O`ZBEKISTON RES'UBLIKASI
OLIY VA O`RTA MA'XSUS TALIM VAZIRLIGI
DAVLAT SOLIQ QO`MITASI

SOLIQ AKADEMIYaSI

INFORMATSION TEXNOLOGIYALAR KAFEDRASI

«Tasdiqlayman»
O`quv va ilmiy ishlar
bo`yicha prorektor
____
B.K.Tuxliyev
2013 y. «___»________

OlIY MATEMATIKA

FANIDAN
MA'RUZALAR MATNI

Oliy ta'limning 230000 – «Biznes va boshqaruv» ta'lim sohasidagi:

5230800 – «Soliqlar va soliqqa tortish» to`rt yillik bakalavriat yo`nalishi uchun

Kafedraning 2013 yil __ avgustdagi 1-sonli majlis bayonnomasi bilan tasdiqlangan.

«Informatsion texnologiyalar» kafedrasi mudiri _____________ K.G.Djurayeva

Tuzuvchi: ____________ katta o'qituvchi S.S.Nasridinov

TOSHKENT–2013

Annotatsiya

Mazkur ma'ruzalar to'plami 5230800 – «Soliqlar va soliqqa tortish» to'rt yillik bakalavriat yo'nalishida ta'lim oluvchi talabalarning «Oliy matematika» fanidan o'tiladigan ma'ruza mashg'ulotlari uchun mo'ljallanib, tayyorlangan.

1-mavzu. Sonli ketma-ketlik va uning limiti. Cheksiz kichik va cheksiz katta sonli ketma-ketliklar. «e» soni.

Reja:

1.Sonli ketma-ketliklar limiti.
2. Cheksiz kichik va cheksiz katta sonli ketma-ketliklar.
3. «e» soni.

1. Sonli ketma-ketliklar va uning limiti.

N -natural sonlar to'plamida berilgan funksiya sonlar ketma-ketligi ekanligini, ularni $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ yoki $x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots$ ko'rinishlarda ifoda etilishini eslatib o'tamiz.

1-ta'rif. $\varepsilon > 0$ va a soni uchun $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ interval a ning ε -atrofi deyiladi.

Agar *aqo* bo'lsa, $(-\varepsilon, \varepsilon)$ interval qisqacha ε -atrof deyiladi.

2-ta'rif. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik deyiladi, agarda istalgan $\varepsilon > 0$ soni uchun, ε -atrofdan tashqarida ketma-ketlikning chekli sondagi hadi mavjud bo'lsa. Bu hol

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

shaklida ifodalanib, n cheksizlikka intilganda x_n ning limiti 0 ga teng yoki x_n 0 ga yaqinlashadi deb aytiladi.

2-ta'rifni unga teng kuchli bo'lgan o'zgacha ko'rinishda ham ifodalash mumkin. Ya'ni agarda istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $n(\varepsilon)$ natural son mavjud bo'lsaki, barcha $n \geq n(\varepsilon)$ natural n soni uchun $|x_n| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ deyiladi,.

Endi cheksiz kichik ketma-ketlikka misol keltiramiz.

1. $x_n = \dfrac{1}{n},\ n = 1,2,\ldots$ ketma–ketlikni qaraylik, agar $\varepsilon > 0$ bo'lsa, $n < \dfrac{1}{\varepsilon}$ ya'ni $\dfrac{1}{n} > \varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi natural sonlar cheklita bo'ladi, ya'ni $(-\varepsilon, \varepsilon)$ ε -atrofdan tashqarida $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikning chekli sondagi hadi yotadi, demak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

2. $|q| < 1$ bo'lsin, u holda $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ ekanligini ko'rsatamiz. Haqiqatdan ham, agar $q = 0$ bo'lsa $\lim_{n\to 0} 0 = 0$ bo'lishi o'z-o'zidan ravshan. Agar $0 < |q| < 1$ bo'lsa, u holda

$\varepsilon > 0$ son uchun quyidagini hosil qilamiz. $\left|q^n\right| = \left|q\right|^n > \varepsilon \Leftrightarrow n\ \ell n\left|q\right| > \ell n\varepsilon \Leftrightarrow n < \dfrac{\ell n\varepsilon}{\ell n\left|q\right|}$ (chunki $\ell n\left|q\right| < 0$). Oxirgi tengsizlikni qanoatlantiruvchi natural son cheklita bo'ladi, ya'ni $\left(-\varepsilon, \varepsilon\right)$ ε -atrofdan tashqarida $\left\{q^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikning cheklita hadi yotadi, demak $q, \left(\left|q\right| < 1\right)$ son uchun $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ bo'lar ekan.

3. $\alpha > 0$ son bo'lsin, u holda $\varepsilon > 0$ son uchun, $n^{\alpha} < \dfrac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n < \left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ va bu tengsizlikni qanoatlantiruvchi natural sonlar cheklita, ya'ni $\dfrac{1}{n^{\alpha}} > \varepsilon$ tengsizlik cheklita natural son uchun o'rinli bo'lgani uchun, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun $\left(-\varepsilon, \varepsilon\right)$ ε - atrofdan tashqarida $\left\{\dfrac{1}{n^{\alpha}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ketma –ketlikning chekli sondagi hadi yotar ekan. Demak $\alpha > 0$ son uchun

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}} = 0$$

bo'lar ekan.

Endi cheksiz kichik ketma-ketliklarning xossalarini keltiramiz.

1. Agar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ va $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = 0$ bo'ladi. Shuni ko'rsataylik, haqiqatdan ham, agar $-\dfrac{\varepsilon}{2} < x_n < \dfrac{\varepsilon}{2}$ va $-\dfrac{\varepsilon}{2} < y_n < \dfrac{\varepsilon}{2}$ tengsizliklar o'rinli bo'lsa, u holda $-\varepsilon < x_n + y_n < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli ekanligi kelib chiqadi. Shuning uchun $\varepsilon > 0$ son berilganda. Shunday $n_1(\varepsilon)$ va $n_2(\varepsilon)$ natural sonlar mavjudki $n \geq n_1$ bo'lganda $-\dfrac{\varepsilon}{2} < x_n < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $n \geq n_2(\varepsilon)$ bo'lganda $-\dfrac{\varepsilon}{2} < y_n < \dfrac{\varepsilon}{2}$ tengsizliklar o'rinli bo'ladi, agar $n \geq n(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$ deb olsak, u holda $-\dfrac{\varepsilon}{2} < x_n < \dfrac{\varepsilon}{2}$ va $-\dfrac{\varepsilon}{2} < y_n < \dfrac{\varepsilon}{2}$ tengsizliklar bir paytda o'rinli bo'ladi, u holda $n \geq n(\varepsilon)$ bo'lganda $-\varepsilon < x_n + y_n < \varepsilon$ tengsizlik kelib chiqadi. Demak $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = 0$ ekan.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ ekanligidan istalgan α son uchun $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha x_n = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Haqiqatdan ham, agar $\alpha = 0$ bo'lsa, $\lim\limits_{n\to\infty} 0 \cdot x_n = 0$ ekanligi ravshan. Agar $\alpha \neq 0$ bo'lsa, u holda $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $n(\varepsilon)$ natural son mavjudki $n \geq n(\varepsilon)$

bo'lganda $-\frac{\varepsilon}{|\alpha|} < x_n < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$ tengsizlik o'rinli bo'ladi, u holda $n \ge n(\varepsilon)$ bo'lganda $-\varepsilon < \alpha x_n < \varepsilon$ ekanligi kelib chiqadi. Demak $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha x_n = 0$ ekan.

3. Agar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ va $\lim y_n = 0$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$ bo'ladi. Haqiqatdan ham, $\varepsilon > 0$ son uchun shunday n_1 *ва* n_2 natural sonlar mavjudki barcha $n \ge n_1$ uchun $|x_n| < \sqrt{\varepsilon}$ va barcha $n \ge n_2$ uchun $|y_n| < \sqrt{\varepsilon}$ bo'ladi, u holda barcha $n \ge n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ *учун* $|x_n y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\varepsilon}$, ya'ni $|x_n y_n| < \varepsilon$ bo'lar ekan.
Demak

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$$

bo'lar ekan.

4. Agar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ bo'lsa ketma-ketlik chegaralangan bo'ladi. Haqiqatdan ham, 1 soni $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ uchun shunday n_0 natural son mavjudki, istalgan $n \ge n_0$ uchun $|x_n| < 1$ o'rinli bo'ladi. Agar biz $K = \max\limits_{1 \le n < n_0} |x_n|$ deb olsak, istalgan natural n soni uchun $|x_n| < K + 1$ tengsizlik o'rinli bo'ladi, ya'ni $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik chegaralangan ketma-ketlik ekan.

5. Agar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ bo'lib $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$-chegaralangan ketma-ketlik bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$, ya'ni $\{x_n y_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik ham cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi. Haqiqatdan ham $K > 0$ son uchun, barcha natural n larda $|y_n| < K$ bo'lsin. $\varepsilon > 0$ son uchun shunday n_0 mavjudki barcha $n \ge n_0$ larda $|x_n| < \frac{\varepsilon}{K}$ bo'lsin, u holda barcha $n \ge n_0$ uchun $|x_n y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Demak $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$ bo'lar ekan.

6. Agar barcha n larda $0 \le x_n \le y_n$ tengsizlik o'rinli bo'lib $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ bo'ladi. Haqiqatdan ham, $\varepsilon > 0$ son uchun $(-\varepsilon, \varepsilon)$ atrofdan tashqarida $\{x_n\}$ ketma-ketlikning ham chekli sondagi elementi yotadi. Demak $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ ekan.

7. Agar barcha n larda $x_n \le z_n \le y_n$ tengsizlik o'rinli bo'lib, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ va $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ bo'ladi. Haqiqatdan ham, $x_n \le z_n \le y_n$ tengsizlikdan $0 \le z_n - x_n \le y_n - x_n$ tengsizlik kelib chiqadi. 1-xossaga ko'ra $\lim\limits_{n\to\infty} (\bar{y}_n \bar{x}_n) = 0$ bo'lgani uchun 6-xossaga ko'ra $\lim\limits_{n\to\infty} (z_n - x_n) = 0$ ekanligi kelib chiqadi. U xolda yana 1-xossaga ko'ra $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} [(z_n - x_n) + x_n] = 0$ o'rinli bo'ladi.

3-ta'rif. $R \supset A$ to'plam yuqoridan (quyidan) chegaralangan to'plam deyiladi, agarda shunday *K* soni topilsaki istalgan $x \in A$ uchun $x \le K$ $(K \le x)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa. Shu holda *K* soni *A* to'plamning yuqori (quyi) chegarasi deyiladi.

Agar *A* to'plam ham yuqoridan va ham quyidan chegaralangan to'plam bo'lsa, bunday to'plam chegaralangan to'plam deyiladi.

4-ta'rif. *K* soni (*u*-cheksiz ham bo'lishi mumkin) *A* to'plamning aniq yuqori (aniq quyi) chegarsi deyiladi, agarda $x < K$ $(x > K)$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi istalgan x soni uchun $x < a \le k$ $(x > a \ge k)$ tengsizlik qanoatlantiruvchi to'plamning elementi mavjud bo'lsa.

Bu holda *A* to'plamning aniq yuqori (aniq quyi) chegarasi $K = \sup A$ $(K = \inf A)$ shaklda ifoda etiladi.

1-teorema. Agar *A* to'plam yuqoridan quyidan chegaralangan bo'lsa $\sup A$ $(\inf A)$ soni chekli son bo'ladi.

2-teorema. Agar $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik o'suvchi (kamayuvchi) bo'lib $\sup\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = 0$ $\left(\inf\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = 0\right)$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ bo'ladi.

Isbot. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ o'suvchi bo'lsin, ya'ni $x_1 \le x_2 \le x_3 \le \cdots \le x_n \le x_{n+1} \le \ldots$ o'rinli bo'lib $\sup\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = 0$ bo'lsin, u holda $\varepsilon > 0$ uchun shunday n_0 nomer mavjudki $x_n \in (-\varepsilon, 0]$ bo'ladi. U holda istalgan $n \ge n_0$ da

$$\varepsilon < x_{n_0} \le x_n \le 0$$

bo'lgani uchun, $n \ge n_0$ larda $x_n \in (-\varepsilon, 0]$ bo'lar ekan, ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Ketma-ketlik kamayuvchi bo'lgan holda ham isbot shu tarzda bajariladi.

5-ta'rif. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik cheksiz katta ketma-ketlik deyiladi, agarda istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun $(-\varepsilon, \varepsilon)$ atrof ichida ketma-ketlikning chekli sondagi hadi bo'lsa. Bu hol

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

shaklda ifodalanib, n cheksizlikka intilganda x_n ning limiti cheksizlikka teng, yoki cheksizlikka intiladi deb aytiladi.

Agar bu ta'rifda $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikning biron hadidan, keyingi barcha hadlari musbat bo'lsa,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

agar manfiy bo'lsa,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

deb ataladi.

Masalan, $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$ va $\lim\limits_{n\to\infty}(-n) = -\infty$ bo'ladi.

5-ta'rifni unga teng kuchli bo'lgan boshqacha ko'rinishda ham aytish mumkin. Ya'ni, agarda istalgan $\varepsilon>0$ son uchun shunday n_0 nomer mavjud bo'lsaki barcha $n \ge n_0$ uchun $|x_n| > \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ deyiladi.

Agarda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday n_0 nomer mavjud bo'lsaki, barcha $n \ge n_0$ uchun $x_n > \varepsilon$ $(x_n < -\varepsilon)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty\right)$ deyiladi.

3-teorema. Agar $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lsa, $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik cheksiz katta ketma-ketlik bo'ladi. Aksincha $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$-cheksiz katta ketma-ketlik bo'lsa, $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$-cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi. Teoremada barcha n larda $x_n \ne 0$ deb qaraladi.

Isbot. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ bo'lsin, u holda istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday n_0 mavjudki barcha $n \ge n_0$ lar uchun $|x_n| < \frac{1}{\varepsilon}$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. U holda barcha $n \ge n_0$ uchun $\left|\frac{1}{x_n}\right| > \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi, ya'ni

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \infty$$

bo'ladi. Aksincha, agar $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=\infty$ bo'lsa, u holda istalgan $\varepsilon>0$ uchun shunday n_0 mavjudki barcha $n\ge n_0$ uchun $|x_n|>\frac{1}{\varepsilon}$ tengsizlik o'rinli bo'ladi, u holda barcha $n\ge n_0$ uchun $\left|\frac{1}{x_n}\right|<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi, ya'ni

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0$$

bo'ladi.

6-ta'rif. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikning limiti a songa teng (yoki a soniga yaqinlashadi) deyiladi, agar $\{x_n-a\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lsa. Bu xol $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ shaklida ifoda etiladi. Demak $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ deyiladi, agarda $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-a)=0$ tenglik o'rinli bo'lsa. Bunday ketma-ketlik yaqinlashuvchi ketma-ketlik deyiladi.

Ketma-ketlik limiti quyidagi xossalarga ega bo'ladi $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ va $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$ bo'lsin, u holda.

1. Istlagan α va β sonlar uchun

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha x_n+\beta y_n)=\alpha a+\beta b$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Haqikatdan ham, cheksiz kichik ketma-ketliklar xossalariga ko'ra, quyidagi o'rinli bo'ladi:

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha x_n+\beta y_n-\alpha a-\beta b)=\lim_{n\to\infty}[\alpha(x_n-a)+\beta(y_n-b)]=0$$

2. Yaqinlashuvchi ketma-ketlik chegaralangan ketma- ketlik bo'ladi. Haqiqatdan ham $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ bo'lsin, u holda $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-a)=0$ bo'lgani uchun $\{x_n-a\}_{n=1}^{\infty}$-chegaralangan ketma-ketlik bo'ladi, ya'ni shunday $K>0$ son mavjudki barcha n uchun $|x_n-a|<K$ o'rinli bo'ladi, u holda barcha n uchun

$$|x_n|=|(x_n-a)+a|\le|x_n-a|+|a|<K+|a|$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Demak $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$-chegaralangan ketma-ketlik ekan.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}y_nx_n=a\cdot b$ bo'ladi. Haqiqatdan ham, cheksiz kichik ketma-ketliklarning xossalariga ko'ra, quyidagi o'rinli bo'ladi

$$\lim_{n\to\infty}(x_ny_n-ab)=\lim_{n\to\infty}[(x_n-a)y_n+a(y_n-b)]=\lim_{n\to\infty}(x_n-a)y_n+\lim_{n\to\infty}a\cdot(y_n-b)=$$

$$=0\cdot b+a\cdot 0=0$$

.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b, \quad b \neq 0$ va barcha n larda $y_n \neq 0$ bo'lsa, u holda

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Haqiqatdan ham cheksiz kichik ketma-ketliklar xossalariga ko'ra, quyidagi o'rinli bo'ladi.

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, aniqlik uchun $b > o$ bo'lsin, u holda $\varepsilon = \dfrac{b}{2}$ uchun shunday n_0 mavjudki barcha $n \geq n_0$ uchun

$$|y_n - b| < \frac{b}{2}$$

o'rinli bo'ladi. U holda

$$-\frac{b}{2} < y_n - b < \frac{b}{2} \Rightarrow y_n > \frac{b}{2} > 0$$

va $0 < \dfrac{1}{y_n} < \dfrac{2}{b}$, ya'ni $\left\{\dfrac{1}{y_n}\right.$, $n \geq n_0$ uchun chegaralangan ekan. U holda, ($n \geq n_0$ deb qarash mumkin)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n \cdot b - y_n a}{y_n \cdot b} = \lim_{n\to\infty} \frac{(x_n - a)b - a(y_n - b)}{y_n \cdot b} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[b \cdot (x_n - a) \cdot \frac{1}{y_n \cdot b} - a(y_n - b) \cdot \frac{1}{y_n \cdot b}\right] = 0$$

ekanligi kelib chiqadi.

5. Agar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ bo'lib, biron nomerdan boshlab $x_n \leq y_n$ tengsizliklar o'rinli bo'lsa, u holda $a \leq b$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Haqiqatdan ham, agar aksi bo'lganda edi ya'ni $a > b$ bo'lsa, u holda $\varepsilon > 0$ sonni shunday tanlab olish mumkinki $a - \varepsilon > b + \varepsilon$ (masalan $\varepsilon < \dfrac{b-a}{2}$), tengsizlik o'rinli bo'ladi, u holda shunday n_0 natural son mavjudki barcha $n \geq n_0$ lar uchun $a - \varepsilon < x_n$ *ва* $y_n < b + \varepsilon$ tengsizliklar o'rinli bo'ladi, u holda $n \geq n_0$ uchun $x_n > y_n$ bo'ladi. Bu esa qarama-qarshilikdir.

4-teorema. Agar $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$-o'suvchi (kamayuvchi) ketma-ketlik bo'lib yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo'lsa, u holda bu ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lib $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\limits_n \{x_n\}$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\limits_n \{x_n\}\right)$ bo'ladi.

Isbot. Teorema shartiga ko'ra $\sup\{x_n\} = a$ -chekli son bo'ladi, u holda $\{x_n - a\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik o'suvchi bo'lib $\sup\{x_n - a\} = 0$ bo'ladi. U holda 2-teoremaga ko'ra $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - a) = 0$ bo'ladi, demak $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ekan.

5-teorema. Agar barcha natural n uchun $x_n \le z_n \le y_n$ bo'lib, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ bo'ladi

Isbot. $x_n - a \le z_n - a \le y_n - a$ tengsizlik barcha natural n uchun o'rinli bo'ladi, u holda 7-xossaga ko'ra $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n - a) = 0$ ekanligi kelib chiqadi, demak $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ ekan.

6-teorema. (Ichma-ich joylashgan segmentlar haqidagi teorema).

Agar har bir natural n uchun $[a_n, b_n]$ $(a_n < b_n)$ segment berilgan bo'lib, barcha n larda

$$[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$$

munosabat o'rinli va $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *ва* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ limitlar mavjud bo'lib

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c,$$

istalgan natural n uchun $a_n \le c \le b_n$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Isbot. Teorema shartiga ko'ra $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik o'suvchi bo'lib yuqoridan (masalan b_1 bilan) chegaralangan, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik esa kamayuvchi bo'lib quyidan (masalan a_1 bilan) chegaralangan bo'ladi, u holda $\sup\limits_n\{a_n\} = a$ *ва* $\inf\limits_n\{b_n\} = b$ desak, 4-teoremaga asosan

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b,$$

bo'ladi. Barcha n larda $a_n \le a \le b \le b_n$ bo'lgani uchun, barcha n larda

$$o \le b - a \le b_n - a_n$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ bo'lgani uchun 5-teoremaga ko'ra $b - a = 0, \quad b = a$ ekanligi ya'ni

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

tenglik o'rinli ekan. Teorema isbot bo'ldi.

20.3. «e» soni.

4-teoremaning tadbig'i sifatida, quyidagi limitni ko'rsatamiz

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Agar $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ketma-ketlikni kiritsak, uni o'suvchi va yuqoridan chegaralangan ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun biz qo'yidagi tengsizlikdan foydalanamiz, agar $x \geq -1$ bo'lsa, u holda

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

va istalgan a, b va natural n uchun

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} \cdot b^k$$

bu yerda $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $n! = 1\cdot 2\cdots n$, ekanligini eslatib o'tamiz.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left[\frac{(n+2)\cdot n}{(n+1)^2}\right]^n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \geq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right) = \frac{(n+2)}{n+1}\cdot\frac{(n+1)^2-n}{(n+1)^2} = \frac{(n+2)(n^2+n+1)}{(n+1)^3} =$$

$$= \frac{n^3+3n^2+3n+2}{(n+1)^3} > \frac{n^3+3n^2+3n+1}{(n+1)^3} = 1$$

Demak $1 < \frac{x_{n+1}}{x_n}$, ya'ni $x_n < x_{n+1}$ ekan, ya'ni $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik o'suvchi ketma-ketlik ekan. Endi uni yuqoridan chegaralangan ekanligini ko'rsatamiz. quyidagi tengsizlikka ko'ra

$$C_n^k \cdot \frac{1}{n^k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\cdot\frac{[n-(k-1)][n-(k-2)]\cdots(n-1)\cdot n}{n^k} =$$

$$= \frac{1}{k!}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{k-2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{k!}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot \frac{1}{n^k} < \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!} = 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}$$

Endi $k \geq 2$ bo'lganda, ushbu tengsizlikdan $\frac{1}{k!}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}<\frac{1}{2^{k-1}}$ quyidagini hosil qilamiz

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} = 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} = 2+\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 2+\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right) < 3$$

Demak istalgan natural n uchun $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ tengsizlik o'rinli bo'lar ekan. U holda 4-teoremaga ko'ra quyidagi limit mavjud va chekli bo'ladi, uning qiymatini ℓ orqali belgilanadi

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \ell$$

ℓ soni irratsional son bo'lib, u matematika va uning tadbiqlarida katta ahamiyat kasb etadi. ℓ sonining o'nli kasr ko'rinishidagi dastlabki o'n xonali yoyilmasi quyidagicha bo'ladi: $\ell = 2{,}7182818284\ldots$

Endi quyidagi limitni istalgan $a > o$ uchun ko'rsataylik

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$$

Dastavval, $a > 1$ deb qaraylik, u holda $a^{\frac{1}{n}} > 1$ bo'lib, $(1+x)^n \geq 1+nx$ tengsizlikda $(x \geq -1)$ $1+x = a^{\frac{1}{n}}$ deb olsak quyidagini hosil qilamiz

$$1+n\cdot\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right) \leq a \Rightarrow o < a^{\frac{1}{n}}-1 \leq \frac{a-1}{n}$$

bu yerdan $n\to\infty$ da limitga o'tsak

$$\lim_{n\to\infty}\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right) = 0$$

ekanligi kelib chiqadi, ya'ni

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$$

ekan. Agar $o < a < 1$ bo'lsa, u holda $\frac{1}{a} > 1$ bo'lgani uchun

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}} = 1$$

ekanligi kelib chiqadi. Demak istalgan $a > 0$ uchun

$$\ell im_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$$

tenglik o'rinli bo'lar ekan.

Keyingi misol sifatida istalagn $a > 0 \quad (a \neq 0)$ son uchun

$$\ell im_{n\to\infty} \ell og_a\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$$

ekanligini ko'rsataylik. Dastavval $a > 1$ deb qaraylik, u holda $\ell og_a x$ funksiya o'suvchi bo'lgani uchun, agar biz $t_n = \ell og_a\left(1+\frac{1}{n}\right)$ deb $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma–ketlikni hosil qilsak, bu ketma-ketlik kamayuvchi bo'lib, ya'ni $t_1 > t_2 > \cdots > t_n > t_{n+1} > \cdots$, istalgan n uchun $t_n > 0$ bo'lganidan, uning chekli limiti mavjud bo'lib, 4-teoremaga ko'ra

$$\ell im_{n\to\infty} t_n = \inf_n \{t_n\} = \alpha$$

ekanligi kelib chiqadi. $\alpha = 0$ ekanligini ko'rsatamiz, haqiqatdan ham, agar $\alpha > 0$ deb farz qilsak, $a^{\alpha} - 1 > 0$ bo'lgani uchun, $\frac{1}{n} < a^{\alpha} - 1$ deb olsak, u holda shunday n larda

$$t_n = \ell og_a\left(1+\frac{1}{n}\right) < \ell og_a a^{\alpha} = \alpha$$

ekanligi kelib chiqadi, bu esa $\alpha = \inf_n \{t_n\}$ ekanligiga qarama-qarshidir. Demak $\alpha = 0$ ekan, u holda

$$\ell im_{n\to\infty} \ell og_a\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Agar $o < a < 1$ bo'lsa, $\frac{1}{a} > 1$ bo'lgani uchun

$$\ell im_{n\to\infty} \ell og_a\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ell im_{n\to\infty} -\left(\ell og_{\frac{1}{a}}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = 0$$

ekanligi kelib chiqadi. Xuddi shuningdek

$$\ell im_{n\to\infty} \ell og_a\left(1-\frac{1}{n}\right) = 0$$

ekanligi ko'rsatiladi.

Xulosa

Sonli ketma-ketlarlar nazariyasidagi asosiy ta'rif va teoremalar keltirilgan. Teoremalarning isboti yetarli darajada sodda ifodalangan. Har bir ta'rif va teoremalar uchun misollar keltirilgan.

Tayanch iboralari:

Sonli ketma-ketlik, limit, cheksiz kichik ketma-ketlik, funksiya, uzluksizlik.

Takrorllash uchun savollar

1. Sonli ketma-ketlik deb nimaga aytiladi?
2. Cheksiz kichik ketma-ketlik deganda qanday ketma-ketlik tushuniladi?
4. 2 ga intiluvchi 3 ta ketma-ketlik yozing.
5. Uzluksiz funksiya ta'rifini aytib misollar keltiring.
7. Ajoyib limitlarni yozing.

Asosiy adabiyotlar

1. T.A.Azlarov, X. Mansurov «Matematika analiz» T., «O'qituvchi» 1-qism 1986 y., 2 qism 1989 y.
2. T.J.Jo'rayev , G.Xudoyberganov, A.K.Vorisov, X.Mansurov «Oliy matematika asoslari», I , II qismlar., T., 1999 y.
3. Shipachev V.S. «Vo'sshaya matematika», M., «Vo'sshaya shkola», 1991y.
4. Vinogradov I.M.«Elemento' vo'sshey matematiki»,M.,1999 y.

Qo'shimcha adabiyotlar:

1. Soatov ¨.U. «Oliy matematika», 1 va 2- jildlar, T., «O'qituvchi» , 1992y., 1994 y.
2. B. Abdualimov , Sh.Solixov «Oliy matematika qiskacha kursi», T., «O'qituvchi», 1981 y.
3. Danko P.Ye., PopovaA.T. Kojevnikova T.Ya. «Vo'sshaya matematika v uprajneniyax i zadachax» M., Vo'sshaya shkola. M., 1998 y.
4. Zaysev I.A. Vo'sshaya matematika. M., 1998 y.

21-mavzu. Bir o'zgaruvchili funksiya tushunchasi. Funksiya limiti. Limitlar xaqida asosiy teoremalar. Ajoyib limitlar.

Reja:

21.1. Bir o'zgaruvchili funksiya limiti.
21.2. Limitlar xaqida asosiy teoremalar
21.3. Aniqmasliklar. Ajoyib limitlar.

21.1. Bir o'zgaruvchili funksiya limiti

Endi bir o'zgaruvchili funksiya xaqida ma'lumotlarga ega bo'lgan xolda uning limiti tushunchasi bilan tanishib chikaylik.

1-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biron-bir atrofida aniqlangan bo'lib (x_0 nuqtada aniqlangan bo'lishi shart emas) ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son mavjud bo'lsaki, $o < |x - x_0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x lar ya'ni istalgan $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ uchun $|f(x) - a| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, xx_0 ga intilganda $f(x)$ funksiyaning limiti a ga teng deyiladi va u quyidagicha belgilanadi

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

2-ta'rif. Agarda $\lim_{x \to x_0} x_n = x_0$ bo'lgan istalgan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik uchun $\lim_{x \to x_0} f(x_n) = a$ tenglik o'rinli bo'lsa,xx_0 ga intilganda $f(x)$ funksiyaning limiti a ga teng deyiladi.

1 va 2-ta'riflar teng kuchlidir. Agar 1-ta'rifda barcha $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ $(x \in (x_0, x_0 + \varepsilon))$ uchun $|f(x) - a| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lishligi talab qilinsa, u holda a soni $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi chap (o'ng) limiti deyiladi va quyidagicha belgilanadi

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = a \qquad \left(\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = a \right)$$

Hosil bo'lgan limitlar bir tomonli (o'ng yoki chap) limitlar deb ataladi. Chap va o'ng limitlar uchun quyidagi belgilashlar qo'llaniladi

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0), \qquad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$$

Yuqoridagi ta'rifda x_0 nuqta va a sifatida $\infty, +\infty$ yoki $-\infty$ cheksizlarni olishimiz mumkin. Bu hollarda ta'riflarda mos o'zgartirishlarni kiritib quyidagi

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a, \ \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = a, \ \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = a, \ \lim_{x \to x_0} f(x) = \infty, \ \lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty, \ \lim_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = \infty, \ \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty \ \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty, \ \lim_{x \to \infty} f(x) = \pm\infty, \ \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$$

kabi limitlarni hosil qilishimiz mumkin.

3-ta'rif. $x \to x_0$ $(x \to \infty)$ da $f(x)$ funksiya cheksiz kichik mikdor deyiladi, agarda $\lim_{x \to x_0} f(x_n) = 0$ $\left(\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \right)$ tenglik o'rinli bo'lsa.

