$ олинади.

2–§. Тўғри чизиқларнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартлари

Агар икки тўғри чизиқ 2° кўринишдаги тенгламалар

$$y=k_1x+b_1 \qquad (1)$$

$$y=k_2x+b_2 \qquad (2)$$

билан берилган бўлса, (1) билан (2) тўғри чизиқ орасидаги бурчак қуйидаги формула ёрдамида топилади:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\overleftarrow{k_2-k_1}}{1+k_1k_2}$$

Бу формуладаги стрелка (1) тўғри чизиқни соат стрелкасига қарши (мусбат) йўналишда (2) тўғри чизиқ билан устма-уст тушгунча буришдан ҳосил бўлган бурчакни олиш лозимлигини англатади.

Агар $k_1=k_2$ бўлса, (1) ва (2) тўғри чизиқлар параллел, $k_1\cdot k_2=-1$ бўлганда эса, улар перпендикуляр бўлади. Шундай қилиб, икки тўғри чизиқ параллел бўлиши учун уларнинг бурчак коэффициентлари тенг бўлиши зарур ва етарли; перпендикуляр бўлиши учун эса бурчак коэффициентлари эса ўзаро тескари бўлиши ва тескари ишора билан олиниши зарур ва етарли.

Агар тўғри чизиқлар умумий тенгламалари билан берилган бўлса, унда $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ ларга кўра параллеллик шарти ўзгарувчилар олдидаги коэффициентларининг пропорционаллигидан иборат, яъни

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}.$$

Уларнинг перпендикулярлик шарти $A_1A_2+B_1B_2=0$ кўринишга эга бўлади.

Агар тўғри чизиқлар параллел бўлмаса, улар албатта кесишади. Кесишиш нуқтасини топиш учун уларнинг тенгламаларидан тузилган системани ечиш лозим.

Агар тўғри чизиқ ва унда ётмайдиган (x_0, y_0) нуқта берилган бўлса, шу (x_0, y_0) нуқтадан $Ax+By+C=0$ тўғри чизиққача бўлган d масофа қуйидаги формула билан топилади:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Агар $(x_0, y_0)=(0, 0)$ бўлса, $d=\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ бўлади.

3–§. Айлана ва эллипс

Аввалги бандда кўрдикки, текисликда икки номаълумли битта чизиқли тенглама тўғри чизиқни тавсифлайди. Агар икки номаълумли тенглама чизиқли бўлмаса, у текисликда бирор эгри чизиқни тавсифлаши мумкин. Масалан, $x^2+y^2-1=0$ –айланани, $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ –эллипсни, $y=2x^2$–параболани, $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ –гиперболани тавсифлайди. Яна $y=3x^2$ –кубик параболани, $y=4x^{2001}$ –юқори тартибли кубик параболани, $y=5x^{2000}$ –юқори тартибли параболани англатади. Аммо $x^2+y^2+1=0$ тенглама текисликда бўш тўпламни англатади, чунки уни тўғри тенгликка айлантирадиган битта ҳам ечим мавжуд эмас.

Икки номаълумли иккинчи тартибли тенгламалар билан тавсифланадиган чизиқлар иккинчи тартибли эгри чизиқлар дейилади. Уларнинг тенгламаси умумий кўринишда қуйидагича ёзилади:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$

унда $A^2+B^2+C^2\neq0$ (яъни A, B, C лар бир вақтда нолга тенг эмас).

Шу тенглама коэффициентлари қийматларига қараб бўш тўпламни, биттагина нуқтани, айланани, эллипсни, гиперболани ва, ниҳоят, параболани тавсифлаши мумкин.

Агар $A>0$, $B=0$, $C>0$, $D=E=0$, $F>0$ бўлса, $Ax^2+Cy^2+F=0$ тенглама бўш тўпламни, $A=C$, $B=2A$, $D=E=F=0$ бўлса $A(x+y)^2=0$ тенглама $x+y=0$ га кўра тўғри чизиқни англатади. Бизга қизиғи умумий тенглама эллипс (хусусан, айлана), гипербола ва параболани тавсифлайдиган ҳоллар.

Аввал айланани кўрайлик. Айлана текисликда берилган (x_0, y_0) нуқтадан R га тенг бўлган масофада жойлашган нуқталарнинг геометрик ўрнидир. Ўша масофа $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=R$ каби ёзилади. Ундан $(x\ x_0)^2+(y\ y_0)^2=R^2$ келиб чиқади. Бу маркази (x_0, y_0) нуқтада, радиуси R бўлган айлана тенгламасидир. Уни айлананинг нормал тенгламаси дейилади.

Умумий тенгламада $B=0$, $A=C$ бўлсин. Унда тенгламани қуйидаги кўринишга келтириш мумкин:

$$\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2A}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2}.$$

Агар $D^2+E^2-4AF>0$ бўлса, биз маркази $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2A}\right)$ нуқтада, радиуси $\sqrt{\frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2}}$ бўлган айланага эгамиз.

Мисол сифатида $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ тенгламани олайлик. Унда, равшанки, $B=0$; $A=C=1$. Энди тўлиқ квадратлар ажратамиз:

$$(x^2-2x+1-1)+(y^2+4y+4-4)+1=0,$$
$$(x-1)^2+(y+2)^2=4.$$

Демак, биз маркази (1; –2) нуқтада, радиуси 2 га тенг бўлган айланага эгамиз.

Агар умумий тенгламада $B=0$, аммо $A\neq C$, $A^2+B^2+C^2\neq 0$ бўлса, тенгламада яна тўлиқ квадратлар ажратиб, уни ушбу

$$A\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+C\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2=\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}-F \qquad (1)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Аниқлик учун $A>0$, $C>0$ бўлсин. $\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}-F=\delta$ дейлик. Шу δ миқдор учун уч ҳол юз беради:

а) $\delta<0$; *б*) $\delta=0$; *в*) $\delta>0$.

Равшанки, <0 бўлганда охирги тенглама бўш тўпламни, $=0$ бўлганда эса фақат битта нуқтани тавсифлайди. Шу сабабли >0 ҳол қизиқроқ. Бу ҳолда тенглама ушбу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

кўринишга келади, унда $a=\sqrt{\frac{\delta}{A}}$, $b=\sqrt{\frac{\delta}{C}}$. Агар $a=b$ бўлса, бу тенглама айлана тенгламасига айланади. Охирги тенглама эллипснинг каноник тенгламаси дейилади, унда a ва b лар унинг ярим ўқлари дейилади. Унда $c=\sqrt{a^2-b^2}$, $a>b$ дейилса, $F_1(c; 0)$ ва $F_2(c; 0)$ эллипснинг фокуслари, $A_1(a; 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(b; 0)$, $B_2(b; 0)$ нуқталар унинг учлари деб аталади.

Эллипснинг ихтиёрий $M(x, y)$ нуқтасидан унинг фокусларигача бўлган масофалар йиғиндиси ўзгармас ва $2a$ га тенг, яъни

$$F_1M+F_2M=2a, \quad d=F_1M+F_2M.$$

Ушбу $\varepsilon=\frac{c}{d}$ миқдор эллипснинг эксцентриситети деёилади ва $0\le\varepsilon\le1$. Айлана учун $\varepsilon=0$.

4–§. Гипербола ва парабола

Агар (1) тенгламада (1–§га қаранг) $A\cdot C<0$ бўлса, унда бу тенглама тавсифлайдиган эгри чизиқ гипербола дейилади. Унда ҳам уч ҳол юз беради: 1) $\delta<0$; 2) $\delta=0$; 3) $\delta>0$.

Аввал $\delta>0$ бўлсин. Унда гиперболанинг каноник тенгламасига келамиз:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

бунда $a=\sqrt{\frac{\delta}{A}}$ –ҳақиқий ўқ, $b=\sqrt{\frac{\delta}{-C}}$ –мавҳум ўқ. Агар $c=\sqrt{a^2+b^2}$ десак, $F_1(-c;\ 0)$, $F_2(c;\ 0)$ –гиперболанинг фокуслари, $\varepsilon=\frac{c}{a}$ –эксцентриситети ($\varepsilon>1$), $A_1(a;\ 0)$, $A_2(-a;\ 0)$ –учлари дейилади.

Кўрсатиш мумкинки, гиперболанинг ихтиёрий $M(x,\ y)$ нуқтасидан унинг фокусларигача бўлган масофалар айирмаси модули ўзгармас ва $2a$ га тенг: $d=|F_2M-F_1M|=2a$.

Агар $\delta=0$ бўлса, биз иккита ўзаро кесишувчи тўғри чизиқларни ҳосил қиламиз; уларнинг тенгламаларини ёзамиз:

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0, \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0.$$

Ниҳоят, $\delta<0$ бўлганда $\delta>0$ бўлгандаги гиперболага қўшма гипербола ҳосил бўлади. Унда

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1, \quad a=\sqrt{\frac{\delta}{-A}}, \quad b=\sqrt{\frac{\delta}{C}}.$$

Гипербола учун ушбу $y=\pm\frac{b}{a}x$ тўғри чизиқлар асимптота вазифасини бажаради.

Энди $y=\frac{k}{x}$ –тескари пропорционаллик муносабатини кўрайлик. Янги ўқлар сифатида координата бурчакларининг биссектрисаларини оламиз:

$$x=r\cos(45°+\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2}}(r\cos\alpha-r\sin\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y');$$

$$y=r\sin(45^\circ+\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2}}(r\cos\alpha+r\sin\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y').$$

Бундан $\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')=k$ келиб чиқади. Бу эса $(x')^2-(y')^2=4k$ гиперболанинг тенгламасидир.

Ушбу

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}$$

каср–чизиқли функцияни кўрайлик, унда $c\neq0$, $bc-ad\neq0$. Бу ҳолда шу функцияни

$$y=\frac{a}{c}+\frac{(bc-ad)}{c\cdot\left(x+\frac{d}{c}\right)}$$

кўринишга келтириш мумкин. Агар $x+\frac{d}{c}=x'$, $y-\frac{a}{c}=y'$ деб белгиласак, янги координаталарга нисбатан $y'=\frac{k}{x'}$ –тескари пропорционаллик муносабати келиб чиқади. Бундан каср–чизиқли функция $c\neq0$, $bc-ad\neq0$ бўлганда гиперболани тафсифлаши келиб чиқади.

Умумий тенгламада $B=0$, $A=0$, $C\neq0$, $D\neq0$ бўлсин:

$$Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

Бу тенгламани ушбу

$$C\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2=-Dx-F+\frac{E^2}{4C}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Агар $x_0=-\frac{F}{D}+\frac{E^2}{4DC}$, $y_0=-\frac{E}{2C}$, $2p=-\frac{D}{C}$ белгилашларни киритсак, биз қуйидаги тенгламага келамиз:

$$(y-y_0)^2=2p(x-x_0).$$

Шу тенглама билан тафсифланадиган эгри чизиқ парабола дейилади, унда (x_0, y_0) нуқта параболанинг учидан иборат. p– параболанинг параметри бўлиб, $p>0$ бўлганда унинг шохчалари ўнгга, $p<0$ бўлганда эса –чапга қараган бўлади. $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ –параболанинг фокуси, $x=-\frac{p}{2}$ тўғри чизиқ эса, унинг директрисаси дейилади.

Параболанинг ихтиёрий $M(x,y)$ нуқтасидан унинг фокуси-гача бўлган масофа $d=x+\frac{p}{2}$, шу билан бирга унинг директрисасигача бўлган масофа ҳам $x+\frac{p}{2}$ га тенг, шундай қилиб, парабола берилган нуқтадан (фокусдан) ва берилган тўғри чизиқдан (директрисадан) тенг узоқликда жойлашган нуқталар-нинг геометрик ўрнидан иборат.

Эслатиб ўтамизки, квадрат учҳад $y=ax^2+bx+c$ ҳам текисликда параболани тавсифлайди, аммо унда шохчалари ё юқорига ($a>0$), ёки пастга ($a<0$) қараган бўлади.

5-§.Фазода тўғри чизиқ ва текислик тенгламалари ҳақида

Берилган $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтадан ўтувчи ва $\overline{n}=(A, B, C)$ векторга перпендкуляр текислик тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Текисликнинг умумий тенгламаси $Ax+By+Cz+D=0$ кўринишда ёзилади, $\overline{n}=(A, B, C)$ вектор унинг нормали дейилади.

Иккита текислик берилган бўлсин:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Уларнинг параллеллик шарти $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$, перпендикулярлик шарти эса, $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

Юқоридаги икки текисликнинг кесишиш чизиғи тўғри чизиқдан иборат. Агар шу тўғри чизиқ (x_1, y_1, z_1) нуқтадан ўтса, (m, n, p) эса йўналтирувчи вектори бўлса, унинг тенгламаси ушбу

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$$

кўринишда ёзилади.

АДАБИЁТЛАР

1. Высшая математика для экономистов (коллектив авторов под редакцией проф. Н. Ш. Кремера). Москва «Банки и биржи», Издательское объединение «ЮНИТИ», 1997 г.

2. Карасев А.И., Аксютина З.М., Савельева Т.И. Курс высшей математики для экономических вузов. – Москва, Высшая школа, 1982 г. – ч. 1 и 2.

3. Руководство к решению задач с экономическим содержанием по курсу высшей математики (под редакцией А.И.Карасева и Н.Ш.Кремер, Москва, «Экономическое образование», 1989 г.)

4–БОБ. ФУНКЦИЯ ТУШУНЧАСИ. АСОСИЙ ЭЛЕМЕНТАР ФУНКЦИЯЛАР. ИҚТИСОДИЁТДА ҚЎЛЛАНИЛАДИГАН ФУНКЦИЯЛАР ҲАҚИДА. КЕТМА–КЕТЛИКЛАР. ФУНКЦИЯНИНГ УЗЛУКСИЗЛИГИ

1–§. Функция тушунчаси. Функциянинг берилиш усуллари

Функция тушунчасини киритишда тўплам тушунчасидан фойдаланилади.

Тўплам дейилганда бирор объектларнинг мажмуаси тушунилади. Тўпламни ташкил этувчи объектлар унинг элементлари ёки нуқталари дейилади. Бирор институт талабалари тўплами, натурал сонлар тўплами, (a,b) интервалга тегишли бутун сонлар тўплами ва бошқалар тўпламга мисол бўла олади. Агар a бирор A тўпламнинг элементи бўлса, a A, акс ҳолда a A деб ёзилади. Агар тўпламнинг бирорта ҳам элементи бўлмаса, уни бўш тўплам дейилади ва белги билан ифодаланади.

Икки A ва B тўпламининг бирлашмаси (йиғиндиси) деб шундай элементлар тўпламига айтиладики, уларнинг ҳар бири ҳеч бўлмаса A ва B лардан бирортасига тегишли бўлади: $C=A\ \ B$.

Икки A ва B тўпламнинг кесишмаси (умумий қисми) деб шундай элементлар тўпламига айтиладики, улар ҳар икки A ва B тўпламга тегишли бўлади: $D=A\cap B$.

Икки A ва B тўпламнинг айирмаси деб шундай E тўпламга айтиладики, унинг элементлари A тўпламга тегишли, аммо B тўпламга тегишли бўлмайди: $E=A\backslash B$.

Элементлари сонлардан ташкил бўлган тўпламлар сонли тўпламлар дейилади. Мактаб математика курсидан маълумки,

R–ҳақиқий сонлар тўплами,

Q–рационал сонлар тўплами,

Z–бутун сонлар тўплами,

N–натурал сонлар тўплами,

I–иррационал сонлар тўплами.

Бу тўпламлар орасида қуйидаги муносабатлар ўринли:

$N\subset Z\subset Q\subset R$, $I\subset R$ ва $R=Q\cup I$;

$X=\{x: a\le x\le b\}$–кесма (ёки сегмент),

$X_1=\{x: a<x<b\}$–интервал,

$X_2=\{x: a\le x<b\}$, $X_3=\{x: a<x\le b\}$–ярим интервал,

$X_4=(-\infty,b)$, $X_5=(a,+\infty)$, $X_6=(-\infty,+\infty)$, $X_7=(-\infty,b]$,

$X_8=[a,+\infty)$.

Кейинги мулоҳазаларда санаб ўтилган тўпламларнинг ҳам-масини битта умумий X оралиғи деб юритамиз.

Ўзгармас сон деб фақат битта қийматни сақлаб турувчи миқдорга айтилади. Агар миқдор бирор жараён шароитида ўзгармас бўлиб қолса, уни параметр дейилади. Турли сон қий-матларни қабул қила оладиган миқдор ўзгарувчи деб аталади.

Энди функция таърифига ўтамиз.

Таъриф. Агар X тўпламдан олинган ҳар бир x, $x\in X$, эле-ментга Y тўпламдан олинган битта y, $y\in Y$, элемент бирор қонун ёки қоида ёрдамида мос келса, у ҳолда X тўпламда $y=f(x)$ функция берилган дейилади.

Унда x–эркли ўзгарувчи, y–эрксиз ўзгарувчи деб юритила-ди, f эса мослик қонуни ёки қоидасини англатади.

X–функциянинг берилиш (аниқланиш) соҳаси, Y–функ-циянинг қийматлар соҳаси. Агар X тўплам ҳақида ҳеч нима дейилмаган бўлса, X тўплам дейилганда $f(x)$ функция учун ар-гумент x нинг жоиз қийматлар тўплами тушунилади.

Масалан, $y=e^x+\sqrt{5-x}$ функциянинг аниқланиш соҳаси $(-\infty,5]$, x маҳсулот миқдори бўлганда аниқланиш соҳаси $(-0,5]$, бўлади.

Функциялар асосан 4 та усул билан берилади:

1) Аналитик усул. Бунда функция битта ёки бир неча формула ёрдамида берилади.

Масалан, $y=e^x+\sqrt{5-x}$; $y=\begin{cases} x^2, x\le 0, \\ x-2, x>0. \end{cases}$.

2) График усул. Бунда функция текисликдаги графиги ёр-дамида берилади.

3) Жадвал усул. Бунда функция аргументининг қийматла-ри, уларга мос ордината қийматлари жадвали кўринишида бе-рилади. Бу усул иқтисодиётда учрайди. Масалан, турли йил-ларда у ёки бу иқтисодий кўрсаткич қийматлари.

4) Сўз билан берилиш усули. Масалан,

$$f(x)=\begin{cases} 1, \text{агар x -рац.} \\ 0, \text{ агар x -иррац.} \end{cases} \text{бўлса.}$$

2–§. Функцияларнинг асосий хоссалари. Элементар функциялар

Функцияларнинг асосий хоссалари қуйидагилардан иборат:

1. Жуфт ва тоқлиги.

$f(-x) \equiv f(x)$ – функция жуфт,

$f(-x) \equiv -f(x)$ – функция тоқ.

2. Монотонлиги. Агар $x_1<x_2$, $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ бўлганда $f(x_1)<f(x_2)$ бўлса, $y=f(x)$ функция X оралиқда ўсувчи, $f(x_1)>f(x_2)$ бўлса, – камаювчи дейилади. Шу ҳолларда $y=f(x)$ функция монотон (аниқроғи, қатъий монотон) деб юритилади.

3. Чегараланганлик. Агар шундай $M>0$ сон мавжуд бўлсаки, $|f(x)| \leq M, \forall x \in X$, тенгсизлик ўринли бўлса, $y=f(x)$ функция X оралиқда <u>чегараланган</u> дейилади.

4. Даврийлик. Агар бирор $T \neq 0$ учун $x \in X, (x+T) \in X$ бўлганда ушбу

$$f(x+T)=f(x)$$

тенглик ўринли бўлса, y $f(x)$ функция T даврли <u>даврий функция</u> дейилади. T даврлар ичида энг кичик мусбат қиймат энг кичик мусбат давр дейилади. Одатда, қисқача давр дейилганда энг кичик мусбат давр тушунилади. $y=\sin x$ функция учун $T=2\pi$.

Энди y $f(x)$, $x \in X, y \in Y$ функция берилган бўлсин. Агар y, $y \in Y$, нинг ҳар бир қийматига $x, x \in X$, нинг биттагина қиймати мос келса, Yда аниқланган $x=\varphi(y)$ функция берилган y $f(x)$ функцияга <u>тескари функция</u> дейилади ва эски белгилашлар ёрдамида $x=\varphi(x)=f^{-1}(x)$ каби ёзилади. Масалан, $y=e^x$ функцияга тескари функция $x=\ln y$, яъни $y=\ln x$, бўлади.

Ихтиёрий қатъий монотон функция учун тескари функция мавжудлигини исботлаш мумкин.

Мураккаб функция тушунчасини ҳам киритамиз. Бизга $y=f(u)$, $u \in U$, $y \in Y$ функция берилган бўлсин. Шу билан бирга $u=\varphi(x), x \in X, u \in U$ функция ҳам берилган бўлсин. Унда $y=f(\varphi(x))$ <u>мураккаб функция</u> дейилади. Масалан, $y=e^{3x}$ мураккаб функция, чунки уни $y=e^u$, $u=3x$ деб ёзиш мумкин.

Асосий <u>элементар функциялар</u> қуйидагилардан иборат:

1) $y=x^{n}$, $n\in N$; 2) $y=x^{n}$, $n\in N$; 3) $y=\sqrt[n]{x}$, $n\in N$, $n>1$; 4) $y=a^{x}$, $(a>0,\ a\neq 1)$;

5) $y=\log_a x$, $(a>0,\ a\neq 1)$; 6) $y=\sin x$; 7) $y=\cos x$; 8) $y=\mathrm{tg}\,x$; $\cos x\neq 0$;

9) $y=\mathrm{ctg}\,x$, $\sin x\neq 0$; 10) $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\mathrm{arctg}\,x$, $y=\mathrm{arcctg}\,x$.

Асосий элементар функциялар ёрдамида янги функциялар икки усул билан ҳосил қилинади: *а*) алгебраик амаллар ёрдамида; *б*) мураккаб функцияни ҳосил қилиш ёрдамида.

Таъриф. Асосий элементар функциядан чекли сондаги алгебраик амаллар ва чекли сондаги мураккаб функция ҳосил қилиш амали ёрдамида ҳосил қилинадиган функциялар элементлар функциялар дейилади.

Масалан, ушбу

$$y=\sqrt{\sin^2 x+5}+\frac{\lg x-e^{2x}}{\sqrt{3}x+2^{3x^2}}$$

функция элементар функциядир. Аммо $y=|x|$, $y=[x]$ (x нинг бутун қисми – антье) функциялар ноэлементар функциялардир.

Элементар функциялар <u>алгебраик</u> ва <u>ноалгебраик</u> (<u>трансцендент</u>) функцияларга бўлинади.

<u>Алгебраик функция</u> деб аргументи устида чекли сонда алгебраик амаллар бажарилган функцияга айтилади. Бундай функцияларга қуйидагилар киради:

1) бутун рационал функция (кўпҳад ёки полином):

$$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+_{an-1}x+a_n;$$

2) каср–рационал функция–икки кўпҳад нисбати;

3) иррационал функция (аргументдан илдиз чиқариш амали бор булганда).

Ҳар бир ноалгебрик функция трансцендент функция дейилади. Трансцендент функцияларга кўрсаткичли, логарифмик, тригонометрик, тескари тригонометрик функциялар киради.

3–§. Иқтисодиётда қўлланиладиган функциялар ҳақида

Функциялар иқтисодиётда кенг қўлланилади.

1) $y=e^{\eta t}$, $\eta>0$ демографияда қўлланиладиган, <u>Мальтус функцияси</u> деб аталадиган функция;

2) $y=f(k)$ –<u>ўртача меҳнат унумдорлиги</u>, k–<u>қуролланганлик</u>;

3) <u>талаб функцияси</u>: *а*) $y=kx+b$, $k<0$; *б*) $y=\frac{a}{x}+b$, $a>0$;

4) <u>таклиф функцияси</u>: *а*) $y=kx+b$, $k>0$; *б*) $y=a\sqrt{x}+b$, $a>0$;

5) <u>ишлаб чиқариш функцияси</u>;

6) турли товарларга бўлган талабнинг даромадга боғлиқлиги функцияси (Торнквист Л. функциялари).

Битта координата системасида нархга нисбатан талаб ва таклиф функцияларини кўрилса, уларнинг кесишиш нуқтаси эгар нуқтаси (товар реализация бўладиган ҳол). Унинг абсцис–саси эса мувозанат нархи бўлади.

4–§. Сонли кетма–кетликлар ва уларнинг лимити

Таъриф. Агар ҳар бир натурал сон n га бирор қоида ёки қонун ёрдамида фақат битта a_n сон мос қўйилган бўлса, унда $\{a_n\}$ сонли кетма–кетлик берилган дейилади ва у қуйидагича ёзилади:

$$\{a_n\}: a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

Бошқача айтганда, сонли кетма–кетлик натурал аргументли функциядир: $a_n=f(n)$ Унда $a_1, a_2, \ldots, a_n$ сонлар кетма–кетлик ҳад–лари дейилади.

Мисоллар:

1) $2, 4, 8, \ldots, 2n, \ldots;$

2) $1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots;$

3) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n};$

4) $0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right), \ldots .$

Таъриф. Берилган $\{a_n\}$ кетма–кетлик ва A сон учун ихтиёрий (хоҳлаганча кичик мусбат) сон $\varepsilon>0$ берилганда ҳам шундай N ($N=N(\varepsilon)$) номер топилсаки, $n>N$ бўлганда.

$$|a_n-A|<\varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлса A сон $\{a_n\}$ кетма–кетликнинг лимити дейилади ва $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$ кўринишда ёзилади.

