N. DJURAYEV, B. E. ESHMATOV

EHTIMOLLIKLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA

2020 yil

Taqrizchilar: A.A.IMOMOV , QarDU Algebra va geometriya kafedrasi mudiri, fizika- matematika fanlari doktori
A.K.MUHAMEDOV, O‘zMU Ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika kafedrasi katta o‘qituvchisi, dotsent

Ushbu o‘quv qo‘llanma Ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika fanidan Oliy ta’lim muassasalarining 230000-Iqtisod ta’lim sohasi barcha ta’lim yo‘nalishlari kunduzgi va sirtqi ta’lim bakalavr talabalariga mo‘ljallab yozilgan. Unda ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistikaning asoslarini sodda tilda ifodalashga harakat qilingan. O‘quv qo‘llanmada mavzularni chuqur o‘zlashtirish uchun o‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar va mustaqil yechishga mo‘ljallangan masalalar ham keltirilgan. O‘quv qo‘llanma ko‘proq amaliy xarakterga ega bo‘lib, undan Oliy matematika kursi o‘qitiladigan barcha talabalar, shuningdek, amaliy masalalarni yechishda ehtimoliy va statistik usullarni tadbiq etadigan iqtisodchilar, muhandislar ham foydalanishlari mumkin.

KIRISH

Ehtimollar nazariyasi “Oliy matematika”ning alohida bir bo‘limidan iborat bo‘lib, unda tasodifiy voqea-hodisalarning ehtimoliy qonuniyatlari o‘rganiladi.

Ehtimolliklar nazariyasining asosiy tushunchalari shakllana boshlagan dastlabki ishlar qimor o‘yinlari nazariyasini yaratish yo‘lidagi urinishlar edi. XVII asrda olimlar qimor o‘yinlarida kuzatilayotgan hodisalar ma’lum bir qonuniyatlarga bo‘ysunishini aniqlaganlar.Ehtimolliklar nazariyasining rivojlanishi davri Ya.Bernulli nomi bilan bog‘liq (XVIIasr oxiri). Uning “Katta sonlar qonuni” teoremasi birinchi nazariy asoslardan bo‘lib hisoblanadi.

Ehtimolliklar nazariyasining keyingi rivojlanishi (XVII-XIXasr)A.Muavr, P.Laplas, K.Gaus, S.Puasson nomlari bilan bog‘liq.XIX asrga kelib ehtimolliklar nazariyasi matematik fan bo‘lib uyg‘unlashdi.

Ehtimolliklar nazariyasi ommaviy bir jinsli jarayonlarni o‘rganuvchi fan bolib, ommaviy tasodifiy hodisalar bo‘ysunadigan qonuniyatlarni aniqlash esa statistik ma’lumotlarni kuzatish natijalarini o‘rganishga asoslanadi.

Ehtimolliklar nazariyasi metodlari tabiatshunoslik va texnikaning turli sohalarida, jumladan, ishonchlilik nazariyasi, ommaviy xizmat ko‘rsatish nazariyasi, nazariy fizika, geodeziya, otish nazariyasi, avtomatik boshqarish nazariyasi va boshqa ko‘p nazariy va tadbiqiy fanlarda qo‘llaniladi.

Ehtimolliklar nazariyasi shuningdek, matematik va amaliy statistikani asoslash uchun xizmat qiladi. O‘z navbatida ishlab chiqarishni rejalashtirish va tashkil etishda, texnologik jarayonlarni tahlil qilishda, mahsulot sifatini ogohlantirish va qabul qilish nazoratida va boshqa ko‘p maqsadlarda tadbiq qilinadi.

Matematik statistika ehtimolliklar nazariyasi bilan birga yuzaga keldi va birgalikda yaratila boshlandi (XVII). XX asrga kelib, matematik statistikaning rivojiga ingliz olimlari St’yudent, R.Fisher, E.Pirson, rus olimlari V.I.Romanovskiy, Ye.Ye.Sluskiy, A.N. Kolmagorovlar juda ko‘p hissa qo‘shdilar.

Ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika fani hozirgi zamon matematikasining muhim tarmoqlaridan biridir. Bu fanning dastlabki paydo bo‘lishidan boshlab hozirgi eng rivojlangan davrida ham amaliy masalalarni yechish asosiy vazifasi bo‘lib kelmoqda.

Bugungi kunda ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika usullari iqtisodiyotda ishlab chiqarish jarayonlarini tahlil qilish, rejalashtirish, muqobil boshqaruv va demografik muammolarni yechishda ham keng qo‘llanilmoqda.

Ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika fanining keyingi rivojida o‘zbek olimlari, akademiklar T.Sarimsoqov, S.Sirojiddinov, T.Azlarovlarning ham xizmatlari ahamiyatli.

Ushbu o‘quv qo‘llanma Davlat ta’lim standarti talablariga mos “Iqtisodchilar uchun matematika” namunaviy dasturi asosida yozilgan. Ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistikadan qo‘llanmani yozishdan maqsad - talabalarda amaliy iqtisodiyotga yo‘naltiriishni kuchaytirish bilan, ularning fundamental matematik tayyorgarlik darajasini oshirish nazarda tutilgan. Ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistikaga ajratilgan o‘quv soatlaridan kelib chiqib, ayrim teorema va tasdiqlar isbotsiz keltirldi.

Zamonaviy kadrlarni yetishtirish borasida respublikamiz oliy ta‘limi tizimida tub o‘zgarishlar amalga oshirilmoqda. Bundan shunday xulosa chiqarish kerakki, hozirgi zamonda fundamental fanlar bilan bir qatorda ularning tatbiqiga bag’ishlangan maxsus kurslarni ko‘proq o‘qitish dolzarb masalalardan biri bo‘lib bormoqda. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanining mavjud qonuniyatlarini ma’lum darajada bilish, tasodifiy holatlarni hisobga olgan holda mantiqiy xulosalar chiqarish va mavjud vaziyat uchun optimal yechimlarni topa olishga imkon yaratadi. O‘quv materiallarni talabalar o‘zlashnirishi qiyin bo‘lmasligi uchun mavzularga doir misollar yechib ko‘rsatilgan.Har bir paragraf oxirida o‘z-o‘zini teksirish savollari hamda mustaqil yechish uchun mashqlar keltirilgan.

1-BOB. Ehtimolliklar nazariyasi

§1.Ehtimolliklar nazariyasining asosiy tushunchalari va ta'riflar

1.1 Asosiy ta'riflar

Ehtimollikning asosiy tushunchalaridan biri hodisadir. **Hodisa** deyilganda ro'y berish yoki ro'y bermasligi mumkin bo'lgan har qanday voqea tushuniladi. Masalan, tanga tashlanganda gerbli tomoni tushishi, o'yin soqqasi tashlanganda u yoki bu ochko chiqishi, miltiqdan o'q uzganda uning nishonga tegishi va boshqalar hodisadir.

Umuman, tajriba, kuzatuv – sinov natijasi hodisadir. Hodisalar asosan uch turga ajraladi: muqarrar, mumkin bo'lmagan va tasodifiy hodisalar. Hodisalar lotin alifbosining bosh harflari bilan belgilanadi: *A, B, C*, va hokazo.

1-ta'rif. Agar ikki hodisadan birining ro'y berishi ikkinchisining ro'y berishini inkor etmasa, bu hodisalar **birgalikda** deyiladi. Masalan, o'yin soqqasi tashlanganda *A*– to'rt ochko chiqish hodisasi, *B* esa juft ochko chiqish hodisalari birgalikdagi hodisalardir.

2-ta'rif. Agar ikki hodisadan birining ro'y berishi ikkinchisining ro'y berishini inkor etsa, bu hodisalar **birgalikda bo'lmagan** deyiladi. Masalan, tanga tashlanganda *A*- "gerb", *B* esa "raqam" tushiish hodisasi bo'lsin. Bu hodisalar birgalikda emas, chunki birining ro'y berishi ikkinchisini ro'y berishini inkor qiladi.

3-ta'rif. Ikki *A* va *B* hodisalar **qarama–qarshi hodisalar** deyiladi, agar ular birgalikda bo'lmasa va albatta bittasi ro'y bersa. *A* hodisaga qarama-qarshi hodisa $\overline{A}$ kabi belgilanadi.Tanga tashlanganda *A* "gerb" tushishi va B "raqam" tushishi qarama – qarshi hodisalardir, demak, $A = \overline{B}$ yoki $B = \overline{A}$.

4-Ta'rif. Albatta ro'y beradigan hodisa **muqarrar** hodisa deyiladi; aksincha, mutlaqo ro'y bermaydigan hodisa **mumkin bo'lmagan** hodisa deyiladi. Masalan, oq sharlar solingan qopdan olingan sharning oq bo'lishligi **muqarrar hodisa;** olingan shar qora bo'lishligi esa **mumkin bo'lmagan** hodisadir.

Birgalikda bo'lmagan chekli sondagi hodisalardan sinovlar natijasida hech bo'lmaganda bittasi ro'y bersa, ular hodisalarning **to'la guruhini** tashkil qiladi deyiladi. Masalan, o'yin soqqasini tashlaganda 1,2,3,4,5,6 ochkolar chiqish hodisalari to'la guruhni tashkil qiladi.

To'la guruhni tashkil qiluvchi hodisalar teng imkoniyatli bo'lsin, ya'ni bu hodisalardan birortasining ro'y berishi boshqasining ro'y berishidan ustun bo'lmasin. Bunday hodisalar **elementar** hodisalar deyiladi Masalan, tanga tashlaganda "gerb" yoki "raqam" tushishi, shuningdek, o'yin soqqasi tashlanganda A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 ochkolar chiqish hodisalari elementar hodisalardir.

5-ta'rif. Agar *A* hodisaning ro'y berishidan *B* hodisaning ro'y berishi kelib chiqsa, *A* hodisa *B* hodisaga **qulaylik tug'diruvchi** hodisa deyiladi.

6-ta'rif(Ehtimollikning klassik ta'rifi) *A* hodisaning *P(A)* ehtimolligi deb, uning ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi hodisalar soni *m* ning barcha elementar hodisalar soni *n* ga nisbatiga aytiladi, ya'ni

$$P(A)=\frac{m}{n} \qquad (1.1)$$

Misollar. 1. Tangani bir marta tashlaganda gerbil tomon tushishi ehtimolligini hisoblaymiz. Ma'lumki, *A*-"gerb" tushishi hodisasi va *B*-"raqam" tushish hodisasi elementar hodisalardir. Demak, *n*=2. *A* hodisaning ro'y berishiga faqat bitta hodisa qulaylik tug'diradi, u ham bo'lsa o'zi. Shuning uchun, *m*=1 va

$$P(A)=\frac{1}{2}$$

2. Ikkita o'yin soqqasi tashlandi. Chiqqan ochkolar yig'indisi beshga teng bo'lish ehtimolligi topilsin.*A*-izlanayotgan hodisa bo'lsin. Ikkita o'yin soqqasi tashlanganda barcha elementar hodisalar soni $n=6\times6=36$ ta. *A* hodisaga $(1;4),(2;3),(3,2),(4,1)$ natijalar qulaylik tug'diradi, demak, $m=4$ va izlanayotgan ehtimollik

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}.$$

Keltirilgan **klassik** ta'rifdan quyidagilar kelib chiqadi.
Eng avvalo, *A* hodisaga qulaylik tug'diruvchi hodisalar soni *m* uchun

$$0\le m\le n$$

ekanligini payqash qiyin emas. Shuning uchun, istalgan *A* hodisaning ehtimolligi uchun

$$0\le P(A)\le 1.$$

Muqarrar U- hodisa uchun *m=n*, demak, *P(U)*=1.
Mumkin bo'lmagan *V*-hodisa uchun esa(*m*=0), *P(V)*=0.

1.2 Nisbiy chastota. Statistik ehtimollik

Ehtimollikning klassik ta'rifi turli tasodifiy hodisalarni o'rganishda noqulaylik tug'diradi, chunki, uni sinovlarda teng imkoniyatli bo'lmagan hodisalar uchun qo'llab bo'lmaydi.

Faraz qilaylik, *n* ta sinovda *A* hodisa *m* marta ro'y bersin.

7-ta'rif. A hodisaning **nisbiy chastotasi** deb, sinovlarda *A* hodisaning ro'y berishlar soni *m* ning barcha o'tkazilgan sinovlar soni *n* ga nisbatiga aytiladi va $W(A)$ kabi belgilanadi:

$$W(A)=\frac{m}{n} \qquad (1.2)$$

3-misol. Transportda tashish natijasida 5 ming tarvuzdan 25 tasi iste'molga yaroqsiz deb topildi. Yaroqsizlik nisbiy chastotasini toping.

Yechish. A orqali iste'molga yaroqsiz tarvuz chiqishi hodisasini belgilasak: *m*=25, *n*=5000 va $W(A)=\frac{25}{5000}=0{,}005$

Hodisalar statistik turg'unlik yoki nisbiy chastotalar turg'unligi deb ataluvchi xossalarga ega bo'lishi kerak. Bu degani, turli tajribalar davomida hodisaning nisbiy chastotalari sinovlar soni qancha ko‘p bo‘lsa kam o‘zgaradi, ya’ni biror o‘zgarmas son atrofida tebranadi.Bu o‘zgarmas son hodisaning **statistik ehtimolligi** deyiladi.

Ehtimolliklar nazariyasining paydo bolish davridan boshlab, turli insonlar tomonidan o‘tkazilgan ko‘p sonli ommaviy tajribalar hodisaning nisbiy chastotalari sinovlarning ortishi bilan hodisaning ehtimolligiga yaqinlashini tasdiqlaydi.Masalan, tanga tashlashlarda gerbli tomon tushishi nisbiy chastotasi Byuffon(XVIII asr) tajribasida 4040ta tashlanganda 0,5069ga, Pirson(XIX asr) tajribasida 23000 tada 0,5005ga teng, ya’ni hodisaning ehtimolligi 0,5dan ko‘p farq qilmaydi.

Shunday qilib, agar tajriba yo‘li bilan nisbiy chastota aniqlangan bo‘lsa, u holda uni ehtimollikning taqribiy qiymati sifatida olish mumkin.

4-misol. O‘zbekiston Respublikasi davlat statistika qo‘mitasi ma’lumotlariga ko‘ra, 2018yil Qaraqalpog’iston Respublikasi, viloyatlar va Toshkent shahri kesimida mehnatga layoqatli yoshdagi aholining soniga nisbatan bandlik darajasi nisbiy chastotalari quyidagi jadvalda berilgan.

Qaraqal-pog’iston	Andijon	Buxoro	Jizzax	Qashqa-daryo	Navoiy	Namangan	Samarqand	Surxon daryo	Sirdaryo	Toshkent	Farg’ona	Xorazm	Toshkent shahri
0,629	0,696	0,707	0,616	0,648	0,692	0,638	0,663	0,652	0,705	0,714	0,66	0,646	0,775

Ko‘rinib turibdiki, nisbiy chastotalar **0,674**(nisbiy chastotalar o‘rta arifmetigi) soni atrofida tebranadi, bu son Respublika miqyosida mehnatga layoqatli yoshdagi aholining soniga nisbatan bandlik darajasining statistik ehtimolligidan iborat(ya’ni 67,4%).

1.3 Kombinatorika elementlari

Ko‘pgina amaliy masalalarni hal etishda ba’zi chekli to‘plamlarning elementlari ustida u yoki bu amallarni bajarish, munosabatlar o‘rnatish, guruhlash va shunga o‘xshash ishlarni amalga oshirish bilan bog‘liq muammolarga duch kelinadi.Bularga misol sifatida biror ishlab chiqarish kompleksidagi ayrim ishlarning bajarilish navbatini rejalashtirish; u yoki bu sistemaning komponentalari va tuzilishini ratsional tarzda tanlash; shuningdek, ehtimollikning klassik ta’rifi qo‘llaniladigan masalalarni yechish va shu kabilarni keltirish mumkin. Matematikaning bu kabi masalalar bilan shug‘ullanadigan bo‘limlaridan biri kombinatorika elementlaridir. To‘plam elementlarilan tashkil topgan guruhlar birikmalar yoki birlashmalar deb ataladi. Ulardan eng ko‘p qo‘llaniladiganlarini keltiramiz.

1. O‘rinlashtirishlar. $\boldsymbol{n}$ elementdan $\boldsymbol{m}$ tadan $(\boldsymbol{m<n})$ tuzilgan o‘rinlashtirishlar deb, elementlari yoki elementlarining tartibi bilan farq qiladigan birlashmalarga aytiladi va o‘rinlashtirishlar soni

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)$$

formula bilan topiladi. Masalan, uchta *a, b, c* elementlardan ikkitadan quyidagicha o‘rinlashtirish tuzish mumkin: *ab,ac,ba,bc,ca,cb*- oltita, haqiqatdan ham, $A_3^2 = 3\cdot 2 = 6.$

2. O‘rin almashtirishlar. ***n*** elementdan tuzilgan o‘rin almashtirishlar deb, elementlarining tartibi bilan farq qiladigan birlashmalarga aytiladi va o‘rin almashtirishlar soni

$$P_n = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n = n!$$

formula bilan topiladi. Masalan,uchta *a,b, c* elementdan o‘rin almashtirishlar soni *abc, acb, bac, bca, cab, cba* – oltita, haqiqatdan ham,

$$P_3 = 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$$

3. Guruhlashlar. ***n*** ta har xil elementlardan ***m*** tadan **(*m*<*n*)** guruhlashlar deb, bir-biridan hech bo‘lmaganda bitta elementga farq qiladigan ***m*** tadan tuzilgan birlashmalar soniga aytiladi va guruhlashlar soni

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad \text{yoki,} \quad C_n^m = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 4\cdot\ldots\cdot m}$$

formula bilan topiladi. Guruhlashning asosiy xossalarini keltiramiz:

1. $C_n^0 = C_n^n = 1$,
2. $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$
3. $C_n^m = C_n^{n-m} \left(m > \frac{n}{2}\right)$
4. $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$
5. $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$ - rekkurent formula, bu yerda, $0 \le m < n$.

Masalan, uchta *a ,b, c* elementlardan ikkitadan guruhlashlar soni

ab, ac,bc-uchta, haqiqatdan ham, $C_3^2 = \frac{3\cdot 2}{1\cdot 2} = 3.$

Izoh. O‘rinlashtirishlar bilan guruhlashlarning farqi shundaki, o‘rinlashtirishlarda elementlar tartibi hisobga olinmaydi.

5-misol. Viloyatda 12 ta tuman bo‘lib, ulardan 9 tasi bahorgi ekish mavsumini o‘z vaqtida yakunlagan. Maxsus komissiya tomonidan tavakkaliga 3 ta tuman tanlandi. Tanlangan tumanlardan ikkitasi bahorgi ekish mavsumini o‘z vaqtida yakunlagan tuman bo‘lishi ehtimolligi topilsin.

Yechish. Masalani yechishda $P(A) = C_n^k C_{N-n}^{m-k} / C_N^m$ formuladan foydalaniladi. Masala shartiga ko‘ra: N=12, n=9, m=3, k=2.

Tajribalar soni $n_1 = C_{12}^3 = \frac{12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3} = 220$.

Bahorgi ekish mavsumining o‘z vaqtida yakunlanganligini ***A*** hodisa desak, uning ro‘y berishiga qulaylik tug‘diruvchi hollar soni

$$m_1 = C_9^2 C_3^1 = \frac{9\cdot 8}{1\cdot 2}\cdot\frac{3}{1} = 108.$$

Izlanayotgan ehtimollik, $P(A) = \frac{m_1}{n_1} = \frac{108}{220} = 0{,}4909$ . .

1.4. Geometrik ehtimollik

Ehtimollikning klassik ta’rifini elementar hodisalar soni n chekli bo‘lgandagina qo‘llay olamiz. Agar elementar hodisalar soni cheksiz bo‘lsa, bu kamchilikni ehtimollikning geometrik ta’rifidan foydalanib to‘ldirish mumkin.

g shakl G shaklning qismini tashkil etsin. G sohaga tavakkaliga tashlangan X nuqtani g sohaga tushish masalasini qaraymiz. Bu yerda, X nuqtani G sohaga tushishi muqarrar va g sohaga tushushu tasodifiy hodisa. A- X nuqtani g sohaga tushish hodisasi bo‘lsin. U holda, A hodisaning ehtimolligi tashlangan nuqtaning G ning joilashishiga va g ning shakliga bog’liq bolmagan holda bu shakllar yuzlariga proporsional bo‘ladi(1-chizma).

$$P(A) = \frac{S_g}{S_G},$$

bu erda, S_g va S_G mos ravishda g va G shaklnung yuzlari.

Geometrik ehtimollik tushunchasi qaralayotgan soha bir o‘lchovli(kesma, to‘g’ri chiziq) va uch o‘lchovli(fazoda biror jism) bo‘lgan hollarda ham qo‘llaniladi. Soha o‘lchovini(uzunlik, yuza, hajm) **mes** bilan belgilaymiz.

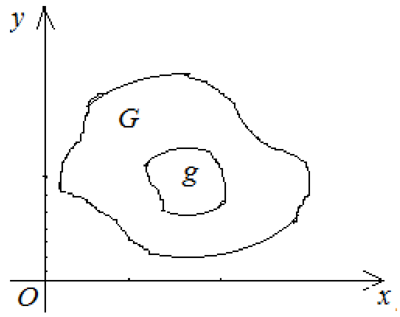
Ta’rif. A hodisaning geometrik ehtimolligi deb, g soha o‘lchovini G soha o‘lchoviga nisbatiga aytiladi, ya’ni:

$$P(A) = \frac{mesg}{mesG} \tag{1.3}$$

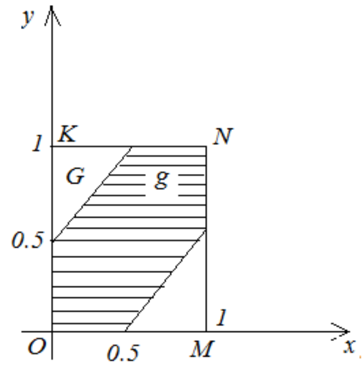
Masala. Ikki A va B shaxs belgilangan joyga har biri soat 11^{00} bilan 12^{00} orasida yetib borishga va 30 minut kutishga kelishib olishdi. Agar bu vaqt oralig’ida birortasi kelmasa yoki ketib qolishga ulgurgan bo‘lsa uchrashuv bo‘lmaydi. Uchrashuv amalga oshish ehtimolligini toping.

Yechish. A va B shaxslarning uchrashuv joyiga kelish vaqtini mos ravishda x va y bilan belgilaymiz. Shartga ko‘ra, uchrashuv vaqti bir soatni tashkil qiladi, demak, Oxy koordinatalar sistemasida $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$.

Bu tengsizliklar tomonlari 1ga teng $OMNK$ kvadratga tegishli har qanday nuqtaning koordinatasini qanoatlantiradi(2- chizma). Agar x va y orasidagi farq 0,5 soatdan oshmasa, ya’ni $|y - x| \le 0{,}5$ bo‘lsa (C hodisa) ikki shaxsning uchrashuvi amalga oshadi. Bundan, $x - 0{,}5 \le y \le x + 0{,}5$. Demak, tengsizlikning qiymatlari shtrixlangan polosadan iborat.



1-chizma



2-chizma

OMNK kvadratning yuzi: $S_G = 1 kv.b.$

Polosaning yuzi: $S_g = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}5^2 = 0{,}75 kv.b.$

(1.3) formulaga asosan, $P(C) = \frac{S_g}{S_G} = 0{,}75.$

O'Z – O'ZINI TEKSHIRISH UCHUN SAVOLLAR

1. Qanday hodisa: tasodifiy, muqarrar, mumkin bo'lmagan hodisa deyiladi?
2. Hodisalar to'la guruhi ta'rifi?
3. Teng imkoniyatli hodisalar.
4. Elementar hodisalar.
5. Birgalikda va birgalikdamas hodisalar.
6. Qarama – qarshi hodisalar.
7. Ehtimollikning klassik ta'rifi.
8. Nisbiy chastota.
9. Ehtimollikning statistik ta'rifi.
10. O'rinlashtirishlar deb nimaga aytiladi?
11. O'rin almashtirishlar deb nimaga aytiladi?
12. Guruhlashlarning ta'rifi?

Mustaqil yechish uchun mashiqlar

1. Tangani bir marta tashlaganda raqamli tomon tushish ehtimolligini toping.
J: 0,5

2. Ikkita o'yin soqqasi tashlandi. Toq ochkoli yoqlar chiqish ehtimolligini toping. J: 0,5

3. Qopda 50 ta bir xil sharlar bo'lib, ulardan 5 tasi bo'yalgan. Qopdan tavakkaliga olingan shar bo'yalgan bo'lish ehtimolligini toping. J: 0,1

4. Kitob 500 betdan iborat. Tavakkaliga ochilgan bet 7 ga karrali son bo'lish ehtimolligini toping. J: 0,142

5. Qopda 3 ta ko'k, 8 ta qizil va 9 ta oq shar bor. Qopdan tavakkaliga olingan shar*:* *a*) ko'k; b) qizil; c) oq shar bo'lish ehtimolligini toping.
J: *a*) 0,15; b) 0,4; c) 0,45

6.Talaba 30 ta YaN variantdan 24 tasini o‘zlashtirdi. Tavakkaliga olingan bitta ariantvga uning YaNdan muvoffaqiyatli o‘tish uchun bergan javobi ehtimolligi qancha? J: 0,87

7.Texnik nazorat bo‘limi ajratilgan 100 kitobdan uchtasi yaroqsiz ekanligini aniqladi. Yaroqsiz kitoblar nisbiy chastotasini toping. J: 0,03

8. Nishonga qarata otilgan 20 ta o‘qd an 18 tasi tekkani ro‘yxatga olindi. O‘qning nishonga tegish nisbiy chastotasini toping.
j: 0,9

9. 100 ta yangi tug‘ilgan chaqaloqdan 51 tasi o‘g‘il bola. O‘g‘il bolalar tug‘ilish nisbiy chastotasini toping. J: $W = 0,51$

10. Yetishtirilgan mahsulot sifatini tekshirish maqsadida tasodifiy ravishda 1000 dona mahsulotning og`irligi o`lchab ko`rildi.Shulardan, 987 tasi standart talabiga javob beradi.Mahsulotning standart talabiga javob berishi nisbiy chastotasi topilsin. J: $W = 0,987$

11.Xaltachada 5 ta bir xil kub bor. Har bir kubning barcha yoqlariga quyidagi harflardan biri yozilgan: *o, p, r, s, t*. Bittalab olingan va “bir qator qilib” terilgan kublarda “sport” so‘zini o‘qish mumkinligi ehtimolligini toping. J: $p = \frac{1}{120}$

12.Miltiqdan o‘q uzishda nishonga tegishning nisbiy chastotasi 0,85 ga tengligi aniqlandi. Agar jami 120 ta o‘q uzilgan bo‘lsa, nishonga tekkan o‘qlar sonini toping. J: 102 ta.

§ 2. Ehtimolliklarni qo‘shish va ko‘paytirish teoremalari

Hodisaning ehtimolligini aniqlashda uni boshqa soddaroq hodisalar kombinatsiyasi ko‘rinishida ifodalash qulayroq. Quyidagi ta’rif va teoremalar shu maqsadda keltiriladi.

1-ta’rif. *A* va *B* hodisaning **yig‘indisi** deb, ulardan kamida bittasining ro‘y berishidan iborat *C=A+B* hodisaga aytiladi.

2-ta’rif. *A* va *B* hodisalarning birgalikda ro‘y berishidan iborat hodisa ularning ko‘paytmasi deb ataladi va *C=A·B* bilan belgilanadi.

Bu ta’riflardan quyidagi xossalar kelib chiqadi:

1^o $A+B=B+A,\ AB=BA$

2^o $(A+B)+C=A+(B+C),\ (AB)C=A(BC)$

3^o $A(B+C)=AB+BC$

4^o $A+V=A,\ A\cdot U = A$, *U*- muqarrar hodisa, *V*-mumkin bo‘lmagan hodisa.

5^o $A+\overline{A} = U,\quad A\cdot\overline{A} = V$

6^o $\overline{A+B} = \overline{A}\cdot\overline{B},\ \overline{AB} = \overline{A}+\overline{B}$

3-Ta’rif. Agar *A* va *B* hodisalar uchun *AB=V*, ya’ni ularning bir vaqtda ro‘y berishi mumkin bo‘lmasa, ular **birgalikda bo‘lmagan** hodisalar deyiladi.

1-teorema. Ikki birgalikda bo‘lmagan *A* va *B* hodisalar yig‘indisining ehtimolligi, bu hodisalar ehtimolliklari yig‘indisiga teng:

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \qquad (2.1)$$

Isboti. Ehtimollikning klassik ta'rifidan foydalanamiz. n ta elementar hodisalar orasida A hodisaga qulaylik tug'riduvchi hodisalar soni m_1, B hodisa uchun esa m_2 bo'lsin. U holda,

$$P(A)=\frac{m_1}{n}; \quad P(B)=\frac{m_2}{n}.$$

A va B hodisalar birgalikda bo'lmaganligi uchun elementar hodisalardan hech biri bir vaqtda A hodisaga ham, B hodisaga ham qulaylik tug'dirmaydi. Shuning uchun, $A+B$ hodisaga m_1+m_2 ta hodisa qulaylik tug'diradi va

$P(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=P(A)+P(B)$. Teorema isbotlandi.

1-misol. Qopda 30 ta shar bo'lib, ulardan 10 tasi qizil, 8 tasi ko'k va 12 tasi oq. Tavakkaliga olingan shar rangli bo'lish ehtimolligini toping.

Yechish: Olingan shar rangli bo'lishi qizil yoki ko'k shar chiqishini bildiradi. Qizil shar chiqishi (A hodisa) ehtimolligi $P(A)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$,

ko'k shar chiqishi (B hodisani) ehtimolligi esa $P(B)=\frac{8}{30}=\frac{4}{15}$.

A va B hodisalar birgalikda emas, shuning uchun qo'shish teoremasiga ko'ra

$$P(A+B)=\frac{1}{3}+\frac{4}{15}=\frac{5+4}{15}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}.$$

1-Natija Qarama-qarshi A va $\overline{A}$ hodisalar ehtimolliklari yig'indisi birga teng:

$$P(A)+P(\overline{A})=1 \qquad (*)$$

2-misol. 7 ta oq va 3 ta qora shar solingan idishdan tavakkaliga 5 ta shar olindi. Olingan sharlar ichida hech bo'lmaganda bitta qora shar bo'lish ehtimolligi topilsin.

Yechish. A- hech bo'lmaganda bitta qora shar bo'lish hodisasi; u holda,

$\overline{A}$ qora shar bo'lmaslik hodisasi bo'ladi va $P(\overline{A})=\frac{C_7^5}{C_{10}^5}=0{,}083$.

(*) ga asosan , $P(A)=1-P(\overline{A})=1-0{,}083=0{,}917$.

2-natija. $A_1, A_2 .....A_n$ elementar hodisalar ehtimolliklari yig'indisi 1 ga teng:

$$P(A_1)+P(A_2)+....+P(A_n)=1 \qquad (2.2)$$

4-ta'rif. A hodisaning ehtimolligi B hodisa ro'y berishi yoki bermasligiga bog'liq bo'lmasa, A hodisa B hodisaga **bog'liqsiz** deyiladi.

5-ta'rif. Agar A hodisaning ro'y berish ehtimolligi B hodisanig ro'y berish yoki bermasligiga bog'liq bo'lsa, A hodisa B hodisaga **bog'liq** deyiladi.

6-ta'rif. A hodisaning B hodisa ro'y berdi shartidagi ehtimolligi shartli ehtimollik deyiladi va $P(A/B)$ yoki $P_B(A)$ kabi belgilanadi.

3-misol. Qopda 3 ta oq va 5 ta qora shar bor. Qopdan tavakkaliga bitta shar (birinchisi), so'ngra yana bir shar (ikkinchisi) olindi. *B*- birinchi olingan shar oq, *A*- ikkinchi olingan shar ham oq bo'lishi hodisasi bo'lsin.

Ravshanki, $P(B)=\frac{3}{8}$; agar *B* hodisa ro'y bersa, u holda, *A* hodisaning ehtimolligi $P_B(A)=\frac{2}{7}$. Agarda *B* hodisa ro'y bermasa, u holda $P_{\overline{B}}(A)=\frac{3}{7}$ bo'ladi. Ko'rinib turibdiki, $P_B(A)\neq P_{\overline{B}}(A)$

2.1. Bog'liq va bog'liqsiz hodisalarning birgalikda ro'y berishi

Endi hodisalarning birgalikda ro'y berishi ehtimolligini hisoblashga doir zarur teoremalarni keltiramiz.

2-teorema. *A* va *B* hodisalar ko'paytmasi ehtimolligi bu hodisalardan birining ehtimolligini ikkinchisining birinchisi ro'y berdi shartidagi ehtimolligi ko'paytmasiga teng:

$$P(AB)=P(A)P_A(B) \qquad (2.4)$$

yoki

$$P(AB)=P(B)P_B(A) \qquad (2.5)$$

4-misol. Stanokda yaroqli detal tayyorlash ehtimolligi 0,9 ga teng. Yaroqli detallar ichida birinchi navli detal tayyorlash ehtimolligi 0,8 ga teng. Stanokda birinchi navli detal tayyorlash ehtimolligini toping.

Yechish. *B*–yaroqli detal tayyorlash, *A*–birinchi navli detal tayyorlash hodisasi bo'lsin. Shartga ko'ra, $P(B)=0{,}9$; $P_B(A)=0{,}8$ va (2.5) formulaga asosan

$$P(AB)=0{,}9\cdot 0{,}8=0{,}72$$

Natija. Ikkita bog'liqsiz hodisalar ko'paytmasining ehtimolligi bu hodisalar ehtimolliklari ko'paytmasiga teng

$$P(AB)=P(A)P(B) \qquad (2.6)$$

3-teorema. Birgalikda bog'liqsiz bo'lgan $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalarning kamida bittasini ro'y berishidan iborat *A* hodisaning ehtimolligi

$$P(A)=1-q_1q_2\dots q_n \qquad (2.7)$$

ga teng, bu yerda , $P(\overline{A_i})=q_i$ $(i=\overline{1,n})$

5-misol. Uchta to'pdan otishda nishonga tegish ehtimolligi mos ravishda 0,4; 0,6; 0,7 ga teng. Nishonni yakson qilish uchun bitta o'qning tegishi kifoya qilsa, uchala to'pdan bir yo'la otishda nishonni yakson qilinishi ehtimolligi topilsin .

Yechish A_1, A_2, A_3 hodisalar mos ravishda 1-2-3- to'plardan otishni bildirsin.

U holda, $P(A_1)=0{,}4$; $P(A_2)=0{,}6$; $P(A_3)=0{,}7$

$$q_1=P(\overline{A_1})=1-P(A_1)=1-0{,}4=0{,}6$$

$$q_2=P(\overline{A_2})=1-P(A_2)=1-0{,}6=0{,}4$$

$$q_3=P(\overline{A_3})=1-P(A_3)=1-0{,}7=0{,}3\,.$$

Demak, $P(A)=1-q_1q_2q_3=1-0{,}6\cdot 0{,}4\cdot 0{,}3=0{,}928\,.$

2.2 Birgalikdagi hodisalar ehtimolliklarini qo‘shish

4-teorema. Ikkita birgalikdagi hodisadan hech bo‘lmaganda birining ro‘y berish ehtimolligi bu hodisalar ehtimolliklari yig‘indisidan ularning birgalikda ro‘y berish ehtimolligini ayrilganiga teng:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)\ -\ P(AB) \qquad (2.8)$$

6-misol. Nishonga qarata o‘q uzishda birinchi va ikkinchi merganning tekkizish ehtimolligi mos ravishda $P(A)=0{,}7$ va $P(B)=0{,}8$ ga teng. Bir yo‘la o‘q uzishda merganlardan kamida bittasining nishonga tekkizish ehtimolligini toping.

Yechish. Ko‘rinib turibdiki, A va B hodisalar bog’liqsiz va birgalikda. Shuning uchun $P(A+B)=P(A)+P(B)\ -\ P(AB)=0{,}7+0{,}8-0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}94$

2.3 To‘la ehtimollik. Beyes formulasi

A hodisa birgalikda bo‘lmagan hodisalar to‘la guruhini tashkil qiluvchi $B_1, B_2, \ldots, B_n$ hodisalarning biri bilan ro‘y berishi mumkin bo‘lsin. $B_1, B_2, \ldots, B_n$ hodisalarni A hodisa uchun **gipotezalar** ham deb ataymiz. U holda,

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+\ldots+P(B_n)P_{B_n}(A)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P_{B_i}(A) \qquad (2.9)$$

Isbot. Shartga ko‘ra, A hodisaning ro‘y berishi B_1A yoki B_2A yoki, ..., yoki B_nA hodisaning ro‘y berishini bildiradi. Ehtimolliklarni qo‘shish teoremasiga ko‘ra

$$P(A)=P(B_1A)+P(B_2A)+\ldots+P(B_nA).$$

Tenglikni o‘ng tomonidagi qo‘shiluvchilarni (2.5) formulaga asosan almashtirib (2.9) formulani hosil qilamiz.(2.9) **to‘la ehtimollik** formulasi deyiladi.

7-misol. O‘qituvchi sinov o‘tkazish uchun 50 ta mashq tayyorladi: 20 ta differensiallashdan; 30 ta integrallashdan. Talaba sinov topshirish uchun tavakkaliga olgan birinchi mashqni bajarishi lozim. Agar talaba differensiallashdan 18 ta, integrallashdan 15 ta mashqni to‘la bajaraolsa, uni sinov topshirish ehtimolligi qancha?

Yechish. B_1 olingan mashq differensiallashdan, B_2 esa integrallashga doir bo‘lsin. U holda, $P(B_1)=\dfrac{20}{50}=0{,}4$; $P(B_2)=\dfrac{30}{50}=0{,}6$

Agar A masala yechilgan bo‘lishlik hodisasi bo‘lsa, u holda ,

$$P_{B_1}(A)=\frac{18}{20}=0{,}9;\ P_{B_2}(A)=\frac{15}{30}=0{,}5 \qquad \text{va}$$

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)=0{,}4\cdot 0{,}9+0{,}6\cdot 0{,}5=0{,}66.$$

Beyes formulasi. (Tomas Beyes – ingliz matematigi, 1702-1761)

Masalaning qo‘yilishi. Birgalikda bo‘lmagan hodisalarning to‘la guruhi $B_1, B_2, \dots, B_n$ berilgan. Bu gipotezalar har birining $P(B_1), P(B_2), \dots, P(B_n)$ ehtimolligi hamda sinov o‘tkazilganda A hodisa ro‘y beradi va har bir gipoteza bo‘yicha $P_{B_1}(A), P_{B_2}(A), \dots P_{B_n}(A)$ ehtimolliklar ma’lum bo‘lsin. A hodisa ro‘y berishi munosabati bilan gipotezalar ehtimolliklari $P_A(B_1), P_A(B_2), \dots, P_A(B_n)$ larni qayta baholash talab qilinadi. Bu masalaga quyidagi teorema javob beradi.

Teorema. Masala shartidagi sinovdan keyingi gipotezalar ehtimolliklari uchun ushbu formula o‘rinli:

$$P_A(B_k) = \frac{P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P_{B_i}(A)} \qquad (2.10)$$

Isboti. Avvalo $P_A(B_1)$ shartli ehtimolni topamiz. Ko‘paytirish teoremasiga asosan $P(A)P_A(B_1) = P(B_1)P_{B_1}(A)$.

Bundan, $P_A(B_1) = \dfrac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)}$ yoki $P_A(B_1) = \dfrac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P_{B_i}(A)}$

Qolgan gipotezalarning shartli $P_A(B_K)$ ehtimolliklari uchun formulalar shunga o‘xshash topiladi. Shunday qilib, istalgan $B_k\left(k=\overline{1,n}\right)$ uchun

$$P_A(B_K) = \frac{P(B_K)P_{B_k}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P_{B_i}(A)}$$

Teorema isbotlandi.

8-misol. Yuqoridagi (7-misol) masala shartlarida talabaning sinov topshirgani ma’lum bo‘lsa, uni differensiallashdan mashq bajargan bo‘lish ehtimolligini toping.

Yechish. Gipotezalar ehtimolligi Beyes formulasidan foydalanamiz. Bizdan A hodisa ro‘y bergan deb taxmin qilinganda B_1 gipotezaning ehtimolligini topish kerak bo‘ladi. Demak, (2.10) formulaga ko‘ra

$$P_A(B_1) = \frac{0{,}4\cdot 0{,}9}{0{,}66} = \frac{0{,}36}{0{,}66} = \frac{5}{11} \approx 0{,}55 .$$

Ko‘rinib turibdiki, sinovgacha B_1 gipotezaning ehtimolligi 0,4 ga teng edi, sinov natijasi ma’lum bo‘lgandan so‘ng esa bu gepotezaning ehtimolligi o‘zgardi va 0,55 ga teng bo‘ldi. Shunday qilib, Beyes formulasi qaralayotgan gipotezani qayta baholash imkonini berdi.

O‘Z-O‘ZINI TEKSHIRISH UCHUN SAVOLLAR

1.Birgalikda bo‘lmagan va birgalikda bo‘lgan hodisalarga misollar keltiring

2.Birgalikda bo‘lmagan hodisalar ehtimolliklarining qo‘shish teoremasini keltiring.

3.Birgalikdagi hodisalar uchun ehtimolliklarning qo‘shish teoremasini tushuntiring.
4.Shartli ehtimollik nima?
5.Bog‘liqsiz hodisalar ta’rifini ayting. Misollar keltiring.
6.Bog‘liq hodisalarga misollar keltiring.
7.Ehtimolliklarni ko‘paytirish teoremalarini ayting.
8.Hech bo‘lmaganda bitta hodisaning ro‘y berish ehtimolligini hisoblash formulasini yozing va misol keltiring.
9.To‘la ehtimollik formulasini yozing.
10. Beyes formulasini yozing.

Mustaqil yechish ushun mashqlar

1. Pul-buyum loteriyasining har 10 000 ta biletiga 150 ta buyum va 50 ta pul yutuqlari o‘yinaladi. Bitta loteriyasi bor kishiga pulmi yoki buyummi, baribir yutuq chiqish ehtimolligi qanchaga teng? J: $p = 0{,}02$

2. 10 ta detalli partiyada 8 ta standart detal bor. Tavakkaliga olingan ikkita detaldan kamida biri standart bo‘lish ehtimolligini toping. J: $p = \frac{44}{45}$

3. Qutidagi 10 ta detal orasida 2 tasi nostandart. Tavakkaliga olingan 6 ta detal orasida nostandart detal bittadan ortiq bo‘lmaslik ehtimolligini toping.
J: $p = \frac{2}{3}$.

4. Ekilgan 100 dona urug`dan 78 tasi $A$ navga, 12 tasi $B$ navga va 10 tasi $C$ navga tegishli.Har bir urug`ning unib chiqish imkoniyati bir xil bo`lsa, tasodifiy kuzatilayotgan unub chiqqan urug`ning : 1) A navga; 2) B navga; va 3) B yoki C navga tegishli bo`lish ehtimolligini toping. J:1) $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{78}{100} = 0{,}78$.

2) $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{12}{100} = 0{,}12$ 3) $P(B \ \ yoki \ \ C) = \frac{m}{n} = \frac{22}{100} = 0{,}22$

5. Ikkita qutida detallar bor: birinchisida 10 ta (ulardan 3 tasi standart), ikkinchisida 15 ta (ulardan 6 tasi standart). Har bir qutidan tavakkaliga bittadan detal olinadi. Ikkala detal standart bo‘lish ehtimolligini toping.
J: $p = 0{,}12$

6. Uchta o‘yin soqqasi tashlanganda kamida bitta soqqada 6 ochko tushish (A hodisa) ehtimolligi qanchaga teng? J: $p = \frac{91}{216}$.

7. Korxona tayyorlagan mahsulotning 95% i standart, shundan 86%i birinchi navli. Shu korxonada tayyorlangan mahsulotdan tavakkaliga olingan bittasi birinchi nav bo‘lish ehtimolligini toping. J: $p = 0{,}817$

8.Qopda 2 ta ko‘k, 6 ta qizil va 12 ta oq shar bor. Qopdan tavakkaliga olingan shar rangli bo‘lish ehtimolligini toping. J: $p = 0{,}4$

9. Qopda 4 ta oq va 3 ta ko‘k shar bor. Qopdan tavakkaliga bitta shar olindi. Agar olingan (birinchi) shar oq bo‘lsa, ikkinchi olingan shar ko‘k bo‘lish ehtimolligini toping. J: $p = 0,5$

10. 20 ta qator ekilgan ko`chatlarning 6 tasi hashorat bilan zararlangan. Ulardan tavakkaliga olingan 3 ta ko`chatdan hech bo`lmaganda bittasi zararlangan chiqishi ehtimolligini toping. J: $p = 0,681$

11. Bitta o‘q uzishda nishonga birinchi merganning tekkizish ehtimolligi 0,8 ga, ikkinchining ehtimolligi esa 0,6 ga teng. Faqat bitta merganning nishonga tekkizish ehtimolligini toping. J: $p = 0,44$

12.Yig‘uvchida 1-zavodda tayyorlangan 16 ta detal, 2-zavodda tayyorlangan 4 ta detal bor. Tavakkaliga 2 ta detal olindi. Ulardan aqalli bittasini 1-zavod tayyorlaganligi ehtimolligini toping. J: $p = \frac{92}{95}$.