4-ta'rif. $x \to x_0$ $(x \to \infty)$ da $f(x)$ funksiya cheksiz katta miqdor deyiladi, agarda $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ $\left(\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \right)$ bo'lsa.

21.2. Limitlar xaqida asosiy teoremalar

Funksiya limitining, cheksiz kichik va cheksiz katta mikdorlarning hamda quyidagi xossalarining isboti, funksiya limiti ta'rifining ketma-ketliklar tilidagi ta'rifidan va cheksiz kichik va cheksiz katta ketma-ketliklarning xossalari isbotidan kelib chiqadi.

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ va $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ bo'lsa, u holda istalgan α va β sonlari uchun

$$\lim_{x\to x_0}\left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right)=0$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

2. Agar $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun x_0 nuqtaning biron $(x_0-\varepsilon, x_0)\cup(x_0, x_0+\varepsilon)$ atrofida chegaralangan bo'ladi.

3. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biron atrofida chegaralangan bo'lib, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ bo'lsa, u holda

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\ g(x)=0$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

4. Agar $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ bo'lib, $c<a<b$ bo'lsa, u holda x_0 nuqtaning (biron $\varepsilon>0$ son uchun) $(x_0-\varepsilon, x_0)\cup(x_0, x_0+\varepsilon)$ atrofida $c<f(x)<b$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

5. Agar $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a\neq 0,\ \ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=\infty$ bo'ladi.

6. Agar $f(x)$ funksiya x nuqtaning biron atrofida chegaralangan bo'lib, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=\infty$ bo'ladi.

7. Agar $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=\infty$ bo'ladi va aksincha, agar $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$ bo'lsa $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{g(x)}=0$ bo'ladi.

8. Agar $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$ bo'lsa, istalgan α *va* β sonlari uchun

$$\lim_{x\to x_0}\left(\alpha f(x)\pm\beta g(x)\right)=\alpha\cdot a+\beta\cdot b$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=a\cdot b$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

9. Agar $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ va $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b\neq 0$ bo'lsa, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a}{b}$ tenglik o'rinli bo'ladi.

10. Agar $\lim\limits_{x\to b} f(x)=a$ va $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$ bo'lsa, u holda murakkab $f(g(x))$ funksiya uchun $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(g(x)\right)=a$ tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglikda $g(x)=t$

almashtirish bajarsak, $x \to x_0$ ∂a $t \to b$ ekanligidan quyidagini $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim\limits_{t\to b} f(t) = a$ yoza olamiz.

11. Agar $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$ bo'lib, x_0 nuqtaning biron atrofida (yoki $x_0 = \infty$ bo'lgan holda $|x|$ yetarlicha katta bo'lgan barcha x larda) $f(x) \le g(x)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $a \le b$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

12. Agar x_0 nuqtaning biron atrofida (yoki $x_0 = \infty$ bo'lganda, $|x|$ yetarlicha katta bo'lgan barcha x larda) $f(x) \le \varphi(x) \le g(x)$ tengsizlik o'rinli bo'lib, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = a$ tenglik o'rinli bo'ladi.

13. Agar x_0 nuqtaning biron atrofida (yoki $x_0 = \infty$ bo'lganda, $|x|$ yetralicha katta bo'lgan barcha x larda) $f(x) = const = a$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ bo'ladi.

14. Agar $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{x\to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0 + 0} f(x) = a$ bo'ladi. Aksincha, agar $\lim\limits_{x\to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0 + 0} f(x) = a$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ bo'ladi.

21.3. Aniqmasliklar. Ajoyib limitlar.

Ketma-ketlik va funksiyalarning limitini hisoblashda quyidagi ko'rinishdagi aniqmasliklar yuzaga kelishi mumkin. Aniqmasliklar deyilishiga sabab, turli misollarda bu aniqmasliklarning qiymati, chekli yoki cheksiz sondan iborat bo'lishligi yoki limitlar mavjud bo'lmasligi mumkin. Demak aniqmasliklar quyidagi ko'rinishlarda bo'ladi:

$$\frac{0}{0}, \ \frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, \ \infty-\infty, 1^{\infty}, \ 0^{0}, \ \infty^{0}$$

Bu yerdagi aniqmasliklarning ayrimlarini boshqasi orqali ifodalash mumkin. Limitning 7-xossasiga ko'ra $\frac{1}{\infty} = 0, \quad \frac{1}{0} = \infty$ simvollarni kiritishimiz mumkin. Shunga ko'ra,

$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}, \qquad 0\cdot\infty = 0\cdot\frac{1}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}, \ 1^{\infty} = \ell^{\infty\,\ell n 1} = \ell^{\infty\cdot 0},$$

$$0^{0} = \ell^{0\,\ell n 0} = \ell^{0\cdot\infty}, \ \infty^{0} = \ell^{0\,\ell n\infty} = \ell^{0\cdot\infty}$$

simvollar tengligini yoza olamiz.

Shuni ta'kidlash kerakki, bu tengliklar sonlar tengligi ma'nosiga ega bo'lmay, balki bir ko'rinishdagi aniqmaslikni ikkinchi xil ko'rinishdagi aniqmaslikka olib kelishi mumkinligini anglatadi. Shu holatni e'tiborga olib aniqmaslikka doir misollarni $\frac{0}{0}$ va $\infty - \infty$ ko'rinishidagi aniqmasliklarga keltiramiz.

$\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslikka doir misollar.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x = 0.$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty.$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \cdot \frac{a\cdot x}{x} = a \lim\limits_{x\to 0} 1 = a.$

4) $\chi(x) = \begin{cases} 1, \text{агар } x - \text{рационал сон} \\ 0, \text{агар } x - \text{иррационал сон} \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cdot \chi(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \chi(x) -$ limit mavjud emas.

Endi $\infty - \infty$ ko'rinishdagi aniqmasliklarga misol keltiramiz.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x + a - x) = a$

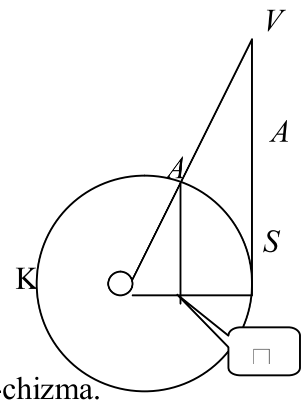
3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x - 2x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-x) = -\infty$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x + \chi(x) - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \chi(x)$ limit mavjud emas.

Endi $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ limitni hisoblaylik. Avval $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$ ekanligini ko'rsataylik. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ deb olaylik. Radiusi 1 ga teng quyidagi aylanani qaraylik, $x - \angle AOC$ burchakning radian o'lchovi bo'lsin, u holda $\breve{AC}$-uzunligi x ga, $\sin x = \frac{AK}{OA} = AK,\ tgx = \frac{BC}{OC} = BC$ teng bo'lib, $S_{OAC} - OAC$ - sektor yuzasini belgilasak, u holda

$$S_{\Delta OAC} < S_{OAC} < S_{\Delta OBC} \Rightarrow \frac{1}{2} OC \cdot AK < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} OC \cdot BC \Rightarrow \sin x < x < tgx$$

tengsizlik kelib chiqadi (1-chizma).



1-chizma.

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ bo'lganda, $o < \sin x < x$ ekanligidan $\lim\limits_{x\to+0} \sin x = 0$ tenglik kelib chiqadi. $\sin(-x) = -\sin x$ bo'lgani uchun $\lim\limits_{x\to-0} \sin x = 0$ bo'lar ekan. Demak $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$ ya'ni $\lim\limits_{x\to+0} \frac{\sin x}{x}$ limit $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslik ekan. Endi $0 < x < \frac{\pi}{2}$ uchun quyidagilarni hosil qilamiz.

$$\sin x < x < tgx \Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x \Rightarrow 0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 2\sin\frac{2x}{2} < 2\sin\frac{x}{2} < 2\cdot\frac{x}{2} < x$$

ya'ni $0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < x$ tengsizlik kelib chiqar ekan.

$$\lim_{x\to+0}\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) = 0 \quad \text{ya'ni} \quad \lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

ekanligi kelib chiqadi. Endi $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$ ekanligini hisobga olsak,

$\lim\limits_{x\to-0}\frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{t\to+0}\frac{\sin(-t)}{-t} = \lim\limits_{t\to+0}\frac{\sin t}{t} = 1$ tenglik kelib chiqadi. U holda

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

limit o'rinli bo'lar ekan.

Endi 1^{∞} ko'rinishdagi aniqmaslikka doir $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ limitni hisoblaylik. Dastavval

$$\ell im_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

limitni ko’raylik. Agar x, $\frac{1}{n+1}\le x\le\frac{1}{n}$ tengsizliklarni qanoatlantirsa, u holda quyidagi tengsizliklarni yoza olamiz

$$n\le\frac{1}{x}\le n+1$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}\le(1+x)^{\frac{1}{x}}\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\Rightarrow\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}\le(1+x)^{\frac{1}{x}}\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Agar bu tengsizlikda $x\to+0$, ya’ni $n\to+\infty$ bo’lsa, u holda $\ell im_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e,$ $\ell im_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=e$ va $\ell im_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=\ell im_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$ bo’lgani uchun, limitlar xossasiga asosan

$$\ell im_{n\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

ekanligi kelib chiqadi. Endi $\ell im_{n\to-0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ limitni ko’raylik. $-x=\frac{t}{1+t}$ almashtirish bajarsak, $x\to-0$ bo’lganda $t\to+0$ bo’ladi, chunki $t=-\frac{x}{1+x}$, u holda

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=\left(1-\frac{t}{1+t}\right)^{-\frac{1+t}{t}}=\left(\frac{1}{1+t}\right)^{-\frac{1+t}{t}}=(1+t)^{\frac{1+t}{t}}=(1+t)^{\frac{1}{t}}\cdot(1+t)$$ tenglik kelib chiqadi.

Agar biz $x\to-0$ da, ya’ni $t\to+0$ limitga o’tsak

$$\ell im_{x\to-0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ell im_{t\to+0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\cdot(1+t)=e$$

ekanligi kelib chiqadi. Demak,

$$\ell im_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

tenglik o’rinli bo’lar ekan.

Shuni ta’kidlaymizki quyidagi

$$\ell im_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

limit birinchi ajoyib limit,

$$\ell im_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

esa ikkinchi ajoyib limit deb ataladi.

Xulosa.

Limitlar nazariyasidagi asosiy ta'rif va teoremalar keltirilgan. Teoremalarning isboti yetarli darajada sodda ifodalangan. Har bir ta'rif va teoremalar uchun misollar keltirilgan.

Tayanch iboralari.

Ketma-ketlik, limit, cheksiz kichik ketma-ketlik, funksiya, uzluksizlik.

Takrorllash uchun savollar.

1.Ketma-ketlik limitining xossalarini keltiring.
2.Limiti mavjud bo'lmagan ketma-ketliklarga misollar keltiring.
3.2 ga intiluvchi 3 ta ketma-ketlik yozing.
4.Uzluksiz funksiya ta'rifini aytib misollar keltiring.
5.Ajoyib limitlarni yozing.

Asosiy adabiyotlar

1. T.A.Azlarov, X. Mansurov «Matematika analiz» T., «O'qituvchi» 1 qism 1986 y., 2 qism 1989 y.
2.T.J.Jo'rayev , G.Xudoyberganov, A.K.Vorisov, X.Mansurov «Oliy matematika asoslari», I , II qismlar., T., 1999 y.
3. Shipachev V.S. «Vo'sshaya matematika», M., «Vo'sshaya shkola», 1991y.
4. Vinogradov I.M.«Elemento' vo'sshey matematiki»,M.,1999 y.

Qo'shimcha adabiyotlar:

1.Soatov ¨.U. «Oliy matematika», 1 va 2- jildlar, T., «O'qituvchi» , 1992y., 1994 y.
2.B. Abdualimov , Sh.Solixov «Oliy matematika qiskacha kursi» , T., «O'qituvchi» , 1981 y.
3. Danko P.Ye., PopovaA.T. Kojevnikova T.Ya. «Vo'sshaya matematika v uprajneniyax i zadachax» M., Vo'sshaya shkola. M., 1998 y.
4. Zaysev I.A. Vo'sshaya matematika. M., 1998 y.

22-mavzu. Funksiya uzluksizligi. Uzluksiz funksiyalar xaqida teoremalar. Bir o'zgaruvchili funksiyalarning uzilishi va uzilish turlari.

22.1. Uzluksiz funksiyalar.
22.2. Uzluksiz funksiyalar xaqida teoremalar.
22.3. Uzluksiz funksiyalarning asosiy xossalari.

22.1. Uzluksiz funksiyalar

1-ta'rif. x_0 nuktaning biron-bir atrofida aniqlangan $f(x)$ funksiya uchun $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ tenglik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deb ataladi.

Agar $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$, $\left(\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0)\right)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada o'ngdan (chapdan) uzluksiz deyiladi.

Funksiya limiti xossalaridan quyidagi teorema o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

1-teorema. Agar $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$ bo'lsa, , $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

1-ta'rifni boshqacha orttirmalar tilida ham ifodalash mumkin. U quyidagidan iborat: agar argumentning ikki x_0 va $x_0+\Delta x$ qiymatlari qaralsa, Δx -argument orttirmasi deyiladi. Bu orttirmaga mos keluvchi $y=f(x)$ funksiya orttirmasi Δy quyidagicha aniqlanadi

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$

U holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi, agarda

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x) - f(x_0)\right] = \lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$$

tenglik o'rinli bo'lsa.

22.2. Uzluksiz funksiyalar xaqida teoremalar.

Endi, funksiya limitining xossalaridan foydalanib, uzluksiz funksiyalar uchun quyidagi teoremalar o'rinli ekanligini ko'rsatishimiz mumkin.

2-teorema. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, quyidagi funksiyalar ham uzluksiz bo'ladi

$$\alpha f(x) \pm \beta g(x),\ \ f(x)\cdot g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}$$

bu yerda α va β istalgan sonlar bo'lib, funksiyalar nisbati qaralayotganda $g(x_0)\neq 0$ deb faraz qilinadi.

3-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $x=b$ nuqtada uzluksiz $g(x)$ funksiya esa $x=x_0$ nuqtada uzluksiz bo'lib, $g(x_0)=b$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda murakkab $f(g(x))$ funksiya $x=x_0$ nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Endi uzluksiz funksiyalarga misollar keltiramiz. Avval quyidagi ta'rifni kiritaylik.

2-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya biron A - to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, bu funksiya A -to'plamda uzluksiz deyiladi.

1. Butun va ratsional kasr funksiyalar, o'zlarining aniqlanish sohasida uzluksiz bo'ladi. Haqiqatdan ham, $f(x)=x$ funksiyasi $(-\infty,+\infty)$ oraliqda, ya'ni barcha x larda uzluksiz bo'ladi, u holda 1-teoremadan istalgan natural n va a sonlari uchun $f(x)=a\cdot x^n$ funksiya uzluksizligi kelib chiqadi. Bu yerdan istalgan butun funksiya, ya'ni x ga nisbatan ko'pxad bo'lgan

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

funksiya ham $(-\infty,+\infty)$ da uzluksiz bo'lishi kelib chiqadi.

Demak yana, 2-teoremani e'tiborga olib, n va m natural sonlar uchun quyidagi

$$\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$$

kasr ratsional funksiya, maxrajining ildizi bo'lmagan x larda uzluksiz ekanligi kelib chiqadi.

2. Ko'rsatkichli funksiya, ya'ni $f(x)=a^x$ funksiya $(-\infty,+\infty)$ oraliqda uzluksiz bo'ladi. Dastavval

$$\lim_{x\to 0} a^x=1$$

ekanligini ko'rsatamiz. $a>1$ bo'lsin, agar $|x|<\frac{1}{n}$, ya'ni $-\frac{1}{n}<x<\frac{1}{n}$ bo'lsa, u holda

$$a^{-\frac{1}{n}}<a^x<a^{\frac{1}{n}}$$

tengsizlik o'rinli bo'lib, $x\neq 0$ uchun $n=\left[\frac{1}{|x|}\right]$ deb olsak,($[b]-b$ sonning butun qismi, ya'ni b sondan oshmaydigan butun sonlarning eng kattasi), $x\to 0$ da $n\to\infty$ bo'lgani uchun, funksiya limitining 12-xossasiga ko'ra

$$\lim_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=1$$

ekanligidan $\lim_{x\to 0} a^x=1$ bo'ladi. Agar $0<a<1$ bo'lsa $\frac{1}{a}>1$ bo'lganidan

$$\lim_{x\to 0} a^x=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}=\frac{1}{1}=1$$

ekanligi kelib chiqadi. Endi $f(x)=a^x$ funksiyaning $x=x_0$ nuqtada uzluksizligini ko'rsataylik. Haqiqatdan ham

$$\lim_{x\to x_0} a^x = \lim_{x\to x_0} a^{x_0}\cdot a^{x-x_0} = a^{x_0}\lim_{x\to x_0} a^{x-x_0} = a^{x_0}$$

3. Trigonometrik funksiyalari o'zlarining aniqlanish sohasida uzluksiz ekanligini ko'rsatamiz. Avval $y=\sin x$ funksiyasini qaraylik, u holda

$$\lim_{x\to x_0}\sin x = \lim_{x\to x_0}\left[(\sin x-\sin x_0)+\sin x_0\right] = \lim_{x\to x_0}(\sin x-\sin x_0)+\sin x_0 =$$

$$=\lim_{x\to x_0} 2\sin\frac{x-x_0}{2}\cdot\cos\frac{x+x_0}{2}+\sin x_0$$

Bu tenglikda $y=\cos x$ funksiyasi chegaralangan bo'lganligi uchun, funksiya limitining 3-xossasiga va $\lim_{t\to 0}\sin t=0$ ekanligidan

$$\lim_{x\to x_0} 2\sin\frac{x-x_0}{2}\cdot\cos\frac{x-x_0}{2}+\sin x_0=\sin x_0$$

ekanligi kelib chiqadi. Demak,

$$\lim_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$$

ekan. Xuddi shuningdek istalgan $x=x_0$ nuqtada $y=\cos x$ funksiyasi ham uzluksiz ekanligi isbot qilinadi. U holda 1-teoremaga ko'ra $y=\dfrac{\sin x}{\cos x}=tgx$, $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ va $y=\dfrac{\cos x}{\sin x}=ctgx,\quad x\neq k\pi,\ (k\in Z)$ funksiyalar uzluksiz ekanligi kelib chiqadi.

4. Endi $y=\log_a x\ a>0,\quad a\neq 1$ logarafik funksiyani aniqlanish sohasi $(0,+\infty)$ oraliqda uzluksiz ekanligini ko'rsatamiz. Dastlab $a>1$ deb olib $x=1$ nuqtada uzluksiz ekanligini ko'rsatamiz. Haqiqatdan ham, $x=1+t$ deb olsak, quyidagi

$$\lim_{x\to 1}\log_a x=\lim_{t\to 0}\log_a(1+t)$$

tenglikda $t\neq 0,\ \ n=\left[\dfrac{1}{|t|}\right]$ bo'lsa, $t\to 0$ da $n\to\infty$ bo'lgani uchun va $-\dfrac{1}{n}\le t\le\dfrac{1}{n}$ tengsizlikdan

$$\log_a\left(1-\frac{1}{n}\right)\le\log_a(1+t)\le\log_a\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

tengsizlik kelib chiqadi. U holda bu tengsizlikda $t\to 0$ bo'lsa, $\lim_{t\to\infty}\log_a\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\log_a\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=0$ bo'lganidan, VI-bobdagi 12-xossaga ko'ra

$$\lim_{t\to 0}\log_a(1+t)=0$$

ekanligi kelib chiqadi, ya'ni

$$\lim_{x\to 1}\log_a x=\log_a 1=0$$

Agar $0<a<1$ bo'lsa, $\dfrac{1}{a}>1$ bo'lgani uchun

$$\ell im_{x\to 1} \ell og_a x = \ell im_{x\to 1}\left(-\ell og_{\frac{1}{a}} x\right) = 0 = \ell og_{\frac{1}{a}} 1$$

ekanligi kelib chiqadi. Endi istalagan $x = x_0$ $(x_0 > 0)$ nuqtada $y = \ell og_a x$ funksiyani uzluksizligini ko'rsatamiz. Haqiqatdan ham, agar $\dfrac{x}{x_0} = 1 + t$ deb olsak, $x \to x_0$ da $t \to 0$ bo'ladi, demak

$$\ell im_{x\to x_0} \ell og_a x = \ell im_{x\to x_0}\left(\ell og_a \frac{x}{x_0} + \ell og_a x_0\right) = \ell im_{x\to x_0} \ell og_a \frac{x}{x_0} + \ell og_a x_0 = \ell im_{t\to 0} \ell og_a (1+t) + \ell og_a x_0 = \ell og_a x_0$$

ekanligi kelib chiqadi.

5. Endi darajali $y = x^{\alpha}$ funksiyani uzluksizlikka tekshiramiz. Bu yerda $\alpha > 0$ yoki $\alpha < 0$ bo'lib, bu funksiyani $(0,+\infty)$ oraliqda uzluksiz ekanligini ko'rsatamiz. Murakkab funksiya uzluksizligiga doir 3-teoremaga ko'ra

$$\ell im_{x\to x_0} x^{\alpha} = \ell im_{x\to x_0} \ell^{\alpha\cdot \ell nx} = \ell^{\alpha\cdot \ell nx_0} = x_0^{\alpha}$$

ekanligi kelib chiqadi.

6. Teskari trigonometrik funksiyalar,

$y = arc\sin x,\ y = arc\cos x,\ y = arctgx, y = arcctgx$ funksiyalarini uzluksizlikka tekshiraylik, $y = arc\sin x$ funksiyani uzluksizlikka tekshiramiz, qolgan funksiyalarni tekshirish ham shunga o'xshash bo'ladi. $y = arc\sin x$ funksiyaning aniqlash sohasi $[-1, 1]$ oraliq bo'lib, o'zgarish sohasi $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ dan iborat. $x_0 \in [-1, 1]$ bo'lsin. Biz funksiyani x_0 da o'ngdan uzluksizligini ko'rsatamiz, chapdan uzluksizligi shunga o'xshash tarzda ko'rsatiladi. Demak $x_0 < x$ bo'lib, $x \to x_0$ bo'lsin, u holda $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ uchun

$$\sin t < t < tgt$$

tengsizlik o'rinli bo'lgani uchun, $y = arc\sin x$ $[-1, 1]$ da o'suvchi ekanligini e'tiborga olib, quyidagini hosil qilamiz. $x_0 < x$ bo'lganda, $arc\sin x_0 < arc\sin x$ bo'lgani uchun,

$$\sin(arc\sin x - arc\sin x_0) < arc\sin x - arc\sin x_0 < tg(arc\sin x - \arcsin x_0)$$

bu yerda $\sin(arc\sin x) = x, \cos(arc\sin x) = \sqrt{1-x^2}$ ekanligidan

$$x\cdot\sqrt{1-x_0^2} - \sqrt{1-x^2}\cdot x_0 < arc\sin x - arc\sin x_0 < \frac{x\sqrt{1-x_0^2} - \sqrt{1-x^2}\cdot x_0}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-x_0^2} + x\cdot x_0}$$

tengsizlik kelib chiqadi. Agar bu tengsizlikda $x \to x_0 + 0$ bo'lsa,

$$\ell im_{x\to x_0+0}\left(x\sqrt{1-x_0^2} - \sqrt{1-x^2}\cdot x_0\right) = 0 \quad \text{va} \quad \ell im_{x\to x_0+0}\left(\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-x_0^2} + x\cdot x_0\right) = 1$$

ekanligidan, limitning xossasiga asosan

$$\ell im_{x\to x_0+0}\left(arc\sin x - arc\sin x_0\right) = 0$$

ekanligi kelib chiqadi, bu esa $y = arc\sin x$ funksiyani x_0 nuqtada o'ngdan uzluksiz ekanligini ko'rsatadi.

Demak, yuqoridagi 1-6 misollardan ko'rinib turibdiki, elementar funksiyalar o'zlarining aniqlanish sohasida uzluksiz bo'lar ekan.

Funksiya uzluksizligidan foydalanib, quyidagi limitlarni hisoblashimiz mumkin.

1. $\ell im_{x\to 0}\dfrac{\ell og_a(1+x)}{x} = \ell im_{x\to 0}\ell og_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ell og_a e$

2. $\ell im_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$ limitni hisoblaylik. Bu limit $\dfrac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslikdir, agar $a^x-1=t$ deb olsak, $x\to 0$ da $t\to 0$ bo'ladi va $a^x=1+t,\ x=\ell og_a(1+t)$. Demak

$$\ell im_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ell im_{t\to 0}\frac{t}{\ell og_a(1+t)} = \frac{1}{\ell og_a e} = \frac{\ell og_a a}{\ell og_a e} = \ell n a$$

3. $\ell im_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}$, bu limit ham $\dfrac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslik bo'lib, agar $(1+x)^\alpha-1=t$ deb olsak $x\to 0$ da $t\to 0$ bo'ladi va

$(1+x)^\alpha = 1+t,\ \alpha\cdot\ell n\,(1+x) = \ell n(1+t)$.

Demak,

$$\ell im_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \ell im_{x\to 0}\frac{t\cdot\alpha\,\ell n(1+x)}{x\ \ell n\,(1+t)} = \ell im_{x\to 0}\alpha\cdot\frac{\ell n\,(1+x)}{x}\cdot\frac{t}{\ell n\,(1+t)} =$$

$$= \alpha\ \ell im_{x\to 0}\frac{\ell n\,(1+x)}{x}\cdot\ell im_{t\to 0}\frac{t}{\ell n(1+t)} = \alpha\cdot\ell n\,e\cdot\ell n\,e = \alpha$$

Natijada biz, $\dfrac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmasliklarga ta'luqli bo'lgan quyidagi muhim limitlarni hosil qildik.

1. $\ell im_{x\to 0}\dfrac{\ell og_a(1+x)}{x} = \ell og_a e,$ xususan, $\ell im_{x\to 0}\dfrac{\ell n\,(1+x)}{x} = 1$

2. $\ell im_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ell n\ a$

3. $\ell im_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha$

Xulosa.

Uzluksiz funksiya ta'rifi va uning xossalari keltirilgan. Ba'zi elementar funksiyalar uzluksizlikka tekshirilgan.

Tayanch iboralar

Limit, cheksiz kichik mikdorlar, aniqmaslik, funksiya, uzluksizlik.

Takrorlash uchun savollar

1. Uzluksiz funksiya ta'rifini aytib misollar keltiring.
2. Ajoyib limitlarni yozing.
34.Chegaralangan ketma-ketlikka misollar keltiring.
5. Aniqmasliklarni ochishga misollar keltiring.

Asosiy adabiyotlar:

1. T.A.Azlarov, X. Mansurov «Matematika analiz» T., «O'qituvchi» 1 qism 1986 y., 2 qism 1989 y.
2.T.J.Jo'rayev , G.Xudoyberganov, A.K.Vorisov, X.Mansurov «Oliy matematika asoslari», I , II qismlar., T., 1999 y.
3. Shipachev V.S. «Vo'sshaya matematika», M., «Vo'sshaya shkola», 1991y.
4. Vinogradov I.M. «Elemento' vo'sshey matematiki», M., 1999 y.

Qo'shimcha adabiyotlar:

1.Soatov ¨.U. «Oliy matematika», 1 va 2-jildlar , T., «O'qituvchi» , 1992y., 1994 y.
2. B. Abdualimov , Sh.Solixov «Oliy matematika qisqacha kursi» , T., «O'qituvchi» , 1981 y.
3. Danko P.Ye., Popova A.T. Kojevnikova T.Ya. «Vo'sshaya matematika v uprajneniyax i zadachax» M., Vo'sshaya shkola. 1998 y.
4. Zaysev I.A. Vo'sshaya matematika. M., 1998 y.

23-mavzu . Iqtisodiy masalalar yechishga bir o'zgaruvchili funksiya limiti va uzluksizligi (differensiali) ning tadbiqlari.

Reja:

23.1. Hosilaning iqtisodiyotda q'llanilishi.
23.2. Iqtisodiyotda elastiklik tushunchasi.

23.1. Hosilaning iqtisodiyotda qo'llanilishi

Maktab kursidan bizga hosila tushanchasi ma'lum. U holda ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi funksiyasidan vaqt bo'yicha olingan hosila shu momentdagi mehnat unumdorligini bildiradi. Chunki, odatda iqtisodiy funksiyalar t vaqt bo'yicha argumentli funksiyalardan iborat bo'ladi. Endi hosilaning iqtisodiyotda boshqacha qo'llanishiga oid misollarni ko'rib chiqaylik. Deylik, $y = f(x)$ uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib,

u –x ishlab chiqarilgan mahsulotlarning xarajat funksiyasi bo'lsin.

Deylik, Δx-mahsulot ishlab chiqarishning o'sishi bo'lsin, u holda Δy-orttirma unga mos mahsulot ishlab chiqarishning xarajati deb qarasak, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$- bir birlik mahsulotga mos keluvchi o'rtacha ishlab chiqarish xarajatini bildiradi.U holda

$u'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ning

hosilasi ishlab chiqarish jarayonidagi xarajatlar eng yuqori chegarasini ifodalaydi va qo'shimcha ishlab chiqarilgan bir birlik maxsulot xajmiga mos qo'shimcha xarajatni bildiradi.

Xarajatlar chegarasi ishlab chiqarish hajmining x (ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi) miqdoriga bog'liq va u doimiy bo'lmagan ishlab chiqarish xarajatlari orqali aniqlanadi (xom-ashyo, yoqilg'i va boshqalar). Shu jumladan iqtisodiyotda chegaraviy tushum, chegaraviy mahsulot , chegaraviy foyda va boshqa chegaraviy kattaliklar ham bo'lishi mumkin.

Chegaraviy kattaliklar iqtisodiyotning holati (yig'indi yoki o'rtacha kattaligi) ni emas balki iqtisodiy obektlarning o'zgarish jarayonini aniqlab beradi.

Shunday qilib, hosila tushunchasi–biror iqtisodiy jarayonning vaqt yoki boshqa tekshirilayotgan faktorga bog'liq holdagio'zgarish tezligini bildirar ekan.

23.2. Iqtisodiyotda elastiklik tushunchasi.

Iqtisodiy jarayonlarni tekshirish va boshqa amaliy masalalarni yechishda ko'pincha funksiya elastikligi tushunchasidan foydalaniladi.

1-ta'rif. y-funksiya nisbiy o'zgarishini x o'zgaruvchi nisbiy o'zgarishiga nisbatining $\Delta x \to 0$ dagi limitiga $E_x(y)$ funksiya elastikligi deyiladi va

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} : \frac{\Delta x}{\Delta y}\right) = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \; y'$$

Kabi belgilanadi.

