O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

Toshkent Moliya Instituti

E. Mamurov
T. Adirov

Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika

o'quv qo'llanma

Toshkent-2005

E. Mamurov, T. Adirov. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. O’quv qo’llanma. Toshkent Moliya instituti, 2005. 152 b.

Ushbu o’quv qo’llanma O’zbekiston Respublikasi Oliy va o’rta maxsus ta’lim vazirligi tomonidan tasdiqlangan «Biznes va boshqaruv» ta’lim sohasidagi barcha bakalavriat yo’nalishlari uchun ta’lim standartlari talablariga muvofiq ehtimollar nazariyasi va matematik statistika kursi bo’yicha yozilgan. Unda asosiy e’tibor talabalarning ushbu fanni to’liqroq o’zlashtirishlari uchun yordam berishga qaratilgan.

O’quv qo’llanma Toshkent Moliya instituti qoshidagi Oliy o’quv yurtlararo ilmiy-uslubiy Kengash majlisida muhokama qilingan va nashrga tavsiya etilgan

Taqrizchilar: TAYI «Oliy matematika» kafedrasining
mudiri, professor M.U.G’ofurov
Fizika-matematika fanlari nomzodi,
dotsent Hamdamov I.

1-§.Fanga kirish. Dastlabki tushunchalar. Ehtimollik. Ehtimolning turli ta'riflari. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanining iqtisodiy jarayonlarni o'rganishdagi ahamiyati.

Ehtimollar nazariyasi fanining dastlabki tushunchalari shakllangan davr XVI-XVII asrlar bo'lib, Kardano, Gyuygens, Paskal, Ferma va Yakov Bernulli kabi olimlarning nomlari bilan bog'liqdir. Ehtimollar nazariyasining paydo bo'lishiga qimor o'yinlarining matematik modellarini va nazariyasini yaratish yo'lidagi izlanishlar turtki bo'ldi.

Ehtimollar nazariyasining keyingi yutuqlari Muavr, Laplas, Puasson kabi olimlarning nomlari bilan bog'liq.

Ehtimollar nazariyasining yangi samarali rivoji Chebishev, Markov, Lyapunov kabi rus olimlarining ilmiy izlanishlari bilan bog'liq bo'ldi. Fanning mustaqil fan bo'lib uyg'unlashishida va keyingi rivojida Bernshteyn, Romanovskiy, Kolmogorov, Xinchin, Gnedenko, Smirnov va boshqalarning xizmatlari katta bo'ldi. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanining rivojida S. X. Sirojiddinov, T. A. Sarimsoqov kabi zabardast o'zbek olimlarining ham munosib hissalari bor. Hozirgi kunda bu ikki olimning shogirdlari tomonidan O'zbekistonda ham ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fani bo'yicha ham nazariy, ham amaliy tadqiqotlar davom ettirilmoqda.

Ehtimollar nazariyasining dastlabki tushunchalari – tajriba, hodisa, elementar hodisa, ehtimollik, nisbiy chastota kabi tushunchalar bo'lib, ularni bayon qilishga o'tamiz.

Tajriba hodisani ro'yobga keltiruvchi tayin shartlar to'plami S ning bajarilishidan iboratdir. Hodisani esa tajriba natijasi sifatida qaraymiz.

Masalan, tajriba tangani muayyan sharoitda tashlashdan iborat bo'lsin. Tanga va uni tashlash S shartlar to'plamini tashkil etsa, tajriba natijalari tanganing "gerb" yoki "raqam" tomonlari bilan tushishi hodisalaridir.

Biz kuzatgan hodisalarni uch turga ajratish mumkin: muqarrar, ro'y bermaydigan va tasodifiy hodisalar.

Muqarrar hodisa deb, tajriba natijasida albatta ro'y beradigan hodisaga aytiladi va biz bunday xodisani Ω (omega) harfi bilan belgilaymiz.

Mumkin bo'lmagan hodisa deb, tajriba natijasida mutlaqo ro'y bermaydigan hodisaga aytiladi va bu hodisani $\varnothing$ belgisi bilan belgilaymiz.

Tasodifiy hodisa deb, tajriba natijasida ro'y berishi ham, ro'y bermasligi ham mumkin bo'lgan hodisaga aytiladi. Tasodifiy hodisalarni A, V, S, … katta lotin harflari bilan belgilaymiz.

Misol: O'yin kubigi bir marta tashlanadi. Bu holda

$\mathbf{\Omega} =$ { tushgan ochko 6 dan katta emas} – muqarrar hodisa;

$\varnothing =$ {tushgan ochko 10 ga teng} – mumkin bo'lmagan hodisa;

A = {tushgan ochko juft son} – tasodifiy hodisalardir.

Albatta bu tajribaga mos bo'lgan boshqa ko'plab hodisalarni ta'riflashimiz mumkin.

Elementar hodisa deb, tajribaning har qanday natijasiga aytiladi, hamda ω harfi bilan belgilanadi. Tajriba natijasida ro'y berishi mumkin bo'lgan barcha elementar hodisalar to'plami elementar hodisalar fazosi deyiladi. Elementar hodisalar fazosi $\mathbf{\Omega}$ kabi belgilanadi.

Misollar:

1. Tajriba tangani ikki marta tashlashdan iborat bo'lsin. Bunda elementar hodisalar quyidagicha bo'ladi:

$$\omega_1=(gg),\ \omega_2=(gr),\ \omega_3=(rg),\ \omega_4=(rr).$$

Elementar hodisalar fazosi $\mathbf{\Omega}$ to'rt elementdan iborat:

2. Agar tanga uch marta tashlansa, u holda

$$\omega_1=(ggg),\ \omega_2=(ggr),\ \omega_3=(grr),\ \omega_4=(rrr)$$

$$\omega_5=(rrg),\ \omega_6=(rgg),\ \omega_7=(rgr),\ \omega_8=(grg).$$

3. Tajriba o'yin kubigini ikki marta tashlashdan iborat bo'lsin. Bu holda $\omega_{ij}=(i,j)$ bo'lib, i-birinchi tashlashda tushgan ochkoni bildiradi.

$$\Omega=\{\omega_{ij}\},\ i=1,6,\ j=1,6$$

va elementar hodisalar soni n=36 ga teng.

4. Tajriba nuqtani **[a;b]** kesmaga tashlashdan iborat bo'lsin. Bunda **Ω=[a;b]** to'plamidan iboratdir.

Biz yuqorida hodisalarni uch turga bo'lgan edik. O'z navbatida tasodifiy hodisalarni ham quyidagi turlarga ajratamiz.

Birgalikda bo'lmagan hodisalar deb, bitta tajribada birining ro'y berishi qolganlarining ro'y berishini yo'qqa chiqaradigan hodisalarga aytiladi.

Agar tajriba natijasida bir nechta hodisalardan bittasi va faqat bittasining ro'y berishi muqarrar hodisa bo'lsa, u holda bu hodisalar *yagona mumkin bo'lgan* hodisalar deyiladi.

Agar bir nechta hodisalardan hech birini boshqalariga nisbatan ro'y berishi mumkinroq deyishga asos bo'lmasa, ular **teng imkoniyatli hodisalar** deyiladi.

Bizni qiziqtirayotgan hodisaning ro'y berishiga olib keladigan elementlar hodisalarni bu hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi deb ataymiz.

Ehtimol tushunchasi asosiy tushunchalardan biri bo'lib, uning bir nechta ta'rifi mavjud.

Umumiy qilib aytganda, ehtimol - tasodifiy hodisaning ro'y berish imkoniyatini miqdoriy jihatdan xarakterlovchi sondir. Quyida ehtimolning klassik ta'rifini keltiramiz.

Ta'rif. A hodisaning ehtimoli deb, bu hodisa ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi elementar natijalar sonining tajribaning yagona mumkin bo'lgan va teng imkoniyatli elementar natijalari jami soniga nisbatiga aytiladi hamda **R(A)** = $\frac{m}{n}$ formula bilan aniqlanadi.

Ehtimolning klassik ta'rifidan bevosita quyidagi xossalar kelib chiqadi.

1-xossa. Muqarrar hodisaning ehtimoli 1 ga teng.

Haqiqatan ham, bu holda **m=n** va demak.

$$\mathbf{P(\Omega)} = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

2-xossa. Mumkin bo’lmagan hodisaning ehtimoli nolga teng, bu holda

m=0 va **P(∅)** $= \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0$

3-xossa. Tasodifiy hodisaning ehtimoli nol va bir orasida yotuvchi sondir.

0<R(A)<1

Shunday qilib, istalgan hodisaning ehtimoli quyidagi munosabatni qanotlantiradi.

0≤R(A) ≤1

Ehtimolning yuqorida keltirilgan klassik ta’rifi cheklangan bo’lib, hamma masalalarga ham qo’llanilavermaydi. Jumladan, elementar natijalari soni cheksiz yoki elementar natijalari teng imkoniyatli bo’lmagan tajribalarda klassik ta’rifni qo’llab bo’lmaydi.

Shu sababli klassik ta’rif bilan bir qatorda hodisaning ehtimoli sifatida nisbiy chastota yoki unga yaqinroq sonni olib, statistik ta’rifdan ham foydalaniladi.

Statistik ta’rif nisbiy chastotaning turg’unlik hossasiga asoslanadi. Bu xossa shundan iboratki, ko’p sondagi tajribalar seriyasi uchun A hodisaning n ta tajribada ro’y berishlari nisbiy chastotasi deb ataluvchi $W(A) = \frac{v}{n}$ nisbat deyarli o’zgarmas miqdor bo’lib qolaveradi. Bu erda v - A hodisaning n ta tajribada ro’y berishlari soni. Nisbiy chastotaning turg’unlik xossasi birinchi bor demografik harakterdagi hodisalarda ochilgan. Bizning eramizdan 2000 yillar burun qadimiy Xitoyda o’g’il bolalar tug’ilishlar sonining jami tug’ilgan bolalar soniga nisbati deyarli **1/2** ga teng ekanligi hisoblangan. Bu sonning barcha davrlar uchun o’zgarmay qolishini statistik ma’lumotlar tasdiqlaydi.

Nisbiy chastotaning turg’unlik xossasiga yana bir misol sifatida tanga tashlash tajribasini ko’ramiz. Tanga tashlash tajribalari ko’p marta o’tkazilib, ularda «gerb» tomoni tushishi soni sanalgan. Bir nechta tajribalarning natijalari quyidagicha bo’lgan

Tanga tashlashlar soni	Gerb tomon tushishlar soni	Nisbiy chastota
4.040	2.048	0.5069
12.000	6.019	0.5016
24.000	12.012	0.5005

Bu tajribalarda W(A) nisbiy chastota o’zgarmas r=0.5 soni atrofida tebranayapti, shu 0,5 son tanga tashlashda «gerb» tomon tushishi hodisasining ehtimoli sifatida olinishi tabiiydir.

Umuman, agar tajribalar soni etarlicha ko’p bo’lib, shu tajribalarda qaralayotgan A hodisaning ro’y berishi nisbiy chastotasi –W(A) biror o’zgarmas **r∈[0;1]** son atrofida turg’un ravishda tebransa, shu R sonni A hodisaning ro’y berish ehtimoli deb qabul qilamiz. Bunday usulda aniqlangan ehtimol hodisaning statistik ehtimoli deyiladi.

Ba’zan geometrik mulohazalarga asoslangan masalalarda ehtimolning geometrik ta’rifi qo’llaniladi. Ushbu ta’rifni bayon qilishga o’tamiz.

Biror G soha berilgan bo’lib, bu soha g sohani o’z ichiga olsin. G sohaga tavakkaliga tashlangan nuqtaning g sohaga xam tushish ehtimolini topish talab etilsin. Bu erda **Ω** elementar hodisalar fazosi G ning barcha nuqtalaridan iborat va cheksizdir. Shuning uchun, bu holda klassik ta’rifdan foydalana olmaymiz. Tashlangan nuqta G ga tushish ehtimoli shu g qismining o’lchoviga (uzunligiga, yuziga, hajmiga) proportsional bo’lib, g ning shakliga va g ni G sohaning qaerida joylashganligiga bog’liq bo’lmasin. Bu shartlarda qaralayotgan hodisaning ehtimoli

$$R = \frac{\text{G ning ulchovi}}{\text{G ning ulchovi}}$$

formula yordamida aniqlanadi. Bu formula yordamida aniqlangan R ehtimollik ehtimolning barcha xossalarini qanoatlantiradi.

Misol. Radiusi R bo’lgan doira ichiga tavakkaliga nuqta tashlangan. Tashlangan nuqta doiraga ichki chizilgan:

a) kvadrat ichiga:

b) muntazam uchburchak ichiga tushishi ehtimolini toping. Nuqtaning yassi figuraga tushishi ehtimoli bu figuraning yuziga proportsional bo'lib, uning joylashishiga esa bog'liq emas deb faraz qilinadi.

Echilishi.

a) geometrik ehtimollar ta'rifiga ko'ra izlanayotgan ehtimollik

$$P = \frac{\text{Kvadratnig yuzi}}{\text{Doiraning yuzi}} = \frac{2R^2}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi}$$

b) Bu xolda, muntazam uchburchak yuzi $\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$ ekanligini hisobga olsak:

$$P = \frac{\text{Uchburchak yuzi}}{\text{doira yuzi}} = \frac{3\sqrt{3}\,R^2}{4\pi R^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$$

Ehtimollar nazariyasi fani - matematik fan bo'lib, uning predmeti bir xil shart – sharoitlarda ko'p marta takrorlanuvchi tasodifiy hodisalarning ehtimoliy qonuniyatlarini o'rganishdan iborat.

Tasodifiy hodisalar bo'ysunadigan qonuniyatlarni bilish, shu hodisalarning qanday kechishini avvaldan ko'ra bilish imkonini beradi.

Ehtimollar nazariyasi fanining metodlari hozirgi davrda amaliyotning turli sohalarida, jumladan, iqtisodiyot sohasida ham keng samarali qo'llanilmoqda.

Tasodifiylik bilan bog'liq bo'lgan iqtisodiy jarayonlarni tadqiq etishda, bu jarayonlarning kechishini bashorat qilishda, hamda ma'qul iqtisodiy echimlar qabul qilishda ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanining ahamiyati kattadir.

Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fani usullari makro va mikro-iqtisodiyotni rejalashtirish va tashkil etishda, turli texnologik jarayonlarni tahlil etishda, mahsulot sifatini nazorat qilishda, ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasida va boshqa ko'plab sohalarda o'z tadbiqlarini topmoqda.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Hodisalarning turlarini ayting va ularga doir misollar keltiring.
2. Elementar natija ta'rifini bering.
3. Tasodifiy hodisalarning turlarini ayting.
4. Ehtimollikning klassik va statistik ta'riflarini keltiring. Ularning farqi nimada?
5. Nisbiy chastotaning turg'unlik xossasi nimadan iborat?
6. Geometrik ehtimol ta'rifini ayting.

Tayanch iboralar

Tasodifiy hodisa, muqarrar hodisa, mumkin bo'lmagan hodisa, birgalikda bo'lmagan hodisalar, yagona mumkin bo'lmagan hodisalar, teng imkoniyatli hodisalar, ehtimolning klassik ta'rifi, nisbiy chastota.

Mustaqil ishlash uchun misollar.

1. Tanga ikki marta tashlanganda aqalli bir marta gerbli tomoni bilan tushishi ehtimolini toping.

2. Ikkita o'yin soqqasi tashlanadi. Chiqqan ochkolar yig'indisining 7 ga teng bo'lishi ehtimolini toping.

3. Yashikda 15 ta detal bo'lib, ulardan 10 tasi bo'yalgan. Yashikdan tavakkaliga 3 ta detal olindi. Olingan detallarning bo'yalgan bo'lishi ehtimolini toping.

4. Uch marta tanga tashlangan. Ikki marta «gerb» tomoni bilan tushishi ehtimolini toping.

Adabiyotlar.

[1] (14-30)

[2] (12-33)

[3] (8-15)

[4] (5-17)

[5] (229-235)

[7] (5-8)

[12] (263-274)

2- §. Hodisalar ustida amallar. Shartli ehtimollik.

Ehtimollarni qo'shish va ko'paytirish teoremalari.

Ehtimollar nazariyasida hodisalar ustida qo'shish va ko'paytirish amallari bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi, quyida shu amallarni ta'riflaymiz.

