ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА МАНГА

АНАЛИЗ ФУРЬЕ

Митио Сибуя
Хироки Харусэ

Ohmsha
ОДЭКА
ДМК пресс издательство

Занимательная математика

АНАЛИЗ ФУРЬЕ

Манга

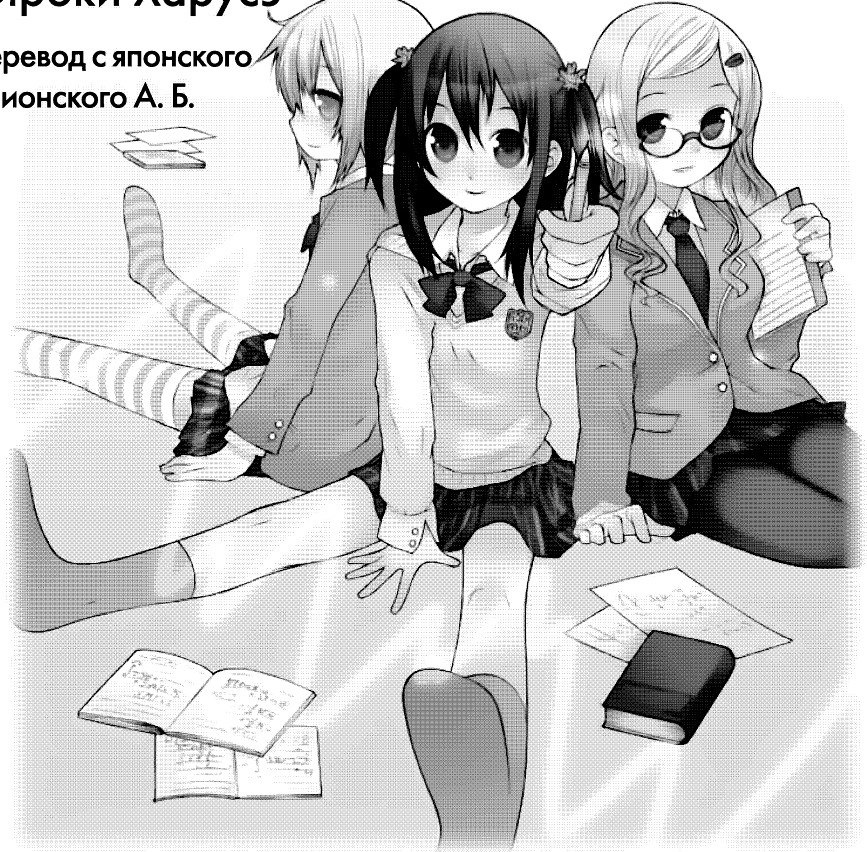
ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ МАНГА

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

АНАЛИЗ ФУРЬЕ

Митио Сибуя
Хироки Харусэ

Перевод с японского
Клионского А. Б.



ДМК ПРЕСС издательство

ДОДЭКА

Москва
Додэка, ДМК Пресс, 2014

УДК 517.443
ББК 22.161.1
С34

Сибуя, Митио.

С34 Занимательная математика. Анализ Фурье. Манга. / Митио Сибуя (автор), Хироки Харусэ (худож.); пер. с яп. Клионского А. Б. — М. : ДМК Пресс, 2014. — 256 с. : ил. — (Серия «Образовательная манга»). — Доп. тит. л. яп. — ISBN 978-5-97060-111-2.

Девочки Рика, Фумика и Эрина организовали рок-группу и хотят выступить на фестивале, но никак не найдут вокалиста. А тут ещё контрольная по математике, с которой у Фумики проблемы. Умница Эрина готова помочь подруге и объяснить сложные математические понятия на примере звуков и преобразования Фурье.

Чистый звук — это простая волна. Любой сложный звук получается смешением чистых звуков. Преобразование Фурье как раз и позволяет разложить любой звук на гармонические составляющие и найти частотный спектр.

Вместе с Эриной, Рикой и Фумикой вы узнаете о том:

- что волны бывают продольными и поперечными, и у волн есть частота и амплитуда;
- как связана единичная окружность с синусом и косинусом, и что такое угловая частота;
- что такое интеграл и почему он может быть определённым, а производная нет;
- как складывать, вычитать и умножать функции;
- что такое ортогональность функций;
- что такое ряды Фурье, синтез функций и преобразование Фурье.

Вы увидите, как анализ Фурье помог девочкам найти вокалиста и выиграть одно принципиальное пари.

Если у вас голова идёт кругом от математики и вас пугают такие слова, как тригонометрия, производные и интегралы, то присоединяйтесь к Рике, Фумике и Эрине.

УДК 517.443
ББК 22.161.1

Original Japanese edition
Manga de Wakaru Fourier Kaiseki (Manga Guide: Fourier Analysis)
By Michio Shibuya (Author), Hiroki Haruse (Illustrator) and
Trend-Pro Co., Ltd. (Producer)
Published by Ohmsha, Ltd.
3-1 Kanda Nishikicho, Chiyodaku, Tokyo, Japan
Russian language edition copyright © 2014 by DMK Press
Translation rights arranged with Ohmsha, Ltd.

Все права защищены. Никакая часть этого издания не может быть воспроизведена в любой форме или любыми средствами, электронными или механическими, включая фотографирование, ксерокопирование или иные средства копирования или сохранения информации, без письменного разрешения издательства.

ISBN 978-4-274-06617-7 (яп.) Copyright © 2006 by Michio Shibuya and Trend-Pro Co., Ltd
ISBN 978-5-94120-266-9 (Додэка) © Перевод, Издательский дом «Додэка-XXI», 2013
ISBN 978-5-97060-111-2 (ДМК Пресс) © Издание, ДМК Пресс, 2014

ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель данной книги — дать читателю общее представление о преобразовании и анализе Фурье. Анализ Фурье используется чрезвычайно широко не только в физике, но и в технике. В его основе лежит такая математическая идея, как преобразование Фурье. Наверняка многие читатели считают, что математика — это формулы. Однако главное при изучении математики — это не запоминание формул, а овладение основными понятиями.

Для овладения этими понятиями необходимо обладать некоторыми базовыми знаниями. Для преобразования Фурье такими базовыми знаниями являются производная, интеграл и тригонометрические функции. И очень важно усвоить их суть. Когда тригонометрические функции (синус, косинус и тангенс) изучают в старшей школе, основное внимание уделяется соотношениям сторон в прямоугольном треугольнике, и зачастую всё заканчивается упражнениями по применению соответствующих формул. В этой книге я постарался определить тригонометрические функции через единичную окружность. Думаю, что после её прочтения вы согласитесь, что такая точка зрения вполне приемлема.

С другой стороны, данную книгу можно также назвать справочником по функциям тригонометрии. Минимально необходимый набор формул приведён в ней без доказательств, однако главное — это не запомнить формулы, а проникнуться новыми взглядами и трактовками, полученными в результате их применения. Во многих учебниках и справочниках, изданных ранее, основной упор делался на запоминание формул и на решение учебных задач. На экзаменах в старших школах и университетах проверяется способность учащихся производить вычисления с помощью формул. Из-за этого были экзаменуемые, которые просто запоминали все задачи наизусть.

В анализе Фурье на основе некоторых базовых математических знаний выводятся новые понятия. Овладение этими понятиями — дело гораздо более интересное, чем заучивание формул. Хотя анализ Фурье используется в самых разных областях, в данной книге в качестве примера рассматривается только «звук». Самостоятельный анализ различных звуков позволит читателям совершить новые открытия. Читателям, которые с помощью данной книги овладеют основными понятиями преобразования и анализа Фурье и проявят интерес к более глубокому изучению данной темы, я могу порекомендовать книгу издательства Ohmsha — «Преобразование Фурье с помощью Excel», одним из скромных соавторов которой я являюсь. В ней приведены примеры разнообразного анализа, который можно быстро и удобно провести с помощью программы Excel на персональном компьютере.

Хочу здесь поблагодарить re_akino, превратившего обычно скучное и переполненное формулами описание анализа Фурье в увлекательную историю, художника Харасэ Хироки, который смог выразить эту историю в виде красивой манги, а также коллектив отдела разработок издательства Ohmsha, который оказывал поддержку в осуществлении данного проекта до самого его завершения.

Митио Сибуя

СОДЕРЖАНИЕ

ПРОЛОГ

ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ


НУ ЧТО...
...НАШЛИ ВОКАЛИСТА?
НЕТ ЕЩЁ!

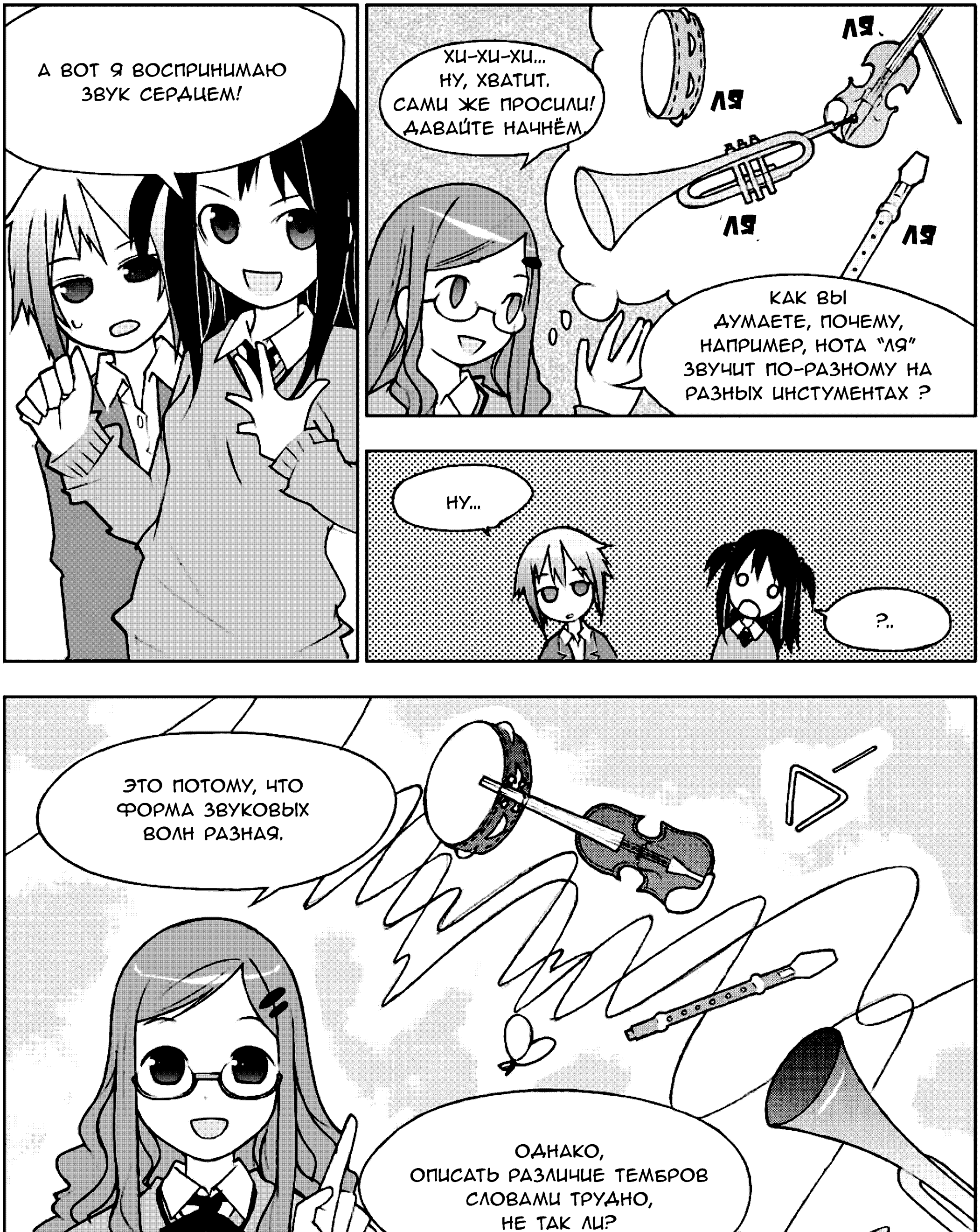

Жалко! Вроде, у нас собралась неплохая рок-группа:
Рика — гитара, Фумика — бас-гитара и я — ударные, а вокалиста нет.
Ах, если бы ты, Фумика, могла стать вокалистом...
Но, к сожалению, твой голос...
Бор-мо-чет...
Что, мой голос?
Никуда не годится.
ШЛЁ—ЁП
Ах! Ну почему? Бог дал мне музыкальный талант и красоту...
Какое горе!
...а вот красивым голосом одарить забыл?!

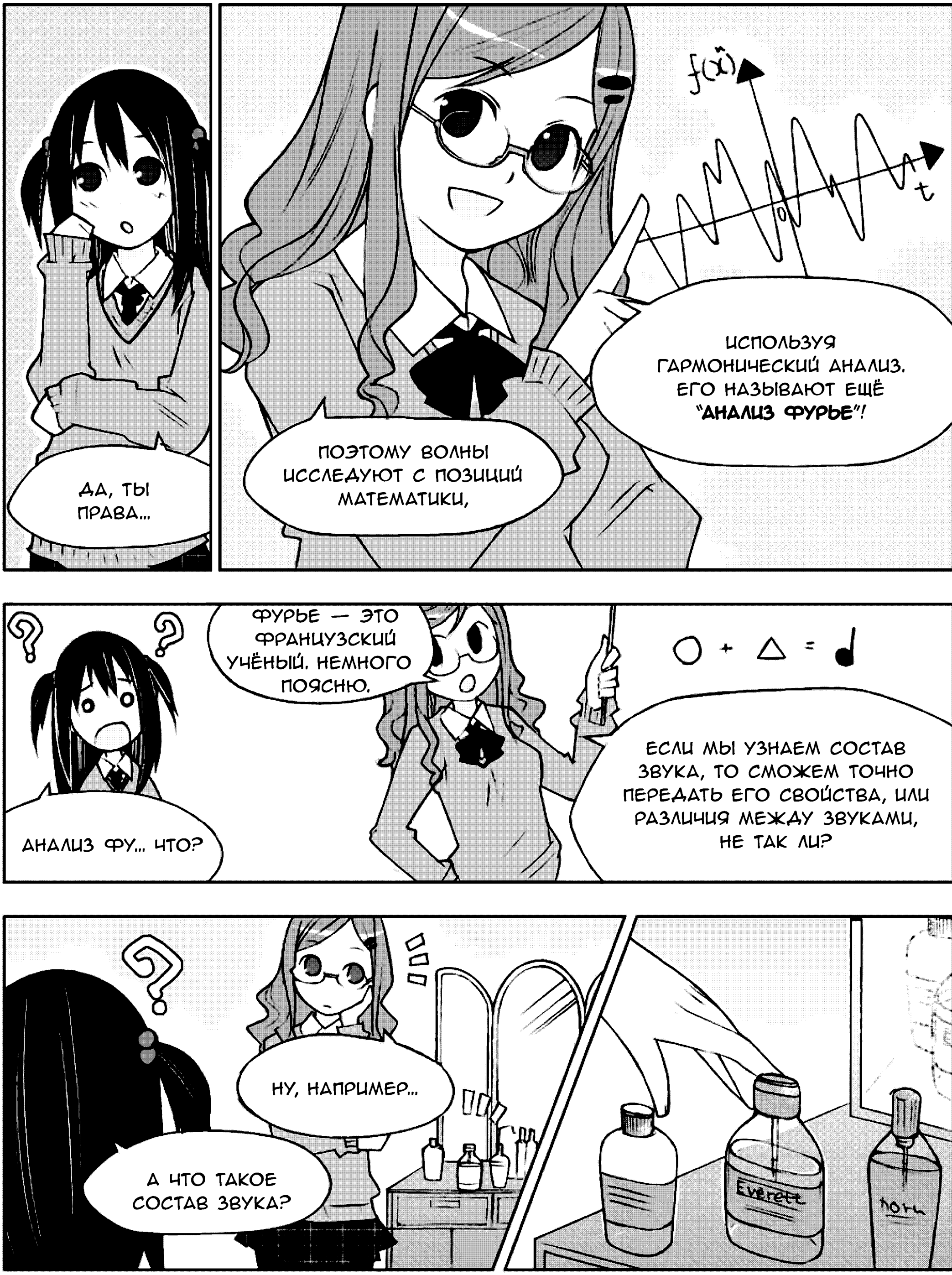

КОНЕЧНО, ТИХОНЯ РИКА СО СЛАБЕНЬКИМ ГОЛОСОМ НЕ В СЧЁТ...
ХЛОП
А ТЫ, ЭРИНА, НЕ МОГЛА БЫ СПЕТЬ?
ОЙ
ХМ...
ПЕТЬ НА СЦЕНЕ, СИДЯ ЗА БАРАБАНАМИ?!
ФЬЮИТЬ
ШМЯК
ВЫ ЧТО, ИЗДЕВАЕТЕСЬ!
МОЖЕТ, СПРОСИМ У ЮКИ?
НАНАНА
ВОТ ОН! НАШ ЮКИ!
У ЮКИ?!
ЭТО ИСКЛЮЧЕНО!
ЕМУ ДЕВУШКИ ИНТЕРЕСНЕЕ МУЗЫКИ!
Я ХОРОШО ЗНАЮ ЕГО, ВЕДЬ МЫ ЗНАКОМЫ С ДЕТСТВА...

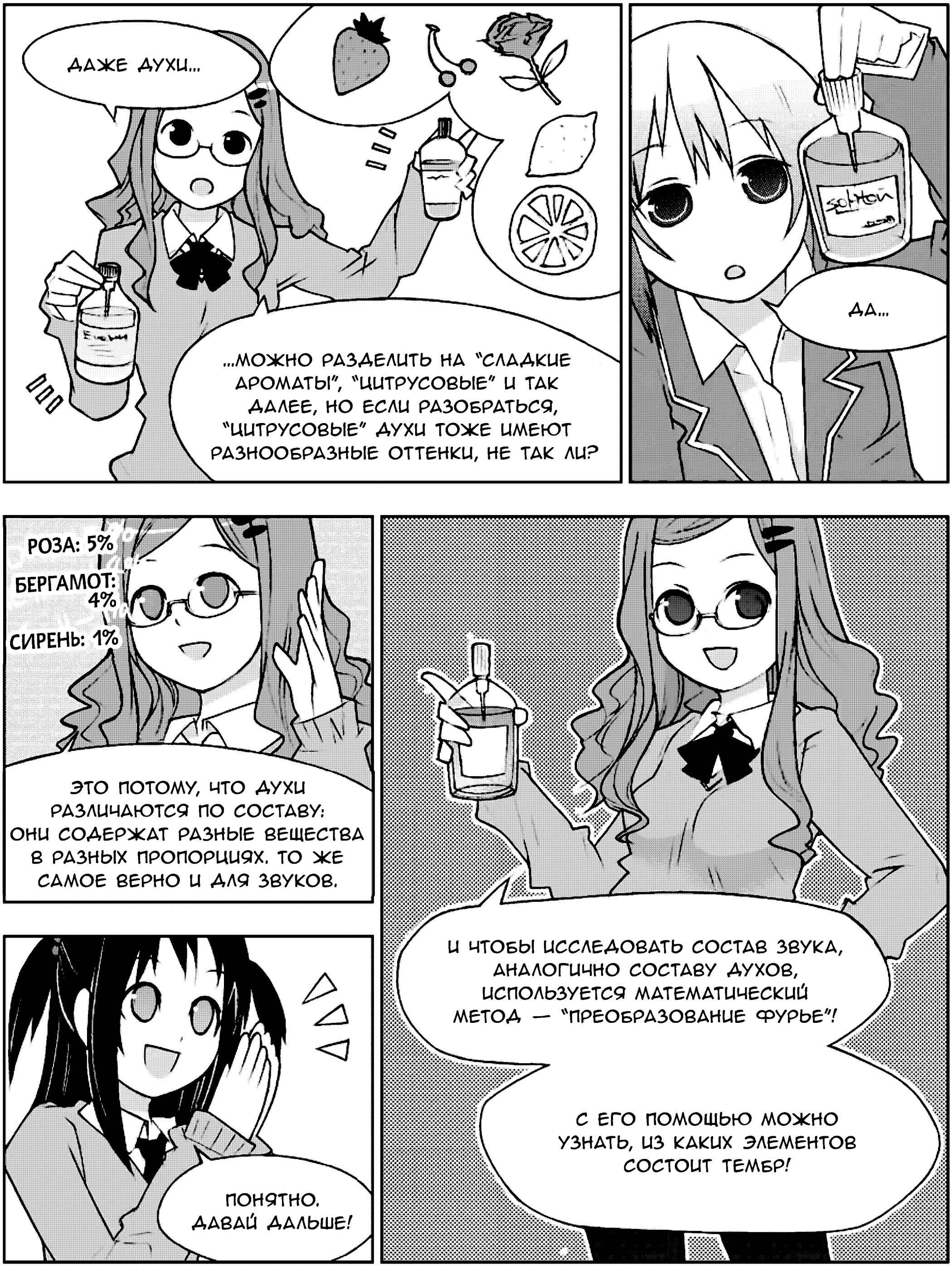

Однако Юки — вокалист популярной группы. У него должны быть широкие связи.
К тому же, он, похоже, неравнодушен к тебе...
Вздор!
Ладно... Вокалиста мы поищем. Но есть ещё одна проблема...
Какая ещё проблема?
Моя контрольная по математике...

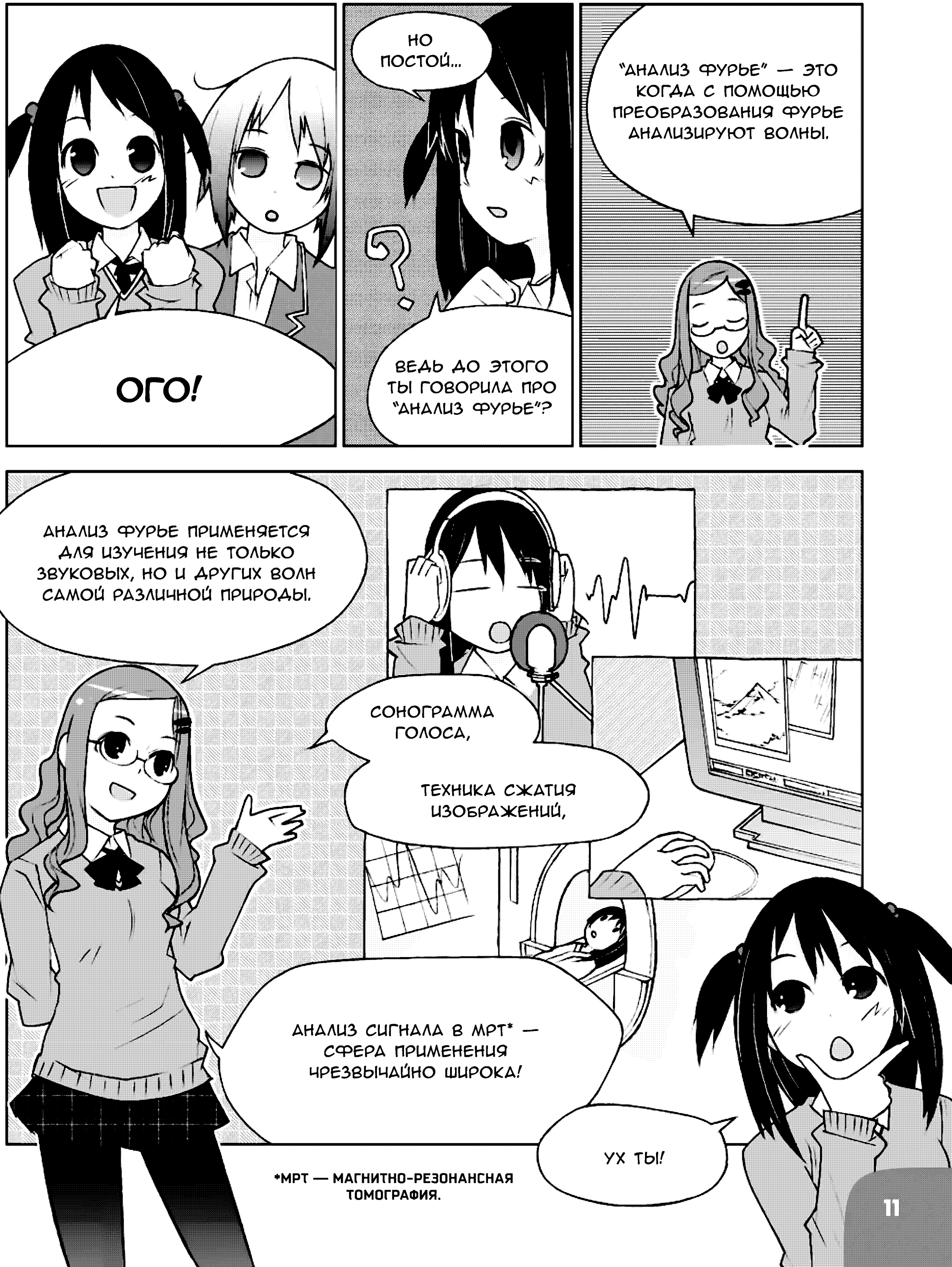

32
Курс:
Класс:
Нанасэ Фумика
ДР-Р... ДР-Р...
ФУМИКА!
ГР-Р-Р...
ГР-Р-Р...
ГР-Р-Р...
ДА Я ТЕБЯ...
ХНЫК-ХНЫК-ХНЫК...
БУДЕШЬ ПЛОХО УЧИТЬСЯ — ОТБЕРУ ГИТАРУ!
Ё-П-Р-С-Т!
УА-А-А!!!
ЭТО ОЗНАЧАЕТ...
...ЧТО ПОД УГРОЗОЙ САМО СУЩЕСТВОВАНИЕ НАШЕЙ ГРУППЫ!
...
ВОТ РИКА КАК-ТО ВЫКРУЧИВАЕТСЯ,
НО В МАТЕМАТИКЕ ТОЖЕ СЛАБА, ПРАВДА?
А ЭРИНА — ДРУГОЕ ДЕЛО. ОНА УМНИЦА...
ВРОДЕ БЫ УЖЕ УЧИТСЯ НА УРОВНЕ УНИВЕРСИТЕТА...


А вообще-то, есть ли какая-нибудь польза от математики?
ТИСК
Да, иногда есть!
Например?
Например,
Есть математика, которая описывает звук...
Звук?
А вот это важно! Расскажи поподробнее.
ВОЗДУХ
ЗВУК
ВОЗДУХ
БАРАБАННАЯ ПЕРЕПОНКА
Понимаешь ли ты, что звук передаётся колебаниями воздуха?
Д-д-д...а, немного.
Звук распространяется в воздухе подобно волне, колеблет наши барабанные перепонки, и, благодаря этому, мы слышим.


А вот я воспринимаю звук сердцем!
Хи-хи-хи... Ну, хватит. Сами же просили! Давайте начнём.
ЛЯ
ЛЯ
ЛЯ
ЛЯ
Как вы думаете, почему, например, нота "ля" звучит по-разному на разных инстументах ?
Ну...
?..
Это потому, что форма звуковых волн разная.
Однако, описать различие тембров словами трудно, не так ли?


Да, ты права...
Поэтому волны исследуют с позиций математики,
Используя гармонический анализ. Его называют ещё "**анализ Фурье**"!
f(x)
t
0
Анализ Фу... что?
Фурье — это французский учёный. Немного поясню.
Если мы узнаем состав звука, то сможем точно передать его свойства, или различия между звуками, не так ли?
А что такое состав звука?
Ну, например...
Everett


ДАЖЕ ДУХИ...
...МОЖНО РАЗДЕЛИТЬ НА "СЛАДКИЕ АРОМАТЫ", "ЦИТРУСОВЫЕ" И ТАК ДАЛЕЕ, НО ЕСЛИ РАЗОБРАТЬСЯ, "ЦИТРУСОВЫЕ" ДУХИ ТОЖЕ ИМЕЮТ РАЗНООБРАЗНЫЕ ОТТЕНКИ, НЕ ТАК ЛИ?
ДА...
РОЗА: 5%
БЕРГАМОТ: 4%
СИРЕНЬ: 1%
ЭТО ПОТОМУ, ЧТО ДУХИ РАЗЛИЧАЮТСЯ ПО СОСТАВУ: ОНИ СОДЕРЖАТ РАЗНЫЕ ВЕЩЕСТВА В РАЗНЫХ ПРОПОРЦИЯХ. ТО ЖЕ САМОЕ ВЕРНО И ДЛЯ ЗВУКОВ.
И ЧТОБЫ ИССЛЕДОВАТЬ СОСТАВ ЗВУКА, АНАЛОГИЧНО СОСТАВУ ДУХОВ, ИСПОЛЬЗУЕТСЯ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД — "ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ"!
ПОНЯТНО. ДАВАЙ ДАЛЬШЕ!
С ЕГО ПОМОЩЬЮ МОЖНО УЗНАТЬ, ИЗ КАКИХ ЭЛЕМЕНТОВ СОСТОИТ ТЕМБР!



*МРТ — МАГНИТНО-РЕЗОНАНСНАЯ ТОМОГРАФИЯ.


Кроме того, если узнать состав звука, то можно воспроизвести точно такой же звук, не так ли?
На этом принципе основана работа синтезатора.
А "блок эффектов", влияя на состав звука, изменяет звучание!
Значит...
Трам-тарарам
?
О звуке ничего
толком невозможно рассказать без знания "Фурье"?!

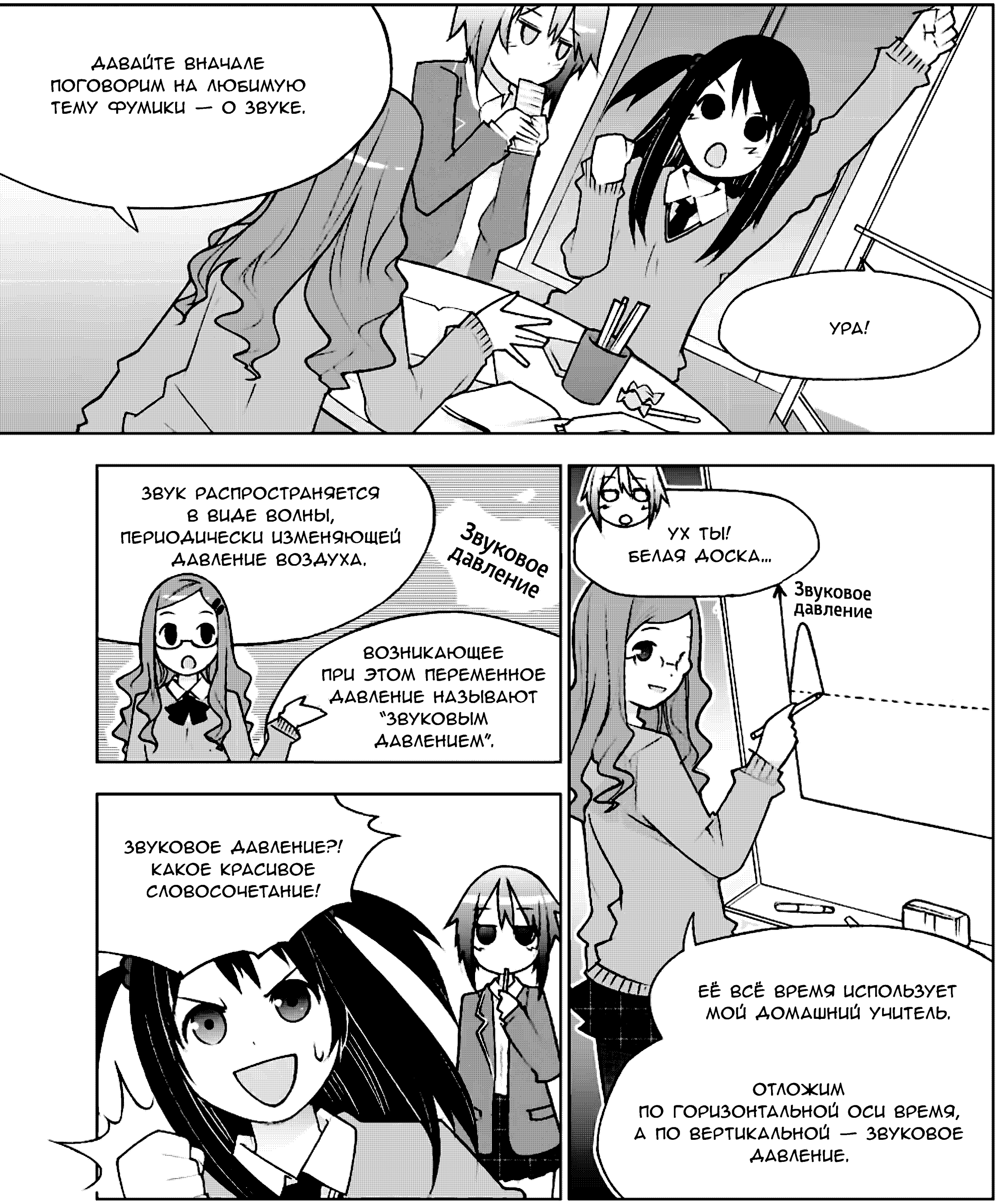

Ну чего ты так разошлась?
В самом деле...
Вот что, Эрина!
Ты должна рассказать нам всё, что знаешь сама про этого самого Фурье!
Хорошо, но только...
$\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3}$
Не пугайтесь. Чтобы понять преобразование Фурье, нужно познакомиться с тригонометрическими функциями, производными и интегралами.
...Это хорошо.
Это в самую точку!
Я ведь сейчас как раз мучаюсь с этой тригонометрией, производными и интегралами!

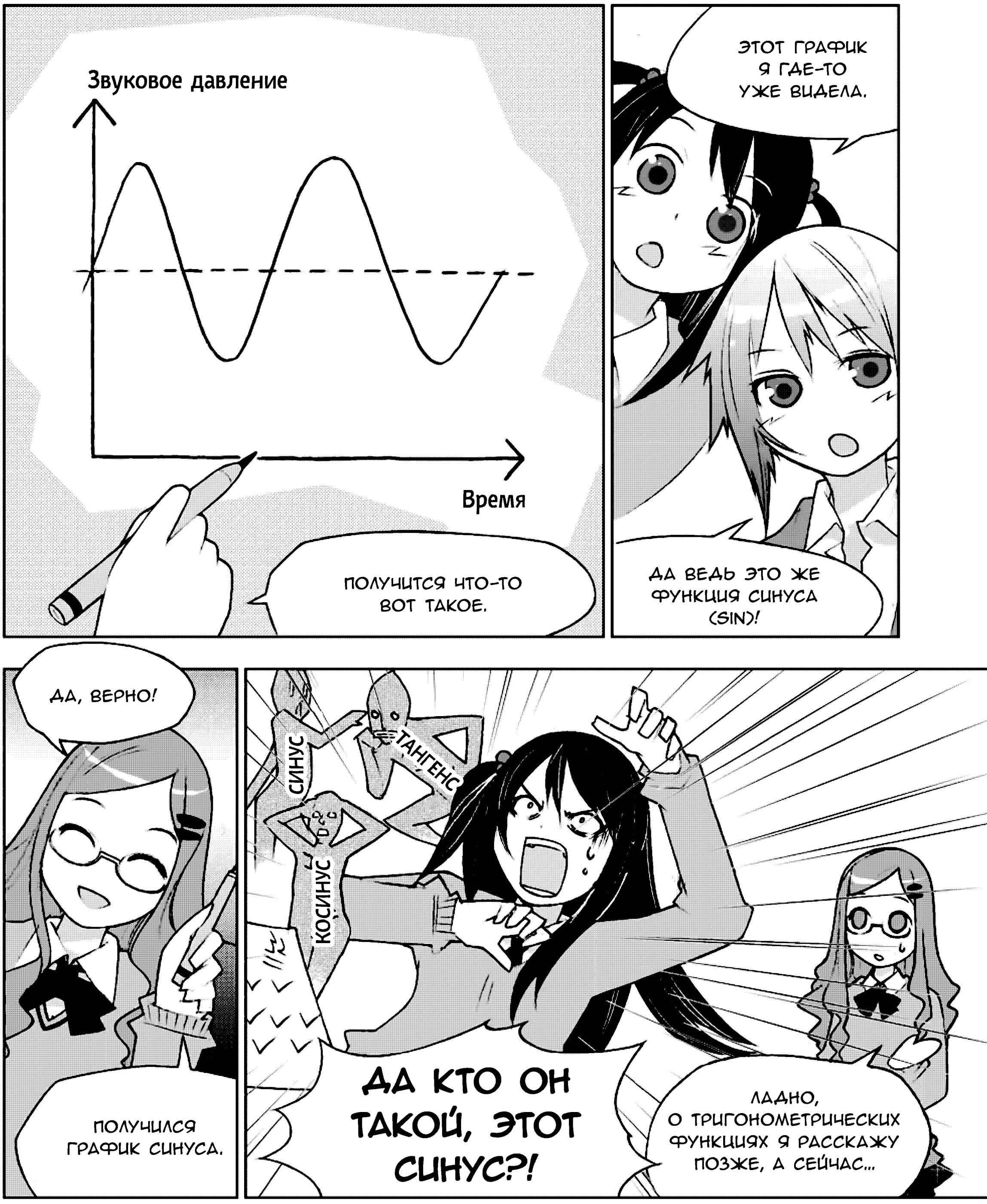
ХИ-ХИ-ХИ.
НУ, ТОГДА ПРИСТУПИМ К ИЗУЧЕНИЮ.
УРА!

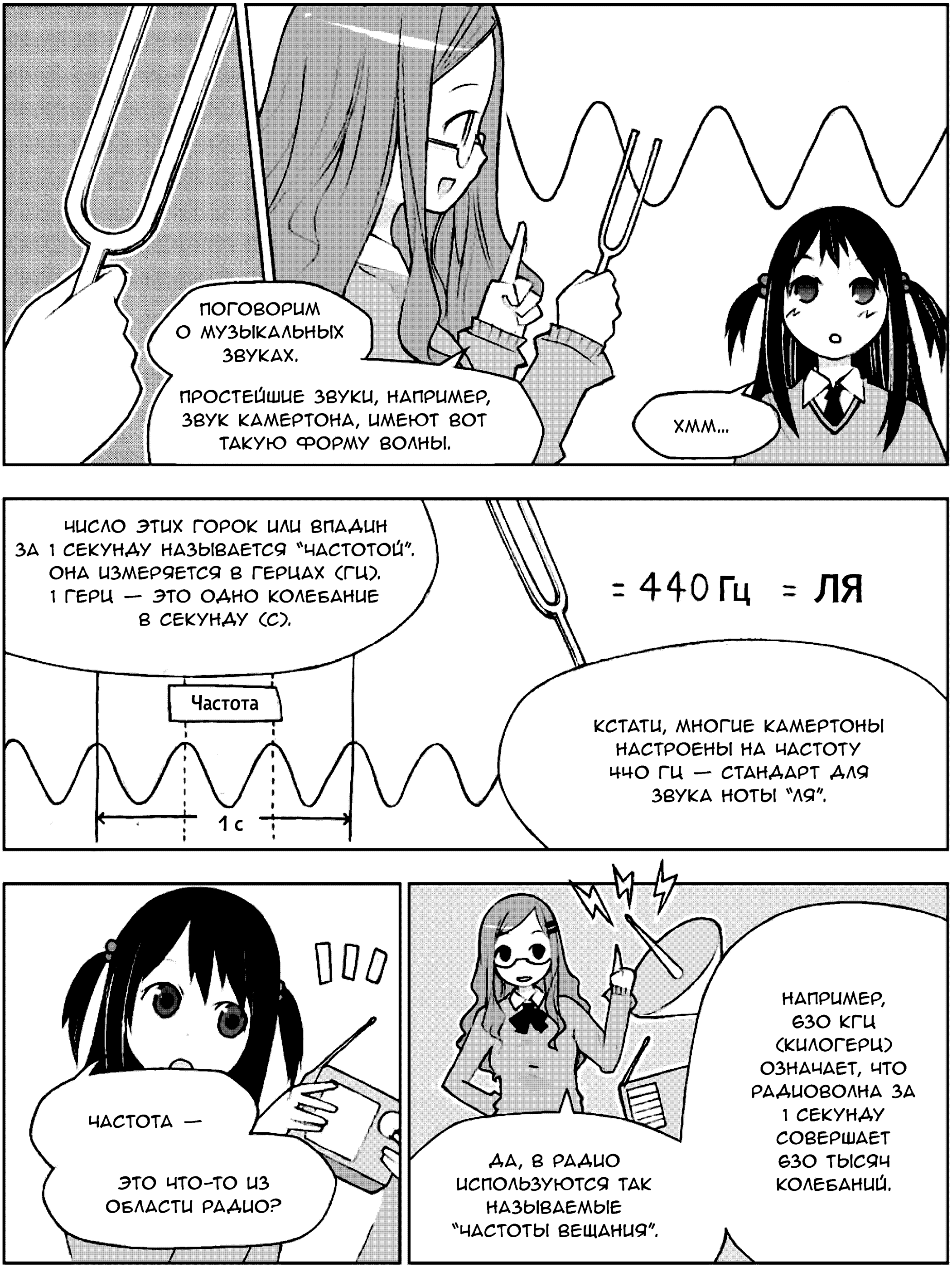
ГЛАВА 1

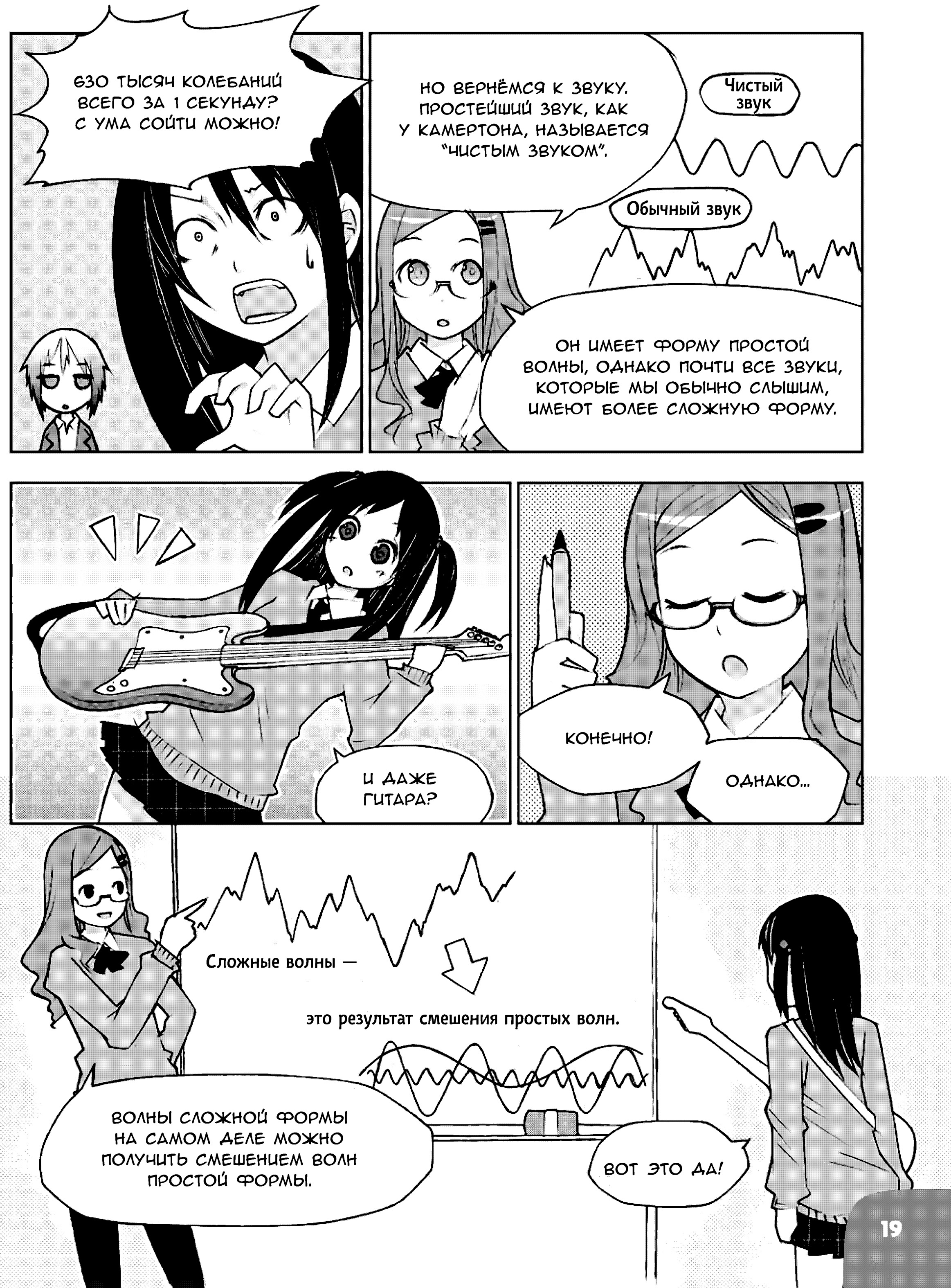
ВОЛНЫ ПРОСТЫЕ И СЛОЖНЫЕ

1. Звуки — это волны

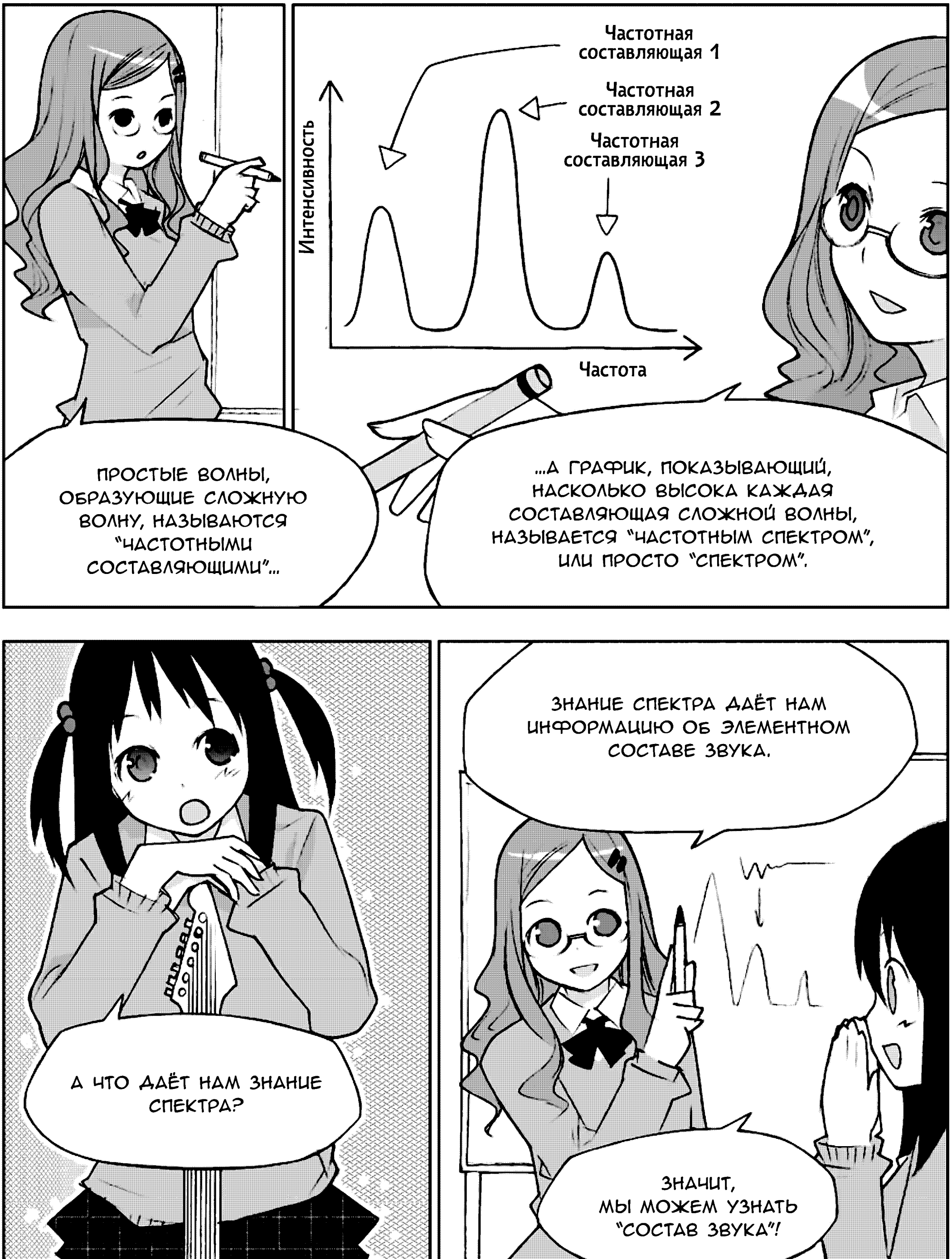


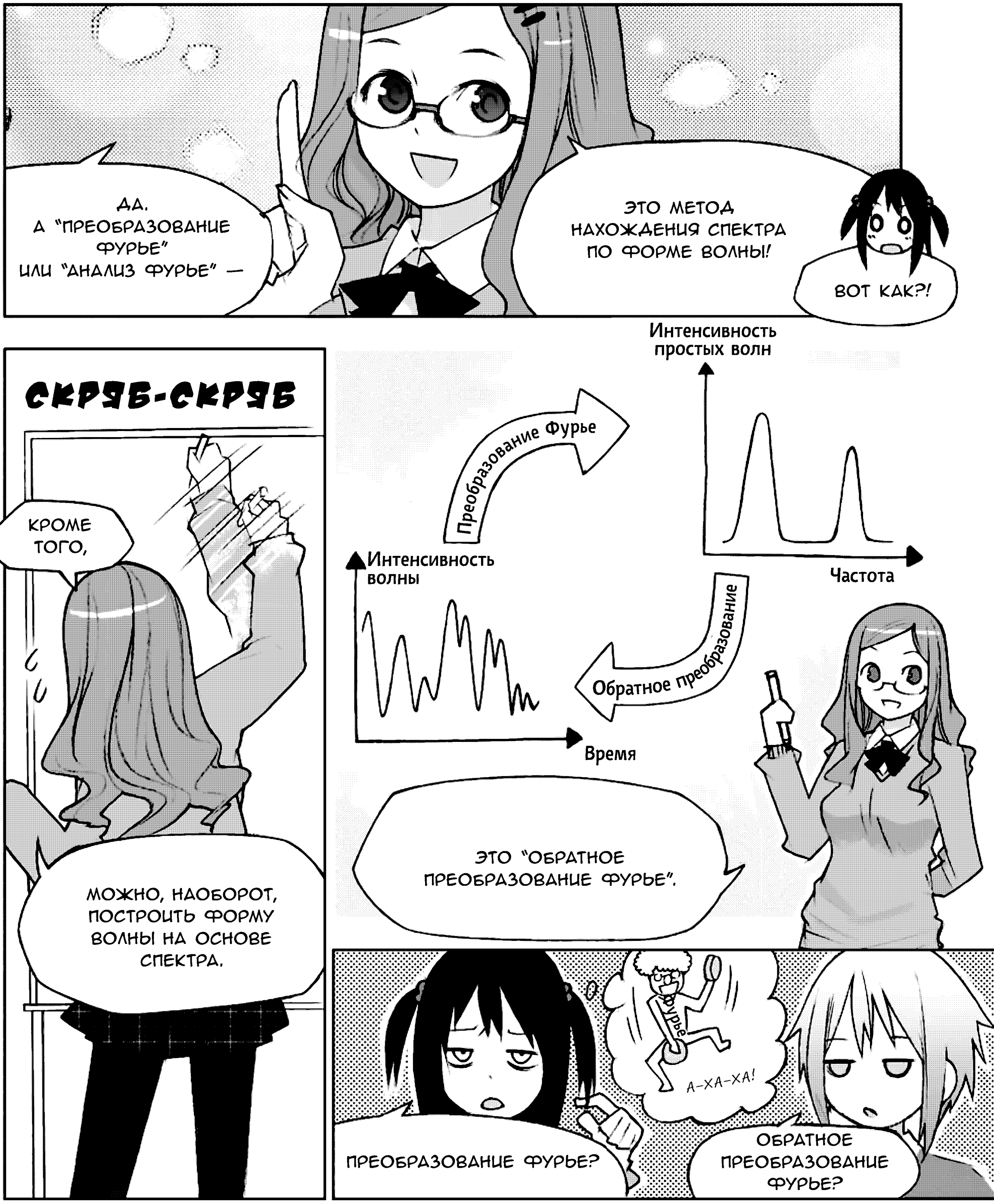

Звуковое давление
Время
Получится что-то вот такое.
Этот график я где-то уже видела.
Да ведь это же функция синуса (sin)!
Да, верно!
Получился график синуса.
Синус
Тангенс
Косинус
Да кто он такой, этот синус?!
Ладно, о тригонометрических функциях я расскажу позже, а сейчас...


Поговорим о музыкальных звуках.
Простейшие звуки, например, звук камертона, имеют вот такую форму волны.
Хмм...
Число этих горок или впадин за 1 секунду называется "частотой". Она измеряется в герцах (Гц). 1 герц — это одно колебание в секунду (с).
= 440 Гц = ЛЯ
Частота
1 с
Кстати, многие камертоны настроены на частоту 440 Гц — стандарт для звука ноты "ля".
Частота —
это что-то из области радио?
Да, в радио используются так называемые "частоты вещания".
Например, 630 кГц (килогерц) означает, что радиоволна за 1 секунду совершает 630 тысяч колебаний.



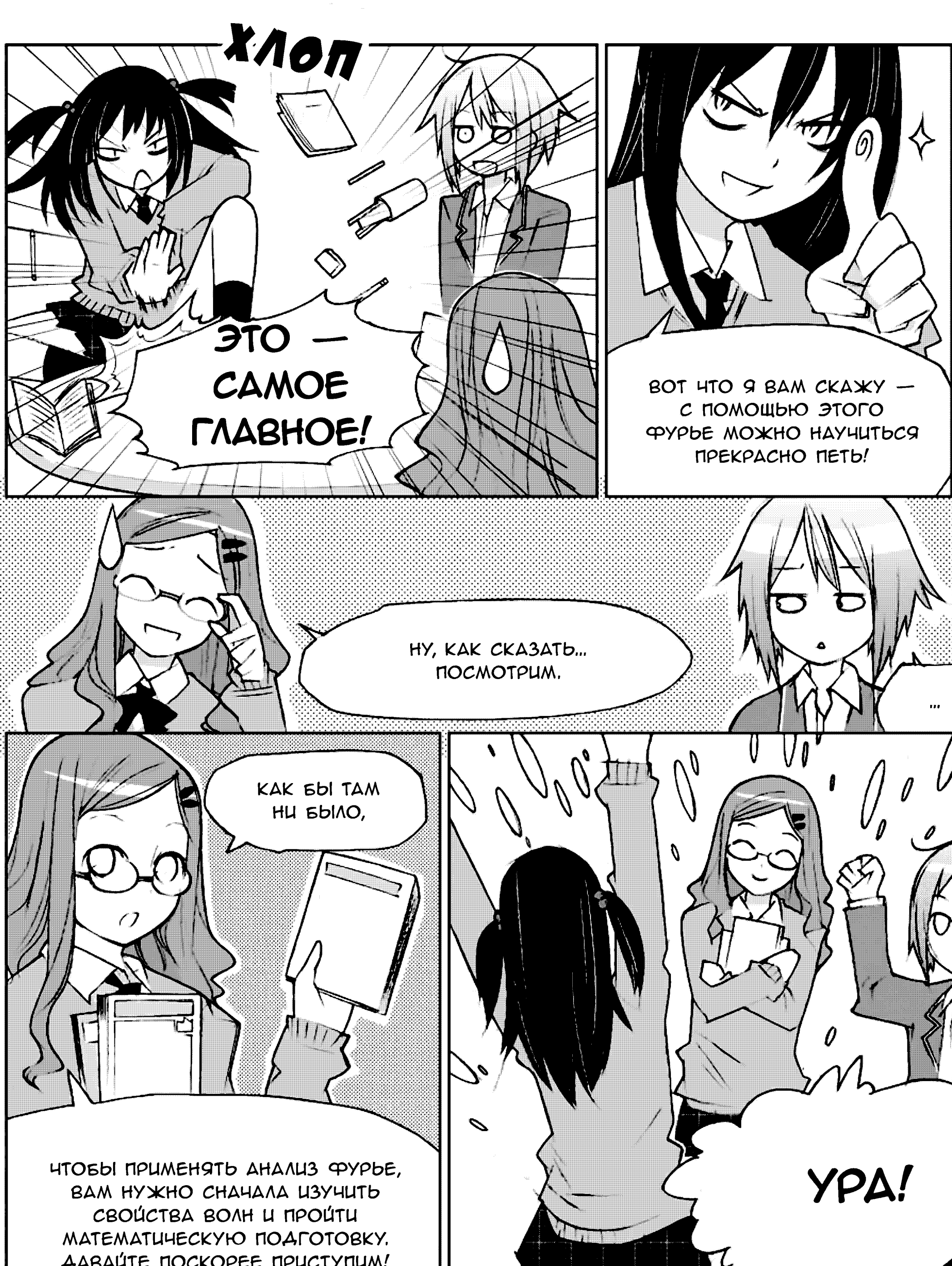
630 тысяч колебаний всего за 1 секунду? С ума сойти можно!
Но вернёмся к звуку. Простейший звук, как у камертона, называется "чистым звуком".
Чистый звук
Обычный звук
Он имеет форму простой волны, однако почти все звуки, которые мы обычно слышим, имеют более сложную форму.
И даже гитара?
Конечно!
Однако...
Сложные волны —
это результат смешения простых волн.
Волны сложной формы на самом деле можно получить смешением волн простой формы.
Вот это да!

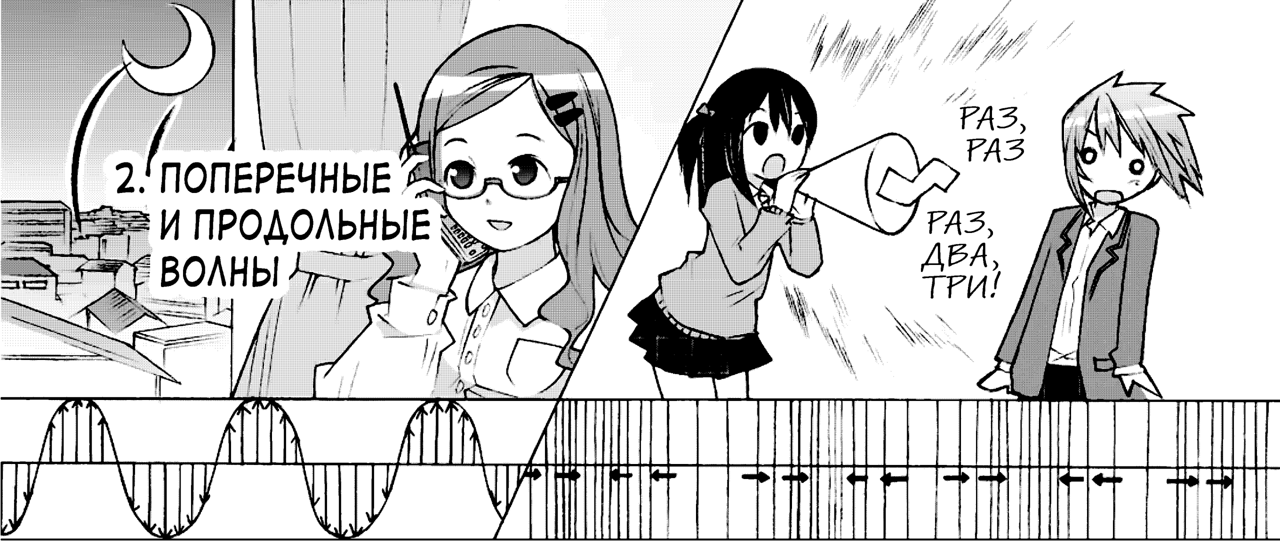

ПРОСТЫЕ ВОЛНЫ, ОБРАЗУЮЩИЕ СЛОЖНУЮ ВОЛНУ, НАЗЫВАЮТСЯ "ЧАСТОТНЫМИ СОСТАВЛЯЮЩИМИ"...
Частотная составляющая 1
Частотная составляющая 2
Частотная составляющая 3
Интенсивность
Частота
...А ГРАФИК, ПОКАЗЫВАЮЩИЙ, НАСКОЛЬКО ВЫСОКА КАЖДАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ СЛОЖНОЙ ВОЛНЫ, НАЗЫВАЕТСЯ "ЧАСТОТНЫМ СПЕКТРОМ", ИЛИ ПРОСТО "СПЕКТРОМ".
А ЧТО ДАЁТ НАМ ЗНАНИЕ СПЕКТРА?
ЗНАНИЕ СПЕКТРА ДАЁТ НАМ ИНФОРМАЦИЮ ОБ ЭЛЕМЕНТНОМ СОСТАВЕ ЗВУКА.
ЗНАЧИТ, МЫ МОЖЕМ УЗНАТЬ "СОСТАВ ЗВУКА"!



Да. А "преобразование Фурье" или "анализ Фурье" —
это метод нахождения спектра по форме волны!
Вот как?!
Скряб-скряб
Кроме того,
можно, наоборот, построить форму волны на основе спектра.
Интенсивность простых волн
Частота
Преобразование Фурье
Интенсивность волны
Время
Обратное преобразование
Это "обратное преобразование Фурье".
Фурье
А-ха-ха!
Преобразование Фурье?
Обратное преобразование Фурье?


НАКОНЕЦ,
ИЗУЧЕНИЕ РАЗЛИЧИЙ СПЕКТРОВ С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ...
...НАЗЫВАЮТ "АНАЛИЗОМ ФУРЬЕ".
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ, АНАЛИЗ ФУРЬЕ...
РИКА, ДОРОГАЯ! ВОТ ОНА — ЦЕЛЬ, К КОТОРОЙ МЫ ДОЛЖНЫ СТРЕМИТЬСЯ! ВЕДЬ, ОСВОИВ АНАЛИЗ ФУРЬЕ, МЫ ОТКРОЕМ ВСЕ СЕКРЕТЫ МУЗЫКИ.
НУ, ХОРОШО!
ДАВАЙТЕ ТЕПЕРЬ ПОГОВОРИМ О НАИБОЛЕЕ ТИПИЧНОМ ПРИМЕНЕНИИ АНАЛИЗА ФУРЬЕ В МУЗЫКЕ — АНАЛИЗЕ ГОЛОСА!
!


ХЛОП
ЭТО — САМОЕ ГЛАВНОЕ!
ВОТ ЧТО Я ВАМ СКАЖУ — С ПОМОЩЬЮ ЭТОГО ФУРЬЕ МОЖНО НАУЧИТЬСЯ ПРЕКРАСНО ПЕТЬ!
НУ, КАК СКАЗАТЬ... ПОСМОТРИМ.
...
КАК БЫ ТАМ НИ БЫЛО,
ЧТОБЫ ПРИМЕНЯТЬ АНАЛИЗ ФУРЬЕ, ВАМ НУЖНО СНАЧАЛА ИЗУЧИТЬ СВОЙСТВА ВОЛН И ПРОЙТИ МАТЕМАТИЧЕСКУЮ ПОДГОТОВКУ. ДАВАЙТЕ ПОСКОРЕЕ ПРИСТУПИМ!
УРА!



2. ПОПЕРЕЧНЫЕ И ПРОДОЛЬНЫЕ ВОЛНЫ

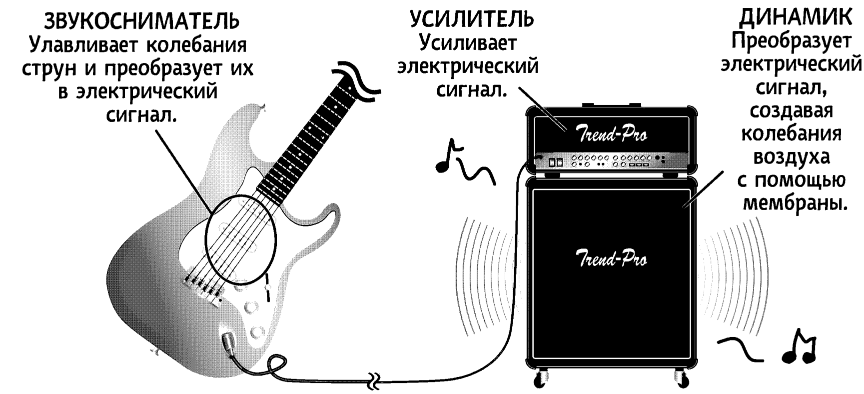
До этого я рассказала о звуке, но радио и свет также распространяются посредством волн. Разумеется, форму этих волн нельзя увидеть непосредственно, просто мы их так себе представляем.

Ну, допустим.

Мы не видим эти волны, но их можно преобразовать в электрический сигнал и измерить с помощью приборов.

А что, звук электрогитары выходит из усилителя тоже потому, что звуковая волна превращается в электрический сигнал?

Именно! Точнее, конечный звуковой выход — это динамики, а не усилитель.... Звукосниматель преобразует колебания струн (слабый звук) в электрический сигнал, который затем подаётся на усилитель. Под действием усиленного электрического сигнала мембраны динамиков вибрируют, создавая колебания воздуха, воспринимаемые ухом как звук (Рис. 1-1).



☐ Рис. 1-1. Процесс усиления звука в электрогитаре.

Понятно...

Изучая колебания струны в качестве «сигнала», мы можем наблюдать форму волны, подобную той, которая была в примерах со звуком.
Итак, до этого момента я говорила о волнах в общем, но на самом деле они бывают продольными и поперечными.

Правда? Ну да, ведь волны бывают разные.