13. Ikkita fermer xo`jaliklarining mahsulot topshirish rejasini bajarishi bir-biriga bog`liq bo`lmay ehtimolliklari mos holda $p_1 = 0,7; p_2 = 0,8$ ga teng. Joriy yilda hech bolmaganda ularning birinig mahsulot topshirish rejasini bajarishi ehtimolligi topilsin. J: $p = 0,94$

§ 3. Bog’liqsiz sinovlarning takrorlanishi

Amaliyotda, berilgan kompleks shartlarda ko‘p marta takrorlanuvchi sinovlar bilan bo‘g’liq masalalarga duch kelamiz. Masalan, biror hodisaning takrorlanuvchi *n*ta sinovda *m* marta ro‘y berishi yoki nishonga qarata bir qancha o‘q uzganda kerakli sondagi o‘qning nishonga tegishi va sh.k.

Takrorlanuvchi sinovlarning har birida *A* hodisaning ro‘y berish ehtimolligi boshqa sinov natijalariga bog‘liq bo‘lmasa, bunday sinovlar *A* hodisaga nisbatan **bog’liqsiz** deyiladi.Agar bog’liqsiz takrorlanuvchi sinovlar yagona kompleks shartlarda o‘tkaziladigan bo‘lsa, u holda A hodisaning ehtimolligi har bir sinovda o‘zgarmas va bir xil bo‘ladi. Takrorlanuvchi bog’liqsiz sinovlar ketma-ketligi Bernulli sxemasi ham deb yuritiladi.

3.1 Bernulli formulasi

Faraz qilaylik, *n* ta o‘zaro bog’liqsiz takrorlanuvchi sinovlarning har birida *A* hodisaning ro‘y berish ehtimolligi *p* teng bo‘lsin. U holda, *A* hodisaning ro‘y bermaslik ehtimolligi *q*=1-*p* ga teng. *n* ta sinovda *A* hodisaning rosa *k* marta ro‘y berish ehtimolligi $P_n(k)$ ni topamiz $(\kappa \le n)$.

A hodisa dastlabki *n* ta sinovda *k* marta ro‘y bersin va qolgan barcha sinovlarda ro‘y bermasin. Bu murakkab hodisani

$$\underbrace{AA\cdots A}_{n\,marta}\cdot\underbrace{\overline{A}\cdot\overline{A}\cdot\ldots\cdot\overline{A}}_{n-k\ \ marta}$$

ko‘paytma shaklida yozish mumkin, uning ehtimolligi bog‘liqsiz hodisalarni ko‘paytirish teoremasiga ko‘ra $p^k q^{n-k}$ ga teng.

Bunday murakkab hodisalar umumiy soni n ta elementdan k tadan tuzilgan guruhlashlar soni C_n^k ga teng. Bu murakkab hodisalar birgalikda bo'lmaganligi sababli hodisalar yig'indisining ehtimolligi ularning ehtimolliklari yig'indisiga teng.U holda,

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \tag{3.1}$$

yoki

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \tag{3.1$_1$}$$

(3.1) formula **Bernulli** formulasi deyiladi.

1-misol. Har bir detalning standartga mos bo'lish ehtimolligi p=0,8 ga teng. Tavakkaliga olingan 5ta detaldan rosa 3 tasi standartga mos bo'lish ehtimolligini toping.

Yechish Shartga ko'ra, n=5, k=3, p=0,8; q=1-0,8=0,2. (3.1) formuladan,

$$P_5(3) = C_5^3\, 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2 = 10 \cdot 0{,}512 \cdot 0{,}04 = 0{,}2048$$

Eslatma. Bog'liqsiz sinovlar ketma-ketligida hodisaning ro'y berishlar soni m bo'lsin. U holda, quyidagilar o'rinli:

a) hodisaning k dan kam marta ro'y berish ehtimolligi

$$P_n(0 \le m \le k-1) = \sum_{m=0}^{k-1} P_n(m);$$

b) hodisaning kamida k marta ro'y berish ehtimolligi

$$P_n(k \le m \le n) = \sum_{m=k}^{n} P_n(m);$$

c) hodisaning ko'pi bilan k marta ro'y berish ehtimolligi

$$P_n(0 \le m \le k) = \sum_{m=0}^{k} P_n(m)$$

2-misol. Tanga to'rt marta tashlandi. Gerbli tomon *a*) ikki martadan kam; *b*) kamida ikki marta tushish ehtimolligini toping.

Yechish *a*) Shartga ko'ra,

$$n = 4,\ k < 2,\ p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2},$$

$$P_4(0 \le k < 2) = P_4(0) + P_4(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 4 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$$

b) $k \ge 2$, bu holda,

$$P_4(2 \le k \le 4) = 1 - P_4(0 < k < 2) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{11}{16}.$$

3.2 Muavr-Laplasning lokal va integral teoremalari

Agar sinovlar soni yetarlicha katta bo‘lsa Bernulli formulasini qo‘llash anchagina murakkablikka olib keladi. Bunday hollarda quyidagi teoremalaridan foydalaniladi.

Muavr-Laplasning lokal teoremasi. Agar har bir bog’liqsiz sinovda *A* hodisaning ro‘y berish ehtimolligi *p* ga teng bo‘lsa, u holda, yetarlicha katta *n* larda *A* hodisaning rosa *k* marta ro‘y berish ehtimolligi uchun

$$P_n(\kappa) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x) \qquad (3.2)$$

taqribiy formula o‘rinli.

Bu yerda, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, $\quad x = \frac{\kappa - np}{\sqrt{npq}} \qquad (3.3)$

Muavr-Laplasning integral teoremasi. Agar *n* ta bog’liqsiz sinovlarning har birida *A* hodisaning ro‘y berish ehtimolligi *p* ga teng bo‘lsa, u holda, hodisaning k_1 tadan k_2 martagacha ro‘y berish ehtimolligi

$$P_n(\kappa_1 \le \kappa \le \kappa_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \qquad (3.4)$$

ga teng, bu yerda,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2}\, dt \qquad (3.5)$$

$$x_1 = \frac{\kappa_1 - np}{\sqrt{npq}}, \qquad x_2 = \frac{\kappa_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

1-izoh. Sinovlar soni qanchalik katta bo‘lsa, (3.2) va (3.4) formulalar shunchalik aniqroq qiymatni beradi.

2-izoh. φ (*x*) va Φ (*x*) funksiyalar Laplas funksiyalari deyiladi. (3.3) va (3.5) formulalar bilan bog‘liq hisoblashlarni soddalashtirish maqsadida, ularning qiymatlari jadvali mavjud. Jadvallar argumentning musbat qiymatlari uchun berilgan, chunki

$$\varphi(-x) = \varphi(x), \quad \Phi(-x) = -\Phi(x)$$

3-izoh. x>5 da $\varphi(x) \approx 0$; $\Phi(x) \approx \frac{1}{2} = 0{,}5$ (1, 2-ilova)

3-misol. Agar har bir sinovda *A* hodisaning ro‘y berish ehtimolligi 0,2 ga teng bo‘lsa, 400 sinovda bu hodisaning rosa 100 marta ro‘y berish ehtimolligini toping.

Yechish. *n*=400, *p*=0,2, *q*=0,8, *k*=100.

$$x = \frac{100 - 0{,}2 \cdot 400}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = \frac{20}{8} = 2{,}5$$

Jadvaldan (1-ilova)

$$\varphi(2{,}5) = 0{,}0175 \;\; va \;\; P_{400}(100) = \frac{1}{8} \cdot 0{,}0175 \approx 0{,}0022$$

4-misol. Korxonada ishlab chiqarilgan detalning yaroqsiz bo‘lish ehtimolligi 0,005 ga teng. 10000 ta detaldan iborat partiyada ko‘pi bilan 70 ta detal yaroqsiz bo‘lish ehtimolligini toping.

Yechish. p=0,005, q=0,995, n=10000, $0 \le k \le 70$, $\sqrt{npq} \approx 7{,}05$

$$x_1 = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \approx \frac{0-10000\cdot 0{,}005}{7{,}05} = -\frac{50}{7{,}05} = -7{,}09$$

$$x_2 = \frac{70-10000\cdot 0{,}005}{7{,}05} = \frac{20}{7{,}05} = 2{,}84$$

$$P_n(0 \le k \le 70) \approx \Phi(2{,}84) - \Phi(-7{,}09) = 0{,}4977 + 0{,}5 = 0{,}9977$$

Shunday qilib, 10000 ta detaldan yaroqsiz detallar sonining 70 tadan ortiq bo‘lmaslik ehtimolligi birga juda yaqin bo‘lar ekan.

3.3 Puasson formulasi

Har bir sinovda A hodisaning ro‘y berish ehtimolligi p ga teng bo‘lgan n ta bog’liqsiz sinov o‘tkazilayotgan bo‘lsin. Bu sinovlarda A hodisaning rosa k marta ro‘y berish ehtimolligini topish uchun Bernulli formulasidan, agarda n (sinovlar soni) katta bo‘lsa Muavr- Laplasning teoremalaridan foydalaniladi. Ammo, hodisaning ehtimolligi juda kichik $(p \le 0{,}1)$ yoki birga yaqin bo‘lsa Muavr- Laplas formulasi yaroqli emas.

5-misol.Standart detal tayyorlash ehtimolligi 0,996 ga teng.Tayyorlangan 1000ta detaldan 5tasi nostandart bo‘lish ehtimolligi qancha?

Yechish. Masalaning shartiga ko‘ra, n=1000, k=5, p=0,004, q=0,994.

$$\sqrt{npq} = \sqrt{1000\cdot 0{,}004\cdot 0{,}996} \approx 1{,}996$$

$$x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{5-1000\cdot 0{,}004}{1{,}996} = \frac{1}{1{,}996} \approx 0{,}501.$$

Muavr-Laplasning (3.2) formulasiga ko‘ra

$$P_n(\kappa) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x) = \frac{1}{1{,}996}\varphi(0{,}501) \approx 0{,}501\cdot 0{,}3519 = 0{,}1763 .$$

Endi ehtimollikni Bernulli formulasi bo‘yicha hisoblaymiz:

$$P_{1000}(5) = C_{1000}^{5} 0{,}004^5 \cdot 0{,}996^{995} \approx 0{,}1552 .$$

Ko‘rinib turibdiki,aniqlik qoniqarli emas. Haqiqatdan,

$$\frac{0{,}1763-0{,}1552}{0{,}1552} \approx 0{,}136 \text{ yoki } 13{,}6\%.$$

Bunday hollarda, (n katta, p kichik) $P_n(k)$ ehtimollikni hisoblash uchun boshqa taqribiy formula topish masalasi kelib chiqadi.

Teorema.Agar bog’liqsiz takrorlanuvchi sinovlarning har birida A hodisaning ro‘y berish ehtimolligi p juda kichik va sinovlar soni n etarlicha katta bo‘lsa, u holda, n ta sinovda hodisaning rosa k marta ro‘y berish ehtimolligi taqriban

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \qquad (3.6)$$

ga teng, bunda $\lambda = np$.

Isboti: Teoremaning shartiga ko‘ra, A hodisaning ro‘y berish ehtimolligi p juda kichik va sinovlar soni n esa etarlicha katta, shu sababli n va p larning ko‘paytmasi $\lambda = np$ uncha katta son bo‘lmaydi. Agar $p = \frac{\lambda}{n}$ desak, u holda izlangan ehtimol Bernulli formulasiga ko‘ra

$$P_n(k) = C_n^k \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = C_n^k \frac{\lambda^k}{n^k}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

ga teng.Bundan, elementar shakl almashtirish yordamida quyidagini hosil qilamiz:

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{\lambda^k}{n^k}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}.$$

Teoremaning shartiga ko‘ra $n \to \infty$ da $p \to 0$ va $np \to \lambda$ bo‘lishi Bernulli sxemasidagi har bir sinovda hodisaning ehtimolligi p=const shartiga zid.Demak, hodisaning ehtimolligi p noldan farqli bolishi uchun uning ro‘y berishlar soni k uncha katta son bo‘lmasligi lozim.Undan tashqari n etarlicha katta bo‘lgani uchun

$$1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{2}{n}, \ldots, 1 - \frac{k-1}{n}, \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

ko‘paytuvchilarni taqriban 1ga teng deb hisoblash mumkin. U holda, $P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n$

Differensial hisob kursidan ma’lumki(ikkinchi ajoyib limit)

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$. Demak, $P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, $\lambda = np$ $(\lambda = np \le 10)$.

Teorema isbotlandi. (3.6)-**Puasson formulasi** deyiladi.

6-misol.Yuqorida(5-misol) misolda keltirilgan hodisaning ehtimolligini Puasson formulasidan foydalanib toping.

Yechish. n=1000, k=5, p=0,004, q=0,994, $\lambda = np = 4$.

$$P_{1000}(5) \approx \frac{4^5 e^{-4}}{5!} = \frac{128}{15 \cdot e^4} \approx 0{,}1563.$$

Puasson formulasi bo‘yicha xato:

$\frac{0,1563-0,1552}{0,1552}\approx 0,007$ yoki 0,7%. Demak, xato anchagacha kamaydi.

7-misol. Zavod bazaga 500 ta sifatli mahsulot jo‘natdi. Mahsulotning yo‘lda shikastlanish ehtimolligi 0,002ga teng. Yo‘lda rosa 3ta mahsulotning shikastlanish ehtimolligini toping.

Yechish. $n=500,\ p=0,002,\ \lambda=np=1,\ k=3\ \ P_{500}(3)=\frac{1}{3!}e^{-1}\approx 0,06.$

8-misol. Tovuq tuxumining 95% i yaroqli bo‘lsa, hamma tuxumlarni fabrika omboriga qabul qilib oladi. Ixtiyoriy n=200 ta tuxumdan: *a*) kamida 16 tasi yaroqsiz ; *b*) 14 tasi yaroqsiz bo‘lish ehtimolligini toping.

Yechish. *a*) masalaning shartiga ko‘ra: n = 200; p=0,95; k=16;

λni topamiz. $\lambda=np=200\cdot 0,05=10.$ Puasson formulasiga ko‘ra,

$$P(k\ge 16)=\sum_{k=16}^{200}\frac{10^k}{k!}e^{-10}=1-\sum_{k=0}^{15}\frac{10^k}{k!}e^{-10}=1-(0,0001+0,0005+0,0023+$$
$$+0,0076+0,0189+0,0378+0,0631+0,0901+1126+0,1251+0,1251+$$
$$0,1137+0,0948+0,0729+0,0521+0,0347)=1-0,9514=0,0486.$$

b) Bu holda, n=200, $\lambda=10,$ k=14.

$$P_{200}(14)=\frac{10^{14}}{14}e^{-10}=0,0521.$$

3.4 Bog’liqsiz sinovlarda nisbiy chastotaning o‘zgarmas ehtimollikdan chetlanishi

Faraz qilaylik, n ta bog’liqsiz sinovlarda hodisa m marta ro‘y bersin va har bir sinovda hodisaning ro‘y berish ehtimolligi $p(0<p<1)$ bo‘lsin. $\frac{m}{n}$ nisbiy chastotaning o‘zgarmas p ehtimoldan chetlanish ehtimolligini, ya’ni avvaldan berilgan ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun ushbu

$$\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon \qquad (3.7)$$

tengsizlik (hodisa)ning $P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)$ ehtimolligini topamiz. (3,7) ni unga teng kuchli $-\varepsilon\le\frac{m}{n}-p\le\varepsilon$ yoki $-\varepsilon\le\frac{m-np}{n}\le\varepsilon$ qo‘sh tengsizlik bilan almashtiramiz. Tengsizlikni musbat $\sqrt{\frac{n}{pq}}$ songa ko‘paytirib

$-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$ ni hosil qilamiz.

Muavr-Laplasning integral teoremasi (3.4) dan foydalanamiz,

$x_1 = -\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$, $x_2 = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$ deb, quyidagini hosil qilamiz:

$$P\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - \Phi\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

Natijada, qavs ichidagi tengsizlikni unga teng kuchli dastlabki tengsizlik bilan almashtirib,

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \qquad (3.8)$$

formulani hosil qilamiz

9-misol. Hodisaning 625 ta bog’liqsiz sinovning har birida ro‘y berish ehtimolligi 0,8 ga teng. Hodisa ro‘y berishi nisbiy chastotasini uning ehtimolligidan chetlanishi absolyut kattaligi bo‘yicha 0,04 dan ortiq bo‘lmaslik ehtimolligini toping.

Yechish. Shartga ko‘ra, $n = 625;\ p = 0{,}8;\ q = 0{,}2;\ \varepsilon = 0{,}04$.

$P\left(\left|\frac{m}{625} - 0{,}8\right| \le 0{,}04\right)$ ehtimollikni topish talab qilinmoqda. (3.8) formulaga asosan,

$$P\left(\left|\frac{m}{625} - 0{,}8\right| \le 0{,}04\right) = 2\Phi\left(0{,}04\sqrt{\frac{625}{0{,}8 \cdot 0{,}2}}\right) = 2\Phi(2{,}5)$$

Jadvaldan (2-ilova) $\Phi(2{,}5) = 0{,}4938$ ni topamiz. Demak,

$2\Phi(2{,}5) = 2 \cdot 0{,}4938 = 0{,}9876$

Shunday qilib, izlanayotgan ehtimollik taqriban 0,9876 ga teng.

3.5. Hodisa ro‘y berishining eng ehtimolli soni

Agar har birida ro‘y berish ehtimolligi p ga teng bo‘lgan bog’liqsiz sinovlarda hodisaning k_0 marta ro‘y berish ehtimolligi sinovlarning boshqa, mumkin bo‘lgan natijalaridan kichik bo‘lmasa, k_0 **eng ehtimolli son** deyiladi va bu son

$$np-q < k_0 < np+p \qquad (3.9)$$

qo‘sh tengsizlikdan topiladi.

Agar:

a) $np-q$ son kasr bo‘lsa, u holda bitta eng ehtimolli k_0 son mavjud;

b) $np-q$ butun son bo‘lsa, u holda ikkita k_0 va k_0+1 eng ehtimolli son mavjud;

c) *np* butun son bo‘lsa, u holda eng ehtimolli son $k_0=np$

10-misol. Texnik nazorat bo‘limi 10 ta detaldan iborat partiyani tekshirmoqda. Detalning standartga mos bo‘lish ehtimolligi 0,7 ga teng. Standartga mos detallarning eng ehtimolli sonini toping.

Yechish. $n=10$; $p=0,75$; q=0,3; $np=10\cdot 0,75=7,5$; $np-q=7,5-0,3=7,2$;

$$np+p=7,5+0,75=8,25$$

(3.9) qo‘shtengsizlikdan $7,2< k_0< 8,25$. Demak, izlanayotgan eng ehtimolli son $k_0=8$.

O‘Z-O‘ZINI TEKSHIRISH UCHUN SAVOLLAR

1. Takrorlanuvchi sinovlarga misollar keltiring.
2. Bog’liqsiz hodisalarga misollar keltiring.
3. Bernulli formulasini yozing.
4. Muavr-Laplasning lokal formulasini yozing.
5. Muavr-Laplasning integral formulasini yozing.
6. Bernulli va Muavr-Laplasning teoremalarini farqlarini tushuntiring.
7. Puasson formulasini yozing.
8. Bernulli va Puasson formulalarining kamchiligi va afzalligini ko‘rsating.
9. Laplas funksiyalarining xossalarini keltiring.
10. Puasson formulasi uchun $\sum_{k=1}^{\infty} P_n(k)=1$ ekanligini ko‘rsating.
11. Muavr-Laplas va Puasson formulalari farqi nimada?
12. Bog’liqsiz sinovlarda nisbiy chastotaning o‘zgarmas ehtimollikdan chetlanishi formulasini yozing va chetlanish tushunchasiga izoh bering.
13. Hodisa ro‘y berishining eng ehtimolli sonini ta’riflang.

Mustaqil yechish ushun mashqlar

1. Tanga olti marta tashlandi. Gerbli tomon: *a*) ko‘pi bilan bir marta tushish; *b*) kamida ikki marta tushish ehtimolligi topilsin. J: *a*) $\frac{7}{64}$; *b*) $\frac{57}{64}$.

2. Agar har bir sinovda *A* hodisaning ro‘y berish ehtimolligi 0,3 ga teng bo‘lsa, beshta bog’liqsiz sinovda hodisaning kamida ikki marta ro‘y berish ehtimolligini toping. J: $p=1-[P_5(0)+P_5(1)]=0.472$

3. *B* hodisa *A* hodisa kamida ikki marta ro‘y bergan holda ro‘y beradi. Har birida *A* hodisaning ro‘y berish ehtimolligi 0,4 ga teng bo‘lgan 6 ta bog’liqsiz sinov o‘tkazilgan bo‘lsa, *B* hodisaning ro‘y berish ehtimolligini toping.

J: $p=1-[P_6(0)+P_6(1)]=0.767$

4. Bitta o‘q o‘zishda nishonga tegish ehtimolligi 0,8 ga teng. 100 ta o‘q o‘zilganda rosa 75 ta o‘qning nishonga tegish ehtimolligini toping. J:0,04565

5. Agar har bir sinovda hodisaning ro‘y berish ehtimolligi 0,2 ga teng bo‘lsa, 400 ta bog’liqsiz sinovda shu hodisaning rosa 104 marta ro‘y berish ehtimolligini toping.

J: $P_{400}(104)\approx 0,0006$.

6. Hodisaning 2100 ta bog'liqsiz sinovning har birida ro'y berish ehtimolligi 0,7 ga teng bo'lsa, hodisaning kamida 1470 marta va ko'pi bilan 1500 marta ro'y berish ehtimolligini toping. J:0,4236

7. Merganning bitta o'q uzishda nishonga tekkizish ehtimolligi 0,75 ga teng, 100 ta o'q uzilganda nishonga tekkan o'qlar soni *a*) 70 dan kam emas va 80 dan ko'p emas, *b*) 70 dan ko'p emas bo'lish ehtimolligini toping.

J: *a*) $P_{100}(70;80) \approx 2\Phi(1,15) = 0,7499$

b) $P_{100}(0;70) \approx \Phi(1,15) + 0,5 = 0,87495$

8. 10000 ta bog'liqsiz sinovning har birida hodisaning ro'y berish ehtimolligi p=0,75.Hodisa ro'y berishi nisbiy chastotasining hodisa ehtimolligidan chetlanishi absolyut qiymati bo'yicha 0,001 dan katta bo'lmaslik ehtimolligini toping. J: $P \approx 2\Phi(0,23) = 0,182$

9. Bog'liqsiz sinovlarning har birida hodisaning ro'y berish ehtimolligi 0,2 ga teng. 5000 ta sinovda 0,9128 ehtimol bilan hodisa ro'y berishi nisbiy chastotasining hodisa ehtimolligidan qanchalik chetlanishini kutish mumkin?

J: $\varepsilon = 0,00967$

10. 10000 ta bog'liqsiz sinovning har birida hodisaning ro'y berish ehtimolligi $p = 0,75$. Hodisaning ro'y berish nisbiy chastotasining hodisa ehtimolligidan chetlanishi absolyut qiymati bo'yicha 0,001 dan katta bo'lmaslik ehtimolligini toping. J: $P = 0,182$

11. Detalning standartga mos bo'lmaslik ehtimolligi p=0,2 ga teng. Tavakkaliga olingan 100 ta detalgan standartga mos bo'lmagan detallar nisbiy chastotasining p=0,2 ehtimollikdan chetlanishi absolyut qiymati boyicha 0,01 dan katta bo'lmaslik ehtimolligi topilsin. J: $P\left(\left|\frac{m}{100} - 0,2\right| \le 0,01\right) \approx 0,1974$

12. Texnik nazorat bo'limi 10 ta detaldan iborat partiyani tekshirmoqda. Detalning standartga mos bo'lish ehtimolligi 0,75 ga teng. Standartga mos deb tan olinadigan detallarning eng katta ehtimolli sonini toping. J: 8

§ 4. Tasodifiy miqdorlar

Tabiat hodisalari yoki sinov natijalarini kuzatish jarayonida turlicha miqdorlarga duch kelamiz. Masalan, o'yin soqqasini tashlaganda yoqlarida 1,2,3,4,5,6 raqamlar (ochkolar)dan biri chiqishi mumkin. Ammo, chiqqan ochkoni avvaldan aytib bo'lmaydi. Yoki, uy hayvonlarining oylik semirishi tasodifiy sonli intervaldan iborat bo'lib, u beriladigan ratsion miqdori, ob-havo va shu kabi omillarga bog'liq. Demak, shunday miqdorlar mavjud ekanki, ularning qiymatlari turli tasodifiy omillarga bog'liq bo'lib, avvaldan qanday qiymatga teng bo'lishini aniq aytib bo'lmas ekan.

Tasodifiy miqdor deb, avvaldan no'malum va tasodifga bog'liq bo'lgan hamda sinov natijasida mumkin bo'lgan sonli qiymatlardan birini qabul qiladigan miqdorga aytiladi.

Tasodifiy miqdorlar odatda lotin alifbosining bosh harflari *X, Y, Z....* bilan, ularning mumkin bo'lgan qiymatlari esa tegishli kichik *x, y, z, …* harflar bilan belgilanadi.

Diskret tasodifiy miqdor deb mumkin bo'lgan qiymatlari sonlar ketma-ketligidan iborat miqdorga aytiladi. Diskret tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari chekli yoki sanoqli bolishi mumkin.

Misollar 1. X tasodifiy miqdor, o'yin soqqasini tashlaganda chiqqan ochkolar soni bo'lsin. Bu miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari:

$$x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3,\ x_4=4,\ x_5=5,\ x_6=6$$

2. Y tasodifiy miqdor tangani to'rt marta tashlaganda gerb tomoni tushish nisbiy chastotasi bo'lsin. Uning mumkin bo'lgan qiymatlari:

$$y_1=0,\ y_2=0{,}25;\ y_3=0{,}50;\ y_4=0{,}75;\ y_5=1$$

Uzluksiz tasodifiy miqdor deb, mumkin bo'lgan qiymatlari biror (chekli yoki cheksiz) oraliqning barcha qiymatlarini qabul qiladigan miqdorga aytiladi. Masalan, biror fizik kattalikni o'lchash natijasi yoki nishonning markazidan o'q tekkan joygacha masofa uzluksiz tasodifiy miqdorga misol bo'ladi.

4.1 Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni

Diskret tasodifiy miqdorni tavsiflash uchun uning barcha mumkin bo'lgan qiymatlari $x_1, x_2, \dots, x_n$ larnigina emas, balki $X=x_1$, $X=x_2, \dots . X=x_n$ hodisalarning ehtimolliklarini ham, ya'ni

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{x_i})=p_\mathrm{i},\quad \mathrm{i}=1,n \qquad \textbf{(4.1)}$$

larni ko'rsatish lozim.

Diskret tasodifiy miqdorning **taqsimot qonuni** deb, uning mumkin bo'lgan qiymatlari bilan ularning ehtimolliklari orasidagi moslikga aytiladi.

X diskret tasodifiy miqdor taqsimot qonuni berilishining eng sodda shakli jadval usulidir.

X	x_1	x_2	…..	x_n
p	p_1	p_2	…..	p_n

bu yerda,

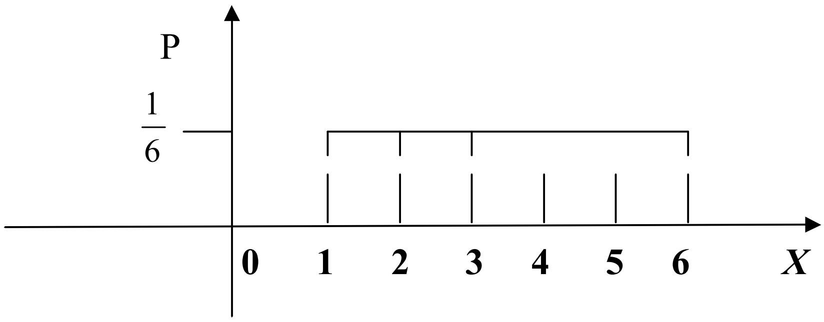
$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \qquad (4.2)$$

Ba'zi hollarda taqsimot qonunini grafik holda tasvirlash qulaydir. Bunda, to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida absissalar o'qi bo'ylab X tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari, ordinatalar o'qi bo'ylab esa ularga mos ehtimolliklar joylashtiriladi. (x_i, p_i) nuqtalarni $(i=\overline{1,n})$ tutashtiruvchi siniq chiziq **taqsimot ko'pburchagi** deyiladi.

Masalan, o'yin soqqasi tashlanganda, tushuvchi ochkolar soni (X diskret tasodifiy miqdor)ning taqsimot qonuni

X	$x_1=1$	$x_2=2$	$x_3=3$	$x_4=4$	$x_5=5$	$x_6=6$
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Bu tasodifiy miqdorning taqsimot ko‘pburchagi



2-misol. X tasodifiy miqdor - har bir otishda o‘qning nishonga tegish ehtimolligi p ga teng .Birinchisi nishonga tekkunga qadar otishlar sonining taqsimot qonunini yozing.

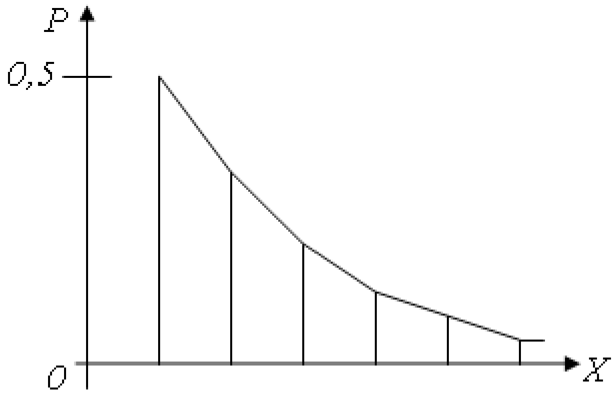
Yechish. Bu holda, X tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari barcha 1,2,3,.... natural sonlardir. $X=1$ hodisa ehtimolligi p ga tengligi ravshan. Agar $X=2$ bo‘lsa, bu birinchi o‘q nishonga tegmasdan ikkinchi o‘q nishonga tekkanini bildiradi va $X=2$ ning ehtimolligi hodisalarning birgalikda ro‘y berish ehtimolligi sifatida qp ga teng bo‘ladi $(q=1-p)$. Shunga o‘xshash, $X=n$ ning ehtimolligi $q^{n-1}p$ ga tengligini topamiz. Demak, taqsimot qonun quyidagi jadval ko‘rinishida beriladi.

x_n	1	2	3	4	...	n	...
p_n	p	qp	q^2p	q^3p	...	$q^{n-1}p$	...

$\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ qator yig‘indisini topamiz. Jadvalga ko‘ra:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}p = p\left(1+q+q^2+.....+q^{n-1}+....\right).$$

Qavs ichidagi qator $0<q<1$ maxrajli cheksiz geometrik progressiya hadlari yig’indisidan iborat bo‘lib, yig‘indisi $\frac{1}{1-q}=\frac{1}{p}$ ga teng, demak $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = p\cdot\frac{1}{p}=1$ .Bu tasodifiy miqdorning taqsimot ko‘pburchagi $p=q=0,5$ bo‘lgan hol uchun quyida tasvirlangan.



Diskret tasodifiy miqdorning ba'zi muhim taqsimot qonunlarini keltiramiz.

4.2 Binomial taqsimot

Faraz qilaylik, n ta bog'liqsiz sinov o'tkazilgan bo'lib, ularni har birida A hodisaning ro'y berish ehtimolligi o'zgarmas va p ga teng bo'lsin, demak, A hodisaning ro'y bermaslik ehtimolligi $q=1-p$ ga teng. X diskret tasodifiy miqdor sifatida bu sinovlarda A hodisaning ro'y berishlar sonini olamiz.

Ravshanki, n ta sinovda A hodisa ro'y bermaydi, yoki 1 marta, yoki 2 marta, yoki…..n marta ro'y berishi mumkin.

Demak, X ning mumkin bo'lgan qiymatlari quyidagicha:

$$x_1=0, \quad x_2=1, \quad x_3=2, \quad \ldots, \quad x_{n+1}=n$$

Bu mumkin bo'lgan qiymatlarning ehtimolliklarini topish uchun Bernulli formulasidan foydalanamiz:

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k=0,1,\ldots,n.$$

Shunday qilib,

$$p_1=P_1(0)=C_n^0 p^0 q^{n-0}=q^n; \quad p_2=P_2(1)=C_n^1 pq^{n-1}=npq^{n-1}; \ \ldots$$

$$p_n=P_n(n-1)=C_n^{n-1}p^{n-1}q=np^{n-1}q; \quad p_{n+1}=P_n(n)=C_n^n p^n q^0=p^n.$$

Endi X diskret tasodifiy miqdor taqsimot qonunini jadval ko'rinishida yozamiz.

X	0	1	…	k	…	n-1	n
p	q^n	npq^{n-1}	…	$C_n^k p^k q^{n-k}$	…	$np^{n-1}q$	p^n

Yuqoridagi jadval X diskret tasodifiy miqdorning **binomial taqsimoti** deyiladi. Umuman, binomial taqsimot deb, ehtimolliklari Bernulli formulasi bilan aniqlanadigan taqsimotga aytiladi, bunda

$$q^n+npq^{n-1}+\ldots+C_n^k p^k q^{n-k}+\ldots+np^{n-1}q+p^n=(q+p)^n=1$$

3-misol. Tanga ikki marta tashlandi. X diskret tasodifiy miqdor-"gerb" tomon tushishlar soning taqsimot qonunini yozing.

Yechish. Tangani har bir tashlashda “gerb” tomon tushishi ehtimolligi $p=\frac{1}{2}$, shuningdek, “gerb” tushmasligi ham $q=1-p=\frac{1}{2}$ ga teng.

Tanga ikki marta tashlanganda “gerb” 2 marta, yoki 1 marta, yoki mutlaqo tushmasligi mumkin. Shunday qilib, X ning mumkin bo‘lgan qiymatlari $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=0$. Mumkin bo‘lgan qiymatlar ehtimolliklarini topamiz.

$$p_1=P_2(2)=p^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}=0{,}25\ ;$$

$$p_2=P_2(1)=C_2^1pq=2pq=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=0{,}5$$

$$p_3=P_2(0)=q^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=0{,}25\ ;$$

Demak, izlanayotgan taqsimot qonuni

X	2	1	0
P	0,25	0,5	0,25

Bu yerda, $p_1+p_2+p_3=0{,}25+0{,}5+0{,}25=1$.

4.3 Puasson taqsimoti

X diskret tasodifiy miqdor 0,1,2,3,.... qiymatlarni

$$P(X=\kappa)\approx\frac{\lambda^{л}e^{-\lambda}}{\kappa!}$$

ehtimolliklar bilan qabul qilsin. Bu holda, quyidagi taqsimot qonunini hosil qilamiz.

X	0	1	2	…..	k	.....
p	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	.....	$\frac{\lambda^{\kappa}}{\kappa!}e^{-\lambda}$	....

Yuqoridagi jadval **Puasson taqsimoti** deyiladi.

Bunda, $\sum\limits_{k=0}^{\infty}P_n(k)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=e^{-\lambda}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=1$.

O‘Z-O‘ZINI TEKSHIRISH UCHUN SAVOLLAR

1.Diskret tasodifiy miqdor ta’rifini ayting va misollar keltiring.
2.Uzluksiz tasodifiy miqdor ta’rifini ayting va misol keltiring.
3.Ehtimollikning taqsimot qonuni deb nimaga aytiladi?
4.Taqsimot ko‘pburchagi nima?
5.Binomial taqsimotni ta’riflang.
6.Binomial taqsimot uchun $\sum\limits_{k=1}^{\infty}C_n^k p^k q^{n-k}=1$ ekanligini ko‘rsating.
7.Puasson taqsimotini ta’riflang.

8.Puasson formulasi uchun $\sum_{k=0}^{\infty} P_n(k)=1$ ekanligini ko‘rsating.

Mustaqil yechish ushun mashqlar

1.Partiyada 10% nostandart detal bor. Tavakkaliga 4 ta detal olingan. Olingan detallar orasidagi nostandart detallar sonining taqsimot qonuni yozing.

J:

X	0	1	2	3	4
P	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001

2.Ikkita o‘yin soqqasi bir vaqtda 2 marta tashlanadi. X diskret tasodifiy miqdor – ikkita o‘yin soqqasida juft ochkolar tushish sonining taqsimot qonunini yozing.

J:

X	0	1	2
P	0,5625	0,375	0,0625

3.O‘yin soqqasi 3 marta tashlandi. 4 ochkolik yoq tushishi taqsimot qonunini yozing.

4.Agar hodisaning har bir sinovda ro‘y berish ehtimolligi 0,6 ga teng bo‘lsa, bu hodisaning uchta bog’liqsiz sinovda ro‘y berish soni ehtimolliklari taqsimotini yozing.

5.Har bir otishda o‘qning nishonga tegish ehtimolligi *0,8* ga teng va o‘qning birinchisi nishonga tekkuncha otishlar sonining ehtimolliklari taqsimotini yozing.

6. O‘yin soqqasi 3 marta tashlandi, olti ochko chiqishining taqsimot qonunini yozing.

7. Agar har bir sinovda A hodisaning ro‘y berish ehtimolligi 0,6 ga teng bo‘lsa, bu hodisaning uchta o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan sinovda ro‘y berishlar sonining taqsimot qonunini tuzing.

J:

k	0	1	2	3
p	0,064	0,288	0,432	0,216

8. To‘quvchi 1000 urchuqda ishlaydi. Bir minut davomida bitta urchuqda ip uzilish ehtimolligi 0,004 ga teng. Bir minut davomida beshta urchuqda ip uzilish ehtimolligini toping. J: $P_{1000}(5)=0{,}1562$

9. Korxona kommutatori 100 abonentga xizmat qiladi. Bir minut davomida abonentning kommutatorga qo‘ng‘iroq qilish ehtimolligi 0,02 ga teng. Quyidagi ikkita hodisadan qaysinisi kattaroq ehtimollikga ega: bir minut davomida 3 abonent qo‘ng‘iroq qiladi; 4 abonent qo‘ng‘iroq qiladi?

J: $P_{100}(3)=0{,}18;\quad P_{100}(4)=0{,}09$

10. Darslik 100 000 nusxada chop etilgan.Chop etilgan darslikning sifatsiz tikilgan ekanligining ehtimolligi 0,0001 ga teng. Tirajning ichida sifatsiz tikilgan kitoblar soni roppa-rosa 5 ta bo‘lish ehtimolligini toping.

J: $P_{100000}(5)=0{,}03575$

§ 5. **Diskret tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalari**

Tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni shu tasodifiy miqdorni to‘liq tavsiflaydi. Ammo, ba’zi hollarda tasodifiy miqdorni yig‘ma tasvirlaydigan sonlardan foydalanish qulay bo‘ladi. Bunday sonlar tasodifiy miqdorning **sonli xarakteristikalari** deyiladi. Sonli xarakteristikalarga **matematik kutilmasi** va **dispersiya** kiradi.

5.1 Diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi

Ta’rif. *X* diskret tasodifiy miqdorning **matematik kutilmasi** deb, uning mumkin bo‘lgan qiymatlarini mos ehtimolliklariga ko‘paytmalari yig‘indisiga teng songa aytiladi va *M(X)* yoki m_x bilan belgilanadi.

Shunday qilib, agar *X* diskret tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan $x_1, x_2, ..., x_n$ qiymatlari mos ravishda $p_1, p_2, ..., p_n$ ehtimolliklarni qabul qilsa, u holda,ta’rifga ko‘ra

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \qquad (5.1)$$

Agar tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari sanoqli (cheksiz) bo‘lsa, u holda,

$$m_x = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n + ... = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

1-misol. Quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan *X* diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping:

X	4	6	10
p	0,5	0,2	0,3

Yechish $M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = 4 \cdot 0{,}5 + 6 \cdot 0{,}2 + 10 \cdot 0{,}3 = 6{,}2$

Matematik kutilma quyidagi xossalarga ega:

1. $M(C) = C$, *C*- o‘zgarmas, xususan, $M(M(X)) = M(X)$
2. $M(X_1 + X_2 + ... + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n)$
3. $M(X_1 \cdot X_2 \cdot ... \cdot X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot ... \cdot M(X_n)$, xususan, $M(CX) = CM(X)$.
4. Binomial taqsimotning matematik kutilmasi sinovlar sonini bitta sinovda hodisaning ro‘y berish ehtimolligi ko‘paytmasiga teng:

$$M(X) = np \qquad (5.2)$$

Haqiqatdan,

$$M(X) = \sum_{k=0}^{n} kP_n(k) = \sum_{k=o}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} =$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} q^{n-k} = np \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^j p^j q^{n-j} = np \sum_{j=0}^{n-1} P_{n-1}(j) = np \cdot 1 = np.$$

5.Puasson taqsimotining matematik kutilmasi

$$M(X)=\lambda,\quad \lambda=np \tag{5.3}$$

Haqiqatdan,

$$M(X)=\sum_{k=0}^{\infty}kP_n(k)=\sum_{k=o}^{\infty}k\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda.$$

2-misol. Agar X va Y tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi ma'lum, ya'ni $M(X)=5$; $M(Y)=3$ bo'lsa, $Z=X+2Y$ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping.

Yechish. Matematik kutilmaning xossalaridan,

$M(Z)=M(X+2Y)=M(X)+2M(Y)=5+2\cdot 3=11$

Ta'rif. $X-M(X)$ tasodifiy miqdor X tasodifiy miqdorni o'zining matematik kutilmasidan **chetlanishi** (og'ishi) deyiladi.

Chetlanish quyidagi taqsimot qonuniga ega:

$X-M(X)$	$x_1-M(X)$	$x_2-M(X)$	$\dots$	$x_n-M(X)$
p	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Chetlanishning muhim xossalaridan biri

$$M(X-M(X))=0 \tag{5.4}$$

Haqiqatdan,

$$M(X-M(X))=M(X)-M(M(X))=M(X)-M(X)=0.$$

5.2 Diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasi

Taqsimot qonunlari turlicha, ammo, matematik kutilmalari bir xil bo'lgan tasodifiy miqdorlar ham uchrab turadi. Masalan, X va Y diskret tasodifiy miqdorlar quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan bo'lsin.

X	-2	0	2
p	0,4	0,2	0,4

Y	-6	0	3
p	0,3	0,1	0,6

Matematik kutilmalarni topamiz:

$$M(X)=-2\cdot 0{,}4+0\cdot 0{,}2+2\cdot 0{,}4=0 \qquad M(Y)=-6\cdot 0{,}3+0\cdot 0{,}1+3\cdot 0{,}6=0$$

Ko'rinib turibdiki, X va Y diskret tasodifiy miqdorlar matematik kutilmalari teng ammo, ularning mumkin bo'lgan qiymatlari X uchun "yaqinroq" Y uchun esa "tarqoqroq".Demak, matematik kutilma tasodifiy miqdorni to'la tavsiflamaydi. Amaliyotda, ko'p hollarda tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlarini uning o'rtacha qiymati atrofida **tarqoqligini** baholash talab qilinadi. Ravshanki, (5.4)dan $X-M(X)$ chetlanish yordamida X tasodifiy miqdor o'rtacha chetlanishini, ya'ni uning tarqoqlik darajasini aniqlab bo'lmaydi. Shu sababli, tasodifiy miqdor mumkin bo'lgan qiymatlarini uning matematik kutilmasi atrofida tarqoqligi darajasini aniqlash maqsadida chetlanish kvadratining matematik kutilmasi qaraladi.

Ta'rif. X diskret tasodifiy miqdorning **dispersiyas**i (tarqoqligi) deb, uni o'zining matematik kutilmasidan chetlanishi kvadratining matematik kutilmasiga aytiladi. Dispersiya $D(X)$ bilan belgilanadi. Shunday qilib,

$$D(X)=M(X-M(X))^2 \tag{5.5}$$

yoki matematik kutilma xossalaridan foydalanib, dispersiyani hisoblash uchun qulay bo‘lgan quyidagi formulani hosil qilish mumkin.

$$D(X) = M\left(X^2\right) - \left(M(X)\right)^2 \qquad (5.6)$$

3-misol. Yuqorida (1-misolda)gi taqsimot qonuni bilan berilgan X diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

Yechish. Ma’lumki, $M(X) = 6$, endi X^2 miqdorning taqsimot qonunini yozamiz.

