O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

TOSHKENT MOLIYA INSTITUTI

“OLIY VA AMALIY MATEMATIKA” KAFEDRASI

“IQTISODIY MATEMATIKA”
(3-semestr. 1-modul. Ma’ruzalar)

Bilim sohasi:	100000	– Gumanitar
	200000	– Ijtimoiy soha, iqtisod va huquq
Ta’lim sohasi:	110000	– Pedagogika
	230000	– Iqtisod
Ta’lim yo‘nalishlari:	5111000	– Kasb ta’limi (5230600 – Moliya, 5230700 – Bank ishi, 5230900 – Buxgalteriya hisobi va audit, 5231200 – Sug‘urta ishi)
	5230600	– Moliya
	5230700	– Bank ishi
	5230800	– Soliqlar va soliqqa tortish
	5230900	– Buxgalteriya hisobi va audit (tarmoqlar bo‘yicha)
	5231200	– Sug‘urta ishi
	5231300	– Pensiya ishi
	5231500	– Baholash ishi
	5232000	– Davlat budjetining g‘azna ijrosi

Toshkent – 2018

Fanning O‘quv uslubiy majmuasi O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligining 201__ yil “__”__________dagi __-sonli buyrug‘ining __-ilovasi bilan tasdiqlangan fan dasturiga muvofiq ishlab chiqildi.

Tuzuvchilar:

Xashimov A. – TMI, “Oliy va amaliy matematika” kafedrasi, dotsent, f.-m.f.n.;

Sotvoldiyev A. – TMI, “Oliy va amaliy matematika” kafedrasi, o‘qituvchi.

Taqrizchilar:

Zikirov O. – O‘zMU, “Differensial tenglamalar va matematik fizika” kafedrasi mudiri, f.-m.f.d. (turdosh OTMdan);

Mamurov I. – TMI, “Oliy va amaliy matematika” kafedrasi, dotsent, f.-m.f.n.

Fanning O‘quv uslubiy majmuasi kafedraning 201__ yil “___” ___________dagi ___ sonli yig‘ilishi muhokamasidan o‘tkazilgan va fakul’tet Kengashida ko‘rib chiqish uchun tavsiya etilgan.

Kafedra mudiri **A.Xashimov**

Fanning ishchi o‘quv dasturi Hisob va audit fakul’tetining Kengashi muhokamasidan o‘tkazilgan va institut o‘quv-uslubiy Kengashida ko‘rib chiqish uchun tavsiya etilgan. (201__ yil “___” ____________dagi __ sonli qaror)

Fakul’tet dekani **K.Karimova**

Kelishildi:

O‘quv-uslubiy bo‘lim boshlig‘i **T.Baymuradov**

O‘quv ishlari bo‘yicha prorektor **I.Qo‘ziyev**

Fanning O‘quv uslubiy majmuasi institut o‘quv-uslubiy Kengashining 201__ yil “___” __________dagi __-sonli yig‘ilishida ko‘rib chiqilgan va tasdiqlash uchun tavsiya qilingan.

Fanning O‘quv uslubiy majmuasi institut Kengashining 201__ yil “___” __________dagi __/__ sonli majlisi bayoni bilan ma’qullangan.

1-ma'ruza. ELEMENTAR HODISALAR FAZOSI. EHTIMOLNING TA'RIFLARI

Tayanch so'z va iboralar: Tasodifiy hodisa, muqarrar hodisa, mumkin bo'lmagan hodisa, birgalikda bo'lmagan hodisalar, teng imkoniyatli hodisalar, ehtimolning klassik ta'rifi, kombinatorika elementlari, nisbiy chastota, nisbiy chastotaning turg'unligi, statistik ehtimollik, geometrik ehtimollik.

REJA:

1. Ehtimollar nazariyasi haqida dastlabki tushunchalar.
2. Elementar hodisalar fazosi.
3. Ehtimollikning klassik ta'rifi.
4. Ehtimollikning statistik ta'rifi.
5. Geometrik ehtimollik.

1. Ehtimollar nazariyasi haqida dastlabki tushunchalar. Ehtimollar nazariyasi hozirgi zamon matematikasining muhim tarmoqlaridan biridir. Ehtimollar nazariyasi fanining paydo bo'lishiga qimor o'yinlarining matematik modellarini va nazariyasini yaratish yo'lidagi izlanishlar turtki bo'ldi. Bu fanning dastlabki tushunchalari shakllangan davr XVI-XVII asrlar bo'lib, Kardano, Gyuygens, Paskal, Ferma kabi olimlarning nomlari bilan bog'liqdir.

Ehtimollar nazariyasining keyingi rivojlanish davri Yakov Bernulli (1654-1705) nomi bilan bog'liq. U isbotlagan, keyinchalik "Katta sonlar qonuni" nomini olgan teorema oldingi to'plangan faktlarning birinchi nazariy asoslanishi edi. Ehtimollar nazariyasining keyingi yutuqlari Muavr, Laplas, Puasson kabi olimlarning nomlari bilan bog'liq.

XIX asrning ikkinchi yarmidan boshlab ehtimollar nazariyasining rivojlanishiga V.Ya.Bunyakovskiy, P.L.Chebishev, A.A.Markov, A.M.Lyapunov kabi rus olimlari o'z ilmiy izlanishlari bilan katta hissa qo'shdilar. Fanning mustaqil fan bo'lib uyg'unlashishida va keyingi rivojida S.N.Bernshteyn, V.I.Romanovskiy, A.N.Kolmogorov, A.Ya.Xinchin, B.V.Gnedenko, N.V.Smirnov va boshqalarning xizmatlari katta bo'ldi.

Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanining O'zbekistonda o'z o'rinini topishida va rivojlanishida V.I.Romanovskiy, S.X.Sirojiddinov va T.A.Sarimsoqov kabi olimlarining hissalari behisobdir. Hozirgi kunda ularning shogirdlari tomonidan ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fani bo'yicha ham nazariy, ham amaliy tadqiqotlar davom ettirilmoqda.

Ehtimollar nazariyasining dastlabki tushunchalari – tajriba, hodisa, elementar hodisa, ehtimollik, nisbiy chastota kabi tushunchalar bo'lib, ularni bayon qilishga o‘tamiz. Tajriba hodisani ro‘yobga keltiruvchi shartlar majmui S ning bajarilishini ta’minlashdan iboratdir. Tajribaning har qanday natijasi hodisadir. Kuzatilayotgan hodisalarni 3 turga ajratish mumkin: muqarrar, mumkin bo‘lmagan va tasodifiy.

Ma’lum S shartlar majmui asosida, albatta, ro‘y beradigan hodisaga muqarrar hodisa deb ataladi va Ω bilan belgilanadi. Masalan, “-10^0 temperaturada (normal atmosfera bosimi ostida) suv muz holatda bo‘ladi” hodisasi muqarrar hodisadir.

S shartlar majmuida hech qachon ro‘y bermaydigan hodisa mumkin bo‘lmagan hodisa deb ataladi va $\varnothing$ belgi bilan belgilanadi. Masalan, “-10^0 temperaturada (normal atmosfera bosimi ostida) suv suyuq holatda bo‘ladi” hodisasi mumkin bo‘lmagan hodisadir.

Ma’lum bir S shartlar asosida ro‘y beradigan, yoki ro‘y bermaydigan hodisa tasodifiy hodisa deb ataladi va lotin alfavitining katta $A, B, C, \ldots$ harflari bilan belgilanadi. Masalan, “10^0 temperaturada yomg‘ir yog‘adi” hodisasi tasodifiy hodisadir.

1-misol. Tajriba o‘yin kubigi (shashqoltosh) bir marta tashlash bo‘lsin. Bu holda: Ω={tushgan ochko 6 dan katta emas} – muqarrar hodisa; $\varnothing$={tushgan ochko 9 ga teng} – mumkin bo‘lmagan hodisa; A = {tushgan ochko juft son} – tasodifiy hodisadir.

Ehtimollikni talqin etish uchun quyida beriladigan oddiy misollardan boshlaymiz. Bu misollar yordamida ehtimollik tushunchasi mohiyatini ochib beruvchi uning muhim ta’riflarini keltirib o‘tamiz.

Faraz qilaylik, tanga bir marta tashlandi va “raqam” tomoni bilan tushdi. Bunday natija kuzatish deyiladi hamda kuzatishni amalga oshirish jarayoni esa tajriba deb ataladi. Probirka, mikroskop va boshqa laboratoriya jihozlarini esga soluvchi fizika fanlaridan farqli ravishda biz ifodalagan tajriba mohiyati ancha chuqurroq ma’no kasb etadi. Statistik tajribalarga internet foydalanuvchilarning qaysi Web brauzerni ma’qul ko‘rishlarini va siyosiy saylovlarda saylovchilarning fikrlarini qayd etib borish, ifloslangan daryodagi kislorod eritmasi miqdorini aniqlash, test topshiruvchining bezovtalanishini kuzatish, qaydnomalardagi yo‘l qo‘yilgan xatoliklar miqdorini hisoblash hamda hasharotlarga qarshi yangi vositalar yordamida yo‘q qilingan hasharotlar ulushi kabilar kiradi. Statistik tajribaning xususiyati shundan iboratki, natijasi noma’lum bo‘lgan kuzatishni amalga oshirishdir.

Tajriba kuzatishni amalga oshirish jarayoni hisoblanib, yagona natijaga olib keladi. Shashqoltoshni tashlashdan va uning ochko tomoni bilan tushishidan iborat soddaroq tajribani ko‘rib chiqamiz. Tajribaning oltita natijasi quyidagicha bo‘ladi:

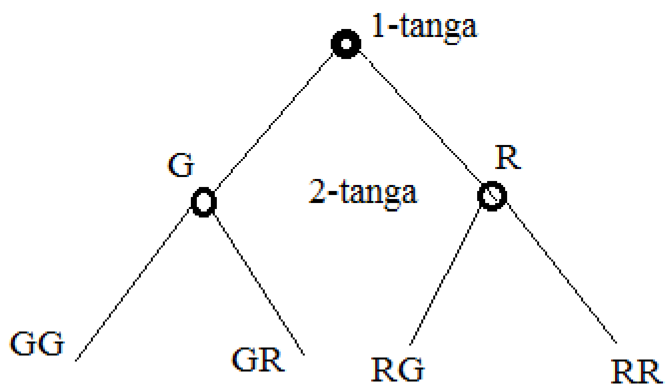
1. “Bir” ochko tushishi. 2. “Ikki” ochko tushishi.
3. “Uch” ochko tushishi. 4. “To‘rt” ochko tushishi.
5. “Besh” ochko tushishi. 6. “Olti” ochko tushishi.

Shuni yodda tutish lozimki, agar tajriba bir marta o‘tkazilayotgan bo‘lsa, yuqoridagi oltita natijadan faqat bittasi ro‘y berishi mumkin hamda natijani aniq oldindan bilish mumkin emas.

Demak, tajribada tasodifiy hodisaning ro‘y berishini oldindan aytib bo‘lmaydi. Tajribaning har qanday natijasi elementar hodisa deb ataladi va ω bilan belgilanadi. Tajriba natijasida ro‘y berishi mumkin bo‘lgan barcha hodisalar to‘plami elementar hodisalar fazosi deb ataladi va Ω bilan belgilanadi.

2-misol. Ikkita tanga tashlandi va ularning tushgan tomonlari aniqlandi. Tajribaning barcha elementar hodisalarini ko‘rib chiqing.

Yechish. Hatto ahamiyatsizdek ko‘ringan tajribaning ham elementar hodisalar to‘plamini tuzayotganda e’tiborliroq bo‘lishimiz kerak. Bir qarashda uchta natijadan bittasini kutishimiz mumkin: tanganing ikkita “raqam”; ikkita “gerb”; yoki bitta “raqam” va bitta “gerb” tomonlari bilan tushishini. Tanganing bitta “raqam” va bitta “gerb” tomoni bilan tushishi yana ikkita natijaga: birinchi tanganing “raqam”, ikkinchi tanganing “gerb” va birinchi tanganing “gerb”, ikkinchi tanganing “raqam” tomonlari bilan tushishiga.



Diagrammaning yuqori qismi tangani birinchi tashlashda ikkita natija (“raqam” yoki “gerb”) ga bo‘linadi. Ikkinchi tangani tashlashda ham sinov natijalari ikki qismga ajraladi. Shunday qilib, tangalar tashlangandan so‘ng to‘rtta elementar hodisa ro‘y beradi.

1. Tanganing RR tomoni bilan tushishi
2. Tanganing RG tomoni bilan tushishi
3. Tanganing GR tomoni bilan tushishi
4. Tanganing GG tomoni bilan tushishi

Bu yerda, R birinchi tangani tashlashda “raqam” tomoni bilan tushishi, G esa ikkinchi tangani tashlashda “gerb” tomoni bilan tushishidir.

3-misol. Agar tanga uch marta tashlansa, u holda

$$\omega_1 = (ggg),\quad \omega_2 = (ggr),\quad \omega_3 = (grr),\quad \omega_4 = (rrr)$$

$$\omega_5 = (rrg),\quad \omega_6 = (rgg),\quad \omega_7 = (rgr),\quad \omega_8 = (grg)$$

Elementar hodisalar fazosi sakkizta elementdan iborat.

4-misol. Tajriba shashqoltoshni ikki marta tashlashdan iborat bo‘lsin. Bu holda $\omega_{ij} = (ij)$ bo‘lib, i birinchi va j ikkinchi tashlashda tushgan ochkoni bildiradi: $\Omega = \left\{\omega_{ij}\right\},\ i, j = \overline{1,6}$. Elementar hodisalar soni: $n = 36$.

5-misol. Tajriba nuqtani $\left[a,b\right]$ kesmaga tashlashdan iborat bo‘lsin. Bunda $\Omega = \left[a,b\right]$. Kesmadagi barcha nuqtalardan iborat bo‘lib elementar hodisalar soni cheksizdir.

Shunday qilib, ehtimollar nazariyasi fanining predmeti: ommaviy bir jinsli tasodifiy hodisalar ro‘y berishining ehtimollik qonuniyatlarini o‘rganishdir.

Yuqorida aytilganidek, tajribaning natijasi hodisadir. Masalan, mergan nishonga o‘q uzmoqda, bunda o‘qning uzilishi – tajriba bo‘lsa, o‘qning nishonga tegishi esa hodisa bo‘ladi.

Ertaga Toshkent shahrida nechta yo‘l transport hodisasi ro‘y beradi? Tez yordam punktlariga nechta bemor qo‘ng‘iroq qiladi? Murakkab texnik qurilmani sozlash uchun qancha vaqt talab qilinadi? Bu kabi savollarning bir xil o‘xshashligi bor, bu savollarga aniq javob berib bo‘lmaydi. Chunki bu voqealarga ta’sir etuvchi faktorlar to‘liq aniqlanmagan. Haqiqatan ham, birgina yo‘l transport hodisasini ro‘y berishi bir nechta faktorlarga bog‘liq: ob-havo, yo‘lning holati, yo‘lning yoritilganlik darajasi, haydovchi va piyodalarning psixologik holatlari, avtomobillarning yo‘ldagi joylashuvi va hokazo. Barcha shu kabi holatlarda bizni qiziqtirgan hodisalar tasodifiydir.

Biz yuqorida hodisalarni uch turga bo‘lgan edik. O‘z navbatida tasodifiy hodisalarni ham bir necha turlarga ajratiladi.

Bitta tajribada biror tayin hodisaning ro‘y berishi tajribaning qolgan hodisalarining ro‘y berishini yo‘qqa chiqarsa, bunday hodisalarga birgalikda bo‘lmagan hodisalar deb aytiladi.

6-misol. Tanga tashlanadi. “Gerb” tomon tushishi “raqam” tomon tushishini yo‘qqa chiqaradi va aksincha. “Gerb” tushishi va “raqam” tushishi hodisalari birgalikda bo‘lmagan hodisalardir.

7-misol. O‘yin kubigi tashlanadi. Bunda $\Omega = \left\{\omega_i\right\}, \left(i = \overline{1,6}\right)$ to‘plamda 6 ta elementar hodisa bo‘lib, ular birgalikda bo‘lmagan hodisalardir.

2-5-misollardagi elementar hodisalar ham birgalikda bo‘lmagan hodisalardir.

Agar tajriba natijasida bir nechta hodisalardan bittasi va faqat bittasining ro'y berishi muqarrar hodisa bo'lsa, u holda bu hodisaga yagona mumkin bo'lgan hodisalar deyiladi.

Agar bir nechta hodisalardan hech qaysi birining ro'y berish imkoniyati boshqalariga nisbatan kattaroq deyishga asos bo'lmasa, ular teng imkoniyatli hodisalar deyiladi. Yuqoridagi 6-misolda "gerb" tushishi va "raqam" tushishi hodisalari teng imkoniyatli hodisalardir. Bu tasdiq 2-7-misollardagi har bir elementar hodisa uchun ham o'rinli.

2. Ehtimolning klassik ta'rifi. Ehtimol tushunchasi ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri bo'lib, uning bir nechta ta'rifi mavjud. Umumiy qilib aytganda, ehtimol – tasodifiy hodisaning ro'y berish imkoniyatini miqdoriy jihatdan xarakterlovchi sondir. Quyida ehtimolning klassik ta'rifini keltiramiz.

Dastlab quyidagi misolni ko'rib chiqamiz. Qutida 10 ta: 4 ta qizil, 4 ta ko'k, 2 ta oq shar bo'lsin. Qutidan tasodifiy tarzda shar olinganda uning rangli bo'lish imkoniyati oq bo'lishiga qaraganda ko'proqligi aniq. Bu imkoniyatni son bilan ifodalaymiz va uni hodisaning ro'y berish ehtimoli deb ataymiz. Shunday qilib, hodisaning ro'y berish imkoniyatini xarakterlovchi son hodisaning ro'y berish ehtimoli deb ataladi.Bu misolda qutidan tasodifiy ravishda shar olinganda uning rangli bo'lish ehtimolini topamiz. Olingan sharning rangli (hozir ham, keyinchalik ham rangli shar deb oq shardan boshqa rangdagi sharlarni tushunamiz) bo'lishini A hodisa sifatida qaraymiz. Tajribaning har bir natijasini ω_i elementar hodisa deb qaraymiz. Bizning misolda 10 ta elementar hodisa mavjud: ω_1, ω_2 – oq shar olindi; $\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ – qizil shar olindi; $\omega_7, \omega_8, \omega_9, \omega_{10}$ – ko'k shar olindi. Ko'rinib turibdiki, ω_i hodisalar teng imkoniyatlidir.Bizni qiziqtirayotgan hodisaning ro'y berishiga olib keladigan elementar hodisalarni bu hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi hodisalar deb ataymiz. Bizning misolimizda A hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi hodisalar 8 ta:

$$\omega_3,\ \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_9, \omega_{10}.$$

Shunday qilib, A hodisaga qulaylik tug'diruvchi hodisalardan qaysi bir bo'lishidan qat'iy nazar bittasi ro'y bersa A hodisa ro'y beradi: bizning misolimizda agar $\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_9, \omega_{10}$ hodisalardan hech bo'lmaganda biri ro'y bersa, A hodisa ro'y beradi.

Ehtimolning klassik ta'rifi. A hodisaning ro'y berish ehtimoli deb, hodisa ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi elementar hodisalar sonining, teng imkoniyatli yagona mumkin bo'lgan elementar hodisalarning umumiy soniga nisbatiga aytiladi va

$$P(A)=\frac{m}{n} \qquad (1)$$

formula bilan aniqlanadi. Bu yerda, m – A hodisa ro‘y berishiga qulaylik tug‘diruvchi elementar hodisalar soni; n – elementar hodisalarning umumiy soni Ehtimolning klassik ta’rifidan bevosita uning quyidagi xossalari kelib chiqadi.

1. Muqarrar hodisaning ro‘y berish ehtimoli birga teng. Haqiqatan ham, bu holda $m=n$ demak, $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{n}{n}=1.$

2. Mumkin bo‘lmagan hodisaning ro‘y berish ehtimoli nolga teng. Bu holda $m=0$ va $P(\varnothing)=\frac{m}{n}=\frac{0}{n}=0.$

3. Tasodifiy hodisaning ro‘y berish ehtimoli nol va bir orasida yotuvchi sondir, ya’ni $0\le P(A)\le 1$. Haqiqatan ham, bu holda $0<m<n$. Shuning uchun $0<\frac{m}{n}<1$ demak, $0<P(A)<1$. Bundan tashqari $m=0 \Rightarrow P(A)=0,\quad m=n \Rightarrow P(A)=1$ bo‘lgani uchun istalgan hodisaning ehtimoli quyidagi munosabatni qanoatlantiradi:

$$0\le P(A)\le 1 \qquad (2)$$

Elementar hodisalarning ro‘y berish ehtimollari ularning hodisadagi ulushlari hisoblansada, elementar hodisalar to‘plamidan iborat hodisaning ehtimolini aniqlashda muhim o‘rin egallaydi.

8-misol. Tajriba shashqoltosh tashlashdan iborat bo‘lsin. Agar shashqoltoshni tashlaganimizda juft ochko tushsa, 1 p.b. yutiladi, aks holda esa 1 p.b. yo‘qotiladi. A=(1 p.b yutib olish) – hodisasining ehtimolini toping (p.b.-pul birligi).

Yechish. Eslatib o‘tamiz, ushbu tajribaning elementar hodisalar fazosiga oltita elementar hodisa kiradi: $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, $n=6$. Shashqoltosh simmetrik bo‘lgani uchun elementar hodisalar fazosiga kiruvchi elementar hodisalarni har birining ro‘y berish ehtimoli $\frac{1}{6}$ ga teng. Tajriba natijasida juft ochko tushishi “ikki” ochko, “to‘rt” ochko, “olti” ochkolarning tushishidan iborat elementar hodisalaridan birining ro‘y berishini bildiradi. Bu elementar hodisalar to‘plami hodisa deb atalib, uni A orqali belgilaymiz va $m=3$. U holda

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

Ehtimolning klassik ta’rifidan foydalanib amaliy va nazariy masalalar yechishda kombinatsiyalar sonini aniqlash muhim ahamiyatga ega bo‘lganligi sababli kombinatorikaning ba’zi bir formulalari ustida to‘xtab o‘tamiz.

Berilgan n ta turli elementning k ta elementlaridan tuzilgan yoki tartibi bilan, yoki elementi bilan farq qiladigan kombinatsiyalarga o‘rinlashtirish deyiladi va mumkin bo‘lgan barcha o‘rinlashtirishlar soni

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1)) \quad (3)$$

formula bilan topiladi.

Agar o‘rinlashtirishda $k=n$ bo‘lsa, o‘rinlashtirishlar soni o‘rin almashtirishlar (faqat tartibi bilan farq qiladigan kombinatsiyalar) soniga teng bo‘ladi va bu son

$$P_n = n! = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 1 \quad (4)$$

formula bilan aniqlanadi.

Agar o‘rinlashtirishda kombinatsiyalar hech bo‘lmaganda bitta elementi bilan farq qilsa, ularni n ta elementni k tadan guruhlash deyiladi va ularning soni

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (5)$$

formula bilan aniqlanadi. Bu yerda $0!=1$ deb qabul qilingan.

Eslatma. Agar 2-ta’rifda keltirilgan n ta elementni k tadan o‘rinlashtirishda tanlashlar qaytariladigan bo‘lsa, ya’ni n ta turli elementdan bittalab olingan element fiksirlangandan so‘ng yana o‘rniga qaytarib qo‘yilib bu jarayon takrorlansa, tanlab olishlar soni

$$N = n^k$$

formula bilan aniqlanadi.

9-misol. 1, 2, 3, 4 raqamlaridan foydalanib har bir raqam bir marta qatnashadigan nechta to‘rt xonali son tuzish mumkin.

Yechish. Barcha tuzilishi mumkin bo‘lgan sonlar $P_4 = 24$ ga teng.

10-misol. 25 ta xodimdan boshliq va uning o‘rinbosarini necha xil usulda saylash mumkin.

Yechish. Misolning shartiga binoan mumkin bo‘lgan barcha saylashlar soni (3) formulaga ko‘ra topiladi. $A_{25}^2 = 25\cdot 24 = 600$.

11-misol. 25 ta talabadan 3 kishilik delegatsiyani necha xil usulda tuzish mumkin?

Yechish. Misolning mazmuniga ko‘ra bu holda (5) formulani qo‘llaymiz.

$$C_{25}^3 = \frac{25!}{3!\cdot 22!} = \frac{23\cdot 24\cdot 25}{1\cdot 2\cdot 3} = 2300.$$

3. Ehtimolning statistik ta’rifi. Ehtimolning yuqorida keltirilgan klassik ta’rifi cheklangan bo‘lib, bu ta’rifni har qanday turdagi masalalarga qo‘llab bo‘lmaydi. Jumladan, elementar hodisalar soni cheksiz yoki elementar hodisalar teng imkoniyatli bo‘lmagan tajribalarda ehtimolni hisoblash uchun klassik ta’rifdan foydalanish mumkin emas, elementar hodisalarning teng imkoniyatliligini asoslash esa amaliyotda anchagina qiyin masaladir. Odatda, teng imkoniyatli hodisalar ro‘y beradigan tajribalarda simmetriya saqlangan deb faraz qilinadi. Masalan, o‘yin kubigining shakli muntazam ko‘pyoq bo‘lib, u bir jinsli materialdan tayyorlangan deb hisoblanadi, tangada ham shu holatni kuzatish mumkin. Ammo amaliyotda simmetriyaga asoslangan holatlar kamdan-kam uchraydi.

Shu sababli, ehtimollarni hisoblashda ehtimolning klassik ta’rifi bilan bir qatorda boshqa ta’riflardan ham foydalaniladi, jumladan, statistik ta’rifdan. Ehtimolning statistik ta’rifini keltirishdan oldin nisbiy chastota tushunchasini kiritamiz, chunki bu tushuncha statistik ta’rifda muhim ahamiyatga egadir.

Nisbiy chastota ham ehtimol kabi ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri hisoblanadi.

Ta’rif. Kuzatilayotgan A hodisa yuz bergan tajribalar sonining tajribalar jami soniga nisbati A hodisaning nisbiy chastotasi deb ataladi va

$$W(A) = \frac{k}{n}$$

formula bilan aniqlanadi, bu yerda k – A hodisa yuz bergan tajribalar soni, n – jami tajribalar soni.

Hodisa ehtimoli va nisbiy chastotasi ta’riflarini taqqoslab quyidagi xulosani chiqarish mumkin: ehtimol tajribagacha, nisbiy chastota esa tajribadan so‘ng hisoblangan qiymatdir.

12-misol. Noyabr oyining 6, 7, 11, 12, 17, 21, 24-kunlarida yomg‘ir yoqqan bo‘lsa, noyabr oyi uchun yomg‘ir yog‘ish nisbiy chastotasi: $W(A) = \frac{7}{30}$.

Bir xil sharoitda o‘tkazilgan ko‘p sondagi tajribalar seriyasi shuni ko‘rsatadiki, nisbiy chastota turg‘unlik xossasiga egadir. Bu xossaning ma’nosi quyidagicha: turli tajribalarda (bir xil sharoitda va bitta hodisa ustida) topilgan nisbiy chastota qiymatlarining bir-biridan farqi kam (tajriba soni qancha katta bo‘lsa, farq shuncha kam) bo‘ladi va bu nisbiy chastotalar biror son atrofida tebranadi. Mana shu son hodisaning ro‘y berish ehtimoli bo‘ladi. Shunday qilib, nisbiy chastotani ehtimolning taqribiy qiymati sifatida qabul qilish mumkin.

13-misol. Bizning eramizdan 2000 yillar oldin Xitoyda o‘g‘il bola tug‘ilishlar sonining jami tug‘ilgan bolalar soniga nisbati deyarli 0,5 ga tengligi hisoblangan.

14-misol. Fransuz olimi Laplas London, Peterburg va Fransiyada to‘plangan statistik ma’lumotlarga asoslanib, o‘g‘il bola tug‘ilishlar sonining jami tug‘ilgan bolalar soniga nisbati taxminan $\frac{22}{43}$ ga tengligini ko‘rsatgan. Bu son ko‘p yillar mobaynida o‘zgarmay qolishini tasdiqlagan.

15-misol. Byuffon (XVIII asr) tangani 4040 marta tashlaganda 2048 marta “gerb” tomon tushib nisbiy chastota 0,5069 ga, Pirson (XIX asr) tangani 24000 marta tashlaganda 12012 martasida “gerb” tomoni tushgan va nisbiy chastota 0,5005 ga teng bo‘lgan.

Ehtimolni statistik aniqlashda hodisa ehtimoli sifatida shu hodisa nisbiy chastotasi yoki unga yaqinroq sonni olinadi.

Umuman, agar tajribalar soni yetarlicha ko‘p bo‘lib, shu tajribalarda qaralayotgan A hodisaning ro‘y berish nisbiy chastotasi – $W(A)$ biror o‘zgarmas $p \in [0, 1]$ son atrofida turg‘un ravishda tebransa, shu p sonni A hodisaning ro‘y berish ehtimoli deb qabul qilamiz. Bunday usulda aniqlangan ehtimol hodisaning statistik ehtimoli deyiladi.

Klassik ta’rif uchun keltirilgan xossalar statistik ehtimol uchun ham saqlanib qolishini osongina tekshirib ko‘rish mumkin.

4. Geometrik ehtimollik. Yuqorida aytilganidek, tajriba natijasida ro‘y berishi mumkin bo‘lgan elementar hodisalar soni cheksiz bo‘lsa, bu holda ehtimolning klassik ta’rifidan foydalanish mumkin emas. Masalan, l kesma L kesmaning bir qismi bo‘lsin. L kesmaga tasodifiy tarzda nuqta qo‘yilsin. Bunda qo‘yilgan nuqta L kesmaning ixtiyoriy nuqtasida bo‘lishi mumkin, nuqtaning l kesmaga tushish ehtimoli uning uzunligiga proporsional bo‘ladi va l ning L kesmada qanday holatda joylashganligiga bog‘liq bo‘lmaydi deb faraz qilinsa, nuqtaning l kesmaga tushish ehtimolini ehtimolning klassik ta’rifi bilan aniqlash mumkin emas, bunday holatlardagi ehtimolning klassik ta’rifi kamchiliklarini yo‘qotish uchun geometrik ehtimollik tushunchasi kiritiladi.

Yuqoridagi misolda nuqtaning l kesmaga tushish ehtimoli

$$P = \frac{l(uzunligi)}{L(usunligi)}$$

tenglik bilan aniqlanadi.

16-misol. Tasodifiy tarzda tashlangan nuqta muntazam ABC uchburchakning A uchidan chiqqan mediananing ixtiyoriy nuqtasiga tushadi. Bu nuqtaning AO (O – ABC uchburchak medianalarining kesishish nuqtasi) kesmaga tushish ehtimoli topilsin.

Yechish. Ma’lumki, uchburchak medianalari kesishish nuqtasida uchburchak uchidan boshlab hisoblanganda 2:1 nisbatda bo‘linadi. Shu sababli, $AO = \frac{2}{3}m_A$ (m_A – A uchdan chiqqan mediana uzunligi). U holda $p = \frac{2}{3}$.

Biror tekislikda yassi G soha berilgan bo‘lib, bu soha yassi g sohani o‘z ichiga olsin. G sohaga tavakkaliga tashlangan nuqtaning g sohaga tushish ehtimolini topish talab etilsin. Bu yerda Ω elementar hodisalar fazosi G ning barcha nuqtalaridan iborat. Shuning uchun, bu holda ham klassik ta'rifdan foydalana olmaymiz. Tashlangan nuqtaning g sohaga tushish ehtimoli uning yuziga proporsional bo‘lib, g soha G sohaning qayerida joylashganligiga bog‘liq bo‘lmasin. Bu shartlarda qaralayotgan hodisaning ehtimoli

$$P = \frac{g(yuzi)}{G(yuzi)}$$

formula yordamida aniqlanadi. Bunday usuldagi ehtimollikga geometrik ehtimollik deyiladi.

17-misol. Radiusi R bo‘lgan doira ichiga tavakkaliga nuqta tashlangan. Tashlangan nuqta doiraga ichki chizilgan:

a) kvadrat ichiga;

b) muntazam uchburchak ichiga tushish ehtimollarini toping.

Nuqtaning yassi figuraga tushish ehtimoli bu figuraning yuziga proporsional bo‘lib, uning doiraning qayerida joylashishiga esa bog‘liq emas deb faraz qilinadi.

Yechish. a) $P = \dfrac{kvadratning - yuzi}{doiraning - yuzi} = \dfrac{2R^2}{\pi R^2} = \dfrac{2}{\pi}$.

b) $P = \dfrac{uchburchak - yuzi}{doira - yuzi} = \dfrac{3\sqrt{3}R^2}{4\pi R^2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

Yuqoridagi keltirilgan hollar geometrik ehtimollar uchun xususiy hollar edi. Agar sohaning o‘lchovini mes deb belgilasak, u holda nuqtaning G sohaning qismi bo‘lgan g sohaga tushish ehtimoli

$$P = \frac{mes(g)}{mes(G)}$$

formula bilan hisoblanadi.

Tasodifiy hodisalar bo‘ysinadigan qonuniyatlarni bilish shu hodisalar rivojining qanday kechishini avvaldan ko‘ra bilishga imkon beradi.

Ehtimollar nazariyasi fanining usullari hozirgi davrda amaliyotning turli sohalarida, jumladan iqtisodiyot sohasida ham keng va samarali qo‘llanilmoqda. Tasodifiylik bilan bog‘liq bo‘lgan masalalar iqtisodiy jarayonlarni tadqiq etishda, bu jarayonlarning kechishini bashorat qilishda, hamda ma'qul iqtisodiy yechimlar qabul qilishda qo‘llaniladi.

Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika usullari makro va mikro-iqtisodiyotni rejalashtirish va tashkil etishda, turli texnologik jarayonlarni tahlil etishda, mahsulot sifatini nazorat qilishda, ommaviy xizmat ko‘rsatish jarayonini tahlil qilishda va boshqa ko‘plab sohalarda o‘z tatbiqlarini topmoqda.

2-ma’ruza. EHTIMOLLARNI QO‘SHISH VA KO‘PAYTIRISH TEOREMALARI

Tayanch so‘z va iboralar: Birgalikda bo‘lgan hodisalar, erkli hodisalar, bog‘liq hodisalar, qarama-qarshi hodisalar, shartli ehtimollik, kamida bitta hodisaning ro‘y berishi ehtimoli, hodisalar to‘la guruhi.

REJA:

1. Hodisalar ustida amallar.
2. Ehtimollarni qo‘shish va ko‘paytirish qoidalari.
3. Shartli ehtimollik.
4. Hodisalarning to‘la guruhi.

1. Hodisalar ustida amallar. Hodisa ko‘p hollarda ikki yoki undan ortiq hodisalar to‘plami sifatida ham qaraladi. Bunday hodisalar murakkab hodisalar deb atalib, biz bu mavzuda ularni ta’riflashga o‘tamiz.

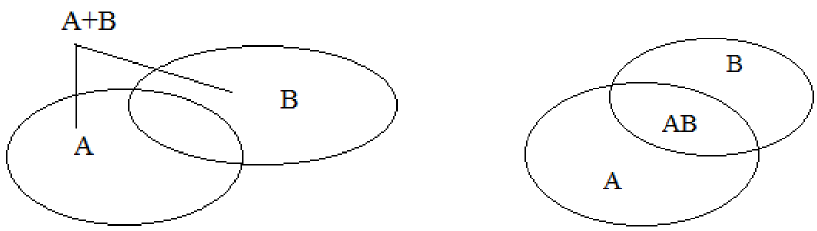
Ikkita A va B hodisalarning yig‘indisi (birlashmasi) deb, A yoki B hodisaning, yoki ikkala hodisaning ham ro‘y berishidan iborat bo‘lgan hodisaga aytiladi. A va B hodisalar yig‘indisini (birlashmasini) $A\cup B$ ko‘rinida belgilaymiz. Shunday qilib, $A\cup B$ hodisa A yoki B, yoki ikkala hodisaning ro‘y berishini ifodalaydigan barcha elementar hodisalardan iboratdir.

Ikkita A va B hodisalarning ko‘paytmasi (kesishmasi) deb, bu hodisalarning bir paytda ro‘y berishidan iborat hodisaga aytiladi. A va B hodisalarini ko‘paytmasini (kesishmasini) $A\cap B$ ko‘rinishda belgilaymiz.

Shunday qilib, $A\cap B$ hodisa A va B hodisalarning bir paytda ro‘y berishini ifodalaydigan barcha elementar hodisalaridan iborat.

Biz bundan keying belgilaslarimizda $A\cup B$ o‘rniga $A+B$ belgini, $A\cap B$ o‘rniga esa AB belgini ishlatamiz.

Hodisalar yig‘indisi va ko‘paytmasi Venn diagrammasi orqali quyidagicha tasvirlanadi.



Yuqorida keltirilgan $A\cup B$, $A\cap B$ murakkab hodisalarni ko‘p hollarda A va B hodisalar ustida bajarilgan amallar deb ham qaraladi. Bu amallar yordamida biz hodisalarni klassifikatsiyalashimiz mumkin:

a) agar A hodisaning ro‘y berishi B hodisa ro‘y berishini yo‘qqa chiqarsa va shu bilan birgalakda B hodisaning ro‘y berishi A hodisa ro‘y berishini yo‘qqa chiqarsa, u holda bu hodisalar birgalikda bo‘lmagan hodisalar deyiladi. Aks holda esa bu hodisalar birgalikda deyiladi;

b) agar A hodisaning ro‘y berishi B hodisa ro‘y berishiga bog‘liq bo‘lmasa va shu bilan birgalakda B hodisaning ro‘y berishi A hodisa ro‘y berishiga bog‘liqbo‘lmasa, u holda bu hodisalar erkli hodisalar deyiladi. Aks holda esa bu hodisalar erksiz deyiladi.

Ko‘p hollarda $A+B$ hodisani A va B hodisalarning hech bo‘lmaganda bittasining ro‘y berishi, AB hodisani esa A va B hodisalarning bir paytda ro‘y berishi deb ham qaraladi.