Ta'rif. Ikkita A va V hodisalarning yig'indisi (birlashmasi) deb, A yoki V ning, yoki ikkalasining ham ro'y berishidan iborat S=A+V hodisaga aytiladi.

Qisqacha qilib aytganda, A+V yig'indi A va V hodisalarning kamida bittasining ro'y berishini ifodalaydi.

Xuddi yuqoridagi ta'rif kabi $A_1 + A_2 +. . . + A_n$ yig'indi deganda, A_1 , A_2, ...A_n hodisalarning kamida bittasining ro'y berishi tushuniladi.

Masalan. A={I merganning nishonga tekkizishi},
V={II merganning nishonga tekkizishi} bo'lsin. U holda, A+V hodisa, yoki I merganning, yoki II merganning, yoki ikkalasining ham nishonga tekkizishidan iborat hodisani bildiradi.

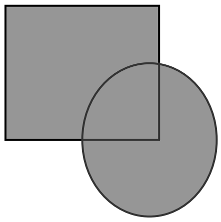
Agar A va V hodisalar birgalikda bo'lmasa, u holda A+V yig'indi shu hodisalardan qaysinisi bo'lsa ham, birining ro'y berishidan iboratdir.

Ta'rif. A va V hodisalarning ko'paytmasi (kesishmasi) deb, shu hodisalarning birgalikda ro'y berishidan iborat $S=A\cdot V$ hodisaga aytiladi.

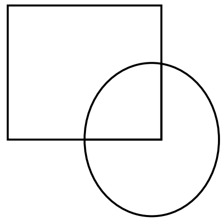
Ushbu ta'rif ikkitadan ortiq bir nechta hodisalar ko'paytmasi uchun ham yuqoridagidek umumlashtiriladi.

Yuqorida keltirilgan misolda AV hodisa ikkala merganning ham nishonga tekkizishini bildiradi.

Hodisalar ustida bajariladigan qo'shish va ko'paytirish amallarini quyidagi shaklda geometrik izohlash mumkin.



A+B,(A $\cup$B) A



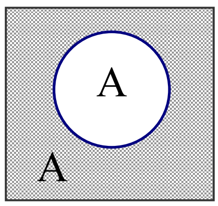
B A·B (A$\cap$B) B

A hodisaga qarama-qarshi hodisa deb, A hodisaning ro’y bermasligidan iborat hodisaga aytiladi va Ā kabi belgilanadi. Qarama-qarshi A va Ā hodisalar uchun

$$\begin{cases} A + \overline{A} = \Omega \\ A \cdot \overline{A} = \varnothing \end{cases}$$

munosabat o’rinli ekanligini tushunish qiyin emas.

Elementar hodisalar tilida Ā hodisa A ga kirmagan barcha elementar hodisalar to’plamidan iborat bo’ladi, qarama-qarshi hodisalarni geometrik tasvirlash mumkin.



Misol. A hodisa kubik bir marta tashlanganda «6» ochko tushishini bildirsin. U holda Ā hodisa «6» ochko tushmasligini bildiradi

Ba’zan A hodisaning ehtimolini biror V hodisa (R(V)>0 deb faraz qilinadi) ro’y bergandan so’ng hisoblashga to’g’ri keladi.

Ta’rif. A hodisaning V hodisa ro’y berganligi shartida hisoblangan ehtimolga shartli ehtimol deyiladi va $R_V(A)$ yoki R(A/V) kabi belgilanadi.

Xuddi shunga o’xshash $R_A(V)$ shartli ehtimol ta’riflanadi.

Misol. Ikkita kubik tashlanayotgan bo’lsin. A={tushgan ochkolar yig’indisi 8 ga teng bo’lishi} va V={tushgan ochkolar juft son bo’lishi} hodisalar uchun

$R(A)=5/36$, $R(V)=18/36$ bo'lishi ravshan. Endi, masalan, $R_V(A)$ shartli ehtimolni topsak: $R_V(A)=5/18$

Shartli ehtimol yordamida hodisalarning bog'liqsizligi tushunchasini kiritamiz.

Ta'rif. Ikkita A va V hodisalar uchun $R_V(A)=R(A)$ va $R_A(V)=R(V)$ bo'lsa, A va V hodisalar bog'liqmas (erkli) hodisalar deyiladi. Aks holda, hodisalar **bog'liq** deyiladi.

Soddaroq qilib aytganda, ikkita hodisadan ixtiyoriy birining ro'y berishi ehtimoli ikkinchisining ro'y berishi yoki ro'y bermasligiga bog'liq bo'lmasa, bu hodisalar **bog'liqmas** deyiladi.

Misol. Qutida 6 ta oq va 9 ta qora shar bor. Tavakkaliga bitta shar olinadi. Olingan sharning oq bo'lishi (A hodisa) ehtimoli klassik ta'rifga ko'ra $R(A)=6/15$ga teng. Olingan shar qutiga solinadi va sinash takrorlanadi. Ikkinchi olishda oq shar chiqishi (V hodisa) ehtimoli, avvalgidek yana 6/15ga teng va birinchi sinash natijasiga bog'liq emas. Shunday qilib, bu holda V hodisa A hodisaga bog'liq emas. Agar olingan birinchi shar qutiga qaytarib solinmasdan ikkinchi shar olinsa, V hodisa A hodisaga bog'liq bo'ladi, chunki

$$R_A(V)=5/14 \text{ va } R_A(V)=6/14.$$

Endi hodisalar ehtimollarini qo'shish va ko'paytirish teoremalarini bayon qilishga o'tamiz.

1-Teorema. Birgalikda bo'lmagan ikkita hodisadan qaysinisi bo'lsa ham birining ro'y berishi ehtimoli shu hodisalar ehtimollarining yig'indisiga teng:

$$R(A+V)=R(A)+R(V)$$

Isboti.

n-sinashning mumkin bo'lgan elementar natijalari jami soni bo'lsin;

m_1-A hodisaga qulaylik tug'diradigan natijalar soni;

m_2-V hodisaga qulaylik tug'diradigan natijalar soni.

Yo - A hodisa, yoki V **h**odisa ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi natijalar soni $m_1 + m_2$ ga teng. Bundan esa

$$P(A+V)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=P(A)+P(B)$$

munosabatni hosil qilamiz.

N*atija.* Xar ikkitasi birgalikda bo'lmagan bir nechta hodisalardan qaysinisi bo'lsa xam, birining ro'y berish ehtimoli shu hodisalar ehtimollarining yig'indisiga teng:

$$\mathbf{R(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = R(A_1) + R(A_2) + \ldots + R(A_n)}$$

Misol. Yashikda 30 ta shar bo'lib, ulardan 10 tasi qizil, 5 tasi ko'k va 15 tasi oq. Tavakkaliga olingan bitta sharning rangli shar bo'lish ehtimolini toping.

Echish. Rangli shar chiqishi yo qizil, yoki ko'k shar chiqishini bildiradi.

Qizil shar chiqishi (A hodisa) ehtimoli

$$P(A)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$$

Ko'k shar chiqishi (V hodisa) ehtimoli

$$P(A)=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$$

A va V hodisalar birgalikda emas (bir rangli shar chiqishi boshqa rangli shar chiqishini yo'qqa chiqaradi), shuning uchun qo'shish teoremasiga ko'ra:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

A va V hodisalar bog'liqmas bo'lib, ulardan har birining ehtimoli ma'lum bo'lsa, A va V hodisalarning birgalikda ro'y berishi ehtimolini qanday topish mumkin? Bu savolga quyidagi ko'paytirish teoremasi javob beradi.

2-Teorema. Ikkita bog'liqmas hodisaning birgalikda ro'y berishi ehtimoli shu hodisalar ehtimollarning ko'paytmasiga teng:

$$\mathbf{R(A \cdot V) = R(A) \cdot R(V).}$$

Ko’paytirish teoremasini bir nechta hodisalarga umumlashtirish uchun birgalikda bog’liqmaslik tushunchasini kiritamiz.

Bir nechta hodisalardan har biri va qolganlarning istalgan kombinatsiyasi bog’liqmas bo’lsa, u holda bu hodisalar **birgalikda bog’liq emas** deyiladi. Shuni ta’kidlash lozimki, bir nechta hodisalarning juft-juft bog’liq emasligidan ularning birgalikda bog’liq emasligi kelib chiqmaydi. Shu ma’noda birgalikda bog’liq emasligi talabi juft-juft bog’liqmaslik talabidan kuchliroqdir.

Endi ko’paytirish teoremasidan kelib chiqadigan natijani keltiramiz.

Natija. Birgalikda bog’liq bo’lmagan bir nechta hodisalarning birgalikda ro’y berish ehtimoli shu hodisalarning ehtimollari ko’paytmasiga teng:

$$\mathbf{R(A_1 \cdot A_2, \ldots \cdot A_n)=R\,(A_1) \cdot R\,(A_2), \ldots \cdot R(A_n)}$$

Eslatma. Agar $\mathbf{A_1\ ,\ A_2\ ,\ \ldots\ \cdot A_n}$ hodisalar birgalikda bog’liqmas bo’lsa, u holda ularga qarama-qarshi bo’lgan $\mathbf{A_1\ ,\ A_2\ ,\ \ldots\ \cdot A_n}$ hodisalar ham birgalikda bog’liqmas bo’ladi.

Ikkita bog’liq A va V hodisalar uchun ko’paytirish teoremasi quyidagicha bayon qilinadi.

3-Teorema. Ikkita bog’liq hodisaning birgalikda ro’y berishi ehtimoli ulardan birining ehtimolini ikkinchi hodisaning shartli ehtimoliga ko’paytmasiga teng:

R(A·V)=R(A) · R$_A$(V)

Isboti. Belgilashlar kiritamiz:

n-sinashning A hodisa ro'y beradigan yoki ro'y bermaydigan elementar natijalari jami soni;

n_1- A hodisa ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi natijalar soni (n_1<n).

m-sinashning A hodisa ro'y berdi degan farazda V hodisa ro'y beradigan elementar natijalar soni, ya'ni bu natijalar AV hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'diradi.

A va V hodisalarning birgalikda ro'y berishi ehtimoli:

$$P(A\cdot B)=\frac{m}{n}=\frac{n_1}{n}\cdot\frac{m}{n_1}$$

$\frac{n_1}{n}=P(A)$ va $\frac{m}{n_1}=P_A(B)$ ekanligini e'tiborga olib quyidagini hosil qilamiz:

R(A·V)=R(A) · R$_A$ (V)

Shuni ta'kidlab o'tamizki, AV=VA bo'lganligi uchun teoremani VA hodisa uchun qo'llab quyidagi tenglikni hosil qilamiz.

R(A·V)=R(A) · R$_A$ (V)=R(V) · R$_V$ (A)

Natija. Bir nechta bog'liq hodisalarning birgalikda ro'y berishi ehtimoli ulardan birining ehtimolini qolganlarining shartli ehtimollariga ko'paytmasiga teng, bunda har bir keyingi hodisaning ehtimoli undan oldingi hamma hodisalar ro'y berdi degan farazda hisoblanadi.

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1\ A_2}(A_3)\cdot\ldots\cdot P_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n)$$

Yuqorida birgalikda bo'lmagan hodisalar uchun qo'shish teoremasi (1-teorema) keltirilgan edi. Endi birgalikda bo'lgan hodisalar uchun qo'shish teoremasini keltiramiz.

4-Teorema. Birgalikda bo'lgan ikkita hodisadan kamida bittasining ro'y berish ehtimoli shu hodisalarning ehtimollari yig'indisidan ularning birgalikda ro'y berish ehtimolini ayrilganiga teng:

R(A+V)=R(A)+R(V)-R(AV)

Isboti. Ta'rifga ko'ra A+V hodisa yo AV, yo A$\overline{V}$ yoki AV hodisaning ro'y berishidan iborat, ya'ni

A+V=AV+AV+AV

AV va AV hodisalar birgalikda emas. Shuning uchun,

R(A+V)=R(AV)+R(AV)+R(AV) (*)

Endi A=AV+AV, R(A)=R(AV)+R(AV), V=AV+AV,

R(A)=R(AV)+R(AV) munosabatlardan

R(AV)=R(A)-R(AV) va R(AV)=R(V)-R(AV)

tengliklarni hosil qilamiz. Bu tengliklarni (*) ifodaga qo'yib

R(A+V)=R(A)+R(V)-R(A·V)

tenglikni hosil qilamiz.

Misol. I va II to'plardan o'q otishda nishonga tekkizish ehtimollari mos ravishda r_1=0,8 va r_2=0,9. Bir yo'la otishda to'plardan kamida birining nishonga tekizishlari ehtimolini toping.To'plarning tekkizishlari bir-biriga bog'liq emas. Shuning uchun

A={ I to'pning nishonga tekkizishi} va

V={II to'pning nishonga tekkizishi} hodisalari erklidir. Bundan esa

R(AV)=R(A) · R(V)=0.8 · 0.9=0.72

Izlanayotgan ehtimol quyidagiga teng:

R(A+V)=R(A)+R(V)-R(A·V)=0.8+0.9-0.72=0.98

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Hodisalar yig'indisi va ko'paytmasi amallarini ta'riflang.
2. Qarama-qarshi hodisalar ta'rifini bering.
3. Bog'liqmas hodisalar ta'rifini bering.
4. Shartli ehtimollik ta'rifini bering.
5. Ehtimollarni qo'shish teoremalarini ayting.
6. Ehtimollarni ko'paytirish teoremalarini keltiring.

Tayanch iboralar

Qarama-qarshi hodisalar, bog'liqmas hodisalar, bog'liq hodisalar, shartli ehtimol, birgalikda bo'lgan hodisalar.

Mustaqil echish uchun masalalar.

1. Guruhda 10 ta talaba bo'lib, ularning 7 nafari a'lochilar. 4 ta talaba dekanatga chaqirtirildi. Ularning barchasi a'lochi bo'lishi ehtimolini toping.

2. Talaba programmadagi 30 ta savoldan 25 tasini biladi. Talabaning imtihon oluvchi taklif etgan uchta savolni bilish ehtimolini toping.

3. Birinchi yashikda 4 ta oq va 8 ta qora shar bor. Ikkinchi yashikda 10 ta oq va 6 ta qora shar bor. Har qaysi yashikdan bittadan shar olinadi. Ikkala sharning ham oq chiqishi ehtimolini toping.

4. Birinchi yashikda 5 ta oq va 10 ta qizil shar bor. Ikkinchi yashikda 10 ta oq va 5 ta qizil shar bor. Agar har bir yashikdan bittadan shar olinsa, hech bo'lmaganda bitta sharning oq bo'lish ehtimolini toping.

5. Merganning uchta o'q uzishda kamida bitta o'qni nishonga tekkizish ehtimoli 0,875 ga teng. Uning bitta o'q uzishda nishonga tekkizish ehtimolini toping.

6. To'rtta o'q uzishda kamida bitta o'qni nishonga tekkizish ehtimoli 0,3 ga teng. Merganlar navbat bilan o'q uzadilar, lekin har biri ikkitadan o'q uzadi. Birinchi bo'lib o'q tekkizgan mergan mukofot oladi. Merganlarning mukofot olishlari ehtimolini toping.

Adabiyotlar

[1] (31-47)

[2] (33-51)

[3] (15-25)

[4] (17-24)

[5] (237-244)

[7] (14-16)

[8] (270-280)

3-§.To'la ehtimol va Bayes formulalari.

To'la ehtimol va Bayes formulalarini keltirishdan avval, bu formulalarda foydalaniladigan ba'zi tushunchalarni keltiramiz.

Ta'rif: Hodisalarning to'la guruhi deb, sinashning yagona mumkin bo'lgan hodisalari to'plamiga aytiladi.

Bu ta'rifga binoan, agar A_1, A_2,…. A_n hodisalar hodisalarning to'la guruhini tashkil etsa, u holda bu hodisalar uchun

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \mathbf{\Omega},\ A_iA_j = \varnothing,\ (i \neq j)$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi.

Misol. Tanga bir marta tashlanadi. (Tanga qirrasi bilan tushmaydi deb faraz qilinadi) bu sinovda

A={tanga «gerb» tomoni bilan tushadi}

V={tanga «raqam» tomoni bilan tushadi}

hodisalari to'la guruhni tashkil etadi.