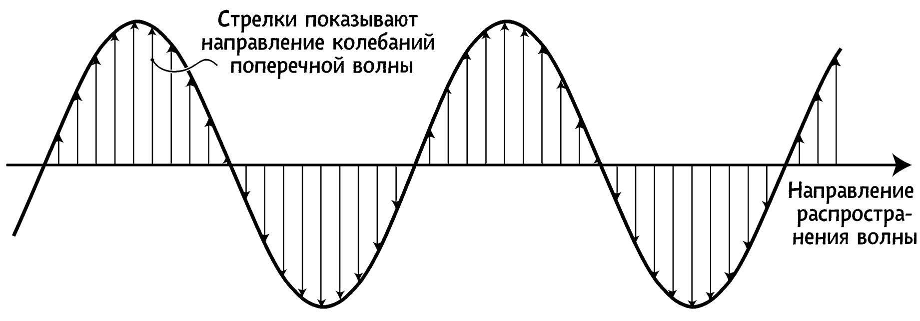
Ты удивлена? Сначала поговорим об электромагнитных волнах. К ним, в частности, относятся радиоволны, используемые в радио- и телевещании, в сотовой связи. Кроме того, видимый свет и тепловое (инфракрасное) излучение по своим физическим свойствам также относятся к электромагнитным волнам. Все они распространяются со скоростью около 300 тысяч км/с.

А я слышала, что скорость звука в воздухе — около 340 м/с (при температуре 16°C и давлении в 1 атмосферу). Значит, электромагнитные волны намного быстрее!

Да. В электромагнитной волне электрическое и магнитное поля изменяются во времени перпендикулярно направлению распространения волны, поэтому её называют поперечной волной.

Что это означает?

Представь, что ты «села» на электромагнитную волну и движешься вдоль неё. Тогда ты увидишь, что электрическое и магнитное поля изменяются волной: то вверх, то вниз, или то влево, то вправо. Кстати, электромагнитные волны распространяются и в вакууме (Рис. 1-2).



☐ Рис. 1-2. Вид поперечной волны.

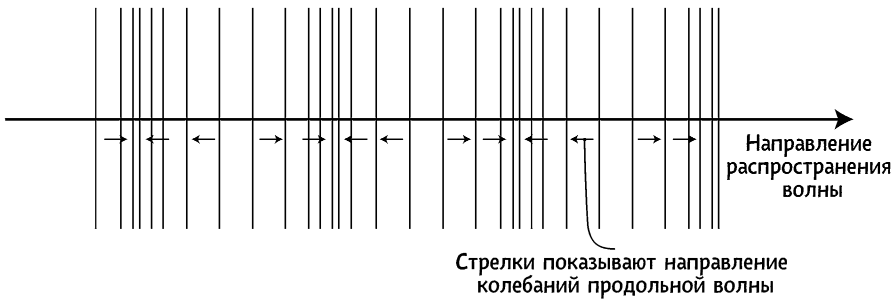
Понятно...

А звук — тоже поперечная волна?

Незачёт… Звук — это продольная волна.

Продольная? Как выглядит поперечная волна, мы себе представили, а как представить продольную?

Звуковая волна распространяется в воздухе, плотность которого то увеличивается, то уменьшается. Если ты «сядешь» на звуковую волну, то будешь двигаться вдоль неё вперед-назад, потому что плотность воздуха будет изменяться перед тобой и сзади от тебя. Волны, изменения плотности среды в которых происходят параллельно направлению, распространения, называют продольными (Рис. 1-3).



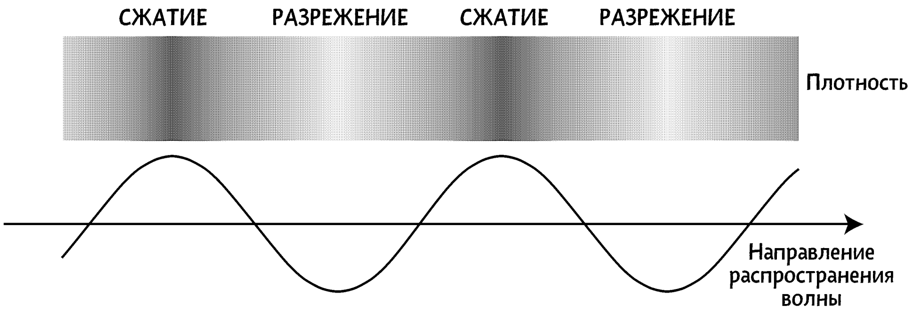
□ Рис. 1-3. Вид продольной волны.

Это движение напоминает пружину!

Да, это близкий пример. Продольным волнам необходима среда, в которой будут распространяться изменения её плотности, поэтому в вакууме они не распространяются. Средой может быть не только газ (например, воздух), но и жидкость (например, вода) и даже твёрдое тело (например, дерево или металл).

Ясно.

Так как в продольных волнах плотность среды распространения, например, воздуха, в направлении распространения увеличивается (то есть среда сжимается) и уменьшается (то есть среда становится разрежённой), их ещё называют «волнами сжатия-разрежения». Если изобразить волну сжатия-растяжения в виде графика изменения плотности, то получится такая же кривая, как для поперечной волны (Рис. 1-4).



☐ Рис. 1-4. График изменения плотности среды.

Таким образом, независимо от того, является ли волна поперечной или продольной, её можно выразить с помощью функции синуса (sin). Так, если нарисовать изменения электрической и магнитной составляющей вдоль направления распространения электромагнитной волны, то получится так называемая синусоида, то есть графическое изображение функции синуса. То же самое и для продольной волны (волны сжатия-разрежения), изобразив изменения плотности, мы опять получим синусоиду.

И здесь тоже синус!

Естественно, преобразование Фурье и тригонометрические функции тесно связаны. Об этом будет идти речь в дальнейшем, здесь же просто усвойте, что волны неразрывно связаны с функцией синуса.

3. Распространение волн во времени

Услышав слово «волна», мы сразу представляем волны на поверхности воды, не так ли?

Да, пожалуй.

Представьте себе лист на поверхности пруда. Если бросить в пруд камешек, то появятся волны, расходящиеся концентрическими окружностями, но лист останется на прежнем месте, только чуть-чуть колеблясь.

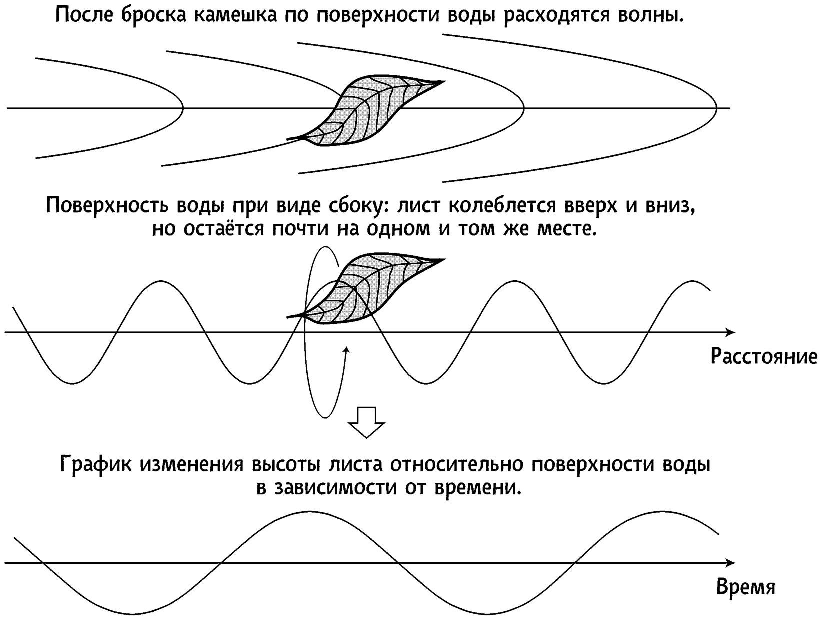
Точно.

Такая картина распространения этих волн указывает на то, что скорость волны (продвижения вершин или впадин) и скорость движения какой-либо точки на водной поверхности — это разные вещи.

Так же, как «живая волна», которую зрители устраивают на концерте?

Да, каждый зритель просто поднимает и опускает руки, но издалека кажется, что бежит волна.

Да, что-то в этом духе. Волны на поверхости воды распространяются не потому, что движется вперёд сама поверхность, а благодаря тому, что колебания воды в одном месте воздействуют на соседние частицы воды, они тоже колеблются и влияют на следующие частицы... Волна рождается в результате подобной передачи влияний (Рис. 1-5).



☐ Рис. 1-5. Движение листа, колеблющегося на волнах, и их временно́й график.

Понятно.

Распространение волны — это быстрое продвижение самого переднего края волны вперёд. А как вы думаете, что такое «форма волны»?

Разве «волна» и «форма волны» — это разные понятия?

Да. Давайте обсудим пример с «живой» волной, который вы здесь привели. «Живая» волна получается, когда стоящие в ряд люди по порядку поднимают и опускают руки, не так ли?

Да.

При взгляде издалека, поднявший руки человек становится «гребнем волны», и кажется, как будто бежит волна. Однако если мы будем смотреть только на одного человека, а не на весь ряд, то увидим, что человек просто время от времени поднимает и опускает руки. График, выражающий положение его рук в различные моменты времени, и называется «формой волны» (Рис. 1-6).

☐ Рис. 1-6. Волна как изменение состояния во времени.

Да, да!

Стало немного понятнее? Как мы уже видели, и для радиоволн (электромагнитных волн, включая свет, то есть поперечных волн), и для звуковых волн (волн сжатия-разрежения, то есть продольных волн), можно построить график изменений во времени — «форму волны». В природе обычно наблюдаются волны сложной формы, а не простой.

Сложной…

Как я уже говорила, волну сложной формы можно рассматривать как синтез (смешение) нескольких волн простой формы. Эта идея — смешение нескольких простых волн даёт сложную — лежит в основе «преобразования Фурье».

Простых, сложных…

Другими словами, «преобразование Фурье» — это математический метод определения, из каких простых волн (какой частоты и какой интенсивности) состоит волна сложной формы.

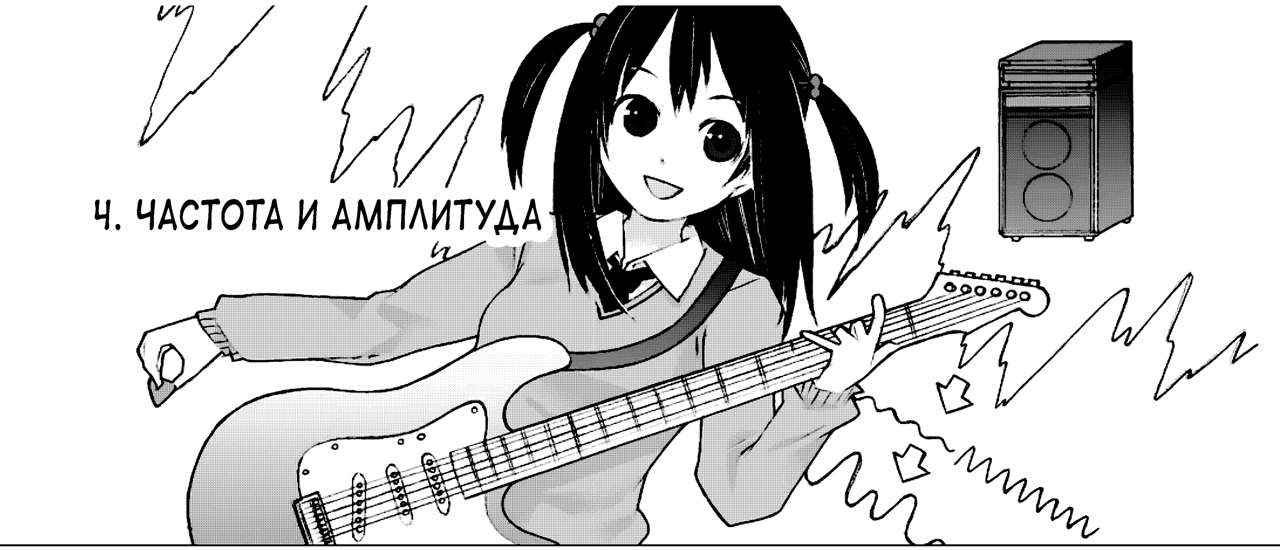
Преобразование Фурье…

Рика, ты сегодня молодец, много разговариваешь!

Тырк! (тыркает Фумику).

Ой!

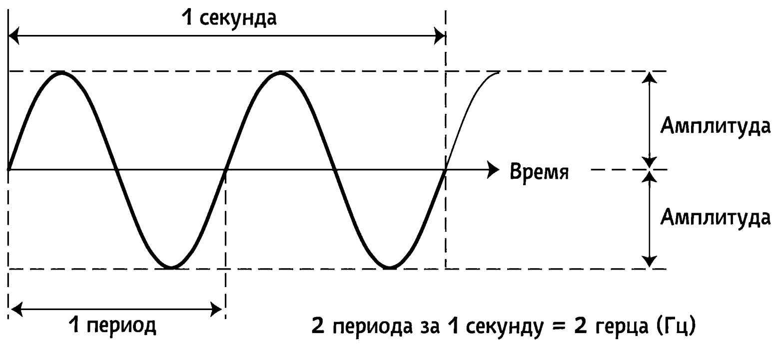
Ч. ЧАСТОТА И АМПЛИТУДА



Теперь, усвоив, что такое сигнал и форма волны, попробуем интуитивно подойти к преобразованию Фурье, поговорив о частоте и амплитуде.

Ого-го! Ну, о частотах ты уже нам рассказала, а что такое амплитуда?

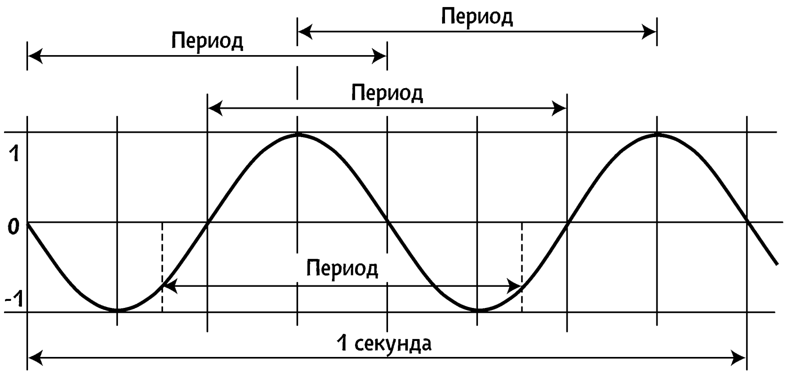
Амплитуда — это «высота» горки или «глубина» впадины, считая от нулевого уровня сигнала. Далее, один «комплект» из горки и впадины называют периодом. Я уже говорила, что частота — это количество колебаний в 1 секунду. Из графика также видно, что частота — это «количество периодов в 1 секунде». Например, на рисунке изображён сигнал с частотой 2 Гц (Рис. 1-7).



☐ Рис. 1-7. Период и амплитуда сигнала с частотой 2 Гц.

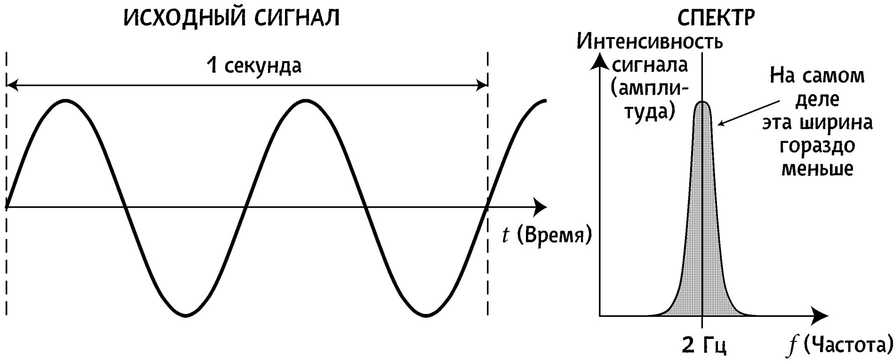
Да, глядя на график, всё становится понятно.

Кроме того, один период не обязательно измерять между двумя нулевыми уровнями — любой полный комплект «горка + впадина» можно рассматривать как период (Рис. 1-8).



☐ Рис. 1-8. Понятие одного периода.

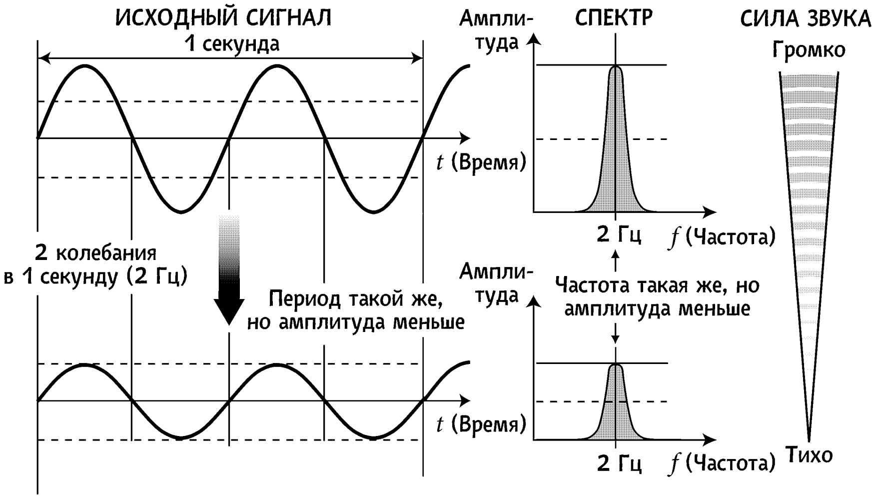
А если изобразить спектр сигнала с частотой 2 Гц на графике, то получится, как на Рис. 1-9.



☐ Рис. 1-9. Сигнал с частотой 2 Гц и его спектр.

Как просто, надо всего лишь отложить амплитуду в точке 2 Гц на горизонтальной оси!

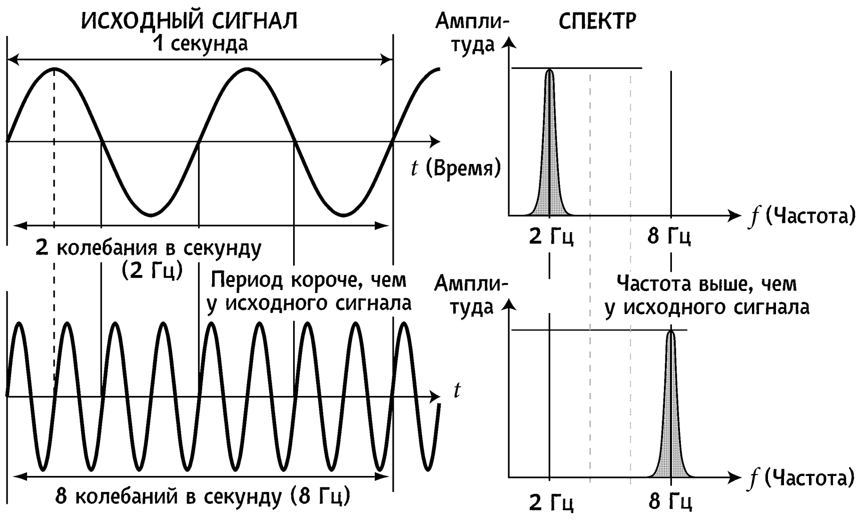
Вот именно. Теперь я расскажу вам о связи между амплитудой, частотой и звуком, который мы слышим. Амплитуда соответствует громкости звука. Другими словами, уменьшить амплитуду — это значит убавить громкость теле- или радиоприёмника. Эта взаимосвязь показана на следующем графике (Рис. 1-10).



☐ Рис. 1-10. Сигналы с частотой 2 Гц и отличающимися амплитудами.

Короче, если амплитуда мала, то и звук тихий?

Конечно. А что же будет, если увеличить частоту? Рассмотрим форму волны сигнала с колебаниями 8 раз в секунду, то есть с частотой 8 Гц. При этом число повторений формы волны за одинаковое время увеличится в 4 раза по сравнению с исходным сигналом, а на спектре появится пик на частоте 8 Гц.



☐ Рис. 1-11. Различие сигналов с частотами 2 и 8 Гц.

И правда, тонкие струны гитары колеблются быстрее, чем толстые, и звук у них выше!

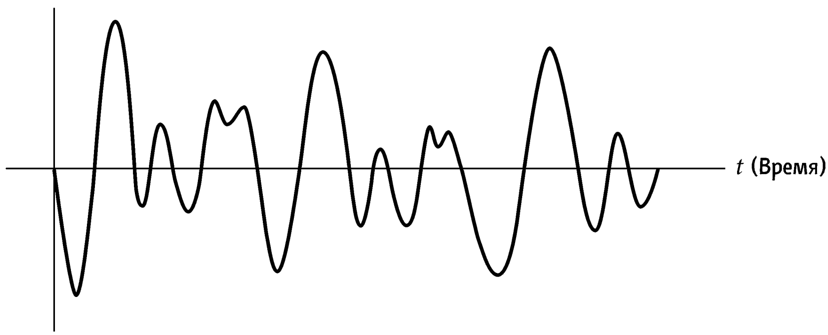
Кроме того, чем сильнее дёрнуть струну, тем больше будет разных колебаний и громче звук, не так ли? Здесь видна явная связь между колебаниями струны и формой волны сигнала. С другой стороны, для понижения тона необходимо, чтобы струна колебалась медленнее, поэтому её и делают толще (тяжелее).

Как интересно!

Итак, я думаю, что вы усвоили смысл слов «сигнал», «амплитуда» и «частота» и поняли, как изображать их в виде спектра. Однако реальный звук или голос имеют сложную форму, в которой смешиваются волны различных частот.

И для поиска их спектра используют преобразование Фурье, да?

Верно! Давайте рассмотрим основные принципы преобразования Фурье. Например, пусть у нас есть волна сложной формы (Рис. 1-12).



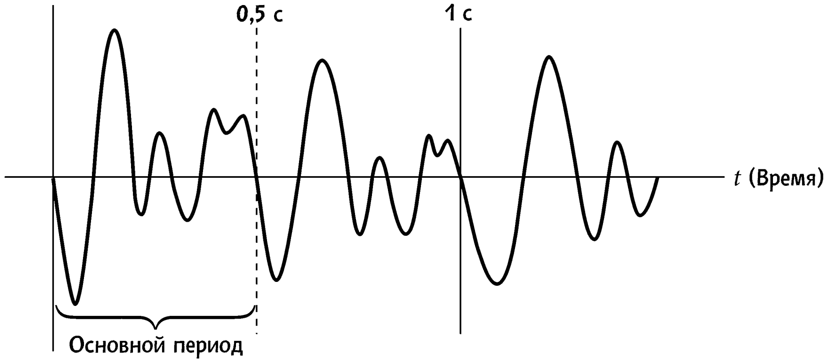
☐ Рис. 1-12. Пример волны сложной формы.

Сложной…

Для преобразования Фурье сигнал должен, в принципе, иметь постоянный период. Поэтому волну сложной формы разбивают на короткие отрезки и полагают, что форма волны на них повторяется.

А как находят период у сигналов сложной формы?

В сложной волне смешаны самые различные частоты, из которых нужно выделить так называемую «основную частоту». Ей соответствует самая большая амплитуда. Допустим, что мы разбили сложный сигнал на отрезки в 1 секунду. Выделяем на отрезке период самой большой волны — «основной период». В нашем примере он равен 0,5 с, то есть основная частота равна 2 Гц (Рис. 1-13).



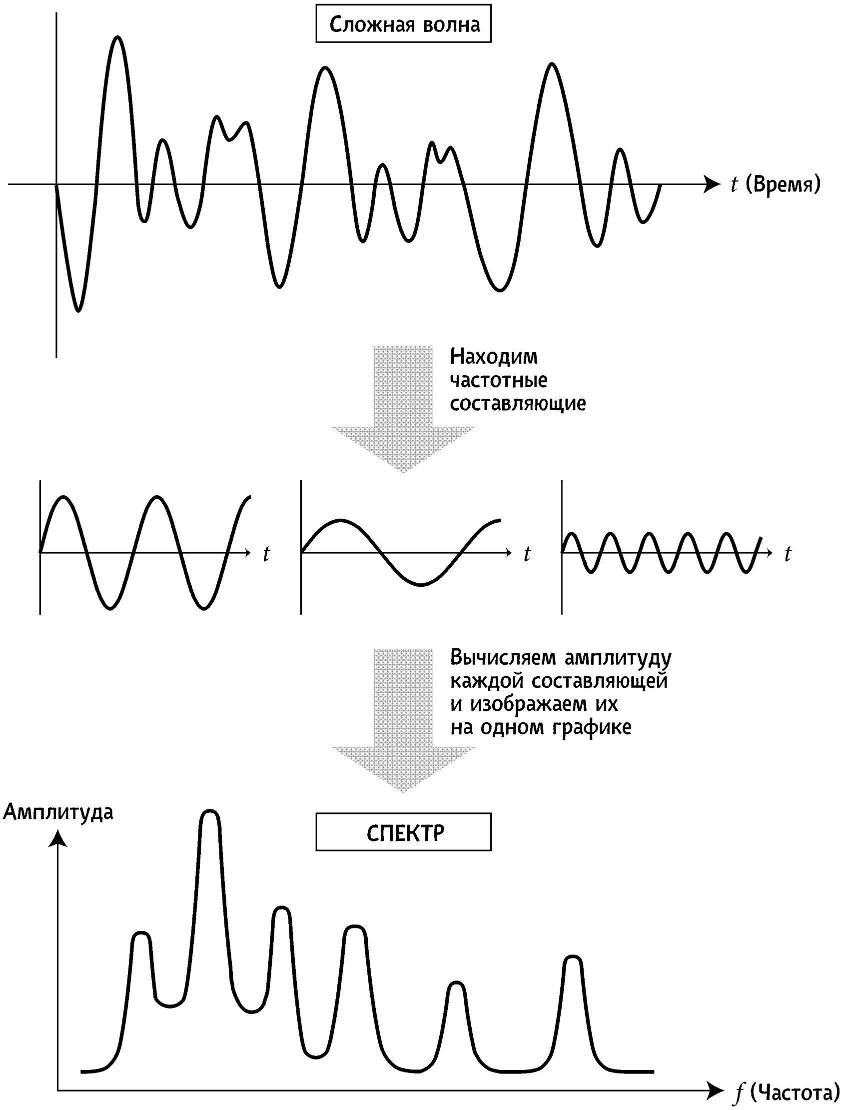
☐ Рис. 1-13. Основной период волны сложной формы.

Понятно... Но а что делать с этим дальше?

Разбив сложную волну на отрезки определённой длины, мы будем по одной извлекать из них простые волны, или частотные составляющие. И здесь нам потребуются знания тригонометрических функций и интегралов.

Так вот оно что! Ну, насчёт тригонометрии понятно: тут у нас недавно и синус проглядывал, но при чём здесь интеграл?

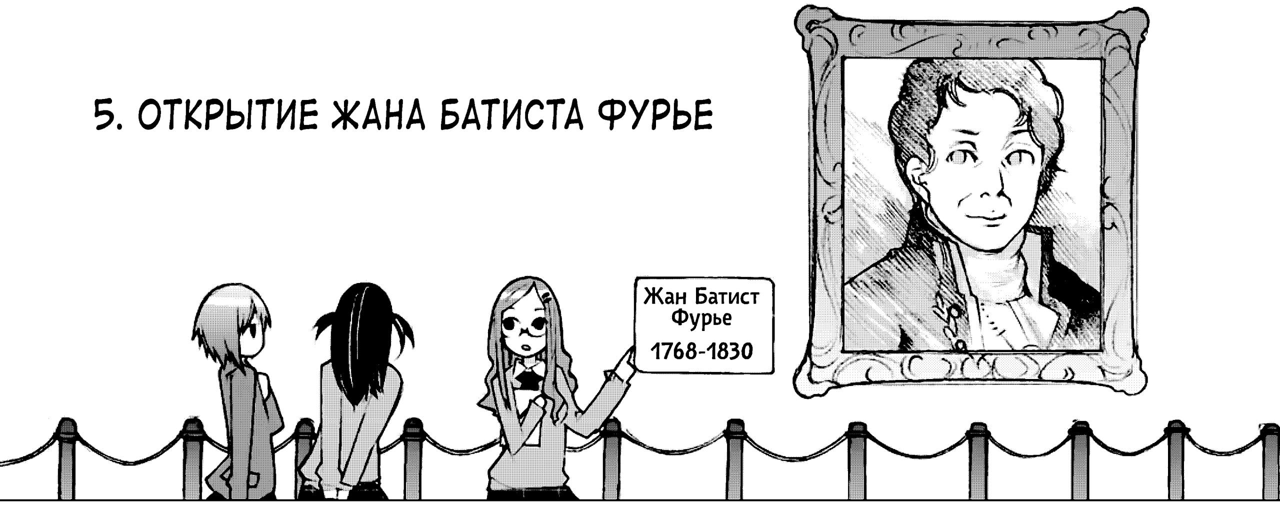
Сейчас это может показаться сложным, но по мере изучения всё встанет на свои места. Итак, продолжим. Определяем величину каждой частотной составляющей и рисуем их на графике в порядке увеличения частот. Спектр готов! Вот в такой последовательности проводят преобразование Фурье. Схематично это можно изобразить, как на Рис. 1-14.



☐ Рис. 1-14. Преобразование Фурье и построение спектра.

Всё понятно. Ты описала преобразование Фурье, а анализ формы волны на его основе — это анализ Фурье, правильно?!

5. ОТКРЫТИЕ ЖАНА БАТИСТА ФУРЬЕ



А сейчас давайте совершим небольшой экскурс в историю преобразования Фурье.

Что, у нас уже урок истории?!

Когда знаешь предысторию, и интереснее становится, и понимаешь лучше...

Ладно, попробую выслушать. Давай, начинай!

Ох-хо-хо.

Преобразование Фурье «родилось» в 1812 году, когда французский математик Жан Батист Фурье нашёл решение задачи, касающейся «закона теплопередачи».

Значит Фурье — это человек! Вернее имя человека! Да? Но какое отношение теплопередача имеет к волнам?

Теплопередача — это распространение тепла внутри вещества. Это сложное явление, на которое влияет много факторов. Но Фурье открыл, что даже сложное явление можно рассматривать как комбинацию простых явлений.

И это привело его к мысли, что сложная волна состоит из простых волн?

На самом деле, в то время даже Фурье не думал о применении своего преобразования к волнам и спектрам. Однако исследования продолжались, и открытие Фурье получило распространение в качестве математического подхода к свойствам волн.

Понятно.

Но расчёт волн сложной формы, которыми заполнен наш мир — это трудная задача. К счастью, в 1965 году был изобретён метод под названием «быстрое преобразование Фурье» (БПФ). Этот метод основан на комбинации свойств тригонометрических функций, что и позволяет проводить преобразование Фурье очень эффективно. Благодаря БПФ, а также распространению компьютеров, область применения преобразования Фурье в сферах науки и техники стремительно расширилась.

И это применяется не только для звука...

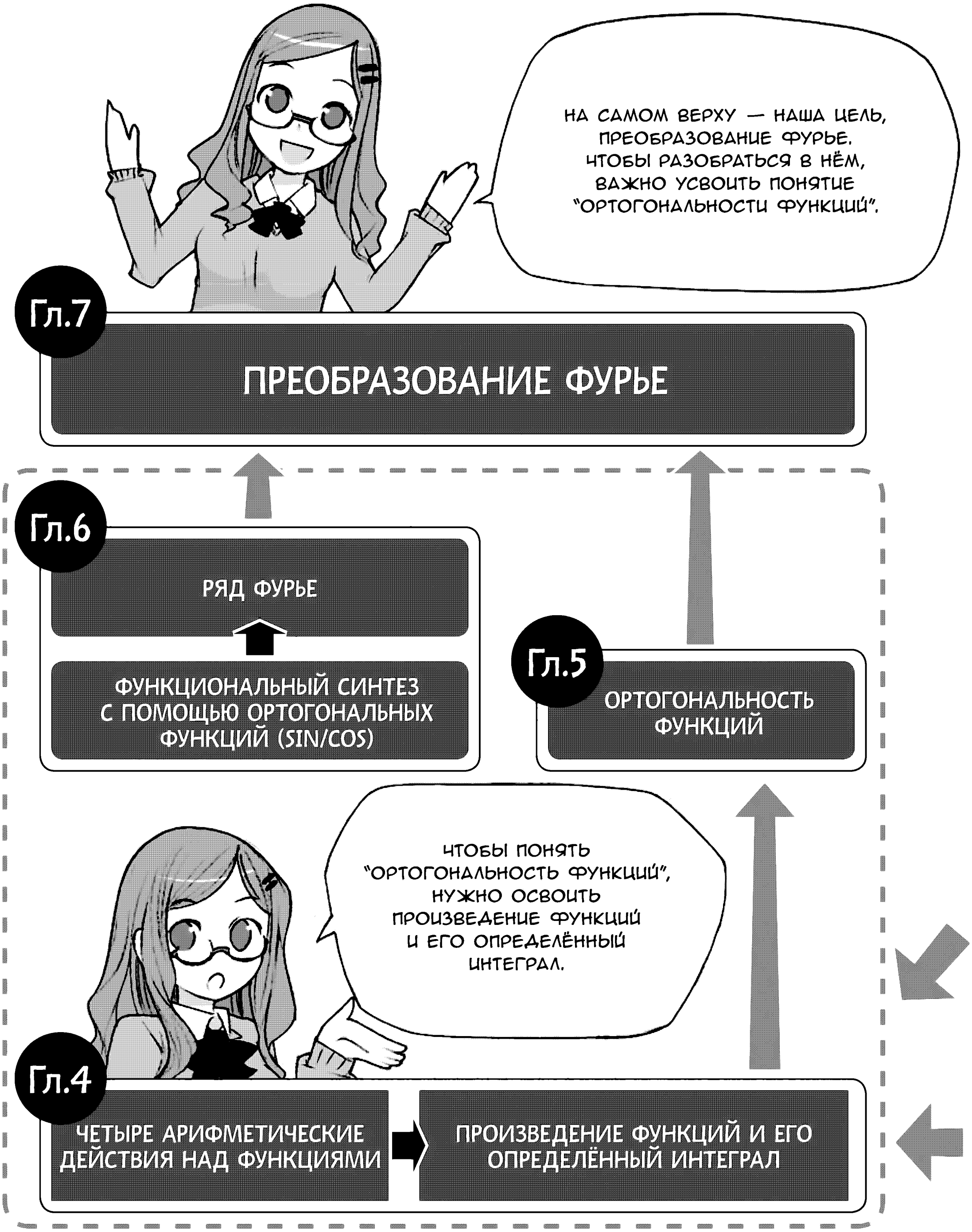
Как я уже говорила, и свет, и радиоволны можно рассматривать как «полезный» сигнал, позволяющий проследить их волновую природу. Другими словами, преобразование Фурье применимо ко множеству явлений, которые можно наблюдать в качестве сигнала. Например, электрокардиограмма (ЭКГ), отражающая работу сердца человека, — тоже сигнал, который можно анализировать, применяя преобразование Фурье.

Вот это да!..

Можно, например, разделив звуковой сигнал на «полезный звук» и «помехи», передавать только «полезный звук», или, проведя анализ, повысить чёткость «размытой» фотографии.

Да-а-а! Додуматься до такого! Видно этот Фурье был крутым парнем!

6. Шесть шагов к преобразованию Фурье


НА САМОМ ВЕРХУ — НАША ЦЕЛЬ, ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ. ЧТОБЫ РАЗОБРАТЬСЯ В НЁМ, ВАЖНО УСВОИТЬ ПОНЯТИЕ "ОРТОГОНАЛЬНОСТИ ФУНКЦИЙ".
Гл.7
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ
Гл.6
РЯД ФУРЬЕ
ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ С ПОМОЩЬЮ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ (SIN/COS)
Гл.5
ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ ФУНКЦИЙ
ЧТОБЫ ПОНЯТЬ "ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ ФУНКЦИЙ", НУЖНО ОСВОИТЬ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ФУНКЦИЙ И ЕГО ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ.
Гл.4
ЧЕТЫРЕ АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ НАД ФУНКЦИЯМИ
ПРОИЗВЕДЕНИЕ ФУНКЦИЙ И ЕГО ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Гл.2

Функции, необходимые для преобразования Фурье: sin и cos = Тригонометрические функции

Гл.3

Касательная к графику функции (наклон)

Интеграл (первообразная функции)

Интеграл { Определённый — Площадь или объём; Неопределённый }


ХММ...
ДА, ПУТЬ НЕБЛИЗКИЙ...
ЗА ДЕЛО!
Я ОСВОЮ ЭТО!
СМЫСЛ СЛОВ, КОТОРЫЕ ВАМ СЕЙЧАС КАЖУТСЯ ЗАГАДОЧНЫМИ, ВЫ ПОЙМЁТЕ В ПРОЦЕССЕ ИЗУЧЕНИЯ!
А КАК БЫТЬ С ВОКАЛИСТОМ?..
НУ, В ЭТОМ ДОВЕРЬТЕСЬ МНЕ!
СОВСЕМ ЗАБЫЛА.

ГЛАВА 2

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ — ТРЕУГОЛЬНИКИ ОТДЫХАЮТ

1. Колесо обозрения и тригонометрические функции


Больно...
Зачем пришёл?!
Вы ведь ещё не нашли вокалиста?
Что?! Нахал!
Подлец!
Больно... но приятно...
Хвать
Если вы мне доверитесь...
Ну, давай!
Да кто тебе доверится?!
Грр..
Потом не говори, что я тебе не предлагал!
Ну, давай!
Ударь...
Ну, пока!
Я иду, Рика!
Тадам!
Эй, Фумика!
Ах ты скотина!
Ох-ох...
Давай! Врежь мне как следует!
Эй,
подожди!
Врежь мне!

Да, Фумика, ты как всегда популярна...
Что?
Почему так происходит?
СТУК!
Что, настроение плохое?
ШВЫРЬ
Я хочу позаниматься, чтобы развеяться!
Хорошо.
ТАНГЕНС
КОСИНУС
СИНУС
ТАМ-ТАМ-ТАМ!
ТРАМ-ТАРАРАМ!
Итак, сегодня мы поговорим о тригонометрических функциях!
УФ!
ТОП-ТОП-ТОП

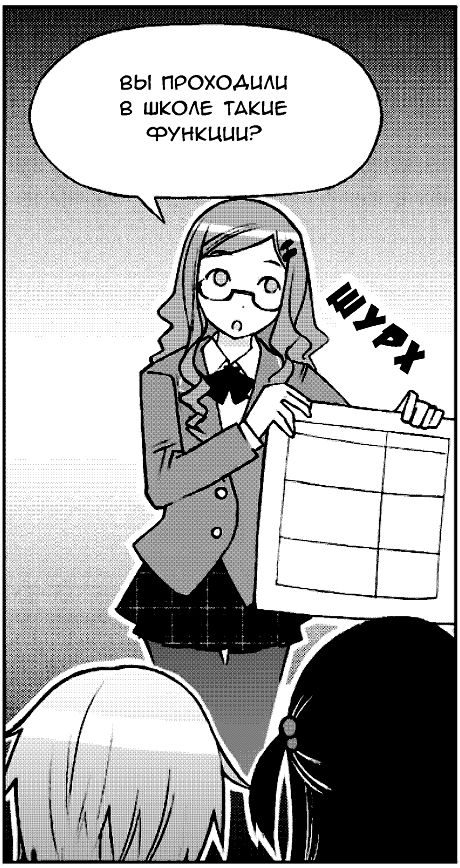
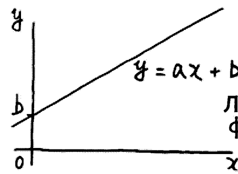
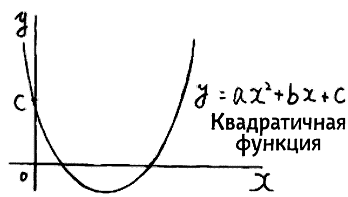
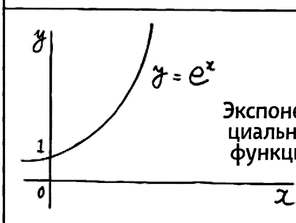
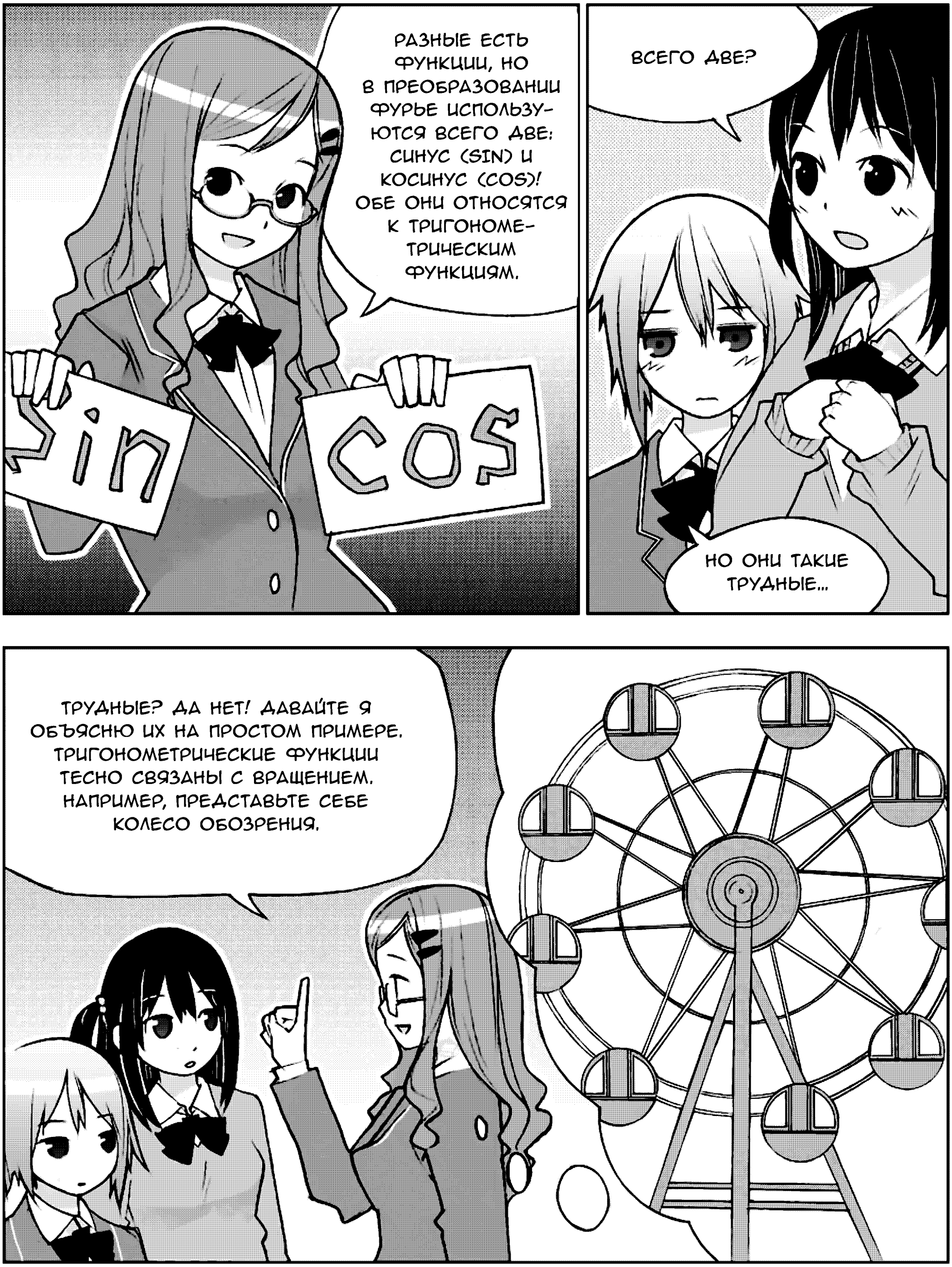
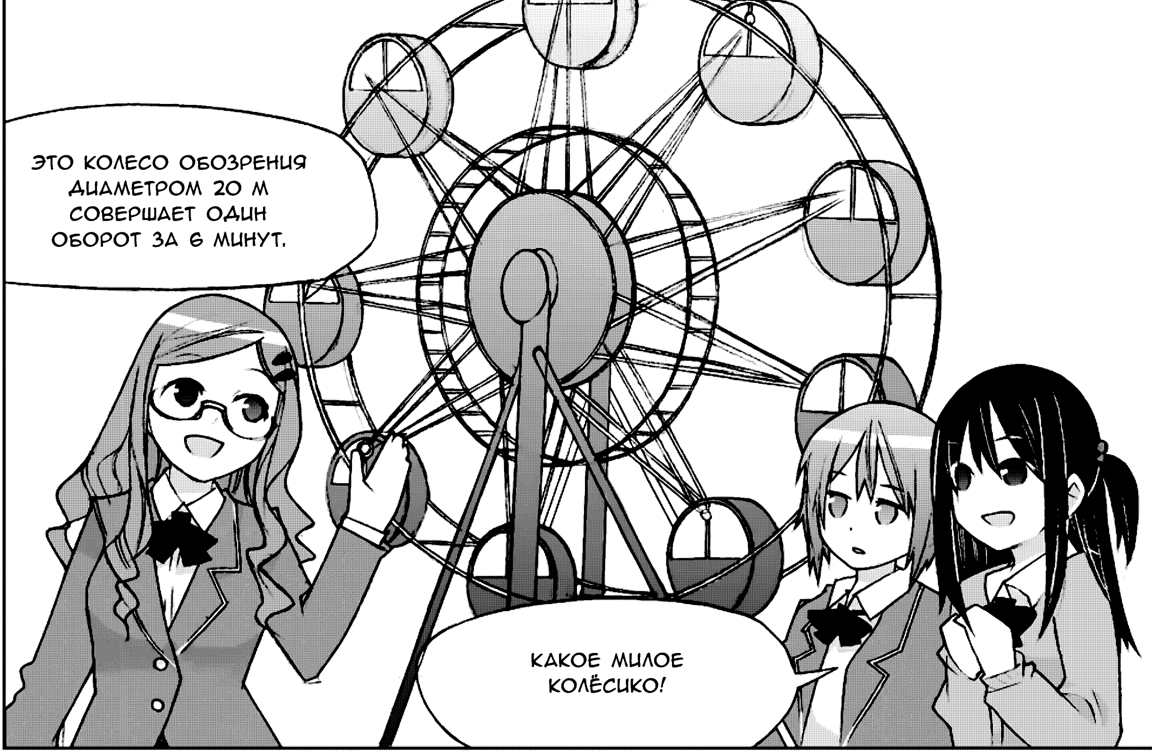
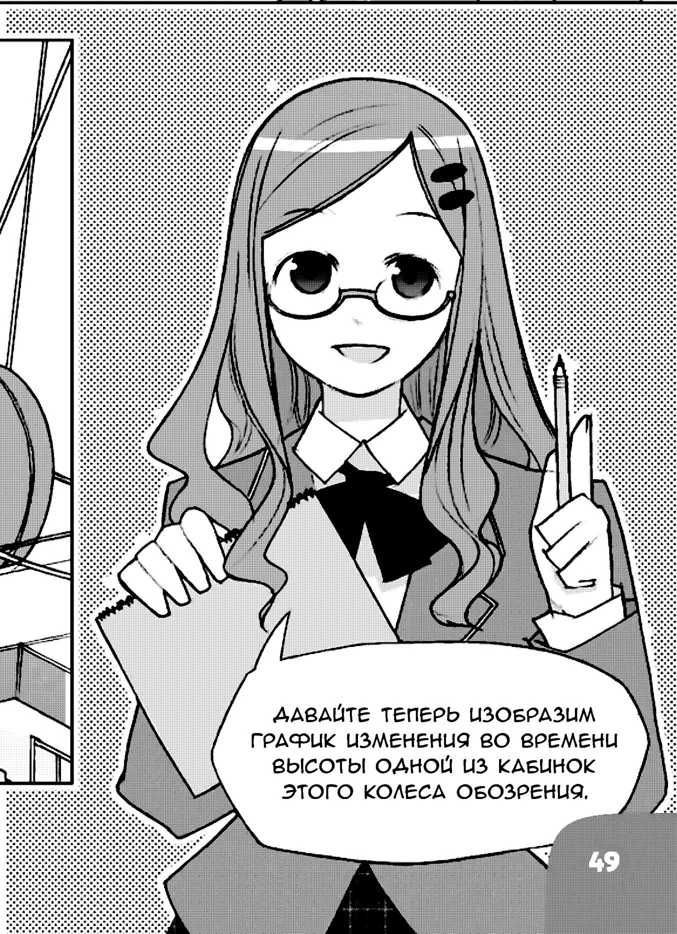


ГРАФИК	ПРИМЕНЕНИЕ
 $y = ax + b$ Линейная функция	• Время наполнения ванны водой • Время на дорогу до школы • Время сгорания свечи • Функции статистики и др.
 $y = ax^2 + bx + c$ Квадратичная функция	• Парабола (траектория полёта тела, брошенного под углом к поверхости земли) • Функции статистики и др.
 $y = e^x$ Экспоненциальная функция	• Явления с ростом в геометрической прогрессии (например, размножение бактерий) • Функции статистики и др.


Разные есть функции, но в преобразовании Фурье используются всего две: синус (sin) и косинус (cos)! Обе они относятся к тригонометрическим функциям.
sin
cos
Всего две?
Но они такие трудные...
Трудные? Да нет! Давайте я объясню их на простом примере. Тригонометрические функции тесно связаны с вращением. Например, представьте себе колесо обозрения.

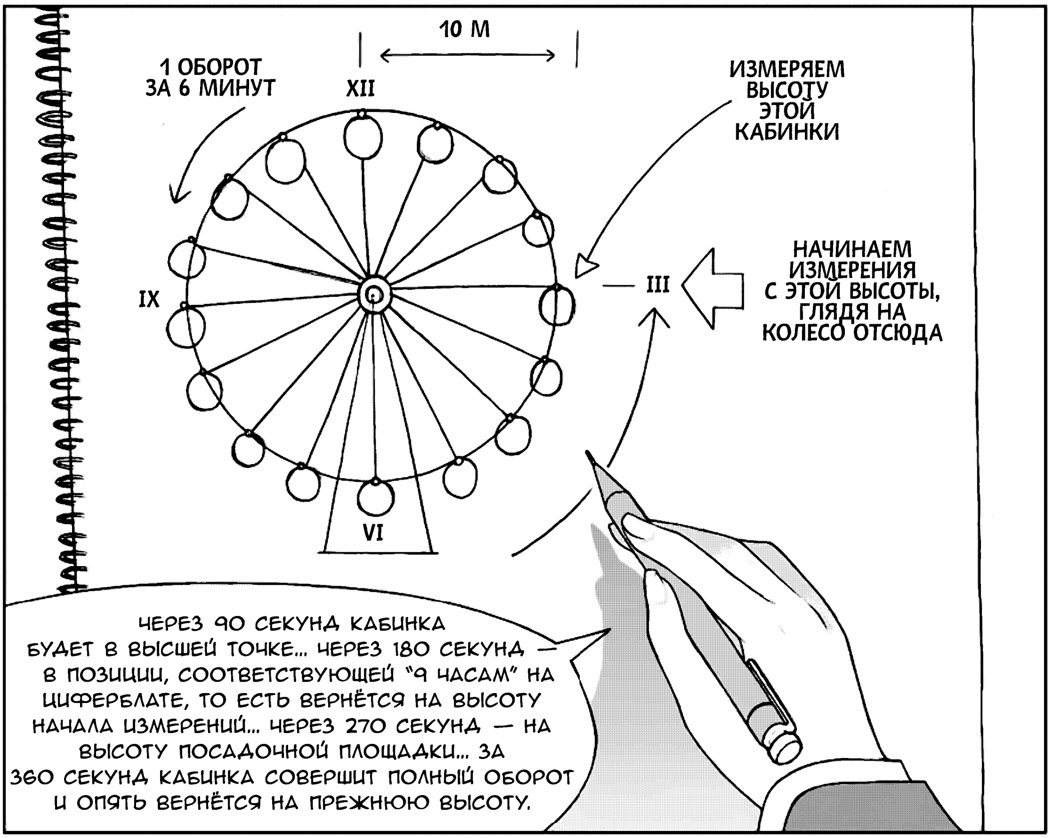

ЭТО КОЛЕСО ОБОЗРЕНИЯ ДИАМЕТРОМ 20 М СОВЕРШАЕТ ОДИН ОБОРОТ ЗА 6 МИНУТ.
КАКОЕ МИЛОЕ КОЛЁСИКО!

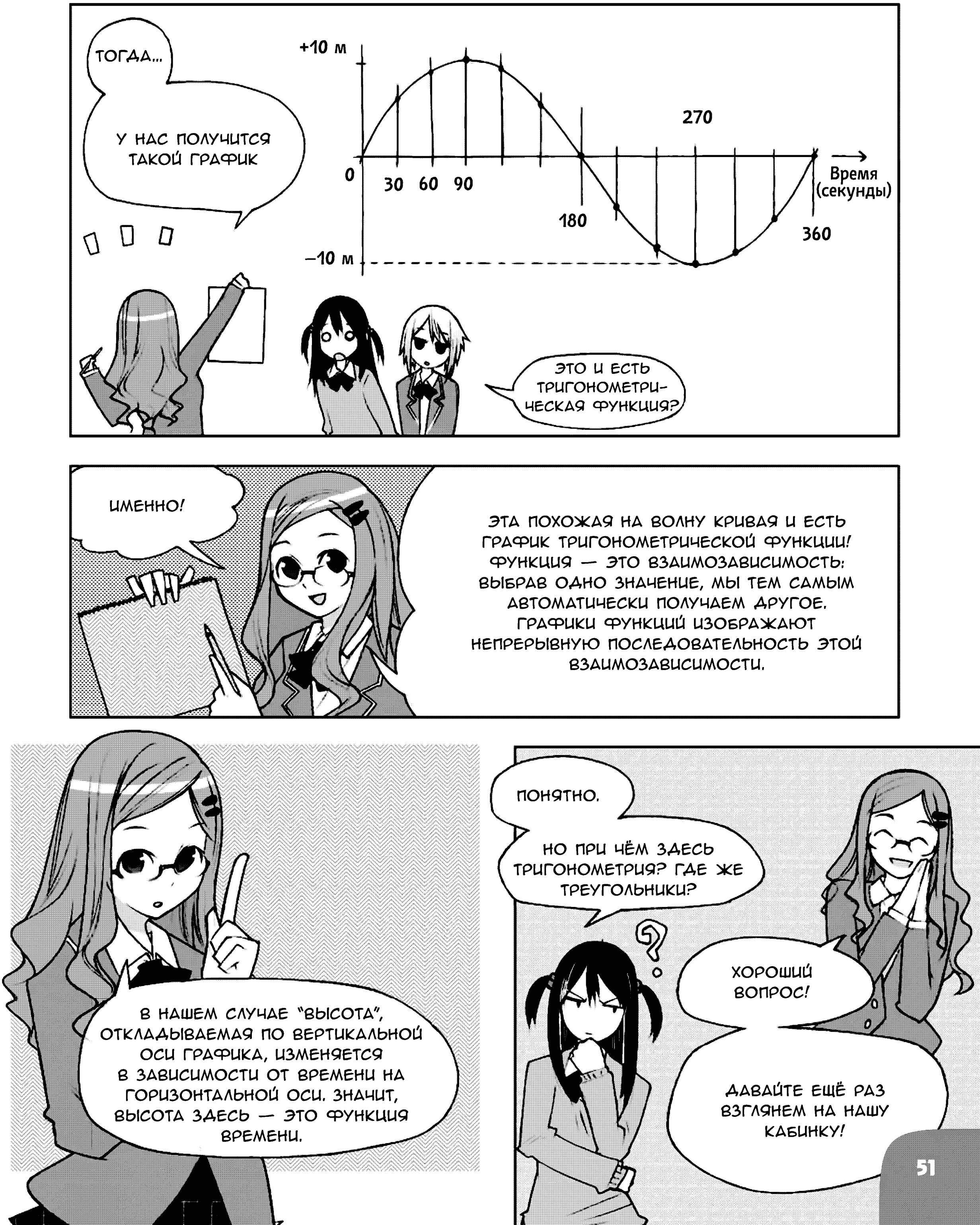

ТАК КАК 1 ОБОРОТ — ЭТО 360°, ЗА 1 МИНУТУ КОЛЕСО ПОВЕРНЁТСЯ НА 60° (360° / 6 МИН), А ЗА 30 СЕКУНД — НА 30° (60° Х 0,5 МИН*).
ЯСНО...

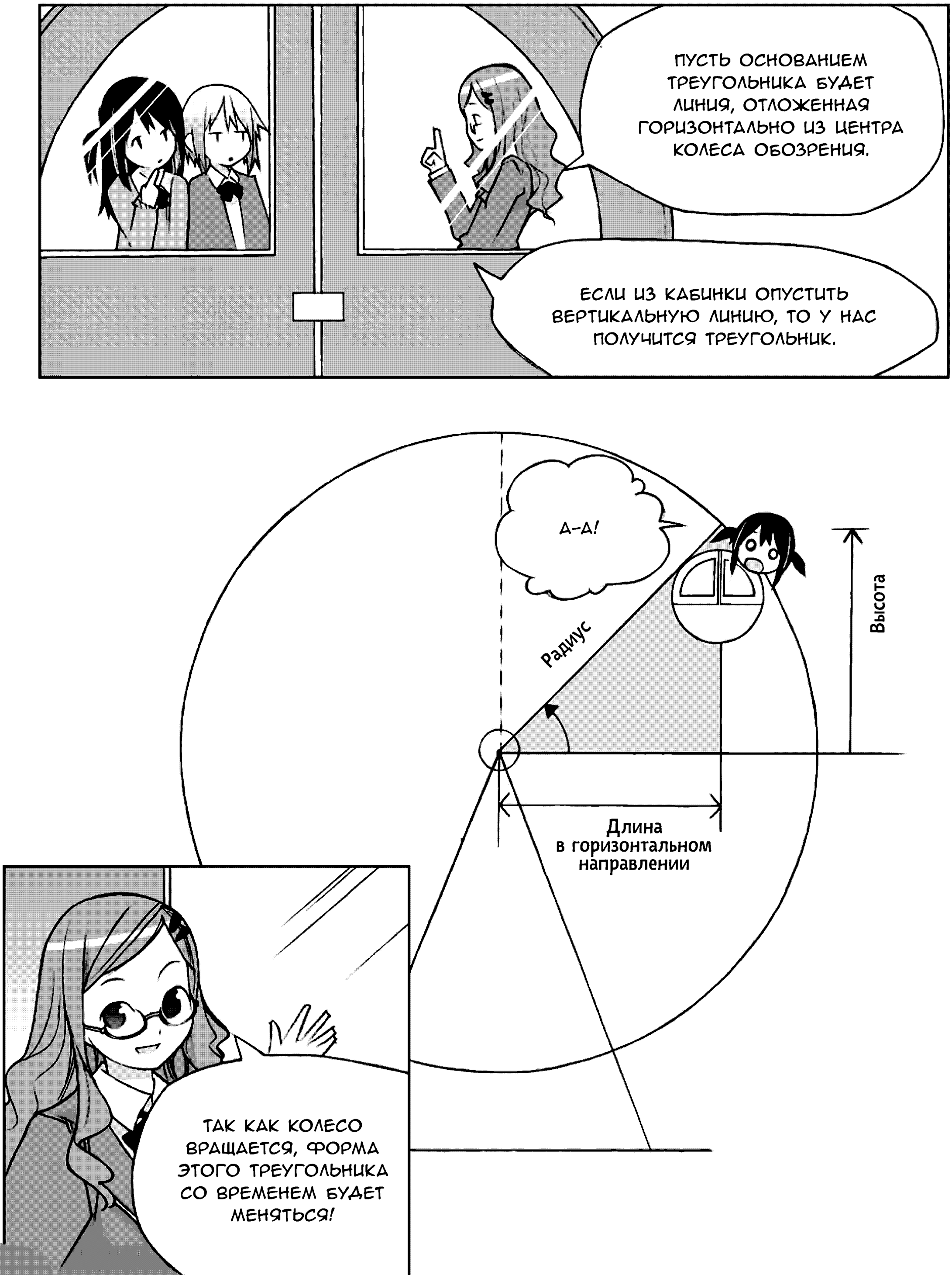

ДАВАЙТЕ ТЕПЕРЬ ИЗОБРАЗИМ ГРАФИК ИЗМЕНЕНИЯ ВО ВРЕМЕНИ ВЫСОТЫ ОДНОЙ ИЗ КАБИНОК ЭТОГО КОЛЕСА ОБОЗРЕНИЯ.

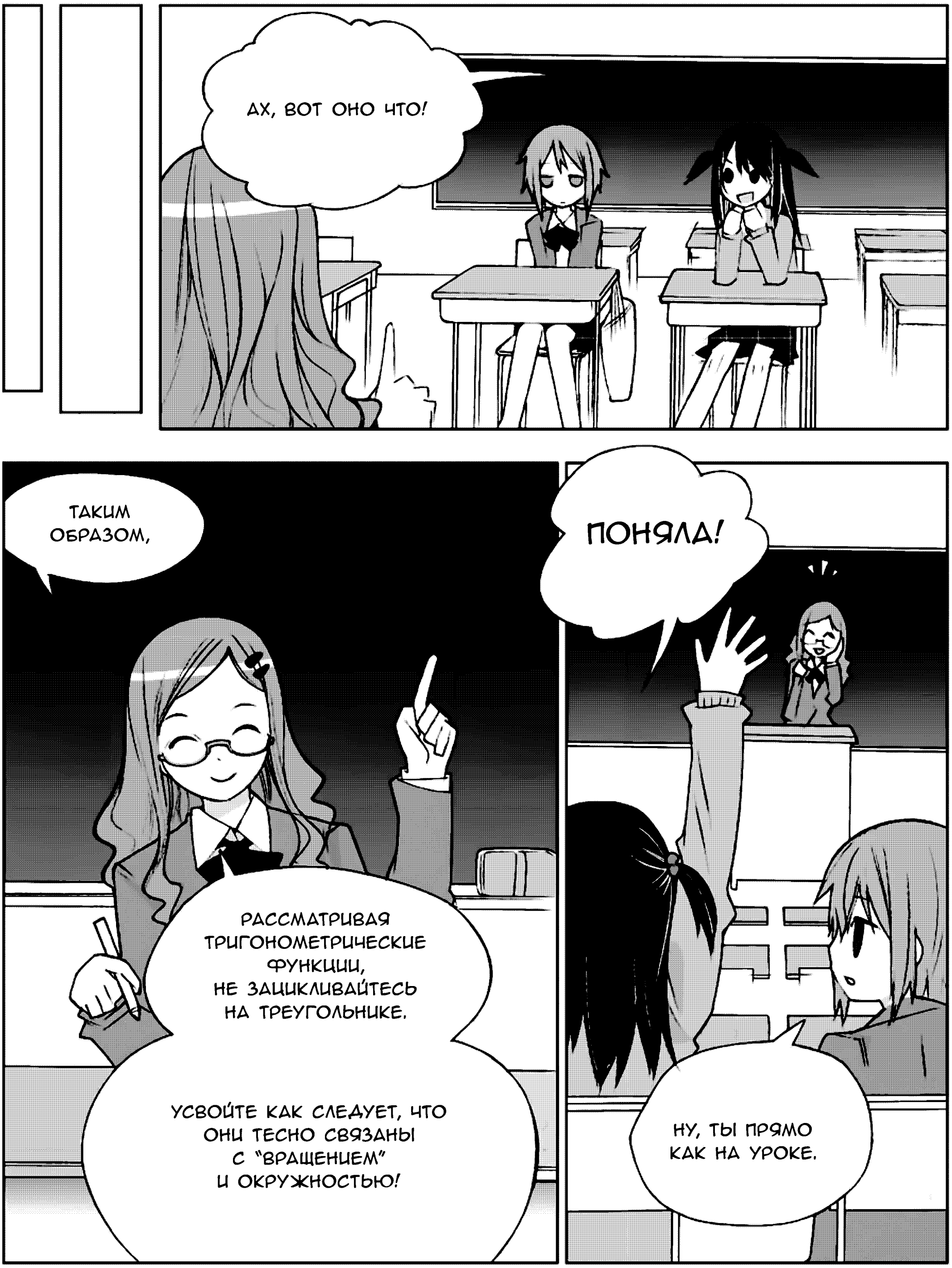
* 30 С = 0,5 МИН


БУДЕМ ОТМЕЧАТЬ НА ГРАФИКЕ ВЫСОТУ КАБИНКИ ЧЕРЕЗ КАЖДЫЕ 30 СЕКУНД, НАЧИНАЯ С ПОЗИЦИИ, СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ "3 ЧАСАМ" НА ЦИФЕРБЛАТЕ ЧАСОВ.


10 М
1 ОБОРОТ ЗА 6 МИНУТ
XII
IX
VI
III
ИЗМЕРЯЕМ ВЫСОТУ ЭТОЙ КАБИНКИ
НАЧИНАЕМ ИЗМЕРЕНИЯ С ЭТОЙ ВЫСОТЫ, ГЛЯДЯ НА КОЛЕСО ОТСЮДА
ЧЕРЕЗ 90 СЕКУНД КАБИНКА БУДЕТ В ВЫСШЕЙ ТОЧКЕ... ЧЕРЕЗ 180 СЕКУНД — В ПОЗИЦИИ, СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ "9 ЧАСАМ" НА ЦИФЕРБЛАТЕ, ТО ЕСТЬ ВЕРНЁТСЯ НА ВЫСОТУ НАЧАЛА ИЗМЕРЕНИЙ... ЧЕРЕЗ 270 СЕКУНД — НА ВЫСОТУ ПОСАДОЧНОЙ ПЛОЩАДКИ... ЗА 360 СЕКУНД КАБИНКА СОВЕРШИТ ПОЛНЫЙ ОБОРОТ И ОПЯТЬ ВЕРНЁТСЯ НА ПРЕЖНЮЮ ВЫСОТУ.