2. Ehtimollarni qo‘shish va ko‘paytirish qoidalari. Biz murakkab hodisalarning ro‘y berish ehtimolliklarini hisoblash qoidalari bilan tanishib chiqamiz.

1-qoida. Agar A, B hodisalar birgalikda bo‘lmasa, u holda $A+B$ hodisaning ro‘y berish ehtimoli quyidagicha hisoblanadi:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

$P(A+B)$ ehtimollik A, B hodisalardan hech bo‘lmaganda bittasining ro‘y berish ehtimoli deb ham ataladi.

1-misol. Qutida 6 ta qizil, 8 ta ko‘k va 6 ta oq shar bor. Qutidan tasodifiy ravishda olingan sharning rangli bo‘lish ehtimoli topilsin. (Oq shar rangsiz shar deb qaraladi).

Yechish. A hodisa – qutidan olingan sharning qizil bo‘lishi; B hodisa – qutidan olingan sharning ko‘k bo‘lishi bo‘lsin, u holda: $P(A)=\frac{3}{10}$, $P(B)=\frac{2}{5}$. A va B hodisalar birgalikda bo‘lmaganligi sababli $P(A+B)$ ehtimolni topish uchun 1-qoidani qo‘llash mumkin:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{3}{10}+\frac{2}{5}=\frac{7}{10}.$$

2-qoida. Agar A, B erkli (bog‘liqmas) hodisalar bo‘lsa, u holda AB – hodisaning ro‘y berish ehtimoli A va B hodisalar ehtimollarining ko‘paytmasiga teng:

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

2-misol. 1-mergan otgan o‘qning nishonga tegish ehtimoli $P(A)=0{,}8$, 2-mergan uchun bu ehtimollik $P(B)=0{,}7$ bo‘lsin. Agar ayiq o‘lishi uchun unga ikkita o‘qning tegishi shart bo‘lsa, u holda ikkala mergan o‘q uzgandan so‘ng, ayiqning o‘lish ehtimoli topilsin.

Yechish. Bu yerda A va B hodisalar o‘zaro erkli hodisalar ekanligi hamda masalaning yechimi AB hodisaning ro‘y berish ehtimolini topishdan iborat ekanligi masala shartidan ko‘rinib turibdi. Shu sababli masala yechimini topishda 2-qoidadan foydalanamiz. U holda

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0,8 \cdot 0,7 = 0,56.$$

3-qoida. Agar A, B hodisalar birgalikda bo‘lsa, u holda $A+B$ hodisaning ro‘y berish ehtimoli quyidagicha hisoblanadi:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

3-misol. 1-mergan otgan o‘qning nishonga tegish ehtimoli $P(A) = 0,8$, 2-mergan uchun bu ehtimollik $P(B) = 0,7$ bo‘lsin. Agar quyon o‘lishi uchun unga bitta o‘qning tegishi yetarli bo‘lsa, u holda ikkala mergan o‘q uzgandan so‘ng, quyonning o‘lish ehtimoli topilsin.

Yechish. Bu yerda A va B hodisalar o‘zaro erkli, ammo birgalikda hodisalar ekanligi hamda masalaning yechimi AB hodisaning ro‘y berish ehtimolini topishdan iborat ekanligi masala shartidan ko‘rinib turibdi. Shu sababli masala yechimini topishda 3-qoidadan foydalanamiz. U holda

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0,8 + 0,7 - 0,8 \cdot 0,7 = 0,94.$$

3. Shartli ehtimollik. Tasodifiy hodisa tushunchasi ma’lum bir S shartlar asosida ro‘y berishi yoki ro‘y bermasligi mumkin bo‘lgan hodisa deb aniqlagan edi. Agar hodisaning ro‘y berish ehtimolini hisoblashda faqat S shartlarning bajarilishi hisobga olinib, boshqa qo‘shimcha shartlar talab qilinmasa, u holda bu ehtimol shartsiz ehtimol deb ataladi; agar hodisaning ro‘y berish ehtimolini hisoblashda S shartlardan bo‘shqa qo‘shimcha shartlar talab qilinsa, u holda bu ehtimol shartli ehtimol deb ataladi. Agar A va B hodisalar erksiz hodisalar bo‘lsa, u holda bu hodisalarning bir paytda ro‘y berish ehtimolini hisoblash uchun shartli ehtimollik tushunchasini kiritishimi kerak bo‘ladi. Chunki, bu hodisalar bir-biriga bog‘liq bo‘lib, birinchi hodisa ikkinchi hodisa ro‘y berish sharti bilan amalga oshadi yoki aksincha. Faraz qilamiz, A hodisa B hodisa bilan birgalikda va undan so‘ng ro‘y bersin. U holda A hodisaning ro‘y berish ehtimoli $P_B(A)$ ko‘rinishda yozilib, u B shart asosida A hodisaning ro‘y berish ehtimoli deb o‘qiladi va $P_B(A)$ esa shartli ehtimollik deb ataladi.

4-misol. Qutida 4 ta oq, 3 ta qora shar bor. Qutidan qaytarib solinmaslik sharti bilan ikkita shar olindi. Agar birinchi olingan shar (A-hodisa) qora bo‘lsa, u holda ikkinchi olingan sharning (B-hodisa) oq bo‘lish ehtimolini toping: $P_A(B) = ?$

Yechish. Birinchi tajribadan so‘ng qutida 6 ta shar (4 ta oq va 2 ta qora) qoladi. Shu sababli $P_A(B)=\dfrac{2}{3}$.

4-qoida. Agar A, B erksiz (bog‘liq) hodisalar bo‘lsa, u holda AB-hodisaning ro‘y berish ehtimoli quyidagicha hisoblanadi:

$$P(AB)=P(A)P_A(B)=P(B)P_B(A).$$

Yuqoridagi qoidalarni ikkitadan ko‘p chekli sondagi hodisalar uchun ham umumlashtirish mumkin. Buning uchun quyidagi tushunchalarni kiritib olamiz.
$A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalar to‘plamini qaraymiz.

1-ta’rif. Agar $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalarning ixtiyoriy ikkitasi birgalikda bo‘lmasa, u holda bu hodisalar juft-jufti bilan birgalikda bo‘lmagan hodisalar deb ataladi.

2-ta’rif. Agar $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalarning ixtiyoriy ikkitasi o‘zaro erkli bo‘lsa, u holda bu hodisalar juft-jufti bilan erkli deyiladi.

3-ta’rif. Agar $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalar juft-jufti bilan erkli hamda har bir hodisa va boshqa hodisalarning mumkin bo‘lgan ko‘paytmalari erkli bo‘lsa, u holda $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalar birgalikda erkli hodisalar deyiladi.

1-natija. Juft-jufti birgalikda bo‘lmagan chekli sondagi $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalardan hech bo‘lmaganda birining ro‘y berish ehtimoli shu hodisalar ehtimollarining yig‘indisiga teng:

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)$$

2-natija. Agar $A_1, A_2, ..., A_n$ birgalikda erkli hodisalar bo‘lsa, u holda $A_1A_2...A_n$ ko‘paytmaning ro‘y berish ehtimoli mos hodisalar ehtimollarining ko‘paytmasiga teng:

$$P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdot...\cdot P(A_n)$$

3-natija. Umumiy holda $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalarning birgalikda ro‘y berish ehtimoli uchun quyidagi formula o‘rinli:

$$P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)P_{A_1}(A_2)\cdot...\cdot P_{A_1A_2...A_{n-1}}(A_n).$$

Shartli ehtimol tushunchasidan foydalanib, erkli hodisalarni boshqacha ta’riflash ham mumkin.

4-ta’rif. Agar A va B hodisalar uchun $P_A(B)=P(B),\ \ P_B(A)=P(A)$ bo‘lsa, u holda A va B erkli hodisalar deyiladi.

5-ta’rif. A hodisaga qarama-qarshi hodisa deb, A hodisaning ro‘y bermasligidan iborat bo‘lgan hodisaga aytiladi va $\overline{A}$ kabi belgilanadi.

Qarama-qarshi A va $\overline{A}$ hodisalar uchun

$$A+\overline{A}=\Omega,\quad A\cdot\overline{A}=\varnothing$$

munosabatli o‘rinli ekanligidan,

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

tenglik kelib chiqishini tushunish qiyin emas. Odatda, qarama-qarshi hodisalardan birining ehtimoli p bilan belgilansa, ikkinchisining ehtimoli q bilan belgilanadi. Shunday qilib, $p+q=1$.

5-misol. A hodisa kubik bir marta tashlanganda “6” ochko tushishini bildirsin. U holda $\overline{A}$ hodisa “6” ochko tushmasligini, ya’ni qolgan 1,2,3,4,5 ochkolardan birortasining tushishini bildiradi.

3-qoida. $A_1, A_2, ..., A_n$ – hodisalar uchun quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi (Bul formulasi)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{i<j} P(A_iA_j)+\sum_{i<j<k} P(A_iA_jA_k)+...+(-1)^{n-1}P(A_1A_2...A_n)$$

Eslatma. Agar $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalar birgalikda bog‘liqmas bo‘lsa, u holda ularga qarama-qarshi bo‘lgan $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n$ hodisalar ham birgalikda bog‘liqmas bo‘ladi.

6-misol. 1 va 2-to‘plardan o‘q otishda nishonga tekkizish ehtimollari mos ravishda $p_1=0{,}8$ va $p_2=0{,}9$. Bir yo‘la otishda to‘plardan kamida birining nishonga tekkizish ehtimolini toping.

Yechish. A hodisa – 1-to‘pdan otilgan o‘qning nishonga tegishi; B hodisa – 2-to‘pdan otilgan o‘qning nishonga tegishi bo‘lsin. To‘plardan otilgan o‘qlarning nishonga tegishi bir-biriga bog‘liqmas. Shuning uchun A va B hodisalar erkli hodisalardir. Demak, 3-qoidani qo‘llash mumkin:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)=0{,}8\cdot 0{,}9=0{,}72$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}8+0{,}9-0{,}72=0{,}98$$

Birgalikda erkli bo‘lgan $A_1, A_2, ..., A_n$ – hodisalardan hech bo‘lmaganda bittasining ro‘y berish ehtimoli

$$P=1-q_1q_2...q_n$$

formula bilan aniqlanadi. Bu yerda $q_i=P(\overline{A_i}),\ i=\overline{1,n}.$

3-ma’ruza. TO‘LA EHTIMOLLIK VA BAYES FORMULALARI

Tayanch so‘z va iboralar: To‘la ehtimollik formulasi, Bayes formulasi, gipoteza, qarama-qarshi hodisalar.

REJA:

1. To‘la ehtimol.

2. Bayes formulasi.

1-ta’rif. Agar tajriba natijasida $A_1, A_2, ..., A_n$ – hodisalar to‘plamidan hech bo‘lmaganda bittasi ro‘y bersa va ular juft-jufti bilan birgalikda bo‘lmasa, u holda bu hodisalar to‘plami to‘la guruh tashkil etadi deyiladi.

Ta’rifga binoan, agar $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalar to‘la guruh tashkil etsa, u holda

$$A_1 + A_2 + ... + A_n = \Omega, \quad A_i A_j = \varnothing, \quad (i \neq j)$$

munosabatlar o‘rinlidir.

1-misol. Ikkita talaba biror sport normativini topshirmoqda. Bu sinovda: A_1 – faqat bitta talabaning normativni topshirishi; A_2 – ikkala talabaning ham normativni topshirishi; A_3 – talabalarning ikkalasi ham normativni topshira olmasligi bo‘lsa, bu hodisalar to‘plami to‘la guruh tashkil etadi.

To‘la guruh tashkil etuvchi $A_1, A_2, ..., A_n$ – hodisalar uchun xos bo‘lgan quyidagi teoremani keltiramiz.

Teorema. To‘la guruh tashkil etuvchi $A_1, A_2, ..., A_n$ – hodisalar ehtimollarining yig‘indisi birga teng:

$$P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1$$

Isbot. Ta’rifga asosan to‘la guruh tashkil etuvchi hodisalardan hech bo‘lmaganda birining ro‘y berishi muqarrardir: muqarrar hodisaning ehtimoli esa birga teng bo‘lgani uchun

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = 1.$$

Ta’rifga asosan to‘la guruhda istalgan ikkita hodisa birgalikda emas, shuning uchun qo‘shish qoidasiga ko‘ra:

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1$$

Hodisalar to‘la guruhi tushunchasi yordamida qarama-qarshi hodisalarni quyidagicha ta’riflash ham mumkin.

2-ta’rif. Agar ikkita hodisa to‘la guruh tashkil etsa, u holda bu hodisalar qarama-qarshi hodisalar deb ataladi.

Yuqoridagi teoremaga asosan, qarama-qarshi hodisalar ehtimollarining yig‘indisi birga teng:

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Shuni ta'kidlab o'tamizki, ba'zan A hodisaning ehtimolini topishda avval $\overline{A}$ hodisaning ehtimolini hisoblash, keyin esa izlanayotgan ehtimolni quyidagi formula orqali topish qulay bo'ladi:

$$P(A)=1-P(\overline{A}).$$

2-misol. Qutida 20 ta detal bo'lib, ulardan 12 tasi standart. Tavakkaliga olingan 5 ta detal orasida kamida 1 standart detal bo'lishi ehtimolini toping.

Yechish. A – olingan detallar ichida kamida bittasi standart va $\overline{A}$ – olingan detallar orasida bitta ham standart detal yo'q hodisalari qarama-qarshi hodisalardir.

$$P(\overline{A})=\frac{m}{n}=\frac{C_8^5}{C_{20}^5}, \quad P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_8^5}{C_{20}^5}.$$

To'la ehtimollik va Bayes formulalari. A hodisa to'la guruh tashkil etuvchi $B_1,B_2,...,B_n$ – hodisalardan bittasining amalga oshish shartida ro'y berishi mumkin bo'lsin. $B_1,B_2,...,B_n$ – hodisalardan har birining ro'y berish ehtimollari va $P_{B_i}(A),\ (i=\overline{1,n})$ – shartli ehtimolliklar ma'lum bo'lsin. U holda, A hodisaning ro'y berish ehtimoli quyidagi to'la ehtimol formulasi bo'yicha topiladi:

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+...+P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Isbot. Shartga asosan, A hodisa ro'y berishi uchun birgalikda bo'lmagan $AB_1,...,AB_n$ hodisalardan bittasining ro'y berishi zarur va yetarli, ya'ni

$$A=AB_1+AB_2+...+AB_n.$$

Shartga asosan $\{AB_i\}$ $(i=\overline{1,n})$ hodisalar to'plami birgalikda bo'lmaganligi va $P(B_i\,A)=P(B_i)P_{B_i}(A)$ $(i=\overline{1,n})$ bo'lgani uchun

$$P(A)=P(AB_1+AB_2+...+AB_n)=P(AB_1)+P(AB_2)+...+P(AB_n)=$$
$$=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+...+P(B_n)P_{B_n}(A).$$

To'la ehtimol formulasi shartlarida A hodisaning ro'y berishida $B_1,B_2,...,B_n$ – hodisalardan qaysi birining amalga oshishi oldindan ma'lum bo'lmaganligi sabali $B_1,B_2,...,B_n$ – hodisalar gipotezalar deb ataladi.

Faraz qilamiz, tajriba o'tkazilgan bo'lib, uning natijasida A hodisa ro'y bergan bo'lsin. $B_1,B_2,...,B_n$ gipotezalarning ehtimollari qanday o'zgarganligini (A hodisa ro'y berganligi sababli) aniqlash masalasini qaraymiz. Boshqacha aytganda

$$P_A(B_1),\ P_A(B_2),...,P_A(B_n)$$

shartli ehtimollarni izlaymiz.

Ko‘rsatilgan ehtimollardan birini masalan, $P_A(B_1)$ ni topamiz. Ko‘paytirish qoidasiga ko‘ra:

$$P(A\cap B_1)=P(A)P_A(B_1)=P(B_1)P_{B_1}(A).$$

Bundan esa,

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)}.$$

Bu munosabatdagi $P(A)$ ehtimolni uning to‘la ehtimol formulasidagi ifodasi bilan almashtirib, quyidagini hosil qilamiz:

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)}=\frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P_{B_i}(A)}.$$

Qolgan gipotezalarning shartli ehtimollari ham shunga o‘xshash keltirib chiqariladi. Shunday qilib, ixtiyoriy B_k gipoteza uchun

$$P_A(B_k)=\frac{P(B_k)P_{B_k}(A)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P_{B_j}(A)},\qquad \left(k=1,2,...,n\right)$$

formulalar o‘rinli.

Bu formulalar Bayes formulalari deb ataladi (Tom Bayes (1702-1761) – ingliz matematigi). Bayes formulalari tajriba natijasida A hodisa ro‘y berganligi ma’lum bo‘lgandan so‘ng B_k gipotezalarning ehtimollarini qayta baholash imkonini beradi.

To‘la ehtimol formulasi va Bayes formulalarining qo‘llanishiga doir quyidagi misolni qaraymiz.

3-misol. Talabalarning saralash sport musobaqasida qatnashishi uchun kursning I guruhidan 4 ta, II guruhidan 6 ta, III guruhidan 5 ta talaba ajratilgan. I, II va III guruh talabalarining institut terma komandasiga kirish ehtimollari mos ravishda 0,9; 0,7; va 0,8 ga teng. Quyidagilarni toping:

a) tavakkaliga tanlangan talabaning terma komandaga tushish ehtimolini;

b) tavakkaliga tanlangan talaba terma komandaga kirgan bo‘lsa, uning I, II, III guruhdan bo‘lish ehtimollarini.

Yechish. Tanlangan talabaning terma komandaga kirishi A hodisa bo‘lsin. U holda talaba tanlash hodisasini quyidagi elementar hodisalarga ajratish mumkin:

B_1 – tanlangan talabaning I guruhdan bo‘lishi;

B_2 – tanlangan talabaning II guruhdan bo‘lishi;

B_3 – tanlangan talabaning III guruhdan bo‘lishi.

Masala shartiga ko‘ra B_1, B_2, B_3 – hodisalar to‘la guruh tashkil etadi, chunki talaba tanlashda boshqa elementar hodisa bo‘lishi mumkin emas, hamda ular birgalikda bo‘lmaydi. U holda:

$$P(B_1) = \frac{4}{15}; \quad P(B_2) = \frac{6}{15}; \quad P(B_3) = \frac{5}{15};$$

$$P_{B_1}(A) = 0,9; \quad P_{B_2}(A) = 0,7; \quad P_{B_3}(A) = 0,8.$$

a) tavakkaliga tanlangan talabaning terma komandaga kirish ehtimolini to‘la ehtimollik formulasiga asosan topamiz:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + P(B_3)P_{B_3}(A) =$$

$$= \frac{4}{15} \cdot 0,9 + \frac{6}{15} \cdot 0,7 + \frac{5}{15} \cdot 0,8 = \frac{59}{75}.$$

b) Bayes formulasiga asosan:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{15} \cdot 0,9}{\frac{59}{75}} = \frac{18}{59};$$

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2)P_{B_2}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{6}{15} \cdot 0,7}{\frac{59}{75}} = \frac{21}{59};$$

$$P_A(B_3) = \frac{P(B_3)P_{B_3}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{15} \cdot 0,9}{\frac{59}{75}} = \frac{20}{59}.$$

Misoldan ko‘rinib turibdiki, gipotezalarning ro‘y berish ehtimollari A hodisa ro‘y bergandan so‘ng o‘zgaradi.

4-ma’ruza. ERKLI SINOVLAR KETMA-KETLIGI. BERNULLI SXEMASI

Tayanch so‘z va iboralar: Erkli sinovlar ketma-ketligi, binomial formula, eng ehtimolli son, polinomial sxema.

REJA:

1. Erkli sinovlar ketma-ketligi.
2. Binomial sxema.
3. Eng katta ehtimolli son.
4. Polinomial sxema.

Ma’lumki, hodisani kuzatish uchun o‘tkaziladigan tajribalar bir necha marta takrorlanishi mumkin. U holda bu tajribalar ketma-ketligida har bir tajribaning natijasi undan oldingi tajribalar natijasiga bog‘liq bo‘lishi yoki bog‘liq bo‘lmasligi mumkin. Masalan, qutida n ta qora, m ta oq shar bor. Tajriba qutidan bitta shar olinishi, A hodisa esa olingan sharning oq chiqishi bo‘lsin. Buni ikki usulda amalga oshirish mumkin: a) har bir tajribada olingan shar tajribadan so‘ng yana qaytarib qutiga solinadi; b) har bir tajribada olingan shar tajribadan so‘ng qaytarib qutiga solinmaydi. Har bir tajribada A hodisaning ro‘y berish ehtimolini alohida ko‘rib chiqamiz:

№	Olingan shar qutiga qaytarib solinadi	Olingan shar qutiga qaytarib solinmaydi
1	$P(A)=\frac{m}{n+m}$	$P(A)=\frac{m}{n+m}$
2	$P(A)=\frac{m}{n+m}$	a) $P(A)=\frac{m}{n+m-1}$, agar 1-tajribada qora shar olingan bo‘lsa; b) $P(A)=\frac{m-1}{n+m-1}$, agar 1-tajribada oq shar olingan bo‘lsa.
3	$P(A)=\frac{m}{n+m}$	a) $P(A)=\frac{m}{n+m-2}$, agar 1-tajribada ham 2-tajribada ham qora shar olingan bo‘lsa; b) $P(A)=\frac{m-1}{n+m-2}$, agar 1-tajribada oq 2-tajribada qora shar yoki aksincha 1-tajribada qora

		2-tajribada oq shar olingan bo‘lsa; c) $P(A)=\dfrac{m-2}{n+m-2}$, agar 1-tajribada ham 2-tajribada ham oq shar olingan bo‘lsa.
…	$P(A)=\dfrac{m}{n+m}$	?

Bu misolning a) holatdagi tajribalar ketma-ketligini erkli sinovlar ketma-ketligi deb ataymiz.

1-ta’rif. Agar o‘tkazilayotgan tajribalar ketma-ketligida har bir tajribaning natijasi (ikkinchi tajribadan boshlab) oldingi tajribalar natijasiga bog‘liq bo‘lmasa, u holda bu tajribalar ketma-ketligi erkli sinovlar ketma-ketligi deb ataladi.

Biz quyida bir nechta alohida sodda hodisalardan iborat bo‘lgan murakkab hodisa tushunchasidan foydalanamiz.

Erkli sinovlar ketma-ketligining har bir tajribasida A hodisaning ro‘y berish ehtimoli yo har xil, yoki bir xil bo‘lishi mumkin. Biz soddalik uchun bu ketma-ketlikining har bir tajribasida A hodisa bir xil ehtimolga ega deb faraz qilamiz.

Faraz qilaylik, n ta erkli sinash o‘tkazilayotgan bo‘lib, ularning har birida A hodisa ro‘y berishi yoki ro‘y bermasligi mumkin bo‘lsin va har bir sinashda A hodisaning ehtimoli bir xil, chunonchi p ga teng deb hisoblaymiz, u holda ro‘y bermaslik ehtimoli $q=1-p$. Masalan, o‘yin soqqasini tashlashdan iborat tajriba o‘tkazilmoqda. Har bir tashlashda u yoki bu sonda ochkolar chiqish ehtimolligi oldingi tashlashlarda qanday ochko chiqqanligiga bog‘liqmasligi ravshan, binobarin biz A hodisa sifatida 3 ochkoning chiqishini qarasak, bu yerda erkli sinovlar ketma-ketligiga ega bo‘lamiz va $p=\dfrac{1}{6}$, $q=\dfrac{5}{6}$.

n ta sinashda A hodisaning k marta ro‘y berish, yoki $n-k$ marta ro‘y bermasligidan iborat $P_n(k)$ – ehtimolini hisoblaymiz. Buning uchun ketma-ket o‘tkazilgan n ta tajribani bitta murakkab tajriba deb qarasak, bu tajribaning natijasi $A_1, A_2, ..., A_n$ ko‘rinishda bo‘lib, uning har bir A_i $(i=\overline{1,n})$ hadi yoki A, yoki $\overline{A}$ bilan ifodalanadi. Bunday hodisalar soni 2^n ta bo‘ladi. Haqiqatan ham, $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalar ichida:

1) $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisaning $A_i = A$ $(i=\overline{1,n})$ shartni qanoatlantiradigan kombinatsiyasi bitta;

2) $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisaning $\overline{A}AA...A$ ko‘rinishdagi kombinatsiyalari soni n ta;

. . . .

$k)$ $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisaning $\underbrace{AA...A}_{k}\underbrace{\overline{A}\overline{A}...\overline{A}}_{n-k}$ ko‘rinishdagi kombinatsiyalari soni C_n^k ta;

. . . .

$n)$ $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisaning $A_i = \overline{A}$ $(i = \overline{1,n})$ shartni qanoatlantiradigan kombinatsiyasi bitta.

Shunday qilib, $C_n^0, C_n^1, ..., C_n^n$ ketma-ketlikni hosil qilamiz, u holda gruppalash xossasiga asosan, $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$.

Agar n ta tajribada A hodisaning rosa k marta ro‘y berishini B hodisa deb qarasak, u holda

$$B = (\underbrace{AA...A}_{k}\underbrace{\overline{A}\overline{A}...\overline{A}}_{n-k}) \cup (\underbrace{AA...A}_{k-1}\underbrace{\overline{A}\overline{A}...\overline{A}}_{n-k}A) \cup ... \cup \underbrace{\overline{A}\overline{A}...\overline{A}}_{n-k}\underbrace{AA...A}_{k} \qquad (1)$$

bo‘lib, u C_n^k ta haddan iborat bo‘ladi. Tajribalar ketma-ketligi erkli bo‘lganligi sababli ko‘paytirish teoremasiga ko‘ra (1) ifodadagi har bir hadning ehtimolligi $p^k q^{n-k}$ bilan aniqlanadi, u holda (1) yig‘indidagi har bir had birgalikmasligini e’tiborga olsak:

$$P(B) = C_n^k p^k q^{n-k}. \qquad (2)$$

Boshlang‘ich belgilashlarga qaytib,

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad (3)$$

Bernulli (binomial) formulasi (sxemasi) ni hosil qilamiz. (3) binomial formula deb atalishiga sabab u

$$(p+q)^n = C_n^n p^n q^o + C_n^{n-1} p^{n-1} q + ... + C_n^k p^k q^{n-k} + ... + C_n^0 p^0 q^n$$

Nyuton binomining umumiy hadini ifodalaydi.

1-misol. Har bir detalning standart bo‘lish ehtimoli $p = 0,8$ bo‘lsa, tavakkaliga olingan 5 ta detaldan 2 tasining standart bo‘lish ehtimolini toping.

Yechish. Bu yerda $n = 5, m = 2, p = 0,8$ va $q = 0,2$. Bernulli formulasiga asosan

$$P_5(2) = C_5^2\, 0,8^2 \cdot 0,2^3 = \frac{5!}{3!2!} 0,00512 = 0,0512.$$

2-misol. Tanga 10 marta tashlandi. “Gerb”ning 3 marta tushish ehtimoli qanchaga teng?

Yechish. Bu hodisaning har bir tajribadagi ro‘y berish ehtimoli $1/2$ ga teng.

Bundan, $P_{10}(3) = C_{10}^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{10!}{3!7!} \cdot \frac{1}{2^{10}} = \frac{15}{28}$

A hodisaning o‘tkazilayotgan n ta erkli sinovda kamida k_1 marta va ko‘pi bilan k_2 marta ro‘y berish ehtimoli

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = P_n\left(k_1\right) + P_n\left(k_1+1\right) + \ldots + P_n\left(k_2\right) \tag{4}$$

formula bilan hisoblanadi.

2-ta’rif. Agar n ta erkli sinovda hodisaning k_0 marta ro‘y berish ehtimoli sinovning boshqa mumkin bo‘lgan natijalari ehtimollari ichida eng kattasi bo‘lsa, ya’ni

$$P_n(k_0) = \max_{0\le k\le n}\left\{P_n(k)\right\} \tag{5}$$

bo‘lsa, u holda k_0 soni – eng ehtimolli son deb ataladi.

Eng ehtimolli son quyidagi qo‘sh tengsizlik bilan aniqlanadi:

$$np - q \le k_0 \le np + p\ . \tag{6}$$

Eng ehtimolli sonni aniqlash uchun hamma ehtimollarni hisoblab chiqmasdan, balki sinovlar soni n ni va har bir sinovda A hodisaning ro‘y berish ehtimolini bilish kifoya ekan. Haqiqatan ham, eng ehtimolli sonning ta’rifidan

$$P_n\left(k_0\right) \ge P_n\left(k_0-1\right), P_n\left(k_0\right) \ge P_n\left(k_0+1\right).$$

Bu tengsizliklarga mos ravishda $P_n\left(k_0\right)$, $P_n\left(k_0-1\right)$, $P_n\left(k_0+1\right)$larning qiymatlarini qo‘yib quyidagilarga ega bo‘lamiz.

$$\frac{n!}{k_0!\left(n-k_0\right)!}p^{k_0}\cdot q^{n-k_0} \ge \frac{n!\,p^{k_0-1}\,q^{n-k_0+1}}{\left(k_0-1\right)!\left(n-k_0+1\right)},$$

$$\frac{n!}{k_0!\left(n-k_0\right)!}p^{k_0}\,q^{n-k_0} \ge \frac{n!\,p^{k_0-1}\,q^{n-k_0+1}}{\left(k_0+1\right)!\left(n-k_0-1\right)!}p^{k_0+1}q^{n-k_0-1}$$

Bu tengsizliklarni k_0 ga nisbatan yechamiz va quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$k_0 \le np + p;\ k_0 \ge np - q$$

Oxirgi ikki tengsizlikni birlashtirib, eng ehtimolli sonni aniqlovchi tengsizlikka ega bo‘lamiz:

$$np - q \le k_0 \le np + p$$

Bu tengsizlikni aniqlovchi intervalning uzunligini

$$np + p - \left(np - q\right) = p + q = 1$$

va hodisa n ta sinov natijasida butun son marta ro‘y berishini hisobga olsak, eng ehtimolli son k_0 quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

a) agar $np - q$ son kasr bo‘lsa, u holda bitta eng ehtimolli k_0 son mavjud bo‘ladi;

b) agar $np - q$ butun son bo‘lsa, u holda k_0 va $k_0 + 1$ eng ehtimolli sonlar mavjud bo‘ladi;

c) agar np butun son bo‘lsa, u holda eng ehtimolli son $k_0 = np$ bo‘ladi.

3-misol. Tanga 6 marta tashlanadi. Gerbli tomon tushishlarining eng ehtimolli sonini toping.

Yechish. Berilgan masalaning shartlariga asosan, $n=6, p=q=1/2$. U holda, “gerb” tushishining eng ehtimolli soni k_0 ni quyidagicha topamiz: $k_0=np=3$. Demak, eng ehtimolli son 3 ekan.

Shunday qilib, eng ehtimolli sonni aniqlash jarayonida biz np sonning Bernulli sxemasida maxsus ahamiyatga ega ekanligiga ishonch hosil qilish imkoniga ega bo‘ldik. Bu shundan iborat bo‘ldiki, np songa eng yaqin bo‘lgan ikkita butun sonlardan biri (ba’zan ikkalasi, ba’zan o‘zi) eng ehtimolli son bo‘ldi.

1-eslatma. np son yuqoridagiga nisbatan ham muhimroq bo‘lgan talqinga ega. Chunonchi, np ni ma’lum ma’noda n ta tajribalardagi muvaffaqiyatlarning o‘rtacha soni deb qarash mumkin.

4-misol. Ma’lum korxonada yaroqsizlikka yo‘l qo‘yish ehtimoli 0,05 ga teng. 100 ta mahsulot orasidagi yaroqsiz mahsulotlarning o‘rtacha soni nimaga teng?

Yechish. Izlanayotgan son $np=100\cdot 0{,}05=5$ ga teng bo‘ladi.

2-eslatma. Binomial formulasini keltirib chiqarishda erkli sinovlar ketma-ketligining har bir sinashida A hodisaning ehtimoli bir xil, p ga teng deb hisoblangan edi. Endi esa bu ehtimollarni turlicha bo‘lsin deb faraz qilamiz, ya’ni $P(A_i)=p_i, P(\overline{A}_i)=q_i$, u holda (3) formula quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$P_n(k)=p_1p_2...p_kq_{k+1}...q_n+p_1q_2p_3\cdots p_{k+1}q_{k+2}\cdots q_n+q_1q_2\cdots q_{n-k}p_{n-k+1}\cdots p_n. \qquad (7)$$

(7) formulaning o‘ng tomonini hosil qilish uchun

$$\varphi_n(z)=\prod_{i=1}^{n}(q_i+p_iz) \qquad (8)$$

ko‘paytmani qarab z^k ning koeffisiyentlarini olish kifoya, bu yerda z ixtiyoriy parametr bo‘lib, $\varphi(z)$ funksiya $P_n(k)$ ehtimollarni hosil qiluvchi funksiya deb ataladi.

3-eslatma. Binomial sxemaning (Bernulli sxemasining) umumlashmasi bo‘lgan polinomial sxemani ko‘rib chiqamiz. Agar Bernulli sxemasida har bir tajribada faqat 2 ta hodisa $\overline{A}$ va A qaralgan bo‘lsa, polinomial sxemada har bir tajribada to‘la gruppa hosil qiluvchi k ta hodisa qaraladi.

Tajriba shundan iborat bo‘ladiki, n ta erkli sinov o‘tkaziladi va ularning har birida to‘la gruppa hosil qiladigan k ta $A_1, A_2, \ldots, A_k$ hodisaning faqat bittasi ro‘y berishi mumkin, bunda bu hodisalarning ehtimolliklari ma’lum:

$$p_1=P(A_1),\ p_2=P(A_2),\ \ldots,\ p_k=P(A_k).$$

n tajribada A_1 hodisa m_1 marta, A_2 hodisa m_2 marta,…, A_k hodisa m_k marta (bu yerda $m_1 + m_2 + ... + m_k = n$) ro‘y berish ehtimoli

$$P_n\left(m_1, m_2, \ldots, m_k\right) = \frac{n!}{m_1!\, m_2! \ldots m_k!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} ... p_k^{m_k} . \qquad (9)$$

Xususiy holda, $k = 2$ bo‘lganda Bernulli formulasi kelib chiqadi.

5-ma’ruza. LIMIT TEOREMALARI

Tayanch so‘z va iboralar: Lokal teorema, integral teorema, hodisalar oqimi, puasson oqimi, oqimning intensivligi, nisbiy chastotaning ehtimoldan chetlanishi.

REJA:

1. Muavr-Laplasning lokal teoremasi.
2. Laplasning integral teoremasi.
3. Nisbiy chastotaning o‘zgarmas ehtimoldan chetlanishi.
4. Puasson teoremasi.

n erkli sinovda A hodisaning k marta ro‘y berish ehtimolini hisoblashga imkon beruvchi Bernulli formulasini keltirib chiqarish uchun har bir tajribada A hodisaning ro‘y berish ehtimolini o‘zgarmas deb faraz qilganmiz. Agar n ning katta qiymatlarida $P_n\left(k\right)$ ehtimollarni hisoblashda Bernulli formulasidan foydalansak juda katta sonlar ustida arifmetik amallarni bajarishimizga to‘g‘ri keladi. Masalan, biror korxonada yaroqsiz mahsulot chiqarish ehtimoli 0,25 ga teng bo‘lsin. Tayyor mahsulotdan 500 tasi tekshirilsin. Tekshirilgan mahsulotlar orasida 25 tasining yaroqsiz bo‘lish ehtimolini topilsin. Bu holda har bir mahsulotning tekshirilishini bitta tajriba sifatida qarab, har birida A hodisaning (tekshirilgan bitta mahsulotning yaroqsiz deb topilishi) ro‘y berish ehtimoli 0,25 ga teng bo‘lgan 500 ta erkli tajriba o‘tkazilyapti deb hisoblashimiz mumkin, u holda Bernulli formulasiga asosan:

$$P_{500}(25) = C_{500}^{25}\left(0,25\right)^{25} \cdot \left(0,75\right)^{475} ,$$

bu yerda

$$C_{500}^{25} = \frac{476 \cdot 477 \cdot \ldots \cdot 499 \cdot 500}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 25} .$$

Bu misoldan ko‘rinib turibdiki, n ning katta qiymatlarida $P_n\left(k\right)$ ehtimollarni hisoblashni osonlashtirish uchun boshqa asimptotik formulalardan foydalanish zaruriyati tug‘iladi. Bu formulalar ehtimollar nazariyasida limit teoremalari deb ataluvchu teoremalarda keltiriladi. 1 va 2-teoremalar p ning qiymati 0 va 1 ga yaqin bo‘lmagan hollarda keltiriladi ($np \geq 10$).

1-teorema (Muavr-Laplasning lokal teoremasi). Agar har bir tajribada A hodisaning ro‘y berish ehtimoli p ($0 < p < 1$) o‘zgarmas bo‘lsa, u holda n ta erkli tajribada A hodisaning k marta ro‘y berish ehtimoli $P_n(k)$ uchun, k ning $\frac{|k-np|}{\sqrt{npq}} < C, (C = const)$ shartni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x) \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \tag{1}$$

tenglik bajariladi, bu yerda $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Bu teoremani Muavr 1730 yilda $p = \frac{1}{2}$ uchun, so‘ngra Laplas 1783 yilda $p \in (0;1)$ uchun isbotlagan. Biz esa bu teorema xulosasini isbotsiz qabul qilamiz. Maxsus jadvallarda $\varphi(x)$ funksiyaning faqat x argumentining musbat qiymatlariga mos qiymatlari keltirilgan. Chunki, $\varphi(x)$ funksiya juft, ya’ni $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Shunday qilib, n ta erkli sinashda A hodisaning rosa k marta ro‘y berish ehtimoli taqriban quyidagiga teng:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x). \tag{2}$$

n ning katta qiymatlarida (2) ning aniqligi oshib boradi.

1-misol. Agar har bir tajribada A hodisaning ro‘y berish ehtimoli 0,2 ga teng bo‘lsa, 400 ta tajribada A hodisa 80 marta ro‘y berish ehtimolini toping.

Yechish. $n = 400, k = 80, \ p = 0,2, \ q = 0,8$.