Hodisalarning to'la guruhini tashkil etuvchi A_1, A_2,…. A_n hodisalar uchun muhim bo'lgan quyidagi teoremani keltiramiz

Teorema: To'la guruh tashkil etuvchi A_1, A_2,…. A_n hodisalarning ehtimollari yig'indisi birga teng, ya'ni

$$\mathbf{R(A_1)+R(A_2)+\ldots+R(A_n)=1}$$

Isbot. To'la guruh tashkil etuvchi hodisalardan birining ro'y berishi muqarrar. Muqarrar hodisaning ehtimoli esa birga teng bo'lgani uchun

$$\mathbf{R(A_1+A_2+\ldots+A_p)=1}$$

To'la guruhning ikkita hodisasi birgalikda emasligi sababli, qo'shish teoremasini qo'llash mumkin.

Ta'rif: Qarama-qarshi hodisalar deb, to'la guruh tashkil etuvchi ikkita hodisaga aytiladi.

Yuqoridagi teoremaga asosan qarama-qarshi hodisalar ehtimollarining yig'indisi birga teng.

$$R(A)+R(\bar{A})=1$$

Shuni alohida eslatib o'tamizki, A hodisaning ehtimolini topishga doir ko'pgina masalalarda ko'pincha qarama-qarshi A hodisasining ehtimolini hisoblash ancha oson bo'ladi, keyin esa izlanayotgan ehtimolni quyidagi formula orqali topish qulay bo'ladi.

$$R(A)=1-R(\bar{A})$$

Misol. Yashikda 20 ta detal bo'lib, ulardan 12 tasi yaroqli. Tavakkaliga olingan 5 ta detal orasida kamida 1 ta yaroqli detal bo'lishi ehtimolini toping.

***Echish*:** A={olingan detallar ichida kamida bitta yaroqli}

A={olingan detallar orasida bitta ham yaroqli detal yo'q}

hodisalar qarama-qarshi hodisalardir.

Bunda R(A) ehtimolni topish osonroq.

$$R(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_8^5}{C_{20}^5}$$

Bundan esa izlanayotgan ehtimolni topsak:

$$R(A)=1-R(A)=1-\frac{C_8^5}{C_{20}^5}$$

Endi «to'la ehtimol» formulasini keltiramiz.

Faraz qilaylik, A hodisa to'la guruh tashkil etuvchi hodisalardan bittasining ro'y berganlik sharti ostida ro'y bersin. U holda, A hodisaning ehtimoli quyidagicha topiladi.

$$R(A)=R(V_1)\,R(A/V_1)+R(V_2)\,R(A/V_2)+\ldots+R(V_p)\,R(A/V_p).$$

Bu formula «to'la ehtimol» formulasi deb ataladi.

Shu formulani keltirib chiqaraylik. A hodisasi ro'y berish uchun birgalikda bo'lmagan.

$$AV_1,\ AV_2,\ \ldots..AV_n.$$

hodisalardan biror bittasi ro'y berishi zarur va etarli.

Boshqacha aytganda

$$A=AV_1+AV_2+\ldots.+AV_n.$$

Bunda AV_i ($i=\overline{1,n}$) hodisalar birgalikda bo'lmaganligi uchun

$$\mathbf{R(A)=R(AV_1+AV_2+\dots+AV_n)=R(AV_1)+R(AV_2)+\dots+R(AV_n)=}$$
$$\mathbf{=R(V_1)R(A/V_1)+R(V_2)R(A/V_2)+\dots+R(V_n)R(A/V_n)}$$

Odatda, bu formula shartlarida A hodisaning V_1, V_2, . . .V_n hodisalarning qaysi biri bilan ro'y berishi oldindan noma'lum bo'lganligi uchun, V_1, V_2, . . .V_n hodisalar **g i p o t e z a l a r** deb ham ataladi.

Faraz qilaylik, sinash o'tkazilgan bo'lib, uning natijasida A hodisa ro'y bergan bo'lsin. Gipotezalarning ehtimollari qanday o'zgarganligini (A hodisa ro'y berganligi sababli) aniqlash masalasini ko'raylik. Boshqacha qilib aytganda,

$$\mathbf{R(V_1/A), R(V_2/A), .. R(V_n/A)}$$

shartli ehtimollarni izlaymiz.

Ko'rsatilgan ehtimollardan, masalani, $R(V_1/A)$ ni qaraylik. Ko'paytirish teoremasiga ko'ra

$$\mathbf{R(AV_1)=R(A)R(V_1/A)= R(V_1)\, R(A/V_1)}$$

Bunda esa,

$$\mathbf{R(V_1/A) =} \frac{P(B_1)P(A/B_1)}{P(A)}$$

Bu munosabatda maxrajdagi R(A) ehtimolni, uning to'la ehtimollik formulasidagi ifodasi bilan almashtirib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\mathbf{R(V_1/A) =} \frac{P(B_1)P(A/B_1)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A/B_i)}$$

Qolgan gipotezalarning ham shartli ehtimollari ham xuddi shunga o'xshash keltirib chiqariladi. Shunday qilib, ixtiyoriy V_k (k=1,n) gipoteza uchun

$$\mathbf{R(V_k/A)=} \frac{P(B_k)P(A/B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A/B_i)}$$

Bu formulalar Bayes formulalari deb ataladi. Bayes formulalari tajriba natijasida A hodisasi ro'y berganligi ma'lum bo'lgandan so'ng, V_k $(k=\overline{1,n})$ gipotezalar ehtimollarini qayta baholashga imkon beradi.

To'la ehtimol formulasi va Bayes formulalarining qo'llanishiga doir quyidagi misolni ko'ramiz.

Misol. Birinchi qutida 2 ta oq, 6 ta qora, ikkinchi qutida esa, 4 ta oq, 2 ta qora shar bor. Birinchi qutidan tavakkaliga 2 ta shar olib, ikkinchi qutiga solinadi, shundan keyin ikkinchi qutidan tavakkaliga bitta shar olinadi.

A) olingan sharning oq bo'lishi ehtimolini toping.

V) ikkinchi qutidan olingan shar oq bo'lib chiqdi; birinchi qutidan olib, ikkinchi qutiga solingan 2 la sharning oq bo'lishi ehtimoli nimaga teng.

***Echish*:**

A) Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

A = {Ikkinchi qutidan olingan shar oq}.

V_1= {Birinchi qutidan ikkinchi qutiga 2 ta oq shar solingan}.

V_2= {Birinchi qutidan ikkinchi qutiga 1 ta oq, 1 ta qora shar solingan}.

V_3={birinchi qutidan ikkinchi qutiga 2 ta qora shar solingan}.

V_1, V_2, V_3 - hodisalar hodisalarning to'la guruhini tashkil etadi. U holda, to'la ehtimol formulasiga ko'ra, A hodisaning ehtimoli quyidagiga teng:

$$\mathbf{R(A)=R(V_1)\ R(A/V_2)\ +R(V_2)\ R(A/V_2)+R(V_3)\ R(A/V_3)}$$

Bunda, masalaning shartidan

$\mathbf{R(V_1)=}\ \frac{C_2^2}{C_8^2}=\frac{1}{28}$ $\mathbf{R(A/V_1)=}\ \frac{3}{4}$,

$\mathbf{R(V_2)=}\frac{C_2^1 C_6^1}{C_8^2}=\frac{12}{28}=\frac{3}{7}$ $\mathbf{R(A/V_2)=}\frac{5}{8}$

$\mathbf{R(V_3)=}\frac{C_6^2}{C_8^2}=\frac{15}{28}$ $\mathbf{R(A/V_3)=}\frac{1}{2}$

U holda,

$$\mathbf{R(V_1)=}\ \frac{1}{28}\cdot\frac{3}{4}+\frac{12}{28}\cdot\frac{5}{8}+\frac{15}{28}\cdot\frac{1}{2}=\frac{9}{16}$$

b) R (V_1/A) ehtimolni esa Bayes formulasidan foydalanib, topamiz.

$$\mathbf{R\ (V_1/A)=}\ \frac{P(B_1)P(A/B_1)}{P(A)}$$

O’z - o’zini tekshirish uchun savollar.

1. Hodisalar to’la guruhi ta’rifini bering.
2. To’la ehtimollik formulasida qanday shartlar talab qilinadi?
3. Bayes formulasi va to’la ehtimollik formulalari orasidagi umumiy, hamda farq qiluvchi jihatlarni ayting.

Tayanch iboralar.

Hodisalarning to’la gruppasi, to’la ehtimol formulasi, gipotezalar, Bayes formulasi.

Mustaqil echish uchun masalalar.

1. Yashikda 1 zavodda tayyorlangan 12 ta detal, 2-zavodda tayyorlangan 20 ta detal va 3-zavodda tayyorlangan 18 ta detal bor. 1-zavodda tayyorlangan detalning a’lo sifatli bo’lishi ehtimoli 0,9 ga teng. 2-zavodda va 3-zavodda mos ravishda 0,6 va 0,9 ga teng. Tavakkaliga olingan detalning a’lo sifatli bo’lishi ehtimolini toping.
2. Birinchi idishda 10 ta shar bo’lib, ularning 8 tasi oq, ikkinchi idishda 20 ta shar bo’lib, ularning 4 tasi oq. Har bir idishdan tavakkaligabittadan shar olinib, keyin bu ikki shardan yana bitta shar tavakkaliga olindi oq shar olinganlik ehtimolini toping.
3. Ikkita yashikda radiolampalar bor. Birinchi yashikda 12 ta lampa bo’lib, 1 tasi yaroqsiz, ikkinchi yashikda 10 ta lampa bo’lib, ularning bittasi yaroqsiz. Birinchi yashikda bitta lampa olinib, ikkinchi yashikka solinadi. Ikkinchi yashikdan tavakkaliga olingan lampaning yaroqsiz bo’lishi ehtimolini toping.

Adabiyotlar.

[1] (48-55)

[2] (51-60)

[3] (27-30)

[4] (21-26)

[5] (244-250)

[7] (20-23)

[12] (280-283)

4-§. Erkli sinovlar ketma-ketligi.
Bernulli formulasi. Eng ehtimolli son.

Takrorlanadigan sinovlardan har birining u yoki bu natijasining ehtimolligi boshqa sinovlarda qanday natijalar bo’lganligiga bog’liq bo’lmasa, ular erkli sinovlar ketma-ketligini hosil qiladi deyiladi.

Har xil erkli sinashlarda A hodisa yo har xil ehtimolga, yoki bir xil ehtimolga ega bo’lish mumkin. Biz bundan keyin A hodisa bir xil ehtimolga ega bo’lgan erkli sinashlarni tekshiramiz.

Faraz qilaylik, n ta o’zaro erkli sinash o’tkazilayotgan bo’lib, ularning har birida A hodisa yo ro’y berishi, yoki ro’y bermasligi mumkin bo’lsin. A hodisaning ehtimoli har bir sinashda bir hil, chunonchi r ga teng deb hisoblaymiz, ro’y bermaslik ehtimoli esa q=1-p ga teng. Sinovlarning bunday eng sodda ketma-ketligiga Bernulli sxemasi deyiladi.

***Masalan**,* o’yin soqqasini tashlashdan iborat tajriba o’tkazilmoqda. Har bir tashlashda tayin ochko tushishi, boshqalarida qanday ochko chiqqanligiga bog’liqmasligi ravshan, binobarin biz bu erda erkli sinovlar ketma-ketligiga egamiz.

n ta sinashda A hodisaning rosa k marta ro’y berishi, va demak, n-k marta ro’y bermaslik ehtimolini xisoblashni ko’rib chiqaylik.

n ta sinashda A hodisaning rosa k marta ro’y berishi va n-k marta ro’y bermasligidan iborat bo’lgan bitta murakkab hodisaning ehtimoli erkli hodisalar ehtimolini ko’paytirish teoremasiga ko’ra $p^{k.}q^{n-k}$ ga teng. Bunday murakkab hodisalar n ta elementdan k tadan nechta gruppalash tuzish mumkin bo’lsa, shuncha, ya’ni C^k_n ta bo’ladi. Izlanayotgan ehtimollikni $P_n(k)$ bilan belgilaymiz.

U holda: $$P_n(k) = C_n^k \cdot p^{\kappa} q^{n-k}$$

Hosil qilingan formula Bernulli formulasi deyiladi.

Misol. Har bir detalning standart bo’lishi ehtimoli r=0,8 bo’lsa, tavakkaliga olingan 5 ta detaldan rosa 2 tasining standart bo’lishi ehtimolini toping.

Echish. Izlanayotgan ehtimolni n=5, m=2, p=0,8, va q=0,2 da Bernulli formulasidan topamiz

$$P_5(2) = C_5^2 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^3 = \frac{5!}{3!2!} 0{,}00512 = 0{,}0512$$

Bernulli formulasining tatbiqiga doir yana bitta misol keltiramiz. Tanga 10 marta tashlanadi. Gerb tomonining aniq 3 marta tushishi ehtimoli qanchaga teng?

Echish. Bu hodisaning har bir tajribadagi ehtimoli $\frac{1}{2}$ ga teng. Bundan,

$$P_{10}(3) = C_{10}^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{10\,!}{3\,!7\,!} \cdot \frac{1}{2^{10}} = \frac{15}{28}$$

A hodisaning o’tkazilayotgan n ta erkli takroriy sinov davomida kamida k marta ro’y berish ehtimoli

$$P_n(\kappa) + P_n(k+1) + \ldots + P_n(n)$$

ko’pi bilan k marta ro’y berishi ehtimoli esa

$$P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k)$$

formulalar bilan hisoblanadi.

Agar n ta erkli sinovdan hodisaning k_0 marta ro’y berishi ehtimoli sinovning boshqa mumkin bo’lgan natijalari ehtimollaridan kichik bo’lmasa, u holda k_0 soni eng eh*timolli son* deb ataladi va quyidagi qo’sh tengsizlik bilan aniqlanadi:

$$np - q \le \kappa_0 \le np + p$$

Eng ehtimolli sonni aniqlash uchun hamma ehtimollarni hisoblab chiqmasdan sinovlar soni n, har bir sinovda A hodisaning ro’y berish ehtimolini bilish kifoya ekan. Haqiqatan ham, eng ehtimolli songa mos keluvchi ehtimolni P_n (k_o) bilan belgilasak, yuqoridagi formuladan

$$P_n(k_o) = C_n^{k_0} p^{k_o} \cdot q^{n-k_0} = \frac{n}{k_o!(n-k_o)!} P^{k_o} \cdot q^{n-k_o}$$

Eng ehtimolli soni ta’rifidan

$$P_n(k_o) \ge P_n(k_o - 1)$$

$$P_n(k_o) \ge P_n(k_o + 1)$$

Bu tengsizliklarga mos ravishda $P_n(k_o)$, $P_n(k_o-1)$, $P_n(k_o+1)$ larninng qiymatlarini qo'yib quyidagilarga ega bo'lamiz.

$$\frac{n!}{k_o!(n-k_o)!}P^{k_o}\cdot q^{n-k_o} \geq \frac{n!P^{k_o-1}q^{n-k_0+1}}{(k_o-1)!(n-k_o+1)!},$$

$$\frac{n!}{k_o!(n-k_o)!}P^{k_o}\cdot q^{n-k_o} \geq \frac{n!P^{k_o-1}q^{n-k_0+1}}{(k_o-1)!(n-k_o+1)!}p^{k_o+1}\cdot q^{n-k_o-1}$$

Bu tengsizliklarni k_0 ga nisbatan echamiz va quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\kappa_o \leq np + p; \quad \kappa_o \geq np - q$$

Ohirgi ikki tengsizlikni birlashtirib, eng ehtimolli sonni aniqlovchi qo'sh tengsizlikka ega bo'lamiz:

$$np - q \leq \kappa_o < np + p$$

Bu tengsizlikni aniqlovchi intervalning uzunligi

$$np + p - (np - q) = p + q = 1$$

ekanligini va hodisa n ta sinov natijasida butun son marta ro'y berishini hisobga olsak, eng ehtimolli son k_0 quyidagi shartlarni qanotlantiradi:

a) agar np-q son kasr bo'lsa, u holda bitta eng ehtimolli k_0 son mavjud bo'ladi.

b) agar np-q butun son bo'lsa, u holda ikkita k_0 va k_0 +1 eng ehtimolli sonlar mavjud bo'ladi;

v) agar np butun son bo'lsa, u holda eng ehtimolli son k_0=np bo'ladi.