Лимитга эга бўлган кетма–кетлик яқинлашувчи, акс ҳолда, –узоқлашувчи дейилади.

Мисол. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)=1$ эканини исботлаймиз. Унда $A=1$,

$\left|1+\frac{(-1)^n}{n}-1\right|<\varepsilon$ дан $\frac{1}{n}<\varepsilon \Rightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}$ келиб чиқади.

$\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ (бутун қисм) деб олинса, $n>N$ бўлганда
ажарилади.

5–§. Функциянинг лимити

Агар $y=f(x)$ функция ва A сон учун ҳар қандай
>0 берилганда ҳам шундай мусбат $\delta>0$, ($\delta=\delta($
гумент x нинг x_0 га тенг бўлмаган ҳамда ушб

$$|x-x_0|<\delta$$

қаноатлантирадиган барча қийматлари учун

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

жарилса, A сон $y=f(x)$ функциянинг аргумент
даги лимити дейилади ва $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ каби ёзил

рувчи x нинг x_0 га ундан кичик бўлиб ($x<x_0$
имит қаралса, унда функциянинг чап лимит
мумкин. Агар ўша лимит мавжуд бўлса,
$=A$, ($\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$ –ўнг лимит) каби ёзилади.

. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+2}{x-1}=-2$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+1)^2}{x^2+1}=2$.

Агар $y=f(x)$ функция ва A сон учун ихтиёрий
>0 берилганда ҳам шундай мусбат сон $S>0$
нинг $|x|>S$ тенгсизликни қаноатлантирадиган
учун $|f(x)-A|<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, A сон
қ ишорали чексизга) интилгандаги лимити де
каби ёзилади.

ъриф $n\to\infty$ да $f(n)$ нинг лимитига ҳам таалл

. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$;

$\frac{+x}{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}+(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}-(\sqrt{x})^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{\sqrt{x}}+1}{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}=-1.$

6–§. Лимитлар ҳақида асосий теоремалар

Фараз қилайлик $y=f(x)$ ва $y=\varphi(x)$ функциялар учун қуйидаги лимитлар ўринли бўлсин: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)=B$ ($x\to\infty$ бўлган ҳолда ҳам). Лимитлар ҳақидаги асосий теоремаларни исботсиз келтирамиз:

1. Функция биттадан ортиқ лимитта эга бўла олмайди.

2. Чекли сондаги функцияларнинг алгебраик йиғиндиси лимити шу функциялар лимитининг алгебраик йиғиндисига тенг, яъни

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)+\varphi(x)]=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} \varphi(x)=A+B;\ \lim_{x\to x_0} (cf(x))=c\lim_{x\to x_0} f(x).$$

3. Икки функция кўпайтмасининг лимити шу функциялар лимитининг кўпайтмасига тенг:

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)\varphi(x)]=A\cdot B.$$

4. Икки функциянинг нисбати лимити шу функциялар лимитининг нисбатига тенг, яъни

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)}=\frac{A}{B},\ B\neq 0.$$

5. Агар $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)=u_0$ бўлса, $\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=A$ бўлади.

6. Агар x_0 нуқтанинг бирор атрофида (яъни $O_\varepsilon(x_0)=\{x: |x-x_0|<\varepsilon\}$, $f(x)<\varphi(x)$) бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\leq \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)$ тенгсизлик ўринли бўлади.

Теорема . Агар $\{a_n\}$ кетма–кетлик монотон ва чегараланган бўлса, унда шу кетма–кетлик лимитига эга бўлади.

Теорема. Агар x_0 нуқтанинг бирор $O_\varepsilon(x_0)$ атрофида

$$\varphi(x)<f(x)<\psi(x)$$

бўлиб, $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} \psi(x)=A$ бўлса, унда $\lim\limits_{u\to u_0} f(x)=A$ бўлади.

7–§. Ажойиб лимитлар

1. Ушбу

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

лимит биринчи ажойиб лимит дейилади.

2. Ушбу

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,\ e\approx 2{,}718281\ldots \text{ (иррац. сон)}$$

лимит иккинчи ажойиб лимит дейилади.

Биз яна иккита муҳим лимитни келтирамиз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x}=\mu.$$

8–§. Процентларнинг узлуксиз қўшилиши ҳақида масала

Банкка Q_0 сўм омонат қўйилади. Унга ҳар йили $p\%$ қўшилиб туради. t йилдан кейин омонат неча сўмга етади?

Ечиш. Бир йилдан кейин омонат $Q_1=Q_0+Q_0\cdot\frac{p}{100}=Q_0\left(1+\frac{p}{100}\right)$ сўм бўлади. Икки йилдан кейин эса,

$$Q_2= Q_0\left(1+\frac{p}{100}\right)+Q_0\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\frac{p}{100}=Q_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 \text{ сўмга етади.}$$

Энди t йилдан кейинги омонатни ҳисоблаш мумкин:

$$Q_t= Q_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^t \text{ сўм.}$$

Агар омонатга процентларни бир йилда n марта қўшиб турилса, кейинги омонат миқдори

$$Q_t= Q_0\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt} \text{ сўм}$$

бўлади. Бундан $n\to\infty$ да $Q_t=Q_0e^{\frac{pt}{100}}$ келиб чиқади.

Энди аниқ ҳолни кўрайлик: дастлаб банкка 10% лик қилиб 6 млн сўм қўйилган бўлсин. 5 йилдан кейин омонат қанча бўлишини ҳисоблайлик.

$$Q_5=6\cdot\left(1+\tfrac{10}{100}\right)^5=6\cdot\left(1+\tfrac{1}{10}\right)^5=6\cdot\tfrac{11^5}{10^5}\approx 16{,}1 \text{ млн.сўм}$$

Агар ҳар 3 ойда процентлар қўшилиб турса, Q_5 ни ҳисоблаш учун $Q_5=6\cdot\left(1+\frac{10}{100\cdot 4}\right)^{5\cdot 4}=6\left(1+\frac{1}{40}\right)^{20}$ ни топиш керак.

9–§. Функциянинг узлуксизлиги

<u>Функциянинг узлуксизлиги</u> тушунчаси математик анализ–нинг асосий тушунчаларидан бири.

1–таъриф. Агар $y=f(x)$ функция қуйидаги 3 та:

1) x_0 нуқтада аниқланган (яъни $f(x_0)$ мавжуд);

2) $x \to x_0$ да чекли лимитга эга;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ шартни қаноатлантирса, $y=f(x)$ функция <u>x_0 нуқтада узлуксиз</u> дейилади.

2–таъриф. Агар $y=f(x)$ функция x_0 нуқтада аниқланган бў–либ, аргументнинг чексиз кичик орттирмасига функциянинг чексиз кичик орттирмаси мос келса, $y=f(x)$ функция x_0 нуқтада <u>узлуксиз дейилади</u>, яъни

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x_0 + \Delta x) - f(x) \right] = 0.$$

Агар $y=f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлмаса, у шу нуқтада <u>узлукли</u> дейилади, x_0 нуқта эса <u>узилиш нуқтаси</u> деб юритилади. Биринчи ва иккинчи тур узилиш нуқталари мав–жуд. Агар узилиш нуқтаси x_0 да $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$ айирма чекли бўлса, нуқтадаги узилиш биринчи тур, акс ҳолда–иккинчи тур <u>узилиш нуқтаси</u> дейилади.

10–§. Нуқтада ва кесмада узлуксиз функцияларнинг хоссалари

1. Агар $y=f(x)$ ва $y=\varphi(x)$ функциялар x_0 нуқтада узлуксиз бўлса, уларнинг йиғиндиси $y(x)+\varphi(x)$, кўпайтмаси $y(x)\cdot\varphi(x)$ ва нисбати $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} (\varphi(x_0) \neq 0)$ ҳам x_0 нуқтада узлуксиз бўлади.

2. Агар $y=f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлиб, $f(x_0)>0$ бўлса, x_0 нуқтанинг шундай атрофи $O_\delta(x_0)$ мавжудки, унда $f(x)>0$ бўлади.

3. Агар $y=f(u)$ функция u_0 нуқтада, $u=\varphi(x)$ функция эса x_0 нуқтада узлуксиз бўлса, мураккаб функция $y=f(\varphi(x))$ ҳам x_0 нуқтада узлуксиз бўлади.

Бу хосса $\lim\limits_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = f\left[\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)\right]$ кўринишда ёзилади.

Агар $y=f(x)$ функция X оралиқдаги ҳар бир нуқтада узлуксиз бўлса, у X оралиқда узлуксиз дейилади. Аксинча, агар $y=f(x)$ функция X оралиқда узлуксиз бўлса, унинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлади.

Барча элементар функциялар аниқланиш соҳаларида узлуксиздир.

Кесмада узлуксиз бўлган функцияларнинг хоссаларини келтирамиз:

1. Агар $y=f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлса, у ҳолда шу функция $[a, b]$ кесмада чегараланган бўлади.

2. Агар $y=f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлса, у шу кесмада ўзининг энг кичик қиймати m га ва энг катта қиймати M га эришади.

3. Агар $y=f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлиб, $f(a)*f(b)<0$ бўлса, у ҳолда шундай $\xi \in (a,b)$ нуқта мавжудки, $f(\xi)=0$ бўлади.

АДАБИЁТЛАР

1. Высшая математика для экономистов (под ред. проф. Н.Ш.Кремера). Москва, «Банки и биржи», Издательское объединение «ЮНИТИ», 1997.

2. Карасев А.И., Аксютина З.М., Савельева Т.И., Курс высшей математики для экономических вузов — М.:Высшая школа, 1982.–ч.1 и 2.

3. Масагутова Р.В. Математика в задачах для экономистов. Ташкент, «Ўқитувчи», 1996.

4. Руководство к решению задач с экономическим содержанием по курсу высшей математики. (под ред. А. И. Карасева и Н. Ш. Кремера. — М.: Экономическое образование, 1989.)

5. Азларов Т., Мансуров Х., Математик анализ, I (1994), II (1986), Тошкент, «Ўқитувчи».

5–БОБ. ҲОСИЛА

1–§. Ҳосиланинг таърифи. Функциянинг узлуксизлиги ва дифференциалланувчанлиги орасидаги боғланиш

Ҳосила тушунчаси математик анализнинг энг муҳим тушунчаларидан бири. Унинг татбиқлари доираси жуда кенг.

Бирор X тўпламда y=f(x) функция аниқланган ва $x_0 \in X$ бўлсин. Шу x_0 га бирор Δx орттирма берамиз, яъни $x_0+\Delta X$. Албатта, $(x_0+\Delta X) \in X$ бўлган ҳол кўрилади. Сўнгра $f(x_0)$ ва $f(x_0+\Delta x)$ ларни ҳисоблаймиз. Ушбу

$$\Delta f(x_0)=\Delta y= f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

айирма функция орттирмаси дейилади.

Таъриф. Агар ушбу

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

лимит мавжуд бўлса, уни y=f(x) функциядан x_0 нуқтада олинган ҳосиласи дейилади ва y', $f'(x_0)$, $\dfrac{dy}{dx}$ каби белгиланади.

Демак,

$$f'(x_0)= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Функциянинг бирор нуқтадаги ҳосиласини топиш уни дифференциаллаш дейилади. Агар функция бирор x_0 нуқтада чекли ҳосилага эга бўлса, унда функция шу нуқтада дифференциалланувчи дейилади. Агар функция бирор тўпламнинг ҳар бир нуқтасида дифференциалланувчи бўлса, унда функция тўпламда дифференциалланувчи дейилади.

Савол: функция узлуксиз бўлса, у дифференциалланувчи бўладими? Умуман, функция узлуксизлиги билан дифференциалланувчилиги орасида боғланиш бор. Бу боғланиш қуйидаги теорема билан ифодаланади.

Теорема. Агар $y=f(x)$, $x\in X$ функция $x_0\in X$ нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у шу нуқтада узлуксиз бўлади.

Аммо тескариси, умуман айтганда, тўғри эмас, яъни бирор нуқтада узлуксиз бўлган функция шу нуқтада дифференциалланувчи бўлиши шарт эмас. Масалан: $y=|x-a|$ функция $x=a$ нуқтада узлуксиз, чунки $\lim\limits_{x\to a}|x-a|=0$; аммо бу функция x=a нуқтада дифференциалланувчи эмас!

Шундай қилиб, функция бирор нуқтада дифференциалланувчи бўлиши учун унинг узлуксиз бўлиши зарур, аммо етарли эмас.

Математика тарихида узлуксиз, аммо бирор нуқтада ҳам дифференциалланувчи бўлмаган функциялар маълум. Аниқроғи шундай хоссага эга бўлган 4 та функция қурилган. Улардан 3 таси машҳур олимлар: Б.Л.Ван–дер–Варден, К.Вейерштрасс, Б.Больцано томонидан, 4–си эса 1982 йилда 10 синф ўқувчиси грузин Лаша Эмпремидзе томонидан яратилган ("Квант", 1982, №4).

2–§. Ҳосиланинг геометрик, физик ва иқтисодий маънолари

Ҳосиланинг геометрик маъноси: $y=f(x)$ эгри чизиқнинг (x_0, y_0) нуқтасида унга ўтказилган уринманинг (агар уринма мавжуд бўлса) бурчак коэффициенти. $f'(x_0)$ ҳосилани англатади. Шу (x_0, y_0) нуқтада ўтказилган уринма тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

Ҳосиланинг физик(механик) маъноси: йўл $s(t)$ дан вақт бўйича олинган ҳосила тезликни англатади: $s'(t_0)=v(t_0)$, тезлик $v(t)$ дан олинган ҳосила тезланишни англатади: $v'(t_0)=a(t_0)$.

Ҳосиланинг иқтисодий маъноси: ишлаб чиқарилган маҳсулот ҳажми $u(t)$ дан вақт бўйича олинган ҳосила шу моментдаги меҳнат унумдорлигини билдиради.

Ҳосиланинг бошқа иқтисодий маънолари ҳақида кейинроқ яна тўхталамиз.

3–§. Дифференциаллаш қоидалари

Дифференциаллаш қоидалари қуйидагилардан иборат:

1. Ўзгармас соннинг ҳосиласи нолга тенг, яъни $c'=0$.

2. Аргумент x нинг ҳосиласи 1 га тенг, яъни $x'=1$.

$u(x)$, $v(x)$ лар дифференциалланувчи функциялар бўлсин:

3. Чекли сондаги дифференциалланувчи функциялар йиғиндисининг ҳосиласи қўшилувчилар ҳосилалари йиқиндисига тенг, яъни

$$\left(\sum_{i=1}^{n} u_i(x)\right)' = \sum_{i=1}^{n} u_i'(x), \quad ((u+v)'=u'+v'$$

4. Иккита дифференциалланувчи функция кўпайтмаси ҳосиласи қуйидаги формула билан ҳисобланади:

$$(uv)'=u'v+v'u.$$

Натижалар: 1) $(cu)'=cu'$;

2) $(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'$.

5. Иккита дифференциалланувчи функция нисбатининг ҳосиласи қуйидагича ҳисобланади:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Мисоллар. 1) $f(x)=3x-\frac{1}{2}x^{-2}$; $\quad f'(x)=3+\frac{1}{x^3}$;

2) $f(x)=2xe^{-x}$; $f'x=2[e^{-x}-xe^{-x}]=2e^{-x}(1-x)$.

4-§. Элементар функцияларнинг, тескари ва мураккаб функцияларнинг ҳосиласи

1. $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$, $(\log_a u)'=\frac{1}{u\ln a}u'$;

2. $(a^x)'=a^x\ln a$, $(e^x)'=e^x$, $(a^u)'=a^u\ln a\cdot u'$;

3. $(x^n)'=nx^{n-1}$, $(u^n)'=nu^{n-1}\cdot u'$;

4. $y=[f(x)]^{\varphi(x)}$, $y=e^{\varphi(x)\ln f(x)}$,

$y'=e^{\varphi(x)\ln f(x)}\cdot[\varphi(x)\ln f(x)]'=[f(x)]^{\varphi(x)}\cdot[\varphi'(x)\ln f(x)+\varphi(x)\frac{f'(x)}{f(x)}]$

Эслатма. $y=\ln u(x)$–логарифмик функция, равшанки, $y'=\frac{u'(x)}{u(x)}$, буни логарифмик ҳосила дейилади ва иқтисодиётда кенг қўлланилади. $\frac{u'(x)}{u(x)}$ функцияни функция ўзгаришининг нисбий тезлиги ёки функциянинг ўзгариш суръати дейилади. Бундан функция эластиклиги тушунчасини келтиришда фойдаланилади.

5. $(\sin x)'=\cos x$, $\qquad (\sin u)'=\cos u\cdot u'$;

6. $(\cos x)'=-\sin x$, $\qquad (\cos u)'=-\sin u\cdot u'$;

7. $(\mathrm{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$, $\qquad (\mathrm{tg}u)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$;

8. $(\mathrm{ctg}x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$, $\qquad (\mathrm{ctg}u)'=-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$;

9. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\qquad (\arcsin u)'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

10. $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\qquad (\arccos u)'=-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

11. $(\mathrm{arctg}x)'=\frac{1}{1+x^2}$, $(\mathrm{arctg}u)'=\frac{u'}{1+u^2}$;

12. $(\mathrm{arcctg}x)'=-\frac{1}{1+x^2}$, $(\mathrm{arcctg}u)'=-\frac{u'}{1+u^2}$.

Мураккаб функциянинг ҳосиласи қуйидагича ҳисобланади:

$$y=f(u(x)),\ y_x'=f_u'\cdot u_x'.$$

Масалан, $y=e^{5x}$, $y'=e^{5x}\cdot(5x)'=5e^{5x}$.

Агар $y=f(x)$, $x\in X$ функция учун $f'(x)\neq 0$ бўлса,

$$x_y'=\frac{1}{y_x'}$$

формула ёрдамида тескари функция ҳосиласи ҳисобланади.

Масалан, $y=e^{5x}$, $x_y'=\frac{1}{y_x'}=\frac{1}{5e^{5x}}=\frac{1}{5}e^{-5x}$,

$$(5x=\ln y,\ x=\frac{1}{5}\ln y,\ x_y'=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{5e^{5x}}).$$

5–§. Ҳосиланинг иқтисодиётда қўлланилиши, функция эластиклиги

Ҳосила тушунчасидан иқтисодиётда кенг фойдаланилади. Ҳосила ёрдамида иқтисодий жараёнларни текширишда муҳим аҳамиятта эга бўладиган функция эластиклиги тушунчаси ки – ритилади.

$y=f(x)$ функция дифференциалланувчи бўлсин, унда

$\frac{\Delta y}{y}$ –функциянинг нисбий ўзгариши,

$\frac{\Delta x}{x}$ –аргументнинг нисбий ўзгаришини белгилаб, ушбу

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}\right)$$

лимитни ҳисоблаймиз. Агар у мавжуд бўлса, ўша лимитни $y=f(x)$ функциянинг эластиклиги дейилади ва

$$E_x(y)=\frac{x}{y}\cdot y'$$

каби белгиланади.

Шу формула ёрдамида элементар функцияларнинг эластиклигини ҳисоблаш мумкин.

Функция эластиклигининг баъзи муҳим хоссаларини ёзамиз:

1°. $E_{ax}(by)=E_x(y)$;

2°. $E_x(y)=\dfrac{1}{E_y(x)}$;

3°. $E_x(u\cdot v)=E_x(u)+E_x(v)$;

4°. $E_x\left(\dfrac{u}{v}\right)=E_x(u)-E_x(v)$;

5°. $E_x(u+v)=\dfrac{uE_x(u)+vE_x(v)}{u+v}$.

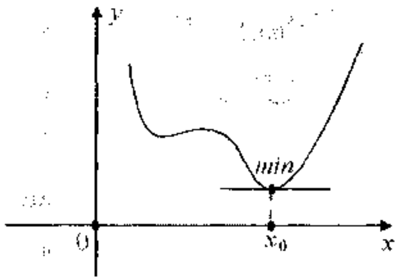
Элементар функцияларнинг эластиклиги:

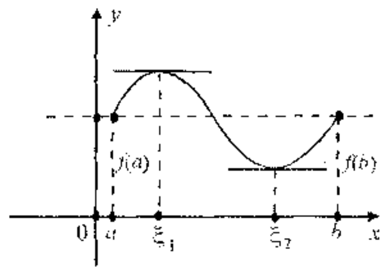
1. $E_x(x^{\alpha})=\alpha$;
2. $E_x(a^x)=x\ln a$, $E_x(e^x)=x$;
3. $E_x(ax+b)=\dfrac{ax}{ax+b}$;
4. $E_x(\sin x)=x\operatorname{ctg}x$;
5. $E_x(\cos x)=-x\operatorname{tg}x$;
6. $E_x(\operatorname{tg}x)=\dfrac{2x}{\sin 2x}$;
7. $E_x(\operatorname{ctg}x)=-\dfrac{2x}{\sin 2x}$;
8. $E_x(\arcsin x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$;
9. $E_x(\operatorname{arctg}x)=\dfrac{x}{(1+x^2)\operatorname{arctg}x}$.

6-§. Дифференциал ҳисобнинг асосий теоремалари

Қуйида биз дифференциал ҳисобнинг асосий теоремаларини келтирамиз (исботсиз), улар иқтисодий жараёнларни ўрганишда муҳим аҳамиятта эга.

Ферма теоремаси. Агар X тўпламда дифференциалланувчи бўлган $y=f(x)$ функция шу тўпламнинг ички нуқтасида ўзининг энг катта ёки энг кичик қийматига эришса, унда шу нуқтада функция ҳосиласи нолга тенг бўлади, яъни $f'(x_0)=0$.





Ролль теоремаси. $y=f(x)$ функция қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1) $[a, b]$ кесмада узлуксиз;

2) (a, b) интервалда дифференциалланувчи;

3) $f(a)=f(b)$.

У ҳолда кесма ичида камида битта шундай $\xi\in(a,b)$ нуқта топиладики, шу нуқтада $f'(\xi)=0$ бўлади.

Лагранж теоремаси. $y=f(x)$ функция қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1) $[a, b]$ кесмада узлуксиз;

2) (a, b) интервалда дифференциалланувчи.

У ҳолда кесма ичида камида битта шундай $\xi\in(a,b)$ нуқта топиладики, унда ушбу

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \quad (\text{ёки } f(b)-f(a)=(b-a)\,f'(\xi))$$

тенглик ўринли бўлади.

Ҳосила ёрдамида баъзи ҳолларда функциянинг лимити осонгина ҳисобланади.

Лопиталь қоидаси: агар $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ (ёки $\pm\infty$) ва $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ (ёки $\pm\infty$) бўлиб, $x=a$ да $f'(x)$ ва $\varphi'(x)$ ҳосилалар мавжуд бўлса, ушбу

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

тенглик ўринли.

Мисоллар: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1,$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln a}{1}=\ln a,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mu(1+x)^{\mu-1}}{1}=\mu.$$

7–§. Функциянинг экстремумлари ва экстремал қийматлари

Таъриф. Бирор X тўпламда аниқланган $y=f(x)$ функциянинг шу тўпламдаги <u>критик нуқталари</u> деб функция ҳосилага эга бўлмайдиган ва ҳосиласи нолга тенг бўладиган нуқталари мажмуасига айтилади.

Таъриф. $y=f(x)$ функция ҳосиласи $x_0\in X$ критик нуқтада ўз ишорасини мусбатдан манфийга ўзгартирса, шу x_0 нуқта функциянинг <u>маҳаллий максимум нуқтаси</u> дейилади. Аксинча, агар ҳосила ишораси манфийдан мусбатга ўзгарса, x_0 нуқта функциянинг <u>маҳаллий минимум нуқтаси</u> дейилади.

Таъриф. Функциянинг маҳаллий максимум ва маҳаллий минимум нуқталардаги қийматлари <u>функциянинг экстремум – лари</u> дейилади.

Таъриф. $y=f(x)$ функциянинг X тўпламдаги энг катта ва энг кичик қийматлари унинг <u>экстремал қийматлари</u> дейилади.

Критик нуқталарда экстремумлар бўлиши ҳам, бўлмаслиги ҳам мумкин. Экстремумларни излаш учун критик нуқталарда ҳосила ишораси ўзгариши ёки ўзгармаслигини текширамиз. Унинг учун $f'(x_0-\varepsilon)\cdot f'(x_0+\varepsilon)$ ни ҳисоблаб ишорасини аниқлаймиз.