$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} \varphi(x) \approx \frac{1}{8} \varphi(x), \qquad x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 400 \cdot 0,2}{8} = 0$$

jadavaldan $\varphi(0) = 0,3989$. U holda: $P_{400}(80) \approx \frac{0,3989}{8} \approx 0,04986$.

2-misol. Merganning o‘qni nishonga tekkizish ehtimoli: $p = 0,75$. Mergan otgan 10 ta o‘qdan 8 tasining nishonga tegish ehtimolini toping.

Yechish. $n = 10, \ k = 8, \ p = 0,75, \ q = 0,25$

(11) formulasidan foydalansak:

$$P_{10}(8) \approx \frac{1}{\sqrt{10 \cdot 0,75 \cdot 0,25}} \varphi(x) \approx 0,7301 \cdot \varphi(x),$$

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{8 - 10 \cdot 0,75}{\sqrt{10 \cdot 0,75 \cdot 0,25}} \approx 0,36$$

jadvaldan: $\varphi(0,36) = 0,3789$. U holda: $P_{10}(8) = 0,7301 \cdot 0,3739 \approx 0,273$.

Endi bu masalani Bernulli formulasi foydalanib yechimni topmiz va boshqa natijaga: $P_{10}(8) = 0,282$ ga kelamiz.

Javoblar orasidagi katta farqni n ning qiymati kichikligi bilan tushuntiriladi. Ma’lumki, har bir tajribada A hodisaning ro‘y berish ehtimoli p o‘zgarmas bo‘lsa, u holda n (kichik n larda) ta erkli tajribada A hodisaning kamida k_1 marta va ko‘pi bilan k_2 marta ro‘y berish ehtimoli Bernulli formulasiga asosan

$$P_n(k_1, k_2) = P_n(k_1 \le k \le k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k} .$$

n ning katta qiymatlarda esa $P_n(k_1, k_2)$ ehtimolni hisoblash uchun quyidagi teoremadan foydalanamiz.

2-teorema (Muavr- Laplasning integral teoremasi). Agar har bir tajribada A hodisaning ro‘y berish ehtimoli $p(0 < p < 1)$ o‘zgarmas bo‘lsa, u holda n ta erkli tajribada A hodisaning kamida k_1 marta va ko‘pi bilan k_2 marta ro‘y berish ehtimoli $P_n(k_1, k_2)$ uchun $n \to \infty$ da

$$P_n(k_1, k_2) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi(x'') - \Phi(x') \qquad (3)$$

munosabat k_1 va k_2 $(-\infty \le x' \le x'' \le \infty)$ ga nisbatan tekis bajariladi, bu yerda

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \qquad x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}, \qquad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy .$$

Laplas funksiyasi deb ataluvchi $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy$ integralning qiymatlari uchun maxsus jadval tuzilgan. Jadvalda integralning $0 \le x \le 5$ kesmaga mos bo‘lgan qiymatlari berilgan, chunki $x > 5$ lar uchun $\Phi(x) = 0,5$ deb olish tavsiya etiladi. $\Phi(x)$ funksiya toq, ya’ni $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ bo‘lgani uchun jadvalda $x < 0$ uchun funksiya qiymatlari berilmagan.

3-misol. Detalni texnik nazorat bo‘limi (TNB) tekshirmagan bo‘lish ehtimoli $p = 0,2$. Tasodifan olingan 400 ta detaldan kamida 70 ta ko‘pi bilan 100 ta detalni TNB tekshirmagan bo‘lish ehtimolini toping.

Yechish. $p=0,2,\ q=0,8,\ n=400,\ k_1=70,\ k_2=100$, u holda

$$x'=\frac{70-400\cdot 0,2}{\sqrt{400\cdot 0,2\cdot 0,8}}=-1,25, \qquad x''=\frac{100-400\cdot 0,2}{\sqrt{400\cdot 0,2\cdot 0,8}}=2,75.$$

(3) formulaga asosan, $P_{400}(70,100)=\Phi(2,5)-\Phi(-1,25)=\Phi(2,5)+\Phi(1,25)$. Jadvaldan $\Phi(2,5)=0,4938;\ \ \Phi(1,25)=0,3944$. U holda

$$P_{400}(70,100)=0,4938+0,3944=0,8882.$$

Faraz qilaylik, A hodisaning ro‘y berish ehtimoli o‘zgarmas p ga $(0<p<1)$ teng bo‘lgan n ta erkli sinash o‘tkazilayotgan bo‘lsin. $\frac{k}{n}$ nisbiy chastotaning o‘zgarmas p ehtimoldan chetlanishini absolyut qiymati bo‘yicha oldindan berilgan $\varepsilon>0$ sondan katta bo‘lmaslik, ya’ni $\left|\frac{k}{n}-p\right|\le\varepsilon$ tengsizlik bajarilishining ro‘y berish ehtimoli: $P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)$ ni baholaymiz. Yuqoridagi tengsizlikni unga teng kuchli bo‘lgan $-\varepsilon\le\frac{k-np}{n}\le\varepsilon$ tengsizlik bilan almashtiramiz. Uni $\sqrt{\frac{n}{pq}}$ ko‘paytuvchiga ko‘paytirsak: $-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\le\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\le\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$.

Agar $x'=-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}},\ x''=\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$ belgilashlarni kiritib, Muavr-Laplasning integral teoremasidan foydalansak:

$$P\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\le\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\le\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Endi boshlang‘ich tengsizlikka qaytamiz:

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \qquad (4)$$

Xulosa qilib aytganda,

$$\left|\frac{k}{n}-p\right|\le\varepsilon$$

tengsizlik bajarilishining ro‘y berish ehtimoli taqriban Laplas funksiyasining $x=\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$ nuqtadagi ikkilangan qiymatiga teng ekan.

Muavr-Laplasning lokal teoremasi p ehtimol $p=\frac{1}{2}$ ning atrofida bo‘lganda $P_n(k)$ ni hisoblash uchun yaxshi natija beradi, lekin p bir yoki nolga yaqin qiymatlarni qabul qilsa bu formula ma’lum bir xatoliklarga olib keladi. Shuning uchun p bir yoki nolga yaqin qiymatlarni qabul qilganda $P_n(k)$ ni hisoblash uchun boshqa asimptotik formula topish zarurati tug‘iladi.

Biz p ning nolga yaqin qiymatlarini ko‘rish bilan chegaralanamiz $(np<10)$, chunki p birga yaqin qiymatlarni qabul qilsa p ni q bilan almashtirish mumkin, ya’ni p ning o‘rniga q ni ishlatish mumkin, chunki $p\to 1\Rightarrow q\to 0$.

$P_n(k)$ ehtimolning $P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$, $(1-p=q)$ ifodasini formal ravishda ikkita n, p o‘zgaruvchilarning funksiyasi deb qarash mumkin. Faraz qilamiz, k fiksirlangan, n va p esa o‘zgaradi, ya’ni n va p lar mos ravishda cheksizlikka va nolga shunday intiladiki, natijada $\lambda=np$ miqdor chegaralangan bo‘lib qolaveradi: $\lambda=np=const$. Bernulli formulasiga asosan,

$$P_n(k)=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{k!}p^k(1-p)^{n-k}.$$

Bu yerda $np=\lambda\Rightarrow p=\frac{\lambda}{n}$ almashtirish bajaramiz. U holda,

$$P_n(k)=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

n juda katta sonligini e’tiborga olib $P_n(k)$ o‘rniga $\lim\limits_{n\to\infty}P_n(k)$ ni topamiz. Shu sababli, $P_n(k)$ ehtimolning taqribiy qiymati topiladi, chunki n juda katta son bo‘lgani bilan chekli, bizda esa $n\to\infty$. Shuni ta’kidlash kerakki, $n\to\infty\Rightarrow p\to 0$ chunki $np=const$. Shunday qilib,

$$P_n(k)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}=$$

$$=\frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left[1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\right]=$$

$$=\frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

Bundan esa quyidagi teoremaning o‘rinli bo‘lishi kelib chiqadi.

3-teorema (Puassonning limit teoremasi). Agar n ta erkli sinovlar ketma-ketligida A hodisaning k marta ro‘y berishida, k fiksirlangan, n va p esa o‘zgaruvchan bo‘lib, n va p lar mos ravishda cheksizlikka va nolga shunday intilsaki, $\lambda = np$ miqdor chegaralangan bo‘lib qolaversa: $\lambda = np = const$, ya’ni turli sondagi tajribalar ketma-ketligida (n turlicha bo‘lganda ham) ham A hodisa ro‘y berishining o‘rtacha soni np o‘zgarmay qolaversa, $P_n(k)$ ehtimollik uchun

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad (5)$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi.

4-misol. Qo‘shma korxona iste’molchiga 5000 sifatli mahsulot jo‘natdi. Mahsulotning yo‘lda shikastlanish ehtimoli 0,001 ga teng bo‘lsa, yo‘lda ikki yoki undan ortiq mahsulotning shikastlanish ehtimolini toping.

Yechish. Shikastlangan mahsulotlar sonini k desak, izlanayotgan ehtimol $P_{5000}(k \geq 2)$ bo‘lib, u quyidagiga teng bo‘ladi:

$$P_{5000}(k \geq 2) = P_{5000}(2) + P_{5000}(3) + \ldots + P_{5000}(5000) = 1 - \left[P_{5000}(0) + P_{5000}(1)\right].$$

Bizning holda sinashlar soni katta va hodisa ro‘y berish ehtimoli 0 ga yaqin bo‘lganligi uchun Puasson teoremasidan foydalanamiz. $\lambda = pn = 5000 \cdot 0{,}001 = 5$ ekanligini e’tiborga olsak:

$$P_{5000}(0) = \frac{5^0 \cdot e^{-5}}{0!} = e^{-5}; \qquad P_{5000}(1) = \frac{5^1 \cdot e^{-5}}{1!} = e^{-5};$$

U holda: $P_{5000}(m \geq 2) = 1 - e^{-5} - 5e^{-5} = 1 - 6e^{-5} \approx 0{,}9596$.

6-ma’ruza. TASODIFIY MIQDORLAR VA ULARNING TAQSIMOT FUNKSIYALARI

Tayanch so‘z va iboralar: Tasodifiy miqdor, diskret tasodifiy miqdor, uzluksiz tasodifiy miqdor, taqsimot qonuni, taqsimot ko‘pburchagi, taqsimot funksiyasi, taqsimot qonuni, zichlik funksiyasi.

REJA:

1. Tasodifiy miqdorlar.
2. Taqsimot qonuni.
3. Taqsimot funksiyasi.
4. Zichlik funksiyasi.

Tasodifiy miqdor tushunchasi ehtimollar nazariyasi fanining asosiy tushunchalaridan biri hisoblanadi. Tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari bilan biz oldindan tanishmiz. Masalan, tajriba o‘yin soqqasi tashlanishidan iborat bo‘lsin. Bunda, $\Omega = \{\omega_i\}$ $(i = \overline{1,6})$ to‘plamda 6 ta elementar hodisa bo‘ladi. Ochkolar soni tasodifiy miqdor bo‘lsa, 1, 2, 3, 4, 5, 6 sonlari esa uning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari bo‘ladi.

1-ta’rif. Tasodifiy miqdor deb, tajriba natijasida mumkin bo‘lgan, oldindan noma’lum va tasodifiy sabablarga bog‘liq bo‘lgan qiymatlardan bittasi va faqat bittasini tayin ehtimol bilan qabul qiladigan kattalikka aytiladi.

Tasodifiy miqdorlar odatda lotin alfavitining bosh harflari $X, Y, Z, ...$ bilan, ularning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari esa mos ravishda alfavitning kichik harflari $x, y, z, ...$ bilan belgilanadi. Masalan, $X-$tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari quyidagicha yoziladi: $X: x_1, x_2, ..., x_n, ...$

Tasodifiy miqdorlar ikki turga ajratib o‘rganiladi:

a) diskret tasodifiy miqdorlar; b) uzluksiz tasodifiy miqdorlar.

Bu ikki tushuncha haqida ma’lumot berishdan oldin to‘plam va uning elementlari haqida ba’zi bir ma’lumotlarni berib o‘tamiz.

2-ta’rif. Agar to‘plam elementlarining sonini biror bir son bilan ifodalash mumkin bo‘lsa, u holda bu to‘plam chekli to‘plam deb ataladi.

3-ta’rif. Agar to‘plam elementlarining soni cheksiz bo‘lib uning elementlarini natural sonlar to‘plami bilan o‘zaro bir qiymatli akslantirish mumkin bo‘lsa, u holda bu to‘plam sanoqli to‘plam deb ataladi.

4-ta’rif. Agar to‘plam elementlarining sonini cheksiz bo‘lib uning elementlari va [0;1] kesmadagi haqiqiy sonlar orasida o‘zaro bir qiymatli moslik mavjud bo‘lsa, u holda bu to‘plam kontinium quvvatli to‘plam deb ataladi.

Diskret tasodifiy miqdorlarning mumkin bo‘lgan qiymatlari ayrim va ajralgan bo‘lib, uning mumkin bo‘lgan qiymatlarining soni yoki chekli, yoki sanoqli bo‘ladi.

1-misol. X tasodifiy miqdor 100 ta buyumdan iborat guruhdagi yaroqsiz buyumlar soni. Bu miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ \ldots, x_{101} = 100\,.$$

Diskret tasodifiy miqdorni tavsiflash uchun eng avvalo uning barcha mumkin bo‘lgan qiymatlarini ko‘rsatish lozim. Ammo, X tasodifiy miqdorning faqat mumkin bo‘lgan qiymatlarilarni bilish uning xususiyatlarini ta’riflashga yetarli emas, chunki tasodifiy miqdor o‘zining har bir qiymatini har xil ehtimollik bilan qabul qilishi mumkin. Shu sababli, diskret tasodifiy miqdorni to‘liq aniqlash uchun $x_1, x_2, ...$ qiymatlardan tashqari $\{X = x_1\}, \{X = x_2\}, ...$ hodisalarning ehtimollarini ham, ya’ni $p_1 = P(X = x_1),\ p_2 = P(X = x_2), ...$. larni ham ko‘rsatish lozim.

Diskret tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari va ularning ehtimollari orasidagi moslikni tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni deb ataladi.

Diskret tasodifiy miqdor taqsimot qonunini ifodalash usullari va shakllari turlicha boʻlishi mumkin.

X diskret tasodifiy miqdor taqsimot qonuni berilishining eng sodda shakli jadval boʻlib, bunda barcha mumkin boʻlgan qiymatlar va ularga mos ehtimolliklar koʻrsatilgan boʻladi:

$$X: \ x_1 \quad x_2 \ \ \dots \ \ x_n \dots$$

$$p: \ p_1 \quad p_2 \ \ \cdots \ \ p_n \cdots$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymatlar odatda ortib borish, yoki kamayib borish tartibida yoziladi.

Bundan tashqari, $\{X = x_i\}$ hodisalarning ixtiyoriy ikkitasi birgalikdamasligi va $\{X = \{x_i\}\}$ hodisalar toʻplami toʻla gruppa tashkil etganligi sababli

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots = \sum_i p_i = 1$$

tenglik har doim oʻrinli boʻladi. Ba'zan diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni grafik usulda (taqsimot koʻpburchagi yordamida) ham beriladi.

Taqsimot koʻpburchagini hosil qilish uchun, abssissalar oʻqida tasodifiy miqdorning mumkin boʻlgan qiymatlari, ordinatalar oʻqida esa ularga mos ehtimollar qoʻyiladi, keyin esa (x_1, p_1), (x_2, p_2),... nuqtalarni kesmalar bilan tutashtiriladi. Taqsimot qonuni formula (analitik) usulida ham beriladi.

2-misol. Tanga 5 marta tashlandi. “Gerb” tomonning tushish soni X tasodifiy miqdor boʻlsin. X tasodifiy miqdorning mumkin boʻlgan qiymatlari 0, 1, 2, 3, 4, 5 sonlardan iborat boʻladi. Tasodifiy miqdorning bu qiymatlarni qabul qilish ehtimollari Bernulli formulasi yordamida hisoblanadi. Masalan, $P(X = 3) = C_5^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32}$ va hakozo. U holda

$$X: \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$p: \quad \frac{1}{32} \quad \frac{5}{32} \quad \frac{10}{32} \quad \frac{10}{32} \quad \frac{5}{32} \quad \frac{1}{32}$$

koʻrinishdagi jadvalni hosil qilamiz.

Diskret tasodifiy miqdorlarning berilish usullarini uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun qoʻllab boʻlmaydi. Chunki uzluksiz tasodifiy miqdorlarning qabul qilishi mumkin boʻlgan qiymatlar roʻyxatini tuzish mumkin emas. Shu sababli uzluksiz tasodifiy miqdorlarni ta'riflash uchun taqsimot funksiyasi tushunchasi kiritiladi.

5-ta'rif. X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi deb, uning x ($x-$ ixtiyoriy haqiqiy son) dan kichik qiymatlarni qabul qilish ehtimolini aniqlovchi

$$F(x) = P(X < x) \tag{1}$$

funksiyaga aytiladi.

Ba'zan $F(x)-$funksiyani integral taqsimot funksiyasi deb ham ataladi.

Endi taqsimot funksiyasidan foydalanib, uzluksiz va diskret tasodifiy miqdorlarning qat'iy ta'rifini beramiz.

6-ta'rif. Agar tasodifiy miqdorning $F(x)-$taqsimot funksiyasi uzluksiz bo'lsa, bu tasodifiy miqdor uzluksiz tasodifiy miqdor deyiladi.

Diskret tasodifiy miqdorning $F(x)$ – taqsimot funksiyasi chekli yoki sanoqli sondagi I tur uzulishlarga ega bo'ldi.

Tasodifiy miqdorlarning taqsimot funksiyalari quyidagi xossalarga ega.

1-xossa. Taqsimot funksiyaning qiymatlari [0;1] kesmaga tegishli: $0 \le F(x) \le 1$

Isbot. Bu xossaning isboti taqsimot funksiyani ehtimol sifatida ta'riflanishdan, ya'ni $F(x)=P(X<x)$ ekanligidan kelib chiqadi.

2-xossa. Taqsimot funksiyasi kamaymaydigan funksiyadir, ya'ni $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2)$.

Isbot. Faraz qilamiz, $x_1 < x_2$ bo'lsin, u holda $(X < x_2)$ oraliqni quyidagicha yozib olish mumkin $(X<x_2)=(X<x_1)+(x_1 \le X < x_2)$. $(X<x_1),(x_1 \le X < x_2)$ tasodifiy hodisalar birgalikda emasligidan quyidagi tenglikni yozish mumkin $P(X<x_2)=P(X<x_1)+P(x_1 \le X < x_2)$.

Endi taqsimot funksiyaning ta'rifidan foydalansak,

$$F(x_2)-F(x_1)=P(x_1 \le X < x_2) \quad (2)$$

tenglikni hosil qilamiz. Ehtimolning nomanfiyligidan kerakli natijani olamiz 2-xossadan quyidagi natijalarni keltirib chiqarish mumkin.

1-natija. X tasodifiy miqdorning $[a;b)$ intervalda yotuvchi qiymatlarni qabul qilish ehtimoli quyidagicha aniqlanadi.

$$P(a \le X < b)=F(b)-F(a). \quad (3)$$

Buning isboti (2) formulada $x_1=a, x_2=b$ almashtirishdan kelib chiqadi

2-natija. X uzluksiz tasodifiy miqdorning belgilangan bitta aniq qiymatni qabul qilishi ehtimoli nolga teng, ya'ni $P(X=x_0)=0$.

Buning isboti (2) formulada $x_1=x_0, x_2=x_0+\Delta x$ almashtirish so'ngra $\Delta x \to 0$ limitni hisoblashdan kelib chiqadi. Shu sababli, uzluksiz tasodifiy miqdorning bitta qiymatni qabul qilish ehtimolini hisoblashning ahamiyati yo'q va shunga ko'ra quyidagi munosabatlar o'rinlidir:

$$P(a \le X \le b)=P(a < X \le b)=P(a \le X < b)=F(b)-F(a).$$

3-xossa. Agar tasodifiy miqdorning_mumkin bo'lgan qiymatlari $(a;b)$ intervalga tegishli bo'lsa, u holda

$$\lim_{x \to a-0} F(x)=0, \lim_{x \to b-0} F(x)=1 \quad (4)$$

munosabatlar o‘rinli bo‘ladi.

3-natija. Agar tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari butun Ox o‘qda joylashgan bo‘lsa, u holda quyidagi munosabatlar o‘rinli:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x)=0, \lim_{x\to\infty} F(x)=1 \tag{5}$$

3-misol. X tasodifiy miqdor

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ \frac{1}{4}x+\frac{1}{4}, & -1<x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

taqsimot funksiya bilan berilgan bo‘lsin. Sinash natijasida X tasodifiy miqdor $(0;2)$ intervalga tegishli qiymatlarni qabul qilish ehtimolini toping.

Yechish. $P(0\le X<2)=F(2)-F(0)=\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$

4-misol. X diskret tasodifiy miqdor quyidagi

$$\begin{array}{llll} X: & 1 & 4 & 8 \\ p: & 0,3 & 0,1 & 0,6 \end{array}$$

taqsimot qonuni bilan berilgan bo‘lsin. Uning taqsimot funksiyasini toping.

Yechish. $F(x)=\begin{cases}0, & agar \quad x\le 1,\\ 0,3, & agar \quad 1<x\le 4,\\ 0,4, & agar \quad 4<x\le 8,\\ 1, & agar \quad x>8.\end{cases}$

Yuqorida uzluksiz tasodifiy miqdorlarni taqsimot funksiyalari yordamida aniqlagan edik. Agar tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda tasodifiy miqdorning zichlik (differensial) funksiyasi tushunchasini kiritishimiz kerak bo‘ladi.

7-ta’rif. Tasodifiy miqdorning zichlik (differensial) funksiyasi deb, taqsimot funksiyasidan olingan birinchi tartibli hosilaga aytiladi va quyidagicha aniqlanadi

$$F'(x)=f(x). \tag{6}$$

Uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun zichlik funksiyasi muhim ahamiyatga ega bo‘lib, bu funksiya yordamida uzluksiz tasodifiy miqdorlarning barcha xarakteristikalarini aniqlash mumkin. Bu yerda ularning ba’zilarini keltirib o‘tamiz.

Teorema. X uzluksiz tasodifiy miqorning $(a;b)$ intervalga tegishli qiymatlarni qabul qilishi ehtimoli zichlik funksiyasidan a dan b gacha olingan aniq integral bilan aniqlanadi:

$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx. \tag{7}$$

Isbot. Ma’lumki, 1-natijaga asosan

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a).$$

Agar bu yerda Nyuton-Leybnits formulasi va zichlik funksiyasining ta’rifi (6) ifodadan foydalansak, quyidagini hosil qilamiz

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Bundan tashqari, X tasodifiy miqdorning $f(x)$ zichlik funksiyasini ma’lum bo‘lsa, uning $F(x)$ taqsimot funksiyasini topish uchun quyidagi aniqmas integraldan foydalaniladi

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt. \tag{8}$$

Tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi quyidagi xossalarga ega.

1-xossa. $f(x)$ – funksiya nomanfiy funksiyadir, ya’ni $f(x) \ge 0$.

Isbot. Bu xossa $f(x)$ differensial funksiya kamaymaydigan $F(x)$ taqsimot funksiyaning hosilasi ekanligidan kelib chiqadi.

2-xossa. Agar tasodifiy miqdor sonlar o‘qida aniqlangan bo‘lsa, quyidagi tenglik o‘rinli bo‘ladi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \tag{9}$$

Isbot. Nyuton-Leybnits formulasi va zichlik funksiyasining ta’rifiga asosan;

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{x\to\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x) = 1 - 0 = 1.$$

1-eslatama. Agar X tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari $(a;b)$ oraliqdan iborat bo‘lsa, u holda yuqoridagi formula

$$\int_a^b f(x)dx = 1 \tag{10}$$

ko‘rinishini oladi. Bu formula geometrik nuqtai nazardan Ox o‘q, $f(x)$ funksiya, $x = a$ va $x = b$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzi 1 ga tengligini bildiradi.

2-eslatama. Zichlik funksiyasi faqat uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun mavjud.

5-misol. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan:

$$f(x)=\begin{cases}0, & agar\ x\le 0,\\ \cos x, & agar\ 0<x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 0, & agar\ x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

$F(x)$ taqsimot funksiyani toping.

Yechish. $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$ formuladan foydalanamiz. Agar x $\le$ 0 bo‘lsa,

F(x)=0. Demak, $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt=0$.

Agar 0< x $\le \frac{\pi}{2}$ bo‘lsa, u holda $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} f(t)dt+\int\limits_{0}^{x}\cos tdt=\sin x$.

Agar $x>\dfrac{\pi}{2}$ bo‘lsa, u holda $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} f(t)dt+\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos tdt+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)dt=1$.

Demak, izlanayotgan taqsimot funksiyasi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$F(x)=\begin{cases}0, & agar\ x\le 0,\\ \sin x, & agar\ 0<x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 1, & agar\ x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

X uzluksiz tasodifiy miqdor quyidagi zichlik funksiyaga ega:

$$f(x)=\begin{cases}0, & agar\ x\le 0,\\ \dfrac{2}{3}\sin x, & agar\ 0<x\le \dfrac{\pi}{3},\\ 0, & agar\ x>\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$$

6-misol. X tasodifiy miqdorning $\left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{4}\right)$ intervalga tegishli qiymatni qabul qilish ehtimolini toping.

Yechish. $P(a<X<b)=\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ formuladan foydalanamiz. U holda

$$P\left(\frac{\pi}{6}<X<\frac{\pi}{4}\right)=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx=\frac{\sqrt{2}}{9}.$$

7-ma'ruza. TASODIFIY MIQDORLARNING SONLI XARAKTERISTIKALARI

Tayanch so'z va iboralar: Matematik kutilma, chetlanish, o'rtacha kvadratik chetlanish, dispersiya, korrelyatsiya koeffisiyenti, taqsimot funksiya, taqsimotning zichlik funksiyasi.

REJA:

1. Matematik kutilma va uning xossalari.
2. Dispersiya va uning xossalari.
3. O'rtacha kvadratik chetlanish.
4. Uzluksiz tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmasi.
5. Uzluksiz tasodifiy miqdorlarning dispersiyasi.

Ma'lumki, X tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni X miqdorni to'liq tavsiflab beradi. Ammo ko'pincha taqsimot qonuni noma'lum bo'lib, uni aniqlash katta qiyinchiliklar tug'diradi va biz kam ma'lumot bilan chegaralanishimizga to'g'ri keladi. Ba'zida esa tasodifiy miqdorni xarakterlovchi sonlarni qo'llash foydalidir. Bu sonlar tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalari deb ataladi va ularning vazifasi tasodifiy miqdorning eng muhim xususiyatlarini qisqa shaklda ifodalashdir.

Tasodifiy miqdorning muhim sonli xarakteristikalaridan biri matematik kutilma deb ataladi. Juda ko'p masalalarning yechimini matematik kutilmani bilish orqali hal etish mumkin. Masalan, viloyatlarni taqqoslovchi ko'rsatkichlardan biri ularda yetishtirilgan hosilning o'rtachasi, ya'ni matematik kutilmasidir.

1-ta'rif. X diskret tasodifiy miqdor qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlarining mos ehtimollariga ko'paytmalari yig'indisiga uning matematik kutilmasi deb aytiladi.

X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni:

$$\begin{array}{llll} X: & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p: & p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{array}$$

berilgan bo'lsin. U holda uning $M(X)$ – matematik kutilmasi

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \qquad (1)$$

tenglik bilan aniqlanadi.

X tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari soni cheskiz bo'lib, u

$$X:\quad x_1 \quad x_2 \ \dots\ x_n \dots$$
$$p:\quad p_1 \quad p_2 \ \dots\ p_n \dots$$

taqsimotga ega bo‘lsa, u holda uning matematik kutilmasi

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \qquad (2)$$

formula bilan aniqlanadi. Bunda oxirgi qator absolyut yaqinlashadi deb faraz qilinadi. Aks holda, bu tasodifiy miqdor matematik kutilmaga ega bo‘lmaydi.

1-misol. Taqsimot qonuni

$$X:\quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6$$
$$p:\quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6}$$

ko‘rinishda bo‘lgan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping.

Yechish. (1) formuladan foydalanamiz:

$$M(X) = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = 3{,}5 .$$

2-misol. Puasson qonuni bo‘yicha taqsimlangan X diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping.

Yechish. Puasson qonuni quyidagi jadval bilan aniqlanadi:

$$X:\quad 0 \qquad 1 \qquad 2 \qquad 3 \quad \dots \quad k$$
$$p:\quad e^{-\lambda} \quad \lambda e^{-\lambda} \quad \frac{\lambda e^{-\lambda}}{2!} \quad \frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!} \quad \dots \quad \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \cdot$$

U holda

$$M(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda .$$

Shunday qilib, Puasson taqsimotini xarakterlovchi parametr λ X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini bildirar ekan.

3-misol. Agar A hodisaning ro‘y berish ehtimoli p bo‘lsa, bitta tajribada A hodisa ro‘y berish sonlarining matematik kutilmasini toping.

Yechish. Bitta tajribada A hodisaning ro‘y berishi sonlarini X tasodifiy miqdor desak, u faqat ikkita qiymat qabul qilishi mumkin: $x_1 = 1$ (A hodisa ro‘y berdi), bunda $P(X = x_1) = p$; $x_2 = 0$ (A hodisa ro‘y bermadi), bunda $P(X = x_2) = q$. U holda: $M(X) = p$.

X tasodifiy miqdor ustida n marta sinov o‘tkazilib, uning natijalari quyidagicha bo‘lsin:

$$\begin{array}{l} X:\ x_1 \ \ x_2 \ \dots\ x_k \\ n:\ n_1 \ \ n_2 \ \dots\ n_k \end{array} .$$

Yuqoridagi satr X miqdorning kuzatilgan qiymatlarini, pastki satr esa bu qiymatlarning chastotalarini bildiradi, ya'ni $x_i \quad (i=\overline{1,k})$ qiymatni X miqdor n_i marta qabul qilgan.

$\overline{X}$ orqali kuzatilgan barcha qiymatlarning o'rta arifmetigini belgilaylik, u holda

$$\overline{X}=\frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k n_k}{n},$$

yoki

$$\overline{X}=x_1\frac{n_1}{n}+x_2\frac{n_2}{n}+\ldots+x_k\frac{n_k}{n}=x_1W_1+x_2W_2+\ldots+x_kW_k$$

bu yerda $W_1, W_2, \ldots, W_k$ – mos ravishda $x_1, x_2, \ldots, x_k$ qiymatlarning nisbiy chastotalari.

Demak, $\overline{X}=M\left(X\right)$, ya'ni X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi uning kuzatiladigan qiymatlari o'rta arifmetigiga taqriban teng.

Matematik kutilma quyidagi xossalarga ega.

1-xossa. O'zgarmas miqdorning matematik kutilmasi o'zgarmasning o'ziga teng: $M\left(C\right)=C$.

Isbot. C o'zgarmas miqdorni yagona C qiymatni 1 ga teng ehtimol bilan qabul qiladigan tasodifiy miqdor deb qarash mumkin. Shuning uchun, $M\left(C\right)=C\cdot 1=C$.

1-eslatma. X diskret tasodifiy miqdorning o'zgarmas C kattalikka ko'paytmasini quyidagicha aniqlaymiz: $X: x_1, x_2, ..., x_n \Rightarrow CX: Cx_1, Cx_2, ..., Cx_n$.

2-xossa. O'zgarmas ko'paytuvchini matematik kutilma belgisi ostidan chiqarish mumkin: $M(CX)=CM(X)$.

Isbot. X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni

$$\begin{array}{llll} X: & x_1 & x_2 \; ... & x_n \\ p: & p_1 & p_2 \; \cdots & p_n \end{array}$$

ko'rinishda bo'lsin. Uholda 1-eslatmaga asosan,

$$\begin{array}{llll} CX: & Cx_1 & Cx_2 \ldots & Cx_n \\ p: & p_1 & p_2 \; \cdots & p_n \end{array}.$$

Bundan CX tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini hisoblaymiz

$$M\left(CX\right)=Cx_1\, p_1 + Cx_2\, p_2 + \ldots + C\, x_n\, p_n = CM(X).$$

3-xossa. Chekli sondagi tasodifiy miqdorlar yig'indisining matematik kutilmasi ularning matematik kutilmalari yig'indisiga teng:

$$M\left(X_1+X_2+\ldots+X_n\right)=M\left(X_1\right)+M\left(X_2\right)+\ldots+M\left(X_n\right)$$

4-xossa. Chekli sondagi bog‘liqmas tasodifiy miqdorlar ko‘paytmasining matematik kutilmasi ular matematik kutilmalarning ko‘paytmasiga teng:

$$M\left(X_1X_2...X_n\right)=M\left(X_1\right)M\left(X_2\right)...M\left(X_n\right).$$

3-xossa va 3-misoldan foydalanib quyidagi teoremani isbotlash mumkin.

1-teorema. n ta bog‘liqmas tajribalarda A hodisa ro‘y berishining matematik kutilmasi: $M(X)=np$.

Matematik kutilmalarining tengligi tasodifiy miqdorlarning qabul qiladigan qiymatlari bir xil deb xulosa chiqarishga imkon bermaydi. Masalan,

$$X:\ -0,5\quad 0\quad 0,5 \qquad\qquad Y:\ -50\quad 0\quad 50$$

$$p:\quad 0,3\ \ 0,4\ \ 0,3 \qquad\qquad p:\quad 0,3\ \ 0,4\ \ 0,3$$

tasodifiy miqdorlarda $M(X)=M(Y)=0$, ammo ularning mumkin bo‘lgan qiymatlari turlichadir. Shu sababli tasodifiy miqdorning tarqoqligini aniqlovchi ikkinchi sonli xarakteristika – dispersiya tushunchasini kiritamiz.

Dispersiya tushunchasini kiritishdan oldin tasodifiy miqdorning matematik kutilmasidan chetlanishi tushunchasini kiritib olamiz.

2-ta’rif. Tasodifiy miqdor va uning matematik kutilmasi orasidagi farqni uning chetlanishi deb ataymiz va $X-M\left(X\right)$ ko‘rinishda belgilaymiz.

Tasodifiy miqdor chetlanishining muhim xossasini ko‘rsatuvchi quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

2-teorema. Tasodifiy miqdor chetlanishining matematik kutilmasi nolga teng: $M\left(X-M\left(X\right)\right)=0$.

Amaliyotda tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlarini uning o‘rtachasi atrofidagi joylashish tarqoqligini baholash zarurati tez-tez uchrab turadi. Masalan, merganlik darajasini baholashda. Shu sababli, dispersiya tushunchasi kiritiladi, chunki tasodifiy miqdor chetlanishi qiymatlar tarqoqligini baholay olmasligi 2-teoremadan ko‘rinib turibdi.

3-ta’rif. X tasodifiy miqdorning $D\left(x\right)$ – dispersiyasi deb, uning chetlanishi kvadratining matematik kutilmasiga aytiladi:

$$D\left(X\right)=M\left(X-M\left(X\right)\right)^2. \tag{3}$$

Diskret tasodifiy miqdor uchun bu formula ushbu ko‘rinishni oladi:

$$D\left(X\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-M\left(X\right)\right)^2p_i. \tag{4}$$

4-ta’rif. X tasodifiy miqdorning $\sigma\left(X\right)$ – o‘rtacha kvadratik chetlanishi deb, dispersiyadan olingan arifmetik kvadrat ildizga aytiladi:

$$\sigma\left(X\right)=\sqrt{D\left(X\right)}. \tag{5}$$

Dispersiyaning o'lchamligi tasodifiy miqdor o'lchamligining kvadratiga tengdir. O'rtacha kvadratik chetlanishniki esa tasodifiy miqdor o'lchami bilan bir xil bo'ladi.

Agar X biror bir qimmatbaho qog'ozning daramodliligi bo'lsa, $M(X)$ uning o'rtacha daromadliligini, $D(X)$ esa riskini ifodalaydi.

4-misol. Agar A hodisaning ro'y berish ehtimoli p ga teng bo'lsa, u holda A hodisaning bitta sinovda ro'y berish sonining matematik kutilmasi, dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishini toping.

Yechish. Bu tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{array}{lll} X: & 0 & 1 \\ p: & q & p \end{array}.$$

U holda, $M\left(X\right)=0\cdot q+1\cdot p=p$,

$$D\left(X\right)=\left(0-p\right)^{2}\cdot q+\left(1-p\right)^{2}\cdot p=qp^{2}+pq^{2}\left(p+q\right)=qp;$$

$$\sigma\left(X\right)=\sqrt{pq}$$

Dispersiyani hisoblash uchun quyidagi formuladan foydalanish tavsiya etiladi:

$$D\left(X\right)=M\left(X^{2}\right)-\left(M\left(X\right)\right)^{2}.$$

Tasodifiy miqdor dispersiyasi quyidagi xossalarga ega.

1-xossa. O'zgarmas miqdorning dispersiyasi nolga teng: $D\left(C\right)=0$.

Isbot. C o'zgarmas miqdorni C qiymatini 1 ehtimol bilan qabul qiladi deb qarash mumkin. U holda

$$M\left(C\right)=C \quad \text{va} \quad D\left(C\right)=\left(C-C\right)^{2}\cdot 1=0$$

2-xossa. O'zgarmas ko'paytuvchi dispersiya belgisidan kvadrati bilan chiqariladi: $D\left(CX\right)=C^{2}D\left(X\right)$.

3-xossa. Chekli sondagi o'zaro bog'liqmas tasodifiy miqdorlar yig'indisining dispersiyasi ular dispersiyalarining yig'indisiga teng:

$$D\left(X_{1}+X_{2}+\ldots+X_{n}\right)=D\left(X_{1}\right)+D\left(X_{2}\right)+\ldots+D\left(X_{n}\right)$$

Natija. Bog'liqmas ikkita tasodifiy miqdorlar ayirmasining dispersiyasi ular dispersiyalarining yig'indisiga teng.

$$D\left(X_{1}-X_{2}\right)=D\left(X_{1}\right)+D\left(X_{2}\right)$$

Ushbu natija ikkitadan ortiq tasodifiy miqdorlar uchun o'rinli ekanligini isbotlash qiyin emas.