X^2	4^2	6^2	10^2
P	0,2	0,3	0,5

yoki

X^2	16	36	100
P	0,2	0,3	0,5

$M\left(X^2\right)$ matematik kutilmani topamiz.

$$M\left(X^2\right) = 16 \cdot 0{,}2 + 36 \cdot 0{,}3 + 100 \cdot 0{,}5 = 3{,}2 + 10{,}8 + 50 = 64$$

Izlanayotgan dispersiya

$$D(X) = M\left(X^2\right) - \left(M(X)\right)^2 = 64 - 6^2 = 28.$$

Dispersiyaning asosiy xossalari

1) $D(C) = 0$, C-o‘zgarmas: 2) $D(CX) = C^2 D(X)$

3) $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$, xususan $D(X + C) = D(X)$.

Yuqorida, Binomial va Puasson taqsimoti matematik kutilmalari kabi dispersiya uchun quyidagi formulalarni yozish mumkin(isbotini o‘quvchiga qoldiramiz):

4) Binomial taqsimot uchun $D(X) = npq, \quad q = 1 - p$

5) Puasson taqsimoti uchun $D(X) = \lambda, \quad \lambda = np$.

4-misol Har birida hodisaning ro‘y berish ehtimolligi 0,7 ga teng bo‘lgan 20 ta bog’liqsiz sinovda X diskret tasodifiy miqdor ro‘y berishlar soni dispersiyasini toping.

Yechish. $D(X) = npq$ formuladan foydalanamiz, bunda n=20, p=0,7, $q = 1 - p = 0{,}3$; $D(X) = 20 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 4{,}2$.

Ma’lumki, dispersiya tasodifiy miqdor o‘lchamiga nisbatan kvadrat birlikda bo‘ladi. Sonli xarakteristikalar tarqoqliligi bir xil o‘lchamda bo‘lishi uchun o‘rtacha kvadratik chetlanish qo‘llaniladi.

X diskret tasodifiy miqdorning $\sigma(X)$ **o‘rtacha kvadratik chetlanishi** deb, dispersiyadan olingan kvadrat ildizga aytiladi:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \qquad (5.7)$$

5-misol. Yuqoridagi taqsimot qonuni bilan berilgan X diskret tasodifiy miqdorning o‘rtacha kvadratik chetlanishi topilsin.

Yechish. Ma’lumki, $D(X) = 28$, demak, $\sigma(X) = \sqrt{28} \approx 5{,}3$.

5.3 Nazariy momentlar

Tasodifiy miqdorni yetarlicha tavsiflash uchun, uning sonli xarakteristikalarini qo'shimcha qurish masalasi tug'iladi. Shunday sonli xarakteristikilarga turli tartibli momentlar kiradi. Xususiy holda, matematik kutilma va dispersiyadan iborat boshlang'ich va markaziy momentlarni qaraymiz.

X tasodifiy miqdorning k-tartibli **boshlang'ich momenti** deb, X^k miqdorning matematik kutilmasiga aytiladi:

$$\nu_k = M\left(X^k\right) \qquad (5.8)$$

Jumladan, $\nu_1 = M(X), \quad \nu_2 = M\left(X^2\right),$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \nu_2 - \nu_1^2 ;$$

X tasodifiy miqdorning k-tartibli **markaziy momenti** deb, $(X - M(X))^k$ miqdorning matematik kutilmasiga aytiladi:

$$\mu_k = M\left((X - M(X))^k\right)$$

Jumladan, $\mu_1 = M[X - M(X)] = 0$ (chetlanishning matematik kutilmasi)

$$\mu_2 = M\left(X^2\right) - (M(X))^2 = D(X)$$

Markaziy va boshlang'ich momentlar quyidagi munosabat bilan bog'langan.

$$\mu_k = \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k C_n^k \nu_1^k \nu_{n-k} + (-1)^{n-1}(n-1)\nu_1^n \qquad (5.9)$$

Xususan, n=2,3 4 da

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2, \quad \mu_3 = \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4$$

6- misol. X diskret tasodifiy miqdor taqsimot qonuni bilan berilgan

X	1	2	3
p	0,2	0,3	0,5

Birinchi, ikkinchi va uchinchi tartibli markaziy momentlarni toping.

Yechish. Avvalo, boshlang'ich momentlarni topamiz.

$$\nu_1 = M(X) = 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}5 = 2{,}3$$

$$\nu_2 = M\left(X^2\right) = 1 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}3 + 9 \cdot 0{,}5 = 5{,}9$$

$$\nu_3 = M\left(X^3\right) = 1 \cdot 0{,}2 + 8 \cdot 0{,}3 + 27 \cdot 0{,}5 = 16{,}1$$

Markaziy momentlarni hisoblash uchun ularni boshlang'ich momentlar orqali ifodalaydigan (5.10) formuladan foydalanamiz.

Birinchi tartibli markaziy moment nolga teng: $\mu_1 = 0$;

$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = 5{,}9 - 2{,}3^2 = 0{,}61$;

$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3 = 16{,}1 - 3 \cdot 5{,}9 \cdot 2{,}3 + 2 \cdot 2{,}3^3 = -0{,}276$.

O‘Z-O‘ZINI TEKSHIRISH UCHUN SAVOLLAR
1.Diskret tasodifiy miqdorni ta’riflang. Misollar keltiring.
2.Matematik kutilma ta’rifini keltiring.
3.Matematik kutilma xossalarini ayting.
4.Chetlanish deb nimaga aytiladi?
5.Chetlanishning matematik kutilmasi nimaga teng?
6.Dispersiya deb nimaga aytiladi?
7.Dispersiyaning xossalarini ayting.
8.Binomial taqsimot uchun $D[X]=npq$ ekanligini isbotlang.
9.Dispersiyani hisoblash formulalarini yozing.
10 Dispersiya uchun $D(X)=M(X^2)-(M(X))^2$ ekanligini ko‘rsating.
11.O‘rtacha kvadratik chetlanish deb nimaga aytiladi?
12. Boshlang‘ich va markaziy momentni ta’riflang.
13. Markaziy momentlarni boshlang‘ich momentlar orqali hisoblash formulasini yozing.

Mustaqil yechish ushun mashqlar

1. Diskret tasodifiy miqdorning

X	6	3	1
p	0,2	0,3	0,5

taqsimot qonunini bilgan holda, uning matematik kutilmasini toping. J: 2,6

2.Nishonga qarata 4 ta o‘q uzildi, ularning tegish ehtimolliklari $p_1=0{,}6;\ \ p_2=0{,}4; =\ p_3=0{,}5;\ \ va\ \ p_4=0{,}7$. Nishonga tegishlar jami sonining matematik kutilmasini toping. J: 5,7

3.Diskret bog’liqsiz tasodifiy miqdorlar quyidagi taqsimot qonunlari orqali berilgan:

X	1	2
p	0,2	0,8

Y	0,5	1
p	0,3	0,7

XY ko‘paytmaning matematik kutilmasini ikki usul bilan: 1) XY ning taqsimot qonunini tuzib; 2) 3-xossadan foydalanib toping. J: 1,53

4. Detalning ishonchliligini tekshirish vaqtida uning buzilish ehtimolligi 0,2 ga teng. Agar 10 ta detal sinalayotgan bo‘lsa, buzilgan detallar sonining matematik kutilmasini toping. J: 2 ta detal

5. 20 ta lotereya bileti sotib olingan. Bitta biletga yutuq chiqish ehtimolligi 0,3 ga teng bo‘lsa, yutuq chiqadigan lotoreya biletlar sonining matematik kutilmasini toping. J: 6 ta bilet

6. X tasodifiy miqdorning dispersiyasi 5 ga teng. Quyidagi miqdorlarning dispersiyasini toping. *a*) $X-1$; *b*) $-2X$; *c*) $3X+6$. J: *a*) 5; *b*) 20; *c*) 45

7. Taqsimot qonuni ma’lum bo‘lgan tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping:

X	0,1	2	10	20
p	0,4	0,2	0,15	0,25

J: 67,6404.

8. X tasodifiy miqdor ikkita mumkin bo‘lgan qiymat: x_1 ni 0,3 ehtimollik bilan, x_2 ni 0,7 ehtimollik bilan qabul qilishi mumkin, shu bilan birga $x_2 > x_1$, $M(X)=2{,}7$ va $D(X)=0{,}21$ ni bilgan holda x_1 va x_2 ni toping. J: $x_1=2$, $x_2=3$.

9.Suv omboridan baliqlar chiqib ketmasligi uchun, ularning chiqadigan suv yo‘lida qator qilib ketma-ket to‘rtta maxsus to‘siqlar(shlyuzlar) qo‘yilgan. Baliqlarning har bir shlyuzdan chiqib ketish ehtimolligi $\frac{3}{5}$ ga teng. Eng birinchi baliqlarni o‘tkazmay qo‘ygan shlyuzlar sonining taqsimot qonunini tuzing. Uning matematik kutilmasi va dispersiyasini toping. J: $M(X)=1,31$; $D(X)=1,95$.

10. X tasodifiy miqdor – har birida ro‘y berish ehtimolligi 0,7 ga teng bo‘lgan 100 ta bog’liqsiz sinovda hodisaning ro‘y berishlar sonining dispersiyasini toping. J: 21.

11. Tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan:

X	2	4	8
p	0,1	0,5	0,4

Bu miqdorning o‘rtacha kvadratik chetlanishini toping. J: 2,2

12.Ushbu

X	-5	2	3	4
p	0,4	0,3	0,1	0,2

taqsimot qonuni bilan berilgan X diskret tasodifiy miqdorning birinchi, ikkinchi va uchinchi tartibli markaziy momentlarini toping.

§ 6. Katta sonlar qonuni

Biz ehtimolliklar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri tasodifiy miqdorlar bilan tanishdik. Ma’lumki, tasodifiy miqdor sinov yakunida mumkin bo‘lgan qiymalardan qaysi birini qabul qilishini oldindan ishonch bilan aytib bo‘lmaydi, chunki u bir qancha tasodifiy sabablarga bog‘liq. Shunday ekan, ko‘p sonli tasodifiy miqdorlar haqida nima deyish mumkin? Ayni paytda shuni ta’kidlash lozimki, yetarlicha katta sondagi tasodifiy miqdorlar yig‘indisining tasodifiylik xususiyati yo‘qolib, u qonuniyatga aylanib borar ekan. Quyida shu holatlarni o‘rganamiz.

6.1Chebishev tengsizligi

Lemma X - faqat manfiy bo‘lmagan qiymatlar qabul qiluvchi tasodifiy miqdor bo‘lsin. U holda,

$$P(X\geq 1)\leq M(X) \qquad (6.1)$$

Isboti. Bu tasdiqni diskret tasodifiy miqdor uchun isbotlaymiz. X diskret tasodifiy miqdor taqsimot qonuni bilan berilgan bo‘lsin.

X	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

bu yerda,

$$\sum_i p_i = 1, \quad x_i \geq 0 \quad \left(i=\overline{1,n}\right)$$

Birgalikda bo‘lmagan hodisalar ehtimolliklarini qo‘shish teoremasiga ko‘ra

$$P(X\geq 1)=\sum_{x_i\geq 1} P(X=x_i)$$

Biroq, $x_i \geq 1$ uchun $P(X = x_i) \leq x_i P(X = x_i)$

Shuning uchun,

$$P(X \geq 1) = \sum_{x_i \geq 1} P(X = x_i) \leq \sum_{x_i \geq 1} x_i P(X = x_i) \qquad (6.2)$$

(6.2) ning o‘ng tomoniga x_i<1 uchun $\sum_{x_i < 1} x_i P(X = x_i)$ yig‘indini qo‘shamiz, bu yig‘indi hamma vaqt musbat.U holda,

$$P(X \geq 1) \leq \sum_{x_i \geq 1} x_i P(X = x_i) + \sum_{x_i < 1} x_i P(X = x_i) = \sum_i x_i P(X = x_i) = \sum_i x_i p_i = M(X).$$

Haqiqatdan, (6.1) tengsizlik o‘rinli.

Teorema. Har qanday X tasodifiy miqdor uchun har bir $\varepsilon > 0$ da

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \qquad (6.3)$$

tengsizlik o‘rinli.

Isbot. $|X - M(X)| \geq \varepsilon$ hodisa $\frac{(X - M(X))^2}{\varepsilon^2} \geq 1$ hodisaga teng kuchli. U holda,

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) = P\left(\frac{(X - M(X))^2}{\varepsilon^2} \geq 1\right).$$

Yuqoridagi lemmadan, shuningdek matematik kutilma xossalari va dispersiya ta’rifidan quyidagiga ega bo‘lamiz.

$$P\left(\frac{(X - M(X))^2}{\varepsilon^2} \geq 1\right) \leq M\left[\frac{(X - M(X))^2}{\varepsilon^2}\right] = \frac{1}{\varepsilon^2} M\left[(X - M(X))^2\right] = \frac{1}{\varepsilon^2} D(X) = \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

Shunday qilib,

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Qarama-qarshi hodisalar ehtimolliklari yig‘indisi birga tengligidan

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \qquad (6.4)$$

(6.3) va (6.4) **Chebishev tengsizligi** deyiladi (P.L.Chebishev, 1821-1894, rus matematigi).

(6.4) tengsizlik, agar ε yetarlicha kichik bo‘lsa tasodifiy miqdor o‘zining matematik kutilmasiga yaqin qiymat qabul qilishi ehtimolligini baholashni anglatadi.

1-misol. X diskret tasodifiy miqdor dispersiyasi $D(X) = 0{,}001$. X ning $M(X)$dan chetlanishi 0,1 dan kattaga farq qilish ehtimolligini baholang.

Yechish: $P(|X - M(X)| \geq 0{,}1) \leq \frac{D(X)}{0{,}1^2} = \frac{0{,}001}{0{,}01} = 0{,}1$.

Izoh. Chebeshev tengsizligining nazariy ahamiyati juda katta. Ammo, amaliyotda Chebishev tengsizligining ahamiyati cheklangan, chunki ba'zi hollarda u qo'pol, ba'zan esa trivial baho beradi. Masalan, $D(X) > \varepsilon^2$ bo'lsa, u holda, $\frac{D(X)}{\varepsilon^2} > 1$ va $1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2} < 0,$ bu esa mumkin emas.

6.2 Chebishev teoremasi (katta sonlar qonuni)

Agar bog'liqsiz $X_1, X_2, \ldots X_n$ tasodifiy miqdorlar dispersiyalari yagona o'zgarmas C sondan katta bo'lmasa, ya'ni $D(X_i) \le C(i = \overline{1,n})$ u holda, har qanday kichik $\varepsilon > 0$ son uchun $\left|\overline{X} - M(\overline{X})\right| < \varepsilon$ hodisaning ehtimolligi tasodifiy miqdorlar soni n yetarlicha katta bo'lganda birga yaqin bo'ladi, ya'ni

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{X} - M(\overline{X})\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad (6.5)$$

bu yerda,

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots X_n}{n}$$

Isboti (6.4) Chebishev tengsizligiga asosan,

$$P\left(\left|\overline{X} - M(\overline{X})\right| < \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{D(\overline{X})}{\varepsilon^2} \qquad (6.6)$$

Dispersiyani xossasidan $D(\overline{X}) = \frac{1}{n^2}\left(D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n)\right) \le \frac{nC}{n^2} = \frac{C}{n}$

Bu yerda, (6.6) tengsizlik va har qanday hodisaning ehtimolligi birdan oshmasligidan

$$1 \ge P\left(\left|\overline{X} - M(\overline{X})\right| < \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{C}{\varepsilon^2 n} \qquad (6.7)$$

(6.7) tengsizlikdan $n \to \infty$ da limitga o'tib, (6.5) ni hosil qilamiz.

2-misol. X_1, X_2,..., X_n,... o'zaro bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi quyidagi taqsimot qonun bilan berilgan:

X_n	$-\sqrt{n}$	0	$\sqrt{n}$
p	$\frac{1}{n}$	$1-\frac{2}{n}$	$\frac{1}{n}$

Bu ketma-ketlikka Chebishev tengsizligini qo'llash mumkinmi?

Yechish: Masalani shartidan X_n (n=1, 2...) tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz, demak, teoremaning birinchi sharti bajariladi. Endi, ularning dispersiyalari tekis chegaralanganlik shartining bajarilishini tekshiramiz.

Avvalo, $M(X_n)$ va $M(X_n^{\,2})$ larni topamiz.

$$M(X_n) = \sqrt{n} \cdot \frac{1}{n} + 0 \cdot (1 - \frac{2}{n}) + \sqrt{n} \cdot \frac{1}{n} = 0$$

$$M(X_n^2) = (-\sqrt{n})^2 \cdot \frac{1}{n} + 0^2 \cdot (1 - \frac{2}{n}) + (\sqrt{n})^2 \cdot \frac{1}{n} = 2.$$

Demak,

$$D(X_n) = M(X_n^2) - (M(X_n))^2 = 2. \quad (n=1, 2...)$$

Shunday qilib, berilgan X_n tasodifiy miqdorlar har birining dispersiyasi 2 soni bilan tekis chegaralangan. Bu ketma-ketlikka Chebishev teoremasini qo‘llash mumkin.

Chebishev teoremasini bir asosiy **xususiy hol**ini qaraymiz. Agar barcha tasodifiy miqdorlar bir xil matematik kutilmaga ega ya’ni $M(X_1) = M(X_2) = ... = M(X_n) = a$ va $D(X_i) \le C(i = \overline{1,n})$ bo‘lsa , u holda,

$$\lim_{n\to\infty} P(|\overline{X} - a| < \varepsilon) = 1 \qquad (6.8)$$

Chebishev teoremasining mazmuni quyidagicha: Ayrim bog’liqsiz tasodifiy miqdorlar o‘z matematik kutilmalaridan ancha farq qiladigan qiymatlar qabul qilsada, yetarlicha katta sondagi tasodifiy miqdorlar o‘rta arifmetigi $\overline{X}$ ularning matematik kutilmasining o‘rta arifmetigiga katta ehtimollik bilan yaqin bo‘ladi.

Eslatma. Statistikada qo‘llaniladigan tanlanma usuli Chebishev teoremasiga asoslangan.

6.3 Bernulli teoremasi

Chebishev teoremasining xususiy hollaridan biri **«Katta sonlar qonuni»** bilan yuritilgan Bernulli teoremasini qaraymiz.

Teorema Agar *n* ta bog’liqsiz sinovning har birida *A* hodisaning ro‘y berish ehtimolligi *p* ga teng va sinovlar soni yetarlicha katta bo‘lsa, u holda, har qanday $\varepsilon > 0$ son uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad (6.9)$$

Isboti. X_i bilan bog’liqsiz *i* - sinovda hodisaning ro‘y berishlar sonini belgilaymiz $(i = \overline{1,n})$.U holda,

$$m=X_1+X_2+\ldots+X_n, \quad \frac{m}{n} = \frac{X_1 + ...X_n}{n} = \overline{X} \quad M(\overline{X}) = p, \quad q=1-p,$$

$$D(\overline{X_i}) = np, \quad p+q=1 \text{ ekanligidan } pq \le \frac{1}{4}.$$

Shunday qilib, $D(\overline{X_i}) \le \frac{1}{4}$ va X_i ($i=1,\ n$) tasodifiy miqdor uchun Chebishev teoremasining barcha shartlari bajariladi. Demak, (6.8) formula (6.9) ga aylanadi.

Bernulli teoremasining amaliy ahamiyati quyidagicha: yetarlicha katta bog’liqsiz sinovlarning har birida *A* hodisaning ro‘y berish ehtimolligi o‘zgarmas *p* songa teng bo‘lsa, *A* hodisaning ro‘y berish nisbiy chastotasi uning ehtimolligidan kam farq qiladi.

O‘Z-O‘ZINI TEKSHIRISH UCHUN SAVOLLAR

1.Katta sonlar qonunining mohiyati nimadan iborat.
2.Yetarlicha katta sondagi bog’liqsiz tasodifiy miqdorlarning arifmetik o‘rtacha qiymati tasodifiylik xususiyatini yo‘qotadimi?
3.Chebishev tengsizligini yozing.
4.Chebiyev teoremasini ayting.
5.Chebishev teoremasining amaliy ahamiyati nimadan iborat.
6.Bernulli teoremasi va uning amaliy ahamiyati.
7.Bernulli teoremasiga asoslanib $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{m}{n}=p$ ni ko‘rsating?

Mustaqil yechish ushun mashqlar

1.Agar $D(X)=0{,}001$ bo‘lsa, $|X-M(X)|<0{,}1$ ning ehtimolligini Chebishev tengsizligi bo‘yicha baholang. J: $p\geq 0{,}9$

2. A hodisaning har bir sinovda ro‘y berish ehtimolligi $\frac{1}{2}$ ga teng.Agar 100 ta bog’liqsiz sinov o‘tkaziladigan bo‘lsa, A hodisaning ro‘y berishlari soni X ning 40 dan 60 gacha bo‘lgan oraliqda yotish ehtimolligini Chebishev tengsizligidan foydalanib baholang. J: 0,75

3. Har bir sinovda hodisaning ro‘y berish ehtimolligi $\frac{1}{4}$ ga teng. Agar 800 ta sinov o‘tkaziladigan bo‘lsa, hodisaning ro‘y berish soni X ning 150 dan 250 gacha bo‘lgan oraliqda yotish ehtimolligini Chebishev tengsizligidan foydalanib baholang. J: 0,94

4. X diskret tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

X	0,1	0,4	0,6
p	0,2	0,3	0,5

Chebishev tengsizligidan foydalanib , $|X-M(X)|<\sqrt{0{,}4}$ bo‘lish ehtimolligini baholang. J: 0,909

5.Berilgan joyning quyoshli kunlari soni X o‘rtacha qiymati 100 kundan va o‘rtacha kvadratik chetlanishi 20 kundan iborat tasodifiy miqdordan iborat. Hodisa ehtimolligini yuqoridan baholang: $A=\{X\geq 150\}$, $B=\{X\geq 200\}$.

6.Korxonananing texnik ehtiyoji uchun kunlik zaruriy suv miqdori tasodifiy miqdor bo‘lib, matematik kutilmasi 125 m^3. Yaqin kunlarda korxonaga kunlik suv miqdori sarfi 500 m^3 ga ko‘payish ehtimolligini baholang.

7.Yo‘lovchining poyezdga kechikish ehtimolligi 0,007 ga teng. 20 000 yo‘lovchidan 100 tadan 180 tagachasi poyezdga kechikish mumkinligi ehtimolligini baholang.

8.Xaridorning do‘kondagi mahsulotga ehtiyoji ehtimolligi 0,25 ga teng. 2500 ta kutilayotgan xaridorning mahsulotga bo‘lgan ehtiyojining 0,25 ehtimoldan chetlanishi absolyut qiymati 0,06 dan oshmaslik ehtimolligini baholang.

9. $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 0{,}9,\ D(X) = 0{,}004$ lar berilgan. Chebishev tengsizligidan foydalanib, ε ni toping.

10. Bog’liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

X_n	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$
p	1/3	1/3	1/3

Bu ketma-ketlikka Chebishev teoremasini qo‘llash mumkinmi?

J: Qo‘llash mumkin: $M(X_n) = 0;\quad D(X_n) = 2,$

§ 7. Uzluksiz tasodifiy miqdor taqsimoti

Tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunini har doim ham jadval yordamida berish mumkin bo‘lavermaydi. Masalan, agar biz uzluksiz tasodifiy miqdor haqida fikr yuritayotgan bo‘lsak, u holda uning barcha qiymatlarini sanab chiqish mumkin emas. Shuning uchun, uni diskret tasodifiy miqdorni tavsiflangandek ayrim qiymatlari ehtimolliklari bilan emas balki, mumkin bo‘lgan qiymatlari ma’lum bir (α, β) intervalda yotuvchi, ya’ni $\alpha < x \leq \beta$ ko‘rinishdagi tengsizlikning ehtimolligi bilan tavsiflash lozim.

7.1. Taqsimot funksiyasi

Uzluksiz tasodifiy miqdor taqsimot qonunini yozish uchun,bundan keyin tasodifiy miqdor X ning x dan kichik qiymatlarni qabul qilishi, ya’ni $-\infty < X < x$ hodisaning ehtimolligi haqida so‘z yuritamiz. Bu $P(X < x)$ ehtimollik x ning funksiyasi ekanligi ravshan, uni $F(x)$ bilan belgilaymiz:

$$F(x) = P(X < x) \tag{7.1}$$

$F(x)$funksiya X tasodifiy miqdorning taqsimot **qonuni** yoki X tasodifiy tasodifiy miqdorning **taqsimot funksiyasi** deyiladi.

Taqsimot funksiyasi quyidagi xossalarga ega.

1. Taqsimot funksiyaning qiymatlari [0,1] kesmaga tegishli:

$$0 \leq F(x) \leq 1 \tag{7.2}$$

2. *F(x)* kamaymaydigan funksiya. Haqiqatdan, $x_1 < x_2$ uchun

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \leq X < x_2),$$

bundan,

$$F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 < X < x_2) > 0$$

yoki

$$F(x_1) < F(x_2)$$

3. Tasodifiy miqdorning (α, β) intervalda yotuvchi qiymatlarni qabul qilish ehtimolligi taqsimot funksiyasining shu intervaldagi orttirmasiga teng.

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) \tag{7.3}$$

4. Uzluksiz tasodifiy miqdorning tayin bitta qiymat qabul qilish ehtimolligi nolga teng, ya'ni

$$P(X = x_0) = 0$$

Demak, bu xossadan

$$P(\alpha \le X \le \beta) = P(\alpha < X \le \beta) = P(\alpha \le X < \beta) = P(\alpha < X < \beta)$$

5. Agar tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari (α, β) intervalga tegishli bo'lsa, u holda,

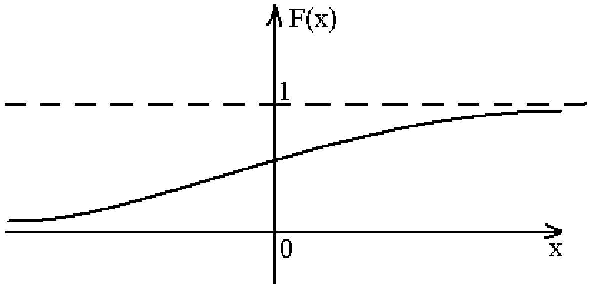
$$x \le a \text{ da } F(x) = 0; \; x \ge \beta \text{ da } F(x) = 1.$$

Isboti: $x_1 \le a$ bo'lsin, u holda, $X < x_1$ hodisa mumkin bo'lmagan, demak $P(X < x_1) = 0$; $x_2 \ge \beta$ bo'lsin, u holda, $X < x_2$ hodisa muqarrar, demak, $P(X < x_2) = 1$

Natija. Agar uzluksiz tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari butun O*x* son o'qida joylashgan bo'lsa, u holda,

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \qquad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1.$$

Yuqoridagi xossalardan uzluksiz tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasining grafigini quyidagicha tasvirlash mumkin.



3-chizma

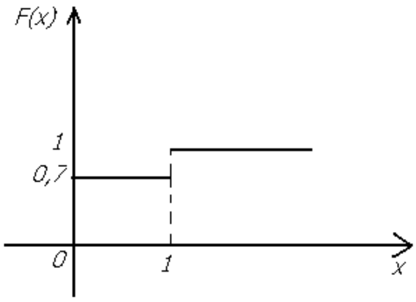
1-misol. *X* tasodifiy miqdor bitta uzishda o'qning nishonga tegishi bo'lib, o'qning nishonga tegish ehtimolligi 0,3 ga teng. Uning taqsimot funksiyasini tuzing.

Yechish. *X* ning mumkin bo'lgan qiymatlari ikkita 0 va 1(diskret).Bunda,

$$P(X \le 0) = 0, \; P(0 < X \le 1) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7, \; P(X > 1) = 1.$$

Demak,

$$F(x) = \begin{cases} 0, \; agar & -\infty < x \le 0 \\ 0{,}7 \; agar & 0 < x \le 1 \\ 1, \; agar & 1 < x < \infty \end{cases}$$



4-chizma

2-misol. 6 ta detal solingan qutida 4 ta standartga mos detal bor. Tavakkaliga 3 ta detal olingan. Olingan detallar orasidagi standartga mos detallar sonidan iborat tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini toping.

Yechish: Standartga mos detallar soni - X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzamiz. Buning uchun ehtimolning klassik ta'rifidan foydalanamiz:

$$P(A)=\frac{m}{n},\qquad n=C_6^3=\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}=20$$

X tasodifiy miqdor- olingan detallar orasida standartga mos detallar soni quyidagi mumkin bo'lgan qiymatlarga ega: $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3$ .Bu qiymatlarga mos ehtimolliklarni hisoblaymiz:

$$p_1=P(X=1)=\frac{C_4^1\cdot C_2^2}{20}=\frac{4\cdot1}{20}=\frac{1}{5}=0{,}2$$

$$p_2=P(X=2)=\frac{C_4^2\cdot C_2^1}{20}=\frac{6\cdot2}{20}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}=0{,}6$$

$$p_3=P(X=3)=\frac{C_4^3}{20}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}=0{,}2$$

Standartga mos detallar sonining taqsimot qonunini yozamiz

X	1	2	3
p	0,2	0,6	0,2

Endi taqsimot funksiyasini yozamiz:

Agar: $x\le1$ bo'lsa, $F(x)=0$; $1<x\le2$ bo'lsa, $F(x)=0{,}2$; $2<x\le3$ bo'lsa, $F(x)=0{,}2+0{,}6=0{,}8$; $x>3$ da esa, taqsimot funksiyaning xossasidan $F(x)=1$. Shunday qilib,

$$F(x)=\begin{cases}0, & agar\quad x\le1\\ 0{,}2, & agar\quad 1<x\le2,\\ 0{,}8, & agar\quad 2<x\le3,\\ 1, & agar\quad x>3\end{cases}$$

3-misol. X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi quyidagicha berilgan bo‘lsin:

$$F(x)=\begin{cases}0, & agar \quad x\le -1\\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{3}, & agar \quad -1<x\le 2\\ 1, & agar \quad x>2\end{cases}$$

Sinov natijasida X miqdor (0,1) intervalda yotgan qiymatlarni qabul qilish ehtimolligini toping.

Yechish.(7.3) ga asosan, $P(0<X<1)=F(1)-F(0)$.

Berilishiga ko‘ra (0,1) intervalda

$$F(x)=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3},$$

Demak,

$$F(1)-F(0)=\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

Shunday qilib, $$P(0<X<1)=\frac{1}{3}.$$

7.2 Taqsimotning zichlik funksiyasi

Endi taqsimot funksiyasi uzluksiz va differensiallanuvchi bo‘lgan X uzluksiz tasodifiy miqdorni tekshiramiz.

Taqsimotning $f(x)$ **zichlik funksiyasi** yoki **differensial qonuni** deb, taqsimot funksiyasidan olingan $f(x)=F'(x)$ hosilaga aytiladi.

Teorema. X uzluksiz tasodifiy miqdorning (α,β) integrvalga tegishli qiymat qabul qilish ehtimolligi zichlik funksiyadan α dan β gacha olingan aniq integralga teng.

$$P(\alpha<X<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx \qquad (7.7)$$

Isbot. $$P(\alpha<X<\beta)=F(\beta)-F(\alpha)$$

ekanligidan, Nyuton-Leybnits teoremasiga asosan

$$F(\beta)-F(\alpha)=\int_{\alpha}^{\beta}F'(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$$

Zichlik funksiyasi quyidagi xossalarga ega:

1. Zichlikl funksiyasi manfiy emas, ya’ni $f(x)\ge 0$.

2. $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1$.

Xususan tasodifiy miqdorning barcha mumkin bo‘lgan qiymatlari (α β) oraliqqa tegishli bo‘lsa, u holda,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 1$$

4-misol. *X* tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & agar \quad x \le 0 \\ \frac{x}{2}, & agar \quad 0 < x \le 2 \\ 0, & agar \quad x > 2 \end{cases}$$

Sinov natijasida *X* tasodifiy miqdor (1, 2) intervalga tegishli qiymat qabul qilish ehtimolligini toping.

Yechish. (7.7) ga asosan,

$$P(1 < X < 2) = \int_1^2 \frac{x}{2}dx = \frac{x}{4}\Big|_1^2 = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = 1 - 0{,}25 = 0{,}75.$$

$f(x)$ zichlik funksiyasini bilgan holda $F(x)$ taqsimot funksiyasini quyidagi formula bo‘yicha topish mumkin.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \tag{7.8}$$

5-misol. Berilgan zichlik funksiyasi bo‘yicha taqsimot funksiyasini toping.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & agar \quad x \le a \\ \frac{1}{b-a}, & agar \quad a < x \le b \\ 0, & agar \quad x > b \end{cases} \tag{7.9}$$

Yechish. 1) $x \le a$ da $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = 0$;

2) $x \le b$ da $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} 0dx + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}dx = \frac{x-a}{b-a}$.

3)Agar $x > b$ bo‘lsa, u holda,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{a} odx + \int_{a}^{b} \frac{dx}{b-a} + \int_{в}^{x} odx = \int_{a}^{b} \frac{dx}{b-a} = \frac{b-a}{b-a} = 1.$$

Shunday qilib,

$$F(x)=\begin{cases} 0, & agar \quad x \le a \\ \frac{x-a}{b-a}, & agar \quad a < x \le b \\ 1, & agar \quad x > b \end{cases} \tag{7.10}$$

Eslatma. (7.9) funksiya ehtimollikning **tekis taqsimot zichlik funksiyasi**, (7.10) esa **tekis taqsimotning taqsimot funksiyasi** deyiladi.

7.3 Uzluksiz tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalari

X uzluksiz tasodifiy miqdor $f(x)$ zichlik funksiyasi orqali berilgan va uning mumkin bo‘lgan qiymatlari $[\alpha,\beta]$ kesmaga tegishli bo‘lsin.

Mumkin bo‘lgan qiymatlari $[\alpha,\beta]$ kesmaga tegishli bo‘lgan X uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi deb,

$$M(X)=\int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx \tag{7.11}$$

aniq integralga aytiladi.Agar mumkin bo‘lgan qiymatlar butun Ox son o‘qiga tegishli bo‘lsa, u holda,

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \tag{7.12}$$

Bunda, xosmas integral absolyut yaqinlashuvchi deb faraz qilinadi.

Uzluksiz tasodifiy miqdorning dispersiyasi deb, agar mumkin bo‘lgan qiymatlari $[\alpha,\beta]$ kesmaga tegishli bo‘lsa,

$$D(X)=\int_{\alpha}^{\beta}(x-M(X))^2 f(x)dx \tag{7.13}$$

integralga; agarda mumkin bo‘lgan qiymatlar butun Ox son o‘qiga tegishli bo‘lsa, u holda

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))^2 f(x)dx \tag{7.14}$$

integralga aytiladi.

O‘rtacha kvadratik chetlanish esa, diskret tasodifiy miqdor uchun bo‘lgani kabi

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)} \tag{7.15}$$

1-izoh. Diskret tasodifiy miqdorlar matematik kutilmasi va dispersiyasining xossalari uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun ham saqlanadi.

2-izoh. Dispersiyani hisoblash uchun qulay quyidagi formulani hosil qilish mumkin.

$$D(X)=\int_{\alpha}^{\beta} x^2 f(x)dx-(M(X))^2 \tag{7.16}$$

yoki

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx-(M(X))^2. \tag{7.17}$$

6-misol. X tasodifiy miqdorning

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -2 \quad \partial a \\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2}, & -2<x\le 2 \quad \partial a \\ 1, & x>2 \quad \partial a \end{cases}$$

taqsimot funksiyasi berilgan. X miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasini toping.

Yechish Avvalo, X miqdorning zichlik funksiyasini topamiz.

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x\le -2 \ \partial a\\ \dfrac{1}{4}, & -2<x\le 2 \ \partial a\\ 0, & x>2 \ \partial a\end{cases}$$

(7.12) formulaga asosan,

$$M(X)=\int_{-2}^{2}\frac{1}{4}xdx=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}xdx=\frac{x^2}{8}\Big|_{-2}^{2}=0$$

Dispersiyani hisoblash uchun (7.17) formuladan foydalanamiz:

$$D(X)=\int_{-2}^{2}x^2\frac{1}{4}dx-0^2=\frac{1}{4}\frac{x^2}{3}\Big|_{-2}^{2}=\frac{4}{3}$$

O‘Z-O‘ZINI TEKSHIRISH UCHUN SAVOLLAR

1.Uzluksiz tasodifiy miqdor ta’rifini ayting va misollar keltiring.
2.Taqsimot funksiyasi ta’rifini ayting.
3.Taqsimot funksiyaning xossalarini ayting.
4.Taqsimotning zichlik funksiyasining ta’rifini ayting.
5.Taqsimotning zichlik funksiyasining xossalarini ayting.
6.Uzluksiz tasodifiy miqdor matematik kutilmasini ta’rifini ayting.
7.Uzluksiz tasodifiy miqdor dispersiyasini ta’rifini ayting.
8.Uzluksiz tasodifiy miqdor dispersiyasini hisoblash formulalarini yozing.
9.Taqsimot funksiyasiga ko‘ra zichlik funksiyasi qanday topiladi?
10.Taqsimotning zichlik funksiyasiga ko‘ra taqsimot funksiyasi qanday topiladi?

Mustaqil yechish ushun mashqlar

1.X tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot funksiyasi bilan berilgan:

$$F(x)=\begin{cases}0, & agar \quad x\le 2\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{x}{2}, & agar \quad -2<x\le 2\\ 1, & agar \quad x>2\end{cases}$$

Sinov natijasida X miqdorning (-1,1) intervalda yotgan qiymat qabul qilish ehtimolligini toping. J: $P(-1<X<1)=\dfrac{1}{3}$

2. X diskret tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

X	2	4	7
p	0,5	0,2	0,3

F(x) taqsimot funksiyasini toping va uning grafigini chizing.

3.X uzluksiz tasodifiy miqdorining

$$F(x)=\begin{cases}0, & agar \quad x\le 0\\ \sin 2x, & agar \quad 0<x\le\dfrac{\pi}{4}\\ 1, & agar \quad x>\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$$

taqsimot funksiyasi berilgan. $f(x)$ zichlik funksiyasini toping.

J: : $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ intervalda $f(x) = 2\cos 2x$,bu intervaldan tashqari $f(x) = 0$.

4. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & agar \quad x \le 0 \\ \cos x, & agar \quad 0 < x \le \frac{\pi}{2} \\ 1, & agar \quad x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$F(x)$ taqsimot funksiyasini toping. J: $F(x) = \begin{cases} 0, & agar \quad x \le 0 \\ \sin x, & agar \quad 0 < x \le \frac{\pi}{2} \\ 1, & agar \quad x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

5. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi butun Ox o‘qda

$$f(x) = \frac{4C}{e^{x} + e^{-x}}$$

tenglik bilan berilgan. C o‘zgarmas parametrni toping.

6. X tasodifiy miqdor (0,1) intervalda $f(x) = 2x$ zichlik funksiyasi bilan berilgan; bu intervaldan tashqarida $f(x) = 0$. X miqdorning matematik kutilmasini toping. J: $M(X) = \frac{2}{3}$

7. X tasodifiy miqdor (0,1)intervalda $f(x) = c(x^2 + 2x)$ zichlik funksiyasi bilan berilgan; bu intervaldan tashqarida $f(x) = 0$. *a*) *c* parametrni toping; *b*) X miqdorning matematik kutilmasini toping.J*:* *a*) $c = \frac{3}{4}$; *b*) $M(X) = \frac{11}{16}$.

8. Ushbu $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \quad \partial a \\ \frac{x}{4}, & 0 < x \le 4 \quad \partial a \\ 1, & x > 4 \quad \partial a \end{cases}$

taqsimot funksiyasi bilan berilgan X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping.

9. X tasodifiy miqdor (2, 4) intervalda $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x - 6$ zichlik funksiya bilan berilgan; bu intervaldan tashqarida $f(x) = 0$. X miqdorning modasini, matematik kutilmasini va medianasini toping.

10. X tasodifiy miqdor (0, π) intervalda $f(x) = \frac{1}{2}\sin x$ zichlik funksiya bilan berilgan; bu intervaldan tashqarida $f(x) = 0$. X ning dispersiyasini toping.

§ 8. Uzluksiz tasodifiy miqdor taqsimot qonunlari

Bu paragrafda real sotsial-iqtisodiy jarayonlarning nazariy –ehtimoliy modellarini qurish uchun ko‘p qo‘llaniladigan uzluksiz tasodifiy miqdor taqsimot qonunlarini keltiramiz.

8.1 Tekis taqsimot qonuni

Agar tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi biror oraliqda o‘zgarmas bo‘lib, oraliqdan tashqarida nolga teng bo‘lsa, tasodifiy miqdor shu oraliqda **tekis taqsimlangan** deyiladi.

X uzluksiz tasodifiy miqdorning $f(x)$ zichlik funksiyasi (a, b) intervalda o‘zgarmas A ga teng bo‘lib, uning tashqarisida esa 0 ga teng bo‘lsin. Zichlik funksiyaning xossasidan

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{a}^{b} Adx = 1$$

va bu yerdan,

$$A = \frac{1}{b-a}$$

U holda,

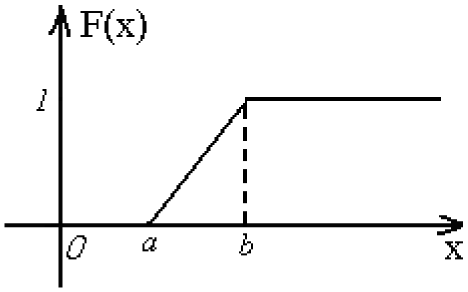
$$f(x) = \begin{cases} 0, & agar \quad x \le a \\ \dfrac{1}{b-a}, & agar \quad a < x \le b \\ 0, & agar \quad x > b \end{cases} \qquad (8.1)$$

(8.1) tekis **taqsimot zichlik funksiyasi** deyiladi.

O‘tgan mavzu (7.8) formulasidan foydalanib, tekis taqsimotning taqsimot funksiyasini topamiz((7.10)ga qarang):

$$F(x) = \begin{cases} 0, & agar \quad x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & agar \quad a < x \le b \\ 1, & agar \quad x > b \end{cases} \qquad (8.2)$$

taqsimot funksiyasining grafigi



5-chizma

Tekis taqsimotning matematik kutilmasini topamiz.

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{a}^{b} \frac{x}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_a^b\right) = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{b^2-a^2}{2} = \frac{a+b}{2}$$

Bu yerdan ko‘rinadiki, (a, b) oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi shu oraliq markazida (o‘rtasida) bo‘ladi. Endi tekis taqsimot dispersiyasini hisoblaymiz:

$$M(X)=\frac{a+b}{2}. \quad M\left(X^2\right) \text{ ni topamiz:}$$

$$M\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx=\frac{1}{b-a}\frac{x^3}{3}\Big|_a^b=\frac{b^3-a}{3(b-a)}=\frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

Shunday qilib,

$$D\left(X\right)=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12};$$

bu yerdan,

$$\sigma\left(X\right)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}\ .$$

1-misol. Metropolitenda poyezdlar qat’iy jadval bo‘yicha qatnaydi. Harakat intervali 5 minut. Bekatga kelgan yo‘lovchi navbatdagi poyezdni 3 minutdan kam kutish ehtimolligini toping.

Yechish. Poyezdlar qatnovini (0,5) intervalda tekis taqsimlangan X tasodifiy miqdor sifatida qarash mumkin. Uning zichlik funksiyasi

$$f(x)=\frac{1}{b-a},$$

bu yerda, b-a=5 X ning mumkin bo‘lgan qiymatlari joylashgan intervalning uzunligi; bu intervaldan tashqarida $f(x)=0$. Agar kutish intervali (0,3) desak, u holda,

$$P(0<x<3)=\int_0^3 \frac{1}{5}dx=0{,}6.$$

8.2 Normal taqsimot

Amaliyotda uchraydigan tasodifiy miqdorlar bo‘ysunadigan taqsimot qonunlari orasida ko‘proq normal qonun bilan ish ko‘riladi.

Normal taqsimot deb,

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \qquad (8.3)$$

zichlik funksiyasi bilan tavsiflanadigan uzluksiz tasodifiy miqdor taqsimotiga aytiladi, bu yerda a normal taqsimot matematik kutilmasi, σ esa o‘rtacha kvadratik chetlanishi, ya’ni

$$M\left(X\right)=a, \qquad D\left(X\right)=\sigma^2$$

(8.3) funksiya musbat va

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1.$$

Normal taqsimotning taqsimot funksiyasi:

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt\quad . \tag{8.4}$$

$a=0,\ \sigma=1$ parametrli normal taqsimot **stardant normal taqsimot** deyiladi, uning zichlik funksiyasi

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{8.5}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.Taqsimot funksiyasi esa

$$F_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\quad ,$$

bu yerda, $F(x)=F_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$ ekanligini tekshirish oson. Normal taqsimotning taqsimot funksiyasini

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \tag{8.6}$$

Laplas funksiyasidan foydalanib topish mumkin.

$$F_0(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt=\int_{-\infty}^{0}\varphi(t)dt+\int_{0}^{x}\varphi(t)dt\,.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)dt=1$$

va $\varphi(x)$ funksiya juftligidan,

$$\int_{-\infty}^{0}\varphi(t)dt=\frac{1}{2}\,.$$

Demak,

$$F_0(x)=\frac{1}{2}+\Phi(x)$$

yoki

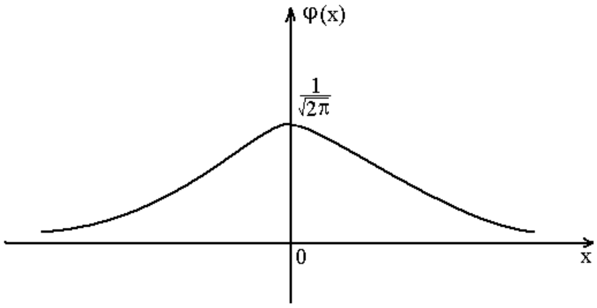
$$F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) \tag{8.7}$$

Bu ikki $\varphi(x)$ va $\Phi(x)$ funksiya bizga tanish va ularning qiymatlar jadvali mavjud.Ularning ba’zi xossalarini keltiramiz.