Мисоллар. 1) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+3; X=[-3,2];$

$$f'(x)=x^2+x-2;\quad x^2+x-2=0;\quad x_1=-2;\ x_2=1;$$

$$f'(x)=(x+2)(x-1);$$

$$f'(-2-\varepsilon)=(-2-\varepsilon+2)(-2-\varepsilon-1)=\varepsilon(3+\varepsilon)>0,$$

$$f'(-2+\varepsilon)=(-2+\varepsilon+2)(-21-\varepsilon-1)=\varepsilon(3-\varepsilon)<0;$$

$$x_1=-2;\ \text{да max},\quad f(-2)=\frac{19}{3};$$

$$f'(1-\varepsilon)=(1-\varepsilon+2)(1-\varepsilon-1)=-\varepsilon(3+\varepsilon)<0,$$

$$f'(2+\varepsilon)=(1+\varepsilon+2)(1+\varepsilon-1)=\varepsilon(3+\varepsilon)>0;$$

$$x_2=1;\ \text{да min},\quad f(1)=\frac{11}{6};$$

2) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+|x|;\ \ X=[-2;\,3]$;

$x_1=0$ да $|x|$ нинг ҳосиласи мавжуд эмас; $f(0)=0$; $-2\le x\le 0$ да $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x;\ f'(x)=x^2-1;\ x^2-1=0;\ x=\pm 1$. Бундан $x_2=-1$ келиб

чиқади $0\le x\le 3$ да $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x$; ва $f'(x)=x^2+1\ne 0$. Шундай

қилиб, критик нуқталар $x_1=0,\ x_2=-1$.

$$f(0-\varepsilon)=(0-\varepsilon)^2-1=\varepsilon^2-1<0;\ f'(0+\varepsilon)=(0+\varepsilon)^2+1=\varepsilon^2+1>0.$$

Демак, $x_1=0$ да маҳаллий минимум бўлади.

$$f'(-1-\varepsilon)=(-1-\varepsilon)^2-1=(1+\varepsilon)^2-1>0;\ f'(-1+\varepsilon)=(-1+\varepsilon)^2-1=1-2\varepsilon-\varepsilon^2-1=-2\varepsilon-\varepsilon^2<0.$$

Демак, $x_2=-1$ да маҳаллий максимум мавжуд:

$$f(0)=0,\ f(-1)=-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}.$$

Биз юқорида маҳаллий максимум ва маҳаллий минимум таърифларини ҳосила ёрдамида бердик. Аслида уларни етарли шарт сифатида қабул қилиш мумкин эди. Таърифларни тенгсизликлар ёрдамида келтириш ҳам мумкин.

$f(x)\le f(x_0),\ \forall x\in X\Rightarrow x_0$ –маҳаллий максимум нуқтаси,

$f(x)\ge f(x_0),\forall x\in X\Rightarrow x_0$ –маҳаллий минимум нуқтаси,

унда Х тўплам x_0 ни ўз ичига оладиган бирор соҳа (X_0 нинг атрофи – $X=\{x:|x-x_0|<\varepsilon\}$).

Функциянинг экстремал қийматларини топишга тўхталамиз. Аввало y=f(x) функция [a, b] кесмада аниқланган ва узлуксиз бўлсин. Унинг экстремал қийматларини топиш учун қуйидаги тартибда иш кўрамиз:

1. $f(a)$, $f(b)$ ларни ҳисоблаймиз.

2. $y=f(x)$ функциянинг [a,b] даги критик нуқталарини топамиз: $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

3. $f(x_1), f(x_2),\ldots f(x_n)$ ларни ҳисоблаймиз.

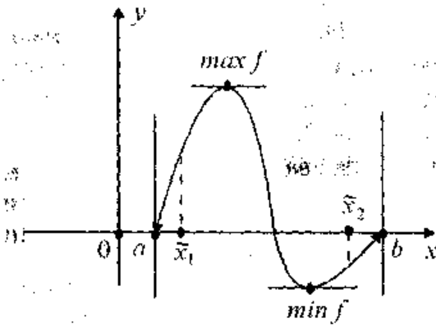
4. $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)=\max\{f(a), f(b), f(x_1),\ \ldots, f(x_n)\}$,

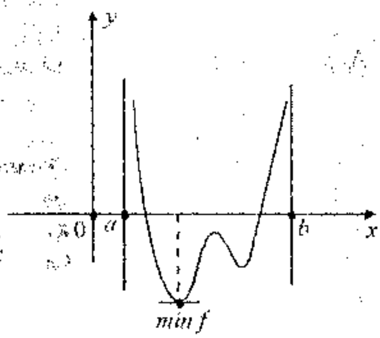
$\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)=\min\{f(a), f(b), f(x_1),\ \ldots, f(x_n)\}$.

Агар $y=f(x)$ функция (a,b) интервалда аниқланган ва узлуксиз бўлса, унда экстремал қийматлар мавжуд бўлишининг етарли шартларини берадиган теоремаларни келтирамиз.

1–теорема. Агар $y=f(x)$ функция учун $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=0$ бўлиб, бирор $\tilde{x}\in(a,b)$ нуқтада $f(\tilde{x})>0$, $(f(\tilde{x})<0)$ тенгсизлик ўринли бўлса, $y=f(x)$ функция (a, b) интервалда энг катта (энг кичик) қийматига эришади.

2–теорема. Агар $y=f(x)$ функция учун $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=+\infty(-\infty)$

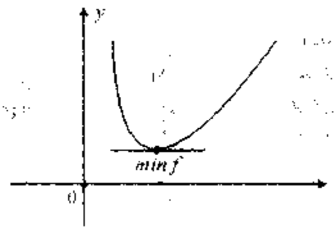




тенгсизлик ўринли бўлса, $y=f(x)$ функция (a, b) интервалда ўзининг энг кичик (энг катта) қийматига эришади.

Иккита иқтисодий масала кўрайлик.

1–масала. Томони a га тенг бўлган квадрат шаклидаги материалдан максимал ҳажмдаги яшик ясалсин.



Ечиш. Квадратнинг учларидан томони $x, 0<x<\frac{a}{2}$, бўлган квадратлар қирқиб олиб, ҳошияларни кўтариб, яшик ҳосил қиламиз.

Унинг ҳажми $V(x)=x(A-2x)^2$. Демак $V(x)\to max$, $0<x<\frac{a}{2}$ масалани ечиш лозим. $V(x)$ функция учун 1–теореманинг шартлари бажарилади:

$$\lim_{x\to+0} x(a-2x)^2 = \lim_{x\to\frac{a}{2}-0} x(a-2x)^2 = 0, \quad V(x)>0 \;,\; \forall x\in\left(0,\frac{a}{2}\right).$$

Демак, V(x) функциянинг энг катта қиймати мавжуд. Уни топиш учун критик нуқталарни (бу ҳолда фақат стационар нуқталарни) топамиз:

$$V'(x)=(a-2x)^2+x\cdot 2(a-2x)\cdot(-2)=(a-2x)(a-6x),\; x_1=\frac{a}{6}.$$

Стационар нуқта биттагина. Демак, шу нуқтада функция ўзининг энг катта қийматига эришади:

$$\max_{x\in\left(0,\frac{a}{2}\right)} f(x)=f\left(\frac{a}{6}\right)=\frac{2}{27}a^3.$$

2–масала. Ҳажми V бўлган цилиндр шаклидаги консерва идиши энг арзон тушиши учун унинг асоси радиуси ва баландлиги қандай бўлиши керак?

Ечиш. Маълумки, $V=\pi r^2 h$. Энг арзон бўлиши учун унинг тўлиқ сирти энг кам бўлиши зарур: $S_T=2\pi r^2+2\pi rh$. Агар $h=\frac{V}{\pi r^2}$ ни эътиборга олсак, $S(r)=2\pi r^2+\frac{2V}{r}\to\min, r>0$ масала ҳосил бўлади.

Бу функция учун 2–теореманинг шартлари бажарилади.

$$\lim_{r\to+0} S(r)=\lim_{r\to+\infty} S(r)=+\infty.$$

Демак, $S(r)$ функциянинг энг кичик қиймати мавжуд. Стационар нуқталарни топамиз:

$$S'(r)=4\pi r-\frac{2V}{r^2};\quad 4\pi r-\frac{2V}{r^2}=0;\qquad r_0=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}};\; h_0=2r_0;$$

$$\min S_T=\min S(r)=S(r_0)=2\pi\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{V}{2\pi}\right)^2}+\frac{2V}{\sqrt[3]{\left(\frac{V}{2\pi}\right)^2}}=3\sqrt[3]{2\pi V^2}.$$

Хулоса. Энг арзон консерва идиши учун ўз кесим томони

$$h_0 = 2r_0,\ r_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

бўлган квадратдан иборат.

8–§. Функцияларни тўлиқ текшириш ва графигини чизиш

Функцияларни тўлиқ текшириш учун қуйдагича иш кўрилади:

1°. Функциянинг аниқланиш соҳаси топилади.

2°. Функциянинг жуфт–тоқлиги, даврийлиги текширилади.

3°. Функциянинг асимптоталари текширилади.

4°. Экстремумлар, ўсиш, камайиш интерваллари топилади.

5°. Қавариқлик интерваллари, бурилиш нуқталари топилади.

6°. Графикни аниқлайдиган маълумотлар аниқланади.

Мисоллар. 1) $y=x^2-3x+2$ функциянинг графиги чизилсин.

1°. Аниқланиш соҳаси $-\infty<x<+\infty$.

2°. Функция жуфт ҳам, тоқ ҳам эмас, даврий эмас.

3°. Асимптоталари йўқ.

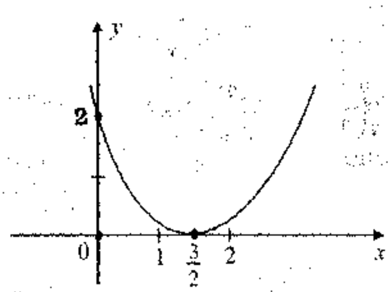
4°. $y' = 2x-3;\quad 2x-3=0;\quad x_1 = \frac{3}{2};$

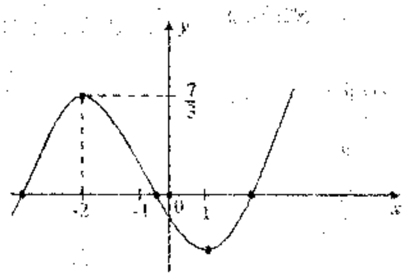
$$y'\left(\frac{3}{2}-\varepsilon\right) = 2\cdot\left(\frac{3}{2}-\varepsilon\right)-3 = 3-2\varepsilon-3 = -2\varepsilon<0;$$

$$y'\left(\frac{3}{2}+\varepsilon\right) = 2\cdot\left(\frac{3}{2}+\varepsilon\right)-3 = 3+2\varepsilon-3 = 2\varepsilon>0\cdot$$

5°. $y'(x)<0\ ,\ \forall x<\frac{3}{2};\ y'(x)>0,\ \forall x>\frac{3}{2};$

$$y\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)+2 = \frac{9}{4}-\frac{9}{2}+2 = -\frac{1}{4}\cdot$$





6°. $y(0)=2$.

2) $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x-1;\quad x\in(-\infty,+\infty);$

$y'=x^2+x-2;\quad x^2+x-2=0;\quad x_1=-2;\qquad x_2=1;$

$y(-2)=-\frac{8}{3}+2+4-1=5-\frac{8}{3}=\frac{7}{3};\qquad y(1)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-3=\frac{5}{6}-3=-\frac{13}{6}.$

Адабиётлар

1. Высшая математика для экономистов (колл. авторов под ред. проф. Н.Ш.Кремера). Москва "Банки и биржи", Издательское объединение "ЮНИТИ", 1997.

2. Карасев А.И., Аксютина З.М., Савельева Т.Н. Курс высшей математики для экономических вузов–Москва, Высшая школа, 1982, ч.1.

3. Азларов Т., Мансуров Х. Математик анализ, Тошкент, "Ўқитувчи" 1 том, 1994.

II ҚИСМ

6–БОБ. НОАНИҚ ИНТЕГРАЛЛАР

1–§. Бошланғич функция ва ноаниқ интеграл таърифи

Таъкидлаб ўтамизки, дифференциал ҳисобнинг асосий вазифаси берилган функциянинг ҳосиласини ёки дифференциалини (агар улар мавжуд бўлса) топишдан иборат. Интеграл ҳисоб эса тескари масалани, яъни функциянинг ҳосиласи ёки дифференциали бўйича унинг ўзини топиш масаласини ечади. Унда бошланғич функция тушунчаси муҳим аҳамиятга эга.

Таъриф. X оралиқда $y=f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси $F(x)$ деб шу оралиқнинг ҳар бир нуқтасида $F'(x)=f(x)$ тенгликни қаноатлантирадиган функцияга айтилади.

Масалан, $f(x)=x^2, -\infty<x<+\infty$, функция учун $F(x)=\frac{x^3}{3}$ дан иборат.

Агар $F(x)$ функция $y=f(x)$, $x\in X$ функция учун бошланғич функция бўлса, $F(x)+C$, C ўзгармас кўринишдаги функциялар ҳам бошланғич функциялар бўлади. Демак, агар бирор $y=f(x)$, $x\in X$, функция учун битта бошланғич функция мавжудлиги кўрсатилса, ундан ўша функциянинг бошланғич функциялари чексиз кўплиги келиб чиқади. Бундан кўринадики, ихтиёрий иккита бошланғич функциялар бир–биридан ўзгармас қўшилувчи билан фарқ қилади, яъни $F_1(x)=F_2(x)+C$. Шундай қилиб, агар $F(x)$ бошланғич функция бўлса, барча бошланғич функциялар ушбу $F(x)+C$ формула ёрдамида ифодаланади.

Таъриф. X оралиқда берилган $y=f(x)$ функциянинг барча бошланғич функциялари мажмуаси $y=f(x)$ функциядан олинган ноаниқ интеграл дейилади ва $\int f(x)dx$ деб белгиланади. Шундай қилиб,

$$\int f(x)dx=F(x)+C.$$

Масалан

$$\int\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=\sqrt{x}+C, \qquad \int\cos x dx=\sin x+C.$$

2–§. Ноаниқ интеграл хоссалари

Қуйида биз ноаниқ интегралнинг асосий хоссаларини келтирамиз:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;

2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;

3. $\int dF(x) = F(x) + C$;

4. $\int \alpha \cdot f(x)dx = \alpha \cdot \int f(x)dx, \quad \alpha = \text{const}$;

5. $\int\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\right)dx = \sum_{i=1}^{n}\left(\int f_i(x)dx\right)$,

[$\int[f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$].

Мазкур хоссалар ноаниқ интеграл таърифидан фойдаланиб осонгина исботланади. Масалан, 1-хоссани исботлайлик. F(x) функция f(x) учун бошлангич функция бўлсин. Унда $\int f(x)dx = F(x) + C$ бўлади. Бундан

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

3–§. Элементар функцияларнинг ноаниқ интеграллари

Қуйида биз элементар функцияларнинг ноаниқ интегралларини келтирамиз. Уларни, қисқалик учун, <u>жадвал интеграллар</u> деб юритилади.

1°. $\int 0 \cdot dx = C$;

2°. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1; \quad \int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C; \quad x \neq 0$;

3°. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1; \quad \int e^x dx = e^x + C$;

4°. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

5°. $\int \cos x dx = \sin x + C$;

6°. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C$;

7°. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$

8°. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad -a < x < a, \quad a > 0;$

9°. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0;$

10°. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad a \neq 0;$

11°. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C, \quad a \neq 0.$

Мазкур формулалар ўнг томоннинг ҳосиласи интеграл остидаги функцияга тенглигини кўрсатиш ёрдамида исботланади. Бунда ҳосилалар жадвалидан фойдаланилади.

4–§. Ўзгарувчини алмаштириш усули

Ҳар бир ноаниқ интеграл жадвал кўринишда берилавермайди. Уларни ўша кўринишга келтириш керак. Бунинг учун турли усуллар мавжуд. Шу усуллардан бири ўзгарувчини алмаштириш усулидир.

$\int f(x)dx$ да $x = \varphi(t)$, ($\varphi(t)$–дифференциалланувчи функция) деб алмаштирилса, $f(\varphi(t))$, $dx = \varphi'(t)dt$ ва $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt$ бўлади.

Шундай қилиб,

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt.$$

Масалан, 1) $\int \frac{dx}{3x+1}$ ни ҳисоблаш учун $3x+1=t$ деймиз, унда $3dx=dt$, $dx = \frac{dt}{3}$ бўлади. Демак,

$$\int \frac{dx}{3x+1} = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \ln|t| + C = \frac{1}{3} \ln|3x+1| + C;$$

2) $\int \sin(3-2x)dx$ учун $3 - 2x = t, \ -2dx = dt, \ dx = -\frac{dt}{2};$

$$\int \sin(3-2x)dx = \int \sin t \cdot \left(-\frac{dt}{2}\right) = -\frac{1}{2}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{2}(-\cos t) + C = \frac{1}{2}\cos(3-2x) + C$$

5–§. Бўлаклаб интеграллаш усули

Агар $u(x)$, $v(x)$ лар бирор соҳада дифференциалланувчи бўлса, унда <u>бўлаклаб интеграллаш</u> усули ушбу

$$\int udv = uv - \int vdu$$

формула билан ифодаланади.

Масалан, 1) $\int xe^x dx$ да $x=u$, $dv= e^x dx$ дейилса, $dx=du$, $v=e^x$ бўлади. Шунинг учун $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x\, dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C$;

2) $\int x\cos x dx$ да $x=u$, $\cos x dx=dv$ дейилса, $dx=du$, $v=\sin x$ бўлади.

$$\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x\, dx = x\sin x + \cos x + C.$$

6–§. Содда рационал касрларни интеграллаш

<u>Рационал касрлар</u> деб шундай касрларга айтиладики, уларнинг сурат ва махражида кўпҳадлар туради: $\frac{x+2}{x^2+3}$, $\frac{x^2+px+q}{x^2+1}$ ва ҳ. к..

Агар касрнинг суратидаги кўпҳад даражаси маҳраждагидан катта бўлса, ёғоч бўлувни амалга оширилади:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = h(x) + \frac{f_1(x)}{g(x)}$$

бунда $h(x)$-кўпҳад, $f_1(x)$ – даражаси $g(x)$никидан кам бўлган кўпҳад. Шунинг учун $\int \frac{f_1(x)}{g(x)} dx$ кўринишдаги ноаниқ интегрални ҳисоблаш муҳим аҳамиятта эга.

1. $f_1(x)=\text{const}=A$, $g(x)=ax^2+bx+c$. Бунда $\int \frac{Adx}{ax^2+bx+c} = ?$

2. $f_1(x)=Ax+b$, $g(x)=ax^2+bx+c$; $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx = ?$

Аввал $b=0$ бўлсин. Унда $\int \frac{dx}{ax^2+c}$ кўринишдаги интегрални ҳисоблаш учун $\frac{1}{a}\int \frac{dx}{x^2+\frac{c}{a}}$ каби ёзамиз ва 9° кўринишдаги жадвал интегралга келамиз. $\int \frac{xdx}{ax^2+c}$ ни ҳисоблаш учун $a^2+c=t$ дейилса, $2axdx=dt$, $xdx=\frac{dt}{2a}$;

$$\int \frac{xdx}{ax^2+c}=\int \frac{dt}{2at}=\frac{1}{2a}\int \frac{dt}{t}=\frac{1}{2a}\ln|t|+C=\frac{1}{2a}\ln\left|ax^2+c\right|+C.$$

Агар $b \neq 0$ бўлса, ax^2+bx+c дан тўлиқ квадрат ажратиб олиб, юқоридаги усулдан фойдаланса бўлади.

Агар каср махражи ҳақиқий илдизларга эга бўлса, унда интегрални ҳисоблаш осонлашади: интеграл остидаги тўғри касрни содда касрлар йиғиндиси кўринишида ёзилади ва интегралланади.

Масалан,

1) $\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\int \frac{dx}{(x-a)(x+a)}=\frac{1}{a}\left[\int \frac{dx}{x-a}-\int \frac{dx}{x+a}\right]=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C;$

2) $\int \frac{x^2-2x+2}{x^3+2x^2-8x}=?$

$x^3+2x^2-8x=x(x^2+2x-8)=x(x+4)(x-2);$

$\frac{x^2-2x+2}{x(x+4)(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+4}+\frac{C}{x-2};$

$x^2-2x+2=A(x+4)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+4);$

$x^2-2x+2=A(x^2+2x-8)+Bx^2-2Bx+Cx^2+4Cx;$

$x^2-2x+2=(A+B+C)x^2+(2A-2B+4C)x+(-8A);$

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ 2A-2B+4C=-2 \\ -8A=2 \end{cases};\ A=-\frac{1}{4};\ \begin{cases} B+C=\frac{5}{4} \\ -2B+4C=-\frac{3}{2} \end{cases};\ \begin{cases} 2B+2C=\frac{5}{2} \\ -2B+4C=-\frac{3}{2} \end{cases};$$

$6C=1;\ \ C=\frac{1}{6};\ \ B=1+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{13}{12};\ \ B=\frac{13}{12};$

$$\int \frac{x^2-2x+2}{x^3+2x^2-8x}=-\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x}+\frac{13}{12}\int \frac{dx}{x+4}+\frac{1}{6}\int \frac{dx}{x-2}=\frac{1}{4}\ln|x|+$$
$$+\frac{13}{12}\ln|x+4|+\frac{1}{6}\ln|x-2|+C.$$

7–§. Баъзи иррационал функцияларни интеграллаш

Фараз этайлик, $R(u, v)$ функция u ва v лардан фақат 4 та амал (қўшиш, айриш, кўпайтириш, бўлиш) ёрдамида ҳосил қилинган функция бўлсин. Масалан,

$$R(u, v)=-2u+v^2,\quad R(u, v)=\frac{u^2-3v}{u^2+v^2};$$

Бир неча ҳолда иррационал функцияларни интеграллаш усулини баён этамиз:

1. $\int R\left(x,\sqrt[n]{x}\right)dx$. Бунда $\sqrt[n]{x}=t$ дейилса, $x=t^n$, $dx=nt^{n-1}dt$. Натижада t га нисбатан рационал функция ҳосил бўлади.

Мисол. $\int\frac{dx}{2x+\sqrt[3]{x}}dx$; $\sqrt[3]{x}=t$; $x=t^3$; $dx=3t^2dt$;

$$\int\frac{3t^2dt}{2t^3+t}=\int\frac{3tdt}{2t^2+1}=3\int\frac{\frac{1}{4}d(2t^2+1)}{2t^2+1}=\frac{3}{4}\ln(2t^2+1)+C=\frac{3}{4}\ln(2\sqrt[3]{x^2}+1)+C.$$

2) $\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$; $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

Мисол. $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$; $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=t$; $\frac{1-x}{1+x}=t^2$;

$$1-x=t^2+t^2x;\ x=\frac{1-t^2}{1+t^2};\ dx=\frac{-2t\cdot(1+t^2)-(1-t^2)\cdot 2t}{(1+t^2)^2}=-\frac{4t}{(1+t^2)^2}dt;$$

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx=\int t\cdot\left(-\frac{4t}{(1+t^2)^2}\right)dt=-4\int\frac{t^2dt}{(1+t^2)^2}=-4\int t\cdot\frac{tdt}{(1+t^2)^2}=$$

$$=-4\left[t\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t^2}\right)+\int\left(-\frac{dt}{2(1+t^2)}\right)\right]=\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}t+C;\ t=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

3) $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$. Аввал ax^2+bx+c да тўлиқ квадрат ажратилади. Содда ҳолларда ўзгарувчини алмаштириш натижасида жадвал интегралга келиш мумкин. Мураккаб ҳолларда умумий усул Эйлер алмаштиришларидан фойдаланилади.

8–§. Тригонометрик функцияларни интеграллаш

Ушбу $\int R(\sin x, \cos x)dx$ кўринишдаги интегралларни $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ ал–маштириш ёрдамида ($<x<$) рационал функциялардан олинган интегралга келтириш мумкин. Бу энг умумий алмаштириш. Сод–дароқ ҳоллар ҳам мавжуд.

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2};\ x=2\operatorname{arctg} t,\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Мисол. $\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{2}{1+t^2}\cdot\frac{1+t}{2t}dt=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$

Агар $R(-\sin x, -\cos x)=-R(\sin x, \cos x)$ бўлса, $\cos x=t$ дейилади.

Мисол. $\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx;\ \cos x=t;\ dt=-\sin x dx;$

$\int\frac{\sin x dx}{\cos^2 x}=\int\frac{-dt}{t^2}=\frac{1}{t}+C=\frac{1}{\cos x}+C.$

АДАБИЁТЛАР

1. Высшая математика для экономистов (под ред. проф. Н.Ш.Кре–мера ,Москва, «Банки и биржи», Издательское объединение «ЮНИ–ТИ», 1997.

2. Азларов Т., Мансуров Ҳ, Математик анализ, Тошкент, «Ўқи–тувчи», I том, 1994.

3. Карасёв А.И., Аксютина З.М., Савельева Т.Н., Курс высшей математики для экономических вузов. Москва, Вўсшая школа, 1982, ч.1.

7-БОБ. АНИҚ ИНТЕГРАЛ

1-§. Аниқ интеграл тушунчаси

Аниқ интеграл тушунчаси муҳим тушунчалардан бири бўлиб, жуда кўп татбиқий масалаларни ечишда ундан фойдаланилади. Унинг таърифини келтириш учун баъзи ёрдамчи тушунчаларни киритамиз.