Funksiya elastikligi tushunchasi erkli o'zgaruvchi *x 1%* ga o'zgarganida *y=f(x)* funksiyasi taqriban necha foizga o'garishini bildiradi.

Funksiya elastikligining asosiy xossalari.

1. Funksiya elastikligi erkli o'zgaruvchi x ni, funksiya o'zgarishi sura'ti $T_y = (\ln y)^{|} = \frac{y^{|}}{y}$ ga ko'paytirilganiga tengdir, ya'ni

$E_x(y) = xT_y$

2. Ikkita funksiya ko'paytmasi (bo'linmasi)ning elastikligi, bu funksiyalar elastikliklarining yig'indi (ayirma)siga tengdir:

$$E_x(uv) = E_x(u) + E(v)$$

$$E_x(\tfrac{u}{v}) = E_x(u) - E_x(v)$$

Funksiya elastikligi tushunchasi, talab va iste'molni tahlil qilishda keng qo'llaniladi. Masalan, bozordagi *u* –talab, *x*- narhga bog'liq holdao'zgarsin u holda $E_x(y)$ - narh 1% ga o'zgarganida, talab necha foizga o'zgarishini aniqlab beradi.

Agar *u* talab funksiyasi uchun :

│ $Ye_x(u)$ │>1 bo'lsa talab elastik

| $Ye_x(y)$ | $=1$ bo'lsa talab neytral;

│ $Ye_x(u)$ │$<l$ bo'lsa talab narhga bog'liq holda noelastik deyiladi.

Elementar funksiyalarning elastikligi:

1. $E_x(x^n)=n;$
2. $E_x(a^x)=x\ln a, E_x(e^x)=x;$
3. $E_x(ax=b)=\frac{ax}{ax+b};$
4. $E_x(\sin x)=x\,ctg(x);$
5. $E_x(\cos x)=-x\,tg(x);$
6. $E_x(tgx)=\frac{2x}{\sin 2x};$
7. $E_x(ctgx)=-\frac{2x}{\sin 2x};$
8. $E_x(\arcsin x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x};$
9. $E_x(arctgx)=\frac{x}{(1+x^2)arctgx};$

Xulosa

Hosilaning ta'rifi va differensiallashning asosiy qoidalariga asosan, hosilaning iqtisodiyotda qo'llanishi bo'yicha ko'rsatmalar berilgan.

Tayanchiboralar:

Funksiya orttirmasi, hosila, yuqori tartibli hosila, differensial, funksiya elastikligi.

Nazorat va mulohaza uchun savollar

1. Funksiya orttirmasi deb nimaga aytiladi?
2. Funksiya hosilasining ta'rifini ayting.
3. Hosilaning iqtisodiyotda qo'llanishi haqida nimani bilasiz?

Asosiyadabiyotlar

1. T.A.Azlarov, X. Mansurov «Matematikaanaliz»T., «O'qituvchi» 1 qism 1986 y., 2 qism 1989 y.
2. T.J.Jo'rayev , G. Xudoyberganov, A.K.Vorisov, X.Mansurov «Oliymatematikaasoslari», I , II qismlar., T., 1999 y.
3. Vinogradov I.M. «Elemento' vo'sshey matematiki», M., 1999 y.
4.Zamkov O.O. i dr. Matematicheskiye metodo'dlya ekonomistov. M., 1994 g.
4.Zamkov O.O. i dr. Matematicheskiye metodo'dlya ekonomistov. M., 1994 g.

Qo'shimchaadabiyotlar

1. Soatov ¨.U. «Oliy matematika», 1 va 2-jildlar , T., «O'qituvchi» , 1992y., 1994 y.
2. B. Abdualimov , Sh.Solixov «Oliy matematika qisqacha kursi» , T., «O'qituvchi» , 1981 y.

24-mavzu. Bir o'zgaruvchili funksiya hosilasi, uning geometrik va iqtisodiy ma'nosi. Hosila haqida asosiy teoremalar.

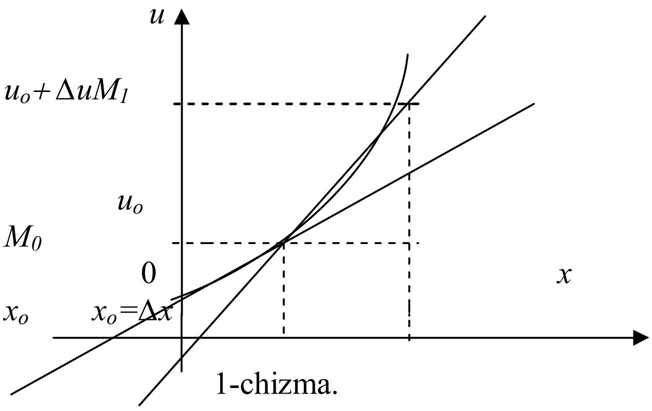
Reja:

24.1. Hosilaning ta'rifi. Differensiallash qoidalari.
24.2. Murakkab va teskari funksiyalarning hosilalari.
24.3. Elementar funksiyalarning hosilari.

24.1. Hosilaning ta'rifi. Differensiallash qoidalari

Dastlab hosila tushunchasiga olib keladigan quyidagi masalalar bilan tanishib chiqaylik.

1. Urinma haqidagi masala. $u = f(x)$ funksiyasi berilgan bo'lsa uning M_o (x_o, u_o) nuqtasiga o'tkazilgan urinma tenglamasini topish kerak bo'lsin (1-chizma).



1-chizma.

Bu chizmada $u_0 = f(x_0)$, $\Delta u=f(x_0=\Delta x)-f(x_0)$ bo'lib, bunda Δx-argument orttirmasi, Δu- berilgan Δx-argument orttirmasiga mos keluvchi funksiya orttirmasidir. $u=f(x)$ funksiyasiga M_0 nuqtasida o'tkazilgan urinma M_0M_1 kesuvchisining M_1nuktasi M_0 nuqtasiga grafik bo'ylab intilgandagi (agar bunday holat mavjud bo'lsa) holatidir, ya'ni $\Delta x \to 0$da rasmdan ko'rinib turibdiki, M_0M_1 kesuvchi quyidagi tenglama orqali ifodalanadi:

$u-f(x_0) = tg\beta(x-x_0)$,

bunda $tg\dfrac{f(x_0+\Delta x)}{\Delta x}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Agar $\Delta X \to 0$ bo'lsa $\beta \to \alpha$ bo'lib , M_0M_1 kesuvchi funksiya grafigiga (x_o, u_o) nuqtada o'tkazilgan urinmadan iborat bo'ladi. Uning tenglamasi:

$$u - f(x_1) = tg\alpha\,(x-x_0)$$

bunda $k\ q\ tg\alpha = \lim\limits_{\Delta x\to 0} tg\beta = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, k–urinmaning burchak koeffitsiyenti.

2. Mehnat unumdorligi haqidagi masala. $u=u(t)$ funksiyasi $t$vaqt davomida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi bo'lsa, vaqtning $t_0$paytdagi mehnat unumdorligini topish talab qilinsin.

Buning uchun vaqtning t_0 paytiga Δt orttirma beramiz. Bu $t_0=\Delta t$vaqt oralig'ida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi Δu quyidagiga teng bo'ladi:

$$\Delta u=u(t_0=\Delta t)-u(t_0)$$

U holda Δt vaqt oralig'idagi o'rtacha mehnat unumdorligi

$$u_{o'r} = \frac{\Delta u}{\Delta t}.$$

Agar $\Delta t \to 0$, u holda $Z_{o'r}$ vaqtning t_0 paytidagi $u(t_0)$ mehnat unumdorligini bildiradi ya'ni:

$$u(t_0)= \lim_{\Delta x\to 0} u_{o'} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta t}$$

Demak,ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi $u(t)$funksiya orttirmasi Δu ni argument orttirmasi Δt ga bo'lgan nisbatining argument orttirmasi nolga intilgandagi limitini hisoblashdan iborat ekan.

1-ta'rif. Agar ushbu

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

limit mavjud bo'lsa, bu sonni $y=f(x)$funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deyiladi.

Funksii hosilasi

$$y^!, f^!(x), \frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}, y_x^!$$

simvollarining birortasi bilan belgilanadi.

Agar $y=f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi mavjud bo'lsa, bu funksiyani x_0 nuqtada differensiallanuvchi deyiladi. Funksiyaning hosilasini hisoblash amalini esa differensiallash amali deyiladi.

Endi hosilaning geometrik, fizik va iqtisodiy ma'nolariga to'xtalaylik.

Hosilaning geometrik ma'nosi: $y=f(x)$egri chiziqning (x_o, u_o) nuqtasida unga o'tkazilgan urinmaning (agar urinma mavjud bo'lsa) burchak koeffitsiyenti $k = f'(x_0)$ hosilani anglatadi.

Hosilaning fizik (mexanik) ma'nosi: yo'l $S = S(t)$dan vaqt bo'yicha olingan hosila tezlikni anglatadi, ya'ni

$V(t_0) = S'(t_0), V(t_0)$

dan olingan hosila tezlanishni anglatadi, ya'ni

$V^1(t_0) = a(t_0)$.

Hosilaning iqtisodiy ma'nosi: ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi *u(t)*dan vaqt bo'yicha olingan hosila shu momentdagi mehnat unumdorligini bildiradi.

Hosilaning boshqa iqtisodiy ma'nolari haqida keyinroq yana to'xtalamiz.

Differensiallash qoidalari quyidagilardan iborat :

$f(x)$, $g(x)$ funksiyalar differensiallanuvchi funksiyalar bo'lib C o'zgarmas son bo'lsin.

1 . $S^{|} = 0$, bunda $S=const$.

2. $X^{|} = 1$

3. $(f(x) \pm g(x))^{|} = f^{|}(x) \pm g^{|}(x)$

4. $(f(x) \cdot g(x))^{|} = f^{|}(x)g(x) = f(x)g^{|}(x)$, bunda $g(x) \neq 0$.

5. $(c\,f(x))^{|} = c\,f^{|}(x)$, bunda $S=const$.

6. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^1 = \frac{f^1(x)g(x) + f(x)g^1(x)}{g^2(x)}$, bunda $g(x) \neq 0$.

Bu qoidalarning barchasini hosilaning ta'rifidan foydalanib osongina isbotlash mumkin.

24.2. Murakkab va teskari funksiyalarning hosilalari

Shuni ta'kidlash lozimki, har doim ham nuqtada uzluksiz bo'lgan funksiya shu nuqta differensiallanuvchi bo'la olmaydi.

Masalan, $u = |x|$ bu funksiya $x_o = 0$ nuqtada uzluksiz, lekin unda differensiallanuvchi emas.

Agar $y = f(u)$ bo'lib, $u = g(x)$ bo'lsa, ya'ni u x bilan u argument orqali bog'langan bo'lsa, $y = f(g(x))$ ni x ning murakkab funksiyasi deyiladi.

Teorema. Agarda $u = g(x) x_o$, nuqtada, $y=f(u)$funksiyasi esa $u_o=g(x_o)$,nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda $y=f(g(x))$murakkab funksiyasi x_o nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi va uning hosilasi quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$y_x^{|}(x_0) = f_u^{|}(u_0) \cdot u_x^{|}(x_0)$$

Umumiy holda ushbu formula o'rinlidir:

$$y_x^{|}(x_0) = f_u^{|}(u_0) \cdot u_x^{|}(x_0)$$

Endi teskari funksiyaning hosilasini topaylik.

Agar $u = f(x)$, $x \in (a;v)$ funksiya uchun $f'(x) \neq 0$ bo'lsa,

$$x_y^{|} = \frac{1}{y_x^{|}}$$

formula yordamida teskari funksiya hosilasi hisoblanadi.

24.3. Elementar funksiyalarning hosilari

Elementar funksiyalarning hosilalari.

1. $(\ln x)^{|} q \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \ln\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right) =$

$$q \lim_{\Delta x \to 0} \ln\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \ln\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \ln e \; q \; \frac{1}{x}$$

Bundan $(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x\ln a}$,ya'ni. $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$

2. $u = a^x$ ko'rsatkichli funksiya hosilasi.

$u = a^x$ tenglikdan $\ln y = x\ln a$ ni hosil qilamiz,bunda

$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x\ln a}$, $y_x' = y\ln a$ ya'ni $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$

Xususiy holda $\left(e^x\right)' = e^x$ o'rinlidir.

3. $y = x^n$ darajali funksiya hosilasi.

*uqx"*tenglikdan $\ln y = n\ln x$ ni hosil qilamiz,

bundan $(\ln y)' = \frac{y_x'}{y} = n\frac{1}{x} \Rightarrow y_x' = n\frac{1}{x}y \Rightarrow y_x' = n\frac{1}{x}x'' \Rightarrow y_x' = nx^{n-1}$

Demak, $(x^n)' = nx^{n-1}$

Trigonometrik funksiyalarining hosilalari.

1. $(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\lim_{\Delta x\to 0}$

$\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = 1\cdot\cos x = \cos x$

2. Xuddi shuningdek, $(\cos x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ ekanligidan

$(\cos x)' = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]' = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)' = -\sin x$ ya'ni

(cosx) ' = -sm(x)

3. $(tgx)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cdot\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$ ya'ni

Mos ravishda $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

4.*Teskari trigonometrik funksiyalarining hosilalari.* $y = \arcsin x$. Bundan $x = \sin u$, u holda $x' = (\sin y)' = \cos y\cdot y_x'$

$y'_x = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ya'ni.*(arcsinx)'*$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Mos ravishda

$$(arccosx)= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(arctgx)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(arcctgx)= -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Xulosa

Hosilaning ta'rifi va differensiallash asosiy qoidalari keltirilgan. Murakkab va teskari funksiyalarning hosilalar jadvali berilgan .

Tayanch iboralar:

Funksiya orttirmasi, hosila, differensial..

Takrorlash uchun savollar

1. Funksiya orttirmasi deb nimaga aytiladi?
2. Funksiya hosilasining ta'rifini ayting.
3. Murakkab va teskari funksiyalarning hosilasi deb nimaga aytiladi?
4. Elementar funksiyalarning hosilari.

Asosiy adabiyotlar

1. T.A.Azlarov, X. Mansurov «Matematika analiz» T., «O'qituvchi» 1 qism 1986 y., 2 qism 1989 y.

2.T.J.Jo'rayev , G.Xudoyberganov, A.K.Vorisov, X.Mansurov «Oliy matematika asoslari», I , II qismlar., T., 1999 y.

3. Shipachev V.S. «Vo'sshaya matematika», M., «Vo'sshaya shkola», 1991y.

Qo'shimcha adabiyotlar

1.Soatov ¨.U. «Oliy matematika», 1 va 2-jildlar , T., «O'qituvchi» , 1992y., 1994 y.

2. B. Abdualimov , Sh.Solixov «Oliy matematika qisqacha kursi» , T., «O'qituvchi» , 1981 y.

3. Danko P.Ye., Popova A.T. Kojevnikova T.Ya. «Vo'sshaya matematika v uprajneniyax i zadachax» M., Vo'sshaya shkola. 1998 y.

4. Zaysev I.A. Vo'sshaya matematika. M., 1998 y.

25-mavzu. Funksiya differensiali. Yuqori tartibli hosilalar. Differensiallanuvchi funksiyalar uchun o'rta qiymat haqidagi teoremalar.

Reja:

25.1. Funksiya differensiali. Yuqori tartibli hosilalar.

25.2. Differensiallanuvchi funksiyalar uchun o'rta qiymat haqidagi teoremalar.

25.1. Funksiya differensiali. Yuqori tartibli hosilalar

Agar $y=f(x)(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi mavjud bo'lsa, bu funksiyani x_0 nuqtada differensiallanuvchi deyiladi. Funksiyaning hosilasini hisoblash amalini esa differensiallash amali deyiladi.

Biz hosila tushunchasi bilan tanishganda va elementar funksiflarining hosilalarini hisoblaganda ko'rdikki, funksiya hosilasining o'zi yana x o'zgaruvchining funksiyasi bo'lishi mumkin ekan. Demak, funksiya hosilasining hosilasi tushunchasini qarash mumkin. $y=f(x)$ funksiya $(a;v)$ oraliqda berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. Funksiya hosilasining hosilasi shu funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi deb ataladi va $u^{!!}$ yoki $f''(x)$ kabi belgilanadi:

$$u!!=(u^!)^! ,f''(x)=(f'(x))^!$$

Masalan, $u=sin(x)$ funksiyasining ikkinchi tartibli hosilasi

$$u^!=(sin(x))^{!=}cos(x)\ ,\ u!!=(cos(x))^!=-sin(x)$$ ya'ni

$$(sin(x))^{!!=}-sin(x)$$

bo'ladi.

Funksiyaning uchinchi, to'rtinchi va x. k. tartibdagi hosilalari yuqoridagidek ta'riflanadi:

$$u^{!!!}=(u^{!!})^!,\ u^{!Y=}(u^{!!!})^!,...$$

Umuman, funksiyaning n-tartibli hosilasi $(n-1)$ tartibli hosilasining hosilasidir:

$$u^{(n)=}\ u^{(n-1)}$$

25.2. Differensial hisobning asosiy teoremalari

Ferma teoremasi. Agar $y=f(x)$ funksiyasi $[a,b]$ oraliqda differensiallanuvchi va bu oraliqqa tegishli s ($a<c<b$) nuqtada o'zining eng katta va eng kichik qiymatiga erishsa, bu nuqtada funksiya hosilasi nolga teng bo'ladi ya'ni

$$f\ '(s) = 0.$$

Ferma teoremasining geometrik ma'nosi: $[a,b]$ oraliqqa tegishli biror nuqtada funksiya eng katta yoki eng kichik qiymatga erishsa, funksiyaning maxsimum yoki minimum nuqtalaridan o'tkazilgan urinma $0X$ o'qiga parallel bo'ladi.

Roll teoremasi. $y=f(x)(x)$ funksiyasi $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lib $f(a)$-

$f(b)$ bo'lsin. U xolda $a<c<b$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi shunday s nuqta mavjudki, unda

$$f'(s)=0$$

o'rinli bo'ladi.

Roll teoremasining geometrik ma'nosi: funksiya uchun eng kamida bitta shunday $s\in(a,b)$ nuqta topiladiki ($s; f(s)$) nuqtada funksiya grafigiga o'tkazilgan urinma $0X$ o'qiga pararllel bo'ladi.

Agar Roll teoremasi uchun $f(a)=f(b)=0$ bo'lsa, ya'ni differensiallanuvchi funksiya ketma-ket ikkita nuqtada nol qiymatga erishsa, u xolda ($a;v$) oraliqqa tegishli kamida bitta nuqtada bu funksiya hosilasi nolga teng bo'ladi.

Roll teoremasi Logranj teoremasining xususiy xoli hisoblanadi.

Logranj teoremasi. $y=f(x)(x)$ funksiyasi $[a,b]$ kesmada uzluksiz va (a,b) oraliqda differensiallanuvchi bo'lsin. U xolda shunday s, $a<c<b$ nuqta mavjudki, uning uchun

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

o'rinlidir.

Logranj teoremasining mexanik va geometrik ma'nolari:

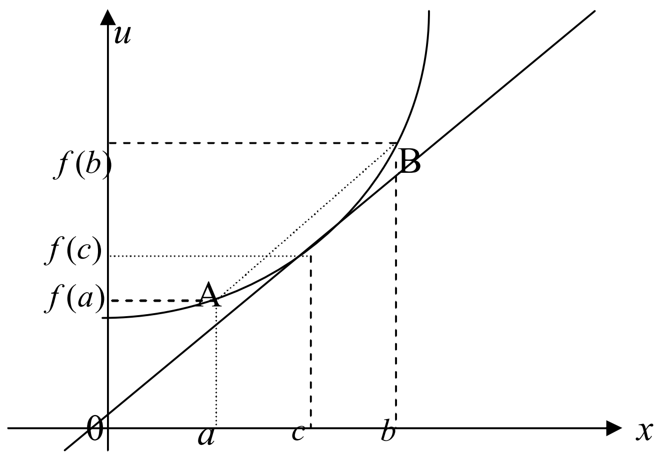
$f(b)-f(a)$ orttirma – bu funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi ozgarishi,

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

esa funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi ozgarishining ortacha tezligi; $f'(s)$ – bu funksiya ozgarishining s dnuqtadagi oniy tezligidir.

Shunday qilib, teorema shuni tasdiqlaydiki $[a,b]$ kesmadan olingan xech bolmaganda bitta nuqta mavjud bo'lib, bu nuqtada funksiyaning ozgarish tezligi - funksiyaning bu kesmadagi ortacha ozgarish tezligiga teng ekan.

Logranj teoremasining geometrik ma'nosi quyidagi 2-chizmada keltirilgan.



2-chizma.

Shunday qilib, xech bolmaganda bitta *s∈(a,b)* nuqta mavjudki, bu nuqtadan *f(x)* funksiya grafigiga otkazilgan uritma *AV* tog'ri chiziqqa parallel yoki *AV* tog'ri chiziqning burchak koeffitsiyenti *(c,f(c))* nuqtadan funksiya grafigiga otkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyentiga teng bolar ekan.

Natija. Agar barcha $x\in(a,b)$ lar uchun $f'(x)=0$ tenglik o'rinli bo'lsa, u xolda funksiya bu oraliqda o'zgarmasdir.

Hosila yordamida ba'zi xollarda funksiyaning limiti osongina hisoblanadi.

Teorema (Lopital qoidasi). Agar $\lim\limits_{\to a} f(x)=0$ (yoki $\pm\infty$) va $\lim\limits_{\to a} g(x)=0$ (yoki $\pm\infty$) bolib $x=a$ da $f^{1}(x)$ va $g^{1}(x)$ hosilalar mavjud bo'lsa, ushbu

$$\lim_{\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f^{!}(x)}{g^{!}(x)}$$

o'rinli bo'ladi.

Xulosa

Hosilaning ta'rifi va. differensiallash asosiy qoidalari keltirilgan. Murakkab va teskari funksiyalarning hosilalar jadvali berilgan . Yuqori tartibli hosilalar boyicha korsatmalar berilgan. Differensial hisobning asosiy teoremalari isbotsiz keltirilgan.

Tayanch iboralar:

Hosila, yuqori tartibli hosila, differensial, Lopital qoidasi.

Takrorlash uchun savollar

1. Yuqori tartibli hosila deganda nimani tushunasiz?
2. Differensial hisobning asosiy teoremalari.
3. Lopital qoidasini aytib bering.

Asosiy adabiyotlar

1. T.A.Azlarov, X. Mansurov «Matematika analiz» T., «O'qituvchi» 1 qism 1986 y., 2 qism 1989 y.

2.T.J.Jorayev , G.Xudoyberganov, A.K.Vorisov, X.Mansurov «Oliy matematika asoslari», I , II qismlar., T., 1999 y.

3. Shipachev V.S. «Vosshaya matematika», M., «Vosshaya shkola», 1991y.

Qo'shimcha adabiyotlar

1.Soatov ¨.U. «Oliy matematika», 1 va 2-jildlar , T., «O'qituvchi» , 1992y., 1994 y.

2. B. Abdualimov , Sh.Solixov «Oliy matematika qisqacha kursi» , T., «O'qituvchi» , 1981 y.

3. Danko P.Y., Popova A.T. Kojevnikova T.Ya. «Vosshaya matematika v uprajneniyax i zadachax» M., Vosshaya shkola. 1998 y.

4. Zaysev I.A. Vosshaya matematika. M., 1998 y.

26-mavzu. Fuksiya ekstremumlari. Funksiya ekstremumining zaruriy va yetarli shartlari.

Reja:

26.1. F**unksiya o'sish va kamayishning yetarli shartlari.**
26.2. Funksiya ekstremumning zaruriy shartlari.
26.3. Funksiyaning qavariq va botiqligi, bukilishi tushunchalari.

26.1. Funksiya o'sish va kamayishning yetarli sharti

Ma'lumki, funksiyalar nazariyasida ularning o'sish yoki kamayish oraliqlari hamda eng katta va eng kichik qiymatlarini topish asosiy shartlardan biri hisoblanadi. Quyida biz ular bilan tanishib chiqamiz.

***1-teorema**. (funksiya o'sish (kamayish)ning yetarli sharti) Agar differensiallanuvchi funksiya hosilasi [a,] oraliqda musbat (manfiy) aniqlangan bo'lsa, u bu oraliqda o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi.*

(a.) oraliqda differensiallanuvchi funksiya *[a.]* oraliqda o'suvchi (kamayuvchi) bo'lsa, u holda bu oraliqda $f'(x)\geq 0$ $(f'(x)\leq 0)$ $x\in(a,b)$ bo'ladi.

***1-ta'rif.** x_o nuqtaning biror atrofida f(x) funksiya uchun $f(x)\leq f(x_0)$ $(f(x)\geq f(x_0))$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, x_o nuqta f(x) funksiyasining maksimum (minimum) nuqtasi deyiladi.*

Funksiyaning x_0 nuqtadagi $f(x_0)$ qiymatiga funksiya maksimumi (minimumi) deb ataladi.

Funksiya maksimumi va minimumi umumiy holda funksiya ekstremumlari yoki lokal ekstremumlar deb yuritiladi. Shuni ta'kidlash kerakki, funksiya ekstremumi tushunchasi x_0 nuqtasining yetarlicha kichik atrofida o'rinli bo'ladi.
Shunday ekan, berilgan oraliqda funksiya bir yoki bir nechta ekstremal qiymatlarga ega bo'ladi.

26.2. Funksiya ekstremumning zaruriy shartlari

Endi ekstremumning zaruriy shartlari bilan tanishaylik.

Agar *f(x)* funksiyasi x_0 nuqtada differensiallanuvchi va bu nuqtada ekstremumga ega bo'lsa, Ferma teoremasiga ko'ra $f'(x_0)=0$ bo'ladi. Lekin, funksiya differensiallanuvchi bo'lmagan nuqtalarda ham ekstremumga ega bo'lishi mumkin.

Masalan, $u=|x|$ funksiyasi $x_0=0$ nuqtada fifferensiallanuvchi emas, lekin bu nuqtada ekstremumga ega.

Shuning uchun ham funksiya ekstremumining zaruriy shart quyidagicha izohlanadi.

$U= f(x)$ funksiyasi x_0 nuqtada ekstremumga ega bo'lishi uchun $f'(x_o)= 0$ yoki bu nuqtada hosilasi mavjud bo'lmasligi zarur .

Funksiya ekstremumining zaruriy shartlari bajariladigan nuqtalarga kritik nuqtalar deb ataladi.

Umuman olganda doim kritik nuqta funksiyaning ekstremum nuqtasi bo'lmasligi mumkin. Masalan: $u = x^3$ funksiyasi uchun $x_{o=}0$ kritik nuqta lekin, funksiya bu nuqtada ekstremumga ega emas.

Shuning uchun funksiya ekstremumini aniqlashda uning kritik nuqtalarini topishning qo'shimcha shartlarini kiritish lozim bo'ladi.

Ekstremumning birinchi yetarli sharti.

2-teorema. *y=f(x)(x)* differensiallanuvchi funksiyasining hosilasi x_0 *nuqtada ishorasini plyusdan minusga o'zgartirsa, bu nuqta funksiyaning maksimum nuqtasi, agar ishiorasini minusdan plyusga o'zgartirsa bu nuqta funksiyaning minumim nuqtasi bo'ladi.*

uqf(x) funksiyasining ekstremal qiymatlarini aniqlash quyidagi tartibda amlga oshiriladi:

1.Funksiya hosilasi topiladi: u'=f'(x) .

2.Funksiyaning kritik nuqtalari, ya'ni f'(x)=0 bo'ladigan nuqtalar yoki hosila mavjud bo'lmagan nuqtalar topiladi.

3. Har bir kritik nuqtaning o'ng va chap tomonida funksiya hosilasining ishorasi aniqlanadi.

4. Funksiyaning ekstremal (funksiyaning eng katta va eng kichik) qiymatlari topiladi.

[a,] kesmada uzluksiz va differensiallanuvchi *u=f(x)* funksiyasining bu oraliqdagi eng katta va eng kichik qiymatlarini aniqlash quyidagi tartibda amalga oshiriladi:

1.Funksiya hosilasi topiladi: f'(x)

2. Funksiyaning [a.b] kesmadagi kritik nuqtalari topiladi.

3.Funksiyaning kritik nuqtalardagi va [a.b] kesmaning chetki nuqtalaridagi qiymatlari f(a), f(b) topiladi. Keyin butopilgan qiymatlar ichidan eng kattasi f_{max} va eng kichigi f_{min} olinadi..

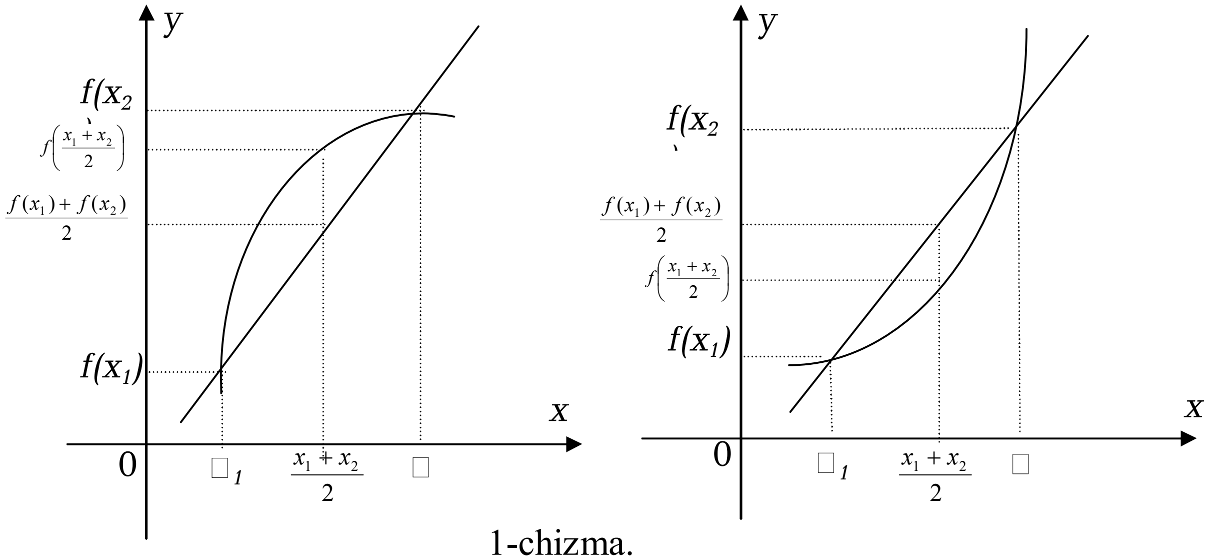
26.3. Funksiyaning qavariq va botiqligi, bukilishi tushunchalari.