$\varphi(x)$ **zichlik funksiyasi**:

1) Butun *Ox* sonlar o‘qida aniqlangan va musbat.
2) Juft funksiya, demak, grafigi *Oy* o‘qiga nisbatan simmetrik.
3) $(-\infty,0)$ oraliqda o‘suvchi; $(0,\infty)$ da kamayuvchi.
4) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\varphi(x)=0$, demak, *Ox* o‘qi gorizontal asimptota.
5) x=0 da $\varphi(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ - yagona maksimumga ega.

6) Grafigi:

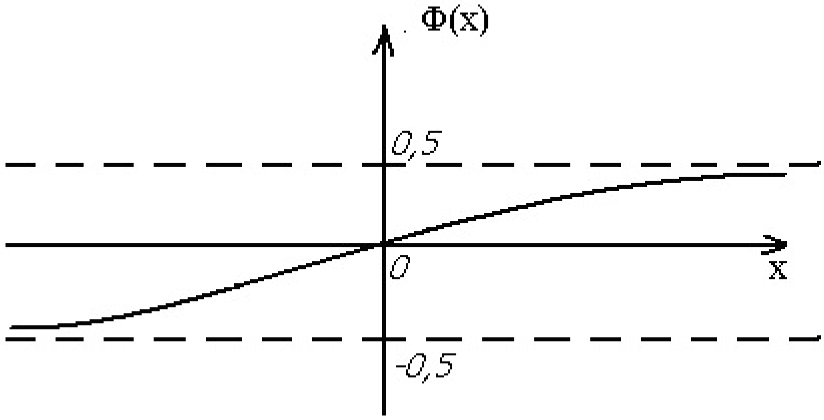


6-chizma

Endi $\Phi(x)$ **taqsimot funksiyasining xossalarini keltiramiz**:

1. Butun son o‘qida aniqlangan va uzluksiz.
2. Funksiya toq, demak, uning grafigi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik.
3. Funksiya butun son o‘qida o‘suvchi.
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\Phi(x)=-0{,}5$; $\lim\limits_{x\to\infty}\Phi(x)=0{,}5$; $\Phi(0)=0$

5.Grafigi



7-chizma

1-izoh. Standart normal taqsimotning (o, x) intervalga tushish ehtimolligi

$$P(0<X<x)=\Phi(x) \qquad (8.8)$$

2-izoh. Normal taqsimlangan X tasodifiy miqdorning $[\alpha,\beta]$ intervaldagi qiymatni qabul qilish ehtimolligi

$$P(\alpha\le X\le\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right) \qquad (8.9)$$

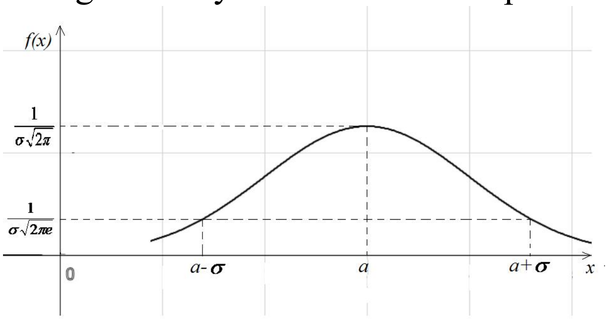
2-misol. X tasodifiy miqdor normal qonun bo‘yicha taqsimlangan. Bu miqdorning matematik kutilmasi $a=0{,}5$, o‘rtacha kvadratik chetlanishi $\sigma=\frac{1}{4}$. X ning (0,4; 0,6) intervalga tushish ehtimolligini toping.

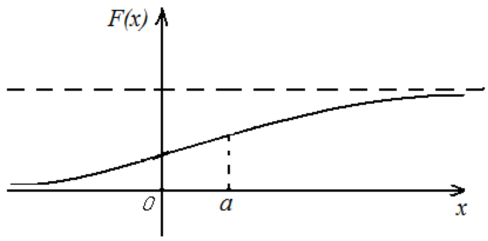
Yechish $P(0{,}4\le X\le0{,}6)=\Phi\left(\dfrac{0{,}6-0{,}4}{\frac{1}{4}}\right)-\Phi\left(\dfrac{0{,}4-0{,}5}{\frac{1}{4}}\right)=$

$$=\Phi(0{,}4)-\Phi(-0{,}4)=2\Phi(0{,}4)=2\cdot0{,}1554=0{,}3108$$

Ko‘pgina belgilar normal qonunga bo‘ysunadi, masalan,insonning bo‘yi, snaryadning ucnish masofasi va sh.k.

Normal taqsimot qonunining grafigi normal egri chiziq yoki Gauss egri chizig’i deyiladi. *a* va σ parametrli normal egri chiziqning grafigi:



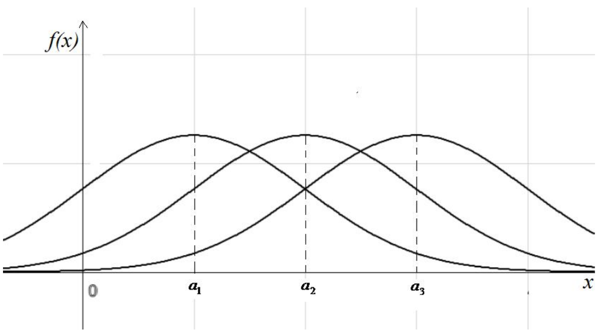


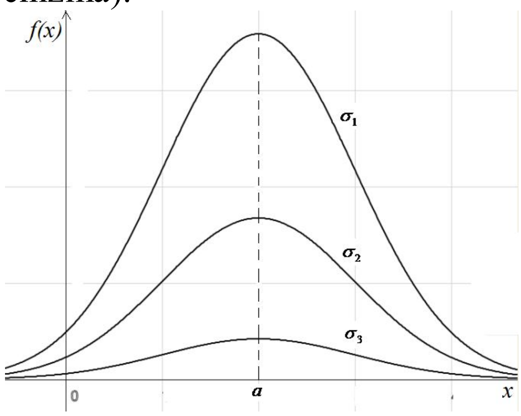
8-chizma 9-chizma

Normal egri chiziq *x=a* to‘g’ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo‘lib, *x=a* nuqtada maksimumga: $f_{\max}(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$,

$x = a \pm \sigma$ da esa ikkita burilish(egilish) nuqtasiga ega(8- chizma) .

a va σ parametrlarning qiymatlarida normal egri chiziq qanday o‘zgarishini aniqlaymiz. Agar $\sigma = const$ va *a* parametr, ya’ni taqsimotning simmetriya markazi $(a_1 < a_2 < a_3)$ o‘zgarsa u holda normal egri chiziqning ko‘rinishi o‘zgarmasdan u *Ox* o‘qi bo‘ylab siljiydi(10- chizma).





10- chizma 11- chizma

Agar $a = const$ va σ parametr $(\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3)$ o‘zgarsa, u holda normal egri chiziqning ordinatasi o‘zgaradi: σ ning o‘rtib bo‘rishi bilan chiziqning ordinatasi kamayib boradi, chunki taqsimotning har qanday chizig’i bilan chegaralangan shaklning yuzi birga teng. Shu sababli normal egri chiziq *Ox* o‘qi bo‘ylab yoyilib tekislanib boradi; σ ning kamayib bo‘rishi bilan chiziq yon tomondan siqilib yuqoriga cho‘zilib boradi. (11-chizma).Shunday qilib, *a* parametr normal egri chiziqning markazini, σ parametr esa uning shaklini tavsiflaydi.

8.3Asimmetriya va ektsess

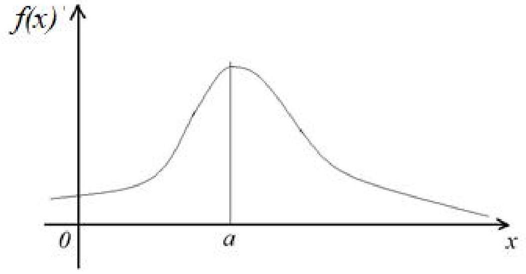
Yuqorida (5.4. Nazariy momentlar) keltirilgan birinchi boshlang‘ich moment yoki matematik kutilma-*X* tasodifiy miqdor taqsimotining son o‘qidagi holatini yoki o‘rtacha qiymatni tavsiflaydi; dispersiya $D(X)$ yoki μ_2 – ikkinchi markaziy moment X ning taqsimotini $M(X)$ ga nisbatan tarqoqlik darajasini bildiradi.

Uchinchi μ_3 markaziy moment taqsimotning **asimmetriyasi**ni (qiyalik darajasini) tavsiflash uchun xizmat qiladi. Uning o‘lchami tasodifiy miqdorning kubidan iborat. O‘lchamga ega bo‘lmagan miqdor hosil qilish uchun uni σ^3 ga bo‘lamiz, σ -X tasodifiy miqdorning o‘rtacha kvadratik chetlanishi.

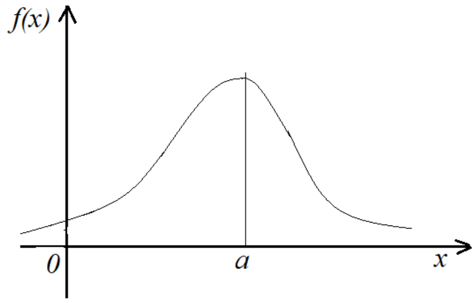
$A=\frac{\mu_3}{\sigma^3}$ miqdor tasodifiy miqdorning **asimmetriya koeffitsenti** deyiladi. Agar taqsimot matematik kutilmaga nisbatan simmetrik bo‘lsa, A=0.

To‘rtinchi μ_4 markaziy moment taqsimotning tikligi (o‘tkir uchli yoki tekis uchli)ni tavsiflash uchun xizmat qiladi.

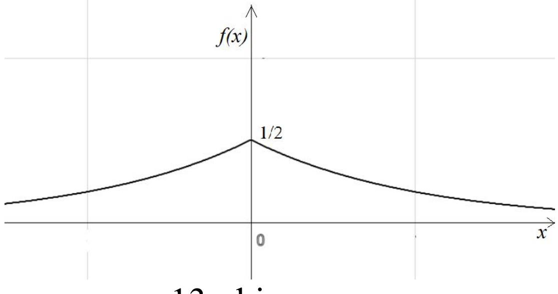
$E=\frac{\mu_4}{\sigma^4}-3$ miqdor tasodifiy miqdorning **eksessi** yoki **eksess koeffitsenti** deyiladi. Normal taqsimot uchun $\frac{\mu_4}{\sigma^4}=3$ bo‘lgani sababli 3 soni $\frac{\mu_4}{\sigma^4}$ dan ayrilgan. Agar egri chiziq normal egri chiziqqa nisbatan o‘tkir uchli bo‘lsa, E>0(12^a-chizma); agarda nisbatan tekis uchli bo‘lsa eksess manfiy bo‘ladi(12^b-chizma).



12^a-chizma



12^b-chizma



13-chizma

3-misol. $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$ taqsimot funksiyasi(Laplas taqsimoti) bilan berilgan X tasodifiy miqdorning asimmetriya koeffitsenti va eksessi topilsin.

Yechish: Taqsimot funksiyasi Oy o‘qqa nisbatan simmetrik bo‘lgani uchun barcha toq indeksli boshlang‘ich va markaziy momentlar nolga teng, shuning uchun A=0.Eksessni topish uchun juft indeksli boshlang‘ich momentlarni topamiz.

$$\nu_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\left(\frac{1}{2}e^{-|x|}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-|x|}dx = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x}dx = 2$$

Bundan,

$$D(X) = \nu_2 - \nu_1^2 = 2 - 0^2 = 2,\ \ \sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{2}\,.$$

$$\nu_4 = \int_{-\infty}^{\infty} x^4\varphi(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-|x|}dx = \int_0^{\infty} x^4 e^{-x}dx = 24$$

Shunday qilib,

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{24}{\left(\sqrt{2}\right)^4} - 3 = 6 - 3 = 3 > 0\,.$$

Demak, $f(x)$ taqsimot egri chizig‘i o‘tkir uchli(13-chizma).

8.4.Normal tasodifiy miqdorning berilgan chetlanishi ehtimolligi

Ehtimollikning amaliy masalalarda (masalan, o‘q uzish ehtimoliy masalalarida) ko‘pincha normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning chetlanishi absolyut qiymati bo‘yicha berilgan δ sondan kichik bo‘lish ehtimolligini, ya’ni $|X-a|<\delta$ hodisaning ro‘y berish ehtimolligini topish talab qilinadi. Bu tengsizlikni

$$-\delta < X - a < \delta \quad \text{yoki} \quad a-\delta < X < a+\delta$$

qo‘sh tengsizlik bilan almashtiramiz. (8.9) formuladan foydalanib quyidagini hosil qilamiz:

$$P(|X-a|<\delta) = P(a-\delta < X < a+\delta) = \Phi\left(\frac{a+\delta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\delta-a}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\,\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

Shunday qilib,

$$P(|X-a|<\delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) \qquad (8.10)$$

3-misol. X tasodifiy miqdor normal taqsimlangan, uning matematik kutilmasi 10, o‘rtacha kvadratik chetlanishi 5 ga teng. Chetlanish absolyut qiymati bo‘yicha 2 dan kichik bo‘lishi ehtimolligini toping.

Yechish a=10, σ=5, δ=2

$$P(|X-10|<2) = 2\Phi\left(\frac{2}{5}\right) = 2\Phi(0{,}4) = 0{,}3108\,.$$

8.5 Ko‘rsatkichli taqsimot

Ko‘rsatkichli taqsimot deb

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases} \qquad (8.11)$$

zichlik funksiya bilan tavsiflanadigan uzluksiz tasodifiy miqdor taqsimotiga aytiladi.Ko‘rsatkichli taqsimotning taqsimot funksiyasi

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0 \end{cases} \qquad (8.12)$$

Haqiqatdan,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0} 0dt+\int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t}dt=-e^{-\lambda t}\Big|_0^x=-e^{-\lambda x}+e^{-\lambda\cdot 0}=1-e^{-\lambda x}$$

Ko‘rsatkichli taqsimotga ega uzluksiz tasodifiy miqdorning berilgan (α, β) intervalga tushish ehtimolligi (7.3) formulaga asosan

$$P(\alpha<X<\beta)=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta}. \qquad (8.13)$$

Ko‘rsatkichli taqsimotning sonli xarakteristikalarini topamiz.Matematik kutilma:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\lambda\int_{0}^{\infty} xe^{-\lambda x}dx= \text{(yoki bo‘laklab integrallab)}$$

$$=\lambda\int_0^\infty xe^{-\lambda x}dx\left|\begin{matrix} u=x,\ du=dx \\ \lambda e^{-\lambda x}dx=dv,\ v=-e^{-\lambda x}\end{matrix}\right|=-xe^{-\lambda x}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty e^{-\lambda x}dx=0-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty=-\frac{1}{\lambda}(0-1)=\frac{1}{\lambda}$$

Dispersiyani hisoblaymiz:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx-[M(X)]^2=\lambda\int_0^\infty x^2e^{-\lambda x}dx-\frac{1}{\lambda^2}.$$

Tenglikni o‘ng tomonidagi birinchi integralni hisoblaymiz:

$$\lambda\int_0^\infty x^2e^{-\lambda x}dx\left|\begin{matrix} u=x^2,\ du=2xdx \\ \lambda e^{-\lambda x}dx=dv,\ v=-e^{-\lambda x}\end{matrix}\right|=-x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty+2\int_0^\infty xe^{-\lambda x}dx=0+\frac{2}{\lambda^2};$$

Shunday qilib,

$$D(X)=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$$

Ko‘rsatkichli taqsimot o‘rtacha kvadrat chetlanishi

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\frac{1}{\lambda}$$

Yuqoridagilardan,

$$M(X)=\sigma(X)=\frac{1}{\lambda},$$

ya’ni ko‘rsatkichli taqsimot matematik kutilmasi va o‘rtacha kvadrat chetlanishi o‘zaro teng degan xulosaga kelamiz.Buning amaliy ahamiyati muhim. Masalan, tajribada ko‘rsatkichli taqsimlangan tasodifiy miqdor o‘rganilayotgan, shu bilan birga λ parametr noma’lum bo‘lsin. Agarda matematik kutilma ham noma’lum bo‘lsa, u holda, uning bahosi sifatida tanlanma o‘rtacha qiymat $\bar{x}$ olinadi va λ parametrni taqribiy qiymati $\lambda=\frac{1}{\bar{x}}$ tenglikdan topiladi.

Ko‘rsatkichli taqsimot ehtimolliklar nazariyasida keng qo‘llaniladi. Shuningdek, eng oddiy oqim ikkita ketma-ket hodisaning ro‘y berish orasidagi vaqt taqsimoti ko'rsatkichli taqsimot qonuniga ega uzluksiz tasodifiy miqdorga misol bo'ladi.

Aytaylik, biror qurilma (element) vaqtning t_0=0 momentida ishlay boshlasin, vaqtning t momentida esa ishdan chiqsin. T orqali uzluksiz tasodifiy miqdor-elementning buzilmasdan ishlash vaqtining davomiyligini, λ bilan esa buzilishlar intensivligini (ya'ni vaqt birligi ichida buzilishlar o'rtacha sonini) belgilaymiz. Agar element t dan kichik vaqt buzilmasdan ishlagan bo'lsa, u holda t vaqt ichida buzilish ro'y beradi va ushbu

$$F(t) = P(T < t)$$

taqsimot funksiyasi davomiyligi t bo'lgan vaqt ichida elementning ishdan chiqish ehtimolligini aniqlaydi. Elementning shu t-vaqt ichida buzilmasdan ishlash ehtimolligi esa $T>t$ qarama -qarshi hodisaning ehtimolligidan iborat:

$$P(T > t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}, \lambda > 0 .$$

Uni R(t) bilan belgilaymiz: $R(t) = e^{-\lambda t}, \lambda > o$ .R(t) **ishonchlilik funksiyasi** ham deyiladi.

4-misol Elementning buzilmasdan ishlash vaqtining davomiyligi $F(t) = 1 - e^{-0.03t}$ ko'rsatkichli taqsimotga ega. Davomiyligi $t = 100$ soat bo'lgan vaqt ichida: *a*) elementning buzilmaslik ehtimolligini; *b*) elementning buzilish ehtimolligini toping.

Yechish. *a*) $F(t) = 1 - e^{-0.03t}$ taqsimot funksiyasi elementning davomiyligi t bo'lgan vaqt ichida buzilmaslik ehtimolligini aniqlagani uchun $t = 100$ ni taqsimot funksiyasiga qo'yib, topamiz:

$$F(100) = 1 - e^{-0.03 \cdot 100} = 1 - e^{-3} \approx 1 - 0,05 = 0,95.$$

b) "element buziladi" va "element buzilmaydi" hodisalari qarama-qarshi hodisalardir, shuning uchun elementning buzilish ehtimolligi:

$$P = R(100) = e^{-0.03 \cdot 100} \approx 0,05 .$$

O'Z-O'ZINI TEKSHIRISH UCHUN SAVOLLAR

1. Qanday taqsimot normal taqsimot deyiladi?
2. Normal taqsimotning asosiy sonli xarakteristikalari qiymatlarini ko'rsating.
3. Normal taqsimot zichlik funksiyasining xossalarini keltiring.
4. Normal taqsimotning taqsimot funksiyasining xossalarini keltiring.
5. Normal taqsimot Laplas funksiyasini yozing.
6. Normal tasodifiy miqdorning berilgan intervalga tushish ehtimolligi formulasini yozing.
7. Normal tasodifiy miqdorning berilgan chetlanish ehtimolligi formulasini yozing.
8. Standart normal taqsimot qanday ta'riflanadi?
9. Normal taqsimot parametrlarining ehtimoliy ma'nosi?
10. $\varphi(x)$ va $\Phi(x)$ Laplas funksiyalarining xossalarini ayting.

Mustaqil yechish ushun mashqlar

1. Ampermetr shkalasining bo‘lim bahosi 0,1 A ga teng. Strelkaning ko‘rsatkichi eng yakin butun bo‘linmagacha yaxlitlanadi. Ko‘rsatkichlarni o‘qishda 0,02 A dan ortiq xatoga yo‘l qo‘yilish ehtimolligini toping.

2. Elektr soatning minut strelkasi har bir minutning oxirida sakrab siljiydi.Shu onda soatning ko‘rsatayotgan vaqti haqiqiy vaqtdan 20 sek dan ortiq farq qilmaslik ehtimolligini toping. J: $p=\frac{2}{3}$

3.(2,8) intervalda tekis taqsimlangan X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi, dispersiyasi va o‘rtacha kvadratik chetlanishini toping.

J: $M(X)=5$, $D(X)=3; \sigma(X)=\sqrt{3}.$

4. Normal taqsimlangan X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi $a=3$ ga, o‘rtacha kvadratik chetlanishi $\sigma=2$ ga teng. X ning zichlik funksiyasini yozing. J: $f(\mathrm{x})=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-(x-3)^2/8}.$

5. Ushbu
$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-z^2/2}dz$$
Laplas funksiyasi toq, ekanligini isbotlang, ya’ni $\Phi(-x)=-\Phi(x)$.

Ko‘rsatma. Ushbu $\Phi(-x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{-x} e^{-z^2/2}dz$ tenglikda z=-t deb oling.

6. Normal taqsimlangan X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasi mos ravishda 10 va 2 ga teng. Sinov natijasida X ning $(12,14)$ da yotadigan qiymat qabul qilish ehtimolligini toping. J: $P(12<X<14)=0{,}1359$

7. Normal taqsimlangan X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va o‘rtacha kvadratik chetlanishi mos ravishda 20 va 5 ga teng. Sinov natijasida X ning (15,25) da yotadigan qiymat qabul qilish ehtimolligini toping.

J: $P(15<X<25)=0{,}6826$

8. Biror moddani tarozida tortish sistematik xatolarsiz o‘tkaziladi. Tarozida tortishning tasodifiy xatolari o‘rtacha kvadratik chetlanishi $\sigma=20$ g bo‘lgan normal qonunga bo‘ysunadi,Tarozida tortish absolyut qiymati bo‘yicha 10 g dan oshmaydigan xato bilan o‘tkazilishining ehtimolligini toping. J: $P(|X|<10)=0{,}383$.

9. Normal taqsimlangan tasodifiy miqdor chetlanishining absolyut qiymati bo‘yicha o‘rtacha kvadratik chetlanishning uchlanganidan kichik bo‘lish ehtimolligi 0,9973 ga tengligini isbotlang(“uch sigma” qoidasi)

10. Ko‘rsatkichli taqsimotning zichlik funksiyasi $x<0$ da $f(x)=0$
$x\geq 0$ *da* $f(x)=Ce^{-\lambda x}$ ko‘rinishga ega, C parametrni toping. Ko‘rsatma: Zichlik funksiyaning $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$ xossasidan foydalaning. J: $\mathrm{C}=\lambda.$

11. Eng oddiy oqimning intensivligi $\lambda=5$ berilgan.T uzluksiz tasodifiy miqdor-oqimning ikkita ketma-ket hodisasining ro‘y berish orasilagi vaqtning:

a) matematik kutilmasini; *b*) dispersiyasini; *c*) o'rtacha kvadratik chetlanishini toping. J: *a*) $M(T)=0{,}2$; *b*) $D(T)=0{,}04$; *c*) $\sigma(T)=0{,}2$.

§ 9. Ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar

Mumkin bo'lgan qiymatlari bitta son qiymati bilan aniqlanadigan, ya'ni bir o'lchovli tasodifiy miqdorlardan tashqari, mumkin bo'lgan qiymatlari 2 ta, 3 ta,..., n ta son bilan aniqlanadigan tasodifiy miqdorlar ham o'rganiladi. Bunday miqdorlar mos ravishda ikki, uch, ... n o'lchovli deyiladi.

(X,Y) orqali ikki o'lchovli tasodifiy miqdorni belgilaymiz. X va Y larning ikkalasi bir vaqtda qaralganda ikkita tasodifiy miqdorlar sistemasini tashkil etadi. Xuddi shunday, n o'lchovli tasodifiy miqdorni n ta tasodifiy miqdorlar sistemasi deb qarash mumkin.Masalan, (X,Y,Z) miqdor uchta X,Y,Z tasodifiy miqdorlar sistemasini tashkil etadi.

Misollar keltiramiz

1.OTM bitiruvchilarining o'zlashirish ko'rsatkichi diplom ilovasida keltirilgan n ta predmet bo'yicha baholari- X_1, X_2, ….X_n tasodifiy miqdorlar sistemasi bilan tavsiflanadi.

2.Berilgan hududda sutkaning ma'lum vaqtidagi ob-havo: X_1-temperatura; X_2-namlik; X_3-bosim; va shu kabi tasodifiy miqdorlar sistemasi bilan tavsiflanadi.

3.Agar chaqaloqlar tug'ilishini raqamlarda ifodalasak, masalan,o'g'il bola tugilishini-1; qiz bola tug'ilishini-0 bilan belgilasak, u holda, ikkita bola tug'ilgandagi ikki o'lchovli tasodifiy miqdor $(1,1)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(0,0)$qiymatlarni qabul qilishi mumkin.

4.Stanok-avtomat po'lat plitkalarni qoliplaydi.Agar nazopat qilinadigan o'lchamlar plitkaning uzunligi X va eni Y bo'lsa u holda ikki o'lchovli (X, Y) tasodifiy miqdorga ega bolamiz; agarda plitkaning balandligi Z ham nazorat qilinadigan bo'lsa, u holda uch o'lchovli (X, Y, Z) miqdorga ega bo'lamiz.

Ammo, diskret va uzluksiz ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlarni bir-biridan farqlash maqsadga muvofiqdir. Biz quyida ikki o'lchovli (X,Y) tasodifiy miqdorni ko'rib chiqamiz.

9.1. Ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdor va uning taqsimot qonuni

Ikki o'lchovli (X,Y) diskret tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari, ya'ni (x_i, y_j) $i=\overline{1,n}$; $j=\overline{1,m}$ sonlar jufti va ularning

$$p_{ij}=p(x_i, y_j)=P(X=x_i,\ Y=y_j) \quad (i=1,2,\cdots n;\ j=1,2,\cdots,m)$$

ehtimolliklari ro'yxati bu miqdorlarning taqsimot qonuni deb ataladi.

Taqsimot qonuni odatda jadval ko'rinishda beriladi:

X/Y	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y_1	p_{11}	p_{21}	$\dots$	p_{n1}
y_2	p_{12}	p_{22}	$\dots$	p_{n2}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
y_m	p_{1m}	p_{2m}	$\dots$	p_{nm}

$\left(X = x_i, Y = y_j\right)$ $\left(i = \overline{1,n}; \quad j = \overline{1,m}\right)$lar hodisalarning to‘la guruhini tashkil etganligi uchun barcha p_{ij} ehtimolliklar yig‘indisi birga teng, ya’ni

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1 \qquad (9.1)$$

Ikki o‘lchovli diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini bilgan holda har bir tashkil etuvchining taqsimot qonunini yozish mumkin. Masalan, har bir $i = \overline{1,n}$ uchun $(X = x_i, Y = y_1)$, $(X = x_i, Y = y_2), \cdots, (X = x_i, Y = y_m)$
hodisalar birgalikda bo‘lmaganligi uchun ehtimolliklarni qo‘shish teoremasiga ko‘ra $$p_{x_i} = P(X = x_i) = p_{i1} + p_{i2} + \cdots + p_{im}$$

Shunday qilib, X ning x_i qiymat qabul qilish ehtimolligi “x_i ustundagi” ehtimolliklar yig‘indisiga teng. Umuman, $P(X = x_i)$ ehtimolni topish uchun x_i ustundagi ehtimolliklarni qo‘shish lozim. Shunga o‘xshash, “y_j satrdagi” ehtimolliklarni qo‘shib $P(Y = y_j)$ ehtimolni hosil qilamiz. Demak,

$$p_{x_i} = P(X_i = x_i) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}, \quad i = \overline{1,n}$$

$$p_{y_j} = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}, \quad i = \overline{1,m}$$

1-misol. Quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan ikki o‘lchovli diskret tasodifiy miqdorning tashkil etuvchilari taqsimot qonunlarini tuzing.

X/Y	x_1	x_2	x_3
Y_1	0,12	0,18	0,10
Y_2	0,10	0,11	0,39

Yechish: Ehtimolliklarni ustun bo‘yicha jamlab, X ning mumkin bo‘lgan qiymatlari ehtimolliklarini hosil qilamiz.

$$p_{x_1} = 0{,}22, \qquad p_{x_2} = 0{,}29, \qquad p_{x_3} = 0{,}49$$

X ning tashkil etuvchilarining taqsimot qonunini yozamiz:

X	x_1	x_2	x_3
p	0,22	0,29	0,49

Tekshirish: 0,22+0,29+0,49=1

Xuddi shuningdek, (hisoblashni o‘quvchiga qoldirami) Y ning tashkil etuvchilarining taqsimot qonuni

Y	y_1	y_2
p	0,4	0,6

2-misol. Idishda 2 ta oq, 2ta qizil va 1ta ko‘k shar bor. Tavakkaliga 2 ta shar olindi. Olingan sharlar ichida qizil sharlar soni X, ko‘k sharlar soni Y tasodifiy miqdor bo‘lsin.Ikki o‘lchovli (X, Y) tasodifiy miqdorning birgalikdagi taqsimot qonunini tuzing. X va Y larni alohida taqsimot qonunlarini toping.

Yechish: X tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari: 0,1 va 2; Y ning qabul qiladigan qiymatlari: 0 va 1 mos ehtimolliklarni hisoblaymiz:

$$p_{11} = P(X = 0,\ Y = 0) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10} = 0{,}1 \qquad p_{12} = P(X = 0,\ Y = 1) = \frac{C_2^1}{C_5^2} = \frac{2}{10} = 0{,}2$$

$$p_{21} = P(X = 1,\ Y = 0) = \frac{C_2^1 \cdot C_2^1}{C_5^2} = \frac{4}{10} = 0{,}4 \qquad p_{22} = P(X = 1,\ Y = 1) = \frac{C_2^1}{C_5^2} = \frac{2}{10} = 0{,}2$$

$$p_{31} = P(X = 2,\ Y = 0) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10} = 0{,}1 \qquad p_{32} = P(X = 2,\ Y = 1) = 0$$ -mumkin bo‘lmagan hodisa.

Shunday qilib, (X,Y) miqdorning taqsimot qonuni

X/Y	0	1	2
0	0,1	0,4	0,1
1	0,2	0,2	0

Bu yerdan,

$P(X = 0) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3$; $P(X = 1) = 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}6$; $P(X = 2) = 0{,}1$

$P(Y = 0) = 0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}1 = 0{,}6$; $P(Y = 1) = 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}4$ gi kelib chiqadi.

U holda, X va Y tasodifiy miqdorlarning alohida taqsimot qonunlari quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi.

X	0	1	2
p	0,3	0,6	0,1

Y	0	1
p	0,6	0,4

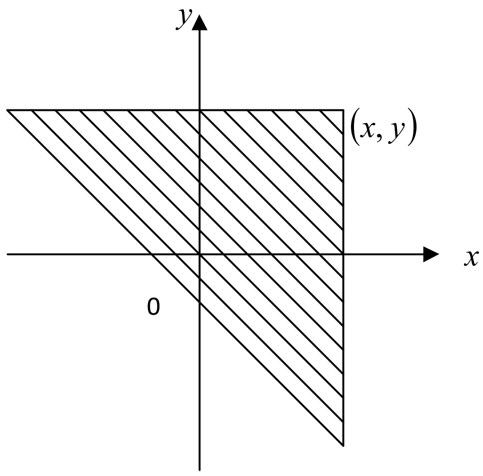
9.2. Ikki o‘lchovli tasodifiy miqdor taqsimotining taqsimot funksiyasi va uning xossalari

Ikki o‘lchovli (X,Y) tasodifiy miqdorni qaraymiz. x va y haqiqiy sonlar jufti bo‘lsin.

Ikki o‘lchovli (X,Y) tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi deb, x va y sonlarning har bir (x, y) jufti uchun X miqdor x dan kichik va Y miqdor y dan kichik qiymat qabul qilish ehtimolligini aniqlaydigan $F(x, y)$ funksiyaga aytiladi, ya’ni

$$F(x, y) = P(X < x,\ Y < y) \qquad (9.2)$$

Geometrik nuqtai nazardan, $F(x, y)$ funksiya Oxy tekisligida (X,Y) tasodifiy miqdorning uchi (x , y) nuqtada bo‘lib, bu uchdan chapda va pastda joylashgan cheksiz kvadratga tushish ehtimolligidir (14-chizma).



14-chizma

Ikki o‘lchovli tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasining asosiy xossalari.

1. Taqsimot funksiya chegaralangan: $0 \le F(x, y) \le 1$

2. $F(x, y)$ funksiya har qaysi argumenti bo‘yicha kamaymaydigan funksiya, ya’ni agar $x_2 > x_1$ bo‘lsa, $F(x_2, y) \ge F(x_1, y)$, agar $y_2 > y_1$ bo‘lsa $F(x, y_2) \ge F(x, y_1)$

3. Agar $F(x, y)$ funksiyaning biror argumenti $-\infty$ bo‘lsa (limit ma’nosida), u holda $F(x, y)$ funksiya nolga teng:

$$F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0$$

4. Agar $F(x, y)$ funksiyaning bitta argumenti $+\infty$ bo‘lsa (limit ma’nosida), u holda

$$F(x, \infty) = F_1(x) = F_x(x); \qquad F(\infty, y) = F_2(y) = F_y(y)$$

5. Agar ikkala argument ham $+\infty$ bo‘lsa (limit ma’nosida) u holda

$$F(+\infty, +\infty) = 1$$

3-misol. 2-misoldagi (X, Y) ikki o‘lchovli tasodifiy miqdorning hamda X va Y tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini toping.

Yechish: X va Yning taqsimot qonunlaridan foydalanib, ularning taqsimot funksiyalarini topamiz,

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & agar \quad x \le 0 \\ 0{,}3\,, & agar \quad 0 < x \le 1 \\ 0{,}9 & agar \quad 1 < x \le 2 \\ 1, & agar \quad x > 2 \end{cases} \qquad F_2(y) = \begin{cases} 0, & agar \quad y \le 0 \\ 0{,}6, & agar \quad 0 < y \le 1 \\ 1\,, & agar \quad y > 1 \end{cases}$$

Endi (X, Y) ikki o‘lchovli tasodifiy miqdorning $F(x, y)$ taqsimot funksiyasini topamiz:

X/Y	$x \le 0$	$0 < x \le 1$	$1 < x \le 2$	$x > 2$
$y \le 0$	0	0	0	0
$0 < y \le 1$	0	0,18	0,54	0,6
$y > 1$	0	0,3	0,9	1

4-misol. Ikki o‘lchovli (X, Y) tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi ma’lum:

$$F(x, y) = \left(\frac{1}{\pi} arctg 2x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi} arctg 3y + \frac{1}{2}\right)$$

Sinov natijasida X tashkil etuvchi $X<\frac{1}{2}$ qiymat qabul qilishi va bunda Y tashkil etuvchi $Y<\frac{1}{3}$ qiymat qabul qilish ehtimolligini toping.

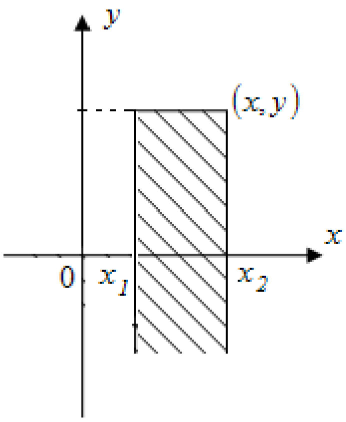
Yechish: Ikki o‘lchovli tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasining ta’rifiga ko‘ra $F(x,y)=P(X<x,\ \ Y<y)$.

$x=\frac{1}{2},\ \ y=\frac{1}{3}$ deb olib, izlanayotgan ehtimolni topamiz.

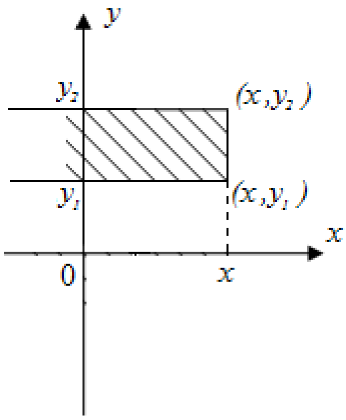
$$P\left(x<\frac{1}{2},\,Y<\frac{1}{3}\right)=F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{\pi}arctg\frac{2}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}arctg\frac{3}{3}+\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{16}.$$

9.3. Tasodifiy nuqtaning to‘g‘ri to‘rtburchakka tushish ehtimolligi

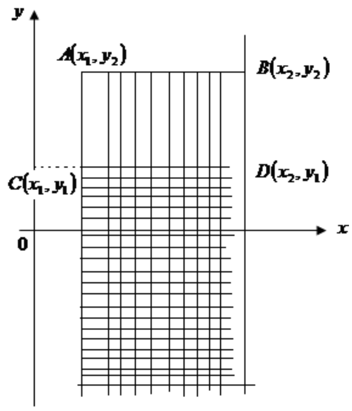
X va Y tasodifiy miqdorlar sistemasining taqsimot funksiyasidan foydalanib, tasodifiy nuqtaning sinov natijasida $x_1<X<x_2$ va $Y<y$ yarim polosaga (15-chizma) yoki $X<x, y_1<Y<y_2$ (16-chizma) yarim polosaga tushish ehtimolligini osongina topish mumkin.



15-chizma



16-chizma



17-chizma

Tasodifiy nuqtaning uchi (x_2,y) bo‘lgan kvadratga (14-chizma) tushish ehtimolligidan nuqtaning uchi (x_1,y) bo‘lgan kvadratga tushish ehtimolligini ayirib quyidagini hosil qilamiz.

$$P(X<x_2,Y<y)=P(X<x_1,Y<y)+P(x_1\le X<x_2,Y<y)$$

ekanligidan

$$P(X<x_2,Y<y)-P(X<x_1,Y<y)=P(x_1\le X<x_2,Y<y)$$

yoki

$$F(x_2,y)-F(x_1,y)=P(x_1\le X<x_2,Y<y)$$

yoki

$$P(x_1\le X<x_2,Y<y)=F(x_2,y)-F(x_1,y)\ . \qquad (9.3)$$

Shunga o‘xshash,

$$P(X<x,y_1\le Y<y_2)=F(x,y_2)-F(x,y_1) \qquad (9.4)$$

Endi tomonlari koordinata o‘qlariga parallel bo‘lgan $ABCD$ to‘g‘ri to‘rtburchakni qaraymiz (17-chizma).

Tomonlar tenglamasi $X=x_1,\ X=x_2,\ Y=y_1, Y=y_2$ bo‘lsin. (X,Y) tasodifiy nuqtaning bu to‘g‘ri to‘rtburchakka tushish ehtimolligini topamiz. Izlanayotgan ehtimollikni topish uchun masalan, tasodifiy nuqtaning vertikal shtrixlangan AB

polosaga tushish ehtimolligidan (9.3-formula) nuqtaning gorizontal shtrixlangan DC polosaga tushish ehtimolligini ayirish yetarli:

$$P(x_1 \le X < x_2, y_1 \le Y < y_2) = [F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)] - [F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)]$$

yoki

$$P(x_1 \le X < x_2, y_1 \le Y < y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1) \qquad (9.5)$$

5-misol. X va Y tasodifiy miqdor sistemasining taqsimot funksiyasi berilgan.

$$F(x, y) = \sin x \cdot \sin y \left(0 \le x < \frac{\pi}{2}, 0 \le y < \frac{\pi}{2} \right)$$

(X, Y) tasodifiy nuqtaning $x = \frac{\pi}{4},\ x = \frac{\pi}{2},\ y = \frac{\pi}{6},\ y = \frac{\pi}{3}$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan to‘g‘ri to‘rtburchakka tushish ehtimolligini toping.

Yechish. $x_1 = \frac{\pi}{4},\ x_2 = \frac{\pi}{2},\ y_1 = \frac{\pi}{6},\ y_2 = \frac{\pi}{3}$ deb olsak, (9.5) formulaga asosan quyidagini hosil qilamiz:

$$P\left(\frac{\pi}{4} \le X < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6} \le Y < \frac{\pi}{3} \right) = F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3} \right) - F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6} \right) - F\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3} \right) + F\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6} \right) =$$

$$= \sin\frac{\pi}{2} \cdot \sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{2} \cdot \sin\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{(\sqrt{3} - 1)(2 - \sqrt{2})}{4} \approx 0{,}11$$

9.4. Ikki o‘lchovli uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

Ikki o‘lchovli (X, Y) tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $F(x, y)$ hamma joyda uzluksiz va uzluksiz ikkinchi tartibli aralash xususiy hosilaga ega bo‘lsin.

Ikki o‘lchovli uzluksiz (X, Y) tasodifiy miqdor taqsimotining zichlik funksiyasi $f(x, y)$ deb, taqsimot funksiyasidan olingan ikkinchi tartibli aralash xususiy hosilaga aytiladi:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} \qquad (9.6)$$

6-misol. (X, Y) tasodifiy miqdorlar sistemasining berilgan $F(x, y) = \sin x \cdot \sin y \left(0 \le x < \frac{\pi}{2},\ 0 \le y < \frac{\pi}{2} \right)$ taqsimot funksiyasi bo‘yicha uning $f(x, y)$ zichlik funksiyasini toping.

Yechish. Ko‘rinib turibdiki, $F(x, y)$ funksiya uzluksiz differensiallanuvchi, x bo‘yicha xususiy hosila topamiz:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (\sin x \cdot \sin y)'_x = \cos x \cdot \sin y,$$

bundan y bo‘yicha hosila olamiz:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \cos x \cdot \cos y$$

Shunday qilib, izlanayotgan zichlik funksiyasi

$$f(x, y) = \cos x \cdot \cos y \left(0 \le x < \frac{\pi}{2},\ 0 \le y < \frac{\pi}{2} \right)$$

$f(x,y)$ zichlik funksiyasini bilgan holda $F(x,y)$ taqsimot funksiyasi

$$F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy \qquad (9.7)$$

formula bo‘yicha topiladi, bu bevosita zichlik funksiya ta’rifidan kelib chiqadi.

$f(x,y)$ zichlik funksiya quyidagi xossalarga ega.

1. $f(x,y)\geq 0$
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1 \qquad (9.8)$

7-misol. Ikki o‘lchovli (X,Y) tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan: $f(x,y)=\dfrac{C}{(4+x^2)(9+y^2)}$

a) *C* o‘zgarmasni toping; *b*) tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini toping.

Yechish. *a*) (9.8) formulaga ko‘ra

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{C}{(4+x^2)(9+y^2)}dxdy=1$$

shartdan,

$$C\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{4+x^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{9+y^2}=1.$$

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$$

jadval integralidan foydalanamiz.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{4+x^2}=\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}\Big|_{-\infty}^{\infty}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Xuddi shuningdek,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{9+x^2}=\frac{1}{3}arctg\frac{x}{3}\Big|_{-\infty}^{\infty}=\frac{\pi}{3},$$

yoki $C\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{3}=1$, bundan, $C=\frac{6}{\pi^2}$.