Фараз этайлик, $y=f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада аниқланган бўлсин. Шу кесмани $x_0, x_1, ..., x_n$ $(A=x_0<x_1<x_2<...<x_n=B)$ нуқталар ёрдамида n та элементар кесмаларга (уларнинг узунликлари, умуман айтганда, турлича) бўламиз. Уларни мос равишда $A_1=[x_0, x_1]$, $A_2=[x_1, x_2]$, ..., $A_n=[x_{n-1}, x_n]$, каби белгилаймиз. Шу ҳолда $A_1, A_2, ..., A_n$ кесмалар системаси $[a,b]$ кесмада бўлаклаш бажарган дейилади, $x_0, x_1, ..., x_n$ нуқталар эса $[a,b]$ кесмада бўлаклаш бажаради дейилади. Шу нуқталар билан бажарилган бўлаклашни $P=\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ деб белгилаймиз. Албатта, чексиз кўп усул билан бўлаклаш бажарилиши мумкин.

Энди бирор P бўлаклашга тегишли ҳар бир $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, 2, ..., n$, кесмада бирор ξ_i нуқта олиб, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ деб белгилаймиз.

Ушбу

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

йиғиндини тузамиз. У $[a, b]$ кесмада $y=f(x)$ функция учун $[a, b]$ кесмада интеграл йиғинди дейилади. Равшанки интеграл йиғиндининг қиймати 1) $[a, b]$ ни бўлаклаш усулига; 2) бўлаклашнинг ҳар бир кесмасига тегишли $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ нуқталарнинг танланишига боғлиқ.

Интеграл йиғинди аниқ геометрик маънога эга. Фараз этайлик, $y=f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада номанфий бўлсин. Унда унинг графиги абсцисса ўқидан юқорида жойлашган бўлади. Бирор $[x_{i-1}, x_i]$ кесмани олиб, унда ξ_i нуқтани танлаймиз. $f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$ кўпайтма асоси Δx_i га, баландлиги $f(\xi_i)$ га тенг бўлган тўғри тўртбурчакнинг юзини англатади. Ҳар бир ξ_i учун шундай юзалар ҳосил бўлади. Демак, интеграл йиғинди n та тўғри тўртбурчак юзалари йиғиндисини англатади. Бу йиғиндининг миқдори бўлаклаш ўзгаришига ва ξ_i ларнинг танланишига боғлиқлиги равшан.

Энди аниқ интеграл таърифига тўхталамиз.

Танланган бўлаклаш учун $\lambda=\max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\}$ деб белгилаймиз.

Таъриф. Агар ушбу

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

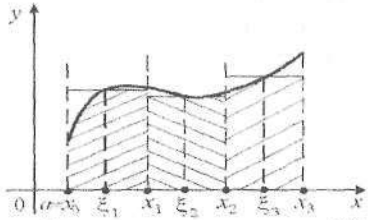
лимит мавжуд, чекли ҳамда $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ва $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ нуқталарнинг танланишига боғлиқ бўлмаса, у ҳолда ўша лимит $[a,b]$ кесмада $y=f(x)$ функциянинг <u>аниқ интеграли</u> дейилади ва

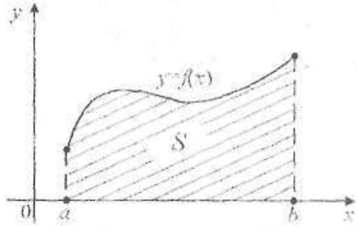
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda=\max\limits_i \Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

деб белгиланади, унда a ва b лар мос равишда қуйи ва юқори лимитлар, $f(x)$ функция эса интеграл ости функцияси деб юритилади. Ноаниқ ва аниқ интеграллар уларнинг белгиланишлари ўхшаш бўлса ҳам ўзаро кескин фарқ қиладилар. Ноаниқ интеграл функциялар мажмуасидан иборат бўлса, аниқ интеграл муайян сонни англатади. Таърифга кўра $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. Агар $a=b$ бўлса, $2\int_a^a f(x)dx=0$ дан $\int_a^a f(x)dx=0$ келиб чиқади.

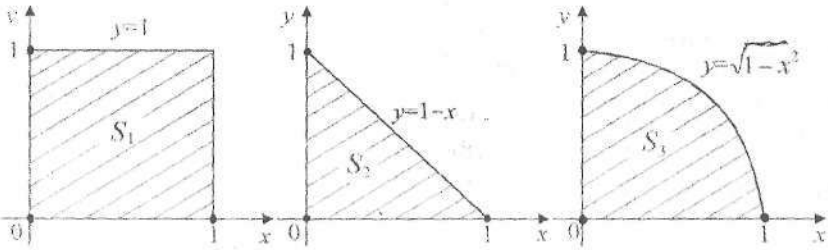
2–§. Аниқ интегралнинг геометрик ва иқтисодий маънолари

Агар $y=f(x)$ функция $[a,b]$ $(a<b)$ кесмада номанфий бўлса, $\int_a^b f(x)dx$ нинг қиймати $[a,b]$ да $y=f(x)$ функция графиги тагидаги юзани англатади.





Бизга юзаси маълум бўлган ясси фигураларнинг баъзиларини кўрайлик (чизмаларга қаранг):



Равшанки, $S_1=1$, $S_2=\frac{1}{2}$, $S_3=\frac{\pi}{4}$.

Таъриф бўйича аниқ интеграл орқали ҳам шу натижалар чиқади:

$$S_1=\int_0^1 1\cdot dx=1;\ S_2=\int_0^1(1-x)dx=\frac{1}{2};\ S_3=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}.$$

Энди аниқ интегралнинг иқтисодий маъносига тўхталамиз. Фараз этайлик, $z=f(x)$ функция бирор ишлаб чиқариш унумдорлигининг вақт бўйича ўзгариш қонунини англатсин. Ушбу $[0;\ T]$ вақт оралиғида ишлаб чиқарилган маҳсулот ҳажми u ни топиш билан шуғулланамиз. Таъриф бўйича иш юритиб,

$$u=\int_0^T f(t)dt$$

эканини чиқариш мумкин. Шундай қилиб, $\int_0^T f(t)dt$ – $[0,\ T]$ оралиқда ишлаб чиқарилган маҳсулот миқдорини англатади.

3–§. Аниқ интегралнинг мавжудлик шартлари

Одатда, агар интеграл йиғинди лимити мавжуд бўлса, $y=f(x)$ функция $[a,\ b]$ кесмада интегралланувчи дейилади.

Қандай функциялар интегралланувчи бўлади?–деган савол туғилади. Аввало узлуксиз функциялар шундай хоссага эга.

Теорема. Агар $y=f(x)$ функция $[a,\ b]$ кесмада узлуксиз бўлса, у ҳолда функция шу кесмада интегралланувчи бўлади.

Теорема. Агар $y=f(x)$ функция $[a,\ b]$ кесмада чегараланган ва монотон бўлса, у шу кесмада интегралланувчи бўлади.

Теорема. Агар $y=f(x)$ функция $[a,\ b]$ кесмада чегараланган бўлиб, бўлакли узлуксиз бўлса, у шу кесмада интегралланувчи бўлади.

Агар $y=f(x)$ функция $[a,b]$ кесманинг чекли сондаги нуқталарида биринчи тур узилишга эга бўлиб, функциянинг узилиш нуқталаридаги қиймати унинг ўнг лимитига (чап лимитига) тенг бўлса, функция $[a,b]$ кесмада бўлакли узлуксиз дейилади. Бундай функциялар иқтисодиётда кўплаб учрайди. Масалан, ихтиёрий иқтисодий жараённи ўрганилаётганда у ёки бу иқтисодий кўрсаткич ҳар хил вақт оралиқларда (масалан, ҳар йили) ҳар хил қийматлар қабул қилади. Бу ҳолда динамик жараён дискретлаштирилган бўлади.

4–§. Аниқ интегралнинг хоссалари

Аниқ интеграл қуйидаги хоссаларга эга:

1. $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx$;

2. $\int_a^b \left(\sum_{i=1}^n f_i(x)\right)dx = \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b f_i(x)dx\right)$, $\left[\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx\right]$;

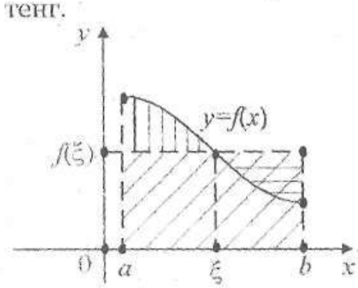
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, бунда c–ихтиёрий;

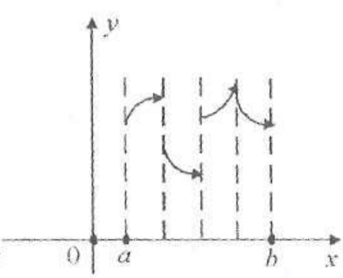
4. Агар $a<b$ бўлиб, $[a,b]$ кесмада $f(x)\le g(x)$ бўлса, $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$ тенгсизлик ўринли, яъни $f(x)\le g(x)$ тенгсизликнинг икки томонини ҳадма–ҳад интеграллаш мумкин.

5. Ўрта қиймат ҳақидаги теорема: Агар $y=f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада ($a<b$) узлуксиз бўлса, шундай $\xi\in(a, b)$ нуқта топиладики,

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

тенглик ўринли бўлади. Чизмада горизонтал чизиқлар билан ажратилган юза вертикал чизиқлар билан ажратилган юзага тенг.





5–§. Аниқ интеграл юқори лимит функцияси сифатида

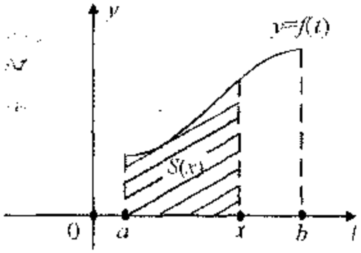
Агар $y=f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада интегралланувчи бўлса, равшанки, у ихтиёрий $[a,x]$, $a \le x \le b$, кесмада ҳам интегралланувчи бўлади.

Ушбу

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt,\ x\in[a,\ b]$$

интеграл <u>юқори лимити ўзгарувчи бўлган</u> аниқ интеграл дейилади.

Агар f(t) 0 бўлса, (x) функциянинг x нуқтадаги қиймати уқf(t) функциянинг [a, x] кесмага мос графиги остидаги юзани англатади.



Бу юқори лимити ўзгарувчи бўлган интегралнинг геометрик маъносидан иборат.

Юқори лимити ўзгарувчи бўлган аниқ интегралнинг иккита муҳим хоссаси мавжуд.

1. Агар y=f(x) функция [a,b] кесмада узлуксиз бўлса, (x) функция ҳам шу кесмада узлуксиз бўлади.

2. Агар $y=f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада узлуксиз бўлса, $[a,b]$ кесманинг ҳар бир x нуқтасида $\Phi(x)$ функциянинг ўзгарувчи юқори лимит бўйича (яъни x бўйича) ҳосиласи интеграл остидаги функцияга тенг бўлади, яъни

$$\Phi'(x)=\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=f(x).$$

Мазкур ҳоссалардан келиб чиқадики, $\Phi(x)$ функция $[a,b]$ кесмада $y=f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлади.

6–§. Ньютон–Лейбниц формуласи

Аниқ интегралларни ҳисоблаш учун юқори лимити ўзгарувчи бўлган аниқ интегралдан фойдаланилади. Ҳосил бўладиган формула одатда <u>Ньютон–Лейбниц формуласи</u> деб аталади:

Теорема. Фараз этайлик, $y=f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада узлуксиз ва $F(x)$–унинг $[a,\ b]$ кесмадаги ихтиёрий бошланғичи бўлсин. Унда $y=f(x)$ функциянинг $[a,b]$ кесмадаги аниқ интеграли бошланғич функция $F(x)$ нинг орттирмасига тенг, яъни

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b .$$

Мисол. 1) $\int_0^1 x^3dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$;

2) $\int_0^2 2^{3x}dx = \frac{1}{3\ln 2}\cdot 2^{3x}\Big|_0^2 = \frac{2^6}{3\ln 2} - \frac{1}{3\ln 2} = \frac{1}{3\ln 2}\cdot 63 = \frac{21}{\ln 2}$.

7–§. Аниқ интегрални ҳисоблашда ўзгарувчини алмаштириш ва бўлаклаб интеграллаш усуллари

Аниқ интегрални ҳисоблашда ҳам ноаниқ интегралда фойдаланилган ўзгарувчини алмаштириш ва бўлаклаб интеграллаш усулларидан фойдаланилади.

1–теорема. Фараз этайлик, $\varphi(t)$ функция $[\alpha,\beta]$ кесмада узлуксиз ҳосилага эга ва $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$ бўлсин, шунингдек, $y=f(x)$ функция $x=\varphi(t)$, $t\in[\alpha, \beta]$ кўринишдаги ҳар бир нуқтада узлуксиз бўлсин. Бунда ушбу

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

тенглик ўринли.

Бу формула аниқ интегралда ўзгарувчини алмаштириш формуласи деб юритилади.

Мисол. $\int_0^1 x(2-x^2)^5\,dx.$

Ечиш. $2-x^2=t$; $dt=-2xdx$; $xdx=-\frac{1}{2}dt$; $2-0=t$; $t(0)=2$; $2-1=t$; $t(1)=1$;

$$\int_0^1 x(2-x^2)^5dx = \int_2^1 t^5\cdot\left(-\frac{1}{2}dt\right) = \frac{1}{2}\int_1^2 t^5dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^6}{6}\Big|_1^2 = \frac{1}{12}\left(2^6-1^6\right) = \frac{1}{12}\cdot 63 = \frac{21}{4}$$

2–теорема. Агар $u=u(x)$, $v=v(x)$ функциялар $[a,b]$ кесмада узлуксиз ҳосилаларга эга бўлса, ушбу

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

формула ўринли.

Бу формула аниқ интеграл учун бўлаклаб интеграллаш формуласи дейилади.

Мисол. $\int\limits_0^{1/2} xe^{2x}dx$;

Ечиш. $x=u$, $e^{2x}dx=dv$; $du=dx$; $v=\frac{1}{2}e^{2x}$;

$$\int\limits_0^{1/2} xe^{2x}dx = x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^{1/2} - \int\limits_0^{1/2}\frac{1}{2}e^{2x}dx = \frac{1}{4}e - \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{2x}}{2}\Big|_0^{1/2} = \frac{1}{4}\cdot e - \frac{1}{4}(e-1) = \frac{1}{4}.$$

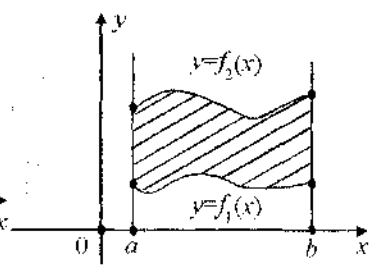
8–§. Аниқ интеграл ёрдамида юза ва ҳажмларни ҳисоблаш

Агар $y=f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада номанфий бўлса, юқоридан $y=f(x)$ функция графиги, чапдан $x=a$ ва ўнгдан $x=b$ вертикал тўғри чизиқ ҳамда пастдан абсцисса ўқи билан чегараланган юза ушбу

$$S=\int\limits_a^b f(x)dx$$

аниқ интеграл ёрдамида ҳисобланади.

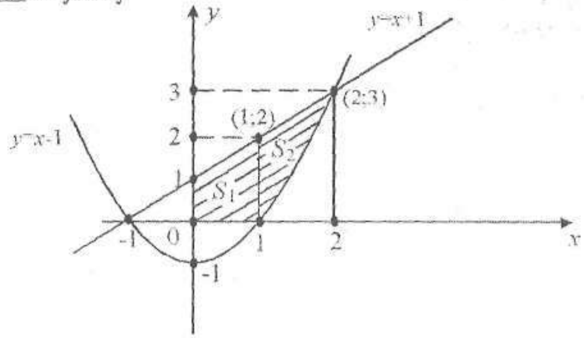
Агар $f(x)\geq 0$, $\forall x\in[a,c_1]\cup[c_2,c_3]$, $f(x)\leq 0$, $\forall x\in[c_1,c_2]\cup[c_3,b]$, тенгсизликлар ўринли бўлса, унда изланган юза $S=S_1+S_2+S_3+S_4$



йиғинди билан аниқланади ва у аниқ интеграл ёрдамида қуйидагича ҳисобланади:

$$S=\int\limits_a^{c_1} f(x)dx + \int\limits_{c_1}^{c_2}|f(x)|dx + \int\limits_{c_2}^{c_3} f(x)dx + \int\limits_{c_3}^{b}|f(x)|dx.$$

Теорема. Фараз этайлик $[a,b]$ кесмада берилган узлуксиз $y=f_1(x)$ ва $y=f_2(x)$ функциялар учун $f_1(x)\leq f_2(x)$ тенгсизлик ўринли бўлсин. Унда $y=f_2(x)$ ва $y=f_1(x)$ эгри чизиқлар орасидаги фигуранинг юзи S ушбу



$$S=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx$$

формула ёрдамида ҳисобланади.

Мисол. Юқоридан $y=x+1$ чизиғи билан, қуйидан $y=0$ (абсцисса ўқи билан), чапдан $x=0$ (ордината ўқи билан) чизиқлари билан ва ўнгдан $y=x^2-1$ парабола билан чегараланган фигура юзи ҳисоблансин (чизмага қаранг).

Изланган юза S_1+S_2 дан иборат. S_1–трапеция. Шунинг учун $S_1=\frac{1+2}{2}\cdot 1=\frac{3}{2}$ Иккинчи томондан $S_1=\int_0^1 (x+1)dx=\left.\frac{(x+1)^2}{2}\right|_0^1=\frac{3}{2}$; S_2 юзани топиш учун юқоридаги теоремадан фойдаланамиз:

$$S_2=\int_1^2 [(x+1)-(x^2-1)]dx=\int_1^2 xdx-\int_1^2 x^2dx+\int_1^2 2dx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^2-\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2+2x\Big|_1^2=\frac{1}{2}[4-1]-$$

$$\frac{1}{3}(8-1)+2=\frac{3}{2}-\frac{7}{3}+2=\frac{9-14+12}{6}=\frac{7}{6}.$$

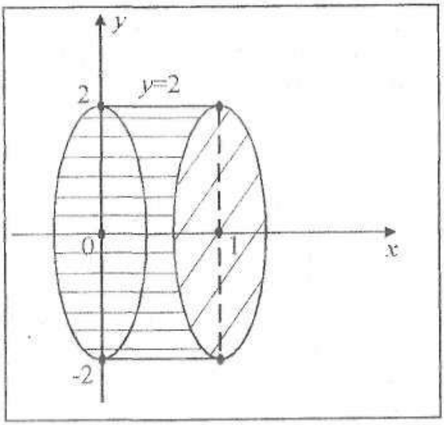
Шундай қилиб, $S=S_1+S_2=\frac{3}{2}+\frac{7}{6}=2{,}5.$

Энди айланма жисм ҳажмини ҳисоблашга тўхталамиз. Фараз этайлик, $[a,b]$ кесмада узлуксиз ва аниқ ишорали $y=f(x)$ функция берилган бўлсин. Унда юқоридан $y=f(x)$ эгри чизиқ билан ($f(x)\geq 0$ бўлган ҳол), қуйидан абсцисса ўқи билан, чапдан $x=a$, ўнгдан $x=b$ вертикал чизиқлар билан чегараланган фигура эгри чизиқли трапеция бўлади. Уни абсцисса (ёки ордината) ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисоблайлик. Бу жисм ҳажми ушбу

$$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)dx$$

формула ёрдамида ҳисобланади.

Мисол. [0, 1] кесмада аниқланган $y=2$ чизиқни абсцисса ўқи атрофида айлантирсак, цилиндр ҳосил бўлади (чизмага қаранг). Цилиндр ҳажмини бу ҳолда оддий формула ёрдамида ҳисоблаш мумкин:



$$V_x=\pi\cdot 2^2\cdot 1=4\pi.$$

Юқоридаги формуладан фойдалансак,

$$V_x=\pi\int_0^1 2^2\,dx=4\pi$$

Агар $c=f(a)$, $d=f(b)$ деб белгиласак, $x=\varphi(y)$ бўлганда фигурани ордината ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ушбу

$$V_x=\pi\int_c^d \varphi^2(y)dy$$

формула ёрдамида ҳисобланади.

Аниқ интеграл ёрдамида эгри чизиқ ёйининг узунлигини ҳам ҳисоблаш мумкин. Агар $y=f(x)$ эгри чизиғининг $(a, f(a))$ ва $(b, f(b))$ нуқталари орасидаги ёй узунлигини l десак, у қуйидагича ҳисобланади:

$$l=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Шу формула ёрдамида радиуси R бўлган айлана узунлигини ҳисоблаш мумкин.

9–§. Аниқ интеграл тушунчасидан иқтисодиётда фойдаланиш. Джинни коэффициенти

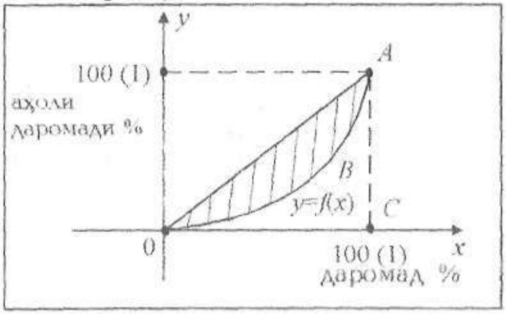
Аниқ интегралдан жуда кўп татбиқий масалаларни ечишда фойдаланилади. Юқорида келтирилган татбиқлари ҳам, бошқа татбиқлар ҳам бевосита иқтисодиётга алоқадор.

Агар меҳнат сарфи (меҳнат ресурслари сарфи) чизиқли функция $\alpha t+\beta$, капитал сарфи ўзгармас бўлса, ишлаб чиқа–рилган ижтимоий маҳсулот миқдори $g(t)=(\alpha t+\beta)\,e^{t}_{\gamma}$ бўлади. Бунда T йил ичида ишлаб чиқарилган маҳсулот миқдори ушбу

$$Q=\int_0^T (\alpha t+\beta)\,e^{t}\,dt$$

формула ёрдамида ҳисобланади.

Иқтисодиётда аҳоли даромадларини тақсимлашнинг тенг–сизлик даражасини ҳисоблаш ҳам аниқ интеграл ёрдамида ҳисобланади. Унда Лоренц эгри чизиғи муҳим аҳамиятта эга. Лоренц эгри чизиғи даромад процентининг аҳоли даромади процентига боғланишини англатади. Агар даромад текис тақ–симланса, Лоренц эгри чизиғи биссектрисага айланади (OA–биссектриса).



Чизмада OBA–Лоренц эгри чизиғи. Шу чизмада OBA фигура юзининг OAC учбурчак юзига нисбати аҳоли даромади тақсимо–тининг тенгсизлик дара–жасини англатади.

Бу миқдор Джинни коэффициенти дейилади. Уни k деб белгиланади.

$$k=\frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAC}}=1-\frac{S_{OBAC}}{S_{\Delta OAC}}=1-2S_{OBAC}.$$

Бунда S_{OBAC} миқдор аниқ интеграл орқали қуйидагича ёзи–лади:

$$S_{OBAC}=\int_0^1 f(x)dx\,.$$

Равшанки, $0\le k<1$ бўлиб, k нинг қиймати нолга қанча яқин бўлса, тақсимотнинг тенгсизлик даражаси шунча кам бўлади.

Мисол. Бирор мамлакатнинг Лоренц эгри чизиғи $y=1\sqrt{1-x^2}$ функция орқали ифодаланади дейлик. Унда x–аҳоли улуши, y–аҳоли даромади улуши. Джинни коэффициентини ҳисобланг.

Ечиш. $k=1-2\cdot\left(1-\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx\right)=2\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx-1;\quad \int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}$,

шундай қилиб, $k=2\cdot\frac{\pi}{4}-1=\frac{\pi}{2}-1\approx 0{,}57$.

Бундан, k нинг 0 дан анча катталигидан олинган мамлакатда аҳоли орасида даромад тақсимотининг нотекис тақсимланган–лиги келиб чиқади.

Дисконтирлаш деб йиллик проценти p бўлганда t вақтдан кейин олинган суммага қараб бошланғич суммани аниқлаш тушунилади. Бундай масала капитал харажатнинг иқтисодий самарадорлигини аниқлашда учрайди.

Фараз этайлик, K_t t вақт давомида олинган сўнгги сумма, K бошланғич сумма бўлсин. Унда t йилдан кейинги сумма $K_t=K(1+\frac{p}{100}t)$ бўлади. Бундан $K=\frac{K_t}{1+\frac{p}{100}t}$ келиб чиқади.

Мураккаб процент ҳолида $K_t=K(1+\frac{p}{100}t)t$ бўлади ва

$$K=\frac{K_t}{\left(1+\frac{p}{100}t\right)^t}.$$

Ҳар йилги тушум (даромад) $f(t)$ функция ёрдамида тавсиф–ланади ва процентлар дисконтирланган даромад қуйидаги формула ёрдамида топилади:

$$K=\int_0^T f(t)e^{-\frac{p}{100}t}\,dt.$$

АДАБИЁТЛАР

1. Высшая математика для экономистов (под ред. проф. Н.Ш.Кре–мера .Москва, «Банки и биржи», Издательское объединение «ЮНИ–ТИ», 1997

2. Азларов Т., Мансуров Ҳ., Математик анализ, Тошкент, «Ўқи–тувчи», I том, 1994.

