Уральский
федеральный
университет
имени первого Президента
России Б.Н.Ельцина
Институт естественных наук
и математики

Ю. А. МЕЛЕНЦОВА

ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Курс лекций

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ПЕРВОГО ПРЕЗИДЕНТА РОССИИ Б. Н. ЕЛЬЦИНА

Ю. А. Меленцова

ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Курс лекций

Рекомендовано методическим советом УрФУ
в качестве учебно-методического пособия для студентов,
обучающихся по программе бакалавриата по направлению подготовки
41.03.05 «Международные отношения»

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2017

УДК 51(07)
М473

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра прикладной математики и технической графики
Уральской государственной архитектурно-художественной академии
(заведующий кафедрой доктор физико-математических наук,
профессор С. С. Титов);

О. О. Коврижных, кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник (Институт математики и механики
им. Н. Н. Красовского УрО РАН)

Меленцова, Ю. А.

М473 Основы высшей математики : курс лекций : [учеб.-метод. пособие] / Ю. А. Меленцова ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2017. — 88 с.

ISBN 978-5-7996-2017-2

Учебно-методическое пособие знакомит студентов с алгеброй матриц, элементами линейной алгебры, векторной алгебры, с геометрией на плоскости. Рассмотрены такие важные понятия математического анализа, как функция, последовательность, предел, производная, неопределенный и определенный интеграл. Показаны решения конкретных задач, представлены примеры, иллюстрирующие применение математики в жизни.

Для студентов гуманитарных направлений.

УДК 51(07)

ISBN 978-5-7996-2017-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Появление данного учебно-методического пособия связано с тем, что на изучение курса «Основы высшей математики» программой, по которой обучаются студенты направления «Международные отношения», отводится всего 72 часа: 18 лекционных часов, 18 часов практических занятий и 36 для самостоятельной работы. За 8 лекций (больше за семестр прочитать не удается) можно дать только основные понятия и определения по наиболее важным и в то же время доступным разделам математики. Цель методического пособия — помочь студентам овладеть этим материалом.

Методическое пособие в форме лекций знакомит студентов с алгеброй матриц, элементами линейной алгебры, векторной алгебры, с геометрией на плоскости, с такими важными понятиями математического анализа, как функция, последовательность, предел, производная, неопределенный и определенный интеграл.

Несмотря на обилие литературы (см., например, [1–6]), студентам воспользоваться ей трудно в связи с недостатком времени, отпущенного на изучение предмета, и большим объемом излагаемого в учебниках материала. Пособие поможет студентам легко и быстро найти изучаемые понятия и определения.

В работе приводятся примеры, объясняющие появление и использование тех или иных математических понятий. Дается наглядное толкование математических результатов. Методическое пособие содержит много чертежей и рисунков, которые делают изложение более доступным и позволяют студенту понять сущность изучаемых математических объектов. Решено много примеров.

В первых четырех лекциях примеры нумеруются двумя числами, разделенными точкой. Первое число — номер лекции, второе — порядковый номер примера в лекции. В последних лекциях примеры не нумеруются.

Такое различие в оформлении связано с тем, что в первых четырех лекциях на изложение четырех разделов математики отводится слишком мало времени. Достаточно знать рассмотренные в них понятия, определения и формулы, чтобы решить предлагаемые примеры, которые служат иллюстрацией этих определений и формул.

Четыре последние лекции посвящены знакомству с математическим анализом. При решении предложенных в них примеров нужно не только владеть новым понятием, свойствами изучаемого объекта, но и определенными методиками решения. Приводимые в этих лекциях примеры предназначены для обучения этим методикам и группируются по темам.

Большое количество разобранных примеров поможет студенту выработать навыки самостоятельного решения задач и успешно подготовиться к тестированию.

Автор благодарен Ольге Олеговне Коврижных за внимательное отношение и полезные замечания, которые позволили улучшить качество пособия, а также Леониду Сергеевичу Волканину, способствовавшему налаживанию контактов с кафедрой прикладной математики и технической графики Уральской государственной архитектурно-художественной академии, которая отрецензировала пособие, заведующему этой кафедрой доктору физико-математических наук, профессору Сергею Сергеевичу Титову и сотрудникам, обсудившим работу на заседании кафедры.

Лекция 1
АЛГЕБРА МАТРИЦ

Основные определения

Определение. Матрица — это таблица, состоящая из n строк и k столбцов.

Матрицы обозначаются большими буквами латинского алфавита. Элементы матрицы обозначаются соответствующими малыми буквами с индексами. Первый индекс указывает номер строки, второй номер столбца. Например, a_{23} — элемент матрицы A, стоящий во второй строке и третьем столбце. Все элементы матрицы заключаются в круглые скобки; n и k называются размерами матрицы.

$$A \equiv A_{n\times k} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Пример 1.1. Объем продаж.

Владелец двух торговых точек, продающих крупы, решил выяснить, каков в них объем продаж риса, пшена и гречи. Информацию об этом можно оформить в виде таблицы:

	рис	пшено	греча
1-я торговая точка	50	100	70
2-я торговая точка	45	60	65

Таким образом, получилась матрица

$$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 50 & 100 & 70 \\ 45 & 60 & 65 \end{pmatrix}$$

и

$$a_{11}=50,\ a_{22}=60,\ a_{13}=70,\ 65=a_{23},\ 100=a_{12}.$$

Через a_{ij} обозначают элемент матрицы A, стоящий в i-й строке и j-м столбце.

Определение. Квадратная матрица — это матрица, у которой число строк равно числу столбцов.

Пример 1.2

$$B_{2\times 2}=\begin{pmatrix}50 & 100\\ 45 & 60\end{pmatrix},\quad C_{3\times 3}=\begin{pmatrix}50 & 100 & 70\\ 45 & 60 & 65\\ 1 & -3 & -7\end{pmatrix}.$$

Обычно при указании размерности квадратной матрицы пишут только один индекс, т. е.

$$B_{2\times 2}=B_2,\quad C_{3\times 3}=C_3.$$

Определение. Элементы квадратной матрицы, имеющие одинаковые индексы $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$, называются диагональными элементами. Они образуют главную диагональ матрицы.

Определение. Диагональной матрицей называется такая квадратная матрица, у которой все недиагональные элементы равны нулю.

Пример 1.3

$$D_2=\begin{pmatrix}50 & 0\\ 0 & 60\end{pmatrix},\quad F_3=\begin{pmatrix}50 & 0 & 0\\ 0 & 60 & 0\\ 0 & 0 & -7\end{pmatrix}.$$

Определение. Единичной матрицей называется такая диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны единице.

Пример 1.4

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определение. Следом матрицы называется сумма всех диагональных элементов:

$$S = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}.$$

Пример 1.5. След матриц B и D равен $S = 50 + 60 = 110$, след матриц C и F равен $S = 50 + 60 - 7 = 103$.

Определение. Матрица A^T называется транспонированной к A, если каждая строка матрицы A^T получается из соответствующего столбца матрицы A.

$$A_{n\times k} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nk} \end{pmatrix}.$$

$$A^T_{k\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \ldots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \ldots & a_{n3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1k} & a_{2k} & a_{3k} & \ldots & a_{nk} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что число строк матрицы A^T равно числу столбцов матрицы A, число столбцов матрицы A^T равно числу строк матрицы A.

Пример 1.6. Найти матрицу A^T, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 6 & -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Получим

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ -5 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Определение. Матрица, состоящая из одного столбца, называется вектор-столбец:

$$\overline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Определение. Матрица, состоящая из одной строки, называется вектор-строка:

$$\overline{b} = \left(b_1 \ldots b_k\right).$$

Операции над матрицами

Рассмотрим следующие задачи.

Задача 1. Пусть

$$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 50 & 100 & 70 \\ 45 & 60 & 65 \end{pmatrix} —$$

объем продаж за первые две недели января,

$$B_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 40 & 90 & 70 \\ 45 & 80 & 55 \end{pmatrix} —$$

объем продаж за последние две недели января.

Требуется найти $C_{2\times 3}$ — объем продаж за январь.

Очевидно, для решения задачи нужно сложить элементы матриц A и B, стоящие на одинаковых местах. Получим

$$C_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 50+40 & 100+90 & 70+70 \\ 45+45 & 60+80 & 65+55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 & 190 & 140 \\ 90 & 140 & 120 \end{pmatrix}.$$

Эта операция называется сложением матриц.

1. Сложение матриц.

Пусть

$$A_{n\times k} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix}, \; B_{n\times k} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix}.$$

Матрица $C_{n\times k}$ называется суммой этих матриц, т. е. $C = A + B$, если

$$C_{n\times k} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1k}+b_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}+b_{n1} & \dots & a_{nk}+b_{nk} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что складывать можно только матрицы одинаковой размерности.

Аналогично определяется разность матриц A и B.

$$D = A - B = \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & \dots & a_{1k}-b_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}-b_{n1} & \dots & a_{nk}-b_{nk} \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Пусть

$$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 50 & 30 & 70 \\ 45 & 30 & 65 \end{pmatrix} \text{—}$$

цены на крупы в двух торговых точках в январе. В феврале все цены увеличились вдвое. Найти матрицу цен в феврале.

Ясно, что каждый элемент матрицы A нужно умножить на 2. Получим

$$F = \begin{pmatrix} 100 & 60 & 140 \\ 90 & 60 & 130 \end{pmatrix}.$$

Операция называется умножением матрицы на число.

2. Умножение матрицы на число.

Пусть

$$A_{n\times k} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix}.$$

Матрица $F_{n\times k}$ называется произведением матрицы A на число q, т. е. $F = qA$, если

$$F_{n\times k} = \begin{pmatrix} qa_{11} & \dots & qa_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ qa_{n1} & \dots & qa_{nk} \end{pmatrix}.$$

Пример 1.7

Найти $C = -2A - 3B^T + 4E$, если

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix},$$

а E — единичная матрица.

Решение

$$-2A = \begin{pmatrix} 2 & -12 \\ -8 & 12 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -4 \end{pmatrix},$$

$$3B^T=\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ -15 & -12 \end{pmatrix}, \quad 4E=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$C=\begin{pmatrix} 2-9+4 & -12-6 \\ -8+15 & 12+12+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -18 \\ 7 & 28 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Пусть

$$A_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 50 & 30 & 55 \\ 42 & 30 & 65 \end{pmatrix} \text{ —}$$

цены на крупы рис, пшено и гречу в двух магазинах. Две старушки решают, могут ли они пойти в магазин вместе, если первой нужно купить: риса — 1 кг, пшена — 0,5 кг, гречи — 0,5 кг, а второй: риса — 0,5 кг, пшена — 2 кг, гречи — 1 кг. При этом каждая выбирает тот магазин, где нужно потратить меньшую сумму.

Решение. Запишем информацию о покупках в таблицу:

	1-я старушка	2-я старушка
рис	1 кг	0,5 кг
пшено	0,5 кг	2 кг
греча	0,5 кг	1 кг

По этой таблице составим матрицу:

$$B_{3\times 2}=\begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 2 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, если мы умножим первую строчку матрицы A на первый столбец матрицы B, то узнаем, сколько денег первой старушке придется заплатить за покупку в первом магазине:

$$50\cdot 1+30\cdot 0,5+55\cdot 0,5=92,5.$$

Первой старушке придется заплатить за покупку во втором магазине:

$$42 \cdot 1 + 30 \cdot 0{,}5 + 65 \cdot 0{,}5 = 89{,}5.$$

Второй старушке придется заплатить за покупку в первом магазине:

$$50 \cdot 0{,}5 + 30 \cdot 2 + 55 \cdot 1 = 140.$$

Второй старушке придется заплатить за покупку во втором магазине:

$$42 \cdot 0{,}5 + 30 \cdot 2 + 65 \cdot 1 = 146.$$

Получилась новая таблица:

	1-я старушка	2-я старушка
1-й магазин	92,5	140
2-й магазин	89,5	146

и новая матрица:

$$C_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 92{,}5 & 140 \\ 89{,}5 & 146 \end{pmatrix}.$$

Она является произведением матриц A и B, т. е.

$$C_{2\times 2} = A_{2\times 3} B_{3\times 2}.$$

Мы видим, что старушки не смогут пойти вместе, так как первой старушке выгоднее сделать покупки во втором магазине, а второй старушке — в первом.

3. Умножение матриц.

Матрица $C_{n\times m}$ называется произведением матрицы $A_{n\times k}$ на матрицу $B_{k\times m}$, т. е. $C = AB$, если элемент c_{ij} матрицы $C_{n\times m}$ равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы $A_{n\times k}$ на соответствующие элементы j-го столбца матрицы $B_{k\times m}$, т. е.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj}, \; i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Заметим, что не любые матрицы A и B можно перемножать. Число столбцов матрицы A должно равняться числу строк матрицы B. Из того, что произведение AB существует, не следует, что существует BA. Даже если BA существует, AB может быть не равно BA.