5-misol. Quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan X diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi, dispersiyasi va o'rtacha kvadrat chetlanishini hisoblang.

$$X: \ -2 \quad 1 \quad 3 \quad 6$$
$$p: \ 0,4 \quad 0,2 \quad 0,1 \quad 0,3$$

Yechish.

$$M\left(X\right)=2\cdot 0,4+1\cdot 0,2+30,1+6\cdot 0,3=1,5,$$

$$D\left(X\right)=M\left(X-M\left(X\right)\right)^2=$$
$$=\left(-2-1,5\right)^2\cdot 0,4+\left(1-1,5\right)^2\cdot 0,2+\left(3-1,5\right)^2\cdot 0,1+\left(6-1,5\right)^2\cdot 0,3=11,25$$
$$\sigma\left(X\right)=\sqrt{D\left(X\right)}=\sqrt{11,25}\approx 3,36.$$

Biz dispersiyani ta'rif bo‘yicha hisobladik. Endi $D\left(X\right)=M\left(X^2\right)-M^2\left(X\right)$ formula bo‘yicha hisoblaylik. Buning uchun dastlab X^2 tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzib olamiz.

$$X^2: \ 4 \quad 1 \quad 9 \quad 36$$
$$p: \ 0,4 \quad 0,2 \quad 0,1 \quad 0,3$$
$$D\left(X\right)=M\left(X^2\right)-M^2\left(X\right)=13,5-2,25=11,25.$$

Diskret tasodifiy miqdorlar kabi uzluksiz tasodifiy miqdorlarda ham matematik kutilma va dispersiya tushunchalari katta axamiyatga ega. Uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun bu tushunchalar quyidagicha kiritiladi.

5-ta'rif. Mumkin bo‘lgan qiymatlari $(a;b)$ intervalga tegishli bo‘lgan X uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi deb,

$$M(X)=\int_a^b xf(x)dx \tag{6}$$

tenglik bilan aniqlanuvchi kattalikka aytiladi.

Agar X uzluksiz tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlar Ox o‘qqa tegishli bo‘lsa, u holda matematik kutilma formulasi (6) quyidagi ko‘rinishni oladi

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx. \tag{7}$$

Bu holatda bu xosmas integral absolyut yaqinlashuvchi, ya'ni $\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x)dx$ integralning qiymati mavjud deb faraz qilinadi.

Agar tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari $(a;b)$ intervalga tegishli bo‘lsa, u holda uning dispersiyasi uchun

$$D(X)=\int_a^b (x-M(X))^2 f(x)dx \tag{8}$$

formula o‘rinli bo‘ladi.

Agar tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari Ox o‘qqa tegishli bo‘lsa, u holda uning dispersiyasi uchun

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx \qquad (9)$$

formula o‘rinli bo‘ladi.

Uzluksiz tasodifiy miqdorning dispersiyasini hisoblash uchun (8) va (9) formuladan foydalanish noqulay hisoblanadi, shu sababli dispersiyani hisoblash uchun (8) formulaning qulay ko‘rinishini keltirib chiqaramiz.

$$D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2 f(x)dx = \int_a^b x^2 f(x)dx - 2\int_a^b xM(X)f(x)dx + \int_a^b M^2(X)f(x)dx =$$

$$= M(X^2) - 2M(X)\int_a^b xf(x)dx + M^2(X)\int_a^b f(x)dx = M(X^2) - M^2(X) \cdot$$

(9) formulaga ham bu ko‘rinishdagi formulani keltirib chiqarish mumkin. Shunday qilib, ko‘p hollarda dispersiyani hisoblash uchun

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) \qquad (10)$$

formuladan foydalaniladi.

Uzluksiz tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmasi va dispersiyasi uchun ham diskret tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmasi va dispersiyalarining xossalari o‘rinli bo‘ladi.

6-misol. Ushbu

$$F(x) = \begin{cases} 0, & agar \quad x \le 0, \\ x, & agar \quad 0 < x \le 1, \\ 1, & agar \quad x > 1. \end{cases}$$

taqsimot funksiyasi bilan berilgan X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasini toping.

Yechish. Ma’lumki,

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & agar \quad x < 0, \\ 1, & agar \quad 0 \le x < 1, \\ 0, & agar \quad x \ge 1. \end{cases}$$

(6) formuladan foydalanib X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini topamiz:

$$M(X) = \int_0^1 x \cdot 1 \cdot dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

(10) formuladan foydalanib X tasodifiy miqdorning dispersiyasini topamiz:

$$D(X)=\int_0^1 x^2\cdot 1dx-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}.$$

Endi tasodifiy miqdorlar orasidagi bog‘lanish darajasini aniqlashga yordam beruvchi ba’zi bir tushunchalarni kiritamiz.

6-ta’rif. X va Y tasodifiy miqdorlarning korrelyatsiya momenti (yoki kovariatsiyasi) deb, quyidagi songa aytiladi:

$$K_{xy}=M\left[\left(X-M\left(X\right)\right)\left(Y-M\left(Y\right)\right)\right].$$

X va Y tasodifiy miqdorlar diskret bo‘lsa, u holda bu formula quyidagi ko‘rinishini oladi:

$$K_{xy}=\sum_{i\cdot j}\left(x_i-M\left(X\right)\right)\left(y_i-M\left(Y\right)\right)p_{ij},$$

bunda $p_{ij}=P\left(X=x_i;Y=y_j\right)$.

Korrelyatsiya momenti ifodasini matematik kutilma xossalari asosida quyidagicha almashtirilish mumkin:

$$M\left(X-M\left(X\right)\right)\left(Y-M\left(Y\right)\right)=M\left[XY-XM\left(Y\right)-YM\left(X\right)+M\left(X\right)M\left(Y\right)\right]=$$
$$=M\left(XY\right)-M\left(X\right)M\left(Y\right)-M\left(Y\right)M\left(X\right)+M\left(X\right)M\left(Y\right)=M\left(XY\right)-M\left(X\right)M\left(Y\right).$$

3-teorema. Agar ikkita tasodifiy miqdor o‘zaro bog‘liq bo‘lmasa, u holda ularning korrelyatsiya momenti nolga teng bo‘ladi.

7-ta’rif. X va Y tasodifiy miqdorlarning korrelyatsiya koeffisiyenti deb,

$$r_{xy}=\frac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$$

tenglik bilan aniqlanadigan kattalikka aytiladi.

Korrelyatsiya momenti uchun quyidagi $\left|K_{xy}\right|\le\sqrt{D_xD_y}$ tengsizlik o‘rinli bo‘lishini ko‘rsatish mumkin, chunki $\left|r_{xy}\right|\le 1$.

Agar X va Y tasodifiy miqdorlar bog‘liqmas bo‘lsa, u holda ularning korrelyatsiya koeffisiyenti nolga tengligini ko‘rsatish qiyin emas.

Quyidagi teorema tasodifiy miqdorlar orasida bog‘lanishni tavsiflashda korrelyatsiya koeffisiyentining ahamiyatini yana ham batafsil oydinlashtirib beradi.

4-teorema. Y tasodifiy miqdor X tasodifiy miqdorning chiziqli funksiyasi, ya’ni $Y=aX+b$ bo‘lsin, u holda agar $a>0$ bo‘lsa, $r_{xy}=1$, agar $a<0$ bo‘lsa, $r_{xy}=-1$ bo‘ladi.

Isbot.

$$K_{xy}=M\left[\left(X-M\left(X\right)\right)\left(Y-M\left(Y\right)\right)\right]=M\left[\left(X-M\left(X\right)\right)\left(aX+b-M\left(Y\right)\right)\right]=$$

$$= M\left[\left(X - M\left(X\right)\right)\left(aX + b - aM\left(X\right) - b\right)\right] = aM\left[\left(X - M\left(X\right)\right)\right]^2 = aD\left(X\right) = a\sigma_x^2,$$

$$\sigma_y^2 = D\left(Y\right) = a^2 D\left(X\right) = a^2\sigma_x^2, \qquad \sigma_y = |a|\sigma_x,$$

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y} = \frac{a\sigma_x^2}{|a|\sigma_x^2} = \begin{cases} 1, & a > 0, \\ -1, & a < 0. \end{cases}$$

8-ma'ruza. AMALDA KO'P UCHRAYDIGAN TAQSIMOT QONUNLARI

Tayanch so'z va iboralar: Binomial taqsimot qonuni, geometrik taqsimot qonuni, Puasson taqsimot qonuni, gipergeometik taqsimot qonuni, tekis taqsimot qonuni, normal taqsimot qonuni, ko'rsatkichli taqsimot qonuni.

REJA:

1. Diskret tasidofiy miqdorlar uchun taqsimot qonunlar.

2. Uzluksiz tasidofiy miqdorlar uchun taqsimot qonunlar.

1. Diskret tasidofiy miqdorlar uchun taqsimot qonunlar. Tasodifiy miqdorlarning amalda ko'p uchraydigan taqsimot qonunlari bilan tanishib chiqamiz. Birinchi navbatta diskret tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlari bilan tanishamiz.

a) Binomial taqsimot qonuni. A hodisa ustida n ta erkli tajriba o'tkazilyotgan bo'lsin. Ularning har birida A hodisa bir xil o'zgarmas p ehtimollik bilan yuz bersin. n ta tajribada A hodisaning yuz berishlar sonidan iborat X tasodifiy miqdorni qaraymiz. Bu tasodifiy miqdorga mos jadval

$$\begin{array}{llllll} X: 0 & 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ p: P_n(0) & P_n(1) & P_n(2) & \ldots & P_n(n-1) & P_n(n) \end{array}$$

ko'rinishda bo'lib, bunda

$$P_n\left(k\right) = C_n^k\, p^k\, q^{n-k}, \qquad \left(k = 0, 1, 2, \ldots, n\right).$$

Bu jadvaldagi $P_n(k)$ $(k = \overline{0,n})$ ehtimollik binomial formuladan foydalanib hisoblanganligi sababli yuqoridagi jadval bilan xarakterlanadigan taqsimot qonuni binomial taqsimot qonuni deb ataladi. Bu yerda shuni ta'kidlash kerakki

$$\sigma^2(X) = npq, \; M(X) = np.$$

1-misol. Do'konga kirgan har bir xaridorning xarid qilish ehtimoli 0,25 ga teng bo'lsa, do'kondagi 4 ta xaridorning xarid qilganlarni X tasodifiy miqdor deb qarab uning taqsimot qonunini tuzing.

Yechish. X tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari: 0, 1, 2, 3, 4. $P_n(k)$ ehtimollarni Bernulli formulasi yordamida hisoblaymiz:

$$P_4(0)=C_4^0\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^0\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{81}{256},\qquad P_4(1)=C_4^1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^1\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{108}{256},$$

$$P_4(2)=C_4^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{54}{256},\qquad P_4(3)=C_4^3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^1=\frac{12}{256},$$

$$P_4(4)=C_4^4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^0=\frac{1}{256}.$$

Olingan ma’lumotlarni jadvalga joylashtirib

$$\begin{array}{cccccc} X: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ p: & \frac{81}{256} & \frac{108}{256} & \frac{54}{256} & \frac{12}{256} & \frac{1}{256} \end{array}$$

taqsimot qonunini hosil qilamiz.

b) Puasson taqsimot qonuni. n ta erkli tajriba o‘tkazilyotgan bo‘lsin. Ularning har birida A hodisa bir xil p ehtimol bilan yuz bersin. n ta tajribada A hodisaning yuz berishlar sonidan iborat X tasodifiy miqdorni qaraymiz. Agar X tasodifiy miqdorga mos jadval

$$\begin{array}{cccccc} X: & 0 & 1 & 2\ \ldots & k & \ldots \\ p: & p_0 & p_1 & p_2\ \cdots & p_k & \cdots \end{array}$$

ko‘rinishda bo‘lib, X tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan $\{x_k\}$ $(k=0,1,2,...)$ qiymatlarining ehtimollari

$$P_n(k)=p_k=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad (k=0,\,1,\,2,\,\ldots,\ ),\lambda=np=const$$

formula bilan hisoblansa, X tasodifiy miqdor Puasson qonuni bo‘yicha taqsimlangan deyiladi. Bu yerda $M(X)=\lambda,\ \ \sigma^2(X)=\lambda$.

1-eslatma. Puasson taqsimot qonunida $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n}p_i=1$.

2-misol. Qo‘shma korxona iste’molchiga 3000 ta sifatli mahsulot jo‘natdi. Mahsulotning yo‘lda shikastlanish ehtimoli 0,001 ga teng bo‘lsa, yo‘lda shikastlangan mahsulotlar sonini X tasodifiy miqdor deb qarab uning taqsimot qonunini tuzing.

Yechish. Shartga asosan, $\lambda=3$, $X:0,1,2,...,3000$. U holda X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini:

$$\begin{array}{cccc} X: 0 & 1 & \ldots & 3000 \\ p: P_{3000}(0) & P_{3000}(1) & \ldots & P_{3000}(3000) \end{array}$$

c) Geometrik taqsimot qonuni. Erkli tajribalar o‘tkazilyotgan bo‘lsin. Ularning har birida A hodisa bir xil p ehtimol bilan yuz bersin. A hodisa yuz berishi bilan tajriba to‘xtatiladi. X tasodifiy miqdor A hodisaning birinchi ro‘y berishigacha bo‘lgan tajribalar soni bo‘lsin. Agar ($k-1$)-tajribagacha A hodisa ro‘y bermasdan k-tajribada ro‘y bersa, bu murakkab hodisaning ehtimoli

$$P\left(X=k\right)=q^{k-1}p \qquad (1)$$

formula bilan aniqlanadi. (1) formulada $k=1,2,...$ deb qarab

$$\begin{array}{llllll} X: & 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots \\ p: & p & qp & q^2p & \dots & q^{k-1}p & \dots \end{array}$$

jadvalni hosil qilamiz. Bu taqsimot qonuni geometrik taqsimot qonuni deb ataladi. Bu yerda $M(X)=\dfrac{1}{p}$, $\sigma^2(X)=\dfrac{q}{p^2}$.

2-eslatma. Geometrik taqsimot qonunida $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n}p_i=1$.

3-misol. X – kubikni tashlashda birinchi marta “6” ochko tushguncha o‘tkaziladigan tajribalar soni bo‘lsin. Ravshanki, bu holda X – diskret tasodifiy miqdor bo‘lib, $p=1/6$ parametrli geometrik taqsimot qonuniga bo‘ysinadi. Ya’ni

$$\begin{array}{lllllll} X: & 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots \\ p: & \dfrac{1}{6} & \dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{1}{6} & \left(\dfrac{5}{6}\right)^2\cdot\dfrac{1}{6} & \dots & \left(\dfrac{5}{6}\right)^{k-1}\cdot\dfrac{1}{6} & \dots \end{array}$$

d) Gipergeometrik taqsimot qonuni. Ma’lumki, N ta detalning ichida M ta standart detal bo‘lganda tasodifiy ravishda olingan n ta detalning orasida k ta standart detal bo‘lishining ehtimoli $P_n(k)=\dfrac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$ formula yordamida topiladi. Bu yerda $M(X)=\dfrac{Mn}{N}$, $\sigma^2(X)=\dfrac{n(N-n)M(N-M)}{N^2(N-1)}$.

4-misol. Qutida 7 ta shar bo‘lib ularning 4 tasi qora. Tasodifiy ravishda 3 ta shar olingan. Agar X tasodifiy miqdor olingan sharlar orasidagi oq sharlar sonidan iborat bo‘lsa, uning taqsimot qonunini tuzing.

Yechish. X tasodifiy miqdorning qabul qilidigan qiymatlari: 0, 1, 2, 3. Bu qiymatlarni qabul qilish ehtimollarini $P_n(k)=\dfrac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$ formuladan foydalanib hisoblaymiz:

$$P_3(0)=\frac{C_3^0\cdot C_4^3}{C_7^3}=\frac{4}{35}, \qquad P_3(1)=\frac{C_3^1\cdot C_4^2}{C_7^3}=\frac{18}{35},$$

$$P_3(2)=\frac{C_3^2\cdot C_4^1}{C_7^3}=\frac{12}{35}, \qquad P_3(3)=\frac{C_3^3\cdot C_4^0}{C_7^3}=\frac{1}{35}.$$

U holda quyidagi taqsimot qonuni hosil bo‘ladi:

$$X: \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3$$
$$p: \quad \frac{4}{35} \quad \frac{18}{35} \quad \frac{12}{35} \quad \frac{1}{35}$$

2. Uzluksiz tasidofiy miqdorlar uchun taqsimot qonunlar. Endi uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun amalda ko‘p uchraydigan ba’zi taqsimot va zichlik funksiyalarni, hamda bu funksiyalarning xossalarini ko‘rib chiqamiz.

a) Tekis taqsimot qonuni. Agar uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f(x)=\begin{cases} 0, & agar \quad x<a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & agar \quad a\le x<b, \\ 0, & agar \quad x\ge b. \end{cases} \qquad (2)$$

ko‘rinishda bo‘lsa bu tasodifiy miqdor (a,b) oraliqda tekis taqsimot qonuniga bo‘ysinadi deyiladi.

$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$ formuladan foydalanib bu tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini topamiz:

1) Agar $x<a$ bo‘lsa, u holda $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt=0.$

2) Agar $a\le x<b$ bo‘lsa, $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{a} 0dt+\int\limits_{a}^{x}\frac{dt}{b-a}=\frac{x-a}{b-a}.$

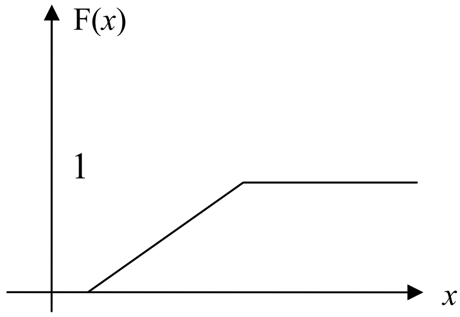
3) Agar $x\ge b$ bo‘lsa, u holda

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{a} f(t)dt+\int\limits_{a}^{b} f(t)dt+\int\limits_{b}^{x} f(t)dt=0+\frac{b-a}{b-a}+0=1.$$

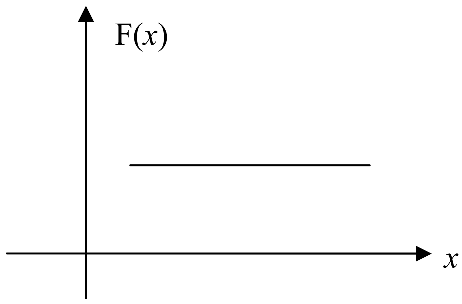
Demak,

$$F(x)=\begin{cases} 0, & agar \quad x<a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & agar \quad a\le x<b, \\ 1, & agar \quad x\ge b. \end{cases} \qquad (3)$$

Odatda, (2) zichlik funksiyasi bilan berilgan uzluksiz tasodifiy miqdorni $(a;b)$ oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi. $(a;b)$ oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi uchun $M(X)=\frac{a+b}{2}$, dispersiyasi uchun esa $D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. $[a,b]$ oraliqda tekis taqsimlangan uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasining grafigi sxematik holda quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.



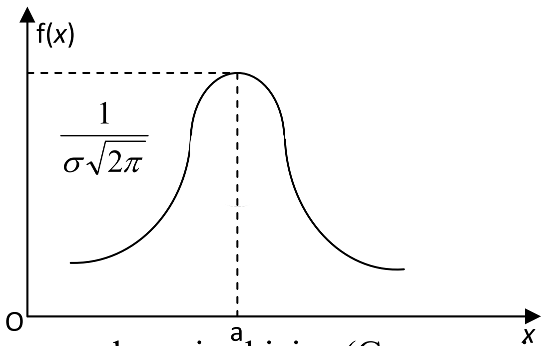
$[a,b]$ oraliqda tekis taqsimlangan uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasining grafigi sxematik holda quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.



b) Normal taqsimot qonuni. Agar uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \qquad (4)$$

ko‘rinishda bo‘lsa bu tasodifiy miqdor normal taqsimot qonuniga bo‘ysinadi deyiladi va u $N(a,\sigma)$ ko‘rinishda belgilanadi. Bu zichlik funksiya grafigining sxematik chizmasi quyidagi ko‘rinishga ega:



Bu egri chiziq normal egri chiziq (Gauss egri chizig‘i) deb aytiladi. Differensial hisoblash metodlaridan foydalanib $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ funksiyani tekshirsak u quyidagi xossalarga ega bo‘ladi.

1. Funksiya butun sonlar o‘qida aniqlangan.
2. x ning barcha qiymatlarida funksiya grafigi Ox o‘qidan yuqorida yotadi.
3. Ox o‘q funksiya grafigining gorizontal asimptotasi hisoblanadi.

4. $x = a$ nuqtada funksiya maksimumga erishadi va $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ qiymatni qabul qiladi.

5. $x = a$ chiziqqa nisbatan funksiya grafigi simmetrik joylashgan.

6. $(a-\sigma, \dfrac{1}{\sigma e\sqrt{2\pi}})$ va $(a+\sigma, \dfrac{1}{\sigma e\sqrt{2\pi}})$ nuqtalar funksiya grafigining burilish nuqtalari hisoblanadi.

(4) formuladan ko‘rinib turibdiki, normal taqsimot qonuniga bo‘ysinuvchi uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi ikki: a va σ (σ-sigma) parametrlar bilan aniqlanadi. Demak, normal taqsimot qonuniga bo‘ysinuvchi uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasini aniqlash uchun shu ikkita parametrning qiymatlarini bilish kifoya ekan. Bu parametrlarning ehtimoliy ma’nosi quyidagichadir: a parametr normal taqsimot qonuniga bo‘ysinuvchi tasodifiy miqdorning matematik kutilmasiga, σ – uning o‘rtacha kvadratik chetlanishiga teng.

Darhaqiqat, (4) formula bilan aniqlanuvchi tasodifiy miqdorning aniqlanish sohasi $(-\infty;\infty)$ bo‘lganligi sababli

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx .$$

Bu integralni hisoblash uchun yangi $z = \dfrac{x-a}{\sigma}$ o‘zgaruvchi kiritamiz. Bundan $x = \sigma z + a \Rightarrow dx = \sigma dz$, u holda

$$M(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \sigma z e^{-\frac{z^2}{2}}dz + \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz = 0 + \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi} = a .$$

Shunday qilib, $M(X) = a$, ya’ni normal taqsimotning matematik kutilmasi a parametrga teng. Xuddi shunga o‘xshash, $D(X) = \sigma^2$ ekanligini ko‘rsatish mumkin. (Buni mustaqil bajarib ko‘ring!)

3-eslatma. Umumiy normal taqsimot qonuni deb, a va σ parametrlarning qiymatlari ixtiyoriy bo‘lgan normal taqsimot qonuniga aytiladi.

Standart normal taqsimot qonuni deb, $a = 0$ va $\sigma = 1$ parametrli normal taqsimot qonuniga aytiladi. Har qanday umumiy normal taqsimot qonunini standart taqsimot qonuniga keltirish mumkin. Masalan, X tasodifiy miqdor a va σ parametrli normal taqsimot qonuniga bo‘ysinuvchi tasodifiy miqdor bo‘lsa, u holda $z = \dfrac{x-a}{\sigma}$ almashtirish bilan uni standart taqsimot qonuniga bo‘ysindirish mumkin bo‘ladi, chunki $M(Z) = 0$, $\sigma(Z) = 1$. Standart taqsimotning zichlik funksiyasi

$$\varphi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}} \tag{5}$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bu funksiyaning qiymatlar jadvali ehtimollar nazariyasiga oid ko‘plab adabiyotlarda keltirilgan.

4-eslatma. Umumiy normal taqsimot funksiyasi deb,

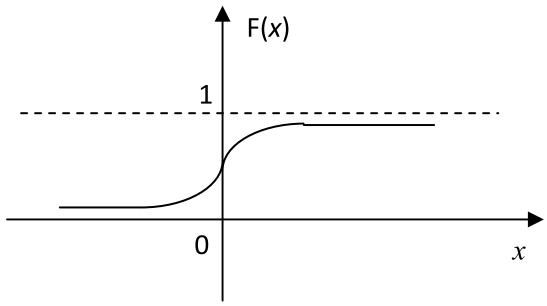
$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}}dy \tag{6}$$

funksiyaga, normalangan taqsimot funksiyasi deb esa,

$$F_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}dy \tag{7}$$

funksiyaga aytiladi.

$F(x)$ va $F_0(x)$ funksiyalar orasida quyidagi munosabat mavjud $F(x)=F_0\left(\frac{(x-a)}{\sigma}\right)$. $F_0(x)$ funksiyaning qiymatlari uchun maxsus jadval tuzilgan bo‘lib, uning grafigi quyidagicha shaklga ega:



$F_0(x)$ funksiya va $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{-z^2/2}dz$ Laplas funksiyasi orasida quyidagicha munosabat (mustaqil keltirib chiqariladi) mavjud

$$F_0(x)=0,5+\Phi(x).$$

c) Ko‘rsatkichli taqsimot qonuni. Agar uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f(x)=\begin{cases} 0, & agar \quad x\le 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & agar \quad x>0. \end{cases}$$

ko‘rinishda bo‘lsa bu tasodifiy miqdor ko‘rsatkichli taqsimot qonuniga bo‘ysinadi deyiladi. (bu yerda $\lambda>0-$ o‘zgarmas musbat son)

Ko‘rsatkichli taqsimot qonuniga bo‘ysinuvchi tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini topamiz: $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=0+\int_{0}^{x}\lambda e^{-\lambda t}dt=1-e^{-\lambda x}$.

Demak,

$$F(x)=\begin{cases} 0, & agar \quad x\le 0, \\ 1-e^{-\lambda x}, & agar \quad x>0. \end{cases}$$

Ko'rsatkichli taqsimotning matematik kutilishi, dispersiya va o'rtacha kvadratik chetlanishlari (mustaqil hisoblanadi) mos ravishda quyidagicha bo'ladi:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda}, D(X)=\frac{1}{\lambda^2}, \sigma(X)=\frac{1}{\lambda}.$$

9-ma'ruza. KATTA SONLAR QONUNI. MARKAZIY LIMIT TEOREMASI

Tayanch so'z va iboralar: Katta sonlar qonuni, Chebishev tengsizligi, markaziy limit teoremasi, tasodifiy miqdor, arifmetik o'rtacha, tekis chegaralangan dispersiya.

REJA:

1. Katta sonlar qonuni.
2. Chebishev teoremasi.
3. Bernulli teoremasi.
4. Markaziy limit teoremasi.

Ma'lumki, tajriba natijasida tasodifiy miqdor mumkin bo'lgan qiymatlarning qaysi birini qabul qilishini oldindan aytib bo'lmaydi, chunki bu juda ko'p tasodifiy faktorlarga bog'liq, bu faktorlarning esa hammasini hisobga olib bo'lmaydi. Ammo bir tamondan shuni ham ta'kidlash keraki, keng qamrovli shartlar ostida ko'p sondagi tasodifiy miqdorlar o'rta arifmetigi deyarli tasodifiylik xarakterini yo'qotadi.

Amaliyot uchun juda ko'p tasodifiy sabablarning birgalikdagi ta'siri tasodifga deyarli bog'liq bo'lmaydigan natijaga olib keladigan shartlarni bilish juda muhimdir, chunki bu hodisalarning qanday rivojlanishini oldindan ko'ra bilishga imkon beradi. Bunday shartlar umumiy nomi "Katta sonlar qonuni" deb ataluvchi teoremalarda keltiriladi. Bular qatoriga Chebishev va Bernulli teoremalari mansub bo'lib, Chebishev teoremasi katta sonlar qonunining eng umumiy, Bernulli teoremasi esa sodda holi hisoblanadi.

Dastlab quyidagi ta'rifni keltiramiz.

1-ta'rif. Agar $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi mos ravishda $M(X_1), M(X_2), \ldots, M(X_n)$ matematik kutilishlarga ega bo'lib, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun $n\to\infty$ da

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon\right)\to 1 \quad (1)$$

munosabat bajarilsa, berilgan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi katta sonlar qonuniga bo‘ysinadi deyiladi.

Katta sonlar qonuniga oid teoremalarni isbotlashda Chebishev tengsizligidan foydalaniladi. Biz bu teoremani isbotsiz keltiramiz.

Chebishev tengsizligi. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun

$$P\left(\left|X-M(X)\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2} \text{ yoki } P\left(\left|X-M(X)\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \quad (2)$$

Praktika uchun Chebishev tengsizligining ahamiyati cheklangan bo‘lib, u ba’zan trivial baho beradi. Chebishev tengsizligining nazariy ahamiyati juda kattadir.

1-teorema (Chebishev teoremasi). Agar $X_1, X_2, \ldots, X_n$ birgalikda erkli tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo‘lib, ularning dispersiyalari yuqoridan tekis chegaralangan (ya’ni $D(X_i)\leq C,\ i=1,2,\ldots$) bo‘lsa, u holda musbat ε son har qancha kichik bo‘lganda ham

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon\right)=1 \quad (3)$$

munosabat bajariladi.

Shunday qilib, Chebishev teoremasi quyidagicha da’vo qiladi: agar dispersiyalari tekis chegaralangan ko‘p sondagi tasodifiy miqdorlar qaralayotgan bo‘lsa, u holda bu tasodifiy miqdorlar arifmetik o‘rtacha qiymatining ularning matematik kutilmalari arifmetik o‘rtacha qiymatidan chetlanishining absolyut qiymati istalgan musbat kichik sondan ham kichik bo‘lishidan iborat hodisani deyarli muqarrar deb hisoblash mumkin.

Isbot. Chebishev tengsizligini

$$\overline{X}=\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$$

tasodifiy miqdorga nisbatan qo‘llaymiz:

$$P\left(\left|\overline{X}-M\left(\overline{X}\right)\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{D\left(\overline{X}\right)}{\varepsilon^2}. \quad (4)$$

Matematik kutilma va dispersiyaning xossalaridan foydalanib va teorema shartlariga ko‘ra quyidagilarni hosil qilamiz.

$$M\left(\overline{X}\right)=M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(X_i),$$

$$D\left(\overline{X}\right)=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)\leq\frac{nC}{n^2}=\frac{C}{n}.$$

Bu ifodalarni (11) tengsizlikka qo‘yib:

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\left(X_i\right)\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}D\left(X_i\right)}{n^2\varepsilon^2}\geq 1-\frac{C}{n\varepsilon^2},$$

hamda ixtiyoriy hodisaning ehtimoli 1 dan katta emasligini hisobga olib,

$$1-\frac{C}{n\varepsilon^2}\leq P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\left(X_i\right)\right|<\varepsilon\right)\leq 1$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Bu munosabatdan $n\to\infty$ da teorema tasdig‘i kelib chiqadi:

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\left(X_i\right)\right|<\varepsilon\right)=1.$$

Chebishev teoremasida biz tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmalari har xil deb faraz qilgan edik. Amaliyotda esa tasodifiy miqdorlar ko‘pincha bir xil $a=M\left(X_i\right)$ matematik kutilmaga va $D\left(X_i\right)=\sigma^2$ dispersiyaga ega bo‘ladi. U holda:

$$M\left(\overline{X}\right)=M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\left(X_i\right)=\frac{1}{n}na=a.$$

Qaralayotgan xususiy holda, Chebishev teoremasi quyidagicha ifodalanadi.

2-teorema. Agar $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tasodifiy miqdorlar birgalikda erkli bo‘lib, bir xil a matematik kutilmaga va σ^2 chekli dispersiyaga ega bo‘lsa, u holda ixtiyoriy kichik $\varepsilon>0$ son uchun

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-a\right|<\varepsilon\right)=1. \tag{5}$$

Faraz qilamiz, n ta erkli sinash o‘tkazilayotgan bo‘lib, ularning har birida A hodisaning ro‘y berish ehtimoli p ga teng bo‘lsin. U holda hodisa ro‘y berishining nisbiy chastotasi qanday bo‘lishini oldindan ko‘ra bilish mumkinmi? Bu savolga Yakov Bernulli tomonidan isbotlangan quyidagi teorema ijobiy javob beradi.

3-teorema (Bernulli teoremasi). Agar n ta erkli sinashning har birida A hodisaning ro‘y berish ehtimoli p o‘zgarmas va sinashlar soni yetarlicha katta bo‘lsa, u holda hodisa ro‘y berishi nisbiy chastotasining p ehtimoldan chetlanishining absolyut qiymati ixtiyoriy kichik musbat sondan ham kichik bo‘lish ehtimoli birga yaqinlashadi:

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1. \tag{6}$$

Isbot. A hodisa ro‘y berishlarining chastotasi μ_n ni quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\mu_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n .$$

Bunda X_i – A hodisaning i-sinashdagi ro‘y berishlar sonini ifodalovchi tasodifiy miqdor. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tasodifiy miqdorlar erkli bo‘lib, bir xil taqsimot qonuniga egadir. Ya’ni

$$\begin{array}{lll} X_1: \ 0 \ \ 1 & X_2: \ 0 \ \ 1, \ldots, & X_n: \ 0 \ \ 1 \\ p: \ \ q \ \ p & p: \ \ q \ \ p, \ldots, & p: \ \ q \ \ p \end{array}$$

Bu tasodifiy miqdorlar uchun

$$M(X_1) = M(X_2) = \ldots = M(X_n) = p, \quad D(X_i) = pq \le \frac{1}{4}$$

ekanligini ko‘rsatish mumkin. U holda

$$M(\mu_n) = M(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n) = np$$

va $M\left(\frac{\mu_n}{n}\right) = p$ ekanligini hisobga olsak:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum X_i - p\right| < \varepsilon\right) = 1 .$$

Qaralayotgan holda Chebishev teoremasining barcha shartlari bajariladi. Bernulli teoremasi sinashlar soni yetarlicha katta bo‘lganda nisbiy chastota nima uchun turg‘unlik xossasiga ega bo‘lishini tushuntiradi va ehtimolning statistik ta’rifini asoslaydi.

1-eslatma. Bernulli teoremasidan $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k}{n} = p$ xulosani chiqarish mumkin emas. Teorema etarlicha ko‘p sondagi tajribalarda nisbiy chastota har bir tarjribada hodisa ro‘y berishining o‘zgarmas ehtimoliga faqat ehtimol bo‘yicha yaqinlashishi haqidadir. k/n ning p ga ehtimol bo‘yicha yaqinlashishi analizdagi oddiy yaqinlashishdan farq qiladi. Bu farqni to‘g‘ri tushunish uchun ehtimol bo‘yicha yaqinlashish ta’rifini beramiz.

2-ta’rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $|x_n - x_0| < \varepsilon$ tengsizlikning bajarilish ehtimolligi $n \to \infty$ da birga intilsa, u holda $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ ketma-ketlik x_0 ga ehtimol bo‘yicha yaqinlashadi deyiladi.

Chebishev teoremasining (yoki katta sonlar qonunining) mohiyati quyidagicha: ayrim olingan erkli tasodifiy miqdorlar o‘z matematik kutilmalaridan katta farq qiladigan qiymatlarni qabul qilsada, yetarlicha katta sondagi tasodifiy miqdorlarning arifmetik o‘rtacha qiymati katta ehtimollik bilan tayin o‘zgarmas songa, chunonchi $\frac{1}{n}\sum M\left(X_i\right)$ songa yaqin qiymatlarni qabul qiladi.

Boshqacha qilib aytganda, ayrim tasodifiy miqdorlar anchagina sochilgan bo‘lishi mumkin, lekin ularning arifmetik o‘rtacha qiymatlarining tarqoqligi kam bo‘ladi.

Shunday qilib, har bir tasodifiy miqdor mumkin bo‘lgan qiymatlaridan qaysi birini qabul qilishini aniq ayta olmasak ham ularning arifmetik o‘rtachasi qanday qiymat qabul qilishini oldindan ko‘ra bilish mumkin.

Katta sonlar qonuniga ko‘ra, yetarlicha ko‘p sondagi erkli (dispersiyasi tekis chegaralangan) tasodifiy miqdorlarning arifmetik o‘rtacha qiymatlari tasodifiylik xarakterini yo‘qotadi. Bu esa quyidagicha izohlanadi: har bir miqdorning o‘zining matematik kutilmasidan chetlanishi musbat ham, manfiy ham bo‘lishi mumkin, ammo arifmetik o‘rtachada ular o‘zaro yo‘qolib ketadi.

Chebishev teoremasining amaliy ahamiyatiga doir quyidagi misolni keltiramiz. Odatda, biror fizik kattalikni o‘lchash bir necha marta amalga oshiriladi va ularning arifmetik o‘rtacha qiymati izlanayotgan o‘lcham sifatida qabul qilinadi. Qanday shartlarda bu usulni to‘g‘ri deb hisoblash mumkin? – degan savolga Chebishev teoremasi javob beradi.

Haqiqatan ham, har bir o‘lchash natijalarini $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tasodifiy miqdorlar sifatida qarab, bu tasodifiy miqdorlarga Chebishev teoremasini qo‘llamoqchi bo‘lsak, quyidagilar bajarilishi kerak: birgalikda erkli; bir xil matematik kutilmaga ega; dispersiyalari tekis chegaralangan. Agar har bir o‘lchashning natijasi qolganlariga bog‘liq bo‘lmasa, birinchi shart bajariladi.

Agar o‘lchashlar sistematik (bir xil ishorali) xatolarsiz bajarilsa, ikkinchi talab bajariladi. Bu holda hamma tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmalari bir xil bo‘lib, u haqiqiy o‘lchamga teng bo‘ladi. Agar o‘lchash asbobi aniqlikni ta’minlay olsa, uchinchi talab ham bajariladi. Bunda ayrim o‘lchashlarning natijalari har xil bo‘lsada, ularning tarqoqligi chegaralangan bo‘ladi.