3. Карасев А. И., Аксютина З. М., Савельева Т. И., Курс высшей математики для экономических вузов. Москва, Высшая школа, 1982, ч.1.

8–БОБ. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

1–§. Асосий тушунчалар

Табиатда ҳаракат билан, турли миқдорларнинг ўзгариши билан боғланган жараёнлар кўплаб учрайди. Улар ўз ҳаракат қонунларига эга. Бу қонунлар номаълум миқдор (функция), унинг ҳосиласи (дифференциали) орасидаги муносабатни тавсифлайди. Агар ўша муносабат номаълум функциянинг ҳосиласи (дифференциали)ни албатта ўз ичига олса, тегишли муносабат дифференциал тенглама бўлади.

Ушбу

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

кўринишдаги тенглама биринчи тартибли ҳосилага нисбатан ечилган дифференциал тенглама дейилади.

Ушбу

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{2}$$

кўринишдаги тенглама биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенглама дейилади.

Ушбу

$$y' = f(x)g(x) \tag{3}$$

кўринишдаги тенглама биринчи тартибли ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенглама дейилади.

Ушбу

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{4}$$

кўринишдаги тенглама биринчи тартибли бир жинсли дифференциал тенглама дейилади.

Ушбу

$$y' = \varphi(y) \tag{5}$$

кўринишдаги тенглама биринчи тартибли автоном дифференциал тенглама дейилади.

Ушбу

$$y' = a(x)y + b(x)y^{\alpha} \tag{6}$$

кўринишдаги тенглама Бернулли дифференциал тенглама дейилади.

Ушбу

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x) \tag{7}$$

тенглама иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенглама дейилади.

Ушбу

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = b(x), \qquad a_i = \text{const}, \quad i=0,\ 1,\ 2 \tag{8}$$

тенглама иккинчи тартибли чизиқли ўзгармас коэффициентли дифференциал тенглама дейилади.

Дифференциал тенгламаларнинг турларини санаб ўтишни давом эттириш мумкин эди. Биз юқоридагилар билан чегараланамиз.

Умуман, n–тартибли дифференциал тенгламалар қуйидаги

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) \quad \text{ёки} \quad y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$$

кўринишда ёзилади. Биз асосан юқорида санаб ўтилган биринчи ва иккинчи тартибли дифференциал тенгламаларга ҳамда ана шундай тенгламалар билан тавсифланадиган иқтисодий жараёнларга тўхталамиз.

Аввал иккита мисол кўрайлик.

1. Демография фанида аҳолининг сони ўсиши (ёки камайиши) қонунлари ўрганилади. Содда ҳолда аҳоли сони ўсишининг тезлиги аҳоли сонига тўғри пропорционал деб қаралади. $N(t)$ t моментдаги аҳоли сони, $\dot{N}(t) = \dfrac{dN(t)}{dt}$ ҳосила бўлса, $\dot{N}(t) = kN(t)$, k=const биринчи тартибли дифференциал тенглама. Ушбу $N(t) = N_0 e^{kt}$ функция шу қонуниятта бўйсунади. Уни Мальтус қонуни деб юритилади. Аслида демографик қонун юқоридагидан мураккаброқ кўринишга эга, яъни $\dot{N}(t) = kN(t) + pN^2(t)$, $k>0$, p ихтиёрий. Ундаги $pN^2(t)$ қўшилувчи қонунга тўғриланиш киритади. У дифференциал тенглама Бернулли тенгламаси дейилади.

2. Радиоактив модданинг парчаланиш қонуни $\dot{m}(t) = -km(t)$, k>0 кўринишда ёзилади. Ушбу $m(t) = m_0 e^{-kt}$ функция шу қонуниятта бўйсунади. Аслида тўғриланган қонуният қуйидаги $\dot{m}(t) = -km(t) + pm^2(t)$, k>0 p ихтиёрий, кўринишда ёзилади. Бу тенглама ҳам Бернулли номи билан аталади.

Энди (1) тенглама учун ечим тушунчасини киритамиз.

Таъриф. (1) тенгламада f(x,y) функция R^2 текисликнинг Г соҳасида аниқланган бўлсин. Агар (a,b) интервалда аниқланган $y = \varphi(x)$ функция учун қуйидаги уч шарт:

1°. $(x, \varphi(x)) \in \Gamma$, $\Gamma \subset R^2$;

$2°.\ \varphi(x) \in C^1(I)$;

$3°.\ \dfrac{d\varphi(x)}{dx} \equiv f(x, \varphi(x)),\ x \in I$

бажарилса, у ҳолда $y = \varphi(x)$ функция I интервалда (1) тенгламанинг ечими дейилади.

Қисқача айтганда, (1) тенгламани айниятга айлантирадиган ҳар бир $y = \varphi(x)$, $x \in I$ функция шу тенгламанинг ечими дейилади.

Дифференциал тенгламанинг ечимини топиш уни интеграллаш дейилади. Ечимининг графиги интеграл эгри чизиқ дейилади.

Бизга $y = \varphi(x, C)$ бир параметрли эгри чизиқлар оиласи берилган бўлсин. Агар ушбу иккита:

$$\begin{cases} y = \varphi(x, C), \\ y'_x = \varphi'_x(x, C) \end{cases}$$

мунособатлардан C ни чиқариш натижасида $y' = f(x, y)$ тенглама ҳосил бўлса, шу $y = \varphi(x, C)$ функция (1) тенгламанинг умумий ечими дейилади. Масалан, $y' = 2y$ тенглама учун $y = Ce^{2x}$ функция умумий ечим. Ҳақиқатдан, $y'_x = C \cdot 2e^{2x} = 2 \cdot Ce^{2x} = 2y$ яъни $y' = 2y$ келиб чиқади.

Агар бир параметрли эгри чизиқлар оиласи берилган бўлса, эгри чизиқлар силлиқ бўлганда уларнинг дифференциал тенгламасини топиш мумкин. Масалан, $y = Ce^{2x}$ чизиқлар оиласи учун, ҳозиргина топилдики, дифференциал тенглама $y' = 2y$ бўлади. Яна ушбу $y = Cx^2 + 5$ чизиқлар оиласининг дифференциал тенгламасини топайлик:

$$\left.\begin{matrix} y = Cx^2 + 5 \\ y' = 2Cx \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} C = \dfrac{y-5}{x^2} \\ y' = 2x \cdot \dfrac{y-5}{x^2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow y' = \frac{2}{x} y - \frac{10}{x}$$

охирги тенглама (2) кўринишга эга, у биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламадир.

Ушбу

$$\left.\begin{aligned} y' &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

масала Коши масаласи дейилади.

Бу масала $(x_0, y_0) \in \Gamma$ нуқтадан ўтадиган интеграл эгри чизиқни топишдан иборат. Шу интеграл эгри чизиқ ягонами? — деган савол муҳимдир. Бу саволга мавжудлик ва ягоналик теоремалари жавоб беради.

2–§. Биринчи тартибли дифференциал тенгламалар. Мавжудлик ва ягоналик теоремалари

Биз (1) кўринишдаги дифференциал тенгламалар учун Коши масаласи ечимининг мавжудлги ва ягоналиги ҳақидаги теоремаларга қисқача тўхталамиз.

1–теорема (Коши). Агар (1) тенгламада $f(x, y)$ ва $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ функциялар очиқ $\Gamma \subset R^2$ соҳада узлуксиз бўлса, у ҳолда:

1) Ихтиёрий $(x_0, y_0) \in \Gamma$ нуқта учун $y(x_0)=y_0$ шартни қаноатлантирадиган $y=y(x)$ функция мавжуд;

2) Агар икки ечим: $y=y_1(x)$, $x \in I_1$; $y=y_2(x)$, $x \in I_2$ ҳеч бўлмаса битта $x=x_0$ нуқтада устма–уст тушса, у ҳолда улар I_1 ва I_2 интервалларнинг умумий қисмида устма–уст тушади.

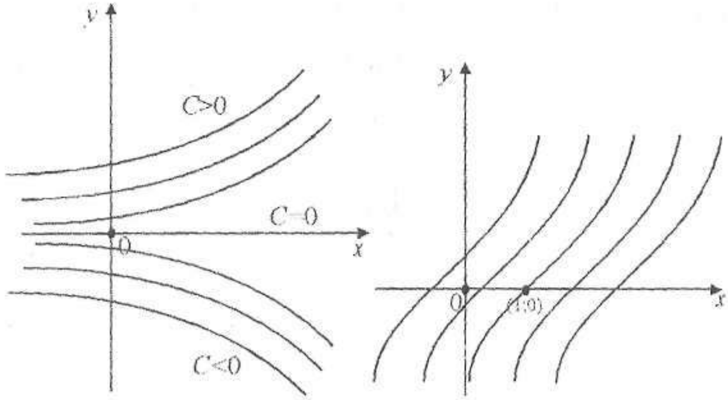
Теоремадан равшанки $x_0 \in I_1 \cap I_2$; $y_1(x) \equiv y_2(x)$, $\forall x \in I_1 \cap I_2$.

2–теорема (Пеано). Агар (1) тенгламада $f(x,y)$ функция очиқ Γ R^2 соҳада узлуксиз бўлса, у ҳолда (x_0, y_0) Γ нуқтадан камида битта интеграл эгри чизиқ ўтади.

Ягоналик ҳақида яна учинчи теорема ҳам бор. У Пикар–Линделёф теоремаси дейилади. Уни келтириб ўтирмаймиз.

Мисол. 1) $y'=y$ тенглама учун $y=ce^x$ умумий ечим.

Унда $f(x,y)=y$ бўлиб, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=1$, демак, 1–теорема шартлари $\Gamma=R^2$ да бажарилади. Ягоналик бажарилади.



2) $y'=y^{2/3}$ тенглама учун аввало $y=0$ ечим бўлади. Қолаверса, $y=\left(\frac{x+c}{3}\right)^3$ эгри чизиқлар ҳам ечимни ифодалайди. Равшанки, (1; 0) нуқтадан $y\equiv 0$ ва $y=\left(\frac{x-c}{3}\right)^3$ эгри чизиқлар ўтади. Ягоналик йўқ.

3–§. Ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламалар

Аввал иккита содда дифференциал тенгламаларни кўрайлик:

1. $y'=f(x)$. Умумий ечими $y=\int f(x)dx$.

Мисол. $y'=\frac{1}{x}$; $y=\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$.

2. $y'=\varphi(y)$. Умумий ечими: $\int\frac{dy}{\varphi(y)}=x$.

Мисол. $y'=y$; $\frac{dy}{y}=dx$; $\int\frac{dy}{y}=x$; $\ln|y|=x+\ln C$; $y=Ce^x$.

Энди ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламаларга тўхтаймиз:

3. Ушбу

$$y'=f(x)g(x) \tag{3}$$

тенглама ўзгарувчилари ажраладиган тенглама эканини айтиб ўтган эдик. Уни қуйидагича ўзгартирамиз:

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(x)\,;\ \frac{dy}{g(y)}=f(x)dx,\ \ g(y)\neq 0;$$

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx.$$

Мисол. $y'=xy$; $\frac{dy}{y}=xdx$; $\ln|y|=\frac{x^2}{2}+\ln C$;

$$y=Ce^{\frac{x^2}{2}}\ .$$

Иқтисодий масала. Агар $y=f(k)$ ўртача меҳнат унумдорлиги бўлса, унинг эластиклиги $\frac{f'(k)}{f(k)}\cdot k$ функция билан ифодаланади. Шу эластиклик ўзгармас бўлганда ушбу $\alpha=\frac{f'(k)}{f(k)}\cdot k$, α=const дифференциал тенгламага келамиз. Ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламадир. Уни интеграллаймиз:

$$\frac{f'(k)}{f(k)}=\frac{\alpha}{k}\,;\ \int\frac{f'(k)}{f(k)}dk=\int\frac{\alpha}{k}dk\,;\ \ln f(k)=\ \ln k+\ln C;\ f(k)=Ck^{\alpha}\ ,\ C>0;$$

охирги фунция Кобб-Дуглас функцияси учун ўртача меҳнат унумдорлигидан иборат.

4–§. Биринчи тартибли бир жинсли дифференциал тенгламалар

Биринчи тартибли бир жинсли дифференциал тенглама $y=\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ ушбу $\frac{y}{x}=u$, яъни $y=ux$ алмаштириш ёрдамида янги номаълум функция $u(x)$ га нисбатан ўзгарувчилари ажраладиган тенгламага келтирилади. Ҳақиқатан,

$$y'=u'\cdot x+u;\ u'x+u=\varphi(u);\ u'x=\varphi(u)-u;\ \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\varphi(u)-u}{x}\,.$$

Агар $\varphi(u)-u\neq 0$ бўлса, $\dfrac{du}{\varphi(u)-u}=\dfrac{dx}{x}$ кўринишдаги тенглама ҳосил бўлади. Унинг ечими: $\int\dfrac{du}{\varphi(u)-u}=\int\dfrac{dx}{x}$.

Мисол. $\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{1-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}+\dfrac{y}{x}$;

$$\frac{du}{dx}\cdot x+u=\sqrt{1-u^2}+u;\ \frac{du}{dx}=\frac{\sqrt{1-u^2}}{x};\ \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{dx}{x};$$

$$\arcsin u=\ln x+\ln C;\ \arcsin\frac{y}{x}=\ln Cx.$$

5–§ Биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламалар. Бернулли тенгламаси

Биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенглама $y'=a(x)y+b(x)$ учун умумий ечим қуйидаги формула ёрдамида ёзилади:

$$y(x)=\left(C+\int b(x)e^{-\int a(x)dx}dx\right)e^{\int a(x)dx},\ C\text{–ихтиёрий ўзгармас.}$$

Мазкур формула икки усул билан исботланиши мумкин. Улардан биттаси шу формула билан ёзилган $y(x)$ функция берилган тенгламани қаноатлантиришини текшириш. Ҳақиқатан,

$$y'(x)=f(x)\,e^{-\int a(x)dx}\cdot e^{\int a(x)dx}+\underbrace{\left(C+\int b(x)e^{-\int a(x)dx}dx\right)\cdot e^{\int a(x)dx}}_{y(x)}\cdot a(x)=$$

$$=b(x)+a(x)y(x),$$

яъни $y'(x)\equiv a(x)y(x)+b(x)$.

Мисол. $y'(x)=-\operatorname{tg}x\cdot y+\dfrac{1}{\cos x}$, $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$;

$$y(x)=\left(C+\int\frac{1}{\cos x}e^{\int tgx dx}dx\right)e^{-\int tgx dx}=\left(C+\int\frac{dx}{\cos^2 x}\right)\cos x=C\cdot\cos x+\sin x.$$

Энди чизиқли дифференциал тенгламага келтириладиган <u>Бернулли тенгламасини</u> кўрамиз. Бу тенглама қуйидагича ёзилади: $y'=a(x)y+b(x)y^{\alpha}$, α –ихтиёрий ҳақиқий сон. Агар $\alpha=0$ бўлса, $y'=a(x)y+b(x)$ –чизиқли тенглама, $\alpha=1$ бўлса, $y'=[a(x)+b(x)]y$ –ўз–

гарувчилари ажраладиган тенглама ҳосил бўлади. Энди $\alpha\neq0$, $\alpha\neq1$ бўлсин. Унда унинг икки томонини y^{α} га бўлиб юборамиз: $y^{-\alpha}y'=$ $=a(x)y^{1-\alpha}+b(x)$. Ушбу $y^{1-\alpha}=z$ алмаштириш бажарамиз. $z'=(1-\alpha)y^{-\alpha}y'$. Янги ўзгарувчи $z(x)$ га нисбатан берилган тенглама қуйидаги кўринишга келади:

$$\frac{dz}{dx}=(1-\alpha)\cdot a(x)z+(1-\alpha)b(x)$$

охирги тенглама z га нисбатан чизиқлидир.

Иқтисодий масала. Миллий даромадни капитал харажат ва истеъ-молга оптимал тақсимлаш масаласини ечиш ушбу $\frac{dk}{dt}=Sf(k)-(\mu+\eta)k$ кўринишдаги тенгламани ўрганишга келтиради. Унда k–қуролланганлик, S жамғариш нормаси (S=const, $0<S<1$), $f(k)$ ўртача мехнат унумдорлиги. Агар $f(k)=a_0k^{\alpha}$ (Кобб–Дугласнинг ишлаб чиқариш функцияси учун) бўлса, $\frac{dk}{dt}=S\,a_0k^{\alpha}-(\mu+\eta)k$ Бернулли тенгламаси ҳосил бўлади.

Уни қуйидагича ўзгартирамиз:

$$(1-\alpha)k^{-\alpha}\frac{dk}{dt}=-(1-\alpha)(\mu+\eta)k^{1-\alpha}+(1-\alpha)a_0S;\ k^{1-\alpha}(t)=z(t);$$

$$\frac{dz}{dt}=(1-\alpha)k^{-\alpha}\frac{dk}{dt};$$

$$\frac{dz}{dt}=\underbrace{-(1-\alpha)(\mu+\eta)}_{a(t)}z+\underbrace{(1-\alpha)a_0\cdot S}_{b(t)}.$$

Охирги тенглама биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламадир. Уни интеграллаймиз:

$$z(t)=\left(C+(1-\alpha)a_0S\int e^{(1-\alpha)(\mu+\eta)t}dt\right)e^{-(1-\alpha)(\mu+\eta)t}=$$

$$=\left(C+(1-\alpha)a_0S\cdot\frac{1}{(1-\alpha)(\mu+\eta)}e^{(1-\alpha)(\mu+\eta)t}\right)e^{-(1-\alpha)(\mu+\eta)t}=Ce^{-(1-\alpha)(\mu+\eta)t}+\frac{a_0S}{\mu+\eta};$$

$$k(t)=\left[Ce^{-(1-\alpha)(\mu+\eta)t}+\frac{a_0S}{\mu+\eta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}};$$

Иқтисодиётда $\lim\limits_{t\to\infty} k(t)=\left(\dfrac{a_0S}{\mu+\eta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ муносабат ва $k=\left(\dfrac{a_0S}{\mu+\eta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ –горизонтал чизиқ муҳим аҳамиятга эга.

6–§. Тартиби пасаядиган 2–тартибли дифференциал тенгламалар

Баъзи ҳолларда иккинчи тартибли дифференциал тенгламаларни интеграллаш алмаштириш ёрдамида иккита биринчи тартибли тенгламаларни кетма–кет интеграллашга келтирилади.

1) $y''=f(x)$; $y'=\int f(x)dx+C_1$; $y=\int\left(\int f(x)dx\right)dx+C_1x+C_2$.

Мисол. $y''=x$; $y'=\dfrac{x^2}{2}+C_1$; $y=\dfrac{x^3}{6}+C_1x+C_2$.

2) $F(x, y', y'')=0$. Бу тенгламада номаълум функция $y(x)$ қатнашмаяпти. Унда $y'=z$ десак, $F(x, z, z')$–биринчи тартибли тенгламага келамиз.

Мисол. $xy''+y'=0$; $y'=z$ десак, $xz'+z=0$,

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{z}{x};\ \frac{dz}{z}=-\frac{dx}{x};$$

$$\ln|z|=-\ln|x|+\ln C_1;$$

$$z=\frac{C_1}{|x|};\ \frac{dy}{dx}=\frac{C_1}{|x|};\ y=C_1\ln|x|+C_2.$$

3) $F(y, y', y'')=0$. Бунда эркли ўзгарувчи қатнашмаяпти. Янги номаълум функция z ни $z(y)$ деймиз ва $z(y)=y'$ белги киритамиз:

$$y''=\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=z'\cdot z.$$

Мисол. $2yy''=(y')^2+1$;

$2\cdot y\cdot z'\cdot z=z^2+1$; $\dfrac{2zdz}{z^2+1}=\dfrac{dy}{y}$; $\ln(z^2+1)=\ln|y|+\ln C_1$;

$z^2+1=C_1y$; $y'^2=C_1y-1$; $y'=\pm\sqrt{C_1y-1}$; $\dfrac{dy}{\pm\sqrt{C_1y-1}}=dx$;

$C_1y-1=\dfrac{C_1^2}{4}(x+C_2)^2$.

7–§. Иккинчи тартибли чизиқли ўзгармас коэффициентли дифференциал тенгламалар

Ушбу $y''+py'+qy=f(x)$, p,q ўзгармас сонлар, кўринишдаги дифференциал тенглама иккинчи тартибли чизиқли ўзгармас коэффициентли тенглама дейилади. Агар $f(x)\equiv 0$ бўлса, уни бир жинсли, $f(x)\neq 0$ бўлганда бир жинсли бўлмаган тенглама деб юритилади. Аввал бир жинсли тенгламани кўрамиз.

1. $y''+py'+qy=0$; $p, q=\text{const}$. (1)

Шу тенгламанинг ечимини $y=e^{kx}$ кўринишда излаймиз: $y'=ke^{kx}$, $y''=k^2e^{kx}$ ифодалардан фойдаланиб ёзамиз:

$$k^2e^{kx}+pke^{kx}+qe^{kx}=0$$

ёки

$$k^2+pk+q=0 \qquad (2)$$

Топилган (2) квадрат тенглама берилган дифференциал тенгламанинг характеристик тенгламаси дейилади.

Дифференциал тенглама ечими (2) тенгламанинг ечимларига боғлиқ. Унда квадрат тенгламанинг *а*) турли ҳақиқий, *б*) битта икки каррали, *в*) комплекс илдизларга эга бўлган ҳоллар содир бўлади.

Теорема. (2) тенгламада p ва q лар ҳақиқий сонлар бўлсин. У ҳолда

а) агар характеристик тенгламанинг k_1 ва k_2 ечимлари ҳақиқий ва ҳар хил бўлса, (1) дифференциал тенгламанинг барча ечимлари (умумий ечим) ушбу

$$y=C_1 e^{k_1x}+C_2 e^{k_2x} \qquad (3)$$

формула билан берилади;

б) агар характеристик тенгламанинг k_1 ва k_2 ечимлари ўзаро тенг, яъни $k_1=k_2=k$ бўлса, (1) дифференциал тенгламанинг барча ечимлари (умумий ечими) ушбу

$$y=(C_1+C_2)e^{kx}$$

формула билан берилади;

в) агар характеристик тенгламанинг илдизлари $k_{1,2}=\alpha\pm i\beta$, $\beta\neq 0$ кўринишдаги комплекс сонлар бўлса, (1) тенгламанинг барча ечимлари (умумий ечими) ушбу

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$$

формула билан берилади.

Мисоллар. 1) $y''-y=0$ учун $k^2-1=0$ ва $k_{1,2}=\pm 1$.

Умумий ечим: $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$;

2) $y''-2y'+y=0$ учун $k^2-2k+1=0$ ва $(k-1)^2=0$ дан $k_{1,2}=1$ келиб чиқади. Умумий ечим: $y=(C_1+C_2x)e^x$;

3) $y''+\omega^2y=0$, $\omega>0$ учун $k^2+\omega^2=0$ ва $k_{1,2}=\pm i\omega$.

Умумий ечим: $y=C_1\cos\omega x+C_2\sin\omega x$.

Агар юқорида кўрилган ҳолларда C_1 ва C_2 ларга аниқ қийматлар берсак, натижада хусусий ечим ҳосил бўлади. Ушбу $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0$ шартларни қаноатлантирадиган ечимни излаш масаласи Коши масаласи дейилади.

Масалан, ушбу $y''-3y'+2y=0$, $y(0)=3$, $y'(0)=4$ Коши масаласини ечиш лозим дейлик. Аввал умумий ечимини ёзамиз $k^2-3k+2=0$, $k_1=1$, $k_2=2$; $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$; энди шартлардан фойдаланиб C_1 ва C_2 ларни топамиз. $y'=C_1e^x+2C_2e^{2x}$;

$$\left.\begin{matrix} 3=C_1+C_2 \\ 4=C_1+2C_2 \end{matrix}\right\},\quad C_1=2,\quad C_2=1.$$

Демак, Коши масаласининг ечими қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$y=2e^x+e^{2x}.$$

Энди иккинчи тартибли чизиқли ўзгармас коэффициентли бир жинсли бўлмаган тенгламаларни ўрганамиз.

2. $y''+py'+qy=f(x)$, $x\in(a,b)$, $f(x)\neq0$, $\forall x\in(a,b)$.

Мазкур тенгламани ечишнинг умумий усули ўзгармасни вариациялаш усули деб юритилади. Баъзи ҳолларда $f(x)$ функция махсус кўринишларга эга бўлганда хусусий ечимни ёзиш мумкин.

Ўзгармасни вариациялаш усулининг моҳияти қуйидагидан иборат. Аввал мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими топилади: $y=C_1y_1+C_2y_2$, бунда y_1 ва y_2 лар бир жинсли тенгламанинг иккита чизиқли эркли ечимларидан иборат. Агар $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ функциялар учун $C_1y_1+C_2y_2\equiv0$, $x\in(a,b)$ айният фақат $C_1=C_2=0$ бўлгандагина ўринли бўлса, шу $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ функциялар (a,b) интервалда чизиқли эркли дейилади. Акс ҳолда улар чизиқли боғлик дейилади.