ТОГДА...
У НАС ПОЛУЧИТСЯ ТАКОЙ ГРАФИК
+10 м
0
30
60
90
270
180
360
–10 м
Время (секунды)
ЭТО И ЕСТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ?
ИМЕННО!
ЭТА ПОХОЖАЯ НА ВОЛНУ КРИВАЯ И ЕСТЬ ГРАФИК ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ! ФУНКЦИЯ — ЭТО ВЗАИМОЗАВИСИМОСТЬ: ВЫБРАВ ОДНО ЗНАЧЕНИЕ, МЫ ТЕМ САМЫМ АВТОМАТИЧЕСКИ ПОЛУЧАЕМ ДРУГОЕ. ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ ИЗОБРАЖАЮТ НЕПРЕРЫВНУЮ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ЭТОЙ ВЗАИМОЗАВИСИМОСТИ.
В НАШЕМ СЛУЧАЕ "ВЫСОТА", ОТКЛАДЫВАЕМАЯ ПО ВЕРТИКАЛЬНОЙ ОСИ ГРАФИКА, ИЗМЕНЯЕТСЯ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ВРЕМЕНИ НА ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ОСИ. ЗНАЧИТ, ВЫСОТА ЗДЕСЬ — ЭТО ФУНКЦИЯ ВРЕМЕНИ.
ПОНЯТНО.
НО ПРИ ЧЁМ ЗДЕСЬ ТРИГОНОМЕТРИЯ? ГДЕ ЖЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ?
ХОРОШИЙ ВОПРОС!
ДАВАЙТЕ ЕЩЁ РАЗ ВЗГЛЯНЕМ НА НАШУ КАБИНКУ!


ПУСТЬ ОСНОВАНИЕМ ТРЕУГОЛЬНИКА БУДЕТ ЛИНИЯ, ОТЛОЖЕННАЯ ГОРИЗОНТАЛЬНО ИЗ ЦЕНТРА КОЛЕСА ОБОЗРЕНИЯ.
ЕСЛИ ИЗ КАБИНКИ ОПУСТИТЬ ВЕРТИКАЛЬНУЮ ЛИНИЮ, ТО У НАС ПОЛУЧИТСЯ ТРЕУГОЛЬНИК.
А-А!
Радиус
Высота
Длина в горизонтальном направлении
ТАК КАК КОЛЕСО ВРАЩАЕТСЯ, ФОРМА ЭТОГО ТРЕУГОЛЬНИКА СО ВРЕМЕНЕМ БУДЕТ МЕНЯТЬСЯ!


АХ, ВОТ ОНО ЧТО!
ТАКИМ ОБРАЗОМ,
РАССМАТРИВАЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, НЕ ЗАЦИКЛИВАЙТЕСЬ НА ТРЕУГОЛЬНИКЕ.
УСВОЙТЕ КАК СЛЕДУЕТ, ЧТО ОНИ ТЕСНО СВЯЗАНЫ С "ВРАЩЕНИЕМ" И ОКРУЖНОСТЬЮ!
ПОНЯЛА!
НУ, ТЫ ПРЯМО КАК НА УРОКЕ.

2. Единичная окружность

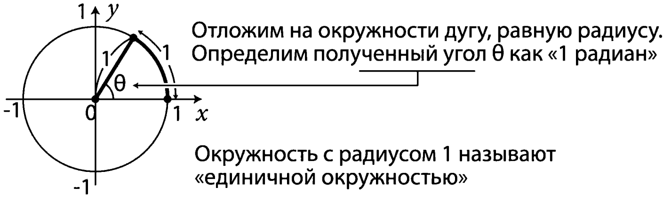
Сейчас я расскажу вам о принятых в математике способах измерения длин и углов, удобных в использовании и расширяющих область применения.

Давай!

В последнем примере мы приняли диаметр колеса обозрения равным 20 м, однако для математики не так уж важно связывать длину с конкретными единицами измерения вроде метров. И радиус колеса обозрения, и радиус окружности удобно принять равным 1 (единице). На практике это может быть и длина, и напряжение, или какая-то другая физическая величина. Как бы там ни было, сейчас мы выберем эталон и назовём его 1. Окружность с радиусом, равным 1, называется «единичной окружностью».

Радиус равен 1! Как просто! Давай, Эрина! Чем проще, тем лучше!

Чтобы добавить немного математического колорита, примем центр единичной окружности за точку отсчёта и проведём через эту точку горизонтальную ось x (ось абсцисс) и вертикальную ось y (ось ординат). Здесь «ось» означает прямую, которую мы приняли за эталон. Углы мы тоже будем откладывать от неё. В рассматриваемой здесь единичной окружности радиус 1 означает длину. Теперь мы отложим на окружности дугу, длина которой равна этому радиусу и определим полученный угол как «1 радиан» (Рис. 2-1).



☐ Рис. 2-1. Определение радиана как единицы угла.

Радиан? А зачем он нужен?

При работе с тригонометрическими функциями радиан придётся весьма кстати, ведь углы и длины дуг единичной окружности тесно взаимосвязаны. Благодаря радианам вычисление значений различных функций станет более наглядным.

Ну ладно, с этим разобрались. А что такое «θ»?

θ (тэта) — это греческая буква, которой обозначают углы.

Что-то вроде «x» и «y», только для углов, да?

Теперь, помните ли вы, чему равна длина окружности?

$2\pi r$?

Правильно! Здесь π — это постоянная, а r — радиус окружности, так? Говоря точнее, π — это отношение длины окружности к её диаметру ($2r$). У единичной окружности радиус равен 1, диаметр — 2, значит её длина равна 2π. Для нашего примера с колесом обозрения длина окружности — это расстояние, которое пройдёт кабинка за 1 оборот (360°). Давайте выразим это в радианах.

Ты говорила, что угол, соответствующий дуге длиной 1 — это один радиан!

Именно. А, так как длина единичной окружности равна 2π, значит угол 360° равен 2π радиан! Это позволит нам выражать в радианах углы, которые мы раньше выражали в градусах (а также угловых минутах и секундах).
Кстати, соответствие между градусами и радианами показано в таблице:

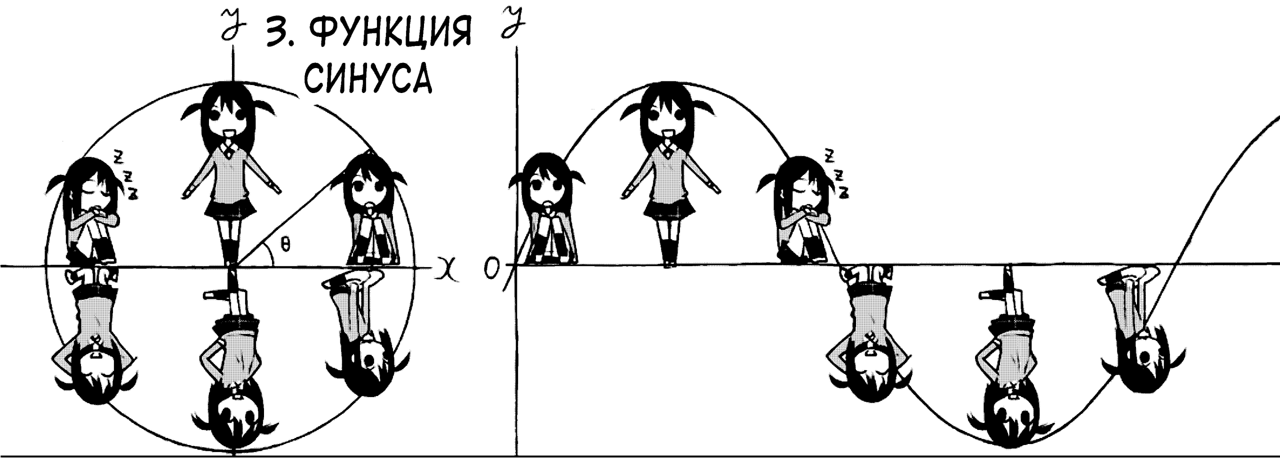
Таблица. Соответствие между угловыми градусами и радианами

Радианы	π/6	π/4	π/3	π/2	π	2π
Градусы	30	45	60	90	180	360

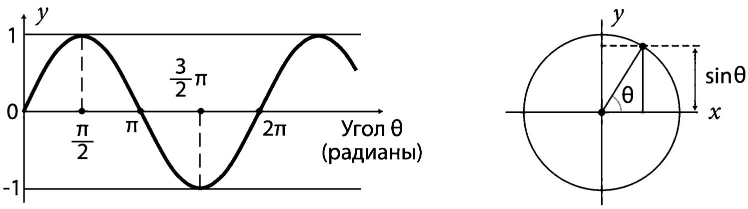
Что-то вроде делёжки круглого торта, да?

Да, идея точно такая же. Ведь когда разрезают круглый торт на равные куски, сначала его край, то есть окружность, делят на дуги равной длины. Конечно, в быту о радианах редко услышишь, но при работе с функциями это что-то вроде общепринятого стандарта.

3. ФУНКЦИЯ СИНУСА



Прежде всего, взгляни на этот график (Рис. 2-2).



☐ Рис. 2-2. График функции синуса (синусоида)

Вспомните наше колесо обозрения. График изменения высоты кабинки, вращающейся по окружности, имел такую же форму, не так ли?

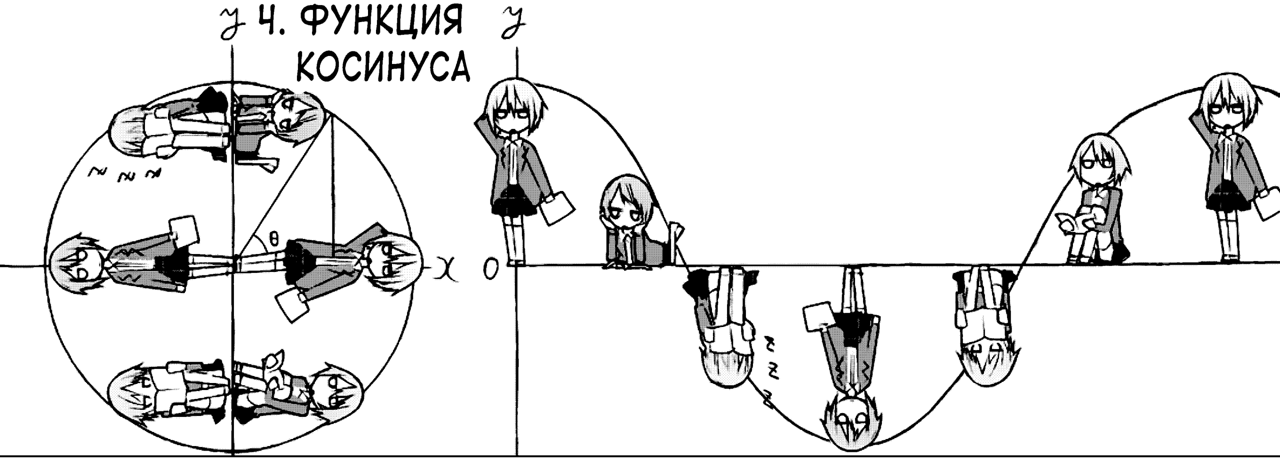
Да, да! Это — тригонометрическая функция, верно?

Эту форму называют функцией синуса или синусоидой. Давайте вспомним смысл понятия «функция». На Рис. 2-2 слева горизонтальная ось выражает угол θ, а вертикальная — высоту точки на единичной окружности (на Рис. 2-2 справа) над осью x. Таким образом, значение на вертикальной оси (то есть высота y) — это функция значения на горизонтальной оси (то есть угла θ).

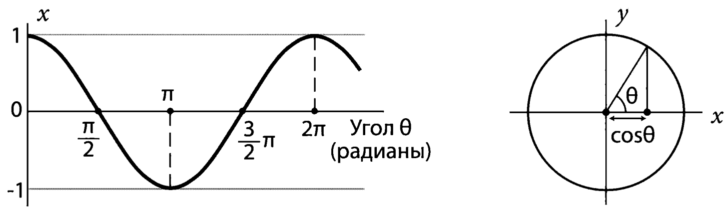
Значит, синус связан с высотой треугольника, так?

Да. А движение по окружности — это функция синуса, начинающаяся в точке $\theta = 0$ (в которой вращающаяся точка лежит точно на оси x). Если величину произвольного угла, отложенного от оси x (его называют «углом при основании»), обозначить θ (тэта), то высота y выражается формулой $y = \sin\theta$.

4. ФУНКЦИЯ КОСИНУСА



В то время как $\sin\theta$ соответствует высоте точки, или численному значению по оси y, $\cos\theta$ соответствует численному значению по оси x.
Вначале, когда $\theta = 0$, расстояние от центра окружности до проекции вращающейся точки на ось x равно радиусу, то есть 1. Затем, при постепенном возрастании угла θ, это расстояние будет равно $\cos\theta$. На графике это выглядит так:

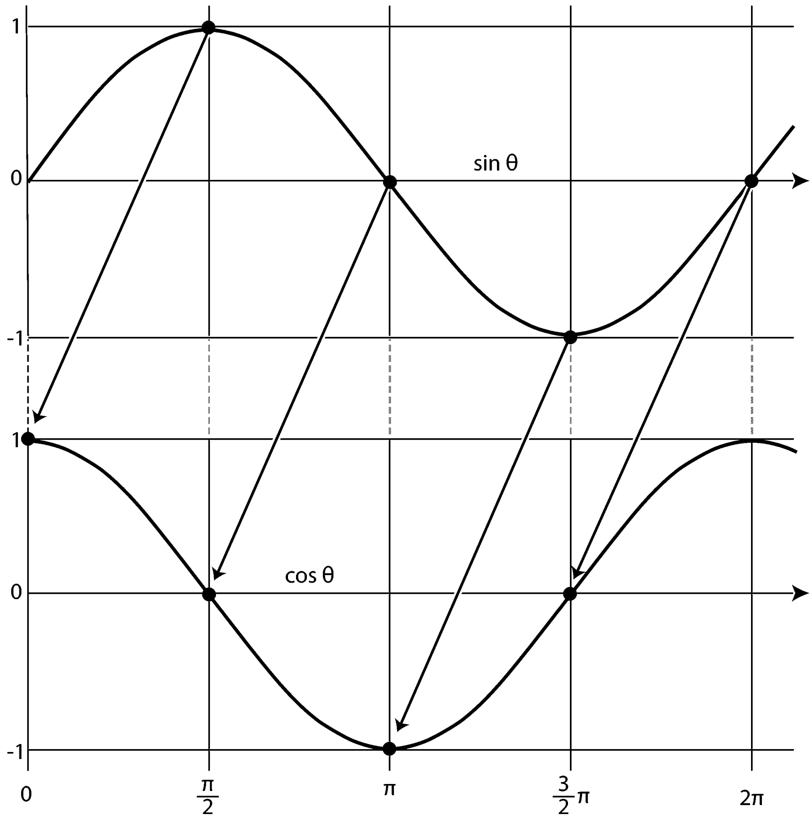


□ Рис. 2-3. Функция косинуса (косинусоида).

Это выражается формулой $x = \cos\theta$ и называется функцией косинуса. В отличие от функции $\sin\theta$, соответствующей проекции точки единичной окружности на ось y, $\cos\theta$ соответствует проекции этой точки на ось x.

Очень похоже на график синуса...

Верное замечание! На самом деле, функции синуса и косинуса в принципе имеют одинаковую форму. Давайте попробуем сравнить их графики (Рис. 2-4):



☐ Рис. 2-4. Функции sin θ и cos θ.

В самом деле! Как близнецы!

А ты сомневалась?

Из графиков видно, что cos θ имеет такую же форму, что и sin θ, но сдвинут по сравнению с ним на $\frac{\pi}{2}$. Различие между ними состоит в том, что синус соответствует проекции точки единичной окружности, по которой вращается точка, на ось *y*, а косинус — на ось *x*. Интуиция подсказывает, что значение синуса и косинуса станут равными, если сдвинуть график одной из этих функций относительно другой на угол $\frac{\pi}{2}$ (90°).

5. Параметрическое выражение уравнения окружности

Когда точка на единичной окружности движется и угол при основании равен θ, то для любой точки окружности:

$x = \cos\theta$;

$y = \sin\theta$.

Эту форму записи называют «параметрическим выражением» через переменную θ. Оно тоже играет большую роль при использовании тригонометрических функций.

Параметрическое выражение?

Параметрическое выражение — это когда мы определяем точку с помощью угла θ, используя $x = \cos\theta$ и $y = \sin\theta$.
Задав значение θ и вычислив $x = \cos\theta$ и $y = \sin\theta$, мы определим одну точку на плоскости x—y, задаваемую одной парой значений x, y. Изменяя θ, мы будем получать соответствующие ему различные пары (x, y). А перебрав все возможные значения θ, мы получим множество точек (x, y), выражаемых функцией «окружности» (эта функция определяет все точки окружности).
Наверное вы помните, что функции записываются одной формулой вида $y = f(x)$..., но параметрическое выражение основано на использовании двух формул, и обе содержат θ.

И это тоже имеет отношение к «окружности»?

Сейчас увидите. Помните ли вы уравнение окружности?

Да. Я помню, что-то такое было в учебнике.

Уравнение окружности: $x^2 + y^2 = r^2$! Вспомните, пожалуйста.

Да, да, что-то подобное было.

Окружность можно рассматривать как множество точек, равноудалённых от центра. Каждая из этих точек удовлетворяет уравнению окружности.

И что нам с этим делать?

Давайте подставим формулы параметрического выражения в это уравнение. Сейчас мы рассматриваем единичную окружность с радиусом 1, и если подставить $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$ и $r = 1$, то мы получим следующее:

$$x^2 + y^2 = r^2 \text{ (уравнение окружности)}$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1^2.$$

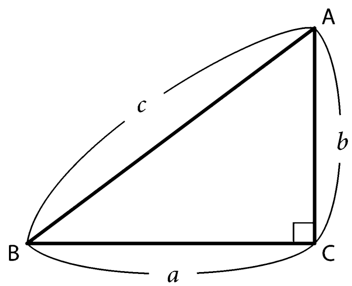
Это тоже важное соотношение.
Обратите внимание, что $(\sin\theta)^2$ можно записать как $\sin^2\theta$, а $(\cos\theta)^2$ — как $\cos^2\theta$.

Интересно. Но что же это означает?

Это означает, что мы подтвердили теорему Пифагора с помощью тригонометрических фукций!

Хм... А я забыла, в чём заключалась теорема Пифагора...

Её называют ещё «теоремой о трёх квадратах». Если длины сторон прямоугольного треугольника с углом ACB = 90° равны a, b и c, то выполняется соотношение:



$$a^2 + b^2 = c^2$$

А сама теорема звучит так: «В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.»

Математика — удивительная наука!

В этом также заключена прелесть математики. В параметрическом выражении окружности мы приняли $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$, не так ли. Тогда $\cos\theta$ можно считать основанием треугольника, а $\sin\theta$ — его высотой (вспомните колесо обозрения). Поэтому полученное только что уравнение $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1^2$, есть то же самое, что и $a^2 + b^2 = c^2$.

Удивительно!

Параметрическое выражение окружности и теорема Пифагора позволяют рассмотреть вращательное движение, что мы недавно делали с помощью графиков, но уже с точки зрения отношений сторон прямоугольного треугольника.

Кстати, мне помнится, что на уроке, когда нам объясняли про тригонометрические функции, сначала нам говорили что-то про отношения сторон треугольника.

Ты слушала объяснения преподавателя?!

Что?! Разумеется, и очень внимательно.

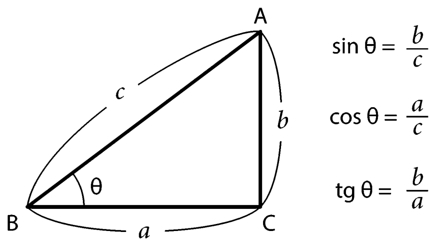
Да, и при этом слушала плеер под партой!

Хи-хи-хи… Правда, в учебнике отношения между гипотенузой (c), основанием (a), высотой (b) и углом при основании θ прямоугольного треугольника описываются как статические (то есть неизменные во времени), см. Рис. 2-5 и формулы:

$\sin\theta = b/c$ (синус θ);

$\cos\theta = a/c$ (косинус θ);

$\operatorname{tg}\theta = b/a$ (тангенс θ).



☐ Рис. 2-5. Определение соотношений сторон в прямоугольном треугольнике.

Да, да…Там было именно так!

Радиус *r* единичной окружности можно считать стороной *c* (гипотенузой) вышеприведённого треугольника. Отсюда, так как $c = 1$, мы получим, что $\sin\theta = b$ (высота), а $\cos\theta = a$ (основание).
Применительно к физическим величинам, которые изменяются во времени, как например, звуковые и другие волны, можно считать, что угол θ изменяется во времени.

Угу…

6. Тригонометрические функции и физические величины, изменяющиеся во времени

Переменная θ тригонометрической функции выражает угол, измеряемый в радианах (π), поэтому ей нельзя присвоить единицы длины или единицы времени, или единицы массы. Она не может быть выражена в единицах физических величин.

Правда? Значит, для неё нет единиц измерения?

Окружающие нас в повседневной жизни физические объекты и явления обычно оцениваются соответствующими единицами измерения, например м (метр — единица длины), кг (килограмм — единица массы), с (секунда — единица времени), или А (ампер — единица силы тока). Однако радиан — это всего лишь вспомогательная единица измерения углов, не связанная непосредственно с физическими величинами. Нельзя написать, например, sin(4 км), или cos(3 с).

Вот как? И что же делать?

Область применения преобразования Фурье — динамические явления, когда физическая величина с течением времени изменяет своё численное значение. Поэтому переменную θ записывают так, чтобы она приобретала смысл единиц измерения физических величин.

Что, пишут что-то вроде «5θ»?

Нет, ведь ей нужно придать настоящий физический смысл. Чтобы присвоить переменной угла θ смысл физической единицы, надо сменить точку зрения на неё. Конкретно говоря, что-то вроде «нечто, включающее θ, изменяется на столько-то радиан в секунду»!

Ясно. Если известно время, то можно также определить угол (θ). Переменная θ не имеет физического смысла, а число радиан в секунду — это что, единица измерения?

Да. Например, в физике и электротехнике эта величина обозначается буквой ω (омега). Если вспомнить, что обычная «скорость» измеряется в метрах в секунду (м/с), то естественно присвоить величине, измеряемой в радианах в секунду (рад/с), название «угловая скорость». Это значит, что угловую скорость тоже можно оценивать как высокую или низкую.

Значит, наше колесо обозрения, совершающее 1 оборот (360° = 2π) за 6 минут (360 секунд), имеет угловую скорость (π/180) рад/с?

Да, верно. Это реальный пример, доказывающий, что угловая скорость имеет физический смысл и единицу измерения. С другой стороны, угловая скорость — это «скорость вращения» точки по окружности, то есть точка «перемещается на такой-то угол в секунду». Поэтому по аналогии с обычной «частотой», выражающей «число повторений в секунду», ω называют также «угловой частотой». Частота и угловая частота — глубоко взаимосвязанные понятия.

А… Ну вот, наконец-то зашла речь о частоте!

Подытожим сказанное. Произведение ω (рад/с) и t (с) — это ωt, имеющее физический смысл и размерность угла, поэтому его можно использовать в качестве переменной тригонометрических функций. Теперь мы можем приводить изменяющиеся во времени величины (например x или y) к единицам измерения угла (рад).

Да, всего лишь «единица измерения», а какой глубокий смысл!

…

А я тоже придумала новую единицу — «Рика»!

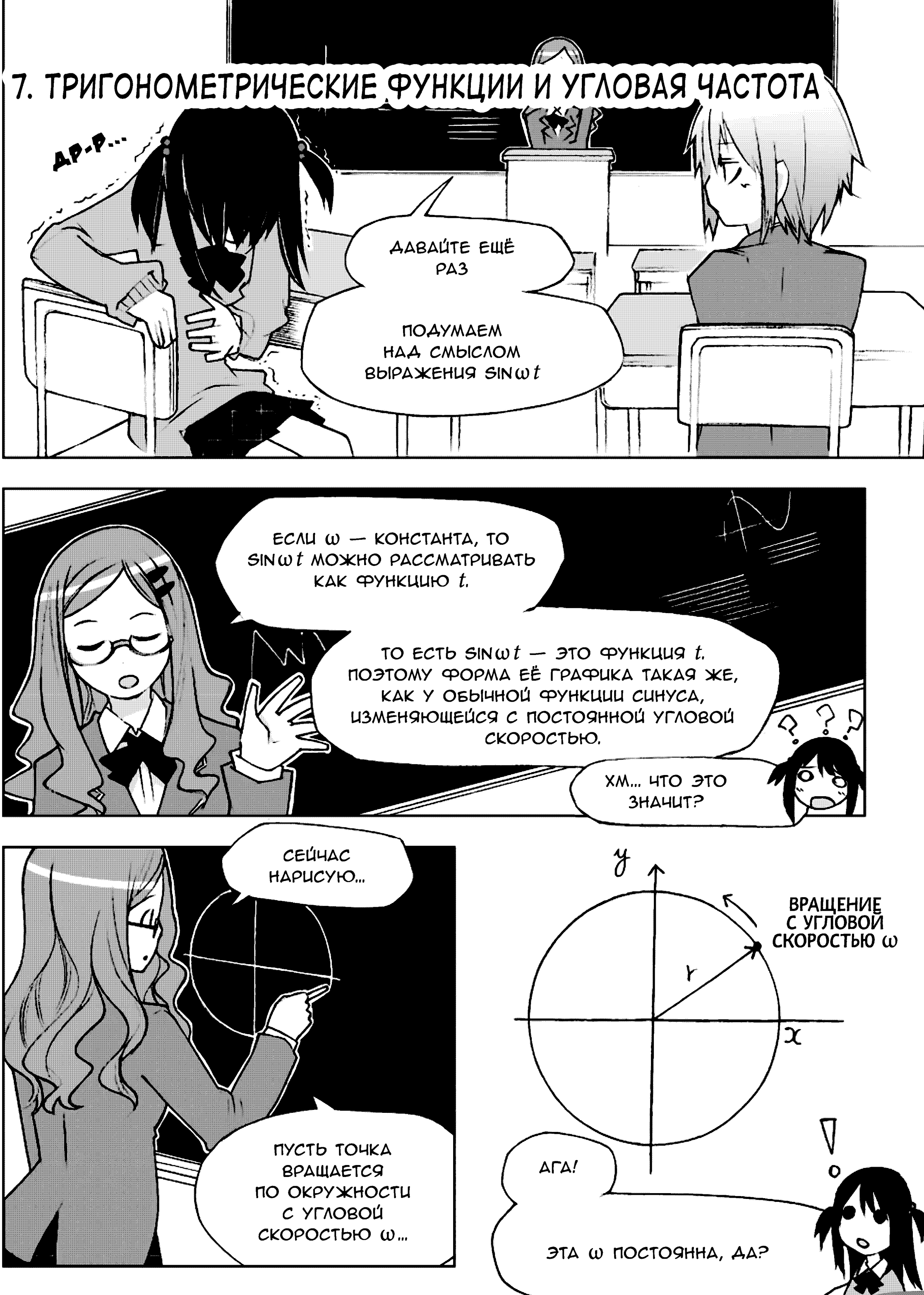
Что?.. Что это такое?

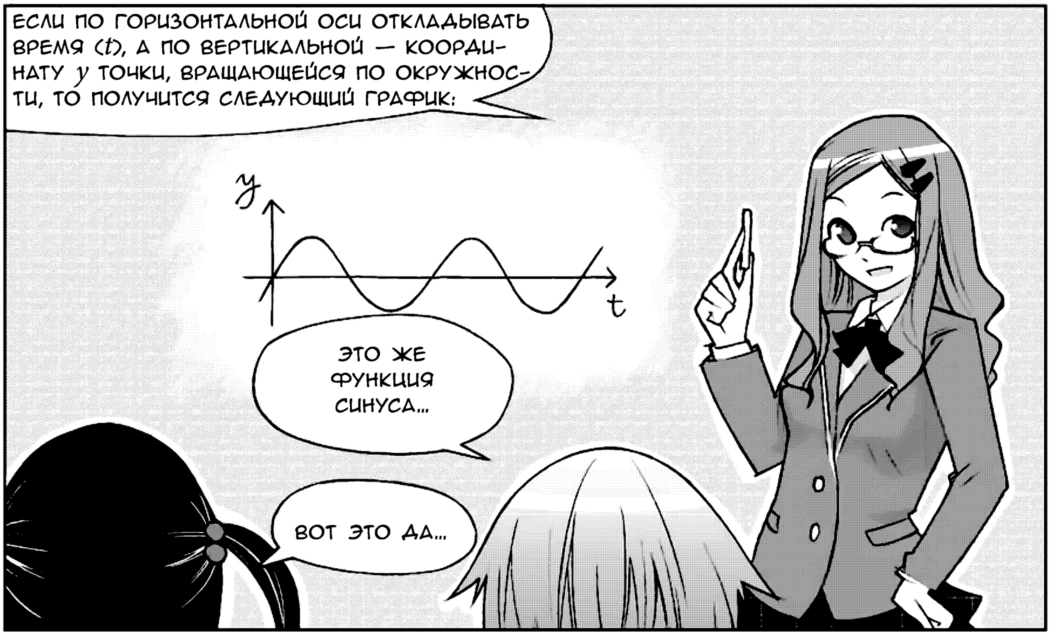
Это единица измерения молчаливости. Например, сегодня у Рики было примерно 92 Рик.

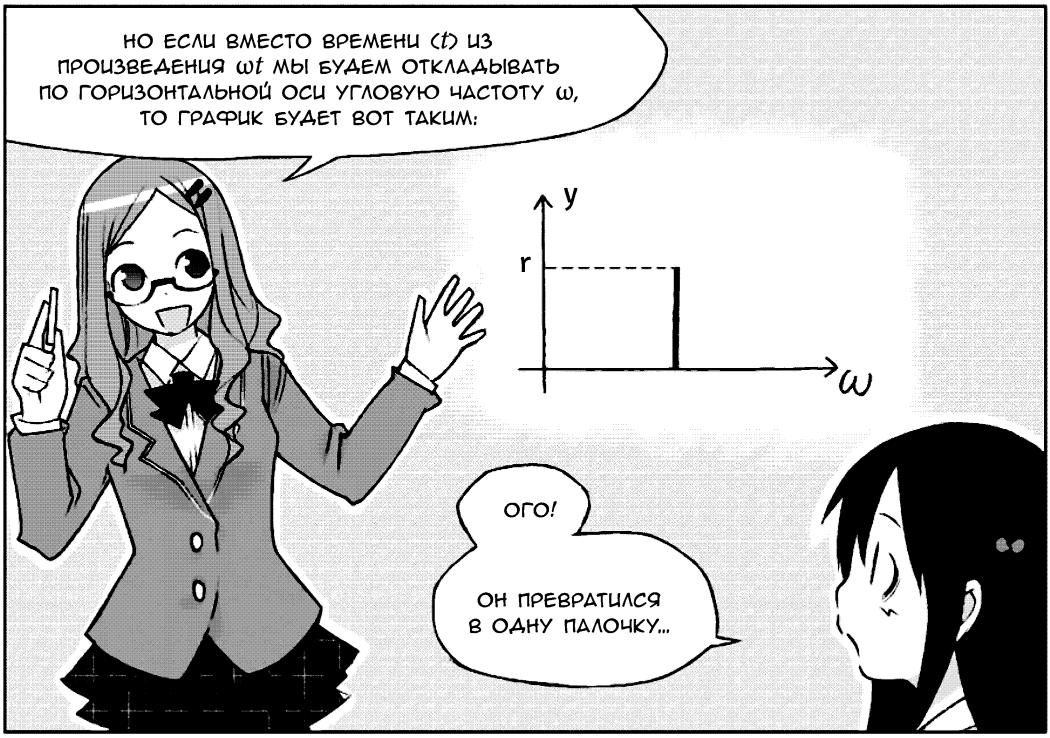
…Тырк! (Тыркает Фумику)

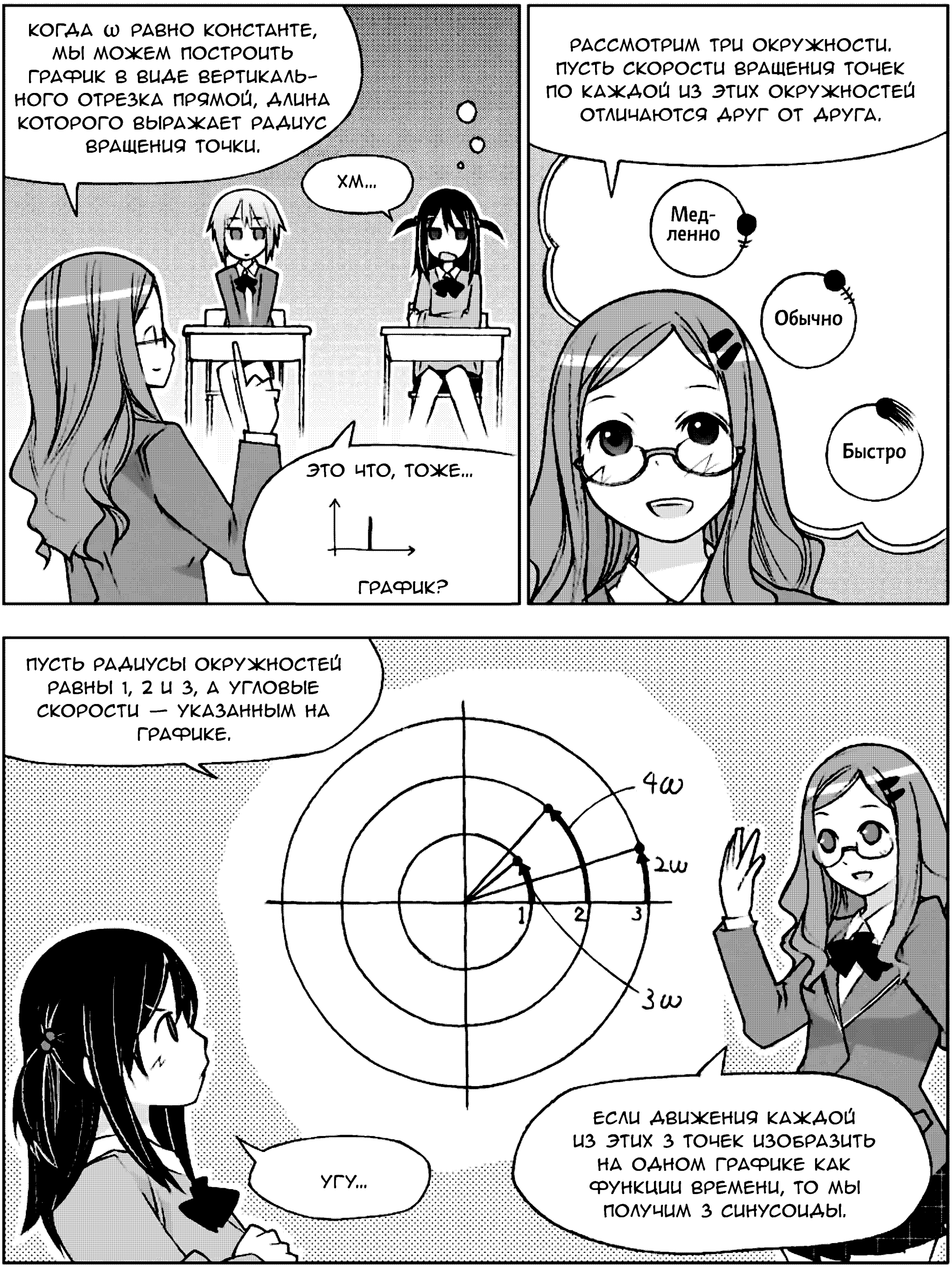
Шуток, что-ли, не понимаешь?!

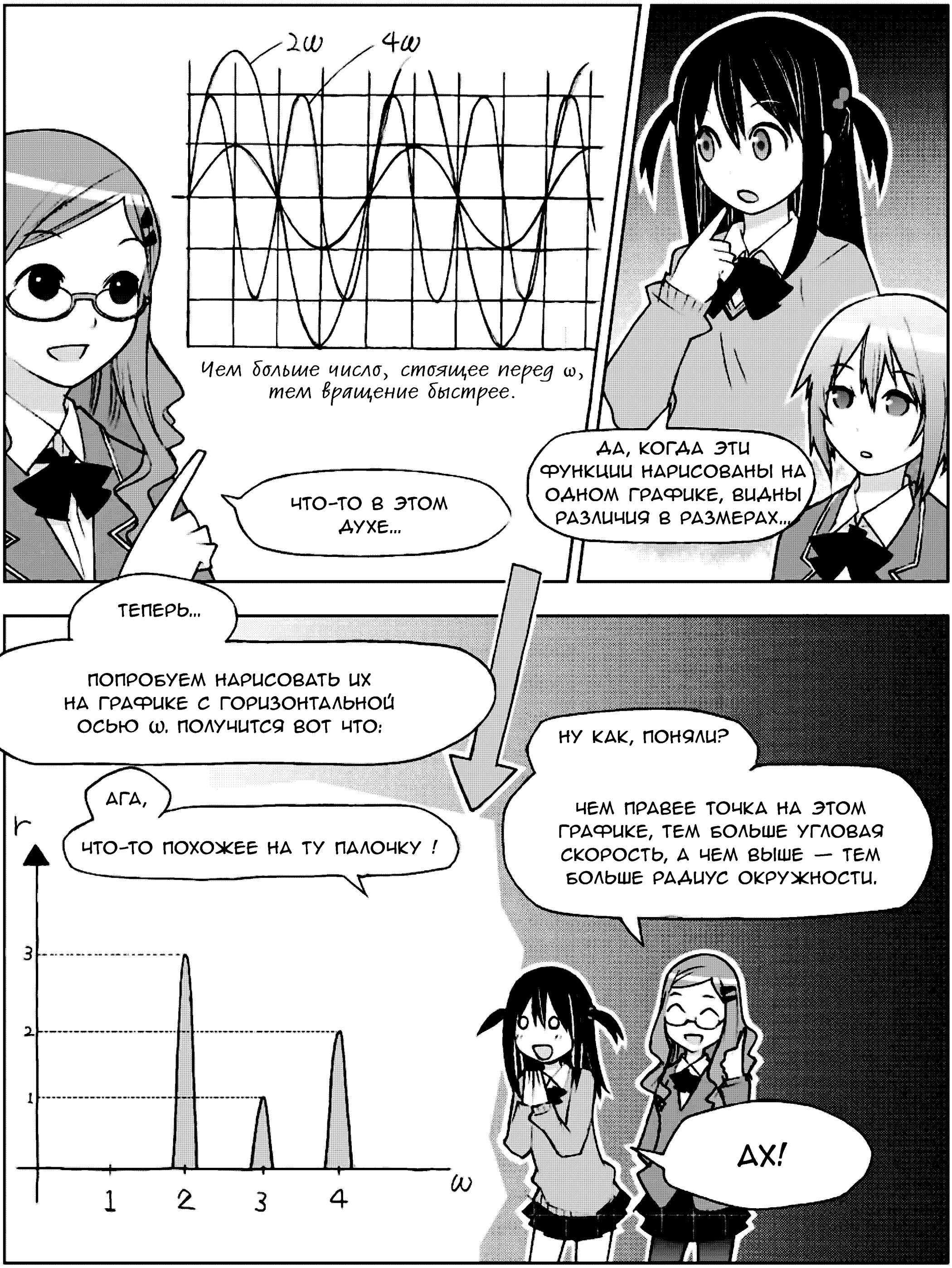
7. Тригонометрические функции и угловая частота



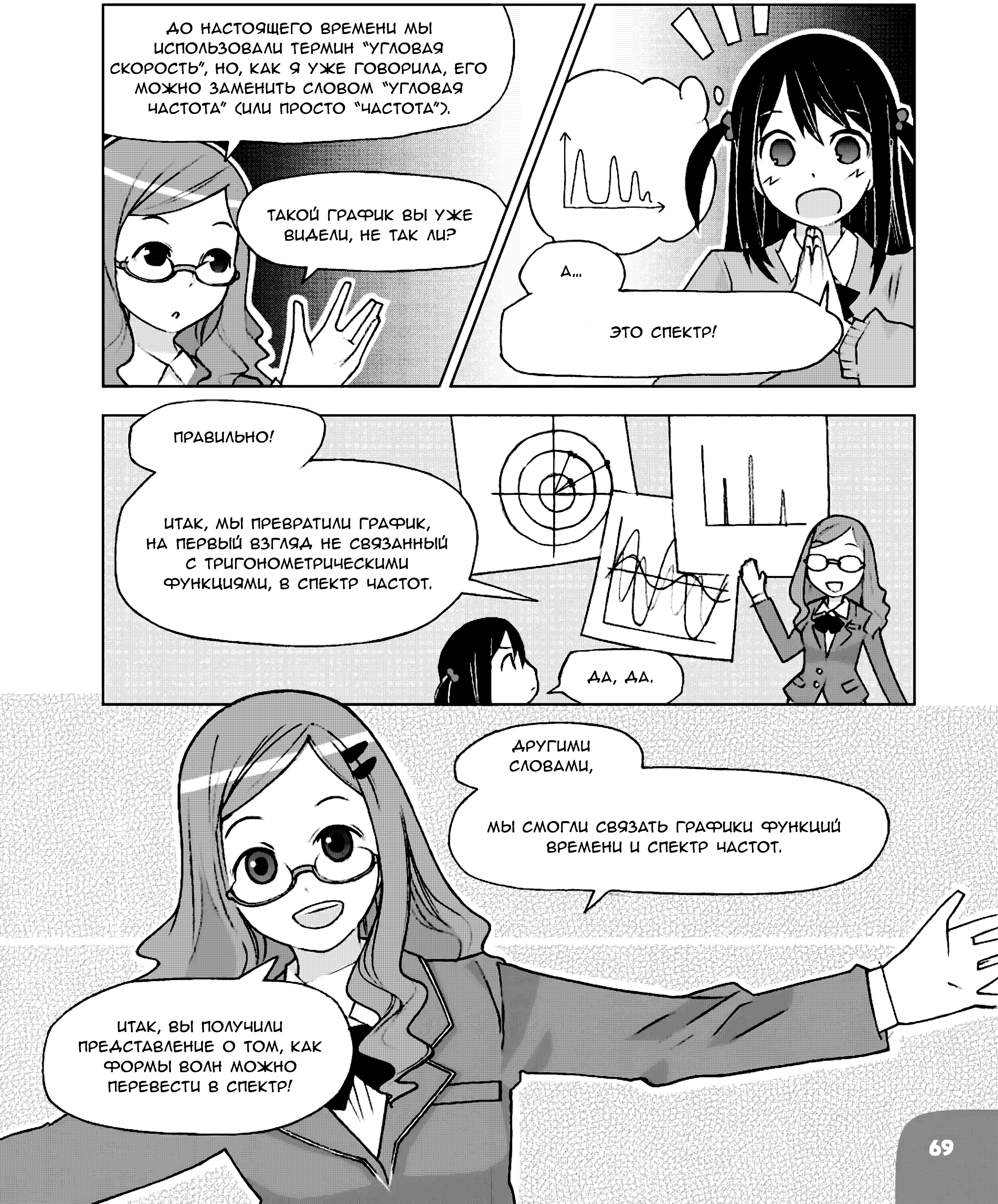

ЕСЛИ ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ОСИ ОТКЛАДЫВАТЬ ВРЕМЯ (t), А ПО ВЕРТИКАЛЬНОЙ — КООРДИНАТУ y ТОЧКИ, ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПО ОКРУЖНОСТИ, ТО ПОЛУЧИТСЯ СЛЕДУЮЩИЙ ГРАФИК:
y
t
ЭТО ЖЕ ФУНКЦИЯ СИНУСА...
ВОТ ЭТО ДА...


НО ЕСЛИ ВМЕСТО ВРЕМЕНИ (t) ИЗ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ωt МЫ БУДЕМ ОТКЛАДЫВАТЬ ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ОСИ УГЛОВУЮ ЧАСТОТУ ω, ТО ГРАФИК БУДЕТ ВОТ ТАКИМ:
y
r
ω
ОГО!
ОН ПРЕВРАТИЛСЯ В ОДНУ ПАЛОЧКУ...


Когда ω равно константе, мы можем построить график в виде вертикального отрезка прямой, длина которого выражает радиус вращения точки.
Хм...
Это что, тоже...
график?
Рассмотрим три окружности. Пусть скорости вращения точек по каждой из этих окружностей отличаются друг от друга.
Медленно
Обычно
Быстро
Пусть радиусы окружностей равны 1, 2 и 3, а угловые скорости — указанным на графике.
4ω
2ω
3ω
1
2
3
Угу...
Если движения каждой из этих 3 точек изобразить на одном графике как функции времени, то мы получим 3 синусоиды.

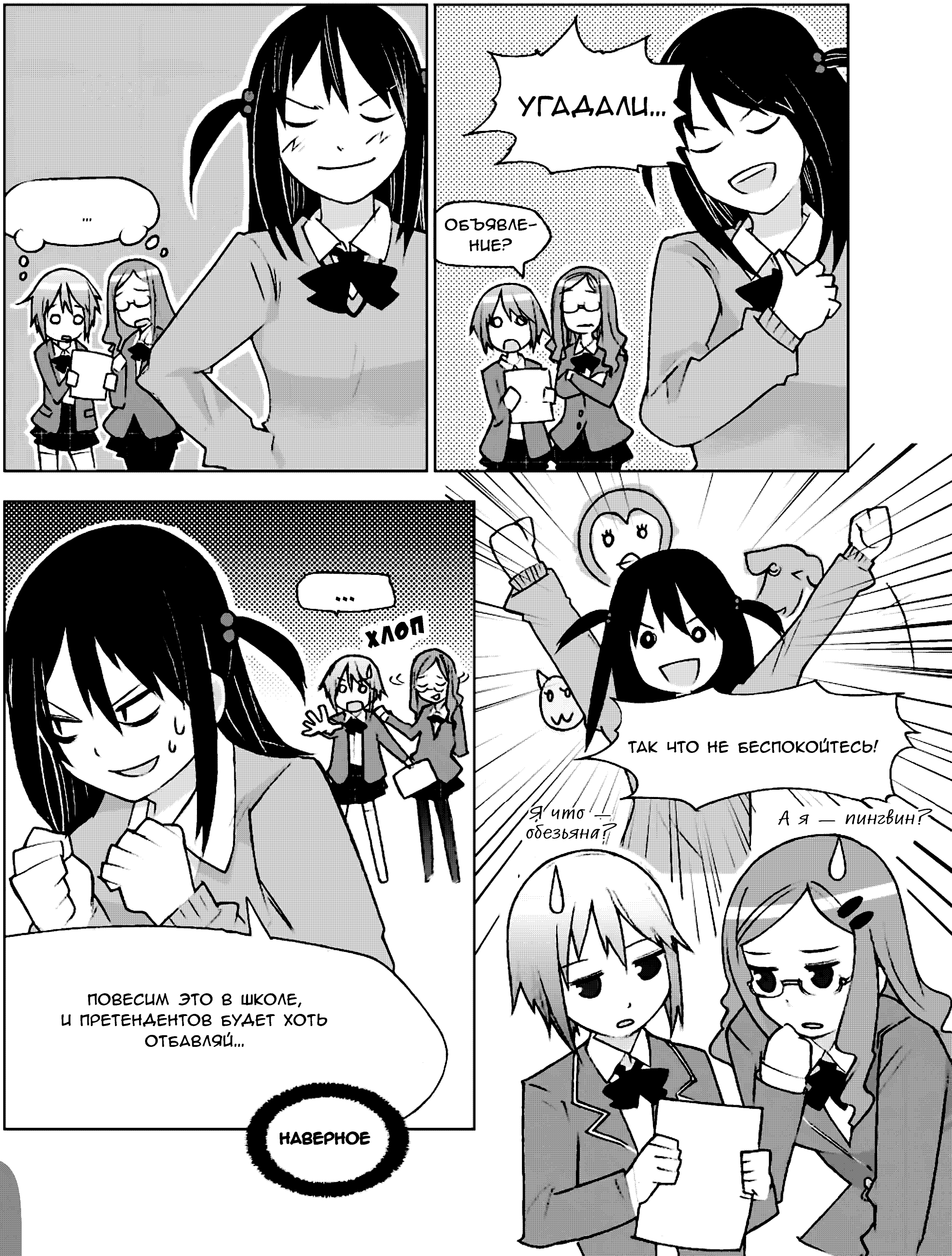


2ω
4ω
Чем больше число, стоящее перед ω, тем вращение быстрее.
ЧТО-ТО В ЭТОМ ДУХЕ...
ДА, КОГДА ЭТИ ФУНКЦИИ НАРИСОВАНЫ НА ОДНОМ ГРАФИКЕ, ВИДНЫ РАЗЛИЧИЯ В РАЗМЕРАХ...
ТЕПЕРЬ...
ПОПРОБУЕМ НАРИСОВАТЬ ИХ НА ГРАФИКЕ С ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ОСЬЮ ω. ПОЛУЧИТСЯ ВОТ ЧТО:
АГА,
ЧТО-ТО ПОХОЖЕЕ НА ТУ ПАЛОЧКУ !
r
3
2
1
1
2
3
4
ω
НУ КАК, ПОНЯЛИ?
ЧЕМ ПРАВЕЕ ТОЧКА НА ЭТОМ ГРАФИКЕ, ТЕМ БОЛЬШЕ УГЛОВАЯ СКОРОСТЬ, А ЧЕМ ВЫШЕ — ТЕМ БОЛЬШЕ РАДИУС ОКРУЖНОСТИ.
АХ!


До настоящего времени мы использовали термин "угловая скорость", но, как я уже говорила, его можно заменить словом "угловая частота" (или просто "частота").
Такой график вы уже видели, не так ли?
А...
Это спектр!
Правильно!
Итак, мы превратили график, на первый взгляд не связанный с тригонометрическими функциями, в спектр частот.
Да, да.
Другими словами,
мы смогли связать графики функций времени и спектр частот.
Итак, вы получили представление о том, как формы волн можно перевести в спектр!


ОГО!
Я ДАЖЕ НЕ ЗАМЕТИЛА, КАК МЫ ЭТО СДЕЛАЛИ!
ПРАВДА,
КАК Я УЖЕ ГОВОРИЛА, ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЕСТЬ ОДНО УСЛОВИЕ: ПЕРИОД КОЛЕБАНИЙ ДОЛЖЕН БЫТЬ ПОСТОЯНЕН.
ОДНАКО В ПРИРОДЕ СУЩЕСТВУЕТ МНОГО ЯВЛЕНИЙ, ДЛЯ КОТОРЫХ ЭТО УСЛОВИЕ НЕ ВЫПОЛНЯЕТСЯ.
Природа
ПОЛНЫЙ ХАОС
ВОТ НЕЗАДАЧА!
В ТАКИХ СЛУЧАЯХ ПРОВОДЯТ ДЕЛЕНИЕ НА КОРОТКИЕ ИНТЕРВАЛЫ ВРЕМЕНИ, В ПРЕДЕЛАХ КОТОРЫХ ЯВЛЕНИЕ МОЖНО СЧИТАТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИ ПОВТОРЯЮЩИМСЯ, И ВЫЧИСЛЯЮТ СПЕКТР. ОДНАКО...
ОБ ЭТОМ МЫ ПОГОВОРИМ В ДРУГОЙ РАЗ.
ДАВАЙТЕ ЗАКОНЧИМ НА СЕГОДНЯ!
БОЛЬШОЕ СПАСИБО НАШЕМУ УЧИТЕЛЮ ЭРИНЕ!


А...
Да, да.
Совсем забыла...
ШУРХ ШУРХ ШУРХ
ТРАМ-ТАДАМ-ТАРАРАМ!
Взгляните на это!
Наша женская музыкальная группа ищет вокалиста.
В настоящее время нас трое: электрогитара, бас-гитара и ударные.
ДАВАЙТЕ ВМЕСТЕ ИГРАТЬ ПОПУЛЯРНЫЙ РОК!
Адрес электронной почты:

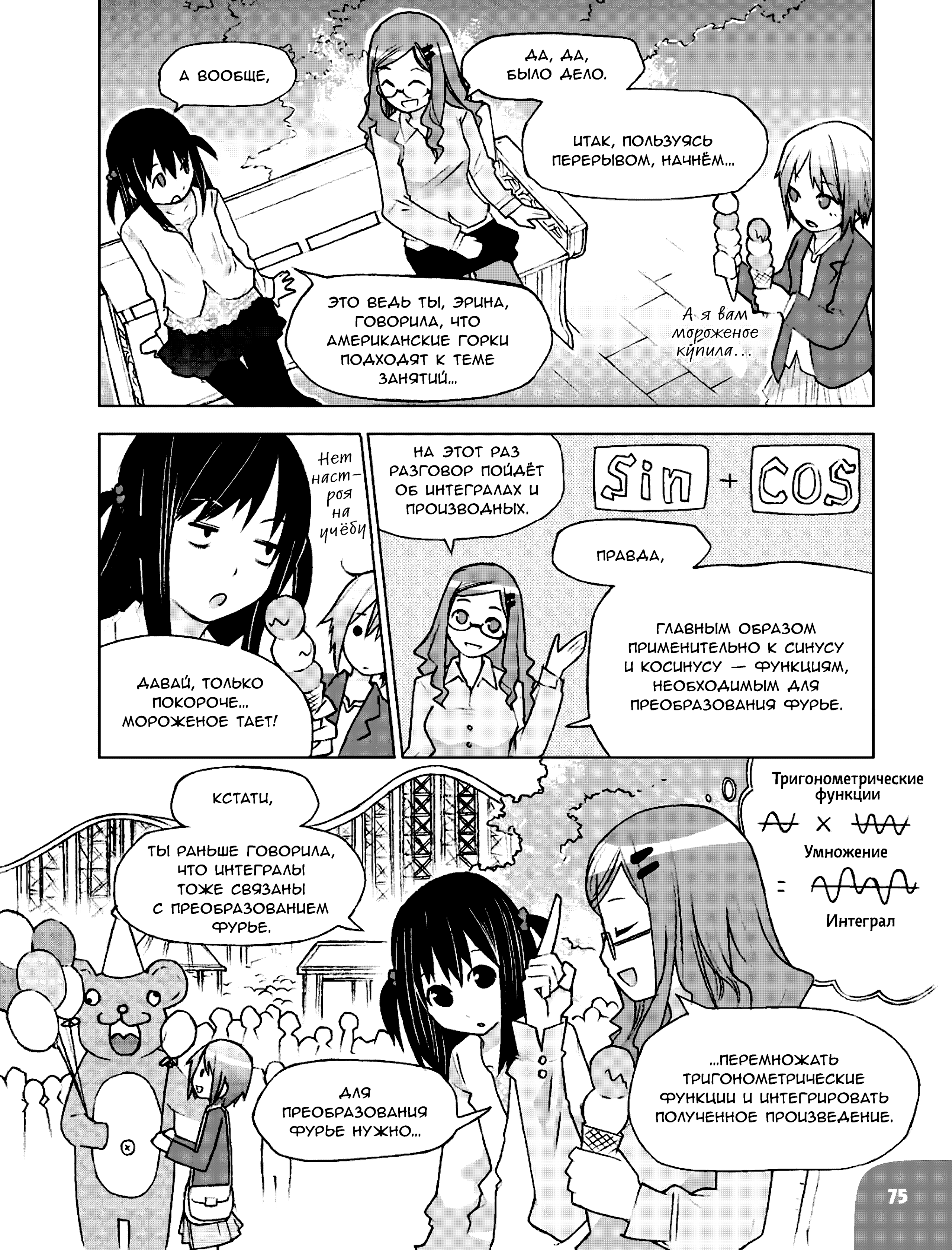


...
Угадали...
Объявле-
ние?
...
ХЛОП
Повесим это в школе,
и претендентов будет хоть
отбавляй...
Наверное
Так что не беспокойтесь!
Я что —
обезьяна?
А я — пингвин?

ГЛАВА 3

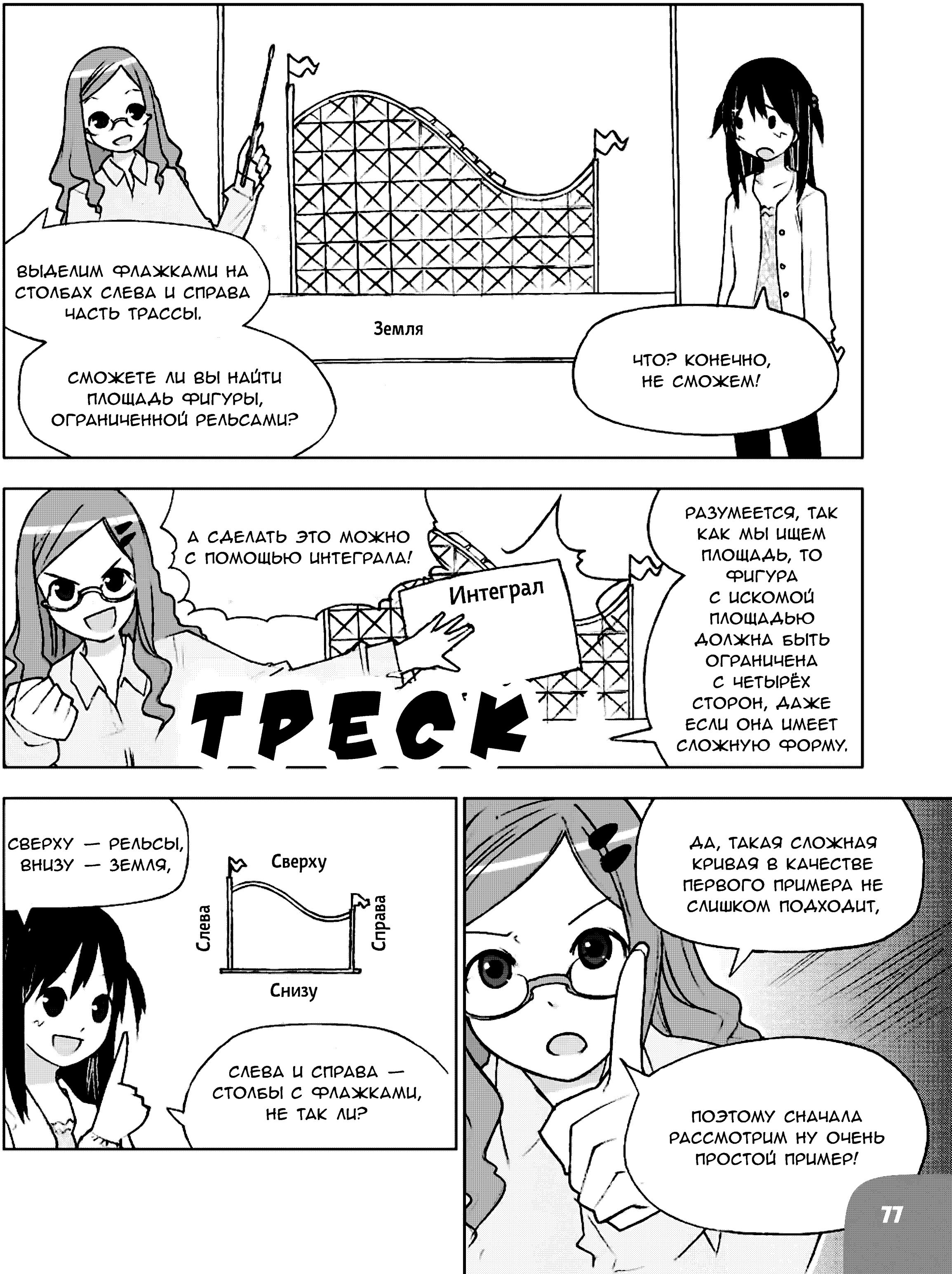
ИНТЕГРАЛЫ БЫВАЮТ ОПРЕДЕЛЁННЫЕ И НЕОПРЕДЕЛЁННЫЕ, ЧЕГО НЕ СКАЖЕШЬ О ПРОИЗВОДНЫХ

1. Американские горки и определённый интеграл

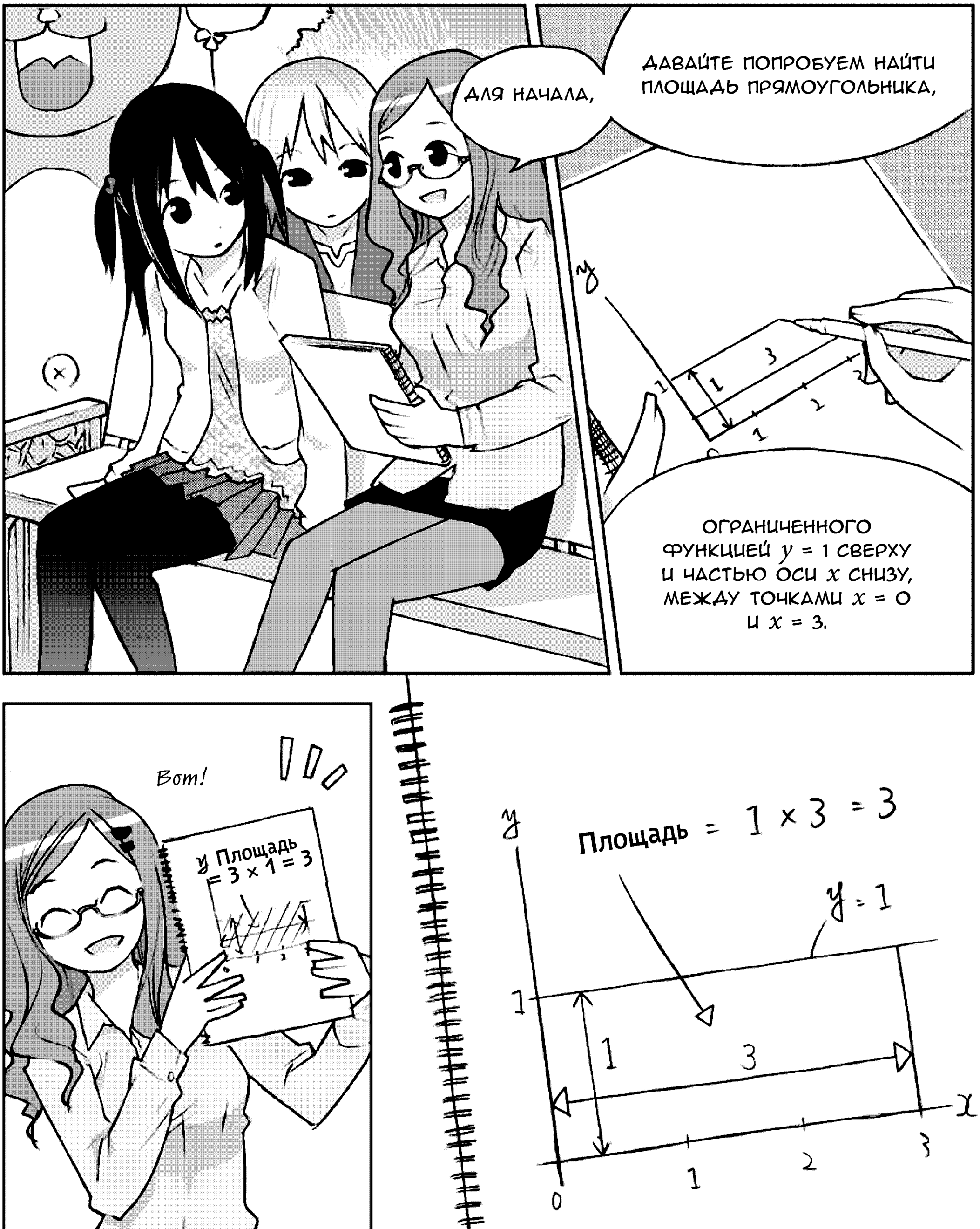


А вообще,
Да, да, было дело.
Итак, пользуясь перерывом, начнём...
Это ведь ты, Эрина, говорила, что американские горки подходят к теме занятий...
А я вам мороженое купила...
Нет настроя на учёбу
На этот раз разговор пойдёт об интегралах и производных.
Sin + COS
Правда,
главным образом применительно к синусу и косинусу — функциям, необходимым для преобразования Фурье.
Давай, только покороче... Мороженое тает!
Кстати,
ты раньше говорила, что интегралы тоже связаны с преобразованием Фурье.
Тригонометрические функции
Умножение
Интеграл
Для преобразования Фурье нужно...
...перемножать тригонометрические функции и интегрировать полученное произведение.