Misol. Tanga 6 marta tashlanadi. Gerbli tomon tushishlarining eng ehtimolli sonini toping.

Echish. Berilgan masalaning shartlariga asosan, n=6, p=q=1/2. U holda gerbli tomoni tushishlarining eng ehtimolli soni k_0 ni quyidagi qo'sh tengsizlikdan foydalanib topamiz:

$$6\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2} \leq k_o \leq 6\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \Rightarrow 2{,}5 \leq k_o \leq 3{,}5$$

Demak, eng ehtimolli son 3 ekan. K_0 = np=3 ekanligidan foydalansak ham bo’ladi.

Shunday qilib, eng ehtimolli sonni aniqlash jarayonida biz np sonning Bernulli sxemasida maxsus ahamiyatga ega ekanligiga ishonch hosil qilish imkoniga ega bo’ldik. Bu shundan iborat bo’ldiki, np songa eng yaqin bo’lgan ikkita butun sonlardan biri (ba’zan esa ikkalasi ham) eng ehtimolli son bo’ladi.

np son yuqoridagidan boshqa unga nisbatan muhimroq bo’lgan talqinga xam ega ekan. Chunonchi, np ni ma’lum ma’noda n ta tajribalardagi muvaffaqiyatlarning o’rtacha soni deb qarash mumkin.

Qisqalik uchun tajribaning n marta takrorlanishini seriya deb ataymiz. Faraz qilaylik, biz biror songa teng, aytaylik, N ta seriya o’tkazgan bo’laylik. Birinchi seriyada k_1 muvaffaqiyat, ikkinchisida k_2 ta va x.k. N-seriyada esa k_N ta muvaffaqiyat olingan bo’lsin. Bu sonlarning o’rta arifmetigini tuzamiz:

$$\frac{k_1 + k_2 + \ldots + k_N}{N}$$

W ortishi bilan ko’rsatilgan o’rta arifmetik biror o’zgarmas qiymatga yaqinlashar ekan. Bunga ishonch hosil qilish maqsadida oxirgi munosabatni

$$\frac{k_1 + k_2 + \ldots + k_n}{n \cdot N} \cdot n$$

ko’rinishda yozib olamiz; so’ngra quyidagi holni e’tiborga olamiz .

N ta seriya o’tkazish bilan biz qaralayotgan tajribani Nn marta amalga oshiramiz. Yuqorida yozilgan Nn maxrajli kasr ana shu Nn ta tajribalardagi muvaffaqiyatlar umumiy sonining barcha tajribalar soniga nisbatidan boshqa narsa emas. N ning o’sishi (demak, Nn ham o’sishi) bilan bu kasr muvaffaqiyatning ehtimoli bo’lgan R songa yaqinlashadi. Demak,

$$\frac{k_1 + k_2 + \ldots + k_n}{N}$$

ifoda np songa yaqinlashadi. Ana shuni hosil qilish talab qilingan edi.

Misol. Ma'lum korxonaning sharoitida yaroqsizlikka yo'l qo'yish ehtimoli 0,05 ga teng. 100 ta mahsulot orasidagi yaroqsiz mahsulotning o'rtacha soni nimaga teng?

Echish. Izlanayotgan son np=100 · 0.05=5 ga teng bo'ladi.

Polinomial sxema

Bu sxema binomial sxemaning (Bernulli sxemasining) umumlashmasidir. Agar Bernulli sxemasida har bir tajribada faqat 2 ta hodisa: Ā va A qaralgan bo'lsa, polinomial sxemada har bir sinovda k ta hodisa qaraladi. Tajriba shundan iborat bo'ladiki, n ta bog'liq bo'lmagan sinov o'tkaziladi va ularning har birida to'la guruh hosil qiladigan k ta A_1, A_2, . . .A_k hodisaning faqat bittasi ro'y berishi mumkin, bunda bu hodisalarning ehtimolliklari ma'lum:

$$\mathbf{R_1=R(A_1),\ R_2=P(A_2),\ .\ .\ .R_k=P(A_k)}$$

A_1 hodisa rosa m_1 marta A_2 hodisa rosa m_2 marta, . . . A_k hodisa rosa m_k marta ro'y berishi ehtimoli

$$P_n(m_1, m_2, ..m_k) = \frac{n!}{m_1!m_2!\dots m_k!} P_1^{m_1} P_2^{m_2} \dots P_k^{m_k}$$

xususiy holda, k=2 bo'lganda Bernulli formulasi kelib chiqadi.

O’z- o’zini tekshirish uchun savollar.

1. Erkli sinovlar ketma-ketligini ta’riflang.

2. Bernulli formulasi nima uchun xizmat qiladi?

3. Bernulli formulasini keltirib chiqaring.

4. Eng ehtimolli son ta’rifini bering va hisoblash formulasini keltiring.

5. Erkli sinovlar ketma-ketligining polinomial sxemasi nima?

Tayanch iboralar.

Bernulli formulasi, eng ehtimolli son, erkli sinovlar ketma-ketligi, Bernulli sxemasi va polinomial sxema.

Mustaqil ishlash uchun masalalar.

1. Tanga 10 marta tashlanadi. Tangani 2 marta “gerb” tomoni bilan tushishi ehtimolini toping.

2. Merganning nishonga urishi ehtimoli 0,6 ga teng. Merganning 6 ta o’qdan 4 tasini nishonga urish ehtimolini toping.

3. Tanga 15 marta tashlanadi. “Gerb” tomon bilan tushishlar sonining eng ehtimolli sonini toping.

4. Nishonga tushish ehtimoli r=0,35. Nishonga qarata 10 marta o’q uziladi. Nishonga tushishlar eng ehtimolli soni va bu sonning ehtimolini toping.

5. Tanga 7 marta tashlanadi. Tanganing 2 marta “raqam” tomoni bilan tushishi ehtimolining toping.

6. Nishonga tegish ehtimoli r=0,8. Nishonga otilgan 5 ta o’qdan 2 tasining nishonga tegishi ehtimolini toping.

Adabiyotlar

[1] (55-63)

[2] (67-70)

[3] (30-35)

[4] (26-36)

[5] (247-250)

[7] (24-26)

[12] (283-287)

5-§.Laplasning lokal va integral limit teoremalari. Puasson formulasi. Limit teoremalarining amaliy ahamiyati.

Ehtimollar nazariyasining tatbiqlarida n va k larning anchagina katta qiymatlarida $R_n(k)$ ehtimollarni hisoblash zarurati tez-tez uchrab turadi. Masalan, quyidagi masalani echish talab qilinsin.

Biror korxonada mahsulotning yaroqsizlikka yo'l qo'yish ehtimoli 0,05 ga teng. Tayyor mahsulotdan 500 ta buyum tekshirildi. Bular orasida rosa 25 tasi yaroqsiz buyum bo'lish ehtimolini toping.

Har bir alohida buyumning tekshirilishini tajriba sifatida qarab, har birida A hodisaning (buyum, yaroqsiz deb topiladi) yuz berish ehtimoli 0,05 ga teng bo'lgan 500 ta erkli tajriba o'tkazilyapti deb, ayta olamiz. Bernulli formulasiga asosan

$$P_{500}(25) = C_{500}^{25}(0{,}05)^{25}\cdot(0{,}95)^{475}$$

ni hosil qilamiz.

$R_{500}(25)$ ning ifodasi ancha murakkab bo'lganligi sababli bu ifodani bevosita hisoblash katta qiyinchiliklarga olib keladi:

$$C_{500}^{25} = \frac{476\cdot 477\cdot\ldots\cdot 499\cdot 500}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 25}$$

Shu sababli, n va k ning katta qiymatlari uchun $R_n(k)$ ehtimollarni taqribiy formulalar yordamida hisoblash zaruriyati tug'iladi. Bu formulalar Laplasning lokal limit teoremasi va integral limit teoremasi deb ataluvchi ikkita teoremada keltiriladi.

Laplasning lokal teoremasi.

Agar har bir tajribada A hodisaning ro'y berishi ehtimoli r o'zgarmas bo'lib, nol va birdan farqli bo'lsa, u holda n ta tajribada A hodisaning rosa k marta ro'y berish ehtimoli $R_n(k)$ taqriban (n qancha katta bo'lsa, shuncha aniq).

$$y = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

funktsiyaning $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$ dagi qiymatiga teng.

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ funktsiya x argumentining musbat qiymatlariga mos qiymatlaridan tuzilgan jadvallar ehtimollar nazariyasiga oid ko'plab adabiyotlarda keltirilgan. Shuningdek, φ(x) funktsiya juft, ya'ni φ(-x) = φ(x) bo'lganligi uchun bu jadvallardan argumentning qiymatlari manfiy bo'lganda ham foydalaniladi.

Shunday qilib, n ta erkli sinashda A hodisaning rosa k marta ro'y berish ehtimoli taqriban quyidagiga teng.

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$$

Misol. Agar har bir sinashda A hodisaning ro'y berish ehtimoli 0,2 ga teng bo'lsa, 400 ta sinashda bu hodisaning rosa 80 marta ro'y berish ehtimolini toping.

Echish. n=400, k=80, p=0,2, q-0,8.

$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \varphi(x) \approx \frac{1}{8} \varphi(x)$$

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 400 \cdot 0{,}2}{8} = 0$$

jadvaldan φ(0)=0,3989 ekanligini aniqlaymiz.

U holda, izlanayotgan ehtimollik

$$P_{400}(80) \approx \frac{0{,}3989}{8} \approx 0{,}0498$$

Boshqa misol. Merganning o'q uzishda nishonga tekkizish ehtimoli r=0.75. Mergan 10 ta o'q uzganda 8 ta o'qni nishonga tekkizish ehtimolini toping.

Echish. n=10, k=8, p=0.75, q=0.25.

Laplasning asimptotik formulasidan foydalanamiz.

$$P_{10}(8) \approx \frac{1}{\sqrt{10 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25}} \varphi(x) \approx 0{,}7301 \cdot \varphi(x)$$

x ning masala ma'lumotlari bo'yicha aniqlanadigan qiymatini hisoblaymiz:

$$x = \frac{\kappa - np}{\sqrt{npq}} = \frac{8 - 10 \cdot 0{,}75}{\sqrt{10 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25}} \approx 0{,}36$$

jadvaldan φ(0,36)=0,3789

Izlanayotgan ehtimol:

$$R_{10}(8)=0{,}7301 \cdot 0{,}3739 \approx 0{,}273$$

Bernulli formulasi boshqa natijaga, chunonchi

$$R_{10}(8)=0{,}282$$

natijaga olib keladi. Javoblarning bunchalik katta farq qilishi bu misolda n kichik qiymatga egaligi bilan tushuntiriladi.

Laplasning integral teoremasi.

Teorema. Agar har bir sinashda A hodisaning ro'y berish ehtimoli r o'zgarmas bo'lib, nol va birdan farqli bo'lsa, u holda n ta sinashda A hodisaning k_1 dan k_2 martagacha ro'y berish ehtimoli – $R_n(k_1,k_2)$ taqriban quyidagi aniq integralga teng:

$$P_n(k_1,k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{\frac{-y^2}{2}} dy = \phi(x'') - \phi(x'),$$

bu erda

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \text{ ва } x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Maxsus jadvallarda yuqoridagi integralning x=5 gacha bo'lgan qiymatlari berilgan, chunki x>5 lar uchun F(x)=0,5 deb olish mumkin. F(x) funktsiya ko'pincha Laplas funktsiyasi deb ataladi.

Laplas funktsiyasi jadvalidan foydalanish uchun uni quyidagicha o'zgartiramiz.

$$P_n(k_1,k_2)\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x'}^{0} e^{-\frac{f^2}{2}}df+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x''} e^{-\frac{f^2}{2}}df=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x''} e^{-\frac{f^2}{2}}df-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x'} e^{-\frac{f^2}{2}}df=$$

$$=\Phi(x'')-\Phi(x')$$

Bu jadvallardan argumentning manfiy qiymatlari uchun ham F(x) funktsiyaning toqligini hisobga olib, (ya'ni F(-x) = F(x)) foydalanamiz.

Shunday qilib, n ta erkli sinashda A hodisaning k_1 dan k_2 martagacha ro'y berishi ehtimoli

$$P_n(k_1,k_2)\approx\approx\Phi(x'')-\Phi(x')$$

$$x'=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\quad ва\quad x''=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$$

Misol. Detalni texnikaviy nazorat bo'limi tekshirmagan bo'lish ehtimoli r=0,2. Tasodifiy olingan 400 ta detaldan 70 tadan 100 tagachasini nazorat bo'limi tekshirmagan bo'lish ehtimolini toping.

Echish. r=0.2. q=0,8. n=400, k_1=70, k_2=100.

$$x'=\frac{70-400\cdot 0{,}2}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}=-1{,}25$$

$$x''=\frac{100-400\cdot 0{,}2}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}=2{,}75$$

Shunday qilib,

$$\mathbf{R_{400}\ (70,100) = \phi(2{,}5)- \phi(-1{,}25) = \phi(2{,}5)+ \phi(1{,}25)}$$

jadvaldan $\phi(2{,}5) = 0{,}4938$; $\phi(1{,}25) = 0{,}3944$

Izlanayotgan ehtimol

$$\mathbf{R_{400}\ (70,100)=0{,}4938+0{,}3944=0{,}8882}$$

Puassonning limit teoremasi.

$R_n(k)$ ehtimolning

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}; \qquad (1-p=q)$$

ifodasi formal ravishda uchta n, p va q o'zgaruvchilarning funktsiyasini ifoda qiladi. Aytaylik, k tayinlangan, n va p esa o'zgaradi deb faraz qilamiz. Aniqrog'i n va p lar mos holda cheksizlikka va nolga shunday intiladiki, λ = np miqdor chegaralangan bo'lib qolaveradi: λ = np, λ = Const

Bunday holda quyidagi teorema o'rinli bo'ladi.

Teorema. Yuqorida ko'rsatilgan shartlar bajarilganda ushbu $P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ munosabat o'rinli bo'ladi.

Misol. Qo'shma korxona iste'molchiga 5000 ta sifatli mahsulot jo'natadi. Mahsulotning yo'lda shikastlanish ehtimoli 0,001 ga teng bo'lsa, ikkita yoki undan ortiq mahsulotning shikastlanishi ehtimolini toping.

Echish. shikastlangan mahsulotlar sonini m desak, izlanayotgan ehtimol R_{5000} (m≥2) bo'lib, u quyidagiga teng bo'ladi: R_{5000} (m≥2) = R_{5000} (2)+ R_{5000} (3)+...+R_{5000} (5000)=1-(R_{5000}(0)+ R_{5000}(1))

bizning xolda sinashlar soni katta va hodisa ro'y berish ehtimoli 0 ga yaqin bo'lganligi uchun Puasson teoremasidan foydalanamiz.

λ = pn = 5000·0,001= 5 ekanligini e'tiborga olsak:

$$P_{5000}(0) = \frac{5^0 \cdot e^{-5}}{0!} = e^{-5};$$

$$P_{5000}(1) = \frac{5^1 \cdot e^{-5}}{1!} = 5e^{-5}$$

U holda, R_{5000}(m≥2) = 1-e^{-5}-5e^{-5} ≈0,9596

Erkli sinashlarda nisbiy chastotaning o'zgarmas ehtimoldan chetlanish ehtimolini hisoblaymiz.

