M.SH.NURMANOV, J.A.FAYZIYEV

AMALIY MATEMATIKA 1

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

TOSHKENT DAVLAT IQTISODIYOT UNIVERSITETI

M.SH.NURMANOV, J.A.FAYZIYEV

AMALIY MATEMATIKA 1

(Kredit-modul bo‘yicha)

(O‘quv qo‘llanma)

Toshkent – 2022

UO‘K: 22.1
KBK 22.1ya73
A 56

M.Sh.Nurmanov, J.A.Fayziyev. – Amaliy matematika 1. (O‘quv qo‘llanma). – T.: «Innovatsion rivojlanish nashriyot-matbaa uyi», 2022 – 294 b.

ISBN 978-9943-8748-5-5

O‘quv qo‘llanmada matematikaning keyingi boblarini, shuningdek iqtisodiyot, statistika va biznes, menejment va axborot texnologiyalari sohasidagi umumiy nazariy maxsus fanlarni muvaffaqiyatli o‘zlashtirish uchun zarur bo‘lgan “Oliy matematika” fanining asosiy bo‘limlari keltirilgan.

UO‘K: 22.1
KBK 22.1ya73

Taqrizchilar:

T.Turg‘unov – Toshkent davlat agrar universiteti “Axborot tizimlari va texnologiyalari” kafedrasi dotsenti;

A.R.Gulyamov –Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti “Amaliy matematika” kafedrasi dotsenti, f-m.f-n.;

Mazkur o‘quv qo‘llanma Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti rektorining 2022 yil 24 oktabrdagi 328-sonli buyrug‘iga asosan nashr qilindi.

ISBN 978-9943-8748-5-5

KIRISH

Ushbu o'quv qo'llanma o'zbek tilida universitet va institutlarda iqtisodchi mutaxassisliklarida o'qitiladigan oliy matematika fanining o'quv dasturiga moslab yozilgan o'quv darslik va qo'llanmalarning kamligini hisobga olgan holda yozilgan. Qo'llanma o'z ichiga aniqlovchilar, matritsalar, chiziqli tenglamalar sistemasi, vektorlar, funksiyalar, limitlar, funksiyaning hosilali va differensiali, bir necha o'zgaruvchining funksiyasining hosilasi va differensiali, aniqmas integral, aniq integral va qatorlarga doir qisqacha nazariy materiallarni, mashqlarni, misol va masalalarini qamrab olgan.

Har bir bobda va *mavzularda yechib ko'rsatilgan misollarni qunt* bilan takroran ishlab har bir o'quvchi mashqda berilgan misollarni mustaqil yechish imkoniyatiga ega bo'ladi.

Bu qo'llanmadan o'quv dasturining hajmi va mazmuniga ko'ra barcha turdagi iqtisodchi talabalar, shuningdek, texnika, qishloq xo'jaligi, pedagogika oliy o'quv yurtlarining ba'zi fakultetlari talabalari qo'shimcha o'quv qo'llanma sifatida to'liq foydalanishlari mumkin.

I BOB. MATRITSA VA UNING USTIDA AMALLAR

Matritsa tushunchasi

$m*n$ ta sondan tuzilgan, quyidagi to'g'ri burchakli jadvalga

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

m ta satrli va n ta ustunli matritsa yoki m×n o'lchamli matritsa deb ataladi.

Matritsaning o'lchami uning satrlari soni va ustunlari soni bilan aniqlanadi. Matritsaning o'lchamini ifodalash uchun $m \times n$ belgi ishlatiladi. Bu belgi matritsaning m ta satr va n ta ustundan tashkil topganini bildiradi. Matritsaning o'zi lotin alifbosining bosh harflaridan biri bilan belgilanadi va uning elementlari jadvali kichik qavsga olinadi. **Masalan,**

3×2 o'lchamli matritsa	*2×3 o'lchamli matritsa*	*2×2 o'lchamli matritsa*
$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix}$

a_{ij} $(i = 1,2,3,\dots,m\, j = 1,2,3,\dots,n)$ sonlar matritsaning elementlari deb ataladi. Elementning birinchi indeksi *i* matritsa elementi turgan satr nomerini, ikkinchi indeksi *j* esa ustun nomerini ko'satadi.

A matritsaning i-satr va j-ustunda joylashgan elementi a_{ij} bilan belgilanadi.

$A = a_{ij}$, $(i = 1,2,3,\dots,m;\ j = 1,2,3,\dots,n)$ yoki

$A = ||a_{ij}||$ $(i = 1,2,3,\dots,m\, j = 1,2,3,\dots,n)$

yozuv A matritsa a_{ij} elementlardan tashkil topganini bildiradi:

$$A = a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix};$$

$$A = \|a_{ij}\| = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{Vmatrix}$$

$1 \times n$ o'lchamli $A = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$ matritsa *satr matritsa* yoki *satr-vektor* deyiladi.

$m \times 1$ o'lchamli

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

matritsa *ustun matritsa* yoki *ustun-vektor* deyiladi.

$n \times n$ o'lchamli maritsa (satrlari soni ustunlari soniga teng, ya'ni $m=n$ matritsa) *n - tartibli kvadrat matritsa* deyiladi.

Kvadrat matritsaning chap yuqori burchagidan o'ng quyi burchagiga yo'nalgan $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elementlaridan tuzilgan diagonaliga uning *bosh diagonali*, o'nq yuqori burchagidan chap quyi burchagiga yo'nalgan $a_{1n}, a_{2(n-1)}, \ldots, a_{n1}$ elementlardan tuzilgan diagonaliga uning *yordamchi diagonali* deyiladi.

Bosh diagonalidan yuqorida (pastda) joylashgan barcha elementlari nolga teng bo'lgan

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \left(A' = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \right)$$

matritsa *yuqoridan uchburchak* (*quyidan uchburchak*) *matritsa* deyiladi.

Bosh diagonalda joylashmagan barcha elementlari nolga teng bo'lgan

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matritsa *diagonal matritsa* deyiladi.

Diagonal matritsalarning xossasi: Ikkita diagonal matritsaning yig'indisi va ko'paytmasi yana diagonal matritsadir.

Barcha elementlari birga teng bo'lgan diagonal matritsa *birlik matritsa* deyiladi va I harfi bilan belgilanadi.

Istalgan n-tartibli A kvadrat matritsa uchun ushbu tenglik o'rinli: $I \cdot A = A \cdot I = A$

Barcha elementlari nolga teng bo'lgan ixtiyoriy o'lchamdagi matritsa *nol matritsa* deyiladi va O harfi bilan belgilanadi.

A matritsada barcha satrlarni mos ustunlar bilan almashtirish natijasida hosil qilingan A^T matritsa A matritsaning *transponirlangan matritsasi* deyiladi: $(a_{ij})^T = (a_{ji})$

Agar $A = A^T$ bo'lsa, A matritsa *simmetrik*, agar $A^T = -A$ bo'lsa, *qiya simmetrik matritsa* deyiladi. Simmetrik matritsaning bosh diagonalga nisbatan simmetrik joylashgan elementlari teng, qiya simmetrik matritsaning bunday elementlari esa qarama-qarshidir. Qiya simmetrik matritsaning barcha diagonal elementlari nolga teng.

Bir xil o'lchamli $A = a_{ij}$ va $B = b_{ij}$ matritsalarning barcha mos elementlari teng, ya'ni $a_{ij} = b_{ij}$ bo'lsa, ular *teng matritsalar* deyiladi va $A = B$ deb yoziladi:

$$\boxed{\begin{array}{c} A = B \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = b_{ij} \\ \text{barcha } i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n} \text{ uchun} \end{array}}$$

Matritsalar ustida amallar: Matritsalar ustidagi asosiy arifmetik amallar – matritsani songa ko'paytirish, matritsalarni qo'shish, ayirish va ularni ko'paytirish amallaridir.

Matritsani songa ko'paytirish:

Ta'rif. $A=(a_{ij})$ *matritsaning* λ *songa ko'paytmasi* deb, elementlari $c_{ij}=\lambda a_{ij}$ kabi aniqlanadigan $C=\lambda A$ matritsaga aytiladi:

$$\boxed{C=\lambda A \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij}=\lambda a_{ij}.} \qquad \lambda\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22}\end{pmatrix}$$

Misol. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -1\end{pmatrix}$ bo'lsin. $3A$ ni toping.

Yechish. $3A=3\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot(-1) & 3\cdot 0 \\ 3\cdot 3 & 3\cdot 4 & 3\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 9 & 12 & -3\end{pmatrix}.$

Matritsani songa ko'paytirish amali ushbu xossalarga ega:

1) kommutativlik xossasi: $\lambda\cdot A = A\cdot\lambda$

2) assotsiativlik xossasi: $(\alpha\cdot B)\cdot A=\alpha\cdot(B\cdot A)$

Matritsalarni qo'shish

Matritsalarni qo'shish va ayirish amallari *bir xil o'lchamli matritsalar* uchun kiritiladi. Bunda yig'indi matritsa qo'shiluvchi matritsalar bilan bir xil o'lchamga ega bo'ladi.

Ta'rif. $A=(a_{ij})$ va $B=(b_{ij})$ *matritsalarning yig'indisi* deb, elementlari $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ kabi aniqlanadigan $C=A+B$ matritsaga aytiladi

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\, a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix} \text{ va } B=\begin{pmatrix} b_{11}\, b_{12} \dots b_{1k} \\ b_{21}\, b_{22} \dots b_{2k} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{m1}\, b_{m2} \dots b_{mk} \end{pmatrix}$$ matritsalar berilgan bo'lsin

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11}\, a_{12}+b_{12} \dots a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21}\, a_{22}+b_{22} \dots a_{2n}+b_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}+b_{m1}\, a_{m2}+b_{m2} \dots a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Misol. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ bo'lsin. $A+B$ ni toping.

Yechish.

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+2 & -1+3 & 4+2 \\ 3+1 & 0+0 & 1+(-2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Matritsalarni qo'shish amali ushbu xossalarga ega:

1⁰. kommutativlik xossasi: $A+B=B+A$

2⁰. assotsiativlik xossasi: $(A+B)+C=A+(B+C)$

3⁰. qo'shish amaliga nisbatan distributivlik xossasi: $\lambda\cdot(A+B)=\lambda A+\lambda B$

4⁰. sonlarni qo'shishga nisbatan distributivlik xossasi: $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A$

Matritsani songa ko'paytirish va matritsalarni qo'shish amalining yuqorida aytilgan xossalari bu amallarning ta'riflari, haqiqiy sonlarni qo'shish va ko'paytirish amallarining kommutativlik va assotsiativlik xossalari hamda ko'paytirishning qo'shishga nisbatan distributuvlik xossasining natijasidir.

Matritsalarni ayirish. Ta'rif. $A=(a_{ij})$ va $B=(b_{ij})$ *matritsalarning ayirmasi* deb $C=A-B=A+(-B)$ matritsaga aytiladi. Bunda C matritsaning elementlari $c_{ij}=a_{ij}+(-b_{ij})=a_{ij}-b_{ij}$ kabi topiladi.

$$\boxed{C=A-B \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}.}$$

$$A-B=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11}\, a_{12}-b_{12} \ldots a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21}\, a_{22}-b_{22} \ldots a_{2n}-b_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}-b_{m1}\, a_{m2}-b_{m2} \ldots a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}$$

Misol.

$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ bo'lsin. $A-B$ ni toping.

Yechish.

$$A-B=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-1 & -3-3 & 2-2 \\ 2-2 & -1-1 & 4-(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Matritsalarni ko'paytirish: A – satr martitsa va B – ustun matritsa bir xil sondagi elementlarga ega bo'lsin deylik. Bunda A satrning B ustunga ko'paytmasi quyidagicha aniqlanadi:

$$AB=(a_{11} \quad a_{12} \quad \ldots \quad a_{1n})\cdot\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ \ldots \\ b_{1n} \end{pmatrix}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+\ldots+a_{1n}b_{1n},$$

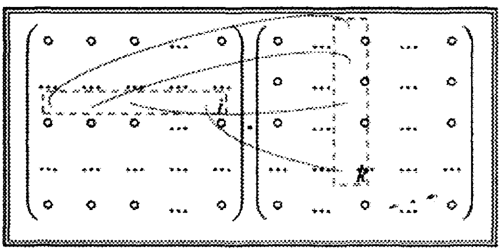
ya'ni ko'paytma matritsalarning mos elementlari ko'paytmalarining yig'indisiga teng bo'ladi.

Matritsalarni ko'paytirishning bu qoidasi *satrni ustunga ko'paytirish qoidasi* deb yuritiladi.

Ikki matritsani ko‘paytirish amali *moslashtirilgan matritsalar* uchun kiritiladi. A matritsaning ustunlari soni B matritsaning satrlari soniga teng bo‘lsa, A va B *matritsalar moslashtirilgan* deyiladi.

Ta’rif. $m\times p$ o‘lchamli $A=(a_{ij})$ *matritsaning* $p\times n$ o‘lchamli $B=(b_{jk})$ *matritsaga ko‘paytmasi* AB deb, c_{ik} elementi A matritsaning i-satrini B matritsaning j-ustuniga satrni ustunga ko‘paytirish qoidasi bilan, ya’ni $c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\ldots+a_{ip}b_{pk}=\sum_{r=1}^{p}a_{ir}b_{rk},\ i=1,\ldots,m,\ k=1,\ldots,n$

(qo‘shiluvchlari quyidagi sxemada keltirilgan) kabi aniqlanadigan $m\times n$ o‘lchamli $C=(c_{ik})$ matritsaga aytiladi.



Misollar. Berilgan matritsalarni ko‘paytiring

1. $(2\quad 4)\cdot\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=(2\cdot 3+1\cdot 4)=(10);$

2. $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\cdot(3\quad 4)=\begin{pmatrix}2\cdot 3 & 2\cdot 4\\-1\cdot 3 & -1\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 8\\-3 & -4\end{pmatrix};$

3. $\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 6\\7 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 5+2\cdot 7 & 1\cdot 6+2\cdot 8\\3\cdot 5+4\cdot 7 & 3\cdot 6+4\cdot 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19 & 22\\43 & 50\end{pmatrix};$

4. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 3+1\cdot(-1) & 2\cdot 2+1\cdot 0 & 2\cdot 4+1\cdot 3 \\ -3\cdot 3+4\cdot(-1) & -3\cdot 2+4\cdot 0 & -3\cdot 4+4\cdot 3 \\ 0\cdot 3+2\cdot(-1) & 0\cdot 2+2\cdot 0 & 0\cdot 4+2\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 11 \\ -13 & -6 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

5.

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 2+3\cdot 1+(-1)\cdot 3 & 2\cdot 1+3\cdot 3+(-1)\cdot(-1) & 2\cdot 5+3\cdot(-2)+(-1)\cdot 3 \\ 1\cdot 2+(-2)\cdot 1+3\cdot 3 & 1\cdot 1+(-2)\cdot 3+3\cdot(-1) & 1\cdot 5+(-2)\cdot(-2)+3\cdot 3 \\ 3\cdot 2+1\cdot 1+1\cdot 3 & 3\cdot 1+1\cdot 3+1\cdot(-1) & 3\cdot 5+1\cdot(-2)+1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 1 \\ 9 & -8 & 18 \\ 10 & 5 & 16 \end{pmatrix}$$

Agar A matritsaning satrlarini $A_1, A_2, ..., A_m$ bilan va B matritsaning ustularini $B_1, B_2, ..., B_n$ bilan belgilansa, u holda matritsalarni ko‘paytirish qoidasini quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$C = AB = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ ... \\ A_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & ... & B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 & ... & A_1B_n \\ A_2B_1 & A_2B_2 & ... & A_2B_n \\ ... & ... & ... & ... \\ A_mB_1 & A_mB_2 & ... & A_mB_n \end{pmatrix}.$$

Matritsalarni ko‘paytirishda A^2 yozuv ikkita bir xil matritsani ko‘paytmasini bildiradi: $A^2 = A\cdot A$ Shu kabi $A^3 = A\cdot A\cdot A\cdot ...\cdot$ $A^n = \underbrace{A\cdot A\cdot ...\cdot A}_{n \text{ marta}}$.

Misol. $f(x) = 2x - x^2 + 5$ va $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ bo‘lsin. $f(A)$ ni toping.

Yechish. Matritsa ko‘rinishdagi $f(A)$ funksiyaga o‘tishda λ sonli qo‘shiluvchi λI ko‘paytma bilan almashtiriladi, bu yerda I - birlik matritsa

$$f(A)=2A-A^2+5I=2\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2&-2\\0&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-3\\0&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&1\\0&5\end{pmatrix}.$$

Umuman olganda, matritsalarni ko'paytirish nokommutativ, ya'ni $AB\neq BA$. Masalan, $1\times n$ o'lchamli A matritsaning $n\times 1$ o'lchamli B matritsaga AB ko'paytmasi sondan, ya'ni 1×1 o'lchamli matritsadan iborat bo'lsa, BA ko'paytmasi n - tartibli kvadrat matritsa bo'ladi.

Bir xil tartibli A va B kvadrat matritsalar uchun $AB=BA$ bo'lsa, A va B matritsalar *kommutativ matritsalar*, $AB-BA$ ayirma esa *kommutator* deyiladi.

Misol. $A=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix}3&5\\4&-1\end{pmatrix}$ matritsalarning kommutatorini toping.

Yechish. $AB=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&5\\4&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot3+1\cdot4&2\cdot5+1\cdot(-1)\\0\cdot3+3\cdot4&0\cdot5+3\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&9\\12&-3\end{pmatrix}$;

$$BA=\begin{pmatrix}3&5\\4&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot2+5\cdot0&3\cdot1+5\cdot3\\4\cdot2+(-1)\cdot0&4\cdot1+(-1)\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&18\\8&1\end{pmatrix};$$

$$AB-BA=\begin{pmatrix}10&9\\12&-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6&18\\8&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-9\\4&-4\end{pmatrix}.$$

Matritsalarni ko'paytirish amali ushbu xossalarga ega:

1°. A matritsa $m\times n$ o'lchamli va B,C matritsalar $n\times p$ o'lchamli bo'lsa, $A(B+C)=AB+AC$ bo'ladi;

2°. A matritsa $m\times n$ o'lchamli va B,C matritsalar $n\times p$ o'lchamli bo'lsa, $A(B+C)=AB+AC$ bo'ladi;

3°. A,B,C matritsalar mos ravishda $m\times n$, $n\times p$, $p\times q$ o'lchamli bo'lsa, $A(BC)=(AB)C$ bo'ladi;

4°. (4) A,B,I,O moslashtirilgan matritsalar va λ,μ skalyar sonlar bo'lsa, u holda:

1) $(\lambda A)(\mu B)=(\lambda\mu)(AB)$; 2) $A(\lambda B)=(\lambda A)B=\lambda(AB)$;

3) $AI=IA=A$; 4) $AO=OA=O$;

5) $(AB)^T = B^T A^T$.

5°. $A, I, O - n$-tartibli kvadrat matritsalar va p, q manfiy bo'lmagan butun sonlar bo'lsa, u holda:

1) $A^p A^q = A^{p+q}$; 2) $(A^p)^q = (A)^{pq}$; 3) $A^1 = A$; 4) $A^0 = I$.

Isboti. Xossalardan ayrimlari ta'riflar yordamida isbotlanadi va ayrimlarining to'g'riligiga misollarni yechish orqali ishonch hosil qilish mumkin.

3°-xossani to'g'riligiga misol yechish orqali ishonch hosil qilamiz.

$A = (1 \quad 2)$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ matritsalar berilgan bo'lsin.

U holda

$$BC = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 12 & 1 \\ 20 & 0 & 8 \end{pmatrix};$$

$$A(BC) = (1 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} -11 & 12 & 1 \\ 20 & 0 & 8 \end{pmatrix} = (29 \quad 12 \quad 17);$$

$$AB = (1 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = (3 \quad 7);$$

$$(AB)C = (3 \quad 7) \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} = (29 \quad 12 \quad 17).$$

Demak, $A(BC) = (AB)C$.

II BOB. KVADRAT MATRITSANING DETERMINANTI

1.1. 2-va 3-tartibli determinantlar
1.2. Minor va algebraik to'ldiruvchi
1.3. Determinant xossalari
1.4. Yuqori tartibli determinantlarni hisoblash

Ikkinchi tartibli determinantlar. a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} sonlar berilgan bo'lsin. Bu sonlardan tuzilgan a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} ifoda(son) **ikkinchi tartibli determinant** deb ataladi va

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix}$$

ko'rinishida yoziladi.

Demak, **ta'rifga** binoan

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}\, a_{21}\,. \quad (1)$$

a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} sonlar determinantning **elementlari** deb ataladi.

Ikkinchi tartibli determinantlar ikkita gorizantal va ikkita vertikal qatorlarga ega. Gorizantal qatorlarni **satrlar**, vertikal qatorlarni **ustunlar** deb ataymiz. Satrlar yuqoridan pastga qarab, ustunlar esa chapdan o'ngga qarab sanaladi. Ikkinchi tartibli determinantda a_{11} a_{12} birinchi satrni, a_{21}, a_{22} ikkinchi satrni $\begin{smallmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{smallmatrix}$ birinchi ustunni, $\begin{smallmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{smallmatrix}$ esa ikkinchi ustunni tashkil etadi. Shuningdek, a_{11} a_{22} ikkinchi tartibli determinantning **bosh diagonalini** a_{12} a_{21} uning **yon (yordamchi) diagonalini** tashkil etadi. Shunday qilib, ikkinchi tartibli determinantni hisoblash uchun bosh diagonal elementlari ko'paytmasidan yon diagonal elementlari ko'paytmasini ayirish lozim ekan.

1-misol. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 2\cdot(-4) - 3\cdot 1 = -8 - 3 = -11\,.$

2-misol. $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-3) \cdot 4 = 10 + 12 = 22$.

3-misol. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{vmatrix}$ $=-cos^2\alpha-sin^2\alpha=-(cos^2\alpha+sin^2\alpha)=-1$.

Uchinchi tartibli determinantlar.

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} a_{23} \\ a_{32} a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} a_{23} \\ a_{31} a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} a_{22} \\ a_{31} a_{32} \end{vmatrix}$$

ifoda yordamida aniqlanadigan son **uchinchi tartibli determinant** deyiladi va

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix}$$

kabi belgilanadi. Bu yerdagi a_{11}, a_{12},..., a_{33} sonlar ma'lum sonlar.

Uchinchi tartibli determinant uchta satr, uchta ustun va to'qqizta elementlarga ega. **Ta'rifga binoan:**

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} a_{23} \\ a_{32} a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} a_{23} \\ a_{31} a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} a_{22} \\ a_{31} a_{32} \end{vmatrix} \quad (2)$$

4-misol. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix}$ hisoblansin.

Yechish. (2) formulaga binoan

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 6-20-2(-2-8)+3(-5-6)=$$

$$=-14+20-33=20-47=-27.$$

Determinantning har bir elementi ikki xonali indeksga ega bo'lib ulardan birinchisi shu element turgan satrning nomerini, ikkinchisi shu element turgan ustunning nomerini bildiradi. Masalan a_{32} element uchinchi satr va ikkinchi ustunda turadi. a_{11} a_{22} a_{33} uchinchi tartibli determinantning bosh diagonalini, $a_{13}a_{22}a_{31}$ uning **yon diagonalini** tashkil etadi.

Yuqori tartibli matritsaning determinanti

Kvadrat matritsa uchun shu matritsaning elementlaridan tuzilgan n - tartibli determinantni hisoblash mumkin. Bu determinant $det\, A$ yoki $|A|$ orqali belgilanadi:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (3)$$

Laplas teoremasi: Istalgan i va j lar uchun

$$\sum_{s=1}^{n} a_{is} A_{is} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj} = |A| \qquad i = \overline{1,n}; \qquad j = \overline{1,n}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

5-misol Berilgan determinantni to'rtinchi satr elementlari bo'yicha yoyib hisoblang.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -5 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

Yechish.

1) To'rtinchi satr elementlari bo'yicha yoyib yechamiz:

$$|A| = a_{41}A_{41} + a_{42}A_{42} + a_{43}A_{43} + a_{44}A_{44} = -a_{41}M_{41} + a_{42}M_{42} - a_{43}M_{43} + a_{44}M_{44} =$$

$$= -\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -5 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 546$$

2) Uchinchi ustun elementlarini nolga aylantirish usuli bilan hisoblaymiz:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -5 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 17 & -10 & 0 & 6 \\ -5 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 4 \\ -19 & 17 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 17 & -10 & 6 \\ -3 & -2 & 4 \\ -19 & 17 & -6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 17 & -10 & 6 \\ -3 & -2 & 4 \\ -2 & 7 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} -10 & 6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 17 & 6 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 2(-40+12)+7(68+18)=546$$

Mustaqil yechish uchun mashqlar:

1. $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 & 1 \\ 13 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 4 & -7 \\ 5 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -8 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ -5 & 1 & 10 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & -5 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & -4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$ 6. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 6 & -2 & 9 & 8 \end{vmatrix}$

Minor va algabraik to‘ldiruvchi.

Determinantni biror elementining **minori** deb, determinantdan bu element turgan satr va ustunni o‘chirishdan hosil bo‘lgan determinantga aytiladi. a_{ik} (i,k=1,2,3) elementning minori M_{ik} kabi belgilanadi. Uchinchi tartibli determinant elementlarining minorlari ikkinchi tartibli determinant bo‘ladi. Masalan:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix}$$

determinant a_{12} elementining minori $M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} a_{23} \\ a_{31} a_{33} \end{vmatrix}$ son, a_{23} elementining minori $M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{31} a_{32} \end{vmatrix}$ son bo‘ladi. Chunki M_{12} ni topish uchun Δ determinantning birinchi satri va ikkinchi ustuni M_{23} ni topish uchun esa shu a_{23} element turgan determinantning ikkinchi satri va uchinchi ustuni o'chiriladi.

$A_{ik}=(-1)^{i+k}M_{ik}$ (i,k=1,2,3) son a_{ik} elementning **algebraik to'ldiruv-chisi** deb ataladi. Masalan Δ determinantning a_{32} elementining algebraik to'ldiruvchisi

$$A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}=a_{13}a_{21}-a_{11}a_{23} \text{ bo'ladi.}$$

Determinantning asosiy xossalari.

1. *Determinantning satrlarini unga mos ustunlar bilan almash-tirish natijasida determinantning qiymati o'zgarmaydi, ya'ni*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

2. *Determinantning ikkita satr(yoki utsun)larini o'rinlarini almashtirish natijasida determinantning ishorasi o'zgaradi, xolos,* ya'ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =- \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Bu yerda berilgan determinantning ikkinchi va uchinchi ustunlari o'rin almashgan.

3. *Ikkita bir xil satr (yoki ustun)ga ega bo'lgan determinant 0 ga tengdir.*

4. *Determinantning biror satr (yoki ustun) elementlarini biror λ songa ko'paytirish determinantni shu songa ko'paytirishga teng kuchlidir:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \lambda a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =\lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Determinantning bu xossasiga asoslanib 3-xossani biroz kuchaytirish mumkin. Ya'ni ikkita proporsional satr(yoki ustun)larga ega bo'lgan determinant nolga tengdir.

5. *Biror satr (yoki ustun)elementlari nollardan iborat determinant nolga tengdir.*

6. *Determinantning biror satr (yoki ustun) elementlarini biror songa ko'paytirib boshqa bir satr (yoki ustun) ning mos elementlariga qo'shish natijasida determinantning qiymati o'zgarmaydi, ya'ni*

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + m a_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + m a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + m a_{33} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Bu yerda berilgan determinantning uchinchi ustun elementlari m songa ko'paytirilib ikkinchi ustinning mos elementlariga qo'shildi.

7. *Determinantning biror satr(yoki ustun) elementlarini ularning algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytirib qo'shsak yig'indi determinantning o'ziga teng bo'ladi, ya'ni:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix}$$

determinant uchun

$$\Delta = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}, \quad \Delta = a_{21} A_{21} + a_{22} A_{22} + a_{23} A_{23},$$

$$\Delta = a_{31} A_{31} + a_{32} A_{32} + a_{33} A_{33}, \quad \Delta = a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31},$$

$$\Delta = a_{12} A_{12} + a_{22} A_{22} + a_{32} A_{32}, \quad \Delta = a_{13} A_{13} + a_{23} A_{23} + a_{33} A_{33},$$

tengliklar o'rinlidir.

Determinantning bunday yozilishi uning satr yoki ustun elementlari bo'yicha **yoyilmasi** deyiladi. Masalan, keltirilgan tengliklardan birinchisi Δ determinantning birinchi satr elementlari bo'yicha yoyilmasini ifodalasa, oxirgisi uni uchinchi ustun elementlari bo'yicha yoyilmasini ifodalaydi.

Biz yuqorida keltirgan uchinchi tartibli determinantning **ta'rifi** uning birinchi satr elementlari bo'yicha yoyilmasi ekan.

Izoh. Determinantning qaysi qatorida nol ko'p bo'lsa, uni o'sha qator elementlari bo'yicha yoyish ma'quldir.

1-misol. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 6 \end{vmatrix}$ determinant hisoblansin.

Yechish. Determinantning birinchi ustun elementlarini -2 ga ko'paytirib, ikkinchi ustunning mos elementlariga qo'shamiz, keyin hosil bo'lgan determinantning birinchi ustun elementlarini -5 ga ko'paytirib, uchinchi ustunning mos elementlariga qo'shamiz. U holda

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4+3 & -10+4 \\ 1 & -2+2 & -5+5 \\ 4 & -8+7 & -20+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -14 \end{vmatrix}$$

hosil bo'ladi. Oxirgi determinantni ikkinchi satrida nollar ko'p bo'lganligi sababli uni o'sha satr elementlari bo'yicha yoyib hisoblaymiz:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -14 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -14 \end{vmatrix} = -(14-6) = -8.$$

8. *Determinantning biror satr (yoki ustin) elementlarini unga parallel boshqa bir satr (yoki ustun)ning mos elementlarining algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytirib qo'shsak yig'indi nolga teng bo'ladi.*

Bu holda ikkita bir xil satr (yoki ustun)da ega bo'lgan determinant hosil bo'ladi.

Masalan, $a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=0$.

Bu yerda Δ determinantning birinchi satr elementlari ikkinchi satrning mos elementlarining algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytirib qo'shildi.

Keltirilgan barcha xossalarning ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar uchun to'g'riligiga bevosita determinantlarni hisoblash yo'li bilan ishonch hosil qilish mumkin.

Xossalarni o'rinli ekanligini tekshirib ko'rishni o'quvchiga qoldiramiz.

n-tartibli determinant haqida tushuncha

n-tartibli determinant deb *n* ta satr, *n* ta ustun va n^2 ta elementlarga ega bo'lgan

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}\dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}a_{23}\dots a_{2n} \\ \text{— — — — — — — —} \\ a_{n1}a_{n2}a_{n3}\dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

kabi belgilanuvchi songa aytiladi

Yuqorida keltirilgan determinantning barcha xossalari istalgan tartibli determinantlar uchun ham o'rinlidir. Tartibi to'rt va undan yuqori bo'lgan determinantlarni determinantning 7-xossasidan foydalanib tartibini pasaytirish orqali hisoblanadi.

Masalan, to'rtinchi tartibli determinantni (2)formulaga o'xshash

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}a_{14} \\ a_{21}a_{22}a_{23}a_{24} \\ a_{31}a_{32}a_{33}a_{34} \\ a_{41}a_{42}a_{43}a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22}a_{23}a_{24} \\ a_{32}a_{33}a_{34} \\ a_{42}a_{43}a_{44} \end{vmatrix} -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21}a_{23}a_{24} \\ a_{31}a_{33}a_{34} \\ a_{41}a_{43}a_{44} \end{vmatrix}+$$

$$+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21}a_{22}a_{24} \\ a_{31}a_{32}a_{34} \\ a_{41}a_{42}a_{44} \end{vmatrix} -a_{13}\begin{vmatrix} a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \\ a_{41}a_{42}a_{43} \end{vmatrix} \quad (3)$$

formula yordamida hisoblash mumkin.

Bu yerdagi uchinchi tartibli determinantlar a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14} elementlarning minori deyiladi. $a_{ik}(i,k=1,2,3,4,)$ elementning algebraik to'ldiruvchisini A_{ik} orqali belgilasak (2.3) tenglikni

$\Delta=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}\,A_{13}+a_{14}A_{14}$ ko'rinishida yozish mumkin.

Bu formula to'rtinchi tartibli determinantni uning birinchi satr elementlari bo'yicha yoyilmasidir. Bunaqa yoyilmani har bir satr va ustun elementlari uchun yozib to'rtinchi tartibli determinantni hisoblash uchun 8 ta formulalarni hosil qilishimiz mumkin.

2-misol. $A=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & -2 \end{vmatrix}$ determinant hisoblansin

Yechish. Determinantning xossalaridan foydalanib A determinantning biror satri (yoki ustuni) ni ba'zi elementlarini 0 ga aylantiramiz Determinantning birinchi satrini –3 va 2 ga ko'paytirib uning uchinchi va to'rtinchi satrlarning mos elementlariga qo'shamiz. U holda

$$A=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 4 & 0 \\ -6 & -7 & -2 & 0 \\ 8 & 8 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

hosil bo'ladi. Buning oxirgi ustunida nollar ko'p bo'lganligi uchun uni o'sha ustun elementlari bo'yicha yoyib hisoblaymiz:

$$A=1(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -6 & -7 & -2 \\ 8 & 8 & -3 \end{vmatrix}= -(-2)\begin{vmatrix} -7 & -2 \\ 8 & -3 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 8 & -3 \end{vmatrix}-4\begin{vmatrix} -6 & -7 \\ 8 & 8 \end{vmatrix}=$$

=2(21+16)+(18+16)-4(-48+56)=76;

Mustaqil yechish uchun mashqlar:

1. Determinantlar hisoblansin:

$a)\ \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 2 & 12 & 10 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix};\quad b)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}\quad d)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix}$

$e)\ \begin{vmatrix} a & b & a+b \\ b & a+b & a \\ a+b & a & b \end{vmatrix};\quad f)\ \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix};\quad g)\ \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & -1 \\ -2 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \end{vmatrix}$

Javob: a)28; b)–2; d) xy; e)–$2(a^2+b^2)$; f)$(a-b)(b-c)(c-a)$; g)–50.

2. Determinantlar soddalashtirilsin:

a) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\beta & 1 \\ \sin\alpha & \cos\beta & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \sin\beta & 1 \\ -\cos\alpha & \cos\beta & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos(\alpha+\beta) \\ \cos\beta & \cos(\alpha+\beta) & 1 \end{vmatrix}$;

Javob: a) $\cos(\alpha+\beta)$; b) $\sin(\alpha+\beta)$; d) 0;

3. a) $\begin{vmatrix} x^2 & 9 & 4 \\ x & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; b) $\begin{vmatrix} x & -4 & 6 \\ -1 & x & -3 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 0$; d) $\begin{vmatrix} 9 & x & 2x \\ 10 & 3 & 5 \\ 8 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$;

tenglamalardan x topilsin.

Javob: a) $x_1=3$, $x_2=2$; b) $x_1=2$, $x_2=-\frac{11}{7}$; d) $x=2$.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar:

1. Ikkinchi tartibli determinant deb nimaga aytiladi?
2. Uchinchi tartibli determinant deb nimaga aytiladi?
3. Determinantning elementlari nima?
4. Determinantning satr va ustunlari hamda bosh va yon diagonallari nima?
5. Determinantni songa ko'paytirish nimani anglatadi?
6. Bir xil tartibli determinantlarni mos elementlarini qo'shish yoki ayrish mumkinmi?
7. Istalgan tartibli determinant qanday hisoblanadi?
8. Minor va algebraik to'ldiruvchi nima?
9. Determinantni biror satr yoki ustun elementlari bo'yicha yoyish deganda nimani tushunasiz?
10. Determinantni qaysi qator elementlari bo'yicha yoygan ma'qul?

III BOB. TESKARI MATRITSA VA CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASINI TESKARI MATRITSA USULDA YECHISH

3.1. Teskari matritsa haqida teorema
3.2. Chiziqli tenglamalar sistemasini teskari matritsa usulda yechish algoritmi
3.3. Iqtisodda qo'llanishi

A kvadrat matritsaga **teskari matritsa** deb A·B=B·A=E shartni qanoatlantiruvchi B matritsaga aytiladi. A matritsaga teskari matritsa odatda A^{-1} kabi belgilanadi. Har qanday kvadrat matritsaga teskari matritsa mavjudmi, degan savolga quyidagi teorema javob beradi.

1-teorema. A kvadrat matritsaga teskari A^{-1} matritsa mavjud bo'lishi uchun A matritsaning xosmas matritsa bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isboti. Zarurligi. Faraz qilaylik, A ga teskari A^{-1} matritsa mavjud bo'lsin. U holda $A\cdot A^{-1}$=E, $|A|\cdot|A^{-1}|=|E|=1$ bo'ladi. Bundan $|A|\neq 0$, ya'ni A matritsaning xosmasligi kelib chiqadi.

Yetarliligi. Osonlik uchun uchinchi tartibli

A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$xosmas matritsani qaraymiz. Bu holda

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

matritsa A matritsaga teskari matritsa ekanligiga bevosita ularni ko'paytirish yo'li bilan ishonch hosil qilish mumkin. Ko'paytirish jarayonida determinantning 7- va 8-xossalaridan foydalaniladi. Bu yerda $A_{ik}(i,k=1,2,3)$ orqali a_{ik} elementning algebraik to'ldiruvchisi belgilangan.

4-misol.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$ matritsaga teskari matritsa topilsin?

Yechish

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

determinantni birinchi satr elementlarini uchinchi satrining mos elementlariga qo'shsak

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

bo'ladi. Buni uchinchi ustun elementlari bo'yicha yoyib hisoblaymiz.

$$|A|=(-1)\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=-13\neq 0.$$

Demak, berilgan matritsa xosmas matritsa va unga teskari A^{-1} matritsa mavjud.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=2,\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=-3,\quad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=14,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=-5,\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=1,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=-9,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=2,\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=-3,\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=1.$$

Topilgan qiymatlarni (4.2) ga qo'yib, teskari matritsani aniqlaymiz.

$$A^{-1}=-\frac{1}{13}\begin{pmatrix}2 & -5 & 2\\ -3 & 1 & -3\\ 14 & -9 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{13} & \frac{5}{13} & -\frac{2}{13}\\ \frac{3}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{3}{13}\\ -\frac{14}{13} & \frac{9}{13} & -\frac{1}{13}\end{pmatrix}.$$

$A\cdot A^{-1}$=E tenglik o‘rinli ekanini tekshirib ko‘rishni o‘quvchiga tavsiya etamiz.

A matritsa va unga teskari A^{-1} matritsaning determinantlari uchun $\left|A^{-1}\right|=\frac{1}{|A|}$ ekanini ta’kidlab o‘tamiz.

Matritsaning rangi va uni hisoblash

To‘g‘ri burchakli yoki kvadrat A matritsa berilgan bo‘lsin. Matritsaning k ta satr va o‘shancha ustunlarini tanlab ularni kesishish joyida turgan elementlardan joylashish tartibini o‘zgartirmagan holda k-tartibli deteminant tuzamiz. Ana shu determinant A matritsaning k-tartibli **minori** deb ataladi. Matritsaning elementlarini uning birinchi tartibli minori deb hisoblash mumkin.

Masalan,

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{pmatrix}$$

matritsa 4 ta uchinchi tartibli, 18 ta ikkinchi tartibli va 12 ta birinchi tartibli minorlarga ega.

Ushbu $\begin{vmatrix}a_{13} & a_{14}\\ a_{33} & a_{34}\end{vmatrix}$ determinant qaralayotgan matritsaning ikkinchi tartibli minorlardan biri bo‘lib u matritsaning birinchi va uchinchi satrlarini hamda uchinchi va to‘rtinchi ustunlarini tanlash natijasida hosil bo‘lgan.

Agar A matritsaning r-tartibli minorlari orasida kamida bitta noldan farqlisi mavjud bo‘lib, undan yuqori tartibli qolgan barcha minorlari nolga teng bo'lsa, u holda butun r son A matritsaning rangi deyiladi va $rangA = r$ yoki $r_A = r$ kabi yoziladi.

Boshqacha aytganda, A matritsaning noldan farqli minorining eng yuqori tartibiga shu matritsaning rangi deb atalar ekan.

Nol matritsadan farqli istalgan matritsaning rangi natural son bo'ladi.

5-misol. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ matritsaning rangi topilsin.

Yechish. Matritsaning yagona uchinchi tartibli

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

minorga ega bo'lib, u 0 ga teng(hisoblansin). Ikkinchi tartibli minorlari orasida 0 dan farqlilari mavjud, masalan $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$.

Demak, matritsaning rangi 2 ga teng ekan.

Matritsaning rangini topishda ko'p sonli determinantlarni hisoblashga to'g'ri keladi. Shuning uchun matritsani rangini hisoblashda uni elementar almashtirish deb ataluvchi almashtirishdan foydalanish maqsadga muvofiq. Matritsani **elementar almashtirish** deb quyidagi almashtirishlarga aytiladi.

a) faqat nollardan iborat satr (ustun)larni o'chiramiz;

b) ikkita satr (ikkita ustun)larni o'rinlarini almashtirish;

d) bir satr (ustun)ning barcha elementlarini biror songa ko'paytirib, boshqa satr (ustun)ning mos elementlariga qo'shish;

e) satr (ustun)ning barcha elementlarini noldan farqli bir xil songa ko'paytirish.

Agar B matritsa A matritsadan elementar almashtirishlar yordamida hosil qilingan bo'lsa A va B **ekvivalent** matritsalar deyiladi hamda $A \sim B$ kabi yoziladi.

7-teorema. Elementar almashtirishlar natijasida matritsaning rangi o'zgarmaydi.

Teoremaning isboti determinantlarning xossalaridan kelib chiqadi.

6-misol. A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 5 & 7 & 13 \end{pmatrix}$ matritsaning rangi topilsin.

Yechish. Birinchi satrini (-2) ga ko'paytirib uchinchi satrining mos elementlariga hamda birinchi satrini (-1) ga ko'paytirib to'rtinchi satrining mos elementlariga qo'shamiz:

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & -4 & -5 \\ -2 & 4 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

Ikkinchi satrni uchinchi satrga hamda ikkinchi satrni (-2) ga ko'paytirib to'rtinchi satrga qo'shsak

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

kelib chiqadi. Oxirgi matritsaning rangi 2 ga teng, chunki

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$$

E'tibor bilan kuzatsak bu misoldan shunga iqror bo'lamizki, rangi 2 ga teng A matritsaning birinchi va ikkinchi satr elementlari o'zaro chiziqli bog'lanmagan. Boshqacha aytganda, ulardan biri ikkinchisi orqali chiziqli ifodalanmaydi, ya'ni $\alpha = k\beta$ tenglikni qanoatlantiruvchi $k = const$ son mavjud emas, bunda α -birinchi satrning elementi β esa ikkinchi satrning α ga mos elementi.

A matritsaning uchinchi va to'rtinchi satr elementlari uning birinchi va ikkinchi satr elementlari bilan mos ravishda $2\alpha - \beta$ va ..... tengliklar orqali chiziqli ifodalanadi.

Endi shu fikrni umumlashtiruvchi teoremani keltiramiz.

3-teorema. Agar matritsaning rangi r ga teng bo'lsa u holda unda r ta chiziqli bog'lanmagan satrlar mavjud bo'lib qolgan barcha satrlar shu r ta satrlar orqali chiziqli ifodalanadi, ya'ni ularning chiziqli kombinatsiyasi bo'ladi.

Matritsalar ustida amallarga keladigan iqtisodiy masalalar

1. Masala. Do'konga birinchi hafta 3 turdagi tovar keltirildi: muzlatkich, televizor va kir yuvish mashinalari. Quyidagi $X_1 = (10; 12; 8)$ vektor 10 ta muzlatkich, 12 ta televizor va 8 ta kir yuvish mashinalari keltirilganligini bildiradi. Agar 2-hafta bu tovarlar quyidagi $X_2 = (5; 8; 10)$ miqdorda keltirilgan bo'lsa, umumiy tovarlar miqdorini aniqlang.

Yechish. Matritsalarni qo'shish qoidasiga asosan umumiy miqdor quyidagiga teng bo'ladi:

$X_1 + X_2 = (10; 12; 8) + (5; 8; 10) = (15; 20; 18).$

2. Masala. 1-masala shartidagi do'konlar soni ikkita bo'lsin, u holda tovarlarni keltirishni ikkata satr va uchta ustunli matritsa yordamida ifodalash mumkin. Birinchi satr 1-do'konga, ikkinchisi 2-do'konga keltirilgan mahsulotlar miqdori. Tovarlarning ikkita do'konga birinchi marta olib kelinishi quyidagi $A_1 = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 8 \\ 5 & 20 & 14 \end{pmatrix}$ matritsa bilan, ikkinchi marta olib kelinishi esa $A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 10 \\ 12 & 5 & 10 \end{pmatrix}$ matritsa bilan berilgan bo'lsa, keltirilgan ja'mi tovarlar miqdorini aniqlang.

3. Masala. Tarmoqdagi m ta zavod n turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. A_{mxn} matritsa – har bir zavodning birinchi kvartalda beradigan mahsulot hajmi, B_{mxn} matritsa esa zavodlarning ikkinchi kvartalda beradigan mahsulot hajmi. $(a_{ij}; b_{ij})$ – i-zavodning j-turdagi mahsulotdan ishlab chiqarish hajmi. Quyidagilarni aniqlang:

a) ikkala kvartaldagi mahsulot hajmi;

b) ikkinchi va birinchi kvartalda har zavodlar ishlab chiqargan tovarlar hajmi orasidagi farq;

c) agar bir birlik mahsulotning qiymati λ bo'lsa, yarim yillikda ishlab chiqarilgan mahsulot qiymatini toping.

4. Masala. Bozordan 4 hafta davomida xarid qilingan 3 xil mahsulot; go‘sht, guruch, yog‘ miqdori A matritsa va ularning narxlari esa B matritsa bilan berilgan.

$$A=\begin{pmatrix}2&3&2\\3&2&4\\2&5&6\\3&2&4\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1000\\600\\300\end{pmatrix}$$

To‘rt hafta davomida bu mahsulotlarni sotib olish uchun sarflanadigan xarajatni aniqlang.

Yechish.

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}b_{11}\\b_{21}\\b_{31}\end{pmatrix}$$

matritsalarni qaraymiz, $a_{ij}-$ i-haftada shu turdagi xarid qilingan mahsulotning miqdori, b_{ij}esa j - turdagi mahsulotning narxi. A va B matritsalarni ko‘paytirishdan hosil bo‘lgan C matritsa elementlari c_{ij} esa i - haftada qilingan xarajatni anglatadi. Umumiy xarajat esa $\sum_{i=1}^{3} c_{ij}$ ga teng bo‘ladi. Demak,

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix}2&3&2\\3&2&4\\2&5&6\\3&2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1000\\600\\300\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4400\\5400\\6800\\5400\end{pmatrix}$$

Demak, mos ravishda 1, 2, 3, 4-haftalarda qilinadigan xarajatlar C matritsaning elementlari shaklida hosil bo‘ldi. Umumiy xarajat esa 4400+5400+6800+5400 = 22000 ga teng.

5. Masala. Zavoddan yangi ishlab chiqarilgan dvigatellarning 40 %*i* qayta ta’mirlashga beriladi, qolgani foydalanishga chiqarib yuboriladi. Statistik ma’lumotlarga qaraganda, ta’mirlangan dvigatellarning 65 %*i* yana qayta ta’mirlashga qaytariladi va 35%*i* yaxshi ishlab ketadi. Qayta ta’mirlashni talab qilmagan dvigatellarning 20%*i* 1 oydan keyin qayta ta’mirlashni talab qiladi. Qolgani esa yaxshi ishlab ketadi. 2 oydan keyin yaxshi ishlab ketadigan va qayta ta’mirlash kerak bo‘lgan dvigatellar qismini aniqlang. Masala sharti xuddi shu tarzda davom etsa 3 oydan keyingisini ham aniqlang.

Yechish. Ishlab chiqarilgandan keyin barcha dvigatellarning 0,6 qismi yaxshi ishlaydi, 0,4 qismi esa qayta ta'mirlashni talab qiladi. Bir oydan keyin yaxshi ishlab ketadigan dvigatellar ulushi $0{,}6\cdot 0{,}8+0{,}4\cdot 0{,}35 = 0{,}62$ ni, qayta ta'mirlanishi kerak bo'lgan dvigatellar ulushi esa $0{,}6\cdot 0{,}2+0{,}4\cdot 0{,}65 = 0{,}38$ ni tashkil etadi. t-holatdagi aniqlikni beruvchi X_t qatorni kiritamiz. $X_t = (x_{1t}; x_{2t})$, bunda x_{1t} – t-momentdagi yaxshi ishlab ketadigan dvigatellar ulushi. x_{2t} - t momentdagi qayta ta'mirlanishi kerak bo'lgan dvigatellar ulushi. Quyidagi matritsani qaraymiz;

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

bunda a_{ij} – dvigatellar ulushi, i – dvigatellar holati (ishlab ketishi yoki yo'qligi: 1-yaxshi ishlab ketadi, 2-ta'mirlash kerak), j-bir oydan keyingi holati. Ko'rinib turibdiki, matritsaning qatoridagi elementlari yig'indisi 1 ga teng bo'lishi kerak va barcha elementlar nomanfiy.

$$X_0=(0{,}6\ \ 0{,}4),\qquad A=\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}35 & 0{,}65 \end{pmatrix};$$

bir oydan keyin

$$X_1 = X_0A =(0{,}6\ \ 0{,}4)\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}35 & 0{,}65 \end{pmatrix} = (0{,}62\ 0{,}38);$$

ikki oydan keyin

$$X_2 = X_1\times A = X_0\times A^2 = (0{,}6\ \ 0{,}4)\times\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}35 & 0{,}65 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}35 & 0{,}65 \end{pmatrix} = =(0{,}6\ \ 0{,}4)\times$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}71 & 0{,}29 \\ 0{,}5075 & 0{,}4925 \end{pmatrix}=(0{,}629\ ;\ 0{,}371),$$

$X_3 = X_2\times A = X_0A^3 = (0{,}634\ 0{,}366)$. Umumiy holda $X_t = X_0\times A^t$ formula o'rinli.

Matritsani transponirlash-A matritsadan satrlari va ustunlari o'rni almashgan A' matritsaga o'tishdir. A' matritsa A matritsaga nisbatan transponirlangan deyiladi.

Ta'rifdan kelib chiqadiki, agar A matritsani o'lchami ($m \times n$) bo'lsa, u holda transponirlangan matritsaning o'lchami ($n \times m$) bo'ladi.

Masalan:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 10 & 8 & 20 \end{bmatrix}; \quad A' = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 7 & 8 \\ 9 & 20 \end{bmatrix}$$

Transponirlashning xossalari:

1) $(A')' = A$

2) $(\lambda A)' = \lambda A'$

3) $(A+B)' = A' + B'$

4) $(AB)' = B'A'$

6. Masala. Korxona uch turdagi mebel ishlab chiqarib, mahsulotini 4 ta tumanda sotadi.

$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 8 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ matritsada b_{ij} – i – turdagi mebelning j - tumandagi qiymati. Agar $A = \begin{pmatrix} 200 \\ 80 \\ 100 \end{pmatrix}$ matritsa orqali bir oyda tumanlarga tarqatilgan mebellar miqdori berilgan bo'lsa, korxonaning har bir tumandan oladigan pul miqdorini aniqlang.

Yechish. B matritsani transponirlaymiz, ya'ni diagonal atrofida buramiz va A matritsaga ko'paytirsak har bir tumandan qanchadan pul miqdori tushishi kelib chiqadi:

$$C = B' \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 200 \\ 80 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 680 \\ 2040 \\ 540 \\ 1020 \end{pmatrix},$$

bunda c_{ij} - i tumandan mebellarni sotishdan tushgan pul miqdori.

7. Masala. Korxona 4 xil xomashyodan foydalanib, 3 turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. A matritsaning elementlari a_{ij} $(i = \overline{1,4}; j = \overline{1,3})$ orqali j - turdagi mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarflanadigan i -

xomashyo miqdori aniqlanadi. B matritsa korxonaning ma'lum bir vaqt oralig'ida ishlab chiqargan mahsulot miqdorini ifodalaydi.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 110 \end{pmatrix}$$

mahsulot ishlab chiqarishga sarflanadigan umumiy xomashyo miqdorini toping.

8. Masala. Telefon apparatlarini ta'mirlovchi usta 70 % telefonlarni past darajada, 20 % o'rta darajada va 10 % to'liq ta'mirdan chiqardi. Statistik ma'lumotlarga ko'ra 70 % past darajada ta'mirlangan telefonlarni bir yildan keyin qayta 10 % past darajada, 60 % o'rta darajada, 30 % ni to'liq ta'mirlanadi. O'rta darajada ta'mirlangan telefonlarni bir yildan keyin qayta 20 % past darajada, 50 % o'rta, 30 % ni to'liq ta'mirlashadi. To'liq ta'mirlangan telefonlarni bir yildan keyin qayta 60 % past darajada, 40 % o'rta darajada ta'mirlashadi. Agar masala sharti shu tarzda davom etsa, 1, 2, 3-yillardan keyingi har bir darajada ta'mirlangan telefonlar ulushini aniqlang.

9. Masala. Ikki turdagi yog' mahsuloti uchta do'konda sotiladi. Birinchi va ikkinchi kvartallarda ikki turdagi yog'ning uchta do'konda sotilish hajmini mos ravishda A va B matritsalar bilan berilgan.

$$A=\begin{pmatrix} 20 & 30 \\ 10 & 20 \\ 25 & 20 \end{pmatrix} \quad B\begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 14 & 12 \\ 16 & 15 \end{pmatrix}.$$

1) ikkala kvartal davomida sotilgan mahsulotlar hajmini aniq lang.

2) Ikkinchi kvartalda sotilgan mahsulot hajmining birinchi kvartalda sotilgan mahsulot hajmidan farqini aniqlang.

10. Masala. Korxona ikki turdagi xomashyodan foydalanib, 3 xil mahsulot ishlab chiqaradi. A matritsa bilan j - xil mahsulotga i - turdagi xomashyoning ishlatilish hajmi berilgan. B matritsa esa bir kvartalda ishlab chiqarilgan mahsulotlar hajmi. Xomashyo birligining narxi P matritsa bilan berilgan. Quyidagilarni aniqlang.

1) ishlatilgan jami xomashyo miqdorini aniqlovchi C matritsani;

2) sarflangan jami xomashyoning umumiy narxi;

$a)\ A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix};\ P=(6\,;3)\quad b)\ A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix};\ P=(3\,;5)$

11. Masala. Zavod tikuv mashinalarini ishlab chiqaradi va ishlab chiqarilgan mashinalar ikki holatda bo'ladi. 1) yaxshi ishlab ketadigan mashinalar, 2) ta'mirlashni talab qiladigan mashinalar. Ishlab chiqarilgan mashinalarning P *%i* yaxshi ishlab ketadigan va (100-*P*) *%i* qayta ta'mirlashni talab qiladigan mashinalar hisoblanadi. Statistik ma'lumotlarga qaraganda yaxshi ishlab ketgan mashinalarning 1 oydan keyin 70*%i* yaxshi ishlaydi va 30 *%i* qayta ta'mirlashni talab qiladi. Qayta ta'mirlangan mashinalar esa bir oydan keyin 60 *%i* yaxshi ishlab ketadigan va 40 *%i* qayta ta'mirlashni talab qiladi. Yana bir oydan keyin bu mashinalarning ishlab ketish holatlari qanday bo'ladi?

a) $P = 80$ *b*) $P = 50$ *c*) $P = 20$

1. Misol. Quyidagi amallarni bajaring:

$$3\begin{pmatrix}3 & -1 & 4\\ 2 & 5 & 0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}.$$

2. Misol. A va B matritsalar berilgan, $A\cdot B=(c_{ij})$ matritsaning c_{32} elementini toping.

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4 & 5\\ 9 & 2 & -3 & 4\\ -1 & -5 & 3 & 11\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & -1\\ 1 & -3\\ 2 & 5\end{pmatrix}.$$

Mustaqil yechish uchun mashqlar:

1. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ matritsaning xos yoki xosmas matritsa ekanligi aniqlansin? Javob: xosmas.

2. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ va $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ matritsalarning yig'indisi topilsin.

Javob: $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ matritsa 5 ga ko'paytirilsin. Javob: $\begin{pmatrix} 20 & 15 & 10 \\ -5 & 25 & 15 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ va $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 5 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ko'paytmalar topilsin?

Javob: $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$ va $\begin{pmatrix} 9 & -11 & 18 \\ 6 & 2 & 0 \\ -7 & -6 & 9 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ ko'paytma mavjudmi? Javob: yo'q.

6. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ matritsaga teskari matritsa topilsin?

Javob: $A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{7}{36} & -\frac{5}{36} & \frac{11}{36} \\ -\frac{13}{36} & \frac{1}{36} & \frac{5}{36} \\ \frac{11}{36} & \frac{13}{36} & -\frac{7}{36} \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ matritsaga teskari matritsa mavjudmi? Javob: ha.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar:

1. Matritsa deb nimaga aytiladi?
2. Kvadrat matritsa nima? Uning determinantichi?
3. Xos va xosmas matritsalar deb qanday matritsalarga aytiladi?
4. Birlik matritsa nima?
5. Satr-matritsa nima?
6. Ustun-matritsa nima?
7. Matritsalar qachon teng bo'ladi?
8. Matritsani songa ko'paytmasi qanday aniqlanadi?
9. Matritsalarni qo'shish va ayrish mumkinmi?
10. Matritsalarni ko'paytmasi qanday aniqlanadi?
11. Qachon matritsalarni ko'paytirish mumkin?
12. Berilgan matritsaga teskari matritsa qanday aniqlanadi?
13. Har qanday matritsaga teskari matritsa mavjudmi?
14. Teskari matritsa qanday topiladi?

IV BOB. CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASI KRAMER VA GAUSS USULLARIDA YECHISH

4.1. Kramer usuli
4.2. Gauss usuli
4.3. Chiziqli tenglamalar sistemasining iqtisodda qo'llanishi

Ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi.

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1, \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2 \end{cases} \quad (1)$$

ni qaraymiz. Bu yerdagi x va y noma'lum sonlar, qolgan barcha sonlar esa ma'lum. $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22},$ lar sistema **koeffitsientlari,** b_1 va b_2 sonlar esa **ozod had** (son)lar deb ataladi.

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechish degan so'z, noma'lum sonlarning shunday qiymatlari to'plamini topish demakki, ularni sistema tenglamalarining har biriga mos noma'lumlarning o'rniga qo'yilganda ular ayniyatlarga aylanadi. Bunday sonlar to'plami sistemaning yechimi deyiladi. Kamida bitta yechimga ega bo'lgan sistema **birgalikdagi sistema** deb ataladi. Birgina yechimga ega bo'lgan birgalikdagi sistema **aniq sistema** deb ataladi. Cheksiz ko'p yechimlarga ega bo'lgan birgalikdagi sistema **aniqmas sistema** deb ataladi. Birorta ham yechimga ega bo'lmagan sistema **birgalikda bo'lmagan sistema** deyiladi.

Izoh. Keltirilgan **ta'riflar** istalgan sistema uchun o'rinlidir.

(1) sistema bizga o'rta maktab kursidan ma'lum. Uni yechishning o'rniga qo'yish, qo'shish va grafik usullari bilan tanishmiz.

Bu yerda (1) sistemani yechishning yana bir usuli ya'ni uni determinantlardan foydalanib yechish usuli bilan tanishmiz. Sistemaning birinchi tenglamasini a_{22} ga, ikkinchisini $-a_{12}$ ga ko'paytirib hadlab qo'shamiz:

$$(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x=b_1a_{22}-b_2a_{12} \quad (2)$$

Shuningdek, sistemaning birinchi tenglamasini $-a_{21}$ ga, ikkinchisini a_{11} ga ko‘paytirib hadlab qo‘shsak

$$(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})y=b_2a_{22}-b_1a_{12} \quad (3)$$

hosil bo‘ladi.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_x=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_1 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}, \quad (4)$$

belgilashlarni kiritamiz.

Sistemaning koeffitsientlaridan tuzilgan Δ determinant sistemaning asosiy determinanti deb ataladi. Δ_x determinant Δ dagi birinchi ustun elementlarini ozod sonlar bilan almashtirish natijasida, Δ_y esa Δ dagi ikkinchi ustun elementlarini ozod sonlar bilan almashtirish natijasida hosil bo‘ladi.

(3.4) dan foydalanib (2) va (3) formulalarni

$$\left.\begin{array}{l} \Delta\cdot x=\Delta_x, \\ \Delta\cdot y=\Delta_y \end{array}\right\} \quad (5)$$

ko‘rinishida yozish mumkin.

Mumkin bo‘lgan quyidagi hollarni qaraymiz.

I. Sistemaning determinanti $\Delta\neq0$ bo‘lsin. U holda (3.5) ning har bir tenglamasini Δ ga bo‘lib

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta} \quad (6)$$

berilgan sistemaning yechimini topish formulasiga ega bo‘lamiz. (6) formulalar uning ixtirochisi Shvetsariyalik matematik Kramer(1704-1752)ning sharafiga Kramer formulalari deb ataladi.

II. Sistemaning asosiy determinanti $\Delta=0$ bo‘lsin.

Bu holda quyidagilardan biri bo‘ladi.

1) $\Delta_x=\Delta_y=0$ bo‘lsin. U holda (5) $0\cdot x=0$, $0\cdot y=0$ ko‘rinishini olib berilgan sistema cheksiz ko‘p yechimlarga ega, chunki istalgan son bu tenglamalarni qanoatlantiradi.

2) Δ_x, Δ_y lardan kamida bittasi, masalan, $\Delta_x\neq0$ bo‘lsin. U holda (5) ni birinchi tenglamasi $0\cdot x=\Delta_x\neq0$ ko‘rinishiga ega bo‘lib, u yechimga ega emas. Demak, bu holda berilgan sistema yechimga ega bo‘lmaydi.

Xulosa. a) (1) sistemaning asosiy determinanti $\Delta \neq 0$ ya'ni, $a_{11}a_{22} \neq a_{12}a_{21}$ yoki $\frac{a_{11}}{a_{21}} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}}$ bo'lganda sistema yagona yechimga ega bo'lib, uning yechimi Kramer formulalari (6) yordamida topiladi.

b) $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$ ya'ni $\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2}$ bo'lganda

(3.1) sistema cheksiz ko'p yechimlarga ega (aniqmas);

d) $\Delta=0$ bo'lib Δ_x, Δ_y lardan kamida bittasi noldan farqli ya'ni

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

bo'lganda sistema yechimga ega bo'lmaydi (birgalikda emas).

(1) sitemaning yechimiga quyidagicha geometrik izoh berish mumkin. (1.) sistemaning har bir tenglamasi to'g'ri chiziq tenglamasini ifodalashi ayon $\frac{a_{11}}{a_{21}} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}}$ bo'lganda to'g'ri chiziqlar parallel bo'lmaydi. Demak, har ikkala to'g'ri chiziq bitta nuqtada kesishadi. Ana shu kesishish nuqtasining koordinatalari sistemasining yechimi bo'ladi.

$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$ ya'ni $\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{в_1}{в_2}$

bo'lganda to'g'ri chiziqlar ustma-ust tushadi (sistema cheksiz ko'p yechimlarga ega) $\Delta=0$ bo'lib, Δ_x, Δ_y lardan kamida bittasi noldan farqli bo'lganda to'g'ri chiziqlar parallel bo'lganligi sababli ular kesishmaydi (sistema yechimga ega bo'lmaydi) ya'ni birgalikda emas.

1-misol. Asror uchta daftar va ikkita ruchka uchun 205 so'm, Umida esa xuddi shunday 4 daftar va 1 ruchka uchun 190 so'm sarfladi. Daftar va ruchkaning narxi aniqlansin.

Yechish. Daftarlar sonini x, ruchkalar sonini y orqali belgilaymiz. U holda

$$\begin{cases} 3x+2y=205, \\ 4x+y=190. \end{cases}$$

sitemaga ega bo'lamiz. Bu sistemani Kramer formulalaridan foydalanib yechamiz:

$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=3\text{-}8=-5\neq 0,\ \Delta_x=\begin{vmatrix} 205 & 2 \\ 190 & 1 \end{vmatrix}=205\text{-}380=-175,$

$\Delta_y=\begin{vmatrix} 3 & 205 \\ 4 & 190 \end{vmatrix}=570\text{-}820=-250.$

(3.6) formulalarga asosan:

$x=\dfrac{\Delta x}{\Delta}=\dfrac{-175}{-5}=35,\ y=\dfrac{\Delta y}{\Delta}=\dfrac{-250}{-5}=50.$

Demak, daftar 35 so'm, ruchka 50 so'm turar ekan.

2-misol. $\begin{cases} 2x+5y=3, \\ 4x+10y=6. \end{cases}$ sistema yechilsin.

Yechish. $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{vmatrix}=20\text{-}20=0,\ \Delta_x=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix}=30\text{-}30=0,\ \Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}=12\text{-}12=0.$

Sitemaning birinchi tenglamasini 2 ga ko'paytirsak ikkinchi tenglama kelib chiqadi. Demak, sistema bitta $2x+5y=3$ tenglamaga teng kuchli va cheksiz ko'p yechimlarga ega. y ga ixtiyoriy qiymatlar berib x ni $x=\frac{3-5y}{2}$ tenglamadan aniqlash yo'li bilan yechimlar topiladi.

Masalan, $y=0$ da $x=\frac{3}{2}$, $y=1$ da $x=-1$ va hakozo.

Bu geometrik nuqtai nazardan $2x+5y=3$ va $4x+10y=6$ to'g'ri chiziqlar bitta to'g'ri chiziq ekanini bildiradi.

3-misol. $\begin{cases} 5x+3y=7, \\ 10x+6y=2. \end{cases}$ sistema yechilsin.

Yechish.

$\Delta=\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 6 \end{vmatrix}=30\text{-}30=0,\ \Delta_x=\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}=42\text{-}6=36\neq 0,\ \Delta_y=\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 10 & 2 \end{vmatrix}=10\text{-}72=-6\neq 0.$

Sistema determinanti $\Delta=0$ bo'lib $\Delta_x\neq 0$, $\Delta_y\neq 0$ bo'lgani uchun sistema yechimga ega emas(birgalikda emas).

Uch noma'lumli ikkita bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi.

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=0, \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=0. \end{cases} \quad (7)$$

sistemani qaraymiz. Bu yerdagi x ,y va z noma'lumlar, qolgan barcha sonlar ma'lum sonlar. Ozod sonlari nolga teng bu sistema bir jinsli sistema deyiladi. (7) sistemani yechish bilan shug'ullanamiz.

Faraz qilaylik, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$

bo'lsin. U holda sistemani

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=-a_{13}z, \\ a_{21}x+a_{22}y=-a_{23}z. \end{cases}$$

ko'rinishida yozamiz. Bu sistema z ning har bir aniq qiymatida yagona yechimga ega bo'lib yechim Kramer formulalariga ko'ra

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -a_{13}z & a_{12} \\ -a_{23}z & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13}z \\ a_{21} & -a_{23}z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

kabi topiladi. Determinantning xossalari (umumiy ko'paytuvchini determinant belgisidan chiqarish mumkinligi hamda ikkita ustunlarini o'rin almashtirganda determinantning faqatgina ishorasi o'zgarishi) dan foydalanib yechimni

$$x=\frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}\cdot z\ , \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}\cdot(-z) \quad (8)$$

ko'rinishda yozamiz.

$$\frac{z}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\text{k}$$

deb belgilasak $z=\text{k}\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix}$, bo'lib uni (8) ga qo'ysak

$$x=\text{k}\begin{vmatrix} a_{12} a_{13} \\ a_{22} a_{23} \end{vmatrix}, \ y=-\text{k}\begin{vmatrix} a_{11} a_{13} \\ a_{21} a_{23} \end{vmatrix}, \ z=\text{k}\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix}, \ (9)$$

qaralayotgan sistemaning yechimlari kelib chiqadi. (7) sistemaning yechimiga quyidagicha geometrik izoh berish mumkin. Sistemaning har bir tenglamasi koordinatalar boshidan o'tuvchi tekislik tenglamasini ifodalaydi. Tekisliklarning har ikkitasi koordinatalar boshidan o'tganligi sababli ular kesishadi. Ikkita kesishuvchi tekisliklar to'g'ri chiziq bo'ylab kesishadi. Ana shu to'g'ri chiziq nuqtalarning koordinatalari sistemaning yechimi bo'ladi.

Xulosa. Bir jinsli (7) sistema yagona yechimga ega bo'lishi yoki yechimga ega bo'lmasligi mumkin emas. U har doim cheksiz ko'p yechimlarga ega (aniqmas).

4–misol. $\begin{cases} x+3y-2z=0, \\ 2x-y+3z=0. \end{cases}$ sistema yechilsin.

Yechish. (9) ga asoslanib

$$x=k\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=7k,\quad y=-k\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-7k,\quad z=k\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-7k$$

larni hosil qilamiz. Shunday qilib, berilgan sistemaning yechimlari $x=7k$, $y=-7k$, $z=-7k$ tengliklar yordamida aniqlanadi. k ga aniq son qiymatlarini qo'yib sistemaning har xil yechimlarini topamiz.

Uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasi.

Uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1, \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2, \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z-b_3 \end{cases} \quad (10)$$

ni qaraymiz. Bu yerdagi x,y va z noma'lum sonlar, qolgan barcha sonlar ma'lum sonlar. a_{11}, $a_{12},...,a_{33}$ sistemaning koeffitsientlari, b_1,b_2, va b_3 ozod sonlar. Barcha ozod sonlar nolga teng bo'lganda (10) sistema **bir jinsli** deyiladi.

(10) sistemani yechish bilan shug'ullanamiz. Noma'lumlar oldidagi koeffitsientlardan tuzilgan uchinchi tartibli

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

determinant (10) sistemaning **asosiy** determinanti deb ataladi. Berilgan sistemani yechish uchun sistemaning birinchi tenglamasini a_{11} elementning algebraik to'ldiruvchisi A_{11} ga, ikkinchi tenglamasini a_{21} elementning algebraik to'ldiruvchisi A_{21} ga va uchinchi tenglamasini a_{31} elementining algebraik to'ldiruvchisi A_{31} ga ko'paytirib tenglamalarni hadma-had qo'shamiz.

$$(a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31})x+(a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+a_{32}A_{31})y+(a_{13}A_{11}+a_{23}A_{21}+a_{33}A_{31})z==b_1A_{11}+b_2A_{21}+b_3A_{31} \quad (11)$$

Birinchi qavs ichidagi ifoda Δ determinantning birinchi ustun elementlari bo'yicha yoyilmasi bo'lganligi uchun determinantning 7-xossasiga ko'ra $a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}=\Delta$ bo'ladi. (11) dagi ikkinchi va uchinchi qavs ichidagi ifodalar Δ determinantni ikkinchi va uchinchi ustun elementlarini boshqa bir ustunning mos elementlarining algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytirib qo'shilganligi uchun determinantning 8-xossasiga ko'ra ular nolga teng bo'ladi. Shunday qilib, (3.11) tenglik

$$\Delta_x=b_1A_{11}+b_2A_{21}+b_3A_{31} \quad (12)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

determinantni qaraymiz. E'tibor bersak bu determinant asosiy determinantdagi birinchi ustun elementlarini ozod sonlarga almashtirish natijasida hosil bo'lganligiga iqror bo'lamiz. Bu determinantning b_1, b_2, b_3, elementlarining algebraik to'ldiruvchilari mos ravishda Δ determinantning a_{11}, a_{21}, a_{31} elementlarining algebraik to'ldiruvchilariga tengligini hisobga olsak $b_1A_{11}+b_2A_{21}+b_3A_{13}=\Delta_x$ bo'lib (12) tenglik

$$\Delta\cdot x=\Delta_x \quad (13)$$

ko'rinishini oladi.