Кроме того,
для вычисления интегралов...
Производная
Интеграл.
...нужно также разбираться в производных, ведь они — как изнанка интегралов.
Ой, как всё закручено...
Обычно в учебниках сначала идёт производная,
1 Производная
но здесь нам удобнее начать с интеграла.
Но скажи,
а какая всё-таки связь между интегралом и американскими горками?
Вот они, американские горки, как раз перед нами.
Угу



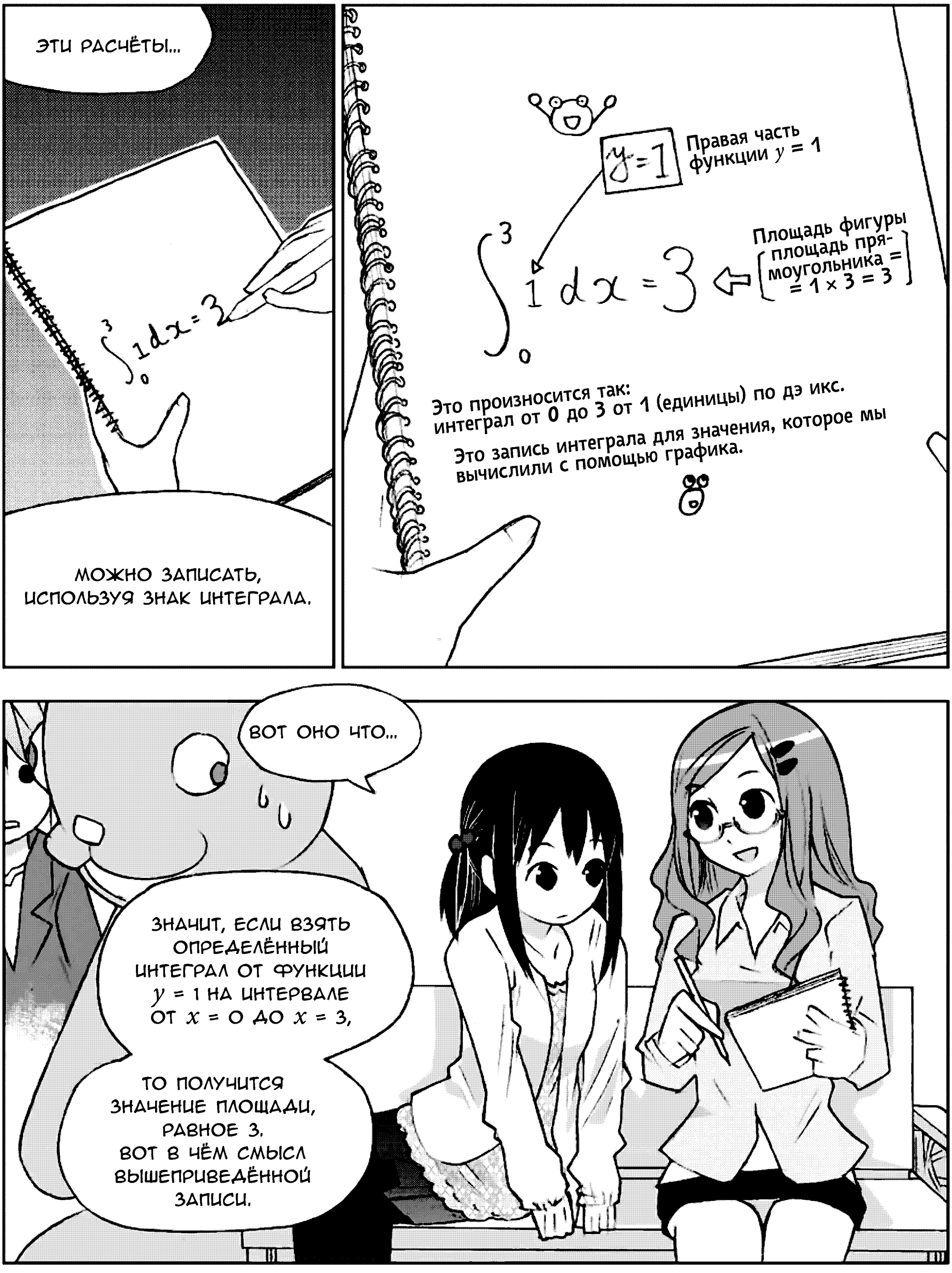
Выделим флажками на столбах слева и справа часть трассы.
Земля
Сможете ли вы найти площадь фигуры, ограниченной рельсами?
Что? Конечно, не сможем!
А сделать это можно с помощью интеграла!
Интеграл
ТРЕСК
Разумеется, так как мы ищем площадь, то фигура с искомой площадью должна быть ограничена с четырёх сторон, даже если она имеет сложную форму.
Сверху — рельсы, внизу — земля,
Сверху
Слева
Справа
Снизу
слева и справа — столбы с флажками, не так ли?
Да, такая сложная кривая в качестве первого примера не слишком подходит,
поэтому сначала рассмотрим ну очень простой пример!

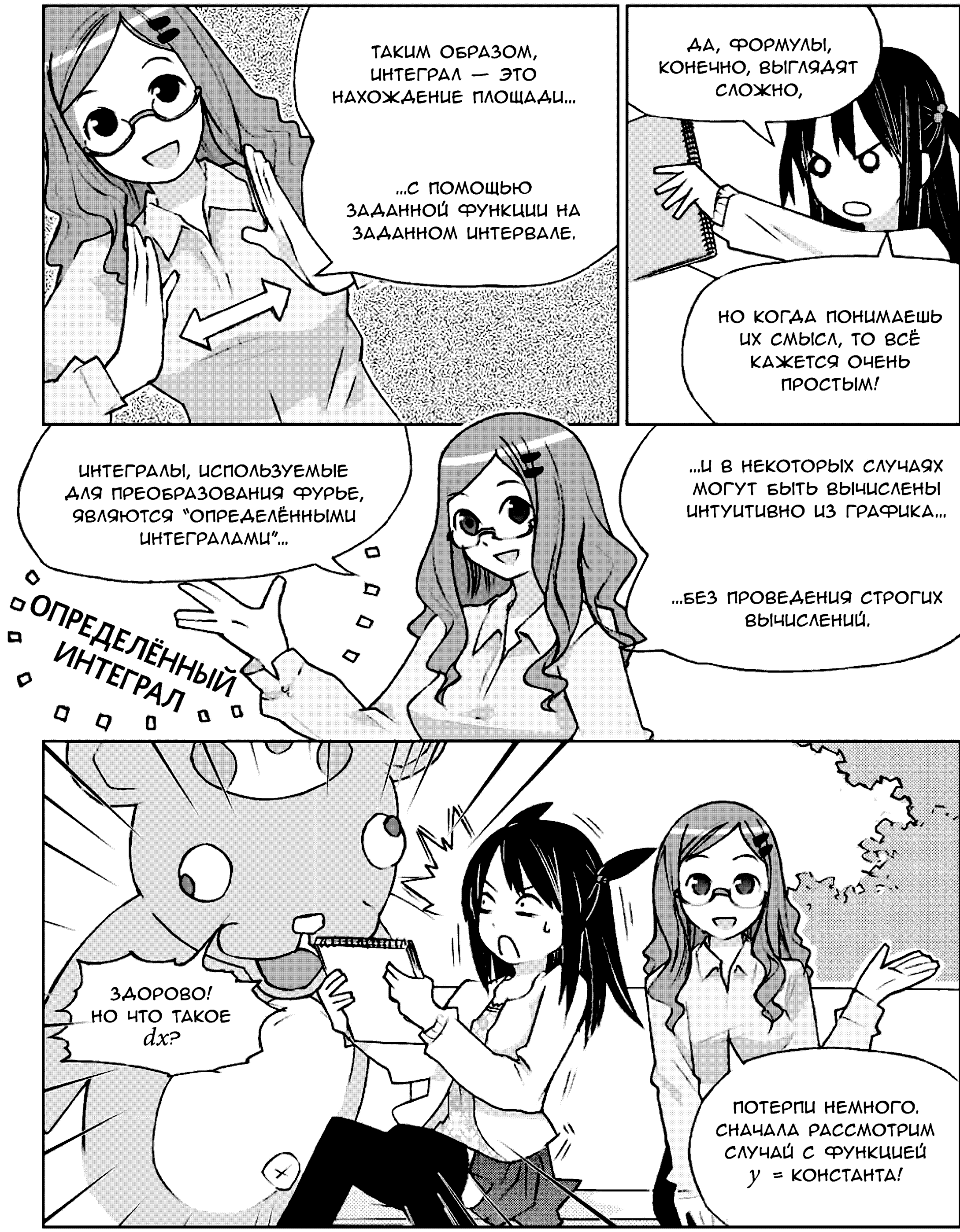

Для начала,
Давайте попробуем найти площадь прямоугольника,
ограниченного функцией y = 1 сверху и частью оси x снизу, между точками x = 0 и x = 3.
Вот!
y Площадь = 3 × 1 = 3
Площадь = 1 × 3 = 3
y = 1
y
x
1
3
0
2


Так как это прямоугольник с высотой, равной 1, и длиной, равной 3, площадь равна 1 x 3 = 3. Просто, не так ли?
3
1×3=3
1
Да, да...

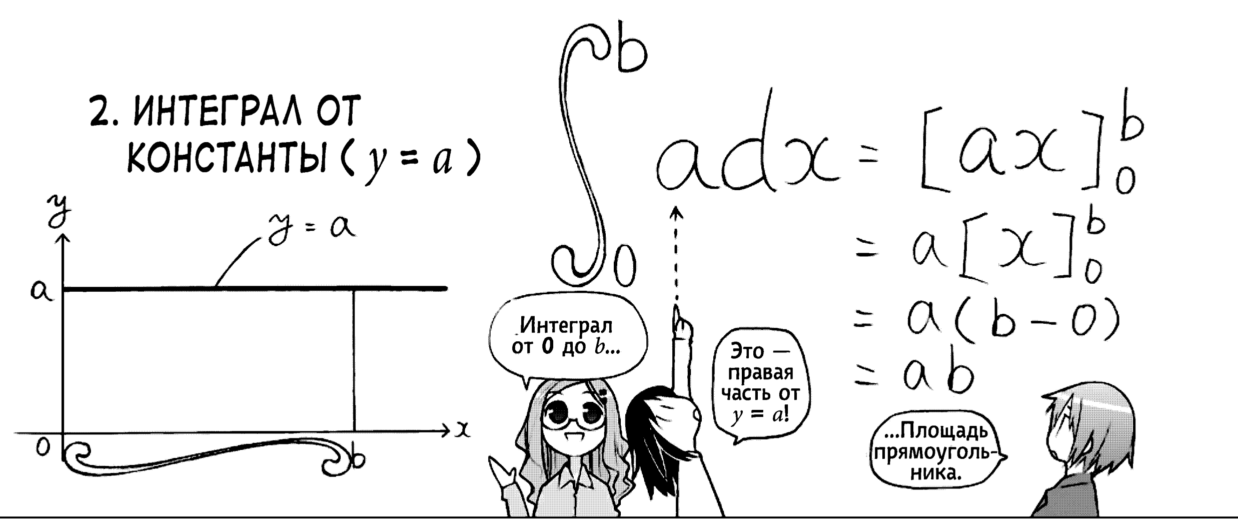

Точно так же, если правая граница x = 5, то площадь численно равна 5.
Как видите, площадь прямоугольника, ограниченного осью x и функцией y = 1 на интервале от 0 до x, будет равна значению x.
1
1×5=5
5
1
1×x=x
x


Ха-ха...
Ну, это элементарно.
Это же, как говорится, и ежу понятно.
Именно это лежит в основе определённого интеграла.


Эти расчёты...
$\int_0^3 1\,dx = 3$
Можно записать, используя знак интеграла.
$y=1$
Правая часть функции $y = 1$
$\int_0^3 1\,dx = 3$
Площадь фигуры [площадь прямоугольника = = 1 × 3 = 3]
Это произносится так: интеграл от 0 до 3 от 1 (единицы) по дэ икс.
Это запись интеграла для значения, которое мы вычислили с помощью графика.
Вот оно что...
Значит, если взять определённый интеграл от функции y = 1 на интервале от x = 0 до x = 3,
то получится значение площади, равное 3. Вот в чём смысл вышеприведённой записи.


Таким образом, интеграл — это нахождение площади...
...с помощью заданной функции на заданном интервале.
Да, формулы, конечно, выглядят сложно,
но когда понимаешь их смысл, то всё кажется очень простым!
Интегралы, используемые для преобразования Фурье, являются "определёнными интегралами"...
Определённый интеграл
...и в некоторых случаях могут быть вычислены интуитивно из графика...
...без проведения строгих вычислений.
Здорово! Но что такое dx?
Потерпи немного. Сначала рассмотрим случай с функцией y = константа!

2. Интеграл от константы ($y = a$)

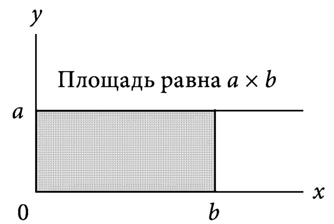


В математике различают «неопределённый интеграл», связанный с производной (о нём речь пойдёт позже), и «определённый интеграл». Определённый интеграл — это значение (число), равное площади фигуры, вычисляемой интегрированием функции на заданном интервале. А вот неопределённый интеграл — это не константа, а функция. Обычно сначала знакомятся с неопределённым интегралом. Разумеется, поняв неопределённый интеграл, вы сможете понять и определённый.

Однако определённый интеграл напрямую связан с задачей нахождения площади, и, чтобы понять его, знать что-либо о неопределённом интеграле необязательно. Давайте найдём определённый интеграл от функции $y = a$ на интервале от $x = 0$ до $x = b$. Даже без вычислений видно, что результат, то есть площадь, равен $a \times b$.

Это понятно, ведь мы ищем площадь прямоугольника.

Графически этот интеграл показан на Рис. 3-1:



$$\int_0^b a\,dx$$

□ Рис. 3-1. Интеграл функции $y = a$ на интервале от 0 до b.

В чём смысл этого выражения? Правая часть рисунка говорит нам, что надо вычислить определённый интеграл от функции $y = a$ относительно x (то есть, в направлении оси x) от 0 до b. Растянутая буква S читается как «интеграл» и говорит нам, что нужно проинтегрировать следующее за ней выражение. Маленькие буквы или цифры вверху и внизу (у нас 0 и b) задают интервал интегрирования, причём нижняя (нижний предел) — его начало, а верхняя (верхний предел) — конец.

А всё-таки что значит «dx»?

Буква d указывает на «малость», поэтому dx означает «очень маленький отрезок на оси x». Ведь идея интеграла — нахождение всей площади сложением малых частей.

Вот как?

Здесь a — константа, и интеграл по x от константы равен ax. Причину этого я объясню потом, когда буду говорить о производной. А сейчас мы просто пишем ax в квадратных скобках ① (Рис. 3-2), справа от неё пишем пределы интегрирования ②. Далее выносим константу a из квадратных скобок. Теперь мы готовы к подстановке пределов интегрирования в функцию x ③. Далее подставляем сначала верхний предел ④, а затем вычитаем из него результат подстановки нижнего предела ⑤.

$$\begin{aligned} \int_0^b a\,dx &= \overset{①}{[ax]}_0^b\ ② \\ &= \overset{③}{a}[x]_0^b \\ &= a(\overset{④}{b}-\overset{⑤}{0}) \\ &= ab. \end{aligned}$$

☐ Рис. 3-2. Последовательность вычисления определённого интеграла от функции $y = a$ на интервале от 0 до b.

Да, довольно хлопотно...

А ты не спеши, и всё получится.
Кстати, функцию $y = a$ можно написать так: $y = a \times x^0 = a \times 1$ (вспомните, что любое число в 0-й степени равно 1). Обратите внимание, что интегрируя константу, мы получаем функцию типа $y = ax$, которую называют «линейной функцией».

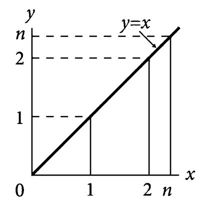
Рассмотрим другой пример, на этот раз с линейной функцией вида $y = x$. Помните, что её график — прямая, проходящая через начало координат (Рис. 3-3).

Вычислим площадь фигуры, которая ограничена наклонной прямой $y = x$, осью x, на интервале от $x = 0$ до $x = 1$. Для $x = 1$ мы получим $y = 1$, значит наша фигура — треугольник. Помните, чему равна площадь треугольника?

Основание надо умножить на высоту и поделить на 2?

Верно! Попробуем рассчитать. Получится $1 \times 1 : 2 = 1/2$.
А что будет для $x = 2$?

$2 \times 2 : 2 = 2.$



☐ Рис. 3-3. График функции $y = x$.

Верно. То есть площадь треугольника, ограниченного функцией $y = x$ и осью x, на интервале от $x = 0$ до $x = n$ равна

$$n \times n : 2 = n^2 \times \frac{1}{2} \text{ или для любого } x - \frac{x^2}{2}.$$

Значит, интеграл от $y = x$ с неопределенной правой границей x равен $x^2/2$. Поэтому эта функция и называется неопределенным интегралом. Вспомните, что интеграл от константы оказался линейной функцией. А теперь мы увидели, что интеграл для площади фигуры, ограниченной линией $y = x$ и осью x и неопределенной границей х справа, выражается квадратичной функцией.

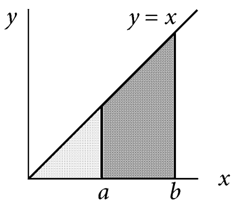
Здорово, но как-то необычно...

Принято считать, что интеграл — это метод вычисления площади, однако, строго говоря, он просто обладает некоторыми свойствами, удобными для вычисления площади. Вам же сейчас достаточно знать только те из его свойств, которые будут нужны для преобразования Фурье.

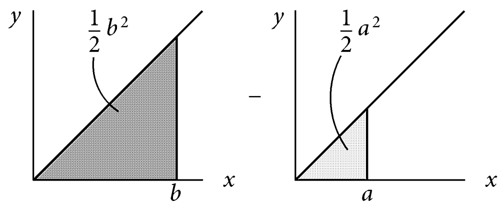
То есть, интеграл для нас — инструмент преобразования Фурье, да?

Да, именно так. Теперь скажите мне, а как, по-вашему, можно вычислить площадь трапеции, ограниченной этой прямой и осью x на участке от $x = a$ до $x = b$? Здесь a и b — это положительные константы (Рис. 3-4).

Хмм… Наверно, надо вычесть из большого треугольника, ограниченного прямой $y = b$, маленький треугольник, ограниченный прямой $y = a$ (Рис. 3-5), да?



☐ Рис. 3-4. Вычисление площади трапеции на интервале от $x = a$ до $x = b$.



☐ Рис. 3-5. Вычитание площадей.

Правильно. Просто вычитаем из площади треугольника с пределом $y = b$ площадь треугольника с пределом $y = a$. Площадь трапеции будет равна

$^1/_2\,(b^2 - a^2)$.

Понятно.

А теперь посмотрим, как в этом случае выглядит интеграл:

$$\int_a^b x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_a^b = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right).$$

Левая часть этого выражения указывает, что надо проинтегрировать функцию $y = x$ по x от a до b. Правая часть показывает порядок вычислений.
Выражение $^1/_2\,x^2$ в квадратных скобках — это результат интегрирования функции x с неопределенными пределами, а справа от квадратных скобок указаны пределы — такие же, что и в левой части. Так как $^1/_2$ — это константа, выносим её за скобки, и в последнем выражении вычитаем из результата подстановки верхнего предела результат подстановки нижнего.

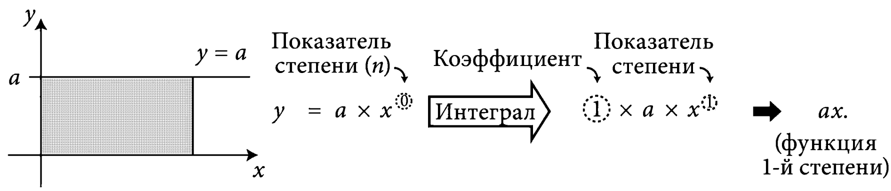
Значит, все предыдущие рассуждения тоже можно записать в виде интеграла? Ведь результат получился таким же, как при вычитании треугольников.

4. ИНТЕГРАЛ ОТ ФУНКЦИИ $y = x^n$

Итак, мы рассмотрели константную функцию (функцию от x в степени 0) и линейную функцию (функцию от x в степени 1). Другими словами, если обозначить показатель степени x буквой n, это были случаи $n = 0$ и $n = 1$. Теперь давайте изучим общий случай: $y = x^n$, где n — это 0 или любое целое положительное число.

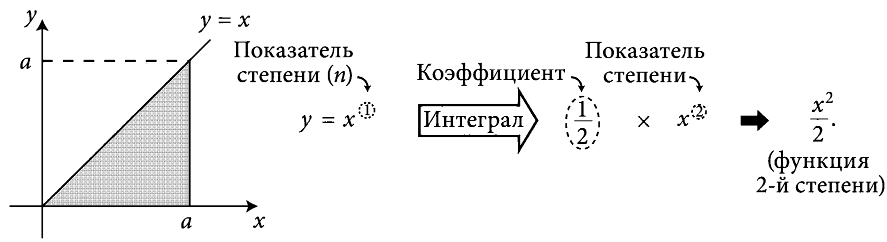
Но это очень сложно представить...

Давайте рассуждать последовательно. Первое выражение, $y = a$ ($y = a \times x^0$), соответствовало $n = 0$, а интеграл по x был равен $1 \times a \times x^1$ ($= ax$) (Рис. 3-6).



☐ Рис. 3-6. Интеграл от функции $y = a$.

То есть функция $y = ax$ — это интеграл от функции $y = a$. Затем, для интеграла от $y = x$ ($= x^1$) мы с помощью графика вычислили площадь и получили $^1/_2 \times x^2$ (Рис. 3-7).



☐ Рис. 3-7. Интеграл от функции $y = x$.

То есть функция $y = {}^1/_2 x^2$ — это интеграл от функции $y = x$. Теперь попробуем представить, как будет выглядеть интеграл от функции $y = x^n$.

Ну…

Сначала разберёмся с коэффициентом функции, полученной после интегрирования. Для $n = 0$ коэффициент перед x был равен 1 ($= {}^1/_1$), для $n = 1$ мы получили ${}^1/_2$. Отсюда можно сделать смелое предположение, что для любого n коэффициент будет равен…

Может быть $\frac{1}{n+1}$? (Рис. 3-8)

$n=0$ $\xrightarrow{\text{Для } n = 0}$ коэффициент при x: $1\left(\frac{1}{1}\right)$.

$n=1$ $\xrightarrow{\text{Для } n = 1}$ коэффициент при x: $\frac{1}{2}$.

Отсюда можно предположить, что для любого n коэффициент при x: $\frac{1}{n+1}$.

☐ Рис. 3-8. Коэффициент при *x* для произвольного значения *n*.

Правильно! Это что-то вроде разгадывания ребусов, не так ли? Теперь посмотрим на показатель степени x. Для $n = 0$ интеграл равен x^1, а для $n = 1$ он будет равен x^2, то есть можно предположить, что для любого n интеграл будет равен x^{n+1} (Рис. 3-9).

$n=0$ $\xrightarrow{\text{Для } n = 0}$ показатель степени x: x^{1}.

$n=1$ $\xrightarrow{\text{Для } n = 1}$ показатель степени x: x^{2}.

Отсюда можно предположить, что для любого n показатель степени: x^{n+1}.

☐ Рис. 3-9. Показатель степени *x* для произвольного значения *n*.

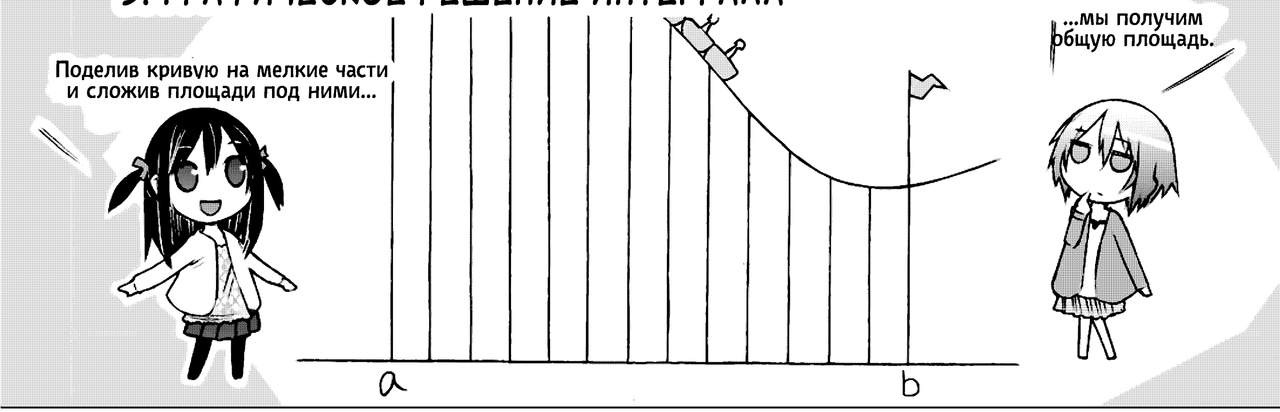
Интересно...

Подводя итог, предположим, что (неопределенный) интеграл от функции вида $y = x^n$, выглядит так:

$$y = x^n \xRightarrow{\text{Интеграл}} \frac{1}{n+1} x^{n+1}.$$

Конечно, подобное обобщение на основе всего двух примеров и без доказательства может быть и недостаточно с точки зрения математики. Но можете мне поверить, это правило действительно справедливо.

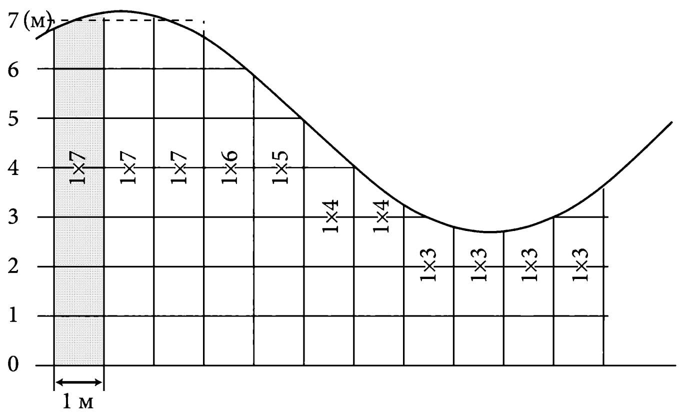
5. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛА



Теперь вернёмся к нашему разговору про американские горки.

Да, ведь разговор начался с них...

Пусть, например, расстояние между столбами равно 1 м. Если мы измерим высоту на каком-то участке, то узнаем площадь пролёта между двумя столбами. Суммируя эти площади одну за другой, мы сможем примерно вычислить общую площадь (Рис. 3-10).



Площадь = 1 × 7 + 1 × 7 + 1 × 7 + 1 × 6 + 1 × 5 + 1 × 4 + 1 × 4 + 1 × 3 + 1 × 3 + 1 × 3 + 1 × 3.
Делим общую площадь на участки, вычисляем площади каждого и суммируем их.

☐ Рис. 3-10. Приближённое вычисление площади под кривой.

Да, так тоже можно подсчитать, если точность не очень важна...

Чем меньше будет расстояние между столбами, тем точнее мы сможем вычислить общую площадь. Подобное описание определённого интеграла можно встретить в учебниках.

Понятно, однако замучаешься всё это подсчитывать...

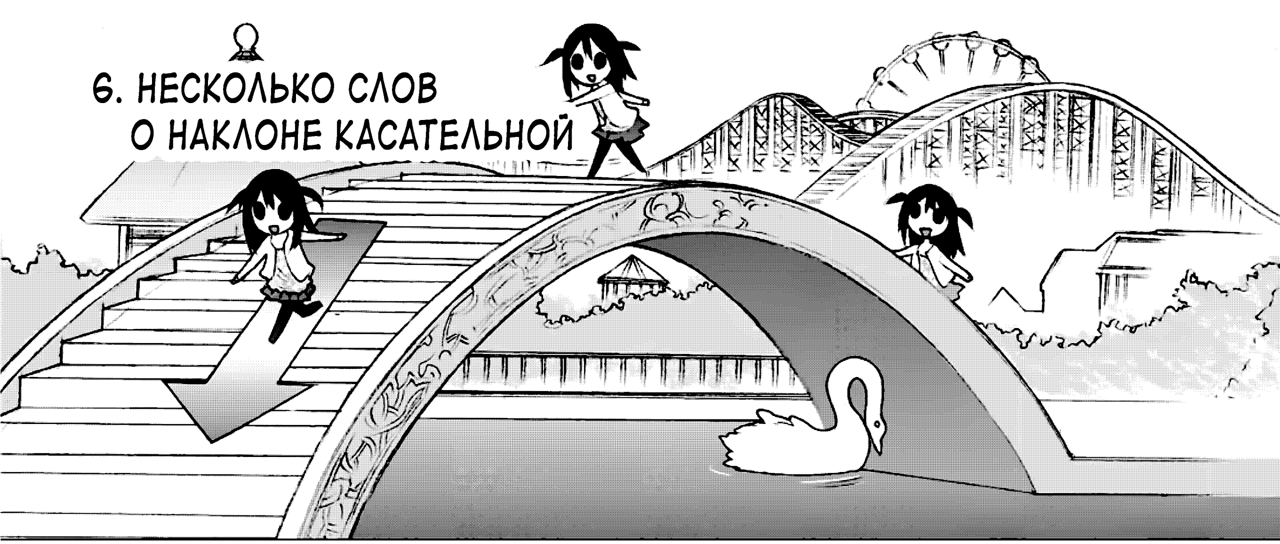
Поэтому этот способ реально используется в случаях, когда явление не может быть описано в виде математической функциональной зависимости. Для ускорения вычислений используют, например, компьютеры.

Наступление компьютерной эры!

Это сейчас — наступление?

Однако, если искомая площадь может быть выражена с помощью простых функций, то её можно найти с помощью математических правил, не прибегая к помощи компьютера. Ведь определённый интеграл от простых функций ищется очень просто.

6. Несколько слов о наклоне касательной



Итак, надеюсь, вы получили общее представление об интегралах. Теперь перейдём к производным. На самом деле, нахождение производной (дифференцирование) — это операция, обратная к неопределенному интегрированию.

Обратная операция?

Слово «обратная» означает, что она проводится в обратном порядке. Приведу простой пример. Если умножить 2 на 5, то получится 10, не так ли? Это прямая операция. А если разделить 10 на 5 и получить 2, то это — операция, обратная первой.

Понятно.

Это означает, что…
...если интеграл от A равен B,
то производная от B равна A.
Конечно, представление о производной можно получить, даже не связывая её с интегралом. Для начала я расскажу вам об основном для производной понятии — «касательной к графику функции».

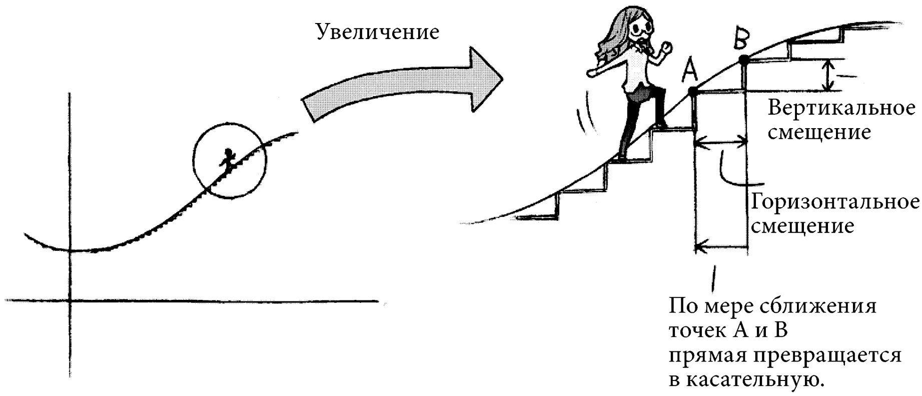
…касательной к графику функции?

Касательная к графику функции — это прямая, которая имеет лишь одну общую точку с кривой, отображающей функцию, не пересекая её. И здесь мы будем рассматривать наклон этой прямой. Вспомните, что наклон прямой равен отношению её вертикального изменения к горизонтальному.

Подожди-ка! А что это такое — «наклон прямой, которая касается точки»? Что, у точки тоже может быть наклон? И вообще, что это — точка или прямая?!

Ну, успокойся. Приведу конкретный пример для лучшего понимания.

Представь, что у нас есть сложная кривая, вдоль которой идёт лестница. Пусть точка A находится в углу одной из ступенек, а точка B — в углу следующей ступеньки. Точку A от точки B отделяет как вертикальное, так и горизонтальное смещение, значит соединяющая их прямая будет иметь наклон (Рис. 3-11).



☐ Рис. 3-11. Представление о касательной.

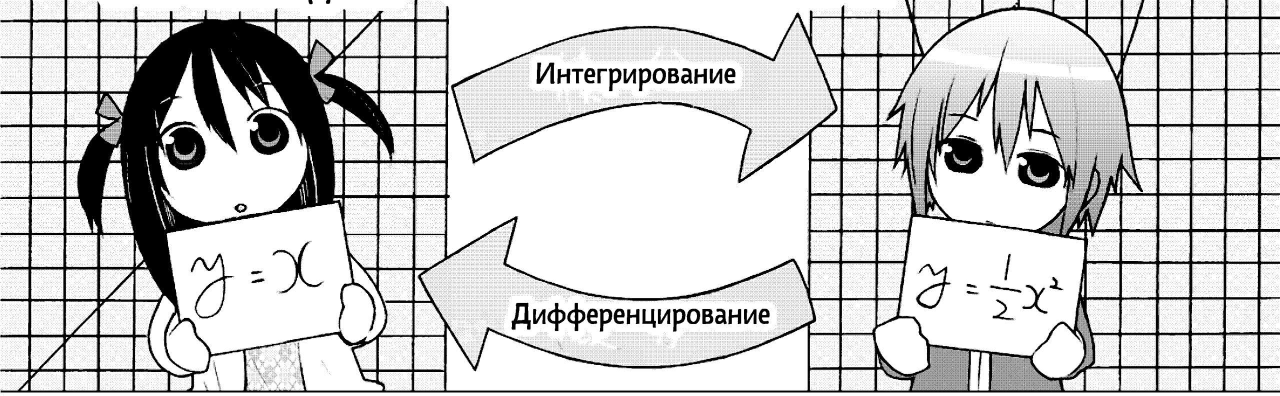
Теперь представьте, что ширина ступенек начала резко уменьшается, и точки A и B стали приближаться друг к другу. При этом наклон прямой тоже будет изменяться, стремясь к какому-то предельному значению. В конечном итоге, когда точки A и B сольются в одну, соединяющая их прямая превратится в касательную. Обратите внимание, мы не ищем само уравнение касательной, а только её наклон в точке касания с исследуемой кривой.

Понятно... Действительно, не то точка, не то прямая...

Дифференцирование — это не что иное, как нахождение наклона этой касательной!

А при чём тут была эта фраза: «дифференцирование — операция, обратная интегрированию»?..

7. ПРОИЗВОДНАЯ — ЭТО ИНТЕГРАЛ НАОБОРОТ



Теперь вспомните, как интеграл от прямой оказался равен квадратичной функции.

Да. И что из того?

Фраза «нахождение производной — обратная операция к интегрированию» означает, что производная квадратичной функции — это линейная функция. В рассказе про интеграл, проинтегрировав $y = x$, мы получили $^1/_2x^2$. Это значит, что продифференцировав $^1/_2x^2$, мы получим x.

И правда...

Вспомните алгоритм вычисления неопределенного интеграла:

$$y = x^n \quad \boxed{\text{Интеграл}} \Rightarrow \quad \frac{1}{n+1}\,x^{n+1}.$$

Если мы перепишем это в обратном порядке и попробуем найти производную от $y = x^2$, или $y = x^3$, то получим следующее (Рис. 3-12).

Домножаем числитель на 2

$$\boxed{y = x^2} \quad y = \frac{1}{\underset{n}{1} + 1} \times 2 \times x^{\overset{n}{1}+1} \quad \boxed{\text{Производная}} \Rightarrow \quad 2x^{\overset{n}{1}}$$

$$\boxed{y = x^3} \quad y = \frac{1}{\underset{n}{2} + 1} \times 3 \times x^{\overset{n}{2}+1} \quad \boxed{\text{Производная}} \Rightarrow \quad 3x^{\overset{n}{2}}$$

□ Рис. 3-12. Производные от $y = x^2$ и $y = x^3$ как результат операций, обратных интегрированию.

Значит, производная — это интеграл наоборот!

Точно. Но чтобы не думать над этим каждый раз, мы выведем закон. Так как производная от $y = x^2$ — это $y = 2x$, а производная от $y = x^3$ — это $y = 3x^2$, то для общего случая $y = x^n$ производная будет выглядеть вот так:

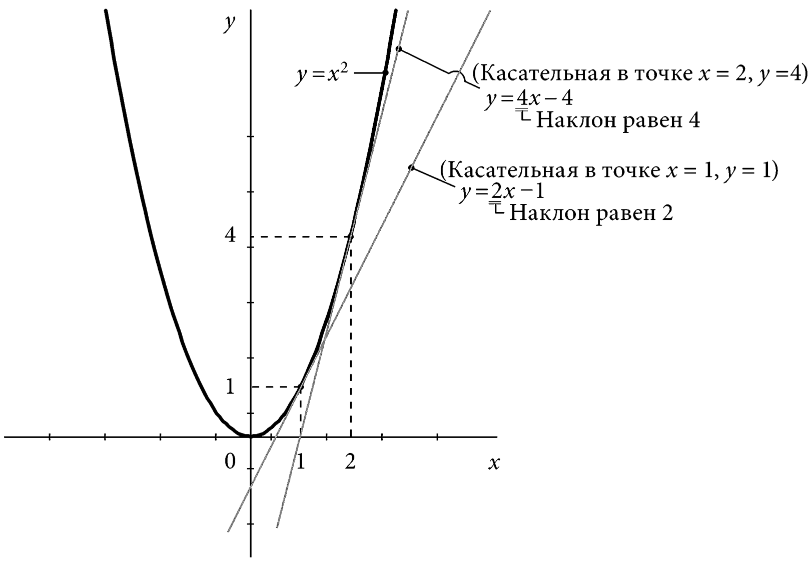
$$y = x^{n+1} \xrightarrow{\text{Производная}} (n+1)\,x^n,$$

или, заменяя n на $(n-1)$,

$$y = x^n \xrightarrow{\text{Производная}} n\,x^{n-1}.$$

Ого! Стало просто и понятно!

Теперь исследуем касательную к квадратичной функции $y = x^2$. Как мы уже убедились, дифференцирование $y = x^2$ даёт нам производную $2x$. Так как результат дифференцирования — это функция наклона, мы подставим в неё нужное значение x и вычислим наклон. Если $x = 1$, то мы получим 2. Если $x = 2$, то получится 4. Как видно из Рис. 3-13, наклон касательной в этих двух точках равен соответственно 2 и 4.



☐ Рис. 3-13. Наклон касательной к кривой $y = x^2$.

Если немного напрячь воображение, глядя на график, то можно заметить, что наклон касательной к функции $y = x^2$ действительно равен удвоенному значению x.

Да, очень похоже, что это так.

Если записать это в виде выражения для касательной, то получится следующее:

Дэ по дэ икс, икс квадрат

$$\frac{d}{dx}x^2 = 2x,$$

или

Дэ икс квадрат по дэ икс

$$\frac{dx^2}{dx} = 2x,$$

или

$$(x^2)' = 2x.$$

Получившееся выражение $2x$ тоже является функцией x и называется производной от исходной функции.

А что такое $(x^2)'$?

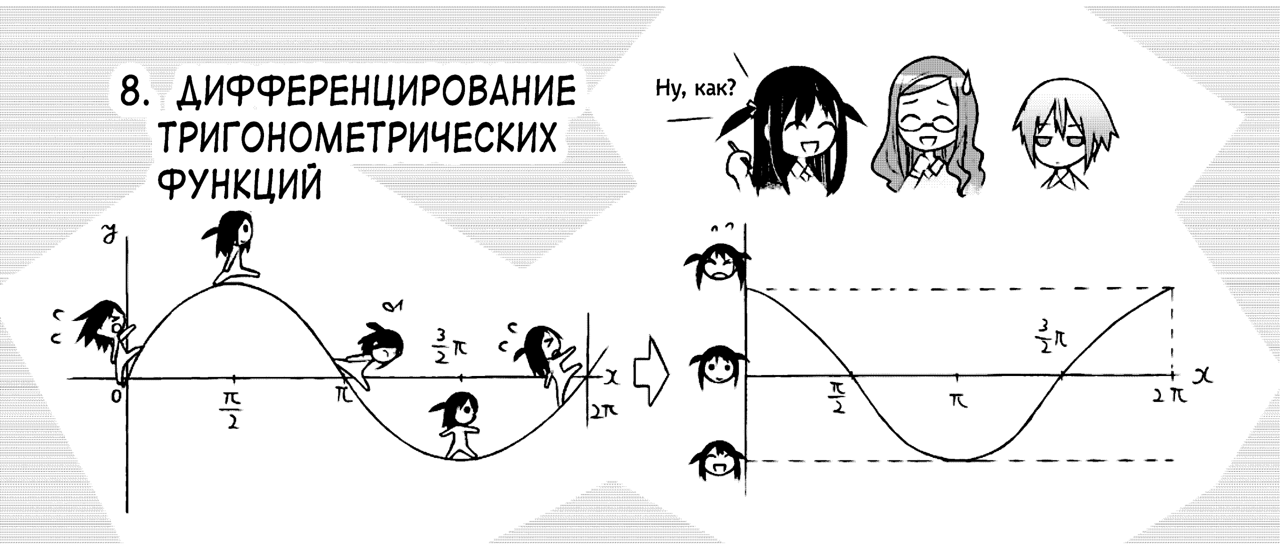
Это обозначение, $(\ )'$, тоже означает дифференцирование. Производная функции $y = f(x)$ записывается как $\frac{d}{dx}f(x)$, но часто используют запись $(\ )'$, которую иногда произносят как «штрих», то есть говорят: «штрих икс квадрат».

В общем, если написано $(x^2)'$, это значит производная от x^2?

Кстати, формулы производных легко вывести для большинства функций, но с интегралом дело обстоит иначе. К счастью, так как нахождение интеграла и производной — обратные операции, можно легко найти интеграл для функции $f(x)$, если известно, что она является производной от другой функции $F(x)$. Эта исходная функция $F(x)$, для которой $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$, называется «первообразной». Функция, которая была в квадратных скобках при вычислении определённого интеграла — это тоже первообразная. Кроме того, вычислить неопределённый интеграл — это, по сути, найти первообразную.

Значит, и «неопределённый интеграл» тоже здесь появляется...

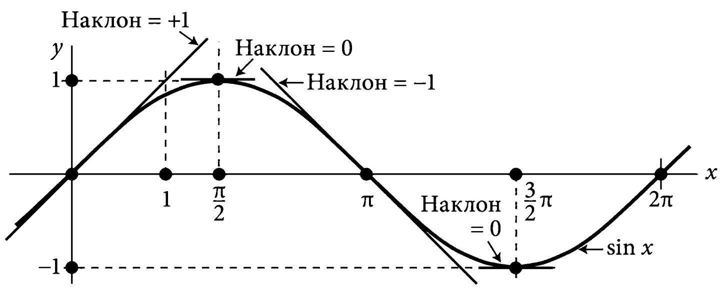
8. Дифференцирование тригонометрических функций



Давайте теперь найдём производную от функции $y = \sin x$.

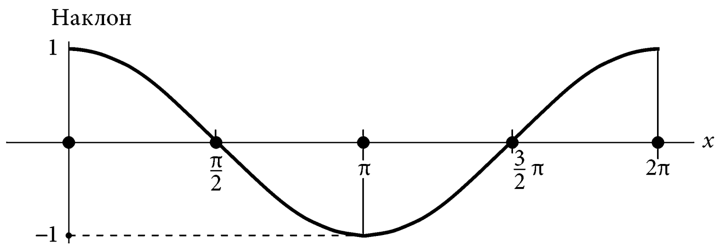
Производная от синуса... Значит, нужно определить наклон касательной во всех точках функции синуса?

Да. Давайте сначала рассмотрим график функции $y = \sin x$. В точке $x = 0$ наклон касательной равен +1. По мере возрастания x наклон касательной уменьшается. То есть при увеличении x значение производной уменьшается (Рис. 3-14).



□ Рис. 3-14. Наклон касательной к кривой $y = \sin x$ в разных точках.

В точке $x = \frac{\pi}{2}$ наклон равен 0, затем по мере увеличения x касательная всё больше наклоняется вправо и вниз, наклон уменьшается (то есть становится более отрицательным). В точке $x = \pi$ наклон наименьший (−1), а затем он начинает увеличиваться и в точке $x = \frac{3}{2}\pi$ он вновь равен 0. Наконец наклон опять становится положительным и в точке 2π возвращается к 1. Затем всё повторяется. График изменения наклона будет таким, как на Рис. 3-15.



☐ Рис. 3-15. Изменение наклона касательной к кривой $y = \sin x$.

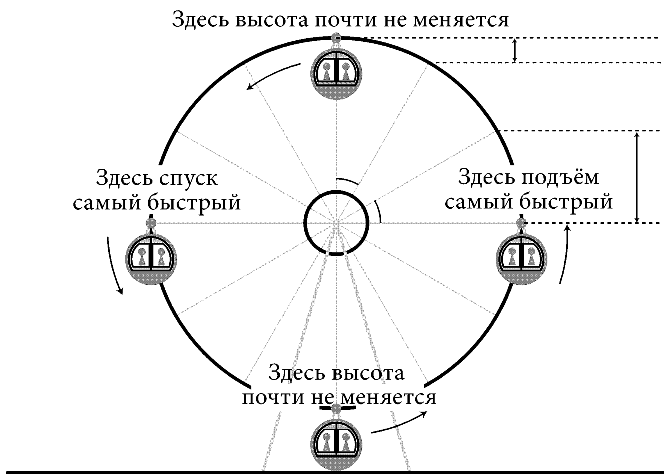
Постой-ка. Ведь этот график тоже имеет форму волны, да?

Недавно я приводила пример с колесом обозрения, но вы ничего не замечаете, когда катаетесь на настоящем колесе обозрения?

Да, мы катались на нём перед американскими горками...

Да...

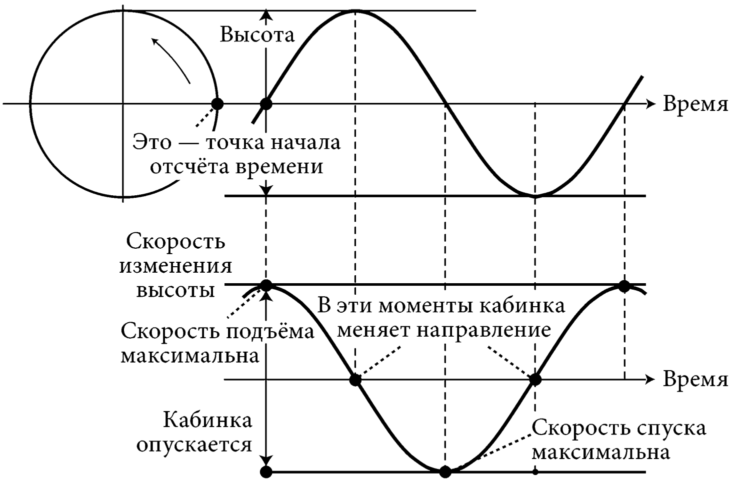
Как мы видели только что, изменение наклона не постоянно. Когда кабинка была на уровне оси колеса, она поднималась вверх быстро, но когда приблизилась к вершине, то некоторое время казалось, что высота не меняется. Потом кабинка начала постепенно опускаться, и когда опять пришла на уровень оси, скорость спуска стала самой большой, а внизу высота опять почти не менялась (Рис. 3-16).



☐ Рис. 3-16. Скорость изменения высоты кабинки колеса обозрения.

Да, действительно, когда кабинка приближается к самой верхней или к самой нижней точке, кажется, что она медленно плывёт, но когда кабинка находится на высоте оси, пейзаж резко меняется...

Ну что, представили? Кабинка вращается с постоянной скоростью, но что касается изменений высоты, внизу и вверху высота почти не меняется, а посередине скорость изменения высоты максимальна. Помните график изменения высоты (Рис. 3-17)?



☐ Рис. 3-17. Графики изменения высоты и скорости изменения высоты кабинки.

Скорость изменения высоты — это производная от исходной функции синуса. Не знакомы ли вы уже с таким графиком?

…Так это же функция косинуса!

Верно! Производная от синуса равна косинусу! Это выражается такой формулой:

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Это же означает, что первообразная косинуса равна синусу.

Здорово!

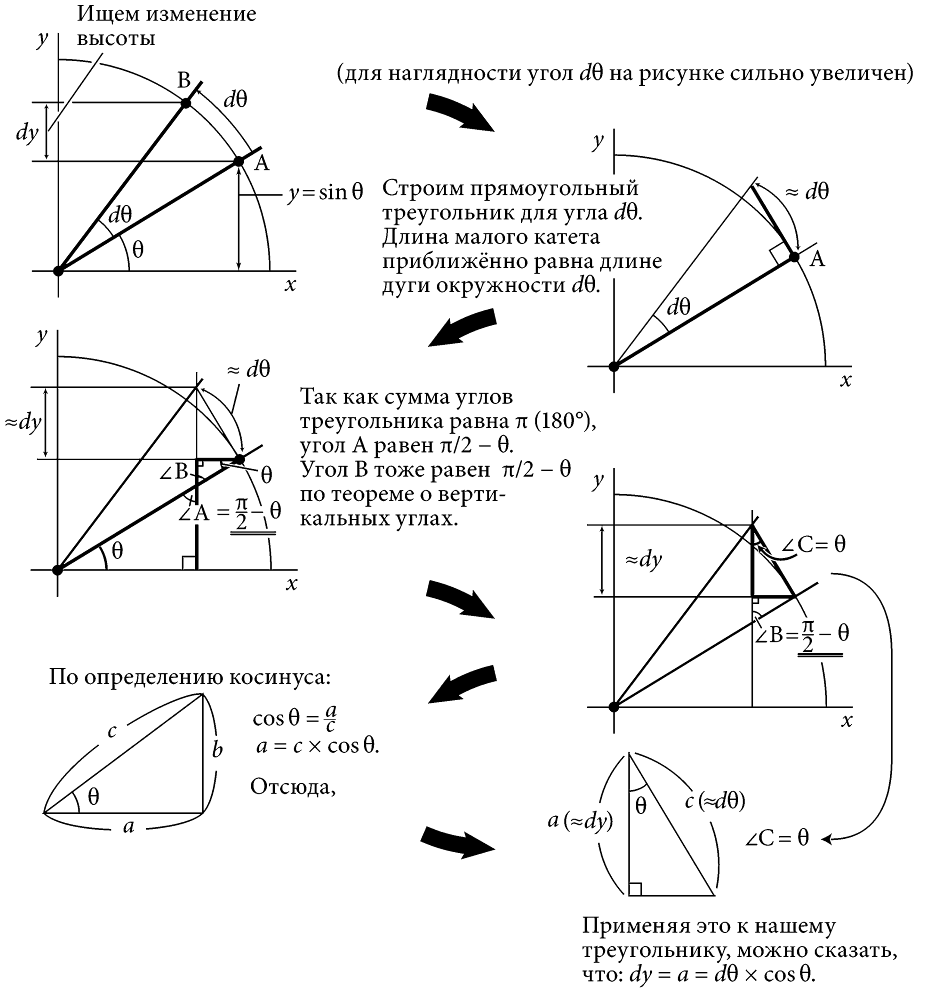
До этого момента я объясняла всё наглядно, без формул. Теперь давайте к вышесказанному подойдём с позиций математики, используя графики.

Давайте попробуем…

Бояться нечего! Мы уже заложили основы и можем смело двигаться вперёд! Для начала, возьмём четверть единичной окружности. Как мы уже усвоили в рассказе о тригонометрических функциях, высота y, опущенная из точки A, и угол θ, отложенный от оси x, связаны функцией:

$$y = \sin\theta.$$

Если перейти в точку B, увеличив угол θ на очень малое значение $d\theta$, то по правилам тригонометрии можно найти соответствующее изменение высоты (Рис. 3-18).



☐ Рис. 3-18. Нахождение изменения высоты *dy*.

Изменение высоты равно $d\theta \times \cos\theta$.
Здесь мы использовали выражения «примерно $d\theta$» и «примерно dy», но проблемы в этом нет, так как мы рассматриваем очень малое изменение, которое в пределе стремится к истинному значению. Таким образом, мы увидели, что изменение высоты y выражается функцией косинуса, аргументом которой является угол θ.

Для высоты y был синус, а для её изменения... Значит, если продифференцировать, то получится функция косинуса вида $d\theta \times \cos\theta$, так?

Малое изменение высоты y, то есть функции $\sin\theta$, можно записать как $d(\sin\theta)$. Тогда мы получим выражение, которое называется дифференциалом функции $\sin\theta$:

$$d(\sin\theta) = d\theta\cos\theta.$$

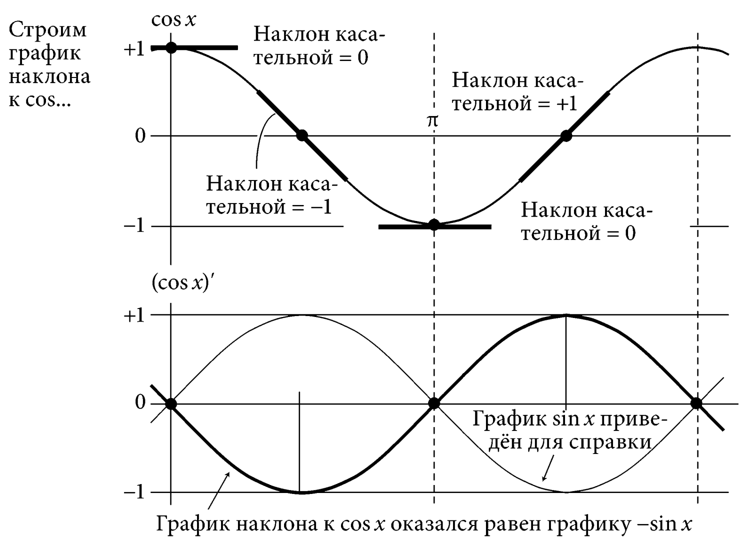
Если разделить обе части выражения на малое изменение угла θ, то есть на $d\theta$ (математическое доказательство допустимости такого деления я здесь опущу), то мы получим выражение для производной от $\sin\theta$:

$$\frac{d}{d\theta}\sin\theta = \cos\theta.$$

Значит, во всех точках кривой $y = \sin\theta$ наклон касательной к ней выражается функцией $y = \cos\theta$.

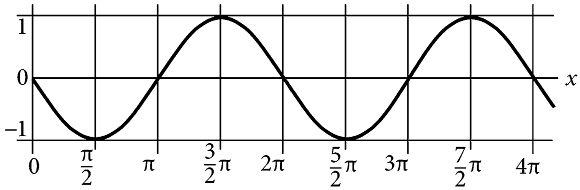
С производной синуса разобрались. А что делать с косинусом?

Давайте посмотрим. Наклон касательной к функции $y = \cos x$ в точке $x = 0$ равен 0, а затем он растёт в отрицательную сторону, пока не достигнет минимального значения -1 в точке $x = \pi/2$. Затем в точке $x = \pi$ он вновь равен 0, после чего наклон продолжает расти в положительную сторону. Функция на графике имеет форму кривой $y = \sin x$, перевёрнутой вокруг оси x (Рис. 3-19).



☐ Рис. 3-19. Графическое построение производной функции $y = \cos x$.

Это означает, что производная функции $y = \cos x$ равна $-\sin x$. Это также следует из Рис. 3-18, надо только поменять местами в формулах x и y, $\sin x$ и $\cos x$. Однако в этом случае, так как x уменьшается при увеличении θ, производная будет иметь знак минус (Рис. 3-20).



❑ Рис. 3-20. Производная функции cos *x*.

Понятно. Значит синус и косинус очень дружны.

Давайте и мы будем дружить, как они.
Итак, эти их отношения выражаются формулой:

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

А если обе части равенства умножить на –1, то получится:

$$(-\cos x)' = \sin x.$$

Последнее равенство означает, что первообразная, то есть интеграл от функции синуса, равен косинусу, взятому со знаком «минус».

Да... Что-то много формул, так и запутаться можно.

Да, всё было немного вперемешку, поэтому давайте перепишем все рассмотренные нами формулы производных и интегралов тригонометрических функций.

$(\sin x)' = \cos x$ → производная от $\sin x$ равна $\cos x$;

$(\cos x)' = -\sin x$ → производная от $\cos x$ равна $-\sin x$;

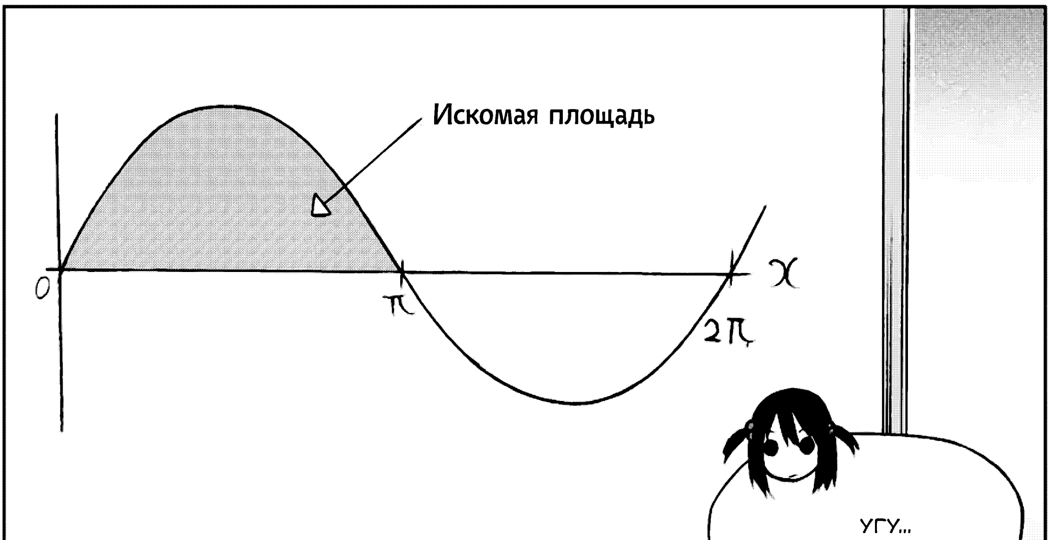
$\int \sin x\, dx = -\cos x$ → интеграл от $\sin x$ равен $-\cos x$;

$\int \cos x\, dx = \sin x$ → интеграл от $\cos x$ равен $\sin x$.

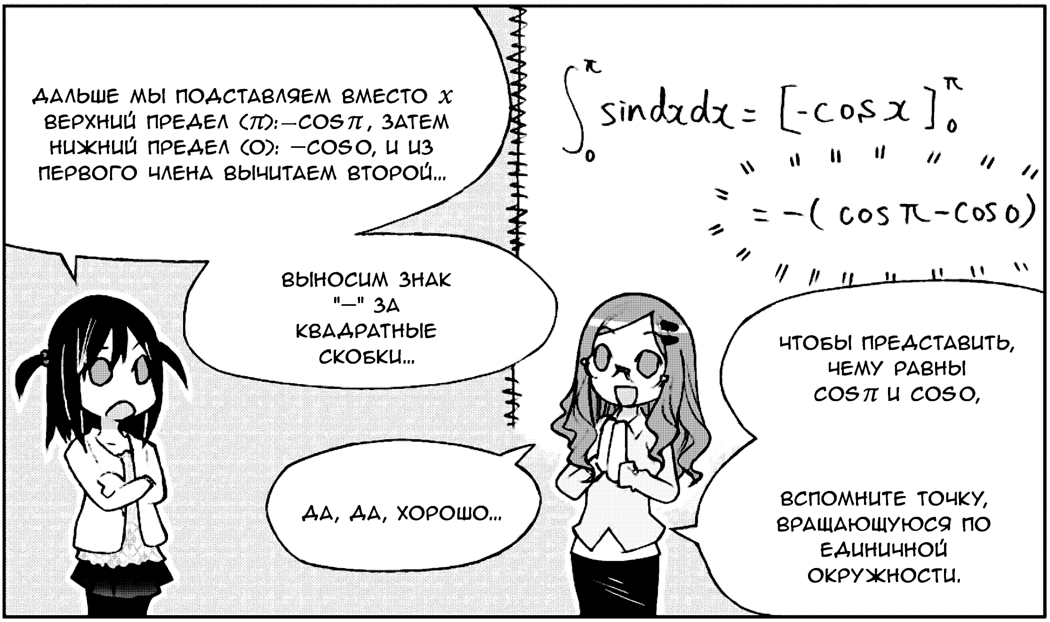
Все эти равенства наглядно демонстрируются на графиках.

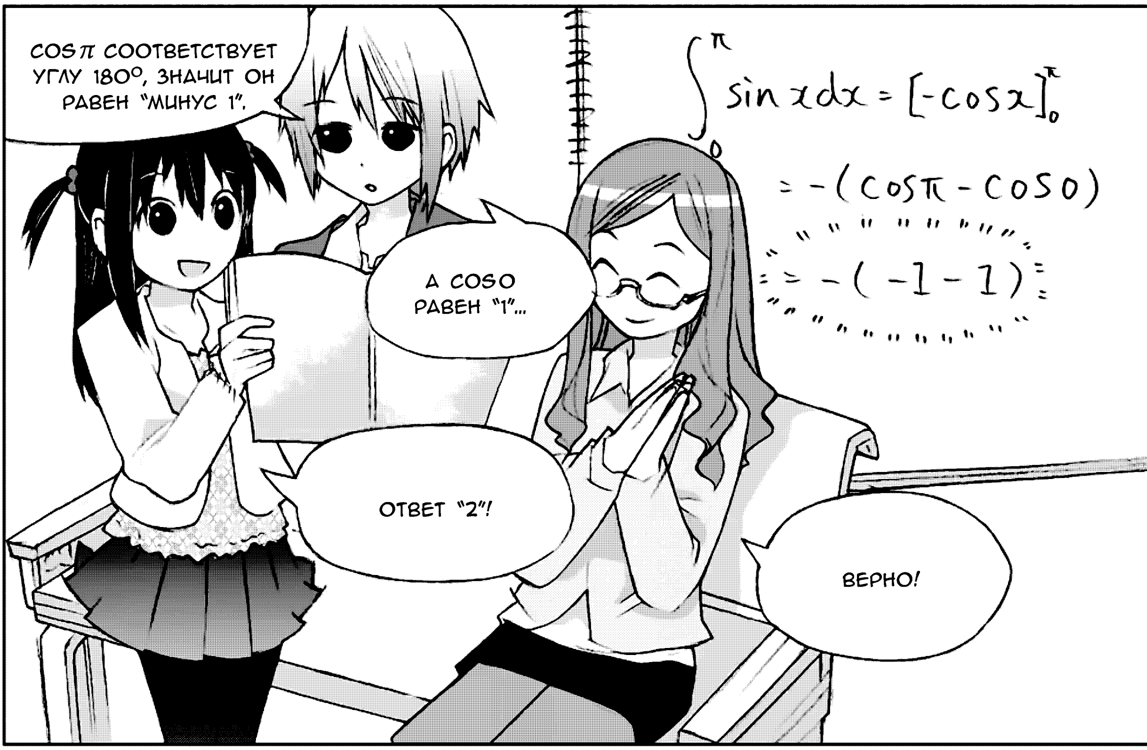
Замечательно! Графики на самом деле очень хорошо помогают!

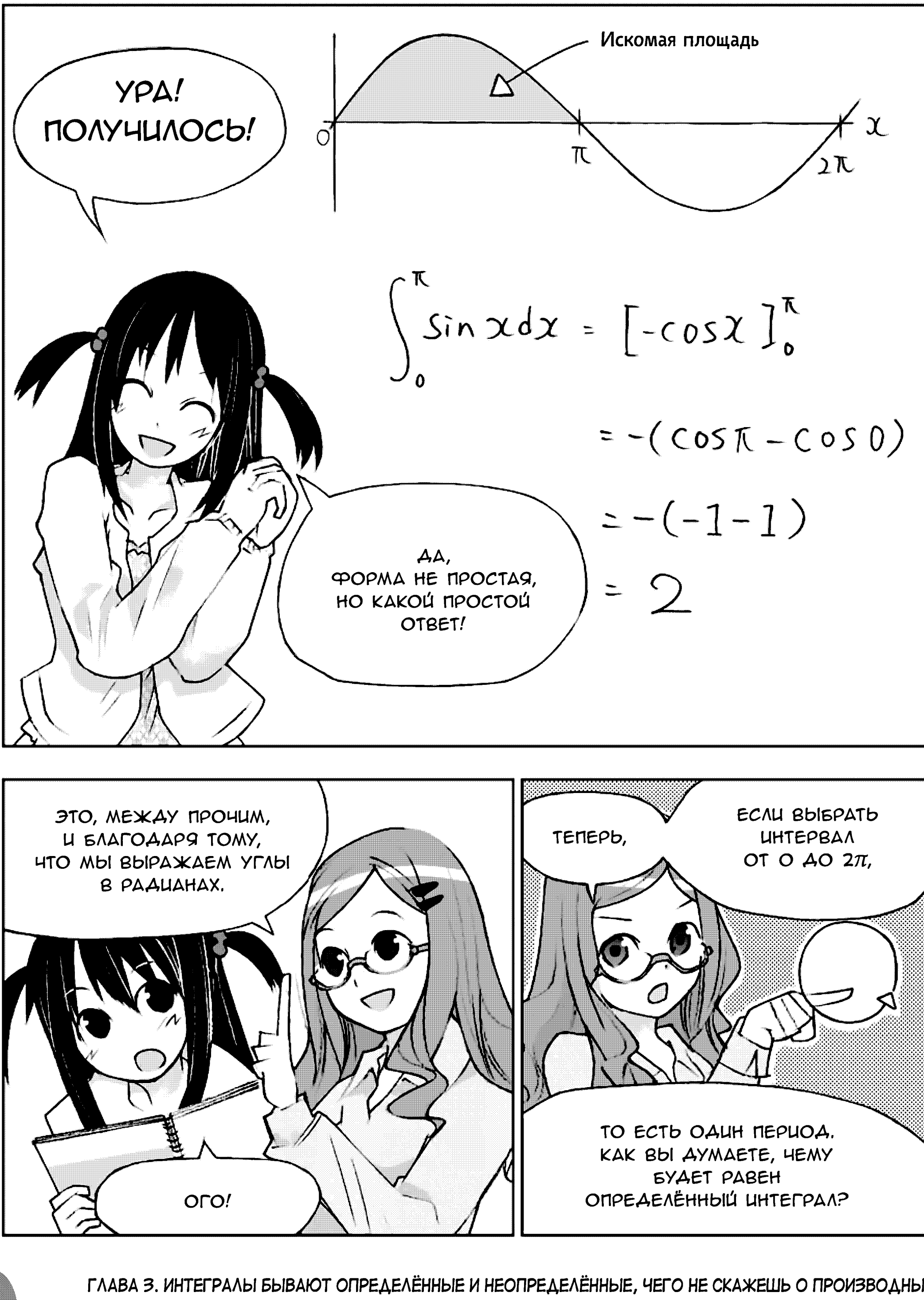
9. Определённые интегралы от тригонометрических функций

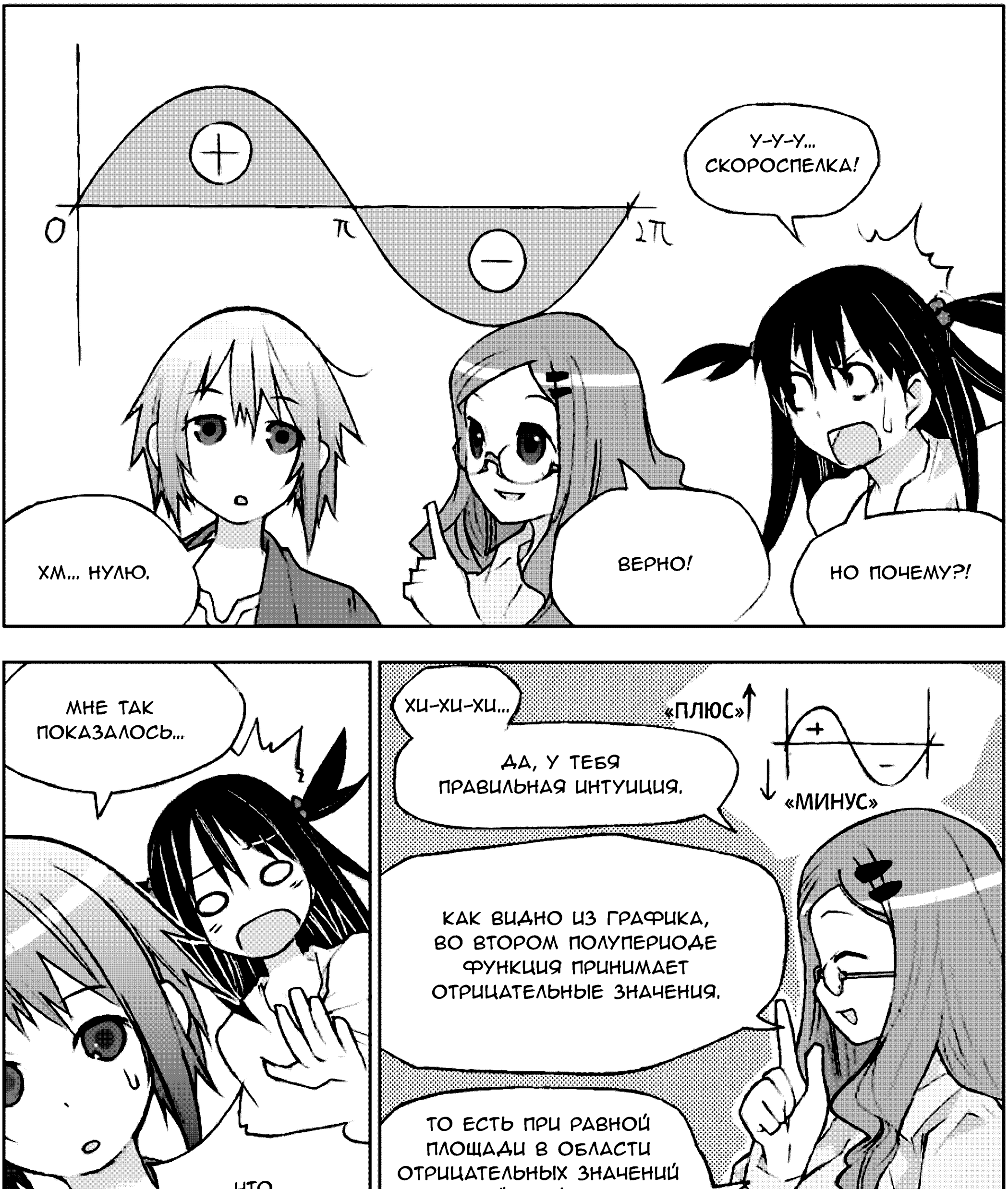



Вспоминая только что записанную формулу...
$\int \sin x \, dx = -\cos x$
Давайте применим её.
Так...
Левая часть должна указывать на "интеграл от $\sin x$ на интервале от 0 до π"...
$\int_0^\pi \sin x \, dx$
Вот так!
Правая часть — последовательность вычислений, значит в квадратных скобках...
Пишем: $-\cos x$, а справа — пределы интегрирования — π наверху и 0 внизу.
$\int_0^\pi \sin x \, dx = [-\cos x]_0^\pi$
$-\cos x$ — это первообразная функции $\sin x$, помните?