Пример 1.8

Найти $C = AB$, если

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} -1\cdot 3 + 6\cdot 2 & -1\cdot(-5) + 6\cdot(-4) \\ 4\cdot 3 + (-6)\cdot 2 & 4\cdot(-5) + (-6)\cdot(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -19 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Вопросы. Можно ли перемножить A на B, B на A, A на C, C на A, B на C, C на B, если

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -4 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -4 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Какова размерность произведений?

Лекция 2

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Определители

Определение. Определитель — это число, которое ставится в соответствие квадратной матрице A по определенному правилу.

Итак, задана матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Обозначение определителя:

$$\det A \equiv |A| \equiv \Delta \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определители второго порядка

Определитель второго порядка вычисляется по правилу:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Вначале перемножаются элементы, стоящие на главной диагонали — a_{11} и a_{22}, затем на побочной диагонали — a_{21} и a_{12}. И, наконец, из первого слагаемого вычитается второе.

Пример 2.1

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 3(-4) - 2(-5) = -12 + 10 = -2.$$

Пример 2.2. Найти значения параметра a, при которых заданный определитель

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ -4 & -5+a \end{vmatrix}$$

равен −2.

Вычислим определитель:

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ -4 & -5+a \end{vmatrix} = a\left(-5+a\right) - (-4)1 = a^2 - 5a + 4.$$

По условию

$$a^2 - 5a + 4 = -2.$$

Следовательно,

$$a^2 - 5a + 6 = 0, \quad a = 2, a = 3.$$

При a = 2 и a = 3 определитель равен −2.

Определители третьего порядка

Выпишем определитель третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Вычислим его по правилу треугольника.

Правило треугольника вначале запишем схематично:

$$\begin{vmatrix} \Diamond & \Diamond & \Diamond \\ \Diamond & \Diamond & \Diamond \\ \Diamond & \Diamond & \Diamond \end{vmatrix} = \times\times\times + \bullet\bullet\bullet + \oplus\oplus\oplus - (*** + \nabla\nabla\nabla + \otimes\otimes\otimes).$$

Здесь $\times\times\times$ — произведение элементов, стоящих на главной диагонали, $\bullet\bullet\bullet$ — произведение трех элементов, два из которых находятся над главной диагональю, а третий в нижнем левом углу, $\oplus\oplus\oplus$ — произведение трех элементов, два из которых находятся под главной диагональю, а третий в верхнем правом углу. Остальные произведения входят в формулу со знаком минус и связаны с побочной диагональю.

$$\begin{vmatrix} \times & \bullet & \oplus \\ \oplus & \times & \bullet \\ \bullet & \oplus & \times \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \otimes & \nabla & * \\ \nabla & * & \otimes \\ * & \otimes & \nabla \end{vmatrix}.$$

Теперь запишем правило треугольника:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$-\left(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{32}a_{23}a_{11}\right).$$

Пример 2.3

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 6 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1(-4)(-1) + (-2)6\cdot 5 + 0 - \left(3(-4)5 + 0 + 2\cdot 6\cdot 1\right) =$$

$$= 4 - 60 + 0 - \left(-60 + 0 + 12\right) = -8.$$

Минор M_{ij} элемента a_{ij}

Определение. Минором M_{ij} называется определитель, полученный из определителя матрицы A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Пример 2.4. Рассмотрим

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 6 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Чтобы найти M_{11}, вычеркнем первую строку и первый столбец.

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-4)(-1) - 2 \cdot 6 = -8.$$

Чтобы найти M_{23}, вычеркнем вторую строку и третий столбец.

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 12.$$

Пример 2.5. Для определителя

$$\begin{vmatrix} -4 & 6 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \; M_{12} = -2, \; M_{22} = -4.$$

Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij}

Определение. Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется минор M_{ij}, взятый со знаком плюс, если сумма $i + j$ — число четное, и со знаком минус, если $i + j$ — число нечетное, т. е.

$$A_{ij} = \begin{cases} M_{ij}, \text{ если } i + j \text{ четное}, \\ -M_{ij}, \text{ если } i + j \text{ нечетное}. \end{cases}$$

Пример 2.6. Рассмотрим

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 6 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Алгебраическое дополнение A_{11} элемента a_{11} равно M_{11} и равно −8.

$$A_{23} = -M_{23} = -12.$$

Пример 2.7. Рассмотрим

$$\begin{vmatrix} -4 & 6 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$A_{12} = 2,\ A_{22} = -4,\ A_{21} = -6,\ A_{11} = -1.$$

Вычисление определителей разложением по строке (столбцу)

Определение. Определитель Δ равен сумме произведений элементов i-й строки на их алгебраические дополнения:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

или определитель Δ равен сумме произведений элементов j-го столбца на их алгебраические дополнения:

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}.$$

Запишем вычисление определителя третьего порядка разложением по первой строке.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Запишем вычисление определителя третьего порядка разложением по второму столбцу.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}.$$

Пример 2.8

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 6 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1A_{11} - 2A_{12} + 3A_{13} = \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (4-12) + 2(0-30) + 3(0+20) = -8.$$

Вычислим этот определитель разложением по первому столбцу.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 6 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1A_{11} + 0 + 5A_{31} =$$

$$= \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = -8 + (-12+12) = -8.$$

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Задача. Выборы декана.

Пусть на факультете три кафедры. На первой работает 20 человек, на второй — 35, на третьей — 18. Голосуют все. Известно, что за предложенного кандидата на второй кафедре проголосовало в 2 раза больше, чем на первой, воздержалось — в 2 раза меньше, «против» проголосовало в 3 раза больше. На третьей кафедре «за» проголосовало столько же человек, сколько на первой, воздержавшихся нет, «против» проголосовало в 2 раза больше, чем на первой. Кандидат выбран деканом, если получил больше 50 % голосов. Будет ли кандидат выбран деканом?

	за	воздержалось	против
2-я кафедра	в 2 р. больше	в 2 р. меньше	в 3 р. больше
3-я кафедра	столько же	нет	в 2 р. больше

Пусть на первой кафедре «за», воздержалось, «против» соответственно x, y, z человек. Тогда получится три соотношения, которые образуют систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x + y + z = 20, \\ 2x + 0{,}5y + 3z = 35, \\ x + 2z = 18. \end{cases}$$

Системы линейных алгебраических уравнений второго порядка

Система линейных алгебраических уравнений второго порядка имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \qquad (2.1)$$

где x_1, x_2 — искомые неизвестные, которые называются решением системы; a_{11}, …, a_{22} — коэффициенты системы; b_1, b_2 — правые части системы или свободные члены.

Запись системы в матричной форме

В матричной форме система линейных алгебраических уравнений записывается так:

$$A\overline{x} = \overline{b}, \text{ где}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \ \overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \ \overline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.9

$$\begin{cases} x - 3y = 11, \\ -x + 2y = -8. \end{cases}$$

Матричная форма записи системы:

$$A\overline{x} = \overline{b}, \text{ где}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \ \overline{b} = \begin{pmatrix} 11 \\ -8 \end{pmatrix}, \ \overline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Решение системы методом Крамера

Домножим первое уравнение системы на a_{22}, второе уравнение — на a_{12}:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \,|\cdot a_{22}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \,|\cdot a_{12}. \end{cases}$$

Получим

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22}, \\ a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_2a_{12}. \end{cases}$$

Вычтем из первого второе:

$$\left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right)x_1 = \left(b_1 a_{22} - b_2 a_{12}\right). \tag{2.2}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Обозначим

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - b_2 a_{21}.$$

Тогда (2.2) запишется в виде $\Delta \cdot x_1 = \Delta_1$.

Аналогично получим, что $\Delta \cdot x_2 = \Delta_2$, где

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Правило

1. Пусть $\Delta \neq 0$, тогда система (2.1) имеет единственное решение:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

Формулы $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$ называются ф о р м у л а м и К р а м е р а.

2. Пусть $\Delta = 0$ и $\Delta_1 = 0$, тогда система (2.1) имеет бесконечно много решений.

3. Пусть $\Delta = 0$, а $\Delta_1 \neq 0$, тогда система (2.1) не имеет решений.

Пример 2.10

$$\begin{cases} x-3y=11, \\ -x+2y=-8. \end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=-1,\ \Delta_1=\begin{vmatrix} 11 & -3 \\ -8 & 2 \end{vmatrix}=22-24=-2,$$

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=2,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 11 \\ -1 & -8 \end{vmatrix}=-8+11=3,\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=-3.$$

Решение системы:

$$x_1=2,\ x_2=-3.$$

Пример 2.11

$$\begin{cases} 2x-4y=16, \\ -x+2y=-8. \end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=0,\ \Delta_1=\begin{vmatrix} 16 & -4 \\ -8 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

Система имеет бесконечно много решений.

Пример 2.12

$$\begin{cases} 2x-4y=6, \\ -x+2y=-8. \end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=0,\ \Delta_1=\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ -8 & 2 \end{vmatrix}=-20.$$

Система не имеет решений.

Системы линейных алгебраических уравнений третьего порядка

Система линейных алгебраических уравнений третьего порядка имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{2.3}$$

Пусть

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Пусть $\Delta \neq 0$, тогда система (2.3) имеет единственное решение:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Полученные формулы называются формулами Крамера.

Пример 2.13

Решим задачу о выборе декана:

$$\begin{cases} x + y + z = 20, \\ 2x + 0,5y + 3z = 35, \\ x + 2z = 18. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0,5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 + 3 - (0,5 + 4) = -0,5,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 20 & 1 & 1 \\ 35 & 0,5 & 3 \\ 18 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 18\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0,5 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 20 & 1 \\ 35 & 0,5 \end{vmatrix} = 45 - 50 = -5, \ \ x = 10.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 20 & 1 \\ 2 & 35 & 3 \\ 1 & 18 & 2 \end{vmatrix} = -20\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 35\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 18\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -20 + 35 - 18 = -3, \ \ y = 6.$$

Нетрудно найти, что $z = 4$.

Ответ: «за» проголосовало 40 человек из 73, т. е. кандидат будет избран деканом.

Лекция 3
ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

С векторами вы встречались в курсе школьной физики, рассматривали вектор силы, вектор скорости.

Определение. Вектор — это направленный отрезок.

Обозначается вектор либо одной малой буквой латинского алфавита со стрелкой или чертой сверху — $\vec{a}$, $\bar{a}$, либо двумя большими буквами $\overrightarrow{AB}$, $\overline{AB}$, первая из которых соответствует началу вектора, вторая — концу.

Определение. Длина вектора — это длина направленного отрезка. Она обозначается $\left|\bar{a}\right|$, $\left|\overline{AB}\right|$.

Определение. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются равными, если они расположены на одной прямой или на параллельных прямых, одинаково направлены и имеют одинаковую длину.

Таким образом, появляется понятие «свободный вектор».

Операции над векторами

1. Сложение векторов.

Определение 1. Суммой векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}\left(\bar{c}=\bar{a}+\bar{b}\right)$, направленный по диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, выходящих из одной точки A, у которого начало совпадает с точкой A (рис. 1).

Определение 2. Пусть начало вектора $\bar{b}$ совпадает с концом вектора $\bar{a}$. Суммой векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, начало которого совпадает с началом вектора $\bar{a}$, а конец совпадает с концом вектора $\bar{b}$ (рис. 2).

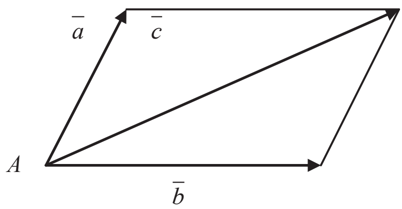


Рис. 1. Сложение векторов (1-й способ)

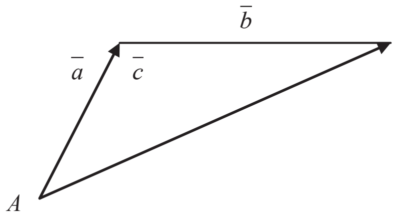


Рис. 2. Сложение векторов (2-й способ)

2. Вычитание векторов.

Разностью векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{d}$ $\left(\overline{d} = \overline{a} - \overline{b}\right)$, направленный по другой диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, выходящих из одной точки, начало которого совпадает с концом вектора $\overline{b}$, а конец совпадает с концом вектора $\overline{a}$ (рис. 3).

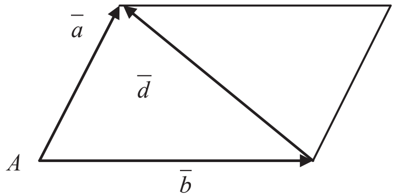


Рис. 3. Вычитание векторов

3. Умножение вектора на скаляр.

Произведением вектора $\overline{a}$ на число λ называется вектор $\overline{g}$ $\left(\overline{g} = \lambda\overline{a}\right)$, который расположен на прямой, совпадающей с вектором $\overline{a}$ либо параллельной вектору $\overline{a}$, длина которого равна $|\lambda||\overline{a}|$ и направление совпадает с направлением вектора $\overline{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно направлению вектора $\overline{a}$, если $\lambda < 0$ (рис. 4).