Agar yuqorida ko‘rsatilgan hamma talablar bajarilgan bo‘lsa, u holda o‘lchash natijalariga Chebishev teoremasini qo‘llashga haqlimiz. Bunda yetarlicha ko‘p sonda o‘lchashlar o‘tkazilsa, u holda ularning arifmetik o‘rtacha qiymati o‘lchanayotgan kattalikning haqiqiy qiymatidan istalgancha kam farq qiladi. Statistikada qo‘llanadigan tanlanma usul Chebishev teoremasiga asoslangan, bu usulning mohiyati shundan iboratki, unda uncha katta bo‘lmagan tasodifiy tanlanmaga asoslanib, barcha tekshirilayotgan ob’ektlar to‘plami to‘g‘risida mulohaza qilinadi.

1-misol. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ erkli tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi quyidagicha taqsimot qonuniga ega.

$$X_n: \quad -a \qquad a$$
$$p: \quad \frac{n+1}{2n+1} \qquad \frac{n}{2n+1}$$

Berilgan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun Chebishev teoremasi o‘rinlimi?

Yechish. Chebishev teoremasi shartlarini tekshiramiz:

$$M\left(X_n\right) = -a\frac{n+1}{2n+1} + a\frac{n}{2n+1} = -\frac{a}{2n+1}, \qquad D(X) < a^2.$$

Demak, dispersiyalari a^2 bilan tekis chegaralangan va bu tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun Chebishev teoremasi o‘rinli.

2-misol. X diskret tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot bilan berilgan.

$$X: \quad 0{,}1 \qquad 0{,}4 \qquad 0{,}6$$
$$p: \quad 0{,}2 \qquad 0{,}3 \qquad 0{,}5$$

Chebishev tengsizligidan foydalanib, $P\left(\left|X - M\left(X\right)\right| < \sqrt{0{,}4}\right)$ ehtimolni baholang.

Yechish.

$$M\left(X\right) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}44,$$
$$D\left(X\right) = 0{,}1^2 \cdot 0{,}2 + 0{,}4^2 \cdot 0{,}3 + 0{,}6^2 \cdot 0{,}5 - 0{,}44^2 = 0{,}0364.$$

Demak, $P\left(\left|X - 0{,}44\right| < \sqrt{0{,}4}\right) \geq 1 - \frac{0{,}0364}{0{,}4} = 0{,}909$.

Markaziy limit teoremasi. Ma’lumki, normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar amaliyotda keng tarqalgan. Buni nima bilan asoslash mumkin. Bunga rus matematigi A.M.Lyapunovning quyidagi teoremasi javob beradi.

4-teorema (Markaziy limit teoremasi). Agar X tasodifiy miqdor juda ko‘p sondagi o‘zaro bog‘liqmas tasodifiy miqdorlarning yig‘indisidan iborat bo‘lib, har bir hadning yig‘indiga ta’siri e’tiborga olinmaydigan darajada juda kam bo‘lsa, u holda X ning taqsimoti normal taqsimotga yaqin bo‘ladi.

Masalan, tajriba qandaydir fizik kattalikni o‘lchashdan iborat bo‘lsin. Har qanday o‘lchash bu kattalikning taxminiy qiymatini beradi, o‘lchash natijasiga ta’sir etuvchi tasodifiy faktorlar esa juda ko‘p. Har bir faktor o‘lchash natijasiga e’tiborga olinmaydigan darajada bo‘lsa ham ta’sir ko‘rsatadi va xatolikni hosil qiladi. Ammo, bu faktorlarning soni juda ko‘p bo‘lganligi sababli xatoliklarning umumiy yig‘indisi sezilarli darajada xatolikni hosil qiladi. Bu xatoliklar yig‘indisini juda katta sondagi o‘zaro bog‘liqmas tasodifiy miqdorlar yig‘indisi deb qarab, bu yig‘indining taqsimoti normal taqsimotga yaqin ekanligi haqida xulosa qilishimiz mumkin.

Faraz qilamiz, $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ o‘zaro bog‘liqmas tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan bo‘lib, ularning matematik kutilmalari $M(X_k) = a_k$ va dispersiyalari $D(X_k) = b_k^2$ chekli bo‘lsin. Quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n, \qquad A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Normalangan yig‘indining taqsimot funksiyasini quyidagicha belgilaymiz

$$F_n(x) = P\left(\frac{S_n - A_n}{B_n} < x \right).$$

Agar normalangan yig‘indining taqsimot funksiyasi x ning har qanday qiymatida va $n \to \infty$ da normal taqsimotga intilsa, ya’ni

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\frac{S_n - A_n}{B_n} < x \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2} dz. \qquad (7)$$

bo‘lsa, $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ ketma-ketlik uchun markaziy limit teoremasini qo‘llash mumkin. (7) katta sondagi o‘zaro bog‘liqmas tasodifiy miqdorlar yig‘indisining taqsimoti normal toqsimotga yaqinlashish sharti hisoblanadi.

10-ma’ruza. STATISTIK BAHOLAR VA ULARGA QO‘YILADIGAN TALABLAR

Tayanch so‘z va iboralar: Bosh to‘plam, tanlanma, statistik taqsimot, empirik taqsimot funksiyasi, poligon, gistogramma, reprezentativ tanlanma, variatsion qator, variant, siljimagan baho, effektiv baho, asosli baho, tanlanma o‘rtachasi, bosh to‘plam o‘rtachasi, tanlanma dispersiyasi, “tuzatilgan” dispersiya, bosh to‘plam dispersiyasi.

REJA:

1. Matematik statistika vazifalari.
2. Statistik taqsimot.
3. Empirik taqsimot funksiya.
4. Taqsimot parametrlarining statistik baholari.
5. Baholarga qo‘yiladigan talablar.
6. Variatsion qatorning ba’zi xarakteristikalari.

Matematik statistikaning birinchi vazifasi – statistik ma’lumotlarni to‘plash va (agar ma’lumotlar juda ko‘p bo‘lsa) gruppalash usullarini ko‘rsatish.

Matematik statistikaning ikkinchi vazifasi – statistik ma’lumotlarni tahlil qilish metodlarini tadqiqot masalalariga muvofiq holda ishlab chiqish.

Matematik statistika yuqoridagi vazifalarni bajarish mobaynida shug‘ullanadigan ba’zi masalalarni keltirib o‘tamiz:

1) tasodifiy hodisa ro‘y berishi ehtimolining noma’lum qiymatini baholash;

2) noma’lum taqsimot funksiyani baholash;

3) ko‘rinishi ma’lum bo‘lgan taqsimot funksiyasining noma’lum parametrlarini baholash;

4) tasodifiy miqdorning bir yoki bir necha tasodifiy miqdorlarga bog‘liqligini va bog‘liqlik darajasini aniqlash;

5) statistik gipotezalarni tekshirish.

Shunday qilib, matematik statistikaning vazifasi ilmiy va nazariy xulosalar chiqarish maqsadida statistik ma’lumotlarni to‘plash va ularni tahlil qilish metodlarini yaratishdan iboratdir.

Bir jinsli ob’ektlar to‘plamini bu ob’ektlarni xarakterlovchi biror bir sifat yoki son belgisiga nisbatan o‘rganish talab qilinsin. Masalan, agar ob’ekt biror xil detallar partiyasi bo‘lsa, u holda detalning sifat belgisi bo‘lib, uning standartligi, son belgisi bo‘lib esa detalning o‘lchami xizmat qilishi mumkin.

Ba’zan tekshirish yalpi o‘tkaziladi, ya’ni to‘plamdagi ob’ektlarning har birini o‘rganilayotgan belgiga nisbatan tekshiriladi. Lekin yalpi tekshirish amaliyotda nisbatan kam qo‘llaniladi. Masalan, to‘plam juda ko‘p ob’ektlarni o‘z ichiga olgan bo‘lsa, u holda yalpi tekshirish o‘tkazish maqsadga muvofiq emas. Bunday hollarda to‘plamdan chekli sondagi ob’ektlar tasodifiy ravishda olinadi va ular o‘rganiladi.

Tanlanma to‘plam (bundan keyin tanlanma) deb, umumiy to‘plamdan tasodifiy ravishda ajratib olingan ob’ektlar to‘plamiga aytiladi.

Bosh to‘plam deb, tanlanma ajratiladigan ob’ektlar to‘plamiga aytiladi.

To‘plam (bosh to‘plam yoki tanlanma) hajmi deb, bu to‘plamdagi ob’ektlar soniga aytiladi. Masalan, 500 ta detalni undan tanlab olngan 50 ta detal orqali tekshiriladigan bo‘lsa, u holda bosh to‘plam hajmi $N = 500$, tanlanma hajmi esa $n = 50$.

Bosh to‘plamdan olingan tanlanma bo‘yicha bosh to‘plam haqida xulosa qilishga asoslangan usulga tanlanma usul deb ataladi.

Tanlanmani ajratib olish ikki xil yo‘l bilan amalga oshirilishi mumkin: ob’ekt ajratib olinib uning ustida kuzatish o‘tkazilgandan so‘ng, u bosh to‘plamga qaytarilishi yoki qaytarilmasligi mumkin.

Odatda, qaytarilmaydigan tasodifiy tanlashdan foydalaniladi.

Tanlanmadagi ma’lumotlar bo‘yicha bosh to‘plamning bizni qiziqtirayotgan belgisi haqida yetarlicha ishonch bilan fikr yuritish uchun tanlanmaning ob’ektlari bosh to‘plamni to‘g‘ri tasvirlashi zarur. Bu talab qisqacha bunday ta’riflanadi:

tanlanma reprezentativ (vakolatli) bo‘lishi kerak. Odatda, tanlanmaning reprezentativligini ta’minlash uchun bosh to‘plam har bir elementining tanlanmaga tushish ehtimoli teng deb olinadi.

Amaliyotda tanlanma ajratib olishda turli usullardan foydalaniladi. Bu usullarni 2 tipga ajratish mumkin:

1. Bosh to‘plamni qism to‘plamlarga ajratmasdan tanlanma olish, bunda oddiy tasodifiy:

a) qaytarilmaydigan; b) qaytariladigan usullardan foydalaniladi.

2. Bosh to‘plamni qism to‘plamlarga ajratib so‘ngra tanlanma olish, bunda bosh to‘plam:

a) tipik; b) mexanik; c) seriyalab qism to‘plamlarga ajratiladi, so‘ngra tanlanma ajratib olinadi.

Agar bosh to‘plamdan ob’ektlar bittadan tasodifiy ravishda olinib tanlanma olinsa, bunga oddiy tasodifiy tanlash deyiladi.

Tipik tanlashda bosh to‘plamni uning “tipik” xususiyatlarini e’tiborga olgan holda qism to‘plamlarga ajratiladi, so‘ngra bu qism to‘plamlardan tanlanmalar ajratib olinadi.

Mexanik tanlash bosh to‘plamni mexanik ravishda tanlanma hajmiga mos bir nechta qism to‘plamlarga ajratiladi, so‘ngra bu qism to‘plamlarning har biridan bittadan ob’yekt olinib tanlanma hosil qilinadi.

Seriyalab tanlanma ajratishda tekshriladigan tanlama elementlari bosh to‘plamdan donalab emas, balki seriyalab olinadi.

Odatda, tanlanma ajratib olishda yuqoridagi usullardan aralash foydalaniladi, ya’ni ko‘rsatilgan usullardan birgalikda foydalaniladi. Masalan, bosh to‘plamni ba’zan bir xil hajmli seriyalarga ajratiladi, keyin oddiy tasodifiy tanlash bilan ayrim ob’ektlar olinadi.

Bosh to‘plamdan n hajmli tanlanma olingan bo‘lsin. Bunda tanlanmaning x_i qiymati n_i marta kuzatilgan va $\sum_i n_i = n$ bo‘lsin. Kuzatilgan x_i qiymatlarning ortib yoki kamayib borish tartibida yozilgan ketma-ketligi variatsion qator, ketma-ketlikning $x_i -$ hadlar esa variantalar deyiladi. Kuzatishlar soni $n_i -$chastotalar, ularning tanlanma hajmiga nisbati esa $W_i = \frac{n_i}{n} -$nisbiy chastotalar deyiladi.

Tanlanmaning statistik taqsimoti deb, variantalar va ularga mos chastotalar yoki nisbiy chastotalardan tuzilgan quyidagi jadvalga aytiladi:

$$\begin{array}{lllll} x_i: & x_1 & x_2 & \dots & x_k & \dots \\ n_i: & n_1 & n_2 & \dots & n_k & \dots \\ x_i: & x_1 & x_2 & \dots & x_k & \dots \\ W_i: & W_1 & W_2 & \dots & W_k & \dots \end{array} \qquad (1)$$

Shunday qilib, taqsimot ehtimollar nazariyasida tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari va ularning ehtimollari orasidagi moslikni, matematik statistikada esa kuzatilgan variantalar va ularning chastotalari yoki nisbiy chastotalari orasidagi moslikni bildiradi.

1-misol. Hajmi 40 bo‘lgan tanlanmaning chastotalari taqsimoti:

$$\begin{array}{llll} x_i: & 2 & 6 & 12 \\ n_i: & 6 & 20 & 14 \end{array}$$

berilgan. Nisbiy chastotalar taqsimotini yozing.

Yechish. Nisbiy chastotalarni topamiz. Buning uchun chastotalarni tanlanma hajmiga bo‘lamiz va natijada: $W_1 = \frac{6}{40} = 0{,}15;\ W_2 = \frac{20}{40} = 0{,}5; W_3 = \frac{14}{40} = 0{,}35$. U holda, nisbiy chastotalar taqsimoti:

$$\begin{array}{llll} x_i: & 2 & 6 & 12 \\ W_i: & 0{,}15 & 0{,}5 & 0{,}35 \end{array}.$$

Faraz qilamiz, $X-$ belgining chastotalar statistik taqsimoti ma’lum bo‘lsin. Quyidagi belgilashlar kiritamiz: $n_x - X$ belgining $x-$variantasidan kichik qiymatlari kuzatilgan kuzatishlar soni; n-umumiy kuzatishlar soni. U holda $\frac{n_x}{n}-$ $X < x$ hodisaning ro‘y berish nisbiy chastotasi: Agar x o‘zgaradigan bo‘lsa, u holda, $\frac{n_x}{n}$ nisbiy chastota ham o‘zgaradi. Demak, $\frac{n_x}{n}$ nisbiy chastota x ning funksiyasidir.

1-ta’rif. Empirik taqsimot funksiyasi (tanlanmaning taqsimot funksiyasi) deb, har bir x qiymat uchun $X < x$ hodisaning nisbiy chastotasini aniqlaydigan $F_n^*(x) = \frac{n_x}{n}$ funksiyaga aytiladi.

2-misol. Tanlanmaning quyidagi taqsimoti:

$$\begin{array}{llll} x_i: & 2 & 6 & 10 \\ n_i: & 12 & 18 & 30 \end{array}$$

bo‘yicha uning empirik funksiyasini tuzing.

Yechish. Tanlanma hajmini topamiz: $n = 60$. U holda

$$F_n^*(x)=\begin{cases} 0, & agar \quad x<2, \\ 0,2, & agar \quad 2\le x<6, \\ 0,5, & agar \quad 6\le x<10 \\ 1, & agar \quad x\ge 10. \end{cases}$$

Bosh to‘plamning $F(x)-$ taqsimot funksiyasi nazariy taqsimot funksiyasi deb ataladi. Empirik taqsimot funksiya $X<x$ hodisaning nisbiy chastotasini, nazariy taqsimot funksiya esa $X<x$ hodisaning ro‘y berish ehtimolini aniqlaydi. $F_n^*(x)$ funksiya uchun $F(x)$ funksiyaning barcha xossalari o‘rinli. Ya’ni:

1) $F_n^*(x)\in[0;1]$;

2) $F_n^*(x)-$ kamaymaydigan funksiya;

3) agar x_1- eng kichik varianta bo‘lsa, u holda $X<x_1$ qiymatlar uchun $F_n^*(x)=0$; agar x_k- eng katta varianta bo‘lsa, u holda $X\ge x_k$ qiymatlar uchun $F_n^*(x)=1$.

Shunday qilib, tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasi bosh to‘plam nazariy taqsimot funksiyasini baholash uchun xizmat qiladi.

Haqiqatan ham, Bernulli teoremasiga asosan, $\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\left|F(x)-F_n^*(x)\right|<\varepsilon\right)=1$. Demak, tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasidan bosh to‘plam nazariy taqsimot (integral) funksiyasining taxminiy ko‘rinishi sifatida foydalanish mumkin.

Ko‘rgazmalilik uchun statistik taqsimotning turli grafiklari chiziladi, masalan, poligon va gistogramma.

Chastotalar poligonini yasash uchun Dekart koordinatalar sistemasida kesmalari (x_i, n_i) nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziq hosil qilish kerak. Nisbiy chastotalar poligonini yasash uchun esa Dekart koordinatalar sistemasida kesmalari (x_i, W_i) nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziq hosil qilish kerak bo‘ladi. Chastotalar va nisbiy chastotalar poligonini diskret tasodifiy miqdorlarning grafik usulda berilishi deb ham tushunish mumkin.

Agar kuzatilayotgan $X-$ belgi uzluksiz bo‘lsa, u holda uni grafik usulda tasvirlash uchun gistogramma yasash maqsadga muvofiqdir, buning uchun belgining kuzatiladigan qiymatlarini o‘z ichiga olgan intervalni uzunligi o‘zgarmas h bo‘lgan bir nechta qismiy intervallarga bo‘linadi va har bir $i-$ qismiy interval uchun n_i-chastota, ya’ni $i-$intervaldagi variantalar chastotalarining yig‘indisi topiladi. So‘ngra, Dekart koordinatalar sistemasida chastotalar gistogrammasi, asoslari h uzunlikdagi intervallar, balandliklari esa

$\frac{n_i}{h}$ nisbatlarga (chastota zichligi) teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklardan iborat pog‘onaviy figura, yoki nisbiy chastotalar gistogrammasi yasaladi. Nisbiy chastotalar gistogrammasi uchun esa asoslari h uzunlikdagi intervallar, balandliklari esa $\frac{W_i}{h}$ nisbatga (nisbiy chastotalar zichligi) teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklardan iborat pog‘onaviy figura yasaladi.

Matematik statistika masalaridan biri tanlanma asosida bosh to‘plam taqsimot funksiyasining noma’lum parametrlar uchun statistik baholar o‘rnatish. Bu masala qanday hal qilinishini ko‘rib chiqamiz.

Faraz qilamiz, bosh to‘plamning son belgisini o‘rganish talab qilinayotgan va belgining taqsimot funksiyasi nazariy mulohazalar asosida aniqlangan bo‘lsin. Bu taqsimotni aniqlaydigan noma’lum parametrlarni baholash masalasini ko‘rib chiqaylik. Masalan, bosh belgi, to‘g‘rirog‘i o‘rganilayotgan belgi bosh to‘plamda normal taqsimlanganligi oldindan ma’lum bo‘lsa, u holda matematik kutilmani va o‘rtacha kvadratik chetlanishni baholash, ya’ni taqribiy hisoblash zarur, chunki bu ikki parametr normal taqsimotni to‘liq aniqlaydi, agar belgi Puasson taqsimotiga ega deyishga asos bo‘lsa, u holda bu taqsimotni aniqlaydigan $\lambda > 0$ parametrni baholash, ya’ni taqribiy hisoblash zarur. Odatda, tadqiqotchi ixtiyorida tanlanma asosida olingan ma’lumotlar, masalan, tanlanma son belgisini n marta kuzatish natijasida olingan $x_1, x_2, ..., x_n$ qiymatlar bo‘ladi. Demak, baholanayotgan belgining bahosi xuddi shu ma’lumotlar orqali ifodalanishi kerak.

Tanlanmadagi $x_1, x_2, ..., x_n$ qiymatlarni erkli $X_1, X_2, ..., X_n$ tasodifiy miqdorlar deb qarab, nazariy taqsimot noma’lum parametrining statistik bahosini topish uchun kuzatilayotgan tasodifiy miqdorlar orqali shunday funksiya topish kerakki, u baholanayotgan parametrning taqribiy qiymatini bersin. Masalan, normal taqsimotning matematik kutilishini baholash uchun ushbu

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$$

funksiya xizmat qiladi.

Shunday qilib, nazariy taqsimot noma’lum parametrining statistik bahosi deb kuzatilgan tasodifiy miqdorlardan tuzilgan funksiyaga aytiladi.

Biz birinchi navbatda tanlanma o‘rtachasi, tanlanma “tuzatilgan” dispersiyasi, moda, mediana, variasiya qulochi va boshqa nuqtaviy baholar bilan tanishib chiqamizi. Bunda o‘rnatilgan statistik baho baholanayotgan parametrning yaxshi bahosi bo‘lishi uchun u ma’lum bir talablarni qanoatlantirishi lozim. Quyida biz bu talablarni ko‘rib chiqamiz.

Bosh to‘plam $F(x)-$nazariy taqsimot funksiyasining θ parametri noma’lum bo‘lib uning statistik bahosi θ^* bo‘lsin. Bosh to‘plamdan olingan n hajmli 1-tanlanma bo‘yicha θ_1^* baho topamiz. Tajribani takrorlaymiz, ya’ni bosh to‘plamdan yana n hajmli 2-tanlanma olib θ_2^* bahoni topamiz. Tajribani ko‘p marta takrorlab, $\theta_1^*, \theta_2^*, ..., \theta_k^*$ sonlar ketma-ketliginini hosil qilamiz, umuman olganda, $\theta_1^*, \theta_2^*, ..., \theta_k^*$ sonlar har xil bo‘ladi. U holda θ^* bahoni tasodifiy miqdor, $\theta_1^*, \theta_2^*, ..., \theta_k^*$ sonlarni esa uning mumkin bo‘lgan qiymatlari sifatida qarash mumkin. θ^* tasodifiy miqdorning $M(\theta^*)-$matematik kutilmasini hisoblaymiz. $M(\theta^*)$ va θ noma’lum parametr qiymatlarini taqqoslasak ular orasida:

1) $M(\theta^*) < \theta$; 2) $M(\theta^*) = \theta$; 3) $M(\theta^*) > \theta$.

munosabatlardan biri albatta o‘rinli bo‘ladi. Matematik kutilmasi baholanayotgan parametrga teng bo‘lmagan statistik bahoni ishlatish sistematik xatolarga olib keladi. Shu sababli, θ^* bahoning matematik kutilmasi baholanayotgan parametrga teng bo‘lishini talab qilish tabiiy holdir.

Demak, $M(\theta^*) = \theta$ talabga rioya qilish sistematik xatolardan saqlaydi.

2-ta’rif. Agar bosh to‘plamdan ixtiyoriy hajmli tanlanma olinganda ham θ^* bahoning matematik kutilmasi baholanayotgan θ parametrga teng, ya’ni $M(\theta^*) = \theta$ bo‘lsa, u holda θ^* baho siljimagan baho deb ataladi, aks holda θ^* siljigan baho deyiladi.

3-ta’rif. Agar θ^* baho va θ noma’lum parametrlar uchun $\lim\limits_{n\to\infty} M(\theta^*) = \theta$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda θ^* baho asimptotik siljimagan baho deb ataladi.

Ammo shuni ham ta’kidlash kerakki, siljimagan baho har doim ham baholanayotgan parametrga yaxshi yaqinlashadi deb hisoblash xato bo‘ladi. Darhaqiqat, θ^* ning mumkin bo‘lgan qiymatlari uning o‘rtacha qiymati atrofida ancha tarqoq joylashgan, ya’ni $D(\theta^*)-$dispersiyasi anchagina katta bo‘lishi mumkin. U holda $l-$tanlanmadagi ma’lumotlar bo‘yicha topilgan $\theta_l^* -$baho $\overline{\theta}^*$ o‘rtacha qiymatdan va demak baholanayotgan θ parametrdan ancha uzoqlashgan bo‘lishi mumkin.

Bu holda $\overline{\theta}_l^*$ ni θ ning tarqibiy qiymati sifatida qabul qilib, katta xatoga yo‘l qo‘ygan bo‘lar edik. Shu sababli, statistik baholarga effektivlik talabi qo‘yiladi.

4-ta'rif. Agar θ_n baho uchun har qanday $\varepsilon > 0$ da $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\theta_n - \theta\right| > \varepsilon\right) = 0$ shart bajarilsa, ya'ni θ_n baho θ ga ehtimol bo'yicha yaqinlashsa, u holda θ_n asosli baho deyiladi.

Agar θ parametrning θ_{n_1} va θ_{n_2} siljimagan baholari uchun biror n hajmli tanlanmada $D(\theta_{n_1}) < D(\theta_{n_2})$ o'rinli bo'lsa, u holda θ_{n_1} baho θ_{n_2} bahoga nisbatan n hajmli tanlanma uchun samaraliroq (optimalroq) baho deyiladi.

Berilgan n hajmli tanlanmada eng kichik dispersiyaga ega bo'lgan baho, bu hajmda eng samarali baho deyiladi.

$\overline{x}_n -$ tanlanma o'rtachasi bosh to'plam matematik kutilmasi uchun siljimagan, asosli va effektiv baho bo'ladi.

Juda katta hajmli (n yetarlicha katta bo'lganida) tanlanmalar qaralganda statistik baholarga asoslilik talabi qo'yiladi.

Agar bahoning dispersiyasi $n \to \infty$ da nolga intilsa, u holda bunday baho asosli bo'ladi.

Agar N hajmli bosh to'plamning mumkin bo'lgan $x_1, x_2, ..., x_N -$qiymatlari takrorlanmaydigan bo'lsa, $\overline{x}_B -$ bosh to'plam o'rtachasi

$$\overline{x}_B = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad (2)$$

formula bilan topiladi;

Agar N hajmli bosh to'plamning mumkin bo'lgan $x_1, x_2, ..., x_k -$qiymatlari mos ravishda $N_1, N_2, ..., N_k$ chastotalarga ega bo'lib, $N_1 + N_2 + ... + N_k = N$ bo'lsa, u holda

$$\overline{x}_B = \frac{x_1 N_1 + x_2 N_2 + ... + x_k N_k}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} x_i N_i \qquad (3)$$

Bosh to'plamning kuzatilayotgan X belgisini tasodifiy miqdor sifatida qarasak, uning matematik kutilmasi uchun $M(X) = \overline{x}_B$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Agar n hajmli tanlanmaning mumkin bo'lgan $x_1, x_2, ..., x_n -$qiymatlari takrorlanmaydigan bo'lsa, $\overline{x}_T -$tanlanma o'rtacha

$$\overline{x}_T = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (4)$$

formula bilan topiladi;

Agar n hajmli tanlanmaning mumkin bo'lgan $x_1, x_2, ..., x_n -$qiymatlari mos ravishda $n_1, n_2, ..., n_k$ chastotalarga ega bo'lib, $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ bo'lsa, u holda

$$\overline{x}_T = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + ... + x_k n_k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i \qquad (5)$$

$M(X)-$bosh to‘plam o‘rtachasining statistik bahosi sifatida tanlanma o‘rtacha qabul qilinadi. $\overline{x}_T$ siljimagan baho ekanligiga, ya’ni $M(\overline{x}_T)=M(X)$ ekanligiga ishonch hosil qilamiz. $\overline{x}_T$ ni $\overline{X}_T$ tasodifiy miqdor, $x_1, x_2, ..., x_n$ $-$variantalarni erkli, bir xil taqsimlangan $X_1, X_2, ..., X_n$ tasodifiy miqdorlar sifatida qaraymiz. Bu miqdorlar bir xil taqsimlanganligi uchun ular bir xil sonli xarakteristikalarga, jumladan bir xil matematik kutilmaga ega: $a=M(X_i)$. Bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar arifmetik o‘rtacha qiymatining matematik kutilmasi ulardan bittasining matematik kutilmasiga teng, ya’ni

$$M(\overline{X}_T)=M\left(\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}\right)=\frac{M(X_1)+M(X_2)+M(X_n)}{n}=\frac{na}{n}=a$$

$X_1, X_2, ..., X_n$ miqdorlarning har biri va bosh to‘plamning X belgisi (uni ham tasodifiy miqdor sifatida qaraymiz) bir xil taqsimotga ega ekanligini e’tiborga oladigan bo‘lsak, bu miqdorlarning va bosh to‘plamning sonli xarakteristikalari bir xil degan xulosaga kelamiz. Shunday qilib, $M(\overline{X}_T)=a=M(X)$. U holda $\overline{x}_T$ bosh to‘plam matematik kutilmasi uchun siljimagan baho ekan.

Ma’lumki, katta sonlar qonuniga (Chebishev teoremasi) asosan ixtiyoriy kichik $\varepsilon>0$ son uchun

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\overline{x}_T-M(\overline{x}_T)\right|<\varepsilon\right)=1$$

ya’ni n ortishi bilan $\overline{x}_T$ $-$tanlanma o‘rtachasi bosh to‘plam matematik kutilmasiga ehtimol bo‘yicha yaqinlashadi. Bundan esa, $\overline{x}_T$ baho a uchun asosli baho bo‘lishi kelib chiqadi.

Agar bosh to‘plamdan katta hajmli bir nechta tanlanmalar olinib har birining tanlanma o‘rtachalari topiladigan bo‘lsa, ular o‘zaro taqriban teng bo‘ladi. Bu tanlanma o‘rtachaning turg‘unlik xossasi deyiladi.

3-misol. Quyidagi tanlanmaning

x_i:	4	8	11
n_i:	5	10	5

statistik taqsimoti bo‘yicha bosh to‘plam matematik kutilmasining siljimagan bahosini toping.

Yechish. (5) formuladan foydalanamiz. U holda $\overline{x}_T=7,75$.

Agar N hajmli bosh to‘plamning mumkin bo‘lgan $x_1, x_2, ..., x_N$ $-$qiymatlari takrorlanmaydigan bo‘lsa, bosh to‘plam dispersiyasi

$$D(X)=D_B=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\overline{x}_B\right)^2 \qquad (6)$$

formula bilan topiladi;

Agar N hajmli bosh to‘plamning mumkin bo‘lgan $x_1, x_2, ..., x_k$ − qiymatlari mos ravishda $N_1, N_2, ..., N_k$ chastotalarga ega bo‘lib, $N_1 + N_2 + ... + N_k = N$ bo‘lsa, u holda

$$D(X) = D_B = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} N_i \left(x_i - \overline{x}_B\right)^2 \tag{7}$$

Bosh to‘plam o‘rtacha kvadratik chetlanishi

$$\sigma(X) = \sigma_B = \sqrt{D_B} \tag{8}$$

formula bilan aniqlanadi.

Agar n hajmli tanlanmaning mumkin bo‘lgan $x_1, x_2, ..., x_n$ −qiymatlari takrorlanmaydigan bo‘lsa, tanlanma dispersiya

$$D(X) = D_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}_T\right)^2 \tag{9}$$

formula bilan topiladi;

Agar n hajmli tanlanmaning mumkin bo‘lgan $x_1, x_2, ..., x_k$ − qiymatlari mos ravishda $n_1, n_2, ..., n_k$ chastotalarga ega bo‘lib, $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ bo‘lsa, u holda

$$D(X) = D_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \left(x_i - \overline{x}_T\right)^2 \tag{10}$$

4-misol. Tanlanmaning

$$\begin{array}{llll} x_i: & 4 & 8 & 11 \\ n_i: & 5 & 10 & 5 \end{array}$$

statistik taqsimoti bo‘yicha uning dispersiyasini toping.

Yechish. (5) formuladan foydalansak: $\overline{x}_T = 7,75$. Dispersiyani hisoblash uchun (10) formuladan foydalanamiz. U holda

$$D_T = \frac{5(4-7,75)^2 + 10(8-7,75) + 5(11-7,75)}{20} = 7,0625\,.$$

Dispersiyani hisoblashda (6), (7), (9), (10) formulalar noqulay, shu sababli, dispersiya va matematik kutilmalarning xossalaridan foydalanib, dispersiyani hisoblash uchun qulay bo‘lgan quyidagi formulani keltirib chiqarish mumkin:

$$D = \overline{x^2} - (\overline{x})^2, \quad \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i, \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 \tag{11}$$

Bosh to‘plam dispersiyasi uchun statistik baho sifatida $D_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}_T\right)^2$ tanlanma dispersiyasini olish mumkin emas. Chunki bu baho siljigan baho bo‘ladi, ya’ni $M(D_T) \neq D_B$. Bu holda biz

$$M(D_T) = \frac{n-1}{n} D_B$$

tenglikni bosh to‘plam dispersiyasi uchun siljimagan statistik baho sifatida olamiz va uni

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_T \tag{12}$$

ko‘rinishda belgilab “tuzatilgan” dispersiya deb ataymiz.

Haqiqattan ham “tuzatilgan” dispersiya bosh to‘plam dispersiyasi uchun siljimagan baho bo‘ladi. Chunki

$$M(s^2) = M\left(\frac{n}{n-1} D_T\right) = \frac{n}{n-1} M\left(D_T\right) = D_B .$$

Bosh to‘plam o‘rtacha kvadratik chetlanishining bahosi sifatida $s = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_T}$ “tuzatilgan” o‘rtacha kvadratik chetlanish olinadi.

1-eslatma. n ning katta qiymatlarida tanlanma dispersiyasi va “tuzatilgan” dispersiyalarning farqi juda kam bo‘ladi. Shu sababli, “tuzatilgan” dispersiyadan $n < 30$ hajmli tanlanmalarda foydalanish tavsiya etiladi.

2-eslatma. Agar tanlanmaning variatsion qatorida $x_i -$ variantalarning qiymatlari katta sonlardan iborat bo‘lsa, u holda x_i variantadan $u_i = \frac{x_i - c_1}{c_2} -$ shartli variantaga o‘tish orqali $u_i -$ variantalari kichik sonlardan iborat yangi variatsion qator hosil qilinadi, so‘ngra yangi tanlanma uchun $\overline{u}_T$ va $D(u_T)$ xarakteristikalar topiladi. Oldingi tanlanmaning $\overline{x}_T$, $D(x_T)$ xarakteristikalarini topish uchun $\overline{x}_T = c_2 \overline{u}_T + c_1$, $D(x_T) = c_2^2 D(u_T)$ formulalardan foydalaniladi.

Matematik statistika va uning tatbiqlarida variatsion qatorning tanlanma o‘rtachasi va tanlanma dispersiyasidan tashqari boshqa xarakteristikalari ham ishlatiladi. Shulardan ba’zilarini keltiramiz.

Eng katta chastotaga ega bo‘lgan varianta moda deb ataladi va M_0 kabi belgilanadi.

Mediana deb, variatsion qator variantalarini son jihatidan teng ikki qismga ajratadigan variantaga aytiladi va M_e kabi belgilanadi. Variantalar sonining juft yoki toqligiga qarab, mediana quyidagicha aniqlanadi:

$$M_e = \begin{cases} x_{k+1}, & n = 2k+1, \\ \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}, & n = 2k. \end{cases}$$

Variatsiya qulochi R deb, eng katta va eng kichik variantalar ayirmasiga aytiladi: $R = x_{\max} - x_{\min}$.

Variatsiya qulochi variatsion qator tarqoqligining eng sodda xarakteristikasi bo‘lib xizmat qiladi.

Variatsion qator tarqoqligining yana bir xarakteristikasi sifatida o‘rtacha absolyut chetlanish θ ham ishlatiladi:

$$\theta = \frac{\sum_i n_i \left| x_i - \overline{x}_T \right|}{n}$$

Variatsiya koeffisiyenti V deb, tanlanma o‘rtacha kvadratik chetlanishining tanlanma o‘rtachasiga nisbatini foizlardagi ifodasiga aytiladi: $V = \frac{\sigma_T}{\overline{x}_T} 100\%$.

Variatsiya koeffisiyenti ikkita yoki undan ortiq variatsion qatorlarning tarqoqliklarini taqqoslash uchun xizmat qiladi: variatsion qatorlardan variatsiya koeffisiyenti katta bo‘lgani ko‘proq tarqoqlikka ega bo‘ladi.

5-misol. Quyidagi tanlanma:

$$\begin{array}{lcccc} x_i: & 1 & 3 & 6 & 16 \\ n_i: & 4 & 10 & 5 & 1 \end{array}$$

uchun M_0, M_e, R, V, θ xarakteristikalarni hisoblang.

Yechish. Yuqoridagi formulalardan fodalanamiz:

$$M_0 = 3,\ M_e = \frac{x_{10} + x_{11}}{2} = 3,\ R = 15,\ \overline{x}_T = 4 \Rightarrow \theta = 2,2,\ \sigma_T = 3,24 \Rightarrow V = 80,1\%$$

Tajribalar soni juda katta bo‘lsa, nuqtaviy bahoning qiymati odatda noma’lum parametrga yaqin bo‘ladi. Ammo, kuzatishlar soni kam bo‘lsa, $\tilde{\theta}$ nuqtaviy baho va θ parametr orasidagi farq sezilarli darajada bo‘lishi mumkin. Bunday hollarda parametrni baholash uchun intervalli baholardan foydalanish maqsadga muvofiq hisoblanadi.

11-ma’ruza. NUQTAVIY VA INTERVALLI BAHOLAR

Tayanch so‘z va iboralar: Nuqtaviy baho, intervalli baho, bahoning ishonchliligi, bahoning aniqligi, ishonchlilik intervali.

REJA:

1. Nuqtaviy va intervalli baholar.
2. Ishonchli ehtimol va ishonchli interval.
3. Normal taqsimotning noma’lum parametrlari uchun ishonch intervalli.

Faraz qilaylik, bosh to‘plam X belgisining taqsimot funksiyasi $F(x,\theta)$ bo‘lib, θ noma’lum parametr bo‘lsin. Bosh to‘plamdan olingan tanlanmaning kuzatilgan qiymatlari $x_1,\ x_2, ..., x_n$ bo‘lsin.

1-ta’rif. Tanlanmadan tuzilgan ixtiyoriy $L(x_1,\ x_2, ..., x_n)$ funksiyaga statistika deyiladi.

Statistikadan noma’lum parametrlar uchun statistik baholar o‘rnatishda foydalaniladi.

2-ta’rif. Agar noma’lum parametr bitta $\tilde{\theta}$ son bilan baholansa, u holda bu baho nuqtaviy baho deyiladi.

Nuqtaviy baholashda taqsimot funksiyaning noma’lum θ parametri uchun shunday $L(x_1,\ x_2, ..., x_n)$ statistika qidiriladiki, bunda $L(x_1,\ x_2, ..., x_n)$ statistikani θ parametr uchun taqribiy qiymat deb olinadi. Bu holda $L(x_1,\ x_2, ..., x_n)$ statistika θ parametrning bahosi deyiladi.