Shunga o'xshash $\Delta\cdot y=\Delta_y$, $\Delta\cdot z=\Delta_z$ (14) tengliklarni hosil qilamiz, bunda

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta_z=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Δ_y determinant sistemaning asosiy determinanti Δ dagi ikkinchi ustun elementlarini ozod sonlarga Δ_z esa Δ dagi uchinchi ustun elementlarini ozod sonlarga almashtirish natijasida hosil bo'ladi.

Mumkin bo'lgan quyidagihollarni qaraymiz:

I. (10) sistemaning asosiy determinanti $\Delta\neq0$ bo'lsin. U holda (13) va (14) tenglamalarni har birini Δ ga bo'lib

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta},\ z=\frac{\Delta_z}{\Delta} \quad (15)$$

formulalarga ega bo'lamiz. (15) **Kramer formulalari** deb ataladi. Shunday qilib (10) sistemaning asosiy determinanti $\Delta\neq0$ bo'lganda sistema yagona yechimga ega bo'lib yechim Kramer formulalari (15) yordamida topilar ekan.

II. (10) sistemaning asosiy determinanti $\Delta=0$ bo'lsin. U holda quyidagilardan biri sodir bo'ladi.

a) Δ_x, Δ_y, Δ_z determinantlardan aqalli bittasi noldan farqli. Bu holda (10) sistema yechimga ega bo'lmaydi. Haqiqatan, aniqlik uchun $\Delta_x\neq0$ deb faraz qilsak bu holda $\Delta\cdot x=\Delta_x$ (13) tenglik $0x=\Delta_x\neq0$ ko'rinishiga ega bo'lib, u x ning hech bir qiymatida bajarilmaydi.

b) $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$ bo'lsin. Bu holda (10) sistema yo yechimga ega bo'lmaydi yoki cheksiz ko'p yechimlarga ega bo'ladi.

5-misol. Javohir oltita daftar, ikkita ruchka va bitta chizg'ich uchun 380 so'm sarfladi. Jasur xuddi shunaqa to'rtta daftar, bitta ruchka va ikkita chizg'ich uchun 370 so'm, Behruz esa 8 ta daftar, ikkita ruchka va uchta chizg'ich uchun 640 so'm sarfladi. Daftar, ruchka hamda chizg'ichning narxlari aniqlansin.

Yechish. Daftar, ruchka hamda chizg'ichlarning narxlarini mos ravishda x,y,z lar orqali belgilaymiz. U holda masalani yechish

$$\begin{cases} 6x+2y+z=380, \\ 4x+y+2z=370, \\ 8x+2y+3z=640. \end{cases}$$

sistemani yechishga keladi. Bu sistemaning yechimini Kramer formulalaridan foydalanib topamiz

$$\Delta=\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 8 & 2 & 3 \end{vmatrix}=6\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}=6(-1)-2(-4)+1\cdot 0=2\neq 0$$

Sistemaning asosiy determinantidagi birinchi ustun elementlarini ozod sonlarga almashtirsak

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 380 & 2 & 1 \\ 370 & 1 & 2 \\ 640 & 2 & 3 \end{vmatrix}=10\begin{vmatrix} 38 & 2 & 1 \\ 37 & 1 & 2 \\ 64 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

hosil bo'ladi. Bu yerda birinchi ustundan umumiy ko'paytuvchi 10 determinant belgisidan chiqarildi. So'nggi determinantni birinchi ustun elementlari bo'yicha yoyib Δ_x ni hisoblaymiz.

$$\Delta_x=10\left(38\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}-37\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}+64\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right)=10\cdot(38\cdot(-1)-37\cdot 4+64\cdot 3)=60$$

Sistemaning asosiy determinanti Δ dagi ikkinchi ustun elementlarini ozod sonlarga almashtirsak

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 6 & 380 & 1 \\ 4 & 370 & 2 \\ 8 & 640 & 3 \end{vmatrix}=2\cdot 10\begin{vmatrix} 3 & 38 & 1 \\ 2 & 37 & 2 \\ 4 & 64 & 3 \end{vmatrix}$$

determinant hosil bo'ladi. Bu yerda determinantning birinchi ustunidan umumiy ko'paytuvchi 2, ikkinchisidan 10 determinant belgisidan chiqarildi. Oxirgi determinantni ikkinchi ustun elementlari bo'yicha yoyib Δ_y ni hisoblaymiz.

$$\Delta_y=20\left(-38\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}+37\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}-64\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\right)=20(-38\cdot(-2)+37\cdot 5-64\cdot 4)=100.$$

Shuningdek,

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} 6 & 2 & 380 \\ 4 & 1 & 370 \\ 8 & 2 & 640 \end{vmatrix}=2\cdot 10\begin{vmatrix} 3 & 2 & 38 \\ 2 & 1 & 37 \\ 4 & 2 & 64 \end{vmatrix}=2\cdot 10\cdot 2\begin{vmatrix} 3 & 2 & 38 \\ 2 & 1 & 37 \\ 2 & 1 & 32 \end{vmatrix}=$$

$$=40\left(38\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}-37\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}+32\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right)=200$$

ga ega bo‘lamiz.

Kramer formulalari (3.15) dan foydalanib

$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{60}{2}=30,\quad y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{100}{2}=50,\quad z=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{200}{2}=100$

yechimni hosil qilamiz.

Shunday qilib, daftar 30 so‘m, ruchka 50 so‘m va chizg‘ich 100 so‘m turar ekan.

6-misol. $\begin{cases} 2x+3y+z=2, \\ x-4y+2z=4, \\ 4x+6y+2z=0. \end{cases}$ sistema yechilsin.

Yechish. Bu yerda $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 4 & 6 & 2 \end{vmatrix}=0,$

chunki determinantning birinchi va uchinchi satr elementlari proporsional.

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \\ 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}=4\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Bu determinantning birinchi satrini –1 ga ko‘paytirib ikkinchi satrning mos elementlariga qo‘shsak

$$\Delta_x=4\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

hosil bo‘ladi. Bu determinantni uning birinchi ustun elementlari bo‘yicha yoyib hisoblaymiz. $\Delta_x=4\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=8\cdot(-5)=-40\neq 0.$

Demak, berilgan sistema $\Delta=0$, $\Delta_x \neq 0$ bo'lganligi sababli yechimga ega emas.

7-misol. $\begin{cases} x+y-2z=-2, \\ 2x+2y-4z=-4, \\ 3x+3y-6z=0. \end{cases}$ sistema yechilsin.

Yechish. Bevosita hisoblash yo'li bilan $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$ ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin. Qaralayotgan sistema yechimga ega emas, chunki sistemaning birinchi va uchinchi tenglamalari bir-biriga zid. Haqiqatan, sistemaning birinchi tenglamasini -3 ga ko'paytirib uchinchisiga qo'shsak 0=6 qarama-qarshilikka kelamiz.

8-misol. $\begin{cases} 3x+2y-z=5, \\ 6x+4y-2z=10, \\ x-3y+z=-2. \end{cases}$ sistema yechilsin.

Yechish. Bevosita hisoblab $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$ ekanligini topamiz. Sistemaning birinchi tenglamasini 2 ga ko'paytirsak uning ikkinchi tenglamasi kelib chiqadi. Shuning uchun berilgan sistema

$$\begin{cases} 3x+2y-z=5, \\ x-3y+z=-2. \end{cases}$$

uch noma'lumli ikkita tenglamalar sistemasiga teng kuchli. Bu sistema cheksiz ko'p yechimlarga ega. Yechimlar noma'lumlardan biri, masalan, x ga aniq qiymatlar berib sistemadan y va z ni topish orqali aniqlanadi.

Izoh. $\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=в_1, \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=в_2, \end{cases}$ sistema $\frac{a_{11}}{a_{21}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{a_{13}}{a_{23}}\neq\frac{в_1}{в_2}$ shartda aniqmas bo'ladi.

Xulosa. a) Uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasi (10) sistemaning asosiy determinanti $\Delta\neq 0$ bo'lganda yagona yechimga ega bo'lib, yechim Kramer formulalari (15) yordamida topiladi.

b) $\Delta=0$ bo'lib Δ_x, Δ_y, Δ_z determinantlardan aqalli birortasi noldan farqli bo'lganda (10) sistema yechimga ega emas.

d) $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$ bo'lganda (10) sistema yo yechimga ega emas yoki cheksiz ko'p yechimlarga ega.

Uch noma'lumli uchta bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=0, \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=0, \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=0. \end{cases} \quad (16)$$

sistemani qaraymiz. $x=0$, $y=0$, $z=0$ sistemaning yechimi bo'lishi ko'rinib turibdi. Bu holda kamida bitta ustuni nolga teng bo'lganligi uchun $\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$ bo'lib (3.13) va (3.14) tengliklar $\Delta\cdot x=0$, $\Delta\cdot y=0$, $\Delta\cdot z=0$ (3.17) ko'rinishga ega bo'ladi. Agar (3.16) sistemaning asosiy determinanti $\Delta\neq 0$ bo'lsa u yagona $x=0$, $y=0$, $z=0$ yechimga ega bo'ladi. Qaralayotgan bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi noldan farqli yechimlarga ham ega bo'la oladimi degan savolga quyidagi teorema javob beradi.

1-teorema. (3.16) sistema noldan farqli yechimlarga ega bo'lishi uchun uning asosiy determinanti $\Delta=0$ bo'lishi zarur va yetarlidir.

Haqiqatan. Sistema noldan farqli yechimlarga ega, masalan, $x\neq 0$ bo'lsin. U holda (3.17) ning birinchi tenglamasi $\Delta\cdot x=0$ dan $\Delta=0$ kelib chiqadi.

Teskarisi, ya'ni sistemaning asosiy determinanti $\Delta=0$ bo'lganda sistema noldan farqli yechimga ega bo'lishini ko'rsatish ham mumkin.

n noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi

Umumiy holda n noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=в_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=в_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=в_n. \end{cases} \quad (3.18)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu yerdagi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ lar noma'lumlar, $b_1, b_2, \ldots, b_n$

ozod had (son) lar hamda $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$ koeffitsientlar ma'lum sonlar.

Yuqorida keltirilgan Kramer qoidasi noma'lumlar soni tenglamalar soniga teng bo'lgan istalgan (3.18) ko'rinishdagi sistema uchun o'rinli ekanligini ta'kidlab o'tamiz. Sistemaning asosiy determinanti $\Delta \neq 0$ bo'lganda u yagona yechimga ega bo'lib, yechim Kramer formulalari

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \dots, \quad x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta}, \quad (3.19)$$

yordamida topiladi. Bu yerdagi Δ determinant (3.18) sistemaning noma'lumlari oldidagi koeffitsientlaridan tuzilgan bo'lib, $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \dots, \Delta_{x_n}$ determinantlar undagi birinchi, ikkinchi va hokazo n-ustun elementlarini ozod sonlar bilan almashtirish natijasida hosil bo'ladi.

Shuni aytish joizki, sistemadagi noma'lum (tenglama)lar soni orta borgan sari uni Kramer usuli bilan yechish qiyinlasha boradi.

1. Misol. Berilgan tenglamalar sistemasini Kramer usulida yeching.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

Yechish.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -18 + 4 + 30 + 12 - 12 - 15 = 1 \neq 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -12 + 2 + 6 + 6 - 8 - 3 = -9$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 8 + 15 - 6 - 6 - 30 = -10$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6 + 2 + 20 + 8 - 6 - 5 = 13$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-9}{1} = -9 \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -10 \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 13.$$

Mustaqil yechish uchun mashqlar:

Tenglamalar sistemasi yechilsin.

a) $\begin{cases} 3x+2y=-4, \\ 2x-5y=29. \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=3, \\ 2x-2y=6. \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x+3y=6, \\ 4x+6y=0. \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+2y+3z=0, \\ x+y-z=0. \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+y-z=6, \\ 2x-y+z=3. \end{cases}$ g) $\begin{cases} 2x-y+5z=1, \\ x+y-z=2, \\ 5x+y-7z=6. \end{cases}$

k) $\begin{cases} x-3y+2z=1, \\ 2x+y-3z=5, \\ 2x-6y+4z=2. \end{cases}$ i) $\begin{cases} 2x-y+3z=6, \\ 2x+y-z=3, \\ 4x+2y-2z=0. \end{cases}$

Javob: a) (2;-5); b) Cheksiz ko‘p; d) yechimga ega emas; e) $x=5K$, $y=-4K$, $z=K$; f) $x=3$, $y=K+3$, $z=K$; g) (1; 1; 0); k) sistema cheksiz ko‘p yechimga ega; i) sistema yechimga ega emas.

Chiziqli tenglamalar sistemasini teskari matritsa usulda yechish algoritmi

n ta noma'lum va m ta tenglamadan iborat chiziqli tenglamalar sistemasi deb quyidagi sistemaga aytiladi.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x + \cdots + a_{2j}\ x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_{i1}\ x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_{m1}x_1 \quad a_{m2}\ x_2 + \cdots + a_{mj}\ x_i + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

bu yerda $a_{ij}, b_i (i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n})$- berilgan sonlar bo‘lib, a_{ij} noma'lumlar oldidagi koeffitsientlar, b_i -ozod hadlar deyiladi.

bu yerda A – koeffitsientlar sistema matritsasi, B – ozod hadlar matritsasi deyiladi. U holda berilgan tenglamalar sistemasini quyidagi ko‘rinishda yoza olamiz: AX=B

Tenglamalar sistemasida tenglamalar soni noma'lumlar soniga teng, ya'ni $m=n$, bo‘lsin. Bu holda sistema matritsasi kvadrat matritsa bo‘ladi. Agar bo‘lsa, ya'ni -xos bo‘lmagan matritsa bo‘lsa, u holda A^{-1} teskari matritsa mavjud bo‘ladi, u holda tenglikdan quyidagilarni hosil qilamiz:

bu munosabatdan: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \cdots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \cdots A_{n2} \\ - - - & - - - \\ A_{1j} & A_{2j} \cdots A_{n2} \\ A_{1n} & A_{2n} \cdots A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}$

Oxirgi tenglikdan ekanligi kelib chiqadi.

Agar tenglamalar sistemasining ($m = n$) matritsasi xosmas, ya’ni $\det A \neq 0$ bo‘lsa, u holda sistemaning matritsa ko‘rinishdagi yechimi quyidagicha bo‘ladi:

$$X = A^{-1} \cdot B$$

bunda, A^{-1}- (3.2) munosabatdagi A matritsaning teskari matritsasi, B esa ozod hadlar matritsasi.

3. Quyidagi tenglamalar sistemasini matritsa usulida yeching.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 1 \end{cases}$$

Yechish.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 24 + 27 + 16 - 24 - 24 - 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

demak, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$.

4. Matritsali tenglamani yeching.

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}5 & -1 & 2\\ -6 & 4 & 6\\ -2 & 0 & 7\end{pmatrix}.$$

Yechish.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix}5 & -1 & 2\\ -6 & 4 & 6\\ -2 & 0 & 7\end{pmatrix}$$

$$AX=B\qquad A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -2 & 1 & -2\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & -1 & 2\\ -6 & 4 & 6\\ -2 & 0 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3}\\ 4 & -2 & 4\\ -6 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

Demak,
$$X=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3}\\ 4 & -2 & 4\\ -6 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

5. Quyidagi matritsali tenglamani yeching:

$$\begin{pmatrix}-3 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1\\ -4 & 3 & 0\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 3\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

Yechish.

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1\\ -4 & 3 & 0\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 3\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

Demak, $AX=B \Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B\ \left(A^{-1}\cdot A=E\right) E\cdot X=A^{-1}\cdot B \Rightarrow X=A^{-1}\cdot B$

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar:

1. Chiziqli tenglama nima?
2. Sistema qachon birgalikda, qachon aniq, qachon birgalikda emas va qachon aniqmas deyiladi?
3. Kramer formulalarini keltirib chiqaring.
4. Sistema qachon yagona yechimga ega?
5. Sistema qay vaqtda aniqmas bo'ladi?
6. Uch noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo'la oladimi?
7. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda bo'lmasligi mumkinmi?
8. Noma'lumlari soni chiziqli tenglamalari soniga teng Sistemaning yechimi qanday topiladi?
9. Bir jinsli sistemani noldan farqli yechimga ega bo'lish shartini ayting.
10. Kramer formulalari qanaqa sistemalar uchun o'rinli?

Gauss usuli

Tenglamalar sistemasini Gauss usulida yechish deganida biz sistemadagi noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish usuli bilan sistemani yechishni tushunamiz. Tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yechganda, berilgan sistema uchburchak shaklini yo trapetsiya shaklini yoki sistemada ishtirok etayotgan biror-bir tenglama $0=a(a\neq 0)$ ko'rinishini olib qoladi.

Agar sistema uchburchak shakliga keltirilgan bo'lsa, u cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

Agar sistemadagi biror-bir tenglama $0=a(a\neq 0)$ ko'rinishga ega bo'lsa, sistema yechimga ega bo'ladi.

Birgalikda bo'lgan tenglamalar sistemasining (*m=n* bo'lishi shart emas) Gauss usulida yechishning mohiyati shundan iboratki, unda noma'lumlar ketma-ket yo'qotilib, sistema uchburchaksimon shaklga keltiriladi. Agar sistema uchburchaksimon shaklga kelsa, u yagona yechimga ega bo'ladi va uning noma'lumlari oxirgi tenglamadan boshlab topib boriladi (sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'lsa, noma'lumlar ketma-ket yo'qotilgach, u trapetsiyasimon shaklga keladi.).

3. Sistemani Gauss usuli bilan yeching.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 20 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 17 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -4 \end{cases}$$

Yechish. Sistemaning kengaytirilgan matritsasini yozib olamiz: Birinchi qadamda $a_{11} \neq 0$ bo'lishi zarur, lekin $a_{11} = 1$ hisoblashlar uchun qulaydir. Shuning uchun birinchi va to'rtinchi satrlarning o'rnini almashtiramiz

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 20 \\ 5 & -1 & 2 & -1 & 17 \\ -3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 5 & -1 & 2 & -1 & 17 \\ -3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 20 \end{array}\right) \quad \boxed{-5} \quad \boxed{3} \quad \boxed{-2}$$

+ + +

1-*qadam.* Birinchi satr elementlarini –5, 3 va -2 ga ko'paytirib, ularni mos ravishda ikkinchi, uchinchi va to'rtinchi satrlarga qo'shamiz, chunki maqsad a_{11} element ostida nollardan iborat " zina " hosil bo'lsin.

2-qadamni o'tkazish uchun, ya'ni matritsada $a_{22} \neq 0$, lekin $a_{22} = 1$ yoki $a_{22} = -1$ bo'lgani qulayroq. Shuning uchun ikkinchi va uchinchi satrlar o'rnini almashtiramiz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & -18 & 9 & 37 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & 13 \\ 0 & 3 & -9 & 7 & 28 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & 13 \\ 0 & 4 & -18 & 9 & 37 \\ 0 & 3 & -9 & 7 & 28 \end{array}\right) \quad \boxed{4} \quad \boxed{3}$$

2-qadam. Ikkinchi satr elementlarini 4 va 3 ga ko'paytirib mos ravishda uchinchi va to'rtinchi satr elementlariga qo'shamiz, natijada a_{22} element tagida ikkinchi ustunda "zina" hosil bo'ladi.

3-qadam. Hosil bo'lgan matritsada $a_{33} = 26 \neq 0$, uchinchi satr elementini $-\frac{24}{26} = -\frac{12}{13}$ ga ko'paytirib, to'rtinchi satrga qo'shamiz. Natijada:

$$-\frac{13}{13}\times\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 26 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 24 & -5 & -5 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 26 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{19}{13} & \frac{19}{13} \end{array}\right).$$

Kengaytirilgan matritsa zinapoya ko'rinishiga keltirildi. Unga mos keluvchi sistemaning ko'rinishi quyidagicha:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -4 \\ -x_2 - 11x_3 - 4x_4 = -11 \\ 26x_3 - 7x_4 = -7 \\ \frac{19}{13}x_4 = \frac{19}{13} \end{cases}$$

oxirgi tenglamadan $x_4 = 1$, uchinchidan $x_3 = \frac{-7 + 7x_4}{26} = 0$, ikkinchidan $x_2 = 11 + 11x_3 - 4x_4 = 7$ va birinchidan $x_1 = -4 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 5$ yechimlarni olamiz. Javob: (5; 7; 0; 1)

4. Berilgan tenglamalar sistemasini Gauss usulida yeching:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2 \\ -3x_1 - 7x_2 - 8x_3 + 2x_4 = -4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$

Yechish.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & -2 & 2 \\ -3 & -7 & -8 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & -4 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & -4 & 4 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & -4 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right),$$

Bundan $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2 \\ 0 \cdot x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 2 \\ 0 \cdot x_1 - 7x_2 - 5x_3 - 4x_4 = -2 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = -1 \end{cases}$

oxirgi tenglikdan ko'rinadiki, $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = -1 \leftrightarrow$ 0 = -1 bunday bo'lishi mumkin emas, demak yechim yo'q.

(4.1.) Tenglamalar sistemasida koeffitsientlardan iborat A matritsa ozod hadlari bilan birgalikda

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

olinsa, kengaytirilgan matritsa deb ataladi.

Kroneker - Kapelli teoremasi: (4.1) sistema yechimga ega bo'lishi uchun rang A = rang B bo'lishi zarur va yetarlidir.

Agar (3.1) da barcha b_i i=(1... n) ozod hadlari nolga teng bo'lsa, bu tenglamalar sistemasi bir jinsli tenglamalar sistemasi deyiladi.

Quyidagi $\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots\dots\dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m_1}x_1 + \dots\dots\dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$

bir jinsli tenglamalar sistemasini qaraylik. Bu sistema har doim yechimga ega. Chunki uning hech bo'lmaganda 1ta trivial $x_i=0$ (i=1,2,...n) yechimi bor. Uning trivial bo'lmagan yechimi mavjud bo'lishi uchun $r(A)=r<\min(m,n)$ bo'lishi zarur va yetarlidir

Chiziqli tenglamalar sistemasini iqtisodda qo'llanishi

Ko'p tarmoqli iqtisodiyotning Leontev modeli

Ko'p tarmoqli xo'jalikni boshqarish alohida tarmoqlar orasidagi balansni talab qiladi. Har bir tarmoq, bir tomondan ishlab chiqaruvchi, ikkinchi tomondan boshqa tarmoq ishlab chiqargan mahsulotning iste'molchisidir. Tarmoqlar orasidagi turli mahsulotlarni ishlab chiqarish va iste'mol qilish orqali bog'lanishni hisoblash masalasi ancha murakkab. Bu masalani birinchi bo'lib mashhur amerika iqtisodchisi V.V. Leontev 1936-yil matematik model ko'rinishida ifodalagan. U 1929-1932-yillarda amerikadagi iqtisodiy depressiyani *tahlil qilishga* urungan bu model matritsalar algebrasiga asoslagan.

Balans munosabatlar

Quyidagi

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i \quad (i = \overline{1,n})$$

tenglama balans munosabat deyiladi. Bu yerda x_i – i tarmoq mahsulotining umumiy hajmi (yalpi ishlab chiqarish); x_{ij} – j – tarmoqning x_j – mahsulotni ishlab chiqarish mobaynida iste'mol qilingan i – tarmoqning mahsulot miqdori; y_i – i – tarmoqning ishlab chiqarishdan tashqariga realizatsiya (iste'mol) uchun mo'ljallangan mahsulot miqdori yoki chekli iste'mol mahsuloti. Sodda ko'rinishda balans munosabatning ko'rinishi:

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} + y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.4}$$

(4.4) tenglamalar balans tenglamalar deyiladi. Leontev quyidagi muhim faktni o'rnatgan: $a_{ij} = x_{ij}/x_j$; uzoq vaqt davomida juda sekin o'zgaradi, uni o'zgarmas son sifatida qarash mumkin. Bu tushunarli chunki ishlab chiqarish texnologiyasi uzoq vaqt bir xil darajada saqlanib qoladi, natijada j – tarmoqning o'z mahsuloti x_j miqdorni ishlab chiqarishi uchun i – tarmoqning iste'mol qilish hajmi o'zgarmas son.

(4.4) tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + y_n \end{cases} \tag{4.5}$$

Matritsa ko'rinishida esa

$$X = A \cdot X + Y \tag{4.6}$$

yoki

$$(E-A)\cdot X=Y \qquad (4.7)$$

bu yerda

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

X – yalpi mahsulot, A – to‘g‘ridan-to‘g‘ri xarajatlar koeffitsientining matritsasi, Y – chekli iste’mol. (3.6) munosabat tarmoqlararo modelning chiziqli tenglamasi deyiladi. Tarmoqlararo modelning asosiy vazifasi A matritsa ma’lum bo‘lsa va berilgan Y vektorni ta’minlansa, yalpi mahsulot ishlab chiqarish vektori Xni topishdan iborat. X quyidagi formula bo‘yicha topiladi:

$$X=(E-A)^{-1}Y=SY. \qquad (4.8)$$

$S=(E-A)^{-1}$ matritsa to‘la xarajatlar matritsasi deyiladi. Agar ixtiyoriy $Y\geq 0$ vektor uchun, (3.7) tenglamaning shunday $X\geq 0$ yechimi mavjud bo‘lsa ,$A\geq 0$ matritsa samarali deyiladi. Agar $a_{ij}\geq 0$ barcha $i,j=\overline{1,n}$, $\max\limits_{j=1,2,\dots,n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}\leq 1$ va shunday j nomer mavjud bo‘lib, $\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}<1$ bo‘lsa, A matritsa samarador deyiladi, ya’ni a_{ij} >0 bo‘lsa, ixtiyoriy ustun (satr) elementlari yig‘indisi birdan kichik bo‘lsa, A matritsaning samaradorligi saqlanadi. Qiymatli balans holi qaralganda o‘rganilayotgan j xo‘jalik mahsulotini tannarxi 1 so‘mdan oshmasligi uni rentabilligini bildiradi. Masalan quyidagi matritsada ifodalangan mahsulot samarador:

$$A=\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

5. Quyidagi matritsalar mahsuldorligini tekshiring.

$$a)\ A=\begin{pmatrix}0,6 & 0,5\\ 0,7 & 0,8\end{pmatrix} \qquad b)\ A=\begin{pmatrix}0,6 & 0,2\\ 0,2 & 0,8\end{pmatrix}$$

$$c)\ A=\begin{pmatrix}0,2 & 0,3 & 0\\ 0,1 & 0 & 0,3\\ 0,6 & 0,5 & 0,7\end{pmatrix} \qquad d)\ A=\begin{pmatrix}0,1 & 0,9 & 0,4\\ 0,5 & 0,5 & 0,5\\ 0,3 & 1,1 & 0,3\end{pmatrix}$$

Tarmoqning yalpi mahsulot miqdori va barcha tarmoqlarga bo'lgan pul xarajatlari orasidagi farq tarmoqning **sof mahsuloti** deyiladi.

6. Quyidagi jadvalda tarmoqlarning reja davriga mo'ljallangan xarajat koeffitsientlari va chekli mahsuloti shartli pul birligida berilgan.

Tarmoq		Iste'mol: sanoat	Iste'mol: qishloq xo'jaligi	Chekli mahsulot
Ishlab chiqarish	sanoat	0,3	0,25	300
	qishloq xo'jaligi	0,15	0,12	100

Quyidagilar:

a) tarmoqlarning rejalashtirilgan yalpi mahsulot miqdorini, tarmoqlararo mahsulot yetkazib berish, tarmoqlarning sof mahsuloti;

b) agar qishloq xo'jaligining chekli mahsuloti 20 %ga, sanoatniki 10 %ga oshirilsa, har bir tarmoqning zarur yalpi ishlab chiqarish miqdorini topish kerak.

Yechish. a) To'g'ridan-to'g'ri xarajatlar koeffitsientini A matritsa va chekli mahsulot vektori Y ni yozib olamiz:

$$A=\begin{pmatrix}0,3 & 0,25\\ 0,15 & 0,12\end{pmatrix}, \quad Y=\begin{pmatrix}300\\ 100\end{pmatrix}$$

bundan $E-A=\begin{pmatrix}1-0,3 & -0,25\\ -0,15 & 1-0,12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,7 & -0,25\\ -0,15 & 0,88\end{pmatrix}$ matritsani yozib olamiz.

U holda to'la xarajatlar matritsasi

$$S=(E-A)^{-1}=\frac{1}{0{,}5785}\begin{pmatrix}0{,}88 & 0{,}15\\ 0{,}25 & 0{,}7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}52 & 0{,}26\\ 0{,}43 & 1{,}21\end{pmatrix}.$$

(4.8) formula bo'yicha yalpi mahsulot vektori X ni aniqlaymiz:

$$X=\begin{pmatrix}1{,}52 & 0{,}26\\ 0{,}43 & 1{,}21\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}300\\ 100\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}482\\ 250\end{pmatrix}$$

Tarmoqlar mahsulot yetkazib berish miqdori x_{ij} ni $x_{ij}=a_{ij}\cdot x_j$ formuladan topamiz. Masalan $x_{11}=a_{11}\cdot x_1=0.3\cdot 482=144.6.$

Tarmoqlarning yalpi mahsuloti, tarmoqlararo mahsulot yetkazib berish, shuningdek, tarmoqlarning sof mahsulotlarini hisoblab topib, quyidagi jadvalni tuzamiz:

Tarmoq		Iste'mol		Chekli mahsulot	Yalpi mahsulot
		sanoat	qishloq xo'jaligi		
Ichlab chiqarish	sanoat	144,6	62,5	300	482
	qishloq xo'jaligi	72,3	30	100	150
Sof mahsulot		265,1	157,5		
Yalpi mahsulot		482	250		

(b) shartga ko'ra chekli mahsulot vektori:

$$Y=\begin{pmatrix}300\cdot 1{,}1\\ 100\cdot 1{,}2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}330\\ 120\end{pmatrix}$$

U holda (4.8) formulaga asosan mahsulot vektori quyidagicha bo'ladi:

$$X=S\cdot Y=\begin{pmatrix}1{,}52 & 0{,}26\\ 0{,}43 & 1{,}21\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}330\\ 120\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}532{,}8\\ 287{,}1\end{pmatrix}.$$

Shunday qilib, sanoatdagi ishlab chiqarishni 532,8 shartli pul birligigacha, qishloq xo'jaligida 287,1 shartli pul birligigacha oshirish kerak.

7. Oyoq kiyimlari ishlab chiqaradigan fabrika S_1, S_2, S_3 xomashyodan foydalanib 3 xil mahsulot ishlab chiqaradi. Har bir juft oyoq kiyimiga xomashyodan sarflanish me'yori quyidagi jadvalda berilgan:

Xomashyo turi	Bir juft oyoq kiyimiga sarflanadigan xomashyo miqdori			Bir kunda sarflanadigan xomashyo
	etik	krasovka	tufli	
S_1	4	2	3	1700
S_2	1	3	1	1100
S_3	7	1	4	2100

Bir kunda ishlab chiqariladigan har bir turdagi oyoq kiyimning sonini hisoblang.

Yechish. x_1, x_2, x_3 - mos ravishda etik, krasovka, tuflidan bir kunda ishlab chiqariladin oyoq kiyimlar soni. U holda har bir turdagi xomashyoning sarflanishiga mos quyidagi sistemani tuzamiz:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1700 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 1100 \\ 7x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2100 \end{cases}$$

tuzilgan tenglamalar sistemasini Kramer usulidan foydalanib yechamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -10 \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1700 & 2 & 3 \\ 1100 & 3 & 1 \\ 2100 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -1500 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1700 & 3 \\ 1 & 1100 & 1 \\ 7 & 2100 & 4 \end{vmatrix} = -2500$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1700 \\ 1 & 3 & 1100 \\ 7 & 1 & 2100 \end{vmatrix} = -2000 \Rightarrow x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 150; \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 250; \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 200$$

8. Korxona 3 xil xomashyodan foydalanib 3 xil mahsulot ishlab chiqaradi. Ishlab chiqarishning tavsifi quyidagi jadvalda berilgan:

Xomashyo turi	Hr bir mahsulotga sarflanadigan xomashyo (og'irlik birligida)			Xomashyo zaxirasi (og'irlik birligida)
	1	2	3	
1	6	4	5	2400
2	4	3	1	1450
3	5	2	3	1550

Berilgan xomashyo zaxirasidan foydalanib har bir tur mahsulotning ishlab chiqarish hajmini aniqlang.

Yechish. Mahsulot ishlab chiqarish hajmlarini x_1, x_2, x_3 lar bilan belgilaymiz. Zaxirani to'la sarflash sharti bilan har bir tur xomashyo uchun balans munosabatlarni quyidagi 3 ta noma'lumli 3 ta tenglamalar sistemasi ko'rinishda yozib olamiz.

$$\begin{cases} 6x_1+4x_2+5x_3=2400 \\ 4x_1+3x_2+x_3=1450 \\ 5x_1+2x_2+3x_3=1550 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2400 \\ 1450 \\ 1550 \end{pmatrix}$$

Demak, $A=\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 2400 \\ 1450 \\ 1550 \end{pmatrix}$ bo'lsa, $A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{21} & \frac{11}{21} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{8}{21} & -\frac{2}{21} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2400 \\ 1450 \\ 1550 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 250 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

9. Firma ikkita bo'limdan iborat. O'tgan yilgi umumiy foyda 12 mln. p/b ni tashkil qiladi. Bu yil birinchi bo'lim foydasini 70 %ga, ikkinchisinikini esa 40 % ga oshirish rejalashtirilgan. Natijada umumiy foyda 1,5 marta ortishi kerak.

Har bir bo'limning: a) o'tgan yildagi; b) bu yildagi foydasi qanday kattalikda?

Yechish. Faraz qilaylik, x va y – birinchi va ikkinchi bo'limlarning o'tgan yildagi foydasi. U holda masala shartini quyidagi sistema ko'rinishida yozish mumkin.

$$\begin{cases} x+y=12, \\ 1{,}7x+1{,}4y=18. \end{cases}$$

Sistemani yechib, x=4, y=8 ni hosil qilamiz. Natijada a) birinchi bo'limning o'tgan yildagi foydasi – 4 mln. p/b, ikkinchi bo'limniki esa – 8 mln. p/b; b) bu yil birinchi bo'limning foydasi $1{,}7 \cdot 4 = 6{,}8$ mln. p/b, ikkinchisiniki esa $1{,}4 \cdot 8 = 11{,}2$ mln. p/b ni tashkil qiladi.

10. Ofisni jihozlash uchun firma 29 predmet: narxi 20 ming p/b bo'lgan bir nechta kompyuter, 8,5 ming p/b dan ofis stollari, narxi 1,5 p/b bo'lgan stullar sotib olishga 236 ming p/b ajratdi. Keyinroq ma'lum bo'lishicha boshqa joyda kompyuterlarni 19,5 ming p/b dan, stollarni 8 p/b dan, stullarni esa oldingi narxda olish mumkin. Har bir jihozdan arzon narxlarda qanday miqdorda sotib olinganligini aniqlang.

Yechish. Faraz qilaylik, x_1, x_2, x_3 mos ravishda kompyuter, stol va stullar soni. Quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 29 \\ 20x_1 + 8{,}5x_2 + 1{,}5x_3 = 236 \\ 19{,}5x_1 + 8(x_2+1) + 1{,}5x_3 = 236 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 29 \\ 20x_1 + 8{,}5x_2 + 1{,}5x_3 = 236 \\ 19{,}5x_1 + 8x_2 + 1{,}5x_3 = 228 \end{cases}$$

Hosil qilingan tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yechamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 29 \\ 20 & 8{,}5 & 1{,}5 & 236 \\ 19{,}5 & 8 & 1{,}5 & 228 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 29 \\ 20 & 8{,}5 & 1{,}5 & 236 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 0 & -8 \end{pmatrix}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 29 \\ 20 & 8{,}5 & 1{,}5 & 236 \\ -1 & -1 & 0 & -16 \end{pmatrix}(20) =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 29 \\ 0 & -11{,}5 & -18{,}5 & -344 \\ 0 & 0 & 1 & 13 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 29 \\ -11{,}5x_2 - 18{,}5x_3 = -344 \\ 1 \cdot x_3 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 13 \\ x_2 = 9 \\ x_1 = 7 \end{cases}$$

Demak, firma 7 ta kompyuter, 10 ta stol va 13 ta stul sotib olgan.

11. Tikuv fabrikasi 3 kun davomida kostyum, plash va kurtkalar ishlab chiqardi. 3 kun mobaynida ishlab chiqariladigan mahsulot miqdori va ishlab chiqarish uchun sarflanadigan pul xarajatlari quyidagi jadvalda berilgan:

Kunlar	Mahsulot ishlab chiqarish miqdori			Xarajatlar (ming pul birligida)
	kostyumlar	plashlar	kurtkalar	
Birinchi	50	10	30	176
Ikkinchi	35	25	20	168
Uchinchi	40	20	30	184

Har bir mahsulot tannarxini toping.

12. Korxona uch xil xomashyodan foydalanib uch xil mahsulot ishlab chiqaradi. Xomashyo sarfi va xomashyo zaxirasi quyidagi jadvalda berilgan. Har bir mahsulotdan ishlab chiqarish miqdorini aniqlang.

a)

Xomashyo turi	Mahsulot turlari bo'yicha xomashyo sarfi, mahsulot birligining og'irligi			Xomashyo zaxirasi (og'irlik birligida)
	1	2	3	
1	5	12	7	2350
2	10	6	8	2060
3	9	11	4	2270

b)

Xomashyo turi	Har bir mahsulotga sarflanadigan xomashyo (og'irlik birligida)			Xomashyo zaxirasi (og'irlik birligida)
	1	2	3	
1	6	5	4	2200
2	10	8	3	3350
3	7	12	5	3390

c)

Xomashyo turi	Mahsulot turlari bo'yicha xomashyo sarfi, mahsulot birligining og'irligi			Xomashyo zaxirasi (og'irlik birligida)
	1	2	3	
1	8	4	10	3000
2	6	7	4	2700
3	13	2	3	2650

d)

Xomashyo turi	Har bir mahsulotga sarflanadigan xomashyo (og'irlik birligida)			Xomashyo zaxirasi (og'irlik birligida)
	1	2	3	
1	4	4	7	2900
2	5	3	5	2260
3	7	2	9	3500

Mustaqil ishlash uchun mashqlar:

(Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishga doir misol-masalalardan namunalar)

Berilgan chiziqli tenglamalar sistemalarining birgalikda yoki birgalikda emasliklarini tekshiring, birgalikdagi yagona yechimga har bir sistemani kamida 4 usulda yeching:

a) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x_1 - 6x_2 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 = 1 \end{cases}$

v) $\begin{cases} 4x_1 - 6x_2 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 = 2 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -1 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$ ye) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 6 \end{cases}$

yo) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$ j) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ -x_1 - 2x_2 - 12x_3 + 7x_4 = -4 \\ 3x_1 + 11x_2 + x_3 + 4x_4 = 7 \end{cases}$

z) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 7 \end{cases}$ i) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$

y) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$ k) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$

Berilgan chiziqli tenglamalar sistemalarining birgalikda yoki birgalikda emasliklarini tekshiring, birgalikdagi yagona yechimga ega har bir sistemani kamida 2 usulda yeching:

1. $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -5 \end{cases}$ (-1; 4)

2. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 7 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$ (1; -2)

3. $\begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 - 8x_2 = -5 \end{pmatrix}$ $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$

4. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 0 \\ 7x_1 - x_2 = 4 \end{cases}$ (0.4; -1.2)

5. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 3x_1 - 6x_2 = 4 \end{cases}$ (yechimga ega emas)

6. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 0.5 \\ 2x_1 - 6x_2 = 1 \end{cases}$ $(3x_2 + 0.5;\ x_2),\ x_2 \in R$

7. $\begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ 2x - y + z = 2 \\ 3x + 2y - 4z = 1 \end{cases}$ (1; 1; 1)

8. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -1 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$ (2; -1; 0)

9. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$ (1; 2; 3)

10. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases}$ (yechimga ega emas)

11. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = -3 \\ -x_1 + 3x_2 + 7x_2 = 2 \end{cases}$ (yechimga ega emas)

12. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$ $\left(\frac{8}{5} - x_3;\ 2x_3 - \frac{7}{5};\ x_3\right),\ x_3 \in R$

13. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$ $\left(\frac{1}{7}x_3 - \frac{2}{7};\ \frac{11}{7}x_3 + \frac{13}{7};\ x_3\right),\ x_3 \in R$

14. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$ $(0;\ 0;\ 0)$

15. $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ $(-x_3;\ -x_3;\ x_3),\ x_3 \in R$

16. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ 3x_1 - x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$ $(1;\ 0;\ 2;\ -3)$

17. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 5 \end{cases}$ (yechimga ega emas)

18. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ $\left(\frac{12}{5} - x_3;\ -\frac{4}{5};\ x_3\right),\ x_3 \in R$

19. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 = 6 \\ -2x_1 + 2x_2 + 6x_3 = -9 \end{cases}$ (yechimga ega emas)

20. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = -5 \\ -x_1 + x_2 = 1 \\ 4x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$ $(1;\ 2)$

V BOB. KOMPLEKS SONLAR

5.1. Kompleks sonning kelib chiqishi va ta'rifi
5.2. Kompleks son berilish usullari
5.3. Kompleks son ustida amallar
5.4. Muavr formulasi

Fan va amaliyotning rivojlanishi haqiqiy sonlar to'plamining yetarli emasligini ko'rsatdi. Masalan, tashqi ko'rinishi juda sodda $x^2+1=0$, $x^2+x+1=0$ tenglamalar haqiqiy sonlar to'plamida echimga ega emas. Demak, istalgan algebraik tenglamani yechish uchun haqiqiy sonlar to'plami yetarli bo'lmay qoladi.

Bundan tashqari, elektronikada va fizikaning turli bo'limlarida murakkab tabiatli kattaliklar qaraladiki, ularni haqiqiy sonlar tushunchasi qamray olmaydi. Shu sababli sonlar tushunchasini kengaytirish ehtiyoji yuzaga keldi.

1.Ta'rif. x va y haqiqiy sonlar, i esa($i=\sqrt{-1}$)qandaydir bir simvol bo'lsa,
$$z=x+yi \tag{1}$$
ifodaga kompleks son (algebraik shakli) deyiladi, bunda quyidagi shartlar qabul qilingan deb hisoblanadi:

1) $x+0i=x$; $0+yi=yi$ va $1\cdot i=i$; $-1\cdot i=-i$;

2) faqat $x=x_1$, $y=y_1$ bo'lgandagina, $x+yi=x_1+y_1i$ bo'ladi;

3) $(x+yi)+(x_1+y_1i)=(x+x_1)+(y+y_1)i$;

4) $(x+yi)\cdot(x_1+y_1i)=(xx_1-yy_1)+(xy_1+x_1y)i$.

$z=x+yi$ kompleks sonda $x=0, y\neq 0$ bo'lsa, y mavhum son deyiladi. i son mavhum birlik deyiladi . x va y sonlar z kompleks sonning mos ravishda haqiqiy va kompleks qismi deyiladi va $x=\operatorname{Re}z, y=\operatorname{Im}z$ ko'rinishda belgilanadi . $y=0$ bulsa, $z=x$ - haqiqiy son, agar $x=0$ bo'lsa, $z=iy$ sof mavhum son bo'ladi. Mavhum qismlarining ishorasi bilangina farq qiluvchi $z = x + iy$ va $\bar{z} = x - iy$ kompleks sonlar qo'shma kompleks sonlar deyiladi.

Agar $z_1 = x_1 + iy_1$ va $z_2 = x_2 + iy_2$ ikkita kompleks son berilgan bo'lsa, ular ustida algebraik amallar quyidagicha bajariladi:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \quad (2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Kompleks sonlarni darajaga ko'tarish ikkihadni darajaga ko'tarish kabi bajariladi, i sonning darajalari quyidagi formulalar bo'yicha aniqlanadi. $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$ va h.k.

Umuman, $\quad i^{4k} = 1$; $i^{4k+1} = i$, $\quad i^{4k+2} = -1$, $\quad i^{4k+3} = -i$. $\quad$ (3)

1-misol. $z_1 = 2 + i$ va $z_2 = 3 - 2i$ sonlarning yig'indisi va ayirmasini toping

Yechish. (2) formulaning birinchi va ikkinchisidan quyidagilarni topamiz:

$$z_1 + z_2 = (2 + i) + (3 - 2i) = (2 + 3) + (1 - 2)i = 5 - i,$$

$$z_1 - z_2 = (2 + i) - (3 - 2i) = (2 - 3) + i(1 + 2) = -1 + 3i.$$

2-misol. $z_1 = 2 - 3i$ va $z_2 = 1 + 2i$ kompleks sonlar ko'paytmasini toping.

Yechish. (2) formulaga ko'ra quyidagini hosil qilamiz:

$$z_1 \cdot z_2 = (2 - 3i) \cdot (1 + 2i) = (2 \cdot 1 - (-3) \cdot 2) + i(2 \cdot 2 + (-3) \cdot 1) = (2 + 6) + i(4 - 3) = 8 + i;$$

Har bir $z = x + iy$ kompleks son geometrik jihatdan Oxy koordinatlar tekisligining (x, y) nuqtasi yoki $\vec{ON}$ vektori bilan tasvirlanadi.

Kompleks son tasvirlanadigan Oxy tekislik kompleks tekislik deyiladi.

z kompleks soniga mos keluvchi N nuqtaning holatini r va φ qutb koordinatlari bilan ham aniqlash mumkin.

Bunda koordinatlar boshidan N nuqtagacha bo‘lgan masofaga, $z=|\vec{O}N|$ soni kompleks sonning moduli deyiladi va $|z|$ bilan belgilanadi; $\vec{O}N$ vektorning Ox o‘qining musbat yunalishi bilan hosil qilgan φ burchak kompleks sonning argumenti deyiladi va y $\arg z$ kabi belgilanadi.

$z=x+iy$ kompleks son uchun quyidagi formula o‘rinlidir:

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi \qquad r=\sqrt{x^2+y^2},\qquad tg\varphi=\frac{y}{x} \tag{4}$$

bunda $\varphi=\arg z$ ning qiymati $0\le\arg z<2\pi$ shartni qanoatlantiradi.

3-misol. $z=-\sqrt{3}+i$ kompleks sonning moduli va argumentini toping.

Yechish. $x=-\sqrt{3},\ \ y=1$ bo‘lganligi uchun $r=\sqrt{x^2+y^2}=2;\ \ tg\varphi=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

tenglamadan φ argumentni topamiz:

$\varphi=-\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{5\pi}{6}$.

Shunday qilib, $r=2,\quad \varphi=\frac{5\pi}{6};$

Kompleks sonning $z=x+iy$ ko‘rinishdagi ifodasi kompleks sonning algebraik shakli deyiladi.

Kompleks sonning $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ ko‘rinishdagi ifodasi uning trigonometrik shakli deyiladi.

Trigonometrik ko‘rinishda berilgan kompleks sonlar ustida amallar quyidagicha bajariladi :

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),\quad z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2&=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=\\ &=(r_1r_2)[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)], \end{aligned} \tag{5}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)], \tag{6}$$

$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi), \tag{7}$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \qquad (8)$$

bunda k=0,1,2,..,(n-1).

(7) va(8) formulalarga Muavr formulalari deyiladi.

Kompleks sonning ko‘rsatkichli shakli

$$z = re^{i\varphi}$$

ko‘rinishda bo‘lib,

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad (9)$$

(9) formulaga Eyler formulasi deyiladi.

4-misol. $z = 1 - i$ sonni sakkizinchi darajaga ko‘taring.

Yechish. Berilgan sonni trigonometrik formada tasvirlaymiz:

$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{\varphi} + i\sin\frac{7\pi}{\varphi}\right)$ Muavr formulasiga ko‘ra

quyidagini hosil qilamiz:

$$(1-i)^8 = \left[\sqrt{2^8}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\right]^8 = \left(\sqrt{2}\right)^8\left[\left(\cos(8\cdot\frac{7\pi}{4}) + i\sin(8\cdot\frac{7\pi}{4})\right)\right] =$$

$$= 16(\cos 14\pi + i\sin 14\pi) = 16.$$

Algebraning asosiy teoremasi

Ko‘phadlarning ildizlari bilan ish ko‘rilganda, har qanday ko‘phad hech ildizga ega bo‘laveradimi? degan savol tug‘uladi. Koeffitsientlari haqiqiy bo‘lib, haqiqiy ildizga ega bo‘lmagan ko‘phadlar mavjudligi ma’lum, $x^2 + 1$ ana shunday ko‘phadlardan biridir. Koeffitsientlari ixtiyoriy kompleks (haqiqiy koeffitsientli ko‘phadlar bularning xususiy holidir) sonlardan iborat bo‘lgan ko‘phadlar ichida ham ildizga ega bo‘lmaganlari mavjudmi degan savol tug‘iladi? Shunday ko‘phadlar mavjud bo‘lganda edi, kompleks sonlar sistemasini kengaytirishga to‘g‘ri kelar edi. Ushbu kompleks sonlar algebrasining asosiy teoremasi o‘rinlidir.

Teorema. Darajasi birdan kichik bo'lmagan, istalgan son koeffitsientli, har qanday ko'phad hech bo'lmaganda, umumiy holda bitta kompleks ildizga ega bo'ladi.

Bu teorema matematikaning eng katta yutuqlaridan biri hisoblanadi va fanlarning xilma-xil sohalarida tatbiq qilinadi. Yuqoridagi teoremadan quyidagi natijalar kelib chiqadi.

Natija. n- darajali $(n \geq 1)$ istalgan kompleks koeffitsientli ko'phad, xuddi n ta kompleks ildizga ega bo'ladi. Bunda ildizlar necha karrali bo'lsa, xuddi shuncha marta sanaladi.

Algebraning asosiy teoremasi $n = 0$ bo'lganda ham o'rinli, chunki 0- darajali ko'phad ildizlarga ega emas. Algebraning asosiy teoremasi darajasi aniqlanmagan nol ko'phadgagina (nol soniga) qo'llanishi mumkin emas.

Kubik tenglama va Kardano formulasi

1) Ushbu tenglama

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{10}$$

kubik tenglama deyiladi. x_1, x_2, x_3 lar (10) tenglamaning ildizlari bo'lsa, tenglamani

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bundan

$$a = -(x_1 + x_2 + x_3),\ b = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,\quad c = -x_1x_2x_3$$

bo'ladi.

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

tenglama $x = z - \frac{a}{3}$ almashtirish yordami bilan

$$z^3 + pz + q = 0$$

ko'rinishga keltiriladi. $z^3 + pz + q = 0$ tenglama ushbu

$$z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = u + v \tag{11}$$

Kardano formulasi bilan yechiladi:

1) $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$ bo'lsa, u holda

$z_1 = u_1 + v_1; z_{2,3} = -\frac{u_1+v_1}{2} \pm \frac{u_1-v_1}{2} i\sqrt{3}$ bo'ladi, bunda u_1 va v_1 lar u va v ildizlarning haqiqiy qiymatlari;

2) $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$ bo'lsa, u holda $z_1 = \frac{3q}{p}; z_2 = z_3 = -\frac{3q}{2p} = -\frac{z_1}{2}$ bo'ladi;

3) $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$ bo'lsa, u holda

$z_1 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3}$, $z_{2,3} = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos(\frac{\varphi}{3} \pm 120^0)$ bo'ladi, bundagi

$\cos\varphi = -\frac{q}{2} : \sqrt{\frac{-p^3}{27}}$.

5-misol. $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ tenglamaning yechimlari $x_1 + x_2 + x_3$; $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$; $x_1x_2x_3$ ifodalarni tuzib, tekshirilsin.

Yechish. $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ berilgan tenglamani quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0 \Rightarrow x^3 - 4x^2 + 4x - 4x + x + 6 = 0 \Rightarrow$

$x(x^2 - 4x + 4) - 4x + 8 + x - 2 = 0 \Rightarrow x(x-2)^2 - 4(x-2) + (x-2) = 0 \Rightarrow$

$(x - 2)[x(x-2) - 4 + 1] = 0 \Rightarrow (x-2)(x^2 - 2x - 3) = 0$

$x - 2 = 0 \qquad x^2 - 2x - 3 = 0$

$x_1 = 2, \qquad x_2 = 3,\ x_3 = -1;$

$x_1 + x_2 + x_3$; $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$; $x_1x_2x_3$ ifodalarning qiymatlarini tekshiramiz:

$4 \quad a = -(x_1 + x_2 + x_3) = -(2 + 3 - 1) = -4,$

$1 \quad b = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 2\cdot 3 + 2\cdot(-1) + 3\cdot(-1) = 6 - 2 - 3 = 1,$

$6 \quad c = -x_1x_2x_3 = -(2\cdot 3\cdot(-1)) = 6.$

Yuqori darajali tenglamalar

Yuqori darajali tenglamalarni yechish usullaridan biri tenglamaning chap qismidagi ko'phadni ko'paytuvchilarga ajratish usulidir. Bu usul Bezu teoremasining ushbu qo'llanilishiga asoslanadi. α soni $n-$darajali $P(x)$ ko'phadning ildizi bo'lsa, bu ko'phadni $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$ ko'rinishda ifodalash mumkin, bunda $Q(x)$ - $P(x)$ni $(x-\alpha)$ga bo'lishda chiqadigan bo'linma bulib, $n-1$ darajali ko'phad.

Shunday qilib, $n-$darajali $P(x)=0$ tenglamaning hech bo'lmaganda bitta ildizi ma'lum bo'lsa, masalani Bezu teoremasi yordami bilan $n-1$ darajali tenglamani yechishga keltirish, boshqacha aytganda, tenglamaning darajasini pasaytirish mumkin.

Tabiiy savol tug'iladi: qanday qilib tenglamaning hech bo'lmasa bitta ildizini topish mumkin?

Butun koeffitsientli tenglamalar holida ratsional, xususan, butun ildizlarni, albatta, ular mavjud bo'lsa, topish mumkin.

Butun koeffitsientli algebraik tenglamaning ratsional ildizlarini topish usuli ushbu teorema bilan beriladi:

Teorema. $\frac{p}{q}$ **qisqarmas kasr butun koeffitsientli**

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad \textbf{(11)}$$

tenglamaning ildizi bo'lsin. U holda p **soni** a_n **ozod hadning bo'luvchisi,** q **esa** a_0 **bosh koeffitsientning bo'luvchisi bo'ladi.**

Isboti. $\frac{p}{q}$ qisqarmas kasrni (11) tenglamaga qo'yib va maxrajdan qutqazib, ushbu tenglikni olamiz:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1}q + \ldots + a_{n-1} p q^{n-1} + a_n q^n = 0 \qquad (12)$$

(12) tenglikni ikki usul bilan qaytadan yozamiz:

$$a_n q^n = p\left(-a_0 p^{n-1} - a_1 p^{n-2} q - \ldots - a_{n-1} q^{n-1}\right); \qquad (13)$$

$$a_0 p^n = q\left(-a_1 p^{n-1} - \ldots - a_{n-1} p q^{n-1} - a_n q^{n-1}\right). \qquad (14)$$

(14) tenglikdan oydinki, $a_n q^n$ ko'paytma p ga bo'linadi va q^n bilan p o'zaro tub bo'lgani uchun a_n soni p ga bo'linadi. Shu kabi (14) tenglikka ko'ra a_0 soni q ga bo'linadi. Teorema isbotlandi.

Isbotlangan teoremadan quyidagi natijalar kelib chiqadi.

1- natija. Butun koeffitsientli tenglamaning istalgan butun ildizi ozod hadining bo'luvchisidan iborat.

2- natija. Butun koeffitsientli tenglamaning bosh koeffitsienti 1 ga teng bo'lsa, u holda tenglamaning barcha ratsional ildizlari, ular mavjud bo'lsa, butun son bo'ladi.

6-misol. Ushbu tenglamani yeching: $2x^3-7x^2+5x-1=0$.

Yechish. Tenglamaning ratsional ildizlarini topamiz. $\frac{p}{q}$ qisqarmas kasr tenglamaning ildizi bo'lsin U holda p ni ozod hadning bo'luvchilari ichidan, ± 1 sonlari ichidan, q ni esa bosh koeffitsientning musbat bo'luvchilari, ya'ni 1,2 ichidan izlash kerak. Shunday qilib, tenglamaning ratsional ildizlarini ± 1, $\pm\frac{1}{2}$ sonlari ichidan izlash kerak bo'ladi. Tekshirib ko'rish mumkinki, $\frac{1}{2}$ soni berilgan tenglamaning ildizi bo'ladi.

$(2x-1)$ ko'paytuvchini qavsdan chiqarish kerakligini nazarda tutgan holda tenglamaning chap qismini ko'paytuvchilarga ajratib, $(2x-1)(x^2-3x+1)=0$ tenglamani olamiz. Ikkinchi ko'paytuvchini 0 ga tenglashtirib, $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ ildizga ega bo'lamiz.

Javob: $x_1=\frac{1}{2}, x_{2,3}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar:

1. Agar $z_1=1-i,\ z_2=3+4i$ bo'lsa, bu kompleks sonlarning yig'idisini va ayirmasini toping.

2. Agar $z_1=-12+i, z_2=3-i$ kompleks sonlarning ko‘paytmasini toping.

3. $a)\ (2+3i)\cdot(3-2i)$ $\quad c)\ (3-2i)^2$

$b)\ (a+bi)\cdot(a-bi)$ $\quad d)\ (1+i)^3$

$e)\ \dfrac{1+i}{1-i}$ $\quad f)\ \dfrac{2i}{1+i}$

amallar bajarilsin.

4. $a)\ x^2+25=0,\ b)\ x^2-2x+5=0$tenglamalar yechilsin va ildizlar tenglamaga qo‘yilib tekshirilsin.

5. Quyidagi kompleks sonlar vektorlar bilan tasvirlangan va ularning modullari va argumentlari aniqlansin, hamda trinometrik ko‘rinishda yozilsin.

$1) z=3;\ 2)\ z=-2;\ 3)\ z=3i;\ 4)\ z=-2i;$

6. Quyidagi kompleks sonlar vektorlar blan tasvirlangan va ularning modullari va argumentlari aniqlansin, hamda trinometrik ko‘rinishda yozilsin.

$1) z=2-2i;\ 2)\ z=1+i\sqrt{3};\ 3)\ z=-\sqrt{3}-i;\ 4)\ z=1+2i;$

7. Quyidagi kompleks sonlar vektorlar blan tasvirlangan va ularning modullari va argumentlari aniqlansin, hamda trinometrik ko‘rinishda yozilsin.

$1)\ -\sqrt{2}+i\sqrt{2};\ 2)\ \sin\alpha+i(1-\cos\alpha)$

8. $1) z=3;\ 2)\ z=-2;\ 3)\ z=3i;\ 4)\ z=-2i;$ sonlar $re^{\varphi i}$ ko‘rinishda yozilsin ($-\pi<\varphi\leq\pi$ bo‘lganda).

9. $1) z=2-2i;\ 2)\ z=1+i\sqrt{3};\ 3)\ z=-\sqrt{3}-i;\ 4)\ z=1+2i;$ sonlar $re^{\varphi i}$ ko‘rinishda yozilsin ($-\pi<\varphi\leq\pi$ bo‘lganda).

10. $1)\ -\sqrt{2}+i\sqrt{2};\ 2)\ \sin\alpha+i(1-\cos\alpha)$ sonlar $re^{\varphi i}$ ko‘rinishda yozilsin ($-\pi<\varphi\leq\pi$ bo‘lganda).

11. Quyidagilar Muavr formulasi bilan hisoblansin:

$1)\ (1+i)^{10};\ 2)\ (1-i\sqrt{3})^6;\ 3)\ (-1+i)^5;\ 4)\ (\sqrt{3}+i)^3;$

$5)\ \sqrt[3]{-1};\ 6)\ \sqrt[3]{i};\ 7)\ \sqrt[6]{-1};\ 8)\ \sqrt[3]{-2+2i};$

$9)\ \sqrt[3]{i};\ 10)\ \sqrt[3]{1+i};\ 11)\ \sqrt[4]{-8+8i\sqrt{3}}\ .$

15. $x^3-4x^2-4x-5=0$ tenglamaning yechimlari

$x_1+x_2+x_3$; $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$; $x_1x_2x_3$

ifodalarni tuzib, tekshirilsin.

16. Ushbu yuqori darajali tenglamalarni yeching:

1) $x^3-5x^2-2x+24=0$; 2) $x^4+x^3+2x-4=0$;

3) $9x^3+18x^2-x-2=0$; 4) $4x^3-4x^2+x-1=0$.

17. Quyidagi tenglamalar Kardano formulasi bo‘yicha yechilsin:

1) $z^3-6z-9=0$; 2) $z^3-12z-16=0$.

3) $z^3-12z-8=0$; 4) $z^3+6z-7=0$.

Mustahkamlash uchun savollar:

1. Kompleks son deb nimaga aytiladi?
2. Kompleks sonning algebraik shakli qanday bo‘ladi?
3. Kompleks sonlarning yig‘indisi, ayirmasi, ko‘paytmasi va bo‘linmasi qanday topiladi?
4. Kompleks sonlarning trigonometrik ko‘rinishi qanday?
5. Muavr formulasi nimadan iborat?
6. Eyler formulasi qanday?
7. Algebraning asosiy teoremasi nimadan iborat?
8. Kardano formulasi qanday?
9. Yuqori darajali tenglamalarni echishning qanday usullarini bilasiz?

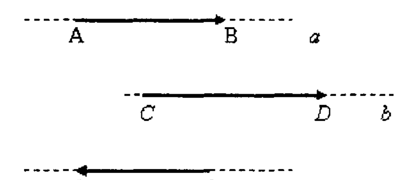
VI BOB. VEKTOR FAZO TUSHUNCHASI

6.1. Vektorlarning chiziqli bog'liqligi va chiziqli erkliligi
6.2. Basis vektorlar
6.3. Xos son va xos vektorlar

1-ta'rif: Yo'naltirilgan kesmaga vektor deyiladi. Uzunliklari teng bir xil yo'nalishli kesmalarni olsak, ular o'zaro teng vektorlar bo'lib, parallel ko'chirish orqali xar biri ikkinchisiga o'tadi. Vektorning yo'nalishi strelka orqali ko'rastiladi. Vektorning tartiblangan harflar jufti yoki lotin alifbosining kichik harflari orqali belgilanadi va ustiga strelka qo'yiladi. Masalan: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \vec{a}, \vec{b}$. Bunda A vektorning boshi, V esa uning oxirini ifodalaydi.

2-ta'rif: Boshi bilan oxiri ustma-ust tushgan vektorga nol vektor deyiladi va $\vec{0}$ tarzida belgilanadi. Nol vektorning uzunligini nolga teng deb qabul qilingan.

3-ta'rif: Uzunligi birga teng bo'lgan vektor birlik vektor yoki ort deyiladi. Vektorlar o'zaro parallel to'g'ri chiziqlarga qarashli bo'lib, yo'nalishdosh yoki qarama-qarshi yo'nalishlarda bo'lishi mumkin. (5-chizma) Vektorlar yo'nalishdosh bo'lsa, $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$, qarama-qarshi bo'lganda esa $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$ tarzida belgilanadi.



5-чизма

Ikki vektorning tengligi ularning bitta vektor ekanini, lekin turlicha belgilanganini bildiradi:

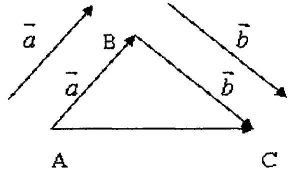
$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \vec{a} = \vec{b} \\ \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

$|\vec{a}|$ -belgi $\vec{a}$ vektorning uzunligini (yoki modulini) ifoda etadi.

4-ta'rif: Bitta to'g'ri chiziqqa yoki parallel to'g'ri chiziqlarga tegishli vektorlarni kollinear vektorlar deyiladi.

Kollinear vektorlar yo'nalishdosh yoki qarama-qarshi yo'nalishga ega bo'lishi mumkin.

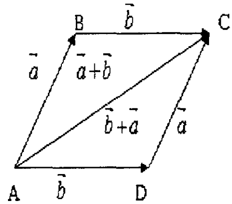
Vektorlar ustida qo'shish, ayirish va vektorni songa ko'paytirish amallarini bajarish mumkin.



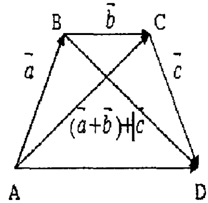
6-чизма

5-ta'rif: Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig'indisi deb istalgan A nuqtaga $\vec{a}$ vektorni qo'yib, uning oxiri V ga $\vec{b}$ vektorni qo'yganda boshi $\vec{a}$ vektorning boshida, oxiri esa $\vec{b}$ vektorning oxiri S nuqtada bo'lgan $\overrightarrow{CB}$ vektorga aytiladi. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig'indisi $\vec{a}+\vec{b}$ ko'rinishida belgilanadi. 5-ta'rifdan istalgan A, V va S uch nuqta uchun $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (2) tenglikning o'rinli bo'lishi kelib chiqadi. (2) ni vektorlarni qo'shishning uchburchak qoidasi deyiladi. (6-chizma). Vektorlarni qo'shish quyidagi hossalarga ega: 1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$, ya'ni, qo'shishning o'rin almashtirish (kommutativlik) qonuni; 2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ qo'shishning gruppalash (assotsiativlik) hossasi; 3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;
4) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

1) va 2) hossalarni 7-va 8-chizmalar asosida osonlik bilan isbotlash mumkin.



7-чизма

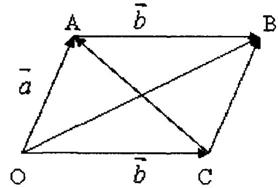


8-чизма

Qo'shiluvchi vektorlarning soni ikkitadan ortiq bo'lganda ularning yig'indisini hosil qilish uchun $\vec{a}$ vektorning oxiriga $\vec{b}$ vektorning boshini qo'yish, $\vec{b}$ vektorning oxiriga $\vec{c}$ vektorning boshini qo'yish va bu ishni oxirgi qo'shiluvchi vektor ustida bajarilguncha davom ettiriladi. U vaqtda $\vec{a}+\vec{b}+...+\vec{l}$ yig'indi vektor boshi $\vec{a}$ vektorning boshidan, oxiri esa $\vec{l}$ vektorning oxiridan iborat bo'ladi.

<u>6-ta'rif</u>: $\vec{a}+\vec{a}'=0$ tenglikni qanoatlantiruvchi $\vec{a}'=-\vec{a}$ vektorga $\vec{a}$

vektorga qarama-qarshi vektor deyiladi. $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ uchun $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OO}=\vec{O}$ tenglikdan $\overrightarrow{AO}$ ning $\overrightarrow{OA}$ uchun qarama-qarshi vektor ekanligini ko'ramiz.



9-чизма

7-ta'rif: $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlarning ayirmasi deb, $\vec{a}$ vektor bilan $\vec{b}$ vektorga qarama qarshi $-\vec{b}$ vektorning yig'indisiga aytiladi. 9-chizmadan (parallelogramm) ko'ramizki, $\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{a}-\vec{b}$.

<u>8-ta'rif</u>: $\vec{a}\neq 0$ vektorning $\lambda\in R$ songa ko'paytmasi deb, shunday $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ vektorga aytiladiki, 1) $\lambda>0$ bo'lganda $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$;

2) $\lambda<0$ bo'lganda $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$, $|\vec{b}|=|\lambda||\vec{a}|$ bo'lib, $\lambda=0$ da $\vec{b}=\vec{0}$.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar har vaqt o'zaro kollineardir.

Hossalari: a) har qanday $\vec{a}$ vektor uchun $\vec{0}\cdot\vec{a}=\vec{0}$. b) har qanday $\lambda\in R$ uchun $\lambda\cdot\vec{0}=\vec{0}$; v) har qanday $\vec{a}$ vektor uchun $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$.

$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\vec{a}_0$ -birlik vektor bo'lib, $|\vec{a}_0|=1$.

<u>Teorema:</u> $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'lishi uchun $\lambda\in R$ bo'lib, $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ tenglikning bajarilishi zarur va yetarli.

<u>Isbot</u>: Zaruriyligi: $\vec{a}$ va $\vec{b}$ kollener vektorlar bo'lsa, ular bitta yoki parallel to'g'ri chiziqlarga tegishli bo'lib, $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ bajariladi. $\pm\frac{\vec{b}}{|\vec{a}|}=\lambda$ deb belgilasak, $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ kelib chiqadi.

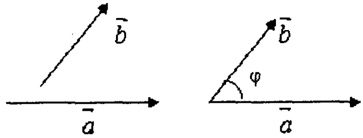
Yetarliligi: $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ dan $\lambda>0$ da $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, $\lambda<0$ da $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$, $\lambda=0$ da esa $\vec{b}=0$ bo'lib, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear vektorlardir.

VII BOB.TEKISLIK VA FAZODA VEKTORLAR VA ULAR USTIDA AMALLAR

7.1. Ort vektorlar

7.2. Vektorlarni skalyar, vektor va aralash ko‘paytmalari

V_3 da ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni qaraylik. Ularni biror O nuqtaga qo'yamiz.



12-чизма

Ta'rif: $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi deb shu vektorlarning uzunliklari bilan ular hosil qilgan burchak kosinusini ko‘paytirishdan hosil qilingan songa aytiladi.

Skalyar ko‘paytma $\vec{a}\,\vec{b}$ yoki $(\vec{a}, \vec{b})$ orqali belgilanadi. Ta’rifga ko'ra

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi \quad (1)$$

Masalan: $|\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 3,\ \varphi = 60^{o}$ bo‘lsa, $(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^{o} = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3.$

Natija: Nol vektorni har qanday vektorga skalyar ko‘paytmasi nolga teng.

Xossalari: 1) $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ o‘rin almashtirish o‘rinli;

Isbot: $(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{a} \wedge \vec{a}) = |\vec{a}|^2 . \cos 0^{O} = |\vec{a}|^2$ ko‘ramizki, $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^{\,2}}$.

2) Ikki vektorning skalyar ko‘paytmasi ulardan birining uzunligi bilan ikkinchisining birinchisi yo‘nalishiga tushirilgan proeksiyasi ko‘paytmasiga teng, ya’ni $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot \Pi p_{\vec{a}} |\vec{b}| = |\vec{b}| \cdot \Pi p_{\vec{b}} |\vec{a}|,\ (\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0)$

Isbot:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = |\vec{a}| \Pi p_{\vec{a}} |\vec{b}| =$$

$$(\vec{b}, \vec{a}) = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cos(\vec{b} \wedge \vec{a}) = |\vec{b}| \Pi p_{\vec{b}} |\vec{a}|$$

chap tomonlarning tengligidan o‘ng tomonning tengligi kelib chiqadi.

4) $(\lambda\vec{a})\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$;

5) $\vec{a}\perp\vec{b}\Rightarrow(\vec{a}\cdot\vec{b})=0$.

Isbot: $\vec{a}\perp\vec{b}\Rightarrow\cos\frac{\pi}{2}=0\Rightarrow(\vec{a}\cdot\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\frac{\pi}{2}=0.$

Natijalar: 1) $\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$ vektorning uzunligi

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} \qquad (6)$$

ga teng.