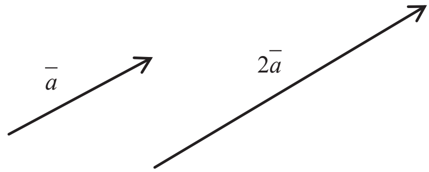


Рис. 4. Умножение вектора на скаляр

Векторы в прямоугольной системе координат

На оси *Ox* построим единичный вектор с началом в точке *O*, направление которого совпадает с направлением оси. Он называется ортом и обозначается $\bar{i}$. Аналогично на оси *Oy* построим орт $\bar{j}$. Если рассматривают не плоскость, а пространство, на оси *Oz* строят орт $\bar{k}$.

Вектор $\bar{a}$ расположим так, чтобы его начало совпадало с точкой *O*. Конец вектора $\bar{a}$ обозначим *M*. Координаты точки *M* (*x*, *y*) называют координатами вектора $\bar{a}$ и пишут $\bar{a}=(x,y)$. Очевидно, $\bar{a}=x\bar{i}+y\bar{j}$, *x* называется проекцией вектора $\bar{a}$ на ось *Ox*, *y* называется проекцией вектора $\bar{a}$ на ось *Oy*. Через α обозначим угол между вектором $\bar{a}$ и осью *Ox*, через β обозначим угол между вектором $\bar{a}$ и осью *Oy* (рис. 5); $\cos\alpha, \cos\beta$ называются направляющими косинусами вектора $\bar{a}$.

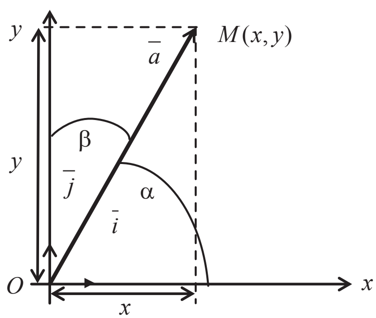


Рис. 5. Вектор в прямоугольной системе координат

Длина вектора $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$, направляющие косинусы:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\left|\overline{a}\right|}, \ \cos\beta = \frac{y}{\left|\overline{a}\right|}.$$

Пример 3.1. Задан вектор $\overline{a} = \left(\sqrt{3}, -1\right)$. Найти длину вектора $\overline{a}$ и направляющие косинусы.

$$\left|\overline{a}\right| = \sqrt{3+1} = 2, \ \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \ \cos\beta = -\frac{1}{2}.$$

Операции над векторами в координатной форме

Пусть

$$\overline{a} = \left(x_a, y_a\right), \ \overline{b} = \left(x_b, y_b\right).$$

Тогда вектор суммы $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$ имеет координаты

$$\left(x_a + x_b, \ y_a + y_b\right).$$

Вектор разности $\overline{d} = \overline{a} - \overline{b}$ имеет координаты

$$\left(x_a - x_b, \ y_a - y_b\right).$$

Вектор произведения $\overline{g} = \lambda\overline{a}$ имеет координаты

$$\left(\lambda x_a, \ \lambda y_a\right).$$

Условие параллельности двух векторов

Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ параллельны, то их координаты пропорциональны:

$$\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b}.$$

Пример 3.2. Заданы векторы $\overline{a}=\left(1,2\right)$, $\overline{b}=\left(-1,-5\right)$. Записать эти векторы через орты. Найти длины сторон и длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

$$\overline{a}=\overline{i}+2\overline{j},\ \overline{b}=-1\overline{i}-5\overline{j}.$$

$$\left|\overline{a}\right|=\sqrt{5},\ \left|\overline{b}\right|=\sqrt{26}.$$

$$\overline{c}=(0,-3),\ \overline{d}=(2,7),\ \left|\overline{c}\right|=3,\ \left|\overline{d}\right|=\sqrt{53}.$$

Координаты вектора через координаты конца и начала

Рассмотрим вектор $\overline{AB}$, $A\left(x_1,y_1\right)$, $B\left(x_2,y_2\right)$. Соединим точку A с точкой O. Получим вектор $\overline{OA}$. Соединим точку B с точкой O. Получим вектор $\overline{OB}$.

$$\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}.$$

$$\overline{OB}=\left(x_2,y_2\right),\ \overline{OA}=\left(x_1,y_1\right)\ \text{(рис. 6)}.$$

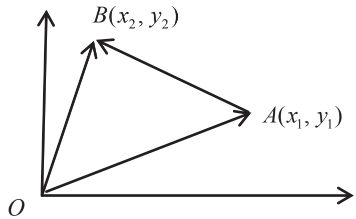


Рис. 6. Вектор $\overline{AB}$

Поэтому

$$\overline{AB}=\left(x_2-x_1,\ y_2-y_1\right).$$

Правило. Чтобы найти координаты вектора, нужно из координат конца вектора вычесть соответствующие координаты начала.

Расстояние между двумя точками

Найдем расстояние между A и B. Оно равно длине вектора $\overline{AB}$. Длина определяется по формуле

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}.$$

Координаты середины отрезка

Рассмотрим отрезок AB, $A\left(x_1, y_1\right)$, $B\left(x_2, y_2\right)$.

Пусть $C\left(x_c, y_c\right)$ — его середина (рис. 7).

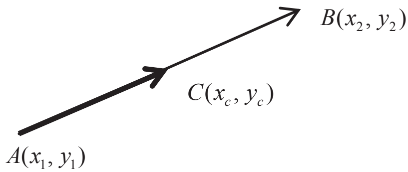


Рис. 7. Координаты середины отрезка

Вектор

$$\overline{AC} = \frac{1}{2}\overline{AB}, \ \overline{AB} = \left(x_2 - x_1, y_2 - y_1\right),$$

$$\frac{1}{2}\overline{AB} = \left(\frac{x_2 - x_1}{2}, \frac{y_2 - y_1}{2}\right), \ \overline{AC} = \left(x_c - x_1, y_c - y_1\right).$$

Отсюда

$$x_c - x_1 = \frac{1}{2}\left(x_2 - x_1\right) \quad \text{и} \quad y_c - y_1 = \frac{1}{2}\left(y_2 - y_1\right).$$

Теперь выразим x_c и y_c. Получим формулы для вычисления координат середины отрезка:

$$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_c = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Пример 3.3

Найти расстояние r между точками $A(1, 2)$ и $B(-2, 6)$ и координаты середины отрезка AB.

$$r = \sqrt{(1+2)^2 + (2-6)^2} = 5,$$

$$x_c = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2}, \quad y_c = \frac{2+6}{2} = 4.$$

Скалярное произведение двух векторов

Скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ обозначается $\left(\overline{a},\ \overline{b}\right)$.

Определение. Скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ — это число, равное произведению длины вектора $\overline{a}$ на длину вектора $\overline{b}$ и на косинус угла между векторами:

$$\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \left|\overline{a}\right| \left|\overline{b}\right| \cos\varphi. \tag{3.1}$$

Определение. Если скалярное произведение двух векторов равно 0, то векторы ортогональны (перпендикулярны).

Скалярное произведение двух векторов в координатной форме

Пусть

$$\overline{a} = \left(x_a, y_a\right),\ \overline{b} = \left(x_b, y_b\right).$$

Справедливо такое равенство:

$$\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = x_a x_b + y_a y_b. \tag{3.2}$$

Замечание. Отсюда условие ортогональности двух векторов запишется в виде

$$x_a x_b + y_a y_b = 0.$$

Угол между двумя векторами

Из формул (3.1), (3.2) получим

$$\cos\varphi = \frac{\left(\overline{a}, \overline{b}\right)}{\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|} = \frac{x_a x_b + y_a y_b}{\sqrt{x_a^{\,2} + y_a^{\,2}} \cdot \sqrt{x_b^{\,2} + y_b^{\,2}}}. \tag{3.3}$$

Пример 3.4. Заданы векторы

$$\overline{a} = (1, 2), \;\; \overline{b} = (-1, -5).$$

Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на этих векторах.

$\overline{c} = (0, -3)$, $\overline{d} = (2, 7)$ — векторы, идущие по диагоналям параллелограмма $\left(\overline{c}, \overline{d}\right) = 0 \cdot 2 + (-3)7 = -21$, $\left|\overline{c}\right| = 3$, $\left|\overline{d}\right| = \sqrt{53}$.

Теперь найдем косинус угла между диагоналями параллелограмма:

$$\cos\varphi = \frac{-21}{3\sqrt{53}} = -\frac{7}{\sqrt{53}}.$$

Замечание. До сих пор мы рассматривали векторы, лежащие на плоскости и имеющие две координаты. Но все записанные нами формулы справедливы и для пространственных векторов, имеющих три координаты.

Пусть

$$\overline{a}=\left(x_a, y_a, z_a\right),\ \overline{b}=\left(x_b, y_b, z_b\right).$$

Тогда, например, формула (3.3) запишется так:

$$\cos\varphi=\frac{\left(\overline{a},\overline{b}\right)}{\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|}=\frac{x_a x_b+y_a y_b+z_a z_b}{\sqrt{x_a{}^2+y_a{}^2+z_a{}^2}\cdot\sqrt{x_b{}^2+y_b{}^2+z_b{}^2}}.$$

Векторное произведение двух векторов

Пусть

$$\overline{a}=\left(x_a, y_a, z_a\right),\ \overline{b}=\left(x_b, y_b, z_b\right).$$

Определение. Векторное произведение двух векторов — это вектор $\overline{h}$, перпендикулярный вектору $\overline{a}$ и вектору $\overline{b}$, длина которого равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, выходящих из одной точки A, и такой, что

$$\overline{h}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ x_a & y_a & z_a\\ x_b & y_b & z_b\end{vmatrix}. \tag{3.4}$$

Из формулы (3.4) нетрудно найти координаты вектора $\overline{h}$.

Пример 3.5. Заданы векторы $\overline{a}=(1, 2, 0)$, $\overline{b}=(-1, -5, 0)$. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, выходящих из одной точки A.

Найдем векторное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ — вектор $\overline{h}$. По формуле (3.4)

$$\overline{h}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 1 & 2 & 0\\ -1 & -5 & 0\end{vmatrix}.$$

$$\overline{h} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} \overline{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \overline{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} \overline{k}.$$

Вычислив определители второго порядка, найдем, что

$$\overline{h} = -3\overline{k}, \ \left|\overline{h}\right| = 3.$$

Поэтому площадь параллелограмма равна 3.

ЛЕКЦИЯ 4
ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Уравнение $f(x, y) = 0$ задает кривую на плоскости xOy, т. е. геометрическое место точек на плоскости, координаты которых (x, y) удовлетворяют уравнению.

Прямая

Уравнение прямой, проходящей под заданным углом и отсекающей на оси ординат заданный отрезок

Угол α — это угол поворота оси абсцисс вокруг точки пересечения с прямой AM против часовой стрелки до совпадения с прямой AM. Пусть $0 < \alpha < 90°$.

Пусть прямая AM пересекает ось ординат в верхней полуплоскости и отсекает отрезок длины b. $M(x, y)$ — текущая точка на прямой (рис. 8).

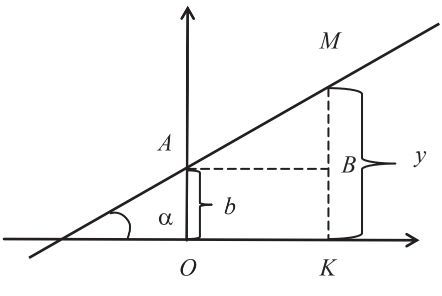


Рис. 8. Прямая, проходящая под углом α и отсекающая отрезок OA, равный b

В треугольнике ABM угол $\angle MAB$ равен α,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{MB}{AB} = \frac{y-b}{x}.$$

Отсюда $y-b = x\operatorname{tg}\alpha$. Обозначим $k = \operatorname{tg}\alpha$. Получим уравнение прямой:

$$y = kx + b. \tag{4.1}$$

Здесь k — тангенс угла наклона прямой, а b — вторая координата точки пересечения прямой с осью Oy.

При $b = 0$ прямая проходит через начало координат (рис. 9).

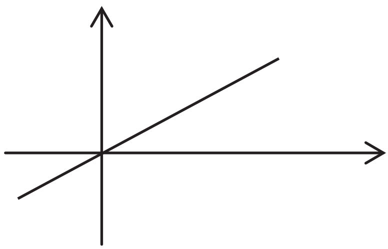


Рис. 9. Прямая $y = kx$, $k > 0$

При $b = 0$, $k > 0$ прямая лежит в первой и третьей четверти.

При $b = 0$, $k < 0$ прямая лежит во второй и четвертой четверти (рис. 10).

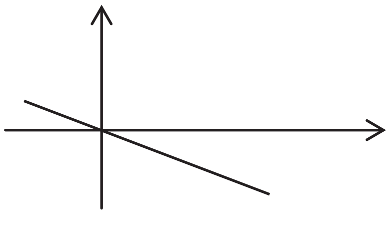


Рис. 10. Прямая $y = kx$, $k < 0$

При $k = 0$ прямая параллельна оси Ox.