3-ta’rif. Ikkita son (interval chetlari) bilan aniqlanadigan baho intervalli baho deb ataladi.

Intervalli bahoda bahoning aniqliligi va ishonchliligi tushunchalarini kiritishimiz kerak bo‘ladi. Buni quyida ko‘rib chiqamiz.

Tanlanma ma’lumotlari asosida topilgan $\tilde{\theta}-$statistik xarakteristika θ parametrning bahosi bo‘lsin. θ ni o‘zgarmas son deb faraz qilamiz. Ma’lumki, $\tilde{\theta}$ ning aniqligi yuqori bo‘lganda $\left|\theta-\tilde{\theta}\right|$ farqning qiymati kamayib boradi, ya’ni $\left|\theta-\tilde{\theta}\right|<\delta,\ \delta>0$ tengsizlikda δ qancha kichik bo‘lsa, baho shuncha aniq bo‘ladi. Shu sababli, δ bahoning aniqligi deb ataladi.

Statistik usullar $\tilde{\theta}$ baho $\left|\theta-\tilde{\theta}\right|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantirishini qat’iy tasdiqlay olmaydi, balki bu tengsizlik bajarilishining qandaydir γ ehtimolligi haqida xulosa chiqar oladi.

$\left|\theta-\tilde{\theta}\right|<\delta$ tengsizlikning bajarilish ehtimoli γ θ parametrning $\tilde{\theta}$ baho bo‘yicha ishonchliligi (ishonchlilik ehtimoli) deyiladi. Bu yerda, $\gamma=P\left(\left|\theta-\tilde{\theta}\right|<\delta\right)$. Ko‘p hollarda, ishonchlilik ehtimoli oldindan beriladi. Masalan, 0,95; 0,99; 0,999 va hokazo.

$\gamma=P\left(\left|\theta-\tilde{\theta}\right|<\delta\right)$ ehtimollikni quyidagicha yozib olamiz:

$$P\left(\tilde{\theta}-\delta<\theta<\delta+\tilde{\theta}\right)=\gamma \qquad (1)$$

Bu munosabatni quyidagicha tushunish kerak: $\left(\tilde{\theta}-\delta,\delta+\tilde{\theta}\right)$ interval θ noma’lum parametrni o‘z ichiga olish (qoplash) ehtimoli γ ga teng.

$\left(\tilde{\theta}-\delta, \delta+\tilde{\theta}\right)$ interval noma’lum parametrni berilgan γ ishonchlilik bilan qoplovchi ishonchlilik intervali deb ataladi.

1-eslatma. $\left(\tilde{\theta}-\delta, \delta+\tilde{\theta}\right)$ interval tasodifiy chetki nuqtalarga ega, chunki turli tanlanmalar uchun $\tilde{\theta}$ ning qiymatlari turlicha bo‘ladi. Shu sababli, tanlanma o‘zgarsa $\left(\tilde{\theta}-\delta, \delta+\tilde{\theta}\right)$ intervalning chetki nuqtalari ham o‘zgaradi.

Ishonchlilik intervallarini topish qanday amalga oshirilishi bilan normal taqsimot qonuniga bo‘ysinuvchi tasodifiy miqdorlar misolida tanishib chiqamiz.

Bosh to‘plamning X belgisi normal taqsimlangan bo‘lsin. Ma’lumki, bu taqsimotni ikkita parametr: a va σ aniqlaydi. Faraz qilamiz ulardan biri, $\sigma-$ o‘rtacha kvadratik chetlanish ma’lum, ikkinchisi $a-$matematik kutilma esa noma’lum bo‘lsin. Bu taqsimotning matematik kutilmasi a uchun ishonchlilik intervalini γ ishonch bilan δ aniqlikda topish masalasini qaraimiz.

$\bar{x}_T-$tanlanma o‘rtachasini $\bar{X}_T$ tasodifiy miqdor sifatida qaraymiz. X belgi normal taqsimlanganligi sababli tanlanma o‘rtacha ham normal taqsimlangan bo‘ladi. Bu yerda $M(\bar{X}_T)=a,\ D(\bar{X}_T)=\dfrac{\sigma^2}{n},\ P\left(\left|\bar{X}_T-a\right|<\delta\right)=\gamma$ munosabat o‘rinli bo‘lsin. U holda

$$P\left(\left|X-a\right|<\delta\right)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

formuladan foydalanib, X ni $\bar{X}_T$ bilan σ ni esa $\sigma\left(\bar{X}_T\right)=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ bilan almashtirsak quyidagi munosabatni hosil qilamiz:

$$P\left(\left|\bar{X}_T-a\right|<\delta\right)=2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right)=2\Phi(t)\,, \qquad (2)$$

bu yerda $t=\dfrac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$. Bundan $\delta=\dfrac{\sigma t}{\sqrt{n}}$ bo‘ladi. U holda (15) quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$P\left(\left|\bar{X}_T-a\right|<\delta\right)=2\Phi(t)\Rightarrow P\left(\bar{X}_T-\frac{\sigma t}{\sqrt{n}}<a<\frac{\sigma t}{\sqrt{n}}+\bar{X}_T\right)=2\Phi(t)\,. \qquad (3)$$

Shunday qilib, ishonchlilik intervali $\left(\overline{X}_T - \frac{\sigma t}{\sqrt{n}} < a < \frac{\sigma t}{\sqrt{n}} + \overline{X}_T\right)$ ko‘rinishda bo‘ladi.

Bundan $\left(\overline{X}_T - \frac{\sigma t}{\sqrt{n}} < a < \frac{\sigma t}{\sqrt{n}} + \overline{X}_T\right)$ interval a parametrni $\gamma = 2\Phi(t)$ ehtimol bilan $\frac{\sigma t}{\sqrt{n}}$ aniqlikda qoplashi kelib chiqadi.

(3) dan quyidagi xulosalarni chiqaramiz: tanlanma hajmining ortishi baholash aniqligi oshishiga olib keladi; agar γ ishonchlilik orttirilsa, t parametr ortadi va bu esa baholash aniqligi kamayishiga olib keladi.

1-misol. X tasodifiy miqdor normal taqisimlangan bo‘lib uning o‘rtacha kvadratik chetlanishi $\sigma = 3$. Tanlanma hajmi $n = 36$ va bahoning ishonchliligi $\gamma = 0{,}95$ bo‘lsin. Noma’lum parametr $a-$matematik kutilmaning $\overline{x}_T -$tanlanma o‘rtachasi bo‘yicha ishonchlilik intervallarini toping.

Yechish. Jadvaldan foydalanib t ni topamiz, ya’ni $2\Phi(t) = 0{,}95 \Rightarrow \Phi(t) = 0{,}475 \Rightarrow t = 1{,}96$. Bahoning aniqligi: $\delta = \frac{1{,}96 \cdot 3}{\sqrt{36}} = 0{,}98$. U holda ishonchlilik intervali: $(\overline{x}_T - 0{,}98, \overline{x}_T + 0{,}98)$.

Berilgan $\gamma = 0{,}95$ ishonchlilikni quyidagicha tushunish kerak: agar yetarlicha ko‘p sondagi tanlanmalar olingan bo‘lsa, u holda ularning 95%i shunday ishonchli intervallarni aniqlaydiki, bu intervallar parametrni haqiqatan ham o‘z ichiga oladi; 5% hollardagina parametr interval chegarasidan tashqarida yotishi mumkin.

2-eslatma. Agar matematik kutilmani oldindan berilgan δ aniqlik va γ ishonchlilik bilan baholash talab qilinsa, u holda bu aniqlikni beradigan tanlanmaning minimal hajmi

$$n = \frac{\sigma^2 t^2}{\delta^2} \tag{4}$$

formuladan topiladi.

Bosh to‘plamning X belgisi normal taqsimlangan va uning $a-$matematik kutilmasini $\overline{x}_T -$tanlanma o‘rtachasi orqali baholashda $\sigma -$ o‘rtacha kvadratik chetlanish noma’lum bo‘lsin. U holda

$$\overline{x}_T - t(\gamma, n)\frac{s}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_T + t(\gamma, n)\frac{s}{\sqrt{n}} \tag{5}$$

interval a uchun ishonch intervali bo‘lib xizmat qiladi. Bu yerda $s-$tuzatilgan o‘rtacha kvadratik chetlanish; $t(\gamma, n)-$ esa berilgan n va γ bo‘yicha maxsus jadvaldan topiladi. Bunday jadvallar ehtimollar nazariyasi va matematik statistikaga oid adabiyotlarda beriladi.

2-misol. Bosh to‘plamdan $n=10$ hajmli tanlanma olingan va u quyidagi statistik taqsimotga ega bo‘lsin:

$$\begin{array}{lcccccc} x_i: & -2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ n_i: & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{array}$$

Bosh to‘plamning X belgisi normal taqsimlangan bo‘lsa, uning $a-$ matematik kutilmasi uchun $\overline{x}_T$ bo‘yicha $\gamma=0,95$ ishonchlilik bilan ishonchli intervalni toping.

Yechish. Tanlanma o‘rtachani va “tuzatilgan” o‘rtacha kvadratik chetlanishni mos ravishda quyidagi formulalardan topamiz:

$$\overline{x}_T=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6}n_i x_i, \quad s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{6}n_i(x_i-\overline{x}_T)^2}$$

U holda: $\overline{x}_T=2,\ s=2,4$. Jadvaldan $\gamma=0,95$ va $n=10$ larga mos $t(0,95;10)=2,26$ ni topamiz. Topilganlarni (5) ifodaga qo‘yib: $(0,3;3,7)$ ishonchlilik intervalini hosil qilamiz. Bu interval noma’lum $a-$matematik kutilmani $\gamma=0,95$ ishonch bilan qoplaydi.

Bosh to‘plamning o‘rganilatgan X son belgisi normal taqsimlangan bo‘lsin. Uning $\sigma-$o‘rtacha kvadratik chetlanishi uchun tanlanma ma’lumotlari bo‘yicha γ ehtimol bilan ishonchlilik intervali topish talab qilinsin.

Ma’lumki, tanlanmaning s^2-“tuzatilgan” dispersiyasi σ^2-bosh to‘plam dispersiyasi uchun siljimagan bahodir. Shu sababli, $\sigma-$noma’lum paremetrni $s-$ orqali baholaymiz. Buning uchun

$$P\left(\left|\sigma-s\right|<\delta\right)=\gamma$$

munosabat bajarilishini talab qilamiz. Tayyor jadvaldan foydalanish uchun $s-\delta<\sigma<s+\delta$ tengsizlikni

$$s\left(1-\frac{\delta}{s}\right)<\sigma<s\left(1+\frac{\delta}{s}\right)$$

tengsizlik bilan almashtiramiz. $q=\dfrac{\delta}{s}$ belgilashdan so‘ng

$$\begin{aligned} &s(1-q)<\sigma<s(1+q), \quad q<1, \\ &0<\sigma<s(1+q), \quad q>1 \end{aligned} \qquad (6)$$

ishonch intervalini hosil qilamiz. Bu yerda $q(\gamma,n)$ maxsus jadvaldan topiladi.

3-misol. Bosh to‘plamning X belgisi normal taqsimlangan va $n=50$ hajmli tanlanmaning “tuzatilgan” dispersiyasi: $s^2=2,25$ bo‘lsin. $\sigma-$noma’lum parametrni $\gamma=0,95$ ishonchlilik bilan qoplaydigan ishonchlilik intervalini toping.

Yechish. Jadvaldan $n = 50$ va $\gamma = 0,95$ qiymatlarga mos $q = 0,21$ ni topamiz. Bu yerda $q < 1$ bo‘lgani uchun (6) tengsizliknig birinchisidan foydalanib, $1,185 < \sigma < 1,815$ ishonchlilik intervalini topamiz.

12-ma’ruza. FUNKSIONAL, STATISTIK VA KORRELYATSION BOG‘LANISH

Tayanch so‘z va iboralar: Funksional bog‘lanish, statistik bog‘lanish, korrelyatsion bog‘lanish, korrelyatsion panjara, shartli o‘rtacha.

REJA:

1. Funksional, statistik va korrelyatsion bog‘lanishlar.
2. Shartli o‘rtacha.
3. Korrelyatsion jadval.
4. Korrelyatsiya nazariyasining ikki asosiy masalasi.
5. Tanlanma korrelyatsion nisbat va uning xossalari.

Kundalik faoliyatimizdagi ko‘pgina amaliy masalalarda, tajribalarda o‘rganilayotgan Y belgining (tasodifiy miqdorning) bitta yoki bir nechta boshqa belgilarga (tasodifiy miqdorlarga) bog‘liqligini aniqlash va baholash talab qilinadi. Dastlab Y belgining bitta X tasodifiy miqdorga bog‘liqligini o‘rganamiz.

Ikki belgi funksional bog‘lanish bilan, yoki statistik bog‘lanish bilan bog‘langan, yoki umuman erkli bo‘lishi mumkin.

1-ta’rif. Agar X belgining har bir mumkin bo‘lgan qiymatiga Y belgining bitta mumkin bo‘lgan qiymati mos kelsa, u holda Y belgi X belgining funksiyasi deyiladi:

$$Y = f(X)$$

1-misol. X diskret tasodifiy miqdorning taqsimoti:

$$\begin{array}{lcc} X: & 2 & 3 \\ p: & 0,6 & 0,4 \end{array}$$

berilgan. $Y = X^2$ funksiyaning taqsimoti topilsin.

Yechish. Y ning mumkin bo‘lgan qiymatlarini topamiz: $y_1 = 4,\ y_2 = 3$. U holda Y ning taqsimoti:

$$\begin{array}{lcc} Y: & 4 & 9 \\ p: & 0,6 & 0,4 \end{array}$$

2-misol. X uzluksiz tasodifiy miqdor normal taqsimlangan bo‘lib, $M(X)=a=2,\ \sigma(X)=0,5$ bo‘lsa, $Y=3X+1$ chiziqli funksiyaning zichlik funksiyasini toping.

Yechish. Y ning sonli xarakteristikalarini topamiz:

$$M(Y)=3\cdot 2+1=7, \quad \sigma(Y)=3\cdot 0,5=1,5 .$$

U holda Y ning zichlik funksiyasi:

$$g(y)=\frac{1}{1,5\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(y-7)^2}{2\cdot(1,5)^2}\right).$$

Funksional bog‘lanishlar aniq va tabiiy fanlar: matematika, fizika, ximiya kabi fanlarda ayniqsa yaqqol kuzatiladi.

Masalan, termometrdagi simob ustunining balandligi X havo harorati Y haqida aniq va bir qiymatli ma’lumot beradi; aylana radiusi R va uning uzunligi C orasida $C=2\pi R$ geometriyadan ma’lum bo‘lgan formula bilan aniqlangan funksional bog‘lanish mavjuddir.

Iqtisodiy jarayonlarda, umuman jamiyatning boshqa sohalarida tasodifiy belgilar orasida qat’iy funksional bog‘lanish kamdan-kam uchraydi. Buning asosiy sabablaridan biri belgilarga ta’sir etuvchi faktorlarning xilma-xilligi va tasodifiyligidir. Bu holatda belgilar orasidagi moslik statistik bog‘lanish bo‘lishi mumkin.

2-ta’rif. Agar belgilardan birining o‘zgarishi ikkinchi belgi taqsimotining o‘zgarishiga olib kelsa, u holda bu ikki belgi orasidagi bog‘lanish statistik bog‘lanish deyiladi.

Masalan, agar $Y(Z_1,\ Z_2,\ V_1,\ V_2)$ va $X(Z_1,\ Z_2,\ U_1,\ U_2)$ ($Z_i,\ V_i,\ U_i$ – tasodifiy faktorlar) belgilar berilgan bo‘lsin. Bu holda Y va X lar orasidagi bog‘lanish statistik bog‘lanish deyiladi, chunki ularning har biri bog‘liq bo‘lgan tasodifiy faktorlar ichida umumiylari mavjud.

Statistik bog‘lanishni matematik ifodalash murakkab, shu sababli uning xususiy hollaridan biri hisoblangan korrelyatsion bog‘lanish bilan tanishib chiqamiz.

3-ta’rif. Agar bir-biriga statistik bog‘lanishda bo‘lgan ikki belgidan birining o‘zgarishi ikkinchi belgi o‘rtacha qiymatining o‘zgarishiga olib kelsa, u holda bunday statistik bog‘lanish korrelyatsion bog‘lanish deb ataladi.

Bir-biri bilan korrelyatsion bog‘lanishda bo‘lgan tasodifiy miqdorlarga misollar keltiramiz.

1. Mehnat unumdorligi X va jami ishlab chiqarilgan mahsulot Y;

2. Yig‘ib olingan hosil miqdori Y va ishlatilgan o‘g‘itlar miqdori X;

3. Jami mahsulot miqdori X va korxonaning ish haqi fondi Y;

4. Sarflangan kapital mablag‘lar X, shu mablag‘lardan olingan sof foyda

Y;

5. Korxonaning texnika bilan qurollanganlik darajasi X va mehnat unumdorligi ko‘rsatkichi Y.

Yuqoridagi ta’rifdan ko‘rinib turibdiki, korrelyatsion bog‘lanishni matematik ifodalash, ya’ni $y = f(x)$ ko‘rinishda yozish uchun shartli o‘rtacha tushunchasini kiritishimiz kerak.

4-ta’rif. $X = x$ qiymatga mos keluvchi Y ning kuzatilgan qiymatlari arifmetik o‘rtachasini shartli o‘rtacha deb ataymiz va $\overline{y_x}$ ko‘rinishda belgilaymiz.

Xuddi shunday usulda $\overline{x_y}$ – shartli o‘rtacha tushunchasi ham aniqlanadi.

5-ta’rif. $Y = y$ qiymatga mos keluvchi X ning kuzatilgan qiymatlari arifmetik o‘rtachasini $\overline{x_y}$ – shartli o‘rtacha deb ataymiz.

3-misol. X miqdorning $x_1 = 5$ qiymatiga Y miqdorning $y_1 = 6,\ y_2 = 7,\ y_3 = 8$ qiymatlari mos keladi. $\overline{y_x} = ?$

Yechish. $\overline{y_x} = \dfrac{6+7+8}{3} = 7$.

X va Y tasodifiy miqdorlar (belgilar) ustida kuzatishlar o‘tkazilgan bo‘lib, kuzatishlar natijalari mos ravishda $(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2),\ ...,(x_n,\ y_n)$ bo‘lsin. U holda X va Y orasidagi bog‘lanishni (munosabatni) ushbu jadval ko‘rinishida ifodalash mumkin.

X	x_1	x_2	....	x_n
Y	y_1	y_2	...	y_n

Agar yuqoridagi jadvalda x_i va y_i lar turli qiymatlarini qabul qilsa, u holda shartli o‘rtacha tushunchasidan foydalanmaymiz.

Agar kuzatishlar soni ko‘p, ya’ni x_i qiymat m_{x_i} marta, y_j qiymat m_{y_j} marta, (x_i, y_j) juftliklar $m_{x_i y_j}$ marta takrorlanishi mumkin bo‘lsa, u holda yuqoridagi jadval o‘rniga korrelyatsion jadval yoki korrelyatsion panjara deb ataluvchi jadval ishlatiladi. $m_{x_i}, m_{y_j}, m_{x_i y_j}$ lar mos ravishda $x_i, y_j, (x_i, y_j)$ larning chastotalari deyiladi. $m_{x_i y_j} = m_{ij}$ belgilash kiritib quyidagi jadvalni hosil qilamiz. Bu yerda

$$\sum_i m_{ij} = m_{y_j}, \quad \sum_j m_{ij} = m_{x_i}, \quad \sum_i m_{x_i} = \sum_j m_{y_j} = n.$$

X \ Y	y_1	y_2	$\dots$	y_l	m_x
x_1	m_{11}	m_{12}	$\dots$	m_{1l}	m_{x_1}
x_2	m_{21}	m_{22}	$\dots$	m_{2l}	m_{x_2}
...	...	...	$\dots$	...	...
x_k	m_{k1}	m_{k2}	$\dots$	m_{kl}	m_{x_k}
m_y	m_{y_1}	m_{y_2}	$\dots$	m_{y_l}	n

Bu holatda shartli o‘rtacha tushunchasidan foydalanishimiz zarur.

Korrelyatsion panjarada shartli o‘rtacha topilishiga doir misol ko‘rib chiqamiz.

4-misol. Berilgan jadvaldan foydalanib, tanlanma shartli o‘rtachani toping.

Y \ X	3	4	6	7	8	n_y
8	5	3	-	-	-	8
12	3	4	5	4	2	18
15	-	3	3	6	2	14
n_x	8	10	8	10	4	$n=40$

Yechish. Hisoblashlarni quyidagi jadvalga joylashtiramiz:

Y \ X	3	4	6	7	8	n_y
8	5	3	-	-	-	8
12	3	4	5	4	2	18
15	-	3	3	6	2	14
n_x	8	10	8	10	4	$n=40$
$\overline{y_x}$	9,5	11,7	13,125	13,8	13,5	

Belgilar orasidagi korrelyatsion munosabatlar (bog‘lanishlar) to‘g‘ri, teskari, to‘g‘ri chiziqli va egri chiziqli bo‘lishi mumkin. Masalan, to‘g‘ri korrelyatsion bog‘lanishda belgilardan birining ortishi (kamayishi) boshqasining o‘rtachasi ortishiga (kamayishiga) olib keladi, teskari bog‘lanishda esa aksincha va h.k. Masalan, daraxtning yoshi X ortib borishi bilan daraxtdagi xalqalar soni Y ortib boradi, havoning harorati X pasayishi bilan nafas olish tezligi Y kamayadi va h.k.

Y ning X ga korrelyatsion bog‘liqligi deb, $\overline{y_x}$ shartli o‘rtachaning x ga funksional bog‘lanishiga aytiladi: $\overline{y_x} = f(x)$ Bu tenglama Y ning X ga regressiya tanlanma tenglamasi (ba'zida Y ning X ga regressiya tenglamasi), $f(x)$ funksiya esa Y ning X ga tanlanma regressiyasi (ba'zida regressiya funksiyasi) deb ataladi. Bu tenglama grafigi esa Y ning X ga regressiya tanlanma chizig'i (ba'zida Y ning X ga regressiya chizig'i) deyiladi.

X belgining Y belgiga regressiya tanlama tenglamasi va regressiya tanlama chizig'i ham yuqoridagiga o'xshash aniqlanadi: $\overline{x_y} = \varphi(y)$.

Korrelyatsiya nazariyasi belgilar orasidagi bog'lanishni o'rganish jarayonida asosan quyidagi ikki masalani hal qiladi.

1-masala. Belgilar orasidagi korrelyatsion bog'lanish formasini aniqlash, ya'ni regressiya funksiyasining ko'rinishini (chiziqli, chiziqsiz va h.k.) topish.

Agar $f(x)$ va $\varphi(y)$ regressiya funksiyalarining ikkalasi ham chiziqli bo'lsa, u holda X va Y belgilar orasidagi korrelyatsion bog'lanish chiziqli, aks holda esa chiziqsiz deyiladi.

2-masala. Korrelyatsion bog'lanish zichligini (kuchini) aniqlash.

Y belgining X belgiga korrelyatsion bog'lanishiining zichligi $X = x$ qiymatga mos Y ning mumkin bo'lgan qiymatlari $\overline{y_x}$ – shartli o'rtacha atrofida tarqoqligi darajasini baholaydi.

13-ma'ruza. CHIZIQLI REGRESSIYA TENGLAMASI

Tayanch so'z va iboralar: Regressiya, to'g'ri chiziqli regressiya, eng kichik kvadratlar usuli, to'g'ri chiziqli regressiya tanlanma koeffisiyenti, burchak koeffisiyen, korrelyatsion bog'lanish zichligi, tanlanma korrelyatsiya koeffisiyenti.

REJA:

1. Chiziqli regressiya.
2. Eng kichik kvadratlar usuli.
3. To'g'ri chiziqli regressiya tanlanma tenglamasi parametrlarini topish.
4. To'g'ri chiziqli regressiya tanlanma tenglamasi.
5. Korrelyatsion bog'lanish zichligi.

Regressiya tanlanma tenglamasi

$$\overline{y_x} = f(x)$$

ko'rinishda yozilib, agar $f(x)$ regressiya chiziqli bo'lsa, u holda X va Y belgilar orasidagi korrelyatsion bog'lanish chiziqli deb atalar edi. Biz mana shu chiziqli korrelyatsion bog'lanishni atroflicha o'rganib chiqamiz.

Buning uchun (X, Y) juftlikning sonli belgilari sistemasini o‘rganamiz. Bunda ikki:

1) ma’lumotlar gruppalanmagan;

2) ma’lumotlar gruppalangan hollarni alohida-alohida qarashimiz kerak bo‘ladi.

1) Tanlanma ustida o‘tkazilgan n ta erkli tajriba natijasida olingan ma’lumotlardan (x_i, y_i) $i = 1,2,3,...,n$ sonlar juftligi ketma-ketligi hosil qilingan bo‘lib, bu ma’lumotlarni gruppalash shart bo‘lmasin, ya’ni X belgining turli x qiymatlari va ularga mos Y belgining y qiymatlari bir martadan kuzatilgan bo‘lsin. Bunday holatda shartli o‘rtacha tushunchasidan foydalanish shart emas. Shuning uchun izlanayotgan

$$\overline{y_x} = kx + b$$

tanlanma regressiya to‘g‘ri chizig‘i tenglamasini quyidagicha yozishimiz mumkin

$$y = kx + b$$

Bu tenglamadagi burchak koeffisiyentni ρ_{yx} bilan belgilab, uni Y ning X ga regressiya tanlanma koeffisiyenti deb ataymiz. Shunday qilib, Y ning X ga to‘g‘ri chiziqli regressiya tanlanma tenglamasini

$$Y = \rho_{yx} x + b \tag{1}$$

ko‘rinishda izlaymiz.

Bu tenglamadagi noma’lum ρ_{yx} va b koeffisiyentlarni shunday tanlashimiz kerakki, natijada kuzatish ma’lumotlari bo‘yicha topilgan (x_i, y_i) nuqtalarni XOY tekislikka joylashtirganimizda bu nuqtalar mumkin qadar (1) to‘g‘ri chiziqning yaqin atrofida yotsin. Bunday talabni bajarishdan oldin $Y_i - y_i$ ifoda bilan aniqlanadigan chetlanish tushunchasini kiritib olamiz, bu erda $Y_i -$ (1) tenglamadan x_i qiymatga mos keluvchi ordinata; y_i esa x_i ga mos kuzatilgan ordinata. Noma’lum ρ_{yx} va b koeffisiyentlarni shunday tanlaymizki, chetlanishlar kvadratlarining yig‘indisi eng kichik, ya’ni $\min\limits_i \sum\limits_i \left(Y_i - y_i\right)^2$ bo‘lsin (noma’lum ρ_{yx} va b koeffisiyentlarni topishning bu usuli eng kichik kvadratlar usuli deb ataladi).

Har bir chetlanish noma’lum ρ_{yx} va b koeffisiyentlarga bog‘liq bo‘lgani uchun chetlanishlar kvadratlari yig‘indisining funksiyasi F ham bu koeffisiyentlarga bog‘liq bo‘ladi: $F(\rho_{yx}, b) = \sum\limits_i \left(Y_i - y_i\right)^2$. Bu funksiyaning minimumini topish uchun noma’lum parametrlar bo‘yicha xususiy hosilalarni hisoblab nolga tenglashtiramiz (hozircha ρ_{yx} o‘rniga ρ yozib turamiz):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \rho} = 2\sum_{i=1}^{n}(\rho x_i + b - y_i)x_i = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n}(\rho x_i + b - y_i) = 0. \end{cases}$$

Bu sistemada elementar almashtirishlar bajarib $\rho,\ b$ larga nisbatan quyidagi tenglamalar sistemasini olamiz:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\rho x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ \sum_{i=1}^{n}\rho x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \qquad (2)$$

Bu sistemadan izlanayotgan parametrlarni topamiz (yozivda ixchamlik uchun i indekslarni tushirib qoldiramiz):

$$\rho_{yx} = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}, \qquad b = \frac{n\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} \qquad (3)$$

1-misol. Hajmi $n = 5$ bo‘lgan tanlanmalarning

X: 1 1,5 3 4,5 5

Y: 1,25 1,4 1,5 1,75 2,25

taqsimoti bo‘yicha Y ning X ga to‘g‘ri chiziqli regressiya tanlanma tenglamasini toping.

Yechish. Ma’lumotlar asosida quyidagi jadvalni tuzamiz:

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	1,25	1	1,25
1,5	1,4	2,25	2,1
3	1,5	9	4,5
4,5	1,75	20,25	4,875
5	2,25	25	11,25
$\sum_i = 15$	$\sum_i = 8,15$	$\sum_i = 57,5$	$\sum_i = 26,975$

Jadvaldagi hisoblangan qiymatlarni (3) formulaga qo‘ysak:

$$\rho_{yx} = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} = \frac{5\cdot 26,975 - 15\cdot 8,15}{5\cdot 57,5 - 15^2} = 0,202,$$

$$b = \frac{n\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} = \frac{5\cdot 57,5\cdot 8,15 - 15\cdot 26,975}{5\cdot 57,5 - 15^2} = 1,024.$$

U holda regressiya tanlanma tenglamasi: $\overline{y_x} = 0,202x + 1,024$.

2) Faraz qilamiz, kuzatish natijasida olingan ma’lumotlar ko‘p sonli (kamida 50 ta kuzatish o‘tkazilishi kerak) bo‘lib, gruppalanadigan bo‘lsin. U holda ma’lumotlar korrelyatsion jadval ko‘rinishida beriladi:

X \ Y	y_1	y_2	$\dots$	y_l	m_x
x_1	m_{11}	m_{12}	$\dots$	m_{1l}	m_{x_1}
x_2	m_{21}	m_{22}	$\dots$	m_{2l}	m_{x_2}
...	...	...	$\dots$	...	...
x_k	m_{k1}	m_{k2}	$\dots$	m_{kl}	m_{x_k}
m_y	m_{y_1}	m_{y_2}	$\dots$	m_{y_l}	n

Quyidagi ayniyatlardan:

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum x \Rightarrow \sum x = n\overline{x},\quad \overline{y}=\frac{1}{n}\sum y \Rightarrow \sum y = n\overline{y},$$

$$\overline{x^2}=\frac{1}{n}\sum x^2 \Rightarrow \sum x^2 = n\overline{x^2},$$

$\sum xy = n_{xy}xy$ ((x,y) juftlik n_{xy} marta kuzatilishi hisobga olingan) foydalanib, (2) tenglamalar sistemasini quyidagicha yozib olamiz:

$$\begin{cases} \rho n\overline{x^2}+bn\overline{x}=\sum n_{xy}xy, \\ \rho\overline{x}+b=\overline{y}. \end{cases}$$

Bu yerda (x, y) juftlik n_{xy} marta takrorlangani uchun $\sum xy$ ifoda $\sum n_{xy}xy$ ko‘rinishda yoziladi. Bu sistemadan

$$\rho_{yx}=\frac{\sum n_{xy}xy-n\overline{x}\cdot\overline{y}}{n\left(\overline{x^2}-\left(\overline{x}\right)^2\right)}=\frac{\sum n_{xy}xy-n\overline{x}\cdot\overline{y}}{n\sigma_x^2}$$

ifodani topamiz. Izlanayotgan:

$$\overline{y_x}=\rho_{yx}x+b \tag{4}$$

regressiya tanlanma tenglamasini $\overline{y}$ uchun quyidagicha yozib olish mumkin:

$$\overline{y}=\rho_{yx}\overline{x}+b \tag{5}$$

chunki $(\overline{x}, \overline{y})$ nuqta ham (4) tenglamaning yechimi bo‘ladi. (4) va (5) tenglamalardan

$$\left(\overline{y_x}-\overline{y}\right)=\rho_{yx}\left(x-\overline{x}\right) \tag{6}$$

regressiya tanlama tenglamasini hosil qilamiz. Bundan so‘ng regressiya tanlanma tenglamasini (6) ko‘rinishda izlaymiz.

1-eslatma. Agar ma'lumotlarda katta sonlar qatnashsa hisoblashlarni yengillashtirish uchun x_i, y_i variantalardan mos ravishda $u_i = \frac{x_i - c_1}{c_2}$, $\upsilon_i = \frac{y_i - c_3}{c_4}$ shartli variantalarga o'tib olish mumkin.

Ma'lumki, korrelyatsiya nazariyasining asosiy masalalaridan biri korrelyatsion bog'lanish zichligini (kuchini) aniqlashdir.

Y belgining X belgiga korrelyatsion bog'lanish zichligi Y ning $X = x$ ga mos qiymatlarining $\overline{y_x}$ – shartli o'rtacha qiymat atrofida tarqoqligi bo'yicha baholanadi. Agar tarqoqlik katta bo'lsa, u holda Y belgi X belgiga kuchsiz bog'langanligini yoki umuman bog'lanmaganligini bildiradi. Tarqoqlikning katta bo'lmasligi ular orasida ancha kuchli bog'lanish borligini ko'rsatadi.

Y va X belgilar orasidagi chiziqli korrelyatsion bog'lanish zichligini xarakterlovchi kattalik korrelyatsiya tanlanma koeffisiyenti bilan tanishib chiqamiz. Ma'lumki

$$\rho_{yx} = \frac{\sum n_{xy} xy - n\overline{x}\,\overline{y}}{n\sigma_x^2}$$

Bu tenglikning ikkala tomonini ham $\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ nisbatga ko'paytiramiz. U holda:

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\rho_{yx} = \frac{\sum n_{xy} xy - n\overline{x}\,\overline{y}}{n\sigma_x\sigma_y}$$

Hosil bo'lgan tenglikning o'ng tomonini r_T bilan belgilaymiz va uni tanlanma korrelyatsiya koeffisiyenti deb ataymiz:

$$r_T = \frac{\sum xy - n\overline{x}\,\overline{y}}{n\sigma_x\sigma_y} \quad \text{(ma'lumotlar gruppalanmasa),}$$

yoki

$$r_T = \frac{\sum n_{xy} xy - n\overline{x}\,\overline{y}}{n\sigma_x\sigma_y} \quad \text{(ma'lumotlar gruppalansa).}$$

r_T – tanlanma korrelyatsiya koeffisiyenti bosh to'plam korrelyatsiya koeffisiyentining bahosi hisoblanadi, shuning uchun Y va X kattaliklarning son belgilari orasidagi chiziqli bog'liqligining o'lchovi hisoblanadi.

Agar tanlanma yetarlicha katta hajmga ega va reprezentativ bo'lsa, u holda belgilar orasidagi zichlik haqida tanlanma ma'lumotlari bo'yicha olingan xulosa ma'lum darajada bosh to'plamga ham tarqatilishi mumkin. Masalan, normal taqsimot qonuni bo'yicha taqsimlangan bosh to'plam korrelyatsiya koeffisiyentini baholash uchun $(n \geq 50)$

$$r_T - 3\frac{1-r_T^2}{\sqrt{n}} \le r_B \le r_T + 3\frac{1-r_T^2}{\sqrt{n}}$$

formuladan foydalanish mumkin.

Tanlanma korrelyatsiya koeffisiyenti uchun quyidagi xossalar o‘rinli:

1-xossa. Tanlanma korrelyatsiya koeffisiyentining absolyut qiymati birdan ortmaydi, ya’ni $|r_T| \le 1$.

2-xossa. Tanlanma korrelyatsiya koeffisiyentining absolyut qiymati ortsa, belgilar orasidagi chiziqli korrelyatsion bog‘lanish zichligi ortadi.

3-xossa. Agar $|r_T| = 1$ bo‘lsa, u holda kuzatilayotgan belgilarning chiziqli funksional bog‘langan bo‘ladi.

4-xossa. Agar $r_T = 0$ bo‘lib, regressiya tanlanma chiziqlari to‘g‘ri chiziqlardan iborat bo‘lsa, u holda X va Y belgilar orasidagi bog‘lanish chiziqli korrelyatsion bog‘lanish bo‘lmaydi.

2-eslatma. Agar $r_T = 0$ bo‘lsa, u holda o‘rganilayotgan belgilar chiziqsiz korrelyatsion bog‘lanishda (masalan, parabolik, ko‘rsatkichli va h.k.) bo‘lishi mumkin.

Yuqorida keltirilgan xossalardan tanlanma korrelyatsiya koeffisiyentining ma’nosi kelib chiqadi: tanlanma korrelyatsiya koeffisiyenti tanlanmada son belgilar orasidagi chiziqli korrelyatsion bog‘lanish zichligini xarakterlaydi: $|r_T|$ kattalik 1 ga qancha yaqin bo‘lsa, chiziqli korrelyatsion bog‘lanish shuncha kuchli; $|r_T|$ kattalik 0 ga qancha yaqin bo‘lsa, chiziqli korrelyatsion bog‘lanish shuncha kuchsiz.

3-eslatma. Tanlanma korrelyatsiya koeffisiyentining ishorasi regressiya koeffisiyentlarining ishoralari bilan bir xil bo‘ladi, bu quyidagi formulalardan kelib chiqadi:

$$\rho_{yx} = r_T\frac{\sigma_y}{\sigma_x}, \quad \rho_{xy} = r_T\frac{\sigma_x}{\sigma_y}. \tag{7}$$

4-eslatma. Tanlanma korrelyatsiya koeffisiyenti tanlanma regressiya koeffisiyentlarining geometrik o‘rtacha qiymatiga teng: $r_T = \pm\sqrt{\rho_{xy}\rho_{yx}}$.

Haqiqatan ham (7) dan:

$$\rho_{yx}\rho_{xy} = r_T^2 \Rightarrow r_T = \pm\sqrt{p_{yx}p_{xy}}$$

Ildiz oldidagi ishora regressiya koeffisiyentlari ishoralari bilan bir xil qilib olinishi lozim.

2-misol. Cho‘chqa bolasining og‘irligi Y (kg.) va yoshi X (haftalarda) orasidagi bog‘lanish quyidagi jadval bilan berilgan.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1,3	2,5	3,9	5,2	5,3	7,5	9,0	10,8	13,1

Shu ma’lumotlar bo‘yicha tanlanma korrelyatsiya koeffisiyentini toping.