2) (1) dan $\cos(\vec{a}\cdot\vec{b})=\cos\varphi=\dfrac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$ (7)

(5) va (6) ni e'tiborga olsak,

$$\cos\varphi=\frac{a_1b_1+a_3b_3+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}} \qquad (8)$$

3) $\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$ va $\vec{a}=\{b_1,b_2,b_3\}$ vektorlarning perpendikulyarlik sharti (8) formula bo'yicha quyidagicha aniqlanadi: $a_1b_1+a_3b_3+a_3b_3=0$ (9)

1-misol: $\vec{a}(3{,}5)$, $\vec{b}(2,-1)$ vektorlarning skalyar ko'paytmasini aniqlang. $Б=\{\vec{i},\vec{j}\}$

Yechish: $(\vec{a},\vec{b})=3\cdot2+5\cdot(-1)=1.$

2-misol: $\vec{a}(1{,}2)$, $\vec{b}(1,-\frac{1}{2})$ vektorlar tashkil qilgan burchakni aniqlang.

$$\cos\varphi=\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{1\cdot1+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{1^2+2^2}\sqrt{1^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}}=\frac{0}{\sqrt{5}\sqrt{\frac{5}{4}}}=0$$

3-misol: $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=5, (\vec{a}\hat{\ }\vec{b})=\frac{2\pi}{3}$, бўлса $|\vec{a}+\vec{b}|-?$

Yechish:
$$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2}=\sqrt{\vec{a}^2+2(\vec{a}\vec{b})+\vec{b}^2}=\sqrt{|\vec{a}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi+|\vec{b}|^2}=$$
$$\sqrt{9+25+2\cdot15\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{34-15}=\sqrt{19}$$

Ikki vektorning vektor ko'paytmasi va uning xossalari

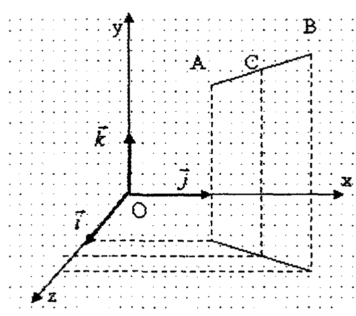
Tekislikda koordinatalar sistemasi qanday kiritilgan bo'lsa, fazoda ham shunday kiritiladi.

OX, OY, OZ perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlar O nuqtada kesishib, fazoni 8 ta oktantga ajratadi. OX o‘qning musbat yo‘nalishiga $\vec{i}$ vektorni, OU o‘qining musbat yo‘nalishiga $\vec{j}$ vektorni, OZ o‘qning musbat yo‘nalishiga $\vec{k}$ vektorni qo‘yamiz. $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$ $B\{0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ni dekart reper deb ataymiz.

Agar A nuqta B reperda A(x_1,y_1,z_1) koordinatalarga, V nuqta B reperda V(x_2,y_2,z_2) koordinatalarga ega bo‘lsa, u holda

$$d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \qquad (1)$$

Agar S(x,u) nuqta AB to‘g‘ri chiziqqa tegishli bo‘lib, AB kesmani λ nisbatda bo‘lsa, u holda $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}$ (8) tenglik o‘rinli bo‘ladi.



13-чизма

A, V, S nuqtalarning koordinatalari orasida

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} \qquad (3)$$

munosabatlar tekislikdagi kabi saqlanadi. S nuqta AB kesmaning o‘rtasi bo‘lganda

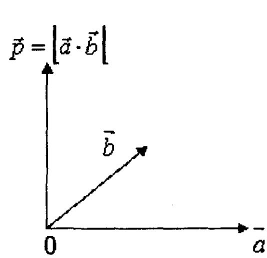
$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{2},y=\frac{y_1+\lambda y_2}{2},z=\frac{z_1+\lambda z_2}{2} \qquad (4)$$

formulalarga ega bo‘lamiz.

Ta’rif: $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektor ko‘paytmasi deb quyidagi uchta shartni qanoatlantiruvchi $\vec{p}$ ga aytiladi:

1) $|\vec{p}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a}\cdot\vec{b})$;

2) $\vec{p}\perp\vec{a},\vec{p}\perp\vec{b}$;



14-чизма

3) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$ vektorlar umumiy boshga keltirilib, $\vec{p}$ ning uchidan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar yotgan tekislikka qaraganda $\vec{a}$ vektordan $\vec{b}$ vektor tomonga qarab eng qisqa yo‘l bilan burilish soat strelkasi harakatiga teskari

bo'lsin, (o'ng sistema). Vektor ko'paytmani $\vec{p}=\lfloor\vec{a}\cdot\vec{b}\rfloor$ bilan belgilaymiz.

Ta'rifdagi shartlar quyidagi geometrik ma'no kasb etadi:

1-shartdan $\vec{p}$ vektorning moduli $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar bo'yicha qurilgan parallelogramm yuziga tengligi kelib chiqadi.

2-shartdan $[\vec{a},\vec{b}]$ vektor ko'paytma parallelogramm tekisligiga perpendikulyar vektor ekanligini aniqlaydi.

3-shart $\vec{p}$ vektorning yo'nalishini aniqlaydi. 14-chizmada $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$ vektorlar o'ng uchlik tashkil etadi.

1-misol: $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}$ vektorlarga yasalgan parallelogramm ning yuzini va uning diagonallari uzunliklarini toping.

$$\left|[\vec{a},\vec{b}]\right| = S(\#) = \sqrt{\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}^2} = \sqrt{6}. \quad d_1=|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{14},\ d_2=|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{2}.$$

2-misol: Uchlari A(3,0,5), V(3,-2,2), S(1,2,4) nuqtalarda bo'lgan AVS uchburchak yuzini toping.

Yechish: $\overrightarrow{AB}=-2\vec{j}-3\vec{k}$, $\quad\overrightarrow{AC}=-2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$.

$$\left[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\right]=\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 2 & -1\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}-3 & 0\\ -1 & -2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0 & -2\\ -2 & 2\end{vmatrix}\vec{k}=8\vec{i}+6\vec{j}-4\vec{k}.$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left(\left[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\right]\right)=\frac{1}{2}\sqrt{64+36+16}=\frac{1}{2}\sqrt{116}=\sqrt{29}.$$

VIII BOB.TEKISLIKDA TO‘G‘RI CHIZIQ TENGLAMALARI

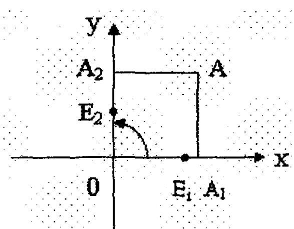
8.1. Tekislikda to‘g‘ri chiziqning turli xil tenglamalari

8.2. Tekislikda to‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro joylashuvi va ular orasidagi burchak

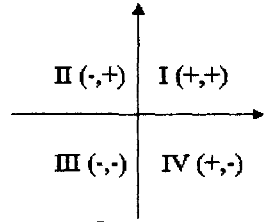
8.3. Tekislikda to‘g‘ri chiziqning iqtisodda qo‘llanishi

Tekislikda o‘zaro perpendikulyar ikkita to‘g‘ri chiziqlarni qaraylik. O ularning kesishish nuqtasi bo‘lsin. Bu to‘g‘ri chiziqlarda uzunlik bo‘yicha $OE_1 = OE_2$ shartni qanoatlantiruvchi E_1 va E_2 nuqtalarni belgilaymiz. OE_1 va OE_2 to‘g‘ri chiziqlarni absissalar va ordinatalar o‘qi deb ataladi va mos ravishda Ox va Oy orqali belgilanadi. O nuqtani esa koordinatalar boshi deyiladi. O nuqta o‘qlarning har birini ikkita yarim o‘qlarga ajratadi. Yarim o‘qlardan birini shartli ravishda musbat, ikkinchisini esa manfiy deb ataymiz. Chizmada musbat yarim o‘q uchiga strelka qo‘yamiz. $E_1 \in Ox$ nuqta $E_2 \in Oy$ nuqtaga O markaz atrofida soat strelkasiga teskari ravishda 90^0 burish orqali o‘tadi. Tekislikning har bir A nuqtasiga ikkita x, y sonlarini mos keltiramiz.

A nuqtadan ordinata o‘qi Oy ga parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazib, uning Oy o‘qi bilan kesishgan nuqtasini A_2 orqali belgilaymiz. $A_1 \in Ox$ bo‘lib, OA_1 kesma uzunligi x orqali belgilaymiz. A_1 nuqta musbat yarim o‘qda yotsa x musbat son, manfiy yarim o‘qda yotganda esa manfiy son bo‘ladi. O nuqta bilan ustma-ust tushsa, 0 (nol) son bo‘ladi. $A_2 \in Oy$ bo‘lib, OA_2 kesma uzunligini y orqali belgilaymiz. y son x kabi musbat, manfiy yoki nol sonlar bo‘lishi mumkin. x-ni A nuqtaning absissasi, y-ni esa ordinatasi deyiladi. x, y sonlar juftini A nuqtaning koordinatalari deyiladi va $A(x,y)$ kabi belgilanadi. $A_1(x,0)$, $A_2(0,y)$, $O(0,0)$



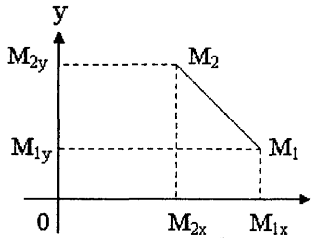
1-чизма



2-чизма

koordinatalarga ega. Koordinata o'qlari kesishib, tekislikni to'rtta kvadratlarga ajratadi. Kvadratlardagi ixtiyoriy nuqta koordinatalarining ishorasi 2-chizmada tasvirlangan.

x, y haqiqiy sonlar jufti (x, y) tartibda berilgan bo'lsa, Oxy tekislikda birdan bir A(x,y) nuqta mos keladi. Chizmada A nuqtani ko'rsatish uchun Ox o'qda $A_1(x,0)$, Oy o'qda esa $A_2(0,y)$ nuqtalar belgilanadi. A_1 nuqtadan Oy o'qqa, A_2 nuqtadan Ox o'qqa parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. Ularning kesishish nuqtasi izlangan A(x,y) nuqtadan iboratdir.



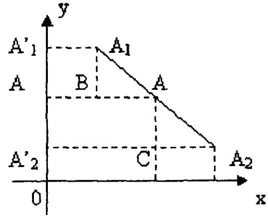
3-чизма

$x>0$, $y>0$ bo'lsa $A\in$I, $x<0$, $y>0$ bo'lsa $A\in$II, $x<0$, $y<0$ bo'lsa $A\in$III, $x>0$, $y<0$ bo'lsa $A\in$IV.

Tekislikda $M_1(x_1,y_1)$ va $M_2(x_2,y_2)$ nuqtalar berilgan bo'lsin. M_1 va M_2 nuqtalar orasidagi masofa deb M_1M_2 kesma uzunligiga aytiladi. M_1M_2 kesma uzunligini shu nuqtalarning koordinatalari orqali aniqlaylik. $x_1\neq x_2$, $y_1\neq y_2$ bo'lsin. M_1 va M_2 nuqtalardan koordinata o'qlariga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. M_1M_{1y} va M_2M_{2x} to'g'ri chiziqlar M nuqtada kesishadi. M_2MM_1 uchburchak to'g'ri burchakli, MM_1 kesma uzunligi $|x_1-x_2|$ ga, MM_2 kesma uzunligi esa $|y_1-y_2|$ ga teng. Pifagor teoremasini to'g'ri burchakli M_2MM_1 uchburchakka qo'llash orqali $d^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$ ifodani hosil qilamiz. Bunda d M_1 va M_2 nuqtalar orasidagi masofa yoki M_1M_2 kesma uzunligini ifoda etadi.

Shunday qilib, $d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ (1)

ikki nuqta orasidagi masofaning formulasidir. M_1 va M_2 nuqtalar ustma-ust tushsa $d=0$. Endi Oxy tekislikda A_1A_2 ikkita turli nuqtalar berilgan bo‘lsin. A nuqta A_1A_2 kesmaga tegishli bo‘lib, uni $\lambda_1:\lambda_2$ nisbatda ajratsin. A nuqtaning x, y koordinatalarini A_1 va A_2 nuqtalarning koordinatalari orqali ifodalash talab qilingan bo‘lsin. A_1A_2 kesma Ox o‘qqa parallel bo‘lmasin. A_1, A, A_2 nuqtalarni Oy o‘qqa proeksiyalaylik. A'_1, A’, A'_2 nuqtalar Oy o‘qdagi proeksiyalar bo‘lsin. A_1BA va ACA_2 uchburchaklarning o‘xshashligidan (mos burchaklari o‘zaro teng)



4-чизма

$$\frac{A_1A}{A_1A_2}=\frac{A'_1A'}{A'A'_2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \qquad (2)$$

tengliklarga ega bo‘lamiz. $A_1(x_1,y_1)$, $A_2(x_2,y_2)$, $A(x,y)$ nuqtalarning proeksiyalari $A'_1(0,y_1)$, $A'_2(0,y_2)$, $A'(0,y)$ koordinatalarga ega bo‘lib,

$$A'_1A'=|y_1-y|,\ A'A'_2=|y-y_2| \qquad (3)$$

(2) va (3) tengliklardan $\frac{|y_1-y|}{|y-y_2|}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ (4) kelib chiqadi.

A’ nuqtaning A'_1, $A'_2 \in Oy$ nuqtalarning orasida yotishidan y_2-y *ва* y_1-y sonlarning bir xil ishorali ekanligi kelib chiqadi. Bundan

$$\frac{|y_1-y|}{|y-y_2|}=\frac{y_1-y}{y-y_2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \qquad (5)$$

Ko‘ramizki,

$$y=\frac{\lambda_2y_1+\lambda_1y_2}{\lambda_1+\lambda_2}. \qquad (6)$$

Yuqoridagi kabi mulohazalarni o‘tkazib, A nuqtaning absissasi uchun

$$x=\frac{\lambda_2x_1+\lambda_1x_2}{\lambda_1+\lambda_2} \qquad (7)$$

formulani keltirib chiqaramiz. Agar $\lambda_1:\lambda_2$ ni λ bilan belgilasak,

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda};\quad x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \qquad (8)$$

formulalarga ega bo'lamiz.

(8) da $\lambda \neq 1$ shartni bajarilishini talab qilamiz. Aks holda A va A_2 nuqtalar ustma-ust tushadi. Agar A nuqta A_1A_2 kesmaning o'rtasida yotsa, $\lambda = 1$ bo'lib,

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad x = \frac{x_1 + x_2}{2} \tag{9}$$

formula kelib chiqadi.

Agar A nuqta A_1A_2 kesmaning ichki nuqtasi bo'lsa, $\lambda > 0$. A_1A_2 to'g'ri chiziqning A_1A_2 kesmasidan tashqaridagi barcha nuqtalar uchun $\lambda < 0$ bo'ladi.

Misol: Uchlari A(1,1), B(5,4), S(13,6) orqali berilgan ABS uchburchak A burchak bissektrisasining BE tomon bilan kesishish nuqtasi aniqlansin.

Yechish: $\lambda > 0$ va $\lambda = \frac{|BD|}{|DC|} = \frac{d(AB)}{d(AC)}$;

$$d(AB) = \sqrt{16+9} = 5; \; d(AC) = \sqrt{144+25} = 13.$$

$$x = \frac{5 + 5/13 \cdot 13}{1 + 5/13} = \frac{130}{18} = 7\frac{2}{9}; \qquad y = \frac{4 + 5/13 \cdot 6}{1 + 5/13} = \frac{82}{18} = 4\frac{5}{9}. \quad Жавоб: \left(7\frac{2}{9}, 4\frac{5}{9}\right)$$

6.2. To'g'ri chiziq. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi.

Tekislikda $B = \{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ affin reper tanlangan bo'lsin. Birinchi darajali

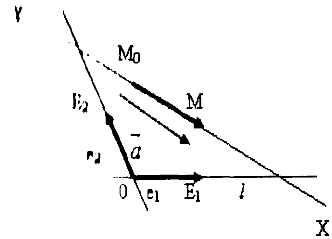
$$Ax + By + c = 0 \tag{1}$$

ko'rinishidagi tenglamani o'rganaylik. (1) tenglamani M nuqtaning V reperdagi x, y – koordinatalari qanoatlantiradi. (1) da *A, B, C* koeffitsientlar haqiqiy sonlar bo'lib, *A,B* lar bir vaqtda nolga teng emas. Tekislikda l to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin. $M_0(x_0, y_0) \in l$-boshlang'ich nuqta, $M(x, y) \in l$ ixtiyoriy nuqta bo'lsin. $\overline{M_0M} \in l$ vektorni to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori deyiladi. Agar M nuqtaning koordinatalari (1) ni qanoatlantirsa, (1) l to'g'ri chiziq tenglamasi bo'lishini ko'rsataylik.

$\vec{a}\{-B,A\}$ vektor $\overline{M_0M}$ ga kollinear bo‘lsin, ya’ni $\overline{M_0M} = \lambda\vec{a}$ bo‘lsin.

$M_0 \in l \Rightarrow Ax_0 + By_0 + C = 0$ (2).

(1) dan (2) ni ayiramiz.



$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ -B & A \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

(3) va (1) tenglamalar teng kuchli. (3) dan $\overline{M_0M}$ va $\vec{a}$ vektorlarning kollinearligi kelib chiqadi Shunday qilib, koordinatalari (1) ni qanoatlantiruvchi barcha M(x,y) nuqtalar $\vec{a} = \{-B, A\}$ vektorga parallel bitta to‘g‘ri chiziq nuqtalaridir.

(1) umumiy tenglamani tekshirish:

1) $C=0$ bo‘lsa, $O(0,0) \in l$. To‘g‘ri chiziq koordinatalar boshidan o‘tadi.

2) $A=0, B \neq 0, C \neq 0$. $\vec{a}\{-B,0\} // \vec{e_1} \Rightarrow l // (0Y)$

To‘g‘ri chiziq (OY) o‘qqa parallel.

3) $B=0, A \neq 0, C \neq 0$. $\vec{a}\{O,A\} // \vec{e_2} \Rightarrow l // (0X)$.

4) $A=0, B \neq 0, C=0$. $(1) \Rightarrow y=0$ $l-(0X)$ o‘q bilan ustma-ust tushadi.

5) $B=0, C=0, A \neq 0$, $(1) \Rightarrow x=0$ $l-(0Y)$ o‘q bilan ustma-ust tushadi.

To‘g‘ri chiziqning turli tenglamalari

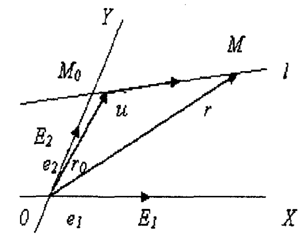
Ta’rif. To‘g‘ri chiziqqa parallel har qanday vektor uning yo‘naltiruvchi vektori deyiladi.

To‘g‘ri chiziq vaziyatini tekislikda o‘rnatilgan reperga nisbatan turlicha ko‘rsatish mumkin:

1) To‘g‘ri chiziqqa tegishli $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ yo‘naltiruvchi vektor orqali;

2) Biror $M_0(x_0,u_0)$ nuqtasi va $\vec{u}=\{a_1,a_2\}$ yo'naltiruvchi vektor orqali;

3) Koordinata o'qlari bilan kesishgan *A(a,0), B(0,b)* ikkita nuqtasi orqali.



Tekislikda $B=\{0,\vec{e_1},\vec{e_2}\}$ affin reper o'rnatilgan bo'lsin. To'g'ri chiziq vaziyatini biror $M_0(x_0,u_0)$ nuqtasi va $\vec{u}=\{a_1,a_2\}$ yo'naltiruvchi vektor orqali aniqlaymiz. *l* to'g'ri chiziqda ixtiyoriy M(x,u) nuqta olaylik. U holda $\overrightarrow{M_0M}$ va $\vec{u}$ vektorlar kollinear bo'lib, $\overrightarrow{M_0M}=t\vec{u}$.

(1)

Bunda t-parametr . $-\infty<t<\infty$.

Agar M_0 va M nuqtalarning radius vektorlari $\overrightarrow{OM_0}=\vec{r_0}.\overrightarrow{OM}=\vec{r}$ bo'lsa, u holda

$$\overrightarrow{M_0M}=\vec{r}-\vec{r_0} \qquad (2)$$

(1) va (2) tengliklardan

$$\vec{r}=\vec{r_0}+t\vec{u} \qquad (3)$$

kelib chiqadi Bu formulani to'g'ri chiziqning vektor ko'rinishidagi parametrik tenglamasi deyiladi. (3) koordinata ko'rinishida yozaylik:

$$x\vec{e_1}+y\vec{e_2}=(x_0+a_1t)\vec{e_1}+(y_0+a_2t)\vec{e_2}\Rightarrow$$

$$x=x_0+a_1t$$

$$y=y_0+a_2t \qquad (4)$$

(4) ni to'g'ri chiziqning koordinata ko'rinishidagi parametrik tenglamasi deyiladi.

2. Agar $a_1\cdot a_2\neq 0$ shart bajarilsa, (4) dan t ni chiqarib

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2} \qquad (5)$$

ni hosil qilamiz. (5) ni to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi deyiladi. (5) dan $a_2x-a_1y+(-a_2x_0+a_1y_0)=0$ birinchi darajali tenglama kelib chiqadi.

3. To'g'ri chiziq ordinata o'qiga parallel bo'lmasin. Bunda $\vec{u}=\{a_1,a_2\}$ vektor koordinatalaridan $a_1\neq 0$.

Ta'rif: To'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti deb uning $\vec{u}$

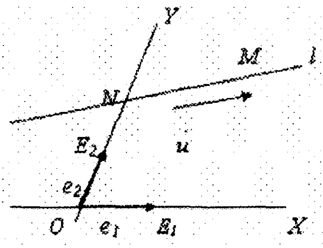
yo'naltiruvchi vektorining ikkinchi koordinatasini birinchi koordinatasiga bo'lgan nisbatiga aytiladi va

$$k = \frac{a_2}{a_1} \qquad (6)$$

tarzida belgilanadi.

$\vec{u}$ ga kollinear har qanday $\vec{v} = \{b_1, b_2\} \neq 0$ vektor uchun

$$k = \frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1}.$$



23-чизма

Agar l to'g'ri chiziq umumiy tenglamasi $Ax + By + c = 0$ orqali berilgan bo'lsa, uning yo'naltiruvchi vektori $\vec{u} = \{-B, A\}$ bo'lib, $k = -\frac{A}{B}$. Agar l to'g'ri chiziq burchak koeffitsienti k va OU o'q bilan kesishgan nuqtasi *N(0, b)* orqali berilgan bo'lsa, u holda ixtiyoriy $M(x, y) \in l$ nuqta uchun $\overrightarrow{NM}\{x; y-b\} // \vec{u} \Rightarrow$

$$\frac{y-b}{x} = \frac{a_2}{a_1} = k \Rightarrow y = kx + b \qquad (7)$$

(7) formula ordinata o'qi bilan kesishuvchi to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasidir.

Endi berilgan $M_0(x_0,u_0)$ nuqtadan o'tib, berilgan k burchak koeffitsientli to'g'ri chiziq tenglamasini yozaylik. l to'g'ri chiziq ordinata o'qiga parallel bo'lmasin. Uning tenglamasi (7) ko'rinishda bo'lib, $M_0(x_0,u_0)$ nuqtadan o'tadi. (7) dan $y_0 = kx_0 + b$ ni ayirsak,

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad (8)$$

kelib chiqadi.

4. l to'g'ri chiziqda $M_1(x_1,u_1)$, $M_2(x_2,u_2)$ nuqtalar orqali berilgan bo'lsin va l to'g'ri chiziq (OU) ka parallel bo'lmasin. Uning burchak koeffitsienti

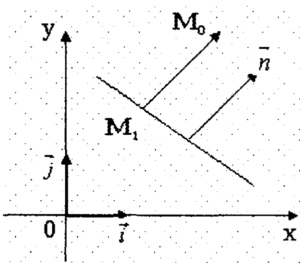
$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_2 - x_1 \neq 0 \qquad (9)$$

(8) ga (9) ni qo'ysak,

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \qquad (10)$$

kelib chiqadi. (8) da boshlang'ich $M_0(x_0,u_0)$ nuqta o'rnida $M_1(x_1,u_1)$ nuqta olindi.

(10) ni determinant ko'rinishida ham yozish mumkin:



24-чизма

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0 \qquad (11)$$

$M_3(x_3,u_3)$ nuqtaning (M_1M_2) to'g'ri chiziqda yotish sharti:

$$\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0 \qquad (12)$$

tenglikning bajarilishidir.

5. l to'g'ri chiziqning R reper o'qlari bilan kesishgan nuqtalari $M(a,0)$ va $M(0,b)$ ko'rsatilgan bo'lsin. l ning yo'naltiruvchi vektori $\overline{MN}\{-a,b\}$ koordinatalarga ega. Agar $a\neq 0,\ b\neq 0$ bo'lsa

$$\frac{x-a}{-a}=\frac{y}{b}\Rightarrow\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (13)$$

Biz to'g'ri chiziqni kesmalar bo'yicha tenglamasini aniqladik. Masalan, M(3,0) va N(0,5) nuqtalardan o'tuvchi (MN) to'g'ri chiziqning tenglamasi $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$ ko'rinishga ega.

To'g'ri chiziqning normal tenglamasi. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa

1. $B=\{0,\vec{i},\vec{j}\}$ to'g'ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasi (Dekart reper) bo'lsin. $\vec{u}=\{-B,A\}$ vektor $l: Ax+By+C=0$ to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori bo'lsa, $\vec{n}=\{A,B\}$ vektor l to'g'ri chiziqning normal vektori deyiladi. $\vec{u}$ va $\vec{n}$ vektorlar o'zaro perpendikulyar bo'lib, ularning skalyar ko'paytmasi nolga teng, ya'ni $(\vec{u}\cdot\vec{n})=0$.

2. Agar to'g'ri chiziqning $A_0x+B_0y+C_0=0$ (1) tenglamasida

$|\vec{n}| = \sqrt{A_0^2 + B_0^2} = 1$ shart bajarilsa, u holda (1) ni to‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi deyiladi.

To‘g‘ri chiziq umumiy tenglamasini normal ko‘rinishga keltirish uchun tenglamaning chap tomonini $|\vec{n}|$ ga bo‘lamiz:

$$N = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (2)$$

Kattalikni normallovchi ko‘paytuvchi deyiladi.

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

tenglama koeffitsientlarini A_0, V_0, S_0 orqali belgilab, (1) tenglamani hosil qilamiz. Haqiqatdan ham,

$$\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right)^2 + \left(\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right)^2 = A_0^2 + B_0^2 = 1.$$

1. Dekart reperida $M_0(x_0, u_0)$ nuqta va l to‘g‘ri chiziq umumiy tenglamasi $l: Ax + By + C = 0$ orqali berilgan bo‘lsin. M_0 nuqtadan l to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar o‘tkazamiz.

Perpendikulyarning l dagi asosini $M_1(x_1, y_1)$ bilan belgilaymiz M_1M_0 vektorning uzunligini M_0 nuqtadan l to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa deyiladi va $\rho(M_0, l)$ ko‘rinishida belgilanadi.

$M_0 \in l$ uchun $\rho(M_0, l) = 0$. $M_0 \notin l$ bo‘lsin. $\vec{n} = \{A, B\} \perp l$ normal vektor bo‘lgani uchun $\overrightarrow{M_0M_1}$ va $\vec{n}$ vektorlar o‘zaro kollinear bo‘ladi. $\overrightarrow{M_0M_1}$ va $\vec{n}$ vektorlar bir xil yoki qarama-qarshi yo‘nalgan bo‘lishi mumkin, ya’ni $\cos(\overrightarrow{M_1M_0}, \vec{n}) = \pm 1$.

$$(\overrightarrow{M_1M_0}, \vec{n}) = |\overrightarrow{M_1M_0}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos(\overrightarrow{M_1M_0} \hat{\ } \vec{n}) = \pm\rho(M_0, l) \cdot |\vec{n}|.$$

Agar $\overrightarrow{M_1M_0} = \{x - x_0, y_0 - y_1\}$, $\quad \vec{n} = \{A, B\}$ bo‘lsa,

$$\rho(M_0, l) = \frac{|(\overrightarrow{M_1M_0}, \vec{n})|}{|\vec{n}|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Bunda $Ax_1 + by_1 + C = 0 \Rightarrow C = -(Ax_1 + By_1)$ dan foydalandik.

Xulosa: $M_0(x_0, u_0)$ nuqtadan $l: Ax + By + C = 0$ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani hisoblash formulasi

$$\rho(M_0,l)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (4)$$

ko'rinishga ega. Masalan: $l:3x-4y-10=0$ va $M_0(5,-5)$ berilgan. $\rho(M_0,l)$ masofani aniqlang.

$$\rho(M_0,l)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|3\cdot5-4\cdot(-5)+10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{25}{5}=5.$$

Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak

Tekislikda B dekart reper o'rnatilgan bo'lsin. l_1 va l_2 to'g'ri chiziq B reperda

$$\begin{aligned} &l_1; A_1x+B_1y+C_1=0\\ &l_2; A_2x+B_2y+C_2=0 \end{aligned} \qquad (1)$$

tenglamalar bilan aniqlangan bo'lsin.

Ta'rif: Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak deb bu to'g'ri chiziqlarning yo'naltiruvchi vektorlari orasidagi burchakka aytiladi. $\vec{u_1}=\{-B_1,A_1\}$ l_1 ning, $\vec{u_2}=\{-B_2,A_2\}$ l_2 ning yo'naltiruvchi vektoridir.

$$\left(\vec{u_1},\vec{u_2}\right)=\left|\vec{u_1}\right|\cdot\left|\vec{u_2}\right|\cos(l_1{}^\wedge l_2)\Rightarrow$$

$$\cos(l_1{}^\wedge l_2)=\frac{\left(\vec{u_1},\vec{u_2}\right)}{\left|\vec{u_1}\right|\cdot\left|\vec{u_2}\right|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}} \qquad (2)$$

$\vec{u_1}\perp\vec{u_2}\Leftrightarrow l_1\perp l_2$. U holda $l_1\perp l_2\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$ (3)

(2) tenglik l_1 va l_2 to'g'ri chiziqlar perpendikulyarligining zaruriy va yetarli shartidir.

l_1 va l_2 to'g'ri chiziqlar burchak koeffitsientli tenglamalari bilan berilgan bo'lsin.

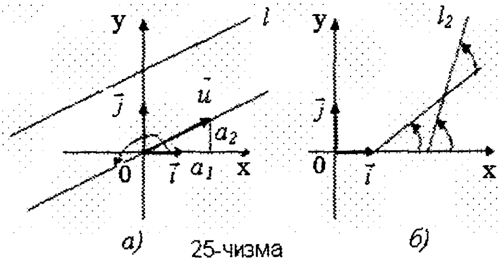
$$l_1: y=k_1x+b_1;\quad l_2: y=k_2+b_2 \quad (4)$$

Bu to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni hisoblash formulasini keltirib chiqaramiz. Ma'lumki, l to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori $\vec{a}\{a_1,a_2\}$ Ox o'qining musbat yo'nalishi bo'yicha α va α' burchak tashkil etadi. α burchak o'tkir bo'lsa, α' o'tmas bo'lib, $\alpha'=\alpha+\pi$.

$m_1 = a_1$, $m_2 = a_2$ bo'lib,

$a_1 = |\vec{u}|\cos\alpha$, $a_2 = |\vec{u}|\sin\alpha$ (5)

$k = \dfrac{a_2}{a_1} = tg\alpha = tg\alpha'$. (6)



25-чизма

Demak, l to'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti k l ning Ox o'qning musbat yo'nalishi bilan tashkil etgan α va α' burchaklardan har birining tangensiga teng.

$(\widehat{u,\ l})$- α ni l ning (Ox) o'qqa og'ish burchagi deyiladi.

l_1 va l_2 to'g'ri chiziqlarning (Ox) o'qqa og'ish burchaklari φ_1 va φ_2 bo'lsin (25-chizma). U holda

$$k_1 = tg\varphi_1,\ k_2 = tg\varphi_2 \text{ va } (l_1 \hat{\ } l_2) = \varphi_2 - \varphi_1. \quad (7)$$

$$tg(l_1 \hat{\ } l_2) = tg(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{tg\varphi_2 - tg\varphi_1}{1 + tg\varphi_1\, tg\varphi_2} \Rightarrow tg(l_1 \hat{\ } l_2) = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \qquad (8)$$

(8) dan l_1 va l_2 to'g'ri chiziqlarning parallellik va perpendikulyarlik shartlari kelib chiqadi:

$$l_1 // l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2 \qquad (9)$$

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1 \qquad (10)$$

Misol-1: $l_1 : y = 2x - 1$, $l_2 : y = -x + 1$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak aniqlansin.

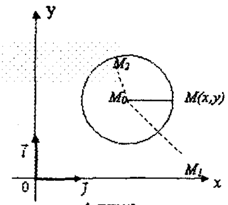
Yechish: $tg(l_1 \hat{\ } l_2) = \dfrac{-1-2}{1-2} = 3.$

Misol-2: $\begin{cases} x = a_1 t + b_1 \\ y = a_2 t + b_2 \end{cases}$ va $\begin{cases} x = c_1 t + d_1 \\ y = c_2 t + d_2 \end{cases}$ parametrik ko'rinishda berilgan to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni aniqlang.

Yechish: $k_1 = \dfrac{a_2}{a_1}$, $k_2 = \dfrac{c_2}{c_1}$; $tg\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = \dfrac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 c_1 + a_2 c_2}$.

6.6. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar. Aylana, ellips, giperbola va parabola.

Ta'rif: Tekislikda markaz deb ataluvchi berilgan M_0 nuqtadan bir xil $r>0$ masofada turuvchi nuqtalar to'plamini aylana deb ataladi.



1-чизма

P tekislik berilgan bo'lib, unda $B=\{0,\vec{i},\vec{j}\}$ dekart reper o'rnatilgan bo'lsin. M_0 nuqta B reperda $M_0(a,\ b)$ koordinatalarga ega bo'lsin. $M(x,y)$ nuqta aylananing ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. $d(M_0,M)=r$, bunda d – masofa. Kesma uzunligi formulasidan

$$d(M_0,M)=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$$

kelib chiqadi. Bundan

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \qquad (1)$$

(1) ni aylananing normal tenglamasi deyiladi. Bu tenglamani faqat aylanaga tegishli nuqtaning koordinatalari qanoatlantiradi.

Agar $M_1(x_1,y_1)$ nuqta aylanadan tashqarida yotsa, uning x_1,y_1 koordinatalarini (1) tenglamaga qo'ysak, $d(M_0,M_1)=r_1$ masofa aylana radiusi r dan katta bo'ladi, ya'ni

$$d(M_0,M_1)>r\Rightarrow(x_1-a)^2+(y_1-b)^2>r^2.$$

Agar $M_2(x_2,y_2)$ nuqta aylana ichkarisida yotsa,

$$d(M_0,M_2)<r\Rightarrow(x_2-a)^2+(y_2-b)^2<r^2.$$

Agar aylana markazi M_0 nuqta koordinatalar boshi 0 nuqta bilan ustma-ust tushsa, u holda $a=b=0$ bo'lib, (1) tenglama

$$x^2+y^2=r^2 \qquad (2)$$

ko'rinishni oladi. Buni aylananing eng sodda (kanonik) tenglamasi deyiladi.

(1)tenglamadagi qavslarni ochsak

$$x^2+y^2-2ax-2by+m=0 \qquad (3)$$

tenglama kelib chiqadi, bunda $m=a^2+b^2-r^2$. (3) tenglama ikkinchi tartibli bo'lib, uning ayrim jihatlari quyidagicha:

a) x^2 va y^2 koeffitsientlari o'zaro teng;

b) tenglamada xy ko'paytma qatnashmaydi.

$$Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0,\ A\neq 0 \qquad (4)$$

ko'rinishidagi tenglamani qaraylik.

Qanday shart bajarilsa, (4) tenglama tekislikda aylanani ifoda etadi? degan savolga javob izlaymiz. (4) tenglamaning har ikki qismini A ga bo'lamiz va (4) ga teng kuchli bo'lgan tenglamaga ega bo'lamiz:

$$x^2+y^2+\frac{D}{A}x+\frac{E}{A}y+\frac{F}{A}=0$$

Bu tenglamada quyidagicha ayniy shakl almashtirish bajaramiz.

$$\left(x^2+2\frac{D}{2A}x+\frac{D^2}{4A^2}\right)+\left(y^2+2\frac{E}{2A}y+\frac{E^2}{4A^2}\right)+\frac{F}{A}-\frac{D^2}{4A^2}-\frac{E^2}{4A^2}=0$$

yoki

$$\left(x^2+\frac{D}{2A}\right)^2+\left(y^2+\frac{E}{2A}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2} \qquad (5)$$

Quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$\frac{D}{2A}=-a,\quad \frac{E}{2A}=-b \qquad (6)$$

Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $\frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2}=r^2>0$. U holda (5) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

va aylananing (1) tenglamasi kelib chiqadi.

b) $\frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2}=0$. U holda (5) tenglama

$$(x-a)^2+(y-b)^2=0$$

ko'rinishni oladi. Bu tenglamani faqat (a,b) nuqtagina qanoatlantiradi.

v) $\frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2}=-r^2<0$. U holda (5) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=-r^2$$

va aylananing mavhum tenglamasi kelib chiqadi.

1-misol: $x^2+y^2+2x-6y+1=0$ tenglamani kanonik ko'rinishga keltiring hamda aylananing $M_0(x_0,y_0)$ markazi va r radiusini toping.

Yechish: $(x^2+2x+1)+(y^2-6y+9)-9=0 \Rightarrow (x+1)^2+(y-3)^2=9$.

Oxirgi tenglikda $x=X-1,\ y=Y+3$ almashtirishlarni bajaramiz.

$$X^2+Y^2=9 \Rightarrow M_0(-1,\ 3),\ r=3.$$

Javob: $(x+1)^2+(y-3)^2=9,\ M_0(-1,\ 3),\ r=3.$

2-misol: Markazi $M_0(1,2)$ nuqtada bo'lib, $6x+8y-15=0$ to'g'ri chiziqqa uringan aylana tenglamasini tuzing.

Yechish: M_0 nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani topamiz:

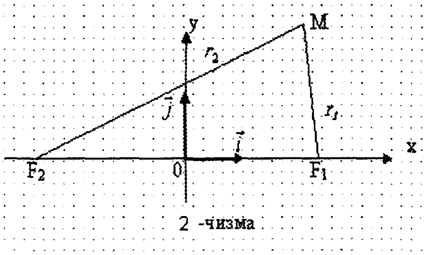
$r=d(M_0,l)=\dfrac{|6\cdot1+8\cdot2-15|}{10}=\dfrac{7}{10}$. Demak $(x-1)^2+(y-2)^2=\dfrac{49}{100}$.

Ellips

Ta'rif: Har bir nuqtasidan fokuslar deb ataluvchi berilgan ikki F_1 va F_2 nuqtalargacha bo'lgan masofalar yig'indisi berilgan [PQ] kesma uzunligiga teng bo'lgan tekislikdagi barcha nuqtalar to'plami ellips deb ataladi.

Berilgan kesma uzunligi $d(P,Q)=2a$ va fokuslar orasidagi masofa $d(F_1,F_2)=2c$ bo'lsin. Ta'rifga ko'ra, $d(P,Q)>d(F_1,F_2) \Rightarrow a>c$. M – izlangan nuqtalar to'plamining biror nuqtasi bo'lsin. $d(M,F_1)=r_1$, $d(M,F_2)=r_2$ belgilash kiritamiz. r_1 va r_2 ni ellipsning fokal radiuslari deyiladi. Ellips ta'rifiga ko'ra,

$$r_1+r_2=2a. \qquad (1)$$



2 -чизма

(1) tenglamani M nuqtaning koordinatalarida ifoda qilaylik. Buning uchun dekart koordinatalar sistemasini maxsus o'rnatamiz. (F_1F_2) to'g'ri chiziqni absissalar o'qi uchun olamiz. O'qning yo'nalishi F_2 dan F_1 tomonga. $|F_1F_2|$ kesmaning o'rtasini koordinatalar boshi O nuqta uchun olamiz va shu nuqtadan $[F,F_2]$ kesmaga perpendikulyar o'tkazamiz. $[F,F_2]$ kesmaning o'rta perpendikulyarini ordinatalar o'qi OU uchun olamiz. OU o'qdagi yo'nalishni $\vec{j}$ vektorning yo'nalishi aniqlaydi. Agar OX o'qning yo'nalishi $\vec{i}$ vektor yo'nalishi bilan belgilansa, $\vec{j}\perp\vec{i}$ bo'lib, $\vec{i}$ dan $\vec{j}$ ga soat strelkasi harakatiga teskari yo'nalishda o'tish mumkin.

O'rnatilgan $B=\{0,\vec{i},\vec{j}\}$ reperda M(x,y) koordinatalarga ega bo'lsa,

$$r_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2},\quad r_2=\sqrt{(x+c)^2+y^2} \qquad (2)$$

r_1 va r_2 ning (2) munosabatlardagi qiymatlarini (1) tenglikka qo'yib, quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a \qquad (3)$$

(3) tenglama tanlangan B reperga nisbatan ellips tenglamasidir.

Tenglamasiga ko'ra ellipsni o'rganish uchun (3) tenglamani soddaroq ko'rinishga keltiramiz. Buning uchun (3) ni

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

ko'rinishida yozib olib, har ikki tomonini kvadratga ko'taramiz:

$$x^2+2cx+y^2+c^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2\Rightarrow$$

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx.$$

Bu tenglamaning chap va o'ng qismini qaytadan yana kvadratga ko'tarib

$$x^2(a^2-c^2)+y^2a^2=a^2(a^2-c^2) \qquad (3')$$

tenglamaga ega bo'lamiz. $a>c$ ni e'tiborga olib,

$$a^2-c^2=b^2 \qquad (4)$$

belgilash kiritamiz. (3') tenglama (4) asosida

$$x^2b^2+y^2a^2=a^2b^2$$

ko'rinishga keladi. Tenglikning har ikki qismini a^2b^2 ga bo'lsak,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (5)$$

kelib chiqadi. (5) ni (3) ga teng kuchliligi hozircha noaniq. Shu narsa ma'lumki, (5) tenglama (3) tenglamaning natijasi. Endi (5) tenglamadan (3) ni yoki (1) tenglikni keltirib chiqaramiz. Buning uchun (5) tenglamani qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $M_1(x_1,y_1)$ nuqtani olamiz.

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1 \qquad (6)$$

M_1 nuqtaning fokal radiuslari

$$r_1=d(F_1,M_1)=\sqrt{(x_1-c)^2+y_1^2}, \qquad (7)$$

$$r_2=d(F_2,M_1)=\sqrt{(x_1+c)^2+y_1^2} \qquad (8)$$

(6) dan $y_1^2=b^2\left(1-\frac{x_1^2}{a^2}\right)$ ni aniqlab, bu qiymatni (7) va (8) tengliklarga qo'yamiz:

$$\left.\begin{aligned} r_1&=d(F_1,M_1)=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}x_1^2-2cx_1+\left(b^2+c^2\right)},\\ r_2&=d(F_2,M_1)=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}x_1^2+2cx_1+\left(b^2+c^2\right)} \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

$a^2-b^2=c^2$, $b^2+c^2=a^2$ bo'lgani uchun

$$\left.\begin{aligned} r_1&=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}x_1^2-2cx_1+a^2}=\sqrt{\left(\frac{c}{a}x_1-a\right)^2}=\pm\left(\frac{c}{a}x_1-a\right),\\ r_1&=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}x_1^2+2cx_1+a^2}=\sqrt{\left(\frac{c}{a}x_1+a\right)^2}=\pm\left(\frac{c}{a}x_1+a\right). \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

(10) dagi ikkita ishoralardan $r_1>0$, $r_2>0$ tengsizlikni ifodalovchi birini tanlash kerak. $0<\frac{c}{a}<1$ va (6) dan $|x_1|\le a$ bo'lgani uchun

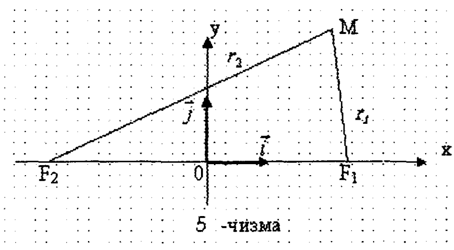
$$a+\frac{c}{a}x_1>0, \qquad a-\frac{c}{a}x_1>0.$$

U holda

$$r_1 = a - \frac{c}{a}x_1, \quad r_2 = a + \frac{c}{a}x_1. \qquad (11)$$

(11) tengliklarni xadma-xad qo'shsak, $r_1 + r_2 = 2a$ kelib chiqadi. Ko'ramizki, M_1 nuqta ellips ta'rifini qanoatlantiradi. (6) ni ellipsning kanonik tenglamasi deyiladi. r_1 va r_2 fokal radiuslar (11) ko'rinishga ega. (6) dan $a=b$ bo'lganda $x^2 + y^2 = c^2$ aylananing tenglamasi kelib chiqadi. Aylana uchun $c^2 = a^2 - b^2 = 0$, fokus markaz bilan ustma-ust tushadi.

Giperbola



5 -чизма

Ta'rif: Har bir nuqtasidan fokuslar deb ataluvchi berilgan ikki nuqtagacha bo'lgan masofalar ayirmasining absolyut qiymati berilgan [PQ] kesma uzunligi $d(P,Q) = 2a$ gat teng bo'lgan nuqtalar to'plami giperbola deb ataladi.

Fokuslar orasidagi masofani $d(F_1,F_2) = 2c$ deb belgilasak, uchburchakning ixtiyoriy tomoni qolgan ikki tomonining ayirmasidan katta bo'lgani uchun

Giperboladagi M n$d)P,Q) < d(F_1,F_2) \Rightarrow a < c.$ uqtaning F_1 va F_2 nuqtalargacha masofalari uning fokal radiuslari deyiladi va r_1 va r_2 bilan belgilanadi, ya'ni

$$r_1 = d(F_1,M), \quad r_2 = d(F_2,M).$$

Ta'rifga ko'ra, $|r_1 - r_2| = 2a \qquad (1)$

(1) tenglik faqat giperbolada yotgan M nuqtalar uchun o'rinli. Bu tenglikni M nuqtaning koordinatalari bo'yicha yozaylik. Buning uchun dekart reperni quyidagicha o'rnatamiz:

(F_1,F_2) to'g'ri chiziqni OX o'q uchun $[F_1,F_2]$ kesma o'rtasini koordinatalar boshi uchun va $[F_2,F_1]$ kesma o'rta perpendikulyarini OY o‘q uchun olamiz. OX va OY o‘qlarning yo‘naltiruvchi ort (birlik) vektorlari $\vec{i}$ va $\vec{j}$ bo‘lsin. O‘rnatilgan $B=\{0,\vec{i},\vec{j}\}$ reperda F_1(c,0), F_2(-c,0), va M(x,y) koordinatalarga ega.

$$r_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2},\quad r_2=\sqrt{(x+c)^2+y^2} \qquad (2)$$

(1) ni (2) orqali ifodalaylik.

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a \Rightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a+\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

Bu tenglamaning ikkala tomonini kvadratga ko‘tarib, soddalashtiramiz:

$$\pm a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=cx-a^2$$

Bu tenglamani yana kvadratga ko‘tarib, soddalashtirsak,

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)>0$$

$$c^2-a^2=b^2 \qquad (3)$$

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2 \qquad (4)$$

(4) tenglamaning har ikki qismini a^2b^2 ga bo‘lsak,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (5)$$

kelib chiqadi. (5) tenglama (1) tenglamaning natijasi, shunga ko‘ra M nuqtaning koordinatalari (1) ni qanoatlantirsa, (5) ni ham qanoatlantiradi. Endi (5) ni qanoatlantiruvchi har bir nuqta (1) ni ham qanoatlantirishini, ya’ni (1) tenglama (5) ning natijasi ekanini ko‘rsataylik.

(5) ni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $M_1(x_1,y_1)$ nuqtani olaylik.

$$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1 \qquad (6)$$

M_1 nuqtaning fokal radiuslari

$$r_1=d(F_1,M_1)=\sqrt{(x_1-c)^2+y_1^2}, \qquad (7)$$

$$r_2=d(F_2,M_1)=\sqrt{(x_1+c)^2+y_1^2}, \qquad (8)$$

(6) dan $y_1^2=\frac{b^2}{a^2}\left(x_1^2-a^2\right)$ ni aniqlab, bu qiymatni (7) va (8) tenglamalarga qo‘yib, (3) munosabatni e’tiborga olsak,

$$r_1 = \pm\left(\frac{c}{a}x_1 - a\right) \qquad (9)$$

$$r_2 = \pm\left(\frac{c}{a}x_1 + a\right) \qquad (10)$$

tengliklarga ega bo'lamiz. r_1 va r_2 musbat sonlar, shunga ko'ra (9) va (10) tengliklarning o'ng tomonidagi qavslar oldidagi ishoralarni shunday tanlaymizki, bu tengliklarning o'ng tomoni musbat bo'lsin. (6) dan $|x_1|>0,\ c>0 \Rightarrow \frac{c}{a}>1$. U holda $x_1>0$ bo'lsa, $\frac{c}{a}x_1-a>0$ ва $\frac{c}{a}x_1+a>0$ bo'lib, (9) va (10) tengliklardagi qavslar oldidagi ishoralardan «+» ishorasini olamiz, ya'ni

$$r_1=\frac{c}{a}x_1-a\,,\quad r_2=\frac{c}{a}x_1+a \qquad (11)$$

Bulardan $r_1-r_2=-2a$ (*).

$x_1<0$ bo'lsa, $\frac{c}{a}x_1-a<0$ ва $\frac{c}{a}x_1+a<0$ bo'lib, (9) va (10) tengliklardagi qavslar oldidagi ishoralardan «-» ishorasini olamiz, ya'ni

$$r_1=a-\frac{c}{a}x_1\,,\quad r_2=-\frac{c}{a}x_1-a \qquad (12)$$

Bulardan $r_1-r_2=2a$ (**).

(*) va (**) dan $|r_1-r_2|=2a$, ya'ni (1) kelib chiqadi. Ko'ramizki, (1) va (5) teng kuchli tenglamalar ekan. (5) ni giperbolaning kanonik tenglamasi deyiladi. (11) va (12) tenglamalardan quyidagi natija kelib chiqadi:

r_1 va r_2 fokal raddiuslar x absissalar orqali $x>0$ bo'lganda

$$r_1=\frac{c}{a}x-a\,,\quad r_2=\frac{c}{a}x+a \qquad (13)$$

$x<0$ bo'lganda

$$r_1=a-\frac{c}{a}x\,,\quad r_2=-a-\frac{c}{a}x \qquad (14)$$

ko'rinishlarda chiziqli ifodalanadi.

1-misol: Giperbola $M_1(4,6)$ nuqtadan o'tib, haqiqiy o'qi 4 ga teng bo'lsa, kanonik tenglamasi yozilsin.

Yechish: $2a=4 \Rightarrow a=2.$ $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{16}{4}-\frac{36}{b^2}=1 \Rightarrow b^2=12.$

$$Жавоб: \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1.$$

2-misol: $x^2-4y^2+2x+16y-7=0$ giperbolaning markazi va yarim o‘qlarini toping.

Yechish: $(x^2+2x+1)-4(y^2-4y+4)+8=0$

$$(x+1)^2-4(y-2)^2+8=0 \Rightarrow \frac{(y-2)^2}{2}-\frac{(x+1)^2}{8}=1.$$

Giperbolaning haqiqiy o‘qi OU to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lib, markazi (-1,2) nuqtada, yarim o‘qlari $b=\sqrt{2},\ a=\sqrt{8}$ ga teng.

3-misol: $c=6,\ e=\frac{6}{5}$ bo‘lgan giperbolaning kanonik tenglamasi yozilsin.

Yechish: $e=\frac{c}{a}=\frac{6}{5} \Rightarrow \frac{6}{a}=\frac{6}{5} \Rightarrow a=5.$

$c^2-a^2=b^2 \Rightarrow b^2=36-25=9.$ $Жавоб: \frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1.$

Parabola

Ta’rif: Har bir nuqtasidan fokus deb ataluvchi berilgan nuqtagacha va direktrisa deb ataluvchi berilgan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa o‘zaro teng bo‘lgan tekislikdagi barcha nuqtalar to‘plamiga parabola deb ataladi.

Parabola fokusini F va direktrisasini s orqali belgi laylik. F fokus s direktrisaga tegishli emas. $d(F,S)=p$ bo‘lsin. F nuqtadan s to‘g‘ri chiziqqacha perpendikulyar o‘tkazamiz va uni absissa o‘qi OX uchun olamiz. $d(F,N)=p$ bo‘lib, $N \in S.$ FN kesmaning o‘rtasi O nuqtadan OX ga perpendikulyar ordinata o‘qi OU o‘tkazamiz. OXU-dekart reper tashkil etadi. O‘rnatilgan dekart reperda $F\left(\frac{P}{2},0\right)$, $N\left(-\frac{P}{2},0\right)$ koordinatalarga ega. Direktrisaning tenglamasi $x=-\frac{p}{2}$. Fokus $F\left(\frac{P}{2},0\right)$ koordinatalarga ega. Parabola ta’rifiga ko‘ra

$$d(F,M)=d(L,M) \qquad (1)$$

(1) tenglikni koordinatalar bo'yicha kanonik holga keltiraylik. $R=\{0,\vec{i},\vec{j}\}$ reperda M nuqta M(x,u) koordinatalarga ega bo'lsin.

$$d(F,M)=\sqrt{\left(x-\frac{P}{2}\right)^2+y^2},\quad d(L,M)=\sqrt{\left(x+\frac{P}{2}\right)^2}=x+\frac{P}{2}.$$

$$\sqrt{\left(x-\frac{P}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{P}{2}\right| \qquad (2)$$

(2) tenglamaning har ikki tomonini kvadratga ko'taramiz:

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}=x^2+px+\frac{x^2}{4}\Rightarrow y^2=2px \qquad (3)$$

(3) tenglama (1) tenglikdan kelib chiqadi. Endi (3) dan foydalanib, (1) tenglikni isbotlaymiz. Ixtiyoriy $M_1(x_1,u_1)$ nuqta (3) tenglamani qanoatlantirsin: $y_1^2=2px_1$. $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ nuqta va $s:x=-\frac{p}{2}$ to'g'ri chiziqni olaylik.

$$d(F,M)=\sqrt{\left(x_1-\frac{P}{2}\right)^2+y_1^2}=\sqrt{x_1^2-Px_1+\frac{P^2}{4}+2Px_1}=\sqrt{x_1^2+Px_1+\frac{P^2}{4}}=$$

$$=\sqrt{\left(x_1+\frac{P}{2}\right)^2}=\left|x_1+\frac{P}{2}\right|=d(M_1,S)=d(L,M_1).$$

Ko'ramizki, M_1 nuqta parabolaga tegishli. (3) ni parabolaning kanonik tenglamasi deyiladi. Parabola shaklini aniqlaylik.

1)Parabola ikkinchi tartibli chiziq.

2) $y^2\geq 0$ va $p>0\Rightarrow x\geq 0$. Bundan parabolaning barcha nuqtalari $x\geq 0$ yarim tekislikka tegishligi kelib chiqadi.

3) $x=0,\ y=0\Rightarrow$ parabola koordinatalar boshidan o'tadi. O(0,0) nuqtani parabolaning uchi deyiladi.

4)x ning har bir $x>0$ qiymatiga u ning qarama-qarshi ishorali, ammo absolyut miqdorlari teng bo'lgan ikki qiymati mos keladi. Xulosa shuki, parabola OX o'qqa nisbatan simmetrik chiziq.

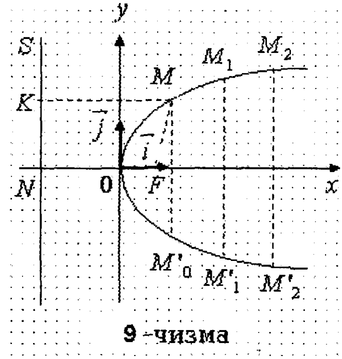
5) $y^2=2Px\Rightarrow y=\pm\sqrt{2Px}\Rightarrow x\to\infty\Rightarrow|y|\to\infty$. Yuqoidagi mulohazalar bo'yicha parabolaning shakli quyidagicha bo'lishi mumkin. (9-

chizma).

Agar parabola fokusi $F(-\frac{P}{2},0$ bo'lsa, u holda uning tenglamasi

$$y^2=-2px \quad (4)$$

ko'rinishida bo'ladi. Agar fokus OU o'qining $E\left(0,\frac{p}{2}\right)$ nuqtasi bo'lsa, u holda parabolaning tenglamasi $x^2=2Py$ ko'rinishida bo'ladi.



9-чизма

Parabolani quyidagi usul bilan yasash mumkin.

$y^2=2px$ kanonik tenglamasi bilan berilgan parabolaning fokusi va direktrisasini yasaymiz. Buning uchun OX o'qida O nuqtadan chapda va o'ngda $d(N,O)=D(O,F)=\frac{p}{2}$ bo'lgan N va F nuqtalarni belgilaymiz. N nuqtadan OX ga perpendikulyar s to'g'ri chiziq o'tkazamiz. F fokusdan boshlab OX o'qqa perpendikulyar va har biri oldingisidan $P/2$ masofada turuvchi to'g'ri chiziqlarni o'tkazamiz. O'tkazilgan to'g'ri chiziqlarning har biridan direktrisagacha bo'lgan masofani radius qilib F markazli aylana chizamiz. Bu aylana mos to'g'ri chiziqni OX o'qqa simmetrik bo'lgan ikki nuqtada kesib o'tadi. Bu nuqtalar izlangan parabolaga tegishli bo'ladi. OX o'qqa perpendikulyar istalgancha to'g'ri chiziqlarni o'tkazish mumkin. Shularning har birida ta'rifni qanoatlantiruvchi parabola nuqtalarini aniqlaymiz. Aniqlangan nuqtalarni tutashtirib parabola grafigini hosil qilamiz.

1-misol. $x^2=-12y$ parabolada fokal radiusi $r=9$ bo'lgan nuqta topilsin.

Yechish:

$$2q=-12\Rightarrow q=-6.\ F(0,3).\ r=\sqrt{x^2+(y+3)^2}=9\Rightarrow x^2+(y+3)^2=81.$$

$$(y+3)^2-12y-81=0\Rightarrow y^2-6y-72-0\Rightarrow y_1=-6,\ y_2=12.$$

Bu sonlarni $x^2=-12y$ tenglamaga qo'ysak,

$x^2 = -12\cdot(-6)=72,\ x_{1,2}=\pm6\sqrt{2}.$ $y_2=12$ tenglamani qanoatlantirmaydi, chunki $x^2=-12\cdot12=-144.$ $x_{3,4}=\pm12i$ (mavhum son)

Javob: $M_1\left(6\sqrt{2},-6\right),\ M_2\left(-6\sqrt{2},6\right).$

2-misol: $y=4x^2-6x-\frac{3}{4}$ parabola tenglamasini kanonik ko'rinishga keltirilsin va parabola uchining koordinatalari aniqlansin.

Yechish:

$$y=4\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}\right)-\frac{9}{4}-\frac{3}{4}\Rightarrow y=4\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-3\Rightarrow y+3=4\left(x-\frac{3}{4}\right)^2.$$

$y+3=Y,\ x-\frac{3}{4}=X$ belgilashlarni kiritsak, $Y=4X^2$. Parabolaning uchun $O'\left(\frac{3}{4},-3\right)$ nuqtada. $(O'Y)-$simmetriya o'qi. Javob: $Y=4X^2,\ O'\left(\frac{3}{4},-3\right).$

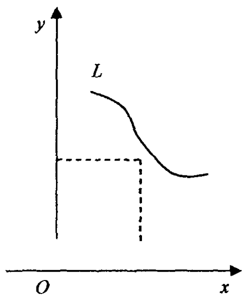
3-misol: $x^2-6x+9-4(y+1)=0$ tenglama koordinatlar boshini ko'chirish orqali kanonik ko'rinishga keltirilsin. Almashtirish formulasi yozilsin.

Yechish: $x^2-6x+9-4(y+1)=0\Rightarrow(x-3)^2=4(y+1).$

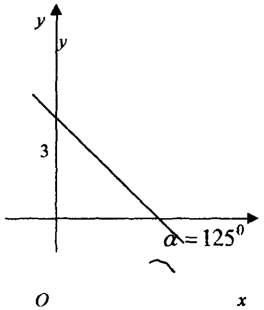
$x-3=X,\ y+1=Y$ ko'rinishidagi belgilash kiritsak, $X^2=4Y, O'(3,-1).$

Javob: Simmetriya o'qi $O'(3,-1)//(OY)$ bo'lgan parabola. Uchi $O'(3,-1)$ nuqtada, parametri $p=\frac{1}{8}.$ Almashtirish formulalari $x=X+3, y=Y-1.$

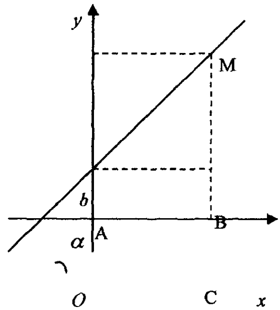
To'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi. To'g'ri chiziqning OX o'qi musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchagi va to'g'ri chiziqning ordinatlar o'qidan ajratgan kesmasining kattaligi b berilganda, uning tekislikdagi holati aniq bo'ladi. Masalan, $b=3$, $\alpha=125^0$ bo'lsa, uning holati aniq bo'ladi (5-chizma).



4-chizma



5-chizma



6-chizma

Yuqoridagi miqdorlar berilganda to‘g‘ri chiziqning tenglamasini keltirib chiqaramiz. $M(x,y)$ to‘g‘ri chiziqqa tegishli ixtiyoriy nuqta bo‘lsin (6-chizma). AMB to‘g‘ri burchakli uchburchakdan

$$\frac{BM}{AB} = tg\alpha \text{, bundan } BM = ABtg\alpha$$

6–chizmadan $y = BC + BM$; yoki $y = ABtg\alpha + b$, $AB = x$ bo‘lganligi uchun $y = xtg\alpha + b$ bo‘ladi. $tg\alpha$ to‘g‘ri chiziqning **burchak koeffitsienti** deyiladi va $tg\alpha = k$ bilan belgilaymiz. Shunday qilib,

$$y = kx + b \qquad (2)$$

munosabat kelib chiqadi. Bunga to‘g‘ri chiziqning **burchak koeffitsientli tenglamasi** deyiladi. $b = 0$ bo‘lsa, to‘g‘ri chiziq koordinatlar boshidan o‘tib, tenglamasi $y = kx$ bo‘ladi. $k = 1$ bo‘lsa, $y = x$ bo‘lib, bu birinchi koordinatlar burchagining bissektrisasi bo‘ladi.

1-misol. OX o‘qi bilan 120^0 burchak hosil qiluvchi va OY o‘qini $A(0;\ 3)$nuqtada kesib o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqni yasang va uning tenglamasini yozing.

Yechish. Shartga ko‘ra, to‘g‘ri chiziq OY o‘qini $A(0;\ 3)$ nuqtada kesib o‘tadi, demak, $b = 3$. Bu nuqtadan OX o‘qiga parallel chiziq o'tkazamiz, hamda shu to'g'ri chiziq bilan 120^0 burchak hosil qiluvchi tomon, yasalishi kerak bo'lgan to'g'ri chiziq bo'ladi .

Endi shu to'g'ri chiziq tenglamasini yozamiz. Bu holda $k = tg\ 120^0 = -\sqrt{3}$, $b = 3$ bo'lganligi uchun, $y = -\sqrt{3}\,x + 3$ to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi bo'ladi.

2) Berilgan bitta nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar dastasining tenglamasi. Berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi. $A(x_1, y_1)$, $B(x_2; y_2)$ nuqtalar berilgan bыlsin.

$$y = kx + b \tag{3}$$

to'g'ri chiziq A nuqtadan o'tsin. Bu holda A nuqtaning koordinatlari to'g'ri chiziq tenglamasini qanoatlantiradi, ya'ni $y_1 = kx_1 + b$ bo'ladi. (3) tenglikdan oxirgi tenglikni ayirsak:

$$y - y_1 = k(x - x_1) \tag{4}$$

hosil bo'ladi. (4) tenglamaga berilgan **bitta nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar dastasining tenglamasi** deyiladi.

To'g'ri chiziq $B(x_2; y_2)$ ikkinchi nuqtadan ham o'tsa,

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$$

bo'lib,

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

bo'ladi. ning yuqoridagi qiymatini (4)ga qo'yib,

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \tag{5}$$

tenglamani hosil qilamiz. (5) berilgan ikki $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ **nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi** deyiladi.

2-misol. Biror xil mahsulotdan 100 donasini ishlab chiqarishga 300 ming so'm xarajat qilinsin. 500 donasi uchun esa xarajat 1300 ming so'm bo'lsin. Xarajat funksiyasi chiziqli (to'g'ri chiziq) bo'lsa, shu mahsulotdan 400 dona ishlab chiqarish xarajatini toping.

Yechish. Masala sharti bo'yicha $A(100,\ 300)$ va $B=(500,\ 1300)$ nuqtalar berilgan. Berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasiga asosan,

$$\frac{y-300}{1300-300}=\frac{x-100}{500-100}, \text{ yoki } y=2{,}5x+50$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Oxirgi tenglamadan $x=400$ uchun, $y=1050$ ekanligini topamiz. Demak, mahsulotdan 400 dona ishlab chiqarish uchun 1050 ming so'm xarajat qilinadi.

3) To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi va uning xususiy hollari. Ikki noma'lumli

$$Ax+By+C=0$$

tenglamani qaraymiz.

Bundan, $By=-Ax-C$, $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$ bo'lib, $k=-\frac{A}{B}$, $b=-\frac{C}{B}$ bilan belgilasak, $y=kx+b$ tenglama hosil bo'ladi. Shunday qilib, $Ax+By+C=0$ tenglama ham to'g'ri chiziq tenglamasi ekanligi kelib chiqadi.

$$Ax+By+C=0 \qquad (6)$$

tenglamaga to'g'ri chiziqning **umumiy tenglamasi** deyiladi.

To'g'ri chiziq umumiy tenglamasining xususiy hollari: 1) $A\neq 0$, $B\neq 0, C=0$ bo'lsa, $Ax+By=0$ bo'lib, to'g'ri chiziq koordinatlar boshidan o'tadi, chunki $O(0;0)$ nuqtaning koordinatlari tenglamani qanoatlantiradi;

$A=0$, $B\neq 0$, $C\neq 0$, bo'lsa, $y=-\frac{C}{B}$ bo'lib, OY o'qdan $-\frac{C}{B}$ kesma ajratib, OX o'qiga parallel to'g'ri chiziq tenglamasi bo'ladi;

3) $B=0$, $A\neq 0$, $C\neq 0$ bo'lsa, $x=-\frac{C}{A}$ bo'lib, OX o'qdan $-\frac{C}{A}$ kesma ajratib , OY o'qiga parallel to'g'ri chiziq tenglamasi bo'ladi;

4) $A=0$, $C=0$, $B\neq 0$ bo'lsa, $y=0$ bo'lib, OX o'qining tenglamasi hosil bo'ladi;

5) $B=0$, $C=0$, $A\neq 0$ bo'lsa, $x=0$ bo'lib, OY o'qining tenglamasi hosil bo'ladi;

6) $A=0$, $B=0$, $C\neq 0$ bo'lsa, $C=0$ bo'lib, o'zgarmas miqdor, bir paytda 0 dan farqli hamda 0 ga teng kelib chiqadi, bunday bo'lishi mumkin emas.

3-misol. $x-2y+6=0$ to'g'ri chiziq uchun k va b parametrlarni toping.

Yechish: Buning uchun berilgan tenglamani y ga nisbatan yechamiz: $2y=x+6$, $y=1/2\cdot x+3$ bundan (2) tenglama bilan taqqoslab $k=1/2$, $b=3$, ekanligini topamiz. Shunday qilib, to'g'ri chiziq umumiy tenglamasini burchak koeffitsientli tenglamaga keltirib k va b parametrlarni topdik.

4) To'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi. To'g'ri chiziq koordinat o'qlaridan mos ravishda a va b kesmalar ajratib o'tsin (7-chizma). To'g'ri chiziq $A(a;0)$ va $B(0;b)$ nuqtalardan o'tadi. Berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasiga asosan

$$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a}, \quad \frac{y}{b}=\frac{x-a}{-a}, \quad \frac{y}{b}=-\frac{x}{a}+1$$

yoki

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \tag{7}$$

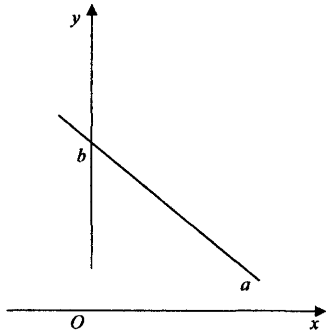
tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglamaga to'g'ri chiziqning **kesmalarga nisbatan tenglamasi** deyiladi.

4-misol. $3x+5y-15=0$ to'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasini yozing va uni yasang.

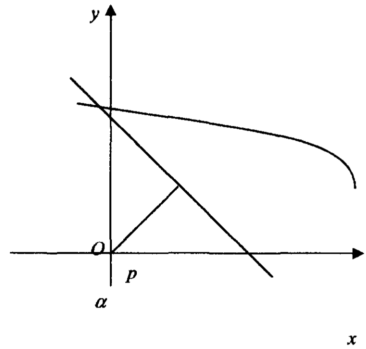
Yechish. $3x+5y-15=0$ to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini (7) ko'rinishdagi tenglamaga keltiramiz.

$$3x+5y=15, \quad \frac{3x}{15}+\frac{5y}{15}=1 \quad \text{ёки} \quad \frac{x}{5}+\frac{y}{3}=1$$

bu to'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi bo'ladi. Endi koordinat o'qlaridan mos ravishda 5 va 3 kesmalarni ajratib, ajratilgan kesmalar oxiridan yasalishi kerak bo'lgan to'g'ri chiziqni o'tkazamiz.



7-chizma.



8-chizma.

5) To'g'ri chiziqning normal tenglamasi. To'g'ri chiziqqa koordinat boshidan tushirilgan perpendikulyarning (normal) uzunligi va uning OX o'qi musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchagi α berilganda to'g'ri chiziqning tekislikdagi holati aniq bo'ladi (8-chizma) va uning tenglamasi

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \qquad (8)$$

bo'ladi. (8) tenglamaga to'g'ri chiziqning **normal tenglamasi** deyiladi. Ma'lumki, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Normal tenglamada shu shart bajarilishi kerak. To'g'ri chiziq umumiy tenglamasini normal tenglama keltirish uchun

$$M = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

normallovchi ko'paytuvchini hisoblab, uni

$$Ax + By + C = 0$$

tenglamaga ko'paytiramiz. Bu holda

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

normal tenglama hosil bo'ladi. Normallovchi ko'paytuvchining ishorasi ozod had ishorasiga teskari olinadi.

5-misol. Normalning uzunligi $p=3$ va uning OX o'qi bilan hosil qilgan burchagi 30^0 bo'lsa, to'g'ri chiziqni yasang va uning tenglamasini yozing.

Yechish. Shartga ko'ra normal OX o'qi bilan 30^0 li burchak tashkil etadi. Bu burchakni yasaymiz va uning qo'zg'aluvchi tomoni normal to'g'ri chiziq bo'ladi. Shu to'g'ri chiziqda $p=3$ kesma ajratib uning oxiridan unga perpendikulyar to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Bu yasalishi kerak bo'lgan to'g'ri chiziq bo'ladi. Endi to'g'ri chiziqning tenglamasini yozamiz. Shartga ko'ra normalning uzunligi va uning OX o'qi bilan hosil qilgan burchagi berilgan, bu holda ma'lumki, to'g'ri chiziqning (8) normal tenglamasini yozamiz. $p=3$, $\alpha=30^0$ bo'lganligi uchun $x\cos 30^0 + y\sin 30^0 - 3 = 0$ ёки $\sqrt{3}/2\cdot x + 1/2\cdot y - 3 = 0$

Natijada $\sqrt{3}x + y - 6 = 0$ tenglama hosil bo'ladi.