Энди бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламанинг ечимини $y=C_1y_1+C_2y_2$ кўринишда излаймиз. Бунда C_1 ва C_2 функциялар ушбу

$$\begin{cases} C_1'y_1+C_2'y_2=0, \\ C_1'y_1'+C_2'y_2'=0, \end{cases}$$

системадан топилади.

Мисол. Ушбу $y''-3y'+2y=e^x$ тенгламани ечиш талаб этилган бўлсин. Мос бир жинсли тенглама $y''-3y'+2y=0$ учун $k^2-3k+2=0$, $k_1=1$, $k_2=2$; $y_*(x)=C_1e^x+C_2e^x$ умумий ечим. Энди $y(x)=C_1(x)e^x+C_2(x)e^{2x}$ деб оламиз. Унда

$$\begin{cases} C_1'e^x+C_2'e^{2x}=0, \\ C_1'e^x+C_2'\cdot 2e^x=0, \end{cases}$$

системадан $C_1'=-1$, $C_2'=e^{-x}$; бундан $C_1=-x+C_3$, $C_2=-e^{-x}+C_4$.

Шундай қилиб, бир жинсли бўлмаган тенгламанинг умумий ечими қуйидагича ёзилади:

$$y=(-x+C_3)e^x+(-e^{-x}+C_4)e^{2x}=\underbrace{C_3e^x+C_4e^{2x}}+(-x-1)e^x.$$

Шу ечим кўринишига эътибор берсак белги билан мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими белгиланган, $(x 1)e^x$ функция эса, бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечимидан иборат. Ҳақиқатан, $\varphi(x)=(-x-1)e^x$ десак,

$$\varphi'(x)=(-1)e^x+(-x-1)\cdot e^x=(-x-2)e^x,$$

$$\varphi''(x)=(-1)e^x+(-x-2)\cdot e^x=(-x-3)e^x;$$

$$y''-3y'+2y=\varphi''(x)-3\varphi'(x)+2\varphi(x)=(-x-3)e^x-3(-x-2)e^x+2(-x-1)e^x=e^x.$$

Теорема. Иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламанинг умумий ечими мос бир жинсли тенглама умумий ечими билан бир жинсли бўлмаган тенгламанинг бирор хусусий ечими йиғиндисидан иборат.

8–§. Биринчи тартибли автоном дифференциал тенгламалар

Биз аввалги маърузаларда фақат битта номаълум функциянинг ҳосилалари қатнашган дифференциал тенгламалар билан танишдик. Агар номаълум функциялар сони иккита ёки ундан кўп бўлса, биз дифференциал тенгламлар системасига эга бўламиз. Икки ёки ундан кўп секторли иқтисодий жараёнларни ўрганиш тенгламалар системасини ўрганишга олиб келади. Агар номаълум функцияларни $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ деб белгиласак,

$$y_i'=f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad i=1, 2, \dots, n \tag{4}$$

система дифференциал тенгламаларнинг нормал системаси дейилади. Агар x–эркли ўзгарувчи вақт t дан иборат бўлса, (4) системани <u>динамик система</u> дейилади. Кўпгина иқтисодий жараёнларнинг математик моделлари учун f_i функциялар вақт t га боғлиқ бўлмайди, яъни вақт ўтиши билан жараённинг кечиш қонуни ўзгармайди. Бундай ҳолларда система

$$y_i' = f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad i=1, 2, \ldots, n \tag{5}$$

кўринишда ёзилади ва автоном (мухтор) система деб юритилади. Автоном системаларнинг қатор муҳим хоссалари бор. Жумладан, агар $y=\varphi(t)$ ечим бўлса, $y=\varphi(t+C)$, $C=\mathrm{const}$, функция ҳам ечим бўлади; агар бирор $y=\varphi(t)$ ечим учун $\varphi(t_1)=\varphi(t_2)$, $t_1 \neq t_2$ тенглик бажарилса, қуйидаги икки ҳолдан бири юз беради:

1) барча t лар учун $\varphi(t) \equiv a$, $a=\mathrm{const}$;

2) шундай $T>0$ сон мавжудки, ихтиёрий t учун $\varphi(t+T)=\varphi(t)$ тенглик бажарилиб, $0<|\tau_2-\tau_1|<T$ бўлганда $\varphi(\tau_1) \neq \varphi(\tau_2)$ тенгсизлик ўринли бўлади.

Мазкур хоссаларнинг иқтисодий жараёнларни ўрганишдаги аҳамияти катта.

Агар $n=1$ бўлса, (5) система битта тенгламага эга бўлади: $y' = f(y)$. Уни скаляр автоном дифференциал тенглама деб юритилади.

Таъриф. (5) мухтор системанинг ҳолатлар фазоси деб шундай n ўлчовли фазога айтиладики, унда шу системанинг ечимлари траекториялар билан, системанинг ўзи эса вектор майдон билан тавсифланади. Траекториялар ҳолат тректориялари деб, векторлар ҳолат тезликлари деб аталади.

Интеграл эгри чизиқлар (интеграл чизиқлар) $(n+1)$ ўлчовли фазодаги эгри чизиқлардир. Шу эгри чизиқларнинг автоном системалар учун t ўқи бўйича $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ лар фазосига ортогонал проекцияси (сояси) траекториялар дейилади. Автоном системалар учун шу траекториялар 3 турли бўлади: 1) ўзаро кесишмайди; 2) фақат битта нуқтадан иборат бўлади; 3) даврий ечимни, яъни ёпиқ эгри чизиқни ифодалайди.

9–§. Автоном системаларнинг мувозанат ҳолати ва унинг турғунлиги

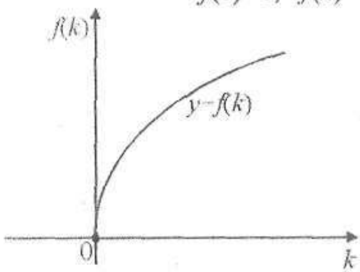
(4) автоном системанинг мувозанат ҳолати деб

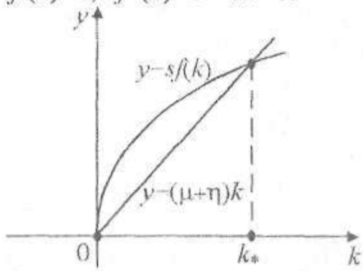
$$f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)=0, \quad i=1, 2, \ldots, n \tag{6}$$

чекли система ечимларига айтилади. Скаляр ҳолда мувозанат ҳолатлари $f(y)=0$ скаляр тенгламанинг ечимларидан иборат бўлади. Мисоллар: 1) $y'=1+y^2$; бу тенглама учун мувозанат ҳолати мавжуд эмас, чунки $1+y^2 \neq 0$; 2) $y'=\sin y$; бу тенглама учун чексиз кўп мувозанат ҳолатлари мавжуд, чунки $\sin y=0$ дан $y=n\pi$,

$n \in Z$ келиб чиқади; 3) Солоу модели учун $\dot{k} = sf(k) - (\mu + \eta)k$, $\dot{k} = \frac{dk}{dt}$ тенглама қуролланганлик k нинг ўзгариш тезлиги қонунини ифодалайди, унда $0 < s = \text{const}$–жамғариш нормаси, $f(k)$–ўртача меҳнат унумдорлиги, $k \geq 0$. Шу функция неоклассик деб аталадиган шартларни қаноатлантиради (чизмага қаранг):

$$f(0)=0, \ f(k)>0, \ f'(k)>0, \ f''(k)<0 \quad \forall k>0.$$

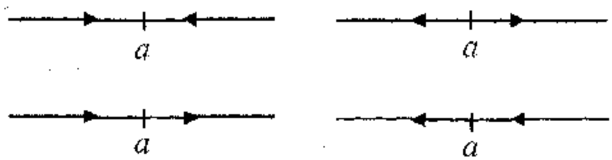




$$\lim_{k \to +0} f'(k) = +\infty .$$

Шу модель учун мувозанат ҳолатларни топайлик. Унинг учун $sf(k) - (\mu + \eta)k = 0$ тенглама ечимларини излаш лозим. Икки функция $y = sf(k)$, $0 < s < 1$ ва $y = (\mu + \eta)k$ графикларнинг кесишган нуқталари мувозанат ҳолатини англатади. Бу функцияларнинг хоссаларидан келиб чиқадиган хулоса шуки, иккита мувозанат ҳолати мавжуд: $k_1 = 0$, $k_2 = k_* > 0$. Бизни мувозанат ҳолатларининг турғунлиги қизиқтиради. Шу тушунчани киритайлик.

Турғунлик туршунчасини скаляр автоном дифференциал тенглама учун киритамиз. Скаляр тенглама учун ҳолатлар фазоси ҳолатлар тўғри чизиғидан иборат. Вақт ўтиши билан ҳолатлар нуқтаси ҳолатлар тўғри чизиғи бўйлаб ё ўнгга, ё чапга ҳаракат қилади. $x = a$ нуқта мувозанат ҳолати бўлсин. Агар вақт ўтиши билан $x = a$ дан иккала томонда ҳам ҳаракат шу $x = a$ нуқтага қараб содир бўлса, $x = a$ мувозанат ҳолати турғун дейилади, агар бир нуқталар $x = a$ дан икки томонга узоқлашиб кетаверса, $x = a$ мувозанат ҳолати нотурғун дейилади; агар томондан яқинлашиб, иккинчи томондан узоқлашиб кетаверса, $x = a$ ни ярим турғун дейилади.



Агар $f'(a)\neq 0$ бўлса, $f'(a)<0$ бўлганда турғун, $f'(a)>0$ бўлганда нотурғун бўлади. Агар $f'(a)=0$, $f''(a)\neq 0$ бўлса, $x=a$ –ярим турғун бўлади.

Умуман, $f^{(2n+1)}(a)<0$ бўлганда турғун, $f^{(2n+1)}(a)>0$ бўлганда нотурғун бўлади (бунда $f'(a)=\ldots=f^{(2n)}(a)=0$).

Мисоллар. 1 $y'=(y+1\ (y-2)$; $y1=-1$; $y_2=2$ мувозанат ҳолатлари; $y=y\ 2+y+1=2y\ 1$; $y(\ 1=\ 2\ 1=\ 3<0$; $y_1=\ 1$ турғун; $y(2=2\,2\ 1=3>0$; $y_2=2$ –нотурғун;

2) $\dot{k}=Sf(k)-(\mu+\eta)k$; $f(k)=Sf(k)-(\mu+\eta)k$; $f'(k_*)=Sf'(k_*)-(\mu+\eta)<0$ (тегишли чизмага). Демак, $k=k_*>0$ – мувозанат ҳолати турғун экан. Шу мувозанат ҳолати балансланган ўсишнинг оптимал режимини ифодалайди.

АДАБИЁТЛАР

1. Высшая математика для экономистов (колл. авторов под редакцией проф. Н.Ш.Кремера).–Москва, «Банки и биржи», Издательское объединение «ЮНИТИ», 1997, (глава 12).

2. Салоҳитдинов М.С., Насритдинов Ғ., Оддий дифференциал тенгламалар:– Тошкент, «Ўзбекистон», 1994, (2-нашри), (1 боб, 6 боб, 10 боб, 10.3 § .

9–БОБ. СОНЛИ ВА ДАРАЖАЛИ ҚАТОРЛАР

1–§. Сонли қаторлар ва уларнинг яқинлашувчилиги

Қатор математик, шу жумладан, иқтисодий масалаларни ечиш жараёнида чексиз кўп қўшилувчиларни ўз ичига олган йиғиндиларни кўришга тўғри келади. Бундай ҳолларда қатор–лар назариясига мурожаат қилинади. Аввал биз қўшилувчилар ҳақиқий сонлардан иборат бўлган ҳолни кўрамиз.

Ушбу $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ ҳақиқий сонлар кетма–кетлиги бе–рилган бўлсин.

1–таъриф. Қуйидаги $\sum\limits_{i=1}^{\infty} = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ ифода <u>сонли қатор</u> дейилади.

Унда $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ лар қатор ҳадлари, u_n эса унинг умумий ёки n–ҳади дейилади.

Қаторнинг чекли сондаги ҳадлари йиғиндисини кўрамиз:

$$S_1=u_1,\ S_2=u_1+u_2,\ \ldots,\ S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n.$$

Булар хусусий йиғиндилар, $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$– хусусий йиғиндилар кетма–кетлиги дейилади.

2–таъриф. Агар хусусий йиғиндилар кетма–кетлигининг чекли лимити мавжуд бўлса, яъни

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \quad S\text{–чекли},$$

тенглик ўринли бўлса, <u>қатор яқинлашувчи</u>, S унинг йиғиндиси дейилади. Бу ҳолда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i = S$ деб ёзса бўлади.

Акс ҳолда, яъни хусусий йиғиндилар кетма–кетлиги чекли лимитга эга бўлмаса, <u>қатор узоқлашувчи</u> дейилади.

Мисол ўрнида геометрик прогрессияни олайлик:

$$\div b, bq, bq^2, \ldots bq^{n-1}, \ldots.$$

Унинг барча ҳадлари йиғиндиси

$$b + bq + bq^2 + \ldots + bq^{n-1} + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} bq^{i-1}$$

каби ёзилади. Равшанки,

$$S_n = \frac{b(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Уч ҳол юз бериши мумкин:

1) $|q|<1$, унда $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. Шунинг учун

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{bn^q}{q-1}-\frac{b}{q-1}\right)=\frac{b}{1-q}.$$

Демак, $S=\frac{b}{1-q}$. Қатор яқинлашувчи ва йиғиндиси $S=\frac{b}{1-q}$;

2) $|q|>1$, унда $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$ ёки $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ – мавжуд эмас.

Бу ҳолда қатор узоқлашувчи бўлади;

3) $|q|=1$; $q=1$ бўлганда $S_n = nb$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$; $q=-1$ бўлганда

$$S_n = b-b+b-b+\ldots=b(1-1+1-1+\ldots(-1)^{n-1})$$

$$S_n = \begin{cases} b, n-\text{ток}, \\ 0, n-\text{жуфт}. \end{cases}$$

Демак, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$–мавжуд эмас. Шундай қилиб, қурилаётган қатор $|q|>1$ да яқинлашувчи, $|q|\geq 1$ да узоқлашувчи бўлади.

Геометрик прогрессия ҳадларидан тузилган қаторни геометрик қатор деб аталади.

Яқинлашувчи қаторларнинг баъзи хоссаларини келтирамиз:

1. Агар $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ қатор яқинлашувчи ва $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i = S$ бўлса, $\lambda \neq 0$ учун $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda U_i$ қатор ҳам яқинлашувчи ва $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda u_i = \lambda S$ бўлади.

2. Агар $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i = S_1$ бўлса, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} v_i = S_2$ бўлса, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (u_i + v_i) = S_1 + S_2$.

3. Агар қатор яқинлашувчи бўлса, ундан чекли сондаги ҳадларини олиб ташлаш ёки унга чекли сондаги ҳадлар қўшиш натижасида яна яқинлашувчи қатор ҳосил бўлади.

Ҳар бир қатор учун $S=S_n+r_n$, S_n –хусусий йиғинди, ифода ўринли.

4. Қатор яқинлашувчи бўлиши учун $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$ тенглик ўринли бўлиши зарур ва етарли.

Энди қатор яқинлашувчи бўлишининг зарурий шартини келтирамиз.

1–теорема. Агар $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i = S$ қатор яқинлашувчи бўлса, унда

$$\lim_{i\to\infty} u_i = 0$$

тенглик ўринли бўлади.

Аммо агар $\lim\limits_{i\to\infty} u_i = 0$ бўлса, бундай қаторнинг яқинлашувчи–лиги ҳақида ҳеч нима дейиш мумкин эмас.

Агар $\lim\limits_{i\to\infty} u_i \neq 0$ бўлса, доим қатор узоқлашувчи бўлади.

2–§. Мусбат ҳадли қаторлар

Агар $\sum\limits_{m=1}^{\infty} u_n$ қаторнинг барча $u_1, u_2, \ldots, u_m, \ldots$ ҳадлари мусбат ҳақиқий сонлардан иборат бўлса, уни мусбат ҳадли қатор дейилади.

Қуйида мусбат ҳадли қаторларнинг яқинлашувчи бўлиш шартларига оид теоремаларни келтирамиз:

2–теорема. Агар $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ ва $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ мусбат ҳадли қаторлар бўлиб, $\forall n$ учун $u_n \leq v_n$ тенгсизлик ўринли бўлса, унда

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ нинг яқинлашувчилигидан $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ нинг ҳам яқинла–шувчилиги келиб чиқади;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ нинг узоқлашувчилигидан $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ нинг ҳам узоқла–шувчилиги келиб чиқади.

Мазкур теорема таққослаш теоремаси деб юритилади.

Кўпинча бунда ушбу қаторлардан фойдаланиш тавсия этилади :

1) геометрик қатор $\sum\limits_{n=1}^{\infty} bq^{n-1}$ –яқинлашувчи $|q|<1$ бўлганда, узоқлашувчи – $|q|\geq 1$ бўлганда;

2) гармоник қатор $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ –узоқлашувчи;

3) умумлашган гармоник қатор $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ –яқинлашувчи $-\alpha>1$ бўлганда, узоқлашувчи $-\alpha\leq 1$ бўлганда.

3–теорема. Агар $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$ бўлса, $l<1$ бўлганда қатор яқинлашувчи, $l>1$ бўлганда –узоқлашувчи, $l=1$ бўлса савол очиқ қолади.

4–теорема. Ушбу мусбат ҳадли $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ қатор учун $u_1\geq u_2\geq\ldots\geq u_n\geq\ldots$ ҳамда $f(n)=u_n$ ва $f(x)$ функция $x\geq 1$ да аниқланган, узлуксиз ва ўсмайдиган бўлсин. Унда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ қатор яқинлашувчи бўлиши учун

$$\int_1^{\infty} f(x)dx$$

хосмас интеграл яқинлашувчи бўлиши зарур ва етарли.

Агар $F(x)$ функция $f(x)$ учун бошланғич бўлса, $\int_1^{\infty} f(x)dx=\lim\limits_{x\to\infty} F(x)-F(1)$ тенглик ёрдамида хосмас интеграл ҳисобланади.

Қаторлар мавзуси жуда кенг. Турли ишорали ҳадларга эга бўлган қаторлар, ишораси навбат билан ўзгарадиган ҳадли қаторлар ва бошқа қаторлар учрайди. Биз уларга тўхталмаймиз. Аммо ҳадлари сонлардан эмас, функциялардан иборат қаторларнинг муҳим хусусий ҳоли–даражали қаторларга қисқача тўхтаймиз.

3–§. Даражали қаторлар ва уларнинг яқинлашиш соҳаси

1–таъриф. Ушбу

$$c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n+\ldots$$

кўринишда ёзилган ҳар бир қатор даражали қатор дейилади.

Унда c_0, c_1, …, c_n, … лар даражали қатор коэффициентлари дейилади.

Равшанки, x нинг ҳар бир қиймати учун мос сонли қатор ҳосил бўлади. Баъзи x лар учун қатор яқинлашувчи, баъзилари учун узоқлашувчи бўлиши мумкин. x нинг даражали қатор яқинлашувчи бўладиган қийматлари мажмуаси унинг яқинлашиш соҳаси дейилади.

Мисол учун ушбу $1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$ қаторнинг яқинлашиш соҳасини топайлик. Уни махражи $q=x$ бўлган геометрик қатор деб қараш мумкин. Биламизки, у $|q|=|x|<1$ бўлганда яқин–лашувчи. Демак, берилган даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси $(-1;\ 1)$ интервалдан иборат.

Абель теоремаси. 1) Агар даражали қатор $x=x_0\neq 0$ да яқинлашувчи бўлса, у $|x|<|x_0|$ тенгсизликни қаноатланти–рувчи барча x лар учун ҳам яқинлашувчи бўлади;

2) агар даражали қатор $x=x_1$ да узоқлашувчи бўлса, у $|x|>|x_1|$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча x лар учун ҳам узоқла–шувчи бўлади.

Абель теоремасидан келиб чиқадики, даражали қатор учун шундай $R\geq 0$ сон мавжудки, $|x|<R$ да қатор яқинлашувчи, $|x|>R$ да узоқлашувчи бўлади. Шу R сон яқинлашиш радиуси дейилади. Агар даражали қатор яқинлашувчи бўлса (бирор соҳада), унинг яқинлашиш радиуси R учун қуйидаги формула ўринли:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|.$$

Юқоридаги мисолда $c_0=c_1=c_2=\ldots=c_n=\ldots=1$ бўлгани учун $\frac{c_n}{c_{n+1}}=1$ ва $R=1$ бўлади.

Даражали қаторларнинг икки муҳим хоссасини келтирамиз:

1) даражали қаторни унинг яқинлашиш соҳасида ҳадма–ҳад дифференциаллаш мумкин;

2) даражали қаторни унинг яқинлашиш соҳаси учун $[-R,\ R]$ кесмада ҳадма–ҳад интеграллаш мумкин.

4–§. Маклорен ва Тейлор қаторлари

Фараз этайлик, $y=f(x)$ функция $x=0$ нуқта атрофида аниқ–ланган ва n марта дифференциалланувчи бўлсин ҳамда унинг даражали қаторга ёйилмаси

$$f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n+\ldots$$

кўринишга эга бўлсин. Унда $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$ ҳосилаларни яқинлашиш соҳасида ҳадма–ҳад дифференциаллаб топамиз. Уларни $x=0$ нуқтада ҳисоблаймиз:

$$c_0=f(0),\ c_1=f(0),\ c_2=\frac{f''(0)}{2!},\ c_3=\frac{f'''(0)}{3!},\ldots,\ c_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Натижада $f(x)$ учун ёйилма қуйидагича ёзилади:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots.$$

Ҳосил бўлган қатор <u>Маклорен қатори</u> дейилади.

Таъкидлаб айтамизки, расмий равишда $y=f(x)$ функция учун тузилган Маклорен қатори $f(x)$ функцияга яқинлашиши ҳам, узоқлашувчи бўлиши ҳам мумкин.

Агар $f(x)=S_n(x)+r_n(x)$ деб ёзсак, қуйидаги теорема ўринли.

Теорема. Маклорен қатори $f(x)$ функцияга яқинлашувчи бўлиши учун

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0$$

тенглик ўринли бўлиши зарур ва етарли.

Ушбу

$$f(x)=f(0)+f'(0)(x-x_0)+\frac{f''(0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$

қатор <u>Тейлор қатори</u> дейилади. У $x_0=0$ бўйганда Маклорен қаторига айланади.

Қуйида баъзи функцияларнинг Маклорен қаторига ёйилмасини келтирамиз:

1. $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+\ldots;$

2. $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots;$

3. $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\cdot\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots;$

4. $(1+x)^m=1+mx+\dfrac{m(m-1)}{2!}x^2+\dfrac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots+$
$+\dfrac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{n!}x^n+\ldots;$

5. $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{x^n}{n!}+\ldots.$

АДАБИЁТЛАР

1. Высшая математика для экономистов (колл. авторов под редакцией проф. Кремера Н.Ш.) Москва, «Банки и биржи», издательское объединение «ЮНИТИ», 1997.

2. Азларов Т., Мансуров Ҳ. «Математик анализ» 1, 2–нашри. Тошкент «Ўқитувчи», 1994 (11–боб).

10–боб. Кўп аргументли функциялар

1–§. Умумий тушунчалар ва иқтисодиётга оид кўп аргументли функциялар

Аввалги маърузалар бир аргументли функциялар ва улар билан боғланган дифференциал ва интеграл ҳисобга бағишланган эди. Кўпгина ҳодисалар, жараёнлар, шу жумладан, иқтисодий жараёнлар икки ва ундан ортиқ кўрсаткичларга боғланган бўлади. Бу ҳол кўп аргументли функциялар учун дифференциал ва интеграл ҳисобни талаб этади. Биз кўп аргументли функциялар математик анализини тўлиғича баён эта олмаймиз. Мазкур бобда иқтисодчилар учун зарур бўлган бўлимларни қисқача баён этамиз.

1–таъриф. n–та x_1, x_2, ..., x_n ўзгарувчилар мавжуд бўлиб уларнинг бирор X тўпламдан олинган ҳар бир $(x_1, x_2, ..., x_n)$ мажмуасига z ўзгарувчининг аниқ битта қиймати мос келсин дейлик. Унда X тўпламда x_1, x_2, ..., x_n ўзгарувчиларнинг $z=f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функцияси берилган дейилади.

X тўплам n ўлчовли Евклид фазоси E^n қисмидан иборат, у функциянинг аниқланиш соҳаси дейилади, x_1, x_2, ..., x_n –эркли ўзгарувчилар, z–уларнинг функцияси (эрксиз ўзгарувчи), f–мослик қонуни ёки қоидаси.

Мисол. $V=\pi R^2 H$ –цилиндр ҳажми формуласи, унда R, H–эркли ўзгарувчилар, V–цилиндр ҳажми (эрксиз ўзгарувчи). Бу функция икки аргументли функциядир.