При $k = 0$, $b = 0$ прямая имеет уравнение $y = 0$. Это ось Ox.

Пример 4.1. Определить, будут ли принадлежать прямой $y = 2x - 3$ точки $M_1(2, 1)$ и $M_2(-1, 5)$.

Подставим координаты точки M_1 в уравнение. Получим $1 = 4 - 3$, т. е. M_1 принадлежит прямой. Подставим координаты точки M_2 в уравнение. Получим $5 \neq -2 - 3$, т. е. M_2 не принадлежит прямой.

Пример 4.2. Написать уравнение прямой, проходящей под углом 45° и отсекающей на отрицательной полуоси ординат Oy отрезок длины 4.

Приведем таблицу значений тангенса.

α	0°	30°	45°	60°	120°	135°	150°
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

В нашем примере $k = \operatorname{tg} 45° = 1$, поэтому $y = x - 4$.

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку под заданным углом

Задана точка $M_0\left(x_0, y_0\right)$ и угол α.

Тогда $k = \operatorname{tg}\alpha$. В уравнении $y = kx + b$ коэффициент b не известен. Точка $M_0\left(x_0, y_0\right)$ принадлежит прямой. Поэтому $y_0 = kx_0 + b$. Получили два уравнения:

$$\begin{cases} y = kx + b, \\ y_0 = kx_0 + b. \end{cases}$$

Вычтем из первого второе. Получим

$$y - y_0 = k\left(x - x_0\right). \tag{4.2}$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки

Заданы точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, через которые проходит искомая прямая.

В уравнении $y = kx + b$ коэффициенты k и b не известны. Точка $M_1(x_1, y_1)$ принадлежит прямой. Поэтому, согласно (4.2), $y - y_1 = k\left(x - x_1\right)$. Точка $M_2(x_2, y_2)$ принадлежит этой прямой. Поэтому ее координаты удовлетворяют уравнению. Итак,

$$y_2 - y_1 = k\left(x_2 - x_1\right).$$

$$\begin{cases} y - y_1 = k\left(x - x_1\right), \\ y_2 - y_1 = k\left(x_2 - x_1\right). \end{cases}$$

Пусть $y_2 \neq y_1$ и $x_2 \neq x_1$. Тогда можно поделить верхнее уравнение на нижнее. Получим уравнение прямой, проходящей через точки M_1 и M_2.

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{4.3}$$

Поменяем местами левую и правую часть в формуле (4.3). Получим более удобную формулу:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{4.3$'$}$$

Если $y_2 = y_1$, а $x_2 \neq x_1$, то прямая M_1M_2 горизонтальна (рис. 11) и ее уравнение $y = y_1$.

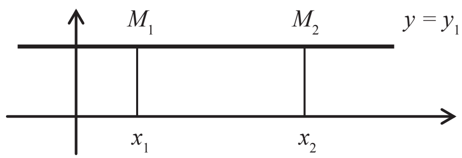


Рис. 11. Прямая M_1M_2, когда $y_2 = y_1$, а $x_2 \neq x_1$

Если $x_2 = x_1$, а $y_2 \neq y_1$, то прямая M_1M_2 вертикальна и ее уравнение $x = x_1$.

Пример 4.3. Заданы точки $M_1(1, 3)$ и $M_2(2, 1)$. Записать уравнение прямой. Найти k, b.

Подставим наши данные в формулу (4.3′):

$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-3}{1-3}, \text{ т. е.}$$

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{-2}, \quad y=-2x+5.$$

Уравнение прямой в отрезках на осях

Пусть известно, что прямая отсекает на оси Ox отрезок a, а на оси Oy отрезок b. Записать уравнение прямой.

Искомая прямая проходит через $M_1(a, 0)$ и $M_2(0, b)$. Из (4.3)

$$\frac{y-0}{b}=\frac{x-a}{0-a},$$

отсюда

$$\frac{y}{b}=-\frac{x}{a}+1$$

и, наконец,

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Пример 4.4. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(-1, 2)$ и отсекающей на осях отрезки равной длины.

Через точку M_1 проходят две прямые, отсекающие на осях отрезки равной длины. Обозначим за a длину отсекаемого отрезка. В случае 1, изображенном на рис. 12, получим уравнение

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1.$$

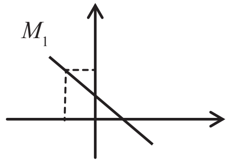


Рис. 12. Случай 1

Подставим в него координаты точки M_1.

$$\frac{-1}{a}+\frac{2}{a}=1,\ \ a=1.$$

Искомая прямая $y = -x + 1$.

В случае 2, изображенном на рис. 13, уравнение имеет вид

$$\frac{x}{-a}+\frac{y}{a}=1.$$

Подставив в него координаты точки M_1, получим

$$\frac{-1}{-a}+\frac{2}{a}=1,\ \ a=3.$$

Искомая прямая $y = x + 3$.

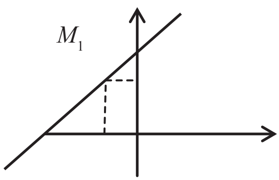


Рис. 13. Случай 2

Общее уравнение прямой

$$Ax+By+C=0,\ \text{где}\ A^2+B^2\neq 0. \qquad (4.4)$$

При $B \neq 0$ поделим (4.4) на B и получим уравнение (4.1), где

$$k = -\frac{A}{B}, \ b = -\frac{C}{B}.$$

При $B = 0$ получим уравнение вертикальной прямой

$$x = -\frac{C}{A}.$$

Угол между прямыми

Заданы прямые *1* и *2* (рис. 14). $\angle\gamma$ — это угол поворота первой прямой против часовой стрелки до совпадения со второй прямой.

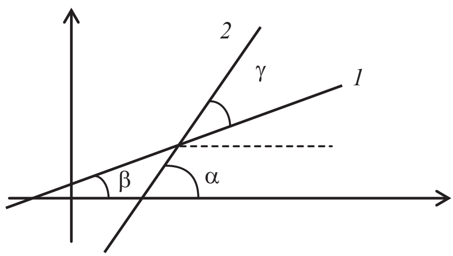


Рис. 14. Угол между прямыми

Очевидно, $\angle\gamma = \angle\alpha - \angle\beta$.

Известна такая тригонометрическая формула:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}. \qquad (4.5)$$

Пусть уравнение первой прямой $y = k_1 x + b_1$, уравнение второй прямой $y = k_2 x + b_2$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = k_2$, $\operatorname{tg}\beta = k_1$. Используем тригонометрическую формулу (4.5). Тангенс угла между прямыми отыскивается так:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Далее рассмотрим условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.

Условие параллельности двух прямых

Так как прямые параллельны, угол γ равен 0. Поэтому

$$k_2 = k_1.$$

Условие перпендикулярности двух прямых

Угол γ равен 90°.

$$\operatorname{ctg} 90^\circ = 0,\ \operatorname{ctg}\gamma = \frac{1}{\operatorname{tg}\gamma} = \frac{1 + k_1 k_2}{k_2 - k_1}.$$

Поэтому

$$1 + k_1 k_2 = 0 \quad \text{и} \quad k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Пример 4.5. Найти уравнение прямой, параллельной прямой $y = -2x + 1$ и проходящей через точку $M_1(-1, 5)$.

$$k_2 = -2,\ y = -2x + b_2.$$

Подставим координаты M_1 в уравнение.

$$5 = -2(-1) + b_2,\ b_2 = 3.$$

Искомое уравнение

$$y = -2x + 3.$$

Пример 4.6. Найти уравнение прямой, перпендикулярной прямой $y = -2x + 1$ и проходящей через точку $M_1(-4, 5)$.

$$k_2 = \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{2}x + b_2,\ 5 = \frac{1}{2}(-4) + b_2,\ b_2 = 7.$$

$$y = \frac{1}{2}x + 7.$$

Расстояние от точки до прямой

Дана точка $M_0\left(x_0,\, y_0\right)$ и прямая $Ax + By + C = 0$ (рис. 15).

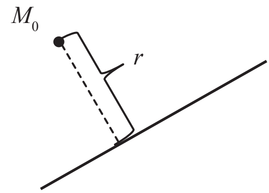


Рис. 15. Расстояние от точки до прямой

Расстояние r от точки M_0 до прямой $Ax + By + C = 0$ определяется по формуле

$$r = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Пример 4.7. Найти расстояние от точки $M_0(-2,\, 5)$ до прямой $y = 3x + 1$.

Чтобы записать уравнение прямой в общем виде (4.4), перенесем все слагаемые в правую сторону.

$$3x - y + 1 = 0, \;\; A = 3, B = -1, C = 1.$$

$$r = \frac{\left|3(-2) + (-1)5 + 1\right|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{\left|-10\right|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}.$$

Кривые второго порядка

Окружность

Окружность — это геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от заданной точки $M_0\left(x_0,\, y_0\right)$, называемой центром окружности, на расстояние r (рис. 16).

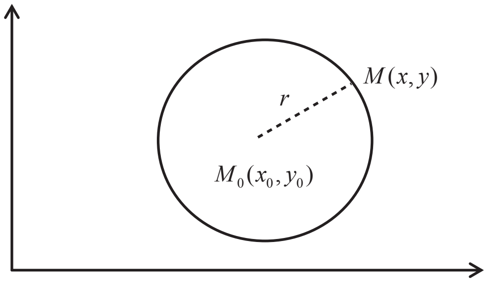


Рис. 16. Окружность

$M(x, y)$ — произвольная точка окружности. Расстояние от M до M_0 равно:

$$\sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}=r.$$

Отсюда, возведя обе части равенства в квадрат, получим уравнение окружности:

$$\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2=r^2.$$

Эллипс

Эллипс — это геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний которых до двух заданных, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$ (рис. 17).

F_1, F_2 — фокусы, OF_1 — фокусное расстояние, $OF_1 = c$, $MF_1 + MF_2 = 2a$, F_1, F_2 — расстояние между фокусами, $F_1F_2 = 2c$.

A, B, A', B' — вершины эллипса, OA — большая полуось эллипса, OB — малая полуось эллипса, $OA = a$, $OB = b$, где

$$b=\sqrt{a^2-c^2}.$$

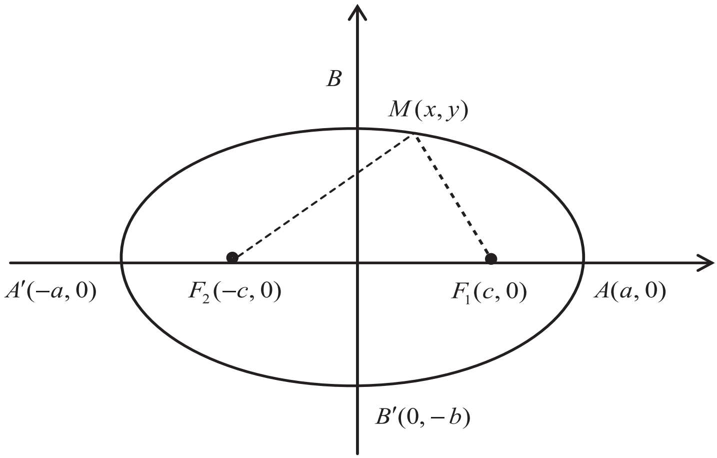


Рис. 17. Эллипс

Выпишем каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad c^2 = a^2 - b^2.$$

Пример 4.8. Записать уравнение эллипса, если расстояние между фокусами 6, а малая полуось 4.

$$c = 3,\ b = 4,\ a^2 = c^2 + b^2,\ a = \sqrt{c^2 + b^2} = 5.$$

Уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Гипербола

Гипербола — это геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний которых до двух заданных, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$ (рис. 18).

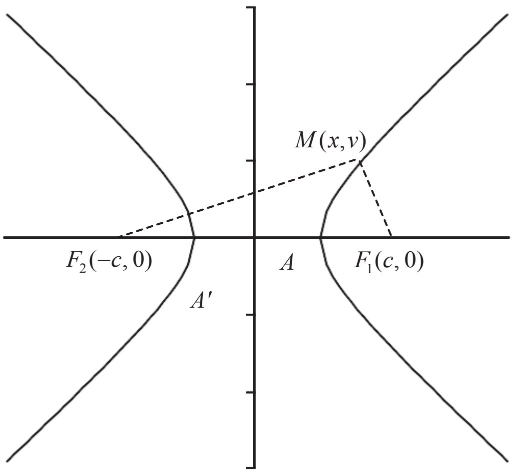


Рис. 18. Гипербола

Точки F_1, F_2 — фокусы, OF_1 — фокусное расстояние, $OF_1 = c$, $\left|MF_1 - MF_2\right| = 2a$. Точки A, A' называют вершинами гиперболы, $OA = a$, AA' — действительная ось гиперболы.