Funksiyaning qavariq va botiqligi, bukilishi tushunchalari bilan tanishaylik.

2-ta'rif. Agar ixtiyoriy $x_1, x_2, \in[a,b]$ lar uchun quyidagi tengsizlik bajarilsa

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}, \quad \left(f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right)$$

uqf(x) funksiyasi *[a.b]* kesmada qavariq (botiq) deyiladi (1-chizma),



1-chizma.

Ushbu chizmalardan ko’rinib turibdiki, funksiya grafigi uning ikkita nuqtasini tutashtiruvchi kesmadan yuqorida joylashsa berilgan oraliqda qavariq aks holda esa ushbu oraliqda botiq funksiya bo’ladi.

Funksiyaning berilgan oraliqda qavariq yoki botqligini hosila yordamida ham aniqlashimiz mumkin.

3-teorema. $y=f(x)(x)$ funksiya $(a;b)$ da aniqlangan bo’lsin. Agar funksiya $(a;b)$ da ikkinchi tartibli $f^{!!}(x)$ hosilaga ega bo’lib, $\forall\ x\ x\in(a;b)$ uchun $f^{!!}(x)< 0$ bo’lsa, funksiya grafigi $(a;b)$ da qavariq bo’ladi.

4-teorema. $f(x)$ funksiya $(a;b)$ da aniqlangan bo’lsin. Agar funksiya $(a;b)$ da ikkinchi tartibli $f^{!!}(x)$ hosilaga ega bo’lib, $\forall\ x\ x\in(a;b)$ uchun $f^{!!}(x)> 0$ bo’lsa, funksiya grafigi $(a;b)$ da qavariq bo’ladi.

Bu teoremalardan ko’rinib turibdiki, biroi x_0 ($x_0\in(a;b)$) nuqtadan o’tishda o’z ishorasini o’zgartiryapti.

Demak, x_0 nuqtada funksiya grafigi egiladi.

Natija: funksiyaning egilish nuqtasi uning ikkinchi tartibli $f^{!!}(x)$ hosilasini nolga aylantiradigan nuqtalari orsasidan topiladi.

Masalan: $uq\ x^4$ funksiyasining egilish nuqtasi x_0q0 bo’ladi.

3-ta’rif. Biror oraliqda differensiallanuvchi $f(x)$ funksiyasining egilish nuqtasi deb, uning qavariqlik va botiqlik oraliqlarini bir biridan ajratuvchi nuqtasiga aytiladi.

Bu ta’rifdan ko’rinib turibdiki, funksiyaning egilish nuqtasi uning birinchi tartibli hosilasining ekstremumi bo’ladi. Shuning uchun quyidagi teorema o’rinlidir.

5-teorema. (funksiya egilishning zaruriy sharti).

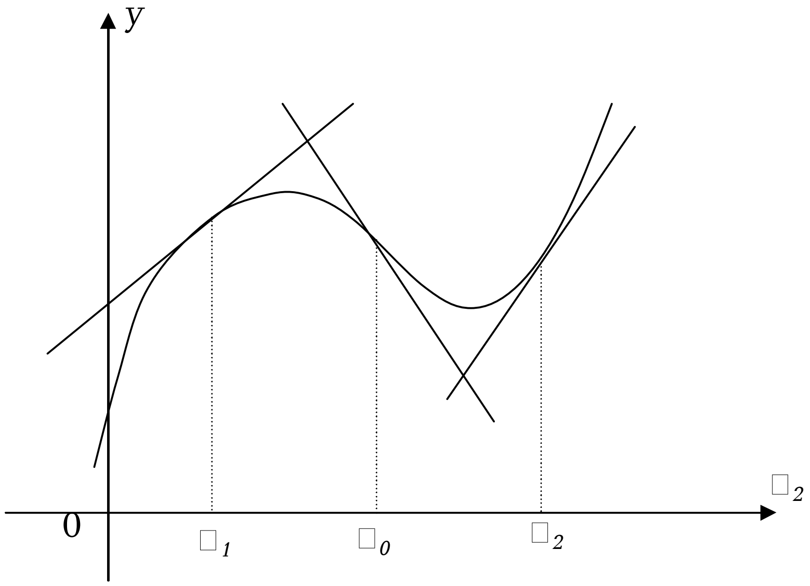
Agar x_0 ikki marta differensialllanuvchi $f(x)$ funksiyaning egilish nuqtasi bo’lsa, u holda

$$U=f^{!!}(x_o) =0$$

o’rinlidir.

6-teorema. (funksiya egilishning yetarli sharti).

Agar x_0 ikki marta differensialllanuvchi $f(x)$ funksiyaning egilish nuqtasi bo'lsa, u holda bu nuqtada $f''(x_o)$ o'z ishorasini o'zgartiradi.



2-chizma.

Funksiyaning qavariqligi, botiqligi va egilish nuqtasi quyidagi tartibda aniqlanadi.

1. funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi topiladi: f ''(x).

2. Ikkinchi tartibli hosilani nolga aylantiruvchi nuqtalar (f '' (x)=0) yoki ikkinchi tartibli hosilasi mavjud bo'lmagan nuqtalar topiladi.

3.Topilgan nuqtalar atrofida ikkinchi tartibli hosilaning ishoralari tekshiriladi va qavariq yoki botiqlik haqida zarur xulosalar qilinadi.

4.Egilish nuqtalarda funksiyaning qiymati aniqlanadi.

Xulosa

Funksiya ning o'sish va kamayishi, ekstremumning zaruriy shartlari,funksiyaning qavariq va botiqligi, funksiya bukilishi tushunchalari keltirib o'tilgan.

Tayanch iboralar:

Funksiya maksimumi va minimumi, funksiya ekstremumi, lokal ekstremum, kritik nuqta, funksiyaning qavariq va botiqligi, bukilishi.

Takrorlash uchun savollar

1. Funksiya o'sish va kamayishning yetarli shartlari.
2. Funksiya ekstremumning zaruriy shartlari.
3. Funksiyaning qavariq va botiqligi, bukilishi nuqtalari.

Asosiy adabiyotlar

1. T.A.Azlarov, X. Mansurov «Matematika analiz» T., «O'qituvchi» 1 qism 1986 y., 2 qism 1989 y.

2. T.J.Jo’rayev , G.Xudoyberganov, A.K.Vorisov, X.Mansurov «Oliy matematika asoslari», I , II qismlar., T., 1999 y.

3. Shipachev V.S. «Vosshaya matematika», M., «Vosshaya shkola», 1991y.

Qo’shimcha adabiyotlar

1.Soatov ¨.U. «Oliy matematika», 1 va 2-jildlar , T., «O’qituvchi» , 1992y., 1994 y.

2. B. Abdualimov , Sh.Solixov «Oliy matematika qisqacha kursi» , T., «O’qituvchi» , 1981 y.

3. Danko P.Ye., Popova A.T. Kojevnikova T.Ya. «Vosshaya matematika v uprajneniyax i zadachax» M., Vosshaya shkola. 1998 y.

4. Zaysev I.A. Vosshaya matematika. M., 1998 y.

27-mavzu. Ko’p o’zgaruvchili funksiyalariining differensail hisobi.

Ko’p o’zgaruvchili funksiya limiti va uzluksizligi. Xususiy hosilalar.

Reja:

27.1. Ko’p o’zgaruvchili funksiya haqida tushuncha.
27.2. Ko’p o’zgaruvchili funksiya limiti va uzluksizligi.
27.3. Ko’p o’zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilalari.

27.1. Ko’p o’zgaruvchili funksiya haqida tushuncha

Tabiatdagi, xususan iqtisodiyotdagi ko’plab jarayonlar bir nechta parametr (o’zgaruvchi)larga bog’liq bo’ladi. Bunday o’zgaruvchilar orasidagi o’zaro bog’liqlikni o’rganish va tahlil qilish matematika apparatidan ko’p o’zgaruvchili funksiya tushunchasini kitish zaruratini ko’rsatadi.

Ta’rif. Agarda (x_1,x_2...x_n) o’zgaruvchilarning har bir qism to’plamiga biror qonun yoki qoidagi ko’ra yagona Z soni mos kelsa, $Z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ miqdoriga ko’p o’zgaruvchili funksiya deyiladi.

Masalan, ushbu formula $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$ - asos radiusi R ga va balandligi H ga teng bo’lgan konus hajmini bildiradi.

$Z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyadagi $(x_1, x_2, ..., x_n)$ o’zgaruvchilarga funksiyaning argumentlari deb ataladi. Shuningdek, Z - erksiz o’zgaruvchi va f – moslik qonun yoki qoidasini bildiradi.

Ko’p o’zgaruvchili funksiya aniqlangan barcha nuqtalarga funksiyaning aniqlaniqlanish sohasi deyiladi va quyidagicha belgilanadi: *D(f)* yoki *D(Z).*

Funksiya aniqlanish sohasining barcha $(x_1, x_2, ..., x_n)$ elementlariga mos keluvchi funksiyaning sonlar to’plamiga, funksiyaning qiymat (o’zgarish)lar sohasi deyiladi: *E(f)* yoki *E(Z).*

Masalan, $Z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ ikki o'zgaruvchili berilgan bo'lsin, u holda uning aniqlanish sohasi: $D(Z)q\{(x;y);\ x^2+y^2\le 1\}$ – markazi $(0,0)$ nuqtada bo'lgan doirani bildiradi.

Endi biz, ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun, bir o'zgaruvchili funksiya uchun kiritilgan hosila, differensial va funksiyani tekshirish tushunchalarini kiritamiz.

Ko'p o'zgaruvchili funksiyalarga doir misollarni keltiraylik. Bu funksiyalarni $Z=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ko'rinishda ifoda etamiz.

1. $Z=\dfrac{1}{x_1\cdot x_2}$

Bu funksiyaning aniqlanish sohasi $D(z)=\{(x_1;x_2):x_1\neq 0,\ x_2\neq 0\}$ to'plamdan iborat. Bu to'plam X_1OX_2 tekisligidan OX_1 va OX_2 koordinata o'qlarini chiqarib tashlashdan hosil buladi.

2. $Z=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n+в$ funksiya chiziqli funksiya deyiladi, bu yerda $a_1,a_2,\cdots,a_n;в$ o'zgarmas sonlar.

3. $Z=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$, a_{ij} - o'zgarmas son bo'lib, $a_{ij}=a_{ji}$ tenglik o'rinli deb qaraladi. Bu funksiya kvadratik funksiya deyiladi.

4. Iqtisodiyotdagi foydaliylik funksiyasi: $Z=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\ell n(x_i-c_i)$

bu yerda $a_i>0,\ x_i>c_i\ge 0$ tengliklar o'rinli bo'lib, a_i va c_i lar o'zgarmas sonlar. Bu funksiya o'zgarmas egiluvchanlik funksiyasi deyiladi.

5. Ko'p o'zgaruvchili ishlab chiqarish funksiyasi: $Z=b_0x_1^{b_1}x_2^{b_2}$

Bu funksiyaga Kobb-Duglas funksiyasi deb ham ataladi. Bu yerda x_1- mehnat xarajatlari, x_2 - ishlab chikarish fondlari hajmini bildiruvchi o'zgaruvchilardir.

b_0,b_1 *ва* b_2 o'zgarmas sonlar bo'lib, ishlab chiqarish texnologiyasi orqali aniqlanadigan parametrlarini bildiradi.

Ta'rif. $Z=f(x_1,\ x_2,\ldots,x_n)$ ko'p o'zgaruvchili funksiyaning grafigi deb quyidagi

$$\Gamma(f)=\{(Z,x_1,x_2,\ldots,x_n):Z=f(x_1,x_2,\ldots,x_n),(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in D(f)\}$$

to'plamga aytiladi. Bu yerda $D(f)$-funksiyaning berilgan to'plami (yoki aniqlanish sohasi) bo'lib, $\Gamma(f)\subset R^{n+1}$ munosabat o'rinlidir.

Ta'rif. $Z=f(x_1,\ x_2,\ldots,x_n)$ ko'p o'zgaruvchili funksiyaning o'zgarmaslik chizig'i yoki o'zgarmaslik sirti deb quyidagi

$$\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in D(f):f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=c\}$$

to'plamga aytiladi. Bu yerda $c=const$.

Masalan, $Z=\sqrt{x^2+y^2}$ ikki o'zgaruvchili funksiya grafigi R^3-uch o'lchovli fazoda , uchi koordinata boshida bo'lgan cheksiz konusdan iborat bo'ladi.

$Z=\sqrt{x^2+y^2}$ funksiyaning o'zgarmaslik chiziqlari, markazi koordinata boshida bo'lgan, XOY tekislikda joylashgan aylanalardan iborat buladi. chunki $c>0, x^2+y^2=c^2$ tenglik aylana tenglamasini aniqlaydi.

$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in R^n$ va $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in R^n$. R^n - fazodagi nuqtalar bo'lsin. Bu nuqtalar orasidagi masofa $d(x,y)$ deb quyidagi tenglik orqali aniqlangan songa aytiladi.

$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

27.2. Ko'p o'zgaruvchili funksiya limiti va uzluksizligi

Ta'rif. Markazi $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ nuqtada, radiusi $0<R$ ga teng ochik shar $-S(x,R)$ deb, quyidagi to'plamga aytiladi.

$$S(x,R)=\{y:d(x,y)<R\}$$

Izox. $\varepsilon>0$ son uchun $S(x,\varepsilon)$-x nuqtaning, «ε-atrofi» ham deyiladi. $\overline{S}(x,R)=\{y:d(x,y)\le R\}$ to'plam esa yopiq shar deyiladi.

Ta'rif. Agarda ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday $\delta>0$ soni mavjud bo'lsaki, barcha $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ nuqtalar uchun $d(x;x_0)<\delta$ ekanligidan

$$|f(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)-a|<\varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, a soniga $Z=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ funksiyaning, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\to x_0=\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)}\right)$ ga intilgandagi limiti deyiladi va quyidagicha yoziladi.

$$\lim_{x\to x_0} f(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)=a$$

Misol.

1. $Z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ funksiyaning aniqlanish sohasi $D(z)=\{(x;y):x^2+y^2\le 1\}$ ya'ni XOY tekisligida makazi koordinata boshi $(0,0)$ nuqtada, radiusi 1 ga teng bo'lgan doiradan iboratdir.

2. $Z=x\cdot y$ funksiyaning o'zgarmaslik chiziqlari XOY tekisligida $xy=c$ ya'ni $y=\frac{c}{x}$ tenglama orqali aniqlangan giperboladan iborat bo'ladi.

3. $$\lim_{\substack{x_1\to 0\\ x_2\to 0}}\frac{x_1^2+x_2^2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+1}-1}=\lim_{\substack{x_1\to 0\\ x_2\to 0}}\frac{\left(x_1^2+x_2^2\right)\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+1}+1\right)}{x_1^2+x_2^2+1-1}=\lim_{\substack{x_1\to 0\\ x_2\to 0}}\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+1}+1\right)=2.$$

Ta'rif. $Z=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ funksiya $x_0=\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)}\right)$ nuqtada uzluksiz deyiladi, agarda bu funksiya x_0 nuqtaning biron-bir atrofida berilgan bo'lib

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

tenglik o'rinli bo'lsa.

Masalan: $Z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ funksiya $x^2 + y^2 \neq 0$ munosabatni qanoatlantiruvchi nuqtalarda, ya'ni koordinata boshidan farqli barcha nuqtalarda uzluksiz bo'ladi.

27.3. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilalari.

$Z = f(x_1,\, x_2, \ldots, x_n)$ ko'p o'zgaruvchili funksiyaning barcha x_i argumentiga Δx_i orttirma beramiz, u holda funksiya quyidagi Δz orttirmani

$$\Delta z = f(x_1 + \Delta x_1,\;\; x_2 + \Delta x_2, \cdots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

hosil qiladi. Bu orttirma funksiyaning to'liq orttirmasi deyiladi. Agar $Z = f(x_1,\, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ funksiyaning faqat i-argumenti bo'lgan x_i o'zgaruvchiga Δx_i orttirma berib, qolgan o'zgaruvchilarni o'zgarmas deb qarasak, u holda funksiya hosil qilgan orttirma $\Delta_{x_i} z$ quyidagicha aniqlanib

$$\Delta_{x_i} z = f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$$

bu orttirma funksiyaning xususiy orttirmasi deyiladi.

Masalan: $z = xy$ funksiyaning to'liq va xususiy orttirmalarini topaylik. Ular quyidagiga teng buladi.

$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = x \cdot \Delta y + y \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \Delta y$$

$$\Delta_x z = (x + \Delta x) \cdot y - xy = y \cdot \Delta x,$$

$$\Delta_y z = x \cdot (y + \Delta y) - xy = x \cdot \Delta y$$

Ta'rif. $Z = f(x_1,\, x_2, \ldots, x_n)$ ko'p o'zgaruvchili funksiyaning x_i o'zgaruvchisi bo'yicha xususiy hosilasi deb, x_i o'zgaruvchidan boshqa o'zgaruvchilarni o'zgarmas deb qaraganda, hosil bo'lgan bir o'zgaruvchili, ya'ni x_i-o'zgaruvchili, funksiyaning x_i-o'zgaruvchi bo'yicha olingan hosilasiga aytilib, $y = \dfrac{\partial z}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ yoki f'_{x_i} shaklida belgilanadi, ya'ni xususiy hosila quyidagi limit orqali topiladi:

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} z}{\Delta x_i}$$

Masalan, $z = x \cdot y$ funksiya uchun, uning xususiy xossilalari quyidagiga teng bo'ladi: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = x$.

$z = arctg \dfrac{x}{y}$ funksiya uchun esa,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{y^2 + x^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2 + x^2}$$

xususiy hosilalarni hosil qilamiz.

Xulosa

Ko'p o'zgaruvchili funksiya haqida umumiy tushunchalar berilib, ularning limiti va uzluksizligi asosida ko'p o'zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilalari topish qoidalari keltirib o'tilgan.

Tayanch iboralar:

Ko'p o'zgaruvchili funksiya, ε -atrof, to'liq va xususiy orttirma, funksiya orttirmasi, xususiy hosila.

Takrorlash uchun savollar

1. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar haqida nimani bilasiz?
2. Ko'p o'zgaruvchili funksiya limiti va uzluksizligi.
3. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilalarini tushuntirib bering.

Asosiy adabiyotlar

1. T.A.Azlarov, X. Mansurov «Matematika analiz» T., «O'qituvchi» 1 qism 1986 y., 2 qism 1989 y.
2. T.J.Jo'rayev , G.Xudoyberganov, A.K.Vorisov, X.Mansurov «Oliy matematika asoslari», I , II qismlar., T., 1999 y.
3. Shipachev V.S. «Vosshaya matematika», M., «Vosshaya shkola», 1991y.

Qo'shimcha adabiyotlar

1.Soatov ¨.U. «Oliy matematika», 1 va 2-jildlar , T., «O'qituvchi» , 1992y., 1994 y.
2. B. Abdualimov , Sh.Solixov «Oliy matematika qisqacha kursi» , T., «O'qituvchi» , 1981 y.
3. Danko P.Ye., Popova A.T. Kojevnikova T.Ya. «Vosshaya matematika v uprajneniyax i zadachax» M., Vosshaya shkola. 1998 y.
4. Zaysev I.A. Vosshaya matematika. M., 1998 y.

28-mavzu. To'la orttirma. Funksiya differensiali. Ko'p o'zgaruvchili funksiya gradiyenti. Yuqori tartibli xususiy hosilalar.

Reja:

28.1. Yuqori tartibli xususiy hosilalar.

28.2. Ko'p o'zgaruvchili funksiya differensiali.

28.3. Yo'nalish bo'yicha hosila va gradiyent.

28.1. Yuqori tartibli xususiy hosilalar

Albatta funksiyaning hosilasi tushunchasini orttirma tushunchasisiz tasavvur qilib bo'lmaydi. Shuning uchun ham ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun orttirma, to'la orttirma, xususiy orttirma kabi tushunchalarini kiritamiz.

$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ko'p o'zgaruvchili funksiyaning barcha x_i argumentiga Δx_i orttirma beramiz, u holda funksiya quyidagi Δz orttirmani

$$\Delta z = f(x_1 + \Delta x_1, \ \ x_2 + \Delta x_2, \cdots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

hosil qilamiz. Bu orttirma funksiyaning to'liq orttirmasi deyiladi.

Agar $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$ funksiyaning faqat i-argumenti bo'lgan x_i o'zgaruvchiga Δx_i orttirma berib, qolgan o'zgaruvchilarni o'zgarmas deb qarasak, u holda funksiya hosil qilgan orttirma $\Delta_{x_i} z$ quyidagicha aniqlanib

$$\Delta_{x_i} z = f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

bu orttirma funksiyaning xususiy orttirmasi deyiladi.

Masalan: $z = x^2 y$ funksiyaning to'liq va xususiy orttirmalari quyidagicha aniqlanadi:

$$\Delta z = (x + \Delta x)^2 (y + \Delta y) - x^2 y$$

$$\Delta_x z = (x + \Delta x)^2 \cdot y - x^2 y$$

$$\Delta_y z = x^2 \cdot (y + \Delta y) - x^2 y$$

Oldingi mavzuga ko'ra biz xususiy hosilalarni ta'rifga asosan ushbu

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} z}{\Delta x_i}$$

limit orqali hisoblagan edik. Ya'ni,

$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ko'p o'zgaruvchili funksiyaning x_i o'zgaruvchisi bo'yicha xususiy hosilasi deb, x_i o'zgaruvchidan boshqa o'zgaruvchilarni o'zgarmas deb qaraganda, hosil bo'lgan bir o'zgaruvchili, ya'ni x_i-o'zgaruvchili, funksiyaning x_i-o'zgaruvchi bo'yicha olingan hosilasini hisoblaganmiz.

Masalan, $z = x^3 y - xy^2$ funksiya uchun, uning xususiy xossilalari quyidagiga teng bo'ladi: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y - y^2, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = x^3 - 2xy$.

Bundan ko'rinib turibdiki, $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ xususiy hosila, o'z navbatida yana ko'p o'zgaruvchili funksiya bo'lgani uchun, undan yana xususiy hosilalarni topish mumkin. Bu xususiy hosilalar ikkinchi tartibli xususiy hosilalar deb ataymiz. Xuddi shunga o'xshash uchinchi va h.k. tartibli xususiy hosilalarni kiritish mumkin.

Bu hosilalar quyidagicha belgilanadi.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right), \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x_i^{\ 2}\, \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_i^{\ 2}}\right), \dots$$

$$\frac{\partial^n z}{\partial x_{i_1}^{k_1}\, \partial x_{i_2}^{k_2} \cdots \partial x_{i_m}^{k_m}}, \qquad k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$$

Bu yerda uzluksiz aralash hosilalarda tartibning ahamiyati yo'qdir, ya'ni masalan, quyidagi tenglik o'rinlidir,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i\, \partial x_j} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_j \partial x_i}$$

bu aralash hosilalarni uzluksiz deb qarash kerak.

28.2. Ko'p o'zgaruvchili funksiya differensiali.

Avval aytganimizdek, matematik uslublarning tadbiqlari taqribiy hisoblashlar bilan uzviy bog'langan bo'lib, bir o'zgaruvchili funksiya uchun taqribiy hisoblashlar funksiya differensiali asosida olib borilishligini ko'rgan edik. Ko'p o'zgaruvchili funksiya uchun xam uning differensiali tushunchasini kiritish mumkin.

Ta'rif. $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ko'p o'zgaruvchili funksiyaning differensiali deb, dz - shaklida belgilanib quyidagicha aniqlangan kattalikka aytiladi.

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial Z}{\partial x_2}\Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial Z}{\partial x_n}\Delta x_n$$

Bu yerda $dx_i = \Delta x_i$ - x_i - erkli o'zgaruvchining orttirmasidan iborat bo'lishligini e'tiborga olsak, dZ - differensiali uchun quyidagi tenglikni yoza olamiz.

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial Z}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial Z}{\partial x_n}dx_n$$

Ta'rif. $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ko'p o'zgaruvchili funksiya $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ nuqtada differensiallanuvchi deyiladi, agarda *x*- nuqtaning yetarli kichik atrofida, uning to'liq orttirmasi ΔZ - ni quyidagicha ifodalash mumkin, bo'lsa.

$$\Delta Z = dZ + 0\left(\sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \circ + \cdots + \Delta x_n^2}\right)$$

Shuni ta'kidlash lozimki, ko'p o'zgaruvchili funksiya uchun uning barcha birinchi tartibli xususiy hosilalarni berilgan nuqtada mavjudligidan shu nuqtada funksiyani differensiallanuvchi ekanligi kelib chiqmaydi. Quyidagi teorema ko'p o'zgaruvchili funksiyani differensiallanuvchi bo'lishligining yetarli shartini ifoda etadi.

Teorema. Agar $Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ko'p o'zgaruvchili funksiya $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nuqtaning biron –bir atrofida barcha birinchi tartibli $\frac{\partial z}{\partial x_i}, i = 1,2,\ldots,n$ xususiy hosilalari mavjud bo'lib, bu xususiy hosilalar x nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiya shu nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi.

Biz bu teoremani isbotsiz qabul qilamiz. Xuddi bir o'zgaruvchili funksiyalardagi kabi, ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun yuqori tartibli differensial tushunchasini kiritish mumkin.

28.3. Yo'nalish bo'yicha hosila va gradiyent.

$A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ va $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ nuqtalar uchun boshi A nuqtada, oxiri B nuqtada bo'lgan $\overrightarrow{AB}$ vektor deb, quyidagi ko'rinishdagi vektorni tushunish kerakligini eslatib utamiz.

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2, \cdots, b_n - a_n)$$

Vektor, odatda bitta kichik lotin xarfi bilan belgilanadi, masalan

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

$\vec{a}$ vektorning uzunligi $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$ bo'lib, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 \cdot b_2 + \cdots + a_n \cdot b_n$$

tenglik orkali aniqlanadi. Bundan tashkari $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi $\varphi(0 \le \varphi < \pi)$ burchak deb, uning kosinusi quyidagi

$$\cos\ \varphi\ = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|}$$

tenglik orqali aniqlangan burchakka aytilishini eslatib o'tamiz, $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vektorga parallel va $x_0 = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi, quyidagi tenglik orqali beriladi

$$x = t \cdot \vec{a} + x_0$$

bu yerda $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, t - haqiqiy son. Ya'ni bu to'g'ri chiziqda yotuvchi x nuqtaning koordinatalari

$$x_i = t \cdot a_i + x_i^{(0)}, \qquad i = 1,2,\dots,n$$

ko'rinishida buladi.

Agar $\vec{a}=(a_1, a_2, \dots, a_n)$ birlik vektor, ya'ni $|\vec{a}|=1$ bo'lsa, u holda *i*-koordinatasi 1 ga teng bo'lib, kolgan koordinatlari nolga teng bo'lgan $\overrightarrow{\ell_i}$ - birlik vektor uchun quyidagilarni hosil qilamiz

$$\vec{a} \cdot \overrightarrow{\ell_i} = a_i = |\vec{a}| \cdot |\overrightarrow{\ell_i}| \cdot \cos\alpha_i = \cos\alpha_i$$

bu yerda α_i burchak $\vec{a}$ va $\overrightarrow{\ell_i}$ vektorlar orasidagi burchakni bildiradi. Demak $|\vec{a}|=1$ bo'lgani uchun

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cdots + \cos^2\alpha_n = 1$$

bo'lar ekan. $\cos\alpha_i$ $\;i = 1,2,\dots,n$ sonlar $\vec{a}$ vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari deyiladi. Bu holda birlik $\vec{a}$ vektorni $\vec{a}=(\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cdots, \cos\alpha_n)$ ko'rinishda ifoda etish mumkin.

$\vec{a}$ birlik vektor bo'lsin, u holda Δt son uchun quyidagi orttirma

$$\Delta_{\vec{a}} z = f(x+\Delta t \cdot \vec{a}) - f(x) = f(x_1+\Delta t\cos\alpha_1, x_2+\Delta t\cos\alpha_2, \dots, x_n+\Delta t\cos\alpha_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$z=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiyaning $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nuqtadagi $\vec{a}$ vektor yunalishi bo'yicha orttirmasi deyiladi.

Ta'rif. $z=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ko'p o'zgaruvchili funksiyaning $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nuqtadagi, $\vec{a}$ vektor yo'nalish bo'yicha hosilasi $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}$ deb, quyidagicha aniqlangan miqdorga aytiladi.

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x+\Delta t \cdot \vec{a}) - f(x)}{\Delta t}$$

$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}$ hosila $z=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ko'p o'zgaruvchili funksiyaning $\vec{a}$ vektor yo'nalishi bo'yicha o'zgarish (o'sish yoki kamayish) tezligini bildiradi.

Xususan, agar $\vec{e}=(0,0,\dots,0,1,0,\dots,0)$- i-koordinatasi 1 ga, boshqa koordinatalari nolga teng bo'lgan birlik vektor bo'lsa, u holda

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{e}} = \frac{\partial z}{\partial x_i}$$

tenglik o'rinli buladi. Murakkab funksiya hosilasi formulasiga asosan, quyidagi tenglikni ko'rsatish mumkin

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = \frac{\partial z}{\partial x_1} \cdot \cos\alpha_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} \cos\alpha_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n} \cos\alpha_n$$

Ta'rif. $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiyaning gradiyenti deb, $\nabla z = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial z}{\partial x_n} \right)$ ko'rinishdagi ∇z - vektorga aytiladi.

Ta'rifga ko'ra, funksiyaning yo'nalish bo'yicha hosilasini quyidagi skalyar ko'paytma ko'rinishda ifoda eta olamiz.

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = \nabla z \cdot \vec{a}$$

Bu skalyar ko'paytmada, $\vec{a}$ vektor ∇z -gradient yo'nalish bilan ustma-ust tushsa, yo'nalish bo'yicha hosila o'zining eng katta qiymatiga erishadi. Demak funksiya gradienti ∇z - vektor, funksiya o'sishining eng katta bo'lgan yo'nalishini aniqlar ekan.

Xulosa

Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun yuqori tartibli xususiy hosilalarni hisoblash, ko'p o'zgaruvchili funksiyaning differensiali haqida tushuncha, ko'p o'zgaruvchili funksiyaning yo'nalish bo'yicha hosila va gradiyentini hisoblash qoidalari keltirib o'tilgan.

Tayanch iboralar:

Ko'p o'zgaruvchili funksiya, to'liq va xususiy orttirma, funksiya orttirmasi, yuqori tartibli hosila, funksiya differensiali, skalyar ko'paytma, yo'naltiruvchi kosinus, funksiya gradiyenti.