Энди баъзи кўп аргументли функцияларни қарайлик:

1. $z=a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n+b$, a_i=const, $i=1,2,\ldots,n$ –чизиқли функция;

2. $z=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$, a_{ij}=const –квадратик форма;

3. $z=a_0x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}$, $a_0>0$, $0<\alpha<1$, $x_1\geq0$, $x_2\geq0$ –Кобб–Дугласнинг икки аргументли ишлаб чиқариш функцияси;

4. $z=a_0\left[ax_1^{-\rho}+(1-a)x_2^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}$, $a_0>0$, $0<\alpha<1$, $\rho>-1$, $x_1\geq0$, $x_2\geq0$ – ўзгармас эластиклик алмашиш функцияси (CES–функция);

5. $z=K_0\left(1+\dfrac{x}{100}\right)^y$ –бу функция бошланғич сумма K_0 бўлганда ҳар йили аввалги йилдагига $x\%$ қўшилиб турса, у йилдан кейинги суммани ифодалайди.

Юқорида келтирилган функциялар иқтисодиётда муҳим аҳамият касб этади.

Кўп аргументли функцияларга оид материаллар анчагина мураккаб. Биз асосан икки аргументли функцияларга тўхтаймиз. Бу ҳолда конкрет мисоллар учун кўпгина тушунчаларни геометрик тасвирлаш мумкин. Икки аргументли функцияларни бундан кейин $z=f(x, y)$ кўринишда ёзамиз. Унда функциянинг аниқланиш соҳаси X, Oxy координата текислигининг қисми бўлади.

2–таъриф. $M(x_0, y_0)\in X$ нуқтанинг атрофи деб M_0 нуқтани ўз ичига олган X тўпламдан чиқиб кетмайдиган доирага айтилади.

3–таъриф. $M(x_0, y_0)\in X$ нуқтаниг ε–атрофи ($\varepsilon>0$) деб, ушбу

$$O_\varepsilon(x_0, y_0)=\{(x, y):\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\varepsilon^2\}$$

очиқ доирага айтилади ($O_\varepsilon(x_0, y_0)$–маркази (x_0, y_0) да, радиуси $\varepsilon>0$ бўлган очиқ доира).

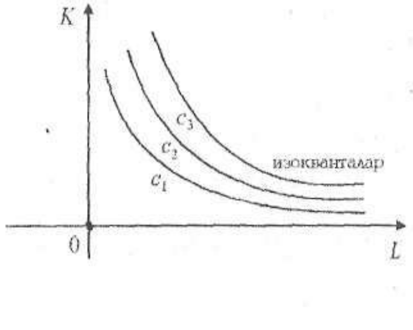
4–таъриф. $z=f(x,y)$ функцияниг графиги деб $\{(x,y,z):\ z=f(x,y)\}$ тўпламга айтилади (бу ҳолда график уч ўлчовли фазода бирор сиртни ифодалайди).

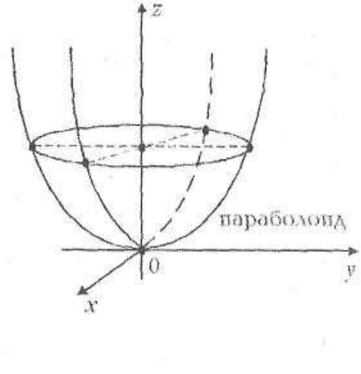
Мисоллар. 1) $z=x^2+y^2$, $(x, y)\in E^2$ –параболоид;

2) $z=x+y$, $(x, y)\in E^2$ –текислик.

5–таъриф. $z=f(x, y)$ функциянинг сатҳ чизиғи деб, текисликнинг $f(x,y)=C$, $(C=const)$ тенгликни қаноатлантирадиган нуқталари тўпламига айтилади.

Мисол. $Y=F(L, K)$ –ишлаб чиқариш функциясини олайлик. Унда L–меҳнат ресурслари, K–асосий фондлар, Y–ишлаб чиқарилган маҳсулот миқдори бўлиб, $F(L, K)$ функция "неоклассик" шартларни қаноатлантиради. Бу шартларни кейинроқ келтирамиз. Мазкур функция учун сатҳ чизиғи $F(L, K)=C$ муносабат билан ифодаланади ва ишлаб чиқариш функциясининг изоквантталари дейилади.





Глобусларда чизилган *параллеллар* ва меридианлар сатҳ чизиқларига мисол бўла олади.

2–§. Кўп аргументли функцияларнинг лимити ва узлуксизлиги

6–таъриф (Коши). Агар ихтиёрий мусбат $\varepsilon>0$ сон учун шундай $\delta>0$ сон топилсаки, $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирадиган барча $(x,y)\in X$ нуқталар учун $|f(x,\ y)-A|<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, унда A сон $f(x,\ y)$ функциянинг $x\to x_0$, $y\to y_0$ даги ((x_0,y_0) нуқтадаги) лимити дейилади ва

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

деб ёзилади.

Бунда $(x,\ y)$ нуқта $(x_0,\ y_0)$ нуқтага ихтиёрий чизиқ бўйлаб интилади, бу ниҳоятда муҳим.

7–таъриф. Агар $z=f(x,\ y)$, $(x,\ y)\in X$ функция учун ушбу

1) $z=f(x,\ y)$ функция $(x_0,\ y_0)\in X$ нуқтада аниқланган;

2) $z=f(x,\ y)$ функция $x\to x_0$ ва $y\to y_0$ да чекли лимитга эга;

3) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,\ y_0)$ шартлар ўринли бўлса, $z=f(x,\ y)$ функция $(x_0,\ y_0)$ нуқтада узлуксиз дейилади.

Бу таърифнинг геометрик маъноси шуки, $z=f(x,y)$ сирт (x_0,y_0) га мос $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ нуқтада йиртилмаган (тешиги йўқ) бўлади.

Мисоллар. 1) Ушбу $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}$ лимит мавжуд эмас.

Равшанки $(0,\ 0)$ нуқтага $(x,\ y)$ нуқта ихтиёрий чизиқ бўйлаб интилиши мумкин. Масалан, $y=kx$ бўлсин. Унда

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}=\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x\cdot kx}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2};$$

Охирги ифода k нинг ўзгаришига қараб ўзгариб боради. Демак, лимит мавжуд эмас. Масалан, $y=x^2$ бўлса,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^2\to 0}}=\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x\cdot x^2}{x^2+x^4}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x}{1+x^2}=0.$$

Аввалги ҳолда фақат $k=0$ бўлганда лимит нолга тенг бўлади.

2) $z=x^2+y^2-2$ функция $(0,\ 0)$ нуқтада узлуксиз.

Аввало $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} z=-2$ экани равшан, $-2=z(0, 0)$, чунки (x, y) нуқта (0, 0) га қандай чизиқ бўйлаб интилмасин, натижа бир хил бўлади.

3-§. Кўп аргументли функцияларнинг ҳосилалари ва дифференциали

Бизга X соҳада аниқланган $z=f(x,y)$ функция берилган бўлсин. Аргумент x_0 га Δx орттирма, аргумент y_0 га Δy орттирма берамиз. Албатта, $(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)\in X$ шарт бажарилиши керак. $f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)$ ва $f(x_0, y_0)$ ларни ҳисоблаймиз.

Ушбу

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)$$

айирма $z=f(x, y)$ функциянинг (x_0, y_0) нуқтадаги тўлиқ орттирмаси дейилади.

Агар фақат x_0 га ёки фақат y_0 га орттирма берилса,

$$\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,\ y_0)-f(x_0,y_0),$$
$$\Delta_y z=f(x_0,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0),$$

хусусий орттирмаларни тузиш мумкин.

Таъкидлаб айтамизки, умуман айтганда,

$$\Delta z\neq\Delta_x z+\Delta_y z$$

тенгсизлик ўринли.

Масалан, $z=xy$ функция учун $\Delta_x z=(x_0+\Delta_x)y_0-x_0 y_0=y_0\Delta_y$, $\Delta_y z=x_0(y_0+\Delta_y)-x_0 y_0=x_0\Delta_y$; $\Delta_z=(x_0+\Delta_x)(y_0+\Delta_y)-x_0 y_0=x_0\Delta_y+y_0\Delta_x-\Delta_x\Delta_y$.

Равшанки, $\Delta_x z+\Delta_y z=y_0\Delta_y+x_0\Delta_x\neq\Delta_z$.

1-таъриф. Агар ушбу

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta x}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

лимитлар мавжуд бўлса,улар $z=f(x, y)$ функциядан (x_0, y_0) нуқтада мос равишда x ва y лар бўйича олинган хусусий ҳосила дейилади ва z_x', z_y' $\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ каби белгиланади.

Таърифдан кўринадики, x бўйича хусусий ҳосилани ҳисоблаш учун y ни ўзгармас деб, y бўйича ҳосилани ҳисоблаш учун x ни ўзгармас деб қараш лозим.

Мисоллар. 1) $z=xy$; $\frac{\partial z}{\partial x}=y$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x$;

2) $z=x\cos y$; $\frac{\partial z}{\partial x}=\cos y$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-x\sin y$;

3) йўйловчилар оқими $z=\frac{x^2}{y}$ функция билан ифодаланади, унда x–аҳоли сони, y–шаҳарлар орасидаги масофа. Унда

$$z_x'=\frac{2x}{y}.$$

Маъноси–шаҳарлар орасидаги масофа y ўзгармаган ҳолда йўловчилар оқимининг ортиши аҳоли сонининг иккиланганига пропорционал; $z_y'=\frac{x^2}{y^2}$. Маъноси – аҳоли сони ўзгармаган ҳолда йўловчилар оқимининг ортиши шаҳарлар орасидаги масофа квадратига тескари пропорционал.

2–таъриф. Ушбу

$$dz=z_x'\Delta x+z_y'\Delta y$$

ифода функциянинг дифференциали дейилади.

Энди $f(x, y)=x$, $g(x, y)=y$ лар учун $dx=\Delta x$, $dy=\Delta y$ эканидан дифференциал формуласини

$$dz=z_x'dx+z_y'dy \quad \text{ёки} \quad dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

кўринишда ёзиш мумкинлиги келиб чиқади.

3–таъриф. Агар $z=f(x,y)$ функция учун (x_0,y_0) нуқтада тўлиқ орттирма ушбу $\Delta z=dz+\alpha\Delta x+\beta\Delta y$ кўринишда ёзилиши мумкин бўлса, $z=f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада дифференциалланувчи дейилади, унда $\alpha=\alpha(\Delta x, \Delta y)$, $\beta=\beta(\Delta x, \Delta y)$ $-\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ да чексиз кичик миқдорлар.

Бир аргументли функциялар учун дифференциалланувчилик ҳосиланинг мавжудлиги ва $y=f(x)$, $\Delta y=dy+\alpha\cdot\Delta x$ ёйилмадан келиб чиқар эди.

Кўп аргументли функциялар учун бу етарли эмас.

Теорема. Агар $z=f(x,y)$ функциянинг хусусий ҳосилалари z_x, z_y, (x_0, y_0) нуқта атрофида мавжуд ва шу нуқтанинг ўзида узлуксиз бўлса, $z=f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада дифференциалланувчи бўлади.

4–§. Йўналиш бўйича ҳосила ва градиент.

Фараз этайлик, n–ўлчовли Евклид фазоси E^n да $z=f(x)=f(x_1,x_2,...,x_n)$ функция берилган бўлсин, $l,(|l|=1)$–ихтиёрий, аммо аниқ йўналиш бўлсин.

3–таъриф. Агар $x^0 \in E^n, k>0$ учун ушбу $\lim\limits_{k\to 0, k>0} \dfrac{f(x^0+kl)-f(x^0)}{k}$

лимит мавжуд бўлса, уни $z=f(x)$ функциядан x^0 нуқтада l йўналиш бўйича олинган ҳосила дейилади.

Теорема. Агар $z=f(x)=f(x_1,x_2,...,x_n)$ функциянинг x^0 нуқтада барча хусусий ҳосилалари $\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}$, i=1,2,...,n мавжуд бўлса, ихтёрий $l,(|l|=1)$ йўналиш бўйича x^0 нуқтада олинган ҳосила ушбу

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial l}=\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1}\cos\alpha_1+\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2}\cos\alpha_2+...+\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_n}\cos\alpha_n$$

формула ёрдамида ҳисобланади, бунда $\cos\alpha_i$, i=1,2,...,n –l йўналишининг йўналтирувчи косинуслари

$$(\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+...+\cos^2\alpha_n=1),\ n=2 \text{ бўлганда } \alpha_1+\alpha_2=\pi/2,$$
$$\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2=\cos^2\alpha_1+\cos^2(\pi/2-\alpha_1)=\cos^2\alpha_1+\sin^2\alpha_1=1.$$

4–таъриф. Агар $\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}$, i=1,2,...,n ҳосилалар мавжуд бўлса, $z=f(x_1,x_2,...,x_n)$ функциянинг x^0 нуқтадаги градиенти деб

$$\left(\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1},\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2},...\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_n}\right)$$

векторга айтилади ва $\nabla z(x_0)$ деб белгиланади (∇–набла).

Юқоридаги мулоҳазалардан келиб чиқадики, дифференциалланувчи функция учун йўналиш бўйича олинган ҳосила градиент билан йўналишни аниқлайдиган бирлик векторлар скаляр кўпайтмасига тенг. Берилган нуқтадаги градиент шу нуқтада функция ўзгаришининг максимал тезлигини аниқлайди. Градиент вектор бўлиб, $z=f(x_1,x_2,...,x_n)$ сиртнинг x^0 нуқтасида унга ўтказилган уринма текисликка перпендикуляр бўлади.

Мисоллар. 1) $z = x_1^2 + x_2^2$ функциянинг (1;2) нуқтада $l = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ йўналиш бўйича ҳосиласи ҳисоблансин.

Берилган функция дифференциалланувчи, шунинг учун хусусий ҳосилаларни ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial f(1,2)}{\partial x_1} = \frac{\partial z(1,2)}{\partial x_1} = 2x_1\Big|_{(1,2)} = 2; \quad \frac{\partial z(1,2)}{\partial x_2} = 2x_2\Big|_{(1,2)} = 4;$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \frac{\partial z(1,2)}{\partial l} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2};$$

2) $z = x_1^2 + |x_2|$ функциянинг (–1;2) нуқтада $l = \left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$ йўналиш бўйича ҳосиласи ҳисоблансин

$$\frac{\partial z(-1,2)}{\partial l} = \lim_{k\to+0}\frac{\left[\left(-1+k\cdot\frac{3}{5}\right)^2 + \left|2+k\cdot\frac{4}{5}\right|\right] - \left[(-1)^2 + |2|\right]}{k} =$$

$$= \lim_{k\to+0}\frac{1 - \frac{1}{6}k + \frac{9}{25}k^2 + 2 + \frac{4k}{5} - 3}{k} = -\frac{6}{5} + \frac{4}{5} = -\frac{2}{5};$$

3) $z = x_1^2 + |x_2|$, $x^0 = (0,\ 0)$; $l = \left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$ (Бу функциянинг (0; 0) даги оддий ҳосиласи мавжуд эмас!);

$$\frac{\partial z(0;0)}{\partial l} = \lim_{k\to+0}\frac{\left[k^2\cdot\frac{9}{25} + k\cdot\frac{4}{5}\right] - 0}{k} = \frac{4}{5}.$$

5–§. Кўп аргументли функцияларнинг экстремумлари

Агар $z=f(x, y)$ функция бирор M соҳада аниқланган бўлса, шу соҳада функциянинг энг катта ва энг кичик (экстремал) қийматлари ҳамда маҳаллий (локал) максимум ва маҳаллий минимумлари ҳақида гапириш мумкин.

1–таъриф. Агар $(x_0, y_0) \in M$ нуқтанинг шундай атрофи мавжуд бўлсаки, унга тегишли ҳар бир *(x, y)* нуқта учун

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, (x_0, y_0) нуқта $z = f(x, y)$ функциянинг <u>маҳаллий максимум</u> нуқтаси дейилади. Агар $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$

тенгсизлик ўринли бўлса, (x_0, y_0)–маҳаллий минимум нуқтаси дейилади. Улар экстремум нуқталари деб юритилади.

Теорема. Агар (x_0, y_0) нуқта дифференциалланувчи $z = f(x, y)$ функциянинг экстремум нуқтаси бўлса, шу нуқтада

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

тенгликлар ўринли бўлади.

Мазкур теорема зарурий шартни ифодалайди. Шу шартни қаноатлантирадиган ҳар бир нуқта стационар нуқта дейилади.

2–таъриф. Ҳосилалар (ёки бирорта ҳосила) мавжуд бўлмайдиган ва ҳосилалари нолга тенг бўладиган нуқталар критик нуқта деб аталади.

Демак, стационар нуқталар критик нуқталар тўпламининг қисмидан иборат.

Мисол. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5$ функциянинг стационар нуқталари топилсин. Хусусий ҳосилаларни ҳисоблаб, нолга тенглаштирамиз:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - 2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y + 4 = 0 \end{aligned}\right\} \quad x_0 = 2, \; y_0 = -2.$$

Демак, стационар нуқта битта: (2; –2).

Энди стационар нуқтада экстремум бўлиши учун етарли шартларга тўхталамиз. Унинг учун иккинчи тартибли ҳосилаларни (агар улар мавжуд бўлса) ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} = A, \quad \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} = B, \quad \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} = C$$

Теорема (етарли шарт). Фараз этайлик, $z = f(x, y)$ функция учун (x_0, y_0) стационар нуқта, яъни $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \; \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$ бўлиб, (x_0, y_0) нуқтанинг бирор атрофида аниқланган бўлсин; Шу (x_0, y_0) нуқтада $z = f(x, y)$ функция иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларга эга бўлсин:

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} = A, \quad \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} = B, \quad \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} = C \cdot$$

У ҳолда агар 1) $\Delta = AC - B^2 > 0$ бўлиб, $A<0$ бўлса, маҳаллий максимум, $A>0$ бўлса — маҳаллий минимум бўлади;

2) $\Delta = AC - B^2 < 0$ бўлса, экстремум мавжуд эмас;

3) $\Delta = AC - B^2 = 0$ бўлса, қўшимча текширишлар олиб бориш лозим.

Мисол сифатида юқоридаги функцияни олайлик. Унда стационар нуқта (1; –2) эди. Энди A, B, C ларни ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial^2 f(1,-2)}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f(1,-2)}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f(1,-2)}{\partial y^2} = 2$$

Равшанки, $\Delta = AC - B^2 = 2 \cdot 2 - 0 = 4 > 0$. Демак, (1; –2) нуқтада маҳаллий минимум бўлади

$$\min f = f(1;-2) = 1 + 4 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) + 5 = 0.$$

Шу махаллий минимум функциянинг энг кичик қиймати эканини ҳам кўрсатиш қийин эмас. Унинг учун берилган функцияни ушбу $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = (x-1)^2 + (y+2)^2$ кўринишда ёзиш етарли.

6–§. Кўп аргументлии функцияларнинг энг катта ва энг кичик (экстремал) қийматлари

Бир аргументли функцияларнинг энг катта ва энг кичик қийматларини топишда икки ҳол кўрилган эди:

1) функция кесмада аниқланган ва узлуксиз;

2) функция интервалда аниқланган ва узлуксиз.

Биринчи ҳолда функциянинг экстремал қийматлари (улар албатта мавжуд) кесманинг учларида ёки экстремум нуқталарида эришилар эди. Иккинчи ҳолда эса, аввал экстремал қийматларнинг мавжуд бўлиши учун етарли шартларни текшириб, сўнгра экстремал қийматлар яна экстремум нуқталарида изланар эди.

Кўп аргументли функциялар учун, умуман айтганда, шу қоидалардан фойдаланилади. Биринчи ҳолда функция ёпиқ тўпламда аниқланган ва узлуксиз, иккинчи ҳолда эса, функция очиқ соҳада аниқланган ва узлуксиз бўлади.

Қоидалар соддагина айтилгани билан амалда масалани ечиш анчагина қийинроқ кечади.

7–§. Кобб–Дуглас функцияси ва унинг эластиклиги

Кўп аргументли функцияларга иқтисодиётда Кобб–Дуглас ишлаб чиқариш функцияси мисол бўла олади. У қуйидаги кўринишда ёзилади: $Y = F(L, K) = a_0 K^{\alpha} L^{1-\alpha}$, $a_0 > 0$, $0 < \alpha < 1$, L–меҳнат ресурслари, K–асосий фондлар, Y–миллий даромад. Меҳнат ресурслари бўйича эластиклик:

$$\frac{\partial F}{\partial L} \cdot \frac{L}{F} = a_0 k^{\alpha} \cdot (1-\alpha) \cdot L^{-\alpha} \cdot \frac{L}{a_0 K^{\alpha} L^{1-\alpha}} = 1-\alpha \cdot$$

Асосий фондлар бўйича эластиклик:

$$\frac{\partial F}{\partial K} \cdot \frac{K}{F} = a_0 \alpha k^{\alpha-1} \cdot (1-\alpha) \cdot K^{1-\alpha} \cdot L^{1-\alpha} \cdot \frac{K}{a_0 K^{\alpha} L^{1-\alpha}} = \alpha \cdot$$

Демак, Кобб–Дуглас функцияси кўринишида α–асосий фондлар бўйича, $1-\alpha$ эса меҳнат ресурслари бўйича эластикликни англатади. Ҳозирги вақтда Кобб–Дуглас функцияси кўриниши ўзгариб, $Y = a_0 K^{\alpha} L^{\beta}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ кўринишни олган.

Адабиётлар

1. Высшая математика для экономистов. (Коллектив авторов под редакцией проф. Кремера Н.Ш.) Москва, "Банки и биржи", Издательское объединение "ЮНИТИ", 1997.

2. Азларов Т., Мансуров Ҳ. "Математик анализ.2", Тошкент, "Ўқитувчи", 1989 (12, 13 боблар)

3. Габасов Р., Кириллова Ф. М. "Методы оптимизации" Издание второе, Минск, Издательство БГУ, 1981 (глава III).

Индивидуал вазифалар тизими.
Биринчи қисм

№1. Берилган матрицалар учун кўрсатилган амаллар бажарилсин (N=1, 2, 3, ...)

1) $A=\begin{pmatrix} 0{,}1+N & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 0{,}4-N & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}1 \end{pmatrix}$; $A+B=?$; $A-B=?$; $AB=?$;

$A^2+B^2=?$, $\det A=?$; $\det B=?$; $A^{-1}=?$; $B^{-1}=?$; $AA^{-1}=?$; $BB^{-1}=?$.

2) $A=\begin{pmatrix} 0{,}1+2N & 0 & N \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -N & 3 \end{pmatrix}$; $\det A=?$; $A^{-1}=?$; $AA^{-1}=?$;

$B=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$; $AB=?$; $A^{-1}B=?$.

№2. Ушбу тенгламалар системаси Крамер формулалари ва тескари матрицани топиш методи ёрдамида ечилсин (N=1, 2, 3, ...):

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3N^2 \\ 3Nx_1 - x_2 = N \end{cases}$;

3) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2N \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -3N \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$;

2) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = N \\ -3x_1 + 4x_2 = 6N \end{cases}$;

4) $\begin{cases} x_1 + Nx_2 + x_3 = N \\ 2x_1 - Nx_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 2Nx_2 + 2x_3 = -N \end{cases}$.

№3. А) Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳаси топилсин (N=1, 2, 3, ...)

1) $y=\sqrt{x}-\lg(Nx-3)$;

2) $y=\dfrac{1}{\lg(N-x)}+\sqrt{Nx+5}$;

3) $y=\dfrac{x}{N^2+x^2}$;

4) $y=2\cos x-\dfrac{N}{\sqrt{x}}$;

5) $y=\log_2 \sin x+\sqrt{N^2-x^2}$;

6) $y=3e^{Nx}-\dfrac{1}{\sqrt{x-N}}$.

Б) Ушбу функцияларнинг графиглари чизилсин (N=1, 2, 3,...):

1) $y=-Nx^2$; 4) $y=\frac{N}{x}$; 7) $y=Ne^x-1$;

2) $y=-3(x-N)^2$; 5) $y=-\frac{1}{N(x-1)}$; 8) $y=\frac{Nx-2}{x+N}$;

3) $y=-2x^2+Nx-3$; 6) $y=\log_2(Nx)$; 9) $y=x^2(N+1)\cdot|x|+N$.

№4. А) Қуйидаги лимитлар ҳисоблансин (N=1, 2, 3, ...):

1) $\lim\limits_{x\to N}\frac{x^2-(N+1)x+N}{x-N}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}x(\sqrt{x^2+N}-x)$;

2) $\lim\limits_{x\to -N}\frac{x^2+(N+1)}{x+N}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos Nx}{x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1/N}\frac{(Nx)^2-\sqrt{Nx}}{\sqrt{Nx}-1}$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin Nx}{\sqrt{x+N}-\sqrt{N}}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+N}+\sqrt{x^2-N}}{\sqrt{2x^2+N}+\sqrt{3x^2-N}}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{N}{x}\right)^x$.