Shunday qilib,

$$f(x,y)=\frac{6}{\pi^2}\frac{1}{(4+x^2)(9+y^2)}$$

b) taqsimot funksiyani topamiz.

$$F(x,y)=\frac{6}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{dx}{4+x^2}\int\limits_{-\infty}^{y}\frac{dy}{9+y^2}=\frac{6}{\pi^2}\cdot\frac{1}{2}\left(arctg\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{3}\left(arctg\frac{y}{3}+\frac{\pi}{2}\right)$$

yoki

$$F(x,y)=\left(\frac{1}{\pi}arctg\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}arctg\frac{y}{3}+\frac{1}{2}\right)$$

Endi ikki o‘lchovli tasodifiy miqdor tashkil etuvchilarining zichlik funksiyalarini izlaymiz. Avvalo X tashkil etuvchining $f_1(x)$ zichlik funksiyasini topamiz. Uning taqsimot funksiyasini $F_1(x)$ bilan belgilaymiz. Bir o‘lchovli tasodifiy miqdorning ta’rifiga ko‘ra

$$f_1(x)=\frac{dF_1(x)}{dx}$$

(9.7) formula va $F_1(x)=F(x,\infty)$ munosabatni e’tiborga olib,

$$F_1(x)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy$$

ni yozish mumkin. Bu tenglikni ikkala tomonini x bo‘yicha differensiallab, topamiz:

$$\frac{dF_1(x)}{dx}=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy \quad \text{yoki} \quad f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy \qquad (9.9)$$

Y tashkil etuvchining zichlik funksiyasi ham shunga o‘xshash topiladi:

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx \qquad (9.10)$$

Shunday qilib, sistemaning tashkil etuvchilaridan birining zichlik funksiyasi sistema zichlik funksiyasidan olingan chegaralari cheksiz xosmas integralga teng, bunda integrallash o‘zgaruvchisi ikkinchi tashkl etuvchiga mos keladi.

8-misol. Ikki o‘lchovli (X,Y) tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan:

$$f(x,y)=\begin{cases}Ce^{-x-y}, & agar \quad x\ge 0, y\ge 0\\ 0, & agar \ x\le 0, y\le 0\end{cases}$$

a) C o‘zgarmasni; *b*) tashkil etuvchilarning zichlik funksiyalarini toping.

Yechish. *a*) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=1$ munosabatdan

$$C\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}ex^{-x-y}dxdy=C\int_0^{\infty}e^{-x}dx\int_0^{\infty}e^{-y}dy=C=1$$

demak,

$$\int_0^{\infty}e^{-x}dx=1 \text{ ekanligidan, } C=1$$

b) (9.9) formuladan

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\int_0^{\infty}e^{-x-y}dy=e^{-x}, \quad x\ge 0;$$

xuddi shuningdek (9.10) formuladan

$$f_2(y)=e^{-y}, \quad y\ge 0$$

Shunday qilib, tashkil etuvchilarning zichlik funksiyalari

$$f_1(x)=\begin{cases}e^{-x}, & agar \quad x\ge 0\\ 0, & agar \quad x<0\end{cases}$$

$$f_2(y)=\begin{cases}e^{-y}, & agar \quad y\ge 0\\ 0, & agar \quad y<0\end{cases}$$

9.5. Bog‘liq va bog’liqsiz tasodifiy miqdorlar

Agar har qanday x,y lar uchun $\{X<x\}$ va $\{Y<y\}$ hodisalar bog‘liq bo‘lmasa, X va Y tasodifiy miqdorlar bog’liqsiz deyiladi.

Tasodifiy miqdorlar bog’liqsizligining zaruriy va yetarli shartlarini keltiramiz.

Teorema: X va Y tasodifiy miqdorlar bog’liqsiz bo‘lishi uchun (X,Y) sistemaning taqsimot funksiyasi tashkil etuvchilarning taqsimot funksiyalari ko‘paytmasiga teng bo‘lishi zarur va yetarli:

$$F(x,y)=F_1(x)\cdot F_2(y) \qquad (9.11)$$

Isboti: Zarurligi: X va Y tasodifiy miqdorlar bog’liqsiz bo‘lsin. U holda, $X<x$ va $Y<y$ hodisalar bog’liqsiz, binobarin, bu hodisalarning birga ro‘y berish ehtimolligi ularning ehtimolliklari ko‘paytmasiga teng:

$$P(X<x,Y<y)=P(X<x)\cdot P(Y<y)$$

yoki

$$F(x,y)=F_1(x)\cdot F_2(y)$$

Yetarliligi:

$$F(x,y)=F_1(x)\cdot F_2(y)$$

bo‘lsin. U holda,

$$P(X<x,Y<y)=P(X<x)\cdot P(Y<y)$$

bo‘ladi. Bundan, X va Y bog’liqsiz ekanligi kelib chiqadi.

Natija. Uzluksiz X va Y tasodifiy miqdor bog’liqsiz bo‘lishi uchun (X,Y) sistemaning zichlik funksiyasi tashkil etuvchilarning zichlik funksiyalari ko‘paytmasiga teng bo‘lishi zarur va yetarli:

$$f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y) \qquad (9.12)$$

Isboti. Zarurligi: X va Y bog’liqsiz uzluksiz tasodifiy miqdorlar bo‘lsin. U holda,

$$F(x,y)=F_1(x)\cdot F_2(y).$$

Bu tenglikni x bo‘yicha keyin y bo‘yicha differensiallaymiz:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}=\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F_2}{\partial y}=\frac{dF_1}{dx}\cdot\frac{dF_2}{dy}$$

yoki

$$f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$$

ga ega bo‘lamiz.

Yetarliligi: (9.12) tenglik o‘rinli bo‘lsin.Bu tenglikni x bo‘yicha va y bo‘yicha integrallaymiz:

$$\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{x} f_1(x)dx\cdot\int_{-\infty}^{y} f_2(y)dy$$

Bu esa ta’rifga ko‘ra $F(x,y)=F_1(x)\cdot F_2(y)$ tenglikni o‘zidir. Bu yerdan (yuqoridagi tenglikga asosan) X va Y tasodifiy miqdorlar bog’liqsiz ekanligi kelib chiqadi.

9.6. Shartli taqsimot qonunlari

Avvalo tasodifiy hodisalar bo‘lgan holni qaraymiz. Agar A va B hodisalar bog‘liq bo‘lsa, u holda B hodisaning shartli ehtimolligi uning shartsiz ehtimolligidan farq qilishini bilamiz.Bu holda,

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P_A(B)$$

yoki

$$P_A(B)=\frac{P(AB)}{P(A)} \qquad (9.13)$$

Shunga o‘xshash holat tasodifiy miqdorlar uchun ham o‘rinli. Ikki o‘lchovli tasodifiy miqdorning tashkil etuvchilari orasidagi bog‘lanishni tavsiflash uchun shartli taqsimot qonuni tushunchasini kiritamiz.

Ikki o‘lchovli (X,Y) diskret tasodifiy miqdorni qaraymiz. Tashkil etuvchilarning mumkin bo‘lgan qiymatlari $x_1,x_2,\cdots,x_n;\ y_1,y_2,\cdots,y_m$ bo‘lsin.

X ning $Y=y_j$ $\left(j=\overline{1,m}\right)$ shartda $x_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ qiymat qabul qilish shartli ehtimolligini $P(x_i/y_j)$ orqali belgilaymiz.

X tashkil etuvchining $Y=y_j$ bo‘lganda shartli taqsimoti deb, $Y=y_j$ hodisa ro‘y berdi degan farazda hisoblangan

$$P(x_1/y_j),\ P(x_2/y_j),\ldots,P(x_n/y_j)$$

shartli ehtimolliklar to‘plamiga aytiladi.

Y tashkil etuvchining shartli taqsimoti shunga o‘xshash aniqlanadi:

$$P(y_1/x_i),\ P(y_2/x_i),\ldots,P(y_m/x_i)$$

Ikki o‘lchovli diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini bilgan holda, tashkil etuvchilarning shartli taqsimot qonunlarini (9.13) formuladan foydalanib hisoblash mumkin.

Ikki o‘lchovli (X,Y) diskret tasodifiy miqdorning birgalikdagi taqsimot qonuni

$$P_{ij}=P(x_i,y_j)=P(X=x_i,Y=y_j),\ \ i=\overline{1,n};\ \ j=\overline{1,m}$$

bo‘lsin.U holda, X tashkil etuvchining shartli taqsimot qonuni umumiy holda

$$P(X=x_i/Y=y_j)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)},\quad i=\overline{1,n};\quad j=\overline{1,m}$$

yoki

$$p(x_i/y_j)=\frac{P(x_i,y_i)}{P(y_j)} \qquad (9.14)$$

kabi aniqlanadi.

Y tashkil etuvchining shartli taqsimot qonunlari ham shunga o‘xshash aniqlanadi:

$$P(Y=y_j/X=x_i)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(X=x_i)},\quad i=\overline{1,n};\quad j=\overline{1,m}$$

yoki

$$p(y_j/x_i)=\frac{P(x_i,y_i)}{P(x_i)}\quad i=\overline{1,n};\quad j=\overline{1,m}. \qquad (9.15)$$

Bu yerda,

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i/y_j)=\sum_{i=1}^{n}\frac{P_{ij}}{P(y_j)}=\frac{1}{P(y_j)}\sum_{i=1}^{n}P_{ij}=\frac{1}{P(y_j)}\cdot P(y_j)=1,$$

xuddi shuningdek tayin x_i da

$$\sum_{j=1}^{m} P(y_j/x_i)=1.$$

9-misol. Ikki o‘lchovli (X , Y)tasodifiy miqdor quyidagi jadval bilan berilgan.

X/Y	x_1	x_2	x_3
y_1	0,1	0,3	0,2
y_2	0,06	0,18	0,16

X tashkil etuvchining Y tashkil etuvchi y_2 qiymat qabul qildi degan shartda shartli taqsimot qonunini toping.

Yechish. Izlanayotgan qonun quyidagi shartli ehtimolliklar to‘plami bilan aniqlanadi: $P(x_1/y_2)$, $P(x_2/y_2)$, $P(x_3/y_2)$.

$$P(y_2)=0{,}06+0{,}18+0{,}16=0{,}4$$

ekanligi va (9.14) formuladan foydalanib quyidagilarni topamiz:

$$P(x_1/y_2)=\frac{0{,}06}{0{,}4}=0{,}15 \qquad P(x_2/y_2)=\frac{0{,}18}{0{,}4}=0{,}45 \qquad P(x_3/y_2)=\frac{0{,}16}{0{,}4}=0{,}4$$

Demak, X tasodifiy miqdorning $Y=y_2$ dagi shartli taqsimot qonuni quyidagicha

X	x_1	x_2	x_3
$Y_{j=2}$	0,15	0,45	0,4

$$\sum_{i} P(x_i/y_2)=0{,}15+0{,}45+0{,}4=1$$

Endi ikki o‘lchovli (X,Y) tasodifiy miqdor uzluksiz bo‘lgan holni qaraymiz. $f(x,y)$ (X,Y) tasodifiy miqdorning birgalikda zichlik funksiyasi, $f_1(x)$ va $f_2(y)$ esa X va Y tashkil etuvchilarning zichlik funksiyasi bo‘lsin.

X tashkil etuvchining berilgan $Y=y$ qiymatdagi $\varphi(x/y)$ shartli zichlik funksiyasi deb, sistemaning $f(x,y)$ zichlik funksiyasining Y tashkil etuvchining $f_2(y)$ zichlik funksiyasiga nisbatiga aytiladi:

$$\varphi(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)} \qquad (9.16)$$

Shuni ta’kidlash lozimki, $\varphi(x/y)$ shartli funksiyaning $f_1(x)$ zichlik funksiyasidan farqi $\varphi(x/y)$ funksiya X ning Y tashkil etuvchi $Y=y$ qiymat qabul qildi degan shartdagi taqsimotini beradi. $f_1(x)$ esa X ning Y tashkil etuvchi mumkin bo‘lgan qiymatlardan qaysilarini qabul qilganligiga bog‘liq bo‘lmagan holda taqsimotini beradi.

Y tashkil etuvchining berilgan $X=x$ qiymatdagi shartli zichlik funksiyasi ham shunga o‘xshash aniqlanadi:

$$\psi(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)} \qquad (9.17)$$

Agar sistemaning $f(x,y)$ zichlik funksiyasi ma'lum bo'lsa, u holda ((9.9),(9.10)) shartli zichlik funksiyalar quyidagicha topilishi mumkin:

$$\varphi(x/y)=\frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx}, \qquad \psi(y/x)=\frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(x,y)dy} \qquad (9.18)$$

(9.16) va (9.17) formulalarni hisobga olib, $f(x,y)$ zichlik funksiyasini quyidagi ko'rinishda ifodalash mumkin:

$$f(x,y)=f_2(y)\cdot\varphi(x/y)$$

yoki

$$f(x,y)=f_1(x)\cdot\varphi(y/x)$$

Har qanday zichlik funksiyasi kabi shartli zichlik funksiyalar ham

$$\varphi(x/y)\geq 0, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x/y)dx=1;$$

$$\psi(y/x)\geq 0, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(y/x)dy=1$$

xossalarga ega.

10-misol. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdor

$$f(x,y)=\begin{cases}-\frac{1}{2}xy, & агар \ (x,y)\in D\\ 0 \ , & агар \ (x,y)\notin D\end{cases}$$

zichlik funksiya bilan berilgan, bu yerda, $D=\{(x,y): y>-x,\ y<2, x<0\}$.

1) Tashkil etuvchilarning ehtimolliklari taqsimot qonunlarini toping;
2) X va Y larni bog'liqligini ko'rsating.

Yechish: 1) Avvalo tashkil etuvchilarning zichlik funksiyalarini topamiz:

$$f_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\int\limits_{-x}^{2}\left(-\frac{1}{2}xy\right)dy=-\frac{1}{2}x\frac{y^2}{2}\Bigg|_{-x}^{2}=-\frac{1}{4}x\left(4-x^2\right), \quad x\in(-2,0)$$

$$f_2(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\int\limits_{-y}^{0}\left(-\frac{1}{2}xy\right)dx=-\frac{1}{2}y\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-y}^{0}=\frac{y^2}{4}, \quad y\in(0,2)$$

U holda,

$$\varphi(x/y)=\frac{-\frac{1}{2}xy}{\frac{y^2}{4}}=-\frac{2x}{y}, \quad (x,y)\in D,$$

$$\psi(y/x)=\frac{-\frac{1}{2}xy}{-\frac{1}{4}x\left(4-x^2\right)}=\frac{2y}{4-x^2}, \quad (x,y)\in D$$

2) agar X va Y tashkil etuvchilar bog'liqsiz bo'lsa, u holda

$$\varphi(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\frac{f_1(x)\cdot f_2(y)}{f_2(y)}=f_1(x)$$

va

$$\psi(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}=\frac{f_1(x)\cdot f_2(y)}{f_1(x)}=f_2(y).$$

Ammo,

$$\varphi(x/y)=-\frac{2x}{y},\ (x,y)\in D,\quad f_1(x)=-\frac{1}{4}x(4-x^2),\ x\in(-2{,}0)$$

funksiyalar bir-biridan farqli bo‘lganligi uchun X va Y tashkil etuvchilar bog‘liq.

9.7. Ikki o‘lchovli tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari. Korrelyatsiya momenti. Korrelyatsiya koeffitsenti

Ikki o‘lchovli (X,Y) tasodifiy miqdorni tavsiflash uchun tashkil etuvchilarning matematik kutilmalari va dispersiyalaridan tashqari boshqa xarakteristikalar, jumladan korrelyatsiya momenti va korrelyatsiya koeffitsentidan foydalaniladi.

X va Y tasodifiy miqdorlarning μ_{xy} **korrelyatsiya momenti** deb, bu miqdorlar chetlanishlari ko‘paytmasining matematik kutilmasiga aytiladi:

$$\mu_{xy}=M[(X-M(X))(Y-M(Y)]\qquad(9.19)$$

Diskret tasodifiy miqdorlar korrelyatsiya momentlarini hisoblash uchun

$$\mu_{xy}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(x_i-M(X))(y_i-M(Y)p_{ij}\qquad(9.20)$$

formuladan, uzluksiz miqdorlar uchun esa

$$\mu_{xy}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))(y-M(Y))f(x,y)dxdy\qquad(9.21)$$

formuladan foydalaniladi.

Korrelyatsiya momenti X va Y miqdorlar orasida bog‘lanishni tavsiflash uchun xizmat qiladi.

Korrelyatsiya momenti(kovariatsiya)ning ba’zi xossalarini keltiramiz.

1.Agar X va Y miqdorlar bog’liqsiz bo‘lsa, u holda korrelyatsiya momenti nolga teng. Haqiqatdan, X va Y bog’liqsiz tasodifiy miqdorlar bo‘lgani uchun ularning $X-M(X)$ va $Y-M(Y)$ chetlanishlari ham bog’liqsizdir. Matematik kutilma va chetlanishning xossalaridan foydalanib quyidagini hosil qilamiz:

$$\mu_{xy}=M[(X-M(X)(Y-M(Y)]=M[X-M(X)]\cdot M[Y-M(Y)]=0$$

Agar korrelyatsiya momenti noldan farqli bo‘lsa, u holda, X va Y lar bog‘liq tasodifiy miqdorlar bo‘ladi.

2. Ikki X va Y tasodifiy miqdor korrelyatsiya momenti ular ko‘paytmasining matematik kutilmasidan matematik kutilmalari ko‘paytmasini ayrilganiga teng, ya’ni

$$\mu_{xy}=M(XY)-M(X)M(Y).$$

Haqiqatdan, matematik kutilmaning xossalaridan,

$$\mu_{xy}=M[(X-M(X))(Y-M(Y)]=M[XY-XM(Y)-M(X)Y+M(X)M(Y)]=$$
$$=M(XY)-M(X)M(Y)-M(X)M(Y)+M(X)M(Y)=M(XY)-M(X)M(Y).$$

3. Ikki o‘lchovli (X,Y) tasodifiy miqdorning korrelyatsiya momenti absolyut qiymati bo‘yicha ularning o‘rtacha kvadratik chetlanishlari ko‘paytmasidan oshmaydi, ya’ni

$$|\mu_{xy}|\le\sigma_x\sigma_y \tag{9.22}$$

Haqiqatdan, avvaldan ma’lum

$$M\left(\frac{X-M(X)}{\sigma_x}\pm\frac{Y-M(Y)}{\sigma_y}\right)^2\ge 0$$

tengsizlikni qaraymiz. Bundan, qavslarni ochib

$$M\left(\left(\frac{X-M(X)}{\sigma_x}\right)^2\pm 2\frac{X-M(X)}{\sigma_x}\frac{Y-M(Y)}{\sigma_y}+\left(\frac{Y-M(Y)}{\sigma_y}\right)^2\right)=\frac{1}{\sigma_x^2}M(X-M(X))^2\pm$$

$$\frac{2}{\sigma_x\sigma_y}M[(X-M(X))(Y-M(Y))]+\frac{1}{\sigma_y^2}M(Y-M(Y))^2=\frac{D(X)}{\sigma_x^2}\pm\frac{2\mu_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{D(Y)}{\sigma_y^2}=$$

$$=2\pm\frac{2\mu_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}\ge 0,$$

Bundan, (9.22) kelib chiqadi, bu yerda, $\sigma_x^2=D(X),\quad \sigma_y^2=D(Y)$

11-misol. Ikki o‘lchovli $(X\ Y)$ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi quyidagicha berilgan bo‘lsin:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}<1 & \partial a\ \ \dfrac{1}{6\pi}\\[2mm] \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\ge 1 & \partial a\ \ 0\end{cases}$$

X va Y miqdorlar bog‘liq ekanligini ko‘rsating.

Yechish. X va Y tashkil etuvchilarning zichlik funksiyalarini topamiz.

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\frac{1}{6\pi}\int_{-2\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}}^{2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}dy=\frac{1}{3\pi}\int_{0}^{2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}dy=\frac{2}{9\pi}\sqrt{9-x^2},\quad |x|<3$$

Shunga o‘xshash,

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\frac{1}{2\pi}\sqrt{4-y^2},\qquad |y|<2$$

Shunday qilib, berilgan ellipsning ichida

$$f_1(x)=\frac{2}{9\pi}\sqrt{9-x^2},\quad f_2(y)=\frac{1}{2\pi}\sqrt{4-y^2},$$

uning tashqarisida esa

$$f_1(x)=0,\ f_2(y)=0$$

va ko‘rinib turibdiki

$$f(x,y)\ne f_1(x)\cdot f_2(y).$$

Demak, X va Y bog‘liq miqdorlardir.

Korrelyatsiya momenti ta’rifidan, uning kattaligi (o‘lchami) tasodifiy miqdorlar o‘lcham birliklariga bog‘liq. Bu bog‘liqliklarni bartaraf etish maqsadida yangi sonli xarakteristika-korrelyatsiya koeffitsenti kiritiladi.

X va Y tasodifiy miqdorlarning r_{xy} **korrelyatsiya koeffitsenti** deb, korrelyatsiya momentining bu miqdorlar o‘rtacha kvadrat chetlanishlari ko‘paytmasi nisbatiga aytiladi:

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \qquad (9.23)$$

Bog’liqsiz tasodifiy miqdorlarni korrelyatsiya koeffitsenti nolga teng

$$r_{xy} = 0 \text{ (chunki } \mu_{xy} = 0\text{)}$$

Agar X va Y tasodifiy miqdorlarning korrelyatsiya koeffitsenti (yoki korrelyatsiya momenti) noldan farqli bo‘lsa, ular korrelyatsiyalangan deyiladi: agarda korrelyatsiya koeffitsenti nolga teng bo‘lsa, ular korrelyatsiyalanmagan deyiladi.

Ikkita korrelyatsiyalangan miqdor, shuningdek, bog‘liq hamdir. Darhaqiqat, teskarisini faraz qilsak, ya’ni ular bog’liqsiz desak, $r_{xy} = 0$ degan xulosaga kelamiz, bu esa shartga zid, chunki korrelyatsiyalangan miqdor uchun $r_{xy} \neq 0$ (chunki $\mu_{xy} \neq 0$)

Bunga teskari mulohaza har doim ham o‘rinli bo‘lavermaydi, ya’ni agar ikkita miqdor bog‘liq bo‘lsa, ular korrelyatsiyalangan ham, korrelyatsiyalanmagan bo‘lishi ham mumkin. Boshqacha aytganda, ikkita bog‘liq miqdorning korrelyatsiya momenti nolga teng bo‘lib qolishi mumkin. Bunga ishonch hosil qilish uchun misol keltiramiz.

12-misol. Yuqoridagi misolda X va Y tasodifiy miqdorlar bog‘liq ekanligini ko‘rsatdik.Ularning korrelyatsiyalanmaganligini ko‘rsatish uchun $\mu_{xy} \neq 0$ ekanligiga ishonch hosil qilish yetarli. Korrelyatsiya momentini (9.21) formuladan foydalanib topamiz:

$$\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))(y - M(Y)) f(x,y)dxdy$$

$f_1(x)$ zichlik funksiya OY o‘qqa nisbatan simmetrik, $f_2(y)$ funksiya OX o‘qqa nisbatan simmetrik bo‘lgani uchun mos ravishda

$$M(X) = 0, \ \ M(Y) = 0 .$$

U holda, $$\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy \ .$$

$f(x,y)$ zichlik funksiya o‘zgarmas ekanligidan,

$$\mu_{xy} = \frac{1}{6\pi}\int_{-3}^{3} xdx \int_{-2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}^{2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}} ydy .$$

Ichki integral nolga teng, chunki integral ostidagi funksiya toq va integrallash chegaralari koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik.

Demak, $\mu_{xy} = 0$ (shuningdek $r_{xy} = 0$), ya'ni X va Y tasodifiy miqdorlar korrelyatsiyalanmagan.

Shunday qilib, ikkita tasodifiy miqdorning korrelyatsiyalanganligidan ularning bog'liqligi kelib chiqadi, ammo bu miqdorlarning bog'liqligidan hamma vaqt ularning korrelyatsiyalanganligi kelib chiqavermas ekan.

9.8. Ikki o'lchovli normal taqsimot

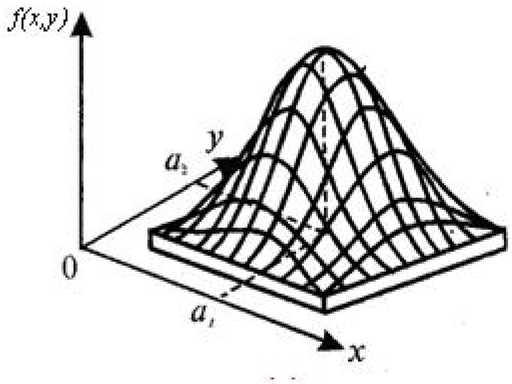
Amaliyotda normal taqsimlangan ikki o'lchovli tasodifiy miqdorlardan foydalanish ko'proq uchraydi.

Normal taqsimot qonuni deb zichlik funksiyasi

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r_{xy}^2}} e^{-\frac{1}{2\sqrt{1-r_{xy}^2}}\left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_y^2} - 2r_{xy}\frac{x-a_1}{\sigma_x}\cdot\frac{y-a_2}{\sigma_y}\right]} \tag{9.24}$$

bo'lgan ikki o'lchovli (X,Y) tasodifiy miqdor (ehtimolliklari) taqsimotiga aytiladi, bu yerda $a_1 = M(X)$, $a_2 = M(Y)$-matematik kutilmalar; σ_x, σ_y-o'rtacha kvadratik chetlanishlar; r_{xy} - X va Y miqdorlarning korrelyatsiya koeffitsenti.

Geometrik nuqtai nazardan $f(x,y)$ ning grafigi cho'qqisi (a_1, a_2) nuqtada bo'lgan "tog'simon" sirtni bildiradi. (18 -chizma)



18 -chizma

Normal taqsimlangan miqdorlarning korrelyatsiyalanmaganligidan ularning bog'liqsizligi kelib chiqishini aytib o'tmoqchimiz.Haqiqatdan, X va Y miqdorlar korrelyatsiyalanmagan bo'lsin. U holda, (9.23) formulada $r_{xy} = 0$ deb, quyidagini hosil qilamiz:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_y^2}\right]} = \frac{1}{\sigma_ч\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_x^2}} \cdot \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-a_2)^2}{2\sigma_y^2}} = f_1(x)\cdot f_2(y),$$

ya'ni

$$f(x,y) = f_1(x)\cdot f_2(y),$$

demak, ikki o'lchovli (X,Y) normal taqsimlangan tasodifiy miqdor tashkil etuvchilari korrelyatsiyalanmagan bo'lsa, ular bog'liqsizdir.Teskari davo ham o'rinli.

O‘Z-O‘ZINI TEKSHIRISH UCHUN SAVOLLAR

1.Ikki o‘lchovli tasodifiy miqdorga misollar keltiring.
2. Ikki o‘lchovli diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini yozing.
3.Ikki o‘lchovli tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasi va uning xossalari ayting.
4.Tasodifiy nuqtaning to‘g‘ri to‘rtburchakka tushish ehtimolligi nimaga teng.
5. Ikki o‘lchovli uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi va uning xossalari ayting.
6. Bog‘liq va bog’liqsiz tasodifiy miqdorlarga misol keltiring
7. Shartli taqsimot qonunlarini ta’riflang.
8.Ikki o‘lchovli tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari qanday aniqlanadi.
9. Korrelyatsiya momenti nimaga teng.
10.Korrelyatsiya koeffitsentining xossalarini ayting.
11. Ikki o‘lchovli normal taqsimot zichlik funksiyasini yozing.

Mustaqil yechish ushun mashqlar

1. Diskret ikki o‘lchovli tasodifiy miqdorning ehtimolliklari taqsimoti berilgan:

Y \ X	3	10	12
4	0,17	0,13	0,25
5	0,10	0,30	0,05

X va Y tashkil etuvchilarning taqsimot qonunlarini toping.

J:

X	3	10	12
p	0,27	0,43	0,30

Y	4	5
p	0,55	0,45

2. X va Y tasodifiy miqdorning sistemasining taqsimot funksiyasi berilgan:

$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & x<0,\ y<0\, da \\ \sin x\cdot\sin y, & 0\le x\le\frac{\pi}{2},\ 0\le y\le\frac{\pi}{2}\ \ da \end{cases}$$

(X,Y) tasodifiy nuqtaning $x=0,\ x=\frac{\pi}{4},\ y=\frac{\pi}{6},\ y=\frac{\pi}{3}$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan to‘g‘ri to‘rtburchakka tushish ehtimolligini toping. J: p=0,26

3. X va Y tasodifiy miqdorning sistemasining taqsimot funksiyasi berilgan:

$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & x<0,\ y<0\ \ da \\ 1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y}, & x\ge 0,\ y\ge 0\ \ da \end{cases}$$

$(X,\ Y)$ tasodifiy nuqtaning $x = 1$, $x = 2$, $y = 3$, $y = 5$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan to‘g‘ri to‘rtburchakka tushish ehtimolligini toping. J: $p=\frac{3}{128}$

4.Ikki o‘lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi berilgan:

$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & x<0,\ y<0\ \ da \\ 1-3^{-x}-3^{-y}+3^{-x-y}, & x\ge 0,\ y\ge 0\ \ da \end{cases}$$

Sistemaning zichlik funksiyasini toping.

J: $f(x,y)=\begin{cases}0, & x<0,\ y<0\ da\\ 3^{-x-y}\ln^2 3, & x\ge 0,\ y\ge 0\ da\end{cases}$

5.Ikki o‘lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi berilgan:

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0,\ y<0\quad da\\ \left(1-e^{-4x}\right)\left(1-e^{-2y}\right), & x\ge 0,\ y\ge 0\ da\end{cases}$$

Sistemaning zichlik funksiyasini toping. J: $f(x,y)=\begin{cases}0, & x<0,\ y<0\ da\\ 8e^{-4x-2y}, & x\ge 0,\ y\ge 0\ da\end{cases}$

6.Ikkita tasodifiy miqdor sistemasining zichlik funksiyasi berilgan: $0\le x\le\frac{\pi}{2},\ 0\le y\le\frac{\pi}{2}$ kvadratda $f(x,y)=\frac{1}{2}\sin(x+y)$, bu kvadratdan tashqarida $f(x,y)=0$. Системанинг taqsimot функциясини топинг.j: berilgan kvadratda $F(x,y)=\frac{1}{2}[\sin x+\sin y-\sin(x+y)]$,bu kvadratdan tashqarida $F(x,y)=0$.

7. $x^2+y^2\le R^2$ doirada zichlik funksiya $f(x,y)=C\left(R-\sqrt{x^2+y^2}\right)$; doiradan tashqarida $f(x,y)=0$; *a*) *C* o‘zgarmasni toping; *b*) агар $R = 2$ bo‘lsa, (*X, Y*) tasodifiy nuqtaning radiusi r = 1, markazi koordinatalar boshida bo‘lgan doiraga tushish ehtimolligini toping. J: *a*) $C=\frac{3}{\pi R^2}$; *b*) $p=\frac{1}{2}$

8. Ikki o‘lchovli diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni berilgan:

Y \ X	$x_1 = 2$	$x_2 = 5$	$x_3 = 8$
$y_1 = 0{,}4$	0,15	0,30	0,35
$y_2 = 0{,}8$	0,05	0,12	0,03

a) Tashkil etuvchilarning shartsiz taqsimot qonunlarini toping; *b*) *X* tashkil etuvchining *Y* tashkil etuvchi $y_1 = 0{,}4$ qiymat qabul qiladi, degan shartda shartli taqsimot qonunini toping; *c*) $X = x_2 = 5$ shartda *Y*ning shartli taqsimot qonunini toping. J: *a*)

X	2	5	8
p	0,20	0,42	0,38

Y	0,4	0,8
p	0,80	0,20

b)

X	2	5	8
$p(X/y_1)$	3/16	3/8	7/16

Y	0,4	0,8
$p(Y/x_2)$	5/7	2/7

9. Ikki o‘lchovli uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi}e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+2xy+5y^2\right)}$$

a) Tashkil etuvchilarning zichlik funksiyalarini toping; *b*) tashkil etuvchilarning shartli zichlik funksiyalarini toping.

J: *a*) $f_1(x)=\sqrt{\frac{2}{5\pi}}e^{-0,4x^2}$, $f_2(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-2y^2}$

b) $\varphi(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-0,5(x+y)^2}$, $\psi(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}=\frac{5}{\sqrt{2\pi}}e^{-0,1(x+5y)^2}$

10. (X,Y) ikki o'lchovli uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan: $f(x,y)=\begin{cases} 0, & x<0,\ y<0\ da \\ 4xye^{-x^2-y^2}, & x\geq 0,\ y\geq 0\ da \end{cases}$

a) *X* va *Y* tashkil etuvchilarning matematik kutilmalarini toping; *b*) Tashkil etuvchilarning dispersiyalarini toping.

J: $a)\, M(X)=M(Y)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}, b) D(X)=D(Y)=1-\frac{\pi}{4}$.

2-BOB. Matematik statistika

§ 10. Tanlanma usulning matematik asoslari

Oliy matematikaning bo‘limlaridan biri **matematik statistika** fani-statistik ma’lumotlar va bu ma’lumotlarni tahlil qilish bilan ilmiy va amaliy xulosalar chiqarishning matematik usullarini o‘rganadi.

Matematik statistika quyidagi ikki asosiy vazifani hal qiladi:

1.Barcha statistik ma’lumotlarni to‘plash, lozim bo‘lsa, ularni guruhlash;

2.To‘plangan ma’lumotlarni maqsadga muvofiq tahlil qilish;

Matematik statistika fani ehtimolliklar nazariyasi fani bilan birga yuza keldi (XVII-asr). Matematik statistikaning keyingi rivojlanishi XIX asrning ikkinchi yarmiga to‘g‘ri keladi. U yoki bu hodisalarni matematik statistika usullari bilan o‘rganish fan va amaliyotda zarur bo‘lgan ko‘p masalalarni (masalan, texnologik jarayonlarni to‘g‘ri tashkil etish, maqsadga muvofiq rejalashtirish va hokazo) hal etishda vosita bo‘lib xizmat qiladi.

10.1 Bosh va tanlanma to‘plamlar

Faraz qilaylik, biror korxona katta sondagi mahsulot ishlab chiqargan bo‘lib, bu mahsulotni sifat yoki son belgilari bo‘yicha tekshirilishi talab etilsin. Ishlab chiqarilgan mahsulotning soni juda ko‘p, biroq, ularning har birini aytilgan belgi bo‘yicha tekshirish qiyin bo‘ladi. Bunday holda quyidagicha ish tutiladi.Barcha mahsulotlardan tavakkaliga ma’lum sondagisi olinadi va ularni tekshirib, korxonaning barcha mahsulotlari to‘grisida xulosa chiqariladi. Tekshirishning bunday usuli **tanlanma usul** deyiladi. Bu usulni batafsilroq o‘rganamiz.

O‘rganilishi lozim bo‘lgan barcha obyektlar to‘plami **bosh to‘plam** deyiladi. Bosh to‘plamdan tasodifiy ravishda tanlab olingan obyektlar to‘plami **tanlanma to‘plam** deyiladi.

To‘plamning hajmi deb, bu to‘plamdagi obyektlar soniga aytiladi. Masalan, 1000 ta detaldan tekshirish uchun tavakkaliga 100 ta detal olingan bo‘lsa, bosh to‘plam hajmi N =1000, tanlanma to‘plam hajmi n=100. Tanlanmani tuzishda quyidagicha yo‘l tutish mumkin: bosh to‘plamdan tavakkaliga obyekt tanlanadi va uning ustida kuzatish o‘tkazilgandan so‘ng, u bosh to‘plamga qaytarilishi yoki qaytarilmasligi mumkin.Birinchi holda tanlanma **takror**, ikkinchi holda esa **notakror** tanlanma deyiladi.

Madomiki, masala bosh to‘plam elementlarining soni yoki sifat belgisi to‘grisida kerakli ma’lumotlarni bilishdan iborat ekan, undan o‘rganish uchun ajratilgan tanlanma vakolatli bo‘lishi lozim, ya’ni tanlanma to‘plam shunday ajratilishi lozimki, u bosh to‘plamni to‘la tavsiflaydigan bo‘lishi kerak. Bu tanlanmaning **reprezintativligi** deyiladi.

10.2 Tanlanmaning statistik taqsimoti

Bosh to‘plamdan tanlanma olingan, bunda x_1 qiymat n_1 marta, x_2 qiymat n_2 marta va hakozo x_k qiymat n_k marta kuzatilgan bo‘lsin. Ravshanki, $\sum_{i=1}^{k} n_1 = n$.

Kuzatilgan $x_i(i=\overline{1,n})$ qiymatlar **variantalar**, variantalarning ortib yoki kamayib borish tartibida yozilgan ketma-ketligi esa **variatsion qator** deyiladi.

Kuzatishlar soni n_i $(i=\overline{1,n})$ **chastotalar,** ularning tanlanma hajmiga nisbati $\frac{n_i}{n} = W_i$ esa **nisbiy chastotalar** deyiladi.

Tanlanmaning **statistik taqsimoti** deb variantalar va ularga mos chastotalar yoki nisbiy chastotalar ro‘yxatiga aytiladi.

Chastotalar taqsimoti:

x_i	x_i	x_2	....	x_k
n_i	n_1	n_2	....	n_k

Bu yerda, $\sum_{i=1}^{k} n_1 = n$

Nisbiy chastotalar taqsimoti:

x_i	x_i	x_2	....	x_k
W_i	W_1	W_2	....	W_k

Bu yerda, $\sum_{i=1}^{k} W_i = 1$

Statistik taqsimotni yana intervallar va ularga tegishli chastotalar ketma-ketligi ko‘rinishida ham berish mumkin.

1-misol. Ushbu 5,3,7,10,3,5,2,7,2,10,7,4,4,2,7 tanlanmaning variatsion qator ko‘rinishida yozing va statistik taqsimotini tuzing.

Yechish Ko‘rinib turibdiki, tanlanma hajmi $n=15$ ga teng. Tanlanmaning miqdori bo‘yicha tartiblab, variatsion qatorni yozib olamiz:

$$2,2,2,2,3,4,4,4,5,7,7,7,7,10,10$$

Kuzatilgan variantalar:

$$x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4, x_4 = 5, x_5 = 7, x_6 = 10.$$

Demak,tanlanmaning statistik taqsimotini quyidagi jadval ko‘rinishida yozish mumkin.

Chastotalar taqsimoti

x_i	2	3	4	5	7	10
n_i	4	1	3	1	4	2

Bu yerda, $\sum_i n_i = 4+1+3+1+4+2 = 15$

Nisbiy chastotalar statistik taqsimotining yozamiz:

$$W_1 = \frac{4}{15}, W_2 = \frac{1}{15}, W_3 = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}, W_4 = \frac{7}{15}, W_5 = \frac{4}{15}, W_6 = \frac{2}{15}$$

Shunday qilib,

x_i	2	3	4	5	7	10
W_i	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$

10.3 Taqsimotning empirik funksiyasi

Faraz qilaylik, X belgili bosh to‘plamning statistik taqsimoti ma’lum bo‘lsin. n_x–belgining x dan kichik variantalari soni, n – tanlanma hajmi bo‘lsin. Ravshanki, $X < x$ hodisaning nisbiy chastotasi $\frac{n_x}{n}$ ga teng. Agar x o‘zgaradigan bo‘lsa, u holda $\frac{n_x}{n}$ ham o‘zgaradi, ya’ni, nisbiy chastota x ning funksiyasidir. Bu funksiya empirik (tajriba) yo‘l bilan topiladigan bo‘lgani uchun u empirik funksiya deyiladi.

Taqsimotning empirik funksiyasi (yoki tanlanmaning taqsimot funksiyasi) deb,har bir x qiymat uchun tanlanmaning $x_i<x$ qiymatlariga mos nisbiy chastotasini aniqlaydigan $F^*(x)$funksiyaga aytiladi, ya’ni

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} \qquad (10.1)$$

1-eslatma: Shuni ta’kidlash lozimki, taqsimot deyilganda ehtimolliklar nazariyasida tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari va ularning ehtimolliklari orasidagi moslik; matematik statistikada esa kuzatilgan variantalar va ularning chastotalari yoki nisbiy chastotalari orasidagi moslik tushuniladi.

2-eslatma. Hodisaning nisbiy chastotasi shu hodisaning ehtimolligiga taqriban tengligini hisobga olsak, unda $F^*(x)$ empirik funksiya bosh to‘plam $F(x)$ taqsimot funksiyasini taqriban ifodalashini ko‘ramiz.

$F(x)$-taqsimotning **nazariy funksiyasi** ham deyiladi. Bundan, $F^*(x)$ funksiya $F(x)$ ning barcha xossalariga ega ekanligi kelib chiqadi.

2-misol. Tanlanmaning quyidagi taqsimoti bo‘yicha uning empirik taqsimot funksiyasini tuzing.

x_i	2	5	7	8
n_i	1	4	5	10

Yechish. Tanlanmaning hajmi n=1+4+5+10=20.Eng kichik varianta 2 ga teng, shuning uchun

$$x \le 2\partial a \quad F^*(x) = 0;$$

x<5 qiymat, xususan, x_1=2 qiymat 1 marta kuzatilgan, demak,

$$2 < x \le 5 \text{ da } F^*(x) = \frac{1}{20} = 0{,}05;$$

x<7 qiymatlar, jumladan, x_1=2, x_2=5 qiymatlar 1+4=5 marta kuzatilgan, Demak,

$$5 < x \le 7 \quad \text{da} \quad F^*(x) = \frac{5}{10} = 0{,}25.$$

x<8 qiymatlar, ya'ni $x_1 = 2;\ x_2 = 5; x_3 = 7$ qiymatlar 1+4+5=10 marta kuzatilgan demak,

$$7 < x < 8 \ \text{da} \ F^*(x) = \frac{10}{20} = 0{,}5,$$

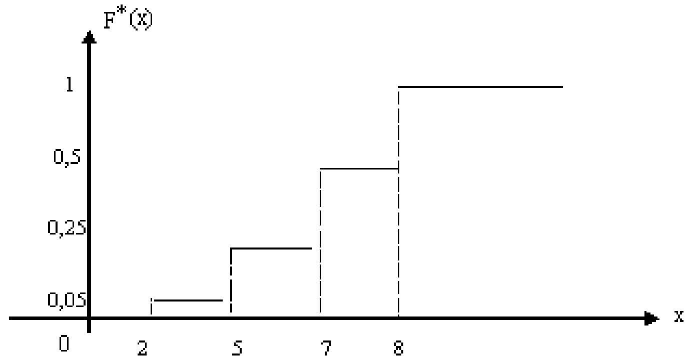
x=8 qiymat, eng katta varianta bo'lgani uchun

$$x > 8 \partial a \quad F^*(x) = 1.$$

Izlanayotgan empirik funksiya

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2 \\ 0{,}05, & 2 < x \le 5 \\ 0{,}25, & 5 < x \le 7 \\ 0{,}5, & 7 < x \le 8 \\ 1, & x > 8 \end{cases}$$

Bu funksiyaning grafigi



19-chizma

10.4 Poligon va gistogramma

Ko'rgazmalilik maqsadida statistik taqsimotning turli grafiklari, jumladan poligon va gistogramma yasaladi.

Chastotalar poligoni deb, kesmalari

$$(x_1, n_1),\ (x_2, n_2),\ \dots,\ (x_k, n_k)$$

nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziqqa aytiladi. Chastotalar poligonini yasash uchun absissalar o'qiga x_i variantalar, ordinatalar o'qiga esa ularga mos n_i chastotalar qo'yib chiqiladi. So'ngra (x_i, n_i),nuqtalarni tutashtirib, chastotalar poligoni hosil qilinadi.

Nisbiy chastotalar poligoni deb kesmalari

$$(x_1, W_1),\ (x_2, W_2),\ \dots,\ (x_k, W_k)$$

nuqtalarni tutashtiradigan siniq chiziqqa aytiladi.

3-misol. Chastotalar taqsimoti berilgan:

x_i	1	3	5
n_i	2	5	3

Chastotalar va nisbiy chastotalar poligonini yasang.

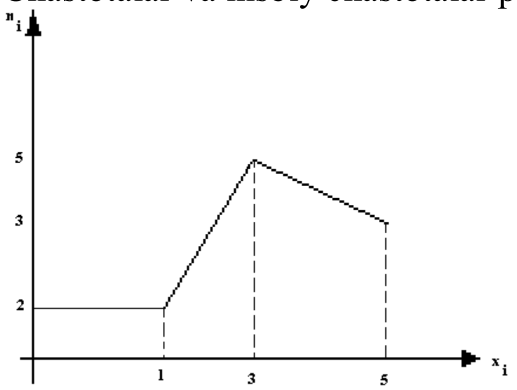
Yechish. Nisbiy chastotalar taqsimotini yozamiz.

$$n=n_1+n_2+n_3=2+5+3=10$$

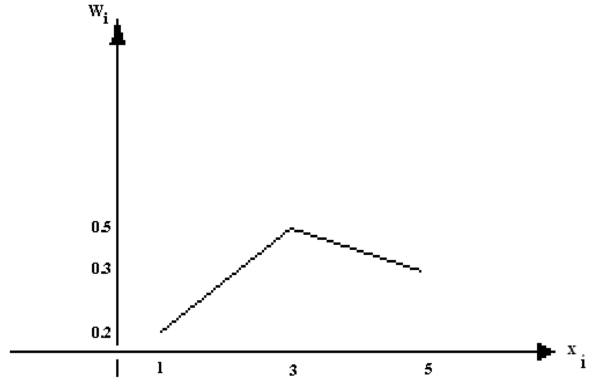
$$W_1=\frac{2}{10}=0{,}2 \qquad W_2=\frac{5}{10}=0{,}5 \qquad W_3=\frac{3}{10}=0{,}3$$

x_i	1	3	5
W_i	0,2	0,5	0,3

Chastotalar va nisbiy chastotalar poligonini yasaymiz.