Faraz qilaylik, A hodisaning ro'y berishi ehtimoli o'zgarmas r ga (0<p<1) teng bo'lgan n ta erkli sinash o'tkazilayotgan bo'lsin. $\frac{m}{n}$ nisbiy chastotaning o'zgarmas r ehtimoldan chetlanishi absolyut qiymati bo'icha avvaldan berilgan ε>0 sondan katta bo'lmaslik ehtimolini topishni o'z oldimizga maqsad qilib qo'yaylik, ya'ni

$$\left| \frac{m}{n} - p \right| \le \varepsilon$$

tengsizlikning ro'y berish ehtimolini topamiz. Bu ehtimolni bunday belgilaymiz:

$$P\left(\left| \frac{m}{n} - p \right| \le \varepsilon \right)$$

Yuqoridagi tengsizlikni unga teng kuchli bo'lgan

$$-\varepsilon \le \frac{m - np}{n} \le \varepsilon$$

tengsizlik bilan almashtiramiz. Uni musbat $\sqrt{\frac{n}{pq}}$ ko'paytuvchiga ko'paytirsak

$$-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \le \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$$

Laplasning integral teoremasidan foydalanib,

$$x' = -\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \qquad ва \quad x'' = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$$

deb olib, quyidagini hosil qilamiz:

$$P\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{Z^2}{2}} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{Z^2}{2}} dz = 2\phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

Nihoyat, qavs ichidagi tengsizliklarni ularga teng kuchli bo'lgan dastlabki tengsizlik bilan almashtirib, quyidagini hosil qilamiz:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\leq\varepsilon\right)\approx 2\phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

Xulosa qilib aytganda.

$$\left|\frac{m}{n}-p\right|\leq\varepsilon$$

tengsizlikning ro'y berish ehtimoli taqriban Laplas funktsiyasining $x=\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$ dagi ikkilangan qiymatiga teng ekan.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Laplasning lokal teoremasini ta'riflang.

2. Laplasning integral teoremasini ayting.

3. Puasson teoremasi qanday xollarda qo'llaniladi?

4. Lokal va integral teoremalarning amaliy ahamiyati nimadan iborat?

Tayanch iboralar.

Laplasning lokal teoremasi, Laplasning integral teoremasi, Puasson teoremasi**.**

Mustaqil echish uchun masalalar.

1. Bitta o'q uzilganda nishonga tegish ehtimoli 0,8 ga teng. 100 marta o'q uzilganda nishonga rosa 75 marta tegish ehtimolini toping.

2. O'yin soqqasi 10 marta tashlanganda uchga karrali ochkolar kamida 2 marta, ko'pi bilan besh marta tushishi ehtimolini toping.

3. O'yin soqqasi 800 marta tashlanganda uchga karrali ochko 267 marta tushishi ehtimolini toping.

4. O’yin soqqasini 90 marta tashlashda 3 ga karrali sonning kamida 100, ko’pi bilan 170 marta chiqish ehtimolini toping.

5. Detalning yaroqli bo’lish ehtimoli 0,97 ga teng. Olingan 200 ta detal orasida rosa 100 tasining yaroqli bo’lishi ehtimolini toping.

6. Texnologik jarayonga ko’ra kalava ipining 1 soat davomida uzilish ehtimoli 0,2 ga teng. Yigiruvchi ayol 100 ta kalavaga xizmat qiladi. Uning bir soat davomida ko’pi bilan 30 ta ipni ulash ehtimolini toping.

Adabiyotlar

[1] (57-63)

[2] (70-82)

[3] (30-35)

[4] (43-58)

[5] (247-250)

[7] (30-33)

[12](287-302)

6-§.Tasodifiy miqdorlar va ularning turlari.
Diskret tasodifiy miqdor ehtimollarining taqsimot qonuni.
Amalda ko'p uchraydigan diskret taqsimot qonunlari.

Tasodifiy miqdor tushunchasi ehtimollar nazariyasi fanining asosiy tushunchalaridan biri xisoblanadi.

Ta'rif: Tasodifiy miqdor deb, tasodifiy sabablarning ta'siri natijasida mumkin bo'lgan qiymatlardan faqat bittasini tayin ehtimol bilan qabul qiluvchi miqdorga aytiladi.

Biz tasodifiy miqdorlarni lotin alfavitining bosh harflari **X, Y, Z,…** bilan, ularning mumkin bo'lgan qiymatlarini esa tegishli kichik harflari **x, u, z, …** bilan belgilaymiz.

Odatda tasodifiy miqdorlar ikki xil bo'ladi: diskret tasodifiy miqdorlar va uzluksiz tasodifiy miqdorlar.

Diskret tasodifiy miqdorlar deb, mumkin bo'lgan qiymatlari ayrim ajralgan sonlardan (bu mumkin bo'lgan qiymatlar chekli yoki cheksiz bo'lishi mumkin) iborat miqdorga aytiladi.

Misol. X-tasodifiy miqdor 100 ta buyumdan iborat guruhdagi yaroqsiz buyumlar soni. Bu miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari quyidagicha bo'ladi:

$$x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=2\ \ldots,\ x_{101}=100$$

Shunday qilib, diskret tasodifiy miqdorni tasvirlash uchun eng avvalo uning barcha mumkin bo'lgan qiymatlarini ko'rsatish lozim. Ammo, X tasodifiy miqdor uchun uning faqat mumkin bo'lgan qiymatlari x_1, x_2… nigina emas, balki **{x=x_1}, {x=x_2}, …** hodisalarning ehtimollarini ham, ya'ni

$$P_1=P(X=x_1),\ P_2=P(X=x_2),\ \ldots$$

ni ham ko'rsatish lozim.

Ta'rif. Tasodifiy miqdorning qiymatlari bilan ularning ehtimollari orasidagi bog'lanishni tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni deb ataladi.

Diskret tasodifiy miqdor taqsimot qonunini ifodalash usullari va shakllari turlicha bo'lishi mumkin.

X diskrekt tasodifiy miqdor taqsimot qonuni berilishining eng sodda shakli jadval bo'lib, bunda tasodifiy miqdorning barcha mumkin bo'lgan qiymatlari va ularga mos ehtimolliklar ko'rsatilgan bo'ladi:

$$\mathbf{X:}\ x_1\ x_2 \ldots x_n$$

$$\mathbf{p:}\ \mathbf{p_1\ p_2 \ldots p_n}$$

$x_1\ x_2 \ldots x_n$ qiymatlar odatda ortib borish tartibida yoziladi.

Bundan tashqari, $\{X=x_i\}$ hodisalarning har ikkitasi birgalikda emasligi sababli

$$\mathbf{r_1+r_2+\ldots+r_n}=\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

tenglik har doim o'rinli bo'ladi. Ba'zan diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni grafik usulda – taqsimot ko'pburchagi yordamida ham beriladi.

Taqsimot ko'pburchagi hosil qilish uchun, abstsissalar o'qida tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari, ordinatalar o'qida esa ularga mos ehtimollarni qo'yiladi, keyin esa $\mathbf{(x_1;r_1), (x_2\ ;r_2) \ldots}$ nuqtalarni kesmalar bilan tutashtiriladi. Taqsimot qonuni formula (analitik) usulda ham beriladi.

Misol. Tanga 5 marta tashlanadi. Gerb tomonining tushish soni X tasodifiy miqdor. Bu X tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari 0, 1, 2, 3, 4, 5, sonlardan iborat bo'ladi. Bu qiymatlarning ehtimollari Bernulli formulasi yordamida hisoblanadi.

Masalan,

$$P(X=3)=C_5^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{10}{32}$$

U holda

$$\begin{array}{lcccccc} \mathbf{X:} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \\ \mathbf{P:} & \frac{1}{32} & \frac{5}{32} & \frac{10}{32} & \frac{10}{32} & \frac{5}{32} & \frac{1}{32} \end{array}$$

ko'rinishdagi jadvalni hosil qilamiz.

Amalda ko'p uchraydigan diskret taqsimot qonunlari Binomial taqsimoti va Puasson taqsimoti hisoblanadi.

Binomial taqsimot. n marta erkli tajriba o'tkaziladi.

Ulardan har birida biror A hodisa bir xil R ehtimol bilan yuz berishi mumkin. n ta tajribada A hodisaning yuz berishi sonidan iborat X tasodifiy miqdor qaraladi. Bu tasodifiy miqdorga mos jadval

X: 0 1 2 … n-1 n

P: $P_n(0)$ $P_n(1)$ $p_n(2)$ … $P_n(n-1)$ $P_n(n)$

ko'rinishda bo'lib, bunda

$$P_n(k)=C^k_n p^k q^{n-k}, \qquad (k=0, 1, 2,\dots n)$$

Bu bevosita Bernulli formulasidan kelib chiqadi. Bu jadval bilan harakterlanadigan taqsimot qonuni **binomial taqsimot qonuni** deb ataladi.

Agar X tasodifiy miqdorga mos jadval

X:	**0**	**1**	**2**	**…**	**k**	**…**
R:	r_0	r_1	r_2	**…**	r_k	**…**

ko'rinishda bo'lsa, u holda X tasodifiy miqdor Puasson qonuni bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi. Jadvalda

$$P_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad (k = 0, \quad 1, \quad 2, \quad \dots, \quad)$$

Bundagi λ tayinlangan musbat son (λ ning har xil qiymatlariga turlicha Puasson taqsimoti mos keladi).

Ehtimollar nazariyasining tatbiqlarida Puasson taqsimoti boshqa ko'plab diskret taqsimotlarga nisbatan ko'proq uchraganligi sababli u muhim axamiyat kasb etadi.

Masalan, binomial ehtimollarning

$$P_n(k)=C^k_n p^k q^{n-k}$$

ifodasidagi r ni tayinlab qo'yib, n tajribalar sonini cheksizlikka, R ehtimolni esa n va r larning ko'paytmasi uchun pr=const shart bajariladigan qilib nolga intiltirsak, u holda

$$\lim_{n\to\infty} p_n(k)=\frac{\lambda^k e^{-k}}{k!}$$

munosabatga ega bo'lamiz. Oxirgi munosabatdan ko'rinib turibdiki, yuqoridagi limitga o'tish natijasida binomial taqsimotning jadvali Puasson taqsimotining jadvaliga o'tadi. Shunday qilib, Puasson taqsimoti binomial taqsimot uchun yuqoridagi shartlar bajarilganda limit taqsimot bo'lar ekan. Puasson taqsimotning bu hossasi tajribalar soni katta bo'lib, ehtimol esa kichik bo'lganda binomial taqsimotni ifodalash bilan u tez-tez ishlatiladigan siyrak voqealar nomi bog'liq ekanligini ta'kidlab o'tamiz.

Geometrik taqsimot qonuni deb ataluvchi qonun

$$R(X=k)=q^{k-1}p,\ (p+q=1,\ k=1,\ 2,\ \ldots)$$

formula shaklida berilishi yoki

X: 1 2 3 … k …

P: p qp q^2p … q^{k-1} p …

jadval ko'rinishida berilishi mumkin.

Misol. X – bitta kubikni tashlashda birinchi marta «6» ochko tushguncha o'tkaziladigan tajribalar soni bo'lsin. Ravshanki, bu holda X – diskret tasodifiy miqdor bo'lib, r=1/6 parametrli geometrik taqsimot qonuniga bo'ysunadi. Ya'ni

X: 1 2 3 … k …

r: $\frac{1}{6}$ $\quad \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}$ $\quad \left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}$ $\quad \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{6}\ldots$

Misol. Talabaning imtihon biletidagi savollarning har biriga to'g'ri javob berish ehtimoli 0,7 ga teng. Uning imtihon biletidagi 4 ta savolga bergan to'g'ri javoblari sonining taqsimot qonunini tuzing.

Echish: X tasodifiy miqdor orqali talabaning to'g'ri javoblari sonini belgilasak, uning qabul qiladigan qiymatlari

$$x_1=0;\ x_2=1;\ x_3=2;\ x_4=3;\ x_5=4;$$

Ko'rinib turibdiki, n=4; p=0.7; q=0.3 va X tasodifiy miqdorning yuqoridagi qiymatlarni qabul qilish ehtimollari Bernulli formulasi orqali topiladi:

$R_1=R_4(0) = S_4^0(0,7)^0(0,3)^4 = 0,0081$

$R_2 = R_4(1) = S_4^1(0,7)^1(0,3)^3=0,0756$

$R_3 = R_4(2) = S_4^2(0,7)^2(0,3)^2 = 0,2646$

$R_4 = R_4(3) = S_4^3(0,7)^3(0,3)^1 = 0,4116$

$R_5 = R_4(4) = S_4^4(0,7)^4(0,3)^0 = 0,2401$

U holda X tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagicha bo'ladi:

X	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
P	**0,0081**	**0,0756**	**0,2646**	**0,4116**	**0,2401**

Tekshirish:

0,0081+0,0756+0,2646+0,4116+0,2401=1

O'z -o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Tasodifiy miqdor ta'rifini bering.
2. Tasodifiy miqdorning qanday turlari bor? Ularga misollar keltiring.
3. Diskret tasodifiy miqdorni taqsimot qonuni deb nimaga aytiladi?
4. Taqsimot qonuni qanday shakllarda berilishi mumkin?
5. Amalda ko'p uchraydigan diskret taqsimot qonunlariga misollar keltiring.

Tayanch iboralar.

Tasodifiy miqdor, diskret tasodifiy miqdor, diskret tasodifiy miqdorning taqsimoti qonuni, binomial taqsimot qonuni, Puasson taqsimot qonuni, geometrik taqsimot qonuni.

Mustaqil echish uchun misollar.

1. Nishonga qarata 4 ta o'q uziladi, bunda har qaysi o'q uzishda nishonga tegishi ehtimoli R=0,8 ga teng. Quyidagilarni toping:

a) nishonga tegishlar soniga teng bo'lgan X diskret tasodifiy miqdorning taqsimoti qonunini;

b) $1 \le X \le 3$ *ва* X >3 hodisalarning ehtimolini;

v) Taqsimot ko'pburchagini chizing.

2. Yashikda 15 ta oq va 25 ta qora shar bor. Yashikdan 1 ta shar olindi. X-tasodifiy miqdor olingan oq sharlar soni bo'lsa, uning taqsimot qonunini tuzing.

3. Uchta mergan nishonga qarata o'q uzishdi. Nishonga tekkizish ehtimoli birinchi mergan uchun 0,8 ga, ikkinchi mergan uchun 0,6 ga, uchinchisi uchun 0,5 ga teng. Nishonga tekkan o'qlar sonidan iborat bo'lgan X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

4. Ichida 5 ta oq va 7 ta qora shar solingan idishdan 4 ta shar olinadi. Olingan oq sharlar sonidan iborat bo'lgan X tasodifiy miqdorni taqsimot qonunini tuzing.

Adabiyotlar.

[1] (64-74)

[2] (86-94) , (140-149)

[3] (37-42)

[4] (36-58)

[5] (251-269)

[7] (39-44)

[12] (302-310)

7-§. Diskret tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalari va ularning xossalari.

Shuni ta'kidlash joizki, X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini bilish ehtimollik nuqtai-nazardan X miqdor haqida to'liq ma'lumot beradi. Amaliyotda esa ko'pincha bundan ancha kam narsani bilish kifoya qiladi, chunonchi taqsimotni xarakterlaydigan ba'zi sonlargina bilish kifoyadir, bular tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalari deb ataladi va ularning vazifasi tasodifiy miqdorning eng muhim xususiyatlarini qisqa shaklda ifodalashdir. Eng muhim sonli xarakteristikalar qatoriga matematik kutilish va dispersiya kiradi.

Ushbu diskret tasodifiy miqdor berilgan bo'lsin.

$$\begin{array}{ll} \mathbf{X:} & x_1\ \mathbf{x_2} \ldots \mathbf{x_n} \\ \mathbf{R:} & \mathbf{r_1}\ \mathbf{r_2} \ldots \mathbf{r_n} \end{array}$$

Ta'rif. X diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilishi M(X) deb, X miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlarini mos ehtimollarga ko'paytmalari yig'indisiga teng songa aytiladi, ya'ni

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots. + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

X tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari soni cheksiz, ya'ni X tasodifiy miqdor

$$\begin{array}{ll} \mathbf{X:} & x_1\ x_2 \ldots x_n \ldots. \\ \boldsymbol{R:} & \mathbf{r_1}\ \mathbf{r_2} \ldots \mathbf{r_n} \ldots. \end{array}$$

taqsimotga ega bo'lgan holda uning matematik kutilishi

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots. + x_n p_n + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

formula bilan aniqlanadi, bunda oxirgi qator absolyut yaqinlashadi deb faraz qilinadi. Aks holda, bu tasodifiy miqdor matematik kutilishga ega bo'lmaydi.

Misol. Ushbu tasodifiy miqdorning matematik kutilishini toping.