6-misol. $4x-3y-5=0$ to'g'ri chiziq tenglamasini normal tenglamaga keltiring.

Yechish. Normallovchi ko'paytuvchini topamiz: $M=\dfrac{1}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{1}{5}$ bo'ladi.

Berilgan tenglamani $M=1/5$ ko'paytirib, $4/5\cdot x-3/5\cdot y-1=0$ tenglamani hosil qilamiz. Bu to'g'ri chiziqning normal tenglamasi, chunki

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}+\frac{9}{25}=\frac{25}{25}=1, \qquad (\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1)$$ edi.

Takrorlash uchun savollar:

1. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak qanday topiladi?
2. Ikki to'g'ri chiziqning perpendikulyarlik sharti nima?
3. Ikki to'g'ri chiziqning parallellik sharti qanday bo'ladi?
4. Ikkita to'g'ri chiziqning kesishish nuqtasi qanday topiladi?
5. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa qanday formuladan foydalanib topiladi?

6. Ikkita parallel to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofani topish qanday bajariladi?
7. Chiziqning tenglamasi deganda nima tushuniladi?
8. To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi qanday yoziladi?
9. To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsienti deb nimaga aytiladi?
10. Berilgan bitta nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasining tenglamasi qanday?
11. Berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi qanday?
12. To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi va uning xususiy hollari nimalardan iborat?
13. To‘g‘ri chiziqning koordinat o‘qlaridan ajratgan kesmalariga nisbatan tenglamasi qanday yoziladi?

Mustaqil yechish uchun misollar:

1. $y=1/2\cdot x+4$ to‘g‘ri chiziq berilgan. Uning koordinat o‘qlari bilan kesishish nuqtalarini toping.
2. Boshlang‘ich ordinatasi $b=-3$ bo‘lgan va $y=2x+3$ to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziqni yasang va tenglamasini yozing.
3. $y=\sqrt{3}\,x-2$ va $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+3$ to‘g‘ri chiziqlar berilgan. Ularning abssissa o‘qi bilan tashkil qiladigan burchaklarini toping.
4. $y=-2/5\cdot x+3$; $y=3/7\cdot x+2/7$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.
5. $6x+8y+5=0$; $2x-4y-3=0$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.
6. 1) $3x-15y+16=0$, 2) $3x+15y-8=0$, 3) $6x-30y+13=0$, 4) $30x+6y+7=0$ to‘g‘ri chiziqlardan qaysilari perpendikulyar va qaysilari parallel.
7. Quyidagi to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchaklarni toping:

1) $\begin{matrix} y=2/3\cdot x-7 \\ y=5x+9 \end{matrix}$; 2) $\begin{matrix} 2x-4y+9=0 \\ 6x-2y-3=0 \end{matrix}$

3) $\begin{cases} y = 3/7 \cdot x - 2 \\ 7x + 3y + 5 = 0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x/4 - y/5 = 1 \\ x/2 + y/18 = 1 \end{cases}$

8. Tomonlari $4x - 3y + 5 = 0$, $3x + 4y + 4 = 0$, $x - 7y + 18 = 0$ to'g'ri chiziqlarda yotgan uchburchakning ichki burchaklarini toping.

9. $A(4;\ 5)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar dastasining tenglamasini yozing va ulardan $2x - 3y + 6 = 0$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar va parallel bo'lganlarini ajrating.

10. Uchburchak tomonlari

$$7x - 6y + 9 = 0;\ \ 5x + 2y - 25 = 0;\ \ 3x + 10y + 29 = 0$$

tenglamalar bilan berilgan. Uning uchlarini va balandliklarining tenglamalarini toping.

11. Uchlari $P(-4;\ 0)$, $Q(0;\ 4)$ va $R(2;\ 2)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak medianalarining tenglamalarini toping.

12. To'g'ri chiziqning koordinatlar boshidan uzoqligi 3, unga koordinatlar boshidan tushirilgan perpendikulyar OX o'qi bilan $\alpha = 45^0$ burchak hosil qilsa, to'g'ri chiziq tenglamasini yozing.

13. $x - y + 3 = 0$ to'g'ri chiziqqa koordinatlar boshidan tushirilgan perpendikulyarning uzunligini va uning OX o'qi bilan tashkil qilgan burchagini toping.

14. Uchlari $P(0;\ 5)$, $Q(-3;\ 1)$va $R(-1;\ -2)$nuqtalarda bo'lgan uchburchakning R nuqtasidan o'tkazilgan balandligining uzunligini toping.

15. $5x - 12y - 26 = 0$, $5x - 12y - 65 = 0$ parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi masofani toping.

16. Trapetsiya asoslarining tenglamalari $3x - 4y - 15 = 0$, $3x - 4y - 35 = 0$ berilgan. Trapetsiyaning balandligini toping.

17. Uchlari $A(-2;\ 0)$, $B\ (2;\ 4)$ va $C(4;\ 0)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak tomonlarining, AE medianasining, AD balandligining tenglamalarini hamda AE medianing uzunligini toping.

IX BOB. FUNKSIYA TUSHUNCHASI

To'plamlar nazariyasi deyarli barcha matematik fanlarnining asosida yotadi. Bu nazariya asoslari 1879–1884 yillarda olmon matematigi ***Georg Kantor*** tomonidan chop etilgan bir qator maqolalarda yoritib berildi. ***To'plam*** matematikaning poydevorida yotgan boshlang'ich tushunchalardan biri bo'lgani uchun u ta'rifsiz qabul etiladi. To'plam deyilganda biror bir xususiyati bo'yicha umumiylikka ega bo'lgan obyektlar majmuasi tushuniladi. Masalan, I kurs talabalari to'plami, [0,1] kesmadagi nuqtalar to'plami, natural sonlar to'plami, firma xodimlari to'plami, korxonada ishlab chiqarilgan mahsulotlar to'plami va hokazo. Matematikada to'plamlar A,B,C,D,... kabi bosh harflar bilan belgilanadi. A,B,C,D, to'plamlarga kiruvchi obyektlar ularning ***elementlari*** deyiladi va odatda, mos ravishda kichik $a, b, c, d, \ldots$ kabi harflar bilan belgilanadi. Bunda «a element A to'plamga tegishli (tegishli emas)» degan tasdiq $a \in A$ ($a \notin A$) kabi yoziladi.

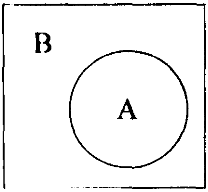
1-*ta'rif:* Birorta ham elementga ega bo'lmagan to'plam ***bo'sh to'plam*** deyiladi va $\varnothing$ kabi belgilanadi.

Masalan, { sin$x$ = 2 tenglamaning yechimlari}$=\varnothing$, { perimetri 0 bo'lgan kvadratlar }$=\varnothing$, { kvadrati manfiy bo'lgan haqiqiy sonlar }= $\varnothing$.

Algebrada 0 soni qanday vazifani bajarsa, to'plamlar nazariyasida $\varnothing$ to'plam shunga o'xshash vazifani bajaradi.

2-*ta'rif:* Agar A to'plamga tegishli har bir a element boshqa bir B to'plamga ham tegishli bo'lsa ($a \in A \Rightarrow a \in B$), u holda A to'plam B ***to'plamining qismi*** deyiladi va $A \subset B$ (yoki $B \supset A$) kabi belgilanadi.

Quyidagi 1-rasmda B kvadratdagi, A esa uning ichida joylashgan doiradagi nuqtalar to‘plamini ifodalasa, unda $A \subset B$ bo‘ladi.



1-rasm

Masalan, korxonada ishlab chiqarilayotgan oliy navli mahsulotlar to‘plamini A, barcha mahsulotlar to‘plamini esa B deb olsak, unda $A \subset B$ bo‘ladi.

Ta’rif dan ixtiyoriy A to‘plam uchun $A \subset A$ va $\varnothing \subset A$ tasdiqlar o‘rinli bo‘lishi kelib chiqadi. Shu sababli to‘plamlar uchun $\subset$ belgisi sonlar uchun $\leq$ belgiga o‘xshash ma’noga egadir.

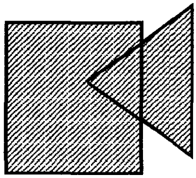
3-ta’rif: Agarda A va B to‘plamlar uchun $A \subset B$ va $B \subset A$ shartlar bir paytda bajarilsa, bu to‘plamlar ***teng*** deyiladi va A=B kabi yoziladi.

Masalan, $A=\{-1;1\}$ va $B=\{x^2-1=0$ tenglama ildizlari$\}$, C= {badiiy asarni yozish uchun ishlatilgan harflar} va D={alfavitdagi harflar} to‘plamlari uchun A=B, C=D bo‘ladi.

To‘plamlar ustida amallar va ularning xossalari. Algebrada a va b sonlar ustida qo‘shish va ko‘paytirish amallari kiritilgan bo‘lib, ular $A+B=B+A$ va $AB=BA$ (kommutativlik, ya’ni o‘rin almashtirish), $A+(B+C)=(A+B)+C$ va $A(BC)=(AB)C$ (assotsiativlik, ya’ni guruhlash), $A(B+C)=AB+AC$ (distributivlik, ya’ni taqsimot) qonunlariga bo‘ysunadilar. Bulardan tashqari, har qanday a soni uchun $A+0=A$ va $A \cdot 0=0$ tengliklar ham o‘rinli bo‘ladi. Endi to‘plamlar ustida algebraik amallar kiritamiz.

4-ta’rif: a va b to‘plamlarning ***birlashmasi (yig‘indisi)*** deb shunday c to‘plamga aytiladiki, u a va b to‘plamlardan kamida bittasiga tegishli bo‘lgan elementlardan tashkil topgan bo‘ladi va $A \cup B$ kabi belgilanadi.

Agar a kvadratdagi, b esa uchburchakdagi nuqtalar to‘plamidan iborat bo‘lsa, unda ularning birlashmasi $A \cup B$ quyidagi 2-rasmdagi shtrixlangan sohadan iborat bo‘ladi:

2-rasm  B

Shunday qilib, $A \cup B$ to'plam yoki a to'plamga, yoki b to'plamga, yoki A va B to'plamlarning ikkalasiga ham tegishli elementlardan iboratdir. Masalan, A={1,2,3,4,5} va B={2,4,6,8} bo'lsa, $A \cup B$={1,2,3,4,5,6,8}, C={i navli mahsulotlar} va d={ii navli mahsulotlar } bo'lsa, unda $C \cup D$={i yoki ii navli mahsulotlar} to'plamni ifodalaydi.

To'plamlarni birlashtirish amali, sonlarni qo'shish amali singari, $A \cup B = B \cup A$ (kommutativlik), $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (assotsiativlik) Qonunlarga bo'ysunadi. Bulardan tashqari, $A \cup \varnothing = A$ va sonlardan farqli ravishda, $A \cup A = A$, $B \subset A$ bo'lsa $A \cup B = A$ tengliklar ham o'rinli bo'ladi. bu tasdiqlarning barchasi to'plamlar tengligi **ta'rif**idan foydalanib isbotlanadi. Misol sifatida, oxirgi tenglikni isbotlaymiz:

$x \in A \cup B \Rightarrow x \in A$ yoki $x \in B \Rightarrow x \in A \Rightarrow (A \cup B) \subset A$;

$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow A \subset (A \cup B)$

Demak, $(A \cup B) \subset A$, $A \subset (A \cup B)$ va **ta'rifga** asosan, $a \cup b = a$.

Bir nechta $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ to'plamlarning yig'indisi

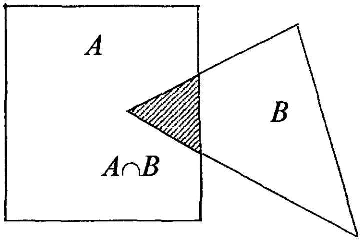
$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

kabi belgilanadi va ulardan kamida bittasiga tegishli bo'lgan elementlar to'plami sifatida aniqlanadi.

5-*ta'rif:* a va b to'plamlarning *kesishmasi (ko'paytmasi)* deb shunday c to'plamga aytiladiki, u a va b to'plamlarning ikkalasiga ham tegishli bo'lgan elementlardan tashkil topgan bo'ladi va $A \cap B$ kabi belgilanadi.

Agar a kvadratdagi, b esa uchburchakdagi nuqtalar to'plamini belgilasa, unda ularning $A\cap B$ kesishmasi 3-rasmdagi shtrixlangan soha kabi ifodalanadi:

3-rasm



Shunday qilib, $a\cap b$ to'plam a va b to'plamlarning umumiy elementlaridan tashkil topgan bo'ladi. shu sababli agar ular umumiy elementlarga ega bo'lmasa, ya'ni kesishmasa, unda $a\cap b=\varnothing$ bo'ladi.

Masalan, $A=\{1,2,3,4,5\}$ va $B=\{2,4,6,8\}$ bo'lsa $A\cap B=\{2,4\}$,

C={tekshirilgan mahsulotlar} va d={sifatli mahsulotlar} bo'lsa, unda $C\cap D$={tekshirishda sifatli deb topilgan mahsulotlar} to'plamni ifodalaydi.

To'plamlarni kesishmasi amali quyidagi qonunlarga bo'ysunadi:

$A\cap B=B\cap A$ (kommutativlik),

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ (assotsiativlik),

$A\cap(b\cup c)=(a\cap b)\cup(a\cap c)$,

$A\cup(b\cap c)=(a\cup b)\cap(a\cup c)$ (distributivlik),

Shu bilan birga $A\cap A=A$, $A\cap\varnothing=\varnothing$ va $B\subset A$ bo'lsa, $A\cap B=B$ tengliklar ham o'rinli bo'ladi. Bu tasdiqlarning o'rinli ekanligiga yuqorida ko'rsatilgan usulda ishonch hosil etish mumkin.

Bir nechta $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ to'plamlarning kesishmasi

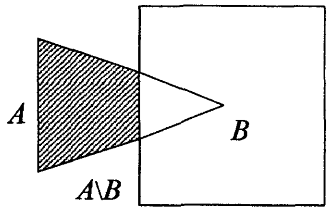
$$A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n=\bigcap_{k=1}^{n}A_k$$

kabi belgilanadi va barcha a_k $(k=1,2,\cdots,n)$ to'plamlarga tegishli bo'lgan umumiy elementlardan tuzilgan to'plam kabi aniqlanadi.

6-ta'rif: a va b to'plamlarning *ayirmasi* deb a to'plamga tegishli, ammo b to'plamga tegishli bo'lmagan elementlardan tashkil topgan to'plamga aytiladi va a\b kabi belgilanadi.

Agar a uchburchakdagi, b esa kvadratdagi nuqtalar to'plamini belgilasa, unda ularning a\b ayirmasi 4-rasmdagi shtrixlangan sohadan iborat bo'ladi :

4-rasm



masalan, a={1,2,3,4,5} va b={1,3,7,9} bo'lsa, unda a\b ={2,4,5}, в\a={7,9};

c={korxonada ishlab chiqarilgan mahsulotlar}va d={sifatli mahsulotlar} bo'lsa,

c\d={ korxonada ishlab chiqarilgan sifatsiz mahsulotlar }.

Demak, a\b to'plam a to'plamning b to'plamga tegishli bo'lmagan elementlaridan hosil bo'ladi. To'plamlar ayirmasi uchun

a\a=∅, a\∅=a , ∅\a=∅

va a⊂b bo'lsa a\b=∅ munosabatlar o'rinlidir.

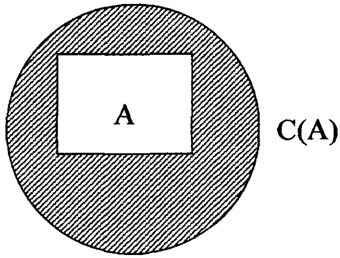
7-ta'rif: agar ko'rilayotgan barcha to'plamalarni biror ω to'plamning qism to'plamlari kabi qarash mumkin bo'lsa, unda ω *universal to'plam* deb ataladi.

Masalan, sonlar bilan bog'liq barcha to'plamlar uchun ω=(–∞, ∞) , insonlardan iborat to'plamlar uchun ω={barcha odamlar} universal to'plam bo'ladi.

8-ta'rif: agar a to'plam ω universal to'plamning qismi bo'lsa, unda ω\a to'plam *a to'plamning to'ldiruvchisi* deb ataladi va c (a) kabi belgilanadi.

Agar quyidagi chizmada ω universal to'plam doiradagi, a to'plam esa uning ichida joylashgan to'ri to'rtburchakdagi nuqtalardan iborat bo'lsa, uning to'ldiruvchisi c(a) 5-rasmdagi shtrixlangan sohadan iborat bo'ladi:

5-rasm



Demak, c(a) to‘plam a to‘plamga kirmaydigan elementlardan tashkil topgan bo‘ladi, ya’ni $x \in A \Rightarrow x \notin C(A)$, $x \notin A \Rightarrow x \in C(A)$.

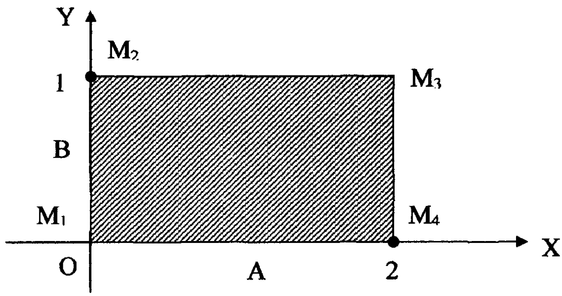
Masalan, ω={barcha korxonalar}, a={rejani bajargan korxonalar} bo‘lsa, unda c(a)={ rejani bajarmagan korxonalar} to‘plami bo‘ladi;

ω={1,2,3, · · ·, n, · · ·}–natural sonlar to‘plami, a={2,4,6, · · · , 2n, · · ·}–juft sonlar to‘plami, b={5,6,7, · · ·, n, · · ·}– 4dan katta natural sonlar to‘plami bo‘lsa, unda

c(a)={1,3,5, · · ·, 2n–1, · · ·}– toq sonlar, c(b)={1,2,3,4}–5dan kichik natural sonlar to‘plamlarini ifodalaydi.

9-ta’rif: a va в to‘plamlarning *dekart ko‘paytmasi* deb a×b kabi belgilanadigan va (x, y) $(x \in$ a, $y \in$ b) ko‘rinishdagi juftliklardan tuzilgan yangi to‘plamga aytiladi.

Masalan, a=[0,2] va b=[0,1] bo‘lsa, a×b to‘plam tekislikdagi (x, y) $(x \in$ a=[0,2], $y \in$ b=[0,1]) nuqtalardan, ya’ni uchlari $M_1(0,0)$, $M_2(0,1)$, $M_3(2,1)$ va $M_4(2,0)$ nuqtalarda joylashgan to‘g‘ri to‘rtburchakdan iborat bo‘ladi (6-rasmga qarang):



6-rasm

Agar c={tajribali ishchilar} va d={yosh ishcilar} bo‘lsa, unda $c \times d$ tajribali va yosh ishchidan iborat bo‘lgan turli “ustoz-shogird” juftliklaridan iborat to‘plamni ifodalaydi.

Umuman olganda, to‘plamlarning dekart ko‘paytmasi uchun $a \times b \neq b \times a$, ya’ni kommutativlik qonuni bajarilmaydi. masalan, a=[0,2] va b=[0,1] to‘plamlar uchun $a \times b$ asosining uzunligi 2, balandligi 1 bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchakni , $b \times a$ esa asosining uzunligi 1, balandligi 2 bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchakni ifodalaydi va bunda $a \times b \neq b \times a$ bo‘ladi.

Takrorlash uchun savollar:

1. To‘plamlar nazariyasining ahamiyati nimadan iborat?
2. To‘plamlar nazariyasiga kim asos solgan?
3. To‘plam deganda nima tushuniladi?
4. To‘plam elementi qanday aniqlanadi?
5. To‘plamlarga misollar keltiring.
6. Qanday to‘plam bo‘sh to‘plam deyiladi?
7. To‘plam qismi qanday ta’riflanadi?
8. Qachon ikkita to‘plam teng deyiladi?
9. To‘plamlar birlashmasi qanday kiritiladi?
10. To‘plamlar birlashmasi amali qanday xossalarga ega?
11. To‘plamlar kesishmasi qanday ta’riflanadi?
12. To‘plamlar kesishmasi amali qanday xossalarga ega?
13. To‘plamlar ayirmasi qanday aniqlanadi?
14. Universal to‘plam nima?
15. To‘plam to‘ldiruvchisi deb nimaga aytiladi?
16. To‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi qanday aniqlanadi?
17. To‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi uchun kommutativlik qonuni o‘rinlimi ?

X BOB. SONLI TO‘PLAMLAR. HAQIQIY SONLAR TO‘PLAMI, XOSSALARI VA MODULI

Haqiqiy sonlar. Narsalarni, buyumlarni sanash zaruryati tufayli **natural** sonlar to‘plami $N=\{1,2,3...\}$ paydo bo‘ladi. Bu to‘plamga natural sonlarga qarama-qarshi sonlarni hamda nolni qo‘shish (birlashtirish) natijasida **butun** sonlar to‘plami $Z=\{...,-n,...,-3,-2,-1,0,1,2,..., n,...\}$ yuzaga keldi. Keyinchalik ikkita butun sonlarning nisbati ko‘rinishida tasvirlanadigan **ratsional** sonlar to‘plami $Q=\{p/q\}$ (bunda $p,q\in Z, q\neq 0$) kiritildi. Har qanday p butun sonni $\frac{p}{1}$ ko‘rinishda tasvirlash mumkin bo‘lganligi uchun butun sonlar ham ratsional sonni tashkil etadi. Istalgan sonni ikkita butun sonlarning nisbati ko‘rinishda tasvirlash mumkinmi, degan savolga yo‘q degan javob olindi. Masalan, tomonlari bir birlikka teng kvadratning diagonali uzunligi ($d=\sqrt{2}$), shuningdek, aylana uzunligining uning diametriga nisbati (π) kabi sonlarni ikkita butun sonlarning nisbati ko‘rinishida tasvirlab bo‘lmasligi isbotlandi.

Ratsional bo‘lmagan sonlar **irratsional** sonlar deyiladi.

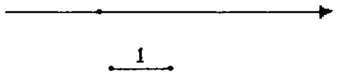
Har qanday ratsional son chekli yoki cheksiz davriy o‘nli kasr shaklida tasvirlanishini irratsional son esa cheksiz davriy bo‘lmagan o‘nli kasr shaklida tasvirlanishni eslatib o‘tamiz. Masalan, $\frac{1}{4}=0{,}25$ chekli o‘nli kasr, $\frac{7}{9}=0{,}777...=0{,}(7)$ cheksiz davriy kasr, $\sqrt{2}=1{,}414...$, $\pi=3{,}14159...$, $e=2{,}7182818284...$ cheksiz davriy bo‘lmagan o‘nli kasrlardir.

Ratsional va irratsional sonlar to‘plamlarining birlashmasi haqiqiy sonlar to‘plamini tashkil etadi va u R orqali belgilanadi.

Haqiqiy sonlarning geometrik tasviri

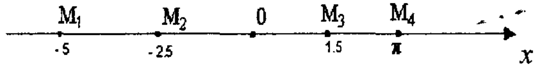
To'g'ri chiziq nuqtalarining koordinatalari. Sonlar o'qi yoki o'q deb sanoq boshi – koordinatalar boshi, musbat yo'nalish hamda uzunligi bir birlikka teng sanaluvchi kesma-o'lchov birligi tanlangan to'g'ri chiziqqa aytiladi.

Yo'nalish chizmada strelka orqali belgilanadi. Agarda sonlar o'qi 1-chizmada ko'rsatilganidek tanlansa, musbat x haqiqiy songa sonlar o'qining sanoq boshi



1-chizma.

0 dan o'ngdagi undan x masofada bo'lgan nuqtasi, manfiy x songa 0 sanoq boshidan chapdagi undan $-x$ masofada bo'lgan nuqtasi mos keladi; 0 songa sonlar o'qining sanoq boshi mos keladi. x haqiqiy son sonlar o'qida uni tasvirlovchi M nuqtaning **koordinatasi** deb aytiladi va $M(x)$ ko'rinishda yoziladi.



2-chizma.

2-chizmada -5, -2.5, 1.5, π haqiqiy sonlarni sonlar o'qida mos ravishda tasvirlovchi $M_1(-5)$, $M_2(-2.5)$, $M_3(1.5)$ va $M_4(\pi)$, nuqtalar ko'rsatilgan.

Shunday qilib, istalgan x haqiqiy songa sonlar o'qining aniq bitta M nuqtasi va aksincha sonlar o'qining istalgan M nuqtasiga bitta haqiqiy son shu nuqtaning koordinatasi x mos kelar ekan. Boshqacha aytganda, haqiqiy sonlar to'plami bilan sonlar o'qining nuqtalari orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud ekan.

Haqiqiy sonlar to'plamining muhim xossalaridan biri uning tartiblanganligi, ya'ni istalgan ikkita o'zaro teng bo'lmagan x_1 va x_2 haqiqiy sonlar uchun $x_1 > x_2$ va $x_1 < x_2$ munosabatlardan faqatgina biri bajariladi, xolos.

Agar sonlar o‘qi 1-chizmada ko‘rsatilganidek ya’ni gorizontal joylashtirilgan bo‘lib yo‘nalish chapdan o‘ngga tayinlangan bo‘lsa, katta haqiqiy sonni tasvirlovchi nuqta kichik haqiqiy sonni tasvirlovchi nuqtadan o‘ngda yotadi.

Haqiqiy sonning absolyut (mutloq) qiymati

$x \geq 0$ haqiqiy sonning absolyut qiymati (moduli) deb shu sonning o‘ziga, $x<0$ sonning absolyut qiymati deb $-x$ songa aytiladi. x haqiqiy sonning absolyut qiymati $|x|$ kabi yoziladi.

Shunday qilib:

$$|x| = \begin{cases} x, & agar\ x \geq 0\ bo'lsa, \\ -x, & agar\ x < 0\ bo'lsa. \end{cases}$$

Masalan, $|8|=8$, $|5|=5$, $|-5|=5$.

Noldan farqli istalgan haqiqiy sonning moduli musbat bo‘lar ekan.

Istalgan $\varepsilon>0$ uchun $|x|<\varepsilon$ va $-\varepsilon<x<\varepsilon$ tengsizliklar teng kuchliligini eslatib o‘tamiz.

Haqiqiy sonning absolyut qiymati quyidagi xossalarga ega:

1. $|x_1+x_2| \leq |x_1|+|x_2|$.
2. $|x_1-x_2| \geq |x_1|-|x_2|$.
3. $|x_1 \cdot x_2 \cdots x_n| = |x_1| \cdot |x_2| \cdots |x_n|$.
4. $\left|\frac{x_1}{x_2}\right| = \frac{|x_1|}{|x_2|}$.

Mustaqil yechish uchun misollar:

To‘plam tushunchasi matematikaning boshlang‘ich tushunchalaridan bo‘lib, u **ta’rif**siz qabul qilinadi. To‘plamni tashkil qiluvchi ob’ektlar uning elementlari deyiladi. To‘plamlarni A, a, a, A yoki A harflari bilan belgilaymiz. To‘plam bir qancha elementlardan iborat bo‘lishi mumkin, Quyidagi yozuv: $a \in A$, a elementni A to‘plamga tegishliligini bildiradi.

$a \notin A$ a elementni A to‘plamga tegishli emasligini bildiradi, yoki mantiq belgisidan foydalangan holda $\neg(a \in A)$ ko‘rinishda yozishimiz mumkin:

$A, V \subset M = \{1, \dots, 20\}$ to‘plamlar uchun quyidagilarni aniqlang:

$A \setminus V$, $V \setminus A$, $A \cup V$, $A \cap V$, A', V'. $A=\{1,3,5,7,9\}$, $B=\{2,4,7,8\}$.

Yechish: Berilgan to‘plamlar uchun to‘plamlar ustida bajariladigan amallarning **ta’riflarini** qo‘llab quyidagi to‘plamlarni hosil qilamiz:

$A \setminus B=\{1,3,5,9\}$; $B \setminus A=\{2,4,8\}$; $A \cup V=\{1,2,3,4,5,7,8,9\}$;

$A \cap V=\{7\}$; $A'=\{2,4,6,8,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20\}$;

$V'=\{1,3,5,6,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20\}$.

$(A \cup V) \setminus S = (A \setminus S) \cup (V \setminus S)$ tenglikni isbotlang.

To‘plamlarning tengligini isbotlash uchun $M=N \Leftrightarrow M \subset N \wedge N \subset M$ tasdiqdan foydalanamiz.

1) $\forall x \in ((A \cup V) \setminus S) \Rightarrow x \in (A \cup V) \wedge x \notin S \Rightarrow x \in A \vee x \in V \wedge x \notin S \Rightarrow \Rightarrow (x \in A \wedge x \notin S) \vee (x \in V \wedge x \notin S) \Rightarrow x \in (A \setminus S) \vee x \in (V \setminus S) \Rightarrow \Rightarrow x \in ((A \setminus S) \cup (V \setminus S))$. Bundan $(A \cup V) \setminus S \subset (A \setminus S) \cup (V \setminus S)$ ekanligi kelib chiqadi.

2) $\forall u \in ((A \setminus S) \cup (V \setminus S)) \Rightarrow u \in (A \setminus S) \vee u \in (V \setminus S) \Rightarrow (u \in A \wedge u \notin S) \vee$ $\vee (u \in V \wedge u \notin S) \Rightarrow u \in A \vee u \in V \wedge u \notin S) \Rightarrow u \in (A \cup V) \wedge u \notin S \Rightarrow$ $\Rightarrow u \in ((A \cup V) \setminus S)$. Bundan $(A \setminus S) \cup (V \setminus S) \subset (A \cup V) \setminus S$ ekanligi kelib chiqadi.

Demak, $(A \cup V) \setminus S = (A \setminus S) \cup (V \setminus S)$.

3) To‘plamlar jufti berilgan:

a) A = {Navoi, Bobur, Furqat, Nodirabegim} va B = barcha shoir va shoiralar to‘plami;

b) C = qavariq to‘rtburchaklar to‘plami va D = to‘rtburchaklar to‘plami;

d) J = Samarqand olimlari to‘plami, F = O‘zbekiston olimlari to‘plami;

e) K = barcha tub sonlar to‘plami, M = manfiy sonlar to‘plami.

Juftlikdagi to‘plamlardan qaysi biri ikkinchisining qism-to‘plami bo‘lishini aniqlang.

4. Quyidagi to‘plamlar uchun $A \subset B$ yoki $B \subset A$ munosabatlardan qaysi biri o‘rinli:

a) $A=\{a, b, c, d\}$, $B=\{a, c, d\}$; b) $A=\{a, b\}$, $B=\{a, c, d\}$; d) $A=\varnothing$, $B=\varnothing$

e) $A=\varnothing$, $B=\{a, b, c\}$; f) $A=\varnothing$, $B=\{\varnothing\}$; g) $A=\{\{\varnothing\}, a, 0\}$, $B=\{a\}$;

h) $A=\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$, $B=\{\{a, b\}, c\}$; i) $A=\{\{0\}, 0\}$, $B=\{\varnothing, \{\{0\}, 0\}\}$?

5. Munosabatning to‘g‘ri yoki noto‘g‘ri ekanligini aniqlang:

a) $\{1; 2\}\subset\{\{1; 2; 3\}; \{1; 3\}; 1; 2\}$; b) $\{1; 2\}\in\{\{1; 2; 3\}; \{1; 3\}; 1; 2\}$;

d) $\{1; 3\}\subset\{\{1; 2; 3\}; \{1; 3\}; 1; 2\}$; e) $\{1; 3\}\in\{\{1; 2; 3\}; \{1; 3\}; 1; 2\}$.

6. Quyidagi to‘plamlar tengmi?

a) $A=\{1; 4; 6\}$ va $B=\{6; 4; 2\}$; b) $A=\{1; 2; 3\}$ va $B=\{1; 11; 111\}$;

d) $A=\{\{1; 2\}; \{2; 3\}\}$ va $B=\{2; 3; 1\}$; e) $A=\{\sqrt{256}; \sqrt{81}; \sqrt{16}\}$ va $B=\{2^2; 3^2; 4^2\}$.

7. $x=\{x \mid x^2-5x+6=0\}$ va $A=\{2; 3\}$ to‘plamlar haqida nima deyish mumkin?

8. $M=(36; 29; 15; 68; 27)$, $P=(4; 15; 27; 47; 36; 90)$, $Q=(90; 4; 47)$ to‘plamlar berilgan. $M\cap P, M\cap Q, P\cap Q, M\cap P\cap Q$ larni toping?

9. A-18 ning hamma natural bo‘luvchilari to‘plami, B-24 ning hamma natural bo‘luvchilari to‘plami. $A\cap B$ to‘plam elementlarini ko‘rsating?

10. P ikki xonali natural sonlar to‘plami, S barcha toq natural sonlar to‘plami bo‘lsa, $K=P\cup S$ to‘plamga qaysi sonlar kiradi?

a) $21\in$K; b) $32\in$K; d)$7\notin$K; e) $17\notin$K deyish to‘g‘rimi?

11. “Matematika” va “grammatika” so‘zlaridagi harflar to‘plamini tuzing. Bu to‘plamlar kesishmasini toping?

12. $[1, 5]$ va $[3, 7]$ kesmalarning kesishmasini toping?

13. $P=\{a, b, c, d, e, f\}$ va $J=\{a, g, z, e, k\}$ to‘plamlar birlashmasini toping?

14. $A=\{n \mid n\in N, n<5\}$ va $B=\{n \mid n\in N, n>7\}$ to‘plamlar birlashmasini toping?

a) $4\in A\cup B$; b) $-3\in A\cup B$; d) $6\in 4\cup 5$ deyish to‘g‘rimi?

15. $A=\{2, 4, 6, ..., 40\}$, $B=\{1, 3, 5, ..., 37\}$, $C=\{\{a, b\}, \{c, d\}, \{e, f\}, g, h\}$ to'plamlarning har biridagi elementlar sonini aniqlang. $A\cup B$ da nechta element mavjud?

16. $A=\{2, 3, 4, 5, 7, 10\}$, $B=\{3, 5, 7, 9\}$, $C=\{4, 9, 11\}$ bo'lsin. Quyidagi to'plamlarda nechtadan element mavjud:

a) $A\cup(B\cup C)$; b) $(C\cup B)\cup A$; d) $A\cap(B\cup C)$;

e) $A\cup(B\cap C)$; f) $A\cap(B\cap C)$; g) $B\cap(A\cup C)$.

17. $A=\{x \mid -5\le x\le 10\}$, $B=\{x \mid x\in N,\ 3\le x\le 15\}$ bo'lsin. $A\setminus B$ va $B\setminus A$ to'plam elementlarini toping?

18. Sinfdagi bir necha o'quvchi marka yig'dilar. 15 o'quvchi O'zbekiston markalarini, 11 kishi chet el markalarini, 6 kishi ham O'zbekiston markalarini, ham 16 chet el markalarini yig'di. Sinfda necha o'quvchi marka to'plagan?

19. 32 o'quvchining 12 tasi voleybol seksiyasiga, 15 tasi basketbol seksiyasiga, 8 kishi esa ikkala seksiyaga ham qatnashadi. Sinfdagi necha o'quvchi hech bir seksiyaga qatnashmaydi?

19. 30 o'quvchidan 18 tasi matematikaga, 17 tasi esa fizikaga qiziqadi. Ikkala fanga ham qiziqadigan o'quvchilar soni nechta bo'lishi mumkin?

(Ikkala fanga ham qiziqmaydigan o'quvchilar soni $k\in(0, 1, 2, 3, ..., 12)$).

20. 100 odamdan iborat sayyohlar guruhida 10 kishi nemis tilini ham, fransuz tilini ham bilmaydi, 75 tasi nemis tilini, 83 tasi esa fransuz tilini biladi. Ikkala tilni ham biladigan sayyohlar sonini toping?

21. 26 o'quvchining 14 tasi shaxmatga, 16 tasi shashkaga qiziqadi. Ham shashkaga, ham shaxmatga qiziqadigan o'quvchilar nechta?

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar:

1. Natural son nima?
2. Butun son nima?
3. Ratsional son nima?
4. Irratsional son nima?
5. Haqiqiy son nima?
6. Haqiqiy sonning geometrik tasviri nima?
7. Haqiqiy sonning absolyut qiymatini ta'riflang?

XI BOB. FUNKSIYA HAQIDA TUSHUNCHA VA UNING TA'RIFI

11.1. O'zgaruvchi va o'zgarmas miqdorlar
11.2. Funksiyaning berilish usullari
11.3. Funksiyaning aniqlanish sohasi
11.4. Chegaralangan va chegaralanmagan funksiyalar
11.5. Juft va toq funksiyalar

Tabiatda ikki xil miqdorlar uchraydi, o'zgaruvchi va o'zgarmas miqdorlar. Bizga bir necha to'rtburchak berilgan bo'lsin. Ularda quyidagi miqdorlar qatnashadi. Tomonlarning uzunliklari, burchaklarning kattaliklari, yuzalari va perimetrlari. Bu miqdorlardan ba'zilari o'zgarmaydi, ba'zilari o'zgarib turadi. Masalan, qaralayotgan hamma to'rtburchaklarda burchaklarining to'g'riligi, ularning soni to'rtta bo'lishligi va yig'indisi 360° ga tengligi o'zgarmaydi. Tomonlarining uzunliklari, perimetrlari, yuzlari esa o'zgarib turadi. Xuddi shuningdek, bir necha doira chizsak, ularda aylana uzunliklarining o'z diametrlariga nisbati hammasida bir xil bo'lib, π ga teng, lekin ularning radiuslari, aylana uzunliklari, doira yuzlari o'zgarib turadi.

Ma'lum sharoitda faqat bir xil son qiymatlariga ega bo'lgan miqdorlar o'zgarmas miqdorlar deyiladi. Ma'lum sharoitda har xil son qiymatlariga ega bo'lgan miqdorlar o'zgaruvchi miqdorlar deyiladi. Odatda, o'zgarmas miqdorlarni $a, b, c, d, \ldots$, o'zgaruvchi miqdorlarni $x, y, z, u, v, \ldots$ harflari bilan belgilaydilar.

Matematikada ko'pincha o'zaro bir-biriga bog'liq ravishda o'zgaradigan miqdorlar bilan ish ko'riladi. Yuqoridagi misollarimizda doiraning yuzi uning radiusining o'zgarishiga qarab o'zgaradi, ya'ni doiraning radiusi ortsa, yuzi ham ortadi, kamaysa kamayadi. Xuddi shuningdek, kvadratning tomoni bilan yuzi orasida ham shunday bog'lanish bor. Kvadratning yuzi uning tomoniga bog'liq ravishda o'zgaradi.

Ta'rif : Agar x miqdorning X sohadagi har bir qiymatiga biror f qonuniyatga ko'ra y miqdorning Y-sohadan aniq bir qiymati mos keltirilsa, y miqdor x miqdorning X-sohadagi funksiyasi deyiladi va $y=f(x)$ kabi yoziladi.

Bu holda x – argument yoki erkli o'zgaruvchi, y – esa funksiya yoki erksiz o'zgaruvchi deyiladi. Agar y x ning funksiyasi bo'lsa, u holda x va y lar orasidagi bog'lanish funksiyali bog'lanish deyiladi va quyidagicha yoziladi: $y=f(x)$, $y=q(x)$, $y=\varphi(x)$ va hokazo. Agar yuqoridagi misollarga e'tibor bersak, doiraning yuzi radiusning funksiyasi, kvadratning yuzi tomonining funksiyasi ekan.

Argument qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari to'plami funksiyaning aniqlanish sohasi, funksiyaning o'zi qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari to'plami funksiyaning o'zgarish sohasi yoki qiymatlari to'plami deyiladi.

Funksiyaning berilish usullari

Funksiya sharoitiga qarab jadval, analitik va grafik usullar bilan berilishi mumkin.

Funksiya jadval usulida berilganda, argumentning ma'lum tartibdagi $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, \ldots$ qiymatlari va funksiyaning ularga mos keluvchi $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$ qiymatlari jadval holida beriladi:

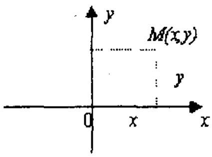
X	x_1	x_2	x_3	...	x_n	...
Y	y_1	y_2	y_3	...	y_n	...

Funksiyalarning jadval usulida berilishiga misol qilib kvadratlar, kublar, kvadrat ildizlar jadvallarni ko'rsatish mumkin. Bu usuldan ko'pincha miqdorlar orasida tajribalar o'tkazishda foydalaniladi.

To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi. Ma'lumki, sonlar o'qida nuqtaning vaziyati bir son uning koordinatasi bilan aniqlanar edi. Endi to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi tushunchasini kiritamiz.

Tekislikda sanoq boshlari ustma-ust tushadigan va o'zaro perpendikulyar bo'lgan OX va OY sonlar o'qini chizamiz. Gorizontal holda tasvirlangan sonlar o'qi ordinatalar o'qi, ularning kesishgan nuqtasi *koordinatalar* boshi deyiladi. Hammasi birgalikda to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi deyiladi.

To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida nuqtaning vaziyati quyidagicha aniqlanadi. Faraz qilamiz, to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi olingan tekislikda ixtiyoriy M nuqta berilgan bo'lsin. Shu nuqtadan koordinata o'qlariga perpendikulyarlarning absissalar o'qidagi proeksiyasiga mos keluvchi son uning absissasi, koordinatalar o'qidagi proeksiyasiga mos keluvchi son esa uning ordinatasi deyiladi va $M(x,y)$ tartibida yoziladi. (1-chizma).



Demak, to'g'ri burchakli koordinatalar tekisligida har qanday bir juft ma'lum tartibda berilgan son bilan aniqlanar ekan. Xuddi shuningdek, har qanday bir juft songa koordinatalar tekisligida bitta nuqta mos keladi.

Funksiyaning grafik usulda berilishi. $y=f(x)$ funksiyaning grafigi deb koordinatalari $y=f(x)$ ni to'g'ri tenglikka aylantiruvchi tekislikdagi barcha nuqtalar to'plamiga aytiladi. Agar funksiyaning grafigi tasvirlangan bo'lsa, funksiya grafik usulda berildi deyiladi.

Endi savol tug'iladi, har qanday egri chiziq biror funksiyani ifodalaydimi? Buni aniqlash uchun egri OY o'qiga parallel to'g'ri chiziqlar chizamiz, agar bu to'g'ri chiziq egri chiziq bilan kamida ikki nuqtada kesishsa, grafik funksiyani ifodalamaydi, agar bitta nuqtada kesishsa funksiyani ifodalaydi.

Funksiyaning analitik usulda berilishi. Formula yordamida berilgan funksiyalarga analitik usulda berilgan deyiladi. Masalan, $y=x^2$, $y=kx+b$, $y=a^x$, $y=lgx$, $y=sinx$, $y=tgx$, $y=2x^3-x+4$ funksiyalar analitik usulda berilgan. Agar analitik usulda berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi to'g'risida alohida shart qo'yilmagan bo'lsa, u holda $y=f(x)$ da o'ng tomonda turuvchi ifoda ma'noga ega bo'ladigan x ning qiymatlari olinadi. Masalan, agar $y=x^2$ ni kvadratning tomoni bilan yuzi ifodalovchi bog'lanish sifatida olsak, u holda aniqlanish sohasi barcha musbat sonlardan iborat bo'ladi.

Funksiyaning aniqlanish sohasini topishga doir misollar ko'raylik. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasini toping:

1. $y=\frac{3}{x}$. Yechimi. Ma'lumki, kasr ma'noga ega bo'lishi uchun uning maxraji noldan farqli bo'lishi kerak. Demak, $x\neq 0$ yoki $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

2. $y=\frac{1}{2}(x-1)^{-1}$. Yechimi. Xuddi yuqoridagidek muhokama yuritsak, $2x-1\neq 0$ yoki $2x\neq 1$, $x\neq\frac{1}{2}$. Demak, aniqlanish sohasi $(-\infty;\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2};+\infty)$ dan iborat.

3. $y=\sqrt{3x+2}$ Yechimi. Kvadrat ildiz ma'noga ega bo'lishi uchun ildiz ostidagi ifoda manfiy bo'lmasligi kerak, ya'ni $3x+2\geq 0$, bunda $x\geq -\frac{2}{3}$. Demak, aniqlanish sohasi $[-\frac{2}{3},+\infty)$ dan iborat.

4. $y=\frac{1}{\sqrt{4x-5}}$ Yechimi. Agar yuqoridagidek muhokama yuritsak, u holda $4x-5>0$ bo'ladi. Bundan $x>\frac{5}{4}$. Demak, aniqlanish sohasi $(\frac{5}{4},+\infty)$ dan iborat.

5. $y=\lg(2x-1)$ Yechimi. Logarifmik funksiya faqat musbat sonlar uchun aniqlangan. Demak, $(2x-1)>0$ bo'lishi kerak. Bundan $x>\frac{1}{2}$. Demak, aniqlanish sohasi $(\frac{1}{2},+\infty)$ dan iborat.

6. $y=\frac{1}{\lg(2x-1)}$. Yechimi. Agar yuqoridagidek muhokama yuritsak, $2x-1>0$, $2x-1\neq 1$ bo'ladi. Bundan $x>\frac{1}{2}$, $x\neq 1$ kelib chiqadi. Demak, aniqlanish sohasi $(\frac{1}{2};+1)\cup(1;+\infty)$ dan iborat.

A) analitik usul funksiyaning o'rganish jarayonida juda ko'p uchraydigan usuldir, lekin ba'zi hollarda funksiyaning qiymatini topish murakkab hisoblashlarga olib keladi:

B) $y=f(x)$ yozuv hali funksiyaning analitik usulda berilishi bo'lmasligi mumkin. Masalan, ushbu Dirixle funksiyasini olaylik:

$$y=\begin{cases} 1, & агар \quad x-рационал \quad сон \quad булса \\ 0, & агар \quad x-иррационал \quad сон \quad булса. \end{cases}$$

Demak $y=f(x)$ funksiya berilgan, uning aniqlanish sohasi barcha haqiqiy sonlar to'plamidan iborat, ammo funksiyaning analitik ifodasi berilgan emas:

V) funksiyaning jadval usulida berilishi qulaydir, chunki bir necha qiymatlar topilgan bo'ladi, lekin funksiyaning sohasi cheksiz to'plam bo'lganda, uning barcha qiymatlarini ko'rsatib bo'lmaydi:

G) funksiyaning grafik usulda berilishi uning o'zgartirishlarini ko'rgazmali qilish imkonini beradi.

Funksiyaning grafigi – egri chiziq (xususiy holda to'gri chiziq), ba'zi hollarda biror nuqtalar to'plami bo'ladi.

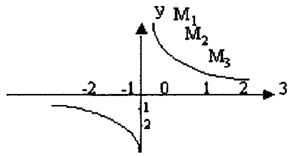
Funksiya grafigini chizish. $y=f(x)$ funksiyaning grafigini hosil qilish uchun $M(x,f(x))$ nuqtalarni hosil qilib, ular bir-biriga juda yaqin bo'lganda, silliq chiziq bilan tutashtiriladi.

Misol. 1) $y=\frac{1}{x}$ funksiyaning grafigi chizilsin. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi $x\neq 0$ haqiqiy sonlar to'plami, ya'ni $]-\infty,0[U]\ 0,+\infty[$ dan iborat.

Endi, aniqlanish sohasidan x ning bir necha qiymatlarini olib, y ning ularga mos keladigan qiymatlarini topamiz.

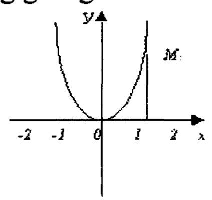
X	1	2	3	-1	-2	-3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	...
f(x)	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	2	-2	...

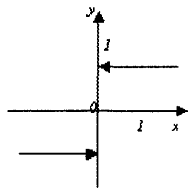
Koordinata tekisligida $M_1(1;1)$, $M_2(2;\frac{1}{2})$, $M_3(3;\frac{1}{3})$,.... nuqtalarni hosil qilamiz. Bir biriga yaqin turga nuqtalarni uzluksiz chiziq yorlamida tutashtirsak, funksiyaning grafigini ifoda qiladigan egri chiziq giperbola hosil bo‘ladi. (2-chizma)



2-chizma.

2) $y=x^2$ ning grafigi chizilsin.





3-чизма. 4-чизма.

Jadval tuzamiz:

x	0	1	2	3	-1	-2	-3	...
$y=x^2$	0	1	4	9	1	4	9	...

$M_1(0;0)$, $M_2(1;1)$, $M_3(2;4)$,.... nuqtalarni hosil qilamiz. Ularni silliq chiziq bilan tutashtirsak, parabola egri chizig‘i hosil bo‘ladi.(3-chizma)

3) 4-chizmada

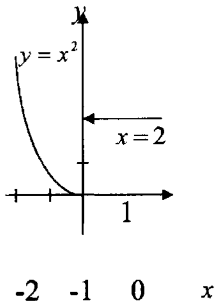
$$y=\begin{cases} 1, & агар \quad x>0 \quad булса, \\ 0, & агар \quad x=0 \quad булса, \\ -1, & агар \quad x<0 \quad булса. \end{cases}$$

funksiyaning grafigi ko‘rsatilgan.

Aksincha, agar tekislikda biror egri chiziq berilgan bo‘lib, absissalar o‘qiga tik bo‘lgan har qanday to‘gri chiziq bu egri chiziq bilan bittadan ko‘p bo‘lmagan nuqtada kesishsa, u holda bu egri chiziq funksiyani ifoda qiladi.

Funksiyaning berilish usullari

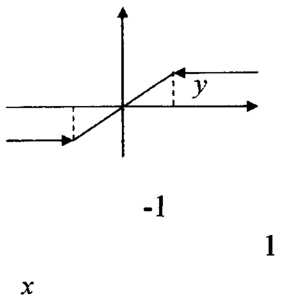
1. Analitik usul.
2. Grafik usul.
3. Jadval usuli.



x	y
-1	1
0	0
-2	4
3	9

Misollar:

1. $y=\begin{cases} x^2, & x\le 0 \\ 2, & x>0 \end{cases}$



x	y
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
0	0
1	1

2. $y=\begin{cases} -1, & x<-1 \\ x, & -1\le x\le 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$

Demak, funksiyalar faqat bir formula bilan emas, balki ikki va undan ortiq formula yordami bilan berilishi mumkin ekan.

Funksiyaning aniqlanish sohasi

Funksiyani o'rganish davomida argumentning olishi mumkin bo'lgan sonlar to'plami va funksiyaning qabul qiladigan qiymatlari to'plami bilan ish ko'riladi.

Masalan: $y = 2^x$ ko'rsatkichli argumentga ixtiyoriy haqiqiy qiymatni bera oladi. Ammo funksiyaning qiymati esa, faqat musbat sonlardan iborat bo'ladi.

Ta'rif. $y = f(x)$ funksiyaning argumenti qabul qilishi mumkin bo'lgan barcha qiymatlar to'plami, funksiyaning aniqlanish sohasi deyiladi, u funksiyaning qabul qilgan qiymatlar to'plami esa funksiyaning o'zgarish sohasi deyiladi.

Masalan: $y = x^2 - 3x$ funksiyasining aniqlanish va o'zgarish sohasi haqiqiy sonlar to'plamidan iborat. Funksiyaning aniqlanish sohasini tekshirishda quyidagi tengsizliklardan foydalanamiz.

1. a va b sonlar oralig'idagi sonlar (a va b dan tashqari) ochiq interval deyilib, (a, b) shaklida yoki $a < x < b$ shaklida ko'rsatiladi.

2. a va b sonlar oralig'idagi sonlar (a va b ham qo'yiladi), aniq interval deyilib $[a, b]$ shaklida yoki $a \le x \le b$ shaklida ko'rsatiladi.

Agar o'zgaruvchi miqdor ixtiyoriy haqiqiy qiymatlar qabul qilsa uni quyidagicha ko'rsatiladi:

$$-\infty < x < +\infty$$

Misollar:

1. $y = \arcsin x$ funksiyaning aniqlanish sohasi $-1 \le x \le 1$ aniq intervaldan iborat.

2. $y = \frac{1}{x^2 - 1}$ funksiya $x^2 = 1$ bo'lganda ma'noga ega bo'lmaydi. Shuning uchun bu funksiyaning aniqlanish sohasi ± 1 dan boshqa haqiqiy sonlar to'plamidan iborat.

$$-\infty < x < -1 \cup -1 < x < 1 \cup 1 < x < +\infty$$

3. $y = \sqrt{2 - x}$ funksiyada $2 - x \ge 0$ bo'lishi kerak.

Bundan $x \le 2$. Demak, funksiyaning aniqlanish sohasi $x \le 2$.

4. $y=\dfrac{\sqrt{5-x}}{\lg(x-1)}$ Aniqlanish sohasi

$$\begin{cases}5-x\geq 0\\ x-1>0\\ x-1\neq 0\end{cases}$$

$1<x<2$

$2<x<5$

Funksiyanng aniqlanish sohasi tekshirganda quyidagilarni e'tiborga olish kerak:

1. Nolga bo'lish mumkin emas;
2. Manfiy sondan juft ko'rsatkichli ildiz chiqarib bo'lmaydi;
3. Manfiy sonning va nolning logarifmi bo'lmaydi;
4. arcsin$x$, arccos$x$ da $|x|\leq 1$ bo'lishi va
5. *arctgx* da $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, *arcctgx* da $x\neq k\pi$ bo'lishi.

Chegaralangan va chegaralanmagan funksiyalar

1. $y=f(x)$ funksiyaning o'zgarish sohasidagi har qanday qiymati uchun shunday o'zgarmas chekli B sonni ko'rsatish mumkin bo'lib, $f(x)\leq B$ bo'lsa, $f(x)$ *yuqoridan chegaralangan* funksiya deyiladi.
2. $y=f(x)$ funksiyaning o'zgarish sohasidagi har qanday qiymati uchun shunday o'zgarmas chekli A sonni ko'rsatish mumkin bo'lib, $f(x)\geq A$ bo'lsa, $f(x)$ *quyidan chegaralangan* deyiladi.

M i s o l l a r .1. $y=x^2-4x+6$ funksiya $-\infty<x<+\infty$ oraliqda aniqlangan bo'lib, u quyidan chegaralangan. Haqiqatdan ham, $y=(x-2)^2+2$ Demak, $y\geq 2$ ya'ni funksiyaning eng katta qiymati yo'q. Eng kichik qiymati 2.

2. $Y=-3x^2+4x+1$ funksiya yuqoridan chegaralangan. Haqiqatdan ham,

$$y=-3x^2+4x+1=-3(x^2-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3})=-3(x-\frac{2}{3})^2-\frac{7}{3},$$

ya'ni funksiyaning eng katta qiymati bor. Eng kichik qiymati yo'q. Demak, $y\leq-\frac{7}{3}$ Agar $y=f(x)$ funksiya yuqoridan ham, quyidan chegaralangan bo'lsa, ya'ni $A\leq f(x)\leq B$ bo'lsa, bunday funksiyaga *chegaralangan* funksiya deyiladi.

Masalan, $y=sinx$, $y=cosx$ funksiyalar chegaralangandir, chunki $-1\leq sinx\leq 1$ va $-1\leq cos\leq 1$ shartlari bajariladi.

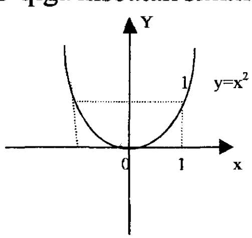
Agar $y=f(x)$ funksiya uchun $A\leq f(x)$ yoki $f(x)\leq B$ tengsizliklarni qanoatlantiradigan A yoki B sonlari mavjud bo'lmasa, u holda bunday funksiya *chegaralanmagan* funksiya deyiladi.

Masalan, $y=x$ funksiya $(-\infty, +\infty)$ oraliqda aniqlangan, lekin chegaralanmagan funksiyadir, ya'ni $-\infty<y<+\infty$. $f(x)\geq a$ bo'lsa, funksiyaning aniqlanish sohasidan olingan x uchun grafikning barcha nuqtalari $y=a$ to'g'ri chiziqdan (2-chizma) yuqorida joylashgan bo'ladi.

Juft va toq funksiyalar

$y=f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli x o'zgaruvchining har bir qiymati bilan $-x$ qiymat ham shu funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli bo'lsa va bunda $f(-x)=f(x)$ tenglik bajarilsa, $y=f(x)$ funksiya *juft funksiya* deyiladi. Masalan, $f(x)=x^2$ funksiya juft funksiyadir. Haqiqatdan, bu funksiya ***R*** to'plamda aniqlangan va demak, aniqlanish sohasi har qanday x bilan $-x$ ni o'z ichiga oladi.

Bundan tashqari, $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$ tenglik bajariladi. Juft funksiya grafigi ordinata o'qiga nisbatan simmetrik bo'ladi (7-chizma).



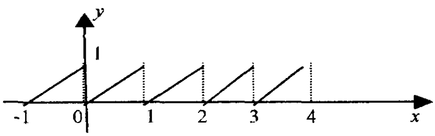
7-chizma

$y=\cos\alpha$ juft funksiyadir. Haqiqatdan ham, har qanday α va -α uchun P_α va $P_{-\alpha}$ nuqtalar absissalar o‘qiga nisbatan simmetrik joylashgan (9-chizma). Bundan shu nuqtalarning absissalari bir xil, ordinatalari esa qarama-qarshi ekani kelib chiqadi. Bu kosinus ta’rifiga ko‘ra, har qanday α da quyidagi tenglik to‘g‘ri ekanini bildiradi: $\cos\alpha=\cos(-\alpha)$. Umuman, har qanday juft funksiyaning grafigi ordinata o‘qiga nisbatan simmetrikdir. $y=f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli x ning har bir qiymati bilan $-x$ qiymat ham shu funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli bo‘lsa va bunda $f(-x)=-f(x)$ tenglik bajarilsa, $y=f(x)$ funksiya *toq funksiya* deyiladi. Toq funksiyaning grafigi koordinata boshiga nisbatan simmetrik joylashadi. Masalan, $f(x)=x^3$ funksiya toq funksiyadir. Haqiqatdan ham, $f(-x)=(-x)^3=-f(x)$, ya’ni $f(-x)=-f(x)$ tenglik bajariladi. Bu funksiyaning grafigi koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo‘lib, kubik paraboladan iboratdir (9-chizma). $y=\sin x$ toq funksiyadir. Haqiqatdan ham, chizmada P_α va $R_{-\alpha}$ nuqtalarning ordinatalari bir xil, lekin ishoralari qarama-qarshiligidan $\sin\alpha=y_\alpha$, $\sin(-\alpha)=-y_\alpha$ bo‘ladi. Bundan esa $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ bo‘ladi. Har qanday funksiya ham juft yoki toq bo‘lishi shart emas.

Masalan, $y=2x+5, y=x^2+x^3, y=\sin x+\cos x$ juft ham, toq ham emas. Demak, funksiyalar har doim juft yoki toq bo‘lishi shart emas ekan.

Davriy funksiyalar

Ta’rif. Agar $f(x)$ funksiya uchun shunday $t>0$ son mavjud va funksiyaning aniqlanish sohasidan olingan har bir x uchun $x+t$ va $x-t$ lar aniqlanish sohasiga joylashgan bo‘lib, $f(x+t)=f(x)$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda *$f(x)$ davriy funksiya* deb ataladi. t sonlarni eng kichigi funksiyaning *davri* deyiladi.



8-chizma

Misol. y=sinx , y=cosx, y=tgx,y=x-[x] davriy funksiyalardir.

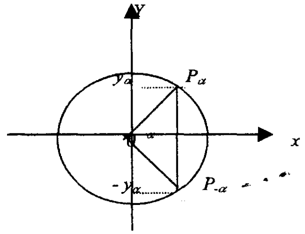
Davriy funksiyaning grafigini hosil qilish uchun uning bir davr ichidagi grafigini chizib, so'ngra uni chapga va o'ngga cheksiz ko'p marta ko'chirish kerak.

Misol. $f(x)=x-[x]=x-E(x)$ funksiya berilgan. Bunda $E(x)=[x]$ ifoda x ning butun qismini bildiradi. (E – fransuzcha Entier - ante-butun so'zining birinchi harfi). Masalan, $[x]=m$ $(m \leq x < m+1)$ m butun son.

$f(x)=x-E(x)=\{x\}$. Bu funksiya x ning kasr qismini bildiradi, ya'ni $f(1)=0;\ f(1{,}05)=0{,}05; \ldots$, $f(x)$ funksiya davriydir va uning davri $t=1$ dir. Haqiqatdan,

$$f(x+1)=x+1-E(x+1)=x+1-E(x)-1=x-E(x)=f(x).$$

Demak, har qanday butun son ham davr bo'ladi. (Funksiyaning grafigi 8-chizmada ko'rsatilgan)

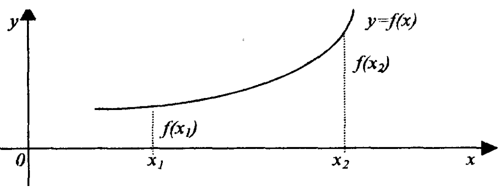


9-chizma

Monoton funksiyalar

Ta'rif-1: $y=f(x)$ funksiyaning X sohadagi ihtiyoriy ikkita (x_1,x_2) qiymatlari uchun $x_1<x_2$ bo'lganda $f(x_1)<f(x_2)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $y=f(x)$ funksiyasi X sohada o'suvchi funksiya deyiladi.

Yuqorida, aytib o'tilgan ta'rifni geometrik nuqtai nazardan quyidagicha ko'rsatishimiz mumkin.

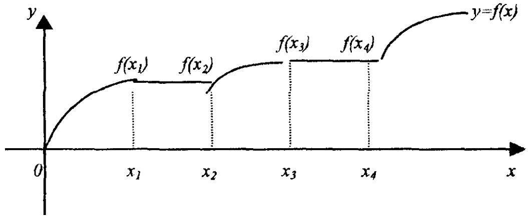


Yuqoridagi ta'rifdan ko'rinadiki, funksiya biror oraliqda o'suvchi bo'lishi uchun shu oraliqdagi argumentning kichik qiymatiga funksiyaning kichik qiymati, argumentning katta qiymatiga funksiyaning katta qiymati mos kelar ekan.

1) $y=2^x$ funksiyasi butun son o'qida o'suvchi.

2) $y=tgx$ funksiya ham o'suvchi funksiyadir.

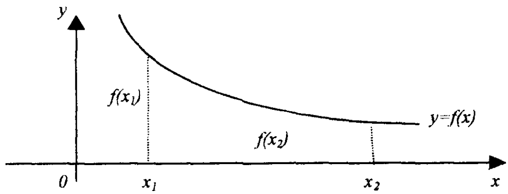
Ta'rif-1: $y=f(x)$ funksiyaning X sohadagi ixtiyoriy ikkita (x_1,x_2) qiymatlari uchun $x_1 \le x_2$ bo'lganda $f(x_1) \le f(x_2)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $y=f(x)$ funksiyasi (x_1,x_2) oralig'ida *kamaymaydigan* funksiya deyiladi.



Ta'rif-2: $y=f(x)$ ning argumenti X ni $\forall(x_1,x_2)$ uchun $x_1<x_2$, bo'lganda $f(x_1)>f(x_2)$ tengsizligi o'rinli bo'lsa, $y=f(x)$ ni (x_1,x_2) oralig'ida kamayuvchi funksiya deyiladi.

1-Misol: $y=x^2$ funksiyaning olsak, bu funksiya $(-\infty,0)$ oralig'ida kamayuvchi, $(0,\infty)$ oralig'ida o'suvchi funksiyadir.

2-Misol: $y=sinx$ funksiya $(0,\frac{\pi}{2})$ oraliqda monoton o'suvchi bo'lib, $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ oraliqda monoton kamayuvchidir.



Ta'rif: $y=f(x)$ ning argumentining ixtiyoriy (x_1,x_2) qiymatlari uchun $x_1 \le x_2$ bo'lganda $f(x_1) \ge f(x_2)$ bo'lsa, u holda $y=f(x)$ funksiyasi (x_1,x_2) oralig'ida *o'smaydigan* funksiya deyiladi.

Agar berilgan oraliqda argumentning katta qiymatiga funksiyaning katta qiymati mos kelsa, ya'ni shu oraliqdagi ixtiyoriy x_1 va x_2 uchun $x_2>x_1$ shartdan $f(x_2)>f(x_1)$ kelib chiqsa, $y=f(x)$ funksiya shu oraliqda *o'suvchi* deyiladi.

Ta'rif-3: Biror (x_1, x_2) oralig'ida o'suvchi va kamayuvchi funksiyalar monoton funksiyalar deyiladi.

Mustaqil ishlash uchun misollar:

1. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasini toping:

a) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$ b) $y=\arcsin\frac{x-2}{2}$

v) $y=\frac{1}{\lg(4-x^2)}$ g) $y=\sqrt{25-x^2}+\lg\sin x$

J: *a)* $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$ *b) [0.4]* *v)* $(-2,-\sqrt{3})\cup(-\sqrt{3},\sqrt{3})\cup(-\sqrt{3},2)$ *g) [-5, -π)∪(0, π)*

2. Quyidagi funksiyalarning o'zgarish sohasini toping:

a) $y=\sqrt{16-x^2}$ b) $y=3\cos x-1$; v) $y=3^{-x^2}$

J: *a)* [0,4]; b) [-4,2] v) (0,1].

3. Quyidagi funksiyalarning juft yoki toq funksiya ekanini aniqlang:

a) $y=\sin 5x$ b) $y=\lg\cos 2x$ v) $y=tg3x+\cos 4x$

J: a)toq b) toq ham emas juft ham emas v) juft

4. Quyidagi funksiyalarning davrlarini aniqlang:

a) $y=x^4\sin 3x$ b) $y=x^4-x^2+x$ v) $y=\lg\cos x$

J: a) $\frac{2\pi}{5}$ b) π v) π

5. Quyidagi funksiyalarning juft yoki toqligini aniqlang:

a) $y=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}$ b) $y=\ln\frac{1-x}{1+x}$ v) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ g) $y=2^x+2^{-x}$

J: a)juft b) toq v) toq g) juft

XII BOB. TESKARI FUNKSIYA TUSHUNCHASI

Teskari trigonometrik funksiyalarga o'tishdan avval umuman teskari funksiya haqidagi izoh berib o'tamiz.

Faraz qilaylik; $y=f(x)$ funksiya biror X sohada berilgan bo'lsin va x argument X sohada o'zgarganda, bu funksiya qabul qilgan barcha qiymatlar to'plami Y bilan ifodalansin. Odatda, X va Y lar oraliqlardan iborat bo'ladi.

Biz Y sohadan biror $y=y_0$ qiymatni tanlaylik; bu vaqtda X sohadan bizning funksiyamiz xuddi shu y_0 ga teng bo'ladigan $x=x_0$ qiymat, albatta, topiladi, demak, $f(x_0)=y_0$ bo'ladi.

x_0 ning bunday qiymatlari bir qancha bo'lishi ham mumkin. Shunday qilib, Y sohadagi y ning har bir qiymatiga x ning bitta yoki bir qancha qiymati mos keladi; shu bilan Y sohada bir qiymatli yoki ko'p qiymatli $x=g(y)$ funksiya aniqlanib, buni $y=f(x)$ funksiyaning teskari funksiyasi deyiladi.

Misollar qaraymiz:

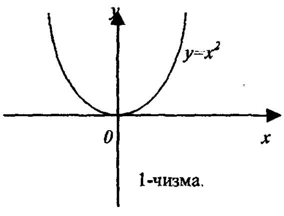
1) $y=a^x$ $(a>1)$ funksiyani olaylik, bu erda x argument $X=(-\infty;+\infty)$ oraliqda o'zgaradi. Funksiya u ning qiymatlari $Y=(0;\ +\infty)$ oraliqni tashkil qiladi, shu bilan birga, bu oraliqdagi har bir y ga X dan birgina $x = \log_a y$ qiymat mos keladi. Bu holda teskari funksiya b i r q i y m a t l i bo'ladi.

2) Aksincha, $y=x^2$ funksiya uchun x argument $X=(-\infty;\ +\infty)$ oraliqda o'zgarsa, teskari funksiya ikki qiymatli bo'ladi, chunki $Y[0;\ +\infty)$ oraliqdagi y ning har bir qiymati uchun X da ikkita $x=\pm\sqrt{y}$ qiymat mos keladi. Odatda, bu ikki qiymatli funksiya o'rniga $x=+\sqrt{y}$ va $x=-\sqrt{y}$ funksiya (ikki qiymatli funksiyaning "shoxchalari") tekshiriladi. Bularning har birini alohida $y=x^2$ ga teskari funksiya deb qarash ham

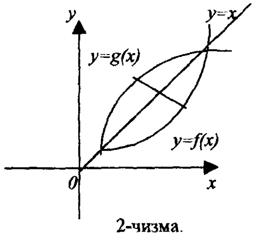
mumkin, faqat bu vaqtda x ning o'zgarish sohasi $[0; +\infty)$ yoki $(-\infty; 0]$ oraliq bilan chegaralangan, deb faraz qilish kerak.

Berilgan $y=f(x)$ funksiyaning grafigiga qarab, bunga teskari $x=g(y)$ funksiyaning bir qiymatli bo'lish yoki bo'lmasligini sezish osondir. Agar x o'qqa parallel bo'lgan har bir to'g'ri chiziq bu grafikni faqat bitta nuqtada kessa, u holda teskari funksiya bir qiymatli bo'ladi. Aksincha, bunday to'g'ri chiziqlardan ba'zilari grafikni bir nechta nuqtada kessa, teskari funksiya ko'p qiymatli bo'ladi. Bu holda grafikka qarab, har bir bo'lakka bu funksiyaning bir qiymatli "shoxchasi" mos keladigan qilib, x ning o'zgarish oralig'ini bo'laklarga bo'lish mumkin. Masalan, 1-chizmadagi $y=x^2$ funksiyaning grafigi bo'lgan parabolaga birinchi qarashimizdayoq, uning teskari funksiyasi ikki qiymatli ekanini aniq ko'ramiz va teskari funksiyaning bir qiymatli "shoxchalarini" olish uchun parabolaning o'ng va chap bo'laklarini, ya'ni x ning musbat va manfiy qiymatlarini alohida qarash etarlidir.

Agar $x=g(y)$ funksiyasi $y=f(x)$ funksiyaga teskari bo'lsa, u vaqtda bu ikki funksiyaning grafigi bir xil bo'lishi ravshan. Teskari funksiyaning argumentini ham x bilan belgilashni, ya'ni $x=g(y)$ funksiya o'rniga $y=g(x)$ deb yozishni talab etish mumkin. U vaqtda gorizontal o'qni y o'q deb va vertikal o'qni esa x o'q (yangi) gorizontal, y o'q (yangi) vertikal bo'lsin desak, u vaqtda bu o'qlarning o'rinlarini almashtirib, birining o'rniga ikkinchisini qo'yish kerak, bu esa grafikni ham o'zgartiradi. Buni amalga oshirish uchun xOy chizma tekisligini birinchi koordinata burchak bissektrisasi atrofida 180° ga aylantirish hammadan ham qulaydir



1-чизма.



2-чизма.