Выпишем каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad c^2 = a^2 + b^2.$$

Асимптоты гиперболы, т. е. прямые, к которым графики гиперболы приближаются при $x \to \infty$, имеют уравнения

$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

Пример 4.9. Дано уравнение

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1.$$

Найти фокусное расстояние и асимптоты гиперболы.

$$a = 6, \quad b = 8, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = 10.$$

Фокусное расстояние равно 10. Асимптоты гиперболы имеют уравнения

$$y = \pm\frac{4}{3}x.$$

Парабола

Парабола — это геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от заданной точки, называемой фокусом, и заданной прямой, называемой директрисой (рис. 19).

Здесь KP — директриса, F — фокус, M — произвольная точка параболы, для которой выполняется равенство $MK = MF$.

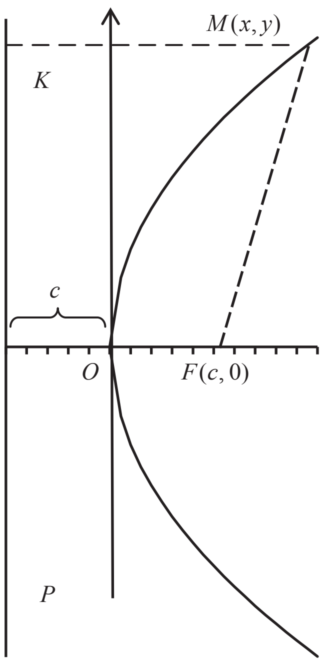


Рис. 19. Парабола

С уравнением параболы вы познакомились в школьном курсе математики.

Лекция 5

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Функции одной переменной

Пусть X и Y — множества.

Определение. На множестве X задана функция f, если определен закон, по которому каждому элементу x из множества X в соответствие ставится один, вполне определенный элемент y из множества Y.

$$x \xrightarrow{f} y$$

$$x \in X \quad y \in Y$$

Это записывается так: $y = f(x)$.

X называется областью определения функции, x — аргумент (независимая переменная, прообраз y), y — функция (зависимая переменная, образ x).

Рассмотрим пример функции.

Пусть X — пронумерованное множество столов: 1, 2, 3, …, 25; Y — множество студентов, построенных по росту, последний — самый высокий. Предположим, что студентов одинакового роста в группе нет. Правило f соответствия между x и y определим так: за первый стол садится самый маленький студент, за второй — повыше и т. д.

1. Пусть $Y = \{25\ \text{студентов}\}$. Тогда f является функцией.

2. Пусть $Y = \{24\ \text{студента}\}$. f функцией не является, так как двадцать пятому столу не поставлен в соответствие студент.

3. Пусть $Y = \{26\ \text{студентов}\}$. f является функцией.

4. Пусть Y = {26 студентов}. За двадцать пятый стол посадим двух студентов. Новый закон соответствия обозначим g. Закон g не является функцией, так как одному столу соответствует два студента.

5. Пусть Y = {24 студента}. Пусть самый маленький студент занял первый и второй стол. Закон соответствия обозначим h. h — функция (первому столу соответствует самый маленький студент и второму столу соответствует самый маленький студент).

В дальнейшем будем предполагать, что X, Y — числовые множества и Y — множество всех образов. Тогда Y называется областью значений функции f.

Примеры числовых функций

1. $y = x^2$.

Область определения функции $X = (-\infty, +\infty)$.

Область значений функции $Y = (0, \infty)$.

Графиком функции является парабола (рис. 20).

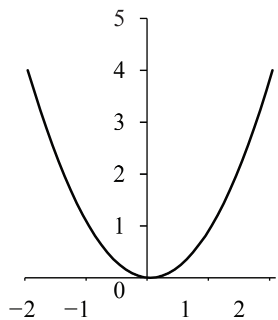


Рис. 20. Парабола $y = x^2$

2. $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Найдем область определения функции. Выражение, стоящее под корнем, должно быть неотрицательным, поэтому $1 - x^2 \geq 0$, т. е. $(1-x)(1+x) \geq 0$. Методом интервалов решим это неравенство (рис. 21).

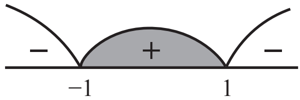


Рис. 21. Интервалы сохранения знака функции

Получим $-1 \le x \le 1$. Таким образом, $X = [-1;\ 1]$. Понятно, что y принимает самое большое значение при x, равном 0, а самое маленькое значение при x, равном 1. Поэтому $Y = [0;\ 1]$.

Графиком функции является верхняя полуокружность (рис. 22). Действительно, $y^2 = 1 - x^2$, а $x^2 + y^2 = 1$ — уравнение окружности.

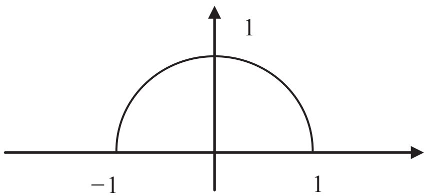


Рис. 22. График функции $y = \sqrt{1 - x^2}$

3. $y = \operatorname{sign}(x)$ (сигнум x).

$$y = \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Область определения этой функции X — множество всех действительных чисел. Область значений функции $Y = \{-1,\ 0,\ 1\}$.

График функции изображен на рис. 23.

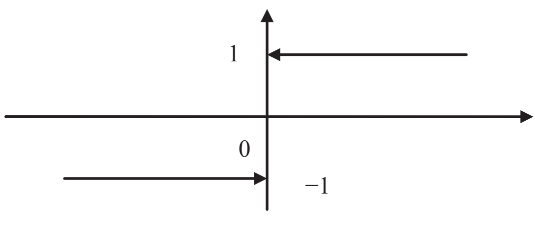


Рис. 23. График функции $y = \operatorname{sign}(x)$

Последовательности

Определение последовательности

Определение. Если каждому натуральному числу n (1, 2,…) в соответствие поставлено одно определенное число x_n, то упорядоченное множество $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ называется последовательностью.

Здесь x_1, x_2… — члены или элементы последовательности; x_n — общий член последовательности; n — его номер; $\{x_n\}$ — короткая запись последовательности.

Примеры последовательностей

1. $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ $\quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

2. $\{n^2\}$ $\quad 1, 4, 9, 16, 25, \ldots$

3. $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ $\quad 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \ldots$

4. $\left\{(-1)^n n\right\}$ $\quad -1,\ 2, -3,\ 4,\ 5, \ldots$

Часто будем записывать последовательность и без фигурных скобок, например, $\frac{1}{n}$.

Изображение последовательности на числовой прямой

Рассмотрим, как приведенные выше последовательности изобразятся на прямой.

1. $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ $\quad x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{3}, x_4 = \frac{1}{4}, \ldots$

Данная последовательность изображена на рис. 24.

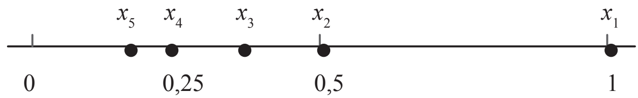


Рис. 24. Элементы последовательности $\dfrac{1}{n}$

2. $\{n^2\}$ $\quad x_1 = 1, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 9, \quad x_4 = 16, \ldots$ (рис. 25).

Рис. 25. Элементы последовательности n^2

3. $\left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}$ $x_1 = 2, \quad x_2 = \dfrac{3}{2}, \quad x_3 = \dfrac{4}{3}, \quad x_4 = \dfrac{5}{4}, \ldots$ (рис. 26).

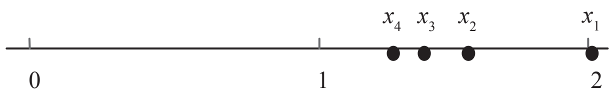


Рис. 26. Элементы последовательности $\dfrac{n+1}{n}$

4. $\left\{(-1)^n n\right\}$ $\quad x_1 = -1,\; x_2 = 2,\; x_3 = -3,\; x_4 = 4, \ldots$ (рис. 27).

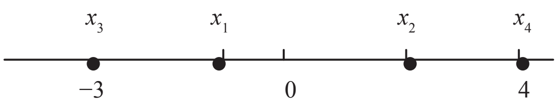


Рис. 27. Элементы последовательности $(-1)^n n$

Посмотрим, как в наших примерах ведут себя элементы последовательности при неограниченном увеличении n $(n \to \infty)$.

Элементы первой последовательности стремятся к 0 $\left(x_n \to 0\right)$ при n, стремящемся к бесконечности $(n \to \infty)$ (пишут: $x_n \to 0$

при $n \to \infty$), т. е. при больших n элементы последовательности x_n мало отличаются от 0. Элементы третьей последовательности стремятся к 1 при n, стремящемся к бесконечности ($x_n \to 1$ при $n \to \infty$). Элементы второй и четвертой последовательности при n, стремящемся к бесконечности, по модулю становятся неограниченно большими. Говорят, что эти последовательности являются бесконечно большими ($x_n \to \infty$ при $n \to \infty$).

Окрестность

Определение. Окрестностью точки a радиуса ε (эпсилон) называется интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ (рис. 28).

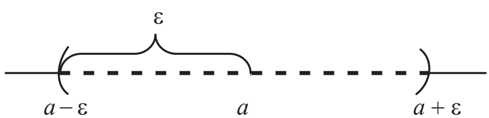


Рис. 28. Окрестность точки a радиуса ε

Такая окрестность обозначается $O_\varepsilon(a)$, т. е. $O_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$.

Предел последовательности

Определение. Предел последовательности x_n при n, стремящемся к бесконечности ($n \to \infty$), равен a, если для любой ε окрестности точки a все члены последовательности, начиная с некоторого номера, зависящего от ε, этой окрестности принадлежат. Математическая запись предела: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

Говорят, что последовательность x_n сходится к a.

На рис. 29 изображены элементы некоторой последовательности, сходящейся к нулю. Для окрестностей $O_{\varepsilon_1}, O_{\varepsilon_2}, O_{\varepsilon_3}$ изображены только правые половины. Окрестности O_{ε_1} принадлежат все члены последовательности, начиная с x_3. Окрестности O_{ε_2} принадлежат все члены последовательности, начиная с x_5.

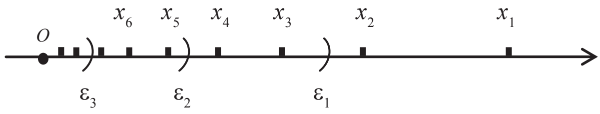


Рис. 29. Иллюстрация к понятию предела последовательности

Для последовательности $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0.$

Для последовательности $\left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}$ — $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1.$

Бесконечно малая последовательность

Определение. Последовательность, предел которой равен нулю, называется бесконечно малой.

Примеры. Последовательности

$$\frac{1}{n},\quad \frac{1}{n^2},\quad \frac{3}{2^n},\quad \frac{(-1)^n}{n+1}$$

являются бесконечно малыми.

Для бесконечно малой последовательности введем запись: x_n — б. м.

Бесконечно большая последовательность

Определение. Последовательность y_n называется бесконечно большой (y_n — б. б.), если для любой окрестности начала координат $O_E(0)$ члены последовательности, начиная с некоторого номера (зависящего от E), не принадлежат этой окрестности.

Последовательность n^2 — бесконечно большая.

Будем говорить, что предел бесконечно большой последовательности равен бесконечности, и записывается это так: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\infty.$

Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} n^2=\infty,\ \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n n=\infty.$

Теоремы о связи бесконечно больших и бесконечно малых последовательностей

Теорема 1. Пусть последовательность y_n — бесконечно большая. Тогда последовательность $x_n = \dfrac{1}{y_n}$ является бесконечно малой.

Теорема 2. Пусть последовательность x_n — бесконечно малая и $x_n \neq 0$, тогда последовательность $y_n = \dfrac{1}{x_n}$ является бесконечно большой.

Примеры. Последовательность $(-1)^n n$ — бесконечно большая, поэтому последовательность $\dfrac{1}{(-1)^n n} = \dfrac{(-1)^n}{n}$ — бесконечно малая согласно теореме 1.

Последовательность n^2 — бесконечно большая, поэтому последовательность $\dfrac{1}{n^2}$ — бесконечно малая.

Определение. Всякая последовательность, имеющая предел, называется сходящейся.