X: **1 2 3 4 5 6**

R: $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$

Echish.

$$\mathbf{M(x)= 1\cdot \frac{1}{6} +2\cdot \frac{1}{6} +3\cdot \frac{1}{6} + 4\cdot \frac{1}{6} +5\cdot \frac{1}{6} +6\cdot \frac{1}{6} =3{,}5}$$

Misol. Puasson qonuni bo'yicha taqsimlangan X diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilishini toping.

Echish. Ma'lumki, Puasson qonuni quyidagi jadval bilan xarakterlanadi.

X: 0 1 2 3 . . . k

p: $e^{-\lambda}$ $\lambda e^{-\lambda}$ $\frac{\lambda e^{-\lambda}}{2!}$ $\frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!}$ . . . $\frac{\lambda^\kappa e^{-\lambda}}{\kappa!}$

U holda

$$M(X)=\sum_{\kappa=0}^{\infty}\kappa\frac{\lambda^\kappa}{\kappa!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{\lambda^{\kappa-1}}{(\kappa-1)!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\cdot e^{-\lambda}=\lambda$$

Shunday qilib, Puasson taqsimotini xarakterlovchi parametr X tasodifiy miqdorning matematik kutilishidan boshqa narsa emas ekan.

X tasodifiy miqdor ustida n ta sinov o'tkazilgan bo'lsin. Sinov natijalari quyidagicha bo'lsin.

X: x_1 x_2 **. . .** x_k

p: n_1 n_2 . . . n_k

Yuqori satrda X miqdorning kuzatilgan qiymatlari, pastki satrda esa mos qiymatlarning chastotalari ko'rsatilgan. X orqali kuzatilgan barcha qiymatlarning o'rta arifmetigini belgilaylik, u holda

$$\overline{X}=\frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k n_k}{n}$$

yoki

$$\overline{X}=x_1\frac{n_1}{n}+x_2\frac{n_2}{n}+\ldots+x_k\frac{n_k}{n}=x_1\nu_1+x_2\nu_2+\ldots+x_k\nu_k$$

Bu erda ν_1, ν_2, ...,ν_K - mos ravishda x_1, x_2 , . . . x_x qiymatlarning nisbiy chastotalari.

Demak, $\overline{X}$=M(X) ya'ni X tasodifiy miqdorning matematik kutilishi uning kuzatiladigan qiymatlari o'rta arifmetigiga taqriban teng.

Matematik kutilishning xossalari.

1-xossa. O'zgarmas miqdorning matematik kutilishi shu o'zgarmasning o'ziga teng, ya'ni M(S)=S.

Isboti. S o'zgarmas miqdorni yagona S qiymatni 1 ga teng ehtimol bilan qabul qiladigan tasodifiy miqdor deb qarash mumkin. Shuning uchun,

$$\mathbf{M(S)=S \cdot 1=S}$$

2-xossa. Chekli sondagi tasodifiy miqdorlar yig'indisining matematik kutilishi ular matematik kutilishlarining yig'indisiga teng, ya'ni

$$\mathbf{M(X_1+X_2+....+X_n)=M(X_1)+M(X_2)+...+M(X_n)}$$

3-xossa. Chekli sondagi bog'liqmas tasodifiy miqdorlar ko'paytmasining matematik kutilishi ular matematik kutilishlarining ko'paytmasiga teng, ya'ni

$$\mathbf{M(X_1 \cdot X_2 \cdot ... \cdot X_n)=M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot ... \cdot M(X_n)}$$

4- xossa.

$$\mathbf{M(aX+b) = aM(X)+b, (a , b = const)}$$

Isboti.

$$\mathbf{M(\mathit{a}X+b)=M(\mathit{a}X)+M(b)=\mathit{a}M(X)+ b}$$

5-xossa.

$$\mathbf{M(X-M(X))=0}$$

X-M(X) tasodifiy miqdor X tasodifiy miqdorni o'zining matematik kutilishidan chetlanishi (og'ishi) deb ataladi. Shunday qilib, tasodifiy miqdor chetlanishining matematik kutilishi nolga teng.

Tasodifiy miqdor dispersiyasi.

Ko'pchilik holatlarda, tasodifiy miqdorning matematik kutilishini bilish uni etarli darajada xarakterlash uchun kifoya qilmaydi.

Masalan. **X: -0,7 –0,01 0 0,01 0.7**

r: 0,1 0,2 0,4 0,2 0,1

Y: -50 –10 0 10 50

p: 0,3 0,1 0,2 0,1 0,3

M(X)=0 va M(Y)=0 ekanligi ko'rinib turibdi. Ammo bu tasodifiy miqdorlar taqsimotlarining mohiyati turlicha: X miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari uning matematik kutilishidan kam farq qiladi, shu bilan bir vaqtda Y miqdorning qiymatlari uning matematik kutilishidan katta farq qiladi. Boshqacha aytganda, matematik kutilishini bilish undan qanday chetlanishlar bo'lish mumkinligi haqida xukm yuritishga imkon bermaydi.

Ta'rif. X tasodifiy miqdorning dispersiyasi D(X) deb, uning chetlanishi kvadratining matematik kutilishiga aytiladi, ya'ni

$$\mathbf{D(X)=M(X-M(X))^2}$$

Diskret tasodifiy miqdor uchun bu formula ushbu ko'rinishini oladi:

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i - M(X))^2 p_i$$

Ta'rif. X tasodifiy miqdorning o'rtacha kvadratik chetlanishi σ(X) deb, dispersiyadan olingan kvadrat ildizning qiymatiga aytiladi, ya'ni

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Misol. Agar A hodisaning ro'y berish ehtimoli r ga teng bo'lsa, u holda A hodisaning bitta sinovda ro'y berish sonining matematik kutilishi, dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishini toping.

Echish. Taqsimot qonuni quyidagicha bo'ladi:

X: 0 1

r: q p

U holda,

$$\mathbf{M(X)=0\cdot q+1p=p}$$

$$\mathbf{D(X)=(0-p)^2\cdot q+(1-p)^2\cdot p=qp^2+pq^2(p+q)=qp}$$

$\sigma(X)=\sqrt{pq}$

Dispersiyani hisoblash uchun ko'pincha quyidagi formuladan foydalangan ma'qul:

$$\mathbf{D(X)=M(X^2)-(M(X))^2}$$

Dispersiyaning xossalari.

1-xossa. O'zgarmas miqdorning dispersiyasi nolga teng, ya'ni

$$D(S)=0$$

Isbot. S o'zgarmas miqdorni S qiymatini 1 ehtimol bilan qabul qiladi deb qarash mumkin. U holda

$$\mathbf{M(S)=S \text{ va } D(S)=(S-S)^2\cdot 1=0}$$

2-xossa. O'zgarmas ko'paytuvchini kvadratga ko'tarib dispersiya belgisidan tashqariga chiqish mumkin.

$$\mathbf{D(S\cdot X)=S^2\, D(X)}$$

3-xossa. Chekli sondagi bog'liqmas tasodifiy miqdorlar yig'indisining dispersiyasi ular dispersiyalarning yig'indisiga teng:

$$\mathbf{D(X_1+X_2+...+X_n)=D(X_1)+D(X_2)+...+D(X_n)}$$

Misol. Quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan X diskeret tasodifiy miqdorning matematik kutilishi, dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishini hisoblang.

X:	**-2**	**1**	**3**	**6**
r:	**0.4**	**0,2**	**0,1**	**0,3**

Echish.

$$\mathbf{M(X)=-2\cdot 0,4+1\cdot 0,2+30,1+6\cdot 0,3=1,5}$$

$$\mathbf{D(X)=M(X-M(X))^2=(-2-1,5)^2\cdot 0,4+(1-1,5)^2\cdot 0.2+(3-1,5)^2\cdot 0,1+(6-1,5)^2\cdot 0,3=11,25}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{11,25}\approx 3,36$$

Biz yuqorida dispersiyani ta'rif bo'yicha hisobladik. Endi $D(X)=M(X^2)-M^2(X)$ formula bo'yicha hisoblaylik. Buning uchun dastlabki X^2 tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzib olamiz.

$\mathbf{X^2}$**: 4 1 9 36**

r: 0,4 0,2 0,1 0.3

$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=13{,}5-2{,}25=11{,}25$

Ta'rif. X va Y tasodifiy miqdorlarning korrelyatsiya momenti (yoki kovariatsiyasi) deb, quyidagi songa aytiladi.

$$K_{ku}=M[(X-M(X))(Y-M(Y))]$$

Diskret X va Y tasodifiy miqdorlar uchun bu formula ushbu ko'rinishini oladi:

$$K_{xy}=\sum_{i,j}(x_i-M(X))(y_j-M(Y))P_{ij}$$

bunda $R_{ij}=P(X=x_i;Y=y_j)$

Korrelyatsiya momenti ifodasi matematik kutilish xossalari asosida bunday almashtirilishi mumkin;

$$M(X-M\ (Y-M))=M[XY-XM(Y)-YM(X)+M(X)M(Y)]=$$

$$=M(XY)-M(X)M(Y)-M(Y)M(X)+M(X)M(Y)=M(XY)-M(X)\cdot M(Y)$$

Teorema. Bog'liqmas tasodifiy miqdorlar korrelyatsiya momenti nolga teng.

Ta'rif:

$$r_{xy}=\frac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$$

nisbat X va Y tasodifiy miqdorning korrelyatsiya koeffitsienti deb ataladi.

Agar X va Y tasodifiy miqdorlar bog'liqmas bo'lsa, u holda ularning korrelyatsiya koeffitsienti nolga tengligini tushunish qiyin emas.

Quyidagi teorema tasodifiy miqdorlar orasidagi bog'lanishni tavsiflashda korrelyatsiya koeffitsientining ahamiyatini yana ham batafsil oydinlashtirib beradi.

Teorema. Agar Y tasodifiy miqdor X tasodifiy miqdorning chiziqli funktsiyasi, ya'ni $Y=aX+b$ bo'lsa, u holda agar $a>0$ bo'lsa, $r_{xy}=1$ agar $a<0$ bo'lsa, u holda $r_{xy}=-1$ bo'ladi.

Isbot.

K_{xu}=M[(X-M(X))(Y-M(Y))]=M[(X-M(X)(*a*X+b-M(Y))]=M[(X- M(X))(*a*X+b-*a*M(X)-b)]=*a*M[X-M(X)]^2 =*a*D(X)=*a*σ^2_x

aσ^2_u=D(Y)=*a*^{2}D(X)=*a*$^2\sigma^2_x$ σ_y=[*a*] σ_x

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{a\sigma_x^2}{|a|\sigma_x^2} = \begin{cases} 1, & a > 0 \\ -1, & a < 0 \end{cases}$$

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Tasodifiy miqdor matematik kutilishi va dispersiyasi ta'riflarini ayting.

2. Matematik kutilish va dispersiya tasodifiy miqdorning qaysi xossalarini ifodalaydi?

3. Matematik kutilish va dispersiyaning xossalarini keltiring.

4. Kovariatsiya nima?

Tayanch iboralar

Matematik kutilish, chetlanish, o'rtacha kvadratik chetlanish, tasodifiy miqdor dispersiyasi, korrelyatsiya koeffitsenti.

Mustaqil echish uchun masalalar.

1. 10 ta detaldan iborat partiyada 3 ta yaroqsiz detal bor. Tavakkaliga 2 ta detal olingan. X diskret tasodifiy miqdor –olingan 2 ta detal orasidagi yaroqsiz detallar soni bo'lsa, uning matematik kutilishini toping.

2. Tanga 5 marta tashlanadi. «Raqam» tomoni bilan tushishlar sonining taqsimot qonunini tuzing va dispersiyasini hisoblang.

3. Mergan o'q nishonga tekkuncha otadi. O'qning nishonga tegish ehtimoli R ga teng, otilgan o'qlar sonining matematik kutilishi va dispersiyasini toping.

4. Ichida 4 ta oq va 6 ta qora shar bo'lgan idishda 5 ta shar olinadi. X tasodifiy miqdor chiqqan oq sharlar soni. M(X), D(X) va σ(X) larni toping.

5. To'pdagi uzilgan bitta o'q bilan nishonni mo'ljalga olish ehtimoli 0,4 ga teng. Uchta o'q uzilganda nishonga tekkizishlar sonidan iborat bo'lgan X tasodifiy miqdorning matematik kutilishining toping.

Adabiyotlar

[1] (75-95)

[2] (94-103)

[3] (42-58)

[4] (99-146)

[5] (261-269)

[7] (39-44)

[12] (302-310)

8-§.Taqsimot funktsiya va uning xossalari. Ehtimollar taqsimotining zichlik funktsiyasi. Amalda ko'p uchraydigan uzluksiz taqsimot qonunlari.

Diskret tasodifiy miqdorning berilish usulini uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun qo'llab bo'lmaydi. Uzluksiz tasodifiy miqdorning barcha mumkin bo'lgan qiymatlarini yozish mumkin emas. Shuning uchun, taqsimot funktsiya tushunchasi keltiriladi.

Aytaylik, x– haqiqiy son bo'lsin. X ning x dan kichik qiymat qabul qilishdan iborat hodisaning ehtimolini F(x) orqali belgilaymiz. Albatta x ning o'zgarishi bilan umuman olganda F(x) ham o'zgaradi, ya'ni u x ning funktsiyasi.

Ta'rif. Tasodifiy miqdorning taqsimot funktsiyasi deb, har bir x qiymati uchun X tasodifiy miqdorning x dan kichik qiymat qabul qilish extimolini aniqlovchi F(x) funktsiyaga aytiladi, ya'ni

$$\mathbf{F(x) = R(X<x)}$$

Endi uzluksiz tasodifiy miqdorning aniqroq ta'rifini bersak bo'ladi: tasodifiy miqdor taqsimotining F(x) taqsimot funktsiyasi uzluksiz differentsiallanuvchi bo'lsa, tasodifiy miqdorni uzluksiz deymiz.

Taqsimot funktsiyaning xossalari.

1-xossa. Taqsimot funktsiyaning qiymatlari [0;1] kesmaga tegishli:

$$0 \le F(x) \le 1$$

Isboti: Bu xossa taqsimot funktsiyani ehtimol sifatida ta'riflanishdan kelib chiqadi: ehtimol hamma vaqt manfiy bo'lmagan va birdan katta bo'lmagan sondir.

2-xossa. F(x) kamaymaydigan funktsiya, ya'ni agar $x_1<x_2$ bo'lsa, u holda $F(x_1)\le F(x_2)$

Isboti: $x_1<x_2$ bo'lsin, u holda

$$(X<x_2)=(X<x_1)+(x_1\le X<x_2).$$

Bundan

$$R(X<x_2)=R(X<x_1)+R(x_1\le X<x_2).$$

yoki

$$\mathbf{F(x_2)\text{-} F(x_1)= R(x_1 \le X < x_2).}$$

ehtimol manfiy bo'lmasligini hisobga olsak,

$$\mathbf{F(x_2)\text{-} F(x_1) \ge 0}$$

yoki

$$\mathbf{F(x_1) \le F(x_2)}$$

1-natija. Tasodifiy miqdorning (*a*:b) intervalda yotuvchi qiymatni qabul qilish ehtimoli taqsimot funktsiyasining shu intervaldagi orttirmasiga teng:

$$\mathbf{R(a \le X < b) = F(b)\text{-}F(a)}$$

***2**-natija.* X uzluksiz tasodifiy miqdorning tayin bitta qiymat qabul qilishi ehtimoli nolga teng.

Xaqiqatan ham, $a=x_1$; $b=x_1+\Delta x$ deb olsak, quyidagiga ega bo'lamiz.

$$\mathbf{R(x_1 \le X < x_1+\Delta x) = F(x_1+\Delta x)\text{-}F(x_1)}$$

Δx ni nolga intiltiramiz. X uzluksiz tasodifiy miqdor bo'lgani uchun F(x) funktsiya uzluksiz bo'ladi. F(x) ning x_1 nuqtada uzluksizligidan $F(x_1+\Delta x)\text{-}F(x_1)$ ayirma ham nolga intiladi, demak

$$\mathbf{R(X=x_1)=0}$$

3-xossa. Agar tasodifiy miqdorning_mumkin bo'lgan qiymatlari (a;b) intervalga tegishli bo'lsa, u holda

$$x \le a \text{ da } F(x)=0,\ x > b \text{ da } F(x)=1$$

Natija. Agar tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari butun ox o'qda joylashgan bo'lsa, u holda quyidagi limit munosabatlar o'rinli:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$$

Misol. X tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot funktsiya bilan berilgan:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}, & -1 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

Sinash natijasida X miqdor (0 ;2) intervalga tegishli qiymat qabul qilish extimolini toping.