Shunday qilib, oxiri $y=g(x)$ ning grafigi $y=f(x)$ ning grafigini shu bissektrisaga nisbatan ko'zgudagi aksi deb olish mumkin.

Funksiyaning superpozitsiyasi

Funksiyalarning superpozitsiyasi (yoki o'rniga qo'yish) tushunchasi bilan tanishaylik. Bu tushuncha berilgan funksiyaning argumenti o'rniga boshqa argumentga bog'liq bo'lgan funksiyani qo'yishdan iboratdir. Masalan, $y=sinx$ va $z=lgy$ funksiyalarning superpozitsiyasi $z=lgsinx$ funksiyani beradi; shunga o'xshash $\sqrt{1-x^2}$, $arctg\frac{1}{x}$ va hokazo funksiyalar ham hosil bo'ladi.

Umuman, $y=f(x)$ funksiya x ning hamma qiymatlari uchun $X=\{x\}$ sohada aniqlangan va shu bilan birga bu funksiyaning hamma qiymatlari esa $Y=\{y\}$ sohaga kirgan deb faraz etaylik. Endi $z=\varphi(y)$ funksiya xuddi $Y=\{y\}$sohada aniqlangan bo'lsin. U vaqtda z o'zgaruvchining o'zi y orqali x ning funksiyasi bo'ladi, ya'ni: $z=\varphi(f(x))$.

x ning X sohadagi berilgan qiymati bo'yicha avval y ning Y dagi unga mos qiymatini (f belgi bilan xarakterlangan qonun bo'yicha) topamiz, so'ngra y ning bu qiymatiga muvofiq z ning qiymatini (φ belgi bilan xarakterlangan qonun bo'yicha) aniqlaymiz; z ning bu qiymatini x ning tanlangan qiymatiga mos deb hisoblanadi. Hosil qilingan funksiyaning funksiyasi yoki murakkab funksiya $f(x)$ va $\varphi(y)$ funksiyalarning superpozitsiyasi natijasida vujudga keldi.

Bundagi $f(x)$ funksiyaning qiymatlari, $\varphi(y)$ ni aniqlovchi Y sohadan chetga chiqmaydi degan farazimiz g'oyat muhimdir; agar bu farazni tushirib qoldirilsa, ma'nosizlik yuz berishi mumkin. Masalan, $z=lgy$, $y=sinx$ deb olib, biz faqat x ning $sinx>0$ ni qanoatlantiruvchi qiymatlarinigina olamiz, bo'lmasa $lgsinx$ ifoda ma'noga ega bo'lmay qoladi.

Murakkab funksiyaning xarakteristikasi x va z orasidagi funksional munosabatning tabiati bilan emas, balki bu munosabatning berilish usuli bilangina bog'langanligini ta'kidlab o'tish foydali deb hisoblaymiz. Masalan, [-1,1] dagi y uchun $z=\sqrt{1-y^2}$ funksiya va $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ dagi x uchun $y=sinx$ funksiya berilgan bo'lsin.

U vaqtda: $z=\sqrt{1-\sin^2 x}=\cos x$.

Bu yerda *cosx* funksiyasi murakkab ko'rinishida berilgan bo'lib qoldi.

Endi, funksiyalarning superpozitsiyasi tushunchasi to'la anglashilgandan keyin, analizda tekshiriladigan eng oddiy funksiyalar sinflarini xarakterlashimiz mumkin: bular, yuqorida ko'rsatilgan elementar funksiyalar, so'ngra bulardan to'rtta arifmetik amalni ishlatish va superpozitsiyalashni chekli son marta ketma-ket qo'llash natijasida kelib chiqqan funksiyalardir. Bu funksiyalarni elementar funksiyalar orqali chekli ko'rinishda ifodalanuvchi funksiyalar deb, ba'zan esa faqat elementar funksiyalar deb ham ataladi.

Elementar funksiyalar

Bu yerda *elementar funksiyalar* deb atalgan funksiyalarning ba'zi bir sinflarini ko'rsatib o'taylik.

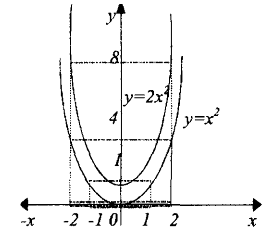
1. ***Butun va kasr ratsional funksiyalar.*** *X* ga nisbatan butun $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ ko'phad (bu yerda $a_0, a_1, a_2, ...$ o'zgarmas) bilan tasvirlanuvchi funksiya butun ratsional funksiya deyiladi.

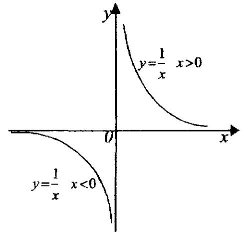
Bunday ikki ko'phadning

$$y=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_{m-1}x+b_m}$$

nisbati kasr ratsional funksiya deyiladi. Bu funksiya x ning maxraji nolga aylantiruvchi qiymatlaridan boshqa hamma qiymatlari uchun aniqlangan bo'ladi.

Misol tariqasida 1-chizmada $y=ax^2$ funksiya (parabola) ning a koeffitsienti har xil qiymatlar qabul qilgandagi grafiklari berilgan.





1-chizma 2-chizma.

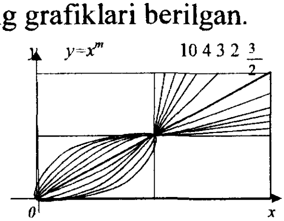
2-Chizmada esa $y=\frac{a}{x}$ funksiya (teng yonli giperbola) ning a har xil qiymatlarni qabul qilgandagi grafiklari berilgan.

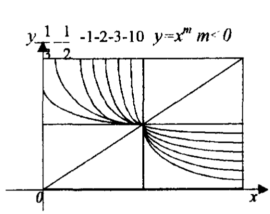
2. Darajali funksiya.

Quyidagi $y=x^{\mu}$ ko'rinishdagi funksiyani darajali funksiya deyiladi, bu erda μ ixtiyoriy o'zgarmas haqiqiy son. Agar μ kasr bo'lsa, biz ildizga ega bo'lamiz. Masalan, m natural son bo'lsin va: $y=x^{\frac{1}{m}}=\sqrt[m]{x}$

Bu funksiya m toq bo'lganda, x ning hamma qiymatlari uchun va m juft bo'lganda, x ning faqat musbat qiymatlari uchun aniqlanadi. Bu holda biz ildizning faqat arifmetik qiymatini hisobga olamiz. Nihoyat, μ irratsional son bo'lsa, $x>0$ deb faraz etamiz ($x=0$ qiymat $\mu>0$ bo'lgandagina olinadi).

Quyida 3 va 4-chizmalarda μ ning har xil qiymatlari uchun darajali funksiyaning grafiklari berilgan.



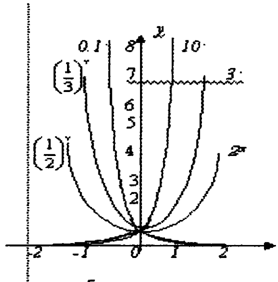


3-chizma. 4-chizma.

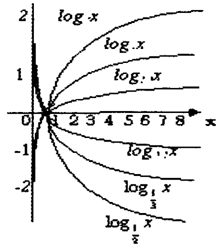
3. Ko'rsatkichli funksiya, ya'ni

$$y=a^x$$

ko'rinishdagi funksiyadir, bu yerda a 1 dan farqli musbat son; x istalgan haqiqiy qiymat qabul qila oladi. 5-Chizmada a ning har xil qiymatlari uchun ko'rsatkichli funksiyaning grafiklari berilgan.



5-чизма



6-чизма

4. *Logarifmik funksiya,* ya'ni

$$y=\log_a x$$

ko'rinishdagi funksiya, bu yerda a yuqoridagi singari 1 dan farqli musbat sondir; x faqat musbat qiymatlar qabul qiladi.

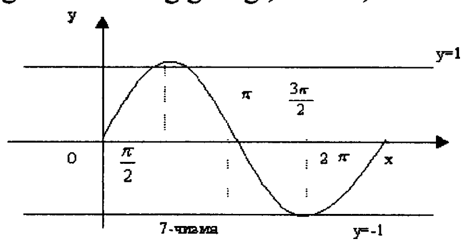
6-Chizmada bu funksiyaning a ning turli qiymatlaridagi grafiklari berilgan.

5. *Trigonometrik funksiyalar:*

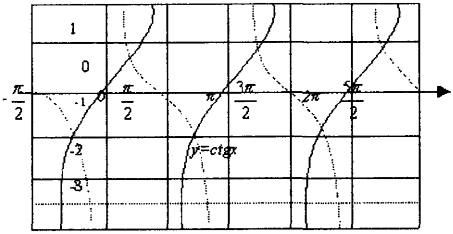
$$y=\sin x,\ y=\cos x,\qquad y=tgx,\ y=ctgx,$$
$$y=\sec x,\ y=\operatorname{cosec} x$$

Agar trigonometrik funksiyalarning argumentlari burchaklarning o'lchovi sifatida qaralsa, ular bu burchaklarni har vaqt radianlarda ifodalaydi (agarda aksi aytilmagan bo'lsa). Buni har vaqt esda tutish kerak. Bunda tgx va $\sec x$ lar uchun $(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}$ ko'rinishdagi qiymatlar, $ctgx$ va $\operatorname{cosec} x$ lar uchun $k\pi$ (bu erda k-butun son) ko'rinishdagi qiymatlar mustasnodir.

y=sinx (cosx) va *y=tgx (ctgx)* funksiyalarning grafiklari 7-8 chizmalarda berilgan. Sinusning grafigi, odatda, *sinusoida* deyiladi.



7-чизма



8-chizma

Mustaqil ishlash uchun misollar:

1. Funksiyaning aniqlanish sohasi topilsin: (Javoblari qavs ichida berilgan)

1. $y=\sqrt{1+x}$ $\quad ([-1;+\infty))$

2. $y=\sqrt{4-x}$ $\quad ([-4;4])$

3. $y=1-\lg x$ $\quad (0,\infty)$

4. $y=\lg(x+3)$ $\quad (3,+\infty)$

5. $y=\sqrt{5-2x}$ $\quad \left(\left[\frac{5}{2},\infty\right)\right)$

6. $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ $\quad ((-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty))$

7. $y=\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ $\quad (-3,3)$

8. $y=\sqrt{x^2-4x+3}$ $\quad ((-\infty,1]\cup[3,\infty))$

9. $y=\arcsin(x-2)$ $\quad ([1,3])$

10. $y = \arccos(1-2x)$ $\qquad ([0, 1])$

2. Juft yoki toq funksiyalarni aniqlang:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \qquad f(x) = \frac{x^3}{tgx}$$

$$f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}, \qquad f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$$

$$f(x) = x^4 - 4x^2, \qquad f(x) = \frac{x}{a^x - 1}$$

Nazorat uchun savollar:

1. Qanday funksiyaga butun va kasr ratsional funksiya deyiladi?
2. Darajali funksiya deb qanday funksiyaga aytiladi?
3. Ko'rsatkichli funksiya debchi?
4. Logarifmik funksiya ta'rifini ayting?
5. Qanday funksiyalar trigonometrik funksiyalar deyiladi?

XIII BOB. SONLAR KETMA KETLIGI VA UNING LIMITI

13.1. Sonlar ketma-ketligi ta'rifi
13.2. Monoton ketma-ketliklar
13.3. Sonlar ketma-ketligi limiti ta'rifi
13.4. Sonlar ketma-ketligining limiti xossalari

1-ta'rif. Natural sonlar to'plamida aniqlangan $x_n = f(n),\ n \in N$ funksiyaning qiymatlari to'plami **sonli ketma-ketliklar** deb ataladi.

Agar n ga 1,2,3,... qiymatlar bersak, bu funksiyaning

$$x_1 = f(1), x_2 = f(2), \ldots, x_n = f(n), \ldots$$

xususiy qiymatlariga ega bo'lamiz, ular ketma-ketlikning hadlari yoki elementlari deb ataladi.

Bunda x_1 ketma-ketlikning birinchi hadi, x_2 uning ikkinchi hadi va hokazo x_n ketma-ketlikning n-hadi deyiladi. Demak,

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \ldots \text{ yoki } f(1), f(2), \ldots, f(n) \ldots$$

sonli ketma-ketlikni tashkil etadi. Sonli ketma-ketlik $\{x_n\}$ yoki $\{f(n)\}$ orqali belgilanadi. Ketma-ketlikning n-hadi $x_n = f(n)$ uning umumiy hadi deb ataladi.

Ketma-ketlikning umumiy hadi ma'lum bo'lsa, u berilgan hisoblanadi.

1-misol. $x_n = \frac{1}{2^n}$ funksiya $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{2^n}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\right\}$ ketma-ketlikni beradi.

2-misol. $x_n = 2n$ funksiya $\{x_n\} = \{2n\} = \{2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}$ ketma-ketlikni beradi.

3-misol. $x_n = 1 + (-1)^n$ funksiya $\{x_n\} = \{1 + (-1)^n\} = \{0, 2, 0, 2, \ldots, 1 + (-1)^n, \ldots\}$ ketma-ketlikni beradi.

4-misol. $x_n = \frac{1}{n}$ funksiya $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ ketma-ketlikni beradi.

Barcha misollarda n natural son, ya'ni $n \in N$.

Shunday M son mavjud bo'lsaki, barcha $n \in N$ uchun $x_n < M$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik *yuqoridan chegaralangan ketma-ketlik* deb ataladi.

Shunday M>0 son mavjud bo'lsaki, istalgan $n \in N$ uchun $x_n >$M tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik *quyidan chegaralangan ketma-ketlik* deb ataladi.

Ham yuqoridan ham quyidan chegaralangan ketma-ketlik chegaralangan deb ataladi. Chegaralangan ketma-ketlik uchun shunday M>0 son mavjud bo'lib barcha $n \in N$ uchun $|x_n| \leq$M tengsizlik bajariladi.

Agar istalgan n natural son uchun $x_n < x_{n+1}$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ *monoton o'suvchi ketma-ketlik* deb ataladi.

Agar istalgan n natural son uchun $x_n > x_{n+1}$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ *monoton kamayuvchi ketma-ketlik* deb ataladi.

Agar istalgan n natural son uchun $x_n \geq x_{n+1}$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ *o'smaydigan ketma-ketlik* deb ataladi.

Agar istalgan n natural son uchun $x_n \leq x_{n+1}$. tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ *kamaymaydigan ketma-ketlik* deb ataladi.

5-misol. $\{x_n\} = \{n^2\} = \{1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots\}$ -o'suvchi, quyidan chegaralangan ketma-ketlik.

6-misol. $\{x_n\} = \{1 - 2n\} = \{-1, -3, -5, \ldots\}$ -kamayuvchi, yuqoridan chegaralangan ketma-ketlik.

7-misol. $\{x_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\right\}$-o'suvchi, chegaralangan ketma-ketlik.

Ketma-ketlikning limiti

a o'zgarmas son va $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

2-ta'rif. Agar istalgancha kichik $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $N = N(\varepsilon)$ natural son mavjud bo'lsaki, undan katta barcha n lar uchun $|x_n - a| < \varepsilon$

tengsizlik bajarilsa, a o'zgarmas son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deb ataladi va $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ yoki $x_n \to a$ kabi belgilanadi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti a chekli son bo'lsa *ketma-ketlik yaqinlashuvchi,* aks holda ya'ni a mavjud bo'lmasa yoki ∞ bo'lsa u *uzoqlashuvchi ketma-ketlik* deb ataladi.

$|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik $a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon$ tengsizliklarga teng kuchli ekanini ko'rdik. Buni e'tiborga olsak, limit tushunchasini geometrik nuqtai nazardan bunday tushuntirish mumkin: agar istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $N = N(\varepsilon)$ natural son topilsaki, $\{x_n\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_N, x_{N+1}, \ldots\}$ ketma-ketlikning N+1- hadidan boshlab barcha hadlari a nuqtaning ε-atrofiga tushsa, ya'ni a nuqtaning ε-atrofiga $\{x_n\}$ ketma-ketlikning birinchi N ta chekli sondagi hadlaridan tashqari barcha hadlari tushsa, a o'zgarmas son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deb ataladi.

Shunday qilib, a o'zgarmas son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti bo'lganda bu nuqtaning istalgan ε-atrofi $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ da ketma-ketlikning cheksiz ko'p hadlari yotadi, ε-atrofdan tashqarida ketma-ketlikning chekli sondagi hadlari qoladi xolos.

8-misol. $\{x_n\} = \left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ ketma-ketlikning limiti 1 ga teng ekanligi ko'rsatilsin.

Yechish. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ sonni olib $|x_n - a| = \left|\dfrac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$ yoki $\left|-\dfrac{1}{n}\right| < \varepsilon$ tengsizlikni tuzamiz. Biroq n>0, shuning uchun $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ yoki $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Bundan ko'rinadiki, $N = N(\varepsilon)$ sifatida $\dfrac{1}{\varepsilon}$ natural bo'lganda shu sonni o'zini, u natural son bo'lmaganda $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ sonni ($[x]$- x ning butun qismi) olinsa, u holda n ning $n > N(\varepsilon)$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha qiymatlari uchun

$\left|\dfrac{1}{n}\right| < \varepsilon$ yoki $\left|\dfrac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Bu esa $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$ ekanini bildiradi.

Masalan, ε=0,01 bo'lsa $N=\frac{1}{\varepsilon}=\frac{1}{0.01}=100$ va ketma-ketlikning 101-hadidan boshlab barcha hadlari a=1 nuqtaning 0,01- atrofi (0,99, 1,01) ga tushadi, atrofdan tashqarida ketma-ketlikning chekli, ya'ni 100 ta hadi qoladi. Shuningdek, ε=0,001 bo'lganda $N=\frac{1}{0,001}=1000$ va n ning 1001-qiymatidan boshlab barcha hadlari uchun $\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<0,001$ tengsizlik bajariladi. Boshqacha qilib aytganda, bu holda $\{x_n\}=\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ ketma-ketlikning 1001-hadidan boshlab barcha hadlari a=1 nuqtaning ε =0,001 atrofi (0,999, 1,001) ga tushadi, bu atrofdan tashqarida esa ketma-ketlikning chekli, ya'ni 1000 ta hadi qoladi, xolos.

1-izoh. O'zgarmas sonning limiti shu sonning o'ziga teng.

Haqiqatan, o'zgarmas c sonni barcha hadlari shu songa teng bo'lgan ketma-ketlik deb qarash mumkin, ya'ni $x_n=c$. Shuning uchun istalgan $\varepsilon>0$ son uchun

$$|x_n-c|=|c-c|=0<\varepsilon$$

tengsizlik doimo bajariladi.

2-izoh. Yaqinlashuvchi ketma-ketlik faqat birgina limitga ega bo'ladi.

Haqiqatan, $\lim_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim_{n\to\infty}x_n=b$ bo'lib $a\neq b$ bo'lsin. U holda ketma-ketlik limitining ta'rifiga binoan istalgancha kichik $\varepsilon>0$ son uchun shunday N_1 va N_2 natural sonlar topilib n ning N_1 dan katta barcha qiymatlari uchun $|x_n-a|<\varepsilon$ tengsizlik va n ning N_2 dan katta barcha qiymatlari uchun $|x_n-b|<\varepsilon$ tengsizlik bajariladi. N_1 va N_2 dan kattasini N deb belgilasak, n ning N dan katta barcha qiymatlari uchun $|x_n-a|<\varepsilon$ ва $|x_n-b|<\varepsilon$ tengsizliklar bir vaqtda bajariladi. Demak, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning x_{N+1}- hadidan boshlab barcha hadlari ham $x=a$ nuqtaning ham $x=b$ nuqtaning ε-atrofida yotadi. Bu esa $a\neq b$ bo'lganda $\frac{b-a}{2}$ dan kichik ε lar uchun bajarilmaydi. Bundan $a=b$ ekani kelib chiqadi.

3-izoh. Har qanday ketma-ketlik ham limitga ega bo'lavermaydi.

Masalan, $\{x_n\}=\{1+(-1)^n\}=\{0, 2, 0, 2,,....,1+(-1)^n,...\}$ ketma-ketlik hech qanday limitga ega emas, chunki uning toq raqamli hadlari 0 ga, juft raqamli hadlari 2 ga teng bo'lib, $|x_{n+1}-x_n|=2$ va $\varepsilon<1$ bo'lganda n ning barcha qiymatlarida $|x_n-a|<\varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi a son mavjud emas.

Monoton chegaralangan ketma-ketlik limitining mavjudligi

1-teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik monoton o'suvchi va yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u chekli limitga ega.

2-teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik monoton kamayuvchi va quyidan chegaralangan bo'lsa, u chekli limitga ega.

Bu teoremalarning isbotini keltirmaymiz.

XIV BOB. FUNKSIYA LIMITI

14.1. Funksiya limitining Koshi va Geyne ta'riflari
14.2. Chap va o'ng limitlar
14.3. Funksiya limitining xossalari
14.4. Iqtisodda qo'llanishi

Funksiyaning nuqtadagi limiti. $f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsin ($x=a$ nuqtaning o'zida aniqlanmagan bo'lishi ham mumkin). $D(f)$-funksiyaning aniqlanish sohasidan limitga ega bo'lgan ixtiyoriy $\{x_n\}=\{x_1,x_2,...,x_n,...\}$ ketma-ketlikni olamiz. $f(x)$ funksiyaning $\{x_n\}$ ketma-ketlikning nuqtalaridagi qiymatlari $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlikni tashkil etadi.

3-ta'rif. Argument x ning a dan farqli va unga yaqinlashuvchi barcha $\{x_n\}$ ketma-ketliklar uchun $y=f(x)$ funksiyaning shu ketma-ketlik nuqtalaridagi qiymatlaridan tuzilgan $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik b songa yaqinlashsa, b son $y=f(x)$ funksiyaning $x=a$ nuqtadagi (yoki $x\to a$ dagi) limiti deb ataladi va $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ yoki $x\to a$ da $f(x)\to b$ ko'rinishda yoziladi.

$f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada faqat birgina limitga ega bo'ladi. Bu yaqinlashuvchi $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlikning yagona limitga ega ekanligidan kelib chiqadi.

9-misol. $D(x)=\begin{cases}1, agar\ x\ ratsional\ son\ bo'lsa,\\ 0,\ agar\ x\ irratsiond\ son\ bo'lsa.\end{cases}$

Dirixle funksiyasi sonlar o'qining hech bir nuqtasida limitga ega emasligi ko'rsatilsin.

Yechish. Son o'qining istalgan x_0 nuqtasini olamiz. x_0 ga yaqinlashuvchi argumentning $\{x_n\}$ ratsional sonlar ketma-ketligiga funksiyaning $\{D(x_n)\}=\{1\}$ qiymatlari ketma-ketligi mos bo'lib uning limiti 1 ga teng bo'lishi ravshan. x_0 ga yaqinlashuvchi argumentning $\{\overline{x_n}\}$ irratsional sonlar ketma-ketligiga funksiyaning $\{D(\bar{x}_n)\}=\{0\}$ qiymatlari ketma-ketligi mos kelib uning limiti 0 ga teng bo'ladi. Shunday qilib, x_0 ga yaqinlashuvchi argumentning $\{x_n\}$ va $\{\bar{x}_n\}$ ketma-ketliklariga funksiyaning shu ketma-ketliklarni nuqtalaridagi qiymatlaridan tuzilgan $\{D(x_n)\}$ va $\{D(\bar{x}_n)\}$ ketma-ketliklar har xil limitlarga ega. Bu funksiyaning limitga ega bo'lish ta'rifiga xilof. Demak, $D(x)$ funksiya x_0 nuqtada limitga ega emas. x_0 nuqta sonlar o'qining istalgan nuqtasi bo'lganligi uchun u sonlar o'qining hech bir nuqtasida limitga ega emas. Shunday qilib Dirixle funksiyasi aniqlanish sohasining hech bir nuqtasida limitga ega emas ekan.

4-ta'rif. Istalgan $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta>0$ son mavjud bo'lsaki, $|x-a|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha a dan farqli x nuqtalar uchun $|f(x)-b|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, b chekli son $f(x)$ funksiyaning $x=a$ nuqtadagi (yoki $x\to a$ dagi) **limiti** deb ataladi.

Bu ta'rifga quyidagicha geometrik izoh berish mumkin. b son $f(x)$ funksiyaninr $x=a$ nuqtadagi limiti bo'lganda $(a-\delta, a+\delta)$ intervaldagi barcha x lar uchun $f(x)$ funksiyaning qiymatlari $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ intervalda yotadi.

Keltirilgan uchinchi va to'rtinchi ta'riflarni teng kuchliligini ko'rsatish mumkin.

10-misol. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-25}{x^2-5x}=2$ ekanini tarifdan foydalanib isbotlang.

Yechish. $f(x)=\dfrac{x^2-25}{x^2-5x}$ funksiyani $x=5$ nuqtaning biror atrofida, masalan, (4,6) intervalda qaraylik. Ixtiyoriy $\varepsilon>0$ sonni olib $|f(x)-b|<\varepsilon$ ni $x\neq5$ deb quyidagicha o'zgartiramiz:

$$\left|\frac{x^2-25}{x^2-5x}-2\right|=\left|\frac{(x-5)(x+5)}{x(x-5)}-2\right|=\left|\frac{x+5}{x}-2\right|=\left|\frac{5-x}{x}\right|=\frac{|5-x|}{|x|}.$$

$x>4$ ekanini hisobga olsak $|x|=x>4$ bo‘lib $\left|\frac{x^2-25}{x^2-5x}-2\right|<\frac{|5-x|}{4}$ kelib chiqadi. Bundan ko‘rinib turibdiki, $\delta=4\varepsilon$ deb olsak, u holda $0<|x-5|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha $x\in(4;\,6)$ uchun

$$\left|\frac{x^2-25}{x^2-5x}-2\right|<\frac{\delta}{4}=\varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. Bundan 2 soni $f(x)=\frac{x^2-25}{x^2-5x}$ funksiyaning $x=5$ nuqtadagi limiti bo‘lishi kelib chiqadi.

5-ta’rif. Istalgancha katta $M>0$ son uchun shunday $\delta=\delta(M)>0$ son mavjud bo‘lib, $|x-a|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha a dan farqli x lar uchun $|f(x)|>M$ tengsizlik bajarilsa, $x\to a$ da $f(x)$ funksiya cheksizlikka intiladi deb aytiladi va bu $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ kabi yoziladi.

11-misol. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x-2}=\infty$ ekani isbotlansin.

Yechish. $f(x)=\frac{1}{x-2}$ funksiyani qaraylik. Ixtiyoriy $M>0$ sonni olsak, $|f(x)|=\left|\frac{1}{x-2}\right|>M$ tengsizlik $|x-2|<\frac{1}{M}$ bo‘lganda bajarilishi ko‘rinib turibdi. Agar $\delta=\frac{1}{M}$ deb olinsa, $|x-2|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun $\left|\frac{1}{x-2}\right|>\frac{1}{\delta}=M$ yoki $\left|\frac{1}{x-2}\right|>M$ tengsizlik bajariladi. Bu esa $x\to 2$ da $f(x)=\frac{1}{x-2}$ funksiya cheksizlikka intilishini bildiradi, ya’ni $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x-2}=\infty$

Funksiyaning cheksizlikdagi limiti

6-ta’rif. Agar $f(x)$ funksiya x ning yetarlicha katta qiymatlarida aniqlangan bo‘lib, istalgan $\varepsilon>0$ son uchun shunday $N>0$ son mavjud bo‘lib, $|x|>N$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun $|f(x)-b|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, o‘zgarmas b son $y=f(x)$ funksiyaning $x\to\infty$ dagi limiti deb ataladi va bu $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b$ kabi yoziladi.

12-misol. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=1$ ekani isbotlansin.

Yechish. $f(x)=\frac{x+1}{x}$ funksiyani qaraylik. Istalgan $\varepsilon<0$ sonni olsak $|f(x)-b|=\left|\frac{x+1}{x}-1\right|=\left|\frac{x+1-x}{x}\right|=\frac{1}{|x|}$ bo'lib $N=\frac{2}{\varepsilon}$ desak, barcha $|x|>N$ uchun $\left|\frac{x+1}{x}-1\right|<\frac{2}{N}=\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bundan 1 soni $f(x)=\frac{x+1}{x}$ funksiyaning $x\to\infty$ dagi limiti bo'lishi ayon bo'ladi.

7-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya x ning yetarlicha katta qiymatlarida aniqlangan bo'lib, istalgan yetarlicha katta $M>0$ son uchun shunday $N>0$ son topilsaki, $|x|>N$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun $|f(x)|>M$ tengsizlik bajarilsa, $y=f(x)$ funksiya $x\to\infty$ da cheksizlikka intiladi deyiladi va $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ kabi yoziladi.

13-misol. $\lim_{x\to\infty}x^2=\infty$ ekani isbotlansin.

Yechish. $f(x)=x^2$ funksiyani qaraylik. Istalgan $M>0$ sonni olib $|f(x)|>M$ tengsizlikni tuzamiz. $x^2>M$, bundan $|x|>\sqrt{M}$ kelib chiqadi. $N=\sqrt{M}$ deb olinsa, $|x|>N$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun $x^2>N^2=M$ tengsizlik bajariladi. Bu $\lim_{x\to\infty}x^2=\infty$ ekanini bildiradi.

Limitga ega funksiyaning chegaralanganligi

3-teorema. Agar $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi limiti b chekli son bo'lsa, u holda $y=f(x)$ funksiya a nuqtaning biror atrofida chegaralangandir.

Isboti. $\lim_{x\to a}f(x)=b$ chekli son bo'lsin. U holda limitni ta'rifiga binoan istalgan $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta>0$ son topilib $(a-\delta, a+\delta)$ intervaldagi barcha x lar uchun $|f(x)-b|<\varepsilon$ yoki $|f(x)|-|b|\le|f(x)-b|<\varepsilon$, bundan $|f(x)|<|b|+\varepsilon$ bo'lishi kelib chiqadi. Agar $M=|b|+\varepsilon$ deb olinsa a nuqtaning δ-atrofidagi barcha x lar uchun $|f(x)|\le M$ tengsizlik bajariladi. Bu $f(x)$ funksiya $(a-\delta, a+\delta)$ intervalda chegaralanganligini ko'rsatadi.

Agar $f(x)$ funksiya biror intervalda chegaralangan va nolga teng bo'lmasa, u holda $\frac{1}{f(x)}$ funksiya ham shu intervalda chegaralangan bo'lishini ta'kidlab o'tamiz.

Bir tomonlama limitlar

8-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiyaning $x=a$ nuqtadagi limitining ta'rifida x o'zgaruvchi a dan kichik bo'lganicha qolsa, u holda funksiyaning shu nuqtadagi b_1 limiti uning $x=a$ nuqtadagi (yoki $x \to a$-0 dagi) **chap tomonlama limiti** deb ataladi va $b_1 = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x)$, yoki $b_1 = \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$, yoki $b_1 = f(a-0)$ kabi yoziladi.

Agar a=0 bo'lsa, u holda $b_1 = \lim\limits_{x \to -0} f(x) = f(-0)$ kabi yoziladi.

9-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiyaning $x=a$ nuqtadagi limiti ta'rifida x o'zgaruvchi a dan katta bo'lganicha qolsa, u holda funksiyaning shu nuqtadagi b_2 limiti uning $x=a$ nuqtadagi (yoki $x \to a$+0 dagi) **o'ng tomonlama limiti** deb ataladi va $b_2 = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x)$ yoki $b_2 = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$, yoki $b_2 = f(a+0)$ kabi yoziladi.

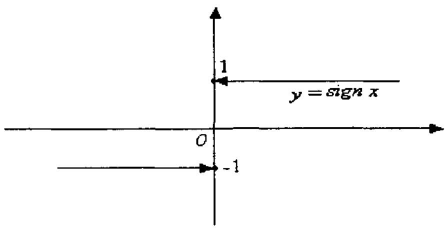
Agar a=0 bo'lsa, u holda $b_2 = \lim\limits_{x \to +0} f(x) = f(+0)$ kabi yoziladi.

$f(x)$ funksiyaning $x=a$ nuqtadagi chap va o'ng tomonlama limitlari **bir tomonlama limitlar** deb ataladi. $b_1 = b_2$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada limitga ega. Aksincha, $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi bir tomonlama limitlari mavjud va ular teng, ya'ni $f(a-0) = f(a+0)$ bo'lganda va faqat shundagina bu funksiya a nuqtada limitga ega bo'ladi.

Masalan,

$$f(x) = signx = \begin{cases} 1, & agar \quad x>0 \quad bo'lsa, \\ 0, & agar \quad x=0 \quad bo'lsa, \\ -1, & agar \quad x<0 \quad bo'lsa \end{cases}$$

funksiya $x=a$ nuqtada limitga ega emas, chunki $f(-0)=-1$, $f(+0)=1$ va $f(-0)\neq f(+0)$ (86-chizma). Bu funksiya 0 dan farqli istalgan nuqtada limitga ega.



1-chizma.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar:

1. Sonli ketma-ketlik nima? Qachon u chegaralangan va qachon monoton deyiladi?

2. Ketma-ketlikning limiti nima? Ta'rifni tengsizlik yordamida bering va uni geometrik ma'nosini tushuntiring.

3. Monoton chegaralangan ketma-ketlik limitining mavjudligi haqidagi teoremalarni ayting.

4. Funksiyaning nuqtadagi limiti nima?

5. Funksiyaning cheksizlikdagi limiti nima?

6. Limitga ega bo'lgan funksiyaning chegaralanganligi haqidagi teoremani ayting.

7. Bir tomonlama limitlar nima? Funksiyaning nuqtadagi limiti va bir tomonlama limitlari orasida qanday bog'lanish bor?

8. Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalarni ta'riflang? $x\to a$ va $x\to\infty$ da cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalarga misollar keltiring.

9. Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalar orasida qanday bog'lanish bor?

10. Cheksiz katta funksiya chegaralangan bo'lishi mumkinmi?

11. Cheksiz kichik funksiya chegaralanmagan bo'lishi mumkinmi?

12. Cheksiz kichik funksiyalarning asosiy xossalarini ayting?

13. Aniqlanish sohasining hech bir nuqtasida limitga ega bo'lmagan funksiyaga misol keltiring.

Mustaqil ishlash uchun misollar:

Limitlarni toping.

1. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+1}-3}{x-2}$ (-2)
2. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}}{x-3}$ $(\frac{1}{4})$
3. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x-1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}$ $(\sqrt{2})$
4. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5}}$ $(8\sqrt{5})$
5. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$ $(\frac{2}{\sqrt{2}})$
6. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x+1}$ (0)
7. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\sqrt{x^2+x+2}}{x^2+1}$ (1)
8. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x}{\sqrt[3]{x^2+4}}$ (0)
9. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\sqrt[3]{x+1}}{1+x^2}$ (1)
10. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ (1)
11. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{+5x\sqrt{x}}{1-3x}$ $(-\frac{5}{3})$
12. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{3}}{x^2-3}$ $(2\sqrt{3})$
13. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}$ $(\frac{1}{\sqrt{2}})$
14. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^3+4x^2}{x^5+1}$ (0)

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4+1}{x^2-1}$ (∞)

Ikki ajoyib limit

Transsendent funksiyalari limitlarini hisoblashda ko'pincha quyidagi limitlardan (ayniyatlardan) foydalanildi.

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1 \quad (1), \qquad \lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\sin\alpha}=1 \quad (1')$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \quad (2), \qquad \lim_{x\to\infty}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e \quad (2')$$

Bu yerda e Eyler soni deyiladi. Bu irratsional son taqriban 2,7 ga teng. (1) va (1') limitlar birinchi ajoyib limit deyiladi. (2) va (2') limitlar ikkinchi ajoyib limit deyiladi. Quyidagi misollarni ko'rib o'tamiz.

Misol. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}$, $4x=\alpha$ deb olamiz.

$x\to 0$ da $\alpha=4x$ ham nolga intiladi.

Shuning uchun kasrni surat va maxrajini 4 ga ko'paytirib va (1) va (1') formuladan foydalanib quyidagilarni topamiz.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 4x}{4x}=4\lim\frac{\sin 4x}{4x}=4\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=4\cdot 1=4$$

Misol 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{tg3x}$ ni hisoblang.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{tg3x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin 3x}{\cos 3x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 3x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos 3x=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}\cdot 1=\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}$$

Chunki, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}=1$ va $\lim\limits_{x\to 0}\cos 3x=\cos 0=1$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 2x}$ ni toping.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 2x}=\frac{\sqrt{0+4}-2}{\sin 0}=\frac{0}{0}$$ aniqmaslik.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{\sin 2x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+4-4}{\sin 2x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 2x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

4. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^x$ ni toping.

Bu yerda asosan limiti birga teng:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}\right]^x=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)^x=1^\infty$$

Ko‘rsatkich cheksizlikka intilgan. Shunga asosan 1^∞ ko‘rinishdagi aniqmaslikka ega bo‘lamiz. Buni e tipdagi aniqmaslik deb ham yuritiladi.

1. l tipidagi aniqmaslikni ochish uchun asos $\frac{x+2}{x-2}$ quyidagicha o‘zgartiramiz.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+2}{x-2}-1\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+2-(x-2)}{x-2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-2}\right)^x$$

Endi ko‘rsatkich x – ni $\frac{4}{x-2}$ kasrga ko‘paytiramiz va bo‘lamiz.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-2}\right)^{x\cdot\frac{4}{x-2}\cdot\frac{x-2}{4}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{4}}\right]^{\frac{4x}{x-2}}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{4}}\right]^{\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x-2}}=$$

$$=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{4}{1-\frac{2}{x}}}=e^4$$

chunki $\frac{4}{x-2}=\alpha\to 0$ agar $x\to\infty$ esa $\frac{x-2}{4}=\frac{1}{2}$.

(2) formulaga asosan kvadrat qavs ichidagi ifodani limiti e ga teng. Bundan tashqari $\lim_{\alpha\to a}[f(x)]^{\varphi(x)}=\left[\lim_{x\to a}f(x)\right]^{\lim_{x\to\infty}\varphi(x)}$ teoremani qo'lladik.

5. $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x$ ni toping.

$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x$ ham 1^∞ ko'rinishdagi aniqmaslikni beradi. Aniqmaslikni yechish uchun quyidagicha almashtiramiz.

Demak, $-\frac{2}{x}=\alpha,\ x=-\frac{2}{\alpha},\ x\to\infty,\ \alpha\to 0.$

Demak, $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{-2}{\alpha}}=\left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{-2}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$.

Mustaqil ishlash uchun misollar:

Limitlarni toping.

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x}$ $\left(\frac{5}{2}\right)$
2. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x+\sin 4x}{x}$ (7)
3. $\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\cos x}$ (2)
4. $\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{x}$ (2)
5. $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$ $(\sqrt{2})$
6. $\lim_{x\to 0}x\cdot ctgx$ (1)
7. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{tg3x}$ $\left(\frac{4}{3}\right)$
8. $\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{\sin^3 x}$ $\left(\frac{1}{2}\right)$
9. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x-\sin x}{2x}$ $\left(\frac{3}{2}\right)$

10. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$ $\qquad(\frac{1}{4})$

11. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{x^2}$ $\qquad(0)$

12. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^{x}$ $\qquad$(-)

13. $\lim_{n\to\infty} n[\ln(n-2)-\ln n]$ $\qquad(2)$

14. $\lim_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{x}}$ $\qquad(e^4)$

15. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-3}{x}\right)^{\sqrt{x}}$ $\qquad(1)$

XV BOB. FUNKSIYA UZLUKSIZLIGI

15.1. Funksiya uzluksizligi ta'rifi
15.2. Uzulish turlari
15.3. Uzluksiz funksiya xossalari

Argument va funksiyaning orttirmalari

$y=f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda aniqlangan bo'lsin. Bu intervaldan ixtiyoriy x_0 nuqtani olamiz, unga funksiyaning $y_0=f(x_0)$ qiymati mos keladi (2-chizma).

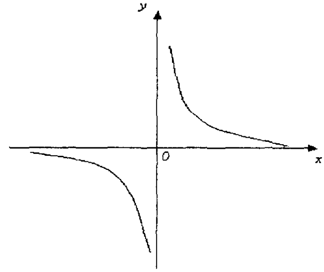
$(a;b)$ intervaldan olingan argumentning boshqa x qiymatiga funksiyaning $y=f(x)$ qiymati mos keladi. $x-x_0$ ayirma x argumentning x_0 nuqtadagi orttirmasi deyiladi va Δx orqali belgilanadi.

$f(x)-f(x_0)$ ayirma $f(x)$ funksiyaning argument orttirmasi Δxga mos orttirmasi deyiladi va Δy orqali belgilanadi. Shunday qilib, $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=f(x)-f(x_0)$. Bundan $x=x_0+\Delta x$, $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

2-chizmada $(a;b)$ intervalning hech bir nuqtasida grafigi uzilmaydigan funksiya tasvirlangan. Undan ko'rinib turibdiki, argumentning kichik Δx orttirmasiga funksiyaning ham kichik Δy orttirmasi mos keladi. Boshqacha aytganda argument x ning bir-biriga yaqin qiymatlariga funksiyaning ham bir-biriga yaqin qiymatlari mos keladi. Bu qoida har qanday funksiya uchun ham to'g'ri kelavermaydi. Masalan, $y=\frac{1}{x}$ funksiyani qaraylik. x ning bir-biriga ancha yaqin $x_1=-10^{-6}$ va $x_2=10^{-6}$ qiymatlariga funksiyani bir-biridan katta farq qiladigan $y_1=-10^6$ va $y_2=10^6$ qiymatlari mos keladi. Agar biz $y=\frac{1}{x}$ funksiyani grafigini (1-chizma) kuzatsak, grafikning uzilishga ega ekanligini va uzilish x ning $x=0$ qiymatida sodir bo'lishini ko'ramiz.

Shuning uchun ham argumentning $x_0=0$ nuqtaga yaqin nuqtalardagi kichik orttirmasiga funksiyaning kichik orttirmasi mos kelmaydi.

Bu kabi hollar barcha funksiyalar sinfini ikkiga, ya'ni grafigi uzilmaydigan va grafigi bir nechta qismlardan iborat funksiyalar sinfiga bo'lib o'rganishni taqozo etadi.



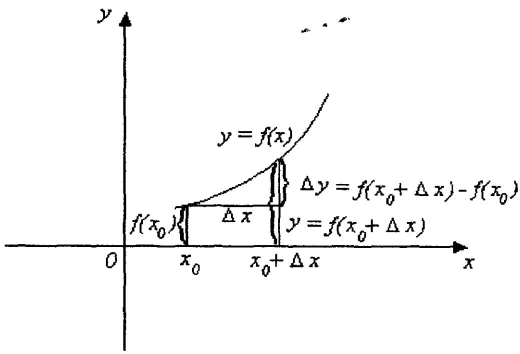
1-chizma.

Funksiyaning nuqtada va intervalda uzluksizligi

$y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada va uning biror atrofida aniqlangan bo'lsin.

1-ta'rif. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),$ (18.1)

ya'ni funksiyaning x_0 nuqtadagi limiti uning shu nuqtadagi qiymatiga teng bo'lsa, $y=f(x)$ funksiya x_0 **nuqtada uzluksiz** deb ataladi.



2-chizma.

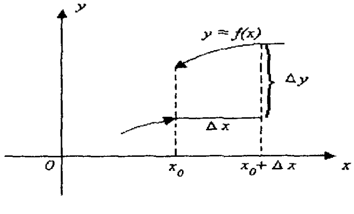
Bu ta'rifga teng kuchli yana bir ta'rifni keltiramiz.

2-ta'rif. Istalgan $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ son mavjud bo'lsaki, $|x-x_0|<\delta$ shartni qanoatlantiradigan istalgan x uchun $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $y=f(x)$ funksiya x_0 **nuqtada uzluksiz** deb ataladi.

3-ta'rif. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ (18.2)

bo'lsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 **nuqtada uzluksiz** deb ataladi.

2-chizmada tasvirlangan $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz, chunki (18.2) shart bajariladi.



3-chizma.

3-chizmada tasvirlangan $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz emas, chunki $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y \neq 0$

1-misol. $y = x^2$ funksiyani ixtiyoriy x_0 nuqtada uzluksizligini ko'rsating.

Yechish. Bu funksiya butun sonlar o'qida aniqlangan. Δy ni tuzamiz: $f(x) = x^2$; $f(x_0) = x_0^2$; $f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2$;

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2$.

Demak, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(2x_0\Delta x + \Delta x^2) = 0$ va $y = x^2$ funksiyani ixtiyoriy x_0 nuqtada uzluksiz.

Shunday qilib, $y = x^2$ funksiya aniqlanish sohasining har bir nuqtasida uzluksiz ekan.

2-misol. $y = \sin x$ funksiyani ixtiyoriy x_0 nuqtada uzluksizligini ko'rsating.

Yechish. $f(x) = \sin x$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2\sin\frac{x_0 + \Delta x - x_0}{2}\cos\frac{x_0 + \Delta x + x_0}{2} =$$

$$2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) = 2\lim_{\Delta x \to 0}\sin\frac{\Delta x}{2}\lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) = 0$$

chunki $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin\frac{\Delta x}{2}=0$.

Har bir elementar funksiya uchun shu tariqa mulohaza yuritib quyidagi teoremaning to'g'riligiga iqror bo'lamiz.

1-teorema. Asosiy elementar funksiyalar o'zlari aniqlangan barcha nuqtalarda uzluksizdir.

Bir tomonlama limit tushunchasidan foydalanib uzluksizlikni quyidagicha ta'riflash mumkin.

4-ta'rif. Funksiyaning x_0 nuqtadagi chap va o'ng tomonlama limitlari mavjud va o'zaro teng bo'lsa, $y=f(x)$ funksiya x_0 **nuqtada uzluksiz** deb ataladi.

Shunday qilib, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun u shu nuqtada aniqlangan va $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$ shart bajarilishi lozim ekan.

Yana 1-ta'rifga qaytib uni $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(\lim\limits_{x\to x_0}x)$ ko'rinishda yozamiz. Bundan ko'rinib turibdiki, x_0 nuqtada funksiya uzluksiz bo'lsa funksiyaning shu nuqtadagi limitini topishda limit ishorasini funksiya belgidan ichkariga kiritish mumkin ekan.

3-misol.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ell n(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ell n(1+x)=\lim_{x\to 0}\ell n(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ell n\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ell ne=1$$

Bu yerda ℓnx funksiyani $x=e$ nuqtada uzluksizligidan foydalanib limitni funksiya ishorasi ℓn ning ichkarisiga kiritdik.

5-ta'rif. $(a;b)$ intervalning barcha nuqtalarida uzluksiz $f(x)$ funksiya shu intervalda uzluksiz deb ataladi.

Agar funksiya x_0 nuqtada aniqlangan bo'lib $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0)$ bo'lsa, $y=f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada **o'ngdan uzluksiz** deyiladi.

Agar funksiya $x=x_0$ nuqtada aniqlangan bo'lib, $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0)$ bo'lsa, $y=f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada **chapdan uzluksiz** deyiladi.

6-ta'rif. $y=f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda uzluksiz bo'lib, $x=a$ nuqtada o'ngdan va $x=b$ nuqtada chapdan uzluksiz bo'lsa, u $[a;b]$ kesmada uzluksiz deb ataladi.

5- va 6- ta'riflarga hamda 18.1 teoremaga asoslanib $y=a^x$, $y=\sin x$, $y=\cos x$ funksiyalar butun sonlar o'qida, $y=\ell og_a x$ funksiya $(0;+\infty)$ intervalda, $y=\sqrt{x}$ funksiya $[0;+\infty)$ intervalda, $y=\frac{1}{x}$ funksiya $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ intervalda uzluksiz ekanligini ta'kidlab o'tamiz.

Shuningdek, ko'p had butun sonlar o'qida, kasr-ratsional funksiya x ning kasr maxrajini nolga aylantirmaydigan barcha qiymatlarida uzluksiz ekanini eslatib o'tamiz.

2- teorema. Agar $f(x)$ va $g(x)$ *funksiyalar* x_0 *nuqtada uzluksiz* bo'lsa, u holda ularning algebraik yig'indisi, ko'paytmasi va $g(x_0)\neq 0$ bo'lganda $\frac{f(x)}{g(x)}$ bo'linmasi ham shu x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi. Bu teoremaning isboti funksiya limitining xossalariga asoslangan. Endi murakkab funksiyaning uzluksizligiga oid teorema bilan tanishamiz.

Nuqtada uzluksiz funksiya xossalarini ifodalovchi teorema bilan tanishamiz.

3-teorema. Agar $u=\varphi(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz, $y=f(u)$ funksiya $u_0=\varphi(x_0)$ nuqtada uzluksiz funksiya bo'lsa, u holda $y=f[\varphi(x)]$ murakkab funksiya ham x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Isboti. $\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f[\varphi(x_0)]$ ekanligini ko'rsatamiz. $u=\varphi(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksizligidan $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)=u_0$ ga ega bo'lamiz, ya'ni $x\to x_0$ да $u\to u_0$ $f(u)$ funksiyaning shu nuqtada uzluksizligini hisobga olsak

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=\lim_{u\to u_0} f(u)=f(u_0)=f[\varphi(x_0)]$$

Shunday qilib, ikkita uzluksiz $f(u)$ va $\varphi(x)$ funksiyalardan tashkil topgan $y=f[\varphi(x)]$ funksiya ham uzluksiz bo'lar ekan. Masalan, $y=\ell n(4-x^2)$ murakkab funksiya x ning $4-x^2>0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida, ya'ni $(-2;2)$ intervalda uzluksiz.

Asosiy elementlar va murakkab funksiyani uzluksizligi haqidagi teoremalarga tayanib elementar funksiyaning uzluksizligi haqidagi quyidagi teoremaga ega bo'lamiz.

4-teorema. Barcha elementar funksiyalar o'zlarining aniqlanish sohalarida uzluksizdirlar.

4-misol. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} 4^{\sin x}$ topilsin.

Yechish. $4^{\sin x}$ murakkab funksiya $x=\frac{\pi}{2}$ nuqtada uzluksiz bo'lgani uchun $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} 4^{\sin x}=4^{\sin\frac{\pi}{2}}=4^1=4$ bo'ladi.

5-misol. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$ topilsin.

Yechish. Bu yerda $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslikka egamiz. $a^x-1=t$ almashtirish olamiz. U holda $a^x=1+t$, $x=\log_a(1+t)$ bo'lib $x\to 0$ da $t\to 0$da va

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{1}{t}\log_a(1+t)}=\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\frac{1}{\log_a e}=\log_e a=\ln a$$

bo'ladi. Xususiy holda $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\ln e=1$ kelib chiqadi, ya'ni $x\to 0$ да $e^x-1\sim x$.

6-misol. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^p-1}{x}$ topilsin.

Yechish. Bu yerda $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslikka egamiz. $(1+x)^p-1=y$ almashtirish olamiz. U holda $(1+x)^p=1+y$, yoki buni e asosga ko'ra logarifmlasak $p\ln(1+x)=\ln(1+y)$ bo'ladi. $x\to 0$ da $y\to 0$. Demak,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^p-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{y}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{p\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{y}{\ln(1+y)}=p\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=p\cdot 1\cdot 1=p.$$

Shunday qilib, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^p-1}{x}=p$ formulaga ega bo'ldik.

Uzluksizlik tushunchasidan foydalanilsa limitni hisoblash ancha osonlashadi, ya'ni uzluksiz funksiyaning biror nuqtadagi limitini hisoblash uning shu nuqtadagi qiymatini hisoblashga keltiradi.

Endi asosiy elementar funksiyalarning aniqlanish sohalarining chetlaridagi limitlari hamda ajoyib limitlar jadvalini keltiramiz.

1) $x=a$ nuqtada uzluksiz $y=f(x)$ funksiya uchun $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ bo'ladi.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$. 3) $a>1$ bo'lganda $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$ bo'ladi.

4) $0<a<1$ bo'lganda $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=+\infty$ bo'ladi.

5) $\alpha>0$ bo'lganda $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha=+\infty$, $\alpha<0$ bo'lganda $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha=0$ bo'ladi;

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ell nx=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+0} \ell nx=-\infty$. 6') $a>1$ bo'lganda $\lim\limits_{x\to+\infty} \ell og_a x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+0} \ell og_a x=-\infty$

7) $0<a<1$ bo'lganda $\lim\limits_{x\to+\infty} \ell og_a x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+0} \ell og_a x=+\infty$.

8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} tgx=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0} tgx=-\infty$. 9) $\lim\limits_{x\to+\infty} arctgx=\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} arctgx=-\frac{\pi}{2}$.

10) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$. 11) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$. 12) $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ell n\, a$

12') $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$ 13) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^p-1}{x}=p$ 14) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ell og_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ell n\, a}$

14') $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ell n(1+x)}{x}=1$.

Uzilish nuqtalari va ularning turlari

Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, u shu nuqtada aniqlangan, x_0 nuqtada o'zaro teng $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ bir tomonlama limitlarga ega hamda bu bir tomonlama limitlar funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymati $f(x_0)$ga teng bo'lishini ko'rdik. Ana shu shartlardan birortasi bajarilmasa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning uzilish nuqtasi, funksiyaning o'zi **uzlukli funksiya** deb ataladi.

Shunday qilib:

1) funksiya x_0 nuqtada aniqlanmagan;
2) funksiya x_0 nuqtada aniqlangan, lekin $f(x_0-0)$ va $f(x_0+0)$ bir tomonlama limitlardan kamida bittasi mavjud emas;
3) funksiya x_0 nuqtada aniqlangan, bir tomonlama limitlar ham mavjud, ammo ular o'zaro teng emas;
4) funksiya x_0 nuqtada aniqlangan, bir tomonlama limitlar ham mavjud va o'zaro teng, lekin ular funksiyaning bu nuqtadagi qiymatlariga teng emas: $f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$ shartlardan kamida bittasi bajarilganda x_0 nuqta funksiyaning uzilish nuqtasi deyilar ekan.

Masalan, $y=\frac{\sin x}{x}$ funksiya $x=0$ nuqtada uzilishga ega (uzlukli), chunki bu nuqtada funksiya aniqlanmagan. Shuningdek, $f(x)=signx$ funksiya ham $x=0$ nuqtada uzilishga ega (uzlukli), chunki bu nuqtada funksiya limitga ega emas, ya'ni $f(-0)\neq f(+0)$.

Uzilish nuqtalari uch turga bo'linadi.

7-ta'rif. x_0 nuqtada $y=f(x)$funksiya aniqlanmagan biroq shu nuqtadagi bir tomonlama limitlar mavjud va o'zaro teng, ya'ni $f(x_0-0)=f(x_0+0)$ bo'lsa, x_0 nuqta funksiyaning yo'qotiladigan uzilish nuqtasi deb ataladi.

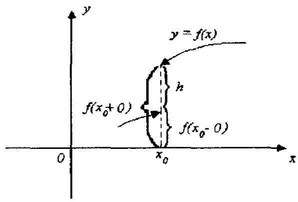
Masalan, $x_0=0$ nuqta $y=\frac{\sin x}{x}$ funksiyaning yo'qotiladigan uzilish nuqtasi, chunki bu funksiya $x=0$ nuqtada aniqlanmagan, biroq

$$\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1, \text{ ya'ni } f(-0)=f(+0)$$

bir tomonlama limitlar mavjud va o'zaro teng. Agar biz funksiyaning $x=0$ nuqtadagi qiymati sifatida uning bir tomonlama limitlarining qiymati 1 ni olsak, $f(0)=f(-0)=f(+0)=1$ bo'lib funksiya $x=0$ nuqtada uzluksiz funksiyaga aylanadi va $x=0$ uzilish nuqta yo'qoladi.

8-ta'rif. Agar $y=f(x)$funksiya x_0 nuqtada aniqlangan yoki aniqlanmagan, lekin bir tomonlama limitlar mavjud va o'zaro teng bo'lmasa, ya'ni $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$ bo'lsa, x_0 nuqta funksiyaning birinchi tur uzilish nuqtasi deb ataladi.

$h=f(x_0-0)-f(x_0+0)$ soni funksiyaning x_0 nuqtadagi sakrashi deb ataladi (93-chizma).



4-chizma

Masalan,

$$f(x)=signx=\begin{cases} 1, agar \;\; x>0, \;\; bo'lsa, \\ 0, agar \;\; x=0, \;\; bo'lsa, \\ -1, agar \;\; x<0, \;\; bo'lsa \end{cases}$$

funksiya uchun $x=0$ nuqta birinchi tur uzilish nuqtasi bo'lib, bu nuqtadagi funksiyaning sakrashi 2 ga teng.

Haqiqatan, $f(x)=signx$ funksiya $x=0$ nuqtada aniqlangan va $f(0)=0$. $f(+0)=\lim\limits_{x\to+0} signx=\lim\limits_{x\to+0} 1=1$. $f(-0)=\lim\limits_{x\to-0} signx=\lim\limits_{x\to-0}(-1)=-1$, ya'ni $x=0$ nuqtada bir tomonlama limitlar mavjud va o'zaro teng emas. $h=f(+0)-f(-0)=1-(-1)=2$.

9-ta'rif. Agar x_0 nuqtada bir tomonlama limitlardan kamida biri mavjud bo'lmasa yoki cheksizlikka teng bo'lsa, x_0 nuqta funksiyaning ikkinchi tur uzilish nuqtasi deb ataladi.

Masalan, $x=0$ nuqta $f(x)=\frac{1}{x}$ funksiya uchun ikkinchi tur uzilish nuqtasi bo'ladi, chunki $x=0$ nuqtada bir tomonlama limitlarning har ikkalasi cheksizlikka teng, ya'ni $\lim\limits_{x\to-0}\frac{1}{x}=-\infty$ va $\lim\limits_{x\to+0}\frac{1}{x}=+\infty$.

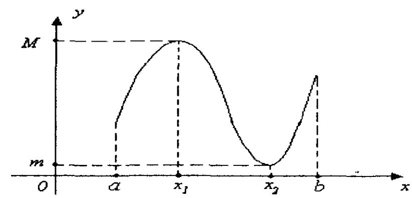
Kesmada uzluksiz funksiyalarning xossalari

Kesmada uzluksiz funksiyalarning ayrim xossalarini isbotsiz keltiramiz.

5-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u holda u bu kesmada o'zining eng kichik va eng katta qiymatiga erishadi, ya'ni $[a; b]$ kesmada shunday x_1, x_2 nuqtalar mavjud bo'lib $[a; b]$ kesmadagi barcha x lar uchun $f(x_1) \geq f(x)$ va $f(x_2) \leq f(x)$ tengsizliklar to'g'ri bo'ladi (94-chizma).

$m = f(x_1)$ va $M = f(x_2)$ $y = f(x)$ funksiyaning $[a; b]$ kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlaridir.

Izoh. Teoremaning shartidagi kesmani interval yoki yarim intervalga almashtirish mumkin emas.



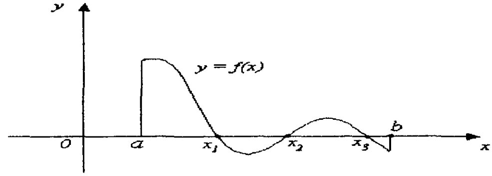
5-chizma

Masalan, $(0; 1)$ intervalda uzluksiz $y = x$ funksiya bu intervalda o'zining eng kichik va eng katta qiymatlarini hech biriga erisha olmaydi.

Natija. $[a; b]$ kesmada uzluksiz $f(x)$ funksiya shu kesmada chegaralangandir.

Haqiqatan, $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini mos ravishda M va m orqali belgilasak, $[a; b]$ kesmadagi barcha x lar uchun $m \leq f(x) \leq M$ tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Agar C orqali $|m|$ va $|M|$ dan kattasini belgilasak, $|f(x)| \leq C$ tengsizlik bajariladi. Bu tengsizlik $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada chegaralanganligini ko'rsatadi.

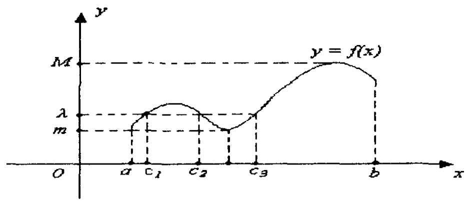
6-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz va kesmaning oxirida turli ishorali qiymatlarni qabul qilsa, u holda $(a; b)$ intervalda kamida bitta nuqta mavjud bo'lib, bu nuqtada funksiyaning qiymati nolga teng bo'ladi.



6-chizma

6-chizmada $f(a)>0$, $f(b)<0$ va x_1, x_2, x_3 nuqtalarda funksiyaning grafigi 0*x* o'qni kesib o'tadi, demak, $f(x_1)=0$, $f(x_2)=0$, $f(x_3)=0$

7-teorema. $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo'lib *m* va *M* uning shu kesmadagi eng kichik va eng katta qiymati bo'lsin, u holda funksiya shu kesmada *m* bilan *M* orasidagi barcha oraliq qiymatlarini qabul qiladi, ya'ni $m<\lambda<M$ shartni qanoatlantiradigan istalgan λ son uchun $[a;b]$ kesmada kamida bitta $x=c$ nuqta mavjud bo'lib, $f(c)=\lambda$ tenglik to'g'ri bo'ladi (96-chizma).



7-chizma

Izoh. Funksiya $[a;b]$ kesmaning birorta nuqtasida uzilishga ega bo'lganda 18.6- va 7- teoremalar bajarilmasligi mumkin. Masalan, $f(x)=\frac{1}{x}$ funksiya uchun $f(-1)=-1<0$, $f(1)=1>0$ bajarilsada y $[-1;1]$ kesmaning hech bir nuqtasida nolga aylanmaydi. Buning sababi $f(x)=\frac{1}{x}$ funksiya $[-1;1]$ kesmadagi $x=0$ nuqtada uzilishga ega (3-chizma).

O'zingizni sinab ko'ring:

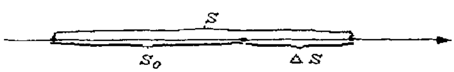
1. Argument orttirmasi nima?
2. Funksiya orttirmasi nima?
3. Funksiyaning nuqtada uzluksizligini ta'riflang.

4. Funksiyani intervalda va kesmada uzluksizligini ta'riflang.
5. Bir tomonlama uzluksizlikni ta'riflang.
6. Asosiy elementar funksiyalarning uzluksizligi haqidagi teoremani ayting.
7. Murakkab funksiyaning uzluksizligi haqidagi teoremani ayting.
8. Uzluksiz funksiyalar ustida amallar haqidagi teoremani ayting.
9. Elementar funksiyalar uzluksizligi haqidagi teoremani ayting.
10. Kesmada uzluksiz funksiyaning asosiy xossalarini ayting.
11. Funksiyaning uzilish nuqtasi nima?
12. Yo'qotiladigan uzilish nuqtasi nima?
13. Birinchi va ikkinchi tur uzilish nuqtalari nima?

XVI BOB. FUNKSIYA HOSILASI

16.1. Funksiya hosilasi ta'rifi
16.2. Hosila jadvali
16.3. Xossalari
16.4. Iqtisodda qo'llanishi

1. Tezlik haqidagi masala. Faraz qilaylik moddiy nuqta to'g'ri chiziq bo'ylab $s = f(t)$ qonun bo'yicha bir tomonlama harakatlanayotgan bo'lsin, bunda t-vaqt, s t vaqt ichida nuqtaning bosib o'tgan yo'li. Vaqtning t_0 momentini qaraymiz. Bu momentda nuqta $s_0 = f(t_0)$yo'lni o'tadi. Moddiy nuqtaning t_0 momentdagi oniy tezligini topish masalasini qo'yamiz. Buning uchun vaqtning boshqa $t_0 + \Delta t$ momentini qaraymiz. Bunga $s = f(t_0 + \Delta t)$ o'tilgan yo'l mos keladi. U holda $\Delta t = t - t_0$ vaqt ichida moddiy nuqta $\Delta s = s - s_0 = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$ masofani o'tadi (97-chizma).



1-chizma

$v_{o'rt} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ nisbat nuqta harakatining Δt vaqt oralig'idagi **o'rtacha tezligini** beradi.

O'rtacha tezlikning $\Delta t \to 0$ dagi limiti t_0 momentdagi **oniy tezlik** deb ataladi va u v_0 orqali belgilanadi.

Demak, $v_0 = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ yoki $v_0 = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$.

Shunday qilib moddiy nuqtaning t_0 momentdagi oniy tezligini topish

$$v_0 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} \qquad (19.1)$$

limitni hisoblashga keltirildi.

1-misol. Moddiy nuqta to'g'ri chiziq bo'ylab $s = t^3$ qonuniyat asosida harakatlanayotgan bo'lsin. Bunda s- o'tilgan yo'l santimetrda o'lchanadi, t-vaqt sekundda o'lchanadi. t=2сек dan $t_1=(2+\Delta t)$sek gacha vaqt oralig'ida nuqtaning o'rtacha tezligi topilsin; Δt=1; 0,01; 0,001 deb olinsin. t=2 momentdagi oniy tezlik topilsin.

Yechish. $\Delta s=(t+\Delta t)^3-(t)^3=t^3+3t^2\Delta t+3t\Delta t^2+\Delta t^3-t^3=3t^2\Delta t+3t\Delta t^2+\Delta t^3.$

O'rtacha tezlik $v_{o'rt}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=3t^2+3t\Delta t+\Delta t^2$ bo'adi. Agar Δt=1sek bo'lsa, t=2sek ekanini hisobga olib $v_{o'rt}=3\cdot 2^2+3\cdot 2\cdot 1+1^2=19\,sm/sek$ kelib chiqadi. t=2sek, Δt=0,01 sek bo'lganda $v_{o'rt}=3\cdot 2^2+3\cdot 2\cdot 0{,}01+(0{,}01)^2=12{,}0601\,sm/sek$ va t=2sek, Δt= 0,001sek bo'lganda $v_{o'rt}=3\cdot 2^2+3\cdot 2\cdot 0{,}001+(0{,}001)^2=12{,}006001\,sm/sek$ bo'ladi. Endi t=2sek momentdagi oniy tezlikni topamiz.

$$v_0=\lim_{\Delta t\to 0}v_{o'rt}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(3t^2+3t\Delta t+\Delta t^2\right)=3t^2.$$

t=2sek bo'lganda $v_0=3\cdot 2^2=12\,sm/sek$ hosil bo'ladi.

Olingan natijalar shuni ko'rsatadiki t t=2sek ga Δt 0 ga qanchalik yaqin bo'lsa o'rtacha tezlik oniy tezlikdan shunchalik kam farq qilar ekan.

2-misol. $s=\dfrac{gt^2}{2}$ qonuniyat asosida tekis tezlanuvchan harakatlanayotgan (erkin tushayotgan) moddiy nuqtaning harakatning ixtiyoriy t momentidagi va t=3sekund momentidagi oniy tezliklari topilsin.

Yechish.

$$\Delta s=s(t+\Delta t)-s(t)=\frac{g}{2}(t+\Delta t)^2-\frac{gt^2}{2}=\frac{g}{2}\left(t^2+2t\Delta t+\Delta t^2\right)-\frac{gt^2}{2}=gt\Delta t+\frac{g\Delta t^2}{2}.$$

$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ nisbatni tuzamiz: $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{gt\Delta t+\dfrac{g\Delta t^2}{2}}{\Delta t}=gt+\dfrac{g}{2}\Delta t$; ta'rifga binoan

$$v_0=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(gt+\frac{g}{2}\Delta t\right)=gt.$$

Demak, t vaqtning istalgan momentida oniy tezlik $v_0=gt$ ga teng ekan.

t=3sek bo'lsa $v_0(3)=g\cdot 3=9{,}8m/sek^2\cdot 3sek=29{,}4m/sek$, ya'ni harakat boshlangandan so'ng uchinchi sekundda moddiy nuqtaning tezligi $29{,}4m/sek$ bo'lar ekan.

2. Sterjenning zichligi haqidagi masala. Uzunligi ℓ ga teng ingichka to'g'ri chiziqli bir jinsli bo'lmagan sterjenni qaraymiz. Shu sterjenning istalgan nuqtasida zichlikni aniqlaymiz. Sterjen $0x$ o'q bo'ylab joylashgan va uning uchlaridan biri koordinatalar boshida yotadi deb faraz qilamiz. U holda sterjenning har bir nuqtasiga ma'lum x koordinata mos keladi.

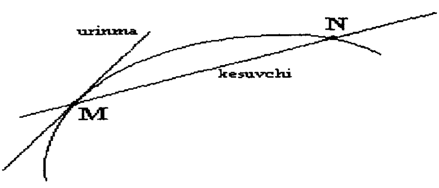
Koordinatalari 0 va x bo'lgan sterjen nuqtalari orasidagi qismining massasini m orqali belgilaymiz. U holda m massa x ning funksiyasi bo'lishi ravshan: $m = f(x)$. Sterjenning aniq qo'zg'olmas x_0 nuqtasini hamda o'zgaruvchi $x_0 + \Delta x$ nuqtasini qaraymiz. Sterjenni qaralayotgan qismining uzunligi Δx ga, massasi $\Delta m = f(x_0 + \Delta x) - f(x)$ ga teng bo'ladi. $\frac{\Delta m}{\Delta x}$ nisbat sterjenning x_0 va $x_0 + \Delta x$ oraliqdagi o'rtacha zichligi deb ataladi.

O'rtacha zichlikning sterjenning uzunligi Δx nolga intilgandagi limiti sterjenning x_0 nuqtadagi zichligi deb ataladi va u δ orqali belgilanadi. Demak,

$$\delta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (19.2)$$

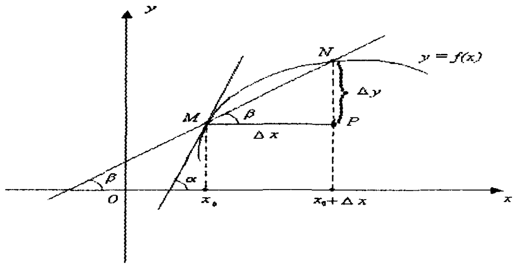
3. Egri chiziqqa urinmaning burchak koeffitsienti. Oldin egri chiziqqa urinma tushunchasini kiritamiz.

1-ta'rif. Egri chiziqning berilgan M va ixtiyoriy N nuqtasini orqali o'tadigan kesuvchi to'g'ri chiziqning N nuqta egri chiziq bo'ylab M nuqtaga intilgandagi limit holati shu egri chiziqqa M nuqtasida o'tkazilgan urinma deb ataladi (2-chizma).



2-chizma

Uzluksiz egri chiziq $y=f(x)$ tenglama yordamida berilgan bo'lib, uning $M(x_0, y_0)$ nuqtasida egri chiziqqa o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsientini topish talab etilsin.



3-chizma

Egri chiziqda $N(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ nuqtani olib MN kesuvchini o'tkazamiz. Bu kesuvchini $0x$ o'qning musbat yo'nalishi bilan tashkil etgan burchakni β orqali belgilaymiz. Urinmaning $0x$ o'q bilan tashkil etgan burchakni α desak, 3-chizmadagi ΔMNP dan

$$tg\beta=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ekani ko'rinib turibdi. N nuqta egri chiziq bo'ylab M nuqtaga intilganda $\Delta x\to 0$ va $\beta\to\alpha$. Demak, $\lim\limits_{\Delta x\to 0} tg\beta = tg\alpha$ va $tg\alpha=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Shunday qilib, urinmaning burchak koeffitsientini k orqali belgilasak uni topish

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (19.3)$$

ko'rinishdagi limitni topishga keltirildi.

Biz qaragan masalalarning barchasida ularning fizik mohiyatidan qat'iy nazar bir xil ya'ni funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatini argument orttirmasi nolga intilgandagi limitini topishga keltirildi. Shuning uchun bu kabi nisbatlarni o'rganish va ularning limitlarini hisoblashni bilish maqsadga muvofiq.