Takrorlash uchun savollar

1. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar haqida nimani bilasiz?
2. Yuqori tartibli xususiy hosilalar aniqlanadi?
3. Ko'p o'zgaruvchili funksiya differensiali deganda nimani tushunasiz?
4. Yo'nalish bo'yicha hosila va gradient qanday hisoblanadi?

Asosiy adabiyotlar

1. T.A.Azlarov, X. Mansurov «Matematika analiz» T., «O'qituvchi» 1 qism 1986 y., 2 qism 1989 y.

2. T.J.Jo'rayev , G.Xudoyberganov, A.K.Vorisov, X.Mansurov «Oliy matematika asoslari», I , II qismlar., T., 1999 y.

3. Shipachev V.S. «Vosshaya matematika», M., «Vosshaya shkola», 1991y.

Qo'shimcha adabiyotlar

1.Soatov ¨.U. «Oliy matematika», 1 va 2-jildlar , T., «O'qituvchi» , 1992y., 1994 y.

2. B. Abdualimov , Sh.Solixov «Oliy matematika qisqacha kursi» , T., «O'qituvchi» , 1981 y.

3. Danko P.Ye., Popova A.T. Kojevnikova T.Ya. «Vosshaya matematika v uprajneniyax i zadachax» M., Vosshaya shkola. 1998 y.

4. Zaysev I.A. Vosshaya matematika. M., 1998 y.

29-mavzu. Aniqmas integral.

Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral. Anikmas integralning xossalari. Anikmas integrallarni hisoblash usullari.

Reja:

29.1. Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral.
29.2. Anikmas integralning xossalari va uni hisoblash usullari.

29.1. Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral.

1-ta'rif. Agarda barcha $x \in (a,b)$ uchun $F'(x) = f(x)$ tenglik o'rinli bo'lsa, $F(x)$ funksiya (a,b) intervalda $f(x)$ funksiyaga boshlang'ich funksiya deyiladi.

Masalan: $F(x) = \frac{x^2}{2}$ funksiya $(-\infty,+\infty)$ oraliqda $f(x) = x$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya bo'ladi, chunki

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{1}{2} \cdot 2x = x$$

tenglik barcha $x \in (-\infty,+\infty)$ o'rinlidir.

Berilgan $f(x)$ funksiyaning bir necha boshlang'ich funksiyalarga ega bolishi mumkin. Masalan $F_1(x) = \frac{x^2}{2} + 1$ funksiya $f(x) = x$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi.

Umumiy xolda, agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ uchun boshlang'ich funksiya bo'lsa, istalgan o'zgarmas $c = const$ uchun $F(x) + c$ funksiya xam $f(x)$ ga boshlang'ich funksiya bo'ladi, chunki

$$(F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$$

tenglik o'rinli. Aksincha berilgan $f(x)$ funksiyaning istalgan ikkita boshlang'ich funksiyalari o'zgarmas songa farq qilishini korsatish mumkin. Haqiqatdan, xam $F_1(x)$ va $F_2(x)$ funksiyalar (a,b) da $f(x)$ ga boshlang'ich funksiya bolsin, u xolda

$$[F_1(x) - F_2(x)]' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0\,.$$

U xolda Lagranj teoremasining natijasiga ko'ra $F_1(x) - F_2(x) = C = const$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, xulosa qilib shuni aytish mumkinki, agar $F(x)$ funksiya (a,b) intervalda $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u xolda $f(x)$ funksiyaning (a,b) intervaldagi istalgan boshlang'ich funksiyasi $F(x) + C, \quad C = \text{const}$ korinshda bolar ekan.

2-ta'rif. $f(x)$ funksiyaning $(a\,,b\,)$ intervaldagi barcha boshlang'ich funksiyalari

$$\int f(x)dx$$

korinishda belgilanib xosil bolgan ifoda $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali deb ataladi. Bu yerda $f(x)$ integral ostidagi funksiya, $f(x)dx$- integral osti ifodasi deb ataladi.

Demak, agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa,

$$\int f(x)dx = \{F(x) + C: \ C \in R\}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglik qisqacha

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

shaklda ifoda etiladi. Masalan, quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi

$$\int xdx = \frac{x^2}{2} + C$$

Berilgan funksiya uchun uning boshlang'ich funksiyasini, ya'ni uning aniqmas integralini topish, funksiyani integrallash deb ataladi.

29.2. Anikmas integralning xossalari va uni hisoblash usullari.

1. Aniqmas integral hosilasi integral ostidagi funksiyaga teng bo'ladi, ya'ni

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

Haqiqatdan xam, agar $F(x)$-funksiya $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, quyidagi o'rinli bo'ladi

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$$

2. Aniqmas integralning differensiali integral ostidagi ifodaga teng bo'ladi, ya'ni $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

Haqiqatdan xam,

$$d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x) + c) = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$$

3. Biron-bir funksiya differensialining aniqmas integrali shu funksiyadan o'zgarmas songa farq qiladi, ya'ni

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

Haqiqatdan xam, agar biz $F(x)$ ni biron bir $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi deb qarasak, ya'ni $F'(x) = f(x)$ bo'lsa, u xolda $dF(x) = f(x)dx$ tenglik o'rinli ekanligidan

$$\int dF(x) = \int f(x)dx = F(x) + C$$

ekanligi kelib chiqadi.

4. Agar *a* o'zgarmas son bo'lsa, u xolda

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

tenglik o’rinli bo’ladi.

Haqiqatdan xam, hosila xossasiga kora

$$\left(a\int f(x)dx\right)' = a\left(\int f(x)dx\right) = a\cdot f(x)$$

tenglik kelib chiqadi. Demak $a\int f(x)dx$ funksiya $a\cdot f(x)$ funksiyaning boshlang’ich funksiyasi, ya’ni

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

tenglik o’rinli ekan.

5. Yig’indi funksiyaning integrali, qo’shiluvchilar integrallarning yig’indisiga teng, ya’ni

$$\int [f(x)\pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

xaqiqatdan xam, hosila xossasiga kora

$$\left(\int f(x)dx \pm \int g(x)dx\right)' = \left(\int f(x)dx\right)' \pm \left(\int g(x)dx\right)' = f(x)\pm g(x)$$

tenglik o’rinli bolar ekan.

6. Agar $\int g(t)dt = G(t)+C$ o’rinli bo’lsa, u xolda

$$\int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = G(\varphi(x))+C$$

tenglik o’rinli bo’ladi.

Xaqiqatdan xam, $G'(t)=g(t)$ bo’lgani uchun murakkab funksiya hosilasi formulasiga asosan quyidagini xosil qilamiz

$$\left(G(\varphi(x))\right)'_x = G'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x) = g(\varphi(x))\varphi'(x)$$

demak $G(\varphi(x))$ funksiya $g(\varphi(x))\varphi'(x)$ funksiyaning boshlang’ich funksiyasi ekan.

Bu xossadan foydalanib, aniqmas integralni hisoblashning yangi o’zgaruvchi kiritib yoki o’rniga qo’yish usuli deb nomlanuvchi usuli xosil qilinadi.

Agar $\int f(x)dx$ integralda, integral ostidagi ifodani quyidagicha ifodalash mumkin bolib $f(x)dx = g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = g(\varphi(x))d\varphi(x)$, $\int g(t)dt = G(t)+C$ tenglik o’rinli bo’lsa, u xolda

$$\int f(x)dx = \int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = G(\varphi(x))+C$$

tenglik xosil qilamiz.

Misol tariqasida, quyidagi integralni hisoblaylik

$$\int \sin^4 x\, \cos x\, dx$$

bu yerda $t=\sin x$ deb olsak

$$\sin^4 x\cdot\cos x\, dx = \sin^4 x\, d\sin x = t^4 dt$$

tenglikni xosil qilamiz

$$\int t^4 dt = \frac{t^5}{5}+C$$

ekanligidan

$$\int \sin^4 x \cos x\, dx = \frac{\sin^5 x}{5} + C$$

tenglik kelib chiqadi.

7. Agar $\int f(t)dt = F(t) + c$ bo'lsa, u xolda

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Haqiqatdan xam, $t = ax + b$ deb olsak

$$f(ax+b)dx = \frac{1}{a}f(ax+b)d(ax+b) = \frac{1}{a}f(t)dt$$

tenglik o'rinli bo'ladi, u xolda

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(t)dt = \frac{1}{a}F(t) + c = \frac{1}{a}F(ax+b) + c$$

8. Quyidagi, bo'laklab integrallash formulasi deb nomlanuvchi formula o'rinli bo'ladi.

$$\int udv = u \cdot v - \int vdu$$

Haqiqatdan xam, differensiallanuvchi u va v funksiyalar uchun, koaytmaning differensialigi kora

$$d(uv) = vdu + udv$$

tenglikdan, quyidagini xosil qilamiz.

$$udv = d(uv) - vdu$$

bu yerdan esa

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu = uv - \int vdu$$

tenglik kelib chiqadi.

Masalan $\int x \cos x\, dx$ integralni bolaklab integrallaylik. Buning uchun $u = x,\quad dv = \cos x\, dx = d(\sin x)$ deb olsak, $du = dx$ va $v = \sin x$ ekanligidan

$$\int x \cos x\, dx = x \cdot \sin x - \int \sin x\, dx = x \sin x + \cos x + c$$

tenglik kelib chiqadi.

Aniqmas integral ta'rifiga va elementar funksiyalar hosilasi jadvaliga asoslanib, tenglikning ong tarafidan hosila olish orqali isbotlashga kora, quyidagi elementar funksiyalarning aniqmas integrali jadvalini tuzib olamiz.

$$1.\int o\,dx = C$$

$$2.\int 1\cdot dx = \int dx = x + c$$

$$3.\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha}}{\alpha+1} + c, \qquad \alpha \neq -1$$

$$4.\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{dx}{x} = \ell n|x| + c$$

$$5.\int \frac{1}{1+x^2}dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + c$$

$$6.\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\sin x + c$$

$$7.\int a^x dx = \frac{a^x}{\ell na} + c, \qquad \int e^x dx = e^x + c$$

$$8.\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$9.\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$10.\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$$

$$11.\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$$

Xulosa

Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral nazariyasi tola keltirilgan. Asosiy integrallash qoidalari berilgan.

Ba'zi tipik integrallarni hisoblash formulalari keltirib chikarilgan.

Tayanch iboralari:

Boshlang'ich funksiya, aniqmas integral.

Takrorlash uchun savollar

1. Boshlang'ich funksiya deb nimaga aytiladi.
2. Aniqmas integral deb nimaga aytiladi.
3. Aniqmas integralning xossalarini yozing.
4. Aniqmas integral jadvalini keltiring va ba'zilarini isbotlang.

Asosiy adabiyotlar

1. T.A.Azlarov, X. Mansurov «Matematika analiz», T., «O'qituvchi».
1-qism 1986 y., 2-qism 1989 y.
2. T.J.Jorayev , G.Xudoyberganov, A.K.Vorisov, X.Mansurov «Oliy matematika asoslari», I , II qismlar., T., 1999 y.
3. Vinogradov I.M. «Elemento vosshey matematiki» , M., 1999 y.

Qo'shimcha adabiyotlar:

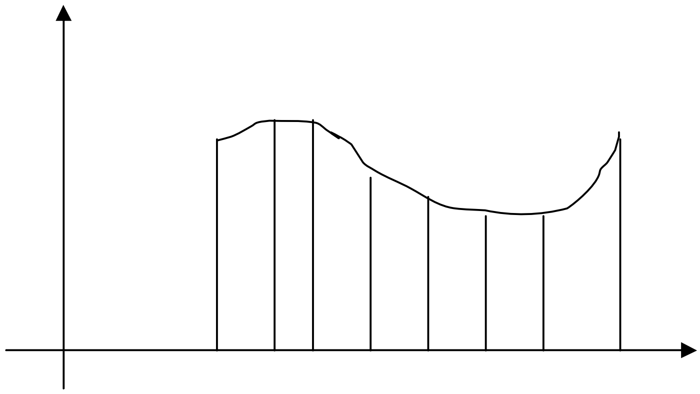
1.Soatov Yo. U. «Oliy matematika» 1 va 2-jildlar, T., «O'qituvchi»,
1992 y., 1994 y.
2. Danko P.Ye., PopovaA.T. Kojevnikova T.Ya. «Vosshaya matematika v uprajneniyax i zadachax» M., Vosshaya shkola. 1998 y.
3. Zaysev I.A. Vosshaya matematika M., 1998 y.
4. Bavrin I.I. Obxiy kurs vosshey matematiki. M., 1995 y.

30-mavzu. Aniq integral va uni hisoblashning asosiy formulasi. Aniq integralning xossalari.

30.1. Aniq integral tushunchasi.
30.2. Aniq integral xossalari.

30.1. Aniq integral tushunchasi.

Quyidagi egri chiziqli trapetsiya deb nomlanuvuchi figuraning yuzasini topish masalasini koraylik.



1-chizma.

Bu figura yuqoridan manafiy bolmagan $y = f(x)$ funksiya bilan, quyidan OX yoki yon tomonlardan $x = a$ va $x = b$ tog'ri chiziqlar bilan chegaralangan. Buning uchun $[a,b]$ oraliqni $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ nuqtalar bilan, $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,1,\ldots n-1$, kichiq oraliqlarga bolamiz. Xar bir oraliqdan biron-bir $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ nuqta olib, $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$, $i = 0,1,\ldots,n-1$ belgilash kiritib quyidagi yig'indini tuzib olamiz.

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\cdot \Delta x \qquad (1)$$

Bu yig'indida $f(\xi_i)\cdot \Delta x_i$ qo'shiluvchini biz qaralayotgan figuraning $[x_i, x_{i+1}]$ oraliqqa mos keluvchi bolagining yuzasini, balandligi $f(\xi_i)$ ga asosi Δx_i ga teng bolgan tog'ri turtburchak yuzasiga taqriban teng deb qarasak, u xolda yuqoridagi yig'indi biz qarayotgan egri chiziqli trapetsiya yuzasining taqribiy qiymati deb qarashimiz mumkin. Agar S -egri chiziqli trapetsiya yuzasi deb olsak, demak

$$S \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

bolar ekan. Agar biz bu taqribiy tenglikdagi xatolikni kamaytirmoqchi bo'lsak, $[x_i, x_{i+1}]$ kesmalar uzunliklarini ya'ni Δx_i larni koproq kichik qilib olishimiz kerak. Buning uchun oraliqni boluvchi nuqtalar soni n ni shunday oshira borishimiz kerakki, $n \to \infty$ da $\max\limits_{0 \le i \le n-1} \{\Delta x_i\} \to 0$ bolishi kerak.

Demak, agar biz (1) –yig'indida $\max\{\Delta x_i\} \to 0$ deb qarasak, limitda qidirilayotgan egri chiziqli trapetsiya yuzini xosil qilar ekanmiz, ya'ni

$$S = \lim_{\max\{\Delta x_i\} \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

1-ta'rif. $[a,b]$ oraliqda berilgan $y = f(x)$ uchun, shu oraliqni kichik bolakchalarga boluvchi $a = x_0 < x_1, \ldots, < x_n = b$ va $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ nuqtalar uchun (1) yig'indi integral yig'indi deb ataladi.

2-ta'rif. $[a,b]$ oraliqda berilgan $y = f(x)$ funksiya uchun $\max\{\Delta x_i\} \to 0$ da (1) integral yig'indining chekli limiti mavjud bolib, bu limit bolinish nuqtalari $x_0, x_1, \ldots, x_n$ va oraliqlardan olinayotgan $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ nuqtalariga bog'lik bolmasa, $y = f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi, limitning qiymati uning aniq integrali deyilib, bu limit quyidagicha belgilanadi.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max\{\Delta x_i\} \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Bu yerda $f(x)$- integral ostidagi funksiya, $f(x)dx$- integral ostidagi ifoda, a - integralning quyi chegarasi, b - integralning yuqori chegarasi deyiladi.

$\int_a^b f(x)dx$ integralni topish, $f(x)$- funksiyani $[a,b]$ oraliqda integrallash deb ataladi.

Shuni ta'kidlash kerakki $f(x)$- funksiyani $[a,b]$ oraliqdagi aniq integrali son bo'lsa, shu funksiyaning aniqmas integrali funksiyalar toplamidan iborat bo'ladi. Demak aniq va aniqmas integrallar turli tushunchalar ekan.

Agar biz aniq integralda uning chegaralarining tartibini ozgartirsak, u xolda, $[a,b]$ va $[b,a]$ uchun tuzilgan integral yig'indilar ishorasi bilan farq qiladi, chunki $[a,b]$ uchun $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ bo'lsa, $[b,a]$ uchun $\Delta x_i = x_i - x_{i+1}$ ayirma xosil bo'ladi. Shuning uchun

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

tenglik o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

Yuqorida aytilganidek, aniq integralning qisqacha ma'nosi, manfiy bolmagan $y = f(x)$ yuzi deb tushinish mumkin ekan.

Aniq integralning iqtisodiy ma'nosini ochish uchun $y = f(t)$ funksiya biron bir ishlab chiqarishda mexnat unimdorligini vaqt davomida ozgarishini aniqlasin deb qaraylik. U xolda $[0,T]$ oralig'ida maxsulot miqdori xajmi u ni hisoblash masalasini yechmokchi bo'lsak, buning uchun $[0,T]$ oraliqni

$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} <= T$ nuqtalar bilan kichik bo'lakchalarga bolib, $[t_i, t_{i+1}]$ kichik oraliqda mexnat unimdorligini taqriban o'zgarmas $f(\xi_i)$ ga $(\xi_i \in [t_i, t_{i+1}])$ teng, bo'ladi deb hisoblab $[t_i, t_{i+1}]$ oraliqda ishlab chiqarilgan maxsulot xajmi $\Delta u_i \approx f(\xi_i)\cdot \Delta t_i$ ga $(\Delta t_i = t_{i+1} - t_i)$ teng ekanligini hisobga olib, butun $[0,T]$ oraliqda ishlab chiqarilgan maxsulot miqdori u uchun quyidagi taqribiy tenglikni xosil qilamiz.

$$u = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta u_i \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta t_i$$

Bu tenglikda aniqlikni oshirish uchun $\max \Delta t_i \to 0$ limitga o'tishimiz kerak bo'ladi. U xolda quyidagi tenglikni xosil qilamiz

$$u = \int_0^T f(t)dt$$

Bu tenglik $[0,T]$ vaqt davomida ishlab chiqarilgan maxsulot miqdorining xajmi u, t vaqtdagi ishlab chiqarishning mexnat unimdorligi $f(t)$ funksiyaning aniq integrali orqali ifoda etilar ekan. Bu integral son jixatidan $f(t)$ funksiya va $[0,T]$ oraliqlar xosil qilgan egri chiziqli trapetsiya yuziga teng bo'ladi.

Endi $y = f(x)$ funksiya uchun $\int_a^b f(x)dx$ integral qaysi shartlarda mavjud bolishligini koraylik.

Teorema. (Aniq integral mavjudligini yetarli sharti). Agar $y = f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo'lsa, bu funksiya shu oraliqda integrallanuvchi bo'ladi.

Isbot. $\overline{S_i} - \max\limits_{x\in[x_i, x_{i+1}]} \{f(x)\}$, $\underline{S_i} = \min\limits_{x\in[x_i, x_{i+1}]} \{f(x)\}$ deb belgilashlarni kiritaylik. U xolda quyidagi tengsizliklar o'rinli bo'ladi

$$\sum_{i=0}^{n-1} \underline{S}_i \Delta x_i \le \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=0}^{n-1} \overline{S_i}\Delta x_i \qquad (2)$$

bu yerda ξ_i, $[x_i, x_{i+1}]$ oraliqdan olingan istalgan nuqtadir. Agar $[x', x''] \subset [x_i, x_{i+1}]$ bolganda

$$\overline{S}' = \max_{x\in[x', x'']} \{f(x)\} \le \overline{S}_i, \quad \underline{S}' = \min_{x\in[x', x'']} \{f(x)\} \ge \underline{S}_i$$

ekanligini e'tiborga olsak, $\max \Delta x_i \to 0$ da $[a,b]$ oraliqni bo'lakchalarga bolishda, keyingi qadamdagi mayda bo'lakchalar avvalgi qadamdagi bolakchalarning ichida yotadi deb hisoblashimiz mumkin. U xolda (2) tengsizlikda $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \underline{S}_i \Delta x_i$ osuvchi, $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \overline{S}_i \Delta x_i$ kamayuvchi ekanligi kelib chiqadi. Bu yerda $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \max(\overline{S}_i - \underline{S}_i) = 0$ ekanligi e'tiborga olsak

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \underline{S}_i \Delta x_i = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \overline{S}_i \Delta x_i = I$$

ekanligi kelib chiqadi. U xolda (2) tengsizlikdan

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = I$$

ekanligi kelib chiqadi. Demak $\int_a^b f(x)dx$ mavjud bolib,

$$\int_a^b f(x)dx = I$$

ekanligi kelib chiqadi.

quyidagi teorema aniq integral mavjudligini zaruriy shartini ifoda etadi.

Teorema. Agar $y = f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lsa, u xolda bu funksiya shu oraliqda chegaralangan bo'ladi.

Isbot. Haqiqatdan xam, agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da chegaralangan bolmasin, masalan yuqoridan deb faraz qilsak, u xolda $[a,b]$ ni istalgan bolish $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ uchun $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ larni shunday tanlab olish mumkin bo'ladiki, oldindan berilgan xar qanday musbat $K > 0$ soni uchun

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i > K$$

tengsizlikni o'rinli qilib olish mumkin bo'ladi, ya'ni

$$\sup_{\substack{\xi_i \in [x_i, x_{i+1}] \\ i=0,1,\dots,n-1}} \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \right) = +\infty$$

ekan. Demak, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi bolmas ekan. Bu esa qilgan farazimizni notog'ri ekanligini korsatadi, ya'ni $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda chegaralangan bolar ekan.

30.2. Aniq integral xossalari.

1. Istalgan o'zgarmas *k* soni uchun

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

2. Yig'indi funksiyaning integrali qo'shiluvchilar integrallarning yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

3. Istalgan a,b va c sonlar uchun

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

4. Agar $a<b$ bolib, $[a,b]$ oraliqda $f(x)\le g(x)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u xolda

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Xususan, agar $[a,b]$ oraliqda $m\le f(x)\le M$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u xolda

$$m(b-a)\le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi.

Bu xossalar isboti tog'ridan-tog'ri aniq integral ta'rifdan kelib chiqadi.

T**eorema**. (O'rta qiymat xaqidagi teorema). Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ $(a<b)$ oraliqda integrallannuvchi bolib, $[a,b]$ oraliqda $m\le f(x)\le M$ tengsizliklar o'rinli bo'lsa, u xolda shunday μ soni mavjudki, uning uchun $m\le\mu\le M$ tengsizlik o'rinli bolib,

$$\int_a^b f(x)dx \le \mu\cdot(b-a)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. 4- xossaga kora

$$m(b-a)\le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Agar

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

belgilash kiritsak, $m\le\mu\le M$ o'rinli bo'lib

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

$f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi bolsin, u xolda istalgan $x\in[a,b]$ uchun, $f(x)$ funksiya $[a,x]$ oraliqda xam integrallanuvchi bo'ladi, shuning uchun $[a,b]$ oraliqda berilgan quyidagi funksiyani aniqlay olamiz

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$$

Bu funksiya yuqori chegarasi ozgaruvchi funksiya deyiladi. Shu funksiya xossalari bilan tanishib chiqaylik.

T**eorema**. $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi $f(x)$ funksiya uchun $\Phi(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo'ladi.

Isbot. $f(x)$ chegaralangan funksiya bolgani uchun, $[a,b]$ oraliqda $m \le f(x) \le M$ tengsizlik o'rinli bolsin deb olishimiz mumkin, u xolda $\Delta x > 0$ uchun

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(x)dx-\int_a^x f(x)dx=\int_a^x f(x)dx+\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx-$$

$$\int_a^x f(x)dx=\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx$$

tenglikdan va quyidagi

$$m\cdot\Delta x \le \int_x^{x+\Delta x} f(x)dx \le M\cdot\Delta x$$

tengsizlikdan,

$$m\cdot\Delta x \le \Phi(x+\Delta x)-\Phi(x) \le M\cdot\Delta x$$

tengsizliklarni xosil qilamiz. Bu yerdan

$$\lim_{\Delta x\to 0}(\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x))=0$$

ya'ni $\Phi(x)$ funksiya x nuqtada uzluksiz ekanligi kelib chiqadi.

t**eorema**. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo'lsa, u xolda $\Phi(x)$ funksiya (a,b) intervalda $f(x)$ funksiya uchun boshlangich funksiya bo'ladi, ya'ni (a,b) intervalda

$$\Phi'(x)=f(x)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. $f(x)$ funksiya uzluksiz bolgani uchun $\min\limits_{t\in[x,x+\Delta x]}\{f(t)\}=m(x)$ va $\max\limits_{t\in[x,x+\Delta x]}\{f(t)\}=M(x)$ desak,

$$\lim_{\Delta x\to 0} m(x)=\lim_{\Delta x\to 0} M(x)=f(x)$$

tenglikni o'rinli ekanligini e'tiborga olib

$$m(x)\Delta x \le \Phi(x+\Delta x)-\Phi(x) \le M(x)\cdot\Delta x$$

va

$$m(x) \le \frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x} \le M(x)$$

tengsizliklardan, quyidagi

$$\Phi(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=f(x)$$

tenglik kelib chiqadi.

Bu teoremadan $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bolgan xar qanday funksiyaning boshlangich funksiyasi mavjud bolishligi kelib chiqar ekan.

teorema. (Nyuton-Leybnits formulasi) $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bolib, $F(x)$ uning istalgan boshlang'ich funksiyasi bolsin, u xolda

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglik Nyuton-Lebnits formulasi deyiladi, $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$ belgilash qollaniladi.

Isbot. $\Phi(x) = \int_a^x f(x)dx$ funksiya, $f(x)$ uchun (a,b) oraliqda boshlangich funksiya bolgani uchun istalgan $x \in (a,b)$ uchun, shunday C o'zgarmas son mavjud bo'ladiki, quyidagi

$$F(x) = \Phi(x) + C$$

tenglik o'rinli bo'ladi. U xolda

$$F(b) - F(a) = \Phi(b) + C - \Phi(a) - C = \Phi(b) - \Phi(a) =$$
$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^a f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

tenglik o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

Xulosa

Aniq integral ta'rifi keltirilgan. Ularni hisoblash qoidalari berilgan. Asosiy xossalar isbotlangan.

Tayanch iboralari:

Aniq integral, chegara, egri chiziqli trepetsiya, soxa yuzasi .

Takrorlash uchun savollar

1. Aniq integral tushunchasi nimani bildiradi?
2. Aniq integralning iqtisodiy ma'nosi nima?
3. Aniq integralning mavjudligi yetarli shartini ayting.
4. Aniq integral xossalarini ayting.
5. Nyuton-Leybnits formulasini yozing.

Asosiy adabiyotlar

1. T.A.Azlarov, X. Mansurov «Matematika analiz», T., «O'qituvchi».

1-qism 1986 y., 2-qism 1989 y.
2. T.J.Jurayev , G.Xudoyberganov, A.K.Vorisov, X.Mansurov «Oliy matematika asoslari», I , II qismlar., T., 1999 y.
3. Vinogradov I.M. «Elemento vosshey matematiki» M. 1999 y.

Qo'shimcha adabiyotlar:

1. Soatov Yo. U. «Oliy matematika» 1 va 2-jildlar, T., «O'qituvchi», 1992 y., 1994 y.
2. Danko P.Ye., PopovaA.T. Kojevnikova T.Ya. «Vosshaya matematika v uprajneniyax i zadachax»,M. , Vosshaya shkola. 1998 y.
3. Zaysev I.A. «Vosshaya matematika» , M. 1998 y.
4. Bavrin I.I. «Obxiy kurs vosshey matematiki» M. 1995 y.

31-mavzu. Aniq integraldan foydalanib figuralar yuzasi va xajmini hisoblash.

Reja:

31.1. Aniq integraldan foydalanib figuralar yuzasini hisoblash.
31.2. Aniq integraldan foydalanib figuralar xajmini hisoblash.

31.1. Aniq integraldan foydalanib figuralar yuzasini hisoblash.

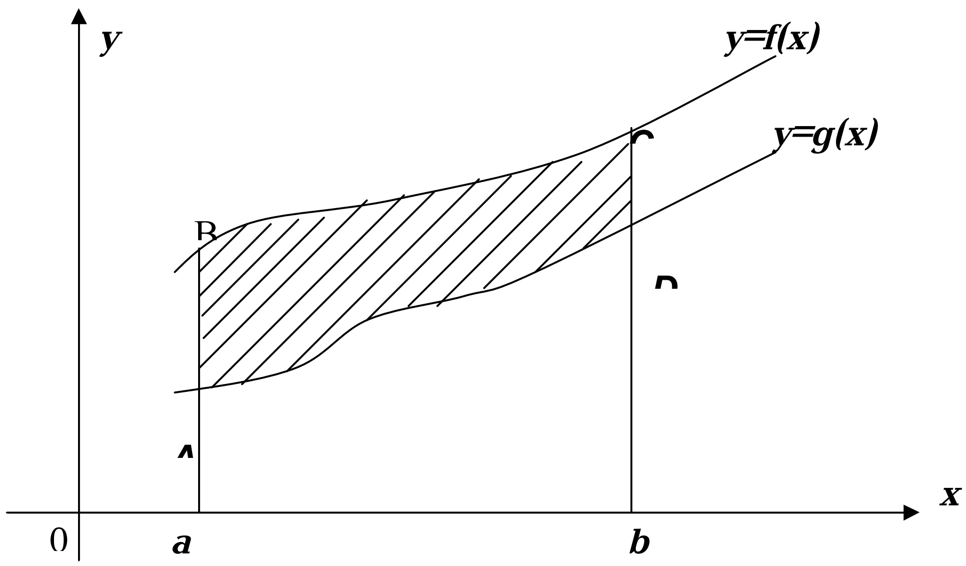
Endi aniq integralning ayrim tadbiqlarini korib chiqaylik. $[a,b]$ oraliqda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uzluksiz bolib, $g(x) \le f(x)$ tengsizlik o'rinli bolsin.

Masala. Chapdan $x = a$, ongdan $x = b$ tog'ri chiziqlari va yuqoridan $f(x)$, pastdan $g(x)$ funksiyalar bilan chegaralangan soxa S-yuzani hisoblang.

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

shu formulani isbot qilaylik.