Yechish. $r_T = \dfrac{\sum x_i y_i - n\overline{x}\overline{y}}{n\sigma_x\sigma_y}$ formulada zarur hisoblashlarni bajarsak, $r_T = 0{,}98$ ekanligini topamiz.

Bundan esa cho‘chqa bolasining og‘irligi va yoshi orasidagi bog‘lanish kuchli degan xulosaga kelamiz.

5-eslatma. Tanlanma korrelyatsiya koeffisiyentini hisoblashni soddalashtirish uchun shartli variantaga o‘tish mumkin (bunda r_T ning qiymati o‘zgarmaydi).

14-ma’ruza. CHIZIQSIZ REGRESSIYA TENGLAMASI

Tayanch so‘z va iboralar: Tanlanma korrelyatsion nisbat, chiziqsiz korrelyatsion bog‘lanish, egri chiziqli regressiya tenglamasi.

REJA:

1. Tanlanma korrelyatsion nisbat va uning xossalari.
2. Egri chiziqli korrelyatsiya.

Kuzatilayotgan (yoki biz o‘rganmoqchi bo‘lgan) X va Y belgilar orasidagi chiziqli korrelyatsion bog‘lanish zichligini baholash uchun r_T – korrelyatsiya tanlanma koeffisiyenti xizmat qilsa, chiziqsiz yoki umuman ixtiyoriy ko‘rinishdagi korrelyatsion bog‘lanishning zichligini qanday baholash mumkin degan savol bo‘lishi tabiiydir. Umumiy holda korrelyatsion bog‘lanishning zichligini aniqlash uchun tanlanma korrelyatsion nisbat deb ataluvchi xarakteristika ishlatiladi. Bu xarakteristika bilan tanishib chiqishdan oldin tanlanma korrelyatsion nisbatni kiritish bilan bog‘liq bo‘lgan ba’zi tushunchalarni keltirib o‘tamiz.

1-ta’rif. Bosh to‘plamning biror bir gruppasiga tegishli belgilarning arifmetik o‘rtachasi gruppa o‘rtachasi deb ataladi.

Gruppa o‘rtachasini ba’zi hollarda shartli o‘rtacha deb ham yuritish mumkin. Yuqorida foydalanilgan shartli o‘rtacha tushunchasida bu holat yuz bergan.

Gruppa o‘rtachasi va gruppalar hajmi ma’lum bo‘lsa umumiy to‘plam o‘rtachasini (bosh to‘plam o‘rtachasi) topish mumkin.

1-misol. Quyidagi jadval asosida ikki gruppadan tashkil topgan to‘plam o‘rtachasi topilsin:

Gruppa	Birinchi		Ikkinchi	
Belgining qiymatlari	1	6	1	5
Chastota	10	15	20	30
Hajm	10+15=25		20+30=50	

Yechish. Gruppa o‘rtachalarini topamiz:

$$\overline{x_1} = \frac{10\cdot 1 + 15\cdot 6}{25} = 4, \qquad \overline{x_2} = \frac{20\cdot 1 + 30\cdot 5}{50} = 3,4.$$

Gruppa o‘rtachalari bo‘yicha umumiy o‘rtachani topamiz:

$$\overline{x} = \frac{25\cdot 4 + 50\cdot 3,4}{25+50} = 3,6.$$

2-ta’rif. Gruppaga tegishli belgilarning gruppa o‘rtachasiga nisbatan dispersiyasi gruppa dispersiyasi deb ataladi:

$$D_{гр}(X_j) = \frac{\sum n_i\left(x_i - \overline{x_j}\right)^2}{N_j},$$

bu yerda $n_i - x_i$ qiymatning chastotasi; $j -$gruppa nomeri; $\overline{x_j} - j$ gruppaning gruppa o‘rtachasi; $N_j = \sum\limits_i n_i - j$ gruppa hajmi.

2-misol. Ikki gruppadan tashkil topgan to‘plamning gruppa dispersiyasi topilsin:

Gruppa	Birinchi		Ikkinchi	
Belgining qiymatlari	1	6	1	5
Chastota	10	15	20	30
Hajm	10+15=25		20+30=50	

Yechish. 1-misoldan ma’lumki, $\overline{x_1} = 4$, $\overline{x_2} = 3,4$. Endi gruppa dispersiyalarini topamiz:

$$D_{гр}(X_1) = \frac{10\cdot(1-4)^2 + 15\cdot(6-4)^2}{25} = 6,$$

$$D_{гр}(X_2) = \frac{20\cdot(1-3,4)^2 + 30\cdot(5-3,4)^2}{50} = \frac{115,2+76,8}{50} = 3,84.$$

3-ta’rif. Gruppa dispersiyalarining gruppalar hajmi bo‘yicha olingan arifmetik o‘rtachasi gruppalar ichki dispersiyasi deb ataladi:

$$\overline{D_{гр}} = \frac{\sum N_j D_{гр}(X_j)}{n},$$

bu yerda, $N_j - j$ gruppa hajmi; $n = \sum_j N_j$ – umumiy to‘plam hajmi.

Masalan, 2-misolda gruppalar ichki dispersiyasini topsak:

$$\overline{D_{гр}} = \frac{25 \cdot 6 + 50 \cdot 3,84}{75} = 4,56 .$$

4-ta’rif. Gruppa o‘rtachalarining umumiy to‘plam o‘rtachasiga (bosh to‘plam o‘rtachasi) nisbatan dispersiyasi gruppalararo dispersiya deb ataladi:

$$D_{гр}\left(\overline{x_j}\right) = \frac{\sum N_j \left(\overline{x_j} - \overline{x}\right)^2}{n},$$

bu yerda $\overline{x_j} - j$ gruppaning gruppa o‘rtachasi; $N_j - j$ gruppa hajmi; $\overline{x_T}$ – umumiy o‘rtacha; $n = \sum_j N_j$ – umumiy to‘plam hajmi.

Masalan, 1-misolda gruppalararo dispersiyani topsak:

$$D_{гр}\left(\overline{x_j}\right) = \frac{25 \cdot (4 - 3,6)^2 + 50 \cdot (3,4 - 3,6)^2}{75} = \frac{4 + 2}{75} = 0,08 .$$

Endi bu tushunchalardan foydalanib tanlanma korrelyatsion nisbat tushunchasini aniqlaymiz.

5-ta’rif. Y ning X ga tanlanma korrelyatsion nisbati deb,

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{\overline{y_x}}}{\sigma_y} \quad (1)$$

nisbat bilan aniqlanuvchi kattalikka aytiladi.

Bu yerda $\sigma_{\overline{y_x}} = \sqrt{\frac{\sum n_x \left(\overline{y_x} - \overline{y}\right)^2}{n}}$ – shartli yoki gruppalararo o‘rtacha kvadratik chetlanish; $\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum n_y \left(y - \overline{y}\right)^2}{n}}$ – o‘rtacha kvadratik chetlanish; n – tanlanma hajmi; n_x – X belgining x qiymati chastotasi; n_y – Y belgining y qiymati chastotasi; $\overline{y}$ – Y belgining umumiy o‘rtachasi; $\overline{y_x}$ – Y belgining $X = x$ ga mos shartli o‘rtachasi (x gruppaning gruppa o‘rtachasi).

X ning Y ga tanlanma korrelyatsion nisbati ham shu kabi aniqlanadi:

$$\eta_{xy} = \frac{\sigma_{\overline{x_y}}}{\sigma_x}$$

3-misol. Quyidagi korrelyatsion jadval bo‘yicha Y belgining X belgiga korrelyatsion nisbati η_{yx} ni toping.

Y \ X	10	20	30	n_y
15	4	28	6	38
25	6	-	6	12
n_x	10	28	12	$n=50$
$\overline{y_x}$	21	15	20	

Yechish. $\overline{y}$ – umumiy o‘rtachani topamiz:

$$\overline{y}=\frac{\sum n_i y_i}{n}=\frac{38\cdot 15+12\cdot 25}{50}=\frac{870}{50}=17,4.$$

o‘rtacha kvadratik chetlanishni topamiz:

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{\sum n_y\left(y-\overline{y}\right)^2}{n}}=\sqrt{\frac{38\cdot(15-17,4)^2+12\cdot(25-17,4)^2}{50}}=4,27.$$

$\sigma_{\overline{y_x}}$ – shartli o‘rtachaning o‘rtacha kvadratik chetlanishni (yoki gruppalararo o‘rtacha kvadratik chetlanish) topamiz:

$$\sigma_{\overline{y_x}}=\sqrt{\frac{\sum n_x\left(\overline{y_x}-\overline{y}\right)}{n}}=\sqrt{\frac{10(21-17,4)^2+28(15-17,4)^2+12(20-17,4)^2}{50}}=2,73.$$

Topilganlarni (1) formulaga qo‘ysak: $\eta_{yx}=\frac{\sigma_{\overline{y_x}}}{\sigma_y}=\frac{2,73}{4,27}=0,64$.

Tanlanma korrelyatsion nisbat uchun quyidagi xossalar o‘rinli.

η_{yx} va η_{xy} kattaliklar uchun aniqlangan xossalar bir xil bo‘lganligi sababli tanlanma korrelyatsion nisbat xossalarini η kattalik uchun sanab o‘tamiz.

1-xossa. Tanlanma korrelyatsion nisbat quyidagi qo‘sh tengsizlikni qanoatlantiradi: $0\le\eta\le 1$.

2-xossa. Agar $\eta=1$ bo‘lsa, belgilar funksional bog‘lanishda, ya’ni $Y=f(X)$ bo‘ladi.

3-xossa. Tanlanma korrelyatsion nisbat tanlanma korrelyatsiya koeffisiyentining absolyut qiymatidan kichik emas: $\eta\ge|r_T|$.

4-xossa. Agar $\eta=|r_T|$ bo‘lsa, belgilar orasida chiziqli bog‘lanish bo‘ladi.

5-xossa. Agar $\eta=0$ bo‘lsa, belgilar korrelyatsion bog‘lanishda bo‘lmaydi.

Tanlanma korrelyatsion nisbatning afzalligi uning istalgan korrelyatsion bog‘lanish, shu jumladan, chiziqli bog‘lanish zichligining ham o‘lchovi bo‘lib xizmat qilishidadir. Shu bilan birga tanlanma korrelyatsion nisbat kamchilikka ham ega: u bog‘lanish shakli haqida hech qanday ma’lumot bermaydi.

Agar X va Y belgilar orasidagi korrelyatsion bog‘lanish o‘rganilayotgan bo‘lib, $\overline{y_x} = f(x)$ regressiya grafigi egri chiziq bilan tasvirlanadigan bo‘lsa, u holda bu korrelyatsiya egri chiziqli deyiladi.

Egri chiziqli korrelyatsiyada ham chiziqli korrelyatsiya kabi korrelyatsion bog‘lanish shakli va uning zichligini aniqlash bilan shug‘ullaniladi. Egri chiziqli korrelyatsiyada Y ning X ga regressiya funksiyalari quyidagi ko‘rinishda bo‘lishi mumkin:

$\overline{y_x} = ax^2 + bx + c$ (ikkinchi tartibli parabolik korrelyatsiya);

$\overline{y_x} = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (uchinchi tartibli parabolik korrelyatsiya);

$\overline{y_x} = \dfrac{a}{x}$ (giperbolik korrelyatsiya).

Regressiya funksiyasining ko‘rinishini aniqlash uchun Dekart koordinatalar sistemasida (x, y) nuqtalarning o‘rni topiladi va ularning joylashishiga qarab regressiya funksiyasining taxminiy ko‘rinishi haqida gipoteza qilinadi; o‘rganilayotgan masalaning mohiyatidan kelib chiqqan holda oxirgi xulosa qabul qilinadi. Belgilar orasidagi korrelyatsion bog‘lanishni ifodalovchi regressiya funksiyalarining noma’lum parametrlarni aniqlash yoki statistik baholash masalalari ham muhim hisoblanadi. Regressiya funksiyasining noma’lum parametrlari ham eng kichik kvadratlar usuli yordamida topiladi. Egri chiziqli korrelyatsiya zichligini baholashda tanlanma korrelyatsion nisbatdan foydalanamiz.

Egri chiziqli korrelyatsiyaning sodda hollaridan biri ikkinchi tartibli parabolik korrelyatsiya ko‘rinishdagi korrelyatsiyaning noma’lum parametrlarini tanlanma ma’lumotlari yordamida topamiz. Aniqlik uchun Y ning X ga regressiya tanlanma tenglamasini qaraymiz. Bunda regressiya tanlanma tenglamasi

$$\overline{y_x} = ax^2 + bx + c$$

ko‘rinishda bo‘lib, a, b, c noma’lum parametrlarni tanlanma ma’lumotlari bo‘yicha topish kerak bo‘ladi. Noma’lum koeffisiyentlarni $\upsilon_i = y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)$ chetlanishlar kvadratlarining yig‘indisi eng kichik bo‘ladigan qilib, tanlaymiz. Shu maqsadda, quyidagi funksiyani kiritamiz: $F(a, b, c) = \sum_{i=1}^{n} \upsilon_i^2$. Bu funksiyani ekstremumga tekshirib va tegishli almashtirishlardan so‘ng quyidagi sistemani hosil qilamiz.

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} n_{x_i} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} n_{x_i} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} n_{x_i} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} n_{x_i} x_i^2 \overline{y_{x_i}}, \\ a\sum_{i=1}^{n} n_{x_i} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} n_{x_i} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} n_{x_i} x_i = \sum_{i=1}^{n} n_{x_i} x_i \overline{y_{x_i}}, \\ a\sum_{i=1}^{n} n_{x_i} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} n_{x_i} x_i + cn = \sum_{i=1}^{n} n_{x_i} \overline{y_{x_i}}. \end{cases} \tag{2}$$

Kuzatish natijalari (x_i, y_i) juftliklardan foydalanib (2) tenglamalar sistemasidan a, b, c noma'lum parametrlar topiladi.

4-misol. Korrelyatsion jadval ma'lumotlari asosida $\overline{y_x} = ax^2 + bx + c$ ko'rinishdagi Y ning X ga regressiya tanlama tenglamasini toping.

Y \ X	1	1,1	1,2	n_y
6	8	2	-	10
7	-	30	-	30
7,5	-	1	9	10
n_x	8	33	9	$n = 50$

Yechish. Korrelyatsion jadval ma'lumotlari asosida quyidagi jadvalni tuzamiz.

x	n_x	$\overline{y_x}$	$n_x x$	$n_x x^2$	$n_x x^3$	$n_x x^4$	$n_x \overline{y_x}$
1	8	6	8	8	8	8	48
1,1	33	6,73	36,3	39,93	43,93	48,32	222,09
1,2	9	7,5	10,8	12,96	15,55	18,66	67,50
Σ	50	-	55,1	60,89	67,48	74,98	337,59

Bu jadvalning Σ qatoridagi sonlarni (1) ga qo'yib quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 74,98a + 67,48b + 60,89c = 413,93, \\ 67,48a + 60,89b + 55,10c = 373,30, \\ 60,89a + 55,10b + 50c = 337,59. \end{cases}$$

Bu sistemadan $a = 1,94,\quad b = 2,98,\quad c = 1,10$ yechimlarni topamiz. U holda regressiya tenglamasi

$$\overline{y_x} = 1,94x^2 + 2,98x + 1,10$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Tekshirish uchun tenglama bo‘yicha hisoblangan $\overline{y_x}$ ning qiymatlari bilan jadval bo‘yicha topilgan $\overline{y_x}$ ning qiymatlarini taqqoslash mumkin. Yuqorida keltirilgan boshqa turdaga egri chiziqli regressiya tenglamalarining koeffisiyentlarini topishda ham eng kichik kvadratlar usulidan foydalanish mumkin, ammo ba’zi hollarda oldin ma’lum bir almashtirishlarni amalga oshirish zarur. Masalan, $y = ax^b$ $(a > 0, b > 0)$ regressiya tenglamasidagi noma’lum a, b koeffisiyentlarni topishda avvalambor bu tenglamani $\ln y = \ln a + b \ln x$ ko‘rinishda yozib olamiz, so‘ngra $u = \ln x$, $z = \ln y$ belgilashlar yordamida $z = bu + \ln a$ chiziqli funksiyani hosil qilamiz.

Ba’zi amaliy masalalarda ikkita emas, balki ikkitadan ko‘proq belgilar orasidagi bog‘lanishni o‘rganish zaruriyati tug‘iladi. Bu holda belgilar orasidagi korrelyatsion bog‘lanish to‘plamiy (ko‘plik) korrelyatsiya deb ataladi.

To‘plamli korrelyatsiyaning eng sodda holi bo‘lgan uchta belgi orasidagi chiziqli korrelyatsiyani qaraymiz. Bu holda X, Y va Z belgilar orasidagi korrelyatsion munosabat

$$z = ax + by + c \tag{3}$$

tenglama ko‘rinishida ifodalanadi. Bunda quyidagi:

1. Kuzatish ma’lumotlari bo‘yicha regressiyaning a, b, c noma’lum koeffisiyentlarni topish, ya’ni $z = ax + by + c$ tanlanma tenglamani topish;

2. Z belgi bilan ikkala Y va Z belgilar orasidagi bog‘lanish zichligin baholash;

3. Y fiksirlanganda (o‘zgarmaganda) Z va X orasidagi, X fiksirlanganda Z va Y orasidagi bog‘lanish zichligini topish masalalarini hal qilish zarur.

Birinchi masala eng kichik kvadratlar usuli bilan hal qilinadi. Analitik geometriyadan ma’lumki, (3) chiziqli bog‘lanish tenglamasini:

$$z - \bar{z} = a\left(x - \bar{x}\right) + b\left(y - \bar{y}\right)$$

ko‘rinishda yozib olish mumkin. Bu ko‘rinishda esa 1-masalani hal qilish osonroq.

Ba’zi elementar hisoblashlardan so‘ng a va b koeffisiyentlar uchun quyidagi formulalarni topamiz:

$$a = \frac{r_{xz} - r_{yz} r_{xy}}{1 - r_{xy}^2} \frac{\sigma_z}{\sigma_x}, \qquad b = \frac{r_{yz} - r_{yx} r_{zx}}{1 - r_{xy}^2} \frac{\sigma_z}{\sigma_y}.$$

Bunda r_{xz}, r_{yz}, r_{xy} − mos ravishda X va Z, Y va Z, X va Y belgilar orasidagi korrelyatsiya koeffisiyentlari; $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ − o‘rtacha kvadratik chetlanishlar.

Z belgining X va Y belgilar bilan bog‘liqliq zichligi quyidagi:

$$R = \sqrt{\frac{r_{xz}^2 - 2 r_{xy} r_{xz} r_{yz} + r_{yz}^2}{1 - r_{xy}^2}}, \quad 0 \le R \le 1$$

umumiy tanlanma korrelyatsiya koeffisiyenti bilan baholanadi.

Shuningdek, Y fiksirlanganda (o‘zgarmaganda) Z va X orasidagi, X fiksirlanganda Z va Y bog‘lanish zichligi mos ravishda:

$$r_{xz(y)} = \frac{r_{xz} - r_{xy}r_{yz}}{\sqrt{\left(1-r_{xy}^2\right)\left(1-r_{yz}^2\right)}}, \qquad r_{yz(x)} = \frac{r_{yz} - r_{xy}r_{xz}}{\sqrt{\left(1-r_{xy}^2\right)\left(1-r_{xz}^2\right)}}$$

xususiy tanlanma korrelyatsiya koeffisiyentlari bilan baholanadi.

Tabiatda turli-tuman jarayonlarni o‘rganishda, tasodifiy jarayonlarning o‘zaro bog‘liqlik qonunlarini ochishda, hamda umuman prognozlash masalalarida korrelyatsion va regression analizning xulosalari katta ahamiyatga egadir. Xususan, iqtisodiy jarayonlarni tadqiq etishda turli iqtisodiy ko‘rsatkichlarning bir-biriga bog‘liqligini aniqlash va shu asosda muhim xulosalar chiqarishda korrelyatsiya nazariyasi muvaffaqiyatli tatbiq etib kelinmoqda.

15-ma’ruza. STATISTIK GIPOTAZALAR

Tayanch so‘z va iboralar: Statistik gipoteza, oddiy gipoteza, murakkab gipoteza, muhimlilik darajasi, I va II tur xatoliklar.

REJA:

1. Statistik gipotazalar.

2. I va II tur xatoliklar.

Amaliyotda, texnikada va iqtisodiyotda ko‘pincha tasodifiylik bilan bog‘liq bo‘lgan biror faktni aniqlashtirish uchun statistik usul bilan tekshirish mumkin bo‘lgan gipotezalarga tayanib ish ko‘riladi.

Ma’lumki, har qanday ilmiy asoslangan farazni gipoteza deb aytishimiz mumkin, ammo har qanday gipotezani stastistik gipoteza deb ayta olmaymiz, chunki uning alohida ajralib turadigan xususiyatlari bor, bu xususiyatlarni alohida ta’kidlash uchun biz quyidagi ta’rifni keltiramiz.

1-ta’rif. Statistik gipoteza deb, kuzatilayotgan tasodifiy miqdorning (bosh to‘plamning) noma’lum taqsimot qonuni, yoki ma’lum taqsimot qonunning noma’lum parametrlari haqidagi gipotezaga aytiladi.

Masalan, quyidagi gipotezalar statistik gipotezalarga misol bo‘la oladi:

1. Bir xil ishlab chiqarish sharoitlarida bir xil ishni bajarayotgan ishchilarning mehnat unumdorligi normal taqsimot qonun bo‘yicha taqsimlangan;
2. Parallel ishlayotgan stanoklarda tayyorlanayotgan bir xil turdagi detallarning o‘rtacha o‘lchamlari bir-biriga teng;
3. Normal taqsimot qonuniga bo‘ysinuvchi ikki to‘plamning dispersiyalari

o‘zaro teng.

1-gipotezada taqsimotning ko‘rinishi haqida, 2 va 3-gipotezalarda esa parametrlar haqida faraz qilingan.

“Ertaga yomg‘ir yog‘adi”, “Bu yil mo‘l hosil olamiz” kabi gipotezalar statistik gipotezalar bo‘la olmaydi, chunki ularda na taqsimot qonunining ko‘rinishi haqida, na uning parametrlari haqida so‘z boradi.

Bosh to‘plam haqida oldinga surilgan gipoteza tanlanma natijalarga asoslanib tekshiriladi va natijada qabul qilinishi yoki rad qilinishi mumkin. Bunda quyidagi tushuncha va belilashlardan foydalaniladi:

H_0 – asosiy (yoki nolinchi) gipoteza deb ma’lum faktlarga yoki tadqiqot natijalariga asoslanib ilgari surilgan statistik gipotezaga aytiladi;

H_1 – konkurent (yoki alternativ) gipoteza deb, asosiy gipotezaga zid bo‘lgan har qanday boshqa gipotezaga aytiladi.

Masalan, “X tasodifiy miqdor Puasson taqsimot konuniga bo‘ysunadi” gipotezasi yuqoridagilarga asoslanib quyidagicha yoziladi:

$$H_0 : P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad \lambda > 0,\ \ k = 0,1,2,3,...;$$

$$H_1 : P(X = k) \neq \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Faqat bitta da’voni o‘z ichiga olgan gipoteza oddiy gipoteza; bittadan ortiq sondagi da’volarni o‘z ichiga olgan gipoteza esa murakkab gipoteza deyiladi. Masalan, X tasodifiy miqdor ko‘rsatkichli taqsimot:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & agar \quad x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & agar \quad x \geq 0. \end{cases}$$

qonuniga bo‘ysinib, uning λ parametri noma’lum bo‘lsin. U holda quyidagilar o‘rinli:

$H_0 : \lambda = 2$ asosiy gipotezani oddiy gipoteza;

$H_1 : \lambda \neq 2$ alternativ gipotezani esa murakkab gipoteza.

Ilgari surilgan gipoteza tekshirib ko‘riladi va so‘ngra xulosa chiqariladi. Gipotezani tekshirish natijasida ikki turdagi xatolikka yo‘l qo‘yilishi mumkin.

Agar to‘g‘ri gipoteza rad etilsa, qilingan xatolikni I tur xatolik, agar noto‘g‘ri gipoteza qabul qilinsa qilingan xatolik II tur xatolik deb ataladi. Bu xatoliklarni jadvalda quyidagicha tasvirlash mumkin.

H_0 – gipoteza	To‘g‘ri	Noto‘g‘ri
Rad qilindi	I tur xatolik	To‘g‘ri qaror
Qabul qilindi	To‘g‘ri qaror	II tur xatolik

Amaliyotda I va II tur xatoliklarning oqibatlari har xil bo‘lishi mumkin. Masalan, agar samolyotga “uchishga ruxsat berilsin” degan to‘g‘ri qaror rad etilgan bo‘lsa, u holda bu I tur xatolik bo‘lib, bunday xatolik moddiy zararga olib kelishi mumkin; agar samolyotning nosozligiga qaramasdan “uchishga ruxsat berilsin” degan noto‘g‘ri qaror qabul qilinsa, u holda bu II tur xatolik bo‘lib, bunday xatolik halokatga olib kelishi mumkin.

Albatta, I tur xatolik II tur xatolikga qaraganda og‘irroq oqibatlarga olib keladigan misollar ham keltirish mumkin.

To‘g‘ri qarorni ikki holda qabul qilish mumkin:

1) agar ilgari surilgan gipoteza haqiqatan ham to‘g‘ri bo‘lsa, gipoteza qabul qilinadi;

2) agar ilgari surilgan gipoteza haqiqatan ham noto‘g‘ri bo‘lsa, gipoteza qabul qilinmaydi.

I tur xatolikka yo‘l qo‘yish ehtimoli α bilan belgilanadi va u muhimlilik darajasi deb ataladi. Ko‘p hollarda: $\alpha = 0{,}05,\ \ \alpha = 0{,}01,\dots$.

Biz ma’lum taqsimot qonuniga bo‘ysinuvchi belgining noma’lum parametrlari haqida ilgari surilgan gipoteza statistik usulda qanday tekshirilishini ko‘rib chiqamiz.

Asosiy gipoteza ilgari surilgandan so‘ng, uning to‘g‘ri yoki noto‘g‘ri ekanligini tekshirib ko‘rish kerak bo‘ladi. Shu maqsadda maxsus tanlangan, aniq, yoki taxminiy taqsimoti ma’lum bo‘lgan tasodifiy miqdor ishlatiladi. Bu tasodifiy miqdorni K bilan belgilaymiz.

2-ta’rif. Statistik kriteriy (yoki oddiygina kriteriy) deb, asosiy gipotezani tekshirish uchun xizmat qiladigan K-tasodifiy miqdorga aytiladi.

Masalan, agar normal taqsimot qonuniga ega X va Y bosh to‘plamlarning dispersiyalari tengligi haqidagi gipoteza tekshirilayotgan bo‘lsa, u holda K kriteriy sifatida “tuzatilgan” tanlanma dispersiyalar nisbati olinadi:

$$F = \frac{s_x^2}{s_y^2}. \tag{1}$$

Turli tajribalarda dispersiyalar har xil, oldindan ma’lum bo‘lmagan qiymatlar qabul qilganligi uchun F tasodifiy miqdor bo‘lib, u Fisher-Snedekor qonuni bo‘yicha taqsimlangan.

Gipotezani tekshirish uchun kriteriyga kirgan miqdorlarning xususiy qiymatlari tanlanma bo‘yicha hisoblanadi va shunday qilib kriteriyning kuzatiladigan (xususiy) qiymati hosil qilinadi.

K_{kuzat}-kuzatiladigan qiymat deb, statistik kriteriyning tanlanmalar bo‘yicha hisoblangan qiymatiga aytiladi. Masalan, ikkita tanlanma asosida topilgan dispersiyalar: $s_1^2 = 20$ va $s_2^2 = 5$ bo‘lsa, u holda

$$K_{kuzat} = F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{20}{5} = 4$$

Tanlangan K kriteriyning mumkin bo‘lgan barcha qiymatlari to‘plami kesishmaydigan ikkita qism to‘plamlarga ajratiladi:

$$K = K^- \cup K^+, K^- \cap K^+ = \varnothing .$$

Ulardan biri H_0-asosiy gipoteza rad qilinadigan, ikkinchisi esa asosiy gipoteza qabul qilinadigan qiymatlarini o‘z ichiga oladi.

3-ta’rif. Kritik soha deb, kriteriyning H_0-asosiy gipotezani rad qiladigan qiymatlar to‘plamiga aytiladi.

4-ta’rif. Gipotezani qabul qilish sohasi deb, kriteriyning asosiy gipoteza qabul qiladigan qiymatlar to‘plamiga aytiladi.

Statistik gipotezalarni tekshirishning asosiy printsiplari E.Neyman, K.Pirson va boshqa matematiklar tomonidan ishlab chiqilgan bo‘lib, bu printsipni quyidagicha ta’riflash mumkin: agar kriteriyning kuzatiladigan qiymati kritik sohaga tegishli bo‘lsa, asosiy gipoteza rad qilinadi, agar kriteriyning kuzatilayotgan qiymati gipotezaning qabul qilish sohasiga tegishli bo‘lsa, asosiy gipoteza qabul qilinadi.

Kriteriy bir o‘lchovli tasodifiy miqdor bo‘lgani uchun uning mumkin bo‘lgan barcha qiymatlari to‘plami biror intervaldan iborat bo‘ladi. Shu sababli, kritik soha va gipotezaning qabul qilish sohasi ham intervaldan iborat bo‘ladi, demak, ularni ajratib turuvchi nuqtalar to‘g‘risida gapirish mumkin.

5-ta’rif. Kritik nuqtalar deb, kritik sohani gipotezaning qabul qilish sohasidan ajratib turuvchi nuqtalarga aytiladi.

Agar kritik soha $K > k_{kr}$ tengsizlik bilan aniqlansa, u holda uni o‘ng tomonli kritik soha, tengsizlik aksincha bo‘lsa chap tomonli kritik soha deyiladi. Agar kritik soha $K < k_{kr}', K > k_{kr}'$ tengsizliklar bilan aniqlansa, u holda uni ikki tamonli kritik soha deyiladi.

Chap tomonli va ikki tomonli kritik sohalarni aniqlash o‘ng tomonli kritik sohani topishga o‘xshash bo‘lganligi sababli biz faqat o‘ng tomonli kritik sohani topish bilan tanishib chiqamiz.

Kritik sohani topish uchun kritik nuqtani aniqlash etarli. Bu nuqtani aniqlash uchun esa α ning qiymati berilishi kerak. So‘ngra, quyidagi talabga asoslanib, k_{kr} nuqta topiladi: H_0-asosiy gipoteza o‘rinli bo‘lishi shartida tanlangan K kriteriyning k_{kr} nuqtadan katta bo‘lishi ehtimoli α-muhimlilik darajasiga teng bo‘lsin:

$$P(K > k_{kr}) = \alpha . \qquad (2)$$

Har bir kriteriy uchun (2) shartni qanoatlantiruvchi kritik nuqtalarni topish jadvallari mavjud.

Kritik nuqta topilgandan so‘ng, $x_1, x_2, ..., x_n$ tanlanma ma’lumotlari bo‘yicha kriteriyning kuzatish qiymati topiladi. Bunda agar $K > k_{kr}$ bo‘lsa, u holda H_0 asosiy gipoteza rad qilinadi; agar $K < k_{kr}$ bo‘lsa, u holda gipotezani rad qilishga asos yo‘q deyiladi.

1-eslatma. H_0 gipoteza qabul qilingan bo‘lsin. Shu bilan bu gipoteza isbotlandi deyish xato bo‘ladi. Aslida “kuzatish natijalari H_0 gipotezaga mos keladi va demak, uni rad qilishga asos yo‘q” deyish to‘g‘riroq bo‘ladi.

Amalda gipotezani katta ishonch bilan qabul qilish uchun boshqa statistik usullar bilan tekshiriladi yoki tanlanma hajmi orttirilib tajriba takrorlanadi. Gipotezani qabul qilishdan ko‘ra ko‘proq uni rad qilishga harakat qilinadi. Haqiqatan, ma’lumki biror umumiy da’voni rad qilish bu uchun bu da’voga zid bo‘lgan bitta misolni keltirish kifoya. Shu sababli kriteriy quvvati tushunchasi kritiladi.

6-ta’rif. Konkurent gipoteza to‘g‘ri bo‘lganda kriteriyning kritik sohada bo‘lish ehtimoli kriteriy quvvati deb ataladi.

Agar II tur xatolikka yo‘l qo‘yish ehtimoli β bo‘lsa, u holda kriteriy quvvati $1-\beta$ ga teng bo‘ladi. Bundan ko‘rinadiki, quvvat qancha katta bo‘lsa II tur xatolikka yo‘l qo‘yish ehtimoli shuncha kam bo‘ladi. Yuqoridagi ta’riflardan ko‘rinib turibdiki, α ning kamayishi β ning o‘sishiga olib keladi, va aksincha. Masalan, $\alpha = 0$ bo‘lsa, u holda barcha gipotezalar qabul qilinadi, jumladan noto‘g‘rilari ham. Shu sababli, ikkala parametrni bir paytda kamaytirib bo‘lmaydi. I tur va II tur xatoliklarni kamaytirishning yagona yo‘li tanlanma hajmini oshirishdir.

Statistik gepotezani tekshirish qanday amalga oshirilishini quyidagi misolda ko‘rib chiqamiz.

Normal taqsimlangan ikki bosh to‘plamning dispersiyalarni taqqoslash. Dispersiyalar haqidagi gipotezalar, ayniqsa texnikada muhim ahamiyatga ega, chunki tarqoqlik xarakteristikasi bo‘lgan dispersiya mashina va uskunalarning, o‘lchov asboblarining, texnologik protsesslarning aniqligini baholashda juda muhim ko‘rsatkich hisoblanadi.

Normal taqsimlangan bosh to‘plam dispersiyalarining tengligi haqida gipoteza ilgari surilsa kriteriy sifatida $F = \frac{s_x^2}{s_y^2}$ kattalik olinishni aytib o‘tgan edik. Bunda F tasodifiy miqdor bo‘ysinadigan Fisher-Snedekor taqsimotining erkinlik darajalari quyidagicha aniqlanadi: $k_1 = n_1 - 1,\ \ k_2 = n_2 - 1$, bu erda n_1-hisoblanganda qiymati katta bo‘lgan “tuzatilgan” dispersiyaga mos tanlanmaning hajmi, n_2- hisoblanganda qiymati kichik bo‘lgan “tuzatilgan” dispersiyaga mos tanlanmaning hajmi. Kritik nuqta $k_{kr} = F_{kr}(\alpha; k_1, k_2)$ tenglik bilan jadvaldan aniqlanadi.

Misol. Normal taqsimlangan X va Y bosh to‘plamlardan olingan $n_1 = 11$ va $n_2 = 14$ hajmli ikkita erkli tanlanma bo‘yicha “tuzatilgan” dispersiyalar: $s_x^2 = 0,76$, $s_x^2 = 0,38$ topilgan. $\alpha = 0,05$ muhimlilik darajasida quyidagi gipotezani tekshiring: $H_0 : D(X) = D(Y)$; $H_1 : D(X) > D(Y)$.

Yechish. Gipotezani tekshirish uchun $F = \frac{s_x^2}{s_y^2}$ kriteriyni tanlaymiz. U holda

$$K_{kuzat} = F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{0,76}{0,38} = 2.$$

Fisher-Snedekor taqsimotining kritik nuqtalar jadvalidan $\alpha = 0,05$, $k_1 = n_1 - 1 = 10$, $k_2 = n_2 - 1 = 13$ bo‘yicha $k_{kr} = F_{kr}(0,05;10,13) = 2,67$ kritik nuqtani topamiz. 2<2,67, ya’ni $K_{kuzat} < k_{kr}$ bo‘lgani uchun gipotezani radqilishga asos yo‘q.

16-ma’ruza. “TUZATILGAN” TANLANMA DISPERSIYASINI NORMAL TAQSIMLANGAN BOSH TO‘PLAM DISPERSIYASI BILAN TAQQOSLASH

Tayanvh so‘z va iboralar: Tanalnma, bosh to‘plam, gipoteza, dispersiya, “tuzatilgan” dispersiya, asosiy gipoteza, alternativ gipoteza, kriteriya, kritik nuqta.

REJA:

1. $H_0 : \sigma^2(X_B) = \sigma^2$; $H_1 : \sigma^2 > \sigma^2(X_B)$ gipotezani tekshirish qoidasi.

2. $H_0 : \sigma^2(X_B) = \sigma^2$; $H_1 : \sigma^2(X_B) \neq \sigma^2$ gipotezani tekshirish qoidasi.

Ma’lumki, s^2 – “tuzatilgan” tanlanma dispersiyasi bosh to‘plam dispersiyasi uchun siljimagan baho bo‘ladi. Biz bu “tuzatilgan” tanlanma dispersiyasi bilan $\sigma^2(X_B)$ – bosh to‘plam dispersiyasi opasidagi farq e’tiborga oliniahi kerakmi yoki yo‘qmi degan savolga javob beramiz. Amaliyotda $\sigma^2(X_B)$ tajriba natijasida yoki nazariy jihatdan aniqlanadi.

Buning uchun bosh to‘plamdan n hajmli tanlanma ajratib olamiz. Bu tanlanmadan $k = n - 1$ erkinlik darajasida s^2 – “tuzatilgan” dispersiyani topamiz. U holda asosiy gipoteza $H_0 : \sigma^2(X_B) = M(s^2)$ ko‘rinishda bo‘ladi. Bu kabi gipotezalar priborlar, instrumentlar, stanoklarning aniqligini tekshirishda, texnologik jarayonlarni o‘rganishda tekshiriladi. Asosiy gipotezani tekshirishda $(n-1)\dfrac{s^2}{\sigma^2(X_B)}$ tasodifiy miqdordan foydalanamiz. $(n-1)\dfrac{s^2}{\sigma^2(X_B)}$ kattalik haqiqattan ham tasodifiy miqdor, chumki s^2 kattalik turli tajribalarda turli qiymatlarni qabul qiladi. Bu tasodifiy miqdor $k=n-1$ erkinlik darajasida χ^2 (xi kvadrat) taqsimotga ega bo‘lganligi uchun asosiy gipotezani tekshrish kriteriysini $\chi^2=(n-1)\dfrac{s^2}{\sigma^2(X_B)}$ bilan belgilaymiz. Kritik soha alternative gipotezaga bog‘liq holda quriladi.