20-chizma



21-chizma

Uzluksiz belgi bo‘lgan holda gistogramma yasash maqsadga muvofiqdir. Buning uchun belgining kuzatiladigan qiymatlarini o‘z ichiga olgan intervalni uzunligi h bo‘lgan bir nechta qismiy intervallarga bo‘linadi va har bir i- qismiy interval uchun n_i ni, ya’ni i-intervalga tushgan variantalar chastotalari yigindisi topiladi.

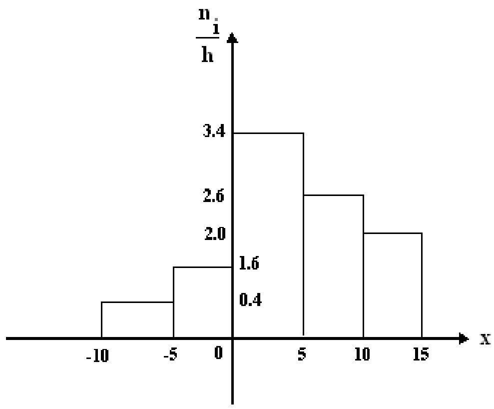
Chastotalar gistogrammasi deb, asoslari h uzunlikdagi intervallar, balandliklari esa $\frac{n_i}{h}$ nisbatlarga teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklardan iborat pog‘onaviy shaklga aytiladi.

Nisbiy chastotalar gistogrammasi deb, asoslari h uzunlikdagi intervallar, balandliklari esa $\frac{W_i}{h}$ nisbatga teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklardan iborat pog‘onaviy shaklga aytiladi.

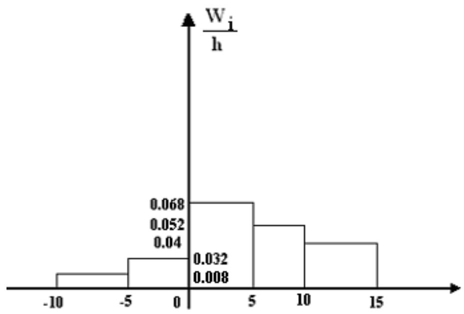
4-misol. Ushbu tanlanmaning chastotalar va nisbiy chastotalar gistogrammasini yasang.

Qismiy interval	(-10,-5)	(-5, 0)	(0, 5)	(5, 10)	(10, 15)
n_i	2	8	17	13	10
W_i	0,04	0,16	0,34	0,26	0,2

Yechish. h=5



22-chizma



23-chizma

Ta’rifga ko‘ra, nisbiy chastotalar gistogrammasining yuzi barcha nisbiy chastotalar yig‘indisi, ya’ni birga teng:

$$S = \sum_i h \cdot \frac{W_i}{h} = \sum_i W_i = 1$$

O‘Z-O‘ZINI TEKSHIRISH UCHUN SAVOLLAR

1.Matematik statistikaning vazifalari.
2.Bosh to‘plam nima?
3.Tanlanmaga ta’rif bering.
4. Tanlanmani qanday usullarini bilasiz.
5. Tanlanmaning reprizentativligi nima?
6.Takror va notakror tanlanmalarga misollar keltiring.
7. Tanlanmaning statistik taqsimotiga ta’rif bering.
8. Empirik taqsimot funksiyasiga ta’rif bering.
9. Empirik funksiyaning xossalarini ayting.
10. Poligon va gistogramma qanday yasaladi?

Mustaqil yechish ushun mashqlar

1. Statistika darsida guruh ro‘yxati bo‘yicha talabalarni tug‘ilgan oyini qayd qilish bo‘yicha sinov o‘tkazildi. Hosil qilingan tanlanma variatsion qator ko‘rinishida yozilsin va statistik taqsimoti tuzilsin. (guruhingiz misolida)

Tanlanmaning quyida berilgan taqsimoti bo‘yicha empirik funksiyasini toping.

2.

x_i	1	4	6
n_i	10	15	25

3.

x_i	4	7	8	10
n_i	5	6	4	7

4.

x_i	2	5	6	7
n_i	1	3	4	2

Quyida berilgan tanlanmaning taqsimoti poligonlarini yasang.

5

x_i	4	7	8	12
n_i	5	2	3	10

6

x_i	2	5	7
n_i	1	3	6

7

x_i	2	4	5	7	10
n_i	10	2	8	2	5

Quyida berilgan tanlanma taqsimoti gistogrammalarini yasang:

8.

x_i-x_{i+1}	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11
n_i	10	12	8	20	6

9.

x_i-x_{i+1}	1-4	4-8	8-12	12-15
n_i	9	10	16	12

§ 11. Taqsimot parametrlarini statistik baholari

11.1 Statistik baho

Aytaylik, bosh to‘plamning son belgisini o‘rganish talab qilinsin va bu belgi qaysi taqsimotga ega ekanligi nazariy mulohazalardan aniqlangan bo‘lsin. Tabiiyki, bu taqsimotni aniqlaydigan parametrlarni baholash masalasi kelib chiqadi. Masalan, o‘rganilayotgan belgi bosh to‘plamda normal taqsimlanganligi oldindan ma’lum bo‘lsa, u holda. a (matematik kutilma) va σ (o‘rtacha kvadratik chetlanish) parametrlarni baholash; agarda belgi Puasson taqsimotiga ega deyishga asos bo‘lsa, bu taqsimotni aniqlaydigan λ parametrni baholash zarur bo‘ladi.

Nazariy taqsimot noma’lum parametrining **statistik bahosi** deb, tasodifiy miqdorning kuzatilayotgan qiymatlaridan tuzilgan funksiyaga aytiladi.
Masalan, normal taqsimotning matematik kutilmasini baholash uchun ushbu

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 .... X_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

funksiya (tanlanmaning o‘rta qiymati) xizmat qiladi.

Tanlanmaning ixtiyoriy funksiyasi **statistika** deyiladi.

Statistik baholar baholanayotgan parametrlarning yaqinlashishlarini ta’minlab berishlari uchun ular ma’lum talablarni qanoatlantirishlari lozim.

Faraz qilaylik, tanlanma ma’lumotlari bo‘yicha topilgan θ^* nazariy taqsimot θ no‘malum parametrining statistik bahosi bo‘lsin.

Istalgan hajmli tanlanma uchun matematik kutilmasi baholanayotgan parametrga teng bo‘lgan statistik baho **siljimagan baho** deyiladi, ya’ni

$$M(\theta^*) = \theta$$

Matematik kutilmasi baholanayotgan parametrga teng bo‘lmagan baho **siljigan baho** deyiladi. Ammo, siljimagan baho har doim ham baholanayotgan parametrning «yaxshi» yaqinlashishini beradi deb hisoblash xato bo‘lar edi. Darhaqiqat, θ^* ning mumkin bo‘lgan qiymatlari uning o‘rtacha qiymati atrofida ancha tarqoq ya’ni $D(\theta^*)$ dispersiya anchagina katta bo‘lishi mumkin. Agar θ^* ning dispersiyasi kichik bo‘lishini talab qiladigan bo‘lsak, u holda, statistik xatoga yo‘l qo‘yishning oldini olgan bo‘lamiz. Shu sababli statistik bahoga effektivlik talabi qo‘yiladi.

Effektiv baho deb (albatta berilgan hajmli tanlanma uchun) eng kichik dispersiyaga ega bo‘lgan statistik bahoga aytiladi.

Katta hajmli tanlanmalar bilan ish ko‘rilganda statistik bahoga asoslilik talabi qo‘yiladi.

Asosli baho deb, baholanayotgan parametrga $n \to \infty$ da ehtimollik bo‘yicha yaqinlashadigan statistik bahoga aytiladi.

11.2 Bahoning aniqligi. Ishonch intervali

Nuqtaviy baho deb, bitta son bilan aniqlanadigan bahoga aytiladi. (Yuqorida keltirilgan tanlanma o‘rtacha qiymat nuqtaviy bahodir). Nuqtaviy baho tegishli parametrning tanlanma ma’lumotlariga ko‘ra sonli qiymatini beradi, lekin u mazkur bahoning aniqligi va ishonchliligi to‘g‘risida fikr yuritish imkonini bermaydi. Shuning uchun tanlanma hajmi uncha katta bo‘lmaganda interval baholardan foydalaniladi.

Interval baho deb ikkita son - intervalning uchlari bilan aniqlanadigan bahoga aytiladi.

Tanlanma ma’lumotlari bo‘yicha topilgan θ^* baho va θ noma’lum parametr uchun $\left|\theta - \theta^*\right|$ ayirma qanchalik kichik bo‘lsa, θ^* baho θ parametrni shuncha aniq baholaydi. Shu maqsadda $\left|\theta - \theta^*\right| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $\delta > 0$ sonni **bahoning aniqligi** deyiladi.

θ bahoning θ^* bo‘yicha **ishonchliligi** deb $\left|\theta - \theta^*\right| < \delta$ tengsizlikning ehtimolligi γ ga, ya’ni

$$P\left(\left|\theta - \theta^*\right| < \delta\right) = \gamma \qquad (11.1)$$

ga aytiladi.

Odatda, bahoning ishonchliligi oldindan beriladi va γ ishonchlilik sifatida birga yaqin son olinadi, masalan, 0,95; 0,99; 0,999.

$$\left|\theta - \theta^*\right| < \delta$$

tengsizlikni unga teng kuchli

$$-\delta < \theta - \theta^* < \delta \text{ yoki } \theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta$$

qo‘shtengsizlik bilan almashtirib

$$P\left(\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta\right) = \gamma$$

ga ega bo‘lamiz.

$$\left(\theta^* - \delta,\ \theta^* + \delta\right)$$

interval noma’lum θ parametrni berilgan γ ishonchlilik bilan qoplaydigan **ishonch intervali** deyiladi.

Agar kuzatishlar sonini cheksiz ortirilganda θ^* baho baholanayotgan θ parametrga ehtimollik bo‘yicha yaqinlashsa, ya’ni har qanday $\varepsilon > 0$ uchun ushbu

$$P\left\{\left|\theta^* - \theta\right| < \varepsilon\right\} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda θ^* baho θ parametrning asosli bahosi deyiladi.Bundan, θ^* ning dispersiyasi $n \to \infty$ da nolga intilsa, baho asosli bo‘lishi kelib chiqadi.

11.3 Tanlanmaning o‘rta qiymati

Tanlanmaning o‘rta qiymati $\overline{X_T}$ deb, tanlanma to‘plam belgisining arifmetik o‘rtacha qiymatiga aytiladi. Agar *n* hajmli tanlanma belgisining barcha $X_1, X_2, ... X_n$ qiymatlari turlicha bo‘lsa, u holda

$$\overline{X_T} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \qquad (11.2)$$

Agar belgining X_1, $X_2,...,X_k$ qiymatlari mos ravishda n_1, $n_2,\dots n_k$ chastotalarig ega bo‘lsa, u holda

$$\overline{X_T} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i X_i}{n}, \text{ bu yerda, } \quad n = \sum_{i=1}^{k} n_i \qquad (11.3)$$

1-misol. Bosh to‘plamdan n=50 hajmli tanlanma olingan. Tanlanmaning o‘rta qiymatini toping.

x_i	2	5	7	10
n_i	16	12	8	14

$$\overline{X_T} = \frac{2\cdot 16 + 5\cdot 12 + 7\cdot 8 + 10\cdot 14}{50} = 5{,}8$$

Faraz qilaylik, $\overline{X_B}$ bosh o‘rta qiymat noma’lum bo‘lib, uni tanlanmadagi ma’lumotlar bo‘yicha baholash talab qilinsin. Bosh o‘rta qiymatning bahosi sifatida (11.3) tanlanmaning o‘rta qiymatini qabul qilamiz. Buning uchun $\overline{X_T}$ siljimagan baho ekanligini ko‘rsatish yetarli, ya’ni bu bahoning matematik kutilmasi $\overline{X_B}$ bosh o‘rta qiymatga teng ekanligini ko‘rsatamiz. X_1, $X_2,...,X_k$ miqdorlarning har biri va bosh to‘plam ham bir xil taqsimotga ega ekanligini e’tiborga olsak, bosh to‘plam va bu miqdorlar bir xil sonli xarakteristikalarga, jumladan, bir xil matematik kutilmaga ega, uni *a* bilan belgilaymiz:

$$M(X)=M(X_i)=a \;\; (i=\overline{1,n}),$$

u holda,

$$M(\overline{X_T}) = M\left(\frac{X_1 + X_2 + ... X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}[M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n)] = \frac{1}{n} n \cdot a = a$$

Shunday qilib, $M(\overline{X_T}) = a$ Ikkinchi tomondan $M(X) = \overline{X_B} = a$ ekanligidan

$$M(\overline{X_T}) = \overline{X_B} \;. \qquad (11.4)$$

Bu tanlanmaning o‘rta qiymatini bosh o‘rta qiymatning siljimagan bahosi ekanligini ko‘rsatadi. Tanlanmaning o‘rta qiymatini bosh o‘rta qiymat uchun asosli baho ham bo‘lishligini ko‘rsatish mumkin. Darhaqiqat, agar X_1, $X_2,...X_n$

tasodifiy miqdorlar chegaralangan dispersiyaga ega deydigan bo‘lsak, u holda Chebishev teoremasiga ko‘ra, har qanday $\delta > 0$ uchun

$$\lim_{n\to\infty} P(\left|\overline{X_T} - a\right| < \delta) = \lim_{n\to\infty} P(\left|\overline{X_T} - \overline{X_B}\right| < \delta) = 1,$$

ya’ni $\overline{X_T}$ qiymat tanlanma hajmi n ortishi bilan miqdorlarning har birining matematik kutilmasi a ga va demak, bosh o‘rta qiymat $\overline{X_B}$ ga ehtimollik bo‘yicha yaqinlashadi. Bu esa tanlanmaning o‘rta qiymatini bosh o‘rta qiymat uchun asosli baho ekanligini ko‘rsatadi.

To‘plam (bosh yoki tanlanma to‘plam) son belgisining barcha qiymatlari guruhlarga ajratilgan bo‘lsin. Har bir guruhni mustaqil to‘plam sifatida qarab, uning arifmetik o‘rtacha qiymatini topish mumkin.

Guruhli o‘rta qiymat deb belgining guruhga tegishli qiymatlarining arifmetik o‘rtacha qiymatiga aytiladi. **Umumiy o‘rta qiymat** $\overline{X}$ deb belgining butun to‘plamga tegishli qiymatlarining arifmetik o‘rtacha qiymatiga aytiladi.

2-misol. Quyidagi ikkita guruhdan iborat to‘plamning umumiy o‘rta qiymatini toping.

Guruhlar	I			II		
x_i	0,1	0,4	0,6	0,1	0,3	0,4
n_i	3	2	5	10	4	6

Yechish. Guruhli o‘rta qiymatlarni topamiz.

$$\overline{X}_1 = \frac{0,1\cdot 3 + 0,4\cdot 2 + 0,6\cdot 5}{3+2+5} = \frac{0,3+0,8+3}{10} = 0,41$$

$$\overline{X}_2 = \frac{0,1\cdot 10 + 0,3\cdot 4 + 0,4\cdot 6}{10+4+6} = \frac{1+1,2+2,4}{20} = 0,23$$

Endi umumiy o‘rta qiymatni topamiz.

$$\overline{X} = \frac{0,41\cdot 10 + 0,23\cdot 20}{10+20} = \frac{4,1+4,6}{30} = \frac{8,7}{30} = 0,29$$

Belgining qiymati bilan umumiy o‘rta qiymati orasidagi $X_i - \overline{X}$ ayirmaga **chetlanish** deb aytiladi. Chetlanishlarning mos chastotalarga ko‘paytmalari yig‘indisi nolga teng, ya’ni

$$\sum n_i (X_i - \overline{X}) = 0$$

3-misol. X son belgining taqsimoti berilgan:

x_i	1	4	5
n_i	6	10	4

Chetlanishlarning tegishli chastotalarga ko‘paytmalarining yig‘indisini toping.

Yechish. Umumiy o‘rta qiymatni topamiz.

$$\overline{X} = \frac{1\cdot 6 + 4\cdot 10 + 5\cdot 4}{6+10+4} = \frac{6+40+20}{20} = \frac{65}{20} = 3,20$$

U holda,

$$\sum_i n_i \left(X_i - \overline{X}\right) = 6(1-3,3) + 10(4-3,3) + 4(5-33) = -13,8 + 7 + 6,8 = -13,8 + 13,8 = 0$$

11.4 Tanlanmaning dispersiyasi

Tanlanma son belgisining kuzatiladigan qiymatlarini uning o‘rta qiymati atrofida sochilishi (tarqoqligi)ni tavsiflash maqsadida tanlanmaning dispersiyasi tushunchasi kiritiladi. Tanlanmaning disperiyasi D_T deb, belgining kuzatilayotgan qiymatlarini ularning $\overline{X}_T$ o‘rta qiymatidan chetlanishi kvadratlarining o‘rtacha arifmetik qiymatiga aytiladi:

$$D_T = \frac{\sum_{i=1}^{X}(X_1 - \overline{X_T})^2}{n} \qquad (11.5)$$

bu yerda, n-tanlanma hajmi. Agar belgining X_1, X_2,...X_k qiymatlari mos ravishda n_1, n_2,…n_k chastotalarig ega va $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ bo‘lsa, u holda

$$D_T = \frac{\sum_{i=1}^{N} n_j(X_1 - \overline{X_T})^2}{n} \qquad (11.6)$$

4-misol. Bosh to‘plamdan n=50 hajmli tanlanma olingan:

x_i	2	5	7	10
n_i	20	12	10	8

Tanlanmaning disperiyasi toping.

Yechish. Tanlanmaning o‘rta qiymatini topamiz:

$$\overline{X_T} = \frac{20\cdot 2 + 12\cdot 5 + 10\cdot 7 + 8\cdot 10}{20+12+10+8} = \frac{250}{50} = 5$$

Endi tanlanmaning disperiyasini topamiz:

$$D_T = \frac{20(2-5)^2 + 12\cdot(5-5)^2 + 10(7-5)^2 + 8\cdot(10-5)^2}{50} = \frac{20\cdot 9 + 10\cdot 4 + 8\cdot 25}{50} = 8{,}4.$$

Noma’lum D_B bosh dispersiyani tanlanmadagi ma’lumotlar bo‘yicha baholash talab qilinsin. Agar bosh dispersiyaning bahosi sifatida D_T tanlanmaning dispersiyasi olinsa, u bosh dispersiya uchun siljigan baho bo‘ladi, ya’ni bosh dispersiyaning kamaygan qiymatlrini beradi.

$$M[D_T] = \frac{n-1}{n} D_B \qquad (11.7)$$

Haqiqatdan, $X_1, X_2, ..., X_n -$ tasodifiy miqdorlar bog’liqsiz va bir xil taqsimotga ega bo‘lsin:

$$M(X_i)=M(X); \quad D(X_i)=D(X).$$

$$D_T = \frac{\sum (X_i - \overline{X_T})^2}{n}, i = \overline{1,n},$$

$$M(D_T) = M\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_T})^2}{n}\right) = \frac{1}{n} M\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_T})^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M\left(X_i - \overline{X_T}\right)^2,$$

bu yerda, $\overline{X_T} = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$.

$X_i (i = \overline{1,n})$ lar bir xil taqsimotga ega ekanligidan,

$$M(D_T)=\frac{1}{n}\cdot nM\left(X_i-\overline{X_T}\right)^2=M\left(X_i-\overline{X_T}\right)^2,\ i=\overline{1,n}.$$

$(X_i-\overline{X_T})^2\ (i=\overline{1,n})$tasodifiy miqdorlarni ham matematik kutilmalari teng, masalan, $M(X_1-\overline{X_T})^2$ ga teng deylik. Quyidagicha shakl almashtiramiz.

$$(X_1-\overline{X_T})^2=[X_1-\overline{X_B}-(\overline{X_T}-\overline{X_B})]^2=(X_1-\overline{X_B})^2-2(X_1-\overline{X_B})\left(\overline{X_T}-\overline{X_B}\right)+(\overline{X_T}-\overline{X_B})^2=$$

$$=\left(X_1-\overline{X_B}\right)^2-\frac{2}{n}(X_1-X_B)[(X_1-\overline{X_B})-(X_2-\overline{X_B})+\ldots+(X_n-\overline{X_B})]+(\overline{X_T}-\overline{X_B})^2=$$

$$=(1-\frac{2}{n})(X_1-\overline{X_B})^2-\frac{2}{n}(X_1-\overline{X_B})[(X_2-\overline{X_B})+\ldots+(X_n-\overline{X_B})]+(\overline{X_T}-\overline{X_B})^2.$$

$$M(X_1-\overline{X_B})=0,\qquad M(X_1-\overline{X_B})^2=D_B,\qquad M(\overline{X_T}-\overline{X_B})^2=\frac{D_B}{n}$$

ekanligidan

$$M(D_T)=M(X_1-\overline{X_T})^2=(1-\frac{2}{n})M(X_1-\overline{X_B})^2-\frac{2}{n}M[(X_1-\overline{X_B})[(X_2-\overline{X_B})+(X_3-\overline{X_B})+$$

$$+\ldots+(X_n-\overline{X_B})]]+M(\overline{X_T}-\overline{X_B})^2=(1-\frac{2}{n})D_B+\frac{D_B}{n}=\frac{n-1}{n}D_B.$$

Tanlanma dispersiyani uning matematik kutilmasi bosh dispersiyaga teng bo‘ladigan qilib osongina “tuzatish” mumkin, uni odatda S^2 bilan belgilanadi:

$$S^2=\frac{n}{n-1}D_T$$

yoki

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{k}n_i(X_i-\overline{X_T})}{n-1}\qquad(11.8)$$

(11.8) **tuzatilgan dispersiya** deyiladi va bosh dispersiya uchun siljimagan bahodir. Haqiqatdan,

$$M(S^2)=M(\frac{n}{n-1}D_T)=\frac{n}{n-1}M(D_T)=\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}D_B=D_B$$

Shunday qilib, bosh disperiyaning bahosi sifatida (11.8) tuzatilgan dispersiya qabul qilinadi.

Eslatma. Tanlanma hajmi *n* yetarlicha katta bo‘lsa tanlanmaning dispersiyasi va tuzatilgan dispersiya bir-biridan kam farq qiladi. Amalda, $n<30$ da tuzatilgan dispersiyadan foydalaniladi.

Tasodifiy miqdor ma’lum shartlarni qanoatlantirganda S^2 baho D_B bosh dispersiya uchun asosli baho ekanligini ko‘rsatish qiyin emas, ya’ni yuqoridagi kabi Chebishev teoremasiga ko‘ra, $\lim\limits_{n\to\infty}P(\left|D_B-S^2\right|<\delta)=1$

5-misol. n=20 hajmli tanlanma taqsimoti bo‘yicha bosh to‘plam dispersiyasining siljimagan bahosini toping:

x_i	1	5	7	9
n_i	6	12	1	1

Yechish: Avvalo, tanlanma o‘rtacha qiymatni topamiz:

$$\overline{X_T} = \frac{\sum_i n_i x_i}{n} = \frac{6\cdot 1+12\cdot 5+1\cdot 6+1\cdot 8}{20} = \frac{80}{20} = 4$$

Izlanayotgan siljimagan baho tuzatilgan dispersiyaga teng:

$$S^2 = \frac{\sum_i n_i (x_i - \overline{x_T})^2}{n-1} = \frac{6(1-4)^2 + 12\cdot(4-5)^2 + 1(7-5)^2 + 1(9-5)^2}{20-1} = \frac{54+12+4+16}{19} = \frac{86}{19} = 4{,}53.$$

Demak, $S^2 = 4{,}53.$

O‘Z-O‘ZINI TEKSHIRISH UCHUN SAVOLLAR

1. Statistik baho nima?
2. Siljimagan baho nima?
3. Effektiv baho nima?
4. Asosli baho nima?
5. Tanlanmaning o‘rta qiymati nimaga teng.
6. Tanlanmaning dispersiyasi nimaga teng. Tuzatilgan dispersiyachi?
7. Nuqtaviy baho nima?
8. Bahoning aniqligi nima?
9. Ishonch intervaliga ta’rif bering.
10. Chetlanish deb nimaga aytiladi.

Mustaqil yechish ushun mashqlar

1. Bosh to‘plamdan n=50 hajmli tanlanma olingan

Varianta	x_l	2	5	7	10
chastota	n_l	16	12	8	14

Bosh o‘rta qiymatning siljimagan bahosini toping. J: 5,76

2. n=51 hajmli tanlanma bo‘yicha bosh dispersiyaning 5 siljigan bahosi topilgan.Bosh to‘plam dispersiyasining siljimagan bahosini toping. J: 5,1

3. Sterjenning uzunligini bitta asbob bilan besh marta o‘lchash (sistematik xatolarsiz) natijasida quyidagi natijalar olingan (mm hisobida): 92;94;103;105;106 . *a*) sterjen uzunligining o‘rtatanlanma qiymatini toping; *b*) asbob xatoligining tanlanma va tuzatilgan dispersiyalarini toping.J: *a*) 100.

b) 42,5

4. Quyida tavakkaliga olingan 100 talabaning bo‘yini o‘lchash natijalari (sm hisobida) keltirilgan

Bo‘yi	154-158	158-162	162-166	166-170	170-174	174-178	178-182
soni	10	14	26	28	12	8	2

Tekshirilgan talabalar bo‘yining tanlanmaning o‘rta qiymatini va dispersiyasini toping. J: $\overline{x_T} = 166, \quad D_T = 33{,}44$

5. Bosh to‘plamning normal taqsimlangan X belgisining noma’lum a matematik kutilmasini berilgan bosh o‘rtacha kvadratik chetlanish $\sigma = 5,$ tanlanmaning o‘rta qiymati $\overline{x_T} = 14$ va tanlanma hajmi n=25 bo‘yicha 0,95 ishonchlilik bilan baholash uchun ishonch intervalini toping.

J:$12{,}04<a<15{,}96$

6. Bosh to‘plamning normal taqsimlangan X belgisining noma’lum a matematik kutilmasini 0,99 ishonchlilik bilan baholash uchun ishonch

intervalini toping. Bosh o‘rtacha kvadratik chetlanish σ, tanlanmaning o‘rta qiymati $\overline{x_T}$ va tanlanma hajmi n berilgan:

$a)\ \sigma = 4,\ \ \overline{x_T} = 10{,}2,\ \ n = 16;\ b)\ \ \sigma = 5,\ \ \overline{x_T} = 16{,}8,\ \ n = 25.$

J: *a)* 7,63<*a*<12,77; *b*) 14,23<*a*<19,37.

7. O‘lchash tasodifiy xatoligining o‘rtacha kvadratik chetlanishi $\sigma = 40$ m bo‘lgan bitta asbobda to‘pdan nishongacha bo‘lgan masofalar bir xil aniqlikda 4 marta o‘lchangan.O‘lchash natijalarining o‘rtacha arifmetik qiymati $\overline{x_T} = 2000$ m ni bilgan holda to‘pdan nishongacha bo‘lgan haqiqiy a masofani $\gamma = 0{,}95$ ishonchlilik bilan baholash uchun ishonch intervalini toping.

J: 1960,8<*a*<2039,2

8.Bosh to‘plamdan *n*= 10 hajmli tanlanma olingan:

Varianta	x_i:	-2	1	2	3	4	5
chastota	n_i:	2	1	2	2	2	1

Bosh to‘plamning normal taqsimlangan X belgisining a matematik kutilmasini tanlanmaning o‘rta qiymati bo‘yicha $\gamma = 0{,}95$ ishonchlilik bilan ishonch intervali yordamida baholang. **J:** 0,3<*a*< 3,7

§ 12. Normal taqsimot parametrlari uchun ishonch intervallari

12.1 Normal taqsimotning dispersiyasi ma’lum bo‘lganda matematik kutilma uchun ishonch intervallari

X normal taqsimlangan bosh to‘plamni qaraymiz, taqsimotning σ^2 dispersiyasi ma’lum bo‘lsin. Noma’lum a (matematik kutilma) parametrni γ ishonchlilik bilan qoplaydigan ishonch intervalini topamiz.

$\bar{x}$ tanlanmaning o‘rta qiymatini $\overline{X}$ belgili tasodifiy miqdor sifatida, uning mumkin bo‘lgan qiymatlari sifatida esa kuzatilgan $X_1, X_2, ... X_n$ natijalar(tanlanma)larni olamiz. Ular bog’liqsiz va bu miqdorlar har birining matematik kutilmasi a ga, dispersiyasi esa σ^2 ga teng, ya’ni

$$M(X_i) = a, \qquad D(X_i) = \sigma^2 \qquad (i = 1, \overline{n}).$$

U holda, $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ tanlanmaning o‘rta qiymati uchun

$$M(\overline{X}_i) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n} M\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i) = \frac{1}{n}\cdot na = a$$

$$D(\overline{X}) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Shunday qilib, normal taqsimotga ega $\overline{X}$ tanlanmaning o‘rta qiymati parametrlari $M(\overline{X}) = a;\quad \sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Ushbu $P(|\overline{X}-a|<\delta)=\gamma$ munosabatni bajarilishini talab qilamiz. Ma'lumki, normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning berilgan chetlanish ehtimolligi quyidagi formula bilan ifodalanadi.

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi(\delta/\sigma)$$

Bu formulani $\overline{X}$ tasodifiy miqdor uchun qo'llab,

$$P(|\overline{X}-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

ni topamiz. $t=\dfrac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$ desak, u holda,

$$\delta=\frac{t\sigma}{\sqrt{n}} \text{ va } P\left(|\overline{X}-a|<\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2\Phi(t)$$

yoki

$$P\left(\overline{X}-\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}<a<\overline{X}+\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2\Phi(t) \tag{12.1}$$

ni hosil qilamiz. Shunday qilib, bu yerdan

$$(\overline{X}-t\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+t\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

ishonch intervali noma'lum a parametrni $2\Phi(t)=\gamma$ ehtimollik bilan $\dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}}$ aniqlikda qoplashi kelib chiqadi.Hosil qilingan formulalar tanlanma hajmi ortishi bilan baholash aniqligi oshishini ko'rsatadi. Bunda, agar γ ishonchlilik ortirilsa, natijada t parametr ortadi va demak, baholash aniqligi kamayadi.

1-misol. X tasodifiy miqdor o'rtacha kvadratik chetlanishi $\sigma=3$ ma'lum bo'lgan normal taqsimotga ega. Tanlanma hajmi n=36 va bahoning ishonchliligi 0,95 berilgan. Noma'lum a matematik kutilmani $\overline{X}$ tanlanmaning o'rta qiymati bo'yicha baholash uchun ishonch intervallarini toping.

Yechish. t ni topamiz, $2\Phi(t)=0{,}95$ munosabatdan $\Phi(t)=0.475$ ni hosil qilamiz. Jadvaldan, t=1,96. Bahoning aniqligini topamiz:

$$\delta=\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{1{,}96\cdot 3}{\sqrt{36}}=0{,}98,$$

ishonch intervallari

$$(\overline{X}-0{,}98,\quad \overline{X}+0{,}98)$$

Masalan, $\overline{X}=3{,}1$ bo'lsa, u holda, $\overline{X}-$0,98=2,12, $\overline{X}$+0,98=4,08,

va ishonch intervali

(2,12 ; 4,08) yoki 2,12<a<4,08.

2-misol. Tanlanmaning shunday minimal hajmini topingki, bosh to'plamni a matematik kutilmasini tanlanmaning o'rta qiymati bo'yicha 0,975 ishonchlilik bilan bahosining aniqligi $\delta=0{,}3$ ga teng bo'lsin. Normal taqsimlangan bosh to'plamning o'rtacha kvadratik chetlanishi ma'lum: $\sigma=1{,}2$.

Yechish. Bosh to‘plam matematik kutilmasining tanlanmaning o‘rta qiymati bo‘yicha bahosining aniqligini ifodalaydigan $\delta = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ formuladan foydalanamiz. Bu yerdan, $n = \frac{t^2\sigma^2}{\delta^2}$.

Shartga ko‘ra,

$\gamma = 0{,}975$, yoki $2\Phi(t) = 0{,}975$; demak, $\Phi(t) = 0{,}4875$. Jadvaldan, $t = 2{,}24$.

$t = 2{,}24$, $\sigma = 1{,}2$ va $\delta = 0{,}3$ ni $n = \frac{t^2\sigma^2}{\delta^2}$ ga qo‘yib,

izlanayotgan tanlanma hajmi $n = 81$ni hosil qilamiz.

12.2 Normal taqsimot σ^2 dispersiyasi noma’lum bo‘lganda matematik kutilmani baholash uchun ishonch intervallari

Bosh to‘plamning X son belgisi normal taqsimlangan, shu bilan birga σ^2 dispersiya (σ o‘rtacha kvadratik chetlanish) noma’lum bo‘lsin.

Noma’lum a matematik kutilmani γ ishonchlilik bilan qoplaydigan ishonch intervalini topamiz.

Tanlanma ma’lumotlari bo‘yicha shunday $T = \frac{\overline{X} - a}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ tasodifiy miqdorni (uning qiymatlarini t orqali belgilaymiz) tuzish mumkin ekanki, bu yerda $\overline{X}$- tanlanmaning o‘rta qiymati, *S*- tuzatilgan o‘rtacha kvadratik chetlanish, *n*-tanlanma hajmi,

$$\left| \frac{\overline{X} - a}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \right| < t_\gamma$$

tengsizlikning ro‘y berish ehtimolligi

$$P\left(\left| \frac{\overline{X} - a}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \right| < t_\gamma \right) = 2\int_0^{t_\gamma} S(t,n)dt = \gamma \qquad (12.2)$$

bu yerda, $S(t,n) = \left[1 + \frac{t^2}{n-1}\right]^{-\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$ -St’yudent taqsimoti.

(12.2) dan

$$P\left(\bar{X}-t_\gamma\frac{S}{\sqrt{n}}<a<\bar{X}+t_\gamma\frac{S}{\sqrt{n}}\right)=\gamma$$

ni hosil qilamiz.Shunday qilib, St'yudent taqsimotidan foydalanib, noma'lum a parametrni γ ishonchlilik bilan qoplaydigan

$$(\bar{X}-t_\gamma\frac{s}{\sqrt{n}},\quad \bar{X}+t_\gamma\frac{s}{\sqrt{n}})$$

ishonch intervalini topdik. Bu yerda, $\bar{X}$ va S tasodifiy miqdorlar tanlanma bo'yicha topilgan tasodifiy bo'lmagan $\bar{x}$ va s miqdorlar bilan almashtirilgan. St'yudent taqsimoti tanlanma hajmi n bilan aniqlanadi va a, σ noma'lum parametrlarga bog'liq emas.

$t\gamma$ n va γ bo'yicha jadvaldan topiladi (3 -ilova).

3-misol. Bosh to'plamning X son belgisi normal taqsimlangan. n=16 hajmli tanlanma bo'yicha $\bar{X}$=20,2 tanlanmaning o'rta qiymati va s=0,8 «tuzatilgan» o'rtacha kvadratik chetlanish topilgan. Noma'lum a matematik kutilmani 0,95 ishonchlilik bilan qoplaydigan ishonch intervali yordamida baholang.

Yechish. $t\gamma$ ni topamiz. Jadvaldan foydalanib (3-ilova) γ=0,95 va n=16 bo'yicha $t\gamma$=2,13.Ishonch chegaralarini topamiz:

$$\bar{x}-t_\gamma\frac{s}{\sqrt{n}}=20{,}2-2{,}13\frac{0{,}8}{\sqrt{16}}=19{,}774$$

$$\bar{x}+t_\gamma\frac{s}{\sqrt{n}}=20{,}2+2{,}13\frac{0{,}8}{\sqrt{16}}=20{,}626\,.$$

Shunday qilib, a noma'lum parametr 0,95 ishonchlilik bilan

(19,774; 20,626)

ishonch intervalida yotadi.

12.3 Normal taqsimotning o'rtacha kvadratik chetlanishini baholash uchun ishonch intervallari

Bosh to'plamning X son belgisi normal taqsimlangan bo'lsin.Bosh o'rtacha kvadratik chetlanish σ ni tuzatilgan o'rtacha kvadratik chetlanish S orqali baholash talab qilinsin. σ parametrni γ ishonchlilik bilan qoplaydigan ishonch intervalini topamiz.

Ushbu

$$P(|\sigma-S|<\delta)=\gamma$$

yoki

$$P(S-\sigma<\delta<S+\sigma)=\gamma$$

munosabat o'rinli bo'lishini talab qilaylik.

$$S-\sigma<\delta<S+\sigma$$

qo'sh tengsizlikni unga teng kuchli

$$S\left(1-\frac{\sigma}{S}\right)<\delta<S\left(1+\frac{\sigma}{S}\right)$$

tengsizlikka almashtiramiz. $\frac{\sigma}{S} = q$ deb,

$$S(1-q) < \delta < S(1+q) \qquad (*)$$

ni hosil qilamiz, bu yerda, q<1. q ni amalda tayyor jadvaldan topiladi(4-ilova).

S tuzatilgan o‘rtacha kvadratik chetlanishni tanlanma bo‘yicha va q ni jadvaldan topib, σ ni berilgan γ ishonchlilik bilan qoplaydigan ishonch intervalini, ya’ni

$$S(1-q) < \delta < S(1+q)$$

intervaini topamiz.Agarda q>1 bolsa, (*) tengsizlik

$$0 < \delta < S(1+q) \qquad (**)$$

ko‘rinishni oladi

4-misol. Bosh to‘plamning X son belgisi normal taqsimlangan.n=25 hajmli tanlanma bo‘yicha tuzatilgan o‘rtacha kvadratik chetlanish S =0,8 topilgan. Bosh o‘rtacha kvadratik chetlanish σ ni $\gamma = 0{,}95$ ishonchlilik bilan qoplaydigan ishonch intervalini toping.

Yechish. Jadvaldan(4-ilova) $\gamma = 0{,}95$ va n=25 ma’lumotlar boyicha q=0,32ni topamiz.Izlanayotgan (*) ishonch intervali:

$$0{,}8(1-0{,}32) < \delta < 0{,}8(1+0{,}32)$$

yoki

$$0{,}544 < \delta < 1{,}056\,.$$

5-misol. Bosh to‘plamning X son belgisi normal taqsimlangan.n=10 hajmli tanlanma bo‘yicha tuzatilgan o‘rtacha kvadratik chetlanish S =0,16 topilgan. Bosh o‘rtacha kvadratik chetlanish σ ni 0,999 ishonchlilik bilan qoplaydigan ishonch intervalini toping.

Yechish. Jadvaldan(4-ilova) $\gamma = 0{,}999$ va n=10 ma’lumotlar boyicha q=1,80(q>1) ni topamiz.Izlanayotgan (**) ishonch intervali:

$$0 < \delta < 0{,}16(1+1{,}8)$$

yoki

$$0 < \delta < 0{,}448\,.$$

O‘Z-O‘ZINI TEKSHIRISH UCHUN SAVOLLAR

1. Bahoning aniqligi nima?
2. Ishonch intervaliga ta’rif bering.
3. Normal taqsimotga ta’rif bering.

4. Normal taqsimot a parametrining ehtimoliy ma’nosi?
5. Normal taqsimot σ parametrining ehtimoliy ma’nosi?
6. Matematik kutilma uchun ishonch intervalini ko‘rsating.
7. Normal taqsimot a,σ parametrlarga bog‘liqmi?
8. Tuzatilgan dispersiya deb nimaga aytiladi.
9. Normal taqsimlangan bosh to‘plam uchun St’yudent taqsimotini yozing.
10. St’yudent taqsimoti parametrlarga bog‘liqmi?
11. Normal taqsimotning o‘rtacha kvadratik chetlanishini baholash uchun ishonch intervallarini topish qahday parametrlarga bo‘g’liq?

Mustaqil yechish ushun mashqlar

1.Bosh to‘plamning normal taqsimlangan X belgisining noma’lum a matematik kutilmasini 0,95 ishonchlilik bilan baholash uchun ishonch intervalini toping. Bosh o‘rtacha kvadratik chetlanish $\sigma = 5$, tanlanmaning o‘rta qiymati $\overline{x_T} = 14$ va tanlanma hajmi n=25 berilgan.

2.Bosh to‘plamning normal taqsimlangan X belgisining noma’lum a matematik kutilmasini 0,99 ishonchlilik bilan baholash uchun ishonch intervalini

toping.Bosh o‘rtacha kvadratik chetlanish σ, tanlanmaning o‘rta qiymati $\overline{x_T}$ va tanlanma hajmi n berilgan: $a)\ \sigma = 4,\ \overline{x_T} = 10{,}2,\ \ n = 16;\ b)\ \sigma = 5,\ \overline{x_T} = 16{,}8,\ \ n = 25;$

J: $a)\ 7{,}63 < a < 12{,}77 \quad b)\ 14{,}23 < a < 19{,}37$

3. O‘lchash tasodifiy xatoligining o‘rtacha kvadratik chetlanishi $7{,}63 < a < 12{,}77$ bo‘lgan bitta asbobda to‘pdan nishongacha bo‘lgan masofalar bir xil aniqlikda 4 marta o‘lchangan.O‘lchash natijalarining o‘rtacha arifmetik qiymati $\overline{x_T} = 2000\,m.$ni bilgan holda to‘pdan nishongacha bo‘lgan naqiqiy a masofani $\gamma = 0{,}95$ ishonchlilik bilan baholash uchun ishonch intervalini toping.

J: $1960{,}8 < a < 2039{,}2$

4. Bosh to‘plamdan n = 10 hajmli tanlanma olingan:

varianta x_i: 2 1 2 3 4 5

chastota n_i: 2 1 2 2 2 1

Bosh to‘plamning normal taqsimlangan X belgisining a matematik kutilmasini tanlanma o‘rtacha qiymat bo‘yicha 0,95 ishonchlilik bilan ishonch intervali yordamida baholang.

5.Biror fizik kattalikni bir xil aniqlikda 9 marta o‘lchash malumotlari bo‘yicha o‘lchash natijalarining tanlanma o‘rta qiymati $\overline{x_T} = 30{,}1$ va tuzatilgan o‘rtacha kvadratik chetlanishi s = 6 topilgan. O‘lchanayotgan kattalikning haqiqiy

qiymatini ishonch intervali yordamida γ = 0,99 ishonchlilik bilan baholang.

J: $23{,}38 < a < 36{,}82$.

6. X bosh to‘plam m a’lum $\sigma = 0{,}4$ parametr bilan normal taqsimlangan. Agar $n = 20$, $\bar{x} = 6{,}34$ bo‘lsa, tanlanma m a’lumotiari bo‘yicha $\gamma = 0{,}99$ ishonch-

lilik bilan a parameter uchun ishonch oralig'ini toping . J: $6{,}11 < a < 6{,}57$

7. Jamg'arma bozorining analitigi ma’lum bir aksiyalarning o‘rtacha daromadliligini o‘rganmoqda. 15 kunlik tasodifiy tanlanma o 'rtacha kvadratik og'ishi s = 3,5% , o 'rtacha (yillik) daromadlilik $\bar{x} = 10{,}37\%$ ga teng ekanini ko‘rsatdi. Aksiyalarning daromadliligi normal taqsimot qonuniga bo‘ysunadi deb faraz qilaylik. Analitik qiziqayotgan aksiyalar turi uchun 95% ($\gamma = 0{,}95$) li ishonch oralig'ini toping. J: $8{,}43 < a < 12{,}31$

8. Audit tekshiruvchi tasodifiy ravishda 50 dona to‘lov hisoblarini tahlil qilib, ularning o‘rtacha miqdori 100 va o‘rtacha kvadratik chetlanishi 287 pul birligiga tengligini amiqladi.O‘rtacha to‘lov hisoblari uchun 90%li ishonch intervalini quring. J:(1033,4; 1166,6)

9. Ma’lum bir mahsulotni xush ko‘radigan iste’molchilar ulushi baholanmoqda. Tasodifiy 500ta iste’molchidan 370tasi bizni qiziqtirayotgan mahsulotni xarid qilgan bo‘lsin.
a) Ushbu mahsulotni xarid qilgan iste’molchilar ulushi uchun 99% lik ishonch intervalini toping. *b*) Bosh to‘plam ulushining tanlanma ulushidan farqi 4%dan oshmaslik ehtimolligini toping.
J: *a*) (0,7303; 0,7497); *b*) 0,9586.

10.Bank yangi regionda ochilayotgan filiali uchun kassa operatsiyalarining avtomatlashtirish zaruriyatini o ‘rganmoqda. Shu maqsadda kishi boshiga bir kunda o‘tkaziladigan transaksiyalarning o‘rtacha pul miqdorini baholamoqchi. Yangi kassa avtomatlaridan octkazilgan va tasodifan tanlangan 10 ta transaksiyalarning pul miqdori 53, 40, 39, 10, 12, 60, 72, 65, 50, 45 shartli pul birligiga teng ekan. Transaksiyalarning o‘rtacha pul miqdori uchun 95% lik ishonch intervalini quring. J: (29,87; 59,33)

11.Bosh to‘plamdan n hajmli tanlanma ma’lumotlari bo‘yicha normal taqsimlangan belgining tuzatilgan o‘rtacha kvadratik chetlanishi S topilgan. Agar: $a)$ n=50, S=14; $b)$ n=10, S=5,1 bo‘lsa, σ o‘rtacha kvadratik chetlanishni 0,999 ishonchlilik bilan qoplaydigan ishonch intervalini toping.