Yechish. Umumiylikka zarar keltirmasdan $0 \le g(x) \le f(x)$ deb olishimiz mumkin. U xolda quyidagi shakldan iborat:



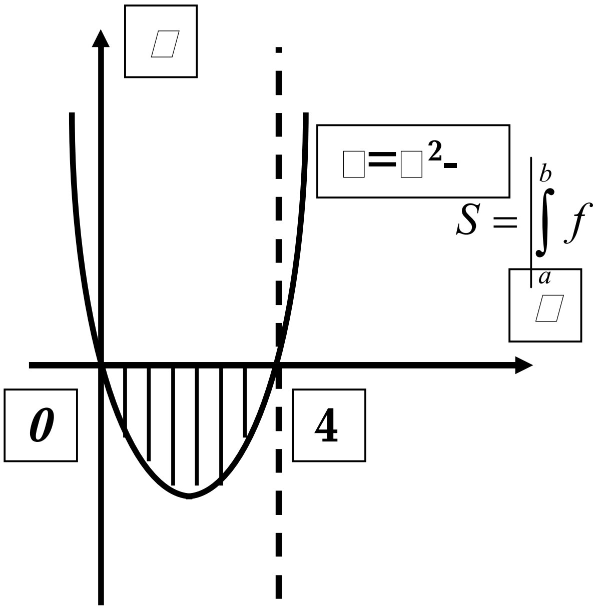
U xolda egri chiziqli trarpetsiyaning yuzasini hisoblash formulasiga kora:

$$S_{ABCD} = S_{aBCb} - S_{aADb} = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

tenglikni xosil qilamiz.

Demak, $$S_{ШТ}=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx$$

Masala. *Ox* oqi va $y=x^2-4x$ egri chiziq bilan chegaralangan figuraning yuzasini toping.
Yechish:

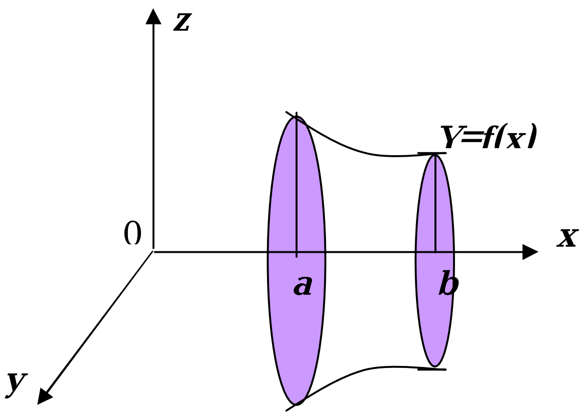


Bu yuzani hisoblash uchun $S=\left|\int_a^b f(x)dx\right|$ formuladan foydalanamiz:

$$S=\left|\int_0^4(x^2-4x)dx\right|=\left|\left(\frac{x^3}{3}-2x^2\right)\Big|_0^4\right|=\left|\frac{64}{3}-32\right|=\left|-10\frac{2}{3}\right|=10\frac{2}{3}$$

Masala. $[a,b]$ oraliqda $f(x)$ funksiya uzluksiz bo'lib, $f(x)\geq 0$ tengsizlik o'rinli bo'lsin. $y=f(x)$ funksiya grafigini OX oqi atrofida aylanitirishdan, xamda XYZ fazodagi $x=a$ va $x=b$ tekisliklar bilan chegaralangan aylanma jismning V xajmini toping.

Yechish. Bu masalani xal qilish uchun $[a,b]$ oraliqni $a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$ nuqtalar bilan bolamiz.



So’ngra $[x_i, x_{i+1}]$ oraliqdan biron bir ξ_i nuqtani olib, $[x_i, x_{i+1}]$ oraliqqa mos keluvchi aylanma jism xajmini radiusi $f(\xi_i)$ ga balandligi Δx_i ga teng bolgan silindr xajmi bilan almashtiramiz.

Agar biz Δx_i ni nolga intiltirsak, bu almashtirishdagi xatolik shunchalik kamayib boradi.

Endi $[x_i, x_{i+1}]$ ga mos keluvchi silindr xajmi $\pi f^2(\xi_i)\Delta x_i$ ekanligini e’tiborga olsak, quyidagi taqribiy tenglikni xosil qilamiz:

$$V \approx \sum_{i=0}^{n-1} \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i$$

Yuqoridagi fikrni e’tiborga, olsak

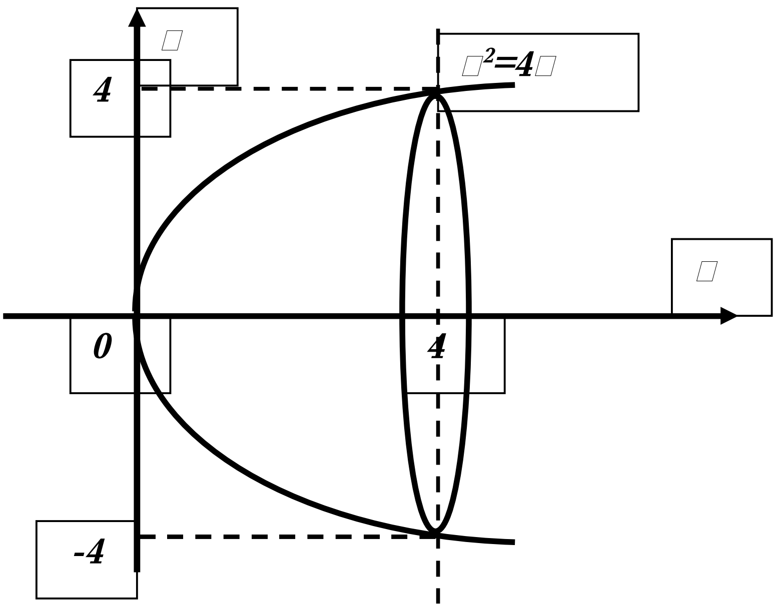
$$V = \lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b \pi f^2(x)dx$$

tenglikni xosil qilamiz. Demak aylanma jism xajmi uchun quyidagi formulani xosil qilamiz

$$V_{айл.жисм} = \int_a^b \pi f^2(x)dx$$

Masala. $\boldsymbol{u^2=x}$, $\boldsymbol{x=0,\ x=4}$ va $\boldsymbol{u=0}$ chiziqlar bilan chegaralangan shakl $\boldsymbol{Ox}$ oqi atrofida aylanadi. Hosil bolgan jism xajmini toping.

Yechish. Hosil bo’ladigan aylanish jismiga parabaloid deb ataladi.



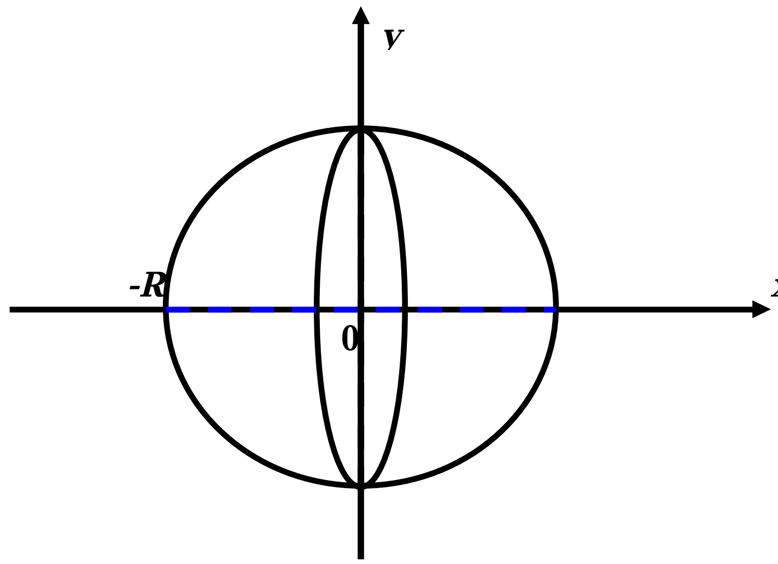
$$V = \pi \int_0^4 y^2 dx = \pi \int_0^4 4xdx = \pi 2x^2 \Big|_0^4 = \pi 2 \cdot 4^2 = 32\pi$$

Masala. Markazi koordinatalar markazida va radiusi *R* ga teng bolgan shar xajmini toping.

Yechish. Bu sharni *R* radiusli doirani *Ox* oqi atrofida aylantirishdan xosil bolgan aylanish jismi deb qaraylik. U xolda $x^2+u^2=R^2$ doira tenglamasidan :

$$u^2=R^2-x^2$$

ekanligini e'tiborga olsak, izlanayotgan xajm



$$V_{шар} = \pi \int_{-R}^{R} y^2 dx = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2) dx = 2\pi \int_0^R \left(R^2 - x^2\right) dx =$$

$$= 2\pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^R = 2\pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Javob: $V_{шар} = \frac{4}{3} \pi R^3$

Xulosa.

Aniq integral ta'rifi keltirilgan. Aniq integraldan foydalanib figuralar yuzasi va xajmini hisoblash usullari keltirilgan.

Tayanch iboralari.

Aniq integral, chegara, soxa yuzasi, figuralar yuzasi va xajmi.

Takrollash uchun savollar.

6. Aniq integral bilan yuzlarni hisoblash formulasini yozing.
7. Aniq integralni taqribiy hisoblash formulasini yozing.
8. Aniq integral bilan xajmlarni hisoblash formulasini yozing..

Asosiy adabiyotlar.

1. T.A.Azlarov, X. Mansurov «Matematika analiz», T., «O'qituvchi». 1-qism 1986 y., 2-qism 1989 y.
2. T.J.Jurayev , G.Xudoyberganov, A.K.Vorisov, X.Mansurov «Oliy matematika asoslari», I , II qismlar., T., 1999 y.
3. Vinogradov I.M. «Elemento vosshey matematiki» M. 1999 y.

Qo'shimcha adabiyotlar:

1. Soatov Y. U. «Oliy matematika» 1 va 2-jildlar, T., «O'qituvchi», 1992 y., 1994 y.
2. Danko P.Y., PopovaA.T. Kojevnikova T.Y. «Vosshaya matematika v uprajneniyax i zadachax»,M., Vosshaya shkola. 1998 y.
3. Zaysev I.A. «Vosshaya matematika», M. 1998 y.
4. Bavrin I.I. «Obxiy kurs vosshey matematiki» M. 1995 y.

32-mavzu. Aniq integralning ba'zi tadbiqlari.

Reja:

32.1. Aniq integralni taqribiy hisoblash
32.2. Xosmas integrallar.
32.3. Aniq integral ërdamida turli masalalarni yechish

32.1. Aniq integralni taqribiy hisoblash

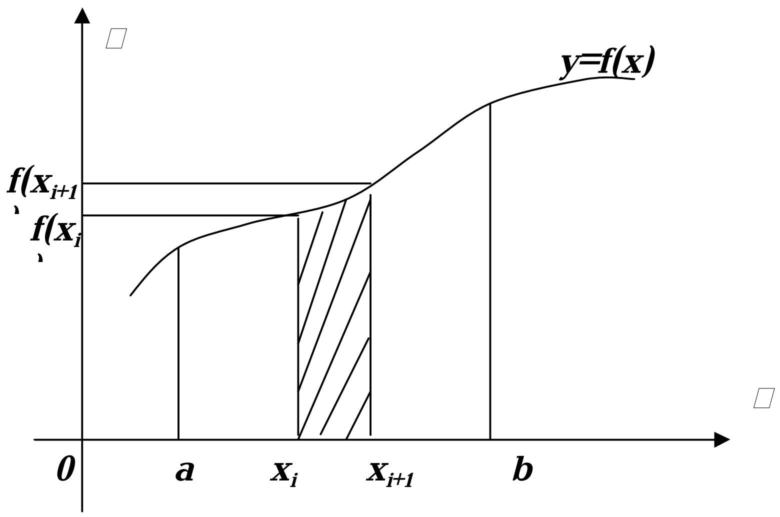
Endi aniq integralni taqribiy hisoblash masalasini koraylik.

Shuni ta'kidlash lozimki, uzluksiz bolgan xar qanday funksiya uchun Nyuton-Leybnits formulasini qollay olmaymiz, chunki, bu formulani qollash uchun, $y = f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasini bilishimiz kerak. Lekin uzluksiz bolgan kopgina funksiyalarning boshlang'ich funksiyalarini, ya'ni aniqmas integrallarni xar doim xam chekli qadamda integrallay olmaymiz.

Masalan $\int \frac{\sin x}{x} dx$ integral shundaylardan biridir.

Shunga o'xshash integrallarni hisoblashda taqribiy hisoblash formulalarni qollash mumkin. Shunday formulalardan bari, trapetsiyalar formulasini keltiramiz.

$[a,b]$ oraliqda $y = f(x)$ funksiya uzluksiz va $f(x) \geq 0$ bolsin. U xolda $\int_a^b f(x)dx$ integral $y = f(x)$, $x = a, x = b$ va $y = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiya yuzini beradi.



$\int_a^b f(x)dx$ integralni hisoblashda $[x_i, x_{i+1}]$ bolakka mos keluvchi $y = f(x)$ egri chiziq bolagini, $(x_i, f(x_i))$ va $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ nuqtalarni birlashtiruvchi tog'ri chiziq bilan almashtirsak, izlayotgan egri chiziqli trapetsiya yuzining $[x_i, x_{i+1}]$ oraliqka mos keluvchi bolgan trapetsiya bilan almashtirgan bolamiz. Bu trapetsiya yuzini S_i desak, bu yuza

$$S_i = \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

tenglik orqali topiladi. x_i nuqtalarni shunday tanlab olaylikki, $[a,b]$ oraliq bu nuqtalar bilan teng n ta bolakka bolinsin, ya'ni $x_{i+1} - x_i = \dfrac{b-a}{n}$ bolsin.

U xolda

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_0 + S_1 + S_2 + \ldots + S_{n-1}$$

taqribiy tenglikni xosil qilamiz. Demak

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_0 + S_1 + \ldots + S_{n-1} = \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \ldots + \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\right] =$$

$$= \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + f(x_i) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})\right]$$

tenglik o'rinli bolar ekan. Bu formulada, $h = \dfrac{b-a}{n}$ belgilash kiritsak,

$x_0 = a,\ x_i = x_0 + ih,\ i = 1,2,\ldots,n$ tengliklar o'rinli bo'ladi. $x_0 = a$ va $x_n = b$ ekanligidan

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n - 1)\right)$$

formulani xosil qilamiz. Bu formula aniq integralni hisoblashning trapetsiyalari formulasi deyiladi. Bu formulada xatolikni kamaytirish uchun n ni yetarlicha katta olish hisobiga erishish mumkin. Xatolikni baxolash uchun ma'lum tengsizliklardan foydalaniladi.

32.2. Xosmas integrallar.

$[a,b]$ oraliqda $y = f(x)$ funksiyalar uchun kiritilgan aniq integral tushunchasida, $f(x)$ funksiya va $[a,b]$ oraliqning chegaralangan bolishligi kerak edi.

Endi aniq integral tushunchasini bu chegaralashlardan xoli bolgan funksiya va oraliqlar uchun kiritishni qaraymiz. Bunday integrallar xosmas integrallar deyiladi.

Cheksiz oraliq uchun aniq integral tushunchasi. $f(x)$ funksiya $[a,+\infty]$ oraliqda berilgan bolib, istalgan $a \le t$ uchun $[a,t]$ oraliqda integrallanuvchi bolsin. U xolda istalgan $a \le t$ uchun $\Phi(t) = \int_a^t f(x)dx$ funksiya aniqlangan bo'ladi.

1-ta'rif. $f(x)$ funksiyaning $[a,+\infty]$ oraliqdagi xosmas integrali $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ deb quyidagi $\lim_{t\to+\infty} \Phi(t)$ limitga aytiladi, ya'ni

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)dx .$$

Agar bu limit mavjud va chekli bo'lsa, xosmas integral yaqinlashuvchi, aks xolda uzoqlashuvchi deyiladi.

Xuddi shuningdek $\int_{\infty}^{a} f(x)dx$ xosmas integralni ta'riflash mumkin. $(-\infty,+\infty)$ oraliqdagi xosmas integral esa quyidagicha aniqlanadi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx .$$

Agar bu integrallardan birontasi uzoqlashuvchi bo'lsa $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integral uzoqlashuvchi deyiladi.

Masalan,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1 .$$

Endi $[a,b]$ oraliqda chegaralanmagan funksiya uchun xosmas integral tushunchasini kiritamiz. $y = f(x)$ funksiya $[a,b)$ oraliqda uzluksiz bolib, $\lim_{x\to b-0} f(x) = \infty$ bolsin.

2-ta'rif. $\lim_{\delta\to+0} \int_a^{b-\delta} f(x)dx$ limit qiymati $y = f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ oraliqdagi xosmas integrali deyiladi. Agar bu limit mavjud va chekli bo'lsa, xosmas integral yaqinlashuvchi aks xolda uzoqlashuvchi deyiladi.

Limit qiymati $\int_a^b f(x)dx$ shakldа belgilanadi, ya'ni

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to+0} \int_a^{b-\delta} f(x)dx$$

Xuddi shunga oxshash $(a,b]$ oraliqda uzluksiz va $\lim_{x\to a+0} f(x) = \infty$ bolgan $y = f(x)$ funksiya uchun xosmas integral ta'rifini keltiramiz.

(a,b) intervalda uzluksiz, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$ va $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=\infty$ bolgan funksiya uchun $\int_a^b f(x)dx$ ga xosmas integral deb ataladi va u quyidagi tenglik orqali aniqlanadi:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

bu yerda c, $a < c < b$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi biror son.

Misol.

1. $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{1dx}{x^\alpha dx} = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{t^{\alpha-1}}-1\right) = \begin{cases} +\infty, & агар\ \alpha<1 \\ \dfrac{1}{\alpha-1}, & агар\ \alpha>1 \end{cases}$$

Demak, $\alpha<1$ da integral uzoqlashuvchi, $\alpha>1$ bo'lsa yaqinlashuvchi bo'ladi $\alpha=1$ da

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{1}{x}dx = \lim_{t\to+\infty}\ell n = +\infty$$

bolgani uchun, yuqoridagi integral $\alpha\le 1$ da uzoqlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

$$\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^\alpha}dx = \lim_{\delta\to+0}\int_0^{1-\delta}\frac{1}{(1-x)^\alpha}dx = \lim_{\delta\to+0}\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{\delta^{\alpha-1}}-1\right) = \begin{cases} +\infty, & агар\ \ \alpha>1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha}, & агар\ \alpha<1 \end{cases}$$

Demak, $\alpha>1$ bolganda xosmas integral uzoqlashuvchi $\alpha<1$ da yaqinlashuvchi bo'ladi. $\alpha=1$ da

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x}dx = \lim_{\delta\to+0}\int_0^{1-\delta}\frac{1}{1-x}dx = \lim_{\delta\to+0}(-\ell n\delta) = +\infty$$

bolgani uchun, yuqoridagi integral $\alpha\ge 1$ da uzoqlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

32.3. Aniq integral yordamida turli masalalarni yechish

$[a,b]$ oraliqda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uzluksiz bolib, $g(x)\le f(x)$ tengsizlik o'rinli bolsin. $x=a,\ x=b$ va $f(x)$, $g(x)$ funksiyalar bilan chegaralangan soxa S -yuzini hisoblash uchun quyidagi formula o'rinli bo'ladi

$$S=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$$

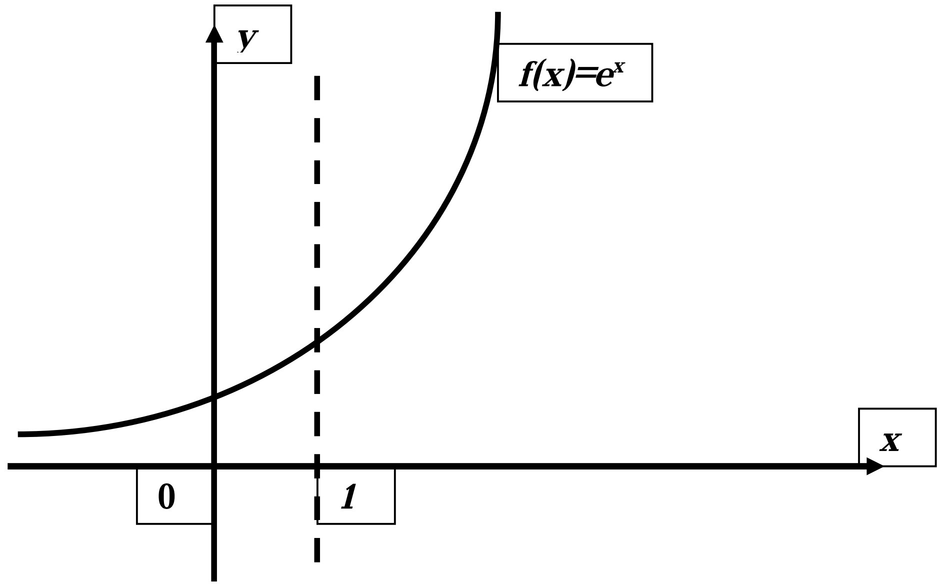
Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda berilgan va uzluksiz bolsin. Bu funksiya grafigi biror AV yoyni ifodalasin. U xolda bu yoyning uzunligi aniq integral yordamida quyidagi formula yordamida topiladi:

$$l=\int_a^b \sqrt{1+f^{/2}}(x)$$

Masala-1. ***f(x)qe^x***funksiyasining $0 \le x \le 1$ oraliqqa tegishli yoyining uzunligi topilsin.

Yechish. Yuqoridagi $l=\int_a^b \sqrt{1+f^{/2}}(x)$ formulaga asosan, izlanayotgan yoy uzunligi $f^l(x)qe^x$ ekanligidan

$$l=\int_0^1 \sqrt{1+(e^x)^2}dx=\int_0^1 e^x dx=e^x\Big|_0^1=e-1$$

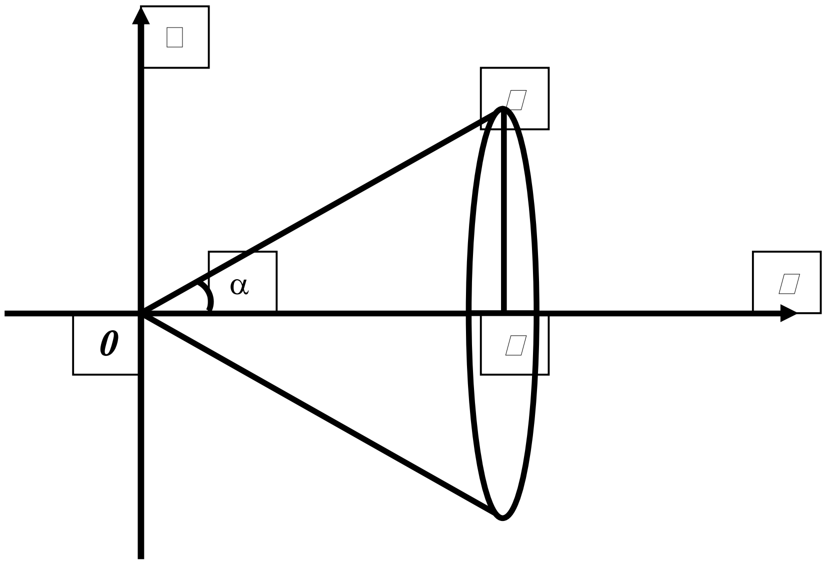


$[a,b]$ oraliqda $f(x)$ funksiya uzluksiz bolib, $f(x) \ge 0$ bolgan $y=f(x)$ funksiya grafigini OX oqi atrofida aylanitirishdan, xamda XYZ fazodagi $x=a$ va $x=b$ tekisliklar bilan chegaralangan aylanma jismning xajmi:

$$V_{айл\ .жисм}=\pi\int_a^b f^2(x)dx$$

Masala-4. Tog'ri doiraviy konus ya'ni, tog'ri burchakli *OAR* uchburchakni *Ox* oqi atrofida aylanishidan xosil bolgan jism xajmini toping.

Yechish.



Bunda $|OP| = H$, $|PA| = R$ deb olamiz. U xolda ***OA*** tog'ri chiziq tenglamasi:

Y=kx=tgαx=(PA/OP)x=(R/H)x bundan

$$V_{конус} = \pi \int_0^H \left(\frac{R}{H} x \right)^2 dx = \pi \frac{R^2}{H^2} \int_0^H x^2 dx = \pi \frac{R^2}{H^2} \frac{x^3}{3} \Bigg|_0^4 =$$

$$= \pi \frac{R^2}{H^2} \cdot \frac{H^3}{3} = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

Javob: $V_{конус} = \dfrac{1}{3} \pi R^2 H$

O'zgarmas ***v*** tezlik bilan tog'ri chiziqli xarakat qilayotgan jismning ***t*** vaqt ichida bosib otgan yoli

$$S=vt$$

formula bilan aniqlanadi.

Agar jism notekis xarakat qilayotgan bo'lsa, uning tezligi t vaqtga boqliq ravishda ozgaradi, ya'ni $v=f(t)$

bu formulaga kora $t = t_1$ dan $t = t_2$ gacha vaqt oralig'ida bosib otilgan yol

$$S = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt$$

formula yordamida aniqlanadi.

Masala-6. Jismning xarakat tezligi $v=(2t^3+t)$ *sm/sek*

tenglama bilan berilgan. Jismning 6 sekund ichida bosib o'tgan yo'lini toping.

Yechish. Yuqoridagi formulaga asosan,

$$S=\int_0^6 (2t^3+t)dt=\left(\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2\right)\Bigg|_0^6=\frac{2}{3}6^3+\frac{1}{2}6^2=162$$

Javob: 162 sm.

Xulosa.

Aniq integraldan foydalanib turli egri chiziqli yuzalarni va aylanish jismlarining xajmlarini xamda fizik masalalarni yechishimiz mumkin ekan.

Tayanch iboralari:

Aniq integral, chegara, soxa yuzasi , yoy uzunligi, paraboloid, aylanish jismi, xajm.

Takrollash uchun savollar

9. Aniq integral yordamida yuzlarni hisoblash formulasini yozing.
10. Aniq integral yordamida xajmlarni hisoblash formulasini yozing.
11. Aniq integral yordamida bosib otilgan yolni hisoblash formulasini yozing
4. Aniq integral yordamida yoy uzunligini hisoblash formulasini yozing

Asosiy adabiyotlar

1. T.A.Azlarov, X. Mansurov «Matematika analiz», T., «O'qituvchi».
1-qism 1986 y., 2-qism 1989 y.
2. T.J.Jurayev , G.Xudoyberganov, A.K.Vorisov, X.Mansurov
«Oliy matematika asoslari», I , II qismlar., T., 1999 y.
3. Bogomolov.N.V. «Prakticheskiye zanyatiya po matematike» M., «Vosshaya shkola» 1990 y.

33-mavzu. Birinchi tartibli eng sodda ko'rinishidagi o'zgaruvchilari ajraladigan bir jinsli differensial tenglamalar.

Reja:

33.1. Differensial tenglama haqida tushuncha.
33.2. Birinchi tartibli differensial tenglamalar.
33.3. Bir jinsli differensial tenglamalar.
33.4. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar.

33.1. Differensial tenglama haqida tushuncha

Erkli o'zgaruvchi x, noma'lum funksiya $y=f(x)(x)$ va bu funksiyaning hosilalarini bog'lovchi tenglama differensial tenglama deyiladi. Differensial tenglamalar XVII asrda mexanika va tabiat fanlarining ba'zi masalalarini yechimini topish extiyojiga karab paydo bulgan.

Masalan, kuyidagicha kurinishdagi differensial tenglamaga keltiriladigan ushbu eng sodda masalani kurib chikaylik:

Agar temperaturasi T ga teng bulgan jism temperaturasi nolga teng bulgan muxitda turgan bulsa, u xolda bu jism temperaturasining Δt vakt oraligida pasayishi $\Delta T = -kT\Delta t$ (bunda kqconst issiklikning tarkalish koeffitsiyenti) formula bilan ifodalanadi. Agar biz bu munosabatda Δt ni nolga intiltirsak, bu jarayon uchun $T^1 = -kT$ kurinishdagi birinchi tartibli differensial tenglama xosil buladi.

Differensial tenglamalar noma'lum funksiya sifatida fakat bir uzgaruvchili funksiya katnashadigan oddiy differensial tenglamalarga va kup argumentli funksiyalar xususiy hosilalari katnashadigan xususiy hosilali differensial tenglamalarga bulinadi. Biz kuyida noma'lum funksiya sifatida fakat bir uzgaruvchili funksiya katnashadigan oddiy differensial tenglamalar bilan tanishib chikamiz. Bunday tenglamalar umumiy holda quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$F\,(x, y, y^1, \dots , y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

(1) tenglamada qatnashgan noma'lum funksiya hosilalarining eng yuqori tartibi differensial tenglamaning *tartibi* deyiladi. Demak (1) tenglama n-tartiblidir. Masalan, $xdy=2ydx$ yoki $y^1=5x$, $y^{1=}4x+1$ tenglamalar differensial tenglamalardir.

Agar $y = \varphi(x)$ funksiya va uning hosilalarini (1) tenglamaga qo'yganda uni to'g'ri ayniyatga aylantirsa, ya'ni

$$F\left[x, \varphi(x), \varphi^1(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)\right] \equiv 0$$

bo'lsa, u holda $y = \varphi(x)$ funksiya (1) tenglamaning yechimi deyiladi.

Differensial tenglamaning yechimi cheksiz ko'p buladi. Barcha yechimlarni o'z ichiga olgan yechim differensial tenglamaning umumiy yechimi deyiladi. Masalan, ushbu $y^{=}q2x$ tenglamani qaraylik. $Y=x^2+C$ funksiya uning umumiy yechimi bo'ladi, bunda S - ixtiyoriy o'zgarmas sondir. Chunki, $y=x^2+C$ funksiyani $y^{1=}2x$ tenglamaga qo'ysak, bu tenglama ayniyatga aylanadi.

Agar $y=x^2+C$ yechimda x va u ning o'rniga mos ravishda biror a va v sonlar (boshlang'ich shartlar)ni qo'yib, undan S= $v\text{-}a^2$ qiymatni topib $y=x^2+ (v\text{-}a^2)$ yechim aniqlansa, bu yechimga differensial tenglamaning xususiy yechimi deyiladi.

Agar differensial tenglamaning xar bir tomonini bitta o'zgaruvchiga boglik bulgan biror ifoda bilan bu uzgaruvchi differensialining kupaytmasi kurinishiga keltirish mumkin bulsa, bunday tenglamaga *uzgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama* deyiladi. Masalan, $x=yy^1 \Rightarrow x = y\cdot\frac{dy}{dx} \Rightarrow$ $xdx=ydy$. Bu xolda tenglamani xadlab integrallash usuli yordamida yechimini topish mumkin.