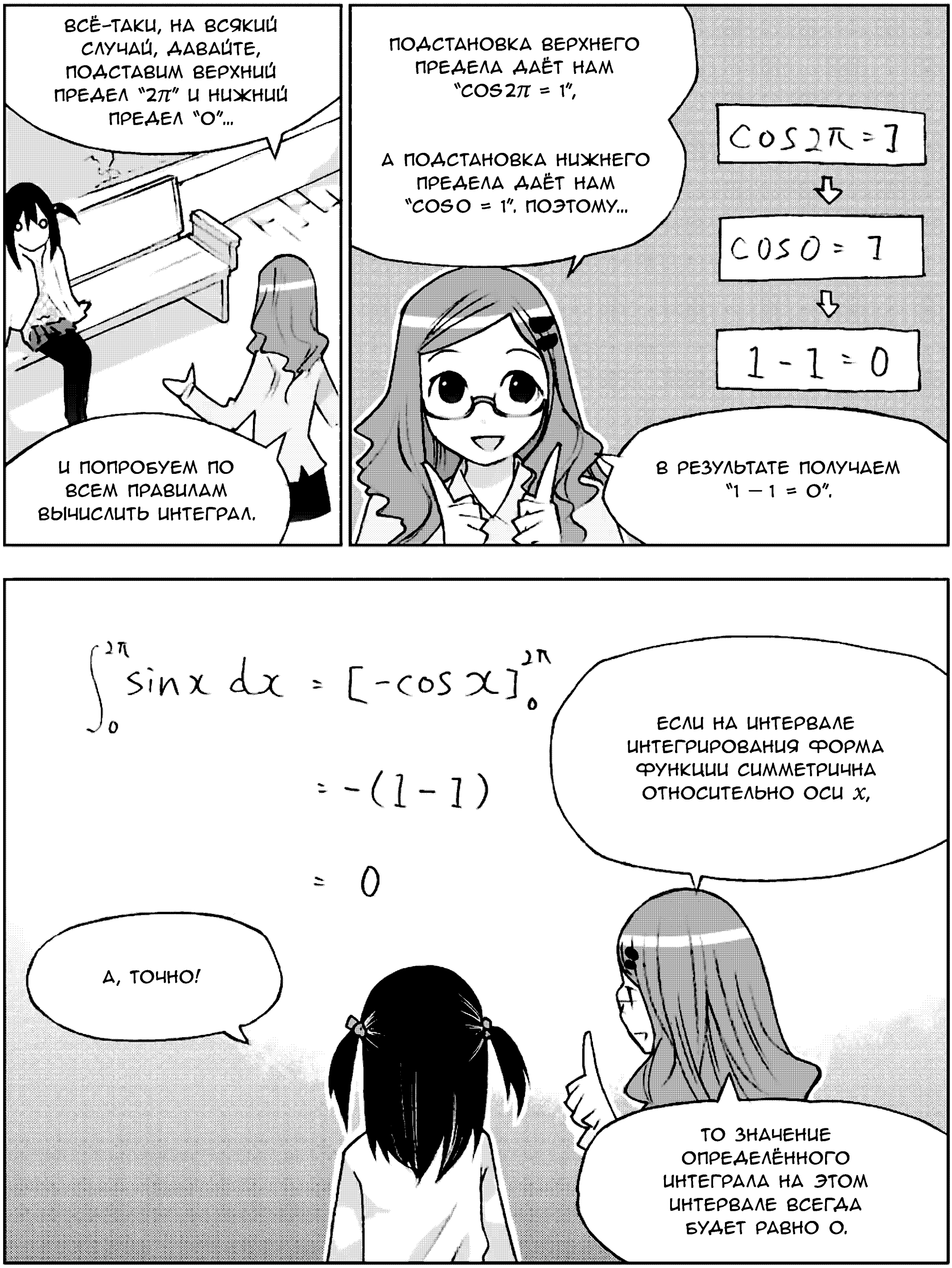

ДАЛЬШЕ МЫ ПОДСТАВЛЯЕМ ВМЕСТО x ВЕРХНИЙ ПРЕДЕЛ (π): $-\cos\pi$, ЗАТЕМ НИЖНИЙ ПРЕДЕЛ (0): $-\cos 0$, И ИЗ ПЕРВОГО ЧЛЕНА ВЫЧИТАЕМ ВТОРОЙ...
$\int_0^\pi \sin x\,dx = [-\cos x]_0^\pi$
$= -(\cos\pi - \cos 0)$
ВЫНОСИМ ЗНАК "–" ЗА КВАДРАТНЫЕ СКОБКИ...
ДА, ДА, ХОРОШО...
ЧТОБЫ ПРЕДСТАВИТЬ, ЧЕМУ РАВНЫ $\cos\pi$ И $\cos 0$,
ВСПОМНИТЕ ТОЧКУ, ВРАЩАЮЩУЮСЯ ПО ЕДИНИЧНОЙ ОКРУЖНОСТИ.

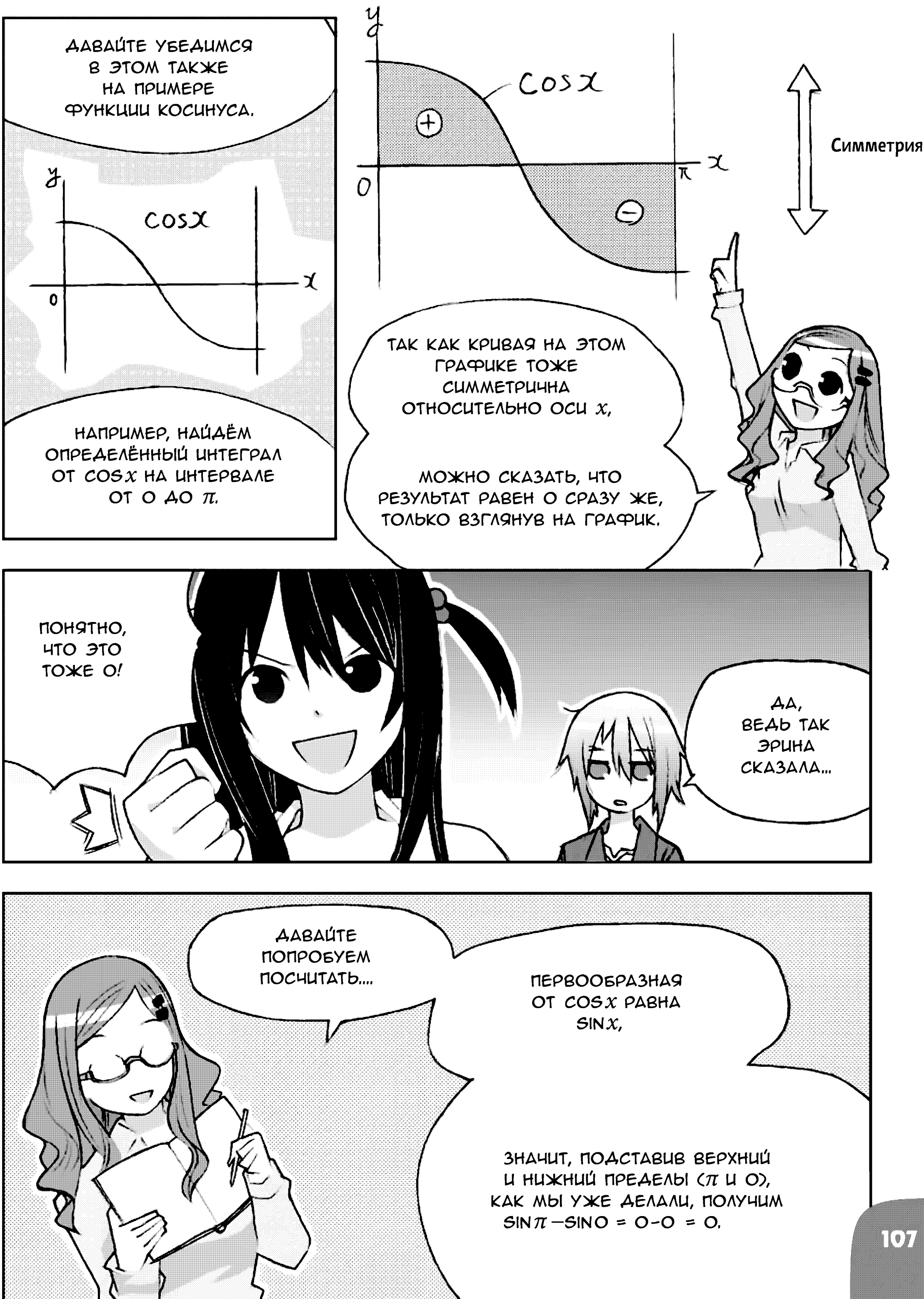

$\cos\pi$ СООТВЕТСТВУЕТ УГЛУ 180°, ЗНАЧИТ ОН РАВЕН "МИНУС 1".
$\int_0^\pi \sin x\,dx = [-\cos x]_0^\pi$
$= -(\cos\pi - \cos 0)$
$= -(-1 - 1)$
А $\cos 0$ РАВЕН "1"...
ОТВЕТ "2"!
ВЕРНО!


Искомая площадь
0 π 2π x
УРА! ПОЛУЧИЛОСЬ!
$\int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi}$
$= -(\cos\pi - \cos 0)$
$= -(-1-1)$
$= 2$
ДА, ФОРМА НЕ ПРОСТАЯ, НО КАКОЙ ПРОСТОЙ ОТВЕТ!
ЭТО, МЕЖДУ ПРОЧИМ, И БЛАГОДАРЯ ТОМУ, ЧТО МЫ ВЫРАЖАЕМ УГЛЫ В РАДИАНАХ.
ОГО!
ТЕПЕРЬ,
ЕСЛИ ВЫБРАТЬ ИНТЕРВАЛ ОТ 0 ДО 2π,
ТО ЕСТЬ ОДИН ПЕРИОД. КАК ВЫ ДУМАЕТЕ, ЧЕМУ БУДЕТ РАВЕН ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ?

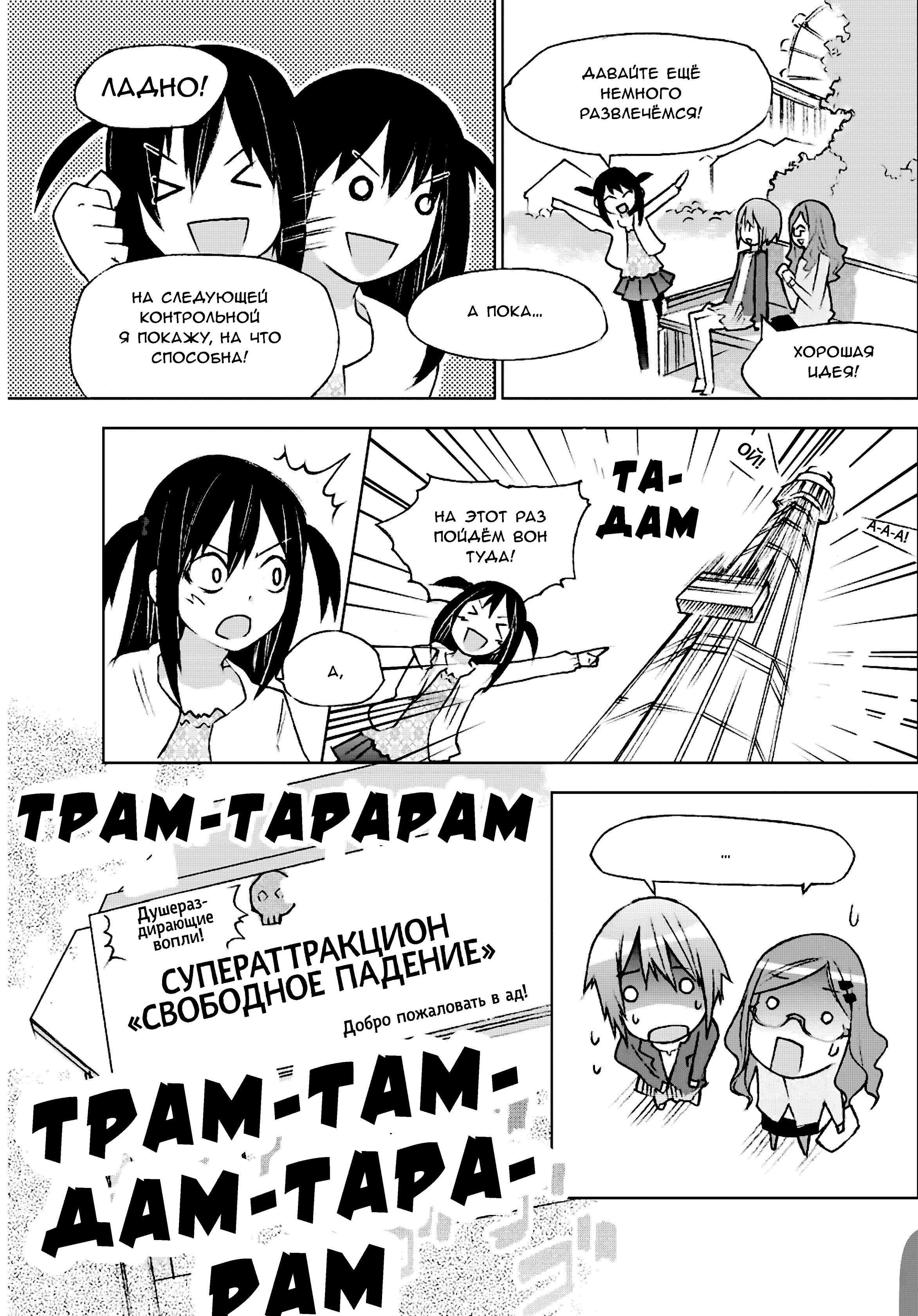


0
π
2π
ХМ... НУЛЮ.
ВЕРНО!
НО ПОЧЕМУ?!
У-У-У... СКОРОСПЕЛКА!
МНЕ ТАК ПОКАЗАЛОСЬ...
ЧТО, "ПОКАЗАЛОСЬ"?!
ХИ-ХИ-ХИ...
ДА, У ТЕБЯ ПРАВИЛЬНАЯ ИНТУИЦИЯ.
«ПЛЮС»
«МИНУС»
КАК ВИДНО ИЗ ГРАФИКА, ВО ВТОРОМ ПОЛУПЕРИОДЕ ФУНКЦИЯ ПРИНИМАЕТ ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ.
ТО ЕСТЬ ПРИ РАВНОЙ ПЛОЩАДИ В ОБЛАСТИ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ БУДЕТ ИМЕТЬ ТО ЖЕ ЗНАЧЕНИЕ, НО СО ЗНАКОМ "МИНУС".

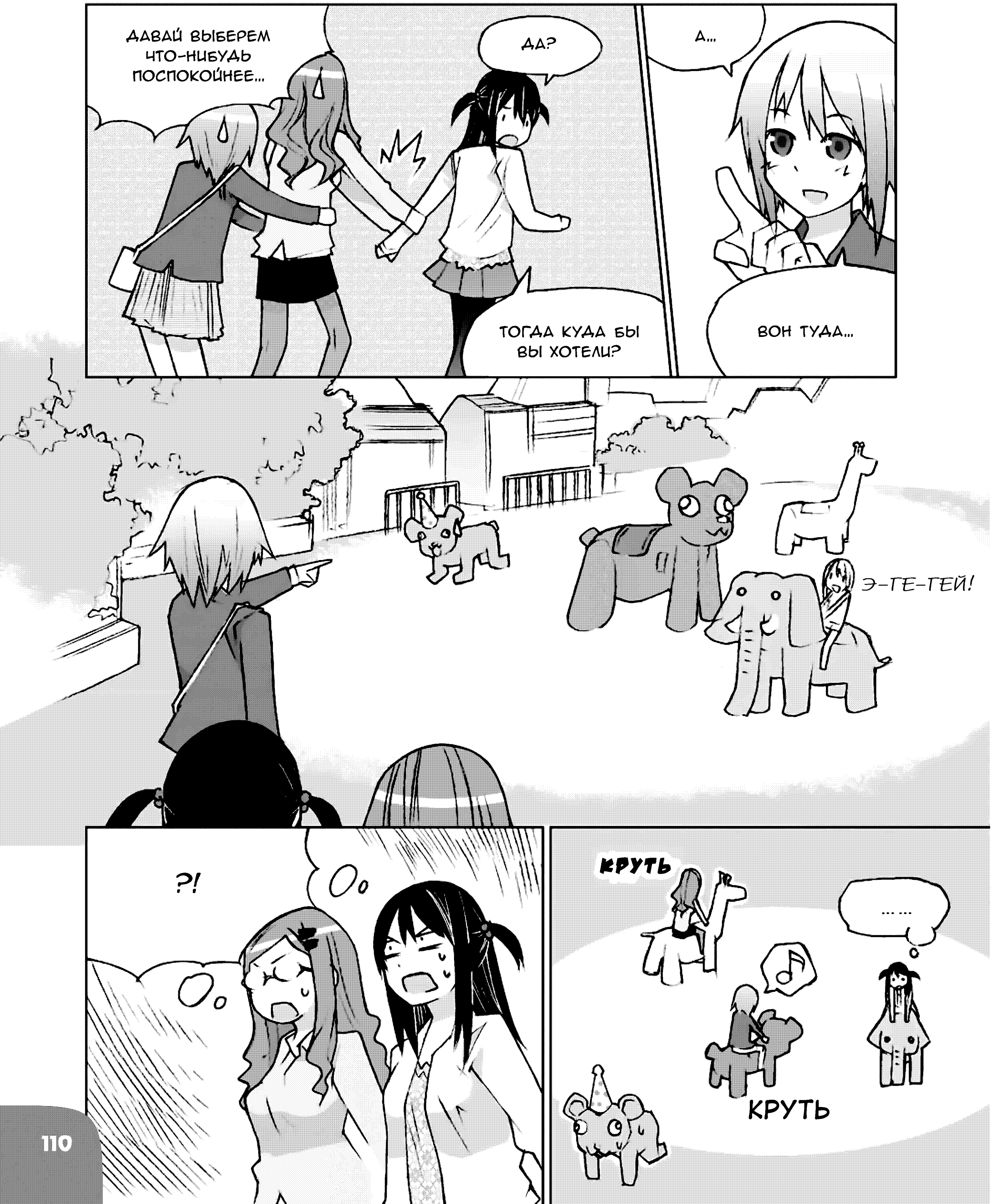

ВСЁ-ТАКИ, НА ВСЯКИЙ СЛУЧАЙ, ДАВАЙТЕ, ПОДСТАВИМ ВЕРХНИЙ ПРЕДЕЛ "2π" И НИЖНИЙ ПРЕДЕЛ "0"...
И ПОПРОБУЕМ ПО ВСЕМ ПРАВИЛАМ ВЫЧИСЛИТЬ ИНТЕГРАЛ.
ПОДСТАНОВКА ВЕРХНЕГО ПРЕДЕЛА ДАЁТ НАМ "$\cos 2\pi = 1$",
А ПОДСТАНОВКА НИЖНЕГО ПРЕДЕЛА ДАЁТ НАМ "$\cos 0 = 1$". ПОЭТОМУ...
$\cos 2\pi = 1$
$\cos 0 = 1$
$1 - 1 = 0$
В РЕЗУЛЬТАТЕ ПОЛУЧАЕМ "$1 - 1 = 0$".
$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{2\pi}$
$= -(1 - 1)$
$= 0$
ЕСЛИ НА ИНТЕРВАЛЕ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ФОРМА ФУНКЦИИ СИММЕТРИЧНА ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ x,
ТО ЗНАЧЕНИЕ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА НА ЭТОМ ИНТЕРВАЛЕ ВСЕГДА БУДЕТ РАВНО 0.
А, ТОЧНО!


Давайте убедимся в этом также на примере функции косинуса.
y
cos x
x
0
Например, найдём определённый интеграл от cos x на интервале от 0 до π.
y
cos x
+
x
0
π
−
Симметрия
Так как кривая на этом графике тоже симметрична относительно оси x,
можно сказать, что результат равен 0 сразу же, только взглянув на график.
Понятно, что это тоже 0!
Да, ведь так Эрина сказала...
Давайте попробуем посчитать....
Первообразная от cos x равна sin x,
значит, подставив верхний и нижний пределы (π и 0), как мы уже делали, получим sin π − sin 0 = 0 − 0 = 0.

$\int_0^{\pi} \cos x\,dx = [\sin x]_0^{\pi}$
$= 0 - 0$
$= 0$
ОГО!
КАК ВСЁ КРАСИВО ОБНУЛИЛОСЬ!
НУ КАК, УСВОИЛИ, ЧТО ТАКОЕ НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ ФУНКЦИЙ $\sin x$ И $\cos x$, И КАК ОН ПРИМЕНЯЕТСЯ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА?
ДА!
МАТЕМАТИКА НЕ ТАК УЖ ТРУДНА, ЕСЛИ УМЕЕШЬ ВОТ ТАК ВСЁ ПРЕДСТАВЛЯТЬ...
И ЭТО ГОВОРИТ ФУМИКА, НАБРАВШАЯ ПО МАТЕМАТИКЕ ВСЕГО 32 БАЛЛА?
КАП-КАП...
(Слёзы радости)
ДАЖЕ НЕ ВЕРИТСЯ!



ЛАДНО!
НА СЛЕДУЮЩЕЙ КОНТРОЛЬНОЙ Я ПОКАЖУ, НА ЧТО СПОСОБНА!
ДАВАЙТЕ ЕЩЁ НЕМНОГО РАЗВЛЕЧЁМСЯ!
А ПОКА...
ХОРОШАЯ ИДЕЯ!
ТА-ДАМ
НА ЭТОТ РАЗ ПОЙДЁМ ВОН ТУДА!
ОЙ!
А-А-А!
А,
ТРАМ-ТАРАРАМ
Душераздирающие вопли!
СУПЕРАТТРАКЦИОН «СВОБОДНОЕ ПАДЕНИЕ»
Добро пожаловать в ад!
ТРАМ-ТАМ-ДАМ-ТАРА-РАМ
...


ДАВАЙ ВЫБЕРЕМ ЧТО-НИБУДЬ ПОСПОКОЙНЕЕ...
ДА?
ТОГДА КУДА БЫ ВЫ ХОТЕЛИ?
А...
ВОН ТУДА...
Э-ГЕ-ГЕЙ!
?!
КРУТЬ
......
КРУТЬ

ГЛАВА 4

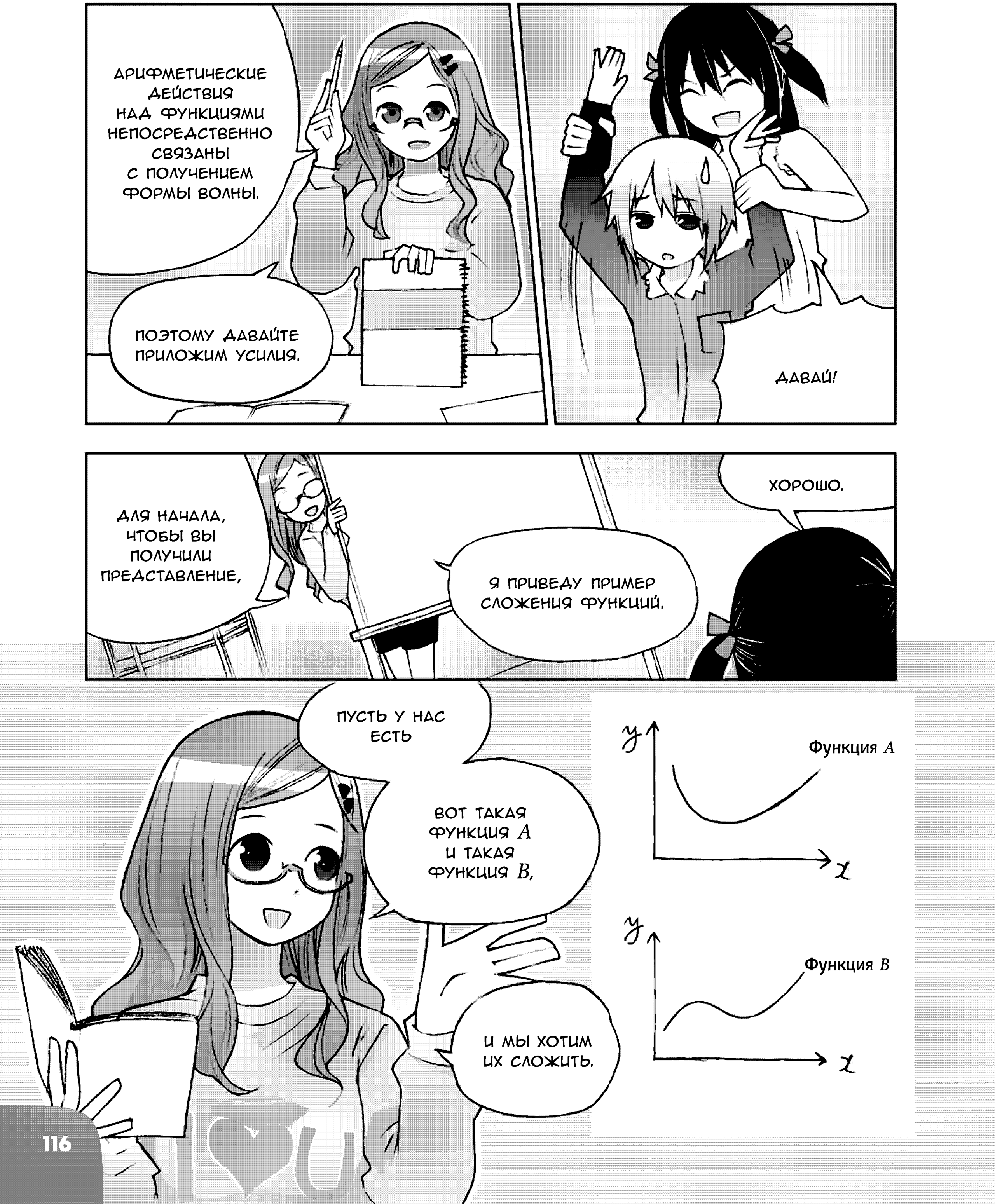
АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ НАД ФУНКЦИЯМИ

1. СУММА ФУНКЦИЙ – ТОЖЕ ФУНКЦИЯ!

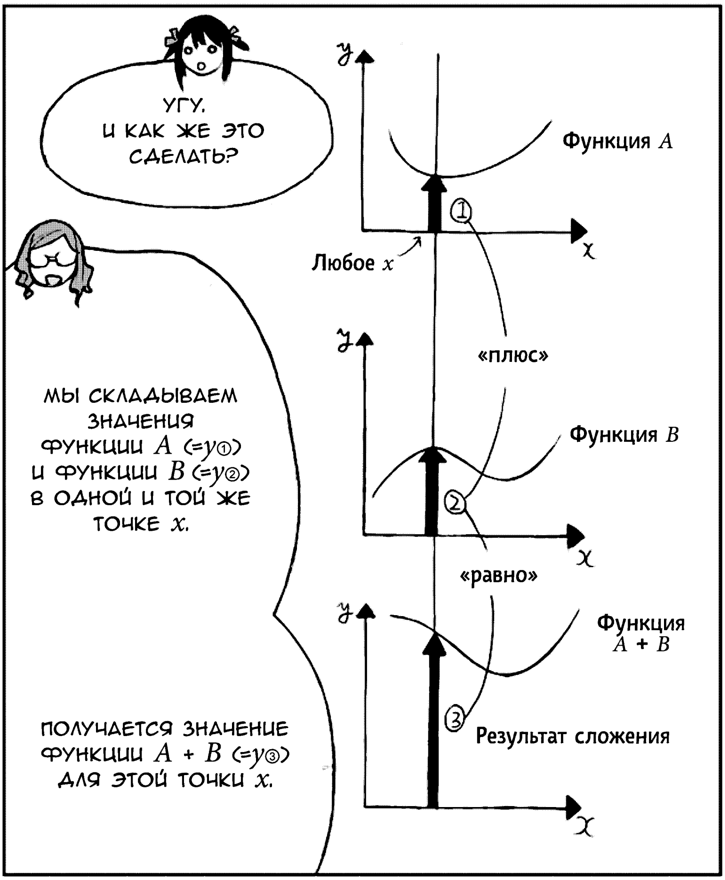
Я ЖЕ ГОВОРИЛА, ЧТО ТЫ МОЖЕШЬ, НАДО ТОЛЬКО ПОСТАРАТЬСЯ!
ВОТ ЭТО НАСТОЯЩАЯ МОЯ ДОЧЬ!
ВЕДЬ ТАК?!
И НА ГИТАРЕ ТЕПЕРЬ ТОЖЕ МОЖНО СТАРАТЬСЯ?!
УРА!
ЛЯ-ЛЯ-ЛЯ!!!
КОНЕЧНО, СКОЛЬКО ХОЧЕШЬ!
ЗВЯК
ДЗЫНЬ
ГРОХ
ДА, ГОЛОС У ТЕБЯ ТАКОЙ ЖЕ УЖАСНЫЙ, КАК И У МЕНЯ!

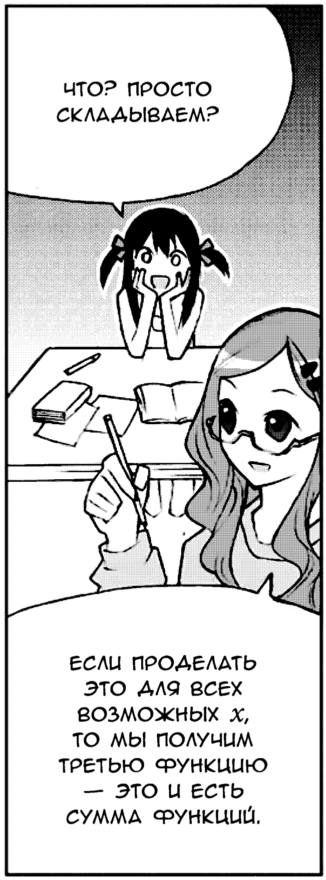
Теперь я могу свободно заниматься в нашей музыкальной группе!
Но ты ведь и до этого свободно занималась...
А ты, Рика, что получила!
Шурх
Сверк
(быстро показала)
80
Шурх
Щёлк
Уфф...
...


НУ, НУ, ЛАДНО ВАМ. ХОРОШО, ЧТО У ВАС ОБЕИХ ПРОБУДИЛСЯ ИНТЕРЕС К МАТЕМАТИКЕ.
ТРЕСК-ТРЕСК-ТРЕСК
КРУТЬ КРУТЬ КРУТЬ
ИТАК,
КРУТЬ
КАКАЯ ТЕМА У НАС СЕГОДНЯ?
КРУТЬ
СЕГОДНЯ — АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ НАД ФУНКЦИЯМИ.
ТО ЕСТЬ ЭТО ПРО ТО, КАК СКЛАДЫВАТЬ,
ВЫЧИТАТЬ,
ПЕРЕМНОЖАТЬ
И ДЕЛИТЬ ФУНКЦИИ.
УГУ…
ПРАВДА, ПРО ДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ Я РАССКАЗЫВАТЬ НЕ БУДУ.



Арифметические действия над функциями непосредственно связаны с получением формы волны.
Поэтому давайте приложим усилия.
Давай!
Для начала, чтобы вы получили представление,
Я приведу пример сложения функций.
Хорошо.
Пусть у нас есть
вот такая функция A и такая функция B,
и мы хотим их сложить.
y
Функция A
x
y
Функция B
x


УГУ.
И КАК ЖЕ ЭТО СДЕЛАТЬ?
Функция A
Любое x
«плюс»
Функция B
«равно»
Функция $A + B$
Результат сложения
МЫ СКЛАДЫВАЕМ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ A (=$y_{①}$) И ФУНКЦИИ B (=$y_{②}$) В ОДНОЙ И ТОЙ ЖЕ ТОЧКЕ x.
ПОЛУЧАЕТСЯ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ $A + B$ (=$y_{③}$) ДЛЯ ЭТОЙ ТОЧКИ x.


ЧТО? ПРОСТО СКЛАДЫВАЕМ?
ЕСЛИ ПРОДЕЛАТЬ ЭТО ДЛЯ ВСЕХ ВОЗМОЖНЫХ x, ТО МЫ ПОЛУЧИМ ТРЕТЬЮ ФУНКЦИЮ — ЭТО И ЕСТЬ СУММА ФУНКЦИЙ.


ДА, СЛОЖЕНИЕ — ЭТО ПРОСТО!
НУ ЧТО Ж, ДАВАЙТЕ,
ИСПОЛЬЗУЯ КОНКРЕТНЫЕ ФУНКЦИИ,
БРОСИМ ВЫЗОВ АРИФМЕТИЧЕСКИМ ДЕЙСТВИЯМ НАД ФУНКЦИЯМИ!

2. СЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ

Итак, давайте изучим суммирование функций на конкретном примере.

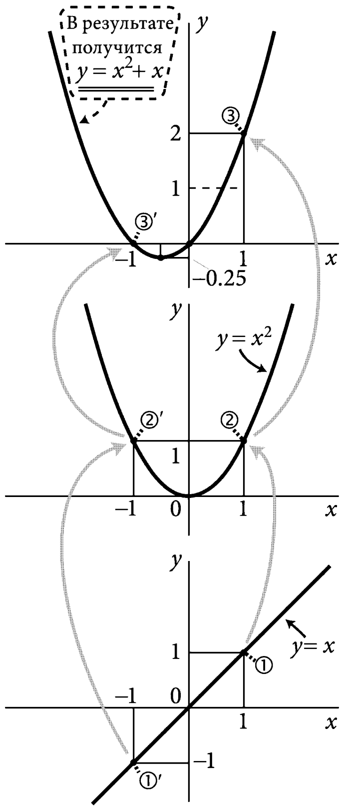
Мы готовы!

Здесь мы рассмотрим две функции — $y = x^2$ и $y = x$. Так как найти y для всех x невозможно, мы проверим лишь несколько значений.

Угу.

На рисунке показан процесс сложения функций. На верхнем графике показана результирующая функция, на среднем — функция $y = x^2$, а на нижнем — функция $y = x$. Посмотрите внимательно на эти графики (Рис. 4-1).

Давайте проследим за всем по порядку. Во-первых, в точке $x = 1$ функция $y = x$ равна 1 (①), функция $y = x^2$ равна $1^2 = 1$ (②). Следовательно, так как сумма этих значений равна $1 + 1 = 2$, значение результирующей функции в этой точке равно 2 (③).



☐ Рис. 4-1. Сложение фунций $y = x^2$ и $y = x$.

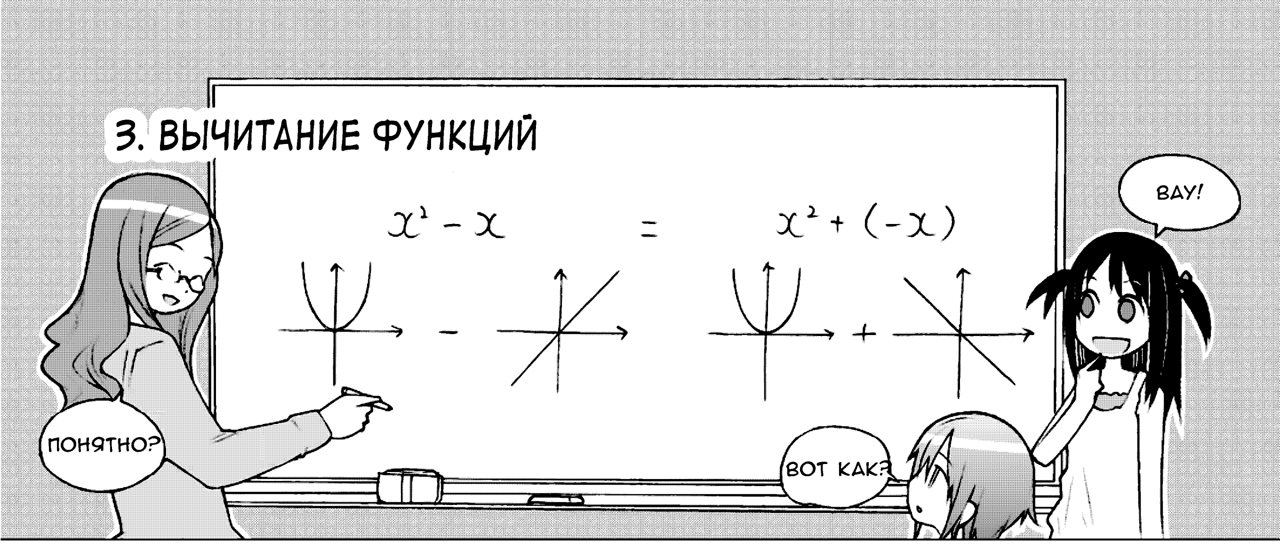
Как это просто…

Просто, не так ли? Теперь повторим те же действия для точки $x = 0$. В этой точке обе функции равны 0, поэтому результат сложения тоже равен 0.
Давайте вычислим ещё одну точку, $x = -1$. В этой точке функция $y = x$ равна $y = -1$ (①'), а функция $y = x^2$ равна $y = (-1)^2 = 1$ (②'). Следовательно, так как результат сложения равен $1 + (-1) = 0$, значение результирующей функции в этой точке равно 0 (③').

Значит, суммируя значения функций для различных x, мы можем построить график суммы функций $y = x^2$ и $y = x$?

Да, это так. В случае сложения таких функций, мы можем просто сразу написать результат. Другими словами, сложение $y = x^2$ и $y = x$ даст нам функцию $y = x^2 + x$.

3. ВЫЧИТАНИЕ ФУНКЦИЙ



Теперь мы, используя те же самые функции $y = x^2$ и $y = x$, попробуем построить график разности функций. Другими словами, мы найдём функцию, которая получается вычитанием $y = x$ из $y = x^2$.

Но это труднее представить, чем сложение…

Да, ты права. Раз так, может превратим разность в сумму?

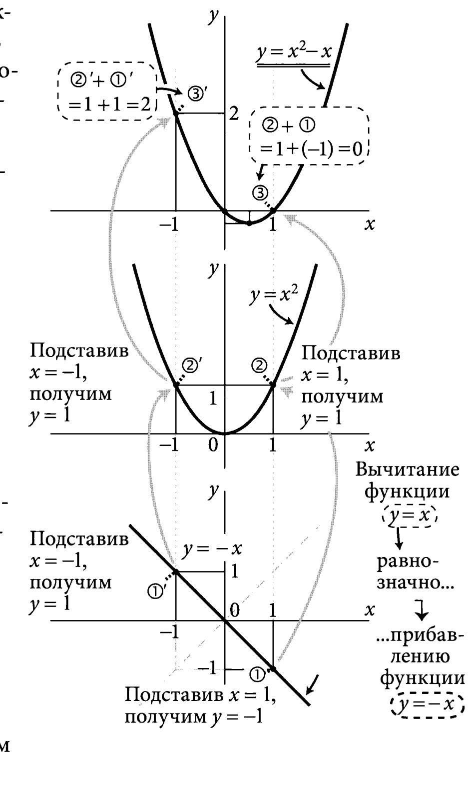
Как?! Такое тоже возможно?!

Конечно, ведь разность можно превратить в сумму, просто поменяв знак вычитаемого! Например, оба выражения $1 - 1$ и $1 + (-1)$ дадут в результате 0. Это применимо также и для функций. Только не забудь поменять знак перед функцией, которая будет вычитаться.

Понятно.

Теперь давайте взглянем на графики (Рис. 4-2).

Превратив $y = x$ в $y = -x$, мы прибавляем результат к $y = x^2$, правильно?!



☐ Рис. 4-2. Вычитание $y = x$ из $y = x^2$.

Да, именно так. Вычислим значения функции $y = -x$ для нескольких значений x, как мы уже делали раньше.
При $x = 1$ значение функции $y = -x$ равно $y = -1$ (①). Подставив $x = 1$ в $y = x^2$, получим $y = 1^2 = 1$ (②). Следовательно, так как результат сложения равен $1 + (-1) = 0$, значение результирующей функции в этой точке равно 0 (③).

Понятно…

Затем, при $x = 0$ обе функции равны 0, значит результирующая функция тоже равна 0.
Далее, при $x = -1$ функция $y = -x$ равна $y = -(-1) = +1$ (①'), функция $y = x^2$ тоже равна $y = (-1)^2 = +1$ (②'). Следовательно, так как результат сложения равен 2, значение результирующей функции в этой точке равно 2 (③').

Так же, как и при сложении…

То есть ничего сложного нет. Рассматривая разность этих двух функций как сумму $y = x^2$ и $y = -x$, результирующую функцию можно записать в виде

$$y = x^2 + (-x),$$

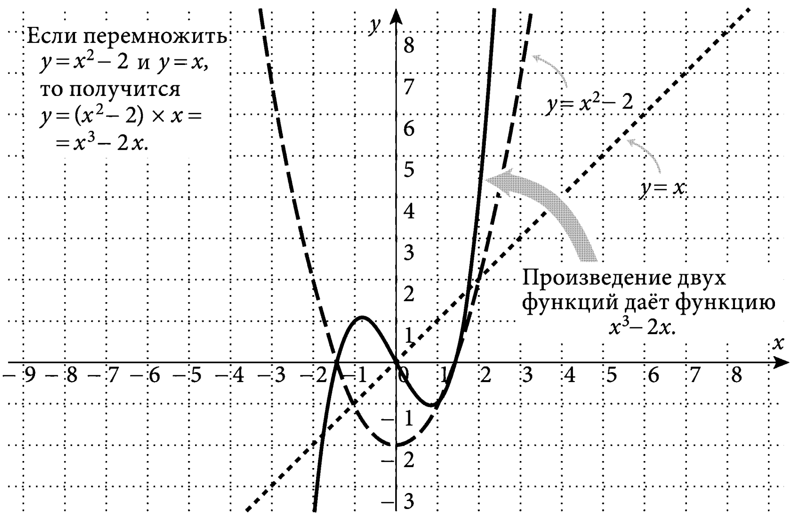
или

$$y = x^2 - x.$$

Следующая операция — умножение функций. Вспомните, что при сложении функций достаточно было «складывать значения этих функций в одних и тех же точках x». Для умножения функций тоже достаточно «перемножать значения этих функций в одних и тех же точках x».

То есть идея такая же!

Для начала потренируемся на простых функциях. Например, если перемножить функции $y = x^2 - 2$ и $y = x$, то получится следующее (Рис. 4-3).



☐ Рис. 4-3. Произведение функций $y = x^2 - 2$ и $y = x$.

Да, получилась очень интересная кривая.

Произведением таких простых функций является функция

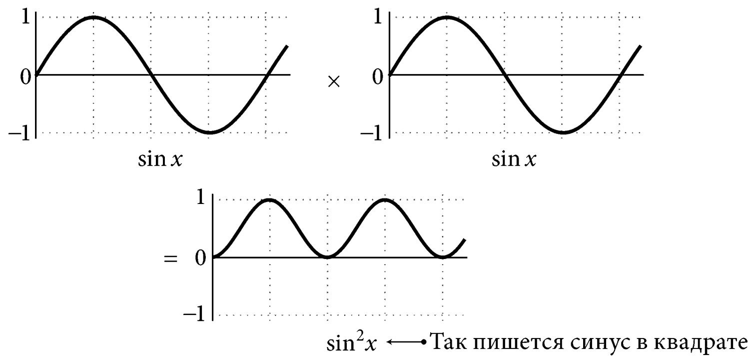
$$y = (x^2 - 2) \times x,$$

или

$$y = x^3 - 2x.$$

А для непростых функций?

Ну, например, перемножение тригонометрических функций — это сложновато. Рассмотрим конкретный пример. Например, умножим функцию $y = \sin x$ на такую же функцию $y = \sin x$. В результате получится следующее:



☐ Рис. 4-4. Произведение функций $y = \sin x$ и $y = \sin x$.

Произведение функций $y = \sin x$ и $y = \sin x$ записывается как $y = \sin x \times \sin x$. Это равнозначно возведению $\sin x$ в квадрат, то есть $y = (\sin x)^2$, а записывать это принято вот так:

$$y = \sin^2 x.$$

Здорово! На графике яма превратилась в гору!

Яма в гору…

Как вы думаете, почему?

Если умножить минус на минус…

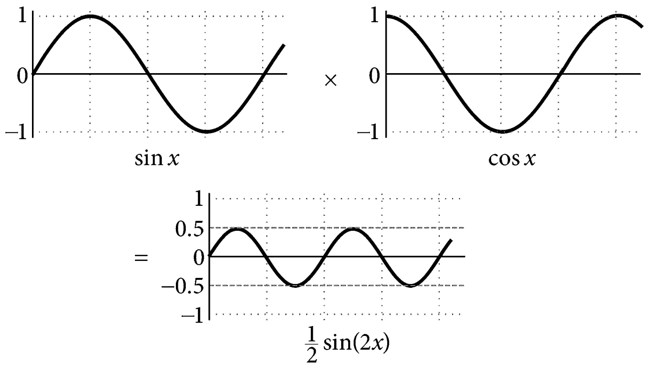
...то получится плюс!

Да! Минус на минус даёт плюс.

Изучим форму результирующей функции. Число периодов, то есть число пар «горка и впадина» увеличилось вдвое, амплитуда, то есть высота горок или впадин, уменьшилась наполовину, кроме того, график относительно горизонтальной оси поднялся вверх на $\frac{1}{2}$.

Интересно.

Теперь рассмотрим график произведения функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ (Рис. 4-5).



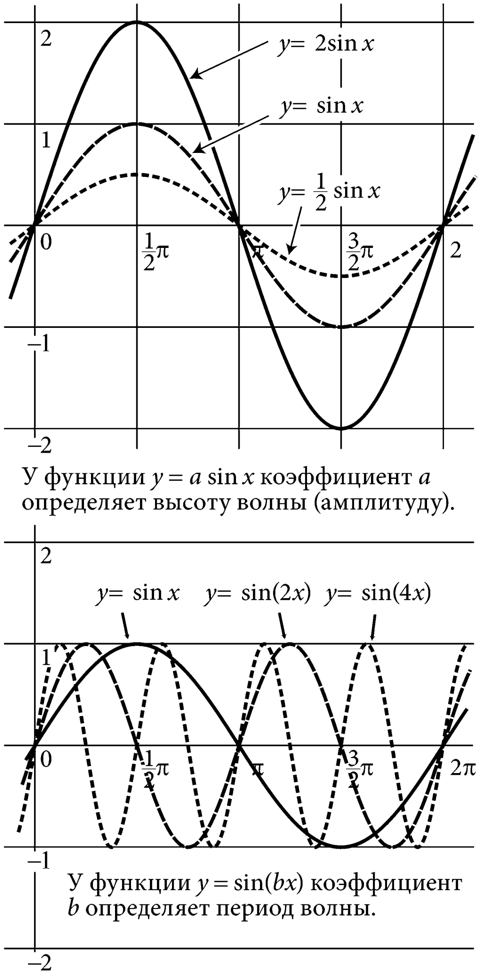
☐ Рис. 4-5. Произведение функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$.

Так... Значит, произведение $y = \sin x$ и $y = \cos x$ равно функции $y = \frac{1}{2}\sin(2x)$...

Из графика видно, что по сравнению с исходными функциями число периодов возросло в 2 раза, амплитуда уменьшилась наполовину, вертикального смещения нет, то есть средняя линия амплитуды проходит через 0. Рассуждая в обратном порядке, так как число периодов в 2 раза больше, надо поставить перед x число 2; так как амплитуда уменьшилась наполовину, то ставим перед функцией множитель $\frac{1}{2}$. В результате получим $\frac{1}{2}\sin(2x)$.

Вот как?

А какой вообще графический смысл имеют числа перед и после символа sin? Поясню это с помощью графиков (Рис. 4-6).



☐ Рис. 4-6. Связь между формой волны и числами перед и после символа sin.


От числа перед символом sin зависит амплитуда, а от от числа после sin — период, правильно?


Только что мы, складывая или вычитая значения функций в различных точках x, изображали результирующий график и выводили из него уравнение функции. Однако как вы уже поняли, это трудоёмкий и не очень изящный метод. Поэтому лучше использовать «формулы». Так, в ваших учебниках должны приводиться следующие формулы.

Синус суммы двух углов

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Косинус суммы двух углов

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Да, было такое!

Здесь я не буду объяснять вывод и математический смысл этих формул, так как хочу сосредоточиться только на необходимом для преобразования Фурье.
Комбинируя «синус суммы» и «косинус суммы», можно вывести формулы произведения и суммы тригонометрических функций:

Формулы произведения

$$\sin\alpha\ \cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\};$$
$$\sin\alpha\ \sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)\};$$
$$\cos\alpha\ \cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\}.$$

Формулы суммы и разности

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2};$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2};$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2};$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}.$$

А разве $\sin(\alpha + \beta)$ и $\sin\alpha + \sin\beta$ — это разные вещи?

$\sin(\alpha + \beta)$ — это синус угла, получившегося сложением углов α и β, а $\sin\alpha + \sin\beta$ — это сумма синусов каждого из этих углов. Рассмотрим, например, $\sin(\alpha + \beta)$.

Пусть $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$ (= 45°), тогда

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \text{ (Рис. 4-7).}$$

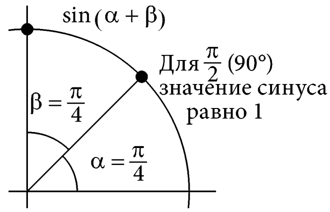
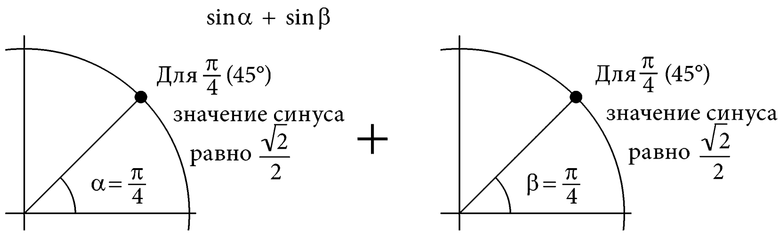


Рис. 4-7. Синус суммы двух углов.

С другой стороны, рассматривая $\sin\alpha + \sin\beta$:

$$\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} = 1{,}4142.$$

Рис. 4-8 иллюстрирует эти вычисления.



$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} = 1{,}4142...$$

Рис. 4-8. Сумма синусов двух углов.

Но считать сложновато…

Всего один раз запомни эти формулы. Это намного легче, чем каждый раз рисовать графики!

Да, наверное, легче! Это то, что надо!

Какая простая….

Давайте испытаем эти формулы для вычисления произведения функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$, которое мы только что находили с помощью графиков.

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\}.$$

Подставляя α = x и β = x, получим

$$\sin x \ \cos x = \frac{1}{2}\{\sin(x+x) + \sin(x-x)\} =$$

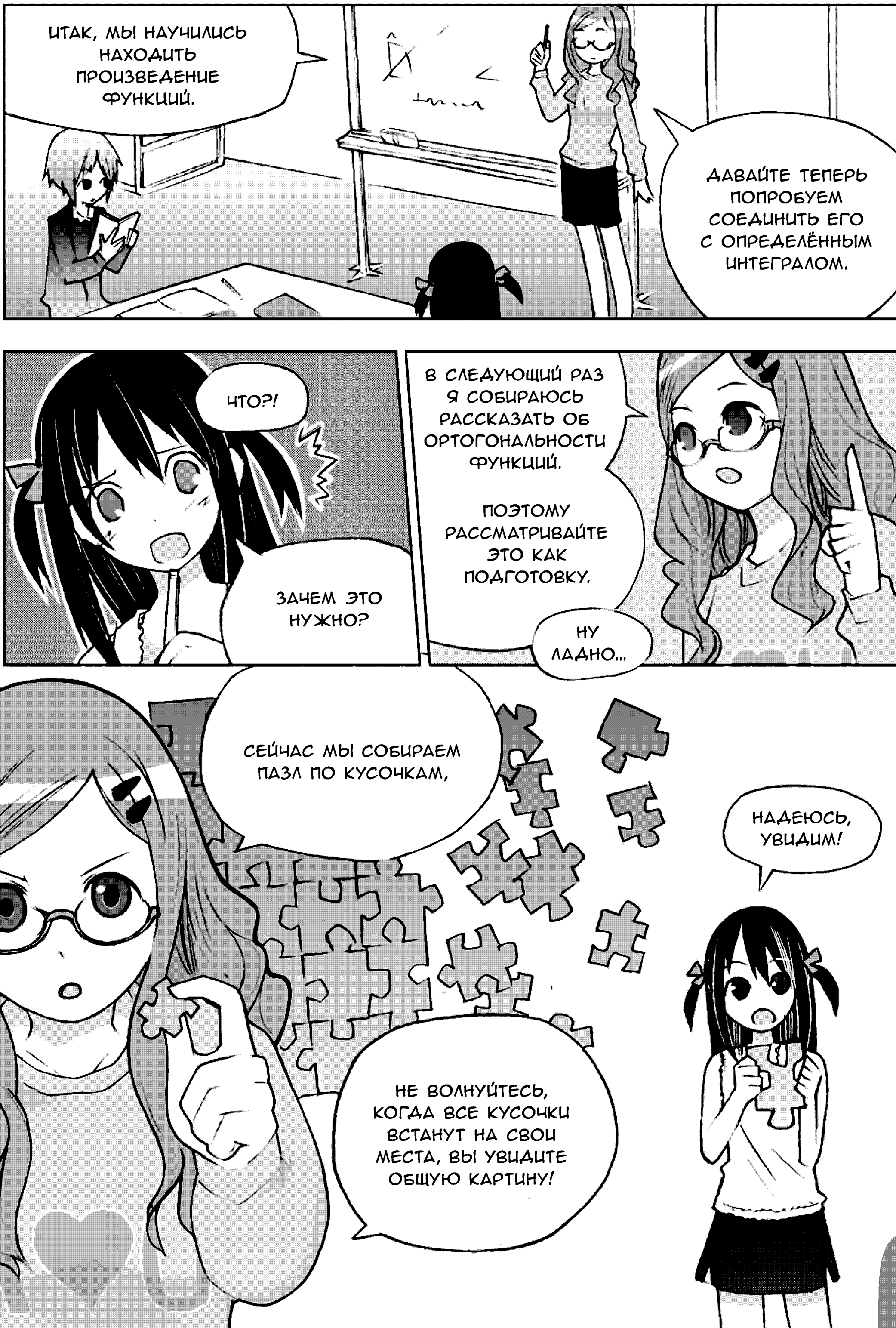
Так как $\sin 0 = 0$

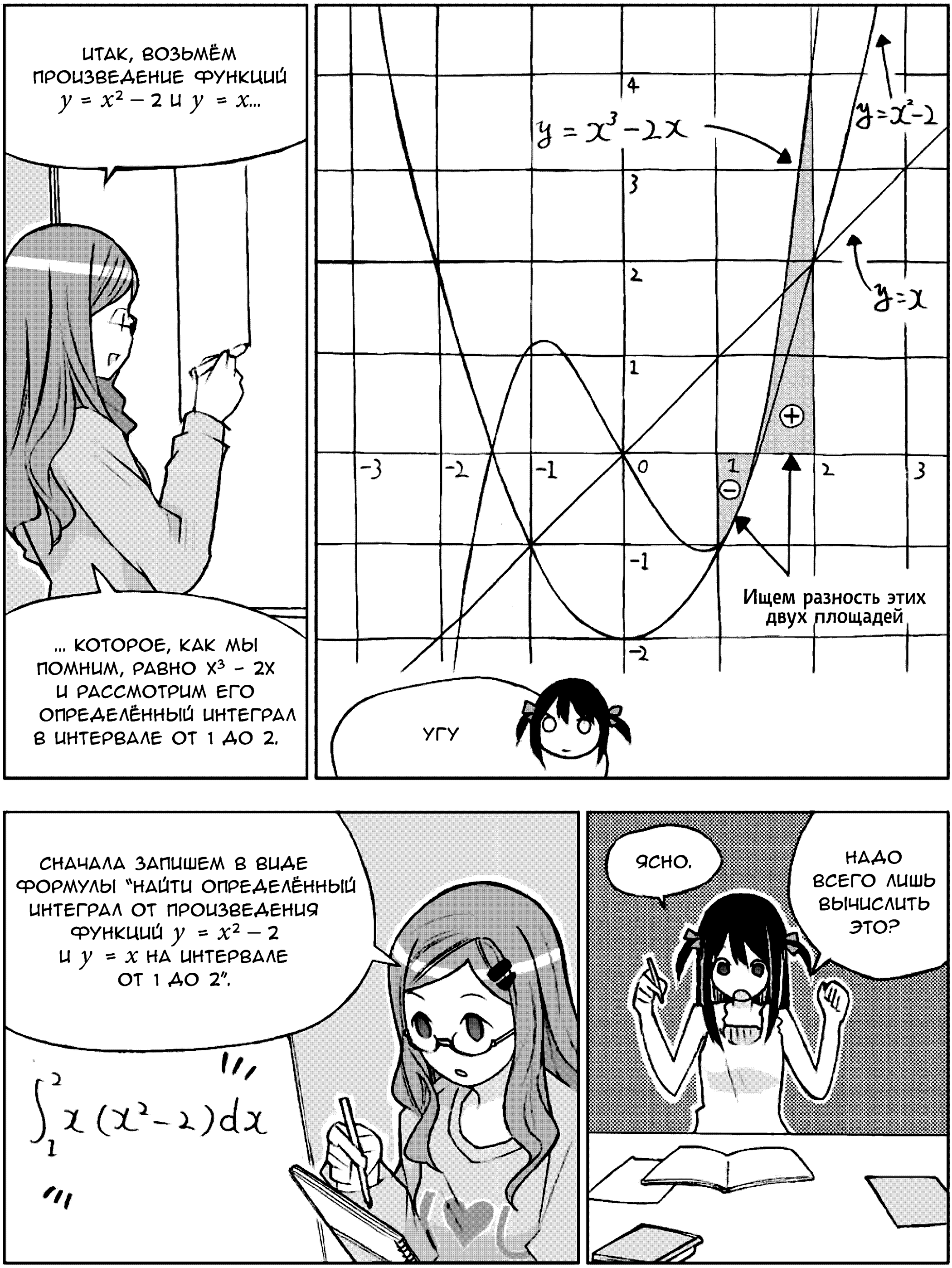
$$= \frac{1}{2}\sin(2x).$$

Вот как быстро мы получили ответ!

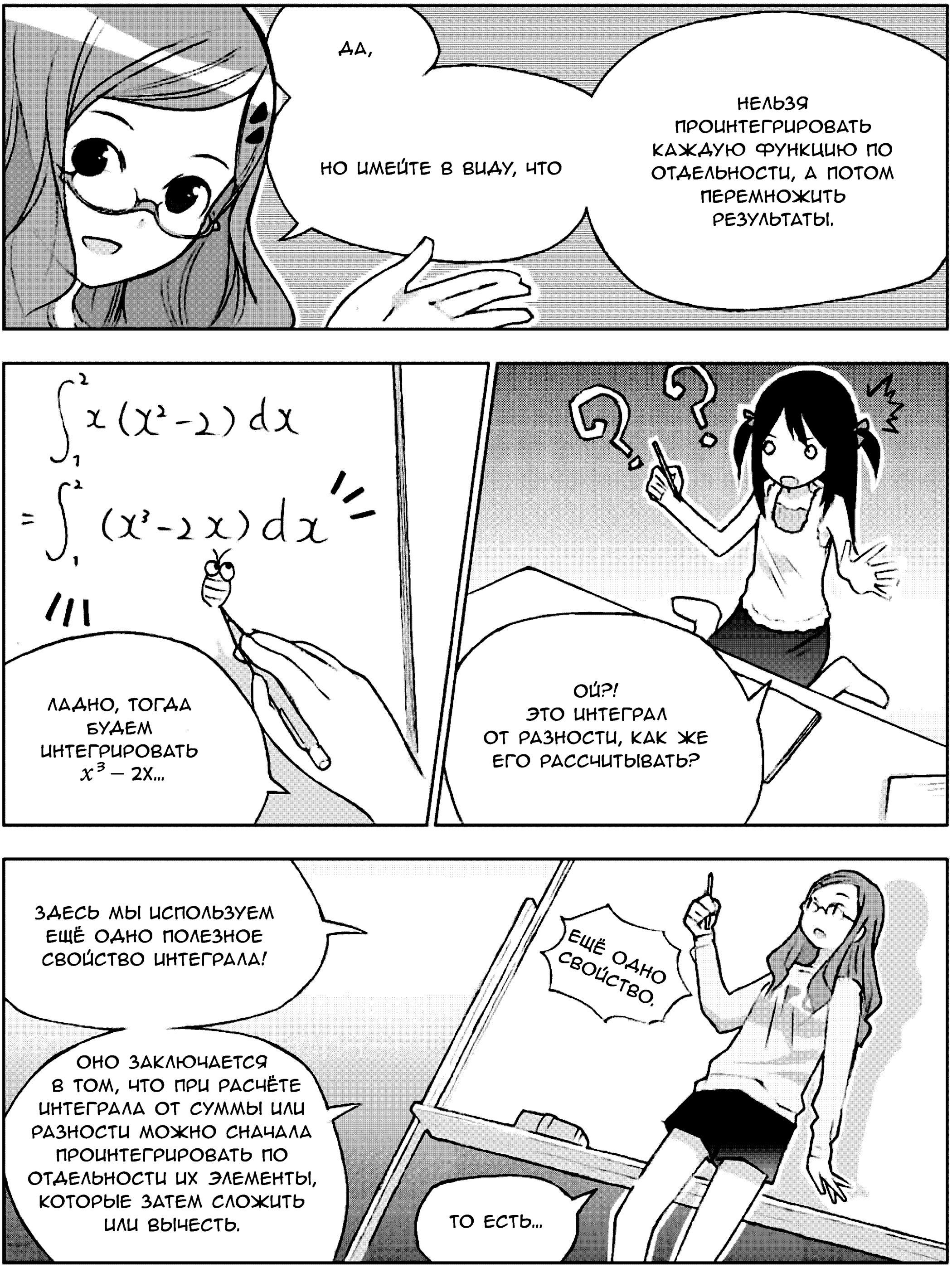
Ого!