Б) Қуйидаги функциялар узлуксизликка текширилсин (N=1,2,3,...):

1) $y=\frac{x^2-N}{x-N}$; 3) $y=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-N}}}$;

2) $y=\begin{cases}\frac{x^2-N}{x-N}, & \text{агар } x\neq 1,;\\ 2, & \text{агар } x=1.\end{cases}$ 4) $y=\frac{N}{x-N}$

№5. А) Қуйидаги функцияларнинг ҳосилаларини ҳисобланг (N=1, 2, 3, ...):

1) $y=Na\cos x+b\sin\left(\frac{x}{N}\right)$; 7) $y=Nx\ln(N-x^2)$;

2) $y=2\cdot 3^{Nx}-Ne^x$; 8) $y=\sin(x^N+N^x)$;

3) $y=3\mathrm{tg}Nx+\mathrm{arctg}\frac{x}{N}$; 9) $y=e^{Nx}\ln\sin Nx$;

4) $y=Nx^{2N}-\arcsin Nx$; 10) $y=(xe^{Nx}+N)^5$;

5) $y=\left(\frac{x^2-N}{x^2+N}\right)^4$; 11) $y=\frac{\cos Nx}{\sin(N+1)x}$;

6) $y=\sqrt[3]{Nx}(e^{Nx}-N)$; 12) $y=\frac{Nx^2+N^2}{Nx^2+1}$.

Б) Берилган эгри чизиққа берилган нуқтада ўтказилган уринма тенгламаси ёзилсин (N=1, 2, 3, ...):

1) $y = \frac{2N}{N + x^2}$; x_0=2; 3) $y = \sin Nx$; x_0=5;

2) $y = x^2 - Nx$; x_0=3; 4) $y = 2e^{Nx}$; x_0= −2.

№6. А) Лопитал қоидасидан фойдаланиб лимитлар ҳисоблансин (N=1, 2, 3, ...):

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{Nx^3 + N^2x^2 - Nx}{x^3 - x + N^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{Nx^2} + e^{-Nx^2} - 2}{x^2}$;

2) $\lim\limits_{x\to\sqrt{N}} \frac{\ln(x^2 - N + 1)}{x^2 - N}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{Nx} - \frac{1}{e^{Nx} - 1}\right)$.

Б) Қуйидаги функцияларнинг энг катта ва энг кичик қийматлари топилсин (N=1, 2, 3, ...):

1) $y=Nx^2-2Nx$, $x\in[0, 3]$; $x\in(0, 3)$; $x\in(-2, 3]$;

2) $y=\sqrt{\frac{N+x}{\ln Nx}}$, $x\in\left(\frac{1}{N}, \frac{e}{N}\right]$;

3) $y=Nx+\frac{N+1}{x}$, $x\in(0, +\infty)$;

4) $y=\frac{1}{N}x^2+\frac{N+1}{x}$, $x\in(0, +\infty)$.

В) Қуйидаги функциялар тўлиқ текширилсин ва графиклари чизилсин (N=1, 2, 3,...):

1) $y=Nx^2+N+1$; 5) $y=x+\frac{N}{x^3}$;

2) $y=x+\frac{N}{x}$; 6) $y=x^3-Nx^2+3Nx$;

3) $y=Nx^2+\frac{N+1}{x^2}$; 7) $y=(N+x)e^{-Nx}$;

4) $y=\frac{(x-N)^2}{(x+N)^2}$; 8) $y=\frac{x}{\ln Nx}$.

Иккинчи қисм

№7. Қуйидаги ноаниқ интеграллар ҳисоблансин (N=1,2, ...):

I. 1). $\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+N}{\sqrt[4]{x}}dx$; 2)$\int \frac{(N-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}dx$; 3)$\int \frac{e^{Nx}+1}{e^x+1}dx$; 4)$\int \frac{x^2+N}{x^2-1}dx$;

II. 5)$\int \frac{dx}{\sqrt{2-Nx}}$; 6)$\int x(2x+N)^{10}dx$; 7)$\int \frac{Nxdx}{1+x^2}$; 8)$\int \frac{x^3dx}{x^8-N}$;

9)$\int x^2e^{Nx^3+1}dx$; 10)$\int \frac{e^xdx}{N+e^x}$; 11)$\int \frac{\ln xdx}{x\sqrt{N+\ln x}}$; 12)$\int \frac{N\cos xdx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$;

III. 13) $\int Nx\cdot 2^{-x}dx$; 14) $\int \frac{\ln x}{Nx^3}dx$; 15) $\int x^2e^{Nx}dx$; 16) $\int \ln^2(Nx)dx$;

17) $\int x\ln\frac{N+x}{N-x}dx$; 18) $\int x\cos Nxdx$

IV. 19) $\int \frac{dx}{x^2+(N+1)-N}$; 20) $\int \frac{dx}{5x^2-N}$; 21) $\int \frac{2x-N}{x^2-4}dx$;

22) $\int \frac{dx}{x^2+Nx-(N+1)}$; 23) $\int \frac{2x+N}{x^2+3x-10}dx$; 24) $\int \frac{xdx}{x^2+(N+1)x+N}$;

V. 25) $\int \frac{x^2}{\sqrt{N-x}}dx$; 26) $\int \frac{dx}{N+\sqrt{x}}$; 27) $\int \frac{dx}{(N+\sqrt[4]{x})\sqrt[3]{x}}$;

28) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+N\sqrt[3]{x}}$; 29) $\int \sqrt{\frac{N+x}{N-x}}\cdot\frac{dx}{N-x}$; 30) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+N}dx$;

VI. 31) $\int \frac{1-3x}{N+2x}dx$; 32) $\int \frac{N\sqrt{x}+\ln x}{x}dx$; 33) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+N}}$;

34) $\int \frac{\cos(N\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}dx$; 35) $\int \sin^2\frac{Nx}{2}dx$; 36) $\int \frac{-2x^4+4x^2-1}{N-x^2}dx$;

37) $\int \frac{\sqrt{x+N}+1}{\sqrt{x+N}-1}dx$; 38) $\int x\ln(3x+N)dx$.

Эслатма. I –ёйиш усули билан, II–ўзгарувчини алмаштириш усули билан, III–бўлаклаб интеграллаш усули билан, V–иррационал функцияларни интеграллаш усули билан, VI–ихтиёрий усул билан ечилади.

№8. I. Ушбу аниқ интеграллар ҳисоблансин:

1) $\int_0^8 \left(\sqrt{Nx}+\sqrt[3]{x}\right)dx$;

2) $\int_1^4 \frac{N+\sqrt{y}}{Ny^2}dy$;

3) $\int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+Nx}}$;

4) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{Nx\ln x}$;

5) $\int_1^{3/2} \frac{4x+3}{(x-N)^3}dx$;

6) $\int_{\ln 2}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{N+e^x}}$;

7) $\int_0^1 \ln(N+x)dx$;

8) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 Nx\cos Nxdx$;

9) $\int_0^{\ln 5} xe^{-Nx}dx$;

10) $\int_0^{\pi} x\sin Nxdx$;

11) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+(N+1)x+N}$;

12) $\int_1^5 \frac{xdx}{\sqrt{Nx+5}}$;

II. Ушбу функциялар графиклари билан чегараланган юза ҳисоблансин:

13) $y=2\sqrt{x}$, $y=N-x$, $y=0$;

14) $y=\frac{3}{x}$, $y=2x$, $x=N$;

15) $y=x^2-2x+3$, $y=Nx-1$;

16) $y=x^2$, $y=-Nx^2+3$;

17) $y=\frac{N}{x}$, $y=-\frac{x}{N}-\frac{5}{2}$;

18) $y=x^2+2N$, $y=1-x^2$, $x=0$, $x=1$;

19) $y=-Nx^2$, $y=3e^x$, $x=0$, $x=1$;

20) $y=\sqrt{N^2-x^2}$, $|x|\le N$, $y=0$;

21) $y=\frac{N}{x^2}$, $x=1$, $y=2$, $x=2$

22) $y=\ln x$, $x=0$; $y=0$, $y=N$;

III. Ушбу чизиқлар билан чегараланган юзанинг Ox ўқи атрофида айланишдан ҳосил бўлган фигура ҳажми топилсин:

23) $y=N-x^2$, $y=0$, $x=0$, $x\ge 0$;

24) $y=e^x$, $x=0$, $x=N$, $y=0$;

25) $y=\sqrt{N^2-x^2}$, $|x|\le N$, $y=0$;

26) $y=x^3$, $y=N$, $x=0$.

№9 Иқтисодиётда аниқ интеграл тушунчасидан фойдаланиш.

I. Агар $f(t)$–t моментдаги меҳнат унумдорлиги бўлса, $[0,T]$ кесмадаги ишлаб чиқарилган маҳсулот ҳажми $u=\int_0^T f(t)dt$ бўлади.

Қуйидаги $f(t)$–меҳнат унумдорликлари учун маҳсулот ҳажми u ҳисоблансин (N=1, 2, ...);

1) $u=\int\limits_0^5 \frac{2+N\sqrt{t}}{t}$; 5) $u=\int\limits_0^6 \ln(Nt+1)dt$;

2) $u=\int\limits_0^3 \frac{dt}{\sqrt{N+5x}}$; 6) $u=\int\limits_0^7 te^{-\frac{N}{2}t}dt$;

3) $u=\int\limits_0^4 (\sqrt{Nt}+N\sqrt[3]{t})dt$; 7) $u=\int\limits_0^1 t\cos Nt dt$;

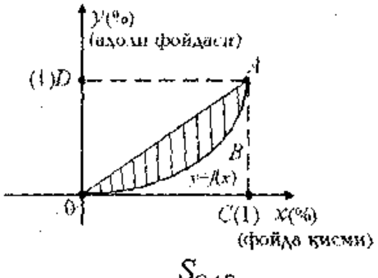
4) $u=\int\limits_0^5 \frac{3t+4}{(6+Nt)}dt$; 8) $u=\int\limits_0^8 \frac{tdt}{\sqrt{t+N}}$;

II. Агар Кобб–Дуглас функцияси $F(K(t), L(t), t)=a_0K^{\alpha}(t)L^{1-\alpha}(t)\cdot e^{\gamma t}$ учун $L(t)=at+b$, $K(t)$=const бўлса, $F=\overline{a}_0(at+b)^{1-\alpha}e^{\gamma t}$ бўлади. Содда ҳолда $F(t)=(at+b)e^{\gamma t}$ бўлади. Шунда ишлаб чиқарилган маҳсулот ҳажми $[0, T]$ да $Q=\int\limits_0^T (at+b)e^{\gamma t}dt$ формула билан аниқланади.

Қуйидаги интеграллар ҳисоблансин:

1) $Q=\int\limits_0^4 (1+t)e^{3t}dt$; 3) $Q=\int\limits_0^5 (3+2t)e^{2t}dt$;

2) $Q=\int\limits_0^3 (2+3t)e^{4t}dt$; 4) $Q=\int\limits_0^6 (4+5t)e^{5t}dt$.



III. OA–биссектриса; $OD=OC$; $OCAD$–квадрат. Аҳоли фойдаси тақсимотида тенгсизлик даража–сини аниқлаш мумкин. $f(x)=OBA$ – эгри чизиғи –Лоренц эгри чизиғи дейилади.

$k=\frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAC}}$ – Джинни коэффициенти дейилади;

$$k=\frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAC}}=\frac{S_{\Delta OAC}-S_{OCAB}}{S_{OAC}}=1-\frac{S_{OCAB}}{\underbrace{S_{\Delta OAC}}_{=\frac{1}{2}}}=1-2S_{OBAC}=1-2\int_0^1 y(x)dx.$$

Қуйидаги Лоренц эгри чизиқлари учун Джинни коэффи – циенти топилсин:

1) $y=1-\sqrt{1-x^2}$; 3) $y=e^{(ln2)x}-1=2^x-1$;

2) $y=x^2$; 4) $y=x^3$.

IV. Капитал харажатларнинг иқтисодий самарадорлигини аниқлашда дисконтирлаш (дисконтирование) тушунчаси муҳим аҳамиятга эга бўлади.

Йиллик процент тукиши p бўлганда t вақтдан кейинги суммага қараб бошланғич суммани аниқлаш дисконтирлаш дейилади.

T вақт давомида дисконтирланган фойда ушбу

$$K=\int_0^T f(t)e^{-\delta t}dt$$

формула билан топилади, унда $-\delta$ –дисконтирлаш коэффици – енти, $f(t)$–ҳар йилги фойданинг ўзгаришини ифодалайди.

Ушбу дисконтирланган фойдалар ҳисоблансин:

1) $\int_0^5 (5+t)e^{-0,08t}dt$; 3) $\int_0^7 (7+t)e^{-0,09t}dt$;

2) $\int_0^7 (6+t)e^{-0,06t}dt$; 4) $\int_0^8 (9+t)e^{-0,1t}dt$.

№10.

I. Эгри чизиқлар оиласининг дифференциал тенгламаси тузилсин:

1) $y=C(x-N)^2$; 2) $y=C(x-N)^3$; 3) $y^2=2C(x-N)$;

4) $y=C(x-N)$; 5) $y=C_1e^{x-N}$; 6) $y=C_1e^{2x}+C_2Ne^{-x}$;

II. Ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламалар ечилсин:

7) $Nxy'-y=y^3$; 8) $y-xy'=(N+x^2y')$; 9) $xyy'=N-x^2$;

10) $xydx+(x+N)dy=0$; 11) $\sqrt{y^2+N^2}\,dx=xyd$;

12) $yy'+x=N$; 13) $y'=N^{x+y}$; 14) $(x+2y)y'=N$;

III. Бир жинсли дифференциал тенгламалар ечилсин:

15) $y'=\dfrac{y}{x}-N$;   16) $(x-y)ydx-Nx^2dy=0$;

17) $(x^2+y^2)dx-Nxydy=0$;   18) $ydy+(x-Ny)dx=0$;

IV. Биринчи тартибли чизиқли тенгламалар ечилсин:

19) $\dfrac{dy}{dx}-N\cdot\dfrac{y}{x}=x$; 20) $y'+\dfrac{Ny}{x}=x^3$; 21) $y^2dx-(2xy+N)dy=0$;

22) $y'-Ny=e^x$;   23) $xy'-Ny=2x^4$; 24) $y'+ytgx=\sec x$.

V. Тартибини пасайтириб ечилсин:

25) $y'''=e^{Nx}$; 26) $x(y'''+N)+y'=0$;

VI. Бошланғич шартларни қаноатлантирадиган хусусий ечимларни топинг:

27) $(y''x-y')y'=Nx^3$, $y(1)=1$, $y'(1)=0$;

28) $Ny(y')^3+y''=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=-3$;

VII. Чизиқли бир жинсли тенгламалар ечилсин:

29) $y''-Ny'+(N+1)y=0$; 30) $y''+6y'+9y=0$;

31) $Ny''-y'+y=0$;   32) $y''+(N+1)y'+Ny=0$;

VIII. Чизиқли тенгламалар ечилсин:

33) $y''-4y'+4y=Nx^2$; 34) $y''+2y'+y=Ne^{2x}$;

35) $y''-8y'+7y=N$;   36) $y''-N^2y=e^x$.

№11 Ушбу скаляр автоном дифференциал тенгламалар учун мувозанат ҳолатлари топилсин ва уларни турғунликка текши–рилсин ($N=1, 2, \ldots$):

1) $y'=(y+N)(y-2)$;   4) $y'=y^3+Ny$;

2) $y'=(2y-N)^2(y+1)$;   5) $y'=y^3+Ny^2$;

3) $y'=\sin Ny$;   6) $y'=-y+\ln y$.

№12 А) Ушбу сонли қаторлар яқинлашувчиликка текширилсин ($N=1, 2,\ldots$):

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+N}{20n-1}$;   3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n^2+3n}{n^3+5n-N}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n(N+n^2)}}$;   4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n+N)}{3^n}$;

Б) Ушбу даражали қаторларнинг яқинлашиш соҳаси топилсин:

1) $1+x+x^2+x^3+\ldots$;   3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-2)^n x^{2n}$;

2) $x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^4}{4}+\ldots$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n x^n}{\sqrt{2^n}}$;

В) Қуйидаги функциялар x нинг даражаси буйича даражали қаторга ёйилсин (N=1, 2, …):

1) $y=\frac{e^x-N}{x}$; 3) $y=x\ln(N+x^2)$;

2) $y=\sin Nx$; 4) $y=\frac{x+\ln(N-x)}{x^2}$.

№13 А) Қуйидаги функциялар учун сатҳ чизиғи тенгламаси топилсин ва графиги чизилсин (N=1, 2, …):

1) $z=\frac{N}{y}-x-\frac{1}{x}$; 4) $z=\frac{x^2(N+y)}{N-y}$;

2) $z=2x-e^{Nx}\cdot y$; 5) $z=\frac{(N+\ln Nx)y}{x}$;

3) $z=\frac{xy}{\ln Nx}$; 6) $z=Nx^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$;

Б) Қуйидаги функцияларнинг хусусий ҳосилалари ҳисоблансин (N=1, 2,…):

1) $z=x^3y^3-3xy^N$; 4) $z=\sqrt{1+x^2}\cdot\sin(N+y)$;

2) $z=(N+x^2)^{Ny}$; 5) $z=\left(x+\frac{N}{y}\right)\cdot\mathrm{tg}(x+y)$;

3) $z=\ln\frac{x+\sqrt{y^2+N}}{y+\sqrt{x^2+N}}$; 6) $z=(1+N)^x\arcsin y$.

В) Қуйидаги функцияларнинг стационар нуқталари топилсин ва шу нуқталарда экстремумнинг етарли шартлари текширилсин (N=1, 2,…):

1) $z=(y-x+N)^2+(y+z-N)^2$;

2) $z=x^2+y^2+\frac{(x+2y-N)^2}{5}$;

3) $z=Nxy-4x+2y$;

4) $z=Nx-e^{Nx}\cdot y$;

5) $z=x^2-xy-2x+Ny$;

6) $z=xy+\frac{N}{x}+\frac{20}{y}$;

7) $z=x^2+y^2-4x+Ny$;

8) $z=Nxy-x^2y+xy^2$.

Г) Қуйидаги функцияларнинг берилган нуқтада берилган йўналиш буйича ҳосиласи ҳисоблансин (N=1, 2,…):

1) $z=x^2+y^2$, (1; 2), $l=\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$; 3) $z=x^2-Nx\,|y|$, (0; 0); $l=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

2) $z=x^2-2x+Ny$, (2; –1), $l=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$; 4) $z=x^2+3\,|x|+N\,|y|$, (0; 0), $l=\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

«ИҚТИСОДЧИЛАР УЧУН МАТЕМАТИКА» ФАНИ БЎЙИЧА ДАСТУР

1. Иқтисодчилар учун математика фанига кириш.

Матрицалар, детерминантлар, уларининг хоссалари. Детерминантларни ҳисоблаш. Тескари матрица ва уни ҳисоблаш.

2. Чизиқли тенгламалар системаси. Крамер формулалари. Системани тескари матрица усули билан ечиш. Кўп тармоқли иқтисод учун Леонтъев модели.

3. Квадратик формалар. Алмашишнинг чизиқли модели.

4. Текисликда тўғри тизиқ, эгри тизиқ. Иккинчи тартибли эгри чизиқларнинг умумий тенгламаси. Айлана, эллипс, гипербола ва парабола.

5. Функция тушунчаси. Асосий элементар функциялар ва уларнинг графиклари. Фазода текислик ва тўғри чизиқ тенгламаси ҳақида. Иқтисодиётда қўлланадиган функциялар ҳақида (талаб ва таклиф функциялари, уларни қуриш, меҳнат унумдорлиги функцияси ва унинг графиги).

6. Лимитлар ва узлуксизлик. Сонли кетмакетликлар ва уларнинг лимити. Иқтисодий масала (пул жамғариш ҳақида).

7. Ҳосила тушунчаси. Ҳосиланинг таърифи ва уни ҳисоблаш қоидалари. Мураккаб ва тескари функция ҳосилалари. Асосий элементар функцияларнинг ҳосилалари. Ҳосиланинг физик, геометрик ва иқтисодий маънолари. Ҳосила тушунчасидан иқтисодиётда фойдаланиш. Функциянинг эластиклиги (талаб ва таклиф функциялари, меҳнат унумдорлиги функциялари эластиклиги).

8. Ноаниқ итеграллар. Бошланғич функция. Асосий элементар функциялардан олинган ноаниқ интеграллар. Ўзгарувчини алмаштириш, бўлаклаб интеграллаш усуллари. Турли функцияларни интеграллаш.

9. Аниқ интеграл. Аниқ интегралнинг геометрик ва иқтисодий маънолари. Аниқ интегралнинг хоссалари. Ньютон-Лейбниц формуласи. Иқтисодиётда аниқ интеграл тушунчасидан фойдаланиш (меҳнат унумдорлиги бўйича ишлаб чиқарилган маҳсулот ҳажмини ҳисоблаш, Лоренц эгри чизиқлари учун Джини коэффициентини ҳисоблаш, йиллик процент тушиш $p\%$ бўлганда t вақтдан кейинги суммага қараб бошланғич суммани аниқлаш).

10. Дифференциал тенгламалар. Асосий тушунчалар. Биринчи тартибли дифференциал тенгламалар. Мавжудлик ва ягоналик теоремалари. Турли интеграллапувчи дифференциал тенгламалар (чизиқли, бир жинсли, ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламалар, Бернулли тенгламаси). Қуролланганликнинг ўзгаришини ифодалайдиган дифференциал тенглама. Иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар.

11. Сонли ва даражали қаторлар. Қаторларнинг яқинлашувчилиги. Қатор яқинлашувчи бўлишининг зарурий шарти. Яқинлашувчиликнинг содда етарли шартлари ҳақида.

12. Кўп аргументли функциялар. Функциянинг лимити ва узлуксизлиги. Хусусий ҳосилалар. Йўналиш бўйича ҳосила ва уни ҳисоблаш. Кўп аргументли функцияларнинг экстремумлари ва экстремал қийматлари. Иқтисодиётда кўп аргументли функциялар. Кобб—Дуглас функцияси ва унинг меҳнат ресурслари ва асосий фондлар бўйича эластиклиги.

Ўқув соатлари тақсимоти

Мавзулар	Мавзулар номи	76	
		56 соат маъруза	20 соат амалий машғул от
1–мавзу	Матрицалар, детерминантлар, уларнинг хоссалари. Тескари матрица ва уни ҳисоблаш	4	2
2–мавзу	Чизиқли тенгламалар системаси. Крамер формуласи. Кўп тармоқли иқтисодиёт учун Леонтьев модели	4	2
3–мавзу	Квадратик формалар. Алмашишнинг чизиқли модели	2	
4–мавзу	Текисликда тўғри чизиқ, эгри чизиқ. Айлана, эллипс, гипербола ва парабола	4	
5–мавзу	Функция тушунчаси. Асосий элементар функциялар. Иқтисодиётда қўлланилади–ган функциялар ҳақида	2	2
6–мавзу	Лимитлар ва узлуксизлик	6	2
7–мавзу	Ҳосила	6	2
8–мавзу	Ноаниқ интеграллар	6	2
9–мавзу	Аниқ интеграллар	6	2
10–мавзу	Дифференциал тенгламалар	6	2
11–мавзу	Сонли ва даражали қаторлар	4	2
12–мавзу	Кўп аргументли функциялар	6	2

Эслатма. 8 соат мустақил билим олиш (МБО) га ажратилади. Уларнинг тақсимоти қуйидагича:

4 – мавзу – 2 соат
6 – мавзу – 2 соат
7 – мавзу – 2 соат
9 – мавзу – 2соат

Ўқув соатлари ҳамда МБО соатлари биргаликда 84 соатни ташкил этади.

АДАБИЁТЛАР

1. Высшая математика для экономистов (коллектив авторов, под редакцией проф. Н.Ш.Кремера). Москва, «Банки и биржи», Издательское объединение «Юнити», 1997.

2. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые её приложения. —М,: Наука, 1985.

3. Карасев А.И., Аксютина З.М., Савельева Т.И. Курс высшей математика для экономических вузов, —М; Высшая школа, 1982. —ч.1 и 2.

4. Руководство к решению задач с экономическим содержанием по курсу высшей математики. Под. Ред. А.И.Карасева и Н. Ш. Кремера.—М; Экономическое образование, 1989.

5. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике.—М.; Издательство «ДИС», 1998.

6. Масагутова Р.В. Математика в задачах для экономистов.—Ташкент, «Ўқитувчи», 1996.

7. Насритдинов F.Н. Математик экономика элементлари. Тошкент, «Ўқитувчи», 1984.

8. Азларов Т., Мансуров Ҳ. Математик анализ, I 1994, II 1988., Тошкент, «Ўқитувчи»,

9. Салоҳитдинов М.С., Насритдинов F. Оддий дифференциал тенгламалар. —Тошкент, «Ўзбекистон», 1994.

Мундарижа

Ғаффор Насритдинов,
Мурод Абдураимов

ИҚТИСОДЧИЛАР УЧУН МАТЕМАТИКА
(ўқув қўлланма)

Муҳаррир З.Ахмеджанова

Босишга рухсат этилди 20.11.2001. Бичими 60x84$^{1}/_{16}$. Нашр л. 6,6. Шартли босма табоғи 13,0. Адади 300 нусха. Баҳоси шартнома асосида. Буюртма №.

«Университет» нашриёти. Тошкент – 700174, Талабалар шаҳарчаси, ЎзМУ, Маъмурий бино.

ЎзМУ босмахонасида босилди.