Теоремы о сходящихся последовательностях

Пусть последовательности x_n и y_n сходятся, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b.$$

Теорема 3. Предел суммы (разности, произведения) двух сходящихся последовательностей равен сумме (разности, произведению) пределов исходных последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n + y_n\right) = a + b = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n - y_n\right) = a - b = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n \cdot y_n\right) = a \cdot b = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Теорема 4. Пусть последовательность x_n сходится к a, последовательность y_n сходится к b, $y_n \neq 0$ и $b \neq 0$. Тогда предел отношения x_n к y_n равен отношению пределов соответствующих последовательностей, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

Примеры вычисления пределов

1. Найти предел последовательности

$$\frac{2n^2+1}{n^2} \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Разделим каждое слагаемое числителя на знаменатель. Получим

$$\frac{2n^2+1}{n^2} = 2 + \frac{1}{n^2},$$

т. е. исходная последовательность равна сумме последовательностей

$$x_n = 2 \;\; \text{и} \;\; y_n = \frac{1}{n^2}.$$

По теореме 3

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 2 + 0 = 2.$$

2. Найти предел последовательности

$$\frac{3n^2+1}{2n^2+5} \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Воспользоваться теоремой 4 для последовательностей

$$x_n = 3n^2 + 1 \quad \text{и} \quad y_n = 2n^2 + 5$$

невозможно, так как они не являются сходящимися. Поэтому поделим числитель и знаменатель дроби

$$\frac{3n^2 + 1}{2n^2 + 5}$$

на n_2. Получим

$$\frac{3n^2 + 1}{2n^2 + 5} = \frac{\frac{3n^2 + 1}{n^2}}{\frac{2n^2 + 5}{n^2}}.$$

Последовательности

$$x_n = \frac{3n^2 + 1}{n^2} \quad \text{и} \quad y_n = \frac{2n^2 + 5}{n^2}$$

являются сходящимися. Следовательно, можно применить теорему 4:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3n^2 + 1}{2n^2 + 5} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{3n^2 + 1}{n^2}}{\frac{2n^2 + 5}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3n^2 + 1}{n^2}}{\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2n^2 + 5}{n^2}} =$$

(далее для вычисления пределов, стоящих в числителе и в знаменателе дроби, воспользуемся теоремой 3 о вычислении предела суммы двух последовательностей):

$$= \frac{\lim\limits_{n \to \infty} \left(3 + \frac{1}{n^2} \right)}{\lim\limits_{n \to \infty} \left(2 + \frac{5}{n^2} \right)} = \frac{\lim\limits_{n \to \infty} 3 + \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n \to \infty} 2 + \lim\limits_{n \to \infty} \frac{5}{n^2}} = \frac{3 + 0}{2 + 0} = \frac{3}{2}.$$

3. Найти предел последовательности

$$\frac{n+1}{n^2+2} \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Заметим, что в числителе стоит многочлен первой степени, а в знаменателе — многочлен второй степени. Наибольшая степень равна 2. Поделим числитель и знаменатель дроби на n в наибольшей степени: на n_2. Получим

$$\frac{n+1}{n^2+2} = \frac{\frac{n+1}{n^2}}{\frac{n^2+2}{n^2}} = \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}}.$$

Далее, применив теоремы 4 и 3, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{n^2}}{\frac{n^2+2}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+2}{n^2}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n^2}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}} = \frac{0+0}{1+0} = 0.$$

Правило. Если общий член последовательности есть отношение двух многочленов и степень числителя меньше степени знаменателя, то предел последовательности равен нулю.

Лекция 6

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ПРЕДЕЛЫ ФУНКЦИЙ. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

Продолжим рассматривать примеры вычисления пределов последовательностей.

4. Найти предел последовательности

$$\frac{3n^3+n-1}{n+2} \text{ при } n \to \infty.$$

Наибольшая степень в числителе и знаменателе — третья, поэтому поделим числитель и знаменатель на n^3. Получим

$$x_n = \frac{3n^3+n-1}{n+2} = \frac{3+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}}.$$

Воспользоваться теоремой 4 для вычисления предела отношения двух последовательностей невозможно, так как предел последовательности

$$\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3},$$

стоящей в знаменателе, равен 0.

Рассмотрим последовательность

$$y_n = \frac{1}{x_n} = \frac{n+2}{3n^3+n-1} = \frac{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}}{3+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}}.$$

Предел этой последовательности равен 0:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}} = \frac{0}{3} = 0.$$

Так как последовательность y_n — бесконечно малая, то

$$x_n = \frac{1}{y_n},$$

согласно теореме 1, бесконечно большая последовательность.

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+n-1}{n+2} = \infty.$$

Правило. Если у общего члена последовательности степень числителя больше степени знаменателя, то последовательность бесконечно большая.

Пределы функций

Рассмотрим функцию $y = 2x + 1$. Фиксируем точку $x_0 = 0$. Пусть x_n — некоторая последовательность, сходящаяся к x_0 при n, стремящемся к ∞. Рассмотрим, например, последовательность

$$x_n = \frac{1}{n}.$$

Она сходится к 0

$$\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0\right).$$

Подставив в функцию вместо x x_n, получим новую последовательность

$$y_n = \frac{2}{n} + 1.$$

Нас интересует, как ведет себя эта последовательность. Последовательность y_n сходится к 1 при n, стремящемся к ∞ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1\right)$.

Рассмотрим, как геометрически изображается связь между последовательностями x_n и y_n (рис. 30).

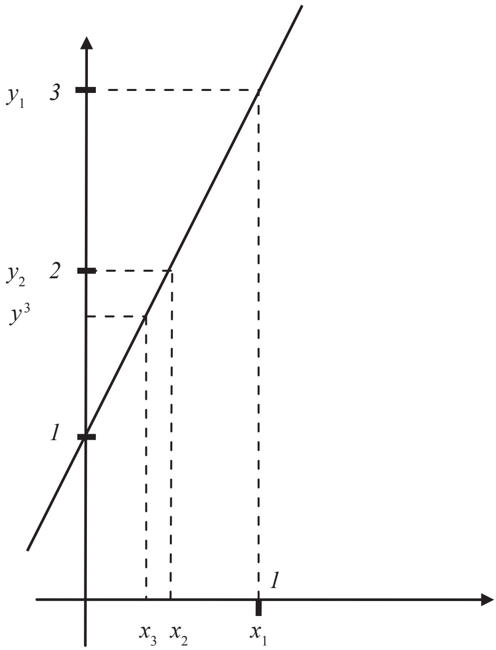


Рис. 30. Связь между последовательностями x_n и y_n

Нас интересует, как ведет себя последовательность y_n, если последовательность x_n сходится к x_0.

Определение предела функции

Определение. Число a называется пределом функции $y(x)$ при x, стремящемся к x_0, если для любой последовательности x_n, удовлетворяющей условиям: x_n принадлежит области определения X функции $y(x)$, $x_n \neq x_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$,

$$\left(x_n \in X, \quad x_n \neq x_0, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0\right),$$

соответствующая последовательность $y_n = y(x_n)$ сходится к a.

Это записывают так:

$$\lim_{x\to x_0} y(x) = a.$$

Теоремы о предельном переходе при выполнении арифметических операций над функциями

Пусть на множестве X рассматриваются функции $y(x)$ и $z(x)$. Пусть $x_0 \in X$ и $\lim\limits_{x\to x_0} y(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} z(x) = b$. Тогда:

Теорема 1. Предел суммы (разности, произведения) двух функций при x, стремящемся к x_0, равен сумме (разности, произведению) пределов этих функций, т. е.

$$\lim_{x\to x_0}\big(y(x)+z(x)\big) = a+b = \lim_{x\to x_0} y(x) + \lim_{x\to x_0} z(x),$$

$$\left(\begin{array}{c} \lim\limits_{x\to x_0}\big(y(x)-z(x)\big) = a-b = \lim\limits_{x\to x_0} y(x) - \lim\limits_{x\to x_0} z(x), \\ \lim\limits_{x\to x_0}\big(y(x)\cdot z(x)\big) = a\cdot b = \lim\limits_{x\to x_0} y(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} z(x) \end{array}\right).$$

Теорема 2. Пусть $b \neq 0$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{y(x)}{z(x)} = \frac{a}{b} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} y(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} z(x)}.$$

Примеры вычисления пределов функций

1. Найдем

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}.$$

Если мы попытаемся воспользоваться теоремой 2, то увидим, что при x, стремящемся к 1, числитель и знаменатель дроби стремятся к 0. Такая ситуация называется неопределенностью «ноль на ноль» $\left(\frac{0}{0}\right)$. Пока теоремой 2 воспользоваться нельзя. Заметим, что в числителе стоит разность квадратов. Используя формулу

$$a^2-b^2=\left(a-b\right)\left(a+b\right),$$

получим

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2.$$

2. Найдем

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+3x+2}{x+2}.$$

Попытаемся использовать теорему 2. Найдем предел числителя:

$$\lim_{x\to -2}\left(x^2+3x+2\right)=4-6+2=0.$$

Найдем предел знаменателя:

$$\lim_{x\to -2}\left(x+2\right)=-2+2=0.$$

Имеем неопределенность типа «ноль на ноль».

В числителе дроби стоит квадратный трехчлен. Разложим его на множители. Для этого найдем корни квадратного уравнения

$$x^2+3x+2=0\,.$$

Они равны $x_1=-1, \quad x_2=-2.$

Напомним, что для квадратного уравнения

$$ax^2+bx+c=0$$

корни $x_{1,2}$ находятся по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

и разложение на множители записывается так:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Возвращаясь к нашему примеру, получим

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+1)(x+2)}{x+2} = \lim_{x \to -2} (x+1) = -1.$$

Предел функции при x, стремящемся к бесконечности ($x \to \infty$), вычисляется так же, как для последовательности.

Производная функции

Приращение функции

Приращение функции, обозначаемое через Δ_y, показывает, на сколько значение функции в точке $x_0 + \Delta_x$ отличается от значения функции в точке x_0 (рис. 31).

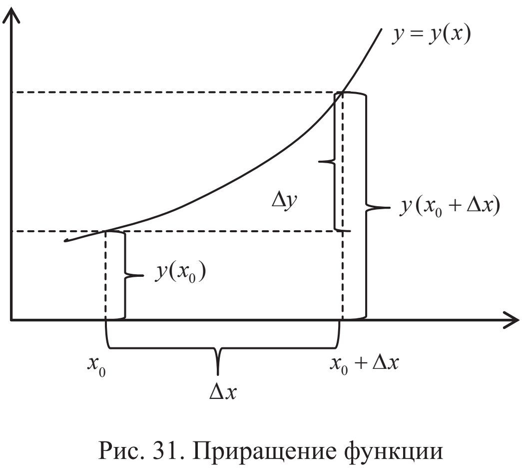


Рис. 31. Приращение функции

Приращение аргумента — Δ_x, приращение функции —

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0).$$

Производная

Определение. Производной $y'(x_0)$ функции $y(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

если этот предел существует. Итак,

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x}.$$

Схема вычисления производной

1. Вычислить $y(x_0)$.
2. Вычислить $y(x_0 + \Delta x)$.
3. Найти приращение функции $\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)$.
4. Найти отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.
5. Найти предел отношения при $\Delta x \to 0$, т. е. производную $y'(x_0)$.

Найдем по определению производную функции $y = x^2$.

1. $y(x_0) = x_0^2$.
2. $y(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2$.
3. $\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2$.
4. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \dfrac{(2x_0 + \Delta x)\Delta x}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$.

5. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(2x_0 + \Delta x\right) = 2x_0.$

Точка x_0 произвольная, поэтому $\left(x^2\right)' = 2x.$

Физический смысл производной

Пусть независимая переменная t — это время. Рассматриваемая функция $s(t)$ — путь, пройденный точкой M от начальной точки O за время t (если t измеряется, например, в минутах, то $s(3)$ — путь, пройденный точкой M от начальной точки O за 3 мин, $s(5)$ — путь, пройденный точкой M от начальной точки O за 5 мин).

Тогда $s(t + \Delta t)$ — путь, пройденный точкой M от начальной точки O за время $t + \Delta t$.

На рис. 32 путь MM' пройден за 2 мин и равен $s(3) - s(5)$.

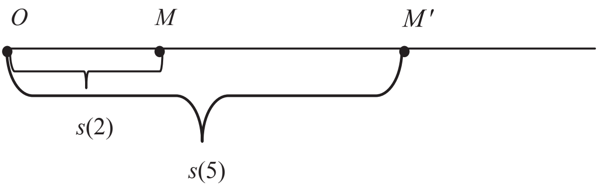


Рис. 32. Путь, пройденный точкой за 2 мин

На рис. 33 путь MM' пройден за Δt мин и равен

$$s(t + \Delta t) - s(t) = \Delta s.$$

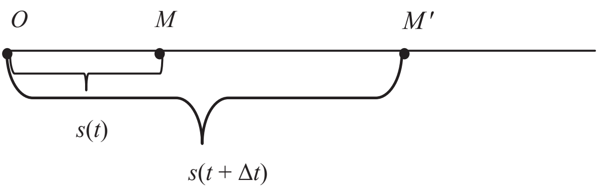


Рис. 33. Путь, пройденный точкой за Δt мин

Средняя скорость v на заданном отрезке пути определяется как отношение пути ко времени, за которое этот путь пройден. Средняя скорость v на отрезке MM' на рис. 32 равна $\dfrac{s(5)-s(3)}{2}$, на рис. 33 — $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$. Если $\Delta t \to 0$, то $M' \to M$ и $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=s'(t)$ — это мгновенная скорость в точке M. Итак, производная пути по времени при $t = t_0$ — это мгновенная скорость движения точки M в момент t_0.

Таким образом, $y'(x_0)$ — это скорость изменения функции $y(x)$ в точке x_0.