5. ПРОИЗВЕДЕНИЕ ФУНКЦИЙ И ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

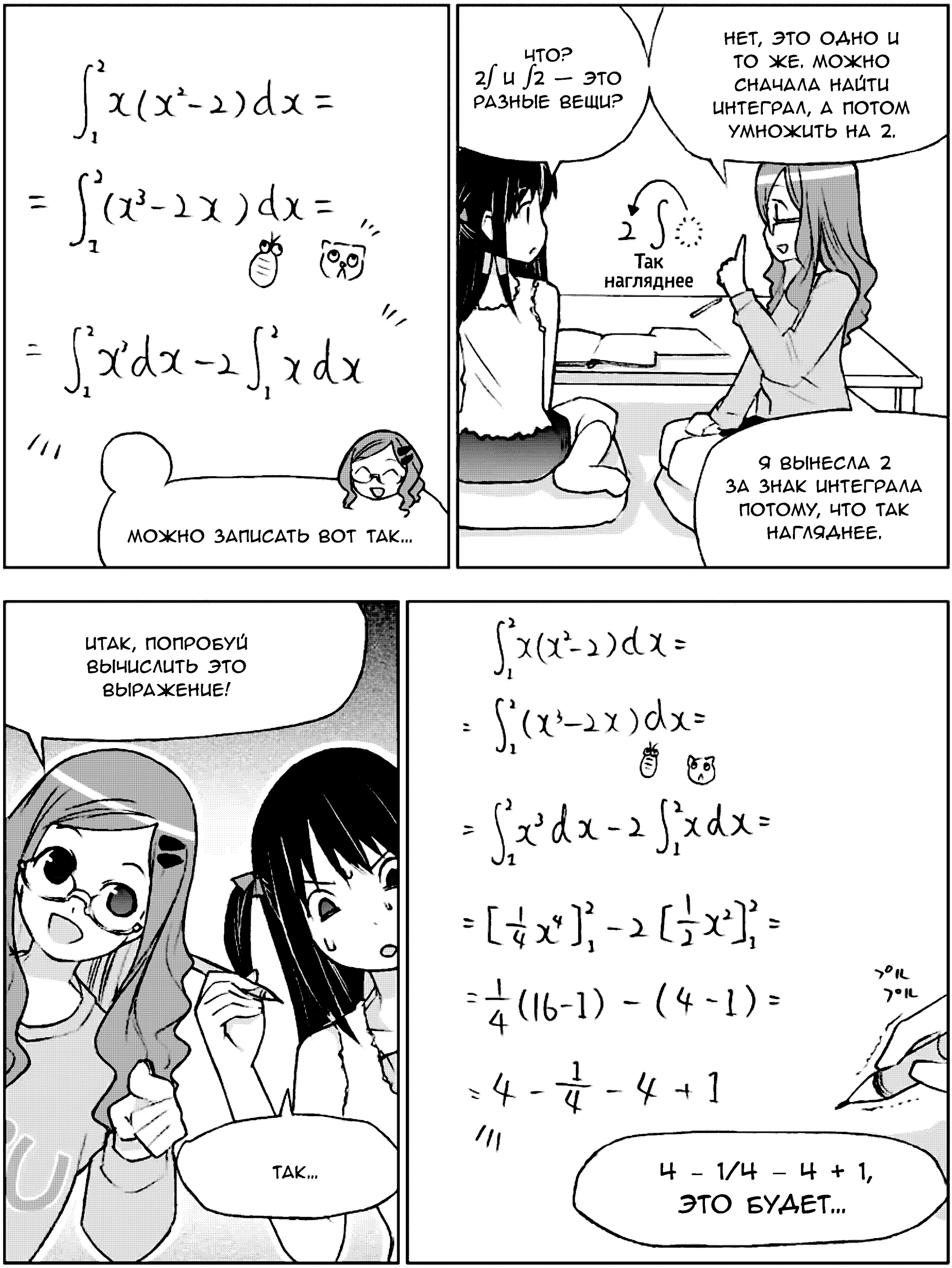




Итак, возьмём произведение функций $y = x^2 - 2$ и $y = x$...
... которое, как мы помним, равно $x^3 - 2x$ и рассмотрим его определённый интеграл в интервале от 1 до 2.
$y = x^3 - 2x$
$y = x^2 - 2$
$y = x$
Ищем разность этих двух площадей
Угу
Сначала запишем в виде формулы "найти определённый интеграл от произведения функций $y = x^2 - 2$ и $y = x$ на интервале от 1 до 2".
$\int_1^2 x(x^2-2)\,dx$
Ясно.
Надо всего лишь вычислить это?



Да,
но имейте в виду, что
нельзя проинтегрировать каждую функцию по отдельности, а потом перемножить результаты.
$\int_1^2 x(x^2-2)\,dx$
$= \int_1^2 (x^3-2x)\,dx$
Ладно, тогда будем интегрировать $x^3 - 2x$...
Ой?! Это интеграл от разности, как же его рассчитывать?
Здесь мы используем ещё одно полезное свойство интеграла!
Ещё одно свойство.
Оно заключается в том, что при расчёте интеграла от суммы или разности можно сначала проинтегрировать по отдельности их элементы, которые затем сложить или вычесть.
То есть...



$\int_1^2 x(x^2-2)\,dx =$
$= \int_1^2 (x^3-2x)\,dx =$
$= \int_1^2 x^3\,dx - 2\int_1^2 x\,dx$
Можно записать вот так...
Что? $2\int$ и $\int 2$ — это разные вещи?
Нет, это одно и то же. Можно сначала найти интеграл, а потом умножить на 2.
$2\int$
Так нагляднее
Я вынесла 2 за знак интеграла потому, что так нагляднее.
Итак, попробуй вычислить это выражение!
Так...
$\int_1^2 x(x^2-2)\,dx =$
$= \int_1^2 (x^3-2x)\,dx =$
$= \int_1^2 x^3\,dx - 2\int_1^2 x\,dx =$
$= \left[\frac{1}{4}x^4\right]_1^2 - 2\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2 =$
$= \frac{1}{4}(16-1) - (4-1) =$
$= 4 - \frac{1}{4} - 4 + 1$
4 – 1/4 – 4 + 1, это будет...


3/4
ТАК...
МОЛОДЕЦ!
ЗАЧЕМ ТЫ ТОРОПИШЬСЯ? Я ВЕДЬ ТОЖЕ СЧИТАЮ!
БУМ-БУМ-БУМ!
ОДНАКО,
Я СМОГЛА ВСЁ ПРАВИЛЬНО ВЫЧИСЛИТЬ!
МОЛОДЧИНА!


ЧТО, УСТАЛА?
ОХ...
НЕТ...
Я КОНЕЧНО РАДА, ЧТО НЕМНОГО ОСВОИЛА МАТЕМАТИКУ... НО КАК ЖЕ НАМ БЫТЬ С ВОКАЛИСТОМ...
НЕУЖЕЛИ ЕГО ТАК И НЕ УДАСТСЯ НАЙТИ...
...ЧЕРЕЗ ИНТЕРНЕТ
А ДАВАЙТЕ ПОИЩЕМ ЧЕРЕЗ ИНТЕРНЕТ!
ДА...
ДАВАЙ!

ГЛАВА 5

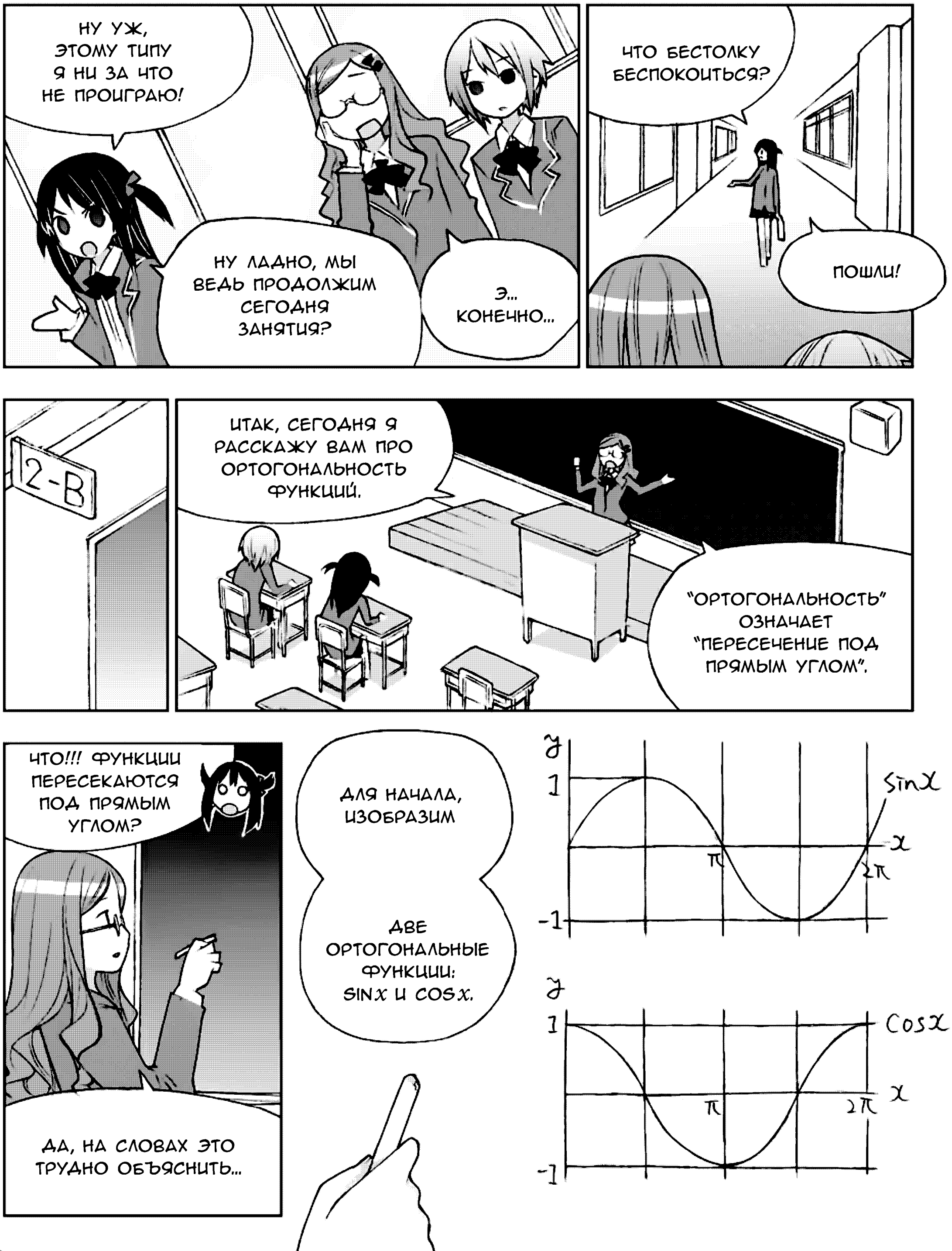
ФУНКЦИИ ТОЖЕ БЫВАЮТ "ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМИ"

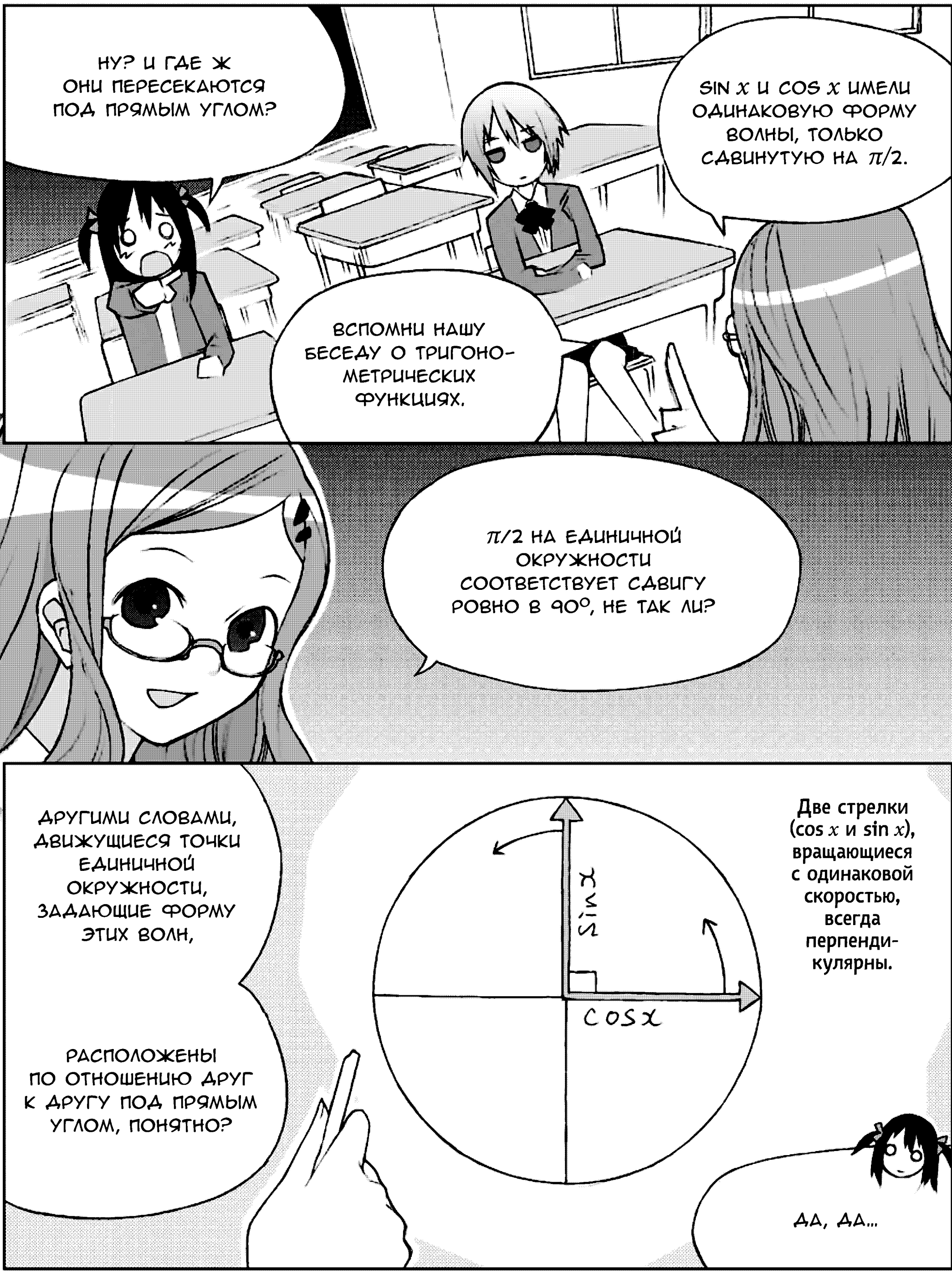
1. ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ ФУНКЦИЙ

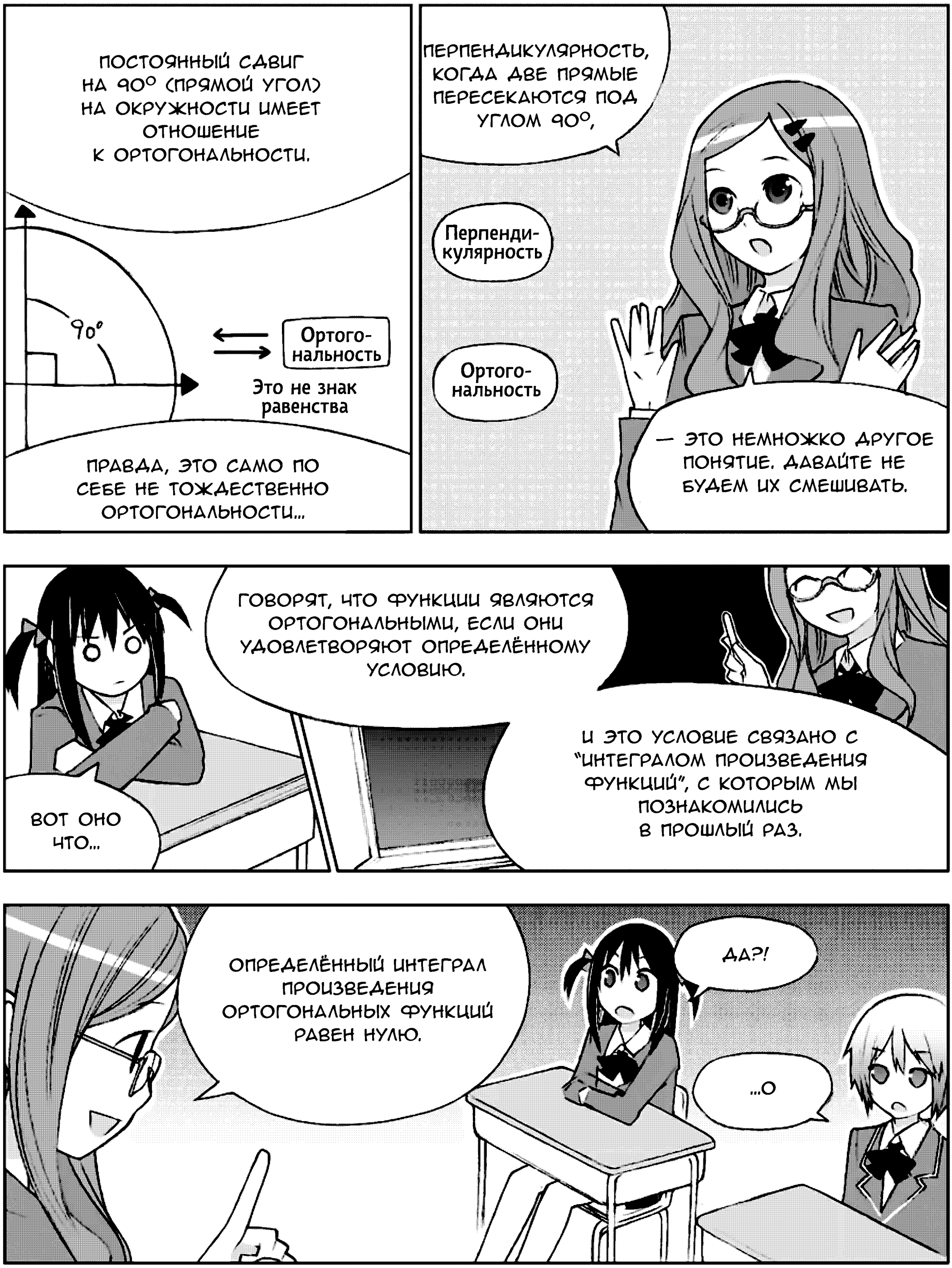

Как вы знаете,
на концерте будет жюри, состоящее из 8 учеников и 2 учителей,
которые будут оценивать выступающие группы.
3
8
10
7
Да... Ну и что из этого?
Группа, занявшая первое место, будет исполнять заключительный номер.
Конечно, наша группа к этому стремится.
И...
...всё равно мы вас обойдём!
Если
мы победим,
то ты станешь моей девушкой!
Ну уж, ты слишком самоуверенна.
Предлагаю пари!


БАЦ!
БАЦ!
ЧТО ТЫ НЕСЁШЬ!
НЕТ, Я...
СЕРЬЁЗНО!
...
...НУ ЛАДНО.
ФУМИКА, ТЫ ЧТО?!
НО ЕСЛИ ПОБЕДИМ МЫ,
ТОГДА, ТЫ, ЮКИ, БУДЕШЬ НАШИМ НОСИЛЬЩИКОМ!


НОСИЛЬЩИКОМ?!
ДАВАЙ БЫСТРЕЕ!
ХРЯСЬ
ОХ...
ТАЩИ!
НЕПЛОХО!
ХА-ХА-ХА, Я СОГЛАСЕН!
ЖДУ С НЕТЕРПЕНИЕМ!
АДЬЮ!
НУ ТЫ И ПРИДУМАЛА! ХОРОШО ЛИ ЭТО?
ТОП-ТОП-ТОП
АДЬЮ...
МЫ ВЕДЬ ЕЩЁ И ВОКАЛИСТА НЕ НАШЛИ...


Ну уж,
этому типу
я ни за что
не проиграю!
Ну ладно, мы
ведь продолжим
сегодня
занятия?
Э...
конечно...
Что бестолку
беспокоиться?
Пошли!
2-B
Итак, сегодня я
расскажу вам про
ортогональность
функций.
"Ортогональность"
означает
"пересечение под
прямым углом".
Что!!! Функции
пересекаются
под прямым
углом?
Да, на словах это
трудно объяснить...
Для начала,
изобразим
две
ортогональные
функции:
sin x и cos x.
y
1
sin x
x
π
2π
-1
y
1
cos x
x
π
2π
-1

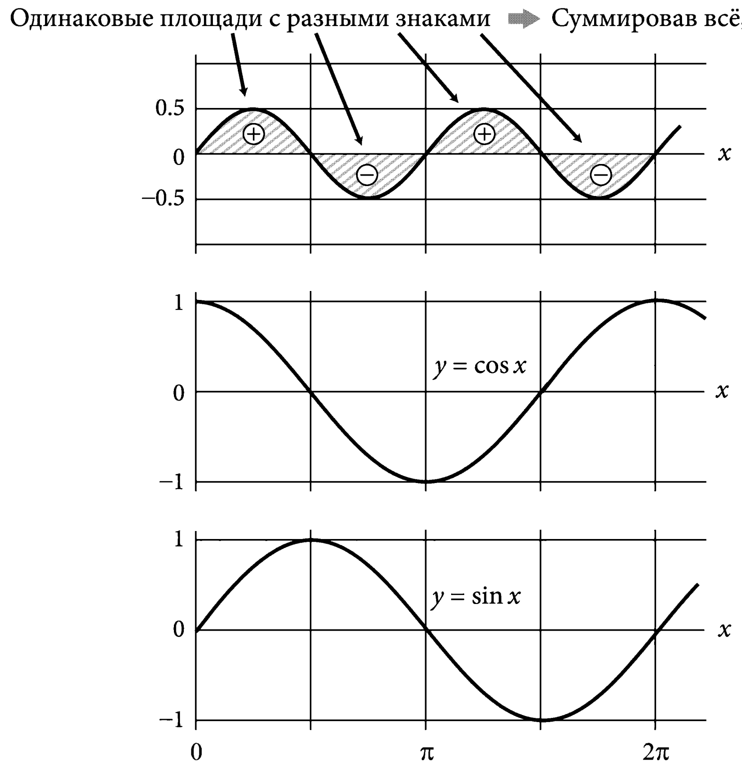

Ну? И где ж они пересекаются под прямым углом?
sin x и cos x имели одинаковую форму волны, только сдвинутую на $\pi/2$.
Вспомни нашу беседу о тригонометрических функциях.
$\pi/2$ на единичной окружности соответствует сдвигу ровно в 90°, не так ли?
Другими словами, движущиеся точки единичной окружности, задающие форму этих волн,
sin x
cos x
расположены по отношению друг к другу под прямым углом, понятно?
Две стрелки (cos x и sin x), вращающиеся с одинаковой скоростью, всегда перпендикулярны.
Да, да...


Постоянный сдвиг на 90° (прямой угол) на окружности имеет отношение к ортогональности.
90°
Ортогональность
Это не знак равенства
Правда, это само по себе не тождественно ортогональности...
Перпендикулярность, когда две прямые пересекаются под углом 90°,
Перпендикулярность
Ортогональность
— это немножко другое понятие. Давайте не будем их смешивать.
Говорят, что функции являются ортогональными, если они удовлетворяют определённому условию.
И это условие связано с "интегралом произведения функций", с которым мы познакомились в прошлый раз.
Вот оно что...
Определённый интеграл произведения ортогональных функций равен нулю.
Да?!
...О


И обратно, если мы перемножили две функции, нашли определённый интеграл произведения,
и он оказался равен нулю, значит эти две функции являются ортогональными.
$\int_0^{2\pi} \sin x \cos x \, dx = 0$
Если это так,
значит sin x и cos x ортогональны.
Ого! Здо́рово!
Именно для этого
я рассказывала вам о произведении функций и определённом интеграле.
Итак, давайте займёмся упражнениями!

2. ПРОВЕРЯЕМ ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ГРАФИКОВ

Давайте разберём пример с функциями $y = \sin x$ и $y = \cos x$, который мы недавно рассматривали. Сначала мы изобразим график $y = \sin x \times \cos x$ (верхний график). На среднем графике изобразим функцию $y = \cos x$, а на нижнем — функцию $y = \sin x$ (Рис. 5-1).



□ Рис. 5-1. Определённый интеграл от произведения функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$.

Для верхнего графика, $y = \sin x \times \cos x$, справедлива формула произведения функций, которую я приводила в прошлый раз:

$$\sin\alpha\ \cos\beta = \frac{1}{2}\left\{\sin\left(\alpha + \beta\right) + \sin\left(\alpha - \beta\right)\right\}.$$

Эта формула даёт функцию $\frac{1}{2}\sin(2x)$.

Да, да. В прошлый раз мы уже это делали.

В нашем случае, так как у функций $y = \sin x$ и $\cos x$ одинаковый период (одинаковая пара «горка и впадина»), и из графика видно, что «один период соответствует интервалу от 0 до 2π», мы находим определённый интеграл на этом интервале. Площадь, соответствующую этому определённому интегралу, я показала штриховкой.

Да, тут видны 2 «впадины» и 2 «горки», все одинакового размера.

Если функция отрицательна, то площадь даёт определённый интеграл со знаком «минус». Значит, определённый интеграл равен…

Нулю!

Да, именно так. Итак, мы смогли подтвердить ортогональность функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ с помощью графиков!

3. Проверяем ортогональность функций путём вычислений

Давайте на всякий случай проверим прошлый пример вычислением по следующей формуле:

$$\int_0^{2\pi} \sin x \cos x \, dx =$$

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right\}$, следовательно,

$$= \int_0^{2\pi} \left(\tfrac{1}{2}\sin 2x\right) dx =$$

$\int \sin x \, dx = -\cos x$

следовательно,

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{2\pi} =$$

$$= -\frac{1}{4}\left[1-1\right] = 0.$$

$$\int \sin(2x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin(2x)\, d(2x) =$$

$$= \frac{1}{2}\cos 2x.$$

Переменная функции синуса равна $2x$, а переменная интегрирования равна x, поэтому для приведения к одинаковой переменной мы домножаем и делим выражение на 2.

Результат, полученный вычислениями, тоже оказался равен 0. Другими словами, мы с помощью вычислений убедились, что $y = \sin x$ и $y = \cos x$ ортогональны. Использованные в примере функции имеют одинаковый период. Если перемножаемые функции имеют разные периоды, то интервал интегрирования назначается равным самому протяжённому из них. Однако в действительности интегрируют от 0 до 2π, так как на интервале от 0 до 2π даже самый длинный период обязательно содержится хотя бы один раз.

Почему хотя бы один раз?

Это потому, что мы рассматриваем частоты, взяв за основу функцию с самым большим периодом. Например, при умножении двух синусоидальных функций с периодами, равными 1 и 2, получится волна с двойной частотой. В этом случае самый протяжённый период будет равен 1.

Значит, если принять за один период самый длинный из возможных, то другие периоды определятся автоматически?

Да, это так. Даже для двух функций $y = \sin(2x)$ и $y = \sin(5x)$, подразумевается, что основной период соответствует функции $y = \sin x = \sin(1x)$, поэтому выбирают интервал интегрирования от 0 до 2π, равный периоду функции $\sin x$. В реальных вычислениях для функции $y = \sin(2x)$ назначают интервал от 0 до 2π, и тогда можно особо не задумываться об интервале.

Ясно...

Итак, давайте на основании всего изученного проверим, нет ли ещё каких-либо пар ортогональных функций. На этот раз мы рассмотрим функции $y = \sin x$ и $y = \sin(2x)$. График и интеграл их произведения показаны ниже. Интервал интегрирования — от 0 до 2π (Рис. 5-2).

$$\int_0^{2\pi} \sin x \sin(2x)dx =$$

$\sin\alpha \sin\beta = -\frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right\}$, отсюда:

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left\{\cos(3x) - \cos(-x)\right\}dx =$$

вносим «минус» в фигурные скобки (члены поменяются местами)

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left\{\cos(-x) - \cos(3x)\right\}dx =$$

так как $\cos(-x) = \cos(x)$, что ясно также из графика

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left\{\cos(x) - \cos(3x)\right\}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos x\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(3x)dx$$

«Интеграл от косинуса равен синусу».

$$= \frac{1}{2}\left[\sin x\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\sin(3x)\right]_0^{2\pi}$$

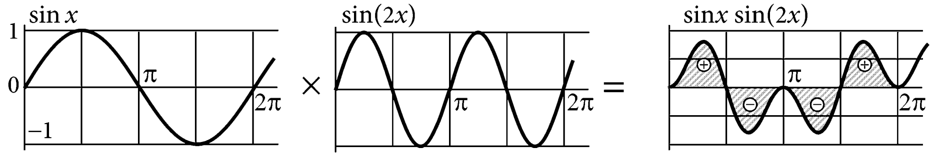
Чтобы привести переменную интегрирования к аргументу функции синуса, домножаем и делим выражение на 3.

Так как интеграл в интервале от 0 до 2π как для $\cos x$, так и для $\cos 3x$ равен 0, уже на этом этапе видно, что результат будет равен 0.

$\sin(2\pi) = 0 \quad \sin 0 = 0$, отсюда:

$$= \frac{1}{2}(0-0) - \frac{1}{2}(0-0)$$

$$= 0$$



☐ Рис. 5-2. Определённый интеграл произведения функций $\sin x$ и $\sin(2x)$.

Здесь тоже повторяются фигуры одинаковой площади и разных знаков, значит определённый интеграл равен 0, так?

Ноль — это значит, что они ортогональны…

Да, конечно. Если вы призовёте на помощь воображение, то сможете понять следующее: «Любые две функции синуса с отличающимися периодами ортогональны».

Угу.

Выражаясь математически, «для двух любых отличных друг от друга натуральных чисел m и n функции $y = \sin(mx)$ и $y = \sin(nx)$ являются ортогональными».

А если m и n будут равны?

Если $m = n = 1$, то получится определённый интеграл уже рассмотренного нами произведения $\sin x \times \sin x$, то есть $y = \sin^2 x$. Так как результат не будет равен 0, ортогональности нет. Таким образом, интуитивно понятно, что функция не может быть ортогональна самой себе.

В самом деле, если вращающиеся точки всё время совпадают, то они никогда не будут находиться в перпендикулярных друг другу положениях.

Разумеется, даже если m и n равны не 1, но равны между собой, то функции не ортогональны. Ведь если любую функцию, отличную от нулевой, возвести в квадрат, то значение определённого интеграла всегда будет положительным, так как функция не будет иметь отрицательных значений ни в одной точке.

Логично.

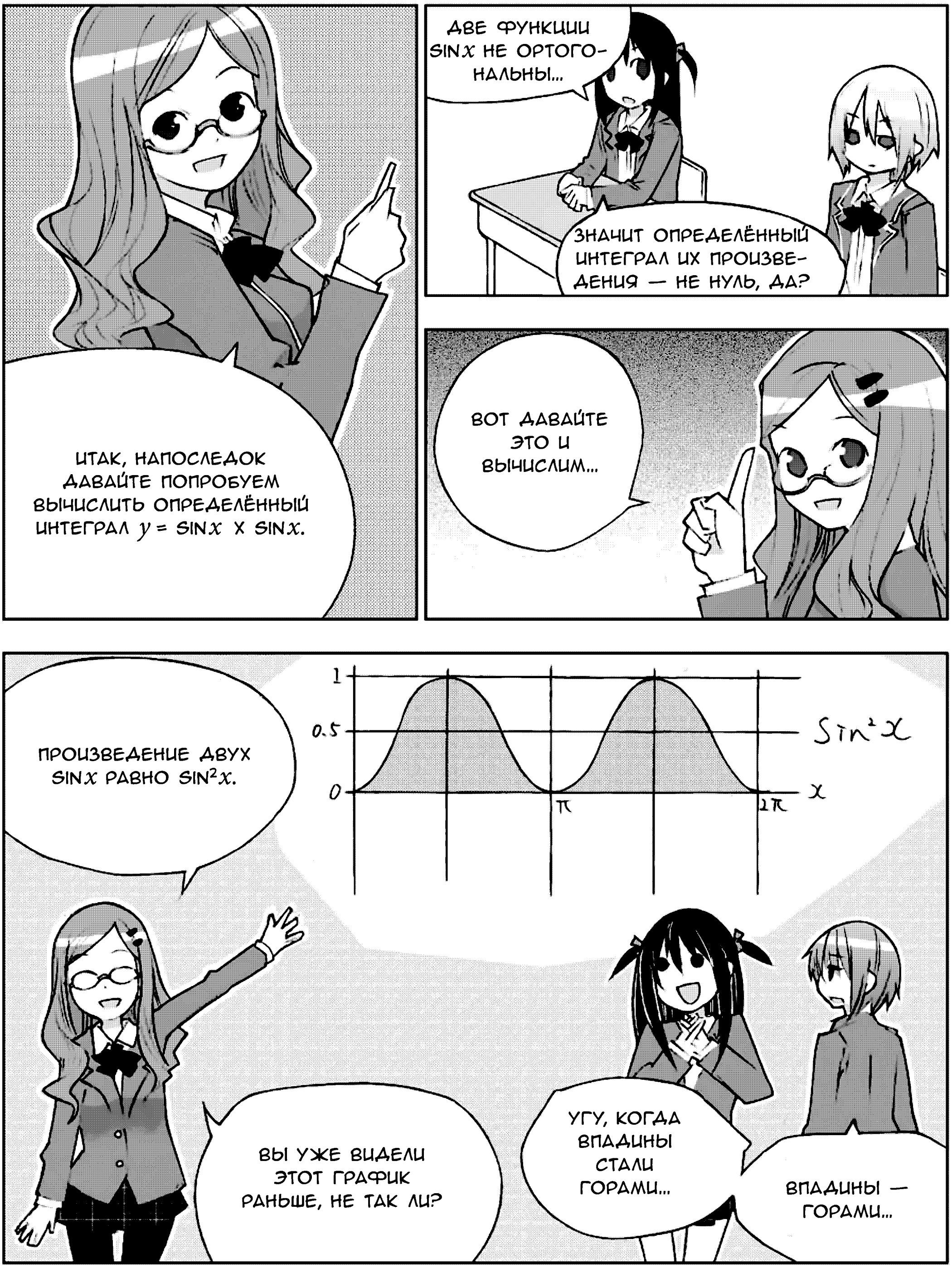
С функцией $y = \cos x$ получится то же самое?

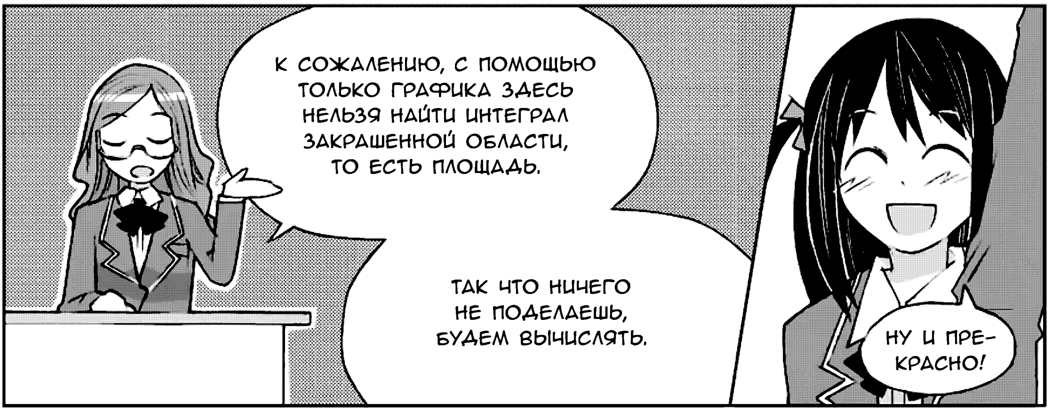
Хороший вопрос. Начиная с вывода, скажу, что для косинуса, также как и для синуса, определённый интеграл $\cos(mx) \times \cos(nx)$ имеет отличное от 0 значение только для равных m и n, а в остальных случаях равен 0.
То есть, функции $y = \cos(mx)$ и $y = \cos(nx)$ тоже ортогональны при условии различных m и n.

Значит функции как $y = \sin(mx)$, так и $y = \cos(mx)$ ортогональны друг другу для любых периодов, отличных от их собственного!

Кроме того, как мы недавно видели, функции $y = \sin(mx)$ и $y = \cos(mx)$ ортогональны независимо от того, как соотносятся между собой их периоды!

4. Определённый интеграл от $\sin^2 x$





$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin x \cdot \sin x\,dx =$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\}$$

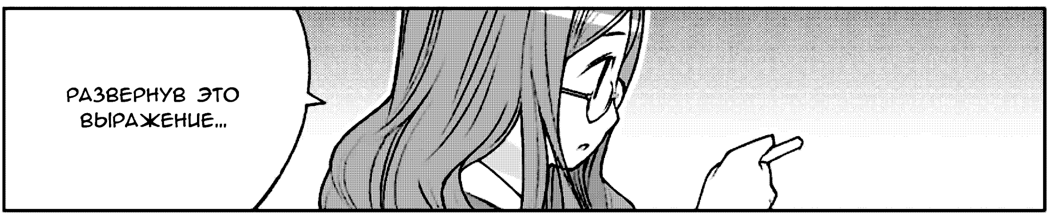
Приняв $\alpha = \beta = x$

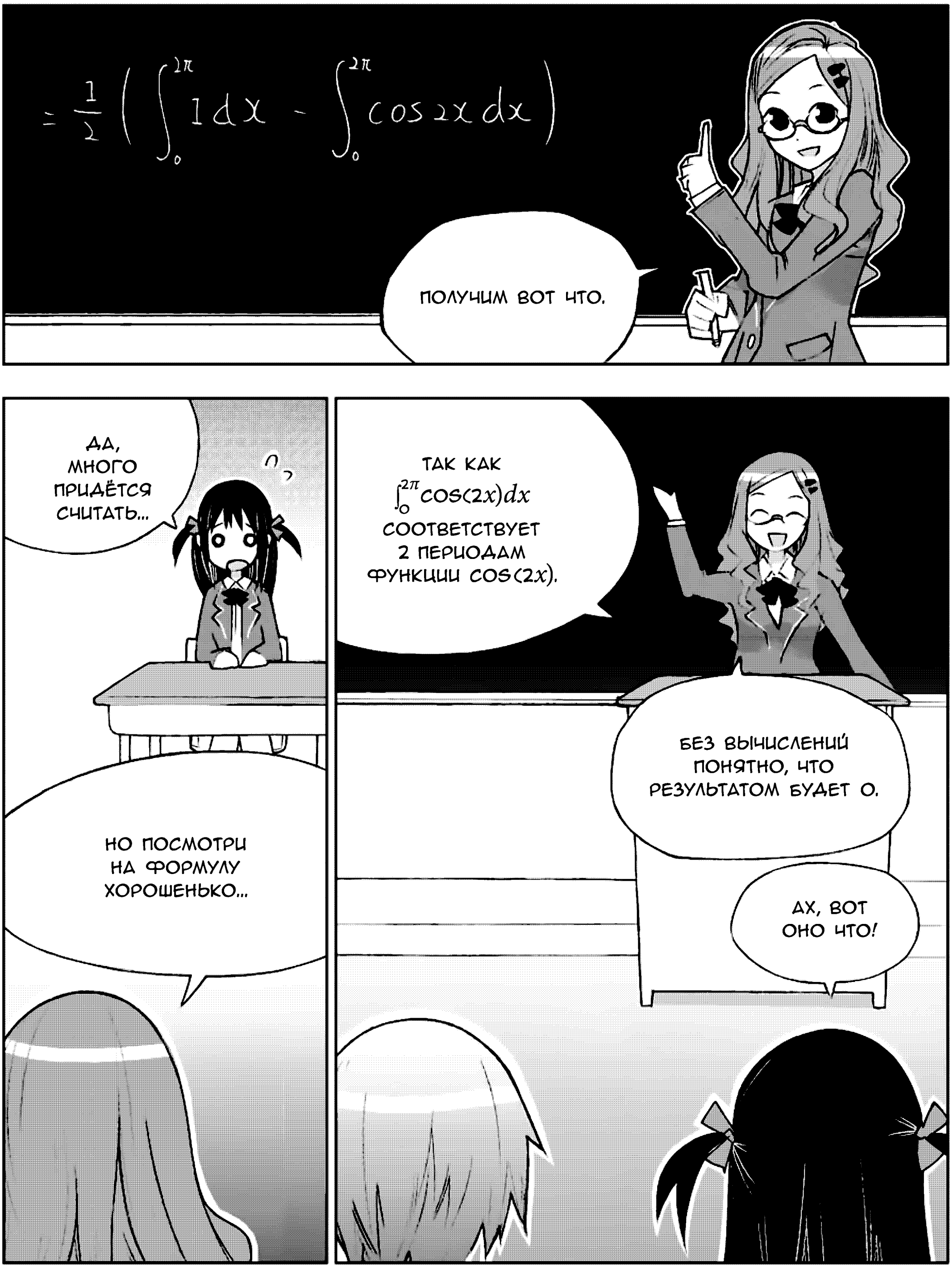
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \{\cos(0)-\cos(2x)\}\,dx =$$

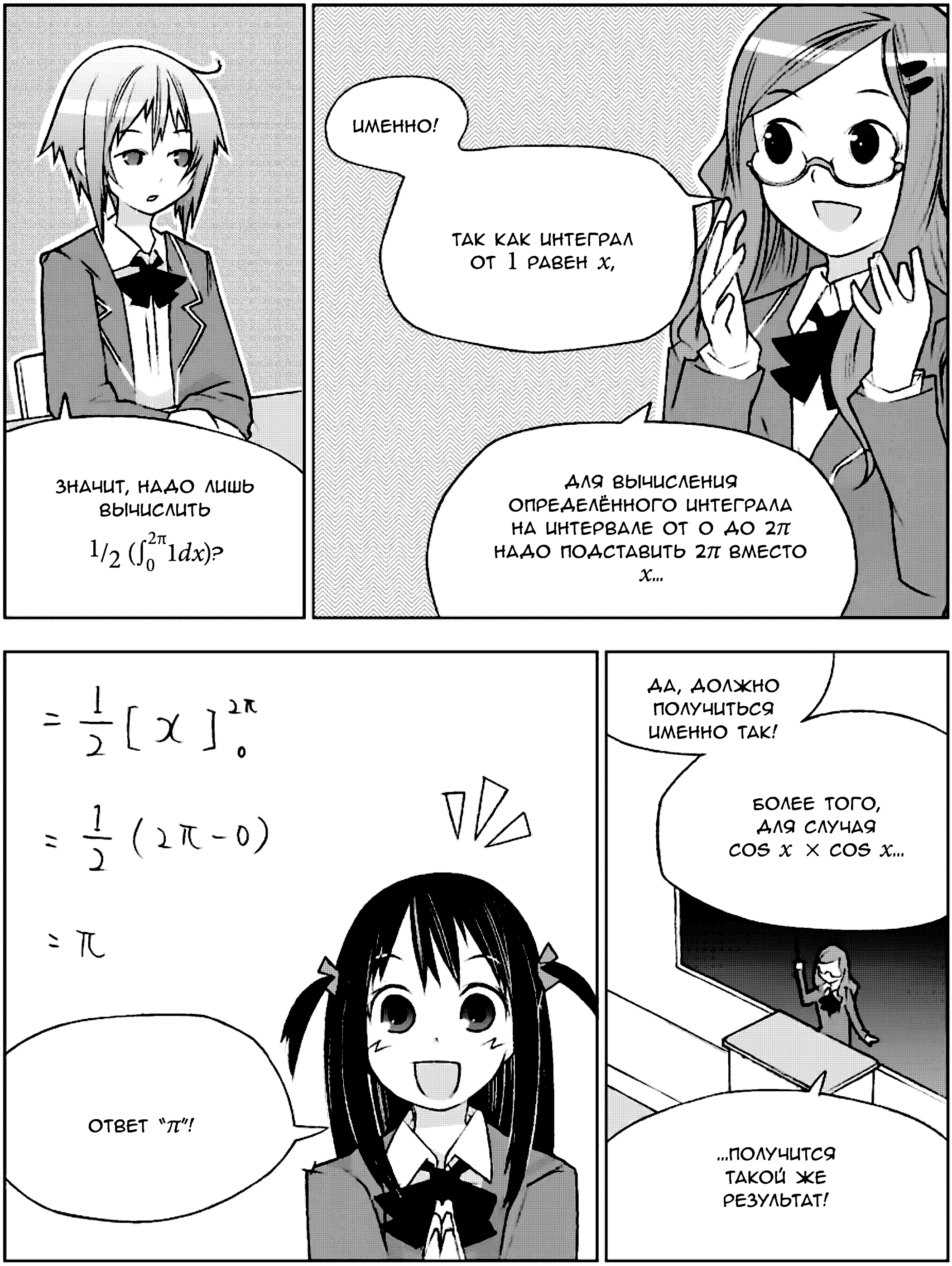
$\cos(0) = 1$, **следовательно**

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \{1-\cos(2x)\}\,dx.$$

ДА, ДА...




$= \frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi} 1\,dx - \int_0^{2\pi} \cos 2x\,dx\right)$
ПОЛУЧИМ ВОТ ЧТО.
ДА, МНОГО ПРИДЁТСЯ СЧИТАТЬ...
НО ПОСМОТРИ НА ФОРМУЛУ ХОРОШЕНЬКО...
ТАК КАК $\int_0^{2\pi} \cos(2x)dx$ СООТВЕТСТВУЕТ 2 ПЕРИОДАМ ФУНКЦИИ $\cos(2x)$.
БЕЗ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПОНЯТНО, ЧТО РЕЗУЛЬТАТОМ БУДЕТ 0.
АХ, ВОТ ОНО ЧТО!


Значит, надо лишь вычислить $^1/_2\,(\int_0^{2\pi} 1dx)$?
Именно!
Так как интеграл от 1 равен x,
Для вычисления определённого интеграла на интервале от 0 до 2π надо подставить 2π вместо x...
$= \frac{1}{2}[x]_0^{2\pi}$
$= \frac{1}{2}(2\pi - 0)$
$= \pi$
Ответ "π"!
Да, должно получиться именно так!
Более того, для случая $\cos x \times \cos x$...
...получится такой же результат!


Не надо думать, что это слишком сложно!
Конечно, всё это хорошо, но с другой стороны...
Ведь стоит только сдвинуть sin x вправо на $\pi/2$, и получится cos x,
поэтому определённый интеграл тоже, разумеется, будет равен "π".
Вот оно что?
Но есть ли вообще смысл в этих вычислениях?
Есть!
На самом деле, полученное здесь значение — "π" — очень пригодится для преобразования Фурье!
Но об этом мы поговорим в следующий раз.
А на сегодня закончим!
Спасибо, Эвелина! Мы тебя любим!

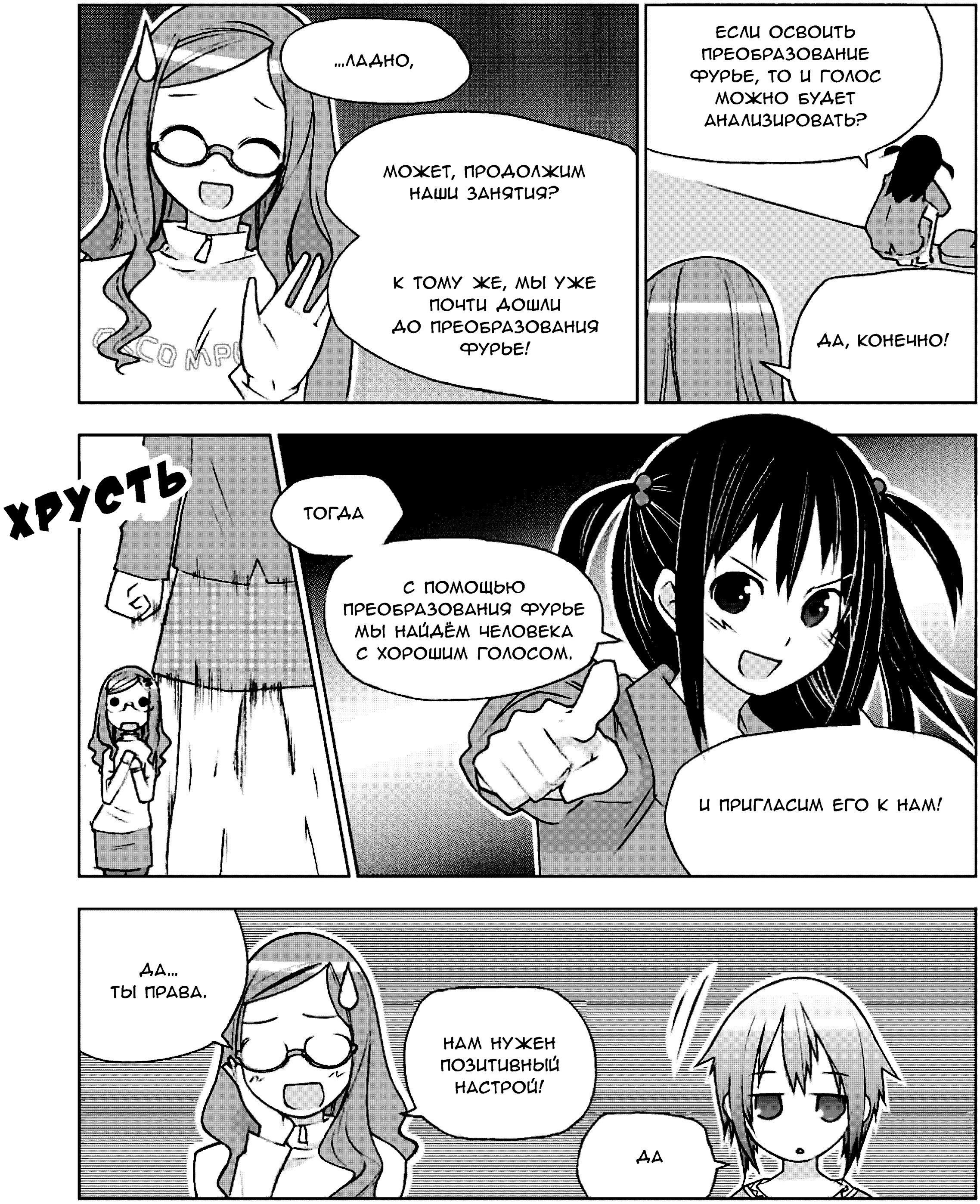

Ну, что...
...пойду домой сочинять...
...песню для нашего выступления на концерте!
Мы отлично выступим! Верно, девчонки?!
А мы поищем кого-нибудь...
...в вокалисты!
YES!

Глава 6

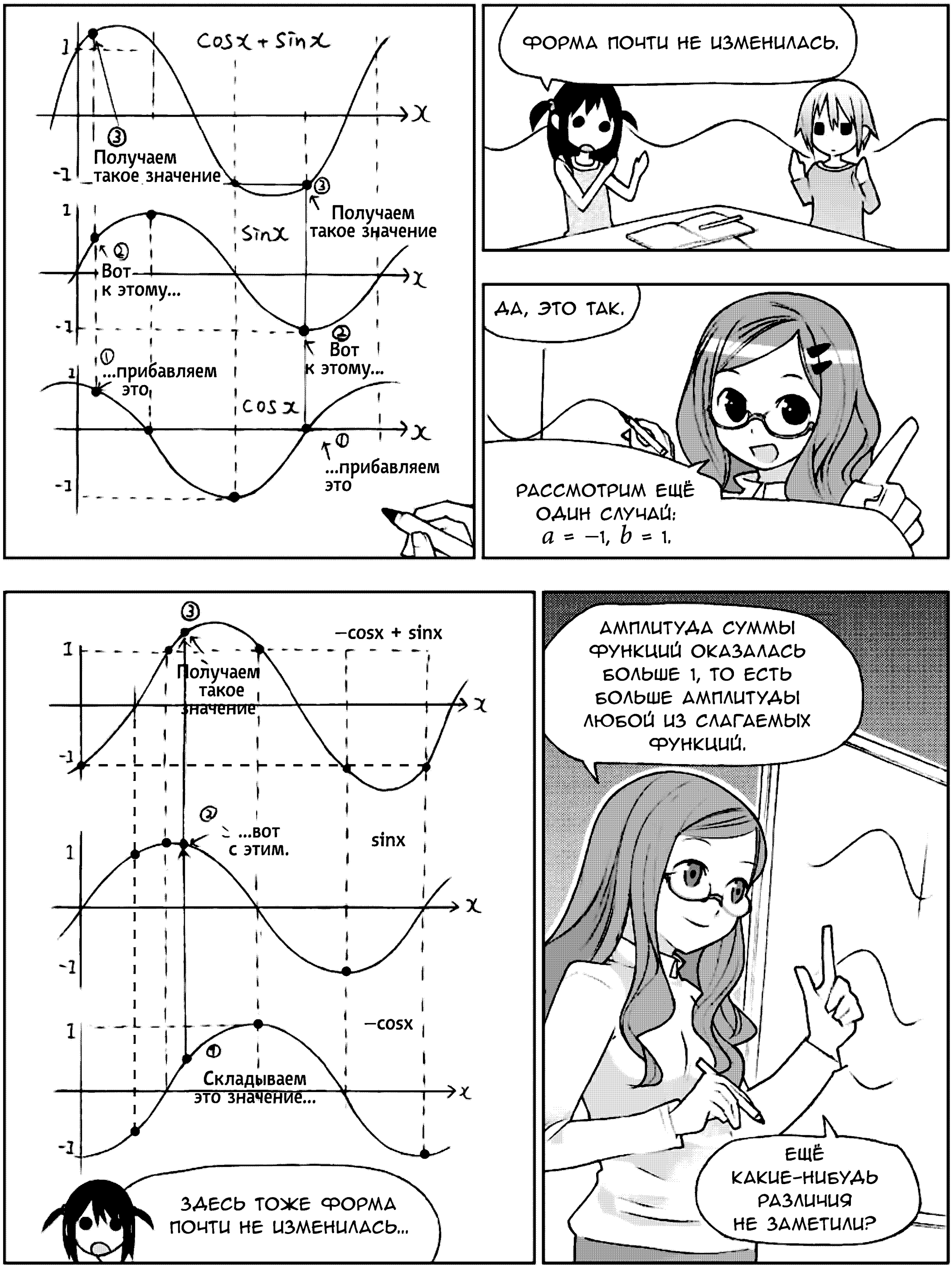
Всё ближе к преобразованию Фурье

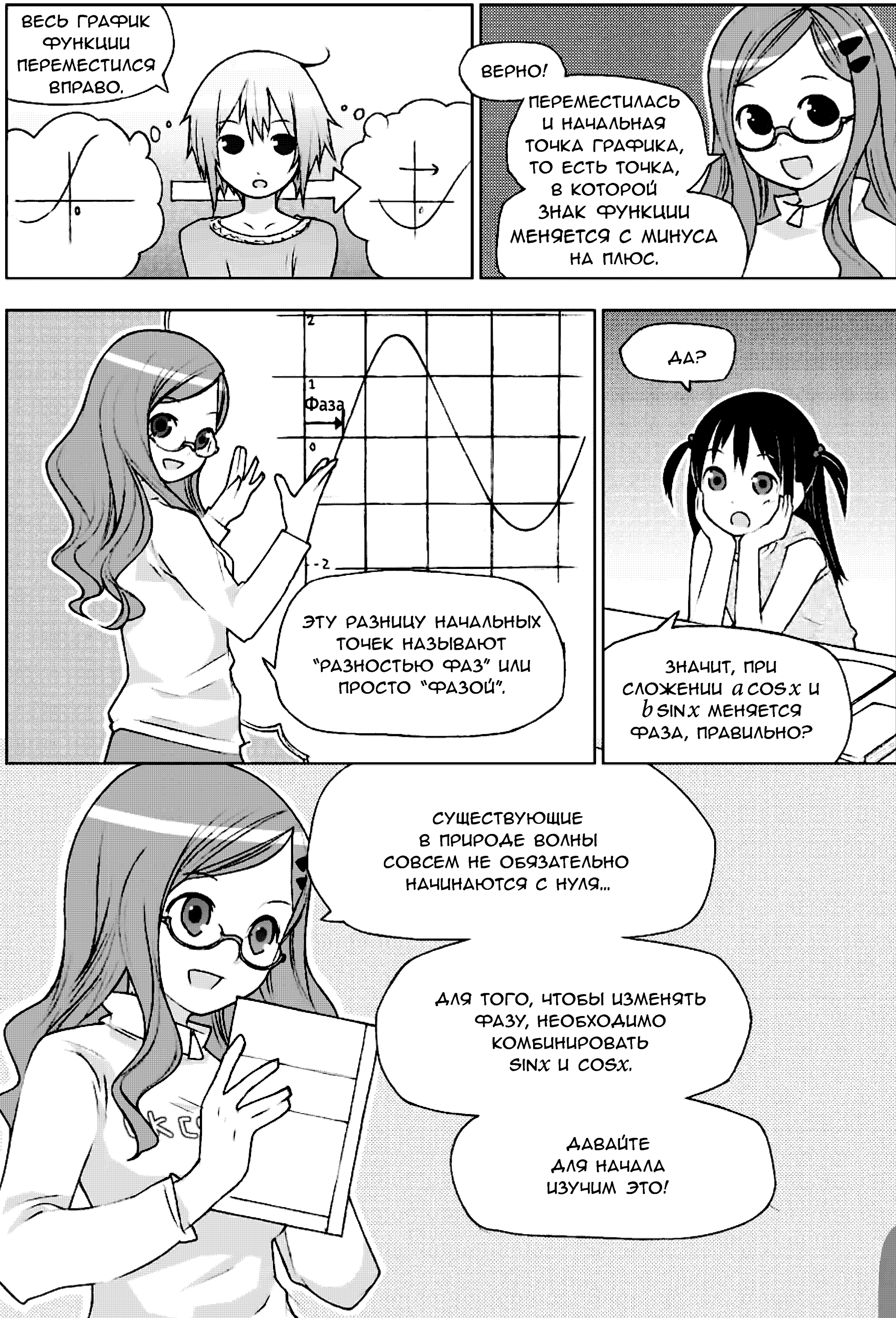
1. Формирование волны сложением тригонометрических функций


Без вокалиста хорошего исполнения не получится...
Что же делать?
Мы, конечно, приглашали несколько человек...
...но не нашли никого подходящего...
Что же делать? Ведь до музыкального фестиваля остаётся всего месяц...
...


...ЛАДНО,
МОЖЕТ, ПРОДОЛЖИМ НАШИ ЗАНЯТИЯ?
К ТОМУ ЖЕ, МЫ УЖЕ ПОЧТИ ДОШЛИ ДО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ!
ЕСЛИ ОСВОИТЬ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ, ТО И ГОЛОС МОЖНО БУДЕТ АНАЛИЗИРОВАТЬ?
ДА, КОНЕЧНО!
ХРУСТЬ
ТОГДА
С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ МЫ НАЙДЁМ ЧЕЛОВЕКА С ХОРОШИМ ГОЛОСОМ.
И ПРИГЛАСИМ ЕГО К НАМ!
ДА... ТЫ ПРАВА.
НАМ НУЖЕН ПОЗИТИВНЫЙ НАСТРОЙ!
ДА

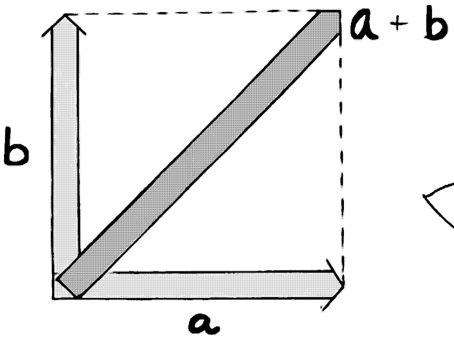
Итак,
наконец-то мы путём сложения ортогональных функций...
...сможем формировать различные волны!
Для начала рассмотрим сумму функций $y = a\cos(mx)$ и $y = b\sin(mx)$ с одинаковыми периодами.
Но ведь перед cos есть a.
Что делать с коэффициентами a и b?
Для простоты примем $m = 1$ и рассмотрим график $y = a\cos x + b\sin x$
Для начала примем a и b равными 1.
При этом сумма двух функций получается сложением значений синуса и косинуса при соответствующих значениях x. Кстати, такое сложение называют синтезом.
Мы получим следующее.


cosx + sinx
1
-1
③
Получаем такое значение
③
Получаем такое значение
1
sinx
②
Вот к этому...
-1
②
Вот к этому...
1
①
...прибавляем это
cosx
-1
①
...прибавляем это
x
ФОРМА ПОЧТИ НЕ ИЗМЕНИЛАСЬ.
ДА, ЭТО ТАК.
РАССМОТРИМ ЕЩЁ ОДИН СЛУЧАЙ: $a = -1$, $b = 1$.
③
−cosx + sinx
1
Получаем такое значение
-1
②
...вот с этим.
sinx
1
-1
−cosx
1
①
Складываем это значение...
-1
x
ЗДЕСЬ ТОЖЕ ФОРМА ПОЧТИ НЕ ИЗМЕНИЛАСЬ...
АМПЛИТУДА СУММЫ ФУНКЦИЙ ОКАЗАЛАСЬ БОЛЬШЕ 1, ТО ЕСТЬ БОЛЬШЕ АМПЛИТУДЫ ЛЮБОЙ ИЗ СЛАГАЕМЫХ ФУНКЦИЙ.
ЕЩЁ КАКИЕ-НИБУДЬ РАЗЛИЧИЯ НЕ ЗАМЕТИЛИ?



ВЕСЬ ГРАФИК ФУНКЦИИ ПЕРЕМЕСТИЛСЯ ВПРАВО.
0
0
ВЕРНО!
ПЕРЕМЕСТИЛАСЬ И НАЧАЛЬНАЯ ТОЧКА ГРАФИКА, ТО ЕСТЬ ТОЧКА, В КОТОРОЙ ЗНАК ФУНКЦИИ МЕНЯЕТСЯ С МИНУСА НА ПЛЮС.
2
1
Фаза
0
-2
ЭТУ РАЗНИЦУ НАЧАЛЬНЫХ ТОЧЕК НАЗЫВАЮТ "РАЗНОСТЬЮ ФАЗ" ИЛИ ПРОСТО "ФАЗОЙ".
ДА?
ЗНАЧИТ, ПРИ СЛОЖЕНИИ $a\cos x$ И $b\sin x$ МЕНЯЕТСЯ ФАЗА, ПРАВИЛЬНО?
СУЩЕСТВУЮЩИЕ В ПРИРОДЕ ВОЛНЫ СОВСЕМ НЕ ОБЯЗАТЕЛЬНО НАЧИНАЮТСЯ С НУЛЯ...
ДЛЯ ТОГО, ЧТОБЫ ИЗМЕНЯТЬ ФАЗУ, НЕОБХОДИМО КОМБИНИРОВАТЬ $\sin x$ И $\cos x$.
ДАВАЙТЕ ДЛЯ НАЧАЛА ИЗУЧИМ ЭТО!

2. КОМБИНАЦИЯ ФУНКЦИЙ $a\cos x$ И $b\sin x$

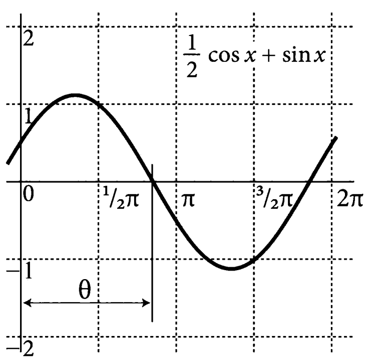


А можно «сдвинуть» фазу, не используя операцию сложения функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$?

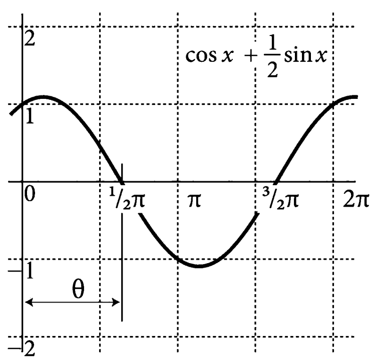
Да. Например, фазу $\sin x$ можно выразить, используя запись $\sin(x + \theta)$, и изменять θ. Однако, в этом случае нужно подготовить огромное количество вариаций θ, что очень трудоёмко как с точки зрения синтеза, так и анализа формы волн.

Что же делать?

Поэтому каждую функцию приходится представлять не в её первоначальном виде, а в виде комбинации ортогональных функций. На самом деле, с помощью всего двух функций, $y = \sin x$ и $y = \cos x$, можно выражать различные фазы функции $y = \sin(x + \theta)$. Приведу здесь два конкретных примера: для $a = \frac{1}{2}$ и $b = 1$ (Рис. 6-1)и для $a = 1$ и $b = \frac{1}{2}$ (Рис. 6-2).

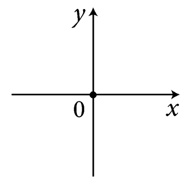


☐ Рис. 6-1. Фаза волны функции $y = \frac{1}{2}\cos x + \sin x$.



☐ Рис. 6-2. Фаза волны функции $y = \cos x + \frac{1}{2}\sin x$.

Возможность выражения только через эти две функции указывает на их ортогональность. «Ортогональность» — это невозможность «выразить одно через другое».



☐ Рис. 6-3. Система координат со взаимно перпендикулярными осями x и y.

Что это значит?

Приведу простой пример. Для изображения различных функций мы используем систему координат, начертив перпендикулярные друг другу оси x и y (Рис. 6-3).

Ты, Эрина, часто их используешь!

Эту систему координат можно рассматривать так: ось x — это функция постоянной величины $y = 0$, а ось y — это функция постоянной величины $x = 0$. Другими словами, основные графики в координатной системе xy — это графики функций $x = 0$ и $y = 0$, ортогональные друг другу.

Ясно. Но это же само собой разумеется, что они пересекаются под прямым углом.

Сейчас я буду долго объяснять само собой разумеющиеся вещи, поэтому послушайте, пожалуйста, внимательно.
Ось x ($y = 0$) нельзя выразить через ось y ($x = 0$), сколько её не умножай. На какое число не умножай 0, он всегда останется нулём, поэтому произвольное значение на оси x (например, $x = 5$) нельзя выразить через $x = 0$ (ось y). То же самое справедливо и для оси y. Таким образом, «ортогональность» означает «невозможность выразить одно через другое». Обычно мы, не задумываясь, рисуем оси перпендикулярно, но это является естественным результатом того, что две координаты плоскости x и y нельзя выразить одну через другую.