J: $a)$ $7{,}98 < \delta < 20{,}02$ $b)$ $0 < \delta < 14{,}28$

§ 13. Tanlanmaning yig‘ma xarakteristikalarini hisoblash usullari

13.1 Shartli variantalar

Faraz qilaylik, tanlanmaning variantalari variatsion qator ko‘rinishida berilgan bo‘lsin.

Teng uzoqlikdagi variantalar deb, h ayirmali arifmetik progressiya tashkil etadigan variantalarga aytiladi.

Shartli variantalar deb,

$$u_i = \frac{x_i - C}{h}$$

tenglik bilan aniqlanadigan variantalarga aytiladi, bu yerda, h- qadam, ya’ni istalgan ikkita dastlabki qo‘shni varianta orasidagi farq; C-“soxta” nol. Soxta nol sifatida imkon qadar variatsion qatorning taxminan o‘rtasida joylashgan yoki eng katta chastotaga ega varianta olinadi. Agar variatsion qator teng uzoqlikdagi variantalardan iborat bo‘lsa, u holda shartli variantalar butun son bo‘ladi.

1-misol. Quyidagi statistik taqsimotning shartli variantalarini toping.

x_i	11,2	16,2	21,2	26,2	31,2
n_i	5	8	15	13	9

Yechish. Soxta nol sifatida C=21,2 variantani tanlaymiz va h=5.
Shartli variantani topamiz:

$$u_i = \frac{x_i - C}{h} \quad u_1 = \frac{11{,}2 - 21{,}2}{5} = -2 \quad u_2 = \frac{16{,}2 - 21{,}2}{5} = -1$$

va shunga o‘hshash

$$u_3 = 0 \quad u_4 = 1 \quad u_5 = 2\,.$$

Shunday qilib, u_i variantalarga mos statistik taqsimot

u_i	-2	-1	0	1	2
n_i	5	8	15	13	9

ko‘rinishni oladi. Ko‘rinib turibdiki, shartli variantalar uncha katta bo‘lmagan butun sonlardir.

13.2 Tanlanmaning o‘rta qiymati va tanlanmaning dispersiyasini hisoblashning ko‘paytmalar usuli

Tanlanmaning yig‘ma xarakteristikalarini hisoblashda empirik momentlardan foydalanish maqsadga muvofiqdir. Empirik momentlar nazariy momentlardan farqli ravishda kuzatish ma’lumotlari bo‘yicha hisoblanadi.

$$M'_k = \frac{\sum_i n_i (x_i - C)^k}{n} \qquad (13.1)$$

yig‘indi k-tartibli **oddiy empirik moment** deyiladi.

Bu yerda, C – soxta nol; n – tanlanma hajmi.

$$M_k = \frac{\sum_i n_i x_i^k}{n} \qquad (13.2)$$

yig‘indi k-tartibli **boshlang‘ich empirik moment** deyiladi.

Masalan,

$$M_1 = \frac{\sum_i n_i x_i}{n} = \bar{x}\ .$$

k-tartibli **markaziy empirik moment** deb,

$$m_k = \frac{\sum_i n_i \left(x_i - \overline{x_T}\right)^k}{n} \qquad (13.3)$$

ifodaga aytiladi. Xususan,

$$m_2 = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x}_T)^2}{n} = D_T\ .$$

Yuqoridagi munosabatlardan, quyidagilarni yozish mumkin:

$$m_2 = M'_2 - (M'_1)^2$$

$$m_3 = M'_3 - 3M'_2 M'_1 - 2(M'_1)^3$$

Hisoblashlarni soddalashtirish maqsadida, dastlabki variantalardan shartli variantalarga o‘tiladi va empirik momentlar o‘rniga shartli empirik momentlardan foydalanish mumkin:

$$M_k^* = \frac{\sum_i n_i u_i^k}{n} = \frac{1}{n}\sum_i n_i \left(\frac{x_i - C}{h}\right)^k$$

Xususan, k=1da 1-tartibli shartli empirik moment

$$M_1^* = \frac{1}{n}\sum_i n_i \left(\frac{x_i - C}{h}\right) = \frac{1}{h}\left(\frac{\sum_c n_i x_i}{n} - \frac{\sum_i C}{n}\right) = \frac{1}{h}(\bar{x} - C)$$

bu yerdan, $$\bar{x} = M_1^{\bullet} h + C \qquad (13.4)$$

Tanlanmaning dispersiyasini hisoblash uchun esa

$$D_T = \left[M_2^* - (M_1^*)^2\right] h^2 \qquad (13.5\ )$$

ni topamiz. Shuningdek ,

$$M'_k = M_k^* h^k$$

2-misol. Tanlanmaning quyidagi statistik taqsimoti bo‘yicha tanlanmaning o‘rta qiymati va tanlanmaning dispersiyasini hisoblang.

x_i	136	140	144	148	152	156
n_i	1	3	12	18	14	2

Yechish. $n = 50$, interval uzunligi $h = 4$; soxta nol sifatida eng katta chastotaga mos C=148 ni olamiz.Shartli variantalarni topamiz:

$$u_i = \frac{x_i - 148}{4} \quad \left(i = \overline{1,6}\right);$$

$$u_1 = \frac{x_1 - 148}{4} = \frac{136 - 148}{4} = -3, \quad u_2 = \frac{140 - 148}{4} = -2,$$

$$u_3 = -1, \quad u_4 = 0, \quad u_5 = 1, \quad u_6 = 2$$

va quyidagi jadvalni tuzamiz:

i	x_i	u_i	n_i	$n_i u_i$	$n_i u_i^2$	$n_i(u_i+1)^2$
1	136	-3	1	-3	9	4
2	140	-2	3	-6	12	3
3	144	-1	12	-12	12	0
4	148	0	18	0	0	18
5	152	1	14	14	14	56
6	156	2	2	4	8	18
Σ			50	-3	55	99

Oxirgi ustun nazorat ustuni deyiladi.Agar

$$\sum_i n_i (u_i + 1)^2 = \sum_i n_i u_i^2 + 2\sum_i n_i u_i + n$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda hisoblashlar to‘g‘ri bajarilgan hisoblanadi.

$$\sum_i n_i (u_i + 1)^2 = \sum_i n_i u_i^2 + 2\sum_i n_i u_i + n = 55 + 2 \cdot (-3) + 50 = 55 - 6 + 50 = 99 .$$

Demak, hisoblashlar to‘g‘ri bajarilgan. Shartli empirik momentlarni topamiz:

$$M_1^* = \frac{\sum n_i u_i}{n} = \frac{-3}{50} = -0{,}06 \qquad M_2^* = \frac{\sum n_i u_i^2}{n} = \frac{55}{50} = 1{,}1$$

Shunday qilib, (13.4) va (13.5) munosabatlardan :

$$\overline{x} = -0{,}06 \cdot 4 + 148 = 147{,}76$$

$$D_T = \left(1{,}1 - (-0{,}06)^2\right)4^2 \approx 17{,}54.$$

Tanlanmaning o‘rta qiymati va tanlanmaning dispersiyasini hisoblashning bu usuli **ko‘paytmalar usuli** deb aytiladi.

13.3 Dastlabki variantalarni teng uzoqlikdagi variantalarga keltirish

Kuzatish natijalarida variantalar hamma vaqt ham teng uzoqlikda bo‘lavermaydi, ya’ni dastlabki variantalar teng uzoqlikda bo‘lmasligi mumkin.Bu holda, belgining kuzatilayotgan barcha qiymatlari kirgan intervalni bir nechta teng qismiy intervallarga ajratiladi va ularning o‘rtalari topiladi, ana shular teng uzoqlikdagi variantalar ketma – ketligini hosil qiladi. Har bir yangi variantaning chastotatasi sifatida tegishli qismiy intervalga kirgan chastotalar yig‘indisi qabul qilinadi.

3-misol. Quyidagi jadvalda tavakkaliga olingan 100 ta talabaning bo‘yini o‘lchash natijalari keltirilgan

Bo‘yi(sm) x_i	Talabalar soni n_i	x_i	n_i	x_i	n_i
154	2	166	8	175	2
155	2	167	8	176	4
158	4	168	12	177	2
160	4	169	6	178	6
161	6	170	7	179	2
163	6	172	3	180	1
164	10	173	4	182	1

a) Teng uzoqlikdagi variantalar taqsimotini tuzing.

b) Dastlabki va teng uzoqlikdagi variantalar bo‘yicha tanlanmaning o‘rta qiymati va tanlanmaning dispersiyasini hisoblang.

Yechish. *a*) 154-182 intervalni uzunligi h=4 bo‘lgan yettita qismiy intervalga bo‘lamiz:

154-158, 158-162, 162-166, 166-170, 170-174, 174-178, 178-182.

Qismiy intervallarning o‘rtalarini yangi y_i variantalar sifatida olib, teng uzoqlikdagi variantalarni hosil qilamiz.

$$y_1=156;\ y_2=160;\ y_3=164;\ y_4=168;\ y_5=172;\ y_6=176;\ y_7=180.$$

Har bir qismiy intervalning chastotalarini topamiz:

$$n_1=8;\ n_2=10;\ n_3=24;\ n_4=33;\ n_5=7;\ n_6=14;\ n_7=4$$

Shunday qilib, teng uzoqlikdagi variantalar taqsimoti:

y_i	156	160	164	168	172	176	180
n_i	8	10	24	33	7	14	4

b) Dastlabki variantalar bo‘yicha tanlanmaning o‘rta qiymati va tanlanmaning dispersiyasini topamiz. Soxta nol sifatida C=168 ni olamiz va $u_i = x_i - 168$

shartli variantalarga o‘tamiz. U holda, u_i larga mos statistik taqsimot uchun quyidagi jadvalni tuzamiz:

i	u_i	n_i	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
1	-12	2	-24	288
2	-11	2	-22	242
3	-10	4	-40	400
4	-8	4	-32	256
5	-7	6	-42	294
6	-5	6	-30	150
7	-4	10	-40	160
8	-2	8	-16	32
9	-1	8	-8	8
10	0	12	0	0
11	1	6	6	6
12	2	7	14	28
13	4	3	12	48
14	5	4	20	100
15	7	2	14	98
16	8	4	32	256
17	9	2	16	162
18	10	6	60	600
19	11	2	22	242
20	12	1	12	144
21	14	1	14	196
	$\sum_i$	100	-32	3710

Natijada, $$\bar{u} = \frac{\sum_i n_i u_i}{n} = \frac{-32}{100} = -0{,}32$$

$$\bar{x} = \bar{u} + 168 = -0{,}32 + 168 = 167{,}68$$

$$D_x = D_u = \overline{u^2} - \left(\bar{u}\right)^2 = \frac{3710}{100} - (-0.32)^2 = 37.10 - 0.1024 = 36{,}076$$

Shunday qilib,

$$\bar{x}_T = 167{,}68; \qquad D_T(x) = 36{,}076.$$

Endi teng uzoqlikdagi variantalar bo‘yicha tanlanmaning o‘rta qiymati va tanlanmaning dispersiyasini hisoblaymiz. Interval uzunligi h=4; soxta nol sifatida eng katta chastotaga mos C=168 chastotani olamiz.

$$u_i = \frac{y_i - 168}{4}$$

shartli variantalarni topamiz va ularga mos quyidagi jadvalni tuzamiz.

i	y_i	u_i	n_i	n_iu_i	$n_iu_i^2$	$n_i(u_i+1)^2$
1	156	-3	8	-24	72	32
2	160	-2	10	-20	40	10
3	164	-1	24	-24	24	0
4	168	0	33	0	0	33
5	172	1	7	7	7	28
6	176	2	14	28	56	126
7	180	3	4	12	36	64
Σ			100	-21	235	293

Oxirgi nazorat ustunini tekshiramiz:

$$\sum_i n_i(u_i+1)^2 = \sum_i n_iu_i^{\,2} + 2\sum_i n_iu_i + n = 235 + 2(-21) + 100 = 293$$

Demak, hisoblashlar to‘g‘ri bajarilgan.Shartli empirik momentlarni topamiz:

$$M_1^* = \frac{\sum_i n_iu_i}{n} = \frac{-21}{100} = -0{,}21 \qquad M_2^* = \frac{\sum_i n_iu_i^{\,2}}{n} = \frac{235}{100} = 2{,}35$$

Natijada,

$$\overline{y} = M_1^* \cdot h + C = -0{,}21 \cdot 4 + 168 = 167{,}16\,.$$

$$D_T' = \left[M_2^* - \left(M_1^*\right)^2\right]h^2 = [2{,}35 - 0{,}0441]\cdot 4^2 = 2{,}3059 \cdot 16 = 36{,}8944\,.$$

Shunday qilib, $\quad \overline{x}_T = 167{,}68 \qquad D_T = 36{,}076$

$\qquad \overline{y} = 167{,}16 \qquad D_T' = 36{,}8944$

Ko‘rinib turibdiki, dastlabki variantalarni teng uzoqlikdagi variantalarga almashtirish muhim xatolarga olib kelmadi deyish mumkin, ammo hisoblash hajmi ancha kamaydi; ba’zan teng uzoqlikdagi variantalarga almashtirish muhim xatolarga olib kelishi mumkin, bunday hollarda Sheppard tuzatmasi hisobga olinadi: $D_T = D_T' - \frac{1}{12}h^2$.

4-misol. n=100 hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo‘yicha tanlanmaning o‘rta qiymati va tanlanmaning dispersiyasini ko‘paytmalar usuli bilan toping.

x_i	2	3	7	9	11	12.5	16	18	23	26	26
n_i	3	5	10	6	10	4	12	13	8	20	9

Yechish: 2-26 intervalni uzunligi h=6 bo‘lgan quyidagi qismiy intervallarga bo‘lamiz:

2-8; 8-14; 14-20; 20-26.

Qismiy intervallarning o‘rtalarini yangi variantalar sifatida olib, teng uzoqlikdagi variantalarni hosil qilamiz:

$$y_1 = 5, \qquad y_2 = 11, \quad y_3 = 17, \qquad y_4 = 23.$$

$y_1 = 5$ variantaning chastotasi sifatida birinchi intervalga tushgan variantalarning chastotalari yigindisini olamiz, masalan

$$n_1 = 3 + 5 + 10 = 18.$$

Qolgan variantalarning chastotalarini ham shunga oxshash hisoblab, teng uzoqlikdagi variantalar taqsimotini hosil qilamiz:

y_i	5	11	17	23
n_i	18	20	25	37

Ko‘paytmalar usulidan foydalanib, $\overline{y_T}$=15,86, $D'_T = 45{,}14$ ni topamiz.
Qismiy intervallar soni kamligi dan (4ta), Sheppard tuzatmasini hisobga olamiz:

$$D_T = D'_T - \frac{1}{12}h^2 = 45{,}14 - \frac{1}{12}\cdot 6^2 = 42{,}14.$$

Bu orinda, dastlabki variantalar bo‘yicha hisoblangan tanlanmaning dispersiyasi taqriban 42,6 ga tengligini qayd etib o‘tamiz(o‘quvchiga hisoblab chiqishni tavsiya etamiz).

13.4 Variatsion qatorning boshqa xarakteristikalari

Variatsion qator uchun tanlanmaning o‘rta qiymati va tanlanmaning dispersiyasidan tashqari xarakteristikalar ham qo‘llaniladi.

Moda M_0 deb, eng katta chastotaga ega bo‘lgan variantaga aytiladi.Masalan,

x_i	1	4	6	10
n_i	5	4	15	6

Variatsion qator uchun moda M_0=6.

Mediana m_V deb, variatsion qatorni variantalar soni teng bo‘lgan ikki qismga ajratadigan variantaga aytiladi. Agar variantalar toq, ya’ni

$n = 2k + 1$ bo‘lsa, $m_V = x_{k+1}$;

agarda n juft, ya’ni, $n=2k$ bo‘lsa,

$$m_V = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}.$$

Masalan, 2,4,5,7,10 qator uchun mediana m_V=5;

2,4,5,7,10,12 qator uchun mediana $m_V = \frac{5+7}{2} = 6$

Variatsiya qulochi R deb, eng katta va eng kichik variantalar ayirmasiga aytiladi:

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

Masalan, 2,4,5,7,10 qator uchun variatsiya qulochi $R=10-2=8$ ga teng.

Variatsion qatorning o‘rtacha chiziqli chetlanishi θ deb, absolyut chetlanishlarning o‘rtacha arifmetik qiymatiga aytiladi:

$$\theta = \frac{\sum_i n_i |x_i - \bar{x}_T|}{\sum n_i}$$

Masalan,

x_i	1	4	5	9
n_i	5	4	10	1

qator uchun

$$\bar{x}_T = \frac{1\cdot 5 + 4\cdot 4 + 5\cdot 10 + 9\cdot 1}{20} = \frac{80}{20} = 4$$

$$\theta = \frac{5|1-4| + 4|4-4| + 10|5-4| + 1|9-4|}{20} = \frac{5+50+10+5}{20} = 1$$

O‘rtacha absolyut chetlanish variatsion qator tarqoqligining xarakteristikasi bo‘lib xizmat qiladi.

Variatsiya koeffitsenti V deb, tanlanmaning o‘rtacha kvadratik chetlanishini tanlanmaning o‘rta qiymatiga nisbatiga aytiladi:

$$V = \frac{\sigma_T}{\bar{x}_T} \cdot 100\%$$

Masalan,

x_i	1	4	5	9
n_i	5	4	10	1

qator uchun, $\bar{x}_T = 4$,

$$\overline{x_T^2} = \frac{1\cdot 5 + 16\cdot 4 + 25\cdot 10 + 81\cdot 1}{20} = 20$$

$$\sigma_T = \sqrt{\overline{x_T^2} - \left(\overline{x_T}\right)^2} = \sqrt{20-16} = \sqrt{4} = 2$$

variatsiya koeffitsenti $V = \frac{\sigma_T}{\bar{x}_T} \cdot 100\% = \frac{2}{4} 100\% = 50\% = 0,5$

O‘Z-O‘ZINI TEKSHIRISH UCHUN SAVOLLAR

1.Variatsion qator nima?
2.Teng uzoqlikdagi variantalar deb nimaga aytiladi.
3. Shartli variantalar nima?
4. Soxta nol nima?
5. Empirik momentlarga ta’rif bering.
6. Shartli empirik momentlarga ta’rif bering.
7. Tanlanmaning o‘rta qiymati va tanlanmaning dispersiyasini hisoblashning ko‘paytmalar usulini tushuntiring.
8. Variatsion qatorning moda va medianasi deb nimaga aytiladi.
9. Variatsiya qulochi nima?
10. O‘rtacha absolyut chetlanish va variatsiya koeffitsiyenti deb nimaga aytiladi.

Mustaqil yechish ushun mashqlar

1.n=50 hajmli tanlanmaning teng uzoqlikda bo‘lmagan variantalari taqsimoti

x_i	6	8	11	13	15,5	17,5	20	23,5	24,5	26
n_i	1	9	6	6	4	6	8	5	4	1

bo‘yicha: *a*)tanlanmaning o‘rta qiymati va tanlanmaning dispersiyasini ko‘paytmalar usuli bilan toping.
b) tanlanmaning dispersiyasini Sheppard tuzatmasini hisobga olgan holda toping.*Ko‘rsatma*. 6-26 intervalni uzunligi *h*=4 bo‘lgan 5 ta qismiy intervalga bo‘ling. J: *a*) $\overline{Y_T} = 15{,}68$ $D_T = 32,$ *b*) $D_T = 30\frac{1}{3}$.

2. *n*=100 hajmli tanlanmaning teng uzoqlikda bo‘lmagan variantalari taqsimoti

x_i	10	13	15	17	19	23	24	26	28	32	34	35
n_i	2	4	6	8	9	6	20	15	10	8	7	5

bo‘yicha: *a*) tanlanmaning o‘rta qiymati va tanlanmaning dispersiyasini ko‘paytmalar usuli bilan toping.*b*) tanlanmaning dispersiyasini Sheppard tuzatmasini hisobga olgan holda toping. *Ko‘rsatma*: 10-35 intervalni uzunligi *h*=5 bo‘lgan 5 ta qismiy intervalga ajrating. *x*=15 variantaning chastotasini, ya’ni 6 chastotani ikkinchi va uchunchi qismiy intervallar orasida baravardan taqsimlang(chunki, 15 varianta intervalning chegarasiga tushadi).

J:*a*) $\overline{Y_T} = 24{,}35,$ $D_T = 31{,}83,$ *b*) $D_T = 29{,}75$.

§ 14. Gipotezalarni statistik tekshirish

14.1. Statistik gipoteza

Ko‘pincha X belgili bosh to‘plamning noma’lum taqsimot qonunini bilish zarur bo‘ladi.

Agar taqsimot qonuni tayin ko‘rinishga ega (masalan, F(x) ko‘rinishda) deb taxmin qilishga asos bo‘lsa, u holda quyidagi gipoteza ilgari suriladi: X belgili bosh to‘plam aniq F(x) ko‘rinishli taqsimot qonuniga ega.

Agar taqsimot qonuni ma’lum, ammo unda noma’lum parametr bo‘lsa, noma’lum θ parametr tayin θ_0 qiymatga ega degan gipotezani qo‘yish mumkin, bu gipotezada gap taqsimotning noma’lum parametri haqida boradi.

Statistik gipoteza deb, noma’lum taqsimotning ko‘rinishi haqida yoki ma’lum taqsimotning parametrlari haqidagi gipotezaga aytiladi.

Masalan: 1) Bosh to‘plam Puasson qonuni bo‘yicha taqsimlangan;

2) Ikkita normal to‘plamning dispersiyalari teng kabi gipotezalar statistik gipotezaga misol bo‘ladi.

Nolinchi (asosiy) gipoteza deb, ilgari surilgan H_0 gipotezaga, **konkurent (alternativ**) gipoteza deb esa nolinchi gipotezaga zid bo‘lgan H_1 gipotezaga aytiladi.

Masalan, nolinchi gipoteza normal taqsimotning a matematik kutilmasi 5 ga teng degan taxmindan iborat bo‘lsa, u holda, konkurent gipoteza $a \neq 5$ degan taxmindan iborat bo‘lishi mumkin. Bu qisqacha quyidagicha yoziladi.

$$H_0\text{:}\ a=5; \qquad H_1\text{:}\ a \neq 5$$

Oddiy gipoteza deb, faqat bitta taxminni o‘z ichiga olgan gipotezaga aytiladi.Masalan, agar λ ko‘rsatkichli taqsimotning parametri bo‘lsa, u holda, H_0: λ =3 gipoteza – oddiy.

Murakkab gipoteza deb chekli yoki cheksiz sondagi oddiy gipotezalardan iborat gipotezalarga aytiladi. Masalan, H: λ >3 gipoteza murakkabdir.

Ilgari (olg‘a) surilgan gipoteza to‘g‘ri yoki noto‘g‘ri bo‘lishi mumkin, shuning uchun ham uni tekshirish zaruriyati tug‘iladi. Tekshirish statistik usullar bilan bajarilgani sababli, uni statistik tekshirish deyiladi. Gipotezani statistik tekshirish natijasida ikki xil xatoga yo‘l qo‘yish mumkin.

Birinchi tur xato shundan iboratki, bunda to‘g‘ri gipoteza rad etiladi.

Ikkinchi tur xato shundan iboratki, bunda noto‘g‘ri gipoteza qabul qilinadi.

Bu xatolarning oqibatlari har xil bo‘lishi mumkin. Masalan, binoni qurish davom ettirilsin degan to‘g‘ri qaror rad etilsa, u holda, birinchi tur xato moddiy zararga olib keladi; agarda binoni agdarilib tushish xavfiga qaramasdan “qurilish davom ettirilsin” degan qaror qabul qilingan bo‘lsa, u holda ikkinchi tur bu xato kishilarning halokatiga olib kelishi mumkin.

Statistik kriteriy deb, nolinchi gipotezani tekshirish uchun xizmat qiladigan K tasodifiy miqdorga aytiladi. Masalan, ikkita normal taqsimlangan bosh to‘plam dispersiyalarining tengligi haqidagi gipoteza tekshirilayotgan bo‘lsa, u holda kriteriy sifatida tuzatilgan tanlanma dispersiyalar nisbati olinadi:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}. \qquad \text{(Fisher-Snedekor taqsimoti)}$$

Kuzatiladigan qiymat $K_{kuz.}$ deb, kriteriyning tanlanmalar bo‘yicha hisoblangan qiymati belgilanadi.

Kritik soha deb, kriteriyning nolinchi gipoteza rad qilinadigan qiymatlari to‘plamiga aytiladi.

Gipotezaning qabul qilinish sohasi deb, kriteriyning gipoteza qabul qilinadigan qiymatlari to‘plamiga aytiladi.

Statistik gipotezalarni tekshirishda, agar kriteriyning kuzatiladigan qiymati kritik sohaga tegishli bo‘lsa, gipoteza rad qilinadi; agarda kriteriyning kuzatiladigan qiymati gipotezaning qabul qilinish sohasiga tegishli bo‘lsa, gipoteza qabul qilinadi.

Kritik nuqtalar k_{kr} deb, kritik sohani gipotezaning qabul qilinish sohasidan ajratib turadigan nuqtalarga aytiladi.

Kritik sohalar quyidagicha bo‘lishi mumkin:

a) **o‘ng tomonlama** kritik soha:

$$K>k_{kr}$$

b) **chap tomonlama** kritik soha:

$$K<k_{kr}$$

c) **ikki tomonlama** kritik soha.

$$|K|<k_{kr}$$

Statistikaning kritik sohaga tushish ehtimolligi α uning **qiymatdorlik darajasi** deyiladi.

Nolinchi gipoteza o‘rinli bo‘lishi shartida K kriteriyning κ_{kr} dan katta qiymat qabul qilish (o‘ng tomonlama kritik soha) ehtimolligi α qiymatdorlik darajasiga teng bo‘lsin:

$$P(K > k_{\kappa r.}) = \alpha .$$

Agar $K_{\kappa uz.} > k_{\kappa r.}$ bo‘lsa, u holda nolinchi gipoteza rad qilinadi; agarda $K_{kuz.} < \kappa_{\kappa r.}$ bo‘lsa, u holda nolinchi gipotezani rad qilishga asos yo‘q.

Eslatma. Har bir kriteriy uchun tegishli jadvallar tuzilgan bo‘lib, ular bo‘yicha kritik nuqta topiladi.

14.2 Statistik alomat. Pirsonning χ^2 moslik alomati

Ta’rif. Agar k ta o‘zaro bog’liqsiz $X_i (i = 1, k)$ tasodifiy miqdorlar standart normal taqsimotga ega bo‘lsa, u holda ularning kvadratlari yig‘indisi

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} X_i^2 \qquad (14.1)$$

ozodlik darajalari k bo‘lgan χ^2 (xi kvadrat)taqsimot deyiladi. χ^2 taqsimotning zichligi

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0\, \partial a \\ \dfrac{1}{2^{л/2}\,\Gamma(\kappa/2)} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{л}{2}-1}, & x > \partial a \end{cases} \qquad (14.2)$$

bu yerda, $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ -gamma funksiya.

χ^2 taqsimotning ozodlik darajalari $\kappa \le 30$ bo‘lsa, uning qiymatlari jadvaldan topiladi; agar ozodlik darajalari $\kappa > 30$ bo‘lsa, uni normal qonun bilan yetarlicha aniqlikda almashtirish mumkin.

Muvofiqlik kriteriysi deb, noma’lum taqsimotning taxmin qilinayotgan qonun haqidagi gipotezani tekshirish kriteriysiga aytiladi.

Bir qancha muvofiqlik kriteriylari mavjud. Masalan, Pirson, Kolmogorov, Romanovskiy, Smirnov kriteriylari.

Bu yerda, muvofiqlik kriteriylardan biri-Pirson kriteriysini bosh to‘plamning normal taqsimlanganligi haqidagi gipotezani tekshirishga qo‘llanilishini bayon qilamiz. Pirson kriteriysi boshqa kriteriylar kabi gipotezaning o‘rinligini isbotlamaydi, balki berilgan qiymatdorlik darajasida gipotezaning kuzatish ma’lumotlari bilan muvofiq kelish yoki kelmasligini aniqlaydi.

Hajmi n bo‘lgan H_0(nolinchi) gipotezani tekshirish uchun

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} \qquad (14.3)$$

statistika qo‘llaniladi, bunda n_i −chastotalar va $\sum n_i = n$.

$k \to \infty$ da χ^2 statistika ozodlik darajasi $(\kappa - 1)$ bo‘lgan χ^2 taqsimotga intiladi.

Ozodlik darajalari soni $\kappa = s - 1 - z$ tenglik bo‘yicha topiladi, bu yerda, s-tanlanmadagi guruhlar (qism intervallar) soni, $z -$ taxlil qilinayotgan taqsimotning tanlanma ma’lumotlari bo‘yicha baholangan parametrlari soni.
(14.3) statistika taqriban k=s-3 ozodlik darajali χ^2 taqsimot bo‘yicha taqsimlanadi.Haqiqatdan, normal taqsimot ikkita parametr: a matematik kutilma, $\sigma -$ o‘rtacha kvadratik chetlanish bilan baholanadi. Bu parametrlarni ikkalasi ham tanlanma bo‘yicha baholanganligi uchun $\left(a = M\left(\overline{X}\right), \sigma = \overline{S^2}\right)$ $z = 2$.Demak, $k = s - 3$.

Masalan, berilgan α qiymatdorlik darajasida H_0: bosh to‘plam normal taqsimlangan degan nolinchi gipotezani tekshirish uchun avval nazariy chastotalarni, keyin esa kriteriyning

$$\chi^2_{kuz.} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} \qquad (*)$$

kuzatilgan qiymatini hisoblash va χ^2 taqsimotning kritik nuqtalari jadvalidan berilgan α qiymatdorlik darajasi va $k = s - 3$ ozodlik darajalari soni boyicha $\chi^2_{kr.}(\alpha; k)$ kritik nuqta topish lozim.

Agar $\chi^2_{kuz} < \chi^2_{kr}$ bo‘lsa, u holda nolinchi gipotezani rad qilishga asos yo‘q; agarda $\chi^2_{kuz.} > \chi^2_{kr.}$ bo‘lsa, u holda nolinchi gipoteza rad etiladi.

Agar bosh to‘plam Puasson qonuni bo‘yicha taqsimlangan deb taxmin qilinayotgan bo‘lsa, u holda bitta λ parametr baholanadi. Shu sababli, $z = 1$ va $k = s - 2$.

Eslatma.1.Tanlanma hajmi etarlicha katta(n>50) bo‘lishi lozim.Har bir guruh kamida 5-8ta chastotani o‘z ichiga olishi, kam sonli guruhlarni ularning chastotalarini jamlab bitta guruhga birlashtirish lozim.
2.Bajarilgan amallarni nazorat qilish maqsadida (*) formula quyidagicha o‘zgartiriladu:

$$\chi^2_{kuz.} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i^2}{np_i} - n$$

Pirsonning muvofiqlik kriteriysining mohiyati n_i empirik va $n_i' = np_i$ nazariy chastotalarni taqqoslashdir. Empirik chastotalar tajribalardan topilishi ravshan. Agar bosh to‘plam normal taqsimlangan deb taxmin qilinayotgan bo‘lsa, nazariy chastotalarni qanday hisoblash mumkin? Quyidagi misolda bu masalani hal etish usullaridan birini keltiramiz.

1-misol. 0,05 qiymatdorlik darajasida bosh to‘plamning normal taqsimlanganligi haqidagi gipotezaning quyidagi jadvalda berilgan n=100 hajmli tanlanmaning empirik taqsimoti bilan muvofiq kelish-kelmasligini Pirson kriteriysidan foydalanib tekshiring.

1-jadval

Interval raqami	Interval chegarasi		Chasto-ta	Interval raqami	Interval chegarasi		Chastota
i	x_i	x_{i+1}	n_i	i	x_i	x_{i+1}	n_i
1	3	8	6	5	23	28	16
2	8	13	8	6	28	33	8
3	13	18	15	7	33	38	7
4	18	23	40				n=100

Yechish: 1. Tanlanmaning o‘rta qiymati va tanlanmaning o‘rtacha kvadratik chetlanishini ko‘paytmalar usuli bilan topamiz. Buning uchun, berilgan intervalli taqsimotdan teng uzoqlikdagi variantalar taqsimotiga o‘tamiz, bunda x_i^* varianta sifatida interval uchlarining o‘rtacha arifmetik qiymatini olamiz:

$$x_i^* = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}.$$

x_i^* variantaning n_i chastotasi sifatida *i*- intervalga tushgan chastotalar soni qabul qilinadi.Natijada ushbu taqsimotni hosil qilamiz:

x_i^*	5,5	10,5	15,5	20,5	25,5	30,5	35,7
n_i	6	8	15	40	16	8	7

Ko‘paytmalar usuli bo‘yicha tegishli hisoblashlarni bajarib, ushbu tanlanmaning o‘rta qiymati va tanlanmaning o‘rtacha kvadratik chetlanishini topamiz:

$$\overline{x^*} = 20,7; \quad \sigma^* = 7,28$$

2. X tasodifiy miqdor normalanadi, ya’ni $Z = \frac{X - \overline{x^*}}{\sigma^*}$ miqdorga o‘tiladi va

$(z_i; z_{i+1})$ intervallarning uchlari hisoblanadi:

$$z_i = \frac{x_i - \overline{x^*}}{\sigma^*}, \quad z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \overline{x^*}}{\sigma^*}.$$

$\overline{x^*} = 20{,}7;\ \sigma^* = 7{,}28;\ \frac{1}{\sigma^*} = 0{,}137$ larni hisobga olib, $(z_i; z_{i+1})$ intervallarni topamiz. Buning uchun 2-hisoblash jadvalini tuzamiz (birinchi intervalning chap uchini $-\infty$ ga, so'nggi intervalning o'ng uchini esa ∞ ga teng deb qabul qilamiz).

2-jadval

i	Interval chegaralari		$x_i - \overline{x}^*$	$x_{i+1} - \overline{x}^*$	Interval chegaralari	
	x_i	x_{i+1}			$z_i = \frac{x_i - \overline{x}^*}{\sigma^*}$	$z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \overline{x}^*}{\sigma^*}$
1	3	8	-	-12,7	-∞	-1,74
2	8	13	-12,7	-7,7	-1,84	-1,06
3	13	18	-7,7	-2,7	-1,06	-0,37
4	18	23	-2.7	2,3	-0,37	0,32
5	23	28	2.3	7,3	0,32	1,00
6	28	33	7.3	12,3	1,00	1,69
7	33	38	12.3	--	1,69	∞

3. p_i nazariy ehtimolliklarni Laplas funksiyasi orqali

$$p_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$$

tenglik bo'yicha hisoblab, $n_i^* = np_i = 100p_i$ nazariy chastotalarni topamiz. Buning uchun 3-hisoblash jadvalini tuzamiz.

3-jadval

I	Interval chegaralari		$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	$p_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$	$n_i' = 100 p_i$
	z_i	z_{i+1}				
1	_	-1,74	-0,5000	-0,4591	0,0409	4,09
2	-1,74	-1,06	-0,4591	-0,3554	0,1037	10,37
3	-1,06	-0,37	-0,3554	-0,1443	0,2111	21,11
4	-0,37	0,32	-0,1443	0,1255	0,2698	26,98
5	0,32	1,00	0,1255	0,3413	0,2158	21,58
6	1,00	1,69	0,3413	0,4545	0,1132	11,32
7	1,69		0,4545	0,5000	0,0455	4,55
$\sum$					1	100

4. Pirson kriteriysidan foydalanib, empirik va nazariy chastotalarni taqqoslaymiz:

a) Pirson kriteriysining kuzatilayotgan qiymatini hisoblaymiz. Buning uchun 4-hisoblash jadvalini tuzamiz, 7 va 8-ustunlar hisoblashlarini

$$\chi^2_{kuz.} = \sum_i \frac{n_i^2}{n_i^*} - n$$

formula nazorat qilish uchun xizmat qiladi. Tekshirish: $\chi^2_{kuz.} = \sum_i \frac{n_i^2}{n_i^*} - n = 113,22 - 100 = 13,22$.

Hisoblashlar to‘g‘ri bajarilgan.

b) χ^2 taqsimotning kritik nuqtalari jadvalidan (5-ilova) $\alpha = 0,05$ qiymatdorlik darajasi va $k = s - 3 = 7 - 3 = 4$ (s-intervallar soni) ozodlik darajalari soni bo‘yicha o‘ng tomonlama kritik sohaning $\chi^2_{\kappa r.}(0,05;4) = 9,5$ kritik nuqtasini topamiz.

4-jadval

1	2	3	4	5	6	7	8
I	n_i	n_i'	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i')^2$	$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$	n_i^2	$\frac{n_i^2}{n_i'}$
1	6	4,09	1,91	3,6481	0,8920	36	8,8019
2	8	10,37	2,37	5,6169	0,5416	64	6,1716
3	15	21,11	-6,11	37,3321	1,7684	225	10,6584
4	40	26,98	13,02	169,5204	6,2833	1600	59,3052
5	16	21,58	-5,58	31,1364	1,4428	256	11,8628
6	8	11,32	-3,32	11,0224	0,9737	64	5,6537
7	7	4,55	2,45	6,0025	1,3192	49	10,7692
$\sum$	100	100			$\chi^2_{kuz.} = 13,22$		113,22

$\chi^2_{kuz.} > \chi^2_{kr.}$ bo‘lgani uchun X bosh to‘plamning normal taqsimlanganligi haqidagi gipotezani rad etamiz; boshqacha aytganda, empirik va nazariy chastotalarning farqi muhim. Bu kuzatish ma’lumotlari bosh to‘plamning normal taqsimlanganligi haqidagi gipoteza bilan muvofoiq kelmasligini anglatadi.

2-misol. Maxsus tez yordam brigadasining 300 soat davomida xudud aholi punktidagi chaqiriqlari sonining statistik ma’lumoti quyidagi jadvalda berilgan.

chaqiriqlar soni soatda:x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Chastotalar:n_i	15	71	75	68	39	17	10	4	1	300

χ^2 kriteriy yordamida $\alpha = 0,05$ qiymatdorlik darajasida mos nazariy taqsimotni tanlash va ikki taqsimotning mosligi haqidagi gipotezani tekshiring.

Yechish. Tanlanmaning o‘rta qiymati va tanlanmaning dispersiyasini hisoblaymiz.

$$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i n_i}{n} = \frac{0 \cdot 15 + 1 \cdot 71 + 2 \cdot 75 + ... + 7 \cdot 4 + 8 \cdot 1}{300} = 2,54.$$

$$\overline{x^2} = \frac{\sum_i x_i^2 n_i}{n} = \frac{0^2 \cdot 15 + 1^2 \cdot 71 + 2^2 \cdot 75 + ... + 7^2 \cdot 4 + 8^2 \cdot 1}{300} = 8,84.$$

$$D_T = \overline{x^2} - \left(\bar{x}\right)^2 = 8,84 - 2,54^2 = 2,39.$$

X-har soatdagi chaqiriqlar soni $\lambda = 2{,}54$ parametr bilan Puasson taqsimoti bo'yicha taqsimlangan degan H_0 gipotezani ilgari suramiz. Bu gipotezani afzalligi, birinchidan har bir yashovchi uchun tez yordam chaqirig'i-kam sonli butun sondagi hodisa; ikkinchidan tanlanmaning o'rta qiymati va tanlanmaning dispersiyasi qiymatlari taqriban teng: $\overline{x} \approx D_T$.

Puasson taqsimoti bo'yicha $M(X) = \lambda$ bo'lgani uchun no'malum λ parametr sifatida tanlanma bo'yicha siljimagan baho- tanlanmaning o'rta qiymatini olamiz, ya'ni $\lambda = \overline{x} = 2{,}54$. X tasodifiy miqdor qiymatlari ehtimolligini

$$p_i = P(X = x_i = m) = \frac{2{,}54^m e^{-2{,}54}}{m!}$$

formula bo'yicha hisoblaymiz. χ^2 statistikani aniqlash uchun jadval tuzamiz.

i	$x_i = m$	n_i	p_i	np_i	$(n_i - np_i)^2$	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
1	0	15	0,0789	23,7	75,69	3,194
2	1	71	0,2003	60,1	98,01	1,631
3	2	75	0,2544	76,3	1,69	0,022
4	3	68	0,2154	64,6	11,56	0,179
5	4	39	0,1368	41,0	3,61	0,088
6	5	17	0,0695	20,9	14,44	0,694
7	6	10	0,0294	8,8	1,44	0,164
8 9	7 8	$\left.\begin{matrix}4\\1\end{matrix}\right\}5$	0,0107 0,0034	$\left.\begin{matrix}3{,}2\\1{,}0\end{matrix}\right\}4{,}2$	0,64	0,152
$\sum$		300	0,9988	299,6		$\chi^2 = 6{,}12$

Qulaylik uchun, χ^2 ni hisoblashda oxirgi ikki intervalni qo'shamiz, chunki ularning chastotalari 5dan kam.Natijada,yangi intervallar soni $s = 8$ ga teng.U holda ozodlik darajalari soni $k = 8 - 2 = 6$.

Ilovadagi V-jadvaldan $\chi^2_{0,05;6} = 12{,}59$. Shunday qilib, $\chi^2 < \chi^2_{0,05;6}$ $(6{,}12 < 12{,}59)$ va demak, H_0 gipotezani rad qilishga asos yo'q.

3-misol. 0,05 qiymatdorlik darajasida bosh to'plamning normal taqsimlanganligi haqidagi nolinchi gipotezani tekshiring. Empirik va nazariy chastotalar ma'lum:

nazariy chastotalar: n'_i	6	12	16	40	13	8	5
empirik chastotalar: n_i	4	11	15	43	15	6	6

Yechish: $\chi^2_{kuz.}$ ni hisoblaymiz, buning uchun quyidagi hisoblash jadvalini tuzamiz.

i	n_i	n_i'	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i')^2$	$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$	n_i^2	$\frac{n_i^2}{n_i'}$
1	4	6	-2	4	0.67	16	2.67
2	11	12	-1	1	0.08	121	10.08
3	15	16	-1	1	0.06	225	14.06
4	43	40	3	9	0.23	1849	46.23
5	15	13	2	4	0.31	225	17.31
6	6	8	-2	4	0.5	36	4.50
7	6	5	1	1	0.2	36	7.20
$\sum$	100	100			$\chi^2_{kuz.} = 2{,}05$		102.05

Hisoblashlarni to‘g‘ri bajarilganligini bilish maqsadida $x^2_{kuz.} = \sum_i \frac{n_i^2}{n_i'} - n$ dan foydalanamiz. Nazorat qilish: $\chi^2_{kuz.} = 2{,}05$. Haqiqatdan, $\chi^2_{kuz.} = 102{,}05 - 100 = 2{,}05$.

Demak, hisoblash to‘g‘ri bajarilgan. Tanlanmadagi guruhlar soni s=7 ligini e’tiborga olib, ozodlik darajalarini sonini topamiz: k=7-3=4. χ^2 taqsimotning kritik nuqtalari jadvalidan α=0,05 qiymatdorlik va k=4 ozodlik darajalari soni bo‘yicha $\chi^2_{kr}(0{,}05;4) = 9{,}5$ ni topamiz.

Ko‘rinib turibdiki, $\chi^2_{kuz.} < \chi^2_{kr}$. Shuning uchun, nolinchi gipotezani rad etishga asos yo‘q. Demak, kuzatish ma’lumotlari bosh to‘plamning normal taqsimlanganligi haqidagi gipoteza bilan muvofiq keladi.

O‘Z –O‘ZINI TEKSHIRISH UCHUN SAVOLLAR

1.Statistik gipoteza deb nimaga aytiladi.
2.Nolinchi gipoteza deb nimaga aytiladi.
3.Konkurent gipoteza deb nimaga aytiladi.
4.Oddiy gipoteza deb nimaga aytiladi.
5.Murakkab gipoteza deb nimaga aytiladi.
6.Birinchi va ikkinchi tur xatolar nima?
7.Statistik kriteriy nima?
8.Kritik soha nima?
9.Muvofiqlik kriteriysi nima?
10. χ^2 muvofiqlik kriteriysi qanday kriteriy?