Таблица производных

1. $\left(x^n\right)'=nx^{n-1}.$

2. $\left(\sin x\right)'=\cos x.$

3. $\left(\cos x\right)'=-\sin x.$

4. $\left(e^x\right)'=e^x.$

5. $\left(\ln x\right)'=\dfrac{1}{x}.$

Формула перехода к дробному показателю: $\sqrt[m]{x^k}=\left(x\right)^{\frac{k}{m}}.$

Формула перехода к отрицательному показателю: $\dfrac{1}{x^k}=x^{-k}.$

Примеры использования формулы 1 из таблицы производных

$$\left(\sqrt{x}\right)'=\left(x^{1/2}\right)'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=\left(x^{-1}\right)'=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}.$$

Свойства производной

1. $(k)' = 0$ (k — число).

2. $\left(u(x) + v(x)\right)' = u(x)' + v(x)'$.

3. $\left(u(x) - v(x)\right)' = u(x)' - v(x)'$.

4. $\left(u(x) \cdot v(x)\right)' = u(x)' \cdot v(x) + u(x) \cdot v(x)'$.

5. $\left(k \cdot u(x)\right)' = k \cdot \left(u(x)\right)'$.

6. $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u(x)' \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x)'}{\left(v(x)\right)^2}$.

Лекция 7
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ. ДИФФЕРЕНЦИАЛ. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Продолжим рассматривать примеры вычисления производных.

Примеры. Найти производные от следующих функций:

1. $y = 2\sin x + \dfrac{4x^3}{3} - 10,$

$$y' = 2(\sin x)' + \frac{4}{3}\left(x^3\right)' - (10)' =$$

$$= 2\cos x + \frac{4}{3}\cdot 3x^2 - 0 = 2\cos x + 4x^2.$$

2. $y = \left(x^5 + 1\right)e^x.$

$$y' = \left(x^5 + 1\right)' e^x + \left(x^5 + 1\right)\left(e^x\right)' = 5x^4 e^x + \left(x^5 + 1\right)e^x.$$

3. $y = \operatorname{tg} x.$

$$y' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Геометрический смысл производной

Прямая M_0P, изображенная на рис. 34, является касательной к кривой $y = f(x)$. Она имеет с кривой только одну общую точку $M_0\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$.

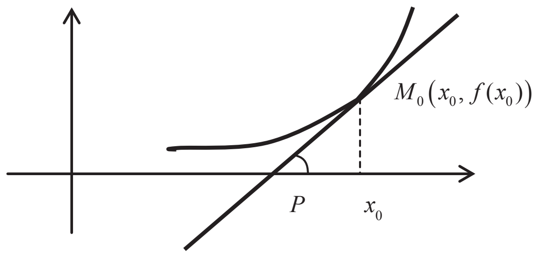


Рис. 34. Касательная к кривой в точке M_0

Производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна тангенсу угла наклона касательной к кривой $y = f(x)$, проведенной через точку $M_0\left(x_0,\ f\left(x_0\right)\right)$.

Пусть $\angle M_0Px = \alpha$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = f'\left(x_0\right)$.

Уравнение касательной

Для касательной M_0P известен тангенс угла наклона $k = f'\left(x_0\right)$ и точка $M_0\left(x_0,\ f\left(x_0\right)\right)$, через которую проходит прямая. Нетрудно записать уравнение касательной:

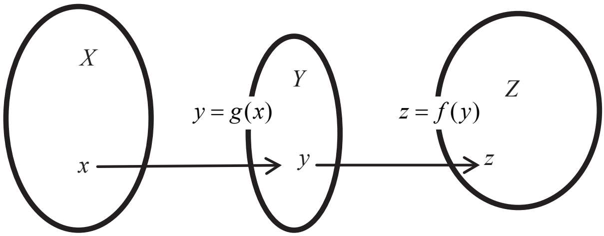
$$y = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right) + f\left(x_0\right).$$

Пример. Записать уравнение касательной к кривой $y = x_2$ в точке $(-1, 1)$.

$$y' = 2x,\ y'(-1) = -2,\ \ y = -2(x+1)+1,\ y = -2x-1.$$

Понятие сложной функции

Пусть на множестве X задана функция $y = g(x)$, Y — область значений этой функции. На множестве Y задана функция $z = f(y)$ с областью значений Z (рис. 35).



$z = f\left(g(x)\right)$

Рис. 35. Сложная функция

$z = f\left(g(x)\right)$ — сложная функция.

Примеры

1. $z = \cos\left(4 - \frac{1}{2}x\right)$ — сложная функция, $y = 4 - \frac{1}{2}x$, $z = \cos y$.

2. $z = \sin\left(x^2\right)$ — сложная функция, $y = x_2$, $z = \sin(y)$.

3. $z = \ln\left(x^3 + 2x - 3\right)$ — сложная функция, $y = x^3 + 2x - 3$, $z = \ln y$.

Производная сложной функции

Пусть функция $y = g(x)$ имеет производную $g'_x(x)$ во всех точках множества X и функция $z = f(y)$ имеет производную $f'_y(y)$ во всех точках множества Y. Тогда производная сложной функции вычисляется по формуле

$$z'_x = f'_y\left(g(x)\right)g'_x(x).$$

Примеры. Найти производные сложных функций:

$$z = \cos\left(4 - \frac{1}{2}x\right),\ z = \sin(x^2),\ z = \ln(x^3 + 2x - 3).$$

1. $z' = \left(\cos y\right)'\left(4 - \frac{1}{2}x\right)' = -\sin\left(4 - \frac{1}{2}x\right)\left(0 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(4 - \frac{1}{2}x\right).$

2. $z' = \left(\sin y\right)'\left(x^2\right)' = 2x\cos\left(x^2\right).$

3. $z' = \left(\ln y\right)'\left(x^3 + 2x - 3\right)' = \dfrac{1}{x^3 + 2x - 3}\left(3x^2 + 2\right) = \dfrac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x - 3}.$

Дифференциал

Если функция $y = y(x)$ имеет производную $y'(x_0)$, то приращение функции Δy имеет следующую структуру:

$$\Delta y = y'(x_0)\Delta x + \alpha\left(\Delta x\right)\Delta x,$$

где $\alpha\left(\Delta x\right)$ — бесконечно малая, поэтому второе слагаемое при $\Delta x \to 0$ становится очень маленьким и им можно пренебречь. При $\Delta x \to 0$ $\Delta y \approx y'(x_0)\Delta x$. Вместо Δx писать договорились dx и обозначили $dy = y'(x_0)dx$. Тогда $\Delta y \approx dy$.

Определение. Пусть функция $y = y(x)$ имеет производную $y'(x_0)$, тогда $dy = y'(x_0)dx$ называется дифференциалом функции в точке x_0.

Пример. Записать дифференциал функции $y = x^3 - 4x$.

$$y' = 3x^2 - 4, \; dy = \left(3x^2 - 4\right)dx.$$

Определение. Функция, имеющая конечную производную в точке x_0, называется дифференцируемой в точке x_0.

Неопределенный интеграл

Первообразная

По заданной функции $y(x)$ мы умеем искать ее производную $y'(x)$.

Определение. Пусть на интервале (a, b) задана функция $f(x)$ и она является производной некоторой функции $g(x)$, т. е. $g'(x) = f(x)$. Функция $g(x)$ называется первообразной.

Как ее найти?

Определение неопределенного интеграла

Если мы знаем первообразную $g(x)$ для функции $f(x)$, то $g(x)+C$, где C — любая константа, тоже является первообразной для функции $f(x)$, т. е. первообразных много, целый класс $\{g(x)+C\}$. Можно показать, что любая первообразная принадлежит этому классу, т. е. все первообразные отличаются друг от друга на константу. Этот класс обозначают значком $\int f(x)dx$ и называют неопределенный интеграл: $\int f(x)dx = \{g(x)+C\}$; $f(x)$ называется подынтегральная функция, $f(x)dx$ — подынтегральное выражение.

Не для всякой функции $f(x)$ существует неопределенный интеграл.

Определение. Функция $f(x)$ называется интегрируемой на интервале (a, b), если неопределенный интеграл $f(x)dx$ существует.

Таблица интегралов

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1.$

2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$

3. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

4. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

5. $\int e^x dx = e^x + C.$

Примеры. Найти интегралы.

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C,$$

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C,$$

$$\int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C.$$

Свойства интегралов

1. Константу можно выносить за знак интеграла:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

2. Интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов от этих функций:

$$\int \big(f_1(x) + f_2(x)\big)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$$

Примеры. Найти интегралы.

1. $$\int\left(\sqrt{x} + 5 - \frac{x}{2}\right)dx = \int \sqrt{x}dx + \int 5dx - \int \frac{x}{2}dx =$$

$$= \int x^{\frac{1}{2}}dx + 5\int dx - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + 5x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + C =$$

$$= \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + 5x - \frac{x^2}{4} + C.$$

2. $$\int \frac{x^5 - 2\sqrt{x} + 7}{x}dx = \int \frac{x^5}{x}dx - \int \frac{2\sqrt{x}}{x}dx + \int \frac{7}{x}dx =$$

$$= \int x^4 dx - 2\int x^{-\frac{1}{2}}dx + 7\int \frac{1}{x}dx = \frac{x^5}{5} - 4x^{\frac{1}{2}} + 7\ln|x| + C =$$

$$= \frac{x^5}{5} - 4\sqrt{x} + 7\ln|x| + C.$$

3. $$\int \frac{x^2 - 1}{4x - 4}dx = \int \frac{(x-1)(x+1)}{4(x-1)}dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int (x+1)dx = \frac{1}{4}\left(\int xdx + \int dx\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{2} + x\right) + C.$$

4. $\int (x+6)\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}\right)dx = \int\left(\frac{x^3}{2}+3x^2-1-\frac{6}{x}\right)dx =$

$= \frac{x^4}{8}+x^3-x-6\ln x+C.$

Замена переменной в неопределенном интеграле

Пусть на отрезке $[\alpha, \beta]$ задана дифференцируемая функция $x=\varphi(t)$ и $x\in[a,b]$, а на $[a,b]$ определена функция $y=f(x)$. Пусть $f(x)$ интегрируема и $g(x)$ ее первообразная, т. е. $\int f(x)dx = g(x)+C$.

Рассмотрим интеграл $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$. Оказывается, он равен $g(\varphi(t))$, т. е. имеет место формула замены переменной:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)}.$$

Черта означает, что после вычисления интеграла вместо x нужно подставить $\varphi(t)$.

Замена заключается в том, что $\varphi(t)$ заменяется на x, а $\varphi'(t)dt$ заменяется на dx.

Пример. Найти $\int 5(5t+3)^2\,dt$.

Заменим $5t + 3$ на x: $x=5t+3$, тогда $dx=5dt$. Получим

$$\int 5(5t+3)^2\,dt = \int x^2dx = \frac{x^3}{3}+C = \frac{(5t+3)^3}{3}+C.$$

Пример

$$\int \sin(2x-1)\,dx = \left\{\begin{aligned} & z=2x-1 \\ & dz=(2x-1)'\,dx = 2dx \\ & dx=\frac{dz}{2} \end{aligned}\right\} = \int \frac{1}{2}\sin z dz =$$

$$= -\frac{1}{2}\cos z + C = -\frac{1}{2}\cos(2x-1)+C.$$

Пример

$$\int \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}dx = \left\{\begin{aligned} & z = x^2+1 \\ & dz = \left(x^2+1\right)' dx = 2xdx \\ & xdx = \frac{1}{2}dz \end{aligned}\right\} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{z^2}dz =$$

$$= \frac{1}{2}\int z^{-2}dz = -\frac{1}{2z} + C = -\frac{1}{2\left(x^2+1\right)} + C.$$

Лекция 8
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Задача о вычислении пути

Водитель выехал в 8 ч из дома (D) и должен добраться до спортивного комплекса (K). Найти расстояние DK.

Первые 10 мин (1/6 ч) он ехал со скоростью $v(c_1) = 40$ км/ч, следующие 10 мин (1/6 ч) — со скоростью $v(c_2) = 10$ км/ч, следующие 15 мин (1/4 ч) — со скоростью $v(c_3) = 30$ км/ч, следующие 15 мин (1/4 ч) — со скоростью $v(c_4) = 60$ км/ч, последние 10 мин — со скоростью $v(c_5) = 100$ км/ч.

Приехал в 9 ч.

Оформим всю изложенную информацию в виде таблицы.