33.2. **Birinchi tartibli differensial tenglamalar.**

Birinchi tartibli differensial tenglamaning umumiy ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$F(x, y, y^1) = 0.$$

Agar bu tenglama u^1 ga nisbatan yechiladigan bo'lsa, unda

$$y^1 = f(x,y) \qquad (2)$$

tenglamaga kelamiz. Bu tenglamaga *hosilaga nisbatan yechilgan differensial tenglama* deyiladi.

Endi (1) tenglamaning xususiy hollarini qaraymiz.

1°. (1) tenglamaning o'ng tomoni faqat x o'zgaruvchiga bog'liq bo'lsin:

$$u'=f(x). \qquad (3)$$

Bu tenglikni integrallab topamiz:

$$Y=\int f(x)dx+C \qquad \text{(C-o'zgarmas son)}$$

Demak, (2) tenglamaning umumiy yechimi

$$Y=\int f(x)dx+C \qquad (4)$$

bo'ladi.

Misol. $u'=2x^2$ tenglamani yeching.

Yechish. Tenglamaning yechimini (3) formuladan foydalanib topamiz:

$$y = \int 2x^2dx + C = \frac{2}{3}x^3 + C.$$

2°. (1) tenglamaning o'ng tomoni faqat u o'zgaruvchiga bog'liq bo'lsin:

Avvaolo, $y' = \frac{dy}{dx}$ ekanini e'tiborga olamiz. So'ngra bu tenglamada u ni erkli o'zgaruvchi, x ni esa u ning funksiyasi bo'lsin deymiz.

Unda

$$\frac{dy}{dx} = f(y) \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}$$

bo'lib, yuqoridagi 1° - holga kelamiz. Qeyingi tenglamaning yechimi

$$x = \int \frac{1}{f(y)}dy$$

bo'ladi.

Misol. $u'=7u^2$ tenglamani yeching.

Yechish. Bu tenglamani ushbu ko'rinishda yozib olamiz:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{7y^2}$$

Bu tenglikda esa

$$dx=\frac{1}{7}\cdot\frac{dy}{y^2}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Uni integrallab topamiz:

$$x=\int\frac{1}{7}\frac{dy}{y^2}+C=\frac{1}{7}\int y^{-2}dy+C=\frac{1}{7}\cdot\frac{-1}{y}+C=-\frac{1}{7y}+C.$$

Demak,

$$y=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{C-x}.$$

3°. (1) tenglamaning o'ng tomoni faqat x o'zgaruvchining hamda faqat u o'zgaruvchining funksiyalari ko'paytmasidan iborat bo'lsin:

$$u'=f(x)\cdot g(y)$$

Bu tenglamani *o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama* deyiladi. Yana $y'=\frac{dy}{dx}$ ekanligini e'tiborga olsak, u holda

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\cdot g(y)$$

bo'ladi. Bu tenglikning ikkala tomonini *dx* ga ko'paytirib va *g(x)* bo'lib, ushbu tenglikka kelamiz:

$$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx.$$

Uni integrallab topamiz:

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+C.$$

Bu integrallar hisoblanib, so'ng u ni x orqali ifodalab berilgan tenglamaning yechimiga kelamiz.

Misol. $u'=xu+x+y+1$ tenglamani yeching.

Yechish. Bu tenglamaning o'ng tomoni uchun

$$xy+x+y+1=x(y+1)+(y+1)=(x+1)(y+1)$$

bo'ladi. Demak,

$$\frac{dy}{dx}=(x+1)(y+1)$$

Bu tenglikning ikkala tomonini *dx* ga ko'paytirsak va $u+1$ ga bo'lsak, unda

$$\frac{dy}{y+1}=(x+1)dx$$

tenglikka kelamiz. Integrallab topamiz:

$$\int\frac{dy}{y+1}=\int(x+1)dx+\ln C,$$

$$\ln(y+1)=\frac{(x+1)^2}{2}+\ln C,\qquad \frac{y+1}{C}=e^{\frac{(x+1)^2}{2}},\qquad y=C\cdot e^{\frac{(x+1)^2}{2}}-1.$$

33.3. **Bir jinsli differensial tenglamalar.**

Ikki o'zgaruvchili *f(x,y)* funksiya uchun ixtiyoriy *t* da

$$f(tx,\ ty)=tf(x,\ y)$$

tenglik bajarilsa, unda *f(x,y) bir jinsli* (aniqrog'i, nolinchi tartibli bir jinsli) *funksiya* deyiladi.

Agar

$$y'=f(x,y) \qquad (5)$$

differensial tenglamaning o'ng tomonidagi *f(x,y)* ifoda bir jinsli funksiya bo'lsa, u holda (5) tenglama *bir jinsli differensial tenglama* deyiladi.

f(x,y) bir jinsli funksiya bo'lsa, u holda ixtiyoriy *t* uchun

$$f(tx,\ ty)=f(x,y)$$

bo'ladi. Xususan, $t=\frac{1}{x}$ bo'lganda

$$f\left(1,\frac{y}{x}\right)=f(x,\ y)$$

bo'ladi va bu holda (1) tenglama quyidagi ko'rinishga keladi:

$$y'=f\left(1,\frac{y}{x}\right)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (6)$$

Bu tenglamani yechish uchun $\frac{y}{x}=u$ deb olamiz. Unda

$$Y=ux,\ y'=(ux)'=u'x+ux'=u'x+u$$

bo'ladi. Bularni (6) tenglikka qo'yib topamiz:

$$u'x+u=\varphi(u).$$

$$u'x=\varphi(u)-u,\quad x\cdot\frac{du}{dx}=\varphi(u)-u.$$

Natijada o'zgaruvchilari ajraladigan ushbu tenglamaga kelamiz:

$$\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x}$$

Uni integrallaymiz:

$$\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}+\ln C,\quad \int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\ln x+\ln C.$$

$$\ln Cx=\int\frac{du}{\varphi(u)-u}.$$

Misol. Ushbu $y'=\frac{y}{x+y}$ tenglamani yeching.

Yechish. Bu tenglamaning o'ng tomonidagi $f(x,y)=\frac{y}{x+y}$ funksiya bir jinsli funksiya. Haqiqatan ham,

$$f(tx, ty)=\frac{ty}{tx+ty}=\frac{ty}{t(x+y)}=\frac{y}{x+y.}$$

Demak, berilgan tenglama bir jinsli differensial tenglama. Bu tenglamani quyidagicha

$$y'=\frac{y}{x+y}=\frac{\frac{y}{x}}{\frac{x+y}{x}}=\frac{\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}} \qquad (7)$$

yozib, so'ng

$$\frac{y}{x}=u$$

deb olamiz. U holda

$$y'=u\cdot x,\ \ y'=u'x+u$$

bo'lib, bularni (7) ga qo'yamiz.

$$x\frac{du}{dx}=-\frac{u^2}{1+u'},\ \ \text{ya'ni}\ \ -\frac{1+u}{u^2}du=\frac{dx}{x}$$

tenglamaga kelamiz. Bundan

$$\int\left(-\frac{1+u}{u^2}\right)du=\int\frac{dx}{x}+\ln C$$

$$\frac{1}{u}-\ln u=\ln x+\ln C,\quad x=y\ln Cy$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa berilgan tenglamaning umumiy yechimidir.

33.4. **Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar.**

No'malum funksiya va uning hosilalariga nisbatan chiziqli bo'lgan ushbu

$$y'+p(x)\cdot y+q(x)=0 \qquad (8)$$

ko'rinishdagi tenglama birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama deyiladi, bunda *r(x)* va *q(x)* uzluksiz funksiyalar.

(8) tenglamaning yechimini

$$Y=u(x)\cdot\vartheta(x)=u\cdot\vartheta$$

ko'rinishda izlaymiz: $y=u\vartheta$ va $y'=(u\cdot\vartheta)'=u'\vartheta\cdot+u\vartheta'$ larni tenglamaga qo'yib topamiz:

$$u'\vartheta\cdot+u\vartheta'+p(x)\cdot u\vartheta\cdot+q(x)=0$$

$$u'\vartheta\cdot+u(\vartheta'+p\cdot\vartheta)+q=0 \qquad (9)$$

Endi ϑ ni shunday tanlaymizki, $\vartheta'+r\cdot\vartheta=q\ 0$ bo'lsin, ya'ni

$$\frac{d\vartheta}{dx}+p\cdot\vartheta=0.\quad \frac{d\vartheta}{\vartheta}=-p(x)dx,$$

$$\ln\vartheta=-\int p(x)dx.$$

$$\vartheta=e^{-\int p(x)dx}$$

bo'lsin. Bu topilgan ϑ ni (9) tenglamaga qo'yamiz va hosil bo'lgan tenglamani yechamiz:

$$u'\cdot e^{-\int p(x)dx+q=0} \qquad , \frac{du}{dx} = -qe^{\int pdx},$$

$$u = -\int q(x)\, e^{\int pdx}\, dx + C.$$

Natijada

$$y = u \cdot \vartheta = e^{-\int pdx}(C - \int qe^{\int pdx} dx).$$

Demak, berilgan (1) tenglamaning umumiy yechimi bunday bo'ladi:

$$y = e^{-\int pdx}(C - \int qe^{\int pdx} dx). \qquad (10)$$

Misol. Ushbu $u' + xu - x^{3=} 0$ tenglamani yeching.

Yechish. Bu birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamadir. Uning yechimini (10) formuladan foydalanib topamiz.
(bunda $r(x)'=x,\ q(x)= -x^3$):

$$y = e^{-\int xdx}(C - \int (-x^3)e^{\int xdx} dx) = e^{-\frac{x^2}{2}}(C + \int x^3 e^{\frac{x^2}{2}} dx) =$$

$$= e^{-\frac{x^2}{2}}(C + x^2 e^{\frac{x^2}{2}} - 2e^{\frac{x^2}{2}}) = Ce^{-\frac{x^2}{2}} + x^2 - 2.$$

Koshi masalasi.

Koshi masalasi differensial tenglamalar nazariyasining asosiy masalalaridan biri bulib, uni birinchi marta fransuz matematigi Koshi batafsil urgangan .

Biror differensial konun va ma'lum boshlangich shartlar bilan xarakterlanadigan jarayonlar Koshi masalasiga olib keladi. Koshi masalasi differensial tenglamaning berilgan boshlangich shartlarni kanoatlantiruvchi yechimini topishdan iboratdir. Masalan, yukoridagi «yemperatura masalasi»dagi $T^1 = -kT$ kurinishdagi birinchi tartibli oddiy differensial tenglama uchun Koshi masalasi tqt_0 bulganda berilgan ushbu kiymatda uning yechimini izlashdan iborat:

$$T^1 = -kT \Rightarrow \frac{dT}{dt} = -kT \Rightarrow dT = -kTdt \Rightarrow \frac{dT}{T} = -kdt \Rightarrow$$

$$\int \frac{dT}{T} = -k\int dt \Rightarrow \ln T = -kt \Rightarrow T = e^{-kt}$$

U xolda jismning temperaturasi $t=t_0$ vaktdan keyin $T = e^{-kt_0}$ ga teng bular ekan.

Xulosa

Differensial tenglama haqida umumiy tushuncha berilib, birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglamalar, birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar va ularni yechish usullari keltirilgan.

Tayanch iboralar:

Differensial tenglama, differensial tenglama tartibi, o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama, chiziqli differensial tenglamabir jinsli differensial tenglama.

Takrorlash uchun savollar

1. Differensial tenglama haqida tushuncha.
2. Birinchi tartibli differensial tenglamalar.
3. Bir jinsli differensial tenglamalar.
4. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar.

Asosiy adabiyotlar

1. T.A.Azlarov, X. Mansurov «Matematika analiz» T., «O'qituvchi» 1 qism 1986 y., 2 qism 1989 y.

2. T.J.Jo'rayev , G.Xudoyberganov, A.K.Vorisov, X.Mansurov «Oliy matematika asoslari», I , II qismlar., T., 1999 y.

3. Shipachev V.S. «Vosshaya matematika», M., «Vosshaya shkola», 1991y.

Qo'shimcha adabiyotlar

1.Soatov ¨.U. «Oliy matematika», 1 va 2-jildlar , T., «O'qituvchi» , 1992y., 1994 y.

2. B. Abdualimov , Sh.Solixov «Oliy matematika qisqacha kursi» , T., «O'qituvchi» , 1981 y.

3. Danko P.Ye., Popova A.T. Kojevnikova T.Ya. «Vosshaya matematika v uprajneniyax i zadachax» M., Vosshaya shkola. 1998 y.

4. Zaysev I.A. Vosshaya matematika. M., 1998 y.

34-mavzu. O’zgarmas koeffitsentli chiziqli differensial tenglamalar.

Reja:

34.1. Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar.
34.2. O’zgarmas koeffitsiyentli ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli tenglamalar.

34.1. Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar**.**

Quyidagi

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = f(x) \qquad (1)$$

ko’rinishdagi tenglama *ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama* deyiladi, bunda $r(x)$, $q(x)$ va $f(x)$ – uzluksiz funksiyalar.

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0 \qquad (2)$$

ko’rinishdagi tenglamaga *ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli tenglama* deyiladi.

Endi (1) va (2) differensial tenglamalarni yechish bilan shug’ullanamiz. Avvalo,

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0 \qquad (4)$$

ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli differensial tenglamani qaraymiz.

1-teorema. Agar $u_1(x)$ va $u_2(x)$ funksiyalar (4) tenglamaning chiziqli erkli xususiy yechimlari bo’lsa, u holda (4) tenglamaning umumiy yechimi

$$y(x) = S_1 y_1(x) + S_2 u_2(x) \qquad (5)$$

bo’ladi, bunda S_1 va S_2 – ixtiyoriy o’zgarmas sonlar
Shuningdek, ikkinchi tartibli

$$y'' + r(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (1)$$

tenglamaning umumiy yechimi haqida ushbu teorema o’rinli.

2-teorema. (1) tenglamaning umumiy yechimi shu tenglama xususiy yechimi bilan (2) tenglamaning umumiy yechimi yig’indisiga teng bo’ladi.

34.2. **O’zgarmas koeffitsiyentli ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli tenglamalar**

Ta’rif. *O’zgarmas koeffitsiyentli bir jinsli differensial tenglama* deb

$$y'' + ry' + qy = 0 \qquad (7)$$

ko’rinishdagi tenglamaga aytiladi, bunda r va q – o’zgarmas haqiqiy sonlar.

Yuqoridagi teoremalarga asosan bu tenglamaning umumiy yechimini topish uchun uning ikkita chiziqli erkli xususiy yechimini topish yetarlidir.
Ushbu tenglamani yechish uchun $y=e^{kx}$, deb faraz qilamiz, bu yerda k – nolga teng bo’lmagan o’zgarmas son.

Hosilalarni topib:

$$y'=ke^{kx}, \qquad y'' = k^2 e^{kx}.$$

Ularni (7) tenglamaga keltirib qo’yamiz:

$$k^2 e^{kx} + rke^{kx} + qe^{kx} = 0 \qquad (8)$$

$e^{kx} \neq 0$ bo'lgani uchun (8) tenglamadan

$$k^2 + pk + q = 0 \qquad (9)$$

hosil bo'ladi. (9) tenglamaga (7) tenglamaning *xarakteristik tenglamasi* deyiladi. (9) tenglama ikkita ildizga ega bo'ladi, ularni k_1 va k_2 bilan belgilaymiz.

Bu yerda quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

1) k_1 va k_2 haqiqiy va bir-biriga teng emas ($k_1 \neq k_2$) bo'lsa *bunda tenglamaning umumiy yechimi:*

$$y = C_1 e^{\kappa_1 x} + C_2 e^{\kappa_2 x};$$

2) k_1 va k_2 haqiqiy va bir-biriga teng ($k_1 = k_2$) bo'lsa *bunda tenglamaning umumiy yechimi:*

$$y = C_1 e^{\kappa_1 x} + C_2 x e^{\kappa_1 x} = e^{\kappa_1 x}(C_1 + xC_2);$$

3) $k_1 = \alpha + i\beta$ va $k_2 = \alpha - i\beta$ kompleks sonlar bo'lsa *bunda tenglamaning umumiy yechimi:*

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

Misol. $u'' - 8u' + 15u = 0$ tenglamaning xarakteristik tenglamasi $k^2 - 8k + 15 = 0$ bo'lib, u $k_1 = 5$ va $k_2 = 3$ ildizlarga ega. Demak, tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$u = S_1 e^{5x} + S_2 e^{3x}$$

Misol. $4u'' - 12u' + 9u = 0$ tenglamaning xarakteristik tenglamasi $4k^2 - 12k + 9 = 0$

bo'lib, uning ildizlari $k_1 = k_2 = \frac{3}{2}$ dir. Demak, tenglamaning umumiy yechimi:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{\frac{3}{2}x}$$

Misol. $u'' - 4u' + 7u = 0$ tenglamaning xarakteristik tenglamasi

$$k^2 - 4k + 7 = 0$$

bo'lib, uning ildizlari $k_1 = 2 + i\sqrt{3}$ va $k_2 = 2 - i\sqrt{3}$ dir. Demak, tenglamaning umumiy yechimi:

$$y = e^{2x}(C_1 \cos \sqrt{3}x + C_2 \sin \sqrt{3}x)$$

Xulosa

Ikkinchi tartibli differensial tenglama haqida umumiy tushuncha berilib, o'zgarmas koeffitsiyentli ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli tenglamalarni yechish usullari keltirilgan.

Tayanch iboralar:

Ikkinchi tartibli differensial tenglama, o'zgarmas koeffitsiyentli ikkinchi tartibli differensial tenglama, xarakteristik tenglama, umumiy yechim.

Takrorlash uchun savollar

1. Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar.
2. O'zgarmas koeffitsiyentli ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli tenglamalar. ifferensial tenglama haqida tushuncha.
3. Xarakteristik tenglamaning umumiy yechimi..

Asosiy adabiyotlar

1. T.A.Azlarov, X. Mansurov «Matematika analiz» T., «O'qituvchi» 1 qism 1986 y., 2 qism 1989 y.
2. T.J.Jo'rayev , G.Xudoyberganov, A.K.Vorisov, X.Mansurov «Oliy matematika asoslari», I , II qismlar., T., 1999 y.
3. Shipachev V.S. «Vosshaya matematika», M., «Vosshaya shkola», 1991y.

Qo'shimcha adabiyotlar

1.Soatov ¨.U. «Oliy matematika», 1 va 2-jildlar , T., «O'qituvchi» , 1992y., 1994 y.
2. B. Abdualimov , Sh.Solixov «Oliy matematika qisqacha kursi» , T., «O'qituvchi» , 1981 y.
3. Danko P.Ye., Popova A.T. Kojevnikova T.Ya. «Vosshaya matematika v uprajneniyax i zadachax» M., Vosshaya shkola. 1998 y.
4. Zaysev I.A. Vosshaya matematika. M., 1998 y.

35-mavzu. Qatorlar.

Qatorlar haqida tushuncha. Sonli qator yig'indisini topish buyicha misollar. Sonli qatorlarning yaqinlashishi yoki uzoqlashishini aniqlash

Reja:

35.1. Qatorlar haqida tushuncha. Sonli qator yig'indisini topish bo'yicha misollar.

35.2. Sonli qatorlarning yaqinlashishi yoki uzoqlashishini aniqlash.

35.1. Qatorlar haqida tushuncha. Sonli qator yig'indisini topish bo'yicha misollar

Sonli qatorlar

1-ta'rif. Sonli $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots,$ ketma-ketlik hadlaridan tuzilgan

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

ifodaga sonli qator deyiladi.

Bu yerda $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ qator hadlari, a_n esa qatorning umumiy hadi deyiladi.

Yuqoridagi ta'rifdan ko'rinadiki qator ma'lum qonuniyat bilan tezilgan cheksizta qo'shiluvchili yig'indi ekan.

Qaralayotgan (1) qatorning chekli sondagi hadlaridan tuzilgan.

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \ldots S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

yig'indilariga shu qatorning xususiy yig'indilari deyiladi.

Agar qator qo'shiluvchilari cheksiztaligini e'tiborga olsak $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ xususiy yig'indilar ham o'z navbatida ketma-ketlikni tashkil etishini ko'ramiz.

2-ta'rif. Agar xususiy yig'indilarning $\{S_n\}$ ketma-ketligi $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ chekli limitga ega bo'lsa, u holda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ yaqinlashuvchi qator, limit S esa qator yig'indisi deyiladi va

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \qquad (2)$$

ko'rinishda yoziladi.

3-ta'rif. Agar $\{S_n\}$ ketma-ketlik chekli limitga ega bo'lmasa (limiti cheksiz yoki mavjud emas), u holda (1) uzoqlashuvchi qator deyiladi.

1-misol . Quyidagi

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

qator tekshirilsin. Avval xususiy yig'indilarni ko'raylik

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}, \; S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3}$$

....

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

Bundan $S=\ell im_{n\to\infty} S_n=\ell im_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n-2})=1<\infty$ hosil qilamiz. Demak

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

yaqinlashuvchi qator bo'lib, yig'indisi $S=1$ ekan.

2-misol. Bizga avvaldan tanish bo'lgan cheksiz geometrik progressiya hadlaridan tuzilgan

$$b+bq+bq^2+\ldots+bq^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}bq^{n-1},(b\neq 0)\quad (3)$$

qatorni ko'raylik.

Uning dastlabki n ta hadlarining yig'indisi

$$S_n=\frac{b+bq^n}{1-q}=\frac{b}{1-q}+\frac{b}{1-q}q^n$$

formula bilan aniqlanadi.

Qaralayotgan qatorga oid tasdiqlar bevosita q ga bog'liqdir.

Haqiqatan,

1) agar $|q|<1$ bo'lsa, $\lim_{n\to\infty}q^n=0$ bo'lgani sababli $S=\ell im_{n\to\infty}S_n=\dfrac{b}{1-q}$

chekli limitga ega bo'lamiz. Ya'ni $|q|<1$ bo'lganda (3) yaqinlashuvchi qator bo'lib, uning yig'indisi $S=\dfrac{b}{1-q}$ formula bilan hisoblanadi.

2) Agar $|q|>1$ bo'lsa $\ell im_{n\to\infty}|q|=\infty$ ekanligi ravshan. Shu sababli, $q<-1$ $\ell im_{n\to\infty}S_n$ mavjud bo'lmaydi, $q>1$ da $\ell im_{n\to\infty}S_n=\infty$ bo'lib, (3) uzoqlashuvchi qator bo'ladi.

3) Agar $q=1$ desak $S_n=b+b+\ldots+b=b\cdot n$ ko'rinishni oladi. Bu holda ham $\ell\mathrm{im}_{n\to\infty}S_n=\infty$, bo'lgani sababli (3) uzoqlashuvchi qator bo'ladi.

4) Agar $q=-1$ deb olinsa (3) qator

$$b-b+b-b+\ldots+(-1)^{n-1}b+\ldots$$

ko'rinishda bo'ladi. Bunday qator uchun $S_n=S_{2m}=0,\ S_n=S_{2m+1}=b,\ (m=1,2,3...)$ bo'lib qolishligi $\ell im_{n\to\infty}S_n$ mavjud emasligini bildiradi. Shuning uchun $q=-1$ bo'lgan holda ham (3) uzoqlashuvchi qator bo'lib chiqadi.

Ta'kidlab o'tamizki, chekli sondagi qo'shiluvchili yig'indidan farqli ravishda qator uchun bunday hollarning bo'lib qolishligi undagi qo'shiluvchilar sonining cheksizta ekanligidadir**.**

Qatorlar nazariyasini bayon qilishni yaqinlashuvchi qatorlarning ba'zi ichki xossalarning keltirishdan boshlaymiz.

Deylik, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\equiv a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$ (1)

qator berilgan bo'lsin. Uning hadlari orqali tuzilgan

$$a_{m+1}+a_{m+1}+...=\sum_{n=m}^{\infty}a_n$$

ko'rinishdagi qatorga (1) qatorning m - qoldig'i deyiladi. U ham o'z navbatida qatordir.

1-teorema**. Agar (1) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, uning har qanday qoldig'i ham yaqinlashuvchi bo'ladi va aksincha qator qoldig'i yaqinlashuvchi bo'lsa, uning o'zi ham yaqinlashuvchi bo'ladi.**

Isboti. Agar (1) qator uchun S_{m+k} xususiy yig'indi olsak

$$S_{m+k}=\sum_{n=1}^{m+k}a_n=\sum_{n=1}^{m}a_n+\sum_{n=m+1}^{m+k}a_n=S_n+S_k^*$$

munosabatni ko'ra olamiz va S_k^* ni m -qoldiq qatorning k -xususiy yig'indisi deb qaraymiz. Teorema shartidagi (1) qator yaqinlashuvchiligidan

$$\ell im_{k\to\infty} S_k^*=\ell im_{k\to\infty}\left[S_{m+k}-S_m\right]=\ell im_{k\to\infty} S_{m+k}-S_m=\ell im_{k\to\infty} S_n-S_m=S-S_m$$

hosil qilamiz. Bundan $\sum_{n=m+1}^{\infty}a_k$ qoldiq qatorning yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi.

Endi qoldiq qator yaqinlashuvchi deb qarasak (buning yig'indisi R_m bo'lsin). U holda,

$$\ell im_{k\to\infty} S_n=\ell im_{k\to\infty} S_{m+k}=\ell im_{k\to\infty}\left[S+S_k^*\right]=S_m+\ell im_{k\to\infty} S_k^*=S_m+R_m<\infty$$

Shuning uchun. Demak, (1) qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

Quyidagi teoremalarni isbotsiz keltirishni lozim topdik.

2-teorema. Agar $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ yaqinlashuvchi qator bo'lib, yig'indisi S bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}ka_n$ qator ham yaqinlashuvchi qator bo'lib, yig'indisi, $k\cdot S$ bo'ladi.

Bu teorema quyidagicha ham talqin qilinadi.

Agar $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ yaqinlashuvchi qator bo'lsa $\sum_{n=1}^{\infty}ka_n=k\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ bo'ladi ya'ni o'zgarmas ko'paytuvchi cheksiz yig'indi belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.

3-teorema. Agar $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ va $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ yaqinlashuvchi qatorlar bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$ qatorlar ham yaqinlashuvchi qatorlar bo'lib, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\pm\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Bu teorema sharti bajarilsa qo'shilayotgan qatorlar soni cheklita bo'lganda ham uning o'rinli ekanligini ko'rsatish mumkin.

4-teorema. Agar $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ yaqinlashuvchi qator bo'lsa, had nomeri cheksiz o'sib borganda qatorning umumiy hadi a_n nolga intiladi, ya'ni $\ell im_{n\to\infty} a_n=0$ bo'ladi.

Isboti. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ yaqinlashuvchi bo'lgani uchun $\ell im_{n\to\infty} S_n=S$. Yana $\ell im_{n\to\infty} S_{n-1}=S$ deya olamiz.

Agar $S_n-S_{n-1}=a_n$ tenglikni e'tiborga olsak

$$\ell im_{n\to\infty} a_n=\ell im_{n\to\infty}[S_n-S_{n-1}]=\ell im_{n\to\infty} S_n-\ell im_{n\to\infty} S_{n-1}=S-S=0$$

Natija. Agar (1) qator uchun $\ell im_{n\to\infty} a_n = 0$ shart bajarilmasa, u holda bunday qator uzoqlashuvchi qator bo'ladi.

Misol. $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n^2})$ uzoqlashuvchi qatordir, chunki $\ell im_{n\to\infty} a_n = \ell im_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2}) = 1 \neq 0$

Ta'kidlab o'tamizki $\ell im_{n\to\infty} a_n = 0$ bo'lishligi qator yaqinlashishining faqat zaruriy shartidir. Ya'ni $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yaqinlashuvchi bo'lsa, $\ell im_{n\to\infty} a_n = 0$ bo'ladi. Lekin $\ell im_{n\to\infty} a_n = 0$ bo'lganda har doim ham $\sum_{n=\infty}^{n} a_n$ yaqinlashuvchi qator bo'lavermaydi.

Masalan, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{4}+\cdots$ garmonik qator uchun $\ell im\, a_u = \frac{1}{n} = 0$ shart bajarilsa-da, bu garmonik qator uzoqlashuvchi qatordir. (Biz bu tasdiqning isbotini keyinrok keltiramiz).

Agar asosiy maksadimiz yaqinlashuvchi qatorlarni va ularning yig'indisini aniqlashdir deb hisoblasak, bundan buyon $n \to \infty$ da umumiy hadi nolga intiladigan $\ell im_{n\to\infty} a_n = 0$ qatorlar bilan ish ko'rishligimiz ayon bo'lib chiqadi.

Agar qator yaqinlashishi va uzoqlashishi haqidagi ta'riflarga e'tibor bersak, bunday masalaga $\ell im_{n\to\infty} S_n$ ni tekshirish orqali javob olgan bo'lamiz. Lekin ta'kidlash lozimki har qanday qator uchun ham S_n xususiy yig'indini tekshirishga qulay ko'rinishga keltirib bo'lavermaydi. Xatto S_n ning ifodasini kutilgan ko'rinishga keltirib olinganda ham $\ell im_{n\to\infty} S_n$ limitni hisoblash ma'lum qiyinchiliklarga ega bo'ladi.

Shunday qiyinchiliklardan qutilish maqsadida ham qatorlar nazariyasi qurilgan.

Musbat hadli qatorlar

Ta'rif. Agar barcha $n = 1,2,3,\ldots$ lar uchun $a_n > 0$ bo'lsa, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ musbat hadli qator deyiladi.

Bizga ikkita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ musbat hadli qatorlar berilgan bo'lsin.

5-teorema. Agar barcha $n = 1,2,3,\ldots$ lar uchun $a_n \le b_n$, bo'lib $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ yaqinlashsa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yaqinlashuvchi qator bo'ladi.

Isboti. Qatorlarning xususiy yig'indilarni

$$S_{a_n} = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n$$

$$S_{b_n} = b_1 + b_2 + \ldots\ldots. + b_n$$

deb belgilaylik. Teorema shartiga ko'ra $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ yaqinlashuvchi, ya'ni $\ell im_{n\to\infty} S_{b_n} = S_b$

mavjud. Hamda $S_{a_n} \le S_{b_n} \le S_b$ o'rinlidir. Bundan $\{S_{a_n}\}$ monoton o'suvchi ketma-ketlik bo'lib, yukoridan chegaralangan ketma-ketlik bo'lib chiqqanligini aniqlaymiz. Ma'lumki har qanday chegaralangan monoton o'suvchi ketma-ketlik chekli limitga egadir. Shu sababli $\lim\limits_{n\to\infty} S_{a_n} = S_a < \infty$ mavjud bo'ladi.