Hosilaning ta'rifi, uning geometrik va mexanik ma'nolari

$y=f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda aniqlangan bo'lsin. $(a;b)$ intervalga tegishli x_0 va $x_0+\Delta x$ nuqtalarni olamiz.

Funksiyaning x_0 nuqtadagi orttirmasi $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ni hisoblab $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatni tuzamiz.

2-ta'rif. Funksiya orttirmasi Δy ning argument orttirmasi Δx ga nisbatining Δx nolga intilgandagi limiti (agar u mavjud bo'lsa) $y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deb ataladi.

Funksiyaning hosilasi $y', f'(x_0), \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}$ belgilardan biri bilan belgilanadi.

Shunday qilib, $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Hosilani topish jarayoni funksiyani **differensiallash** deb ataladi.

Endi yuqorida qaralgan misollarga qaytamiz. Hosila tushunchasidan foydalanib (19.1) tenglikni

$$v_0 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Demak, to'g'ri chiziqli bir tomonlama harakatda oniy tezlik yo'ldan vaqt bo'yicha olingan hosilaga teng ekan. Bu hosilaning mexanik ma'nosidir.

(19.2) tenglikni hosila tushunchasidan foydalanib

$$\delta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = m'(x)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Demak, to'g'ri chiziqli sterjenning x nuqtadagi zichligi m massadan x uzunlik bo'yicha hosila ekan.

Shunga o'xshash (19.3) tenglikni hosila tushunchasidan foydalanib

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

ko'rinishda yozishimiz mumkin. Demak, $f'(x_0)$ hosila geometrik nuqtai nazardan $y = f(x)$ egri chiziqqa $M(x_0, f(x_0))$ nuqtasida o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsientiga teng ekan. Bu hosilaning **geometrik** ma'nosi.

3-misol. $y = x^2$ funksiyaning istalgan nuqtadagi hosilasi topilsin.

Yechish. $f(x_0) = x_0^2$, $f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2$,

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = (x_0+\Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x.$$

Hosilaning ta'rifiga binoan $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x) = 2x_0 + 0 = 2x_0$, chunki x_0 aniq qiymat.

x_0-istalgan nuqta bo'lganligi uchun $y=x^2$ funksiya $(-\infty,+\infty)$ intervalning barcha nuqtalarida hosilaga ega ekanligi va uning hosilasi $2x$ ga tengligi kelib chiqadi, ya'ni $(x^2)' = 2x$.

4-misol. $y=x^2$ parabolaga $M(3;9)$ nuqtasida o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsienti topilsin.

Yechish. $x_0=3$, $f(x_0)=f(3)=3^2=9$. $f'(x_0)=2x_0$ edi. Demak, k= $f'(3)=2\cdot 3=6$.

Biz yuqorida hosilaning mexanik va geometrik ma'nolari bilan tanishdik. Endi uning biologik va iqtisodiy ma'nolari bilan tanishamiz.

Hosilaning biologik ma'nosi

Ko'paygan mikroorganizmlar soni y va ko'payish vaqti t orasidagi bog'lanish

$$y = p(t)$$

tenglama bilan berilgan bo'lsin.

Vaqtning aniq t momentiga mikroorganizmlarning aniq $p(t)$ soni va vaqtning boshqa $t+\Delta t$ momentiga mikroorganizmlarning aniq $p(t+\Delta t)$ soni mos keladi. $\Delta y = p(t+\Delta t) - p(t)$ ifoda Δt vaqt oralig'ida mikroorganizmlarni o'zgarish sonini beradi.

$\frac{\Delta p}{\Delta t}$ nisbat ko'payishning o'rtacha tezligi yoki boshqacha aytganda ko'payishning o'rtacha samaradorligi $y' = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta p}{\Delta t} = p'(t)$ vaqtning t momentidagi mikroorganizm ko'payishining samaradorligini anglatadi. Bu **hosilaning biologik** ma'nosi.

Hosilaning iqtisodiy ma'nosi

Sarflangan xarajatlar miqdori x va olinadigan mahsulot miqdori y orasidagi moslikni aniqlovchi

$$y = f(x)$$

funksiyani olaylik.

U holda sarflangan xarajatni aniq x miqdoriga olingan mahsulotning $f(x)$ miqdori va sarflangan xarajatning boshqa bir $x+\Delta x$ miqdoriga olingan mahsulotning $f(x+\Delta x)$ miqdori mos keladi. $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ ayirma xarajat Δx ga oshganda olingan qo'shimcha mahsulotning miqdorini beradi.

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbat sarflangan Δx xarajat miqdoriga mos olingan mahsulot miqdorining o'rtacha o'zgarish tezligidir. $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ifoda xarajatlarning ma'lum miqdoridagi olingan mahsulot hajmining o'zgarish tezligini (xarajat birligida olingan mahsulot hajmini) anglatadi. Bu **hosilaning iqtisodiy** ma'nosidir.

Asosiy elementar funksiyalarning hosilalari.

O'zgarmas funksiyaning hosilasi

1-teorema. O'zgarmas funksiyaning hosilasi nolga teng, ya'ni $C' = 0$ bunda C-o'zgarmas son.

Isbot. $y = f(x) = C$ desak x argument Δx orttirma olganda y funksiya $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = C - C = 0$ orttirma oladi.

Demak, $C' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$. Shunday qilib $C' = 0$.

Masalan, $(25)' = (2^{18})' = (tg 20^0)' = (\ln 87)' = 0$.

Logarifmik funksiyaning hosilasi

2-teorema. $\ln x$ lagorifmik funksiyaning hosilasi $\frac{1}{x}$ ga teng.

Isboti y=lnx funksiyani qaraymiz. x Δx orttirma olganda funksiya $\Delta y = \ln(x+\Delta x) - \ln x = \ln\frac{x+\Delta x}{x} = \ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$ orttirma oladi.

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$ nisbatni tuzamiz. $\frac{\Delta x}{x}=\alpha$ deb belgilasak Δx→0 da α→0.

Demak, $y^1=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\frac{1}{x}\lim\limits_{\alpha\to 0}\ln(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\frac{1}{x}\ln e=\frac{1}{x}$, ya'ni $(\ln x)^1=\frac{1}{x}$

. Bu yerda $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$ ikkinchi ajoyib limitdan foydalanildi.

Shunga o'xshash $(\log_a x)^1=\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)'=\frac{(\ln x)'}{\ln a}=\frac{1}{x\ln a}$ kelib chiqadi. (bunda a>0, a≠1).

Agar y=ln u bo'lib, bunda, $u=u(x)$ differensiallanuvchi funksiya bo'lsa, u holda murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga binoan $(\ln u)'=\frac{u'}{u}$ tenglikka ega bo'lamiz.

Xususan, agar $y=\log_a u,\ u=u(x)$ bo'lsa, u holda

$(\log_a u)'=\left(\frac{\ln u}{\ln a}\right)'=\frac{1}{\ln a}\cdot(\ln u)'=\frac{u^1}{\ln a\cdot u}$ bo'ladi.

Darajali funksiyaning hosilasi

3-teorema. x^α darajali funksiyaning hosilasi $\alpha x^{\alpha-1}$ ga teng, bunda α-o'zgarmas son.

Isboti. $y=x^\alpha$ funksiyani qaraymiz. Uni e asosga ko'ra logarifmlab lny=αlnx tenglikka ega bo'lamiz. y ni x ning funksiyasi hisoblab, tenglikning ikkala qismini x bo'yicha differensiallaymiz: $\frac{y'}{y}=\alpha\cdot\frac{1}{x}$.

Bundan $y'=\alpha\cdot y\cdot\frac{1}{x}=\alpha\cdot x^\alpha\cdot\frac{1}{x}=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$ shunday qilib $\left(x^\alpha\right)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$. Teorema isbotlandi.

Agar $y=u^\alpha$ bo'lib, $u=u(x)$ differensiallanuvchi funksiya bo'lsa, u holda murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga binoan $(u^\alpha)'=\alpha\cdot u^{\alpha-1}\cdot u'$ bo'ladi.

1-misol. $y=\sqrt{x}$ funksiyaning hosilasi topilsin.

Yechish. $y^1=\left(\sqrt{x}\right)^1=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^1=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Demak, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

2-misol. $y = \frac{1}{x}$ funksiyaning hosilasi topilsin.

Yechish. $y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$.

Demak, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

Izoh. Bundan buyon funksiyaning hosilasi topilsin deyilganda shu funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli istalgan nuqtada uning hosilasini topishni nazarda tutamiz.

Ko'rsatkichli funksiyaning hosilasi

4-teorema. a^x ko'rsatkichli funksiyaning hosilasi $a^x \ln a$ ga tengdir.

Isboti. $y=a^x$ ($a>0$, $a \neq 1$) funksiyani qaraymiz. Uni e asosga ko'ra logarifmlasak $\ln y = x \cdot \ln a$ bo'ladi. y ni x ning funksiyasi hisoblab, tenglamaning ikkala qismini x bo'yicha differensiallaymiz. $\frac{y'}{y} = \ln a$.

Bundan $y'=y\ln a$ yoki $y'=a^x\ln a$ kelib chiqadi. Demak, $(a^x)'=a^x\ln a$.

$y=a^u$ murakkab funksiya uchun $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$ formulaga ega bo'lamiz.

Xususiy holda a=e bo'lsa lne=1 bo'lib $(e^x)' = e^x$ va $(e^u)' = e^u \cdot u'$ formulalarga ega bo'lamiz.

3-misol. $y=2^x$ bo'lsa, y' topilsin.

Yechish. $(2^x)' = 2^x \ln 2$.

4-misol. $y = 3^{x^2}$ bo'lsa, y' topilsin.

Yechish. $y' = \left(3^{x^2}\right)' = 3^{x^2} \ln 3 (x^2)' = 3^{x^2} \ln 3 \cdot 2x$.

5-misol. $y = e^{x^3}$ bo'lsa, y' topilsin.

Yechish. $y' = \left(e^{x^3}\right)' = e^{x^3} (x^3)' = e^{x^3} 3x^2$

Trigonometrik funksiyalarning hosilalari

5-teorema. sinx funksiyaning hosilasi cosx ga teng.

Isboti. y=sinx funksiyani qaraymiz. x ga Δx orttirma bersak funksiya

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\left(\frac{x+\Delta x+x}{2}\right)\sin\left(\frac{x+\Delta x-x}{2}\right)=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$$

orttirma oladi. Shuning uchun

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

va $$y'=(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=1\cdot\cos x=\cos x.$$

Bu yerda birinchi ajoyib limitdan hamda cosx funksiyaning uzluksizligidan foydalanildi.

Shunday qilib, $(\sin x)'=\cos x$.

y=sinu (bunda u=u(x)) murakkab funksiya uchun $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$ formulaga ega bo‘lamiz.

6-misol. y=sin$\sqrt{x}$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. $y'=\cos\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}\right)'=\cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$.

7-misol. y=sin^{2}x funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. $y'=(\sin^2 x)'=((\sin x)^2)'=2\sin x\cdot(\sin x)'=2\sin x\cdot\cos x=\sin 2x$.

8-misol. y=sin(lnx) funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. $y'=\cos(\ln x)(\ln x)'=\frac{\cos(\ln x)}{x}$.

6- teorema. cosx funksiyaning hosilasi –sinx ga teng.

Isboti. y=cosx funksiyani qaraymiz. Keltirish formulasidan foydalanib uni y=cosx=sin $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ ko‘rinishda yozamiz. Demak,

$$y'=(\cos x)'=\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)'=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)'=\sin x\cdot(0-1)=-\sin x,\text{yoki } (\cos x)'=-\sin x$$

y=cosu (bunda u=u(x)) murakkab funksiyani hosilasini topish uchun $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$ formulaga ega bo‘lamiz.

9-misol. y=cosx^3 funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. $y' = -\sin x^3 (x^3)' = -\sin x^3 \cdot 3x^2$.

10-misol. y=cos$\sqrt{x^2+1}$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. $y' = -\sin\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}\right)' = -\sin\sqrt{x^2+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot(x^2+1)' =$

$$-\sin\sqrt{x^2+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x = -\frac{x\sin\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}.$$

7-teorema. tgx funksiyaning hosilasi $\frac{1}{\cos^2 x}$ ga teng.

Isboti. tgx=$\frac{\sin x}{\cos x}$ bo'lganligi sababli bo'linmani hosilasini topish qoidasiga binoan

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cdot\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Shunday qilib, $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

y=tgu (bunda, u=u(x)) murakkab funksiyani hosilasini topish uchun $(tgu)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$ formulaga ega bo'lamiz.

11-misol. y=tg$\frac{1}{x}$ funksiyani hosilasini toping.

Yechish. $y' = \frac{1}{\cos^2\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2\cos^2\frac{1}{x}}$.

12-misol. y=tg$^3\sqrt{x}$ funksiyani hosilasini toping.

Yechish.

$$y' = \left((tg\sqrt{x})^3\right)' = 3tg^2\sqrt{x}\cdot(tg\sqrt{x})' = 3tg^2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x})' = \frac{3tg^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cdot\cos^2\sqrt{x}}.$$

8-teorema. ctgx funksiyaning hosilasi $-\frac{1}{\sin^2 x}$ ga teng.

Bu teoremani isbotlashni o'quvchiga qoldiramiz.

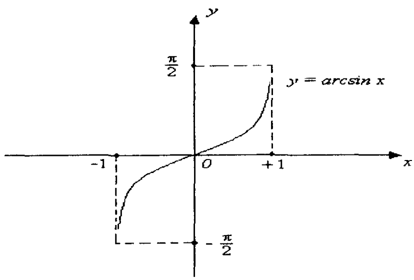
13-misol. $y = ctg\sqrt{2x^2+1}$ funksiyani hosilasini toping.

$$y' = -\frac{1}{\sin^2\sqrt{2x^2+1}}\cdot\left(\sqrt{2x^2+1}\right)' = -\frac{1}{\sin^2\sqrt{2x^2+1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2x^2+1}}\cdot(2x^2+1)' =$$

$$=-\frac{1}{\sin^2\sqrt{2x^2+1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2x^2+1}}\cdot 4x=-\frac{2x}{\sin^2\sqrt{2x^2+1}\cdot\sqrt{2x^2+1}}.$$

Teskari trigonometrik funksiyalar va ularning hosilalari

1) y=arcsinx funksiya. x=siny funksiyani qaraymiz. Bu funksiya $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$ kesmada monoton o'uvchi bo'lib uning qiymatlari $-1\le x\le 1$ kesmani to'ldiradi. Shuning uchun bu funksiya aniqlanish sohasi $[-1,+1]$ dan, qiymatlar sohasi $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ kesmadan iborat teskari funksiyaga ega (19.4-teorema).



101-chizma.

Odatda uni y=arcsinx ko'rinishda yozish qabul qilingan. Demak x=siny va y=arcsinx funksiyalar o'zaro teskari funksiyalar. y=arcsinx funksiyaning grafigi 101-chizmada tasvirlangan. D(arcsinx)=[-1,1], E(arcsinx)=$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

9. teorema. arcsinx funksiyaning hosilasi $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ga teng.

Isboti. y=arcsinx funksiyani qaraymiz. x=siny funksiya bu funksiyaga teskari funksiya bo'ladi.

O'zaro teskari funksiyani hosilasini topish formulasi by$'_x=\frac{1}{x'_y}$ (19.5.teorema)dan foydalanamiz.

$$y'=\frac{1}{(\sin y)'_y}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

chunki $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ kesmada $\cos y \geq 0$ bo‘lgani uchun $\sqrt{1-\sin^2 y}$ oldidagi plyus ishora olindi.

Shunday qilib, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$y=\arcsin u$ (bunda, u=u(x)) murakkab funksiya uchun $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ hosilani topish formulasiga ega bo‘lamiz.

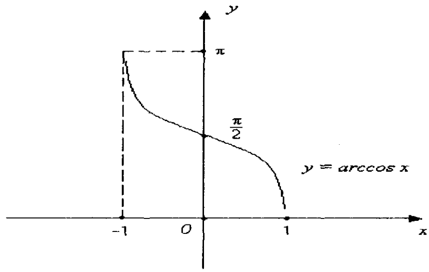
14-misol. $y = \arcsin e^x$ funksiyani hosilasini toping.

Yechish. $y' = \frac{(e^x)'}{\sqrt{1-(e^x)^2}} = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

15-misol. $y = 2\arcsin\sqrt{x}$ funksiyani hosilasini toping.

Yechish. $y' = 2(\arcsin\sqrt{x})' = 2\frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = 2\cdot\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{x\cdot(1-x)}}$.

2) y=arccosx funksiya. x=cosy funksiyani qaraymiz. Bu funksiya $0 \leq y \leq \pi$ kesmada monoton kamayuvchiligini bilamiz. Shuning uchun bu funksiyaga teskari funksiya mavjud (19.4 teorema) bo‘lib uning aniqlanish sohasi [-1,1] kesmadan, qiymatlari sohasi $[0;\pi]$ kesmadan iborat bo‘ladi. x=cosy funksiyaga teskari funksiyani y=arccosx kabi yoziladi. y=arccosx funksiyaning grafigi 4-chizmada tasvirlangan. D(arccosx)=[-1,1], E(arccosx)= $[0;\pi]$ ekani ravshan.

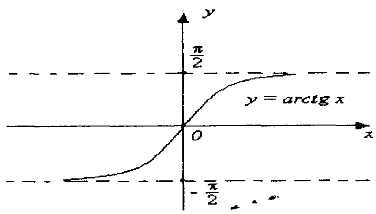


4-chizma.

10-teorema. arccosx funksiyaning hosilasi $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ga teng.

Teoremaning isboti 20.9-teoremaning isbrtini takrorlagani uchun uni isbotlashni o‘quvchiga qoldiramiz.

3) y=arctgx funksiya. x=tgy funksiyani qaraymiz. Bu funksiya $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$ intervalda monoton o‘sadi. Shuning uchun bu funksiyaga teskari funksiya mavjud(19.4-teorema) bo‘lib uning aniqlanish sohasi butun sonlar o‘qidan iborat. x=tgy funksiyaga teskari funksiya y=arctgx kabi yoziladi. Demak D(arctgx)=$(-\infty;\ \infty)$, E(arctgx)=$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ va $\lim\limits_{x\to-\infty} arctgx=-\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} arctgx=\frac{\pi}{2}$. y=arctgx funksiyaning grafigi 5-chizma-da tasvirlangan.



5-chizma

11-teorema. arctgx funksiyaning hosilasi $\frac{1}{1-x^2}$ ga teng.

Isboti. y=arctgx funksiyani qaraymiz. x=tgy funksiyaga teskari funksiya bo‘lganligi sababli ularning hosilalari (19.5-teorema) $y_x'=\frac{1}{x_y'}$ tenglik orqali bog‘langan. Shuning uchun

$$y'=\frac{1}{(tgy)_y'}=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}}=\cos^2 y=\frac{1}{1+tg^2 y}=\frac{1}{1+x^2}.$$

Demak, $(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}$. y=arctgu murakkab funksiyani hosilasi $(\mathrm{arctg}u)'=\frac{u'}{1+u^2}$ formula yordamida topiladi.

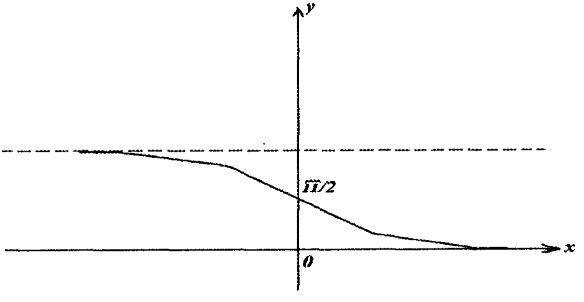
16-misol. y=(arctgx)^3 funksiyani hosilasini toping.

Yechish. $y' = 3(\text{arctg}x)^2 \cdot (\text{arctg}x)' = 3(\text{arctg}x)^2 \cdot \frac{1}{1+x^2}$.

17-misol. y=arctgx^2 funksiyani hosilasini toping.

Yechish. $y' = \frac{(x^2)'}{1+(x^2)^2} = \frac{2x}{1+x^4}$.

4) y=arcctgx funksiya. x=ctgy funksiyani qaraymiz. Bu funksiya $0<y<\pi$ intervalda monoton kamayuvchi. Shuning uchun bu funksiyaga teskari funksiya mavjud (19.4-teorema) va uning aniqlanish sohasi $(-\infty,+\infty)$ dan iborat. x=ctgy funksiyaga teskari funksiya y=arcctgx ko'nishda belgilanadi. Demak, D(arcctgx)=(-∞,+∞), E(arcctgx)=$(0;\pi)$ va $\lim\limits_{x\to-\infty} arcctgx = \pi$, $\lim\limits_{x\to+\infty} arcctgx = 0$. y=arcctgx funksiyaning grafigi 6-chizmada tasvirlangan.



6-chizma.

12-teorema. *arcctgx* funksiyaning hosilasi$-\frac{1}{1+x^2}$ ga teng.

Teoremani isboti 20.11-teoremani isbotiga o'hshaganligi uchun uni isbotini o'quvchiga qoldiramiz.

$y = arcctgu$ murakkab funksiyani hosilasi $(arcctgu)' = -\frac{u'}{1+u^2}$ formula yordamida topiladi.

18-misol. $y =$=arcctgx^4 funksiyani hosilasini toping.

Yechish. $y' = -\frac{(x^4)'}{1+(x^4)^2} = -\frac{4x^3}{1+x^8}$.

19-misol. y=arctg$\frac{1}{x}$ funksiyani hosilasini toping

$$y' = -\frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = -\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x^2}} = \frac{1}{x^2+1}.$$

Izoh. Murakkab funksiyalarning $u = u(x)$ oraliq argumenti differensiyallanuvchi deb faraz qilindi.

Asosiy elementar funksiyalarning hosilalari

1. Asosiy elementar funksiyalarning hosilalarini topish formulalari:

1. $\tilde{N}' = 0$ (c – o'zgarmas son)
2. $X' = 1$ (n – o'zgarmas son)
3. $(x^n)' = nx^{n-1}$
4. $(a^n)' = a^x \ln a$; $(e^x)' = e^x$
5. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$; $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
6. $(\sin x)' = \cos x$
7. $(\cos x)' = -\sin x$
8. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
9. $(ctgx)' = \frac{1}{\sin^2 x}$
10. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $(\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$
13. $(arcctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$

2. Agar $u=f(x)$, $v=Y(x)$ va $w=g(x)$lar chekli hosilalarga $(u', v'; w')$ ega bo'lsa, quyidagi qoidalarga asoslanib hisoblanadi:

1^0. $(c\cdot u)'=c\cdot u'$

2^0. $(u+v+w)'=u'+v'+w'$

3^0. $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$

4^0. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$

5^0. $\left(\dfrac{c}{v}\right)'=-\dfrac{c\cdot v'}{v^2}$

Misol. Agar $f(x)=2x^3+4x-5$ bo'lsa $f'(-1)$, $f'(0)$ va $f'(2)$, $f'(3)$ larni hisoblang.

Yechimi: Avval hosilani aniqlaymiz, (2) va so'ngra (1) qoidalarni qo'llasak: $f'(x)=(2x^3)'+(4x)'-5'=2(x^3)'+4x'-5'$

Hosila topshining (1), (2) va (3) formulalariga asosan

$$f'(x)=2\cdot 3x^2+4\cdot 1-0=6x^2+4$$

Endi ko'rsatilgan nuqtalardagi hosilaning qiymatlarini aniqlaymiz:

$$f'(-1)=6\cdot(-1)^2+4=10$$
$$f'(0)=6\cdot 0+4=4$$
$$f'(2)=6\cdot 2^2+4=28$$
$$f'(3)=6\cdot 3^2+4=58$$

Eslatamiz: Bunday so'ng qo'llanadigan formulalarni, qoidalarni qavs ichida ko'rsatamiz:

Misol 2. Quyidagi funksiyalarning hosilalari topilsin:

1. $y=x^{\frac{2}{3}}+3$

2. $y=\dfrac{2x^3}{\sqrt{x}}-\dfrac{3}{\sqrt[3]{x^2}}+2\sqrt[4]{x^3}$

3. $y = x^2\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{1}{2}x^2$

4. $y = \left(2x^3 + \sqrt{3}\right)\cdot 6^x$

5. $y = \dfrac{x}{2 - \cos x} - \dfrac{x^2}{\sqrt{2}}$

6. $y = \dfrac{3}{\sin x} + \dfrac{\ln x}{x^3}$

Yechimi:

1. $y' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' + 3' = \dfrac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} + 0 = \dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ $\qquad [2^0,\ (3),\ (1)]$

2. $y' = \left(\dfrac{2x^3}{\sqrt{x}}\right)' - \left(\dfrac{3}{\sqrt[3]{x^2}}\right)' + \left(2\sqrt[4]{x^3}\right)' = 2\left(x^{\frac{5}{2}}\right)' - 3\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)' + 2\left(x^{\frac{3}{4}}\right) =$

$= 2\cdot\dfrac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} - 3\left(-\dfrac{2}{3}\right)x^{-\frac{5}{3}} + 2\dfrac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} = 5x^{\frac{3}{2}} + 2x^{-\frac{5}{3}} + \dfrac{3}{2}x^{-\frac{1}{4}}$ $\qquad [1^0, 2^0, 3]$

3. Kasr ko‘rsatkichlarga o‘tamiz.

$$y = x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{\sqrt{3}}} + \frac{1}{2}x^2$$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - \dfrac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} + \dfrac{1}{2}2x;$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x} - \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{3x^2} + x$ $\qquad [2^0, 1^0, 3]$

4.

$y' = \left(2x^3 + \sqrt{3}\right)'\cdot 6^x + \left(2x^3 + \sqrt{3}\right)\cdot\left(6^x\right)' = \left(6x^2 + 0\right)\cdot 6^x + \left(2x^3 + \sqrt{3}\right)\cdot 6^x \ln 6 =$

$= 6^x\left[6x^2 + \left(2x^3 + \sqrt{3}\right)\cdot\ln 6\right]$ $\qquad [3^0, 2^0, 1^0, 1, 3, 4]$

Misol 3. $y = xtgx + ctgx$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechimi: $y' = (xtgx)' + (ctgx)' = x'tgx + x(tgx)' + (ctgx)' =$

$= tgx + \dfrac{x}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{\sin^2 x}$ $\qquad [2^0, 3^0, 2, 8, 9]$

Misol 4. Agar $f(x)=e^x \arcsin x + arcctgx$ bo'lsa, $f'(0)$ni hisoblang.
Yechimi:

$$f'(x)=\left(e^x \arcsin x\right)' + (arcctgx)' = \left(e^x\right)' \arcsin x + e^x (\arcsin x)' + \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= e^x \arcsin x + \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1+x^2}$$

$x=0$ qiymatni qo'yib $f'(0)$ni topamiz:

$$f'(0)=e^0 \arcsin 0 + \frac{e^0}{\sqrt{1-0}} + \frac{1}{1+0} = 1\cdot 0 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 1+1=2 \qquad f'(0)=2$$

Misol 5. $y=z^5 \cdot \log_3 z$ ning hosilasini toping.
Yechimi:

$$y'=\left(z^5\right)' \log_3 z + z^5 (\log_3 z)' = 5z^4 \log_3 z + z^4 \frac{1}{z\ln 3} = z^4\left(5\log_3 z + \frac{1}{\ln 3}\right)$$

Mustaqil ishlash uchun mashqlar:

Quyidagi funksiyalarning hosilalarini toping
(Qavs ichida javobi berilgan)

1. $f'(x)=ax^2+bx+c$ $\qquad (2ax+b)$

2. $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^{-3}+1$ $\qquad \left(x^2+x+x^{-4}\right)$

3. $y=2x^5-4x^3+x^2+\sqrt{3}$ $\qquad \left(10x^4-12x^2+2x\right)$

4. $y=\left(x^2+3\right)(x-1)$ $\qquad \left(3x^2-2x+3\right)$

5. $y=x^3\left(x^2-3x+1\right)$ $\qquad \left(5x^4-12x^3+3x\right)$

6. $y=(x-1)^3$ $\qquad \left(3x^2-6x+3\right)$

7. $y=\frac{2}{x-1}$ $\qquad$ $-\frac{2}{(x-1)^2}$

8. $y=\frac{x-1}{x+1}$ $\qquad$ $\left(\frac{2}{(x+1)^2}\right)$

9. $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ $\qquad$ $\left(-\frac{4x}{(x^2-1)^2}\right)$

10. $f(x)=\frac{x}{x^3+1}$ bo'lsa $f'(1)$ hisoblansin. $\left(-\frac{1}{8}\right)$

11. $y=\frac{3}{x^2+x+1}$ $\qquad$ $\left(-\frac{3(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}\right)$

12. $y=\frac{2-x^2}{2+x^2}$ $\qquad$ $\left(-\frac{8x}{(2x+x^2)^2}\right)$

13. $y=\frac{1}{x^2+2x+3}$ bo'lsa $y'(0)$ ni toping. $\left(-\frac{2}{9}\right)$

14. $v=\frac{z^3+1}{z^2+z+1}$ $\qquad$ $\left[\frac{-3z^4+2z^3+3z^2+z-1}{(z^2+z+1)^2}\right]$

15. $s=\frac{t^3+3}{t+1}$ $\qquad$ $\left[\frac{2t^3+3t^2-3}{(t+1)^2}\right]$

16. $y=\frac{x}{x^2-x^{-2}}$ $\qquad$ $\left[-\frac{x^2(x^4+3)}{(x^4-1)^2}\right]$

17. $y=4\sqrt{x}+\dfrac{4}{x}-3$ $\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}-\dfrac{4}{x^2}\right)$

18. $y=2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}$ $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$

19. $y=\sqrt[3]{x^2}-x\sqrt[4]{x}$ $\left(\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}-\dfrac{5}{4}\sqrt[4]{x}\right)$

20. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ bo‘lsa $f'(4)$ ni toping $\left(-\dfrac{1}{4}\right)$

21. $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^5}-x}{x^3}$ $\left(\dfrac{-12\sqrt[5]{x^3}+10x}{5x^4}\right)$

22. $y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)^2}\right)$

23. $y=x^2\left(\sqrt{x}-2\right)$ $\left(\dfrac{5}{2}x\sqrt{x}-4x\right)$

24. $y=x\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[5]{2}\right)$ $\left(\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{x}-\sqrt[5]{2}\right)$

25. $y=\sqrt[4]{x}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ $\left(\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}+\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{x}}\right)$

26. $y=\dfrac{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x^3}}$ $\left(-\dfrac{11\sqrt[12]{x}}{12x^2}\right)$

27. $y = \sin x - \cos x$ $\quad (\cos x + \sin x)$

28. $y = x\cos x$ $\quad (\cos x - x\sin x)$

29. $y = tgx - ctgx$ $\quad (4\cos ec^2 \cdot 2x)$

30. $y = \dfrac{x}{\sin x}$ $\quad \left(\dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}\right)$

31. $y = \dfrac{\cos x}{x}$ $\quad \left(-\dfrac{x\sin x + \cos x}{x^2}\right)$

32. $y = \dfrac{\sin t}{1+\cos t}$ $\quad \left(\dfrac{1}{1+\cos t}\right)$

33. $y = \sqrt{x}\sin x$ $\quad \left(\dfrac{\sin x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\cos x\right)$

34. $y = xtgx$ $\quad \left(tgx + \dfrac{x}{\cos^2 x}\right)$

35. $y = \dfrac{x^2 + tgx}{x^2 - tgx}$ $\quad \left(\dfrac{2\left(\dfrac{x}{\cos^2 x} - 2xtgx\right)}{\left(x^2 - tgx^2\right)}\right)$

36. $y = \dfrac{1}{tgx + \sin x}$ $\quad \left(-\dfrac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x(tgx + \sin x)^2}\right)$

37. $s = \arcsin t + \arccos t$ $\quad (0)$

38. $y = x\arcsin x$ $\qquad\left(\arcsin x + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

39. $y = x\,arctgx$ $\qquad\left(arctgx + x\dfrac{1}{1+x^2}\right)$

40. $y = \sin x \cdot \arcsin x$ $\qquad\left(\cos x \cdot \arcsin x + \dfrac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

Murakkab funksiyaning hosilasi

Berilgan funksiyaning argumenti o'z navbatida funksiyadan iborat bo'lishi mumkin. U holda bunday funksiyalarni murakkab funksiya deyiladi.

Masalan: 1. $y = \sin x^2$ uni $y = \sin u,\ u = x^2$ shaklida ko'rsatish mumkin. 2. $y = (x^3 - 1)^4$ uni $y = z^4,\ z = x^3 - 1$ kabi ko'rsatish mumkin. Umumiy holda $y = f(u)$ bo'lib $u = \varphi(x)$ bo'lsa, berilgan funksiya $y = f(u)$ murakkab funksiya bo'ladi, ya'ni $y = f[\varphi(x)]$.

Agar $u = \varphi(x)$ funksiya qandaydir x nuqtada $\varphi'(x)$ hosilaga, $y = f(u)$ u-nuqtada $y'_u = f'(u) \cdot u'$ hosilaga ega bo'lsa, $y'_x = f'(u) \cdot \varphi'(x)$ yoki $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ bo'ladi.

Ya'ni berilgan hosilasini oraliq funksiya u ning hosilasiga ko'paytiriladi. Buni hisobga olsak, murakkab funksiyalar hosilasini topish formulalari quyidagicha bo'ladi.

1. $y = c$ $\qquad y' = 0$
2. $y = u$ $\qquad y' = u'$

$$\left.\begin{aligned} &y = u^n && y' = nu^{n-1} \cdot u' \\ 3.\quad &y = \frac{1}{u} && y' = -\frac{u^1}{u^2} \\ &y = \sqrt{u} && y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \end{aligned}\right\}$$

4. $\begin{cases} y = a^u \\ y = e^u \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{aligned} &y' = a^u \ln a \cdot u' \\ &y = e^u \cdot u' \end{aligned}$

5. $\begin{cases} y = \log_a u \\ y = \ln u \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{aligned} &y' = \frac{u'}{u \lg a} \\ &y = \frac{u'}{u} \end{aligned}$

6. $y = \sin u$ $\qquad$ $y' = \cos u \cdot u'$

7. $y = \cos u$ $\qquad$ $y' = -\sin u \cdot u'$

8. $y = tgu$ $\qquad$ $y' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

9. $y = ctgu$ $\qquad$ $y' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$

10. $y = \arcsin u$ $\qquad$ $y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

11. $y = \arccos u$ $\qquad$ $y' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

12. $y = arctgu$ $\qquad$ $y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

13. $y = arcctgu$ $\qquad$ $y' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$

Misol 1. $y = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$ $\qquad$ $y' = ?$

Yechimi: bunda $y=u^2$ bo‘lib, $u=\dfrac{x+1}{x-1}$

$$y'=2u\cdot u'=2\frac{x+1}{x-1}\cdot\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'=2\frac{x+1}{x-1}$$

$$\frac{(x+1)'(x-1)-(x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}=2\frac{(x+1)(x-1-x-1)}{(x-1)^3}=$$

$$=2\frac{(x+1)(-2)}{(x-1)^3}=-\frac{4(x+1)}{(x-1)^3};\quad y=-\frac{4(x+1)}{(x-1)^3};\qquad [3,4^0,2^0,1^0,2]$$

Misol 2. $y=(1+2x)^{50}$; $\qquad y'=?$

Yechimi: bunda $y=50$ bo‘lib, $u=1-2x$

$$y'=50u^{49}\cdot u'=50(1-2x)^{49}\cdot(1-2x)'=$$
$$=50(1-2x)^{49}(-2)=-100(1-2x)^{49};\qquad [3,2^0,1^0,1,2]$$

Misol 3. $y=2^{x^2+1}$ ya’ni $y=2u$ bo‘lib, $u=x^2+1$ bunda y' topilsin.

Yechimi:

$$y'=2^u\ln 2\cdot u'=2^{x^2+1}\cdot\ln 2(x^2+1)'=$$
$$=2^{x^2+1}\ln 2\cdot 2x=2^{2^x+1}x\ln 2\qquad [3,2^0,1^0,1,2]$$

Misol 4. $y=\log_3(4+x^2)$ bunda $y=\log_3 u$ bo‘lib, $u=4+x^2$; y' topilishi kerak.

Yechimi:

$$y'=\frac{u'}{u\ln 3}=\frac{(4+x^2)'}{(4+x^2)\cdot\ln_3}=\frac{2x}{(4+x^2)\ln_3};\quad [3,2^0]$$

Misol 5. $y=\sin 3^x$ ya’ni $y=\sin u$ bo‘lib, $u=3^x$; $y'=?$

Yechimi:

$$y'=\cos u\cdot u'=\cos 3^x\cdot(3^x)'=3^x\cos 3^x\ln 3;\quad [6,4]$$

Misol 6. $y = tg2x$ ya'ni $y = tgu$ bo'lib, $u = 2x$; $y' = ?$

Yechimi:

$$y' = \frac{u'}{\cos^2 u} = \frac{(2x)'}{\cos^2 2x} = \frac{2}{\cos^2 2x};$$

$$y' = 2\sec^2 2x$$

Misol 7. $y = \arcsin\sqrt{x}$ ya'ni $y = \arcsin u$ va $u = \sqrt{x}$; $y' = ?$

Yechimi:

$$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}};$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}};$$

Misol 8. $y = \arccos\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$ ya'ni $y = \arccos u$ va $u = \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$;

$$y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = -\frac{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}} = -\frac{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)'}{\sqrt{1-\frac{(2x-1)^2}{3}}} =$$

$$= -\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3-(2x-1)^2}}{\sqrt{3}}} = -\frac{2}{\sqrt{3-(2x-1)^2}}$$

Misol 9. $y = \cos^2(3x-4)$ $\qquad y' = ?$

Yechimi: bunda $y = u^2$, $u = \cos t$ va $t = 3x-4$dan iborat. Shunga ko'ra:

$$y' = 2u \cdot u' = 2\cos t \cdot (\cos t)' = 2\cos t(-\sin t) \cdot t' =$$

$$= 2\cos(3x-4)[-\sin(3x-4)](3x-4) =$$

$$= -2\cos(3x-4) \cdot \sin(3x-4) \cdot 3 = -3\sin(6x-8)$$

Misol 10. $y = \ln^5\left(\frac{1}{5}x+1\right)$; $\qquad y' = ?$

Yechimi: $y = u^5 \quad u = \ln t, \quad t = \frac{1}{5}x+1$

$$y' = 5u^4 \cdot u' = 5\ln^4 t(\ln t)' = 5\ln^4 t \cdot \frac{t'}{t} =$$

$$= 5\ln^4\left(\frac{1}{5}x+1\right)\frac{\left(\frac{1}{5}x+1\right)'}{\frac{1}{5}x+1} = 5\ln^4\left(\frac{1}{5}x+1\right) \cdot \frac{\frac{1}{5}}{\frac{x+5}{5}} =$$

$$= 5\ln^4\left(\frac{1}{5}x+1\right) \cdot \frac{1}{x+5} = \frac{5}{x+5}\ln^4\left(\frac{1}{5}x+1\right)$$

Misol 11. $f(t) = \ln\frac{\sqrt{1-\sin t}}{1+\sin t}$ da $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ topilsin.

Yechimi: Avval berilgan funksiyani logarifmlab olish maqsadga muvofiqdir:

$$f'(t) = \frac{1}{2}[\ln(1-\sin t) - \ln(1+\sin t)]$$

$$f'(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{-\cos t}{1-\sin t} - \frac{\cos t}{1+\sin t}\right) = -\frac{\cos t}{2} \cdot \frac{1+\sin t+1-\sin t}{1-\sin^2 t} =$$

$$= -\frac{\cos t}{2} \cdot \frac{2}{\cos^2 t} = -\frac{1}{\cos t}; \qquad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}} = -\sqrt{2}$$

Mashqlar:

Funksiyalarning hosilalari topilsin:

1. $y=\sin(2x-1)$ bunda $y=\sin u$ va $u=2x-1$.

Javob: $y'=2\cos(2x-1)$

2. $y=\cos(1-x)$ bunda $y=\cos u$ va $u=1-x$

Javob: $y'=\sin(1-x)$

3. $y=\sin at$ bunda $y=\sin u$ va $u=at$

Javob: $y'=a\cos at$

4. $y=\cos\left(\frac{\pi}{5}+x^2\right)$ bunda $y=\cos u$ va $u=\frac{\pi}{5}+x^2$

Javob: $y'=-2x\sin\left(\frac{\pi}{5}+x^2\right)$

5. $y=(1-2x)^7$ bunda $y=u^7$ va $u=(1-2x)$

Javob: $y'=-14(1-2x)^6$

6. $y=\lg(ax^2+bx+c)$ bunda $y=\lg u$ va $u=ax^2+bx+c$

Javob: $y'=\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)\ln 10}$

7. $y=\ln(1+2x-x^2)$ bunda $y=\ln u$ va $u=1+2x-x^2$

Javob: $y'=\frac{2(1-x)}{1+2x-x^2}$

8. $y=\left(\dfrac{x^2}{2x-1}\right)^{10}$ bunda $y=u^{10}$ va $u=\dfrac{x^2}{2x-1}$

Javob: $y'=\dfrac{20x^{19}(x-1)}{(2x-1)^{11}}$

9. $y=\sin x^2$

Javob: $y'=2x\cos x^2$

10. $y=tg(\sin x)$

Javob: $y'=\dfrac{\cos x}{\cos^2(\sin x)}$

11. $y=\arcsin\sqrt[4]{x}$

Javob: $y'=\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}\sqrt{1-\sqrt{x}}}$

12. $y=\cos^2 2x$

Javob: $y'=-2\sin 4x$

13. $y=\dfrac{1}{5}tg^3x^3$

Javob: $y'=\dfrac{3x^2tg^2x^3}{\cos^2 x^3}$

14. $y=\ln^3 x$

Javob: $y'=\dfrac{3\ln^2 x}{x}$

15. $y=e^{-x^2}$

Javob: $y' = -2xe^{-x^2}$

16. $y = arctg(tgx)$
Javob: $y' = 1$

17. $y = \arcsin(\sin x)$
Javob: $y' = 1$

18. $y = u^{100}$ bunda $u = 2 + 5x$
Javob: $y' = 500(2 + 5x)^{99}$

19. $y = u^8$ bunda $u = \dfrac{x+1}{x-1}$
Javob: $y' = -\dfrac{16(x+1)^7}{(x-1)^9}$

20. $y = u^{10}$ bunda $u = 2x + 1$
Javob: $y' = 2\ln 10 \cdot 10^{2x+1}$

21. $y = \log_3 u$ bunda $u = x^5 + 1$
Javob: $\left(\dfrac{5x^4}{(x^5+1)\ln 3}\right)$

22. $y = \sin^2 x + \cos^2 x$
Javob: 0

23. $y = \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$

Javob: $\left(\frac{1-2x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

24. $y=(\arcsin x)^3$

Javob: $\left(\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

25. $y=\sin(x+\sin x)$

Javob: $(1+\cos x)\cos(x+\sin x)$

26. $y=\cos(3^x+3^{-x})$

Javob: $(\ln 3(3^{-x}-3^x)\cdot\sin(3^x+3^{-x}))$

27. $y=5\sin(2-3x)$

Javob: $[-15\cos(2-3x)]$

28. $y=\cos\left(6x-\frac{1}{x}\right)$

Javob: $\left[-\left(6x+\frac{1}{x^2}\right)\sin\left(6x-\frac{1}{x}\right)\right]$

29. $y=\sin(x^2-2^x)$

Javob: $(2x-2^x\ln 2)\cos(x^2-2^x)$

30. $y=tg(3x+1)^3$

Javob: $\left(\frac{9(3x+1)^2}{\cos^2(3x+1)}\right)$

31. $y=ctg(x\cos x)$

Javob: $\left(\dfrac{x\sin x-\cos x}{\sin^2(x\cos x)}\right)$

32. $y=10^{x^2+x+1}$

Javob: $\left[10^{x^2+x+1}\ln 10(2x+1)\right]$

33. $y=6^{\arcsin x}$

Javob: $\left(\dfrac{6^{\arcsin x}\ln 6}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

34. $y=e^{ax}\cos bx$

Javob: $\left[e^{ax}(a\cos bx-b\sin bx)\right]$

35. $z=(2a+3bu)^4$

Javob: $12b(2a+3bu)^3$

36. $y=7^{\frac{x\sin x}{1+x}}$

Javob: $\left[7^{\frac{x\sin x}{1+x}}\ln 7\dfrac{\sin x+x\cos x+x^2\cos x}{(1+x)^2}\right]$

37. $y=\dfrac{\cos x}{3\sin^2 x}$

Javob: $\left(-\dfrac{1+\cos^2 x}{3\sin^2 x}\right)$

38. $y=\dfrac{\cos x}{3\sin^2 x}$

Javob: $\left(-\dfrac{1+\cos^2 x}{3\sin^2 x}\right)$

39. $y = \ln\dfrac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}$

Javob: $\left(\dfrac{4a^2x}{a^4 - x^4}\right)$

40. $z = \ln\sqrt{\dfrac{e^{2t}}{1+e^{2t}}}$ Javob: $\left(\dfrac{1}{1+e^{2t}}\right)$

Oshkormas funksiyaning hosilasi

Funksiya x va y oralig'idagi munosabat $F(x, y)=0$ shaklida ko'rsatilgan bo'lsa, (funksiya y ga nisbatan yechilmagan) berilgan funksiya oshkormas deyiladi.

Masalan:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$x^3 + y3 - xy + 5 = 0$$

$$x^2 + \sin xy - 3 = 0$$

Bunday funksiyalarni differensialashda y, x ning murakkab funksiyasi deb hisoblanadi va y' ni topiladi.

Misol 1. Quyidagi funksiyalarning hosilalari topilsin.

a) $y^3 - 3y + 2ax = 0$ b) $x^2 + 3xy + y^2 + 1 = 0$ funksiyada y -ning $(2; -1)$ nuqtadagi qiymati hisoblansin, v) $\sin\varphi + r\varphi - 5r = 0$ $\dfrac{dr}{d\varphi}$ topilsin, g) $e^y + xy + 0 = 0$ funksiyada y' ning $(0; 1)$ nuqtadagi qiymati hisoblansin.

Yechimi: a) tenglikning har ikki qismidan x ga nisbatan hosila olamiz:

$$3y^2 \cdot y' - 3y' + 2a = 0$$

$$3y'(y^2 - 1) = -2a \qquad y' = \frac{2a}{3(1 - y^2)}$$

b) x ga nisbatan hosila olsak:

$$2x + 3y + 3xy' + 2y \cdot y' = 0$$

y' ga nisbatan tenglama yechamiz:

$$y' = -\frac{2x + 3y}{3x + 2y}$$

$x = 2$ va $y = -1$ larni o‘rniga qo‘ysak

$$y' = -\frac{2 \cdot 2 + 3(-1)}{3 \cdot 2 + 2(-1)} = -\frac{1}{4}$$

v) φ ga nisbatan hosila olamiz:

$$\cos\varphi + \varphi \cdot \frac{dr}{d\varphi} + r - 5\frac{dr}{d\varphi} = 0$$

$$\frac{dr}{d\varphi}(\varphi - 5) = -(r + \cos\varphi)$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{r + \cos\varphi}{5 - \varphi}$$

g) x ga nisbatan differensiallasak:

$$e^y \cdot y' + y + xy' = 0 \text{ bundan}$$

$y' = -\dfrac{y}{e^y + x}$ x va y larni berilgan qiymatlarini o‘rniga qo‘ysak:

$$y' = -\frac{1}{\acute{o} + 0} \quad -\frac{1}{\mathring{a}}.$$

Mustaqil ishlash uchun mashqlar:

(Javobi qavs ichida berilgan)

Quyidagi funksiyalarning hosilalari topilsin:

1. $2x+3y+1=0$ $\left(-\frac{2}{3}\right)$

2. $x^2+y^2=5e^x$ $\left(\frac{5e^e-2x}{2y}\right)$

3. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $\left(-\frac{b^2x}{a^2y}\right)$

4. $x^2-5y^2+4xy-1=0$ $\left(\frac{x+2y}{5y-2x}\right)$

5. $x^3+y^3-3xy+a^2=0$ $\left(\frac{x^2-y}{x-y^2}\right)$

6. $y=\sin(x+2y)$ $\left(\frac{\cos(x+2y)}{1-2\cos(x-2y)}\right)$

7. $x^4-6x^2y^2+9y^4-5x^2+15y^2-100=0$ $\left(y'=\frac{x}{3y}\right)$

8. $\sin(y-x^2)-\ln(y-x^2)+2\sqrt{y-x^2}=3$ $(y'=2x)$

Quyidagi oshkormas funksiyalarning hosilalarini ko'rsatilgan nuqtadagi qiymati hisoblansin:

(Javobi qavs ichida berilgan)

9. $x^2+y^2=1$ $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ nuqtada

10. $y^2=2px$ $\left(\frac{p}{2},\ p\right)$ nuqtada

11. $x=y+\sin y$ $(0,\ 0)$ nuqtada $\left(\frac{1}{2}\right)$

12. $x^2+xy+y^2=3$ $(0,\ -\sqrt{3})$ nuqtada $\left(-\frac{1}{2}\right)$

13. $ye^y-xe^x=y(x-1)$ $(1,\ 1)$ nuqtada $\left(\frac{2e+1}{2e}\right)$

14. $e^y+xy=e$ $(0,\ 1)$ nuqtada $\left(-\frac{1}{e}\right)$

15. $e^{xy}+x^2+y^2=2$ $(1,\ 0)$ nuqtada (-2)

Logarifmik funksiyalarning hosilasi

Berilgan funksiyaning $y=f(x)$ logarifmik hosilasi, uning logarifmidan olingan hosilasidir, ya'ni

$$(\ln y)'=\frac{y'}{y} \quad \text{(bunda } y>0\text{)}$$

Logarifmlash mumkin bo'lgan funksiyalar hosilasini topishdan avval, logarifmlab olish hosila topish ishini anchagina soddalashtiradi.

Misol 1. Ko'rsatkichli – darajali funksiya $y=u^v$ ning hosilasini toping.

Yechimi: Berilgan funksiyani dastlab logarifmlaymiz, so'ngra murakkab funksiya hosilasini topamiz.

$$\ln y=v\ln u \qquad \frac{y'}{y}=v'\ln u+v\frac{u'}{u} \qquad y'=y\left(v'\ln u+v\frac{u'}{u}\right)$$

Misol 2. $y=x^x$ ning hosilasini toping.

Yechimi: $\ln y=x\ln x$ bu tengliknin har ikki qismidan hosila olamiz:

$$\frac{y'}{y}=\ln x+x\cdot\frac{1}{x} \quad \frac{y'}{y}=\ln x+1, \quad y'=y(\ln x+1) \text{ yoki } y'=x^x(\ln x+1)$$

Misol 3. $y=(x-1)\sqrt[3]{(5x+1)^2(x+1)}$; $\quad y'=?$

Yechimi: Funksiyani logarifmlaymiz:

$$\ln y=\ln(x-1)+\frac{1}{3}[2\ln(5x+1)+\ln(x+1)]$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{3}\left[2\frac{5}{5x+1}+1\frac{1}{x+1}\right]=\frac{2(15x^2+7x-4)}{3(x^2-1)(5x+1)}$$

undan

$$y'=\frac{2(15x^2+7x-4)}{3(x^2-1)(5x+1)}(x-1)\sqrt[3]{(5x+1)^2(x+1)}$$

Soddalashtirsak:

$$y'=\frac{2(15x^2+7x-4)}{3\sqrt[3]{(x+1)^2(5x+1)}}$$

Misol 4. Agar $S=(\sin t)^{\cos 2t}$ bo'lsa, s' ni toping.

Yechimi: $\ln s=\cos 2t\ln\sin t$

$$\frac{s'}{s}=(\cos 2t)'\ln\sin t+\cos 2t(\ln\sin t)'=$$

$$=-2\sin 2t\ln\sin t+\cos 2t\cdot\frac{\cos t}{\sin t}=$$

$$=-2\sin 2t\cdot\ln\sin t+\cos 2t\cdot ctg\, t$$

$$s'=s(\cos 2t\cdot ctg\, t-2\sin 2t\ln\sin t)$$

yoki

$$s'=(\sin t)^{\cos 2t}(\cos 2t ctg\, t-2\sin 2t\ln\sin t)$$

Mustaqil ishlash uchun mashqlar:

Funksiyalarning hosilasi topilsin:
(Javobi qavs ichida berilgan)

1. $y=x^{\cos x}$ $\qquad [x^{\cos x-1}(\cos x-x\sin x\ln x)]$

2. $y=(\cos x)^{x}$ $\qquad$ $\left[(\cos x)^{x}(\ln\cos x-x\,tgx)\right]$

3. $y=\sqrt[x]{x}$ $\qquad$ $\left[\dfrac{\sqrt[x]{x}}{x^{2}}(1-\ln x)\right]$

4. $y=x^{x^{3}}$ $\qquad$ $\left[x^{x^{3}+2}(3\ln x+1)\right]$

5. $y=\dfrac{(x-1)^{3}\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x+1)^{2}}}$ $\qquad$ $\left[\dfrac{(17x^{2}+62x+21)(x-1)^{2}}{\sqrt[3]{(x+1)^{5}}\sqrt{x+2}}\right]$

6. $s=\dfrac{\sqrt{1-t^{2}}}{3t+1}$ $\qquad$ $\left[\dfrac{3-t-6t^{2}}{\sqrt{1-t^{2}}(3t+1)^{2}}\right]$

7. $s=(t+1)^{3}(t-1)^{2}\sqrt[3]{(t+2)^{2}}$

$\left[\dfrac{1}{3\sqrt[3]{t+2}}(t+1)^{2}(t-1)(17t^{2}+27t-8)\right]$

8. $y=(\sin x)^{\ln x}$ $\qquad$ $\left[(\sin x)^{\ln x}\left(\dfrac{1}{x}\ln\sin x+ctg\,x\ln x\right)\right]$

9. $y=\sqrt[4]{\dfrac{x(x^{3}+1)}{(x^{3}-1)^{3}}}$ $\qquad$ $\dfrac{-5x^{4}-12x^{3}-1}{4\sqrt[4]{(x^{3}-1)^{7}(x^{3}+1)^{3}}}$

Yuqori tartibli hosilalar

$y=f(x)$ funksiyaning hosilasi y'ni birinchi tartibli hosila deb yuritamiz. Birinchi tartibli hosilaning hosilasiga ikkinchi tartibli hosila deb yuritiladi va uni y'' yoki $f''(x)$ bilan belgilanadi. Xuddi shu tartibda uchinchi, to'rtinchi va hokazo tartibli hosilalarni topish mumkin.

Misol 1. Quyidagi funksiyalarning ko'rsatilgan tartibdagi hosilalarni toping.

a) $y=x^3+2x^2-x-3$ $\qquad y'''=?$

b) $s=\ln t$ $\qquad s''''=?$

v) $s=t^3-t-3$ $\qquad s''(0)=?$

g) $f(x)=\sin 2x$ $\qquad f''''\left(\frac{\pi}{2}\right)=?$

Yechimi: a) Birinchi tartibli hosilani olamiz:

$$y'=3x^2+2\cdot 2x-1$$

undan yana hosila olamiz:

$$y''=6x+4$$

yana bir marta hosila olsak, uchinchi tartibli hosila kelib chiqadi, demak,

$$y'''=6$$

b) Berilgan funksiyadan ketma-ket to'rt marta hosila olamiz:

$$s'=(\ln t)'=\frac{1}{t};$$

$$s''=(s')'=\left(\frac{1}{t}\right)'=-\frac{1}{t^2};$$

$$s'''=(s'')'=\left(-\frac{1}{t^2}\right)'=\frac{1}{t^3};$$

$$s''''=(s''')'=\left(\frac{1}{t^3}\right)'=(2t^{-3})=2\cdot(-3)t^{-4}=-\frac{6}{t^4}$$

demak, $s''' = -\frac{6}{t^4}$.

v) $s = t^3 - t + 3$

$s' = \left(t^3 - t + 3\right)' = 3t^2 - 1$

$s'' = (s')' = \left(3t^2 - 1\right)' = 6t$. $t = 0$ da

$s''(0) = 6 \cdot 0 = 0$

demak,

$$s''(0) = 0$$

g) $f(x) = \sin 2x$

$f'(x) = 2\cos 2x$

$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = (2\cos 2x)' = -4\sin 2x$

$f'''(x) = \left(f''(x)\right)' = (-4\sin 2x)' = -8\cos 2x$

$f''''(x) = \left(f'''(x)\right)' = (-8\cos 2x)' = 16\sin 2x$

$f'''''(x) = \left(f''''(x)\right)' = (16\sin 2x)' = 32\sin 2x$

$f'''''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 32\cos\left(2\frac{\pi}{2}\right) = 32\cos\pi = -32$

Demak, $f'''''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -32$

Misol 2. $y = \cos 2x$ funksiyaning $y'' + 4y = 0$ tenglamani qanoatlantirishini isbotlang.

Yechimi:

$$y' = -2\sin 2x; \quad y'' = \left(-2\sin 2x\right)' = -4\cos 2x$$

o'rniga qo'ysak

$$-4\cos 2x + 4 \cdot \cos 2x = 0; \quad 0 = 0$$

Mustaqil ishlash uchun mashqlar:

Quyidagi funksiyalarni ko'rsatilgan tartibdagi hosilalarini toping: (Javobi qavs ichida berilgan)

1. $y = x^3 + 4x^2 - 7x + 1;$ $\quad y''''=?$ $\quad (0)$
2. $f(x) = x^8;$ $\quad f'''(1)=?$ $\quad (336)$
3. $y = x^5 + 4x^3 - x;$ $\quad y'''''=?$ $\quad (120)$
4. $y = \cos x;$ $\quad y''''=?$ $\quad (\cos x)$

Aralash misollar:

(Javobi qavs ichida berilgan)

1. $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $\quad \left(\dfrac{at-bc}{(cx+d)^2}\right)$
2. $u = \left(\dfrac{v}{1-v}\right)^n$ $\quad \left(\dfrac{n \cdot v^{n-1}}{(1-v)^{n+1}}\right)$
3. $s = \dfrac{1-t^5}{\sqrt{3}}$ $\quad \left(-\dfrac{5}{\sqrt{3}}t^4\right)$
4. $y = \dfrac{2}{\sin x + \cos x}$ $\quad \dfrac{2(\sin x - \cos x)}{(\sin x + \cos x)^2}$
5. $\varphi(\alpha) = \dfrac{a-\alpha}{1+\alpha}$, $\varphi'(1)$ va $\varphi'(0)$ ni hisoblang. $\left[-\dfrac{1+\alpha}{4};\ -(1+a)\right]$
6. $y = \sqrt{(a+x)(b+x)}$ $\quad \left(\dfrac{2x+a+b}{2\sqrt{(a+x)(b+x)}}\right)$
7. $s = a\sin wt + b\cos wt$ $\quad (aw\cos wt - bw\sin wt)$
8. $f(x) = \ln(1+x) + +\arccos\dfrac{x}{2}$, $f'(1)$ va $f'(0)$ ni hisoblang. $\left(\dfrac{3-2\sqrt{3}}{6};\ \dfrac{1}{2}\right)$

9. $y=\ln\left(x+\sqrt{a^2-x^2}\right);$ $\left(\dfrac{a^2-2x\sqrt{a^2-x^2}}{\left(2x^2-a^2\right)\sqrt{a^2-x^2}}\right)$

10. $y=\ln\sin 3^x$ $\left(3^x\ln 3ctg3^x\right)$

11. $y=tg\left(7^x+x^7\right)$ $\left(\dfrac{7^x\ln 7+7x^6}{\cos^2\left(7^x+x^7\right)}\right)$

12. $y=arctg\ln x$ $\left(\dfrac{1}{x\left(1+\ln^2 x\right)}\right)$

13. $z=\left(1+\sqrt{v}\right)^5$ $\left(\dfrac{5\left(1+\sqrt{v}\right)^4}{2\sqrt{v}}\right)$

14. $y=\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$ $\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$

15. $f(x)=x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$ $\left(2\sqrt{1-x^2}\right)$

16. $y=arctg\dfrac{x}{1-x}$ $\left(\dfrac{1}{1-2x+2x^2}\right)$

17. $f(x)=x\arccos x$ $\left(\arccos x-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

18. $y=\arcsin\sqrt{x}$ $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}\right)$

19. $f(x)=arctg\sqrt[4]{e^x+2}$ $\left[\dfrac{e^x}{4\sqrt[4]{\left(e^x+2\right)^3}\left(1+\sqrt[4]{e^x+2}\right)}\right]$

20. $y=\arcsin\sqrt[3]{\ln x}$ $\left(\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{\ln^2 x}\sqrt{1-\sqrt[3]{\ln^2 x}}}\right)$

21. $f(x)=\arcsin\ln x$ $\left(\dfrac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\right)$

22. $y = \ln \arcsin x$ $\qquad \left(\dfrac{1}{\arcsin x \cdot \sqrt{1-x^2}}\right)$

23. $y = a^{\arcsin x}$ $\qquad \left(\dfrac{a^{\arcsin x} \ln a}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

24. $y = a^x \sin \ln x$ $\qquad a^x\left(\dfrac{\cos \ln x}{x} + \ln a \sin \ln x\right)$

25. $y = (\arcsin x)^3$ $\qquad \left(\dfrac{3(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

O'zingizni sinab ko'ring:

1. O'zgarmas sonning hosilasi nimaga teng?
2. Logarifmik funksiyaning hosilasi nimaga teng?
3. Darajali funksiyaning hosilasi nimaga teng?
4. Ko'rsatkichli funksiyaning hosilasi nimaga teng?
5. *sinx* ning hosilasi nimaga teng?
6. *cosx* ning hosilasi nimaga teng?
7. *tgx* ning hosilasi nimaga teng?
8. *ctgx* ning hosilasi nimaga teng?
9. *arc sinx* funksiyaning hosilasi nimaga teng?
10. *arccosx* funksiyaning hosilasi nimaga teng?
11. *arc tgx* funksiyaning hosilasi nimaga teng?
12. *arcctgx* funksiyaning hosilasi nimaga teng?

XVII BOB. FUNKSIYA DIFFERENSIALI VA DEFFERENSIAL HISOBNING ASOSIY TEOREMALARI

17.1. Funksiya differensiali ta'rifi
17.2. Differensiallanuvchi funksiya haqida teorema
17.3. Differensial yordamida taqribiy hisoblash

Ta'rif. Agar $y = f(t)$ funksiya x_0 nuqtada chekli hosilaga ega bo'lsa, u shu nuqtada differensiallanuvchi deb ataladi.

Ta'rif. Agar $y = f(t)$ funksiya $(a; b)$ intervalning har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo'lsa, u shu intervalda differensiallanuvchi deb ataladi.

Funksiyaning uzluksizligi va differensiallanuvchiligi orasidagi bog'lanishni ko'rsatadigan teoremani isbotlaymiz.

Teorema. Agar $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u shu nuqtada uzluksizdir.

Isboti. $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lgani uchun

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

chekli limit mavjud. Buni limitning xossasi (16.5-teorema) dan foydalanib

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha$$

ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda $\Delta x \to 0$da α-cheksiz kichik funksiya.

Bundan,

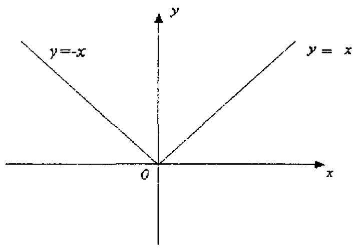
$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha \cdot \Delta x$ va $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} f'(x_0)\Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha \cdot \Delta x = f'(x_0) \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$.

Demak, $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ va $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz. Shunday qilib funksiyaning chekli hosilaga ega ekanligidan uning uzluksizligi kelib chiqar ekan.

Teskari da'vo, umuman aytganda, to'g'ri emas, chunonchi nuqtada uzluksiz, biroq bu nuqtada hosilaga ega bo'lmagan funksiyalar ham mavjud.

$$y = f(x) = |x| = \begin{cases} x, \ agar x > 0 \ bo'lsa, \\ 0, \ agar x = 0 \ bo'lsa, \\ -x, \ agar x < 0 \ bo'lsa. \end{cases}$$

funksiyani qaraymiz. Bu funksiya butun sonlar o'qida, jumladan $x_0=0$ nuqtada ham uzluksiz (1-chizma), chunki $f(0) = |0| = 0$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$ va $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$.



1-chizma

Bu funksiyaning $x_0=0$ nuqtada hosilaga ega emasligini ko'rsatamiz.

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = |0 + \Delta x| - |0| = |\Delta x|$ va $\lim\limits_{\Delta x\to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to +0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$

Shunga o'xshash $\lim\limits_{\Delta x\to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to -0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$. Shunday qilib, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbat $x=0$ nuqtada har xil bir tomonlama limitlarga ega. Bu $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbat $x_0=0$ nuqtada limitga emasligini, ya'ni $f'(0)$ hosilaning mavjud emasligini ko'rsatadi.

Demak, funksiyaning biror nuqtada uzluksizligidan uning shu nuqtada chekli hosilaga ega ekanligi(differensiallanuvchiligi) kelib chiqmas ekan.

Differensiallashning asosiy qoidalari

Teorema. Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda ularning algebraik yig'indisi, ko'paytmasi va maxraji noldan farqli bo'lganda bo'linmasi ham shu nuqtada differensiallanuvchi bo'lib, hosilalar

a) $(u \pm v)' = u' \pm v'$, b) $(uv)' = u'v + uv'$, d) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ formulalar yordamida topiladi.

Isbot. (Bo'linma uchun). $y = f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ bo'lsin, bu yerda $v(x) \neq 0$ Δy orttirmani tuzamiz:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{u(x_0 + \Delta x)}{v(x_0 + \Delta x)} - \frac{u(x_0)}{v(x_0)} = \frac{u(x_0 + \Delta x)v(x_0) - u(x_0)v(x_0 + \Delta x)}{v(x_0 + \Delta x)v(x_0)} =$$

$$= \frac{u(x_0 + \Delta x)v(x_0) - u(x_0)v(x_0) - u(x_0)v(x_0 + \Delta x) + u(x_0)v(x_0)}{v(x_0 + \Delta x)v(x_0)} =$$

$$= \frac{[u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)]v(x_0) - u(x_0)[v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)]}{v(x_0 + \Delta x)v(x_0)} = \frac{\Delta u v(x_0) - u(x_0)\Delta v}{v(x_0 + \Delta x)v(x_0)}.$$

Shartga ko'ra $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x_0)$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'(x_0)$ va $\lim\limits_{\Delta x \to 0} v(x_0 + \Delta x) = v(x_0)$ (differensiallanuvchi funksiya uzluksiz).

Demak, $$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} v(x_0) - u(x_0)\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x_0 + \Delta x)v(x_0)} = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}$$

Shunday qilib, $y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. a) va b) formulalar ham shunga o'xshash isbotlanadi.

Teorema qo'shiluvchilar va ko'paytuvchilar soni chekli bo'lganda ham to'g'ri bo'ladi. Masalan,

$(u + v - w)' = u' + v' - w'$, yoki $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$ tenglik o'rinli.

Natija. O'zgarmas ko'paytuvchini hosila belgisidan chiqarish mumkin, ya'ni $(Cu)' = Cu'$ yoki $\left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{u'}{C}$, bunda C-o'zgarmas son.

Haqiqatan, $y = Cu(x)$ bo'lsa, $\Delta y = Cu(x_0 + \Delta x) - Cu(x_0)$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{Cu(x_0 + \Delta x) - Cu(x_0)}{\Delta x}$ bo'lib $y' = (Cu)' = C \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x} = Cu'(x)$ bo'ladi.

Murakkab funksiyaning hosilasi

Murakkab funksiyani differensiallash qoidasi bilan tanishamiz. $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ murakkab funksiyani qaraymiz.

Teorema. $y = f(u)$ va $u = \varphi(x)$ differensiallanuvchi funksiyalar bo'lsin. Murakkab $f(u)$ funksiyaning erkli o'zgaruvchi x bo'yicha hosilasi bu funksiyaning oraliq argumenti u bo'yicha hosilasi y'_u ning oraliq argumentning erkli o'zgaruvchi x bo'yicha hosilasi $u'(x)$ ga ko'paytmasiga teng, ya'ni

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

Isboti. $u = \varphi(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada, $y = f(u)$ funksiya esa bu nuqtaga mos $u_0 = \varphi(x_0)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. U holda $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u_0)$ chekli limit mavjud. Bundan $\frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u_0) + \alpha$ yoki $\Delta y = f'(u_0)\Delta u + \alpha \Delta u$ kelib chiqadi, bu yerdagi α, $\Delta u \to 0$ da cheksiz kichik funksiya. So'nggi tenglikni har ikkala tomonini Δx ga bo'lsak $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta u}{\Delta x}$ hosil bo'ladi. Bunda $\Delta x \to 0$ da limitga o'tib $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_x$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = \lim\limits_{\Delta u \to 0} \alpha = 0$ ekanini hisobga olsak isbotlanishi lozim bo'lgan $y'(x_0) = f'(u_0) \cdot u'(x_0)$ yoki $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ kelib chiqadi. Biz bu yerda differensiallanuvchi $u(x)$ funksiya uzluksiz va $\Delta x \to 0$ da $\Delta u \to 0$ ni hisobga oldik.

Teskari funksiya va uning hosilasi

$[a; b]$ kesmada aniqlangan o'suvchi yoki kamayuvchi $y = f(x)$ funksiyani qaraymiz. $f(a) = c$, $f(b) = d$ bo'lsin. Aniqlik uchun $y = f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada o'suvchi deb faraz qilamiz. $[a; b]$ kesmaga tegishli ikkita har xil x_1 va x_2 nuqtani olamiz. O'suvchi funksiyaning ta'rifidan agar $x_1 < x_2$ va $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ bo'lsa, $y_1 < y_2$ bo'ladi.

Demak, argumentning ikkita har xil x_1 va x_2 qiymatlarga funksiyaning ikkita har xil y_1 va y_2 qiymatlari mos keladi. Buning teskarisi ham to‘g‘ri, ya’ni $y_1 < y_2$ bo‘lib, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$bo‘lsa, o‘suvchi funksiya ta’rifidan $x_1 < x_2$ bo‘lishi kelib chiqadi.

Boshqacha aytganda, x ning qiymatlari $[a; b]$ kesma bilan y ning qiymatlari $[c; d]$ kesma orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatiladi. y ni argument, x ni esa funksiya sifatida qarab x ni y ning funksiyasi sifatida hosil qilamiz:

$$x = \varphi(y).$$

Bu funksiya berilgan $y = f(x)$ funksiyaga *teskari funksiya* deyiladi. Kamayuvchi funksiya uchun ham shunga o‘xshash mulohaza yuritish mumkin. Shuni aytish lozimki, $y = f(x)$ funksiyaning qiymatlari sohasi $[c; d]$ unga teskari $x = \varphi(y)$ funksiyaning aniqlanish sohasi bo‘ladi va aksincha. $x = \varphi(y)$ funksiya uchun $y = f(x)$ funksiya teskari funksiya bo‘lgani uchun $x = \varphi(y)$ va $y = f(x)$ funksiyalar *o‘zaro teskari funksiyalar* deb ataladi.

$y = f(x)$ funksiyaga teskari funksiya $y = f(x)$ tenglamani x ga nisbatan yechib topiladi. O‘zaro teskari funksiyalarning grafigi $0xy$ tekisligidagi bitta egri chiziqni ifodalaydi.

5-misol. $y = x^3$ funksiyaga teskari funksiya topilsin.

Yechish. Bu funksiya butun sonlar o‘qida aniqlangan va o‘suvchi. Tenglikni x ga nisbatan yechsak berilgan funksiyaga teskari $x = \sqrt[3]{y}$ funksiya hosil bo‘ladi.