I. $H_0:\sigma^2(X_B)=\sigma^2;\ H_1:\sigma^2>\sigma^2(X_B)$ gipotezani tekshiramiz. Bu holda $P\left(\chi^2_{kuzat.}>\chi^2_{kr.}(\alpha;k)\right)=\alpha$ ehtimollik (muhumlilik darajasi) dan foidalanib o‘ng tomonli kritik soha quriladi. $\chi^2_{kr.}(\alpha;k)-$ kritik nuqta χ^2 taqsimotning kritik nuqtalari jadvalidan foydalanib topiladi. U holda kritik soha $\chi^2_{kuzat.}>\chi^2_{kr.}$ tengsizlikdan asosiy gipotezani qabul qilish qiymatlari esa $\chi^2_{kuzat.}<\chi^2_{kr.}$ dan quriladi. Bunda:

Agar $\chi^2_{kuzat.}<\chi^2_{kr.}$ bo‘lsa, u holda asosiy gipotezani rad etishga asos yo‘q;

Agar $\chi^2_{kuzat.}>\chi^2_{kr.}$ bo‘lsa, u holda asosiy gipotezani rad etishga asos bor.

1-misol. Normal taqsimlangan bosh to‘plamdan $n=13$ hajmli tanlanma ajratib olinib $s^2=14,6$ “tuzatilgan” dispersiya topilgan. $\alpha=0,01$ muhumlilik darajasida $H_0:\sigma^2(X_B)=\sigma^2=12;\ H_1:\sigma^2>12$ gipotezani tekshiring.

Yechish. Kuzatish qiymatini topamiz:

$$\chi^2_{kuzat.}=(n-1)\frac{s^2}{\sigma^2(X_B)}=(13-1)\frac{14,6}{12}=14,6\,.$$

Jadvaldan $\chi^2_{kr.}(0,01;k=13-1=12)=26,2$ qiymatni topamiz. Bu yerda $\chi^2_{kuzat.}<\chi^2_{kr.}$ bo‘lgani uchun asosiy gipotezani rad etishga asos yo‘q.

II. $H_0:\sigma^2(X_B)=\sigma^2;\ H_1:\sigma^2\neq\sigma^2(X_B)$ gipotezani tekshiramiz. Bu holda $P\left(\chi^2_{kuzat.}>\chi^2_{kr.}(\alpha;k)\right)=\alpha$ ehtimollik (muhumlilik darajasi) dan foidalanib ikki tomonli kritik soha quriladi. $P\left(\chi^2<\chi^2_{chap\ kr.}\left(\dfrac{\alpha}{2};k\right)\right)=\dfrac{\alpha}{2}$ dan foydalanib chap kritik soha, $P\left(\chi^2>\chi^2_{o`ng\ kr.}\left(\dfrac{\alpha}{2};k\right)\right)=\dfrac{\alpha}{2}$ dan foydalanib o‘ng kritik soha quriladi. χ^2 taqsimotning kritik nuqtalari jadvalida faqat o‘ng kritik nuqtalar berilgan. Chap kritik nuqtalarni topishda yuzaga keladigan qiyinchlikdan $\chi^2 < \chi^2_{chap\ kr.}\left(\frac{\alpha}{2};k\right)$ va $\chi^2 > \chi^2_{chap\ kr.}\left(\frac{\alpha}{2};k\right)$ hodisalarning qarama-qarashiligidan, ya'ni

$$P\left(\chi^2 < \chi^2_{chap\ kr.}\left(\frac{\alpha}{2};k\right)\right) + P\left(\chi^2 > \chi^2_{chap\ kr.}\left(\frac{\alpha}{2};k\right)\right) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\chi^2 > \chi^2_{chap\ kr.}\left(\frac{\alpha}{2};k\right)\right) = 1 - P\left(\chi^2 < \chi^2_{chap\ kr.}\left(\frac{\alpha}{2};k\right)\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

tengliklardan foydalanib qutilamiz.

Bundan ko'rinib turibdiki, chap kritik kritik nuqtani o'ng kritik nuqta kabi izlanadi.

Shunday qilib, $H_0 : \sigma^2(X_B) = \sigma^2;\ H_1 : \sigma^2 \neq \sigma^2(X_B)$ gipotezani tefshirish uchun $\chi^2_{kuzat.} = (n-1)\frac{s^2}{\sigma^2(X_B)}$ kuzatish qiymati topiladi. So'ngra $\chi^2_{kr.}\left(\frac{\alpha}{2};k\right)$ – o'ng kritik nuqta va $\chi^2_{kr.}\left(1-\frac{\alpha}{2};k\right)$ – chap kritik nuqta topiladi. Bunda:

Agar $\chi^2_{chap\ kr.} < \chi^2_{kuzat.} < \chi^2_{o`ng\, kr.}$ bo'lsa, u holda asosiy gipotezani rad etishga asos yo'q;

Agar $\chi^2_{kuzat.} > \chi^2_{o`ng\ kr.}$ yoki $\chi^2_{chap\ kr.} > \chi^2_{kuzat.}$ bo'lsa, u holda asosiy gipotezani rad etishga asos bor.

2-misol. Normal taqsimlangan bosh to'plamdan $n = 13$ hajmli tanlanma ajratib olinib $s^2 = 10{,}3$ "tuzatilgan" dispersiya topilgan. $\alpha = 0{,}02$ muhumlilik darajasida $H_0 : \sigma^2(X_B) = \sigma^2 = 12;\ H_1 : \sigma^2 \neq 12$ gipotezani tekshiring.

Yechish. Kuzatish qiymatini topamiz:

$$\chi^2_{kuzat.} = (n-1)\frac{s^2}{\sigma^2(X_B)} = (13-1)\frac{10{,}3}{12} = 10{,}3.$$

So'ngra $\chi^2_{chap\ kr.}(1-0{,}01; k = 13-1 = 12) = 3{,}57;\ \chi^2_{o`ng\ kr.}(0{,}01; k = 13-1 = 12) = 26{,}2$ qiymatlarni jadvaldan topamiz. Bu yerda $\chi^2_{kuzat.} < \chi^2_{o`ng\ kr.};\ \chi^2_{kuzat.} > \chi^2_{chap\ kr.}$ bo'lgani uchun asosiy gipotezani rad etishga asos yo'q.

III. $H_0 : \sigma^2(X_B) = \sigma^2;\ H_1 : \sigma^2 < \sigma^2(X_B)$ gipotezani tekshiramiz. Bu holda kritik nuqta $\chi^2_{kr.}(1-\alpha;k)$ topiladi. Bunda:

Agar $\chi^2_{kuzat.} < \chi^2_{kr.}$ bo'lsa, u holda asosiy gipotezani rad etishga asos bor;

Agar $\chi^2_{kuzat.} > \chi^2_{kr.}$ bo'lsa, u holda asosiy gipotezani rad etishga asos yo'q.

3-misol. Normal taqsimlangan bosh to‘plamdan $n=13$ hajmli tanlanma ajratib olinib $s^2=14,6$ “tuzatilgan” dispersiya topilgan. $\alpha=0,01$ muhumlilik darajasida $H_0:\sigma^2(X_B)=\sigma^2=12;\ H_1:\sigma^2<12$ gipotezani tekshiring.

Yechish. Kuzatish qiymatini topamiz:

$$\chi^2_{kuzat.}=(n-1)\frac{s^2}{\sigma^2(X_B)}=(13-1)\frac{14,6}{12}=14,6\,.$$

Jadvaldan $\chi^2_{kr.}(0,01;k=13-1=12)=26,2$ qiymatni topamiz. Bu yerda $\chi^2_{kuzat.}<\chi^2_{kr.}$ bo‘lgani uchun asosiy gipotezani rad etishga asos bor.

Agar $D(X_T)-$tanlanma dispersiyasi topilgan bo‘lsa, u holda tasodifiy miqdor sifatida $\chi^2=n\dfrac{D(X_T)}{\sigma^2(X_B)}$ kattalik olinadi.

Agar erkinlik darajasi $k>30$ bo‘lsa, u holda kritik nuqta sifatida $\chi^2_{kr.}(\alpha;k)=k\left[1-\dfrac{2}{9k}+z_\alpha\sqrt{\dfrac{2}{9k}}\right]^3$, $\Phi(z_\alpha)=\dfrac{1-2\alpha}{2}$ kattalikning taxminiy qiymati olinadi.

17-ma’ruza. NORMAL TAQSIMLANGAN BOSH TO‘PLAM O‘RTACHALARINI ERKLI TANLANMALAR ASOSIDA TAQQOSLASH

Tayanch so‘z va iboralar: Dispersiya, bosh to‘plam, tanlanma, normal taqsimot, matematik kutilma, gipoteza, bosh to‘plam o‘rtachasi, tanlanma o‘rtachasi, statistik kriteriy.

REJA:

1. Normal taqsimlangan to‘plamlar.
2. Statistik kriteriy.
3. Normal taqsimlangan dispersiyalari ma’lum bo‘lgan bosh to‘plamlarning matematik kutilmalar teng bo‘lishi haqidagi gipotezani tekshirish.
4. Normal taqsimlangan dispersiyalari noma’lum bo‘lgan bosh to‘plamlarning matematik kutilmalar teng bo‘lishi haqidagi gipotezani tekshirish.

X va Y bosh to‘plamlar normal taqsimlangan va ularning dispersiyalari ma’lum bo‘lsin. Bu bosh to‘plamlardan mos ravishda $n,\ m$ hajmli erkli tanlanmalar ajratib olinib ularning $\overline{x},\ \overline{y}$ tanlanma o‘rtachalari topilgan bo‘lsin.

Tanlanma o‘rtachalari bo‘yicha α-muhimlilik darajasida $H_0: \ M(X)=M(Y)$ asosiy gipoteza tekshirilsin.

Tanlanma o‘rtachasi bosh to‘plam o‘rtachasi uchun siljimagan baho, ya’ni $M(\overline{X}_T)=M(X_B), \ M(\overline{Y}_T)=M(Y_B)$ bo‘lganligi sababli asosiy gipotezani $H_0: M(\overline{X}_T)=M(\overline{Y}_T)$ ko‘rinishda yozish mumkin. Bundan keying yozuvlarda $\overline{X}_T \to \overline{X}; \ \overline{Y}_T \to \overline{Y}; \ X_B \to X; \ Y_B \to Y$ belgilashlardan foydalanib ketamiz.

Shunday qilib, tanlanma o‘rtachalarining matematik kutilmalari tengligi tekshiriladi. Chunki, odatda, tanlanma o‘rtachalari farq qiladi. Bu farq e’tiborga olinadigan darajada-mi degan savoli tug‘iladi. Agar asosiy gipoteza to‘g‘ri bo‘lsa, u holda tanlanma o‘rtachalari orasidagi farq e’tiborga olinmaydigan darajada kichik bo‘ladi. Agar asosiy gipoteza rad qilinsa, u holda tanlanma o‘rtachalari orasidagi farqni e’tiborga olish kerak, ya’ni bu farqni tasodifiy miqdorlar bilan tushuntirib bo‘lmaydi uni bosh o‘rtachalar turliligi bilan tushuntirish mumkin.

Asosiy gipotezani tekshirish uchun kriteriy sifatida

$$Z=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sigma\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)}=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{D(X)/n+D(Y)/m}} \tag{1}$$

tasodifiy miqdorni kiritamiz. Haqiqattan ham, turli tajribalarda $\overline{X}, \ \overline{Y}$ turli qiymatlarni qabul qilganligi sababli (1) ni tasodifiy miqdor deb qarashimiz mumkin. Bu yerda

$$\left.\begin{array}{l}\sigma\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)=\sqrt{D\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)} \\ D\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)=D\left(\overline{X}\right)+D\left(\overline{Y}\right)\end{array}\right\} \Rightarrow \sigma\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)=\sqrt{D(X)/n+D(Y)/m} \ ,$$

chunki $D\left(\overline{X}\right)=\dfrac{D(X)}{n}, D\left(\overline{Y}\right)=\dfrac{D(Y)}{m}$.

Z kriteriy - normalangan normal taqsimot qonuniga bo‘ysinuvchi tasodifiy miqdor. Haqiqatan ham, $\overline{X}$ va $\overline{Y}$ normal taqsimlangan bosh to‘plamdan olingan tanlanma o‘rtachalari bo‘lganlig sababli normal taqsimlangan, u holda Z bu o‘rtachalarning chiziqli kombinatsiyasi bo‘lganligi sababli Z-normal taqsimlangan; ko‘rinib turibdiki, $M(Z)=0$, agar asosiy gipoteza to‘g‘ri bo‘lsa $\sigma(Z)=1$, demak, Z-normalangan.

Kritik soha alternativ gipotezaning ko‘rinishiga qarab aniqlanadi.

1. $H_0: \ M(X)=M(Y), \ H_1: \ M(X)\neq M(Y)$ bo‘lsin. Bu holda ikki tomonli kritik soha quriladi. Kriteriya quvvati (alternativ gipoteza to‘g‘ri bo‘lganda kriteriyning kritik sohada bo‘lish ehtimoli) eng katta quvvatga

$$P(Z<z_{chap.kr.})=\frac{\alpha}{2}, \quad P(Z>z_{o'ng.kr.})=\frac{\alpha}{2} \tag{2}$$

bo‘lganda erishadi. Ma’lumki, Z-normalangan miqdor, bunday miqdorning taqsimoti nolga nisbatan simmetrik bo‘lganligi sababli, kritik nuqta nolga nisbatan simmetrik joylashadi. U holda $z_{o'ng\ \ kr} = z_{kr}$ bo‘lsa $z_{chap\ \ kr} = -z_{kr}$ bo‘ladi. Shunday qilib, kritik soha $Z < -z_{kr}$, $Z > z_{kr}$ tengsizliklar bilan, asosiy gipotezani qabul qilish sohasi esa $(-z_{kr}, z_{kr})$ oraliq bilan aniqlanadi.

Ma’lumki, Laplas funksiyasi

$$P(0 < Z < z) = \Phi(z) \tag{3}$$

tenglik bilan aniqlanadi. Z taqsimot nolga nisbatan simmetrik bo‘lganligi sababli Z ning $(0,\infty)$ oraliqqa tushish ehtimoli 0,5 ga teng. Bu oraliqni $(0, z_{kr})$ va (z_{kr}, ∞) oraliqlarga ajratish mumkin. U holda qo‘shish teoremasiga asosan

$$P(0 < Z < z_{kr}) + P(Z > z_{kr}) = \frac{1}{2} \tag{4}$$

(2) va (3) tengliklarga asosan

$$\Phi(z_{kr}) + \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \Phi(z_{kr}) = \frac{1-\alpha}{2} \tag{5}$$

Bu tenglikdan z_{kr} nuqtani topamiz.

Shunday qilib, $H_0:\ M(X) = M(Y)$, $H_1:\ M(X) \neq M(Y)$ gipotezalarni tekshirish uchun tanlanma asosida $Z_{kuzat.} = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{D(X)}{n} + \dfrac{D(Y)}{m}}}$ $-$kriteriyning qiymatini va (5) dan Laplas funksiyasi uchun tuzilgan jadvali asosida $z_{кр}$ kritik nuqtani topamiz. Bunda:

Agar $|Z_{kuzat}| < z_{kr}$ bo‘lsa asosiy gipotezani rad etishga asos yo‘q;

Agar $|Z_{kuzat}| > z_{kr}$ bo‘lsa asosiy gipoteza rad etiladi.

1-misol. Normal taqsimlangan ikkita bosh to‘plamdan hajmlari mos ravishda $n = 60$ va $m = 50$ bo‘lgan erkli tanlanmalar olinib $\overline{x} = 1250, \overline{y} = 1275$ o‘rtachalari topilgan. Bosh to‘plam dispersiyalari: $D(X) = 120,\quad D(Y) = 100$. $\alpha = 0{,}01$-muhimlilik darajasida $H_0:\ M(X) = M(Y)$, $H_1:\ M(X) \neq M(Y)$ gipotezalarni tekshiring.

Yechish. Kuzatilayotgan qiymati:

$$Z_{kuzat.} = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{D(X)}{n} + \dfrac{D(Y)}{m}}} = \frac{1250 - 1275}{\sqrt{2+2}} = -12{,}5\,.$$

O‘ng kritik nuqta: $\Phi(z_{kr}) = \dfrac{1-\alpha}{2} = 0{,}495$. Laplas funksiyasi jadvalidan: $z_{kr} = 2{,}58$. $|Z_{kuzat}| > z_{kr}$ bo‘lgani uchun asosiy gipotezani rad etamiz, ya’ni tanlanma o‘rtachalari farqi e’tiborga olinishi kerak.

2. $H_0:\ M(X) = M(Y)$, $H_1:\ M(X) > M(Y)$ bo‘lsin. Bu holatda

$$P(Z > z_{kr}) = \alpha \tag{6}$$

talab asosida o‘ng tomonli kritik soha quriladi. Bu yerda ham yuqoridagidek fikr yuritamiz:

$$P(0<Z<z_{kr})+P(Z>z_{kr})=\frac{1}{2}\quad .$$

(2) va (6) tengliklarga asosan

$$\Phi(z_{kr})+\alpha=\frac{1}{2}\Rightarrow\Phi(z_{kr})=\frac{1-2\alpha}{2} \tag{7}$$

Bu tenglikdan z_{kr} nuqtani topamiz.

Shunday qilib, $H_0:\ M(X)=M(Y)$, $H_1:\ M(X)>M(Y)$ gipotezalarni tekshirish uchun tanlanma asosida $Z_{kuzat.}=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{D(X)}{n}+\dfrac{D(Y)}{m}}}$ −kriteriyning kuzatish qiymatini va (5) dan Laplas funksiyasi jadvali asosida $z_{кр}$ kritik nuqtani topamiz. Bunda:

Agar $Z_{kuzat}<z_{kr}$ bo‘lsa asosiy gipotezani rad etishga asos yo‘q;

Agar $Z_{kuzat}>z_{kr}$ bo‘lsa asosiy gipoteza rad etiladi.

2-misol. Normal taqsimlangan ikkita bosh to‘plamdan hajmlari mos ravishda $n=10$ va $m=10$ bo‘lgan erkli tanlanmalar olinib $\overline{x}=14,3,\overline{y}=12,2$ o‘rtachalari topilgan. Bosh to‘plam dispersiyalari: $D(X)=22,\ \ D(Y)=18$. $\alpha=0,05$ -ma’nolilik darajasida $H_0:\ M(X)=M(Y)$, $H_1:M(X)<M(Y)$ gipotezalarni tekshiring.

Yechish. Kuzatish qiymati: $Z_{kuzat.}=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{D(X)}{n}+\dfrac{D(Y)}{m}}}=1,05$. Laplas funksiyasi jadvalidan: $z_{kr}=1,64$. $Z_{kuzat}<z_{kr}$ bo‘lgani uchun asosiy gipotezani rad etishga asos yo‘q, ya’ni tanlanma o‘rtachalari farqini e’tiborga olmasa ham bo‘ladi.

Agar $H_0:\ M(X)=M(Y)$, $H_1:\ M(X)<M(Y)$ gipoteza tekshirilayotgan bo‘lsa Z ning taqsimot nolga nisbatan simmetrikligini e’tiborga olamiz va $H_0:\ M(X)=M(Y)$, $H_1:\ M(X)>M(Y)$ gipotezani tekshirishirib $z_{кр}$ nuqtani topamiz. So‘ngra $z_{kr}'=-z_{kr}$ deb olib Z_{kuzat} ni hisoblaymiz. Bunda:

Agar $Z_{kuzat}>-z_{kr}$ bo‘lsa asosiy gipotezani rad etishga asos yo‘q;

Agar $Z_{kuzat}<-z_{kr}$ bo‘lsa asosiy gipoteza rad etiladi.

3-misol. Normal taqsimlangan ikkita bosh to‘plamdan hajmlari mos ravishda $n=50$ va $m=50$ bo‘lgan erkli tanlanmalar olinib $\overline{x}=142,\overline{y}=150$ o‘rtachalari topilgan. Bosh to‘plam dispersiyalari: $D(X)=28,2,\ \ D(Y)=22,8$. $\alpha=0,01$-muhimlilik darajasida $H_0:\ M(X)=M(Y)$, $H_1:\ M(X)<M(Y)$ gipotezalarni tekshiring.

Yechish. Kuzatilayotgan qiymati: $Z_{kuzat} = -8$. Laplas funksiyasi jadvalidan: $z_{kr} = 2,33$. U holda $z_{kr}' = -z_{kr} = -2,33$ $Z_{kuzat.} < -z_{kr.}$ $Z_{kuzat} < -z_{kr}$ bo‘lgani uchun asosiy gipotezani rad etamiz.

Yuqoridagi $H_0 : M(X) = M(Y)$ gipotezani bosh to‘plam dispersiyalari noma’lum, ammo bir xil degan faraz bilan tekshiramiz. Bu holatda statistik kriteriy sifatida

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2}} \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}$$

tasodifiy miqdorni olamiz. Bnda ikki hol bo‘lishi mumkin.

1. $H_0 : M(X) = M(Y), \quad H_1 : M(X) \neq M(Y)$ gipotezalarni qaraymiz. Bunda ikki tomonlama kritik soha bo‘ladi. Bu gipotezani tekshirishda kuzatish qiymati sifatida

$$T_{kuzat.} = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2}} \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}$$

kattalik olinadi. Kritik soha ikki tomonlama bo‘lganligi sababli α muhumlilik darajasi va $k = n + m - 2$ erkin darajasi uchun $t_{ikki}(\alpha; k) -$ kritik nuqta jadvaldan topiladi. Bunda:

Agar $|T_{kuzat.}| < t_{ikki}(\alpha; k)$ bo‘lsa gipotezani rad etishga asos yoq;

Agar $|T_{kuzat.}| > t_{ikki}(\alpha; k)$ bo‘lsa gipotezani rad etishga asos bor.

4-misol. X, Y bosh to‘plamlardan ajratib olingan tanlanmalar uchun mos ravishda $n = 5,\ m = 6,\ \overline{x} = 3,3,\ \overline{y} = 4,12,\ s_x^2 = 0,25,\ s_y^2 = 0,108$ bo‘lsin. $\alpha = 0,05$ muhumlilik darajasida $H_0 : M(X) = M(Y), \quad H_1 : M(X) \neq M(Y)$ gipotezani tekshiring.

Yechish. Birinchi navbatda dispersiyalarning bir xilligi haqidagi gipotezani tekshirib ko‘rish kerak: bunda $s_x^2 > s_y^2 \Rightarrow H_1 : D(X) > D(Y)$. U holda

$$\left.\begin{array}{l} F_{kuzat.} = \dfrac{0,25}{0,108} = 2,31, \\ F_{kr.}(0,05; k_1 = 5 - 1 = 4; k_2 = 6 - 1 = 5) = 5,19 \end{array}\right\} \Rightarrow F_{kuzat.} < F_{kr.}.$$

Demak dispersiyalar tengligi haqidagi farazni rad etishgaasos yo‘q.

Endi $H_0 : M(X) = M(Y), \quad H_1 : M(X) \neq M(Y)$ gipotezani tekshirihsga o‘tamiz:

$$\left.\begin{array}{l} T_{kuzat.} = \dfrac{3,3 - 4,12}{\sqrt{5 \cdot 0,25^2 + 6 \cdot 0,108^2}} \sqrt{\dfrac{5 \cdot 6(5 + 6 - 2)}{5 + 6}} = -3,27, \\ t_{ikki.}(0,05; k = 5 + 6 - 2 = 9) = 2.26 \end{array}\right\} \Rightarrow |T_{kuzat}| > t_{ikki.}.$$

Demak gipotezani rad etishga asos bor.

$H_0 : M(X) = M(Y),\quad H_1 : M(X) > M(Y)$ gipotezalarni qaraymiz. Bunda o‘ng tomonlama kritik soha bo‘ladi. Bu gipotezani tekshirishda kuzatish qiymati sifatida

$$T_{kuzat.} = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2}} \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}$$

kattalik olinadi. Kritik soha ikki tomonlama bo‘lganligi sababli α muhumlilik darajasi va $k = n + m - 2$ erkin darajasi uchun $t_{ikki}(\alpha; k) -$ kritik nuqta jadvaldan topiladi. Bunda:

Agar $T_{kuzat.} < t_{o`ng}(\alpha; k)$ bo‘lsa gipotezani rad etishga asos yoq;

Agar $T_{kuzat.} > t_{o`ng}(\alpha; k)$ bo‘lsa gipotezani rad etishga asos bor.

5-misol. X, Y bosh to‘plamlardan ajratib olingan tanlanmalar uchun mos ravishda $n = 5,\ m = 6,\ \overline{x} = 3{,}3,\ \overline{y} = 2{,}48,\ s_x^2 = 0{,}25,\ s_y^2 = 0{,}108$ bo‘lsin. $\alpha = 0{,}05$ muhumlilik darajasida $H_0 : M(X) = M(Y),\quad H_1 : M(X) > M(Y)$ gipotezani tekshiring.

Yechish. Birinchi navbatda dispersiyalarning bir xilligi haqidagi gipotezani tekshirib ko‘rish kerak: bunda $s_x^2 > s_y^2 \Rightarrow H_1 : D(X) > D(Y)$. U holda

$$\left.\begin{array}{l} F_{kuzat.} = \dfrac{0{,}25}{0{,}108} = 2{,}31, \\ F_{kr.}(0{,}05; k_1 = 5 - 1 = 4; k_2 = 6 - 1 = 5) = 5{,}19 \end{array}\right\} \Rightarrow F_{kuzat.} < F_{kr.}.$$

Demak dispersiyalar tengligi haqidagi farazni rad etishgaasos yo‘q.

Endi $H_0 : M(X) = M(Y),\quad H_1 : M(X) > M(Y)$ gipotezani tekshirihsga o‘tamiz:

$$\left.\begin{array}{l} T_{kuzat.} = \dfrac{3{,}3 - 2{,}48}{\sqrt{5 \cdot 0{,}25^2 + 6 \cdot 0{,}108^2}} \sqrt{\dfrac{5 \cdot 6(5 + 6 - 2)}{5 + 6}} = 3{,}27, \\ t_{ikki.}(0{,}05; k = 5 + 6 - 2 = 9) = 2.26 \end{array}\right\} \Rightarrow T_{kuzat.} > t_{ikki.}.$$

Demak gipotezani rad etishga asos bor.

18-ma'ruza. MUVOFIQLIK KRITERIYSI

Tayanch so'z va iboralar: Muvofiqlik kriteriysi, χ^2 – kriteriy, empirik chastota, nazariy chastota, normal taqsimot, erkinlik darajasi, Laplas funksiyasi.

REJA:

1. Muvofiqlik kriteriysi.

2. Pirson kriteriysi.

Ma'lumki, statistik gipotezada kuzatilayotgan belgining taqsimot qonuni haqidagi faraz ham ilgari surilar edi. Biz ko'pgina amaliy masalalar o'rganilayotganda uchraydigan X tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni noma'lum bo'lib, bu taqsimot to'g'risidagi gipotezani statistik usulda tekshirishni ko'rib chiqamiz.

X tasodifiy miqdor $F(x)$ taqsimot qonuniga egaligi haqida da'vo qiluvchi $H_0 : P(X < x) = F(x)$ gipotezani tekshirish talab etilsin. Buning uchun X tasodifiy miqdor ustida n marta erkli kuzatish o'tkazib $x_1, x_2, ..., x_n$ tanlanma olamiz. Bu tanlanma bo'yicha $F_n^*(x)$ empirik taqsimot funksiyasini qurish mumkin. Empirik taqsimot funksiyasi va nazariy (gipotetik) taqsimot funksiyasini taqqoslash maxsus tanlangan tasodifiy miqdor – muvofiqlik (moslik) kriteriysi yordamida bajariladi.

1-ta'rif. Muvofiqlik kriteriysi deb, bosh to'plam noma'lum taqsimotining taxmin qilinayotgan qonuni haqidagi gipotezani tekshirish uchun xizmat qiluvchi kriteriyga aytiladi.

Bir qancha muvofiqlik kriteriylari mavjud: χ^2 (xi-kvadrat) K.Pirson, Kolmogorov, Smirnov va boshqalar.

Normal taqsimot haqidagi gipotezani tekshirishda qo'llaniladigan Pirson kriteriysiga batafsil to'xtalamiz. Shu maqsadda empirik va nazariy chastotalarni taqqoslaymiz.

Odatda, empirik va nazariy chastotalarning farqi bo'ladi. Masalan:

empir.chast	6	13	38	74	106	85	30	10	4
nazar.chast	13	14	42	82	99	76	37	11	2

Bunda quyidagi savollar tug'iladi: Chastotalarning bunday farqlanishi tasodifiymi? Farqlanish sabablari nima? Bu kabi savollarga Pirson kriteriysi javob beradi. Bu kriteriy ham boshqa kriteriylar kabi gipoteza to'g'riligini tasdiqlamasdan, balki qabul qilingan α – muhimlilik darajasida kuzatilgan ma'lumotlari bilan uning mos yoki mosmasligini o'rnatadi.

n hajmli tanlanma asosida: $\begin{matrix} x_i: & x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ n_i & n_1 & n_2 & \dots & n_k \end{matrix}$ empirik taqsimot olingan bo‘lsin.

Bosh to‘plam normal taqsimlangan farazi asosida n_i^* nazariy chastotalar hisoblangan bo‘lsin. $\alpha -$muhimlilik darajasida

$H_0:$ bosh to‘plam normal taqsimlangan gipotezani tekshirish uchun kriteriy sifatida

$$\chi^2 = \sum_i \frac{\left(n_i - n_i^*\right)^2}{n_i^*} \tag{1}$$

tasodifiy miqdorni olamiz.

Bosh to‘plam qaysi taqsimot qonuniga bo‘ysinishidan qat’iy nazar (3) tasodifiy miqdor $n \to \infty$ da k erkinlik darajali χ^2 taqsimot qonuniga intilishi isbotlangan. Bu yerda $k = s - 1 - r$. $s -$tanlanma gruppalari (xususiy intervallar) soni, $r -$faraz qilinayotgan, ya’ni tanlanma ma’lumotlari asosida baholanayotgan, taqsimot parametrlari soni. Masalan, normal taqsimotda $r = 2$ va hakozo.

O‘ng tamonli kritik sohani quramiz. Asosiy gipotezani to‘g‘ri deb faraz qilganimizda kriteriyning kritik sohaga tushish ehtimoli:

$$P\left(\chi^2 > \chi^2_{kr.}(\alpha;k)\right) = \alpha \tag{2}$$

Shunday qilib, $\chi^2 > \chi^2_{kr.}(\alpha;k)$ tengsizlik kritik sohani, $\chi^2 < \chi^2_{kr.}(\alpha;k)$ tengsizlik esa asosiy gipotezani qabul qilish sohasini aniqlaydi.

$$\chi^2_{kuzat.} = \sum_i \frac{\left(n_i - n_i^*\right)^2}{n_i^*} \tag{3}$$

formula yordamida kriteriyning kuzatilgan qiymatini, jadvaldan $\chi^2_{kr.}(\alpha;k) -$kritik nuqtani topamiz va quyidagi xulosalarni chiqaramiz.

Agar $\chi^2 < \chi^2_{kr.}(\alpha;k)$ bo‘lsa, u holda gipotezani rad etishga asos yo‘q;

Agar $\chi^2 < \chi^2_{kr.}(\alpha;k)$ bo‘lsa, u holda gipoteza rad asos bor.

1-misol. $\alpha = 0,05$ bo‘lsa bosh to‘plam normal taqsimlangan gipotezasini quyidagi jadval asosida tekshiring:

empir.chast	6	13	38	74	106	85	30	14
nazar.chast	3	14	42	82	99	76	37	13

Yechish. χ^2_{kuzat} qiymatni hisblash uchun quyidagi jadvalni tuzamiz.

i	n_i	n_i^*	$n_i - n_i^*$	$(n_i - n_i^*)^2$	$\frac{(n_i - n_i^*)^2}{n_i^*}$
1	6	3	3	9	3
2	13	14	-1	1	0,07
3	38	42	-4	16	0,38
4	74	82	-8	64	0,78
5	106	99	7	49	0,49
6	85	76	9	81	1,07
7	30	37	-7	49	1,32
8	14	13	1	1	0,08
$\sum$	366	366			$\chi^2_{kuzat.} = 7,9$

Erkinlik darajalari soni: $k = s - r - 1 = 8 - 2 - 1 = 5$. Jadvaldan: $\chi^2_{kr.} = 11,1$. $\chi^2_{kuzat.} < \chi^2_{kr.}$ bo‘lgani uchun asosiy gipotezani rad etishga asos yo‘q. Demak, kuzatilgan ma’lumotlari gipoteza bilan mos.

Yuqoridagilardan ko‘rinadiki, Pirson muvofiqlik kriteriysining asosini empirik va nazariy chastotalarni taqqoslash tashkil etadi. Empirik chastota tajribadan topiladi.

Bosh to‘plam normal taqsimlanganda nazariy chastota topish usullaridan birini quyida keltiramiz

1. X tanlanmaning barcha mumkin bo‘lgan qiymatlar sohasi k ta bir xil uzunlikdagi $\left(x_i, x_{i+1}\right)$ xususiy intervallarga bo‘linadi va har bir xususiy interval x_i^* o‘rtasi topiladi va i intervalga tushgan variantalar soni x_i^* variantaning chastotasi deb hisoblanadi. Natijada

$$\begin{array}{ccccc} x_i^*: & x_1^* & x_2^* & \ldots & x_k^* \\ n_i & n_1 & n_2 & \ldots & n_k \end{array}$$

taqsimot hosil qilinadi. Bu yerda $\sum_i n_i = n$.

2. Tanlanma $\overline{x^*}$ o‘rtachasi va σ^* o‘rtacha kvadratik chetlanishi hisoblanadi.

3. $Z = \frac{\left(X - \overline{x^*}\right)}{\sigma^*}$ miqdor bilan X tasodifiy miqdor normalanadi va (z_i, z_{i+1}) intervalning chetki nuqtalari: $z_i = \frac{\left(x_i - \overline{x^*}\right)}{\sigma^*}$, $z_{i+1} = \frac{\left(x_{i+1} - \overline{x^*}\right)}{\sigma^*}$ topiladi. Bunda Z ning eng kichik qiymati $z_1 \to -\infty$, eng katta qiymati $z_k \to \infty$ deb olinadi.

4. $p_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$ formula bilan X ning (x_i, x_{i+1}) oraliqqa tushish ehtimoli hisoblanadi. Bu yerda $\Phi(z)$ – Laplas funksiyasi.

U holda nazariy chastota: $n_i^* = n_i p_i$. Shuni ta'kidlash kerakki, har bir oraliq kamida 5-10 ta variantani o'z ichiga olishi lozim. Tanlanma hajmi ham yetarlicha katta, 50 dan kam bo'lmasligi lozim. Variantalari soni kam oraliqlarni birlashtirish kerak.

2-misol. Bosh to'plam normal taqsimlangan deb jadval asosida nazariy chastotalarni toping. Tanlanma hajmi $n = 200$.

i	x_i	x_{i+1}	n_i	i	x_i	x_{i+1}	n_i
1	4	6	15	6	14	16	21
2	6	8	26	7	16	18	24
3	8	10	25	8	18	20	20
4	10	12	30	9	20	22	13
5	12	14	26				

Yechish. 1. Xususiy intervallar o'rtasini topamiz va quyidagi taqsimotni hosil qilamiz:

x_i^*	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	15	26	25	30	26	21	24	20	13

2. Tanlanma o'rtachasi va o'rtacha kvadratik chetlanishini topamiz: $\overline{x^*} = 12,63$, $\sigma^* = 4,695$.

3. (z_i, z_{i+1}) intervallarni topamiz va quyidagi jadvalni hosil qilamiz:

i	x_i	x_{i+1}	$x_i - \overline{x^*}$	$x_{i+1} - \overline{x^*}$	$z_i = \dfrac{x_i - \overline{x^*}}{\sigma^*}$	$z_{i+1} = \dfrac{x_{i+1} - \overline{x^*}}{\sigma^*}$
1	4	6	-	-6,63	$-\infty$	-1,41
2	6	8	-6,63	-4,63	-1,41	-0,99
3	8	10	-4,63	-2,63	-0,99	-0,56
4	10	12	-2,63	-0,63	-0,56	-0,13
5	12	14	-0,63	1,37	-0,13	0,29
6	14	16	1,37	3,37	0,29	0,72
7	16	18	3,37	5,37	0,72	1,14
8	18	20	5,37	7,37	1,14	1,57
9	20	22	7,37	-	1,57	∞

4. p_i ehtimollikni va $n_i p_i$ nazariy chastotani topib quyidagi jadvalni tuzamiz:

i	z_i	z_{i+1}	$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	$p_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$	$n_i p_i$
1	$-\infty$	-1,41	-0,5	-0,4207	0,0793	15,86
2	-1,41	-0,99	-0,4207	-0,3389	0,0818	16,36
3	-0,99	-0,56	-0,3389	-0,2123	0,1266	25,32
4	-0,56	-0,13	-0,2123	-0,0517	0,1606	32,12
5	-0,13	0,29	-0,0517	0,1141	0,1658	33,16
6	0,29	0,72	0,1141	0,2642	0,1501	30,02
7	0,72	1,14	0,2642	0,3729	0,1087	21,74
8	1,14	1,57	0,3729	0,4418	0,0689	13,78
9	1,57	∞	0,4418	0,5	0,0582	11,64

Adabiyotlar ro‘yxati

1. Xashimov A.R., Mamurov E.N., Adirov T.X.Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. O‘quv qo‘llanma. 2013.

2. Бабаджанов Ш.Ш. Материалы для самостоятельных работ по теории вероятностей и математической статистике. Учебное пособие. 2006.

3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие. М.: Высшая школа, 1998. 479 с.

4. Колемаев В.А., Калинина В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие. М.: Инфра-М.1997.

5. Крамер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебник. 2001.