Mustaqil yechish ushun mashqlar

Berilgan 0,05 qiymatdorlik darajasida X bosh to‘plamning normal taqsimlanganligi haqidagi gipotezani berilgan empirik taqsimot bilan muvofiq kelish-kelmasligini Pirson kriteriysidan foydalanib tekshiring. a)

Interval raqami	Interval chegaralari		Chastota	Interval raqami	Interval chegaralari		Chastota
I	x_i	x_{i+1}	n_i	**i**	x_i	x_{i+1}	n_i
1	-20	-10	20	5	20	30	40
2	-10	0	47	6	30	40	16
3	0	10	80	7	40	50	8
4	10	20	89				n=300

b)

Interval raqami	Interval chegaralari		Chastota	Interval raqami	Interval chegaralari		Chastota
I	x_i	x_{i+1}	n_i	**i**	x_i	x_{i+1}	n_i
1	1	3	2	7	13	15	16
2	3	5	4	8	15	17	11
3	5	7	6	9	17	19	7
4	7	9	10	10	19	21	5
5	9	11	18	11	21	23	1
6	11	13	20				n=100

c)

Interval raqami	Interval chegaralari		Chastota	Interval raqami	Interval chegaralari		Chastota
i	x_i	x_{i+1}	n_i	**i**	x_i	x_{i+1}	n_i
1	6	16	8	6	56	66	8
2	16	26	7	7	66	76	6
3	26	36	16	8	76	86	7
4	36	46	35				
5	46	56	15				n=100

d)

Interval raqami	Интервал чегараси		Chastota	Interval raqami	Интервал чегараси		Chastota
i	x_i	x_{i+1}	n_i	**i**	x_i	x_{i+1}	n_i
1	5	10	7	6	30	35	19
2	10	15	8	7	35	40	14
3	15	20	15	8	40	45	10
4	20	25	18	9	45	50	6
5	25	30	23				n=120

Javobi.*a*) Muvofiq keladi; $\overline{x}^*$=10,4; σ=13,67; k=4; $\chi^2_{kuz.}=5{,}4$; $\chi^2_{кr.}(0{,}05;4)=9{,}5$.

Ko'rsatma. Birinchi ikkita va so'nggi ikkita intervalning kichik sondagi chastotalarini va shuningdek, bu intervalning o'zlarini ham birlashtirib yuboring.

b) Muvofiq keladi; $\overline{x}^*$=12,04; σ=4,261; k=9-3=6; $\chi^2_{kuz.}=1{,}3$; ;$\chi^2_{кr.}(0{,}05;6)=12{,}6$;

c) Muvofiq kelmaydi; $\overline{x}^*$=42,5; σ=17,17; k=5; $\chi^2_{kuz.}=14$; $\chi^2_{\kappa r.}(0{,}05;5)=11{,}1$;

d) Muvofiq keladi; $\overline{x}^*$=27,54; σ=10,44; k=6; $\chi^2_{kuz.}=5{,}4$; $\chi^2_{\kappa r.}(0{,}05;6)=12{,}6$.

2. Pirson kriteriysidan foydalanib, 0,05 qiymatdorlik darajasidan X bosh to‘plamning normal taqsimlanganligi haqidagi gipotezaning n=200 hajmli tanlanmaning ushbu taqsimoti bilan muofiq kelish-kelmasligini tekshiring:

x_i	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,2	2,3
n_i	6	9	26	25	30	26	21	24	20	8	5

J: k=8, $\chi^2_{kuz.}=7{,}71$; $\chi^2_{\kappa r.}(0{,}05;8)=15{,}5$;

Bosh to‘plamning normal taqsimlanganligi haqidagi gipotezani rad qilishga asos yo‘q.

3. Pirson kriteriysidan foydalanib, 0,01 qiymatdorlik darajasida n_i empirik va n_i' nazariy chastotalar orasidagi farq tasodifiymi yoki muhimligini aniqlang. Nazariy chastotalar X bosh to‘plamning normal taqsimlanganligi haqidagi gipotezaga asoslanib hisoblangan:

n_i	8	16	40	72	36	18	10
n_i	6	18	36	76	39	18	7

:

4.Pirson kriteriysidan foydalanib, 0,05 qiymatdorlik darajasida n_i emperik chastotalar bilan X bosh to‘plamning normal taqsimlanganligi haqidagi gipotezaga asoslanib hisoblangan n_i' nazariy chastotalar orasidagi farqning tasodifiy yoki muhimligini aniqlang:

a)

n_i	5	10	20	8	7
n_i	6	14	18	7	5

b)

n_i	6	8	13	15	20	16	10	7	5
n_i	5	9	14	16	18	16	9	6	7

c)

n_i	14	18	32	70	20	36	10
n_i	10	24	34	80	18	22	12

d)

n_i	5	7	15	14	21	16	9	7	6
n_i	6	6	14	15	22	15	8	8	6

J: *a*) tasodifiy; k=2, $\chi^2_{kuz.}=2{,}47$; $\chi^2_{\kappa r.}(0{,}05;2)=6{,}0$;

b) tasodifiy; k=6, $\chi^2_{kuz.}=1{,}52$; $\chi^2_{\kappa r.}(0{,}05;6)=12{,}6$;

c) tasodifiy; k=4, $\chi^2_{kuz.}=13{,}93$; $\chi^2_{\kappa r.}(0{,}05;4)=9{,}5$

d) tasodifiy; k=6, $\chi^2_{kuz.}=0{,}83$; $\chi^2_{\kappa r.}(0{,}05;6)=12{,}6$.

§ 15. Korrellyatsiya nazariyasi elementlari

15.1 Statistik va korrelyatsion bog‘lanish

Falsafa qonuniyatlaridan ma’lumki, har qanday hodisa o‘z-o‘zidan ro‘y bermaydi, u boshqa hodisalar bilan bog‘liqlikda ro‘y beradi.

Masalan, ishlab chiqarishda mehnat unumdorligi bir qancha omillar (texnologiyalar, ishchilarning ma’lumoti, kasb mahoratlari), hatto ishchilarning ish stajiga ham bog‘liq.

Har bir hodisa o‘zining tashkil etuvchi qismi va xossasi birligiga ega. Shunday ekan, hodisani bilish uchun uni o‘rab turgan turli (ko‘p xillik) hodisa – omillar bilan o‘zaro bog‘lanishlarini o‘rganish kerak bo‘ladi.

Fan va texnikada asosan funksional bog‘lanishlar bilan ish ko‘riladi. Funksional bog’lanish tasodifiy bo‘lmagan o‘zgaruvchilar(masalan, doiraning radiusi va yuzasi ($S=\pi r^2$); vakuumda vaqtga bog’liq tezlikning pasayishi va sh.k.) va shuningdek, tasodifiy miqdorlar orasida ham (masalan, sotib olingan tovar soni va uning narxi va sh. k.) bo‘lishi mumkin.

Amalda tasodifiy miqdorlar orasidagi qat’iy funksional bog‘lanish juda kamdan-kam hollarda kuzatiladi, chunki tasodifiy miqdorlarning qiymatlari ko‘pgina tasodifiy omillarga bog‘liqdir.Shu bilan birga tasodifiy miqdorlarga ta’sir etadigan tasodifiy omillar ichida umumiylari bo‘lgan hollar tez-tez uchrab turadi, bunday hollarda tasodifiy miqdorlar **statistik bog‘langan** deyiladi.

Statistik bog‘lanishga masalan, hosildorlik va berilgan o‘g‘itlar miqdori; insonning bo‘yi va og‘irligi (massasi) va shu kabilarni keltirish mumkin.

Statistik bog‘lanishda tasodifiy miqdorlardan birining o‘zgarishi boshqa tasodifiy miqdor taqsimot qonunini o‘zgarishiga olib keladi. Xususan, agar miqdorlardan birining o‘zgarishi ikkinchisining o‘rtacha qiymatini o‘zgarishida ko‘rinsa, bu holda statistik bog‘lanish **korrelyatsion bog‘lanish** deyiladi. Korrelyatsion bog‘lanishga misol keltiramiz. Aytaylik, Y - don hosili, X-o‘g‘itlar miqdori bo‘lsin. Bir xil yer maydoniga ega joylardan bir xil miqdorda o‘g‘it solinganda ham har xil hosil olinadi, ya’ni Y miqdor X miqdorning funksiyasi emas. Bu tasodifiy omillar (yog‘ingarchilik, havo temperaturasi va shu kabilar) ta’siri bilan tushuntiriladi. Shunga qaramasdan, tajriba ko‘rsatadiki, o‘rtacha hosil o‘g‘itlar miqdorining funksiyasidir, ya’ni Y miqdor X miqdor bilan korrelyatsion bog‘langan.

Korrelyatsiya so‘zi inglizchadan **correlation – munosabat, moslik** degan ma’noni anglatadi.

Matematik statistikada hodisa (miqdor)larning o‘zaro bog‘liqligi korrelyatsiya metodi bilan o‘rganiladi.

15.2 Regressiya tenglamasi va regressiya chizig‘i

Korrelyatsion bog‘liqlik ta’rifini aniqlashtiramiz, buning uchun shartli o‘rtacha qiymat tushunchasini kiritamiz.

Shartli o‘rtacha qiymat $\bar{y}_x$ deb, Y tasodifiy miqdorning X=x qiymatiga mos qiymatlarining arifmetik o‘rtacha qiymatiga aytiladi.

Masalan, X miqdorning x_1=2 qiymatiga Y miqdorning y_1=3, y_2=5, y_3=6, y_4=10 qiymatlari mos kelsin. U holda, shartli o‘rtacha qiymat

$$\overline{y_2} = \frac{3+5+6+10}{4} = 6 \text{ ga teng.}$$

Y ning X ga nisbatan korrelyatsion bog‘liqligi deb, $\bar{y}_x$ shartli o‘rtacha qiymatning
x ga funksional bog‘liqligiga aytiladi:

$$\bar{y}_x = f(x) \qquad (15.1)$$

X ning Y ga nisbatan korrelyatsion bog‘liqligi ham yuqoridagi kabi ta’riflanadi:

$$\overline{x_y} = \varphi(y) \qquad (15.2)$$

(15.1) va (15.2) tengliklar mos ravishda Y ning X ga va X ning Y ga nisbatan **regressiya** tenglamasi deyiladi.

f(x) va $\varphi(y)$ funksiyalar- regressiya funksiyalari, ularning grafiklari esa **regressiya chizig‘i** deyiladi.

Korrelyatsion nazariyasining asosiy masalalaridan biri **korrelyatsion bog‘lanish shaklini** aniqlash, ya’ni uning regressiya funksiyasi ko‘rinishini (chiziqli, kvadratik, ko‘rsatkichli va hokozo) topishdan iborat. Regressiya funksiyalari ko‘p hollarda chiziqli bo‘ladi. Ikkinchi masala **korrelyatsion bog‘lanishning zichligi** (kuchi)ni aniqlash.

Y ning X ga nisbatan korrelyatsion bog‘liqligi zichligi Y ning qiymatlarini $\bar{y}_x$ shartli o‘rtacha qiymat atrofida tarqoqligining kattaligi bo‘yicha baholanadi: ko‘p tarqoqlik Y ning X ga kuchsiz bog‘liqligidan yoki bog‘liqlik yo‘qligidan darak beradi; kam tarqoqlik ancha kuchli bog‘liqlik borligini ko‘rsatadi. X ning Y ga nisbatan korrelyatsion bog‘liqligining zichligi ham shu kabi baholanadi.

15.3 Chiziqli regressiya

Y va X son belgilar chiziqli korrelyatsion boglangan bo‘lsin. Eng sodda holni qaraymiz. X belgining turli x qiymatlari va Y belgining ularga mos y qiymatlari bir martadan kuzatilgan bo‘lsin:

x_i	x_1	x_2	...	x_n
y_i	y_1	y_2	...	y_n

Bu qiymatlar bir martadan kuzatilganligi uchun shartli o‘rtacha qiymatdan foydalanishga ehtiyoj yo‘q. Regressiya tenglamasini

$$Y = \rho_{yx} x + b \qquad (15.3)$$

ko‘rinishda izlaymiz, bu yerda, ρ_{yx} - Y ning X ga nisbatan regressiya koeffitsiyenti deyiladi.

ρ_{yx} va b parametrlarni shunday tanlash keraki kuzatish ma’lumotlari bo‘yicha XOY tekisligida yasalgan

$$(x_i y_i),\ (x_2, y_2), \ldots.\ (x_n, y_n)$$

nuqtalar (15.3) to‘g‘ri chiziq yaqinida yotsin.Shu maqsadda eng kichik kvadratlar usulidan foydalanib, quyidagi funksiyaning minimumini topamiz:

$$F(\rho, b) = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(\rho x_i + b - y_i)^2$$

bu yerda Y_i - (15.3) tenglama bo‘yicha x_i qiymatga mos ordinata; y_i esa x_i ga mos kuzatilayotgan ordinata; $\rho = \rho_{yx}$.

Xususiy hosilalarni nolga tenglashtiramiz:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \rho} = 2\sum_{i=1}^{n}(\rho x_i + b - y_i)\quad x_i = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \rho} = 2\sum_{i=1}^{n}(\rho x_i + b - y_i) = 0 \end{cases}$$

yoki

$$\begin{cases} \rho\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \\ \rho\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases} \qquad (15.4)$$

Bu sistemani yechib, izlanayotgan parametrlarni topamiz.

$$\rho = \rho_{yx} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2} \qquad (15.5)$$

$$b = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}$$

Eslatma. X ning Y ga nisbatan regressiya to‘g‘ri chizig‘ining $X = \rho_{xy} y + c$ tenglamasini shunga o‘xshash topish mumkin, bu yerda ρ_{xy} X ning Y ga regressiya koeffitsiyenti.

1-misol. Semestr yakunida yakuniy nazoratdan avval guruh talabalaridan 12 tasi orasida so‘rov o‘tkazildi. So‘rovdan maqsad talabalar semestrni qanday ballarda o‘zlashtirishlarini aniqlash (5 balli bahoda). Kutilgan ballar va yakuniy baholashdan keyingi natijalar quyidagi jadvalda keltirilgan.

Kutilgan ballar x_i	3,2	3,0	3,10	2,8	3,4	3,8	4,0	3,7	2,9	4,5	4,6	4,2
Olingan ballar y_i	4,0	3,8	3,5	3,0	4,4	4,2	4,6	4,5	3,1	4,1	4,8	4,0

Berilgan ma'lumotlar bo'yicha chiziqli regressiya tenglamasini tuzing.

Yechish. *Y* ning *X* ga nisbatan regressiya tenglamasini tuzamiz. Shu maqsadda quyidagi jadvalni tuzamiz.

№	x_i	y_i	$x_i\ y_i$	x_i^2	y_i^2	$\overline{y_x}$	$\overline{x_y}$
1	3,2	4,0	12,80	10,24	16,00	4,06	3,67
2	3,0	3,8	11,40	9,00	14,44	4,08	3,56
3	3,10	3,5	10,85	9,61	12,25	4,07	3,40
4	2,8	3,0	8,40	7,84	9,00	4,10	3,14
5	3,4	4,4	14,96	11,56	19,36	4,03	3,88
6	3,8	4,2	15,96	14,44	17,64	3,98	3,78
7	4,0	4,6	18,40	16,00	21,26	3,96	3,99
8	3,5	4,5	15,75	12,25	20,25	4,02	3,94
9	3,9	3,1	12,09	15,21	9,61	3,97	3,19
10	4,5	4,1	18,45	20,25	16,81	3,9	2,72
11	4,6	4,8	22,08	21,26	23,04	3,89	4,09
12	4,2	4,0	16,80	17,64	16,00	3,93	3,67
$\sum$	44	48	177,94	145,05	195,66	48	44

$$\rho_{yx} = \frac{12\cdot 177{,}94 - 44\cdot 48}{12\cdot 145{,}05 - (44)^2} = \frac{2135{,}28 - 2112}{1740{,}6 - 1936} = \frac{23{,}28}{-195{,}4} \approx -0{,}12$$

$$b = \frac{145{,}05\cdot 48 - 44\cdot 177{,}94}{-195{,}4} = \frac{6962{,}4 - 7829{,}36}{-195{,}4} = \frac{-866{,}96}{-195{,}4} \approx -4{,}44$$

Shunday qilib, $\overline{y_x}$=-0,12*x*+4,44.

2. Endi *X* ning *Y* ga regressiya $X = \rho_{xy} y + c$ tenglamasini tuzamiz.

$$\rho_{yx} = \frac{12\cdot 177{,}94 - 44\cdot 48}{12\cdot 195{,}66 - (48)^2} = \frac{2135{,}28 - 2112}{2347{,}92 - 2304} = \frac{23{,}28}{43{,}92} \approx 0{,}53$$

$$C = \frac{195{,}66\cdot 44 - 48\cdot 177{,}94}{12\cdot 195{,}66 - 48^2} = \frac{8609{,}04 - 8541{,}12}{43{,}92} = \frac{67{,}92}{43{,}92} \approx 1{,}55$$

Shunday qilib, $\overline{x_y}$=0,53*y*+1,55.

15.4. Regressiya to‘g‘ri chizig‘i tanlanma tenglamasi parametrlarini guruhlangan ma’lumotlar bo‘yicha topish

Kuzatishlar soni katta bo‘lganda bir x qiymat n_x marta, bir y qiymat n_y marta, (x, y) juftlik n_{xy} marta kuzatilishi mumkin. Bunday hollarda kuzatish ma’lumotlari umumlashtirilib guruhlarga ajratiladi, ya’ni n_{xy} chastotalar hisoblanib jadval ko‘rinishida yoziladi. Bu jadval **korrelyatsion jadval** deyiladi.

X va Y son belgilar chiziqli korrelyatsion bog‘langan bo‘lib, n ta bog’liqsiz kuzatishlar asosida

$$(x_i y_i) \quad (i = \overline{1, k};\ j = \overline{1, m})$$

juft natijalar olingan bo‘lsin. Bunda $(x_i y_i)$ juftlik n_{ij} marta kuzatilgan va

$$n = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} n_{ij}.$$

Natijalar quyidagi korrelyatsion jadval ko‘rinishida yoziladi.

$Y \setminus X$	x_i	x_i	...	x_i	n_y
y_1	n_{11}	n_{21}	...	n_{i1}	n_{x1}
y_2	n_{12}	n_{22}	...	n_{i2}	n_{x2}
:	...	...	...	...	...
y_m	n_{1m}	n_{2m}	...	n_{im}	n_{xm}
n_x	n_{1y}	n_{2y}	...	n_{iy}	n

Bunda,

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_{iy} x_i}{n}, \qquad \overline{y} = \frac{\sum_{j=1}^{m} n_{xj} y_i}{n}, \qquad \overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_{iy} x_i^{\,2}}{n}.$$

$$n_{iy} = \sum_{j=1}^{m} n_{ij}; \qquad n_{xj} = \sum_{i=1}^{k} n_{ij};$$

Bu holda, Y ning X ga nisbatan regressiya to‘g‘ri chizig‘i parametrlari uchun (15.4) sistema quyidagi ko‘rinishni oladi.

$$\begin{cases} \overline{x^2} p_{yx} + \overline{x} \cdot b = \overline{xy} \\ \overline{x} p_{yx} + b = \overline{y} \end{cases} \qquad (15.6)$$

Bu yerda,

$$\overline{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} n_{ij} x_i y_i}{n}.$$

(15.6) sistemadan b ni yo‘qotib

$$y - \overline{y} = \rho_{yx} (x - \overline{x}) \qquad (15.7)$$

tenglamani hosil qilamiz, bu yerda,regressiya koeffitsiyenti

$$\rho_{yx} = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} n_{ij} x_i y_i - n\bar{x}\cdot\bar{y}}{n[\overline{x^2} - (\bar{x})^2]} \qquad (15.8)$$

Ko‘rinib turibdiki, Y ning X ga nisbatan regressiya to‘g‘ri chizig‘i $(\bar{x}, \bar{y})$ nuqtadan o‘tadi.

Agar $(\overline{x^2} - (\bar{x})^2 = \sigma_x^2$ ekanligini hisobga olsak, u holda,

$$\rho_{yx} = \frac{\sum n_{xy} x_y - n\bar{x}\bar{y}}{n\sigma_x^2}$$

ni yozish mumkin, bu yerda,

$$\sum n_{xy} x_y = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} n_{ij} x_i y_i .$$

Tenglikning ikkala tomonini

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

kasrga ko‘paytiramiz:

$$\rho_{yx}\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\sum n_{xy} x_y - n\bar{x}\bar{y}}{n\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

Bu tenglikni o‘ng tomonini r bilan belgilaymiz va uni korrelyatsiya koeffitsiyenti deb ataymiz.

$$\rho_{yx}\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = r$$

bundan,
$$\rho_{yx} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

U holda, (15.7) tenglama

$$y_x - \bar{y} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(x - \bar{x}) \qquad (15.9)$$

ko‘rinishni oladi. Korrelyatsiya koeffitsiyenti chiziqli korrelyatsion bog‘lanishning zichligi (kuchi)ni baholash uchun xizmat qiladi.Korrelyatsiya koeffitsiyentining absolyut qiymati birdan oshmaydi, ya’ni

$$|r| \le 1 \quad \text{yoki} \quad -1 \le r \le 1$$

Agar korelyatsiya koeffitsiyentining moduli $|r|$ birga qancha yaqin bo‘lsa, bog‘lanish shuncha kuchli bo‘ladi.

Eslatma. 1. Agar *r=0*, bo‘lsa u holda *X* va *Y* lar chiziqli korrelyatsion bog‘lanmagan.

2. Agar $|r| = 1$ bo‘lsa, *X* va *Y* lar funksional bog‘langan.

2-misol. Quyidagi korelyatsion jadvalda keltirilgan ma'lumotlar bo'yicha Y ning X ga nisbatan regressiya tenglamasini tuzing.

$Y \backslash X$	5	10	15	20	25	30	35	40	n_u
100	2	1	-	-	-	-	-	-	3
120	3	4	3	-	-	-	-	-	10
140	-	-	5	10	8	-	-	-	23
160	-	-	-	1	-	6	1	1	9
180	-	-	-	-	-	-	4	1	5
n_x	5	5	8	11	8	6	5	2	50

Yechish. Shartli variantalarga o'tamiz.

$$u_i = \frac{x_i - C_1}{h_1} = \frac{x_i - 20}{5};$$

bu yerda, C_1- coxta nol sifatida eng katta chastotaga ega x=20 varianta olindi, h_1=5 qadam qo'shni variantalar orasidagi ayirmaga teng (10-5=5); xuddi shuningdek,

$$v_i = \frac{y_i - C_2}{h_2} = \frac{y_i - 140}{20};\ C_2 = 140;\ h_2 = 20.$$

$$u_1 = \frac{x_i - 20}{5} = \frac{5 - 20}{5} = -3; \qquad u_2 = \frac{10 - 20}{5} = -2; \qquad u_3 = -1;$$

$$u_4 = 0; \quad u_5 = 1; \quad u_6 = 2; \quad u_7 = 3; \quad u_8 = 4.$$

Xuddi shuningdek,

$$v_1 = \frac{y_1 - 140}{20} = \frac{100 - 140}{20} = -2;\ v_2 = -1;\ v_3 = 0;\ v_4 = 1;\ v_5 = 2;$$

Endi shartli variantalar bo'yicha korrelyatsion jadval tuzamiz:

$v \backslash u$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	n_v
-2	2	1							3
-1	3	4	3						10
0	-	-	5	10	8				23
1	-	-	-	1	-	6	1	1	9
2	-	-	-	-	-	-	4	1	5
n_u	5	5	8	11	8	6	5	2	50

$\overline{u}, \overline{v}, \sigma_u$ va σ_{ϑ} larni hisoblaymiz:

$$\overline{u} = \frac{\sum_i n_u u_i}{n} = \frac{-3\cdot 5 - 2\cdot 5 - 1\cdot 8 + 1\cdot 8 + 2\cdot 6 + 3\cdot 5 + 4\cdot 2}{50} = \frac{10}{50} = 0{,}2$$

$$\bar{v} = \frac{\sum_j n_v u_j}{n} = \frac{-2\cdot 3 - 1\cdot 10 + 1\cdot 9 + 2\cdot 5}{50} = \frac{3}{50} = 0{,}06$$

$$\overline{u^2} = \frac{9\cdot 5 + 4\cdot 5 + 1\cdot 8 + 1\cdot 8 + 4\cdot 6 + 9\cdot 5 + 16\cdot 2}{50} = 3{,}64$$

$$\overline{v^2} = \frac{4\cdot 3 + 1\cdot 10 + 1\cdot 9 + 4\cdot 5}{50} = \frac{51}{50} = 1{,}02.$$

$$\sigma_u = \sqrt{\overline{u^2} - (\bar{u})^2} = \sqrt{3{,}64 - 0{,}04} = \sqrt{3{,}6} = 1{,}897$$

$$\sigma_v = \sqrt{\overline{v^2} - (\bar{v})^2} = \sqrt{1{,}02 - 0{,}036} = 0{,}992.$$

$\sum n_{uv} uv$ ni hisoblaymiz. Jadvaldan,

$$\sum n_{uv} uv = -2\cdot(-3)\cdot 2 + (-2)(-2)\cdot 1 + (-1)\cdot(-3)\cdot 3 + (-1)\cdot(-2)\cdot 4 + (-1)\cdot(-1)\cdot 3 + 1\cdot 0\cdot 6 +$$
$$+ 1\cdot 3\cdot 1 + 1\cdot 4\cdot 1 + 2\cdot 3\cdot 4 + 2\cdot 4\cdot 1 = +12 + 4 + 9 + 8 + 3 + 12 + 3 + 4 + 24 + 8 = 87$$

Izlanayotgan korrelyatsion koeffitsiyentni topamiz

$$r = \frac{\sum n_{uv} uv - n\bar{u}\cdot\bar{v}}{n\sigma_u \cdot \sigma_v} = \frac{87 - 50\cdot 0{,}2\cdot 0{,}06}{50\cdot 1{,}897\cdot 0{,}992} = \frac{87\cdot 0{,}6}{94{,}106} = 0{,}918$$

Bu kattalik 1 (bir) soniga ancha yaqin bo‘lib, u va v (umuman, X va Y) lar orasida kuchli chiziqli bog‘lanish borligini ko‘rsatadi.
Shunday qilib, yuqoridagilarga asosan,

$\bar{x} = \bar{u}\cdot h_1 + c_1 = 0{,}2\cdot 5 + 20 = 21;$ $\qquad$ $\bar{y} = 0{,}06\cdot 20 + 140 = 141{,}2;$

$\sigma_x = \sigma_u \cdot h_1 = 1{,}897\cdot 5 = 9{,}485;$ $\qquad$ $\sigma_y = \sigma_v \cdot h_2 = 0{,}992\cdot 20 = 19{,}84$

Topilganlarni (15.9) ga qo‘yamiz:

$$\bar{y}_x - 141{,}2 = 0{,}918\cdot\frac{19{,}84}{9{,}475}(x - 21)$$

yoki

$$\bar{y}_x = 1{,}92x + 100{,}83$$

15.5 Egri chiziqli korrelyatsiya

Agar regressiya tenglamasi egri chiziq bilan tasvirlansa **korrelyatsiya egri chiziqli** deyiladi. Masalan, Y ning X ga nisbatan regressiya tenglamalari quyidagi ko‘rinishlarda bo‘lishi mumkin.

$\bar{y}_x = ax^2 + bx + c$ $\qquad$ (ikkinchi tartibli parabolik)

$$\overline{y}_x = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \text{(uchinchi tartibli parabolik)}$$

$$\overline{y}_x = \frac{a}{x} + b \qquad \text{(giperbolik)}$$

$$\overline{y}_x = b \cdot a^x + c \qquad \text{(ko‘rsatkichli)}$$

Eng sodda egri chiziqli korrelyatsiya – parabolik korrelyatsiyadir:

$$\overline{y}_x = ax^2 + bx + c \tag{15.10}$$

X va Y son belgilar orasidagi bog‘lanish korrelyatsion jadval bilan berilgan bo‘lsin. Chiziqli korrelyatsiya bo‘lgan holdagi kabi (15.10) regressiya tenglamasining parametrlarini eng kichik kvadratlar usuli yordamida topamiz va no‘malum *a, b, c* parametrlarga nisbatan chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_{x_i} + b\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_{x_i} + c\sum_{i=1}^{k} n_{x_i} = \sum_{i=1}^{k} \overline{y}_{x_i} n_{x_i} \\ a\sum_{i=1}^{k} x_i^3 n_{x_i} + b\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_{x_i} + c\sum_{i=1}^{k} x_i n_{x_i} = \sum_{i=1}^{k} x_i \overline{y}_{x_i} n_{x_i} \\ a\sum_{i=1}^{k} x_i^4 n_{x_i} + b\sum_{i=1}^{k} x_i^3 n_{x_i} + c\sum_{i=1}^{k} x_i n_{x_i} = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \overline{y}_{x_i} n_{x_i} \end{cases} \tag{15.11}$$

bu yerda, $$\overline{y_{x_i}} = \frac{\sum_{j=1}^{m} y_j \cdot n_{y_j}}{n_{x_i}}$$

Sistemadan topilgan *a, b, c* parametrlar (15.10) tenglamaga qo‘yiladi va natijada izlanayotgan regressiya tenglamasi hosil qilinadi.

3-misol Ushbu kuzatish

X	0	2	4	6	8	10
Y	5	-1	-0,5	1,5	4,5	8,5

ma’lumotlari bo‘yicha Y ning X ga nisbatan regressiya egri chizig‘i tenglamasini toping.

Yechish. Tenglamani (14.10) parabolik ko‘rinishda izlaymiz. Quyidagi hisoblashlar jadvalini tuzamiz.

T/r	x_i	y_i	x_i^2	$x_i\ y_i$	x_i^3	x^4	$x_i^2\ y_i$
1	0	5	0	0	0	0	0
2	2	-1	4	-2	8	16	-4
3	4	-0,5	16	-2	64	256	-8
4	6	1,5	36	9	216	1296	54
5	8	4,5	64	36	512	4096	288
6	10	8,5	100	85	1000	10000	850
JAMI	30	18	220	126	1800	15664	1180

Jadvaldan foydalanib, (15.11) tenglamalar sistemasini yozamiz:

$$\begin{cases} 15664a + 1800b + 220c = 1180 \\ 1800a + 220b + 30c = 126 \\ 220a + 30b + 6c = 18 \end{cases}$$

Soddalashtiramiz:

$$\begin{cases} 3918a + 450b + 55c = 295 \\ 900a + 110b + 15c = 63 \\ 110a + 15b + 3c = 9 \end{cases}$$

Sistemadan c parametrni yo‘qotamiz:

$$\begin{cases} 350a + 35b = 18 \\ 5704a + 525b = 390 \end{cases}$$

Sistemani yechamiz:

$$3178a = 840, \quad a = 0{,}2643,$$

$$35b = 18 - 350 \cdot 0{,}2643 \qquad b = 0{,}25$$

$$3c = 9 - 110 \cdot a - 15 \cdot b \qquad c = 0{,}7809$$

Shunday qilib, izlangan regressiya tenglamasi

$$Y = 0{,}2643x^2 + 0{,}25x + 0{,}7809.$$

4-misol. Y hosildorlik (1 gektarga s hisobida)ni yerning haydash chuqurligi X (sm) ga bog‘liqligi jadval yordamida berilgan.

X/Y	10	12	14	16	n_x
0	4	1	-	-	5
10	-	2	3	2	7
20	-	1	4	4	9
30	-	2	2	3	7
40	-	2	3	1	6
50	2	2	2	-	6
n_y	6	10	14	10	40

Hosildorlik va haydov chuqurligi bog‘liqligi ko‘rinishini aniqlang va regressiya tenglamasini tuzing.

Yechish. Avvalo, Y ning x_i ni qiymatlariga mos $\overline{y}_{x_i}$ (guruhli o‘rtacha) qiymatlarini topamiz.

$$\overline{y}_{x_1} = \frac{10 \cdot 4 + 12 \cdot 1}{5} = 10{,}4\,s; \quad \overline{y}_{x_2} = \frac{12 \cdot 2 + 14 \cdot 3 + 16 \cdot 2}{7} = 14\,s;$$

$$\overline{y}_{x_3} = \frac{12 \cdot 1 + 14 \cdot 4 + 16 \cdot 4}{9} = \frac{44}{3}s; \quad \overline{y}_{x_4} = \frac{100}{7}s;, \quad \overline{y}_{x_5} = \frac{41}{3}s;$$

$$\overline{y} = 12\,s.$$

Ko‘rinib turibdiki, guruhli o‘rtacha qiymatlar dastlab o‘sib so‘ngra kamayadi. Bu esa *Y* va *X* lar orasida parabolik korrelyatsion bog‘liqlik borligidan dalolat beradi.Regressiya tenglamasini (15.10) ko‘rinishda izlaymiz va (15.11) normal tenglamalar sistemasini yozamiz. Buning uchun quyidagi yordamchi jadval tuzamiz:

T/r	x_i	n_{x_i}	$\overline{y_{x_i}}$	$n_{x_i}x_i$	$x_i^2 n_{x_i}$	$x_i^3 n_{x_i}$	$x_i^4 n_{x_i}$	$\overline{y_{x_i}}n_{x_i}$	$x_i\overline{y_{x_i}}n_{x_i}$	$x_i^2\overline{y_{x_i}}n_{x_i}$
1	0	5	10,4	0	0	0	0	52	0	0
2	10	7	14	70	700	7000	70000	98	980	9800
3	20	9	$\frac{44}{3}$	180	3600	72000	144000	132	2640	52800
4	30	7	$\frac{100}{7}$	210	6300	189000	5670000	100	3000	90000
5	40	6	$\frac{41}{3}$	240	9600	384000	15360000	82	3280	131200
6	50	6	12	300	15000	750000	37500000	72	3600	180000
$\sum$		40		1000	35200	1402000	60040000	536	13500	463800

Natijada quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

$$\begin{cases} 60040000a + 1402000b + 35200c = 463800 \\ 1402000a + 35200b + 1000c = 13500 \\ 35200a + 1000b + 40c = 536 \end{cases}$$

yoki

$$\begin{cases} 300200a + 70100b + 176c = 2319 \\ 14020a + 352b + 10c = 135 \\ 88000a + 250b + 10c = 134 \end{cases}$$

Sistemani yechib,

$$c \approx 10{,}9575; \quad b \approx 0{,}2913; \quad a \approx -0{,}0055$$

larni topamiz.Shunday qilib, izlangan regressiya tenglamasi

$$Y = -0{,}0055x^2 + 0{,}2913x + 10{,}9575.$$

O‘Z-O‘ZINI TEKSHIRISH UCHUN SAVOLLAR

1.Statistik bog‘lanish deb nimaga aytiladi.

2.Korrelyatsion bog‘lanish deb nimaga aytiladi. Misol keltiring.

3.Korrelyatsiya so‘zining ma’nosi?
4.Shartli o‘rtacha qiymat nima?
5.Korrelyatsiya nazariyasining asosiy masalalari nimalardan iborat.
6.Regressiya tenglamasi nima?
7.Regressiya chizig‘i deb nimaga aytiladi.
8.Korrelyatsion jadval nima?
9.Korrelyatsiya koeffitsiyenti qanday topiladi.
10.Korrelyatsiya koeffitsiyentining xossalarini ayting.

Mustaqil yechish ushun mashqlar

1. Fermer xo`jaligidagi 6 ta dalaga $X = 5$ o`g`it birlik o`g`it birligi solinganda dalalardan Y = 12, 14, 16, 18, 17, 23 hosil birligi miqdorida hosil olingan. Olingan hosillarning shartli o`rtachasi topilsin.j: $\bar{y}_5 = 16{,}667$.

2.Quyidagi korelyatsion jadvalda keltirilgan ma’lumotlar bo‘yicha Y ning X ga nisbatan regressiya to‘g‘ri chizig’i tenglamasini tuzing.

X_i	2	4	6	8	10
Y_i	3,5	6	8	6	7,5

Korelyatsion jadvalda keltirilgan ma’lumotlar bo‘yicha Y ning X ga nisbatan regressiya to‘g‘ri chizig’i tenglamasini tuzing.

3.

X_i	5	6	8	9	10
Y_i	2	6	4	3	2

4.

X_i	1	3	5	7	9
Y_i	2	5	3	8	4

5.

X_i	2	4	6	8	10
Y_i	3	5	4	2	6

.Quyidagi korrelyatsion jadvallarda keltirilgan ma’lumotlar bo‘yicha Y ning X ga va X ning Y ga nisbatan regressiya to‘g’ri chiziqlarining tanlanma tenglamalarini toping.

6.

Y \ X	5	10	15	20	25	30	35	40	n_y
100	2	1	-	-	-	-	-	-	3
120	3	4	3	-	-	-	-	-	10
140	-	-	5	10	8	-	-	-	23
160	-	-	-	1	-	6	1	1	9
180	-	-	-	-	-	-	4	1	5
n_x	5	5	8	11	8	6	5	2	n=50

7.

X / Y	18	23	28	33	38	43	48	n_y
125	-	1	-	-	-	-	-	1
150	1	2	5	-	-	-	-	8
175	-	3	2	12	-	-	-	17
200	-	-	1	8	7		-	16
225	-	-	-	-	3	3	-	6
250	-	-	-	-	-	1	1	2
n_x	1	6	8	20	10	4	1	n=50

8.Quyida berilgan korrelyatsion jadvallardagi ma'lumotlar bo'yicha $\overline{y_x} = Ax^2 + Bx + C$ regressiya tanlanma tenglamasini va η_{yx} tanlanma korrelyatsion nisbatni toping.

y / x	0	4	6	n_y
-1		2	3	5
1	4	1		5
n_x	4	3	3	$n = 10$

9.Quyidagi korelyatsion jadval bo'yicha Y ning X ga nisbatan egri chiziqli regressiya tenglamasini tuzing.

y / x	10	20	30	40	50	60	n_y
15	5	7	-	-	-	-	12
25	-	20	23	-	-	-	43
35	-	-	30	47	2	-	79
45	-	-	10	11	20	6	47
55	-	-	-	9	7	3	19
n_x	5	27	63	67	29	9	n=200

ILOVALAR

1-ilova

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$ funksiya qiymatlarining jadvali

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

2-ilova

$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ funksiya qiymatlarining jadvali

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,51	0,1950	1,02	0,3461	1,53	0,4370
0,01	0,0040	0,52	0,1985	1,03	0,3485	1,54	0,4382
0,02	0,0080	0,53	0,2019	1,04	0,3508	1,55	0,4394
0,03	0,0120	0,54	0,2054	1,05	0,3531	1,56	0,4406
0,04	0,0160	0,55	0,2088	1,06	0,3554	1,57	0,4418
0,05	0,0199	0,56	0,2123	1,07	0,3577	1,58	0,4429
0,06	0,0239	0,57	0,2157	1,08	0,3599	1,59	0,4441
0,07	0,0279	0,58	0,2190	1,09	0,3621	1,60	0,4452
0,08	0,0319	0,59	0,2224	1,10	0,3643	1,61	0,4463
0,09	0,0359	0,60	0,2257	1,11	0,3665	1,62	0,4474
0,10	0,0398	0,61	0,2291	1,12	0,3686	1,63	0,4484
0,11	0,0438	0,62	0,2324	1,13	0,3708	1,64	0,4495
0,12	0,0478	0,63	0,2357	1,14	0,3729	1,65	0,4505
0,13	0,0517	0,64	0,2389	1,15	0,3749	1,66	0,4515
0,14	0,0557	0,65	0,2422	1,16	0,3770	1,67	0,4525
0,15	0,0596	0,66	0,2454	1,17	0,3790	1,68	0,4535
0,16	0,0636	0,67	0,2486	1,18	0,3810	1,69	0,4545
0,17	0,0675	0,68	0,2517	1,19	0,3830	1,70	0,4554
0,18	0,0714	0,69	0,2549	1,20	0,3849	1,71	0,4564
0,19	0,0753	0,70	0,2580	1,21	0,3869	1,72	0,4573
0,20	0,0793	0,71	0,2611	1,22	0,3883	1,73	0,4582
0,21	0,0832	0,72	0,2642	1,23	0,3907	1,74	0,4591
0,22	0,0871	0,73	0,2673	1,24	0,3925	1,75	0,4599
0,23	0,0910	0,74	0,2703	1,25	0,3944	1,76	0,4608
0,24	0,0948	0,75	0,2734	1,26	0,3962	1,77	0,4616
0,25	0,0987	0,76	0,2764	1,27	0,3980	1,78	0,4625
0,26	0,1026	0,77	0,2794	1,28	0,3997	1,79	0,4633
0,27	0,1064	0,78	0,2823	1,29	0,4015	1,80	0,4641
0,28	0,1103	0,79	0,2852	1,30	0,4032	1,81	0,4649
0,29	0,1141	0,80	0,2881	1,31	0,4049	1,82	0,4656
0,30	0,1179	0,81	0,2910	1,32	0,4066	1,83	0,4664
0,31	0,1217	0,82	0,2939	1,33	0,4082	1,84	0,4671
0,32	0,1255	0,83	0,2967	1,34	0,4099	1,85	0,4678
0,33	0,1293	0,84	0,2995	1,35	0,4115	1,86	0,4686
0,34	0,1331	0,85	0,3023	1,36	0,4131	1,87	0,4693
0,35	0,1368	0,86	0,3051	1,37	0,4147	1,88	0,4699
0,36	0,1406	0,87	0,3078	1,38	0,4162	1,89	0,4706
0,37	0,1443	0,88	0,3106	1,39	0,4177	1,90	0,4713
0,38	0,1480	0,89	0,3133	1,40	0,4192	1,91	0,4719
0,39	0,1517	0,90	0,3159	1,41	0,4207	1,92	0,4726
0,40	0,1554	0,91	0,3186	1,42	0,4222	1,93	0,4732
0,41	0,1591	0,92	0,3212	1,43	0,4236	1,94	0,4738
0,42	0,1628	0,93	0,3238	1,44	0,4251	1,95	0,4744
0,43	0,1664	0,94	0,3264	1,45	0,4265	1,96	0,4750
0,44	0,1700	0,95	0,3289	1,46	0,4279	1,97	0,4756
0,45	0,1736	0,96	0,3315	1,47	0,4292	1,98	0,4761
0,46	0,1772	0,97	0,3340	1,48	0,4306	1,99	0,4767
0,47	0,1808	0,98	0,3365	1,49	0,4319	2,00	0,4772
0,48	0,1844	0,99	0,3389	1,50	0,4332	2,02	0,4783
0,49	0,1879	1,00	0,3413	1,51	0,4345	2,04	0,4793
0,50	0,1915	1,01	0,3438	1,52	0,4357	2,06	0,4803

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
2,08	0,4812	2,36	0,4909	2,64	0,4959	2,92	0,4982
2,10	0,4821	2,38	0,4913	2,66	0,4961	2,94	0,4984
2,12	0,4830	2,40	0,4918	2,68	0,4963	2,96	0,4985
2,14	0,4838	2,42	0,4922	2,70	0,4965	2,98	0,4986
2,16	0,4846	2,44	0,4927	2,72	0,4967	3,00	0,49865
2,18	0,4854	2,46	0,4931	2,74	0,4969	3,20	0,49931
2,20	0,4861	2,48	0,4934	2,76	0,4971	3,40	0,49966
2,22	0,4868	2,50	0,4938	2,78	0,4973	3,60	0,499841
2,24	0,4875	2,52	0,4941	2,80	0,4974	3,80	0,499928
2,26	0,4881	2,54	0,4945	2,82	0,4976	4,00	0,499968
2,28	0,4887	2,56	0,4948	2,84	0,4977	4,50	0,499997
2,30	0,4893	2,58	0,4951	2,86	0,4979	5,00	0,499997
2,32	0,4898	2,60	0,4953	2,88	0,4980		
2,34	0,4904	2,62	0,4956	2,90	0,4981		

3-ilova

$t_\gamma = t(\gamma, n)$ ning qiymatlari jadvali

γ / n	0,95	0,99	0,999	γ / n	0,95	0,99	0,999
5	2.78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2.797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	1,92				

4-ilova

$q = q(\gamma, n)$ ning qiymatlari jadvali

γ / n	0,95	0,99	0,999	γ / n	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,40	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0.211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

5-ilova

χ^2 taqsimotning kritik nuqtalari

K Ozodlik darajasi soni	Qiymatdorlik darajasi					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32.0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,55	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Abdushukurov A.A., Zuparov T.M. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, T.2015y.

2.Боровков А.А. Математическая статистика, Наука 1984 г.

3.Боровков А.А. «Теория вероятностей», Наука 1986 г.

4.Гмурман В.Е. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика,Ўқитувчи, 1977 й.

5.Гмурман В.Е. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистикадан масалалар ечишга доир қўлланма, Ўқитувчи, 1980 й.

6. Гнеденко Б.В., Хинчин А.Й. Элементарное введение в теорию вероятностей, Наука 1982 г.

7.Гутер Р.С., Овчинников Б.В. Эҳтимоллар назарияси асослари, Ўқитувчи 1978 й.

8.Ивченко Г.И. др. Сборник задач по математической статистики, “Высшая школа” 1989.

9. Карасаев А.И. Теория вероятностей и математическая статистика, М.19704г.

10.Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика, М.2004г.

11. Rasulov A.S. va boshq. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, T.2006y.

12.Formanov Sh.Q. Ehtimolliklar nazariyasi, T.2014y.

MUNDARIJA