Har qanday funksiya ham teskari funksiyaga ega bo‘lavermaydi. Masalan, $y = x^2$ funksiya $(-\infty, +\infty)$ intervalda teksari funksiyaga ega emas, chunki y ning har bir musbat qiymatiga x ning ikkita $x = -\sqrt{y}$ va $x = \sqrt{y}$ qiymatlari mos keladi. Agar $y = x^2$ funksiyani $(-\infty, 0]$ intervalda qaralsa funksiya $x = -\sqrt{y}$ teskari funksiyaga ega, chunki y ning har bir musbat qiymatiga x ning yagona $y = x^2$ tenglikni qanoatlantiradigan qiymati mos keladi.

Shuningdek, $y = x^2$ funksiyani $[0, +\infty)$ oraliqda qarasak unga teskari $x = \sqrt{y}$ funksiya mavjud bo‘ladi.

Izoh. $y=f(x)$ funksiyaga teskari $x=\varphi(y)$ funksiyaning argumentini odatdagidek x bilan, funksiyani esa y bilan belgilasak va $y=f(x)$ hamda $y=\varphi(x)$ funksiyalarni grafigini bitta koordinatalar sistemasida chizsak, grafik birinchi koordinatalar burchagining bissektrisasiga nisbatan simmetrik bo'ladi.

19.4-teorema. Agar o'suvchi (kamayuvchi) $y=f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz, shu bilan birga $f(a)=c$, $f(b)=d$ bo'lsa, u holda unga teskari $x=\varphi(y)$ funksiya $[c;d]([d;c])$ kesmada aniqlangan monoton va uzluksiz bo'ladi.

Endi $x=\varphi(y)$ teskari funksiyani hosilasini bilgan holda $y=f(x)$ funksiyaning hosilasini topish imkonini beradigan teoremani isbotlaymiz.

19.5-teorema. Agar $x=\varphi(y)$ funksiya biror intervalda monoton bo'lib shu intervalning y nuqtasida noldan farqli $\varphi'(y)$ hosilaga ega bo'lsa, bu nuqtaga mos x nuqtada teskari $y=f(x)$ funksiya ham hosilaga ega bo'lib,

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}$$

bo'ladi.

Isboti. Shartga binoan $x=\varphi(y)$ funksiya monoton va differensiallanuvchi bo'lgani uchun u uzluksiz hamda unga teskari monoton va uzluksiz $y=f(x)$ funksiya mavjud. x ga $\Delta x\neq 0$ orttirma bersak $y=f(x)$ funksiya Δy orttirma oladi va uzluksizligini nazarga olsak $\Delta x\to 0$ da $\Delta y\to 0$. Natijada

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\varphi'(y)}$$

Bu formulani $y'_x=\frac{1}{x'_y}$ ko'rinishda yozish mumkin.

Shunday qilib, teskari funksiyaning hosilasi shu funksiya hosilasiga teskari miqdorga teng ekan.

O'zingizni sinab ko'ring:

1. Hosila tushunchasiga olib keluvchi masalalardan bir nechtasini ayting.
2. Egri chiziqqa urinma deb nimaga aytiladi?
3. Urinmaning burchak koeffitsienti nimaga teng?
4. Funksiyaning nuqtadagi hosilasini ta'riflang.
5. Funksiyaning geometrik va mexanik ma'nolarini ayting.
6. Funksiyaning biologik va iqtisodiy ma'nolarini ayting.
7. Funksiya qachon differensiallanuvchi deyiladi?
8. Funksiyaning intervalda differensiallanuvchiligini ta'riflang.
9. Differensiallanuvchi funksiya uzluksiz bo'ladimi?
10. Uzluksiz funksiya differensiallanuvchi bo'ladimi?
11. Differensiallashning asosiy qoidalarini ayting.
12. Murakkab funksiyaning hosilasi qanday topiladi?
13. Berilgan funksiyaga teskari funksiya deb nimaga aytiladi?
14. Teskari funksiya qanday topiladi?
15. Qanaқa funksiyalarga teskari funksiya mavjud bo'ladi?
16. Teskari funksiyaning hosilasi qanday topiladi?

XVIII BOB. HOSILA YORDAMIDA FUNKSIYANI TEKSHIRISH

18.1. Funksiyaning extremal nuqtalarni topish
18.2. Funksiyani o'sish va kamayish oraliqlarini toppish
18.3. Funksiyaning qavariq oraliqlarini toppish
18.4. Funksiyaning eng kata va eng kichik qiymatlarini topish

O'suvchi va kamayuvchi funksiyalarga ta'rif berilgan edi. Shunday bo'lsada, ularni yana bir eslaylik. $(a;b)$ intervalda (u kesma bo'lishi ham mumkin) aniqlangan $y=f(x)$ funksiyani qaraymiz. $(a;b)$ intervaldan olingan argumentning istalgan $x_1<x_2$ qiymatlariga funksiyaning $f(x_1)<f(x_2)$ qiymatlari mos kelsa $y=f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda **o'suvchi** deyilar edi. Shuningdek, $(a;b)$ intervaldan olingan argumentning istalgan $x_1<x_2$ qiymatlari uchun $f(x_1)>f(x_2)$ bo'lganda, $y=f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda kamayuvchi deyilar edi. Bu yerda funksiyaning o'sish, kamayish oraliqlarini uning hosilasi yordamida aniqlash usuli bilan tanishamiz.

O'suvchi funksiyaning ta'rifiga binoan $x_2-x_1>0$ bo'lganda $f(x_2)-f(x_1)>0$ bo'ladi. Agar $x_2-x_1=\Delta x$, $f(x_2)-f(x_1)=\Delta y$ deb belgilasak, $\Delta x>0$ va $\Delta y>0$ ekanini, ya'ni orttirmalar bir xil ishorali ekanini ko'ramiz.

Shunday qilib, o'suvchi funksiya uchun $\frac{\Delta y}{\Delta x}>0$ bo'lar ekan. Shunga o'xshash kamayuvchi funksiya uchun $\frac{\Delta y}{\Delta x}<0$ bo'lishiga ishonch hosil qilish qiyin emas.

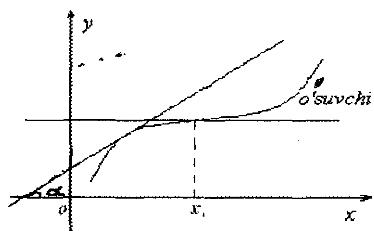
1-teorema (funksiya o'suvchi bo'lishining zaruriy sharti). Agar $(a;b)$ intervalda differensiallanuvchi $y=f(x)$ funksiya shu intervalda o'suvchi bo'lsa, u holda bu funksiyaning hosilasi intervalning hech bir nuqtasida manfiy bo'lmasligi zarur, ya'ni $(a;b)$ intervaldagi barcha x lar uchun $f'(x)\geq 0$ bo'ladi.

Isboti. Teoremaning shartiga ko'ra $y=f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda o'suvchi, shu sababli istalgan $x\in(a;b)$ uchun $\frac{\Delta y}{\Delta x}>0$. Musbat funksiyaning limiti manfiy bo'la olmasligi sababli $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\geq 0$. Ammo teoremaning shartiga ko'ra $f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda differensiallanuvchi bo'lganligi sababli $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ chekli limit mavjud va $(a;b)$ dagi barcha x lar uchun $f'(x)\geq 0$ bo'ladi. Teorema isbot bo'ldi.

2-teorema (funksiya kamayuvchi bo'lishining zaruriy sharti). Agar $(a;b)$ intervalda differensiallanuvchi $y=f(x)$ funksiya shu intervalda kamayuvchi bo'lsa, u holda bu funksiyaning hosilasi intervalning hech bir nuqtasida musbat bo'lmasligi zarur, ya'ni $(a;b)$ intervaldagi barcha x lar uchun $f'(x)\leq 0$ bo'ladi.

Teoremani isboti kamayuvchi funksiya uchun $\frac{\Delta y}{\Delta x}<0$ ekanini hisobga olinsa

1-teoremang isbotidagi mulohazalarni takrorlagani uchun uni isbotlashni o'quvchiga hovola etamiz. Bu teoremaga quyidagicha geometrik izoh berish mumkin. O'suvchi funksiyaning grafigi $0x$ o'q bo'ylab o'ngga harakatlanganda yuqoriga ko'tarila boradi.



110-chizma

Bu holda grafika urinma $0x$ o'qning musbat yo'nalishi bilan o'tkir α burchakni tashkil etadi, yoki ba'zi-bir nuqtalarda y $0x$ o'qqa parallel bo'ladi. Masalan x_1 nuqtada $f'(x_1)=0$(110-chizma).

O'tkir burchakning tangensi musbat (urinma $0x$ ga parallel nuqtalarda nolga teng) va hosilaning geometrik ma'nosiga ko'ra

$tg\alpha = f'(x)$ bo'lgani sababli o'suvchi funksiya uchun $f'(x) \geq 0$ kelib chiqadi.

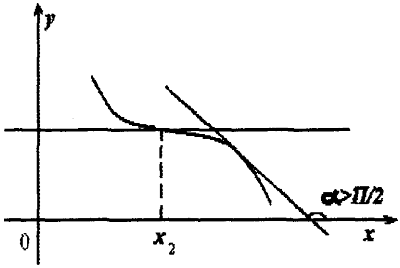
Kamayuvchi funksiyaning garfigiga urinma $0x$ o'qning musbat yo'nalishi bilan o'tmas burchak tashkil etadi, yoki $0x$ ga parallel bo'ladi. O'tmas burchakning tangensi manfiyligini hisobga olib kamayuvchi funksiya uchun $f'(x) \leq 0$ tengsizlikka ega bo'lamiz(111-chizma).

3-teorema (funksiya o'suvchi bo'lishining yetarlilik sharti). Agar $[a; b]$ kesmada uzluksiz $y = f(x)$ funksiya $(a; b)$ intervalda musbat hosilaga ega bo'lsa, u holda bu funksiya $[a; b]$ kesmada o'suvchi bo'ladi.

Isboti. Barcha $a < x < b$ uchun $f'(x) > 0$ bo'lsin. $(a; b)$ intervalga tegishli ikkita ixtiyoriy $x_1 < x_2$ qiymatlarni qaraymiz. $[x_1, x_2]$ kesma uchun Lagranjning chekli ayirmalar formulasini yozamiz:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \quad x_1 < c < x_2 \qquad (1)$$

Teoremaning shartiga ko'ra $f'(x) > 0$. Bundan tashqari $x_2 - x_1 > 0$. Shuning uchun (1) tenglikdan $f(x_2) - f(x_1) > 0$ yoki $f(x_2) > f(x_1)$, ya'ni $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada o'suvchiligi kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.



111-chizma

4-teorema (funksiya kamayuvchi bo'lishining zaruriy sharti). Agar $[a; b]$ kesmada uzluksiz $y = f(x)$ funksiya $(a; b)$ intervalda manfiy hosilaga ega bo'lsa, u holda bu funksiya $[a; b]$ kesmada kamayuvchi bo'ladi.

$[a; b]$ kesmada faqat o'suvchi (faqat kamayuvchi) funksiya shu kesmada monoton o'suvchi (monoton kamayuvchi) funksiya deb atalar edi.

Funksiya faqat o'suvchi yoki faqat kamayuvchi bo'ladigan intervallar uning monotonlik intervallari deyilar edi.

1-misol. $y = x^2$ funksiyaning monotonlik intervallarini aniqlang.

Yechish. y' hosilani topamiz: $y' = 2x$.

$x<0$ da $y'<0$ va funksiya $(-\infty;0)$ intervalda kamayadi;

$x>0$ da $y'>0$ va funksiya $(0;+\infty)$ intervalda o‘sadi;

2-misol. $y=4x+\sin x$ funksiyaning monotonlik intervallarini aniqlang.

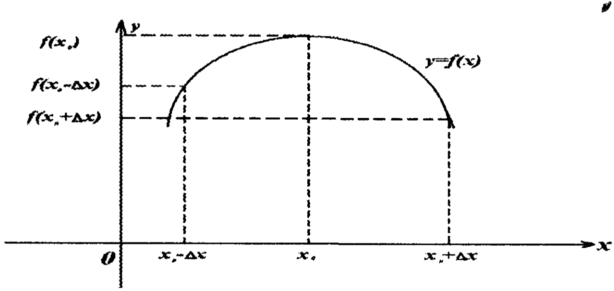
Yechish. y' hosilani topamiz: $y'=4+\cos x$. Barcha $x\in(-\infty;+\infty)$ uchun $y'>0$ bo‘lganligi sababli berilgan funksiya $(-\infty;+\infty)$ intervalda o‘sadi.

Funksiyaning maksimum va minimumi

x_0 nuqtada va uning atrfida aniqlangan $y=f(x)$ funksiyani qaraymiz.

1-ta’rif. Agar $y=f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymati shu funksiyaning bu nuqtaning yetarlicha kichik atrofidagi qolgan qiymatlaridan katta bo‘lsa, $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimum (maximum)ga ega deyiladi.

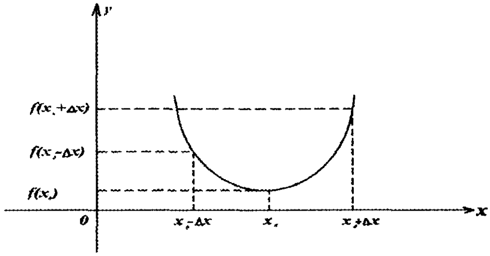
Boshqacha aytganda, agar har qanday yetarlicha kichik musbat yoki manfiy Δx larda $f(x_0+\Delta x)<f(x_0)$ bo‘lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga ega deyiladi($\Delta x>0$da 112-chizma). Bu holda x_0 funksiyaning maksimum nuqtasi deyiladi.



112-chizma

2-ta’rif. Agar $y=f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymati shu funksiyaning bu nuqtaning yetarlicha kichik atrofidagi qolgan qiymatlaridan kichik bo‘lsa, $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimum ga ega deyiladi.

Boshqacha aytganda, agar har qanday yetarlicha kichik musbat yoki manfiy Δx larda $f(x_0+\Delta x)>f(x_0)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga ega deyiladi ($\Delta x>0$da 113-chizma). Bu holda x_0 funksiyaning minimum nuqtasi deb ataladi.

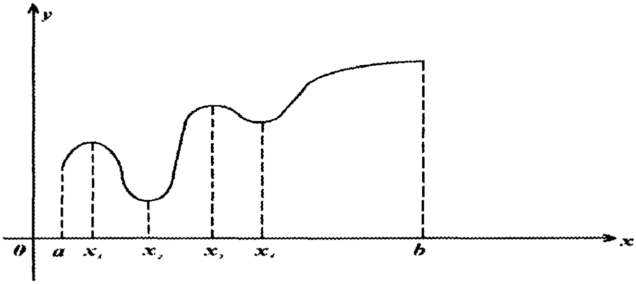


113-chizma.

Masalan, $y=x^2$ funksiya x=0 nuqtada minimumga ega, chunki x=0 bo'lganda y=0 va x ning boshqa qiymatlarida y>0.

1-eslatma. $[a;b]$ kesmada aniqlangan funksiya o'zining maksimum va minimum qiymatlariga x ning shu kesma ichidagi qiymatlaridagina erishadi. Boshqacha aytganda $f(a)$, $f(b)$ qiymatlar funksiyaning maksimum va minimum qiymatlari bo'laolmaydi.

2-eslatma. Funksiyaning $[a;b]$ kesmadagi maksimum va minimumini uning shu kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlari deb qarash xato bo'ladi. Funksiyaning maksimum qiymati uning funksiya maksimumga ega nuqtaga yetarli darajada yaqin turgan hamma nuqtalaridagi qiymatlariga nisbatangina eng katta bo'ladi. Funksiyaning minimumi haqida ham shunga o'xshash gaplarni aytish mumkin.



114-chizma

Funksiyaning maksimumi uning minimumidan har doim katta bo'ladi deb o'ylash noto'g'ri. 114-chizmada $[a;b]$ kesmada aniqlangan funksiya tasvirlangan. Bu funksiya:

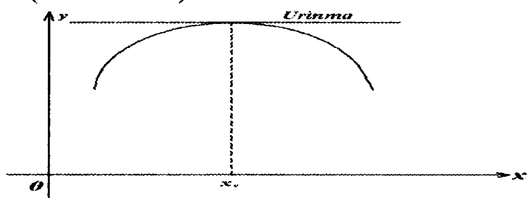
$x=x_1$ va $x=x_3$ nuqtalarda maksimumga ega; $x=x_2$ va $x=x_4$ nuqtalarda minimumga ega; lekin funksiyaning $x=x_4$ nuqtadagi minimumi uning $x=x_1$ nuqtadagi maksimumidan katta. Funksiyaning $x=b$ nuqtadagi qiymati uning $[a;b]$ kesmadagi eng katta qiymati bo'ladi. Funksiyaning maksimumlari va minimumlari funksiyaning ekstremumlari yoki ekstremal qiymatlari deyiladi.Agar x_0 nuqtada funksiyaning ekstrimumga ega bo'lsa u holda bu nuqta funksiyaning **ekstrimum** nuqtasi deyiladi.

Izoh. Biror oraliqda faqat o'suvchi(faqat kamayuvchi) funksiya shu oraliqda ekstremumga ega bo'lmaydi.

Ekstremum mavjudligining zaruriy sharti

5-teorema. Agar differensiallanuvchi $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga ega bo'lsa, u holda uning shu nuqtadagi hosilasi nolga teng bo'lishi zarur, ya'ni $f(x)=0$ bo'ladi.

Isboti. Aniqlik uchun funksiyaning x_0 nuqtada maksimumga ega deb faraz qilamiz(115-chizma).



115-chizma

1) U holda $x<x_0$ lar uchun funksiya o'suvchi va $\frac{\Delta y}{\Delta x}>0$, demak,

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\geq 0$$

2) $x > x_0$ lar uchun funksiya kamayuvchi va $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$, demak, $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \le 0$ $f'(x_0) \ge 0$ va $f'(x_0) \le 0$ munosabatlardan $f'(x_0) = 0$ kelib chiqadi.

Teoremaning geometrik mazmuni shuni bildiradiki, differensiallanuvchi funksiya uchun ekstremum nuqtalarida urinma 0x o'qqa parallel bo'ladi. Biz shu paytgacha funksiya ekstremumga ega bo'lgan nuqtalarda differensiallanuvchi deb faraz qildik. Funksiya hosilaga ega bo'lmagan yoki hosilasi cheksiz bo'lgan nuqtalarda ham funksiya ekstremumga ega bo'lishi mumkin.

3-misol. $y = |x|$ funksiya butun son o'qida uzluksiz bo'lib x=0 nuqtada hosilaga ega emasligi isbotlangan edi. Bu nuqtada funksiya minimumga ega (100-chizma).

4-misol. $y = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ funksiyaning hosilasi $y' = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ x=0 nuqtada cheksizlikka aylanadi. Funksiya x=0 nuqtada maksimumga ega (108-chizma).

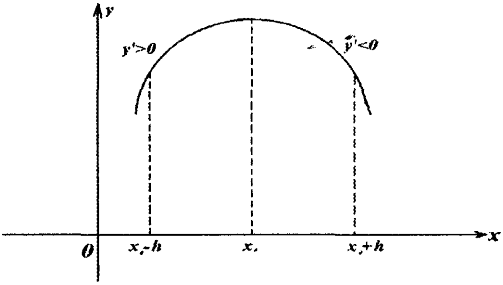
Shunday qilib funksiya ekstremumga ega bo'lgan nuqtalarda funksiyaning hosilasi yo nolga teng, yoki cheksizlikka teng yoki mavjud bo'lmas ekan. Bunday nuqtalar funksiyaning **kritik (statsionar)** nuqtalari deyiladi. Demak, funksiya ekstremal qiymatlarini faqatgina o'zining kritik nuqtalarida qabul qilishi mumkin. Teskari tasdiq o'rinli emas, ya'ni nuqtaning kritik nuqta ekanligidan shu nuqtada funksiyaning ekstremumga ega ekanligi kelib chiqmaydi. Masalan, $y = x^3$ funksiyaning hosilasi $y' = 3x^2$ x=0 nuqtada nolga aylanadi. Ammo bu nuqtada funksiya ekstremumga ega emas, chunki u o'suvchi ($y' \ge 0$).

Ekstremum mavjudligining yetarlilik sharti

6-teorema (ekstremum mavjudligining birinchi yetarlilik sharti). $f(x)$ funksiya kritik nuqta x_0 ni o'z ichiga olgan birorta intervalda uzluksiz va shu intervalning barcha (balki x_0 nuqtaning o'zidan boshqa) nuqtalarida differensiallanuvchi bo'lsin. Agar shu nuqtaning chap tomonidan o‘ng tomoniga o‘tishda hosilaning ishorasi plyusdan minusga o‘zgarsa, funksiya $x = x_0$ kritik nuqtada maksimumga ega bo‘ladi. Agar $x = x_0$ nuqtaning chap tomonidan o‘ng tomoniga o‘tishda hosilaning ishorasi minusdan plyusga o‘zgarsa, funksiya bu nuqtada minimumga ega bo‘ladi.

Isboti. x_0-kritik nuqta bo‘lib uning chap tomonidan o‘ng tomoniga o‘tishda $f'(x)$ hosila ishorasini plyusdan minusga o‘zgartirsin, ya’ni x_0 nuqtaning chapida hosila musbat, uning o‘ngida hosila manfiy bo‘lsin. Demak shunday yetarlicha kichik musbat $h > 0$ son mavjud bo‘lib $(x_0 - h, x_0)$ intervalda funksiyaning hosilasi $f'(x) > 0$ va $(x_0, x_0 + h)$ intervalda hosila $f'(x) < 0$ bo‘ladi.

Funksiyaning o‘sishi va kamayishi haqidagi teoremaga binoan $[x_0 - h, x_0]$ kesmada funksiya o‘sadi , $[x_0, x_0 + h]$ kesmada esa u kamayadi. Demak, $[x_0 - h, x_0 + h]$ kesmaga tegishli barcha x lar uchun $f(x) < f(x_0)$ bo‘ladi. Bu $f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada maksimumga ega ekanligini ko‘rsatadi(116-chizma).



116-chizma

Teoremaning ikkinchi qismi ham shunga o‘xshash isbotlanadi(117-chizma).

Izoh. $x = x_0$ kritik nuqtaning bir tomonidan ikkinchi tomoniga o‘tishda $f'(x)$ hosila ishorasini o‘zgartirmasa $x = x_0$ kritik nuqtada funksiya ekstremumga ega bo‘lmaydi.

5-misol. $y=2x^3-9x^2+12x+1$ funksiyaning monotonlik intervallarini va ekstremumini toping.

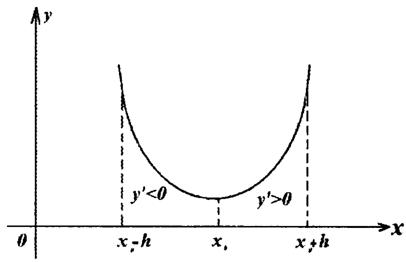
Yechish. 1) Berilgan funksiya $(-\infty;+\infty)$ intervalda aniqlangan va differensiallanuvchi.

2) Funksiyaning hosilasini topamiz: $y'=6x^2-18x+12$.

3) Kritik nuqtalarini topamiz: $6x^2-18x+12=0$; $x^2-3x+2=0$;

$x_{1,2}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-2}=\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}$; $x_1=1, x_2=2$-kritik nuqtalar.

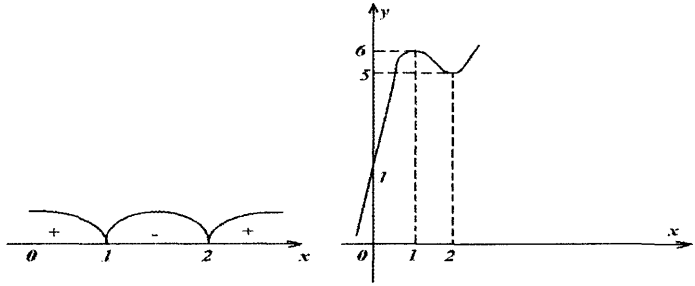
$y'=6(x-1)(x-2)$ hosilaning ishorasini intervallar usulidan foydalanib tekshiramiz.



117-chizma

Demak, $(-\infty;1)$ va $(2;+\infty)$ intervallarda $y'>0$ bo'lgani uchun bu intervallarda funksiya o'sadi, $(1;2)$ intervalda $y'<0$ bo'lgani uchun bu intervalda funksiya kamayadi. $x=1$ kritik nuqtaning chap tomonidan o'ng tomoniga o'tishda hosila ishorasini plyusdan minusga o'zgartirganligi uchun $x=1$ kritik nuqtada funksiya maksimumga ega. $x=2$ kritik nuqtaning chap tomonidan o'ng tomoniga o'tishda hosila ishorasini minusdan plyusga o'zgartirganligi uchun bu kritik nuqtada funksiya minimumga ega(118-chizma).

$$y_{max}=y(1)=6,\ y_{min}=y(2)=5.$$



118-chizma

Funksiyaning kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlari

$[a; b]$ kesmada uzluksiz $y = f(x)$ funksiyani qaraymiz. Bu funksiya $[a; b]$ kesmada o'zining eng katta va eng kichik qiymatlarini qabul qilishi aytilgan edi (18.5-teorema). Agar funksiya o'zining eng katta (eng kichik) qiymatlarini $[a; b]$ kesmaning ichki nuqtasida qabul qilsa u funksiyaning $(a; b)$ intervaldagi maksimum(minimum) qiymatlaridan biri bo'ladi. Bundan tashqari, funksiya o'zining eng katta va eng kichik qiymatlariga $[a; b]$ kesmaning oxirlarida ham erishishi mumkin.

Shunday qilib, funksiyaning $[a; b]$ kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini topish uchun quyidagi qoidaga ega bo'lamiz.

1.Funksiyaning $(a; b)$ intervaldagi barcha kritik nuqtalarini topib funksiyaning bu nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz.

2.Funksiyaning kesmaning oxirlari $x = a$, $x = b$ nuqtalardagi qiymatlari $f(a)$, $f(b)$ larni hisoblaymiz.

Topilgan qiymatlardan eng kattasi funksiyaning $[a; b]$ kesmadagi eng katta qiymati, ulardan eng kichigi funksiyaning $[a; b]$ kesmadagi eng kichik qiymati bo'ladi.

6-misol. $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 72x + 6$ funksiyaning $[2; 5]$ kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.

Yechish. 1. Funksiyaning $[2; 5]$ kesmadagi kritik nuqtalarini topamiz va bu nuqta-larda $f'(x)$ hosilani hisoblaymiz. $f'(x) = 6x^2 - 42x + 72$. $f'(x) = 0$ tenglamani yechamiz:

$6x^2-42x+72=0$; $x^2-7x+12=0$; $x_1=3$, $x_2=4$-kritik nuqtalar. Kritik nuqta-larning har ikkalasi berilgan kesmaga tegishli. Funksiyaning $x_1=3$ va $x_2=4$ nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f(3)=2\cdot 3^3-21\cdot 3^2+72\cdot 3+6=87, \qquad f(4)=2\cdot 4^3-21\cdot 4^2+72\cdot 4+6=80.$$

2. Funksiyaning $[2;5]$ kesmaning oxirlari $x=2$ va $x=5$ nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f(2)=2\cdot 2^3-21\cdot 2^2+72\cdot 2+6=82, \qquad f(5)=2\cdot 5^3-21\cdot 5^2+72\cdot 5+6=91.$$

Topilgan qiymatlar **82, 87, 80, 91** dan eng kichigi **80** berilgan funksiyaning $[2;5]$ kesmadagi eng kichik qiymati, ulardan eng kattasi 91 uning shu kesmadagi eng katta qiymati bo'ladi.

Ekstremumlarni ikkinchi hosila yordamida tekshirish

Ba'zi hollarda funksiyaning ekstremumlarini uning ikkinchi hosilasi yordamida tekshirish qulay bo'ladi. Faraz qilaylik $y=f(x)$ funksiyaning hosilasi $x=x_0$ nuqtada nolga aylansin, ya'ni $f'(x_0)=0$ va funksiya shu nuqtada hamda uning biror atrofida ikkinchi tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lib, $f''(x_0)\neq 0$ bo'lsin.

7-teorema (ekstremum mavjudligining ikkinchi yetarlilik sharti).

Agar, $f''(x_0)<0$ bo'lsa $f(x)$ funksiya $x=x_0$ kritik nuqtada maksimumga ega bo'ladi, $f''(x_0)>0$ bo'lganda y $x=x_0$ kritik nuqtada minimumga ega bo'ladi.

Isboti. Aniqlik uchun $f''(x_0)<0$ bo'lsin. $f(x)$ funksiya $x=x_0$ kritik nuqtada maksimumga ega ekanligini ko'rsatamiz. Ikkinchi hosilaning ta'rifiga binoan:

$$f''(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}.$$

Shartga ko'ra $f'(x_0)=0$ bo'lgani uchun

$$f''(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)}{\Delta x}.$$

Ammo $f''(x_0)<0$. Shuning uchun

$$f''(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)}{\Delta x}<0.$$

limiti manfiy ifodaning o‘zi ham kichik $|\Delta x|$ lar uchun manfiy bo‘lganligi sababli

$$\frac{f'(x_0+\Delta x)}{\Delta x}<0$$

bo‘ladi.

$\Delta x<0$ bo‘lsin, u holda $f'(x_0+\Delta x)>0$; agarda $\Delta x>0$ bo‘lsa, u holda $f'(x_0+\Delta x)<0$. Bu $x=x_0$ kritik nuqtaning chap tomonidan o‘ng tomoniga o‘tishda hosila ishorasini plyusdan minusga o‘zgartirishini ko‘rsatadi. Demak, ekstremum mavjudligining birinchi yetarlilik shartiga ko‘ra $y=f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada maksimumga ega.

Teoremaning ikkinchi qismi ham shunga o‘xshash isbotlanadi.

7-misol. $y=x+2\cos x$ funksiyaning $[0;2\pi]$ kesmadagi ekstremumini toping.

Yechish. 1. Birinchi hosilani topamiz: $y'=1-2\sin x$.

2. $(0;2\pi)$ intervalga tegishli kritik nuqtalarni topamiz:

$1-2\sin x=0$; $\sin x=\frac{1}{2}$, $x_1=\frac{\pi}{6}$, $x_2=\frac{5\pi}{6}$.

3. Ikkinchi hosilani topamiz: $y''=-2\cos x$.

4. Ikkinchi hosilaning $x_1=\frac{\pi}{6}$ ва $x_2=\frac{5\pi}{6}$ kritik nuqtalardagi ishoralarini aniqlaymiz.

$$f''\left(\frac{\pi}{6}\right)=-2\cos\frac{\pi}{6}=-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}<0,\quad f''\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-2\cos\frac{5\pi}{6}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}>0$$

7- teoremaga binoan berilgan funksiya $x_1=\frac{\pi}{6}$ nuqtada maksimumga va $x_2=\frac{5\pi}{6}$ nuqtada minimumga ega bo‘ladi.

$$y_{max}=y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}+2\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3{,}14}{6}+\sqrt{3}\approx 2{,}23,$$

$$y_{min}=y\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{5\pi}{6}+2\cos\frac{5\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 1{,}78.$$

8-misol. $f(x)=x^4$ funksiyaning ekstremumini toping.

Yechish. Bu funksiya butun sonlar o‘qida aniqlangan va differensiallanuvchi.

1. Hosilani topamiz: $f'(x) = 4x^3$.

2. Hosilani nolga tenglashtirib uning ildizlarini topamiz: $f'(x) = 0$; $4x^3 = 0$; $x = 0$-kritik nuqta.

3. Ikkinchi hosilani topamiz: $f''(x) = 12x^2$.

Kritik nuqtada ikkinchi hosila nolga teng, ya'ni $f''(0) = 12 \cdot 0^2 = 0$. Demak, qaralayotgan hol uchun ikkinchi yetarlilik sharti ishlamaydi. Birinchi yetarlilik shartiga murojaat etib topamiz: $x < 0$ da $f'(x) < 0$ va $x > 0$ da $f'(x) > 0$. Shunday qilib, $x = 0$ kritik nuqtaning chap tomonidan o'ng tomoniga o'tishda hosila ishorasini minusdan plyusga o'zgartirganligi sababli $x = 0$ nuqtada funksiya minimumga ega.

Demak, kritik nuqtada ikkinchi hosila mavjud bo'lib u noldan farqli bo'lgandagina ikkinchi yetarlilik shartidan foydalanish mumkin ekan. Agar kritik nuqtada ikkinchi hosila nolga teng bo'lsa yoki mavjud bo'lmasa, u holda ikkinchi yetarlilik shartidan foydalanib bo'lmaydi.

Shunday qilib differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiyaning ekstremumini quyidagi sxema asosida izlash maqsadga muvofiqdir.

1. Fuksiyaning hosilasi $f'(x)$ topiladi.

2. Kritik nuqtalar topiladi; buning uchun: a) $f'(x) = 0$ tenglamaning haqiqiy ildizlari topiladi.

b) x ning $f'(x)$ hosila mavjud bo'lmagan yoki cheksizlikka aylanadigan qiymatlari topiladi.

3. Yetarlilik shartlarining birortasidan foydalanib topilgan kritik nuqtalarning har birida funksiyaning maksimum yoki minimumga ega ekanligi yoki ekstremumning mavjud emasligi aniqlanadi.

4. $f(x)$ funksiyaning ekstrimumi mavjud kritik nuqtalaridagi qiymatlarini hisoblab uning ekstremumini topiladi.

Ekstremumlar nazariyasining masalalar yechishga tadbiqi

Ekstremumlar nazariyasi yordamida geometriya, mexanika va hakozolarga doir ko'pgina masalalar yechiladi. Shunday masalalarning ba'zilarini yechish usuli bilan tanishamiz.

1-masala. Uzunligi 120 metrlik panjara bilan bir tomondan uy bilan chegaralangan eng katta yuzga ega to'g'ri to'rtburchak shaklidagi maydon o'rab olinishi kerak. To'g'ri to'rtburchakli maydonning o'lchovlari (bo'yi va eni) aniqlansin.

Yechish. Maydonning uzunligini x, enini y, yuzini S orqali belgilaymiz. U holda to'g'ri to'rtburchakning yuzini topish formulasiga ko'ra maydonning yuzi $S=xy$ bo'ladi.

S yuz hozircha ikkita erkli o'zgaruvchilar x va y ga bog'liq. Ulardan birortasini ikkinchisi orqali ifodalash uchun masalaning shartidan foydalanamiz. Shartga ko'ra maydonning bir tomoni tayyor uy (devor) bilan, qolgan uch tomoni uzunligi $120m$ panjara bilan chegaralanishi lozim, ya'ni $x+2y=120$. Bundan $x=120-2y$ kelib chiqadi. x ning ushbu qiymatini S yuzni topish formulasiga qo'yamiz. U holda $S=(120-2y)y=120y-2y^2$ bitta erkli o'zgaruvchining funksiyasi hosil bo'ladi. Endi shu $S(y)$ funksiyaning eng katta qiymatini topamiz.

$$S'(y)=120-4y, \quad S''(y)=(120-4y)'=-4,$$

$S'(y)=0$ yoki $120-4y=0$ dan $4y=120;\ y=30$ yagona kritik nuqta kelib chiqadi.

$S''(30)=-4<0$ bo'lgani uchun ikkinchi yetarlilik shartga ko'ra x=30 qiymatda funksiya maksimumga ega. Bu yagona maksimum uning eng katta qiymati ham bo'ladi. Shunday qilib, bir tomoni uy bilan qolgan uch tomoni 120 *m* uzunlikdagi panjara bilan chegaralangan to'rtburchak shaklidagi maydonlar orasida eni y=30*м*, bo'yi (uzunligi) $x=120-2\cdot30=60m$ bo'lgan maydon eng katta $S=60\cdot30m^2=1800m^2$ yuzga ega bo'lar ekan.

2-masala. 180 soni ko'paytmasi eng katta va ulardan ikkitasi $1:2$ nisbatda bo'lgan uchta qo'shiluvchiga ajratilsin.

Yechish. Faraz qilaylik $180=x+y+z$ ko'rinishda tasvirlansin. Shartga ko'ra x,y,z sonlardan ikkitasi, masalan x,y $1:2$ nisbatda, ya'ni $\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$, $y=2x$ bo'lishi lozim. U holda $180=x+2x+z$ yoki $180=3x+z,\ z=180-3x$ hosil bo'ladi. Demak $180=x+2x+(180-3x)$

ko'rinishdagi uchta x, $2x$, $180-3x$ qo'shiluvchilarga ajratildi. Shularning ko'paytmasi

$v=x\cdot 2x\cdot(180-3x)=360x^2-6x^3$ ifodaning eng katta qiymatini topishimiz kerak. $v'(x)=720x-18x^2$; $v''(x)=720-36x$; $v'(x)=0$ yoki $720x-18x^2=0$; dan $x\cdot(720-18x)=0$; $x\neq 0$ bo'lgani uchun $720-18x=0$; $x=\frac{720}{18}=40$ kritik qiymat kelib chiqadi. $v''(40)=720-36\cdot 40<0$ bo'lgani uchun ikkinchi yetarlilik shartiga binoan $x=40$ qiymatda $v=x\cdot 2x\cdot(180-3x)$ funksiya eng katta qiymatga ega bo'ladi.

Demak, $y=2x=2\cdot 40=80$, $z=180-3x=180-3\cdot 40=60$. Shunday qilib, 180 soni 40, 80, 60 sonlarning yig'indisi ko'rinishida tasvirlanganda qo'shiluvchilardan ikkitasi $1:2$ nisbatda bo'lib, qo'shiluvchilarning ko'paytmasi eng katta bo'lar ekan, ya'ni $v_{max}=40\cdot 80\cdot 60=192000$.

3-masala. Marvaridni bahosi uning massasi kvadratiga proporsional. Ishlov berish vaqtida marvarid ikki bo'lakka ajralib ketdi va natijada eng ko'p qiymatini (bahosini) yo'qotdi. Bo'laklarning massalari topilsin.

Yechish. Marvaridning massasini m, bahosini z, bo'laklarning massalarini $m_1, m_2 (m_1+m_2=m)$ va ularning baholarini mos ravishda z_1, z_2 orqali belgilaymiz. U holda butun marvaridning bahosi $z=\alpha\cdot m^2$ bo'laklarning baholari esa $z_1=\alpha\cdot m_1^2, z_2=\alpha\cdot m_2^2$ bo'ladi, bunda $\alpha>0$-proporsionallik koeffitsienti. Shartga ko'ra, butun marvaridning bahosi $z=\alpha\cdot m^2$ bilan siniq ikki bo'lak marvaridning bahosi $\alpha\cdot m_1^2+\alpha\cdot m_2^2$ orasidagi farq $y=\alpha\cdot m^2-\alpha\cdot(m_1^2+m_2^2)$ eng katta ekanligi bizga ma'lum, $m=m_1+m_2$ yoki $m_2=m-m_1$ ekanini hisobga olsak $y=\alpha\cdot m^2-\alpha\cdot(m_1^2+m_2^2)=$
$\alpha\cdot m^2-\alpha\cdot m_1^2-\alpha\cdot(m-m_1)^2=$
$=\alpha\cdot m^2-\alpha\cdot m_1^2-\alpha\cdot m^2+2\alpha\cdot m\cdot m_1-\alpha\cdot m_1^2=2\alpha\cdot(m\cdot m_1-m_1^2)$ kelib chiqadi. Bu yerda

α, m o'zgarmas miqdorlar, m_1 эса o'zgaruvchi miqdordir. Endi $y(m_1)$ funksiyaning eng katta qiymatini topamiz.

$y'=2\alpha(m-2m_1); y''=-4\alpha.$ $y'(m_1)=0$

yoki $m-2m_1=0$ dan $m_1=\frac{m}{2}$ kritik qiymat kelib chiqadi. $y''\left(\frac{m}{2}\right)=-4\alpha<0$ bo'lgani uchun ikkinchi yetarlilik shartiga ko'ra $y=2\alpha(mm_1-2m_1^2)$ funksiya $m_1=\frac{m}{2}$ qiymatda maksimumga ega bo'ladi. Demak, marvarid teng $\left(m_1=m_2=\frac{m}{2}\right)$ ikki bo'lakka bo'linganda o'zining eng ko'p bahosini yo'qotar ekan.

4-masala. Jism $v_0=60m/sek$ tezlik bilan tik yo'nalishda yuqoriga otilgan. Jismning eng yuqori ko'tarilish balandligi topilsin.

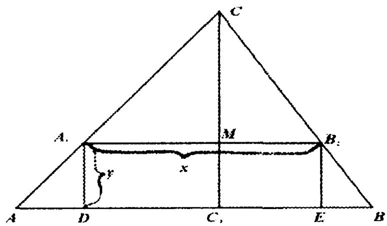
Yechish. Fizika kursidan ma'lumki tik yo'nalishda yuqoriga v_0 boshlang'ich tezlik bilan otilgan jismning harakat tenglamasi $H=v_0t-\frac{gt^2}{2}$ bo'ladi. Bunda H-otilgan jismning yerdan balandligi, $g\approx 10m/sek^2$ erkin tushish tezlanishi, t esa sarflangan vaqt. Masalaning shartiga asosan $v_0=60m/sek$ va binobarin, $H=60t-5t^2$. Endi shu $H(t)$ funksiyaning eng katta qiymatini topamiz. $H'(t)=60-10t;\ H''(t)=-10$.

$H'(t)=0$ yoki $60-10t=0$ dan $10t=60,\ t=6$ kritik nuqta kelib chiqadi. $H''(6)=-10<0$ bo'lgani uchun ikkinchi yetarlilik shartiga asosan $t=6$ qiymatda $H=60t-5t^2$ funksiya maksimumga ega bo'ladi. Demak, $H_{max}=H(6)=60\cdot 6-5\cdot 6^2=180\,(m)$.

Shunday qilib $v_0=60м/сек$ tezlik bilan yuqoriga tik otilgan jism taqriban 6 sek.dan so'ng eng yuqori H=180m balandlikka ko'tarilar ekan.

5-masala. Asosi a va balandligi h bo'lgan uchburchakka eng katta yuzli to'g'ri to'rtburchak ichki chizilgan. To'g'ri to'rtburchakning yuzi aniqlansin.

Yechish. ABC(119-chizma) uchburchakka ichki chizilgan to'g'ri to'rtburchakning tomonlarini x va y orqali belgilaymiz. U holda to'g'ri to'rtburchakning yuzi $S=xy$ bo'ladi.



119-chizma.

ABC va A_1B_1C uchburchaklarning o'xshashligidan $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{CM}{CC_1}$ (1) proporsiya kelib chiqadi. Masalaning shartiga ko'ra $AB=a,\ CC_1=h$. Belgilashimizga asosan $A_1B_1=x,\ B_1E=MC_1=y,\ CM=CC_1-CM=h-y$ bo'lgani uchun (1) munosabat quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi. $\frac{x}{a}=\frac{h-y}{h}$, bundan $x=\frac{a}{h}(h-y)$ kelib chiqadi. x ning ushbu qiymatini $S=xy$ ga qo'yib $S=\frac{a}{h}(h-y)y=\frac{a}{h}(hy-y^2)$ bir o'zgaruvchining funksiyasiga ega bo'lamiz.

Endi shu $S(y)$ funksiyaning eng katta qiymatini topamiz.

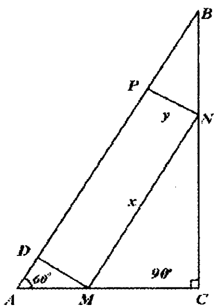
$$S'(y)=\frac{a}{h}(h-2y),\ S''(y)=-\frac{2a}{h}.$$

$S'(y)=0$ yoki $\frac{a}{h}(h-2y)=0$ dan $h-2y=0,\ y=\frac{h}{2}$ kritik qiymat kelib chiqadi.

$S''\left(\frac{h}{2}\right)=-\frac{2a}{h}<0$ bo'lgani uchun ikkinchi yetarlilik shartiga ko'ra $S(y)$ funksiya $y=\frac{h}{2}$ da maksimumga ega bo'ladi. Bu yagona maksimum uning eng katta qiymati ham bo'ladi. Shunday qilib, uchburchakka ichki chizilgan to'g'ri to'rtburchaklardan asosi $x=\frac{a}{h}(h-y)=\frac{a}{h}\left(h-\frac{h}{2}\right)=\frac{a}{2}$ va balandligi $y=\frac{h}{2}$ bo'lgan to'rtburchak eng katta yuzga ega bo'lar ekan. Bu to'rtburchakning yuzi esa $S=\frac{ah}{4}$ bo'ladi.

6-masala. Gipotenuzasi 24sm, burchagi 60^0 to‘g‘ri burchakli uchburchakka asosi gipotenuzada bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak ichki chizilgan. Shu to‘g‘ri to‘rtburchak eng katta yuzga ega bo‘lishi uchun uning tomonlari qanday bo‘lishi kerak?

Yechish. To‘g‘ri to‘rtburchakning tomonlarini x va y orqali belgilaymiz. U holda uning yuzi $S = xy$ bo‘ladi. Endi y ni x orqali ifodalaymiz(120-chizma).



120-chizma.

Shartga ko‘ra $\angle A = 60^0, \angle C = 90^0$. Demak $\angle B = 30^0$. Ma’lumki to‘g‘ri burchakli uchburchakning 30^0 li burchagi qarshisidagi tomoni gipotenuzaning yarmiga teng. Shuning uchun $AC = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{24}{2} = 12(sm)$. To‘g‘ri burchakli uchburchak MNC ning 30^0 li burchagi qarshisidagi MC tomoni uning gipotenuzasi x ning yarmiga teng, ya’ni $MC = \dfrac{x}{2}$. Demak, $AM = AC - MC = 12 - \dfrac{x}{2}$. ΔADM dan $AD = \dfrac{AM}{2}$. Pifagor teoremasiga ko‘ra $y^2 = DM^2 = AM^2 - AD^2 = AM^2 - \left(\dfrac{AM}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4}AM^2$ yoki

$y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}AM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(12 - \dfrac{x}{2}\right) = \sqrt{3}\left(6 - \dfrac{x}{4}\right)$ bo‘ladi.

Demak, to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi $S = xy = x\sqrt{3}\left(6 - \dfrac{x}{4}\right) = \sqrt{3}\left(6x - \dfrac{x^2}{4}\right)$ bo‘ladi.

Endi shu $S(x)$ funksiyaning eng katta qiymatini topamiz.

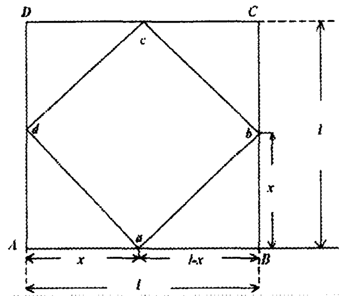
$S'(x)=\sqrt{3}\left(6-\frac{2x}{4}\right)$, $S''(x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $S'(x)=0$ yoki $6-\frac{x}{2}=0$ dan x=12 kritik qiymat kelib chiqadi. $S''(12)=-\frac{\sqrt{3}}{2}<0$ bo'lgani uchun ikkinchi yetarlilik shartiga ko'ra

$S(x)=\sqrt{3}\left(6x-\frac{x^2}{4}\right)=\sqrt{3}\left(6-\frac{x}{4}\right)x$ funksiya x=12 qiymatda maksimumga ega bo'ladi.

Shunday qilib, uchburchakka ichki chizilgan va bir tomoni uning 24 sm li gipotenuzasida bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklardan tomonlari x=12, $y=\sqrt{3}\left(6-\frac{12}{4}\right)=3\sqrt{3}$ ga teng bo'lgani eng katta yuzga ega bo'lib, $S_{\max}=12\cdot 3\sqrt{3}=36\sqrt{3}\ (sm^2)$ ga teng ekan.

7-masala. *ABCD* kvadrat berilgan. Uning uchlaridan bir xil *Aa, Bb, Cc, Dd* kesmalar ajratilgan va *a, b, c, d* nuqtalarni birlashtirib kvadrat hosil qilingan. *Aa* ning qanday qiymatida *abcd* kvadratning yuzi eng kichik bo'ladi.(121-chizma).

Yechish. $Aa=x, AB=\ell$ deb belgilasak, $aB=\ell-x$ va Pifagor teoremasiga ko'ra $ab^2=x^2+(\ell-x)^2=x^2+\ell^2-2\ell x+x^2=2x^2-2\ell x+\ell^2$ bo'ladi. Tomoni *ab* ga teng *abcd* kvadratning yuzi $S=ab^2$ ga teng. Demak, $S=2x^2-2\ell x+\ell^2$. Endi shu $S(x)$ funksiyaning eng kichik qiymatini topamiz. $S'(x)=4x-2\ell, S''(x)=4$. $S'(x)=0$ yoki $4x-2\ell=0$ dan $x=\frac{\ell}{2}=\frac{AB}{2}$ kritik qiymat kelib chiqadi. $S'\left(\frac{\ell}{2}\right)=4>0$ bo'lgani uchun ikkinchi yetarlilik shartiga binoan $S=2x^2-2\ell x+\ell^2$ funksiya $x=\frac{\ell}{2}$ qiymatda eng kichik qiymatga ega bo'ladi. Shunday qilib, *ABCD* kvadratga masalaning shartida ko'rsatilgandek qilib ichki chizilgan kvadratlardan *ABCD* kvadrat tomonlarini o'rtasini birlashtirib hosil qilingan kvadrat eng kichik yuzga ega bo'lar ekan. (121-chizma).



121-chizma.

8-masala. Tagi kvadrat shaklidagi, hajmi 108 m^3 ga teng ochiq hovuzning o'lchovlari shunday aniqlansinki, uning devorlari bilan tagini qoplash uchun mumkin qadar oz material sarf etilsin. Hovuzning o'lchovlari deganda uning tagini tomonlari va balandligi (chuqurligi) tushuniladi.

Yechish. Hovuz tagini tomoni x orqali va hovuz balandligini h orqali belgilaymiz. U holda hovuz parallelepiped shaklida bo'lgani uchun uning hajmi $v = x^2 h$ bo'ladi. Shartga ko'ra $x^2 h = 108$. Hovuz tagi x^2, devori $4xh$ yuzga ega bo'lgani uchun jami $S = x^2 + 4xh$ yuzni material bilan qoplash lozim. S yuzni birgina erkli o'zgaruvchining funksiyasi sifatida ifodalash uchun $x^2 h = 108$ tenglikdan topilgan $h = \frac{108}{x^2}$ qiymatni unga qo'yamiz. U holda

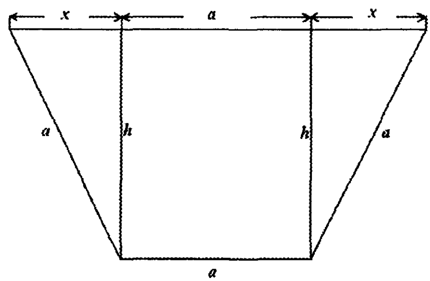
$S = x^2 + 4x\frac{108}{x^2} = x^2 + \frac{432}{x}$ kelib chiqadi. Endi shu $S(x)$ funksiyaning eng kichik qiymatini topamiz.

$$S'(x) = 2x - \frac{432}{x^2}; \ S''(x) = 2 + \frac{864}{x^3} \ (x > 0).$$

$S'(x) = 2x - \frac{432}{x^2} = 0$ dan $2x^3 - 432 = 0; \ x^3 = 216, \ x = 6$ kritik nuqta kelib chiqadi. Ikkinchi hosila $S''(6) = 2 + \frac{864}{216} > 0$ bo'lgani uchun ikkinchi yetarlilik shartiga asosan $x = 6$ qiymatda $S(x) = x^2 + \frac{432}{x}$ funksiya eng kichik qiymatga ega bo'ladi.

Demak, hajmi 108 м^3 ga teng ochiq hovuzning tagi $6m$ kvadratdan iborat, balandligi $h=\frac{108}{36}=3\ m$ bo'lgandagina uning devorlariga ishlov berish uchun eng kam material sarflanar ekan. Ya'ni, hovuzning o'lchovlari $6m\times 6m\times 3m$ bo'lishi lozim ekan.

9-masala. Trapetsiyaning kichik asosi va yon tomonlarining har biri a ga teng. Uning katta asosi shunday aniqlansinki, trapetsiyaning yuzi eng katta bo'lsin(122-chizma).



122-chizma

Yechish. Chizmaga binoan trapetsiyaning katta asosi $2x+a$ ga teng. Trapetsiyaning balandligini h orqali belgilaymiz. Ma'lumki, trapetsiyaning yuzi asoslari yig'indisining yarmi bilan balandligi ko'paytmasiga teng, ya'ni

$$\frac{2x+a+a}{2}h=(x+a)h$$

Pifagor teoremasiga ko'ra chizmadan $h=\sqrt{a^2-x^2}$ bo'lgani uchun trapetsiyaning yuzi $S=(x+a)\sqrt{a^2-x^2}$ bo'ladi. Endi shu $S(x)$ funksiyaning eng katta qiymatini topamiz.

$$S'(x)=\sqrt{a^2-x^2}+(x+a)\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{a^2-x^2-x(x+a)}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{-2x^2-ax+a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

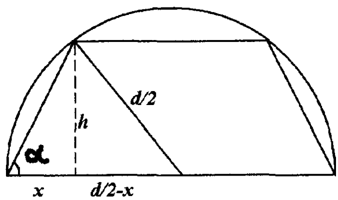
$S'(x)=0$ yoki $-2x^2-ax+a^2=0$ dan $x_{1,2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4\cdot 2\cdot a^2}}{-4}=\frac{a\pm 3a}{-4}$;

$x_1=\frac{a}{2}$; $x_2=-a$ kelib chiqadi. Masalaning shartiga ko'ra $x>0$ bo'lgani uchun $x=\frac{a}{2}$ kritik qiymatga ega bo'lamiz. Hosilani

$S'(x)=\dfrac{-2\left(x-\frac{a}{2}\right)(x+a)}{\sqrt{a^2-x^2}}$ ko'rinishda tasvirlasak $x<\frac{a}{2}$ bo'lganda $x-\frac{a}{2}<0$ va $S'(x)>0$ ekani kelib chiqadi. Xuddi shuningdek, $x>\frac{a}{2}$ bo'lganda $S'(x)<0$ ekani kelib chiqadi. $S'(x)$ hosila $x=\frac{a}{2}$ kritik qiymatning chap tomonidan o'ng tomoniga o'tganda o'z ishorasini «+» dan «-» ga o'zgartiradi. Shuning uchun birinchi yetarlilik shartiga ko'ra $S=(x+a)\sqrt{a^2-x^2}$ funksiya $x=\frac{a}{2}$ qiymatda maksimumga ega bo'ladi. Bu yagona maksimum uning eng katta qiymati ham bo'ladi. Shunday qilib trapetsiyaning katta asosi $2x+a=2\frac{a}{2}+a=2a$ bo'lganda u eng katta yuzga ega bo'lar ekan.

Izoh. Masalaning natijasidan kanal qazish ishlarida, tarnov yasash va hakozolarda foydalanish mumkin.

10-masala. Yarim doiraga asosi yarim doira diametridan iborat bo'lgan trapetsiya ichki chizilgan. Trapetsiyaning asosiga yopishgan burchagi qanday bo'lganda trapetsiyaning yuzi eng katta bo'ladi(123-chizma).



123-chizma

Yechish. Doiraning diametrini *d*, trapetsiyaning balandligini *h*, trapetsiya yon tomonining katta asosidagi proeksiyasini *x*, shu tomon bilan asos orasidagi burchakni α deb olamiz. U holda trapetsiyaning kichik asosi *d*-2*x*, balandligi $h=x\,tg\alpha$ va yuzi $S=\frac{d+d-2x}{2}h=(d-x)x\,tg\alpha$ bo'ladi. Ikkinchi tomondan chizmadan Pifagor teoremasiga ko'ra

$h^2=\left(\frac{d}{2}\right)^2-\left(\frac{d}{2}-x\right)^2=dx-x^2$ ga ega bo'lamiz. Bunga $h=x\,tg\alpha$ qiymatni qo'ysak

$$x^2 tg^2\alpha = d\cdot x - x^2;\ x^2 tg^2\alpha + x^2 = d\cdot x;\ x^2\left(1+tg^2\alpha\right) = d\cdot x;\ x\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha} = d;\ x = d\cos^2\alpha$$

kelib chiqadi. Shunday qilib,

$$S = (d-x)x\,tg\alpha = \left(d - d\cos^2\alpha\right)d\cos^2\alpha\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = d\left(1-\cos^2\alpha\right)d\cos\alpha\cdot\sin\alpha = d^2\sin^3\alpha\cos\alpha$$

bo'ladi.

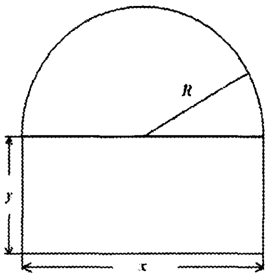
Endi $S(\alpha) = d^2\sin^3\alpha\cos\alpha$ funksiyaning eng katta qiymatini topamiz.

$$S'(\alpha) = d^2\left(\sin^3\alpha\cos\alpha\right)' = d^2\left(3\sin^2\alpha\cos^2\alpha - \sin^4\alpha\right) = d^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\left(3-tg^2\alpha\right)$$

$S'(\alpha)=0$ yoki $d^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\left(3-tg^2\alpha\right)=0$ dan $\sin^2\alpha\cos^2\alpha\neq 0$ bo'lgani uchun $3-tg^2\alpha=0;\ tg^2\alpha=3,\ tg\alpha=\pm\sqrt{3}$ kelib chiqadi. Shartga ko'ra $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ bo'lgani sababli $tg\alpha=\sqrt{3}$, $\alpha=60^0$ kritik qiymatga ega bo'lamiz. $0<\alpha<60^0$ bo'lsa $tg\alpha<tg60^0=\sqrt{3},\ tg^2\alpha<3,\ 3-tg^2\alpha>0$ va $S'(\alpha)=d^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\left(3-tg^2\alpha\right)>0$ bo'ladi.

$60^0<\alpha<90^0$ bo'lganda $tg60^0<tg\alpha;\ \sqrt{3}<tg\alpha;\ 3<tg^2\alpha;\ 3-tg^2\alpha<0$ bo'lib, $S'(\alpha)<0$ bo'ladi, chunki $y=tgx$ funksiya o'suvchi. $S(\alpha)$ funksiyaning hosilasi $\alpha=60^0$ kritik qiymatning chapidan o'ngiga o'tganda ishorasini "+" dan "-" ga o'zgartirganligi uchun birinchi yetarlilik shartiga binoan funksiya $\alpha=60^0$ bo'lganda uning yuzi eng katta bo'lar ekan.

11-masala. Tunnelning ko'ndalang kesimi bir tomoni yarim doiradan iborat to'g'ri to'rtburchak shakliga ega. Kesim perimetrii $25m$. Yarim doira radiusi qanday bo'lsa, kesim yuzi eng katta bo'ladi(124-chizma).



124-chizma

Yechish. Aylana uzunligini topish formulasi ($\ell=2\pi R$) ga binoan yarim doiraning uzunligi πR (R-yarim doiraning radiusi). To'g'ri to'rtburchakning asosini x, balandligini y orqali belgilasak kesimning perimetri shartga ko'ra $x+2y+\pi R=25$ (α) bo'ladi. Kesimning yuzi to'g'ri to'rtburchak yuzi bilan yarim doira yuzining yig'indisidan iborat, ya'ni $S=xy+\frac{1}{2}\pi R^2$ (β) bo'ladi. $x=2R$ bo'lgani uchun (α) dan $2R+2y+\pi R=25;\ y=12{,}5-\frac{\pi+2}{2}R$ kelib chiqadi. y ning topilgan qiymatini (β) ga qo'yamiz. U holda $S=2R\left(12{,}5-\frac{\pi+2}{2}R\right)+\frac{1}{2}\pi R^2=$

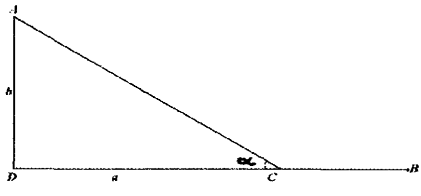
$=25R-(\pi+2)R^2+\frac{1}{2}\pi R^2$ bir o'zgaruvchi R ning funksiyasi kelib chiqadi. Endi shu $S(R)$ funksiyaning eng katta qiymatini topamiz.

$$S'(R)=25-2(\pi+2)R+\pi R;\ S''(R)=-2(\pi+2)+\pi=-\pi-4=-(\pi+4);\qquad S'(R)=0$$

yoki $25-2(\pi+2)R+\pi R=0$ dan $25-\pi R-4R=0$; $R=\frac{25}{\pi+4}\approx 3{,}5$ kelib chiqadi.

$S''(R)=-(\pi+4)<0$ bo'lgani uchun ikkinchi yetarlilik shartiga asosan funksiya $R=3{,}5m$ bo'lganda tunnel kesimining yuzi eng katta bo'lar ekan.

12-masala. A zavodga yaqin bo'lgan joydan berilgan to'g'ri chiziq bo'yicha B shaharga qarab temir yo'l o'tqazilgan. Agar bir tonna yukni bir km ga tosh yo'l bo'yicha tashish temir yo'l bo'yicha tashishga qaraganda m marta qimmatroq bo'lsa, A dan B ga yuk tashish eng arzon bo'lishi uchun, A zavoddan temir yo'lgacha tosh yo'lni temir yo'lga nisbatan qanday α burchak ostida o'tkazish kerak?(125-chizma).



125-chizma

Yechish. A zavoddan temir yo'lgacha masofani b ($AD=b$), D dan B gacha masofani a, tosh yo'l bilan temir yo'l orasidagi burchakni α orqali belgilaymiz.

1 tonna yukni tosh yo'lda 1 *km* ga tashish uchun d so'm sarf bo'lsin. U holda 1 tonna yukni temir yo'lda 1 km ga tashish uchun $\frac{d}{m}$ so'm sarflanadi. Yuk A dan B gacha AC *km* tosh yo'lda, CB *km* temir yo'lda tashiladi. ΔACD dan trigonometrik funksiyalarning ta'rifiga ko'ra quyidagilarga ega bo'lamiz. $\frac{AD}{AC}=\sin\alpha,\ AC=\frac{AD}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\alpha},\ \frac{DC}{AD}=ctg\alpha$; $DC=ADctg\alpha=bctg\alpha$.

Demak $CB=DB-DC=a-bctg\alpha$. Shunday qilib tashilgan yuk A dan B gacha $AC=\frac{b}{\sin\alpha}$ km.ni tosh yo'lda o'tib uni tashishga $\frac{bd}{\sin\alpha}$ so'mni $CB=(a-bctg\alpha)$ km.ni temir yo'lda o'tib uni tashishga $(a-bctg\alpha)\frac{d}{m}$ so'm sarflanadi. U holda yukni tashish uchun hammasi bo'lib $f(\alpha)=\frac{bd}{\sin\alpha}+(a-bctg\alpha)\frac{d}{m}$ so'm pul sarflanadi. Endi a, b, d, m larni o'zgarmas hisoblab $f(\alpha)$ funksiyaning eng kichik qiymatini topamiz.

$$f'(\alpha)=\frac{bd\cos\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{bd}{m\sin^2\alpha}=bd\frac{1-m\cos\alpha}{\sin^2\alpha}=mbd\frac{\frac{1}{m}-\cos\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

$f'(\alpha)=0$ yoki $\frac{1}{m}-\cos\alpha=0$ dan $\cos\alpha=\frac{1}{m}$; $\alpha=\arccos\frac{1}{m}$ kritik qiymat kelib chiqadi. $\cos\alpha$ funksiya $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ da kamayuvchi ekanini hisobga olsak $\alpha<\arccos\frac{1}{m}$ bo'lganda $\cos\alpha>\frac{1}{m}$;

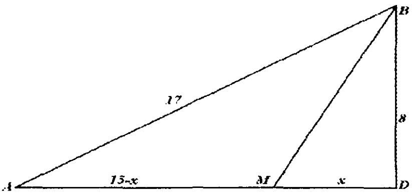
$\frac{1}{m}-\cos\alpha<0$, $f'(\alpha)=mbd\frac{\frac{1}{m}-\cos\alpha}{\sin^2\alpha}<0$ va $\alpha>\arccos\frac{1}{m}$ bo'lganda $\cos\alpha<\frac{1}{m}$; $\frac{1}{m}-\cos\alpha>0$, $f'(\alpha)>0$ kelib chiqadi. Hosila $\alpha=\arccos\frac{1}{m}$ kritik nuqtaning chapidan o'ngiga o'tganda ishorasini "-" dan "+"ga o'zgartirganligi uchun birinchi yetarlilik shartiga ko'ra funksiya shu qiymatda minimumga ega bo'ladi.

Shunday qilib, yukni A zavoddan B shaharga tashish eng arzon bo'lishi uchun tosh yo'lni temir yo'lga $\alpha=\arccos\frac{1}{m}$ burchak ostida qurish lozim ekan.

Xususiy holda yukni tosh yo'lda tashish temir yo'ldagiga qaraganda 5 marta qimmat bo'lganda eng kam xarajat qilish uchun tosh yo'lni temir yo'lga $\alpha = \arccos\frac{1}{5} \approx 78^0$ burchak ostida o'tkazish kerak ekan.

13-masala. Sayyoh A manzildan chiqib tosh yo'l bo'ylab shu yo'ldan 8 km chetda joylashgan va A dan to'g'ri chiziq bo'yicha 17 km uzoqlikda joylashgan B manzil tomon bormoqda. Sayyoh B manzilga tezroq yetishish uchun tosh yo'lning qaysi joyidan B manzilga burilishi kerak?(126-chizma). Sayyoh burilgandan so'ng B manzilgacha yo'lsiz yuradi.

Sayyoh tosh yo'ldagi tezligi 5 km/soat, yo'lsiz joydagi tezligi 3km/soat.



126-chizma.

Yechish. Aytaylik sayyoh tosh yo'lning M nuqtasidan B manzilga burilsin. Chizmadagi D nuqta bilan M nuqta orasidagi masofani x orqali belgilaymiz.

To'g'ri burchakli ΔBAD dan Pifagor teoremasiga asosan $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{289-64} = \sqrt{225} = 15$, ya'ni AD=15km kelib chiqadi.

Demak, A va M orasidagi masofa $AM = AD - MD = 15 - x$ ga teng. AMB marshrutni o'tish uchun sarflangan vaqtni t orqali belgilaymiz. Sayyoh $AM = 15 - x$ tosh yo'lni 5km/soat tezlik bilan $\frac{15-x}{5}$ ($t = \frac{S}{v}$ formulaga asosan) vaqt oralig'ida bosib o'tadi. ΔBMD dan Pifagor teoremasiga ko'ra $MB = \sqrt{8^2 + x^2} = \sqrt{64 + x^2}$ bo'ladi. Yo'lning MB qismida 3km/soat tezlik bilan harakat qilgan sayyoh uni $\frac{\sqrt{64+x^2}}{3}$ vaqt oralig'ida bosib o'tadi.

Demak AMB marshrutni o'tish uchun sayyoh jami $t=\frac{15-x}{5}+\frac{\sqrt{64+x^2}}{3}$ vaqt sarflaydi. Ushbu $t(x)$ funksiyaning eng kichik qiymatini topamiz.

$$t'(x)=\frac{1}{5}(15-x)'+\frac{1}{3}\left(\sqrt{64+x^2}\right)'=-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\left(64+x^2\right)'}{2\sqrt{64+x^2}}=-\frac{1}{5}+\frac{x}{3\sqrt{64+x^2}}=\frac{-3\sqrt{64+x^2}+5x}{15\sqrt{64+x^2}}$$

$$t'(x)=0 \text{ yoki } -3\sqrt{64+x^2}+5x=0 \text{ dan } 3\sqrt{64+x^2}=5x;$$

$$9\left(64+x^2\right)=25x^2;\ 9\cdot 64+9x^2=25x^2;\ 9\cdot 64=16x^2;\ x^2=\frac{9\cdot 64}{16};\ x^2=36,\ x=6$$

kritik qiymat kelib chiqadi (chunki $x>0$).

$$t''(x)=\left(-\frac{1}{5}+\frac{x}{3\sqrt{64+x^2}}\right)'=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{64+x^2}-x\cdot\frac{x}{\sqrt{64+x^2}}}{\left(\sqrt{64+x^2}\right)^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{64+x^2-x^2}{\left(64+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{64}{3\left(64+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

$t''(6)=\frac{64}{3(64+36)^{\frac{3}{2}}}=\frac{64}{3000}>0$ bo'lgani uchun ikkinchi yetarlilik shartiga asosan $x=6$ qiymatda $t(x)$ funksiya eng kichik qiymatga ega bo'ladi. Shunday qilib, sayyoh A manzildan 15-6=9(km) yurgandan so'ng B manzilga burilsa u eng kam vaqt $t=\frac{15-x}{5}+\frac{\sqrt{64+x^2}}{3}=\frac{77}{15}$ soat ($t\approx 5$ soatu 8 minut) sarflar ekan.

O'zingizni sinab ko'ring:

1. O'suvchi va kamayuvchi funksiyalarni ta'riflang.
2. Funksiya o'suvchi bo'lishining zaruriy va yetarlilik shartlarini ayting. Bu teoremaning geometrik mazmuni nimadan iborat?
3. Funksiya kamayuvchi bo'lishining zaruriy va yetarlilik shartlarini ayting. Bu teoremaning geometrik mazmuni nimadan iborat?
4. Funksiyaning maksimumi va minimumi nima?
5. Funksiyaning maksimumi va minimumi hamda eng katta va eng kichik qiymatlari orasida qanday farq bor?
6. Ekstremum mavjudligining zaruriy shartini ayting. Bu shartning geometrik mazmunini ayting. Zaruriy shartni yetarlilik emasligini ko'rsatuvchi misollar keltiring.
7. Kritik nuqtani ta'riflang.
8. Ekstremum mavjudligining birinchi yetarlilik shartini ayting.

XIX BOB. ANIQMAS INTEGRAL. RATSIONAL KASRLI FUNKSIYALARNI INTEGRALLASH

19.1. Aniqmas integral tushunchasi
19.2. Aniqmas integral jadvali
19.3. Integrallash usullari

Ratsional kasrli funksiyalarni integrallash. Differensial hisob bobida berilgan $y=F(x)$ funksiyasining $F'(x)=f(x)$ hosilasini topish masalasi bilan shug'ullangan edik. Ammo bir qator savollarga javob izlashda teskari, ya'ni $y=F(x)$ funksiyani uning ma'lum bo'lgan $F'(x)=f(x)$ hosilasi bo'yicha topish masalasiga duch kelamiz.

Masalan, moddiy nuqtaning harakat tenglamasi $S=S(t)$ berilgan bo'lsa, unda t_0 vaqtgacha bosib o'tilgan masofa $S_0=S(t_0)$ kabi aniqlanadi.Ammo harakat tenglamasi $S=S(t)$ noma'lum bo'lib, uning hosilasi $S'(t)=v(t)$, ya'ni oniy tezlik berilgan holda $S_0=S(t_0)$ masofani qanday topish masalasi paydo bo'ladi. Bu kabi masalalar integral tushunchasiga olib keladi va uni o'rganishga kirishamiz.

1-ta'rif: Biror chekli yoki cheksiz (a,b) oraliqdagi har bir x nuqtada differensiallanuvchi va hosilasi

$$F'(x)=f(x) \qquad (1)$$

shartni qanoatlantiruvchi $F(x)$ berilgan $f(x)$ funksiya uchun ***boshlang'ich funksiya*** deyiladi.