$t_0 = 8.00$			
$t_1 = 8.10$	$\Delta t_1 = 1/6$ ч	$c_1 = 8.05$	$v(c_1) = 40$ км/ч
$t_2 = 8.20$	$\Delta t_2 = 1/6$ ч	$c_2 = 8.10$	$v(c_2) = 10$ км/ч
$t_3 = 8.35$	$\Delta t_3 = 1/4$ ч	$c_3 = 8.30$	$v(c_3) = 30$ км/ч
$t_4 = 8.50$	$\Delta t_4 = 1/4$ ч	$c_4 = 8.45$	$v(c_4) = 60$ км/ч
$t_5 = 9.00$	$\Delta t_5 = 1/6$ ч	$c_5 = 8.50$	$v(c_5) = 100$ км/ч

Путь, пройденный за час, обозначим через S. Очевидно,

$$S = v(c_1)\Delta t_1 + v(c_2)\Delta t_2 + v(c_3)\Delta t_3 + v(c_4)\Delta t_4 + v(c_5)\Delta t_5 = \sum_{i=1}^{5} v\left(c_i\right)\Delta t_i =$$

$$= 40\cdot\frac{1}{6} + 10\cdot\frac{1}{6} + 30\cdot\frac{1}{4} + 60\cdot\frac{1}{4} + 100\cdot\frac{1}{6} = \frac{150}{6} + \frac{90}{4} = 47{,}5.$$

Получили, что расстояние DK приближенно равно 47,5 км. Понятно, что если бы водитель лучше следил за изменением скорости и чаще смотрел на спидометр, то таблица получилась бы более длинная и расстояние DK было бы найдено точнее.

Определение. Сумма

$$\sum_{i=1}^{n} v\left(c_i\right) \Delta t_i$$

называется интегральной суммой.

Если в интегральной сумме n устремим к $\infty (n \to \infty)$, предполагая, что при этом $\max\limits_{1 \le i \le n} \Delta t_i$ стремится к нулю $\left(\max\limits_{1 \le i \le n} \Delta t_i \to 0\right)$, то расстояние DK найдем точно.

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ (\max \Delta t_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} v\left(c_i\right) \Delta t_i$$

называется определенным интегралом. В нашем примере он будет обозначаться

$$\int_8^9 v(t) dt, \text{ т. е.}$$

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ (\max \Delta t_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} v\left(c_i\right) \Delta t_i = \int_8^9 v(t) dt.$$

Определение определенного интеграла

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция $f(x)$. Разобьем отрезок $[a, b]$ точками:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Обозначим

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \ldots, \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \ldots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}.$$

На отрезке $\left[x_0, x_1\right]$ возьмем точку c_1, …, на отрезке $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ возьмем точку c_i, …,

на отрезке $\left[x_{n-1}, x_n\right]$ возьмем точку c_n, т. е.

$$c_1 \in \left[x_0, x_1\right], ..., \quad c_i \in \left[x_{i-1}, x_i\right], ..., \quad c_n \in \left[x_{n-1}, x_n\right].$$

Составим интегральную сумму:

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(c_i\right)\Delta x_i.$$

Определение. Определенный интеграл — это

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \left(\max\Delta x_i \to 0\right)}} \sum_{i=1}^{n} f\left(c_i\right)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$

Число a называется нижним пределом, b — верхним пределом определенного интеграла.

Криволинейная трапеция

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана положительная функция $f(x) > 0$. Проведем вертикальные прямые через точки a и b до пересечения с графиком кривой $y = f(x)$. Полученные точки обозначим A, B.

Фигура $aABb$, изображенная на рис. 36, называется криволинейной трапецией.

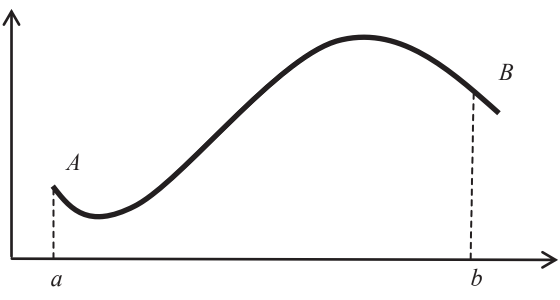


Рис. 36. Криволинейная трапеция

Геометрический смысл определенного интеграла

Найдем площадь криволинейной трапеции S_{aABb}. Заменим криволинейную трапецию ступенчатой фигурой (рис. 37) и найдем площадь этой фигуры.

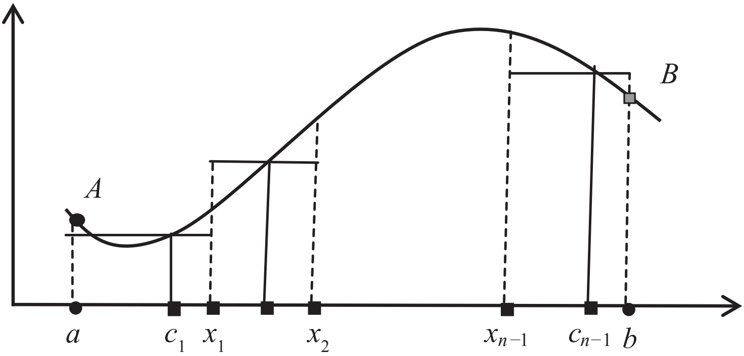


Рис. 37. Ступенчатая фигура

Ступенчатую фигуру будем строить так. Разобьем отрезок $[a,\ b]$ точками $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ на n частей. Длина i-й части $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Проведем через точки $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ вертикальные пунктирные линии. Криволинейная трапеция S_{aABb} разобьется на n криволинейных трапеций, каждую из которых заменим прямоугольником. Чтобы построить первый прямоугольник, на отрезке $\left[x_0, x_1\right]$ выберем любую точку c_1, найдем $f\left(c_1\right)$ — высоту прямоугольника. Ширина прямоугольника равна Δx_1. Аналогично построим остальные прямоугольники.

В результате получим:

ширина 1-го прямоугольника — Δx_1, высота — $f\left(c_1\right)$, площадь $f\left(c_1\right)\Delta x_1$;

ширина 2-го прямоугольника — Δx_2, высота — $f\left(c_2\right)$, площадь $f\left(c_2\right)\Delta x_2$.

....

Площадь n-го прямоугольника $f\left(c_n\right)\Delta x_n$.

Площадь ступенчатой фигуры равна сумме площадей всех прямоугольников (рис. 38).

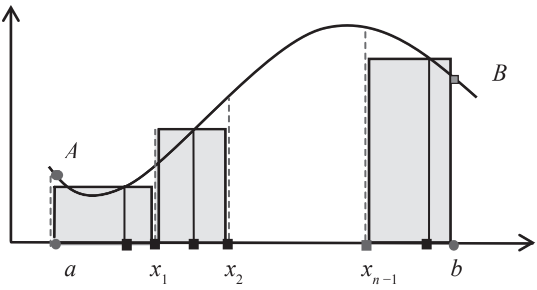


Рис. 38. Площадь ступенчатой фигуры

$$S = f\left(c_1\right)\Delta x_1 + f\left(c_2\right)\Delta x_2 + \ldots + f\left(c_n\right)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(c_i\right)\Delta x_i .$$

Чем у́же будут прямоугольники, тем меньше площадь ступенчатой фигуры будет отличаться от площади криволинейной трапеции S_{aABb}. Площадь S_{aABb} получим, если рассмотрим предел интегральной суммы

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(c_i\right)\Delta x_i, \text{ т. е. } S_{aABb} = \int_a^b f(x)dx.$$

Итак, определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)dx$$

равен площади криволинейной трапеции, ограниченной осью абсцисс, прямыми $x = a$, $x = b$ и кривой $y = f(x)$.

Формула Ньютона — Лейбница

Пусть $g(x)$ — первообразная функции $f(x)$: $g'(x) = f(x)$.

Справедлива формула Ньютона — Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a) = g(x)\Big|_a^b .$$

Пример 1. Найти интеграл $\int_0^1 xdx$ (рис. 39).

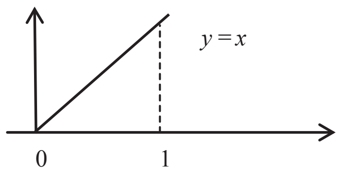


Рис. 39. Геометрическая интерпретация к примеру 1

Интеграл легко вычисляется из геометрического смысла определенного интеграла. Он равен площади треугольника, т. е. 1/2.

Найдем его по формуле Ньютона — Лейбница. Получим

$$\int_0^1 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Вычисление площади фигуры с помощью определенного интеграла

Требуется по рисунку найти площадь криволинейной трапеции с помощью определенного интеграла и формулы Ньютона — Лейбница.

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$, осью абсцисс и прямыми $x = -1$ и $x = 2$ (рис. 40).

$$\int_{-1}^2 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^2 = \frac{8}{3} - \frac{-1}{3} = 3.$$

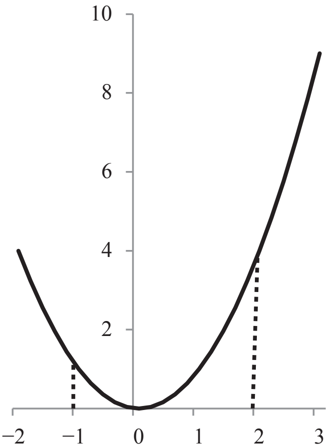


Рис. 40. Фигура, ограниченная параболой и прямыми
$x = -1$, $x = 2$, $y = 0$

Пример 3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2$ и $y = \dfrac{x^2}{2} + 2$ (рис. 41).

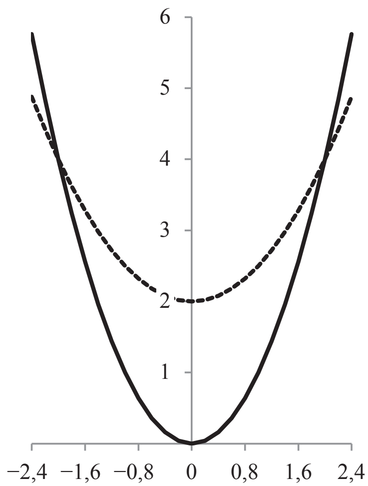


Рис. 41. Фигура, ограниченная параболами $y = x^2$ и $y = \dfrac{x^2}{2} + 2$

Найдем точки пересечения кривых

$$y = x^2 \text{ и } y = \frac{x^2}{2} + 2.$$

$$x^2 = \frac{x^2}{2} + 2, \quad \frac{x^2}{2} = 2, \quad x_{1,2} = \pm 2.$$

Следовательно, пределы интегрирования $a = -2$, $b = 2$.

Из площади, ограниченной верхней кривой $y = x^2$, изображенной пунктиром, нужно вычесть площадь, ограниченную нижней кривой $y = \frac{x^2}{2} + 2$, изображенной сплошной линией.

$$\int_{-2}^{2} \left(\frac{x^2}{2} + 2 - x^2 \right) dx = \int_{-2}^{2} \left(2 - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left(2x - \frac{x^3}{6} \right) \Bigg|_{-2}^{2} =$$

$$= \left(4 - \frac{8}{6} \right) - \left(-4 + \frac{8}{6} \right) = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}.$$

Таким образом, площадь искомой фигуры равна 16/3.

На этом заканчивается наш небольшой курс по высшей математике, который позволил вам глубже познакомиться с такими важными математическими понятиями, как системы линейных алгебраических уравнений; прямая и кривые второго порядка; функции, производные, неопределенные и определенные интегралы.

СПИСОК БИБЛИОГРАФИЧЕСКИХ ССЫЛОК

1. *Шолохович Ф. А.* Высшая математика в кратком изложении : учебник для вузов. Екатеринбург ; Москва, 2008.
2. *Шипачев В. С.* Основы высшей математики. 5-е изд., стер. М. : Высш. школа, 2003.
3. *Шипачев В. С.* Задачник по высшей математике : М. : Высш. школа, 2009.
4. *Шипачев В. С.* Высшая математика. 8-е изд., перераб. и доп. : учебник и практикум. М. : Изд-во «Юрайт», 2015.
5. *Павлюченко Ю. В., Хассан Н. Ш., Михеев В. И.* Высшая математика для гуманитарных направлений. 4-е изд., перераб. и доп. : учеб. пособие для бакалавров. М. : Изд-во «Юрайт», 2015.
6. *Седых И. Ю., Гребенщиков Ю. Б., Шевелев А. Ю.* Высшая математика для гуманитарных направлений : учебник и практикум для акад. бакалавриата. М. : Изд-во «Юрайт», 2015.

Учебное издание

Меленцова Юлия Алексеевна

ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Курс лекций

Учебно-методическое пособие

Заведующий редакцией *М. А. Овечкина*
Редактор *С. Г. Галинова*
Корректор *С. Г. Галинова*
Компьютерная верстка *Н. Ю. Михайлов*

План выпуска 2017 г. Подписано в печать 14.02.2017.
Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Уч.-изд. л. 4,5. Усл. печ. л. 5,1. Тираж 50 экз. Заказ № 16.

Издательство Уральского университета
620000, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ.
620000, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.
Тел.: +7 (343) 350-56-64, 350-90-13.
Факс: +7 (343) 358-93-06.
E-mail: press-urfu@mail.ru

ЛИДЕР УНИВЕРСИТЕТСКОГО КНИГОИЗДАНИЯ

УНИВЕРСИТЕТСКАЯ КНИГА

2015

9 785799 620172