Если я правильно поняла, ортогональность осей x и y — это результат того, что их и изображают ортогональными, и это позволяет задавать координаты различных точек, да?

Итак, держа это в голове, вернёмся к синусам и косинусам… Например, функцию $y = \cos x$ нельзя выразить изменением b в функции $y = b \sin x$.

Но в таком случае это верно и для функции $y = \sin x$?!

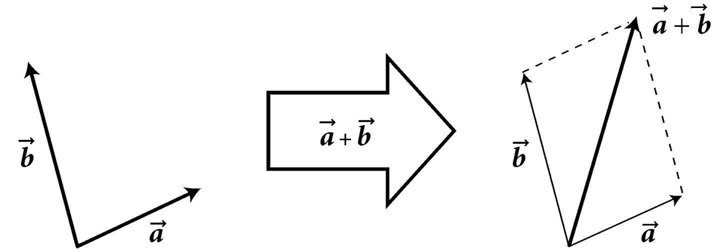
Да, это так. Функцию $y = \sin x$ нельзя выразить через $a \cos x$, как не изменяй a. Кроме того, немного забегая вперёд, функцию $y = \sin(3x)$ тоже нельзя выразить через $\sin x$. Это потому, что функции $y = \sin x$ и $y = \sin(3x)$ — ортогональны. В случае с осями x и y, ортогональны друг другу только эти две оси, однако $\sin x$, $\sin(2x)$, $\sin(3x)$ и так далее — все они взаимно ортогональные функции. Функции косинуса с отличающимися периодами: $\cos x$, $\cos(2x)$, $\cos(3x)$ и так далее, тоже взаимно ортогональны. Кроме того, ортогональны и функции $\cos(nx)$ и $\sin(nx)$, даже если их периоды одинаковы.

Все взаимно ортогональные тригонометрические функции, которые нельзя выразить через другие тригонометрические функции, очень важны в качестве «кирпичиков», из которых формируют различные волны (функции).

Итак, вернёмся к нашему разговору. В зависимости от амплитуд функций $y = b\sin x$ и $y = a\cos x$ (a и b), амплитуда синтезированной волны будет отличаться. Это видно, если представить комбинацию функций $y = b\sin x$ и $y = a\cos x$ в виде векторов, вращающихся по окружности.

Вектор — это когда рисуют стрелку?

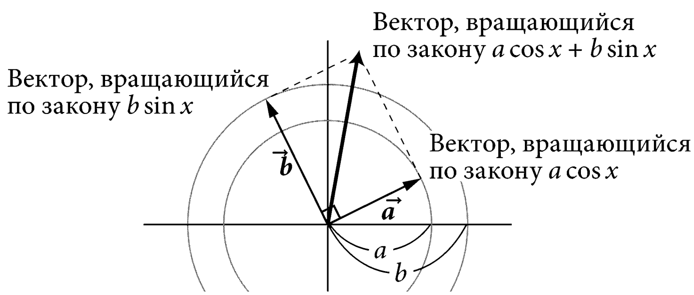
Да, ты права. Вектор — это, по простому говоря, физическая величина, которая характеризуется численным значением и направлением, например, такими величинами являются сила или скорость. Пусть у нас есть два вектора: $\vec{a}$ и $\vec{b}$. На основе $\vec{a}$ и $\vec{b}$ мы строим параллелограмм и находим его диагональ. Это и есть вектор — результат сложения двух исходных векторов (Рис. 6-4).



☐ Рис. 6-4. Сложение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Это было у нас в учебнике по физике!

Да, ведь векторы часто используются в мире физики.
Итак, мы рассматриваем функции $y = b\sin x$ и $y = a\cos x$ как векторы с длинами соответственно a и b, вращающиеся по окружности с постоянным сдвигом $\pi/2$ (90°). Так как функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ ортогональны, параллелограмм превращается в прямоугольник (Рис. 6-5).



☐ Рис. 6-5. Сложение двух вращающихся ортогональных векторов.

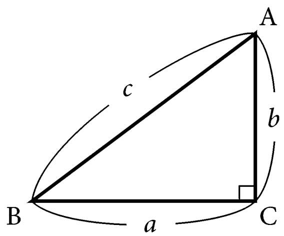
Ого! А ведь правда!

Таким образом, выражение в векторной форме позволяет определить численное значение (длину вектора) результирующей функции $a\cos x + b\sin x$.

…то есть мы можем узнать точную величину?

Да, можем! Вспомните теорему Пифагора.

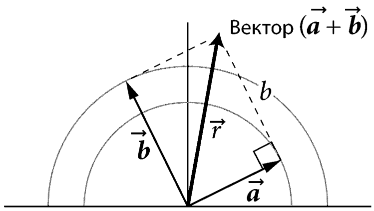
Да, теорема Пифагора, действительно…



$$a^2 + b^2 = c^2$$

...вот так она выглядела, да?

Применим теорему Пифагора (Рис. 6-6).



$a^2 + b^2 = r^2$

из этого уравнения находим

$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (r) > 0$

☐ Рис. 6-6. Применение теоремы Пифагора к синтезу векторов.

Синтезированный вектор ($\vec{a} + \vec{b}$) соответствует окружности радиуса r. Другими словами, верно соотношение

$$a^2 + b^2 = r^2.$$

Отсюда можно выразить r:

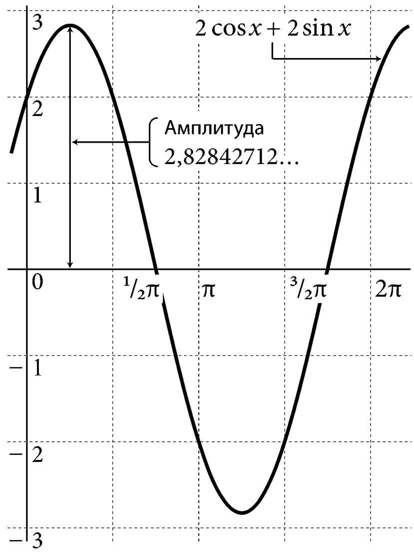
$$r = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Значит, амплитуда волны $y = a\cos x + b\sin x$ равна $\sqrt{a^2 + b^2}$?

Да, именно так.
Например, рассмотрим волну с коэффициентами $a = 2$ и $b = 2$. У нас получится:

$$r = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = 2{,}82842712\ldots$$

То есть, амплитуда волны ($2\cos x + 2\sin x$) равна 2,82842712… (Рис. 6-7).

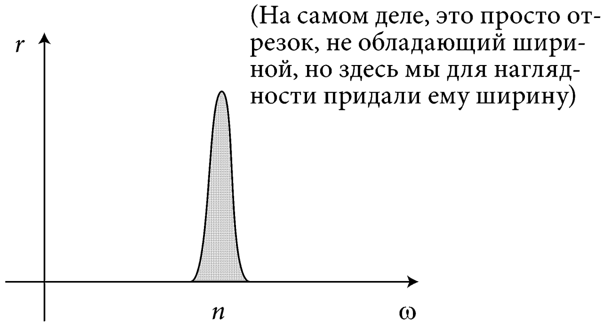


☐ Рис. 6-7. Амплитуда волны ($2\cos x + 2\sin x$).

Таким образом, комбинируя a и b, изменить период невозможно, но можно легко формировать амплитуду и фазу!

Да, формы волн с одинаковым периодом тоже могут быть разными…

Другими словами, при комбинации функций $y = \sin(nx)$ и $y = \cos(nx)$ меняется фаза, но не меняется период. При комбинации попарно $\sin x$ и $\cos x$, $\sin(2x)$ и $\cos(2x)$, $\sin(nx)$ и $\cos(nx)$ получатся волны с периодом 1, 2, n, соответственно. Этот период n взаимосвязан с ω (угловой частотой), о которой я уже вам рассказывала. Если скомбинировать его с амплитудой r, то у нас получится спектр (Рис. 6-8)!



☐ Рис. 6-8. Спектр волны $\sin(nx) + \cos(nx)$.

Значит ω можно рассматривать как «частоту»?!

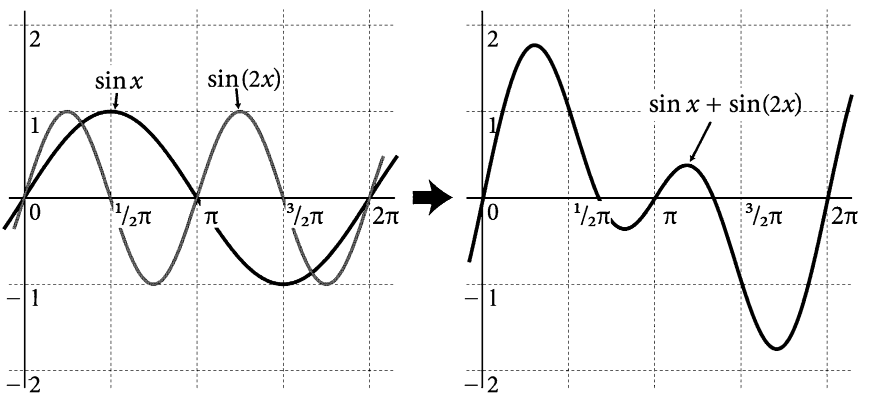
Да, именно так.

3. Синтез тригонометрических функций с разными периодами

На этот раз давайте сложим тригонометрические функции с разными периодами. Идея выражения функции комбинацией тригонометрических функций имеет отношение к последующему разговору о «преобразовании Фурье», но здесь мы для начала просто посмотрим график, используя компьютер и программу построения графиков.

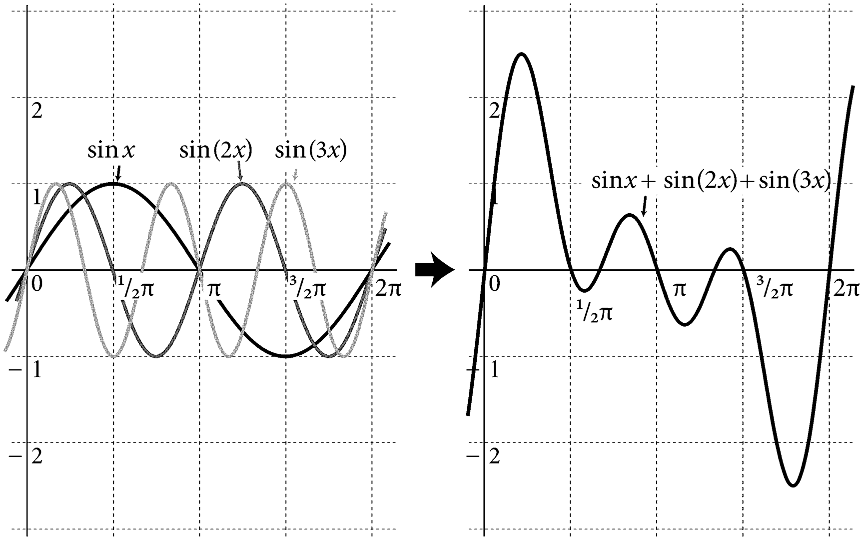
Давай, Эрина, показывай!

Начнём с функции $y = \sin x + \sin(2x)$ (Рис. 6-9).



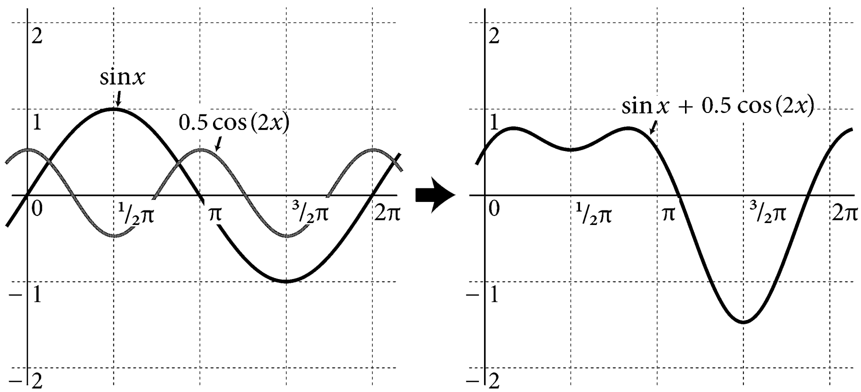
☐ Рис. 6-9. Графики функций $y = \sin x$ и $y = \sin(2x)$ (слева) и $y = \sin x + \sin(2x)$ (справа).

А вот посмотрите, как будет выглядеть график функции $y = \sin x + \sin(2x) + \sin(3x)$ (Рис. 6-10).



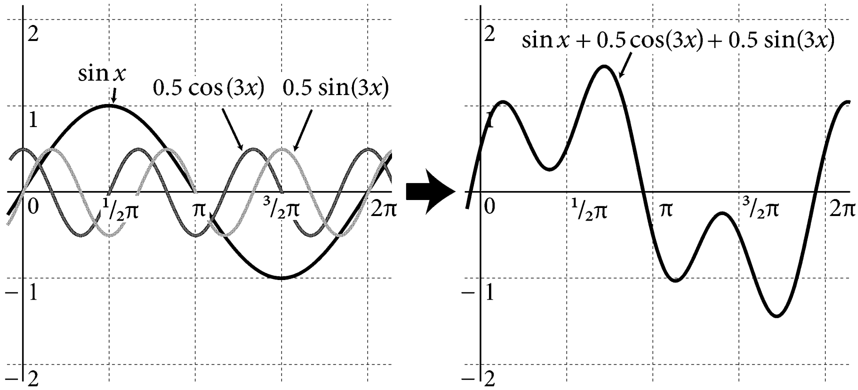
☐ Рис. 6-10. Графики функций $y = \sin x$, $y = \sin(2x)$ и $y = \sin(3x)$ (слева) и $y = \sin x + \sin(2x) + \sin(3x)$ (справа).

А как насчёт функции $y = \sin x + 0{,}5 \cos(2x)$ (Рис. 6-11)?



☐ Рис. 6-11. Графики функций $y = \sin x$ и $y = 0.5 \cos(2x)$ (слева) и $y = \sin x + 0.5 \cos(2x)$ (справа)

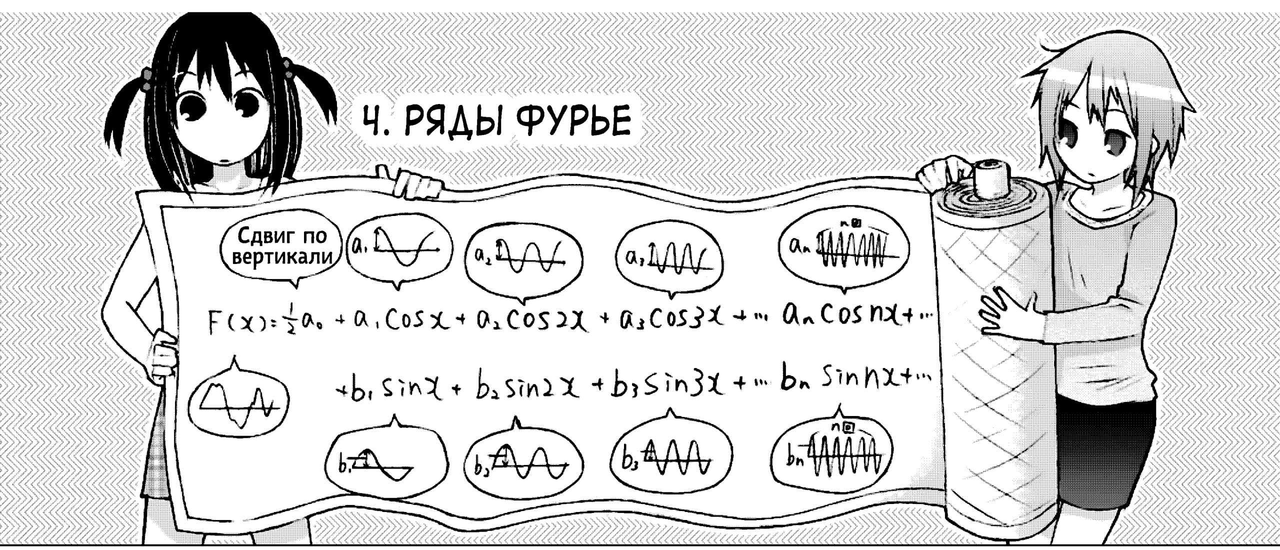
И напоследок посмотрим, как выглядит график функции
$y = \sin x + 0{,}5\cos(3x) + 0{,}5\sin(3x)$ (Рис. 6-12).



☐ Рис. 6-12. Графики функций $y = \sin x$, $y = 0.5\cos(3x)$ и $y = 0.5\sin(3x)$ (слева) и $y = \sin x + 0{,}5\cos(3x) + 0{,}5\sin(3x)$ (справа).

Комбинируя функции синусов и косинусов с различными амплитудами и периодами, можно создавать графики разнообразной формы!

4. РЯДЫ ФУРЬЕ



В последнем примере мы складывали до трёх различных функций синусов и косинусов с различными коэффициентами *a* и *b* и различными суффиксами *m* и *n*, однако если мы используем большее их количество, то сможем создавать и более сложные функции.

Да? Но чтобы суммировать много функций, без компьютера не обойтись, так ведь?

Действительно, компьютер повышает эффективность вычислений, но прежде всего важно понять «теорию». И эта теория называется «разложение в ряд Фурье» («Ряды Фурье»). Формула разложения в ряд Фурье выглядит так:

$$F(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1\cos x + a_2\cos(2x) + a_3\cos(3x) + \ldots + a_n\cos(nx) + \ldots$$
$$+ b_1\sin x + b_2\sin(2x) + b_3\sin(3x) + \ldots + b_n\sin(nx) + \ldots =$$
$$= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right).$$

Ого, есть даже формула?! Но выглядит она сложновато… Эти математические обозначения вызывают у меня дрожь в коленках!

Не надо так говорить. Лучше повнимательнее посмотрим на эту формулу.
Начну с объяснения её общего вида. Смысл этой формулы заключается в том, что функция $F(x)$ в левой части может быть синтезирована из функций косинусов и синусов в правой части. Естественно, что коэффициенты a_0, a_1, …a_n,… и b_1,…b_n,… будут зависеть от вида функции $F(x)$.
Здесь мы, не рассматривая связь a_0, a_1,…a_n,… и b_1,…b_n,… с функцией $F(x)$, подумаем о смысле этого синтеза. В начале формулы стоит свободный член $\frac{1}{2}a_0$, который задаёт вертикальный сдвиг всей волны, синтезированной последующими тригонометрическими функциями.

Это что-то вроде b в функции $y = ax + b$. А что означает знак Σ, появившийся на нижней строке?

Σ (сигма) — это математический знак, который обозначает «общую сумму», то есть все операции сложения верхнего выражения. Объясню правила использования знака Σ на простом примере (Рис. 6-13).

Общие правила использования знака «Σ»

Номер члена, на котором заканчивается суммирование

$$\sum_{n=1}^{5} n = \underbrace{1+2+3+4+5}$$

Увеличивая n от 1 до 5 каждый раз на 1, суммируем числа от 1 до 5

Это n указывает число слагаемых (от 1 до 5)

$n = 1$ указывает номер члена, с которого начинается суммирование

Например:

$$\sum_{n=1}^{3} x_n = x_1 + x_2 + x_3.$$

Например:

Последнее значение n равно ∞ (бесконечности), то есть суммирование продолжается бесконечно

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) = a_1 \cos x + a_2 \cos(2x) + a_3 \cos(3x) + \ldots + a_{100} \cos(100x) + a_{101} \cos(101x) + \ldots$$

Оба n увеличиваются одновременно

☐ Рис. 6-13. Описание знака Σ.

Обратите внимание, что n под знаком Σ входит как в коэффициенты перед функциями, определяющие амплитуды, так и в суффиксы (значения, определяющие периоды). То есть и те, и другие значения возрастают по порядку 1, 2, 3, 4…

Да? Удивительно!

Для разложения в ряд Фурье необходимо, чтобы синтезируемая функция $F(x)$ имела определённый период, то есть была периодической. Однако можно синтезировать волну и для непериодической функции, если разбить её на интервалы и считать, что они повторяются.

Понятно…

Теперь, когда вы поняли общий смысл, объясню поподробнее. Значения a_1, a_2, a_3,… a_n…, b_1, b_2, b_3,…b_n… называются «коэффициентами Фурье», и, задав их значения, можно определить форму волны $F(x)$. Ведь n определяет как a_n и b_n (амплитуды), так и $\sin(nx)$ и $\cos(nx)$ (период), поэтому мы можем однозначно указать, какая амплитуда к какому периоду относится. Кроме того, выбором a или b можно указать, к какой функции, синусу или косинусу, относится данный коэффициент. Таким образом, стоит только задать значения этих коэффициентов, и форма волны функции $F(x)$ определится автоматически и однозначно.

Это как на часах, задав положение «длинной стрелки» и «короткой стрелки», мы тем самым определим время!

Да, это довольно далёкий пример. Но он верен в том смысле, что заданием двух состояний определяется третье определённое состояние.

А как быть с секундной стрелкой?

Не придирайся к мелочам!

Теперь, когда я разъяснила вам общие понятия, давайте рассмотрим формирование конкретной волны.

Я хочу назвать это волномиксом!

Волномиксом?..

Потому что мы смешиваем волны!

Согласна. Давайте рассмотрим «волномикс» для случая $a_n\sin(nx)$, где n последовательно принимает значения 1, 2, 3, 4, и так до 40.

И ты, Эрина, туда же...

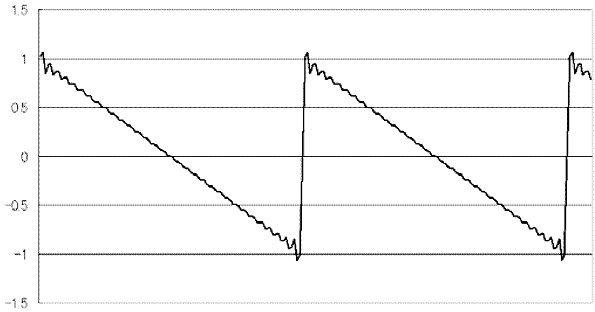
Коэффициенты, задающие амплитуду для каждого периода, то есть a_n, мы сделаем обратными n, то есть $a_n = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ и так далее. Это позволит увидеть довольно интересную форму волны.

Это сколько же нам придётся считать?!

Здесь мы используем компьютер. Какие-то специальные программы не нужны, всё можно рассчитать с помощью программы Excel!

Вот как! А я Excel использовала раньше только для создания таблиц.

Сейчас мы не будем рассматривать методы расчёта, посмотрим лишь на результат (Рис. 6-14).



☐ Рис. 6-14. Функция, синтезированная функциями sin(nx) в диапазоне n от 1 до 40.

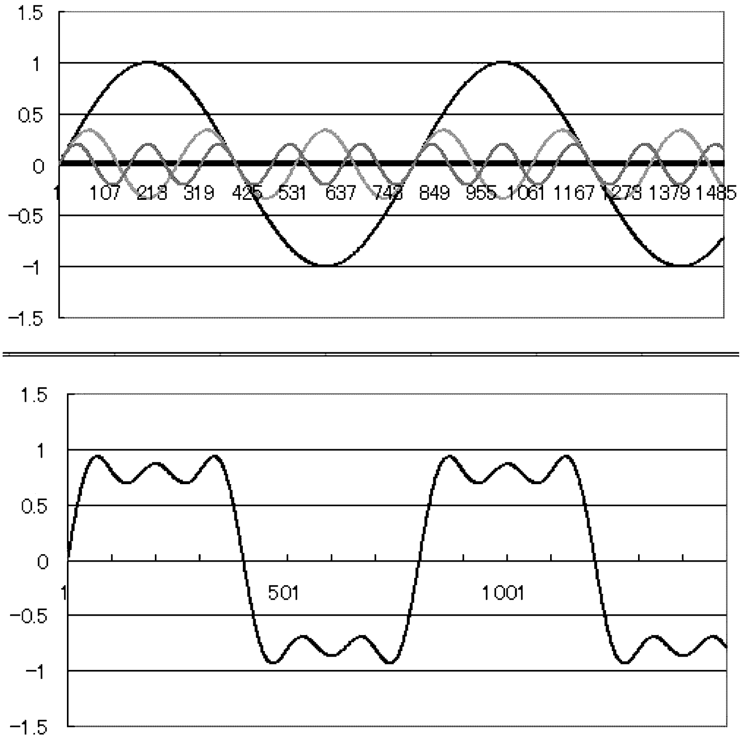
Ого! Какие-то зубья!

Прямо пила какая-то…

Да! Подобная форма волны так и называется — «пилообразная»!

Вот это да! Она совсем не похожа на те волны, которые мы видели раньше.

Давайте посмотрим ещё одну интересную форму волны. На этот раз просуммируем $a_n\sin(nx)$, где n — только нечётные числа. Для этого случая также примем, что a_n обратно n. Просуммировав до $n = 5$, получим форму волны, изображённую на Рис. 6-15.

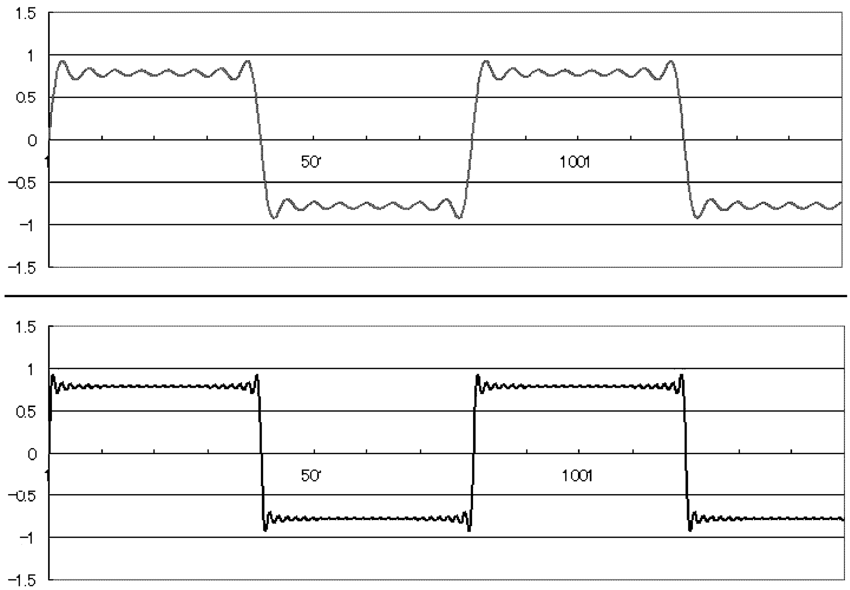


☐ Рис. 6-15. Результат суммирования функций $\frac{1}{n}\sin(nx)$ с нечётными n для $n = 5$.


Да, волна получилась, сильно отличающаяся от пилообразной…


Если устремить n к бесконечности (∞), то получится форма волны, называемая «прямоугольной».

Рассмотрим также случаи $n = 15$ и $n = 49$ (Рис. 6-16).



☐ Рис. 6-16. Результат суммирования функций $\frac{1}{n}\sin(nx)$ с нечётными n для $n = 15$ (вверху) и для $n = 49$ (внизу).

Колебания резко уменьшаются, и форма волны становится ближе к прямоугольной!

Путём синтеза функций синуса с разными периодами можно создавать и такую угловатую форму волны.

А мне кажется, что я уже где-то слышала про «пилообразную волну» и «прямоугольную волну»…

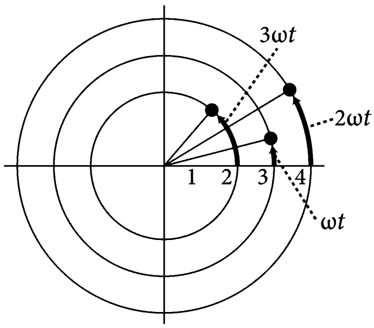
Наверное, в связи с твоими занятиями музыкой. Например, в блок эффектов бас-гитары входит так называемый «бас-синтезатор». Его назначение — намеренное изменение формы волны для получения синтезированного, то есть электронного, баса. Многие так называемые «электронные звуки» отличаются правильной формой волны, и в этом блоке звук бас-гитары может быть электрически приближен к «пилообразной» или «прямоугольной» волне.

Понятно…

Пилообразная волна даёт звук «с заострёнными краями», что соответствует её внешнему виду. По сравнению с ней прямоугольная волна звучит более сглаженно, мягко.

5. ФУНКЦИИ ВРЕМЕНИ И СПЕКТР ЧАСТОТ

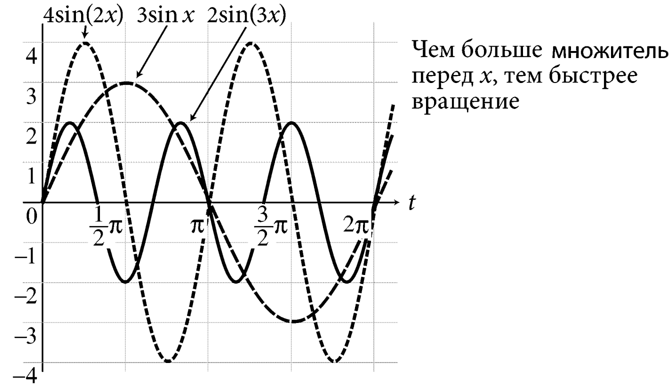
Припоминаю, что раньше я рисовала вам подобную схему (Рис. 6-17).



☐ Рис. 6-17. Три точки, вращающиеся каждая по своей окружности.

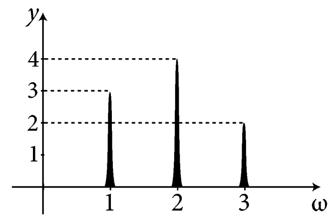
Да, это было, когда ты рассказывала нам о тригонометрических функциях. Точки вращаются каждая со своей скоростью по окружностям с радиусами 1, 2 и 3.

Точно! Когда мы изобразили это на графике как функцию времени, у нас получилась функция синуса (Рис. 6-18).



☐ Рис. 6-18. Графики функций времени, отражающие вращение точек, показанных на Рис. 6-17.

Функции, изменяющиеся во времени, называют функциями времени, а функции, повторяющие свои значения через определённые интервалы времени, — периодическими функциями.
Когда мы перестроили графики, отложив ω по горизонтальной оси, мы получили спектр. Так был описан порядок построения спектра на основе функций времени (Рис. 6-19).

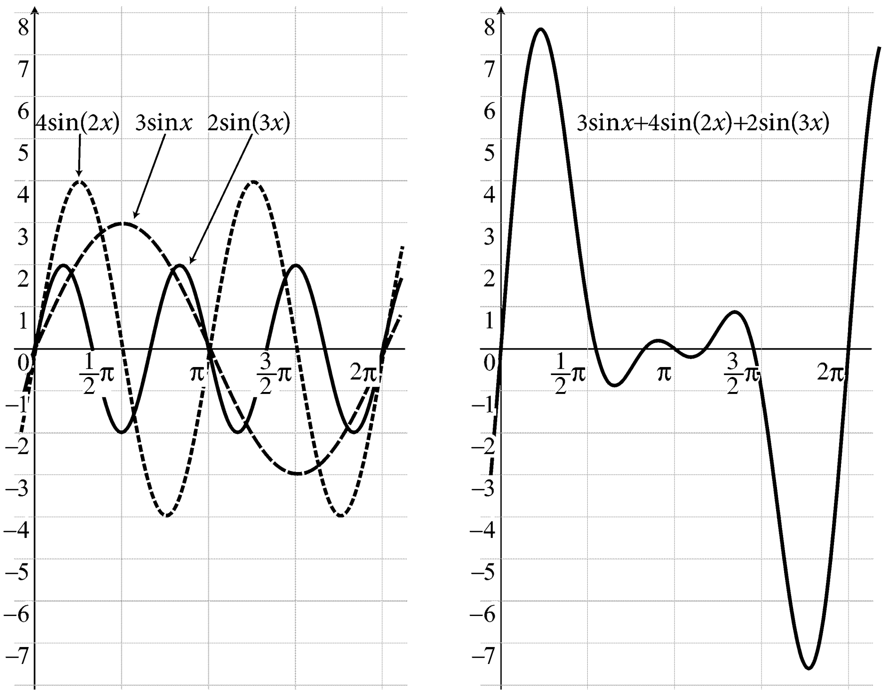


☐ Рис. 6-19. Спектр, построенный на основе данных Рис. 6-17.

Да, это было так. Как давно всё это было…

Фумика…

Извини, что отвлекаю тебя от приятных воспоминаний, но сейчас мы перейдём к самому главному. Мы попробуем на самом деле синтезировать волну!
Точка, вращающаяся по окружности радиусом 3 с угловой скоростью ω, выражается функцией $y = 3\sin x$. Таким же образом, точка с радиусом вращения 4 и угловой скоростью 2ω выражается функцией $y = 4\sin(2x)$. Точка с радиусом вращения 2 и угловой скоростью 3ω выражается функцией $y = 2\sin(3x)$. Результат сложения этих функций показан на Рис. 6-20.



☐ Рис. 6-20. Графики функций $y = 3\sin x$, $y = 4\sin(2x)$ и $y = 2\sin(3x)$ (слева) и функции $y = 3\sin x + 4\sin(2x) + 2\sin(3x)$ (справа).

Как я и думала, получилась сложная волна.

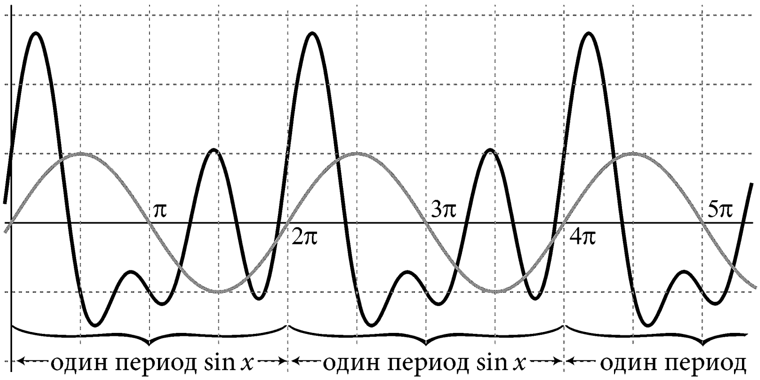
«Преобразование Фурье» — это когда из функции, синтезированной путём сложения функций синуса и косинуса, вычисляют частоты и амплитуды исходных функций синуса и косинуса. Однако преобразование Фурье применимо лишь к функциям, форма волны которых каким-либо образом повторяется с постоянным периодом.

Да, ты это говорила… Но почему это так?

Давайте поразмышляем о причине. До этого мы, комбинируя тригонометрические функции (с разными периодами и амплитудами) получали различные волны, форма которых повторялась с определённым периодом. То есть функции, синтезированные с помощью рядов Фурье, являются периодическими.

Угу…

Например, сложение функций $\sin(2x)$, $\sin(3x)$ и $\cos x$ даёт периодическую функцию, форма волны которой повторяется с периодом основной функции, то есть $y = \sin x$ (Рис. 6-21).

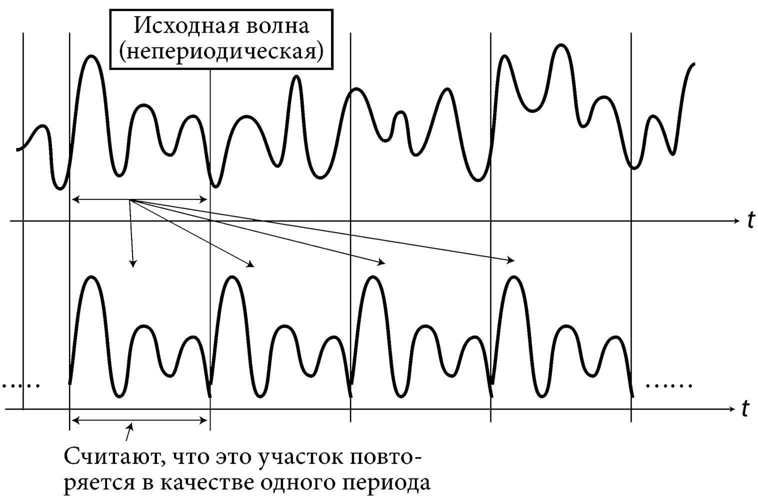


☐ Рис. 6-21. Функция $y = \sin(2x) + \sin(3x) + \cos x$ с точки зрения одного периода $\sin x$.

«Синтез с помощью рядов Фурье» и «преобразование Фурье» — это две стороны одной медали: если функция, синтезированная с помощью ряда Фурье, является периодической, то исходная функция преобразования Фурье тоже должна быть периодической. Так как преобразование Фурье — это «поиск» функций синусов и косинусов, составляющих данную функцию, необходимо как-то выделить в ней период, который будет равен самому протяжённому периоду образующих её функций синусов и косинусов.

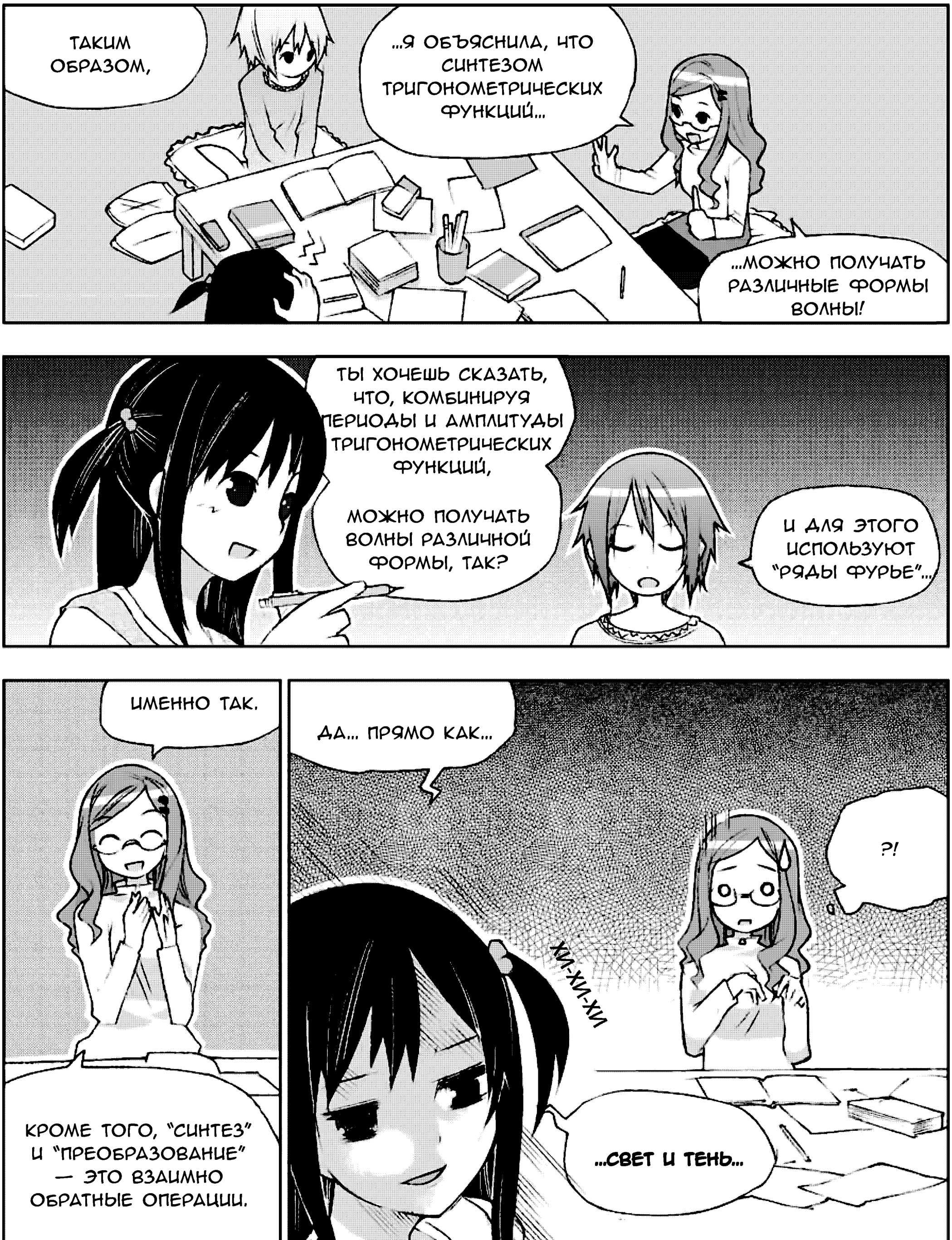
О, наконец-то я поняла причину!

В природе есть много волн, не являющихся периодическими. Такие волны делят на короткие интервалы и считают их повторяющимися, что позволяет рассматривать волну как периодическое явление, которое можно исследовать с помощью преобразования Фурье (Рис. 6-22).



☐ Рис. 6-22. Сложная волна как периодическое явление.

6. НА ПОРОГЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ




ПОЛУЧЕНИЕ ФУНКЦИИ ПУТЁМ КОМБИНАЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ДРУГИХ ФУНКЦИЙ НАЗЫВАЕТСЯ
"СИНТЕЗОМ".
COMPUTER
А ПОИСК ФУНКЦИЙ, СОСТАВЛЯЮЩИХ ИСХОДНУЮ ФУНКЦИЮ, НАЗЫВАЕТСЯ
"ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ"!
OK COMPUTER
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И РЯДЫ ФУРЬЕ ГЛУБОКО ВЗАИМОСВЯЗАНЫ...
ДА, ПО ПОВОДУ ГЛУБОКОЙ ВЗАИМОСВЯЗИ...
ВОТ ТЫ, ФУМИКА, СОЧИНЯЕШЬ МЕЛОДИИ, И НА ГИТАРЕ ИГРАЕШЬ ХОРОШО...
ПРАВДА?
А ЭТО ЗНАЧИТ,
ЧТО У ТЕБЯ ЕСТЬ И МУЗЫКАЛЬНЫЕ ЗНАНИЯ,
И СПОСОБНОСТЬ ЧУВСТВОВАТЬ РИТМ И ТОН...


Так как всё это глубоко взаимосвязано с певческими способностями, значит ты должна, по идее, неплохо петь!
Ох...
Хи-хи-хи...
То есть,
ты хочешь,
чтобы я спела?
Ой!
...Нет, я совсем не это имела в виду!
Да, Эрина... слово не воробей...
UTER

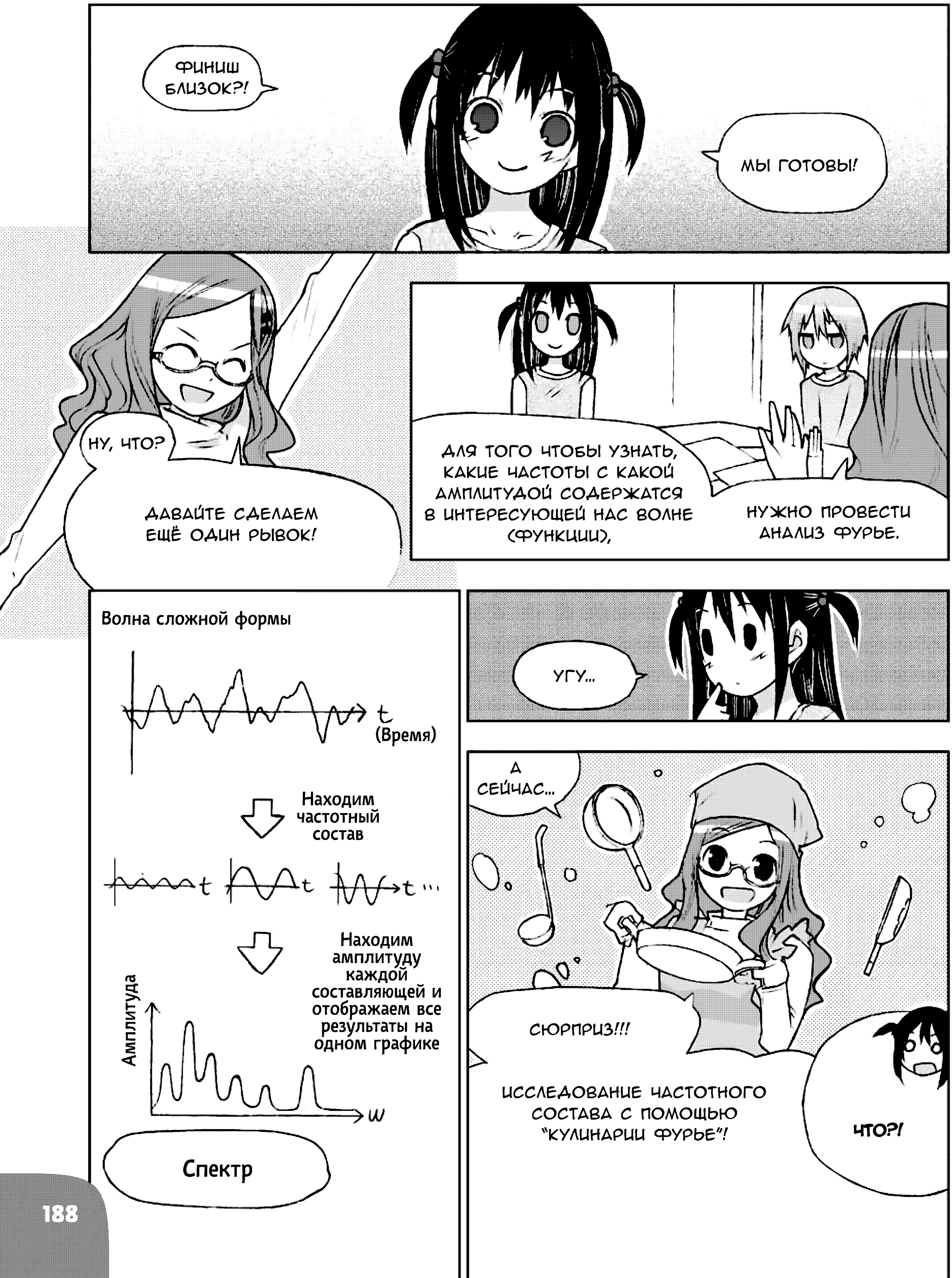

ХВАТЬ
ТАДАМ!
ХРУП-ХРУП-ХРУП-ХРУП
ЗВЯК
БАХ-БУХ-ТУДУХ
БАМ-ТАДАМ
ИСПОЛЬЗУЯ ИДЕЮ, ОБРАТНУЮ "РЯДАМ ФУРЬЕ", МОЖНО АНАЛИЗИРОВАТЬ ФОРМУ ВОЛНЫ С ПОМОЩЬЮ "ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ".
А-А-А!
И ЭТОТ ТА-РА-РАМ НАЗЫВАЕТСЯ "АНАЛИЗОМ ФУРЬЕ"?!

Глава 7

Анализ Фурье или поверим алгеброй гармонию

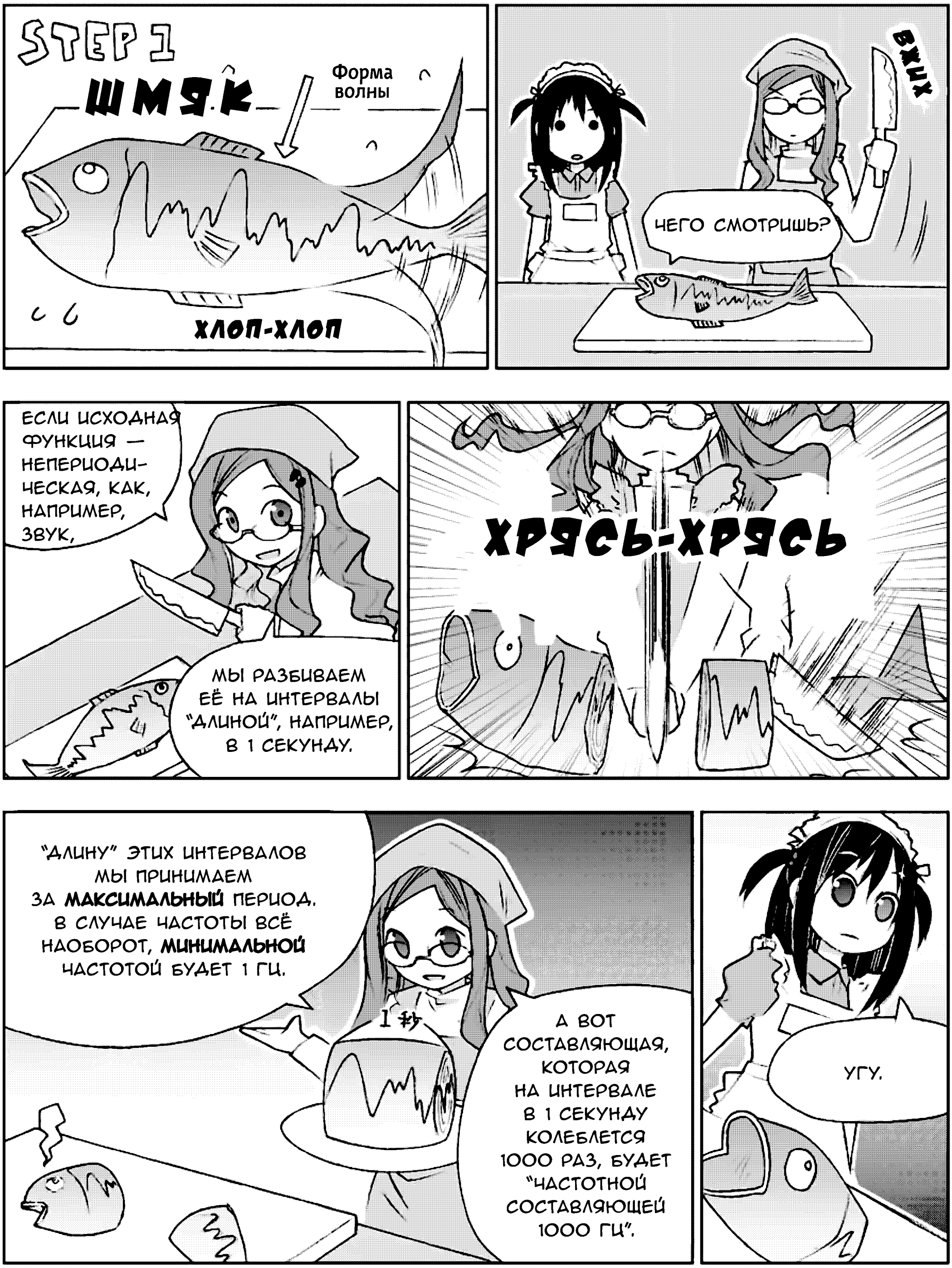

1. ПОРЯДОК ИССЛЕДОВАНИЯ ЧАСТОТНОГО СОСТАВА
ОХ...
ОХ...
ЭЙ, ФУМИКА! В ЧЁМ ДЕЛО?
НЕУЖЕЛИ Я ТАК ПЛОХО ПОЮ?
НУ...
Я ДУМАЮ, ЧТО У ТЕБЯ ОЧЕНЬ СВОЕОБРАЗНЫЙ ГОЛОС.
АГА,
КАК И У ВОРОНЫ...
НО ПОЧЕМУ!
БАХ!
ТРАМ-ТАДАМ
ШМЯК

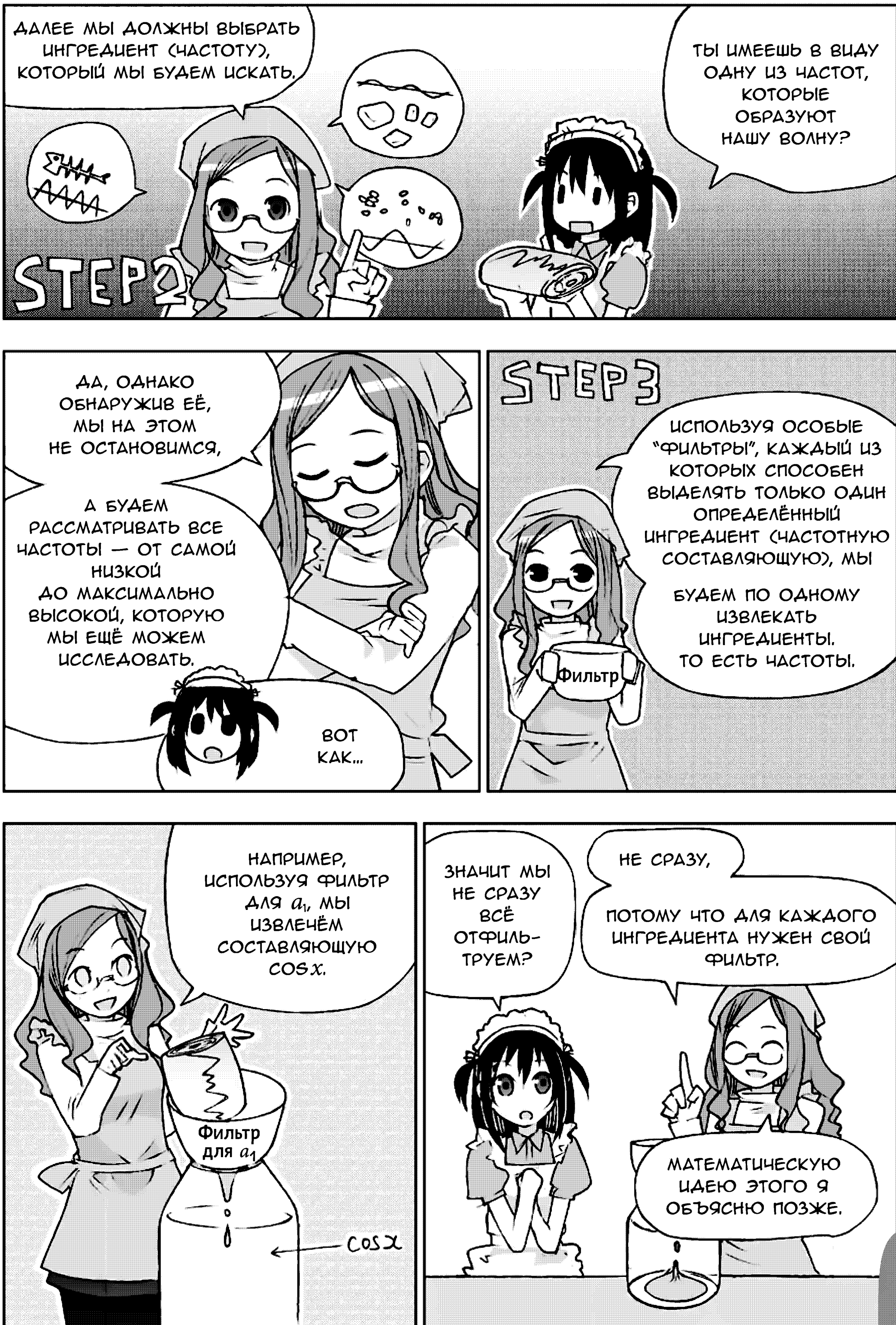

БОЛЬНО...
ТЫ В ПОРЯДКЕ?..
...И ОБИДНО.
Преобразование Фурье с помощью Excel
ДА, А ВЕДЬ МЫ...
...ТАК МНОГО ВСЕГО ИЗУЧИЛИ...
НЕТ, ПРАВДА,
МЫ ДЕЙСТВИТЕЛЬНО ХОРОШО ПОТРУДИЛИСЬ!
И НАКОНЕЦ-ТО ДОБРАЛИСЬ ДО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ!



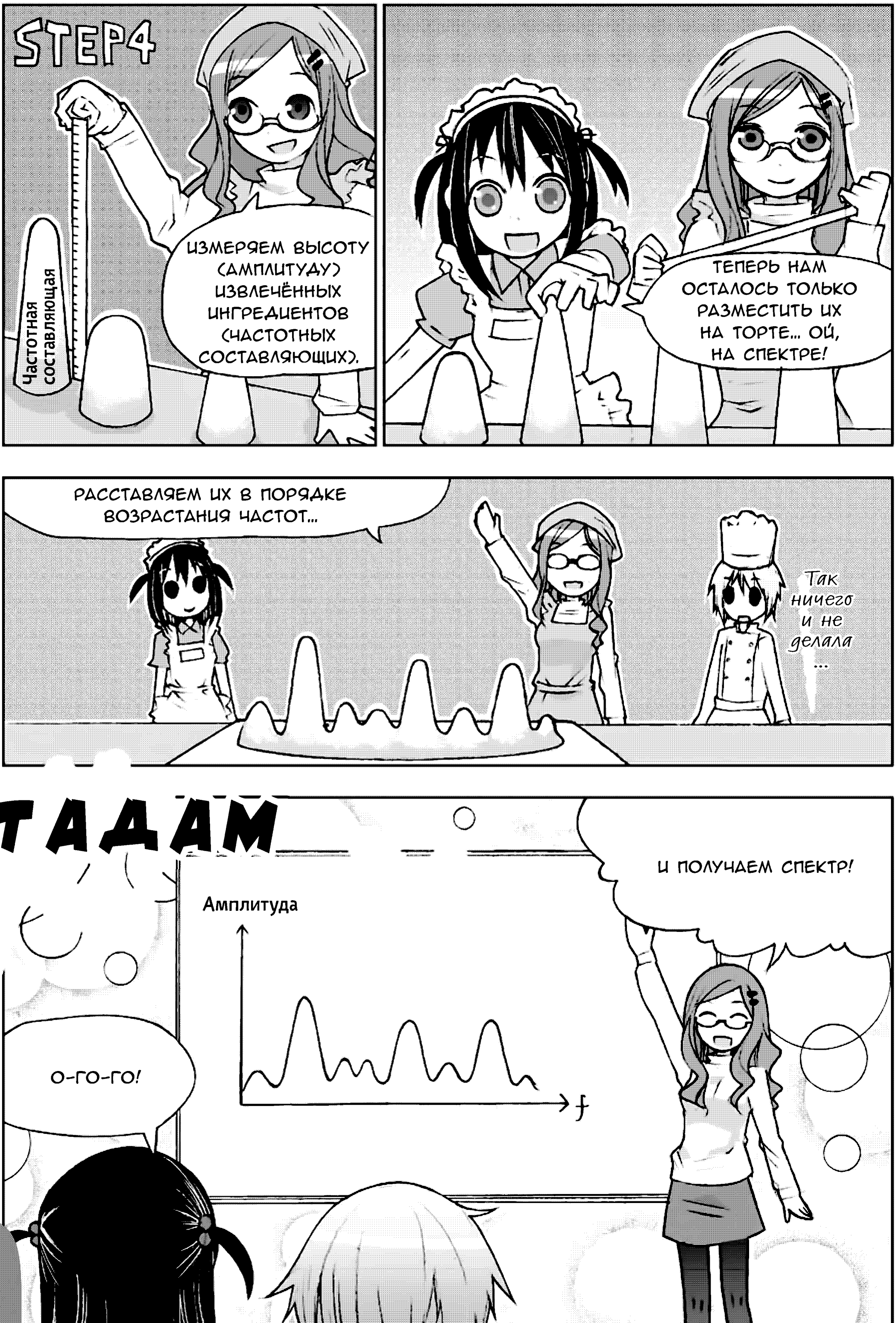
Финиш близок?!
Мы готовы!
Ну, что?
Давайте сделаем ещё один рывок!
Для того чтобы узнать, какие частоты с какой амплитудой содержатся в интересующей нас волне (функции),
нужно провести анализ Фурье.
Волна сложной формы
t (Время)
Находим частотный состав
t
t
t ...
Находим амплитуду каждой составляющей и отображаем все результаты на одном графике
Амплитуда
ω
Спектр
Угу...
А сейчас...
Сюрприз!!!
Исследование частотного состава с помощью "кулинарии Фурье"!
Что?!

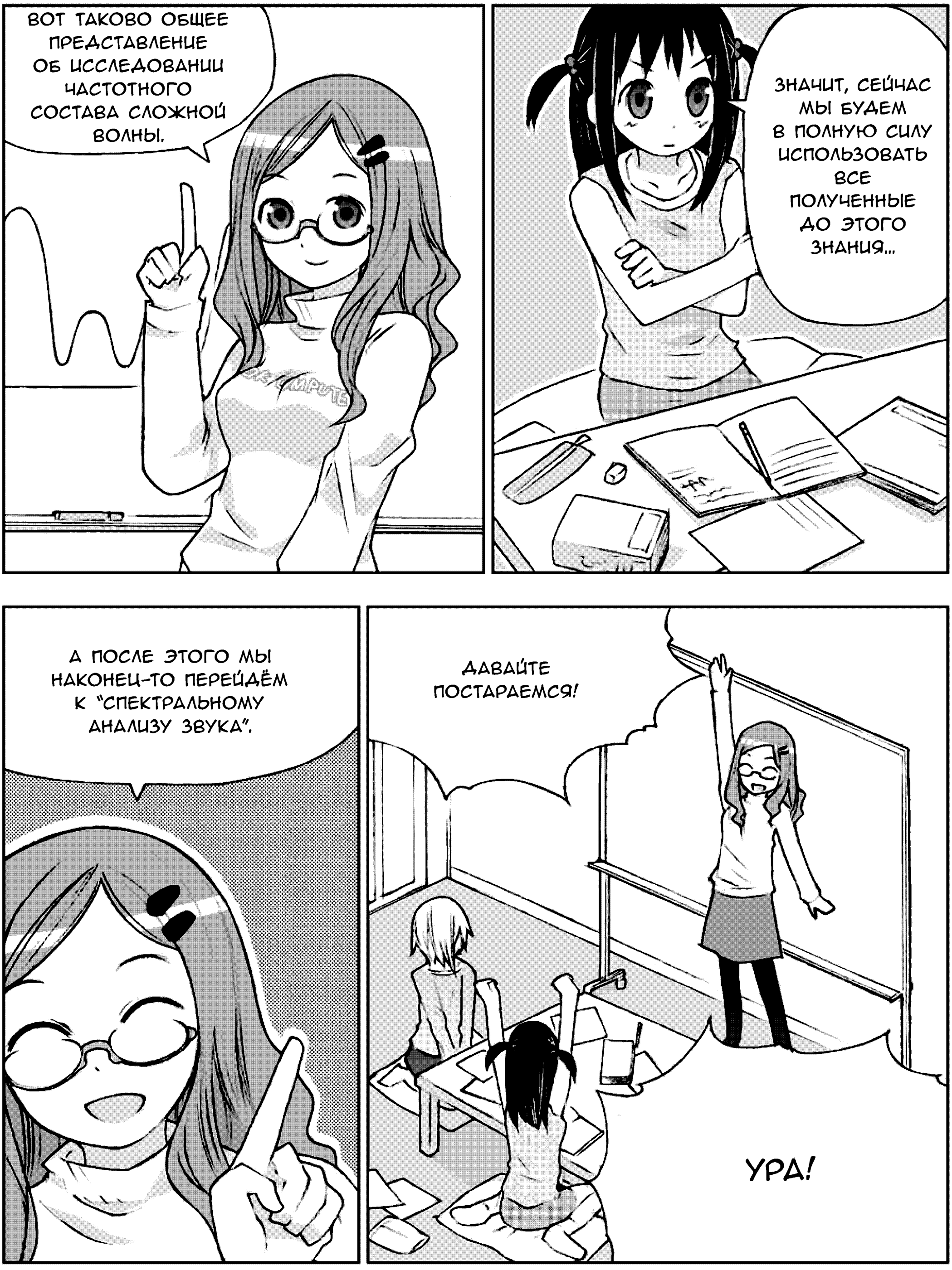

ТАДАМ
КУЛИНАРИЯ ФУРЬЕ
КАК?!
ХЛОП
ХЛОП
...
ХЛОП
КУЛИНАРИЯ
ДИН-ДОН
ДИН-ДОН
АХ!
ОБЫЧНО БЕРУТ НЕСКОЛЬКО ИНГРЕДИЕНТОВ И ГОТОВЯТ ИЗ НИХ БЛЮДО,
НО В КУЛИНАРИИ ФУРЬЕ МЫ БУДЕМ ПРОВЕРЯТЬ, ИЗ КАКИХ ИНГРЕДИЕНТОВ СОСТОИТ БЛЮДО, И ПОДАВАТЬ ЕГО В ВИДЕ ТОРТА... ОЙ, В ВИДЕ СПЕКТРА.
ЗНАЧИТ, ЭТО БУДЕТ "КУЛИНАРИЯ" НАОБОРОТ!
ЗДЕСЬ ПОД "БЛЮДОМ" ПОДРАЗУМЕВАЕТСЯ "ВОЛНА".
СНАЧАЛА МЫ РАЗБИВАЕМ СЛОЖНУЮ ВОЛНУ НА УЧАСТКИ, ЧТОБЫ РАССМАТРИВАТЬ ИХ КАК ПЕРИОДИЧЕСКУЮ ФУНКЦИЮ.


STEP 1
ШМЯК
Форма волны
ХЛОП-ХЛОП
ВЖИХ
ЧЕГО СМОТРИШЬ?
ЕСЛИ ИСХОДНАЯ ФУНКЦИЯ — НЕПЕРИОДИЧЕСКАЯ, КАК, НАПРИМЕР, ЗВУК,
МЫ РАЗБИВАЕМ ЕЁ НА ИНТЕРВАЛЫ "ДЛИНОЙ", НАПРИМЕР, В 1 СЕКУНДУ.
ХРЯСЬ-ХРЯСЬ
"ДЛИНУ" ЭТИХ ИНТЕРВАЛОВ МЫ ПРИНИМАЕМ ЗА **МАКСИМАЛЬНЫЙ** ПЕРИОД. В СЛУЧАЕ ЧАСТОТЫ ВСЁ НАОБОРОТ, **МИНИМАЛЬНОЙ** ЧАСТОТОЙ БУДЕТ 1 ГЦ.
А ВОТ СОСТАВЛЯЮЩАЯ, КОТОРАЯ НА ИНТЕРВАЛЕ В 1 СЕКУНДУ КОЛЕБЛЕТСЯ 1000 РАЗ, БУДЕТ "ЧАСТОТНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ 1000 ГЦ".
УГУ.