Masalan, $f(x)=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$, $x\in(-\infty,\ \infty)$, funksiya uchun $F(x)=a^x/\ln a$ boshlang'ich funksiya bo'ladi, chunki ixtiyoriy x uchun

$$F'(x)=(a^x/\ln a)'=a^x\ln a/\ln a=a^x=f(x)$$

tenglik o'rinlidir.

Xuddi shunday $F(x)=x^5/5$ funksiya barcha x nuqtalarda $f(x)=x^4$ uchun boshlang'ich funksiya bo'ladi, chunki bunda (1) tenglik bajariladi.

Berilgan $y=F(x)$ funksiyaning $y'=F'(x)=f(x)$ hosilasi bir qiymatli aniqlanadi. Masalan, $y=x^2$ funksiya yagona $y'=2x$ hosilaga ega. Ammo

$y=f(x)$ funksiyaning boshlang'ich $F(x)$ funksiyasini topish masalasi bir qiymatli hal qilinmaydi. Haqiqatan ham, agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ uchun boshlang'ich funksiya bo'lsa, u holda ixtiyoriy C o'zgarmas son uchun $F(x)+C$ funksiya ham $f(x)$ uchun boshlang'ich funksiya bo'ladi. Haqiqatan ham, differensiallash qoidalariga asosan,

$$(F(x)+C)'=F'(x)+(C)'=f(x)+0=f(x)$$

va ta'rifga asosan, $F(x)+C$ funksiya $f(x)$ uchun boshlang'ich funksiya bo'ladi.

Masalan, $f(x)=2x$ uchun ixtiyoriy C o'zgarmasda x^2+C boshlang'ich funksiyalar bo'ladi.

Demak, berilgan $y=f(x)$ funksiya uchun $F(x)+C$ ko'rinishdagi cheksiz ko'p boshlang'ich funksiya mavjud bo'ladi. Bunda $F(x)$ birorta boshlang'ich funksiyani, C esa ixtiyoriy o'zgarmas sonni ifodalaydi.

Bu yerda berilgan $y=f(x)$ funksiya uchun barcha boshlang'ich funksiyalarni topish masalasi paydo bo'ladi. Bu savolga javob berish uchun dastlab ushbu lemmani (yordamchi teoremani) qaraymiz.

Lemma: Agar y=Q(x) funksiya biror (a,b) oraliqda differensiallanuvchi va bu oraliqning har bir nuqtasida uning hosilasi Q'(x)=0 bo'lsa, unda bu funksiya (a,b) oraliqda o'zgarmas, ya'ni Q(x)=C (C - const) bo'ladi.

Isbot: Qaralayotgan (a,b) oraliqdan ixtiyoriy ikkita x_1 va x_2 ($x_1 \neq x_2$) nuqtalarni olamiz. Unda y=Q(x) funksiya olingan $[x_1, x_2]$ kesmada Lagranj teoremasining (VII bob, §3) barcha shartlarini qanoatlantiradi va shu sababli

$$Q(x_2)-Q(x_1)=Q'(\xi)(x_2-x_1)\ , \quad x_1<\xi<x_2\ ,$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Lemma sharti bo'yicha (a,b) oraliqning barcha nuqtalarida Q'(x)=0 bo'lgani uchun ξ nuqtada ham Q'(ξ)=0 bo'ladi. Bu yerdan, oldingi tenglikka asosan, Q(x_2)–Q(x_1)=0, ya'ni Q(x_2)=Q(x_1) tenglikka ega bolamiz. Bu esa Q(x)=C ekanligini ifodalaydi. Lemma isbot bo'ldi.

Endi quyidagi teoremani qaraymiz.

1-teorema: Agar $F(x)$ va $\Phi(x)$ berilgan $f(x)$ funksiyaning ixtiyoriy ikkita boshlang'ich funksiyalari bo'lsa, u holda biror C o'zgarmas sonda $\Phi(x)=F(x)+C$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot: Teorema shartiga asosan $F(x)$ va $\Phi(x)$ berilgan $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyalari bo'lgani uchun $F'(x)=f(x)$ ва $\Phi'(x)=f(x)$ tenglik o'rinlidir. Bu yerdan $Q(x)=\Phi(x)-F(x)$ funksiyaning hosilasi

$$Q'(x) = [\Phi(x)-F(x)]'= \Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$$

ekanligini ko'ramiz. Unda, oldingi lemmaga asosan, $Q(x)=C$ natijani olamiz. Demak, $Q(x)=\Phi(x)-F(x)=C$ va haqiqatan ham $\Phi(x)=F(x)+C$ tenglik o'rinli.

Bu teoremadan ushbu muhim xulosa kelib chiqadi: agar $F(x)$ berilgan $f(x)$ funksiyaning birorta boshlang'ich funksiyasi bo'sa, uning barcha boshlang'ich funksiyalari $F(x)+C$ (C-ixtiyoriy o'zgarmas son) kabi aniqlanadi. Demak, $f(x)$ funksiyaning barcha boshlang'ich funksiyalarini topish uchun uning birorta $F(x)$ boshlang'ich funksiyasini topib, unga C o'zgarmas sonni qo'shib qo'yish kifoyadir. Masalan, $f(x)=2x$ funksiyaning barcha boshlang'ich funksiyalari x^2+C ko'rinishda bo'ladi.

2-ta'rif: Agar $F(x)$ biror (a,b) oraliqda $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, unda $F(x)+C$ (C – ixtiyoriy o'zgarmas son) funksiyalar to'plami shu oraliqda $f(x)$ funksiyaning ***aniqmas integrali*** deyiladi .

Berilgan $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali $\int f(x)dx$ kabi belgilanadi va, ta'rifga asosan, birorta $F(x)$ boshlang'ich funksiya bo'yicha

$$\int f(x)dx = F(x)+C \qquad (2)$$

tenglik bilan aniqlanadi. Bunda C ixtiyoriy o'zgarmas son ekanligini yana bir marta eslatib o'tamiz.

(2) tenglikda $\int$ - integral belgisi, $f(x)$ *integral ostidagi funksiya*, $f(x)dx$ *integral ostidagi ifoda*, x esa *integrallash o'zgaruvchisi* deyiladi.

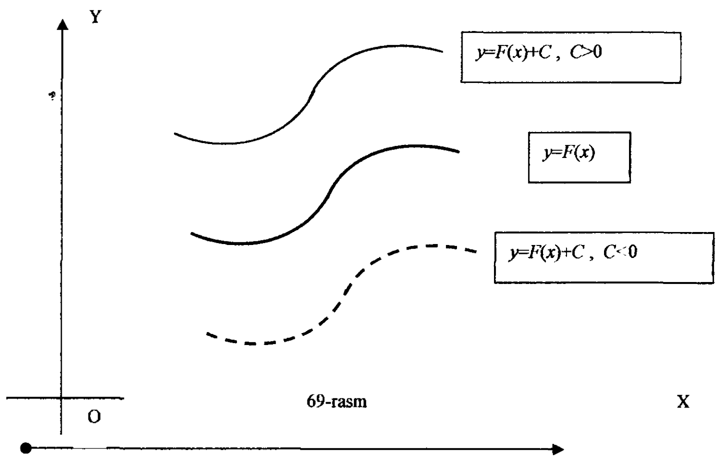
Berilgan $f(x)$ funksiyaning $\int f(x)dx$ aniqmas integralini topish amali bu funksiyani ***integrallash*** deb ataladi.

Izoh: Berilgan $f(x)$ uchun qaysi shartda $F(x)$ boshlang'ich funksiya , demak $\int f(x)dx$ aniqmas integral, mavjud bo'lish masalasi kelgusida, §6 da qaraladi.

Yuqorida topilgan boshlang'ich funksiyalar bo'yicha quyidagi aniqmas integrallarni yozish mumkin:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ , \ \int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C \ , \quad \int 2x dx = x^2 + C.$$

Aniqmas integral ta'rifini ifodalovchi (2) tenglikdan ko'rinadiki, aniqmas integral $y=F(x)+C$(C-ixtiyoriy o'zgarmas son) funksiyalar sinfini ifodalaydi. Shu sababli, geometrik nuqtai-nazardan, aniqmas integral $y=F(x)$ funksiya grafigini OY koordinata o'qi bo'ylab parallel ko'chirishdan (VII bob,§3) hosil bo'ladigan chiziqlar sinfidan iborat bo'ladi (69-rasmga qarang).



69-rasm

Aniqmas integral xossalari. Aniqmas integral ta'rifidan uning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

I. Aniqmas integral hosilasi integral ostidagi funksiyaga teng, ya'ni

$$(\int f(x)dx)' = f(x)$$

Isbot: Aniqmas integral va boshlang'ich funksiya ta'rifini ifodalovchi (2) va (1) tengliklarga asosan

$$(\int f(x)dx)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

II. Aniqmas integral differensiali integral ostidagi ifodaga teng, ya'ni

$$d(\int f(x)dx) = f(x)dx.$$

Isbot: Differensial ta'rifi va oldingi xossaga asosan

$$d(\int f(x)dx) = (\int f(x)dx)'dx = f(x)dx.$$

Izoh: Bu yerdan differensiallash amali integrallash amaliga teskari amal ekanligini ko'ramiz.

III. Biror funksiyaning hosilasidan olingan aniqmas integral shu funksiya bilan ixtiyoriy C o'zgarmasning yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int F'(x)dx = F(x) + C.$$

Isbot: Agar $F'(x)=f(x)$ deb belgilasak, unda $F(x)$ hosil qilingan $f(x)$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya bo'ladi. Unda, aniqmas integral ta'rifiga asosan,

$$\int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C.$$

IV. Biror funksiyaning differensialidan olingan aniqmas integral shu funksiya bilan o'zgarmas yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Isbot: Differensial ta'rifi va oldingi xossaga asosan

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = F(x) + C.$$

Izoh: Bu yerdan integrallash amali differensiallash amaliga o'zgarmas son aniqligida teskari amal ekanligini ko'ramiz.

V. O'zgarmas k ko'paytuvchini integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya'ni

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

Bu tenglik o'zgarmas son aniqligida tushuniladi.

Isbot: I xossaga asosan ikkala aniqmas integral bir xil $kf(x)$ hosilaga ega. Demak, bu aniqmas integrallarning ikkalasi ham $kf(x)$ uchun boshlang'ich funksiya bo'ladi va shu sababli ular bir-biridan faqat o'zgarmas songa farq qilishi mumkin.

Masalan,

$$\int 10xdx = \int 5 \cdot 2xdx = 5\int 2xdx = 5(x^2 + C) = 5x^2 + 5C = 5x^2 + C.$$

Bu yerda C ixtiyoriy o'zgarmas son bo'lgani uchun $5C$ ham ixtiyoriy o'zgarmas son bo'ladi va shu sababli uni yana C deb belgilash mumkin.

VI. Ikkita funksiya algebraik yig'indisidan olingan aniqmas integral shu funksiyalarning har biridan olingan aniqmas integrallarning algebraik yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Bu yerda ham tenglik o'zgarmas son aniqligida tushuniladi.

Isbot: Aniqmas integralning I xossasiga asosan

$$(\int [f(x) \pm g(x)]dx)' = f(x) \pm g(x).$$

Algebraik yig'indining hosilasi va I xossaga asosan

$$(\int f(x)dx \pm \int g(x)dx)' = (\int f(x)dx)' \pm (\int g(x)dx)' = f(x) \pm g(x).$$

Demak, VI xossadagi tenglikning ikkala tomonidagi funksiyalar bir xil hosilaga ega va shu sababli ular o'zgarmas son aniqligida teng bo'ladi. Masalan,

$$\int (5^x + 2x)dx = \int 5^x dx + \int 2xdx = \frac{5^x}{\ln 5} + x^2 + C .$$

Izoh: VI xossa chekli sondagi funksiyalarning algebraik yig'indisi uchun ham o'rinli bo'ladi.

3-ta'rif*:** V va VI xossalar aniqmas integralning ***chiziqlilik xossalari deyiladi.

Aniqmas integralning chiziqlilik xossalarini bitta

$$\int [Af(x) + Bg(x)]dx = A\int f(x)dx + B\int g(x)dx \qquad (3)$$

tenglik orqali ham ifodalash mumkin.

VII. Agar a va b o'zgarmas sonlar bo'lsa, unda quyidagi tasdiq o'rinlidir:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \ .$$

Isbot: Ikkinchi integral javobi to‘g‘riligini differensiallash orqali ko‘rsatamiz. Shartga ko‘ra $F'(x)=f(x)$ bo‘lgani uchun va murakkab funksiya hosilasi formulasiga asosan

$$\left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right]' = \frac{1}{a}F'(ax+b)\cdot(ax+b)' = \frac{1}{a}f(ax+b)\cdot a = f(ax+b).$$

Masalan,

$$\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C \Rightarrow \int (2x-3)^4 dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-3)^5}{5} + C = \frac{(2x-3)^5}{10} + C.$$

INTEGRALLAR JADVALI

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$

2. $\int dx = x + C$

3. $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$

4. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$

6. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

8. $\int e^x dx = e^x + C$

9. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

10. $\int \cos x dx = \sin x + C$

11. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \mathrm{tg}^2 x)dx = \mathrm{tg}x + C \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

12. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + C \quad (x \neq \pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

13. $\int \mathrm{tg}x dx = -\ln|\cos x| + C \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

14. $\int \mathrm{ctg}x dx = \ln|\sin x| + C \quad (x \neq \pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

15. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \mathrm{arctg}x + C \\ -\mathrm{arcctg}x + C \end{cases}$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$

17. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

Bu jadval, integralning ko'rib o'tilgan xossalari va kelgusida qaraladigan integrallash usullaridan foydalanib juda ko'p integrallarni hisoblash mumkin.

O'zgaruvchini almashtirish usuli (yoki o'rniga qo'yish usuli)

Ayrim hollarda integral ostidagi o'zgaruvchini yangi o'zgaruvchiga almashtirish berilgan integralni jadvaldagi integral ko'rinishiga olib keladi. Bu usul o'zgaruvchini almashtirish usuli yoki o'rniga qo'yish usuli (metodi) deb ataladi.

Bizga quyidagi $\int f(x)dx$, integralni topish kerak bo'lsin. Ammo to'g'ridan – to'g'ri $f(x)$ funksiyani boshlang'ich funksiyasini topish murakkab. Shuning uchun $x = \varphi(t)$ deb o'zgaruvchini almashtiramiz, bunda $\varphi(t)$ uzluksiz, monoton va differensiallanuvchi funksiyadir. Differensialning ta'rifiga asosan quyidagini topamiz:

$$dx = d\varphi(t) = \varphi'(t)dt \text{ ya'ni } dx = \varphi'(t)dt$$

U holda quyidagi formula o'rinli bo'ladi.

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \qquad (1)$$

(1) formula aniqmas integralda o'zgaruvchini almashtirish formulasi deyiladi.

Integral $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$ ni topgandan so'ng, oldingi o'zgaruvchiga qaytish kerak, ya'ni t ni o'rniga uni x bilan aniqlangan ifodasini qo'yish kerak.

Quyidagi misollarni ko'rib o'tamiz:

Misol 1. $\int \frac{x\,dx}{x^2+4}$ ni toping.

O'zgaruvchini almashtiramiz $x^2+4=t$ deb, bu tenglikni ikkala tomonini differensiallaymiz va quyidagiga ega bo'lamiz. $d(x^2+4)dt$ yoki $2xdx = dt$ ikkala tomonini 2 ga bo'lib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$xdx = \frac{1}{2}dt$. Ammo xdx ifoda berilgan integral ostidagi kasrning suratiga teng. Demak integral ostidagi x^2+4 o'rniga t ni hamda xdx ifodani o'rniga $\frac{dt}{2}$ ni qo'yib quyidagini hosil qilamiz:

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t}$$

$\int \frac{dt}{t}$ integral jadvaldagi integral, agar quyidagi $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$ formulani esga olsak, bunda x o'zgaruvchini o'rniga t o'zgaruvchi kelayapti. Demak, $\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c$.

Shunday qilib, $\int \frac{x\,dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + c = \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + c$.

Bunda t - o'rniga uning x bilan aniqlangan ifodasi qo'yiladi, ya'ni $t = x^2+4$ va absolyut miqdorning ishorasi tushirib qoldirildi, chunki x^2+4 ifoda x-ning har qanday qiymatida musbat.

Misol 2. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)^2}$ ni toping.

$x+1=t$ deb o'zgaruvchini almashtiramiz, u holda $x = t-1$ bo'ladi. bundan $dx = dt$. So'ngra bu topilganlarni olib borib berilgan integralga qo'yamiz. Quyidagi ko'rinishda yozib olsak qulayroq bo'ladi:

$$\int \frac{x\,dx}{(x+1)^2} = \left| \begin{matrix} x+1=t \\ x=t-1 \\ dx=dt \end{matrix} \right| = \int \frac{(t-1)dt}{t^2} = \int \frac{tdt}{t^2} - \int \frac{dt}{t^2} = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t^2} = \ln|t| - \left(-\frac{1}{t}\right) + c =$$

$\ln|x+1| + c$

Bunda $\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c$ (jadvaldagi 4 formulaga asosan)

$\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + c$ (jadvaldagi 3 formulaga asosan)

Misol 3. Integral $\int \sqrt{e^x+1}e^x dx$ ni toping.

$e^x+1=t^2$ deb o'zgaruvchini almashtiramiz, so'ngra differensiallab, $\left(e^x+1\right)'dx=2tdt$ ni topamiz. Yoki $e^x dx=2tdt$ almashtirishdan quyidagini olish mumkin.

$$\sqrt{e^x+1}=\sqrt{t^3}=t$$

Shunday qilib,

$$\int\sqrt{e^x+1}e^x dx=\left|\begin{array}{l} e^x+1=t^2 \\ e^x dx=\left(t^2\right)'dt= \\ =2tdt.\ \sqrt{e^x+1}=t \end{array}\right|=\int t2tdt=2\int t^2dt=\frac{2}{3}t^3+c=$$

$$=\frac{2}{3}\left(\sqrt{e^x+1}\right)^3+c$$

Bunda $\int t^2dt=\frac{t^3}{3}+c$ jadvaldagi 1 formulaga asosan, bunda $\alpha=2$.

Misol 4. $\int x^2\cos\left(x^3+2\right)dx$ ni toping.

$x^3+2=t$ deb, o'zgaruvchini almashtiramiz. Unda

$$\left(x^3+2\right)'=dx=t'dt$$

Bundan $3x^2dx=dt$ yoki $x^2dx=\frac{dt}{3}$

Demak,

$$\int x^2\cos\left(x^3+2\right)dx=\left|\begin{array}{l} x^3+2=t \\ 3x^2dx=dt \\ x^2dx=\frac{1}{3}dt \end{array}\right|=\int\cos t\frac{1}{3}dt=\frac{1}{3}\int\cos tdt=\frac{1}{3}\sin t+c=$$

$$=\frac{1}{3}\sin\left(x^3+2\right)+c$$

Misol 5. $\int\frac{e^x dx}{\sqrt{3-e^{2x}}}$ ni toping.

Ma'lumki, $e^{2x}=\left(e^x\right)^2$ va $e^x=t$ deb o'zgaruvchini almashtiramiz. Differensiallab quyidagini topamiz: $e^x dx=dt$.

Shunday qilib,

$$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{3-e^{2x}}} = \int \frac{e^x dx}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(e^x\right)^2}} = \left| \begin{matrix} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 - t^2}} = \arcsin\frac{t}{\sqrt{3}} + c =$$

$$= \arcsin\frac{e^x}{\sqrt{3}} + c$$

Bunda $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 - t^2}} = \arcsin\frac{t}{\sqrt{3}} + c$. Bu jadvaldagi 12 formulaga asoslanib topildi. Bunda $a = \sqrt{3}$ formuladagi x o‘rnida t kelayapti.

Mustaqil ishlash uchun mashqlar:

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $\int \frac{2xdx}{x^2+3}$ J: $\left[\ln\left(x^2+3\right)+c\right]$

2. $\int \left(e^x+1\right)^2 e^x dx$ J: $\left[\frac{\left(e^x+1\right)^3}{3}+c\right]$

3. $\int \frac{x^2dx}{\left(x^3+5\right)^2}$ J: $\left[-\frac{1}{3\left(x^3+5\right)}+c\right]$

4. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$ J: $\left(\sqrt{x^2+1}+c\right)$

5. $\int \frac{xdx}{x+2}$ J: $\left(x-2\ln(x+2)+c\right)$

6. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+4}}$ J: $\left(\frac{2}{3}\sqrt{x+4}(x+8)+c\right)$

7. $\int \frac{\cos xdx}{\sin x}$ J: $\left(-\ln|\sin|+c\right)$

8. $\int \frac{\sin xdx}{\cos^2 x}$ J: $\left(-\frac{1}{\cos x}+c\right)$

9. $\int \frac{\cos xdx}{2+\sin x}$ J: $\left(\ln|2+\sin x|+c\right)$

10. $\int tgxdx$ J: $\left(-\ln|\cos x|+c\right)$

11. $\int \frac{xdx}{(x-3)^2}$ J: $\ln|x-3| - \frac{3}{x-3} + c$

12. $\int \frac{1+\ln x}{x} dx$ J: $\left(\frac{(1+\ln)^2}{2} + c \right)$

13. $\int \frac{dx}{x \ln x}$ J: $(\ln|\ln x| + c)$

14. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$ J: $\left(\frac{2}{3}(1+\ln x)\sqrt{1+\ln x} + c \right)$

15. $\int \frac{dx}{(2-\ln x)^2 x}$ J: $\left(-\frac{1}{2+\ln x} + c \right)$

16. $\int \frac{\sqrt[3]{arctgx}}{1+x^2} dx$ J: $\left(\frac{3}{4} arctgx \right)^{\frac{4}{3}} + c$

17. $\int \frac{(2x+1)}{x^2+x+1} dx$ J: $(\ln|x^2+x-1| + c)$

18. $\int \frac{xdx}{x^4+1}$ J: $\left(\frac{1}{2} arctgx^2 + c \right)$

19. $\int e^{tgx} \frac{dx}{\cos^2 x}$ J: $(e^{tgx} + c)$

20. $\int \frac{\sin 2x dx}{1+\sin^2 x}$ J: $(\ln(1+\sin^2 x) + c)$

Bo‘laklab integrallash usuli

Bo‘laklab integrallash formulasi deb, quyidagi tenglikka aytiladi:

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (1)$$

Bu formulani qo‘llashdan maqsad, o‘ng tomonda turgan integralni chap tomondagi berilgan integraldan sodda qo‘rinishga keltirishdir. Bu usul quyidagi asosiy hollarda qo‘llaniladi.

1. Agar (1) formula chap tomonida turgan integralda integral ostidagi $f(x)$ ko'phad bilan quyidagi funksiyalarni birini ko'paytmasidan iborat bo'lsa:

$$e^{ax},\ \sin ax,\ \cos ax,\ \ln x,\ \arcsin x,\ arctgx$$

$P(x)$ ko'phad x^n ko'rinishdagi darajali funksiyadan iborat bo'lsa,

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

Agar integral ostidagi funksiya quyidagi ko'rinishdagi funksiyalardan biri bo'lsa, $\sin x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctgx$, $arcctgx$ yoki $e^x \cos x$ yoki $e^x \sin x$.

Bir necha misollar ko'rib o'tamiz:

Misol 1. $\int x \sin x dx$ ni toping.

$x = u$, $\sin x dx = dv$ deb olamiz.

Bunda birinchi tenglikni differensiallab, ikkinchi tenglikni integrallab, o'zgarmas son c ni qo'shmasdan quyidagini topamiz:

$dx = du$, $\int \sin x dx = \int dv$ yoki $-\cos x = v$

Shunday qilib,

$$\int x \sin x dx = \begin{vmatrix} x = u & \sin x dx = dv \\ dx = du & -\cos x = v \end{vmatrix} = uv - \int v du = x(-\cos x) -$$

$$\int (-\cos x) dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + c$$

Misol 2. $\int x e^{-5x} dx$ ni toping.

$x = u$, $e^{-5x} dx = dv$ deb olamiz. Bunda

$$\int x e^{-5x} dx = \begin{vmatrix} x = u, \ e^{-5x} dx = dv, \\ dx = du, \ \int e^{-5x} dx = \int dv, \ -\frac{1}{5} e^{-5x} = v \end{vmatrix} = uv - \int v du =$$

$$x\left(-\frac{1}{5} e^{-5x}\right) - \int \left(-\frac{1}{5} e^{-5x}\right) dx = -\frac{x}{5} e^{-5x} + \frac{1}{5} \int e^{-5x} dx = -\frac{x}{5} e^{-5x} + \frac{1}{5} \int e^{-5x} \frac{d(-5x)}{-5} =$$

$$= -\frac{x}{5} e^{-5x} - \frac{1}{25} \int e^{-5x} d(-5x) = -\frac{x}{5} e^{-5x} - \frac{1}{25} e^{-5x} + c$$

Misol 3. $\int x^3 \ln x dx$ ni toping.

$\ln x = u,\ x^3dx = dv$ deb olamiz. Birinchi tenglikni differensiallab, ikkinchisini integrallab quyidagini hosil qilamiz:

$$d\ln x = du$$

$$(\ln x)' dx = \frac{dx}{x} = du$$

$$x^3dx = dv$$

$$\int x^3dx = \int dv$$

$$\frac{x^4}{4} = v$$

Shunday qilib,

$$\int x^3 \ln x dx = \left| \begin{matrix} \ln x = u, & x^3dx = dv \\ \frac{dx}{x} = du, & \frac{x^4}{4} = v \end{matrix} \right| = uv - \int v du = \frac{x^4}{4}\ln x - \int \frac{x^4}{4}\cdot\frac{dx}{x} =$$

$$\frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int x^3dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4} + c = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{16}x^4 + c$$

Mustaqil ishlash uchun mashqlar:

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $\int x\cos x dx$ J: $(x\sin x + \cos x + c)$
2. $\int xe^x dx$ J: $(e^x(x-1) + c)$
3. $\int x\ln x dx$ J: $\left(\frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + c\right)$
4. $\int xe^{3x} dx$ J: $\left(\frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + c\right)$
5. $\int arctgx dx$ J: $\left(xarctgx - \frac{1}{2}\ln(1+x)^2 + c\right)$
6. $\int x\cdot\sin 4x dx$ J: $\left(\frac{1}{16}\sin 4x - \frac{x}{4}\cdot\cos 4x + c\right)$

7. $\int \arcsin x dx$ J: $\left(x \arcsin x+\sqrt{1-x^2}+c\right)$

8. $\int x arctgx dx$ J: $\left(\frac{x^2+1}{2} arctgx-\frac{x}{2}+c\right)$

9. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$ J: $\left(-xctgx+\ln|\sin x|+c\right)$

10. $\int x^6 \ln x dx$ J: $\left[\frac{x^7}{7}\left(\ln|x|-\frac{1}{7}\right)+c\right]$

11. $\int \frac{x\cos x dx}{\sin^3 x}$ J: $\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sin^2 x}+ctgx+c\right)\right]$

12. $\int x^2 \cos x dx$ J: $\left(x^2 \sin x+2x\cos x-\sin x+c\right)$

13. $\int x^2 e^{-x} dx$ J: $\left[-e^{-x}\left(x^2+2x+2\right)+c\right]$

14. $\int x^2 \sin x dx$ J:
$\left(-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+c\right)$

15. $\int x \ln^2 x dx$ J:
$\left(\frac{1}{2}x^2\ln^2|x|-\frac{1}{2}x^2\ln|x|+\frac{1}{4}x^2+c\right)$

16. $\int e^x \cos x dx$ J: $\frac{e^x}{2}(\cos x+\sin x)+c$

17. $\int e^x \sin x dx$ J: $\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+c$

18. $\int \sqrt{1+x^2}dx$ J:
$\left[\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2}+\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}+c\right)\right)\right]$

19. $\int \cos(\ln x)dx$ J: $\left\{\frac{x}{2}\left[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)\right]+c\right\}$

20. $\int arctg\sqrt{x}dx$ J: $xarctg\sqrt{x}2\sqrt{x}+2arctg\sqrt{x}+c$

Eng sodda kasrlarni integrallash

Eng sodda kasrlar deb, quyidagi ko'rinishdagi kasrlarga aytiladi:

$$\frac{1}{x+a} \qquad (1) \qquad\qquad \frac{1}{(x+a)^n} \qquad (2)$$

$$\frac{1}{x^2+px+q} \qquad (3) \qquad\qquad \frac{Mx+N}{x^2+px+q} \qquad (4)$$

Bu yerda x^2+px+q kvadrat uchhad haqiqiy ildizlarga ega emas.

(1) va (2) ko'rinishdagi kasrlarni o'zgaruvchini almashtirish usulidan foydalanib integrallash mumkin. Bunda $x+a=t$ deb almashtiriladi.

Masalan: $\int \frac{dx}{(x+2)^2} = \left| \begin{matrix} x+2=t \\ dx=dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + c = -\frac{1}{x+2} + c$

(3) va (4) ko'rinishdagi sodda kasrlarni integrallash uchun eng avval x^2+px+q kvadrat uchhaddan to'la kvadrat ajratiladi, ya'ni bu kvadrat uchhadni $(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2$ ko'rinishga keltiriladi. So'ngra o'zgaruvchini almashtiriladi. Buni quyidagi misollarda ko'rish mumkin:

Misol 1. $\int \frac{dx}{x^2+3x+7}$ ni toping.

x^2+3x+7 kvadrat uchhaddan to'la kvadrat ajratamiz.

Ya'ni

$$x^2+3x+7 = x^2+2\frac{3}{2}x+7 = x^2+2\frac{3}{2}x+7 = x^2+2\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+7$$

$$\left[\left(x^2+2\frac{2}{3}x+\frac{9}{4}\right)-\frac{9}{4}+7 = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\frac{28}{4} = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{19}{4}\right.$$

Shunday qilib,

$$\int\frac{dx}{x^2+3x+7}=\int\frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{19}{4}}=\left|\begin{matrix}x+\frac{3}{2}=t\\ dx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{dt}{t^2+\frac{19}{4}}=\int\frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{\frac{19}{4}}\right)^2}=$$

$$\frac{1}{\frac{\sqrt{19}}{2}}arctg\frac{t}{\frac{\sqrt{19}}{2}}+c=\frac{2}{\sqrt{19}}arctg\frac{2t}{\sqrt{19}}+c=\frac{2}{\sqrt{19}}arctg\frac{2\left(x+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{19}}+c=$$

$$\frac{2}{\sqrt{19}}arctg\frac{2x+3}{\sqrt{19}}+c$$

Misol 2. $\int\frac{2x+1}{3x^2-x+3}dx$ ni toping.

$3x^2-x+3=3\left(x^2-\frac{1}{3}x+1\right)$ demak, $\int\frac{(2x+1)dx}{3x^2-x+3}=\frac{1}{3}\int\frac{2x+1}{x^2-\frac{1}{3}x+1}dx$

$x^2-\frac{1}{3}x+1$ kvadrat uchhaddan to'la kvadrat ajratamiz.

$(x\pm a)^2=x^2\pm 2ax+a^2$ yoki $(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$

Shunday qilib,

$$x^2-\frac{1}{3}x+1=x^2-2\cdot\frac{1}{6}x+1=x^2-2\cdot\frac{1}{6}x+\left(\frac{1}{6}\right)^2-\left(\frac{1}{6}\right)^2+1=\left(x^2-2\cdot\frac{1}{6}x+\frac{1}{36}\right)-\frac{1}{36}+1=$$

$$=\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{35}{36}$$

Demak,

$$\int\frac{(2x+1)dx}{x^2-x+3}=\frac{1}{3}\int\frac{(2x+1)dx}{x^2-\frac{1}{3}x+1}=\int\frac{(2x+1)dx}{\left(x-\frac{1}{6}\right)+\frac{35}{36}}=\left|\begin{matrix}x-\frac{1}{16}=t\\ x=t+\frac{1}{6}\\ dx=dt\end{matrix}\right|=\frac{1}{3}\int\frac{\left[2\left(t+\frac{1}{6}\right)+1\right]dx}{t^2+\frac{35}{36}}=$$

$$\frac{1}{3}\int\frac{2t+\frac{1}{3}+1}{t^2+\frac{35}{36}}dt=\frac{1}{3}\int\frac{2t+\frac{4}{3}}{t^2+\frac{35}{36}}dt=\frac{1}{3}\int\frac{2tdt}{t^2+\frac{35}{36}}+\frac{1}{3}\int\frac{\frac{4}{3}dt}{t^2+\frac{35}{36}}$$

Lekin bizga ma'lumki, $dt^2 = 2tdt$. Shuning uchun $2tdt$ ifodani dt^2 bilan almashtiramiz. Birinchi integraldan va ikkinchi integraldan o'zgarmas sonlarni integraldan tashqariga chiqarib, quyidagiga ega bo'lamiz.

$$\int \frac{2x+1}{3x^2-x+3}dx = \frac{1}{3}\int \frac{(2x+1)dx}{x^2-\frac{1}{3}x+1} = \frac{1}{3}\int \frac{(2x+1)dx}{\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{35}{36}} = \left| \begin{array}{l} x-\frac{1}{16}=t \\ x=t+\frac{1}{6} \\ dx=dt \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int \frac{2tdx}{t^2+\frac{35}{36}} =$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{\frac{4}{3}dt}{t^2+\frac{35}{36}} = \frac{1}{3}\int \frac{dt^2}{t^2+\frac{35}{36}} = \frac{4}{9}\int \frac{dt}{t^2+\frac{35}{36}} = \frac{1}{3}\int \frac{d\left(t^2+\frac{35}{36}\right)}{t^2+\frac{35}{36}} + \frac{4}{9}\int \frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{\frac{35}{36}}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left(t^2+\frac{35}{36}\right) + \frac{4}{9}\frac{1}{\frac{\sqrt{35}}{36}}arctg\frac{t}{\frac{\sqrt{35}}{36}} + c$$

t - o'rniga uning qiymati $\left|x-\frac{1}{6}\right|$ ni qo'yib ixchamlaymiz.

Mustaqil ishlash uchun mashqlar:

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $\int \frac{dx}{x^2-6x+11}$ J: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}arctgx\frac{x-3}{\sqrt{2}}+c\right)$

2. $\int \frac{dx}{x^2+5x+4}$ J: $\left(\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+1}{x+4}\right|+c\right)$

3. $\int \frac{dx}{2x^2+x-1}$ J: $\left(\frac{2}{3}\ln\left|\frac{2x-1}{2(x+1)}\right|+c\right)$

4. $\int \frac{xdx}{x^2+7x+13}$ J: $\left(\frac{1}{2}\ln\left|x^2+7x+13\right|-\frac{7}{\sqrt{13}}arctg\frac{2x+7}{\sqrt{13}}+c\right)$

5. $\int \frac{(x+5)dx}{2x^2+2x+3}$ J: $\left(\frac{1}{4}\ln\left|2x^2+2x+3\right|+\frac{9}{2\sqrt{5}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{5}}+c\right)$

6. $\int \frac{dx}{4x^2+6x+5}$ J: $\left(\frac{1}{\sqrt{11}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{11}}+c\right)$

Ratsional kasrlarni integrallash

Ratsional kasr deb ikki ko'phadning nisbatiga aytiladi, ya'ni quyidagi ko'rinishdagi kasrga aytiladi.

$$\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m}=\frac{P(x)}{Q(x)} \qquad (1)$$

Agar kasrni suratini darajasi maxrajining darajasidan katta yoki teng bo'lsa, ya'ni $n \geq m$ bo'lsa, u holda (1) kasr noto'g'ri kasr deyiladi. Agar kasrning suratining darajasi maxrajining darajasidan kichik bo'lsa, ya'ni $n < m$ u holda bunday kasr to'g'ri kasr deyiladi.

Masalan: $\frac{x^2+1}{x^3+3x+5}$ to'g'ri kasr $(n<m)$;

$\frac{x^4-x^3+1}{x^2+x+2}$ kasr esa noto'g'ri kasr $(n>m)$.

Har qanday noto'g'ri kasrni butun qismi bilan to'g'ri kasrning yig'indisi ko'rinishida tasvirlash mumkin. Quyidagi kasrni

$\frac{x^4-x^3+1}{x^2+x-2}=(x^2-2x+4)+\frac{-8x+9}{x^2+x-2}$ ko'rinishda yozish mumkin, ya'ni ko'phadni ko'phadga bo'lish qoidasi bilan bo'lib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - x^3 + 1 & x^2 + x - 2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4 + x^3 - 2x^2} & x^2 - 2x + 4 \\
-2x^3 + 2x + 1 & \\
\underline{-2x^3 - 2x^2 + 4x} & \\
4x^2 - 4x + 1 & \\
\underline{4x^2 + 4x - 8} & \\
-8x + 9 &
\end{array}
$$

Bunda $x_2 - 2x + 4$, $\frac{x^4 - x^3 + 1}{x^2 + 2x - 2}$ noto'g'ri kasrning butun qismi $\frac{-8x+9}{x^2+x-2}$ esa to'g'ri kasr.

Shuning uchun noto'g'ri kasrlarni integrallash uchun eng avval to'g'ri kasrni integrallashni bilish zarur.

Masalan:

$$
\int \frac{x^4 - x^3 + 1}{x^2 + x + 2} dx = \int \left(x^2 - 2x + 4\right) dx + \int \frac{-8x+9}{x^2 + x + 2} dx = \int x^2 dx - 2\int x dx + 4\int dx +
$$
$$
+ \int \frac{-8x+9}{x^2 + x - 2} dx
$$

$x^2 + x - 2$ - kvadrat uchhad haqiqiy ildizga ega, ya'ni $x = -2$, $x = 1$ demak, buni $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$ ko'rinishda yozish mumkin.

Har qanday ko'rinishdagi $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ to'g'ri kasrni maxraji $(x+a)$ ko'rinishdagi bir necha ko'paytuvchilardan iborat bo'lsa, bunday kasrni yig'indisi ko'rinishida yozish mumkin.

Masalan: $\frac{-8x+9}{x^2+x-1} = \frac{-8x+9}{(x-1)(x+2)}$

to'g'ri kasrni ikkita elementar kasrning yig'indisi shaklida yozish mumkin.

Masalan: $\frac{-8x+9}{x^2+x-2}=\frac{\frac{1}{3}}{x-1}-\frac{\frac{25}{3}}{x+2}$

Agar o'ng tomondagi kasrni umumiy maxrajiga keltirsak, ya'ni $\frac{-8x+9}{(x-1)(x+2)}$ yoki $\frac{-8x+9}{x^2+x-2}$ kasr kelib chiqadi. Albatta, berilgan to'g'ri kasrni yuqoridagi ko'rinishdagi elementar kasrlarni yig'indisi shaklida yozish oson emas. Buning uchun avval $\frac{-8x+9}{x^2+x-2}$ kasrni quyidagi kasrning yig'indisi ko'rinishida ya'ni $\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}$ yozib olamiz. Bunda A, B hozircha noma'lum miqdorlardir.

A va B larni noma'lum koeffitsientlarni topish qoidasi bo'yicha topib olinadi.

Demak: $\frac{-8x+9}{x^2+x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}$

Buning o'ng tomonini umumiy maxrajga keltiramiz,

$$\frac{-8x+9}{x^2+x-2}=\frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x+2)(x-1)}$$

Agar teng kasrlarni maxrajlari bir-biriga teng bo'lsa, u holda suratlari ham teng bo'ladi, ya'ni

$$-8x+9=A(x+2)+B(x-1) \qquad (2)$$

Bunda $x=1$ desak, unda (2) tenglikdan quyidagini hosil qilamiz:

$-8+9=A(1+2)+B$ yoki $1=3A$ bundan $A=\frac{1}{3}$

$x=-2$ desak u holda (2) tenglikdan quyidagini hosil qilamiz:

$$-8(-2)+9=A(-2+2)+B(-2-1)$$

yoki $25=-3B$ $\qquad B=-\frac{25}{3}$

Umuman, x uchun har qanday son qiymat olsak ham bo'ladi. Ammo x ni shunday tanlab olish kerakki, (2) ayniyatdagi qo'shiluvchilardan bittasi nolga teng bo'lsin. Shuning uchun $x=-2$, $x=1$ deb, $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{25}{3}$ larga ega bo'ldik. Demak,

$$\frac{-8x+9}{x^2+x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}=\frac{\frac{1}{3}}{x-1}+\frac{-\frac{25}{3}}{x+2}$$

Shunday qilib,

$$\int\frac{-8x+9}{x^2+x-2}dx=\int\left(\frac{\frac{1}{3}}{x-1}+\frac{-\frac{25}{3}}{x+2}\right)dx=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{25}{3}\int\frac{dx}{x+1}=\frac{1}{3}\int\frac{d(x-1)}{x-1}-\frac{25}{3}\int\frac{d(x+2)}{x+2}=$$

$$\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{25}{3}\ln|x+2|+c$$

Berilgan integral esa quyidagiga teng bo'ladi:

$$\int\frac{x^4-x^3+1}{x^2+x+2}dx=\int(x^2-2x+4)dx+\int\frac{-8x+9}{x^2+x+2}dx=\int x^2dx-2\int xdx+4\int dx+$$

$$+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}-25\int\frac{dx}{x+2}=\frac{x^3}{3}-2\frac{x^2}{2}+4x+\frac{1}{3}\ln(x-1)-\frac{25}{3}\ln(x+2)+c=$$

$$\frac{1}{3}x^3+x^2+4x+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{25}{3}\ln|x+2|+c$$

Umumiy holda agar $\frac{P_0(x)}{Q_0(x)}$ to'g'ri kasrning maxraji $(x+a)^{m_1}\cdot(x^2+px+q)^{n_1}$ ko'rinishidagi ko'paytuvchilardan iborat bo'lsa, hamda x^2+px+q kvadrat uchhad haqiqiy ildizga ega bo'lmasa, u holda quyidagi teorema o'rinli bo'ladi.

Teorema. $\frac{P_0(x)}{Q_0(x)}$ to'g'ri kasrni maxrajini quyidagi $(x+a)^{m_1}\cdot(x^2+px+q)^{n_1}$ ko'rinishdagi ko'paytuvchilar shaklida yozish mumkin bo'lsa, u holda bu kasrni quyidagi shaklda yozish mumkin:

$$\frac{P_0(x)}{Q_0(x)}=\frac{P_0(x)}{(x+a)^{m_1}(x^2+px+q)^{n_1}}=\frac{A_1}{x+a}+\frac{A_2}{(x+a)^2}+\ldots+\frac{Am_1}{(x+a)^{m_1}}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+$$

$$\ldots+\frac{M_{n_1}x+N_m}{(x^2+px+q)^{n_1}}$$

Bunda $A_1,A_2,\ldots+Am,M_1,N_2,\ldots,M_{n_1},N_{n_1}$ noaniq (noma'lum koeffitsientlardir).

Misol. $\int \frac{dx}{x^4-1}$

Bizga ma'lumki $x^4-1=(x^2+1)(x^2-1)=(x^2+1)(x-1)(x+1)$

U holda $\frac{1}{x^4-1}=\frac{1}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}$ bu to'g'ri kasrni uchta elementlar kasrning yig'indisi shaklida yozib olamiz.

$$\frac{1}{x^4-1}=\frac{1}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}=\frac{M_x+N}{x^2+1}$$

O'ng tomonni umumiy maxrajga keltirib, so'ngra chap va o'ng tomonlarining suratlarini tenglab, quyidagini hosil qilamiz:

$$1=A(x-1)(x^2+1)+B(x+1)(x^2+1)+(x-1)(x+1)(M_x+N)$$

Bunda $x=1,\ x=-1,\ x=0,\ x=2$ deb quyidagilarni topamiz.

Agar $x=1$ bo'lsa $1=A\cdot 0+B(1+1)(1+1)+M\cdot 0$ ga ega bo'lamiz, bundan $1=B4,\ B=\frac{1}{4}$

Agar $x=-1$ desak, $1=A(-1-1)2+B\cdot 0+M\cdot 0$ yoki $1=-4A$ bundan $A=-\frac{1}{4}$

Agar $x=0$ desak, $1=A(-1)\cdot 1+B\cdot 1\cdot 1+N(-1)\cdot 1$ yoki $1=-A+B-N$. Ammo $A=-\frac{1}{4},\ B=\frac{1}{4}$ edi. Demak: $1=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-N$ bundan $N=-\frac{1}{2}$

Agar $x=2$ desak: $1=A|5|B35+(M2+N)$ yoki $1=5A+15B+6M+3N$

$$1=5\left(-\frac{1}{4}\right)+15\left(\frac{1}{4}\right)+6M+3\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$1=-\frac{5}{4}+\frac{15}{4}+6M-\frac{3}{2},\ 1=6M+1$$

bundan $M=0$. Shunday qilib,

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}=\frac{-\frac{1}{4}}{x+1}=\frac{\frac{1}{4}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{x^2+1}$$

Demak, $\int\frac{dx}{x^4-1}=\int\frac{dx}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}=\int\left[\frac{-\frac{1}{4}}{x+1}+\frac{\frac{1}{4}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{x^2+1}\right]dx=$

$$-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=-\frac{1}{4}\ln|x+1|+\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{2}arctgx+c=$$

$$\frac{1}{4}\left[\ln|x-1|-\ln|x+1|\right]-\frac{1}{2}arctgx+c=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}arctgx+c$$

Mashqlar:

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $\int\frac{x-4}{(x-2)(x-3)}dx$ J: $\left(\ln\frac{c(x-2)^2}{x-3}\right)$

2. $\int\frac{2x+7}{(x+2)(x-1)}dx$ J: $\left(+\ln\frac{(x-1)^3}{x+2}+c\right)$

3. $\int\frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}dx$ J: $(5x+2\ln|x|+3\ln|x-2|+4\ln|x+2|+c)$

4. $\int\frac{3x+2}{x(x+1)}dx$ J: $2\ln|x|+\ln|x+1|+c$

5. $\int\frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}dx$ J: $\left(\ln\left|\frac{x+1}{\sqrt{2x+1}}\right|+c\right)$

6. $\int\frac{dx}{x^4-x^3}$ J: $\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}+\ln|x|+\ln|x-1|+c$

7. $\int\frac{dx}{(x+3)(x-4)}$ J: $\ln\left|\frac{x+3}{x+4}\right|+c$

Trigonometrik ifodalarni integrallash

1. $\int c(\sin x)\cdot\cos xdx$ va $\int R(\cos x)\cdot\sin xdx$ ko'rinishdagi integrallar o'rniga qo'yish usuli bilan topiladi. Bunda $\sin x=t$ va $\cos x=t$ deb,

o'zgaruvchini almashtiriladi. Integral ostidagi $R(\sin x)$ funksiya $\sin x$ ni ratsional funksiyasi.

Masalan: $\int(\sin^3 x+\sin^2 x-3\sin x)\cdot\cos x dx$ integral $\int R(\sin x)\cdot\cos x dx$ ko'rinishidagi integraldir.

Bunda $R(\sin x)=\sin^3 x+\sin^2 x-3\sin x$ deb o'zgaruvchini almashtiramiz. $\sin x=t$ deb olamiz, bundan $\cos x dx=dt$ bo'ladi. Shunday qilib,

$$\int(\sin^3 x+\sin^2 x-3\sin x)\cos x dx=\begin{vmatrix}\sin x=t\\ \cos x dx=dt\end{vmatrix}=\int(t^3+t^2-3t)dt=\int t^3dt+$$

$$\int t^2dt-3\int tdt=\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}-\frac{3t^2}{2}+c=\frac{1}{4}\sin^4 x+\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{3}{2}\sin x+c$$

2. $\int\sin^{2n+1}xdx \qquad \int\cos^{2n+1}xdx$

ko'rinishdagi integrallar quyidagicha topiladi (bunda $2n+1$ natural son). Avval integral ostidagi funksiya quyidagi ko'rinishda yozib olinadi. $\sin^{2n+1}x=\sin^{2n}x\cdot\sin x=(\sin^2 x)^n\cdot\sin x$.

Shuningdek, $\cos^{2n+1}x=\cos^{2n}x\cdot\cos x=(\cos^2 x)^n\cdot\cos x$.

So'ngra $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ formuladan foydalanilsa, berilgan integral holga keladi.

Masalan: $\int\sin^5 xdx=\int\sin^4 x\cdot\sin xdx=\int(\sin^2 x)^2\sin xdx$

Ammo $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ ga teng.

Demak,

$$\int\sin^5 xdx=\int(\sin^2 x)^2\sin xdx=\int(1-\cos^2 x)\sin xdx=\begin{vmatrix}\cos x=t\\ -\sin xdx=dt\\ \sin xdx=-dt\end{vmatrix}=$$

$$-\int(1-t^2)^2dt=-\int(1-2t^2+t^4)dt=-\int dt+2\int t^2dt-\int t^4dt=$$

$$-t+\frac{2}{3}t^3-\frac{1}{5}t^5+c=-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+c$$

3. $\int\sin^{2n}xdx, \int\cos^{2n}xdx$ ko'rinishidagi integrallar quyidagi trigonometrik formulalar yordami bilan topiladi:

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2};\ \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

Masalan,

$$\int\cos^4 xdx=\int\left(\cos^2 x\right)^2 dx=\int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx=\int\frac{1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}dx=$$

$$\frac{1}{4}\int dx+\frac{1}{2}\int\cos 2xdx+\frac{1}{4}\int\cos^2 2xdx$$

Lekin $\cos^2 2x$ ni (2) formulaga asosan quyidagicha yozish mumkin: $\frac{1+\cos 4x}{2}$ ya'ni $\cos^2 2x=\frac{1+\cos 4x}{2}$.

Demak:

$$\int\cos^2 2xdx=\int\frac{1+\cos 4x}{2}dx=\int\frac{1}{2}dx+\int\frac{1}{2}\cos 4xdx=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\cos 4xdx=$$

$$=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\int\cos 4xd4x=\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 4x+c$$

Shunday qilib,

$$\int\cos^4 xdx=\int\left(\cos^2 x\right)^2 dx=\int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx=\int\frac{1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}dx=\frac{1}{4}\int dx+\frac{1}{2}\int\cos 2xdx+$$

$$+\frac{1}{4}\int\cos^2 2xdx=\frac{1}{4}\int dx+\frac{1}{2}\int\cos 2x\frac{d2x}{2}+\frac{1}{4}\int\frac{1+\cos 4x}{2}dx=\frac{1}{4}\int dx+\frac{1}{4}\int\cos 2xd2x+\frac{1}{8}\int dx+$$

$$+\frac{1}{8}\int\cos 4xdx=\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}\sin 2x+\frac{x}{8}+\frac{1}{32}\sin 4x+c$$

4. $tg^m xdx$ ko'rinishdagi integral quyidagicha topiladi. Agar $m\neq 0$ va m toq son bo'lsa, u holda $tgx=t$ deb o'zgaruvchini almashtiriladi, unda $x=arctgt$ bo'ladi, bundan $dx=(arctdx)'dt=\frac{dt}{1+t^2}$.

Agar $m<0$ va m toq son bo'lsa, u holda $\sin x=t$ deb o'zgaruvchi almashtiriladi.

Quyidagi misollarni ko'rib o'tamiz: $m<0,\ m=2n+1\ (n=1,2,3,\ldots)$.

a)

$$\int\frac{dx}{tg^3x}=\int\frac{dx}{\dfrac{\sin^3x}{\cos^3x}}=\int\frac{\cos^3x}{\sin^3x}dx=\int\frac{\cos^2x\cdot\cos xdx}{\sin^3x}=\int\frac{(1-\sin^2x)\cos xdx}{\sin^3x}=\begin{vmatrix}\sin x=t\\ \cos xdx=dt\end{vmatrix}=$$

$$=\int\frac{(1-t^2)dt}{t^3}=\int\frac{dt}{t^3}-\int\frac{dt}{t}=-\frac{1}{2t^2}+c=-\frac{1}{2\sin^2x}-\ln\sin x+c$$

b) $m>0$

$$\int tg^3xdx=\int\frac{\sin^3x}{\cos^3x}dx=\int\frac{\sin^2x\sin xdx}{\cos^3x}=\int\frac{(1-\cos^2x)\cdot\sin xdx}{\cos^3x}=\begin{vmatrix}\cos x=t\\ -\sin xdx=dt\\ \sin xdx=-dt\end{vmatrix}=$$

$$=-\int\frac{(1-t^2)dt}{t^3}=-\int\frac{dt}{t^3}-\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2t^2}-\int\frac{dt}{t}+c=-\frac{1}{2\cos^2x}-\ln|\cos x|+c$$

v) $m>0$

$$\int tg^3xdx=\begin{vmatrix}tgx=t\\ x=arctgt\\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\end{vmatrix}=\int\frac{t^3dt}{1+t^2}=\int\frac{t^2tdt}{1+t^2}=\int\frac{(t^2+1-1)tdt}{1+t^2}=\int\frac{(t^2+1)tdt}{1+t^2}-\int\frac{tdt}{1+t^2}=$$

$$\int tdt-\frac{1}{2}\int\frac{dt^2}{t^2+1}=\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}\ln(t^2+1)+c=\frac{tg^2x}{2}-\frac{1}{2}\ln(tg^2x+1)+c=\frac{1-\cos^2x}{2\cos^2x}+\ln\frac{1}{(\cos^2x)}+c$$

$$\left(\cos^2x=\frac{1}{1+tg^2\alpha};\ \frac{1}{\cos^2x}=1+tg^2x\right)$$

$m\neq0$ va m toq son bo'lsin: $(m=2n,\ n=1,2,3,\ldots)$

$$\int tg^4xdx=\begin{vmatrix}tgx=t\\ x=arctgt\\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\end{vmatrix}=\int\frac{t^4dt}{1+t^2}=\int\frac{t^2\cdot t^2dt}{1+t^2}=\int\frac{(t^2+1-1)t^2dt}{1+t^2}=\int\frac{(t^2+1)t^2dt}{1+t^2}-\int\frac{t^2dt}{1+t^2}=$$

$$\int t^2dt-\int\frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt=\int t^2dt-\int\frac{t^2+1}{1+t^2}dt+\int\frac{dt}{1+t^2}=\int t^2dt-\int dt+\int\frac{dt}{1+t^2}=$$

$$\frac{t^3}{3}-t+arctgt+c=\frac{(tgx)^3}{3}-tgx+x+c$$

Universal almashtirish: $tg\frac{x}{2}=t$

Agar trigonometrik ifodalarni integrali berilsa va unga 1, 2, 3 hollarni qo‘llab bo‘lmasa, u holda universal almashtirishdan foydalaniladi.

Universal almashtirish quyidagi ko‘rinishdagi integrallarni topishda qo‘llaniladi.

$$\int\frac{dx}{\sin x-\cos x},\quad \int\frac{dx}{4-\cos x},\quad \int\frac{dx}{1+\cos x-\sin x}\quad \text{va xokazo.}$$

Universal almashtirish integral ostidagi trigonometrik funksiyani darajasi yuqori bo‘lganda qo‘llansa, u holda qiyin hollarga olib kelishi mumkin.

Quyidagi misollarni ko‘rib o‘tamiz:

$$\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x}$$

$tg\frac{x}{2}=t$ deb universal almashtirishdan foydalanamiz. bundan $\frac{x}{2}=arctgx,\quad x=2arctgx,\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ hamda $\sin x$ va $\cos x$ ni $tg\frac{x}{2}$ orqali ifoda qilib olamiz.

Trigonometriyadan bizga ma’lumki,

$$\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}},\quad \cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}},$$

u holda $tg\frac{x}{2}=t$ edi.

Demak, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x}=\left|\begin{matrix} tg\frac{x}{2}=t, & \sin x=\frac{2t}{1+t^2} \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}, & \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{matrix}\right|=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}}=2\int\frac{dt}{\left(1+t^2\right)\frac{4t-1+t^2}{1+t^2}}=$$

$$=2\int\frac{dt}{(t+2)^2-5}=\left|\begin{matrix} t+2=z \\ dt=dz\end{matrix}\right|=2\int\frac{dz}{z^2-5}=2\int\frac{dz}{z^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{z-\sqrt{5}}{z+\sqrt{5}}\right|+c=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{t+2-\sqrt{5}}{t+2+\sqrt{5}}\right|+c=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}+2-\sqrt{5}}{tg\frac{x}{2}+2+\sqrt{5}}\right|+c$$

Mustaqil ishlash uchun mashqlar:

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $\int\sin^2 2xdx$ J: $\left(\frac{1}{x}x-\frac{1}{8}\sin 4x+c\right)$
2. $\int(1+2\cos x)^2dx$ J: $(3x+4\sin x+\sin 2x+c)$
3. $\int\cos^4 xdx$ J: $\left(\frac{3x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}\right)+c$
4. $\int\sin^2 x\cdot\cos^2 xdx$ J: $\left(\frac{x}{8}-\frac{\sin 4x}{32}+c\right)$
5. $\int\sin^2 x\cdot\cos^4 xdx$ J: $\left(\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}+c\right)$
6. $\int\sin^3 xdx$ J: $\left(\frac{\cos^3 x}{3}-\cos x+c\right)$
7. $\int\frac{\cos^3 xdx}{\sin^2 x}$ J: $-\frac{1}{\sin x}-\sin x+c$
8. $\int\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx$ J: $-\frac{1}{\cos x}+\cos x+c$
9. $\int tg^5x\cdot dx$ J: $\left(\frac{tg^4x}{4}-\frac{tg^2x}{2}-\ln|\cos x|+c\right)$
10. $\int\cos^3 xdx$ J: $\left(\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+c\right)$

11. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx$ J: $\left(\frac{\cos^2 x}{2} - \ln|\cos x| + c\right)$

12. $\int tg^4 x dx$ J: $\left(\frac{tg^3 x}{3} - tgx + x + c\right)$

13. $\int (5\sin^2 x - 3\sin x)\cos x dx$ J: $\left(\frac{5\sin^3 x}{3} - \frac{3}{2}\sin^2 x + c\right)$

14. $\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx$ J: $\left[\frac{1}{15}\cos^1 x(3\cos^2 x - 5) + c\right]$

15. $\int \cos^5 x \sin x dx$ J: $\left(-\frac{\cos^6 x}{6} + c\right)$

16. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$ J: $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2} + 1 + \sqrt{2}}{tg\frac{x}{2} + 1 - \sqrt{2}}\right| + c$

17. $\int \frac{dx}{5 - 3\cos x}$ J: $\frac{1}{2} arctg\left(2tg\frac{x}{2}\right) + c$

18. $\int \frac{dx}{5 + 4\sin x}$ J: $\frac{2}{3} arctg\frac{5tg\frac{x}{2} + 4}{3} + c$

19. $\int \frac{dx}{5 - 4\sin x + 3\cos x}$ J: $\left(\frac{1}{2 - tg\frac{x}{2}} + c\right)$

20. $\int \frac{dx}{\cos x}$ J: $\left(2n\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}}{tg\frac{x}{2}}\right| + c\right)$

Sodda funksional ifodalarni integrallash

Quyidagi integral $(R(x\sqrt[n]{x}))dx$ berilgan bo'lsin. Bunda (n - natural son) $R(x\sqrt[n]{x})$ esa x va $\sqrt[n]{x}$ ning ratsional funksiyadir.

Masalan: $\frac{1+\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt[4]{x+1}}$ funksiya $R\left(x, \sqrt[4]{x+1}\right)$ ko‘rinishidagi funksiyadir. $\frac{x^2+\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$ esa $R\left(x, \sqrt[6]{x}\right)$ funksiyadir.

Agar $\int R\left(x\sqrt[n]{x}\right)dx$ ko‘rinishdagi integralda $x=t^n$ deb o‘zgaruvchini almashtiramiz. Bunda n ildizlarni hammasining darajasi uchun kichik umumiy bo‘linuvchi sondir. Masalan: $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[3]{x}}$ integralni topish uchun $x=t^6$ deb, o‘zgaruvchini almashtiramiz, ya’ni $6=$soni ildizlarni ko‘rsatkichi 2 va 3 uchun eng kichik umumiy bo‘linuvchi sondir.

Shunday qilib,

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[3]{x}} = \left| \begin{array}{l} x=t^6 \\ dx=6t^5dt \\ \sqrt{x}=\sqrt{t^6}=t^3 \end{array} \right| = \int \frac{t^3 6t^5 dt}{1+t^2} = 6\int \frac{t^8 dt}{t^2+1} = \left| \begin{array}{l|l} t^8 & t^2+1 \\ \cline{2-2} & t^6-t^4+t^2-1 \\ \underline{t^8+t^6} & \\ -t^6 & \\ \underline{-t^6-t^4} & \\ t^4 & \\ \underline{-t^4+t^2} & \\ -t^2 & \\ \underline{-t^2-1} & \\ 1 & \end{array} \right| =$$

$$=6\int\left(t^6-t^4+t^2-1+\frac{+1}{t^2+1}\right)dt = 6\int t^6dt-6\int t^4dt+6\int t^2dt-6\int dt+$$

$$6\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{6}{7}t^2-\frac{6}{5}t^5-\frac{6}{3}t^3-6t+6arctgt+c=\frac{6}{7}\left(\sqrt[6]{x}\right)^7-\frac{6}{5}\left(\sqrt[6]{x}\right)^5-$$

$$2\left(\sqrt[6]{x}\right)^3-6\sqrt[6]{x}+arctg\sqrt[6]{x}+c$$

Quyidagi $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ ko'rinishdagi integralni topish uchun maxrajidan to'la kvadratlar ajratiladi, so'ngra jadvaldagi $\int \frac{dx}{\sqrt{a-x^2}}$ (f.12 $a<0$ bo'lganda) integral ko'rinishiga olib kelinadi.

Quyidagi $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$ ko'rinishidagi integral uchun $\frac{1}{x}=t$ almashtirish bajariladi va $x=\frac{1}{t}$ bundan $dx=-\frac{dt}{t^2}$.

Masalan:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2-bx+1}}=\left|\begin{array}{l} \frac{1}{x}=t \\ x=\frac{1}{t} \\ dx=-\frac{dt}{t^2} \end{array}\right|=\int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{10}{t^2}-\frac{6}{t}+1}}=\int \frac{-dt}{10-6t+t^2}=$$

$$=-\int \frac{dt}{\sqrt{10-6t+t^2}}=-\int \frac{dt}{\sqrt{(t-3)^2+1}}=-\int \frac{d(t-3)}{\sqrt{(t-3)^2+1}}$$

$$\left\{\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right\}=-\ln\left|(t+3)+\sqrt{(t-3)^2+1}\right|+c=$$

$$=-\ln\left|(t+3)+\sqrt{t^2-6t+10}\right|+c=-\ln\left|\frac{1-3x+\sqrt{10x^2-6x+1}}{x}\right|+c$$

3. $\int R\left(x,\sqrt{Q^2-x^2}\right)dx$ ko'rinishdagi integralni hisoblash uchun $x=a\sin t$ deb o'zgaruvchini almashtiriladi (yoki $x=a\cos t$).

$\int R\left(x,\sqrt{x^2+a^2}\right)dx$ ko'rinishdagi integralni hisoblash uchun $x=atgt$

(yoki $x=arctgt$ deb o'zgaruvchini almashtiriladi.

$\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ ko'rinishdagi integralni hisoblash uchun $x=\dfrac{a}{\cos t}$ (yoki $x=\dfrac{a}{\sin t}$) deb, o'zgaruvchini almashtiriladi.

Quyidagi misollarni ko'rib o'tamiz.

1.

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{9+x^2}}=\left|\begin{array}{l}9=3^2=a^2,\ a=3\\ x=3tgt\\ dx=\dfrac{3dt}{\cos^2 t}\end{array}\right|=\int\frac{\dfrac{3dt}{\cos^2 t}}{9tg^2t\sqrt{9+9tg^2t}}=$$

$$=\int\frac{3dt}{\cos^2 t\cdot\dfrac{9\sin^2 x}{\cos^2 t}\sqrt{9\left(1+tg^2t\right)}}=\left(1+tg^2x=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x\right)=$$

$$=\int\frac{dt}{3\sin^2 t\sqrt{9\dfrac{1}{\cos^2 t}}}=\int\frac{dt}{3\sin^2 t\cdot 3\dfrac{1}{\cos t}}=\frac{1}{9}\int\frac{\cos tdt}{\sin^2 x}=\frac{1}{9}\int\frac{d\sin t}{\sin^2 t}=$$

$$\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{\sin t}+c=-\frac{1}{9\sin(arctgx)}+c$$

$(\cos tdt=d\sin t)$,

$$\left(\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}+c,\quad t=arctg\frac{x}{3};\ x=3tgt\right)$$

2. $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$ integralni topish talab qilinsin.

Bizga ma'lumki, $4=2^2$ hamda berilgan integral $R\left(x\sqrt{2^2-x^2}\right)$ ko'rinishdagi integraldir. Demak berilgan integral uchun $x=2\sin t$ deb o'zgaruvchini almashtiramiz.

Bundan $dx=2\cos tdt$

Shunday qilib,

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}=\begin{vmatrix}x=2\sin t\\ dx=2\cos tdt\end{vmatrix}=\int\frac{4\sin^2 t2\cos tdt}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}=8\int\frac{\sin^2 t\cdot\cos tdt}{\sqrt{4(1-\sin^2 t)}}=$$

$$=8\int\frac{\sin^2 t\cdot\cos tdt}{2\sqrt{\cos^2 t}}=4\int\frac{\sin^2 t\cdot\cos tdt}{\cos t}=4\int\sin^2 tdt=4\int\frac{1-\cdot\cos 2t}{2}dt$$

$$=2\int dt-\int\cos 2td2t=2t-\sin 2t+c$$

Bizga ma'lumki, $x=2\sin t$. Demak $\frac{x}{2}=\sin t$ $t=\arcsin\frac{x}{2}$ topilgan javobini quyidagi formulalarni qo'llab, soddallashtirish mumkin.

Shunday qilib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}=2t-\sin 2t+c=2t-2\sin t\cdot\cos t+c=2\arcsin\frac{x}{2}-$$

$$-2\sin\left(arc\cdot\sin\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(arc\cdot\sin\frac{x}{2}\right)+c=2\arcsin\frac{x}{2}-$$

$$2\cdot\frac{x}{2}\cos\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)+c=2\arcsin\frac{x}{2}-x\cdot\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)}+c=$$

$$2\arcsin\frac{x}{2}-x\cdot\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}+c=2\arcsin\frac{x}{2}-x\cdot\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}+c$$

$$(\sin(\arcsin x)=x)$$

Mustaqil ishlash uchun mashqlar:

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2-x-3}}$ J: $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x-\frac{1}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2x^2-x\pm 3}\right|$

2. $\int\frac{dx}{\sqrt{5-2x-3x^2}}$ J: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{3x+1}{4}+c\right)$

3. $\int\frac{dx}{\sqrt{5x^2+3x-2}}$ J: $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|10x+3+2\sqrt{5}\sqrt{5x^2+3x+2}\right|+c$

4. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$ J: $\sqrt{x^2+4x+5}-2\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right|+c$

5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-5x+3}}$ J: $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{6-5x}{6x}+\sqrt{\frac{3-5x+2x^2}{3x^2}}\right|+c\right)$

6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{7x^2-2x+5}}$ J: $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{-x+5+\sqrt[5]{7x^2-2x+5}}{5x}\right|\right)$

7. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}}$ J: $x-2\sqrt{x}+2\ln\left|\sqrt{x+1}\right|+c$

8. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1-\sqrt[3]{x^2}}$ J: $-\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-6\sqrt[6]{x}+3arctg\sqrt[6]{x}-\frac{3}{2}\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right|+c$

9. $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$ J: $\left(6\sqrt[6]{x}-6arctg\sqrt[6]{x}+c\right)$

10. $\int \sqrt{4-x^2}dx$ J: $2\arcsin\frac{x}{2}+x\cos\arcsin\frac{x}{2}+c$

11. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}}$ J: $2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{16-x^2}+c$

12. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ J: $\left(c-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)$

13. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$ J: $\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{x}+c$

14. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ J: $\left(\ln\frac{|x|}{1+\sqrt{x^2+1}}+c\right)$

15. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$ J: $\left(c-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}-\arcsin x\right)$

O'zingizni sinab ko'ring:

1. Berilgan funksiyaning boshlang'ich funksiyasi deb nimaga aytiladi?
2. Boshlang'ich funksiya qanday xossalarga ega?
3. Berilgan funksiyaning aniqmas integrali qanday ta'riflanadi?
4. Integral ostidagi funksiya deb nimaga aytiladi?
5. Integral ostidagi ifoda deb nimaga aytiladi?
6. Integrallash amali nimani ifodalaydi?
7. Aniqmas integralning geometrik ma'nosi nimadan iborat?
8. Aniqmas integral qanday xossalarga ega?
9. Integrallash va differensiallash amallari o'zaro qanday bog'langan?
10. Aniqmas integralning chiziqlilik xossasi nimadan iborat?
11. Integral hisoblash natijasini qanday tekshirish mumkin?
12. Darajali funksiyaning aniqmas integrali nimadan iborat?
13. Ko'rsatkichli funksiya qanday integrallanadi?
14. Trigonometrik funksiyalarning integrallarini yozing.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Sh. Sharahmetov, O.Qurbanov, Iqtisodchilar uchun matematika, ISBN 978-9943-07-554-2, O'zbekiston faylasuflari milliy jamiyati nashriyoti, 2017.
2. T.A. Azlarov, X. Mansurov «Matematika analiz» T., « O'qituvchi » 1-kism 1986 y., 2-kism 1989 y
3. Soatov Yo.U. «Oliy matematika», 1 va 2-jildlar, T., «O'qituvchi» , 1992y., 1994 y.
4. Андронов А.М, Копытов Е.А, Гринглаз Л.Я, Теория вероятностей и математическая статистика, ISBN5-94723-615-X, Питер,2004
5. B. Abdualimov , Sh. Solixov «Oliy matematika qisqacha kursi», T., «O'qituvchi» , 1981 y.
6. Simsek, Y. Special numbers and polynomials including their generating functions in umbral analysis methods.2018, 7, 22
7. Stephen Boyd, Lieven Vandenberghe, Introduction to Applied Linear Algebra, ISBN 978-1-316-51896-0 Hardback,© Cambridge University Press 2018
8. Dan A Simovici. Linear Algebra Tools for Data Mining, University of Massachusetts, USA Copyright © by World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd 2012
9. Wes McKinney and the Pandas Development Team, pandas: powerful Python data analysis toolkit, 2020
10. Prasanna Sahoo, Probability and Mathematical Statistics, Department of Mathematics,University of Louisville Louisville, KY 40292 USA 2013

MUNDARIJA

M.SH.NURMANOV, J.A.FAYZIYEV

AMALIY MATEMATIKA 1

Toshkent – «INNOVATSION RIVOJLANISH
NASHRIYOT-MATBAA UYI» – 2022

Muharrir:	N. Abdullayeva
Texnik muharrir:	A. Moydinov
Musavvir:	A. Shushunov
Musahhih:	L. Ibragimov
Kompyuterda sahifalovchi:	M. Zoyirova

E-mail: nashr2019@inbox.ru Tel: +99899920-90-35
№ 3226-275f-3128-7d30-5c28-4094-7907, 10.08.2020.
Bosishga ruxsat etildi 07.11.2022.
Bichimi 60x84 1/16. «Timez Uz» garniturasi.
Ofset bosma usulida bosildi.
Shartli bosma tabog'i: 19,0. Nashriyot bosma tabog'i 18,5.
Tiraji: 50. Buyurtma № 115

«INNOVATSION RIVOJLANISH NASHRIYOT-MATBAA UYI»
bosmaxonasida chop etildi.
100174, Toshkent sh, Olmazor tumani,
Universitet ko'chasi, 7-uy.