Demak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ yaqinlashuvchi qator ekan. Teorema isbot qilindi.

Misol. Quyidagi:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+\cdots+\frac{1}{n^n}+\cdots$$

qator yaqinlashuvchi qatoridir. Haqiqatdan agar:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

qatorni olsak, bu qatorlar uchun

$$\frac{1}{n^n} \le \frac{1}{2^n};(n=1,2,3\cdots)$$

ekanligini ko'ramiz. Ya'ni keyingi qator ikkinchi hadidan boshlab, birinchi hadi $\frac{1}{2^2}$ va maxraji $q=\frac{1}{2}$ bo'lgan, cheksiz kamayuvchi geometrik progresiyaning barcha hadlari yig'indisidan iborat. Shu sababli bu qator yaqinlashuvchi qator bo'lib yig'indisi $1+\dfrac{\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2}}=1\frac{1}{2}$ ga tengdir.

6-teorema. Agar barcha $n=1,2,3,\ldots$ lar uchun $a_n \le b_n$ bo'lib, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ uzoqlanuvchi bo'lsa, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ham uzoqlashuvchi qator bo'ladi.

Misol. Quyidagi

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots$$ qator tekshirilsin.

Biz $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ garmonik qatorni olaylik $n=1,2,3,\ldots$ bo'lganda $\frac{1}{n} \le \frac{1}{\sqrt{n}}$ ekanligini ko'ramiz, hamda garmonik qator uzoqlashuvchi qatordir. Shuning uchun teoremaga asosan berilgan qator uzoqlashuvchidir.

35.2. Sonli qatorlarning yaqinlashishi yoki uzoqlashishini aniqlash.

Qator yaqinlashishi yoki uzoqlashishini boshqa qatorlarga solishtirmasdan, balki uning hadlaridan tuzilgan ba'zi ko'rinishdagi ifodalarning $n \to \infty$ dagi limitga qarab aniqlovchi alomatlar ishlab chiqilgan. Shulardan ba'zilarini keltirib o'tamiz.

Dalamber alomati. Aytaylik $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ musbat hadli qator bo'lib $\ell im \frac{a_{n+1}}{a_n} = b$ limit mavjud bo'lsin.

U holda:

1) ***agar*** $b < 1$ ***bo'lsa, qator yaqinlashuvchi;***

2) ***agar*** $b > 1$ ***bo'lsa, qator uzoqlashuvchi bo'ladi.***

Isboti. Teorema shartiga ko'ra

$$\ell im_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = b$$

Ya'ni har qanday yetarlicha kichik musbat ε-son olinmasin, shunday n_0 topiladiki undan kichik bo'lmagan n lar uchun

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - b \right| < \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu tengsizlikni

$$b - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < b + \varepsilon \quad \text{ko'rinishda yozamiz.}$$

Endi teoremadagi hollarni ko'rib chiqamiz.

1) $b < 1$ bo'lsin. Biz ε sonni shunday tanlab olamizki $b + \varepsilon < 1$ shart bajariladi. Agar $b + \varepsilon = q$ desak $0 < q < 1$ bo'ladi. O'z navbatida $n \geq n_0$ lar uchun $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ ya'ni $a_{n+1} < a_n q$ tengsizlikka ega bo'lamiz.

Buni $n = n_0,\ n_0 + 1,\ n_0 + 2, \ldots$ lar uchun qo'llasak

$$a_{n_0+1} < a_{n_0} q$$

$$a_{n_0+2} < a_{n_0+1}\, q < a_{n_0} q^2$$

$$a_{n_0+3} < a_{n_0+2} q < a_{n_0} q^3$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

tengsizliklarni hosil qilamiz. Endi qaralayotgan qatorning

$$a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + a_{n_0+3} + \cdots$$

n - qoldig'ini qarasak, uning hadlari

$$a_{n_0} q + a_{n_0} q^2 + a_{n_0} q^3 + \cdots$$

geometrik progressiyaning mos hadlaridan kichikdir. Bu qator $0 < q < 1$ bo'lgani sababli yaqinlashuvchi qatordir. U holda solishtirish teoremasiga ko'ra n_0 - qoldiq qator va undan esa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

1) Endi $b > 1$ bo'lsin. Biz $\varepsilon > 0$ shunday tanlab olamizki $b - \varepsilon > 1$ bo'ladi. U holda $n \geq n_0$ lar uchun $a_{n_0} < a_{n_0+1} < a_{n_0+2} < \cdots$ bo'lishligini aniqlaymiz.

Bu munosabatlar qarayotgan musbat qator hadlari o'sib borishligini, hamda $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ekanligini ko'rsatadi. Bu esa qator yaqinlashining zaruriy sharti bajarilmayotganligini bildiradi. Demak $b>1$ bo'lganda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ uzoqlashuvchi qator ekan.

Eslatma. Agar $b=1$ bo'lib qolsa, shunday qatorlar uchraydiki ularning ba'zilar yaqinlashuvchi bo'lsa, ba'zilari uzoqlashuvchi bo'ladi.

Demak, Dalamber alomatini $b=1$ da qo'llab bo'lmaydi.
Bunday hollarda qatorni boshqa alomatlar yordamida tekshirish kerak.

Misollar:

1) Quyidagi $1+\frac{1\cdot 2}{1\cdot 3}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5}+\cdots$ qatorni yaqinlashuvchilikka tekshiring.

Yechish: Qatorning umumiy hadi

$$a_n = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot .....\cdot n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot .....\cdot (2n-1)} = \frac{n!}{(2n-1)!!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(2n+1)!!}\cdot\frac{(2n-1)!!}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)}{(2n-1)!!(2n+1)}\cdot\frac{(2n-1)!!}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

Demak berilgan qator yaqinlashuvchi ekan.

2) Garmonik qator $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ tekshirilsin.

Yechish Bu yerda:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n}{1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$$

Ya'ni $b=1$. Eslatmaga asosan bu qatorni boshqa usul bilan tekshirish kerak bo'ladi.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}$ qator tekshirilsin.

Yechish: Bu yerda

$$a_n = \frac{3^n}{n};\ a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{n+1} \quad \text{va} \quad \lim_{n\to 0}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 3n}{n+1}\cdot\frac{n}{3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n+1} = 3\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 3 > 1$$

Shu sababli Dalamber alomatiga ko'ra qator uzoqlashadi,

4) $\sum\frac{1}{n(n+1)}$ qator tekshirilsin.

Yechish: Bu qatorda

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)},\ a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad \text{va} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{n}} = 1$$

Lekin bu qatorning yaqinlashuvchi ekanligini bevosita qator yaqinlashishi ta'rifidan ham keltirib chikarish mumkin.

Haqikatdan:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{n+1}\right] = 1 = S$$

chekli son. Ya'ni $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ yaqinlashuvchi qator va yig'indisi $S=1$.

Koshi alomati. Agar $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ qatorda $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$.

Limit mavjud bo'lsa u holda: $q<1$ bo'lganda qator yaqinlashuvchi, $q>1$ bo'lganda qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Bu yerda ham $q=1$ bo'lib qolsa, qator yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligi ochiq qoladi.

Misollar:

1) $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln^2 3}+\frac{1}{\ln^3 4}+\cdots$ qator tekshirilsin.

Yechish: Qatorning umumiy hadi.

$$a_n=\frac{1}{\ln^n(n+1)} \quad \text{ko'rinishga ega.}$$

Bundan:

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\ln^n(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}=0<1$, demak berilgan qator yaqinlashuvchi ekan.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(4n-1)}{(n+2)}\right)^n$ qator tekshirilsin.

Yechish:

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n-1}{n+2}=4>1$, ya'ni berilgan qator uzoqlashuvchi.

Koshining integral alomati.

Agar $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ sonli qator berilgan bo'lsa, uning umumiy hadini natural sonlar to'plamida aniqlangan $a_n=f(n)$ funksiya deb qarash mumkin, ya'ni

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}f(n).$$

Shu $f(x)$ funksiyani $[1,\infty)$ oraliqda qaraylik.

7-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $x\geq 1$ bo'lganda musbat uzluksiz funksiya bo'lib, $\int_1^{\infty}f(x)dx$ xosmas integral chekli qiymat qabul qilsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ yaqinlashuvchi qator bo'ladi va shu xosmas integral uzoqlashsa, qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

Misollar:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ qatorning yaqinlashuvchi ekanligi ko'rsatilsin.

Yechish: Qatorning umumiy hadi $a_n=f(n)=\frac{1}{n^2}$ ko'rinishga ega.

Qatorga mos xosmas integralni hisoblaymiz.

$$\int_1^{\infty}f(x)dx=\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{N\to\infty}\int_1^{N}\frac{dx}{x^2}=\lim_{N\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\Big|_1^N\right]=\lim_{N\to\infty}\left[-\frac{1}{N}+1\right]=1<+\infty$$

Demak: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ yaqinlashuvchi qatordir.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ garmonik qatorning uzoqlashuvchi ekanligi ko'rsatilsin.

Yechish: Qatorning umumiy hadi, $a_n = f(n) = \frac{1}{n}$

Bunga ko'ra:

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx = \lim_{N\to\infty}\int_1^{\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{n\to\infty}\left[\ln x\int_1^N\right] = \lim_{N\to\infty}[\ln N + 0] = \infty$$

Haqiqatdan, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ garmonik qator uzoqlashuvchi qator ekan.

Ishorasi almashuvchi qatorlar

Agar $\{a_n\}$ ketma-ketlik elementlari musbat bo'lsa

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots\ldots \qquad (1)$$

ko'rinishidagi qator ishorasi almashuvchan qator deyiladi.

Leybnits teoremasi. Agar (1) ishorasi almashuvchan qatorda $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots\ldots.. > a_n > \ldots\ldots.$ bo'lib, uning umumiy hadi nolga intilsa ($\lim_{n\to\infty} a_n = 0$), u holda u yaqinlashuvchi qator bo'ladi.

Isboti. Agar $\lim_{n\to\infty} S_n$ chekli limit ekanligini ko'rsata olsak teorema o'rinligi kelib chiqadi. Bu ishni quyidagicha amalga oshiramiz.

Avval: S_{2m} xususiy yig'indini olib, uni

$$S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2m-1} - a_{2m})$$

ko'rinishda yozib olaylik. Teorema shartidan

$a_{k-1} - a_k > 0$ va $S_{2m} > 0$ ekanligini hamda m o'sishi bilan S_{2m} ham o'suvchiligini aniqlaymiz.

Shu bilan birga endi S_{2m} yig'indisining

$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}$

ko'rinishidan $S_{2m} < a_1$ ekanligini aniqlaymiz.

Shunday kilib $\{S_{2m}\}$ yuqoridan chegaralangan monoton o'suvchi ketma-ketlik ekan.

Bunday S_{2m} ketma-ketlik $m \to \infty$ da chekli S limitga ega bo'ladi, ya'ni $\lim_{m\to\infty} S_{2m} = S$.

Endi $S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$ tenglikni va teoramaning $\lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = 0$ shartini hisobga olsak,

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = S + 0 = S$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Shunday qilib n juftmi yoki toqmi $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ chekli yechimi mavjud. Demak (1) yaqinlashuvchi qatordir.

Misollar:

1) Quyidagi

$$\frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \cdots$$

qator yaqinlashuvchi qatordir. Chunki,

1) $\frac{1}{3} > \frac{2}{9} > \frac{1}{9} > \frac{4}{81} > \cdots$

2) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3^n} = 0$

2) Ushbu

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

qatorda Leybnits teoremasi shartlari bajarilgani sababli, u ham yaqinlashuvchi qator bo'ladi.

Lekin bu qatorlarning bir-biridan ajralib turuvchi xossalari borki, ularni biz keyinroq keltiramiz.

Absolyut va shartli yaqinlashuvchi qatorlar.

Bizga hadlari ixtiyoriy ishorali sonlardan tashkil topgan,

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

shu qator hadlari modullaridan iborat bo'lgan,

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n| + \cdots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \qquad (2)$$

qator tuzaylik.

8-teorema. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ qator yaqinlashuvchi bo'lsa,

u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Isboti. Yordamchi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) = (a_1 + |a_1|) + (a_2 + |a_2|) + \cdots \qquad (3)$$

qatorni ko'raylik.

Modul xossasiga ko'ra

$$0 < a_n + |a_n| \le 2|a_n|, n = 1,2,3,\cdots$$

bo'lib, teorema shartidagi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ yaqinlashuvchiligiga asosan $\sum_{n=1}^{\infty} (2|a_n|)$ qator ham yaqinlashuvchi qator bo'ladi. O'z navbatida solishtirish teoremasiga ko'ra (3) qator yaqinlashuvchiligini aniqlaymiz. Endi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

tenglikdan qaralayotgan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashishi kelib chiqadi.

Teskari tasdiq o'rinli emas.

Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yaqinlashuvchi bo'lsa $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ bo'lishi shart emas. U uzoqlashuvchi qator bo'lib qolishi mumkin.

Shunday holatlar bo'ladiki $\sum a_n$ yaqinlashuvchi, lekin $\sum |a_n|$ uzoqlashuvchi bo'ladi.

Bunday hollarni tartibga keltiruvchi quyidagi tushunchalar kiritiladi.

4-ta'rif. Agar berilgan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator ham uning hadlari modullaridan tuzilgan qator ham yaqinlashuvchi bo'lsa, $\sum a_n$ absolyut yaqinlashuvchi qator deyiladi.

5-ta'rif. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yaqinlashuvchi qator bo'lib, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ uzoqlashuvchi bo'lsa, berilgan qator shartli yaqinlashuvchi qator deyiladi.

Misollar:

1) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\cdots$ qator tekshirilsin.

Yechish. $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ qator maxraji $q=\frac{1}{2}<1$ bo'lgan cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyaning barcha hadlari yig'indiisi sifatida yaqinlashuvchi qatordir. Demak,

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots$$

absalyut yaqinlashuvchi qator bo'ladi.

2) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\equiv\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ qator tekshirilsin.

Yechish. Bu qator ishorasi almashuvchan qator bo'lib, Leybnits teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. Ya'ni yaqinlashuvchi qator.

Lekin, uning hadlari modullaridan tuzilgan:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

qator garmonik qator bo'lib, uning uzoqlashuvchi qator ekanligi bizga ma'lum.

Shu sababli $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ shartli yaqinlashuvchi qator ekan.

Misollar. Quyidagi qatorlarning absalyut yoki shartli yaqinlashishi aniqlang.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2^n-1)^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

Xulosa

Qatorlar musbat xadli, ishora almashinuvchi, absolyut va shartli yakinlashuvchi katorlarga ajratib tula keltirgan va misollar keltirilgan.

Tayanch iboralari

Qator, yaqinlashuvchi qator, musbat xadli kator, funksional va darajali katorlar.

Takrorlash uchun savollar

1. Musbat xadli katorlar yakinlashish xakidagi solishtirish teoremalarini ayting.
2. Yakinlashuvchi katorlar uchun Dalamber teoremasi.
3. Koshi teoremasini ayting.
4. Koshining integral alomatini ayting.
5. Leybnits teoremasini ayting, misollar keltiring

6. Absalyut yakinlashuvchi katorga misol keltiring.
7. Shartli va absolyut yakinlashishlarni tushintiring.

Asosiy adabiyotlar

1. T.A.Azlarov, X. Mansurov «Matematika analiz» T., «Ukituvchi» 1-kism 1986 y., 2-kism 1989 y.
2.T.J.Jurayev , G.Xudoyberganov, A.K.Vorisov, X.Mansurov «Oliy matematika asoslari», I , II kismlar., T., 1999 y.
3. Shipachev V.S. «Vosshaya matematika», M., «Vosshaya shkola», 1991y.
4. Vinogradov I.M. «Elemento vosshey matematiki», M., 1999 y.

Qo'shimcha adabiyotlar

1.Soatov Yo.U. «Oliy matematika», 1 va 2- jildlar , T., «O'qituvchi» , 1992y., 1994 y.
2.B. Abdualimov , Sh.Solixov «Oliy matematika kiskacha kursi» , T., «O'qituvchi» , 1981 y.
3. Danko P.Ye., PopovaA.T. Kojevnikova T.Ya. «Vosshaya matematika v uprajneniyax i zadachax» , Vosshaya shkola. M., 1998 y.
4. Zaysev I.A. Vosshaya matematika. M., 1998 y.

36-mavzu. Qatorlar
Funksional va darajali qatorlar. Funksiyalarni darajali qatorga yoyish

Reja:

36.1. Funksional va darajali qatorlar.
36.2. . Darajali qatorlarni differensiallash va integrallash haqida.
36.3. Funksiyalarni darajali qatorga yoyish. Teylor va Makloren qatorlari.

36.1. Funksional va darajali qatorlar

6-Ta'rif. Hadlari funksiyalardan iborat bo'lgan qatorlarga funksional qator deyiladi.

Masalan. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ - bir x argumentning funksional qatori.

Misollar. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \ell n^n x = \ell n x + \ell n^2 x + \ell n^3 x + \cdots,$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{3^2} + \cdots$

Funksional qatorlar ichida quyidagicha ta'riflanadigan qatorlar alohida o'rin tutadi.

7-Ta'rif. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$ (1)

ko'rinishdagi funksional qatorga darajali qator deyiladi. Bu yerda a_n - darajali qator koeffitsentlari deyiladi.

Misollar.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} x^{2(n-1)} = 1 + 2x^2 + 4x^4 + 8x^6 + \cdots$

Qator uchun asosiy masala uning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini aniqlash, bu holda sonli qatornikidan farqlidir. Darajali qatorning yaqinlashuvi yoki uzoqlashuvchi bo'lishiga x o'zgaruvchining qanday qiymat qabul qilishga bevosita bog'liq bo'ladi.

8-Ta'rif. Agar (1) qator $x = x_1$ bo'lganda yaqinlashsa, u holda (1) darajali qator $x = x_1$ nuqtada yaqinlashuvchi deyiladi. **Ta'rif.** x o'zgaruvchining $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ darajali qator yaqinlashadigan barcha qiymatlari to'plamiga darajali qatorning yaqinlashish sohasi deyiladi va $D(\Sigma)$ bilan belgilanadi.

Misol: $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$

darajali qator x o'zgaruvchining (-1, 1) oraliqdan olingan har bir qiymatida cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya yig'indisi sifatida yaqinlashuvchi bo'ladi. Demak bu qator uchun $D(\Sigma)=(-1,1)$.

Ta'kidlash lozimki, ixtiyoriy darajali qatorning yaqinlashish sohasi bush to'plam bo'lmaydi, chunki har qanday darajali qator hech bo'lmaganda $x=0$ da chekli yig'indiga ega.

Abel teoremasi. Agar (1) darajali qator biror $x=x_0$ da yaqinlashsa, u holda bu qator $|x|<|x_0|$ shartni qanoatlantiruvchi barcha x larda ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Isboti. Bu yerda $x_0 \neq 0$ deb karash kerak. Chunki $x_0=0$ bo'lsa, $|x|<0$ bo'lsa, shartni qanoatlantiruvchi to'plam bo'sh to'plamdir.

Teorema. Shartiga kura $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0{}^n$ sonli qator yaqinlashuvchi. Qator yaqinlashishining zaruriy shartiga asosan $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0{}^n=0$.

U holda shunday $c>0$ topa olamizki, barcha $n=1,2,3,\ldots$ uchun

$$\left|a_n x_0{}^n\right|<c$$

bo'ladi.

Endi $|x|<|x_0|$ shartli qanoatlantiruvchi ixtiyoriy x ni olib

$$\left|a_n x^n\right|=\left|a_n x_0{}^n\right|\left|\frac{x}{x_0}\right|^n<c\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

Tengsizlikni e'tiborga olsak, darajali cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya yig'indisi bo'lgan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x}{x_0}\right|^n \qquad (2)$$

qator yaqinlashuvchiligidan solishtirish teoremasiga asosan (2) qatorning yaqinlashuvchiligi kelib chikadi. Demak, (1) darajali qator $|x|<|x_0|$ shartni bajaruvchi barcha x larda absolyut yaqinlashuvchi qator ekan. Teorema isbot buldi.

Quyidagi natija xam o'rinlidir. Agar biror $x=x_0$ qiymatda (1) darajali qator uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda $|x|>|x_0|$ tengsizlikni kanoatlantiruvchi barcha x larda xam uzoqlashuvchi bo'ladi.

Bu tasdiklar darajali qatorning yaqinlashish va uzoqlashish nuktalari to'plamlarini aniqlashga undaydi.

Xususan: (1) qator $x=x_0$ da yaqinlashuvchi bo'lsa, $(-|x_0|;|x_0|)$ intervalda yaqinlashuvchi $x=x_0$ da uzoqlashuvchi bo'lsa $(-\infty;-|x_0|)$ va $(|x_0|;\infty)$ intervallarda uzoqlashuvchi bo'ladi.

Quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

Agar (1) darajali qator x ning ba'zi $(x=0)$ qiymatlarida yaqinlashuvchi, ba'zi qiymatlarida esa uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda yagona shunday $R>0$ son topiladiki, (1) darajali qator x ning $|x| < R$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi qiymatlarida absolyut yaqinlashuvchi, $|x| > R$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi qiymatlarida esa uzoqlashuvchi bo'ladi.

Bu teorema yordamida topilgan R soniga (1) darajali qatorning yaqinlashish radiusi, $(-R, R)$ interval esa (1) darajali qatorning yaqinlashish intervali deyiladi.

Quyidagilarni eslatib o'tamiz.

Qatorning berilishiga qarab R chekln soni yoki $R = \infty$ bo'lishi mumkin. Ya'ni shunday darajali qatorlar borki ular $(-\infty, \infty)$ da yaqinlashuvchi qator bo'ladi.

Agar R chekli son bo'lsa, u holda darajali qator yaqinlashish radiusi

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \text{ yoki } R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

formula bilan aniqlanadi.

Agar R chekli son bo'lsa Abel teoremasidan (1) darajali qatorning $D(\Sigma) = (-R; R)$ sohada yaqinlashishi kelib chiqsada, $x = -R$ va $x = R$ qiymatlarda qator qanday qator ekanligi ochiq qoladi. Bu masala har bir darajali qator uchun alohida - alohida ko'rib chiqiladi.

Misollar.

1). $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$

qator yaqinlashishi radiusi aniqlansin.

Yechish. Berilgan qatorda $a_n = 1,\ n = 1,2,3,\ldots$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

2). $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$

qator yaqinlashish radiusi topilsin.

Yechish. Agar

$$a_n = \frac{1}{n!};\quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$$

ekanligini hisobga olsak,

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$$

3. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n^2+1}$ qatorning yaqinlashish sohasi aniqlansin.

Yechish. Berilishiga ko'ra

$$a_n = \frac{1}{n^2+1};\ a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2+1}$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+1}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+2}{n^2=1} = 1$$

Abel teoremasiga qaralayotgan qator (-1,1) intervalda yaqinlashadi. O'z navbatida

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$$

qator yaqinlashuvchi bo'lganligi sababli $x=-1,\ x=1$ qiymatlarda qator absolyut yaqinlashuvchi qator bo'ladi. Natijada berilgan qator $[-1,1]$ da absolyut yaqinlashuvchi, $|x|>1$ bo'lganda esa uzoqlashuvchi qator bo'ladi.

4. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+2}$ qatorning yaqinlashish sohasi aniqlansin.

Yechish. Berilganiga kura $a_n=\frac{1}{n+2}$

u holda $R=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n+2}=1$

Agar $x=1$ desak qator

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

ko'rinishni oladi. Bu qator uzoqlashuvchi qatordir.

Endi $x=-1$ deb olsak

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots$$

ko'rinishdagi ishorasi almashuvchan qatorga ega bulamiz. Leybnits teoremasi shartlari bajarilganligi uchun bu qator yaqinlashuvchidir.

Shunday qilib qaralayotgan darajali qator (-1,1)da absolyut yaqinlashuvchi, $[-1;1)$ da yaqinlashuvchi, $|x|>1$ bo'lganda uzoqlashuvchi qator.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}$$

qator tekshirilsin.

Yechish. Bu yerda $a_n=\frac{1}{3^n}$ ko'rinishdaligini e'tiborga olib, yaqinlanish radiusini

$$R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}}=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}}}=3$$

usulda aniqlaymiz.

Agar $x=-1$ va $x=1$ deb olinsa, mos ravishda $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ va $\sum_{n=0}^{\infty}1^n$ uzoqlashuvchi qator hosil qilamiz. Bu qatorlar yaqinlashishining zaruriy sharti $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ bajarilmaydi.

Demak berilgan qator (-3,3) intervalda absolyut yaqinlashuvchi va barcha $|x|\geq 3$ qiymatlarda uzoqlashuvchi qatordir.

36.2. Darajali qatorlarni differensiallash va integrallash haqida.

Darajali qatorlar muxim amaliy kullanishlarga egadir. Shu maksadda ularning ba'zi xossalarini o'rganaylik.

Anglash qiyin emaski darajali qator o'zining $(-R;R)$ yaqinlashish sohasida x o'zgaruvining

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (1)$$

funksiyasini aniqlaydi.

Bu $f(x)$ funksiya $(-R;R)$ sohasida uzluksiz bo'lib, istalgan tartibli uzluksiz hosilalarga egadir. Shu bilan birga $f'(x)$ hosila (1) qator hadilarning hosilalari yig'indisiga tengdir, ya'ni

$$f'(x)=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots\equiv\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}.$$

Xuddi shuningdek

$$f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}$$

$$f'''(x)=\sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}$$

va hakazo.

Bu xossani odatda «darajali qatorni hadma-had differensiallash» xossasi deb yuritiladi.

Shu kabi «Darajali qator yig'indisining integral qator hadlari integrallarning yig'indisiga tengdir» mazmundagi xossa ham o'rinlidir.

Ya'ni $(-R;R)$ oraliqdan olingan har kanday x uchun

$$\int f(x)dx=C+a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2x^3}{3}+\cdots+\frac{a_nx^{n+1}}{n+1}+\cdots$$

36.3. Funksiyalarni darajali qatorga yoyish. Teylor va Makloren qatorlari.

Yuqorida $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ darajali qator o'zining yaqinlashish sohasi $(-R,R)$da uzluksiz $f(x)$ funksiyani ifodalab, shu oraliqda bu funksiya istalgan tartibli hosilaga ega bo'lishi keltirilgan edi.

Endi biror oraliqda istalgan tartibli hosilaga ega bo'lgan funksiyani darajali qatorga yoyish masalasini o'rganaylik.

"Teylor formulasi" deb ataluvchi

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x) \quad (1)$$

formula ma'lum. Bu yerda $R_n(x)$ qoldiq had.

Ta'rif. Agar $y=f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtaning biror atrofida istalgan tartibli hosilaga ega bo'lsa:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots \qquad (2)$$

ko'rinishdagi qatorga $f(x)$ funksiyaning Teylor qatori deyiladi.

Agar e'tibor bersak bu qator ma'lum qonuniyat bilan tuzilgan darajali qator ekanligini ko'ramiz. Uning koeffitsentlari $f(x)$ funksiya va uning hosilalarini $x=x_0$ nuqtadagi qiymatlar orqali ifodalangan.

O'rni kelganda (2) ga $y=f(x)$ funksiyaning $x=x_0$ nuqta atrofidagi Teylor qatoriga yoyilmasi deb ham ataladi.

Agar (2) da $x_0=0$ deb olingan bo'lsa,

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^n(0)}{n!}x^n+\cdots$$

ko'rinishdagi qatorni Makloren qatori deb ataladi.

Bu kabi qatorlardan funksiyalarning qiymatlarini hisoblashda ham keng foydalaniladi.

Agar funksiya uchun formal holda Teylor yoki Makloren qatori yozilgan bo'lsa, bu qator berilgan funksiyani ifodalashini isbot kilish uchun yoki qoldiq hadining nolga intilishini isbotlash yoki bu qatorning qaralayotgan funksiyaga yaqinlashishini boshqa biror usul bilan ko'rsatish kerak bo'ladi.

Ba'zi elementar funksiyalarning Makloren qatoriga yoyilmalarini keltiramiz.

1. $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)}+\cdots$

2. $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$

3. $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$

Bu qatorlarning har biri uchun xam $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$ bo'lgani sababli x ning har qanday qiymatida ham, $x\in(-\infty;\infty)$, ular yaqinlashuvchi bo'lib, mos ravishda $\sin x,\ \cos x,\ e^x$ funksiyalarni ifodalaydi.

Funksiya yoyilmasini ifodolovchi Teylor yoki Makloren qatorining yaqinlashish sohasi funksiyaning aniqlashish sohasidan farqli (uning ma'lum qismi) bo'lishi mumkin.

Misollar:

1. $f(x)=\ell n(1+x)$ funksiya uchun $D(y)=(-1;+\infty)$ bo'lsada,

$$\ell n(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)\frac{x^n}{n}+\cdots$$

qator faqat (-1;1) oraliqda o'rinlidir.

2. $(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(1-n+1)}{n!}x^n+\cdots$

yoyilma $|x|<1$ bo'lgandagina ma'noga ega bo'ladi.

Xulosa

Funksional va darajali qatorlar, funksiyalarni darajali qatorga yoyish nazariyasi keltirilgan. Misollar keltirilgan.

Tayanch iboralari

Funksional va darajali katorlar, qatorlarni differensiallash va integrallash, Teylor yoki Makloren qatorlari.

Takrorlash uchun savollar

8. Funksional katorlarga misollar keltiring.
9. Darajali qator nima va uning yakinlashish radiusi qanday topiladi.
10. Darajali katorlarni differensiallash va integralash koidalarini ayting.

Asosiy adabiyotlar

1. T.A.Azlarov, X. Mansurov «Matematika analiz» T., «Ukituvchi» 1-kism 1986 y., 2-kism 1989 y.
2. T.J.Jurayev, G.Xudoyberganov, A.K.Vorisov, X.Mansurov «Oliy matematika asoslari», I , II kismlar., T., 1999 y.
3. Shipachev V.S. «Vosshaya matematika», M., «Vosshaya shkola», 1991y.
4. Vinogradov I.M. «Elemento vosshey matematiki», M., 1999 y.

Qo'shimcha adabiyotlar:

1.Soatov Yo.U. «Oliy matematika», 1 va 2- jildlar , T., «O'qituvchi» , 1992y., 1994 y.
2.B. Abdualimov , Sh.Solixov «Oliy matematika kiskacha kursi», T., «O'qituvchi» , 1981 y.
3. Danko P.Y., Popova A.T. Kojevnikova T.Y «Vosshaya matematika v uprajneniyax i zadachax» , Vosshaya shkola. M., 1998 y.
4. Zaysev I.A. Vosshaya matematika. M., 1998 y.