Echish.

$$P(0<X<2)=F(2)-F(0)=\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$$

Misol. X diskret tasodifiy miqdor quydagi taqsimot qonuni bilan berilgan.

X: 1 4 8

r: 0,3 0,1 0,6

Taqsimot funktsiyani toping.

Echish.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ 0{,}3, & 1<x\le 4\\ 0{,}4, & 4<x\le 8\\ 1, & x>8\end{cases}$$

Ehtimollarning zichlik funktsiyasi.

Yuqorida uzluksiz tasodifiy miqdorni taqsimot funktsiya yordamida bergan edik. Tasodifiy miqdorni bu usulda berish yagona emas. Uzluksiz tasodifiy miqdorni, ehtimollar taqsimotining zichlik (differentsial) funktsiyasidan foydalanib ham berish mumkin.

Ta'rif. Taqsimotning zichlik f(x) (differentsial) funktsiyasi deb,taqsimot funktsiyasidan olingan birinchi tartibli f (x) = F' (x) hosilaga aytiladi.

Zichlik funktsiyasini bilgan holda, uzluksiz tasodifiy miqdorning berilgan intervalga tegishli qiymat qabul qilishi ehtimolini hisoblash mumkin.

Teorema: X uzluksiz tasodifiy miqorning (a;b) intervalga tegishli qiymat qabul qilishi ehtimoli zichlik funktsiyasidan a dan b gacha olingan aniq integralga teng:

$$\mathbf{R}(a<X<b)=\int_a^b f(x)\,dx$$

Bundan tashqari, f(x) zichlik funktsiyasini bilgan holda F(x) taqsimot funktsiyasini quyidagi formula bo'yicha topish mumkin:

$$\mathbf{F(x)} = \int_{-\infty}^{X} f(y)dy$$

Shunday qilib, zichlik funktsiyasini bilgan holda taqsimot funktsiyasini topish mumkin. Albatta, taqsimot funktsiya ma'lum bo'lsa, zichlik funktsiyasini topish mumkin, chunonchi f(x) = F'(x).

Misol. Berilgan zichlik funktsiya bo'yicha taqsimot funktsiyani toping.

$$f(x)= \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \dfrac{1}{b-a}, & a < x \le b \\ 0, & x > b \end{cases}$$

Echish. Agar x≤a bo'lsa, u holda f(x)=0 va demak, F(x)=0.

Agar a<x≤b bo'lsa,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(y)dy = \int_{-\infty}^{a} 0dy + \int_{a}^{x} \frac{dy}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}$$

Agar x>b bo'lsa,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} ody = \int_{-\infty}^{b} \frac{dy}{b-a} + \int_{b}^{\infty} ody = \frac{b-a}{b-a} + 0 = 1$$

Demak,

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

Odatda, bunday zichlik funktsiya bilan berilgan tasodifiy miqdorni (a;b) oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi.

Differentsial funktsiyaning xossalari

1-xossa. Differentsial funktsiya manfiy emas: f(x)≥0

***Isbot*.** Bu xossa f(x) kamaymaydigan F(x) taqsimot funktsiyaning hosilasi ekanligidan kelib chiqadi.

2-xossa. Differentsial funktsiyadan -∞ dan +∞ gacha olingan hosmas integral birga teng:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Isboti. Nyuton-Leybnits formulasiga asosan;

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = F(x) \mathop{I}_{\infty}^{-\infty} = F(+\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1$$

Shuni isbotlash talab qilingan edi.

Eslatama: Agar X tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari [*a*;b] kesmadan iborat bo'lsa, u holda yuqoridagi formula

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = 1$$

ko'rinishini oladi. Bu formula geometrik nuqtai nazardan OX o'q *f*(x) funktsiya va x=*a*; x=b to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzi 1 ga tengligini bildiradi.

Uzluksiz tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalari.

Ta'rif. Mumkin bo'lgan qiymatlari [*a*;b] kesmaga tegishli bo'lgan X uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilishi deb,

$$M(X) = \int_{a}^{b} xf(x)dx$$

aniq integralga aytiladi.

Agar mumkin bo'lgan qiymatlar butun X o'qqa tegishli bo'lsa, u holda

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Bu o'rinda hosmas integral absolyut yaqinlashuvchi, ya'ni

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)dx$$

integral mavjud deb faraz qilinadi.

Ta'rif. Uzluksiz tasodifiy miqdorning dispersiyasi deb uning chetlanishi kvadratining matematik kutilishiga aytiladi.

Agar mumkin bo'lgan qiymatlar [*a*;b] kesmaga tegishli bo'lsa u holda

$$D(X) = \int_{a}^{b} (x - M(X))^2 f(x)dx$$

agar OX o'qqa tegishli bo'lsa,

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx$$

Misol. Ushbu taqsimot funktsiya bilan berilgan X tasodifiy miqdorning matematik kutilishi va dispersiyasini toping.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Echish:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1, & 0 < x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

Matematik kutilishini topamiz:

$$M(X) = \int_0^1 x \cdot 1 \cdot dx = \frac{x^2}{2} \int = \frac{1}{2}$$

Dispersiyani topamiz:

$$Д(X) = \int_0^1 x^2 1dx - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{x^3}{3} \int_0^1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

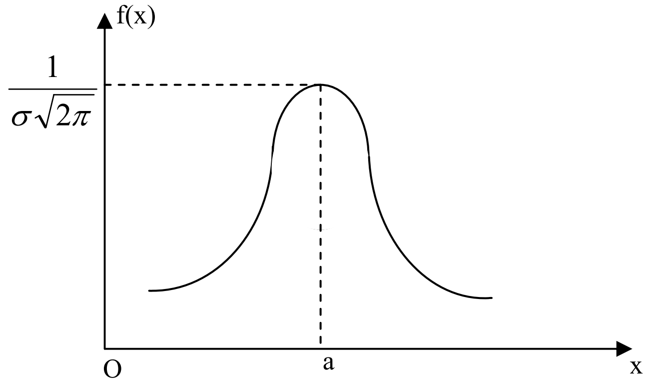
Normal taqsimot qonuni.

Normal taqsimot deb,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)}{2\sigma^2}}$$

zichlik funktsiya bilan beriladigan uzluksiz tasodifiy miqdor taqsimotiga aytiladi.

Bu zichlik funktsiya grafigining sxematik chizmasi quyidagi ko’rinishga ega:



Ko’rinib turibdiki, normal taqsimot ikkita parametr:*a* va σ bilan aniqlanadi. Normal taqsimot berilish uchun shu ikkita parametrning berilish kifoya. Bu parametrning ehtimoliy ma’nosi quyidagicha: *a* parametr normal taqsimotning matematik kutilishiga, σ -o’rtacha kvadratik chetlanishiga teng. Darhaqiqat

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-a)}{2\sigma^2}}dx$$

Yangi $Z=\frac{x-a}{\sigma}$ o’zgaruvchi kiritamiz.

Bundan $X=\sigma z+a \Rightarrow dx=\sigma dz$

U holda,

$$M(X)=\frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma ze^{-\frac{z^2}{2}}dz+\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz=0+\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}=a$$

Shunday qilib, M(X)=*a*, ya’ni normal taqsimotning matematik kutilishi *a* parametrga teng. Xuddi shunga o’xshash, σ (X)= σ ekanligini ko’rsatish qiyin emas.

1-eslatma. Umumiy normal taqsimot deb, ixtiyoriy *a* va σ (σ>0) parametrli normal taqsimotga aytiladi.

Normalangan normal taqsimot deb, *a*=0 va σ=1 parametrli normal taqsimotga aytiladi. Masalan, X *a* va σ parametrli normal tasodifiy miqdor bo’lsa, u holda U=$\frac{x-a}{\sigma}$ almashtirish bilan tasodifiy miqdor normal miqdor bo’ladi, shu bilan birga M(U)=0, σ(U)=1. Normalangan taqsimotning zichlik funktsiyasi

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Bu funktsiyaning qiymatlari jadvalari ehtimollar nazariyasiga oid ko’plab adabiyotlarda keltirilgan.

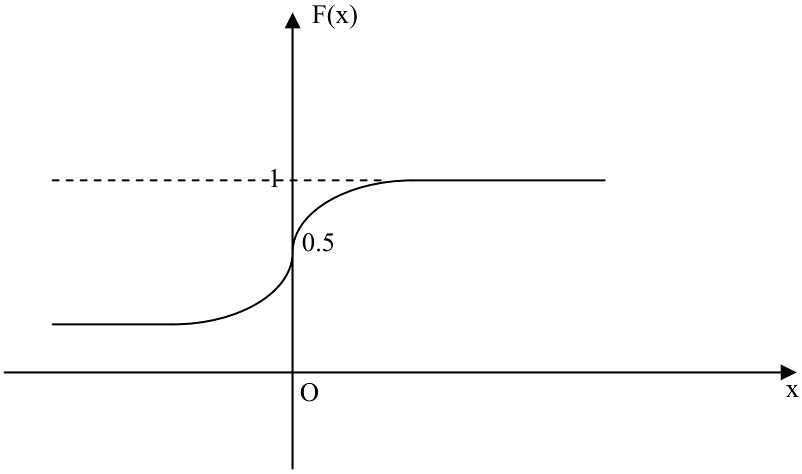
2-eslatma. Umumiy normal taqsimotning taqsimot funktsiyasi deb,

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}}$$ funktsiyaga,

normalangan normal tasodifiy miqdorning taqsimot funktsiyasi deb,

$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{Z^2}{2}} dz$$ funktsiyaga aytiladi.

F_0 (x) funktsiyaning maxsus qiymatlari jadvali tuzilgan bo'lib, uning grafigi quyidagicha shaklga ega:



Ko'rsatkichli taqsimot.

Ko'rsatkichli (eksponentsial) taqsimot deb,

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x>0\end{cases}$$

(bu erda λ>0 - o'zgarmas musbat kattalik) zichlik funktsiya bilan tavsiflanadigan ehtimollar taqsimotiga aytiladi.

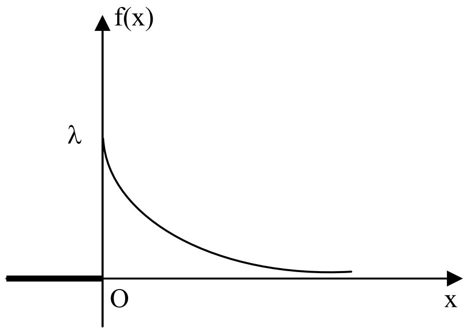
Ko'rsatkichli taqsimotning taqsimot funktsiyasini topamiz

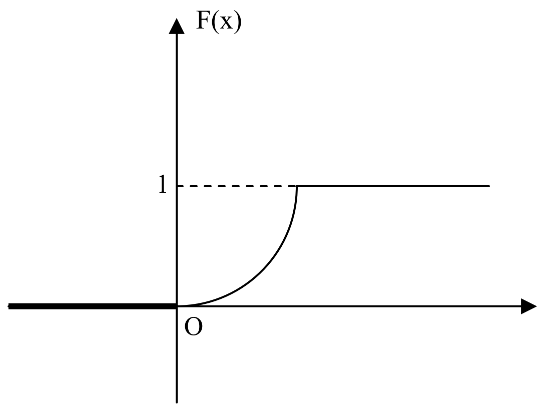
$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0\cdot dx+\lambda\int_{0}^{x} e^{-\lambda x}dx=1-e^{-\lambda x}$$

Demak,

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-\lambda x}, & x>0\end{cases}$$

Ko'rsatkichli taqsimotning zichlik funktsiyasi va taqsimot funktsiyasi grafiklari quyidagi chizmada tasvirlangan.





Ko'rsatkichli taqsimotning matematik kutilishi, dispersiya va o'rtacha kvadratik chetlanishi mos ravishda quyidagicha:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda};\ D(X)=\frac{1}{\lambda^2};\ \sigma(X)=\frac{1}{\lambda};$$

Ko'rsatkichli qonun bo'yicha taqsimlangan uzluksiz tasodifiy miqdorga misol bo'lib, eng oddiy oqim ikkita ketma-ket hodisasining ro'y berishi orasidagi vaqt taqsimoti xizmat qilish mumkin.

Markaziy limit teorema haqida tushuncha.

Shu paytga qadar biz ko'p sondagi tajribalarning o'rtacha xarakteristikalarining turg'unligi haqida, aniqrog'i ushbu

$$S_n = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$$

ko'rinishdagi yig'indilarning turg'unligi haqida gapirib keldik. Ammo, S_n miqdorning tasodifiy miqdor ekanligini va shuning uchun ham uning biror taqsimot qonuniga ega bo'lishini unitmaslik lozim. Ana shu ajoyib fakt boshqa bir teoremalar gruppasining mazmunini tashkil qiladiki, ular markaziy limit teoremalar deb atalgan umumiy nom bilan birlashtiriladi: juda umumiy bo'lgan shartlarda S_n uchun taqsimot qonun normal taqsimot qonunga yaqin bo'ladi.

S_n miqdor ushbu

yig'indidan o'zgarmas $X_1 + X_2 + ... + X_n$

ko'paytuvchigagina farq qilganligi uchun markaziy limit teoremaning mazmunini umumiy holda quyidagicha aytish mumkin: ko'plab sondagi erkli tasodifiy miqdorlar yig'indisining taqsimoti juda umumiy bo'lgan shartlar bajarilganda normal taqsimotga yaqin bo'ladi.

Ana shu bilan normal taqsimot qonunining muhim roli aniqlanadi, chunki ko'p sondagi tasodifiy miqdorlarning yig'indisi bilan ehtimollar nazariyasining o'zida ham, shuningdek, uning ko'plab tadbiqlarida ham ish ko'rishga to'g'ri keladi.

Quyidagi ikkita savolga javob berish orqali markaziy limit teoremaning ma'nosini yanada oydinlashtiramiz.

1. $X_1 + X_2 + ... + X_n$ yig'indining taqsimot qonuni normal taqsimot qonunga yaqin deyilgan tasdiqda qanday aniq ma'no yotadi?

2. Qanday shartlar bajarilganda bu yaqinlik o'rinli bo'ladi?

Bu savolga javob berish maqsadida ko'p sondagi tasodifiy miqdorlarni emas, balki tasodifiy miqdorlarning ushbu

$$X_1 + X_2 + ... + X_n + ...$$

cheksiz ketma-ketligini qaraymiz.

Ulardan

$$S_n^{,} = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad (n=1,2,3,\ldots) \quad (1)$$

ko'rinishdagi «xususiy» yig'indilarni tuzamiz. $S_n^{,}$ tasodifiy miqdorlarning har biridan matematik kutilish 0 ga, dispersiyasi 1 ga teng bo'lgan ushbu

$$S_n^{,,} = \frac{S_n^{,} - M(S_n^{,})}{\sqrt{D(S_n^{,})}} \quad (2)$$ ko'rinishdagi

«normallashtirilgan tasodifiy miqdorga o'tamiz.» birinchi savolga javob shundan iboratki, qandaydir shartlar bajarilganda $S_n^{,}$ tasodifiy miqdorning taqsimoti n ning o'sishi bilan matematik kutilishi 0 ga dispersiyasi 1 ga teng bo'lgan normal taqsimot qonunga tabiiy ma'noda quyidagicha yaqinlashadi:

a va b, *a*<b sonlar qanday bo'lmasin

$$\lim_{n\to\infty} P(a \le S_n^{,} \le b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{X^2}{2}} dz \quad (3)$$

bo'ladi $S_n^{,}$ tasodifiy miqdorning taqriban normal taqsimotga ega bo'lishi faktidan $S_n^{,}$ miqdorning ham taqriban normal taqsimlanishining kelib chiqishi tushunarlidir, chunki taqsimotning normal harakteri tasodifiy miqdorlar ustidagi har qanday chiziqli almashtirish bajarilganda ham saqlanadi. $\mathbf{X_1, X_2, X_3, \ldots}$ tasodifiy miqdorlarga qo'yiladigan shartlar masalasiga kelganda esa quyidagi muloxazalarni aytish mumkin. (1) tenglikdan ushbu

$$\mathbf{M(S_n^{,}) = M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}$$

tenglikni ayirib

$$\boldsymbol{S_n^0 = X_1^0 + X_2^0 + \ldots + X_n^0}$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu erda X^0 – odatdagidek X tasodifiy miqdor o'zining matematik kutilishidan chetlanishini belgilaydi.

(3) limit munosabatning o'rinli bo'lishi uchun kerak bo'lgan shartni 1901 yilda rus matematigi A. M. Lyapunov beradi.

U quyidagidan iborat:

Aytaylik, berilgan X_i (i=1,2,3,. . .) tasodifiy miqdorning har biri uchun ushbu

$$d_i = M\left[(X_i^0)^2\right] \text{ va } K_i = \left[\left|X_i\right|^3\right]$$

sonlarning ikkalasi ham chekli bo'lsin. (d_i; X_i tasodifiy miqdorning dispersiyasi, K_i esa uning «uchinchi tartibli markaziy momenti» deb ataluvchi momenti ekanini eslatib o'tamiz)

Agar $n \to \infty$ da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right)^{3/2}} = 0$$

bo'lsa, u holda X_1, X_2, X_3,. . ketma-ketlik Lyapunov shartini qanoatlantiradi deb aytamiz.

Endi biz A.M. Lyapunov formasidagi markaziy limit teoremani tavsiflash imkoniyatiga egamiz.

Teorema. (isbotsiz). Agar X_1, X_2, X_3,. . erkli tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi Lyapunov shartini qanoatlantirsa, u holda (3) limit munosabat o'rinli bo'ladi.

O'z- o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Taqsimot funktsiya va zichlik funktsiyasi ta'riflarini keltiring.
2. Diskret tasodifiy miqdor uchun taqsimot funktsiya, zichlik funktsiyasi tushunchalari o'rinlimi?
3. Taqsimot funktsiya xossalarini keltiring.
4. Zichlik funktsiya xossalari keltiring.
5. Amalda ko'p uchraydigan uzluksiz taqsimotlarga misollar keltiring.
6. Normal taqsimot qonun parametrlarining ehtimoliy ma'nosini ayting.

Tayanch iboralar

Taqsimot funktsiya, taqsimotning zichlik funktsiyasi, uzluksiz tasodifiy miqdor, normal taqsimot qonuni, ko'rsatkichli taqsimot, markaziy limit teorema.

Mustaqil echish uchun masalalar.

1. X uzluksiz tasodifiy miqdorning

$$f(x)=\begin{cases} 0, \ \tilde{o} \le \frac{\pi}{6} \ \textit{булса}, \\ 3\sin 3x, \ \frac{\pi}{6} < x \le \frac{\pi}{3} \textit{булса}, \\ 0, \ x > \frac{\pi}{6} \ \textit{булса}, \end{cases}$$

zichlik funktsiyasi berilgan. F(x) taqsimot funktsiyani toping.

2. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasi (0;1) intervalda f(x)=carctgx tenglik bilan berilgan; Bu intervaldan tashqarida f(x)=0 ga. S o'zgarmas parametrni toping.

3. X uzluksiz tasodifiy miqdor ko'rsatkichli qonun bo'yicha taqsimlangan:

$$\begin{cases} 0, \ \textit{агар} \ \ x < 0 \ \textit{булса} \\ 2e^{-2x}, \textit{агар} \ \ x \ge 0, \textit{булса} \end{cases}$$

Sinov natijasida X tasodifiy miqdorning (0,3;1) oraliqqa tushishi ehtimolini toping.

4. X tasodifiy miqdor ehtimollar taqsimotining a=0, b=2 parametrli normal qonuniga bo'ysunsin. X tasodifiy miqdorning (-2;3) oraliqqa tushish ehtimolini aniqlang.

Adabiyotlar

[1] (111-147)

[2] (103-132)

[3] (37-62)

[4] (58-69)

[5](256-261) (271-279)

[7] (46-51)

[12] (313-322)

9-§. Katta sonlar qonuni. Chebishev tengsizligi. Chebishev teoremasi. Bernulli teoremasi. Katta sonlar qonunining amaliy ahamiyati.

Ehtimollar nazariyasi va uning tatbiqlarida ko'pincha etarlicha katta sondagi tasodifiy miqdorlar yig'indisidan iborat miqdorlar bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi.

Har bir qo'shiluvchi tasodifiy miqdorning sinash natijasida qanday qiymat qabul qilishini avvaldan aytib bo'lmaydi va shu sababli katta sondagi tasodifiy miqdorlar yig'indisining taqsimot qonunini bevosita hisoblab aniqlash, odatda ancha qiyinchiliklar bilan bog'liq. Lekin, shunday bo'lsada nisbatan keng shartlar ostida ko'p sondagi tasodifiy miqdorlar yig'indisining tasodifiylik xarakteri yo'qolib, u qonuniyatga aylanib qolar ekan.

Amaliyot uchun juda ko'p tasodifiy sabablarning birgalikdagi ta'siri tasodifga deyarli bog'liq bo'lmaydigan natijaga olib keladigan shartlarni bilish juda muhimdir, chunki bu tasodifiy hodisalarning qanday rivojlanishini oldindan ko'ra bilishga imkon beradi. Bunday shartlar umumiy nomi **"Katta sonlar qonuni"** deb ataluvchi teoremalarda keltiriladi. Bular qatoriga Chebishev va Bernulli teoremalari mansub bo'lib, Chebishev teoremasi katta sonlar qonunining eng umumiysi, Bernulli teoremasi esa eng sodda holidir.

Dastlab quyidagi ta'rifni keltiramiz.

***Ta'rif*:** Agar X_1, X_2, … X_n tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi mos ravishda $M(X_1)$, $M(X_2)$… $M(X_n)$ matematik kutilishlarga ega bo'lib, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun $n\to\infty$ da

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+...+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon\right)\to 1$$

munosabat bajarilsa, berilgan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi katta sonlar qonuniga bo'ysunadi deyiladi.

Katta sonlar qonuniga oid teoremalarni isbotlashda Chebishev tengsizligidan foydalaniladi.

Chebishev tengsizligi. Ixtiyoriy ε>0 son uchun

$$P\left(|X-M(X)|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{Д(X)}{\varepsilon^2}$$

yoki

$$P\left(|X-M(X)|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{Д(X)}{\varepsilon^2}$$

Amaliyot uchun Chebishev tengsizligining ahamiyati cheklangan bo'lib, u ba'zan trivial baho beradi. Chebishev tengsizligining nazariy ahamiyati juda kattadir.

Chebishev teoremasi. Agar X_1, X_2, … X_n juft-juft erkli tasodifiy miqdorlar bo'lib, ularning dispersiyalari yuqoridan tekis chegaralangan (ya'ni D $(X_i)<S$, i=1, 2,….) bo'lsa, u holda musbat ε son har qancha kichik bo'lganda ham

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+...+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon\right)=1$$

munosabat bajariladi.

Shunday qilib, Chebishev teoremasi bunday da'vo qiladi: agar dispersiyalari chegaralangan tasodifiy miqdorlarni ko'p sondagisi qaralayotgan bo'lsa, u holda bu tasodifiy miqdorlar arifmetik o'rtacha qiymatining ularning matematik kutilishlari arifmetik o'rtacha qiymatidan chetlanishi absolyut qiymat bo'yicha istalgancha kichik bo'lishidan iborat hodisani deyarli muqarrar deb hisoblash mumkin.

Teorema isboti. Chebishev tengsizligini

$$\overline{X}=\frac{x_1+x_2+....+x_n}{n}$$

tasodifiy miqdorga nisbatan qo'llaymiz. Matematik kutilish, dispersiyaning xossalaridan foydalanib va teorema shartlariga ko'ra quyidagilarni hosil qilamiz.

$$P\left(|\overline{X}-M(\overline{X})|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{Д(X)}{\varepsilon^2}\qquad (*)$$

$$M(\overline{X}) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_1\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_1)$$

$$D(\overline{X}) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_1\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_1) \le \frac{nc}{n^2} = \frac{c}{n}$$

Bularni (*) tengsizlikka qo'ysak

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_1)\right| < \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} D(X_1)}{n^2\varepsilon^2} \ge 1 - \frac{C}{n\varepsilon}$$

va ixtiyoriy hodisa ehtimoli 1 dan katta emasligini hisobga olsak;

$$1 - \frac{C}{n\varepsilon^2} \le P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_1 - 1\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_1)\right| < \varepsilon\right) \le 1$$

Bu munosabatda n→∞ da limitga o'tsak, teorema tasdig'i kelib chiqadi.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_1)\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Teorema isbotlandi.

Chebishev teoremasida biz tasodifiy miqdorlarning matematik kutilishlari har xil deb faraz qilgan edik. amaliyotda esa tasodifiy miqdorlar ko'pincha bir xil a=M(X_1) matematik kutilishga va D (X_1) dispersiyaga ega bo'ladi. Bu holda,

$$M(\overline{X}) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_1\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i) = \frac{1}{n}\cdot na = a$$

bo'lishini tushunish qiyin emas.

Qaralayotgan xususiy holda, Chebishev teoremasi quyidagicha ta'riflanadi.

Teorema. Agar X_1, X_2, … X_n tasodifiy miqdorlar juft – juft erkli bo'lib, bir xil a matematik kutilishga va σ^2 chekli dispersiyaga ega bo'lsa, u holda ixtiyoriy ε>0 son berilganda ham

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Aytaylik, n ta erkli sinash o'tkazilayotgan bo'lib, ularning har birida A hodisaning ro'y berish ehtimoli r ga teng bo'lsin. Hodisa ro'y berishining nisbiy chastotasi qanday bo'lishini oldindan ko'ra bilish mumkinmi? Bu savolga Yakov Bernulli tomonidan isbotlangan quyidagi teorema ijobiy javob beradi.

Bernulli teoremasi. Agar n ta erkli sinashning har birida A hodisaning ro'y berish ehtimoli r o'zgarmas va sinashlar soni etarlicha katta bo'lsa, u holda hodisa ro'y berish nisbiy chastotaning r ehtimoldan chetlanishi absolyut qiymat bo'yicha istalgancha kichik bo'lish ehtimoli birga istalgancha yaqin bo'ladi.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Isbot. A hodisa ro'y berishining chastotasi μ_n ni quyidagicha ifodalash mumkin.

$$\mu_n = \mathbf{X_1+X_2+ \dots +X_n}$$

Bunda X_i – xodisaning i- sinashdagi ro'y berish sonini ifodalovchi tasodifiy miqdordir. $\mathbf{X_1, X_2, \dots, X_n}$ tasodifiy miqdorlar erkli bo'lib, bir xil taqsimot qonuniga egadir. Ya'ni

$$\mathbf{X_1: 0\ 1\ X_2: 0\ 1\ , \dots , X_n: 0\ 1}$$

$$\mathbf{R: q\ p\ P: q\ p, \dots , P: q\ p}$$

Bu tasodifiy miqdorlar uchun

$$\mathbf{M\ (X_1)=M(X_2)=\dots=M(X_n)=r,\ D(X_i)=pq} \le \frac{1}{4}$$

ekanligini tushunish qiyin emas.

$$\mathbf{M\ (\mu_n)=M(X_1 + X_2 + \dots + X_n)= M\ (X_1)+M(X_2)+\dots+M(X_n)=nr}$$

va $M\left(\frac{\mu_n}{n}\right) = p$ ekanligini hisobga olib, teorema isbotini keltirib chiqaramiz.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum X_i - p\right| < \varepsilon\right) = 1`$$

Qaralayotgan holda Chebishev teoremasining barcha shartlari bajariladi. Teorema isbotlandi.

Bernulli teoremasi sinashlar soni etarlicha katta bo'lganda nisbiy chastota nima uchun turg'unlik xossasiga ega bo'lishini tushuntiradi va ehtimolning statistik ta'rifini asoslaydi.

Chebishev teoremasining (yoki katta sonlar qonunining) mohiyati bunday: ayrim olingan erkli tasodifiy miqdorlar o'z matematik kutilishlaridan ancha farq qiladigan qiymatlar qabul qilsa-da, etarlicha katta sondagi tasodifiy miqdorlarning arifmetik o'rtacha qiymati katta ehtimollik bilan tayin o'zgarmas songa, chunonchi $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)$ songa yaqin qiymatlarni qabul qiladi.

Boshqacha qilib aytganda, ayrim tasodifiy miqdorlar anchagina sochilgan bo'lishi mumkin, lekin ularning arifmetik o'rtacha qiymati kam tarqoq bo'ladi.

Shunday qilib, har bir tasodifiy miqdor mumkin bo'lgan qiymatlardan qaysinisini qabul qilishini avvaldan aytish mumkin bo'lmasada, katta sondagi tasodifiy miqdorlar yig'indisining qanday qiymat qabul qilishini oldindan ko'ra bilish mumkin.

Katta sonlar qonuniga ko'ra, etarlicha katta sondagi erkli tasodifiy miqdorlarning arifmetik o'rtacha qiymati tasodifiylik xarakterini yo'qotadi. Bu esa quyidagicha izoxlanadi: har bir miqdorning o'z matematik kutilishidan chetlanishi musbat ham, manfiy ham bo'lishi mumkin, ammo arifmetik o'rtacha qiymatda ular o'zaro yo'qolib ketadi.

Chebishev teoremasining amaliy ahamiyatiga doir quyidagi misolni keltiramiz.

Odatda biror fizik kattalikni o'lchash uchun bir necha o'lchashlar o'tkaziladi va ular arifmetik o'rtacha qiymati izlanayotgan o'lcham sifatida qabul qilinadi. Qanday shartlarda bu usulni to'g'ri deb hisoblash mumkin? – degan savolga Chebishev teoremasi javob beradi.

Haqiqatan ham, har bir o'lchash natijalarini $\mathbf{X_1}$, $\mathbf{X_2}$, **…,** $\mathbf{X_n}$ tasodifiy miqdorlar sifatida qaraymiz. Bu tasodifiy miqdorlarga Chebishev teoremasini qo'llasak, quyidagilar bajarilishi kerak:

1. Ular juft-juft erkli;

2. Bir xil matematik kutilishga ega;

3. Dispersiyalari tekis chegaralangan.

Agar har bir o'lchash natijasi qolganlariga bog'liq bo'lmasa, 1-shart bajariladi.

Agar o'lchashlar statistik (bir xil ishorali) xatolarsiz bajarilsa, ikkinchi talab bajariladi. Bu holda hamma tasodifiy miqdorlarning matematik kutilishlari bir xil bo'lib, u haqiqiy o'lchamga teng bo'ladi.

Agar o'lchov asbobi tayin aniqlikni ta'minlay olsa, 3-talab ham bajariladi. Bunda ayrim o'lchashlarning natijalari har xil bo'lsa-da, ularning tarqoqligi chegaralangan bo'ladi.

Agar yuqorida ko'rsatilgan hamma talablar bajarilgan bo'lsa, u holda o'lchash natijalariga Chebishev teoremasini qo'llashga haqlimiz. Bunda etarlicha ko'p sonda o'lchashlar o'tkazilsa, u holda ularning arifmetik o'rtacha qiymati o'lchanayotgan kattalikning haqiqiy qiymatidan istalgancha kam farq qiladi.

Statistikada qo'llanadigan tanlanma usul ham Chebishev teoremasiga asoslangan, bu usulning mohiyati shundan iboratki, unda uncha katta bo'lmagan tasodifiy tanlanmaga asoslanib, barcha tekshirilayotgan ob'ektlar to'plami to'g'risida mulohaza qilinadi.

1-misol. $\mathbf{X_1}$, $\mathbf{X_2}$, **...,** $\mathbf{X_n}$ **-** erkli tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi quyidagicha taqsimot qonuniga ega.

$\mathbf{X_n}$**:**	$-a$	a
r:	$\frac{n+1}{2n+1}$	$\frac{n}{2n+1}$

Berilgan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun Chebishev teoremasi o'rinlimi?

Echish. Chebishev teoremasi shartlarini tekshiramiz:

$$M(X_n) = -a\frac{n+1}{2n+1} + a\frac{n}{2n+1} = -\frac{a}{2n+1};$$

$$D(X_n)=M(X_n^2)-M^2(X_n)=-a\frac{a^2}{(2n+1)^2} < a^2$$