Далее мы должны выбрать ингредиент (частоту), который мы будем искать.
STEP2
Ты имеешь в виду одну из частот, которые образуют нашу волну?
Да, однако обнаружив её, мы на этом не остановимся,
а будем рассматривать все частоты — от самой низкой до максимально высокой, которую мы ещё можем исследовать.
Вот как...
STEP3
Используя особые "фильтры", каждый из которых способен выделять только один определённый ингредиент (частотную составляющую), мы
будем по одному извлекать ингредиенты. То есть частоты.
Фильтр
Например, используя фильтр для a_1, мы извлечём составляющую $\cos x$.
Фильтр для a_1
$\cos x$
Значит мы не сразу всё отфильтруем?
Не сразу,
потому что для каждого ингредиента нужен свой фильтр.
Математическую идею этого я объясню позже.


STEP4
Частотная составляющая
Измеряем высоту (амплитуду) извлечённых ингредиентов (частотных составляющих).
Теперь нам осталось только разместить их на торте... ой, на спектре!
Расставляем их в порядке возрастания частот...
Так ничего и не делала ...
ТАДАМ
И получаем спектр!
Амплитуда
f
О-го-го!


Вот таково общее представление об исследовании частотного состава сложной волны.
Значит, сейчас мы будем в полную силу использовать все полученные до этого знания...
А после этого мы наконец-то перейдём к "спектральному анализу звука".
Давайте постараемся!
Ура!

Вспомним здесь про «ряд Фурье». Он выглядел вот так:

$$F(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1\cos x + a_2\cos(2x) + a_3\cos(3x) + \ldots + a_n\cos(nx) + \ldots$$
$$+ b_1\sin x + b_2\sin(2x) + b_3\sin(3x) + \ldots + b_n\sin(nx) + \ldots =$$
$$= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right).$$

Если функцию $F(x)$ используют для анализа процессов, зависящих от времени t, то она обозначается как $F(t)$. Однако здесь мы, рассматривая общий случай, будем обозначать её $F(x)$.

Да, крутая формула, как на неё не взгляни. Однако я горжусь собой за то, что могу её понять.

Здесь множитель n, стоящий перед x в членах $\cos(nx)$ и $\sin(nx)$, соответствует «частотам», а коэффициенты, определяющие амплитуды синусов и косинусов — это a_n и b_n, помните? Эти значения a_0, a_n, b_n я назвала коэффициентами Фурье. Целью трех этапов, о которых я только что рассказывала в «кулинарии Фурье», было определение этих коэффициентов.

А a_0 — это тоже коэффициент Фурье?

Да, конечно. Как мы уже говорили, a_0 определяет вертикальный сдвиг всей волны.

Ряд Фурье, преобразование Фурье, так ещё и коэффициенты Фурье. Как всё запутано!

А в довершение давайте поговорим ещё и о «разложении Фурье»!

Ох!

Поиск по исследуемой волне $F(x)$ коэффициентов ряда Фурье a_0, a_n, b_n называется «вычислением коэффициентов Фурье». Эта операция, другими словами, соответствует «фильтрам», о которых я говорила в «кулинарии Фурье».

Да, я помню, для каждой частотной составляющей нужен свой фильтр.

Другими словами, фильтр устроен так, чтобы из разнообразных частотных составляющих извлекать только одну.

Да? Но как это сделать?

Здесь нам пригодится понятие «ортогональности функций»! Помните, чему равен определённый интеграл от произведения ортогональных функций?

Кажется, нулю.

Да! Он равен 0. Другими словами, он просто исчезает. Кроме того, члены $\sin(nx)$ и $\cos(nx)$ не ортогональны сами себе, поэтому определённый интеграл от квадрата этих членов не равен нулю, помните? Извлечь частотные составляющие можно, используя это свойство ортогональности!

Вот как! И что мы для этого должны сделать?

Во-первых, рассмотрим коэффициенты Фурье a_n. Если мы хотим, чтобы остался только $a_n\cos(nx)$, надо умножить всю функцию $F(x)$ на $\cos(nx)$ и найти определённый интеграл от произведения! При этом останется только одна функция, а для всех остальных результат интегрирования (площадь) из-за ортогональности будет равен 0, то есть они исчезнут.

И этой единственной оставшейся функцией будет $a_n\cos(nx)$, да?!

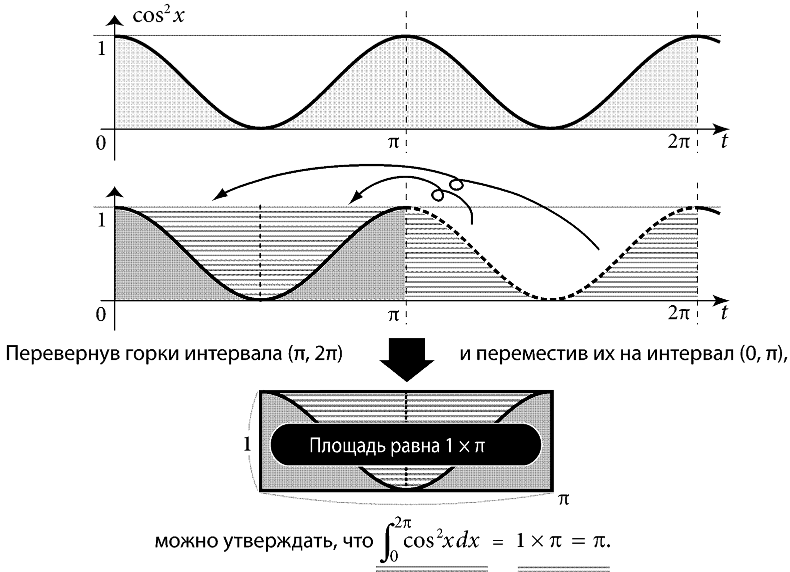
Вот именно! Как вы уже знаете из рассказа об ортогональности функций, функции косинуса, у которых одинаковый коэффициент n, не ортогональны друг другу. То же самое верно и для произведения $\sin x \times \sin x$, то есть для $\sin^2 x$:

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx)\times\sin(nx)dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(1-\cos(2nx)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2n}\sin(2nx)\right]_0^{2\pi} = \pi.$$

Определённый интеграл оказался равным π.

Мы видели также, что определённый интеграл от произведения $\cos x \times \cos x$, то есть от $\cos^2 x$, тоже равен π. Это иллюстрирует графическая схема, показанная на Рис. 7-1.



☐ Рис. 7-1. Графическое вычисление определённого интеграла от функции $y = \cos^2 x$.

Ого! Как всё легко объяснить с помощью прямоугольника!

Мы ищем a_n, не так ли? Для $\cos^2 x$ коэффициент a_n равен 1, поэтому у нас получилось, что определённый интеграл равен

$$1 \times \pi = \pi.$$

С другой стороны, если мы ищем a_n, то достаточно всего лишь взять определённый интеграл, равный площади, и разделить его на π!

Здорово! «Прямо как простыня с глаз»!

Какая ещё простыня? Правильно говорить «прямо как пелена с глаз!».

Так… Чтобы представить a_n в виде формулы, нужно поделить интеграл от $\cos(nx)$ на π, а это то же самое, что умножение на $\frac{1}{\pi}$, поэтому получится следующее:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x)\cos(nx)dx.$$

Для коэффициентов b_n при $\sin(nx)$ всё будет точно так же:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\sin(nx)dx.$$

Это — «коэффициенты Фурье»!

А как быть с a_0?

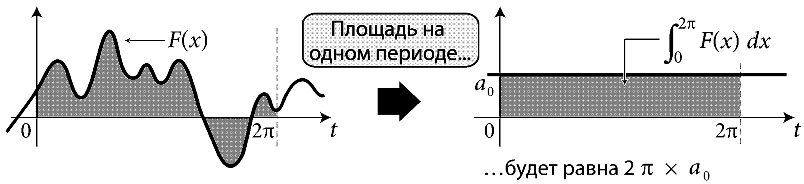
Давайте теперь рассмотрим a_0.
Даже сложная волна представляет собой набор функций синуса и косинуса. А площадь под кривой на длине периода как для синуса, так и для косинуса равна 0, не так ли?

Угу.

Другими словами, если найти площадь для сложной волны, то она почти вся будет «съедена» горками и впадинами. Однако некоторая часть площади останется.

Я догадалась! Это и будет a_0, да!

Правильно! Графически это выглядит вот так (Рис. 7-2).



□ Рис. 7-2. Результат интегрирования сложной волны $F(x)$.

Да, удивительно, что площадь сложной волны выражается всего лишь как $2\pi \times a_0$. Значит можно найти a_0, просто разделив её на 2π?

Да, это так. Делим на 2π, то есть умножаем на $^1/_{2\pi}$. Поэтому получится:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x)dx.$$

Здесь я хочу поразмышлять о смысле a_0.

Да? В каком смысле?

a_0 — это тоже a, то есть коэффициент Фурье при $\cos(nx)$, когда $n = 0$.

А, вот как!

Поэтому, для a_0 тоже можно использовать общее выражение:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x)dx.$$

В самом деле?!

Конечно. Ведь если в выражение

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x)\cos(nx)dx.$$

подставить значение cos0, соответсвующее $n = 0$, то мы получим удвоенное значение: $2a_0$.

Так вот в чём смысл этой $\frac{1}{2}$!

Если подробнее, формула ряда Фурье на самом деле выглядит вот так:

$$F(x) = \underbrace{a_0\cos(0x)}_{\text{для } n=0} + \underbrace{a_1\cos(1x)}_{\text{для } n=1} + \underbrace{a_2\cos(2x)}_{\text{для } n=2} + \dots$$

$$+ \underbrace{b_0\sin(0x)}_{\text{для } n=0} + \underbrace{b_1\sin(1x)}_{\text{для } n=1} + \underbrace{b_2\sin(2x)}_{\text{для } n=2} + \dots .$$

Однако, так как $\cos(0x) = \cos 0 = 1$, $\sin(0x) = \sin 0 = 0$, то её переписывают так:

$$F(x) = a_0 + a_1\cos x + a_2\cos(2x) + \dots$$

$$+ b_1\sin x + b_2\sin(2x) + \dots .$$

А где же $\frac{1}{2}$?

Следовательно, коэффициенты a_n можно выразить так:

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \underbrace{F(x)dx} \\[2ex] a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} F(x)\cos(nx)dx. \end{cases}$$

На самом деле считается, что сюда в качестве множителя входит $\cos(0x) = 1$

Однако $^1/_{2\pi}$ подгоняют под $\frac{1}{\pi}$, поэтому для $n = 0$ коэффициент Фурье записывается как $\frac{1}{2}a_0$.

Понятно.

Таким образом, мы получаем коэффициенты Фурье трёх типов:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x)\cos(nx)dx;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x)\sin(nx)dx;$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x)\,dx.$$

В зависимости от варианта написания ряда Фурье, $\frac{1}{2}$ может как включаться в a_0, так и писаться отдельно.

Значит, теперь мы собрали их всех вместе!

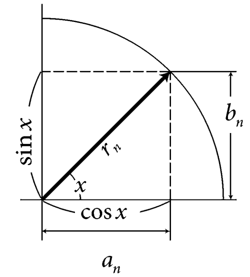
Итак, мы освоили «коэффициенты Фурье», то есть прошли третий этап «кулинарии Фурье». Теперь рассмотрим четвёртый этап.

На четвёртом этапе исследуют амплитуды частотных составляющих, да?

Как мы уже видели, каждая частотная составляющая содержит одну функцию $\sin(nx)$ и одну функцию $\cos(nx)$. И соответствующие коэффициенты Фурье обозначаются как b_n и a_n.
Однако, исследуя спектр, необходимо рассматривать не коэффициенты каждой частотной составляющей, а её амплитуду.

Амплитуда частотной составляющей?

Графически её изображают, как на Рис. 7-3.



☐ Рис. 7-3. Графическое выражение амплитуды частотной составляющей.

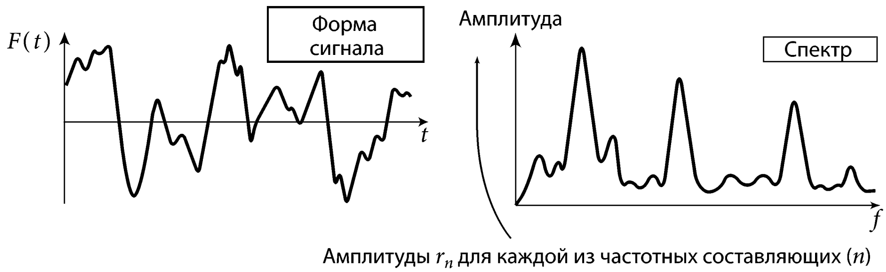
Высота треугольника соответствует коэффициенту b_n, вычисленному из функции $\sin x$, а его основание — коэффициенту a_n, вычисленному из функции $\cos x$, так?

А гипотенуза этого треугольника — это и есть «амплитуда» частотной составляющей. Согласно теореме Пифагора, она вычисляется по формуле:

$$r_n = \sqrt{a_n^{\ 2} + b_n^{\ 2}} \qquad (r_n > 0).$$

Теперь мы освоили и четвёртый этап!

И наконец, пятый этап. Мы выстраиваем по порядку, начиная с наименьшего n, вычисленные на четвёртом этапе величины r_n и получаем «спектр». Кстати, при проведении анализа частотного состава с помощью преобразования Фурье переменную x рассматривают как функцию времени и, подставляя t, записывают выражение как $F(t)$. Это не даёт забыть о том, что переменная функции — это время (Рис. 7-4).



☐ Рис. 7-4. Форма сигнала и изображение его спектра.

О, теперь-то мы готовы к нахождению спектра с помощью преобразования Фурье! Отлично!

3. ЗВУК КАМЕРТОНА И ЕГО СПЕКТР

Итак, теперь, когда мы освоили конкретный метод преобразования Фурье, мы наконец-то можем приступить к анализу реальных спектров!

Наконец-то. Я в восторге!

Это как?

А вот так! В восторге я! Неужели ты Рика, не восхищена тем, что мы наконец-то пришли к долгожданному преобразованию Фурье!

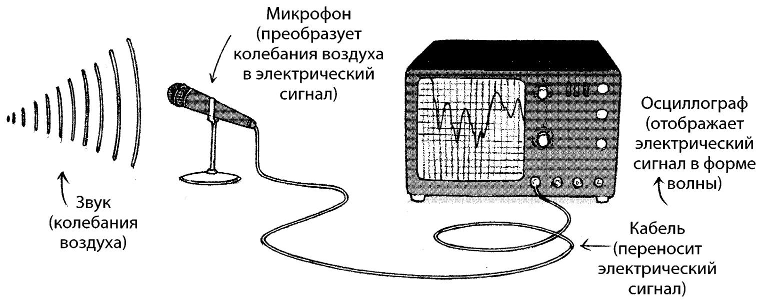
Э… восхищена.

Уже неплохо…

Я тоже восхищена тем, что вы обе выдержали это испытание.
Прежде чем исследовать реальные спектры, давайте я кратко расскажу вам о способах наблюдения исходной формы волны.

Да, ты права. Какой уж там спектр, если мы не сможем увидеть даже форму волны саму по себе.

Для начала, про метод с использованием осциллографа. Это такое устройство, которое может отображать введённый электрический сигнал на экране.
Метод наблюдения формы звуковой волны с помощью осциллографа в общих чертах выглядит так, как на Рис. 7-5.



☐ Рис. 7-5. Метод наблюдения формы звуковой волны с помощью осциллографа.

Опишу кратко этот рисунок.

1. Микрофон преобразует звук (колебания воздуха) в электрический сигнал.
2. Электрический сигнал по кабелю подаётся на вход осциллографа.
3. Луч осциллографа, двигаясь слева направо с постоянной скоростью, выводит электрический сигнал на экран в соответствии с его изменением во времени.

Вот как! Ну всё, все немедленно приобретаем по осциллографу!

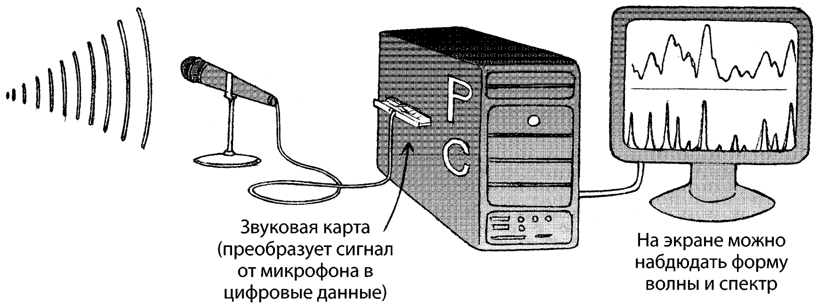
…Но разве это реально?

Рика права. Действительно, мало у кого есть дома осциллограф, о котором я сейчас кратко рассказала. Но мы можем использовать вместо него компьютер!
Вообще говоря, если мы собираемся вычислять спектр звука, то с помощью компьютера это можно делать гораздо проще и эффективнее. И наблюдение формы волны на компьютере делается практически так же, как и на осциллографе.

То есть просто вводят туда звук с помощью микрофона?

Да. В компьютерах есть звуковая карта — устройство, которое преобразует сигнал, поступающий из микрофона, в цифровую форму. Так как звуковая карта используется также и для воспроизведения звука, она есть практически в каждом современном компьютере.

Метод наблюдения формы звуковой волны с помощью компьютера выглядит следующим образом (Рис. 7-6).



□ Рис. 7-6. Метод наблюдения формы звуковой волны на компьютере.

В нашем случае компьютер может полностью заменить осциллограф. Кроме того, с помощью вычислительных функций компьютера можно провести над оцифрованными данными звука преобразование Фурье, а затем вывести их на экран в виде спектра.

Понятно. Да, компьютер — удобная штука. А у нас дома компьютер используется в основном для серфинга по интернету… Надо бы расширить область его применения!

Методы вычисления спектра на компьютере зависят, например, от используемой программы, поэтому здесь я о них рассказывать не буду. Как я уже говорила, иногда анализ можно провести с помощью Excel без использования специальных программ.

Угу.

Итак, давайте исследуем спектр самого основного звука.

Ого! И что же мы будем исследовать?

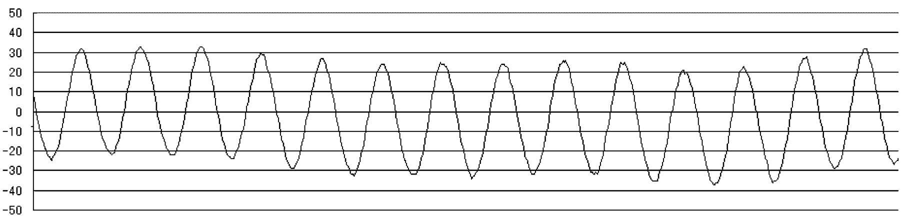
Для начала, — звук камертона! О нём мы, кстати, немного говорили в самом начале (Рис. 7-7).

☐ Рис. 7-7. Камертон для настройки музыкальных инструментов.

Угу. Это камертон, используемый для настройки. Если слегка ударить по нему, то можно получить звук «ля», так?

Да. Если ударить по камертону и поднести к уху шарик на конце ручки, или легонько прикусить его зубами, то можно услышать звук, соответствующий частоте 440 Гц — основную частоту ноты «ля».

Да, можно услышать очень чистый звук вроде «динь».



☐ Рис. 7-8. Форма звуковой волны камертона.

Исследование на компьютере позволяет увидеть, что его звуковая волна имеет вот такую форму (Рис. 7-8).

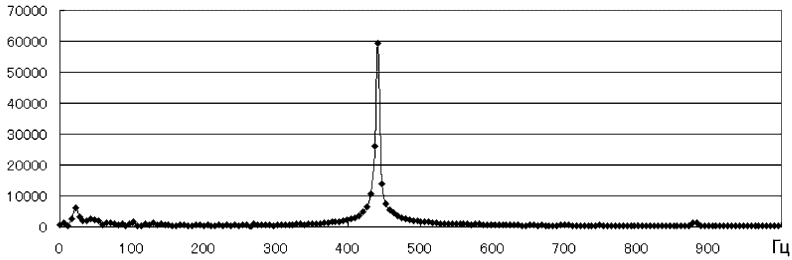
Функция $y = \sin x$, да?

Функция синуса…

Да, хотя сигнал немного смещается вверх и вниз, он выглядит как самая настоящая синусоида.

Угу. Значит, по этой форме волны мы будем строить спектр?

Да. Давайте сразу же посмотрим спектр звучания камертона (Рис. 7-9).



☐ Рис. 7-9. Спектр звуковой волны камертона.

По горизонтальной оси мы откладываем частоты в герцах (Гц). По вертикальной оси мы откладываем относительные величины составляющих спектра.

Да, точно, на частоте 440 Гц есть большой всплеск!

Такой спектр говорит нам, что форма волны камертона имеет практически одну частоту.

Угу!

Поэтому можно сказать, что камертон позволяет нам услышать практически единственную частоту. Большинство людей слышит подобные одночастотные звуки, представляемые одной функцией синуса, как «пу-ум» или «по-ом». Если же частота выше 7 кГц, то слышится высокий звук типа «ки-ин».

Постепенно до меня доходит связь между звуком и спектром!

Камертон — это слишком простой пример, для которого нет даже смысла рассматривать преобразование Фурье. Поэтому давайте теперь рассмотрим пример посложнее.

4. ЗВУКИ ГИТАРЫ И ИХ СПЕКТР

Теперь поэкспериментируем с электрогитарой!

О, наконец-то гитара!

…

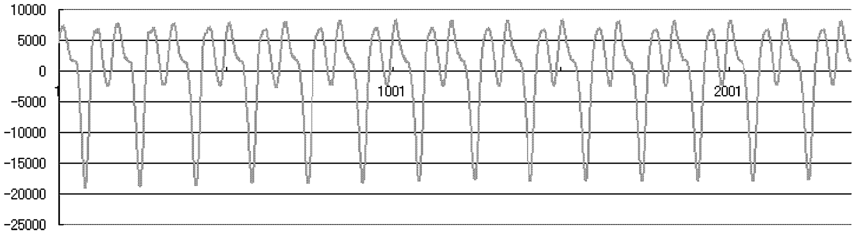
Как вы знаете, гитара имеет 6 натянутых струн разной толщины, дающих различные тоны в зависимости от места, где струну прижимают к грифу гитары. Если ударять по струнам последовательно, то получится мелодическая линия, а если одновременно прижать и ударить по нескольким струнам, то получится глубоко звучащий аккорд.

Да, это действительно так!

Для начала, попробуй извлечь один звук. Например, звук ноты «до(C)». Постарайся извлечь звук чистого тона, без искажений, чтобы его было легко проанализировать.

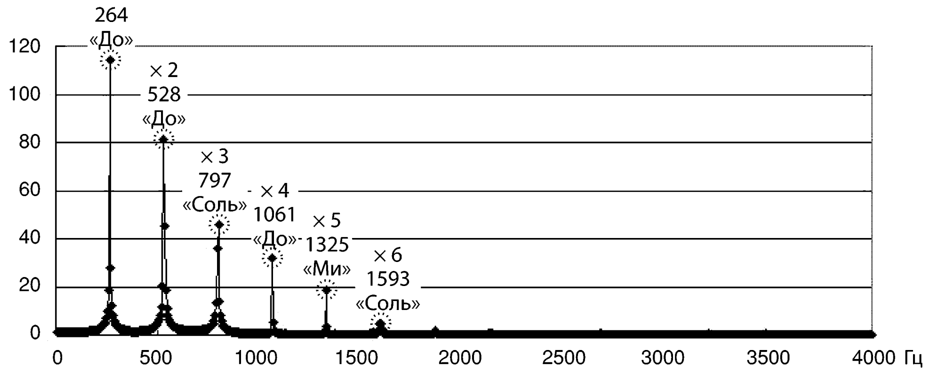
Попробую. **ДЗЫНЬ...**

Да, вот такой простой звук. Форма его волны показана на Рис. 7-10, а спектр — на Рис. 7-11.



☐ Рис. 7-10. Форма волны при звучании ноты «до(C)».

Основные пиковые частоты этого спектра выглядят, как на Рис. 7-11.



☐ Рис. 7-11. Основные пиковые частоты в спектре звучания ноты «до(C)».

Ну, да. И что из этого можно увидеть?

Звук ноты «ля» считается равным «440 Гц» в соответствии с «международным стандартом частоты». Частота звучания ноты «до» согласно этому стандарту равна 261,63 Гц. Наш анализ показал, что самый большой пик находится на частоте 264 Гц, то есть струна настроена немного выше международного стандарта, но звуку ноты «до» соответствует неплохо.

Ого! Обычно я настраиваю гитару, не задумываясь, но спектр позволяет взглянуть на это занятие по-новому!

Далее, следующие по величине пики: 528 Гц, 797 Гц, 1061 Гц, 1325 Гц, 1593 Гц и так далее, находятся на частотах, примерно в 2, 3, 4 раза выше частоты начального звука ноты «до», их амплитуда быстро уменьшается по мере роста частоты. Такое спектральное отношение очень похоже на «пилообразную волну», которую я вам показывала раньше. То есть среди высших гармоник основного тона (основной частоты) звука «до» присутствуют как чётные, так и нечётные порядки.

А что такое высшие гармоники?

Это волны с частотами, кратными основной частоте.

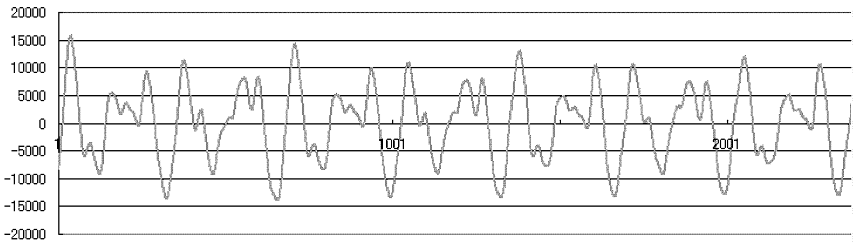
Понятно. Значит, особенности звука можно точно выразить с помощью числовых значений, да?

А теперь одновременно извлеки звуки нот «до (C)», «ми (E)», «соль (G)».

То есть, до-мажор, да?!

ДЗЫНЬ...

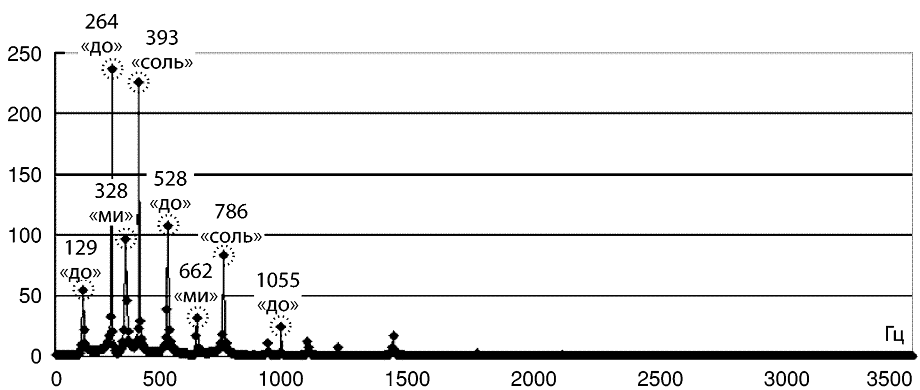
Взглянем на форму волны, изображённую на Рис. 7-12.



☐ Рис. 7-12. Форма волны гитарного звука нот «до (C)-ми (E)-соль (G)».

Ого! Намного сложнее волны основного тона!

Здесь я тоже выделю пики основных частот… (Рис. 7-13).



☐ Рис. 7-13. Основные частотные пики звука нот «до (C)-ми (E)-соль (G)».

И что мы сможем увидеть на этот раз?

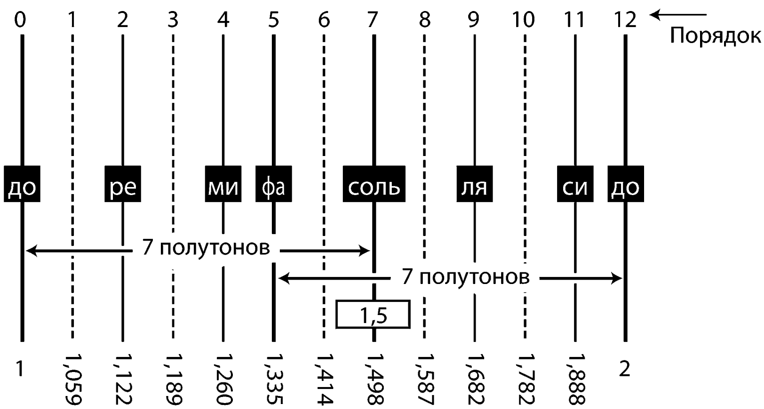
Чётко прослеживаются звуки, лежащие в основе нот «до-ми-соль», не так ли? Но вот что интересно: высшие гармоники звука «до» намного меньше, чем когда мы извлекали одиночное «до». Считается, что при извлечении аккорда часть энергии высших гармоник основного звука тратится на синтез аккорда.

Да?! Надо будет это учитывать при исполнении!

Объясню поподробней об аккорде и его спектре. Хотя мы одновременно извлекли звуки нот «до», «ми», «соль», амплитуда частотных составляющих звука ноты «ми» меньше, чем «до» и «соль». Подумаем над причиной этого.

Давай подумаем!

Инструменты с ладами, вроде клавишных или гитары, имеют «равномерно темперированный строй». Это означает, что одна октава (музыкальный интервал, в котором частота самого высокого звука в 2 раза больше частоты самого низкого) делится на 12 звуков так, чтобы отношение частот соседних звуков было постоянным и равным $\sqrt[12]{2}$. Это число выбрано потому, что если умножить на него 12 раз, то мы получим удвоенную частоту, то есть первую октаву. Интервал между соседними нотами называется «полутоном» (Рис. 7-14).



В равномерно темперированном строе одну октаву делят на 12 нот, интервал между соседними нотами называют полутоном, и принимают отношение между частотами полутона равным $\sqrt[12]{2}$. (так как отношения частот всех полутонов принимаются равными, этот строй ещё называют «12-ступенным равномерно темперированным строем») ($\sqrt[12]{2}$ = 1,059463...)

□ Рис. 7-14. Полутона в равномерно темперированном строе.

Интересно.

При этом отношение частот между «до» и расположенной выше «соль» равно примерно 1 : 1,5, то есть 2 : 3. Это соответствует 7 полутонам. Частоты, отношение которых равно простой натуральной дроби, усиливают друг друга. Однако отношение частот «до» и «ми» составляет 6 : 7, «ми» и «соль» — 7 : 9. Подобные отношения тоже являются простыми натуральными дробями, но всё же сложнее, чем 2 : 3. Простота отношения частот влияет на то, будут ли звуки усиливать друг друга. Чем проще отношение, тем больше взаимное усиление.

И поэтому в аккорде «до-ми-соль» звук «ми» звучит немного слабее, так?!

Да, это так. Однако, хотя он и становится относительно слабее, но всё ещё остаётся важной составляющей спектра. Он придаёт аккорду глубину.

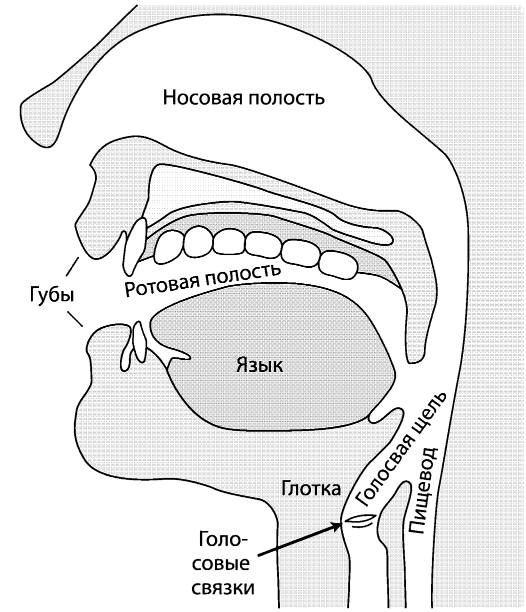
Да, оказывается, глубина аккорда, которую мы обычно чувствуем, не задумываясь, может быть математически подтверждена при помощи анализа Фурье! Здорово!

5. СПЕКТР ЧЕЛОВЕЧЕСКОГО ГОЛОСА

И в заключение давайте исследуем человеческий голос!

О! Наконец-то!

Сначала я в двух словах опишу механизм возникновения звуков. Воздух, вошедший через нос или рот, через трахею идёт в лёгкие. В самом верху трахеи находится орган под названием «голосовые связки», которые мелко вибрируют при прохождении воздуха (Рис. 7-15).



☐ Рис. 7-15. Голосовые органы.

Я уже слышала где-то о «голосовых связках»!

Размеры и толщина голосовых связок индивидуальны у каждого человека, периоды колебаний тоже отличаются в зависимости от особенностей голосовых связок и плотности вдыхаемого воздуха. Основные сформированные ими колебания имеют почти пилообразную форму и включают разнообразные частотные составляющие.

Вот это уже интересно!

Форма полости рта зависит от формы и положения верхней и нижней челюстей, языка, губ. Всё это оказывает влияние на течение воздуха. Кроме того, есть также изменения течения воздуха, выходящего через нос.

Да, довольно сложно…

Колебания воздуха, возникшие на голосовых связках и включающие разнообразные частотные составляющие, проходят через ротовую или носовую полости, форма которых оказывает различное влияние на частотный состав. Другими словами, ротовая и носовая полости играют роль «фильтра». Благодаря этому человек может издавать различные звуки и мелодии.

Да, я знаю. Ведь есть даже «голосовые ударники», имитирующие голосом звучание ударных инструментов!

Голосовые ударники умеют использовать невокализированные звуки, при которых, в отличие от обычного, «вокализированного» голоса, голосовые связки не колеблются.

Кстати, на уроках английского нам тоже что-то говорили про невокализированные звуки…

И вокализированные, и невокализированные звуки приобретают различные оттенки в зависимости от формы ротовой и носовой полостей.

А что, если эта форма похожа, значит и голос будет похож?

Да, это так. Например, часто похожи голоса родителей и детей, и причина заключается в наследственном сходстве лицевого скелета. Кроме того, когда западный фильм озвучивают на другом языке, иногда подбирают дублёров, похожих лицом на соответствующих актёров. Это тоже говорит о том, что скелет лица влияет на особенности голоса.

Вот как!

Однако в спектре гласных и согласных звуков есть особенности, не зависящие от индивидуума, и это позволяет нам понимать речь друг друга.

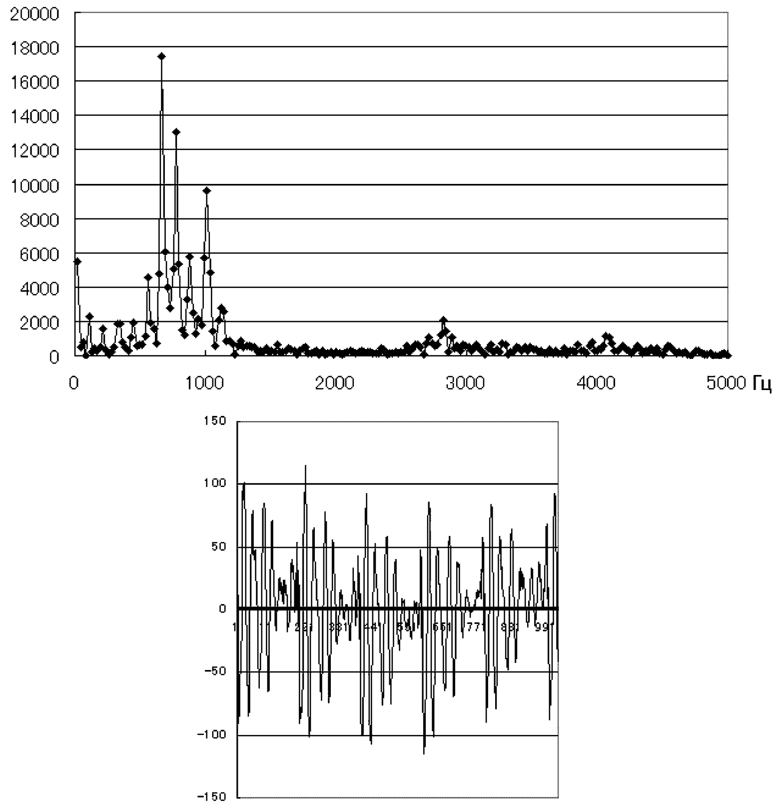
А правда, если бы всё от начала до конца отличалось бы друг от друга, мы бы не смогли понять, что говорят другие.

Ха! Когда ты, Фумика, что-то говоришь, это бывает сложно понять…

Что?!

Ну, ладно вам. Давайте лучше посмотрим на спектры и форму волны гласных звуков!

Для начала, скажите «А-А…» (Рис. 7-16).

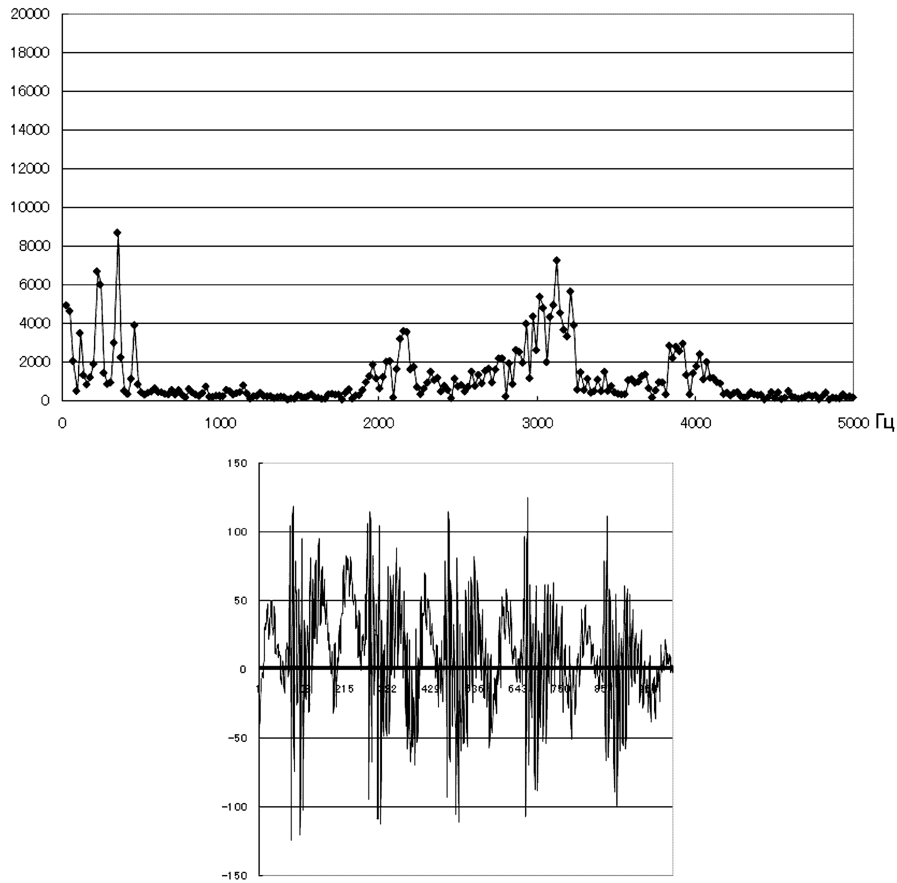


☐ Рис. 7-16. Спектр и форма волны звука «А».

Это что, и есть спектр звука «А»?!

При произнесении звука «А» рот широко открыт, ротовая полость расширена. В широком пространстве высокие частотные составляющие резонируют плохо, поэтому в спектре преобладают низкие частоты.

Теперь, «И-И…» (Рис. 7-17).



☐ Рис. 7-17. Спектр и форма волны звука «И».

Да, хороший спектр!

Что именно?

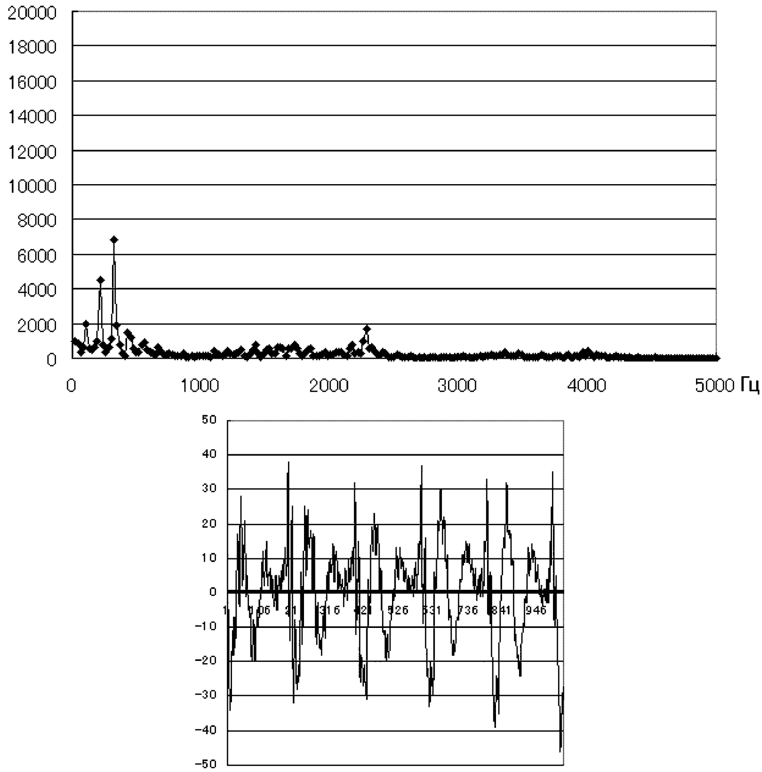
Просто хорош-и-и-й!

Так… Фумика, какую форму ты придала рту, когда произносила «И»? Губы были растянуты влево и вправо, рот сузился, не так ли? При этом ротовая полость стала широкой и плоской, тем самым подавляя резонанс низких частот. При этом в глубине верхней челюсти можно почувствовать вибрацию, которая сильнее, чем при звуке «А».

Ну как, ты почувствовала?

Не я, а ты сама, Фумика …

Ну, всё равно это настолько слабая вибрация, что обычно мы её не осознаём… Она имеет отношение к резонансу высоких частотных составляющих. Спектр расширился до области высоких частот. Даже в самой форме волны тоже прослеживаются быстрые колебания.
Теперь, «У-У…» (Рис. 7-18).



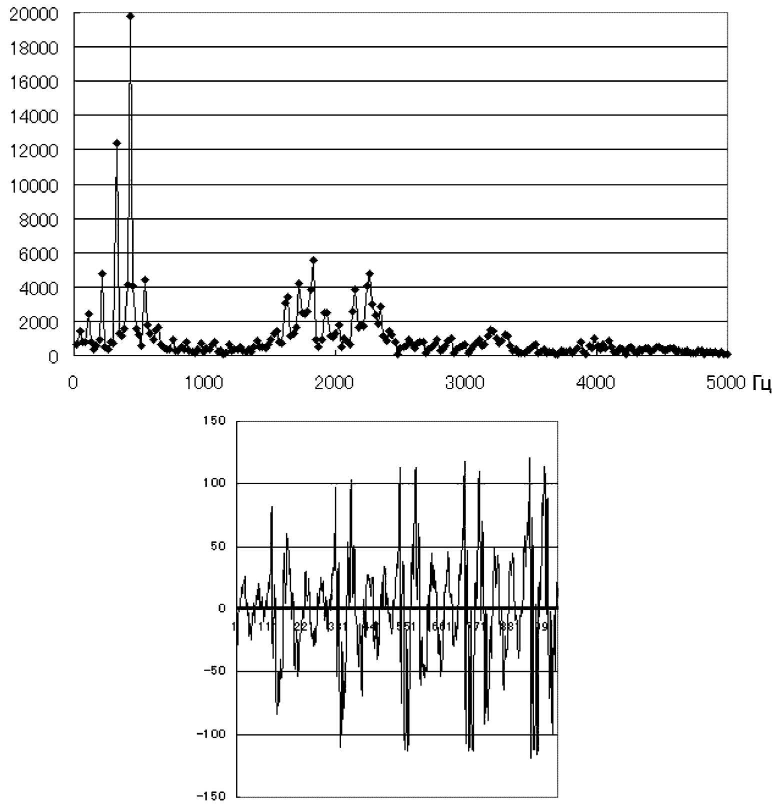
☐ Рис. 7-18. Спектр и форма волны звука «У».

У-у…

Что?

Да так, просто произнесла…

Звук «У» произносится с губами, немного вытянутыми в трубочку. При этом получается несколько закрытый звук. Спектр «У» — самый низкочастотный из гласных звуков.
Теперь, «Э-Э…» (Рис. 7-19)..



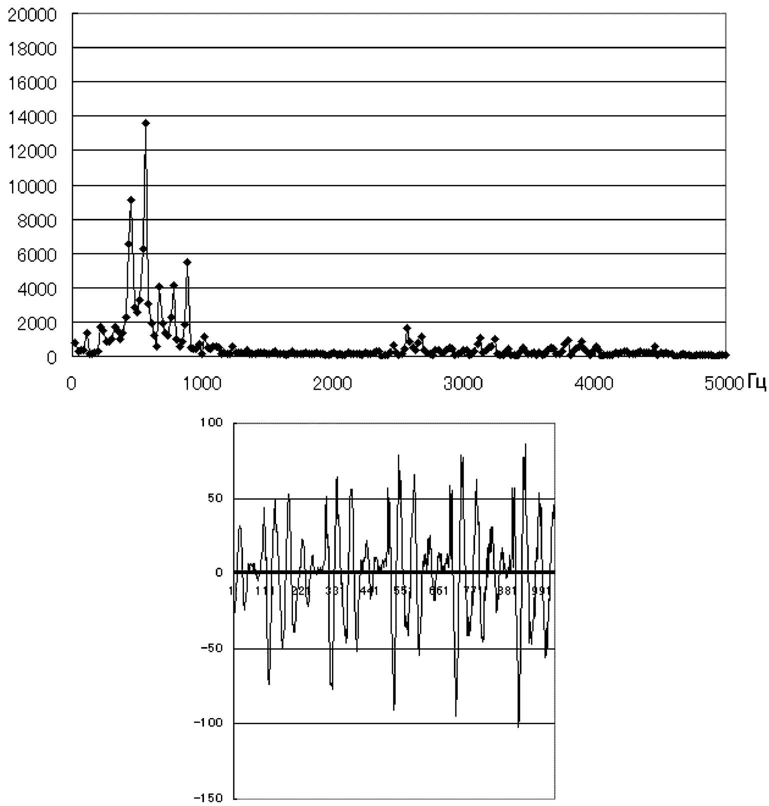
☐ Рис. 7-19. Спектр и форма волны звука «Э».

…Э?

Я как раз собиралась это произнести…

Звук «Э» произносится с более широко открытым ртом, чем «И», однако рот так же расширен и верхняя челюсть расположена низко, поэтому появляются высокочастотные составляющие. Однако центр этих составляющих находится ниже, чем у звука «И».

И в заключение, «О-О…» (Рис. 7-20).



❒ Рис. 7-20. Спектр и форма волны звука «О».

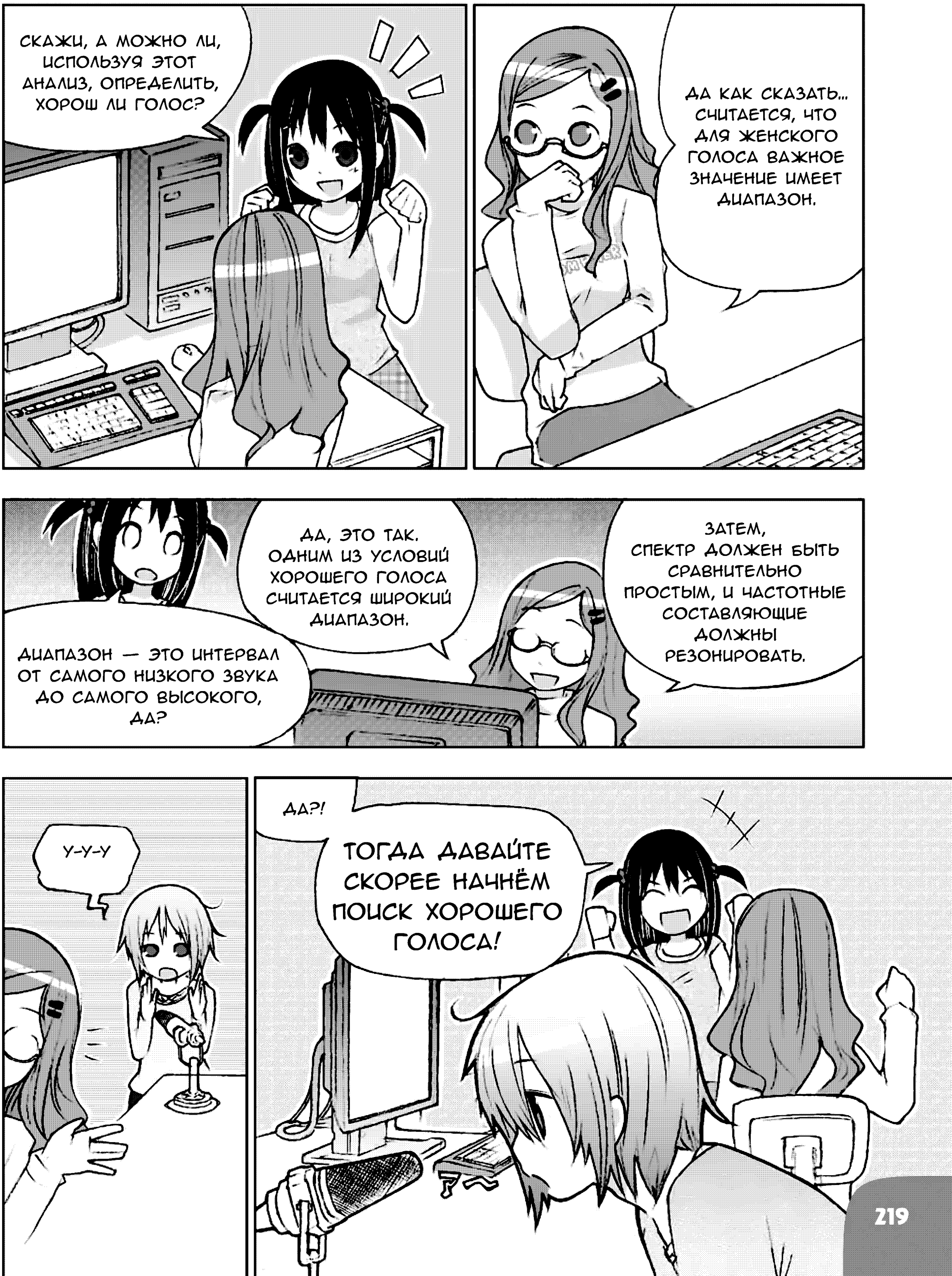
О-о-о!

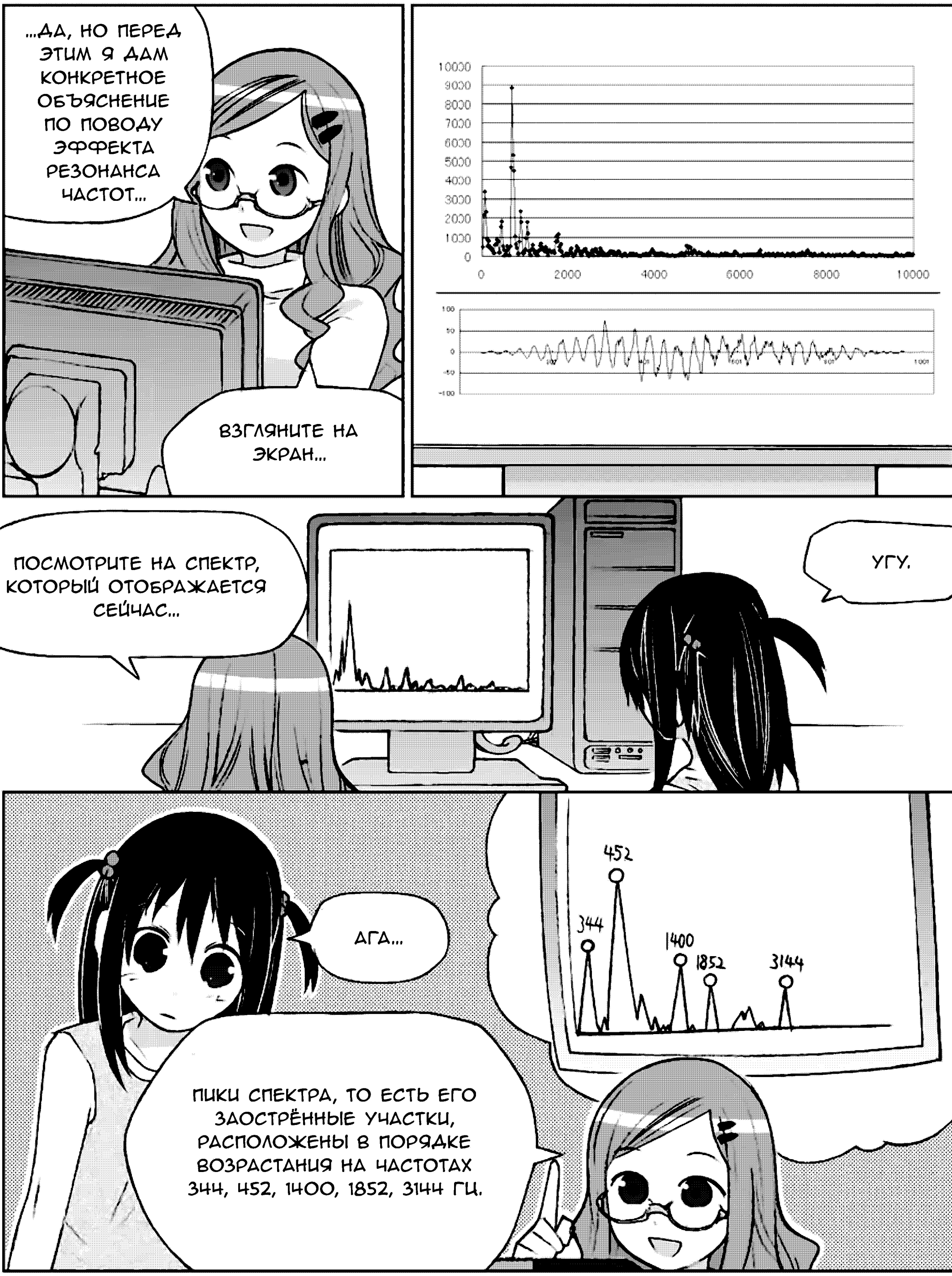
…

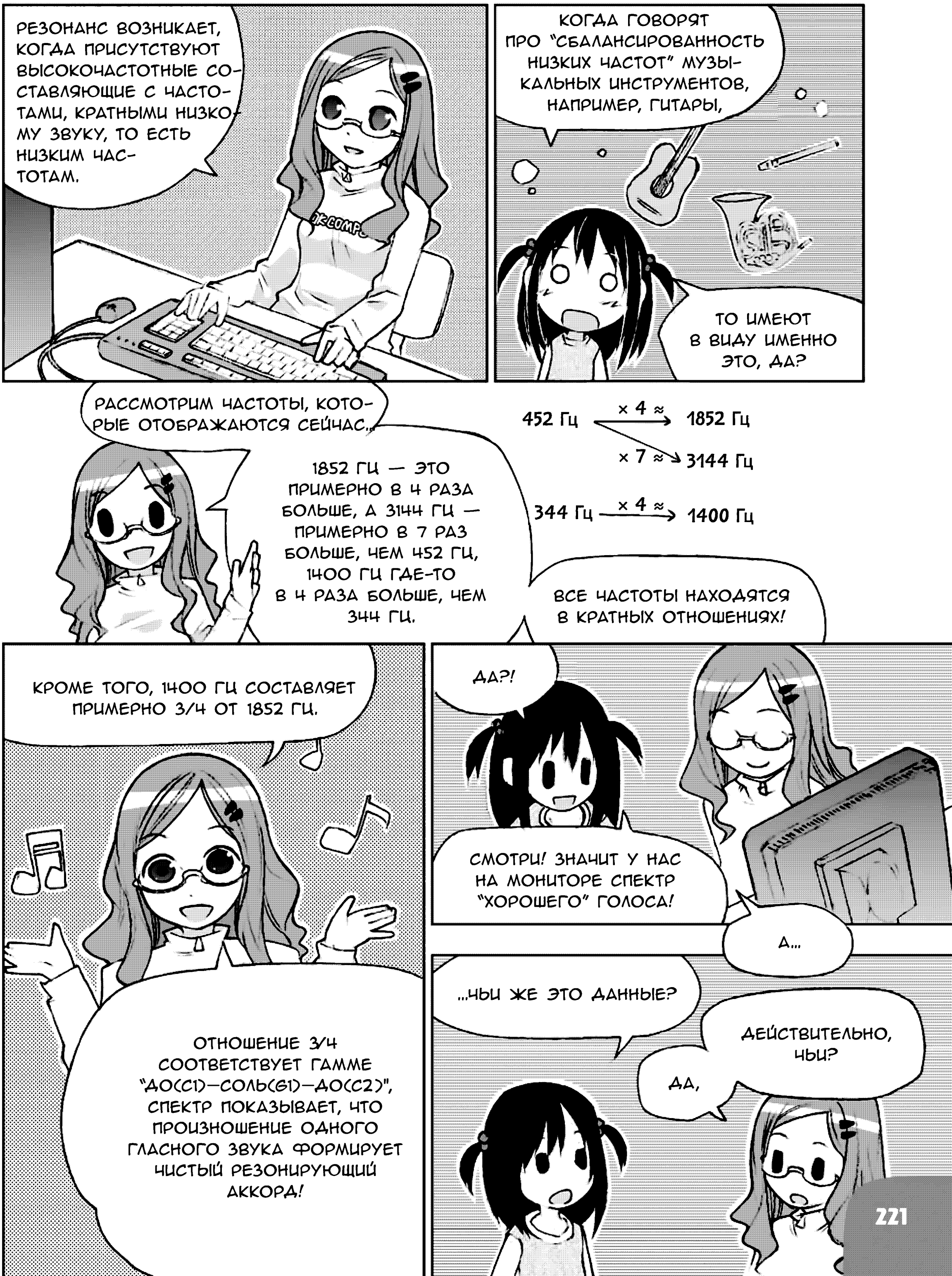
…

Да, дружно вы. Формы рта при произнесении «О» и «А» похожи. В этом можно убедиться, если произнося звук «А», попробовать плавно перевести его в «О». Сделать это проще, чем перевести «А» в другие гласные звуки.

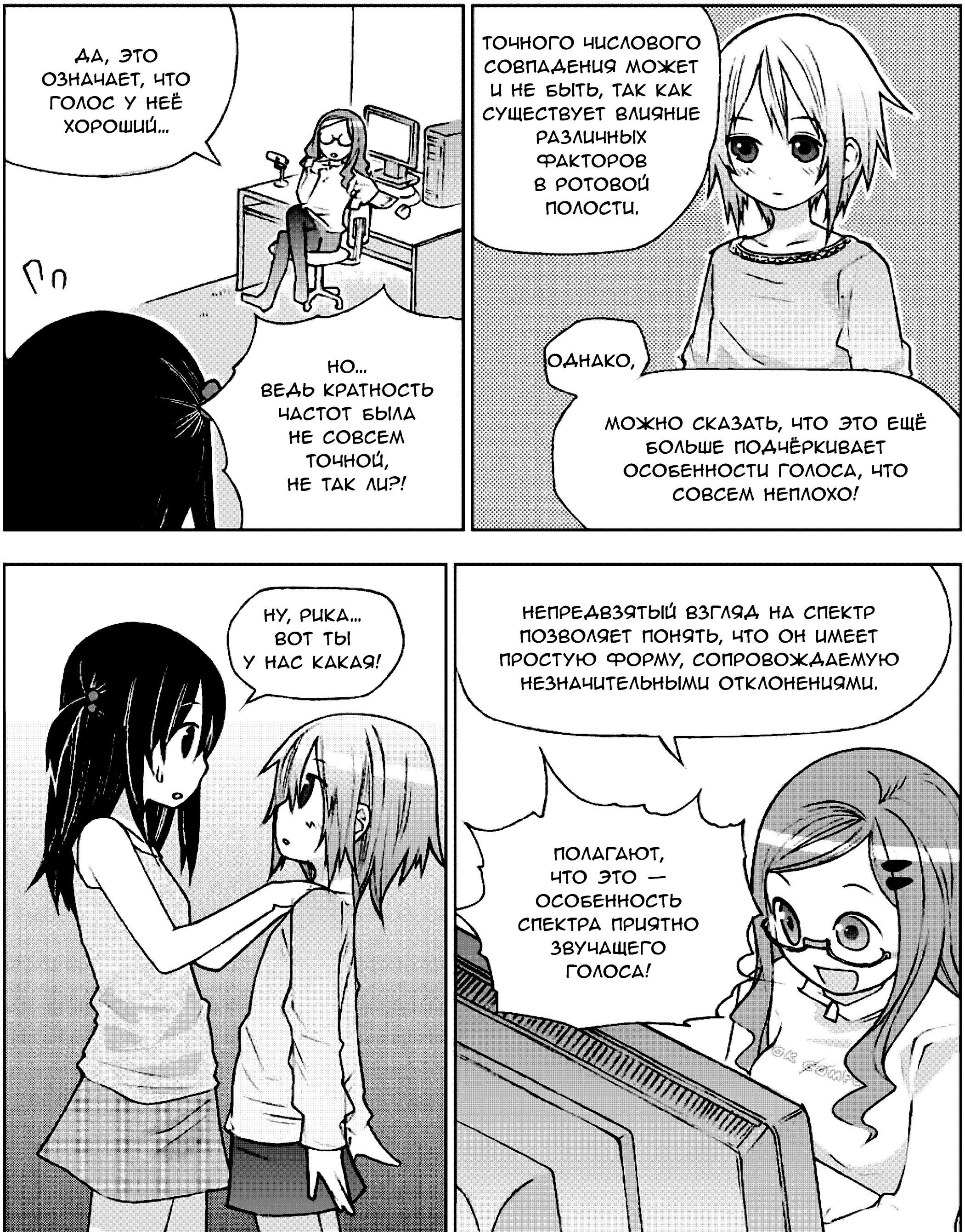
6. Сладкий голосок



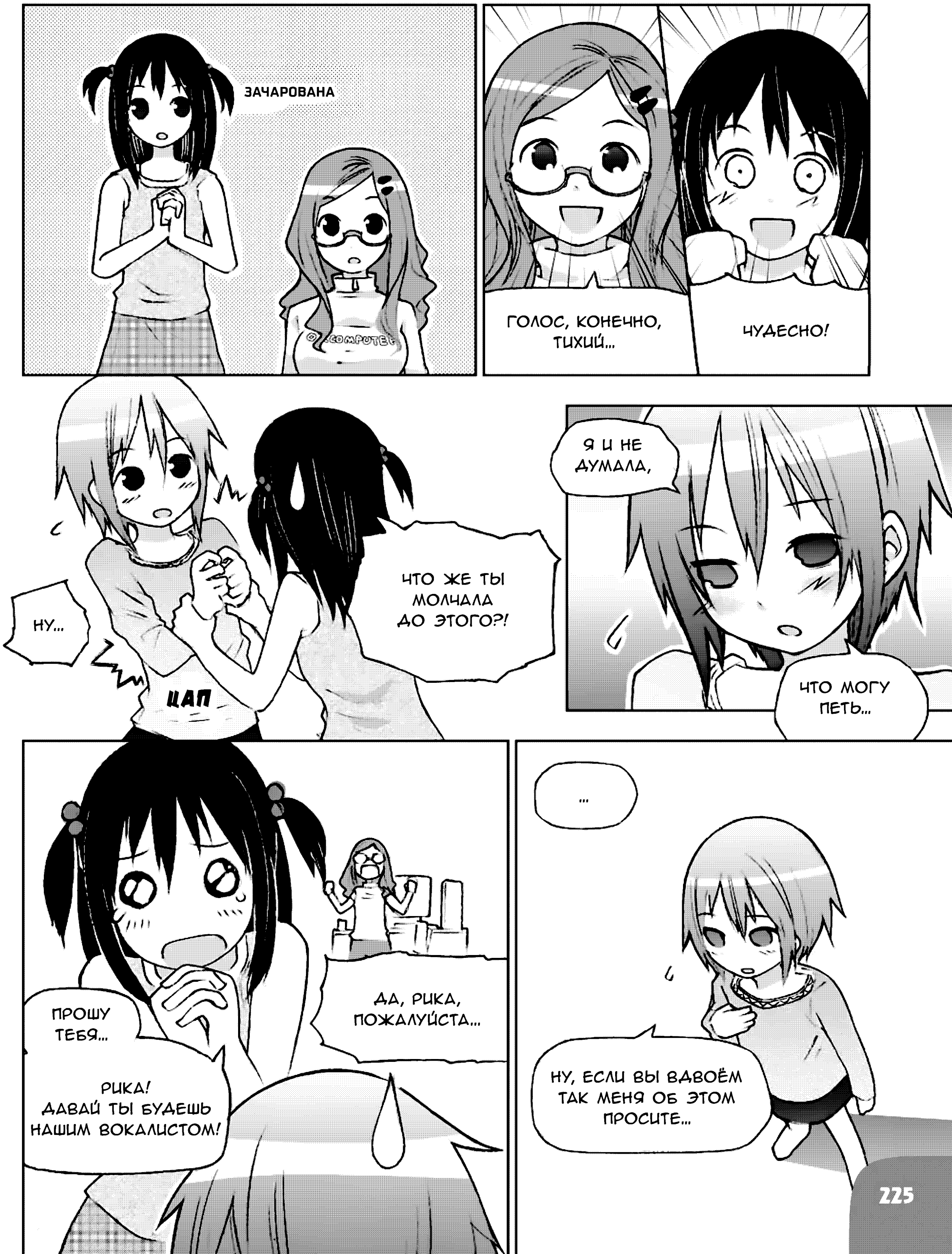

...ДА, НО ПЕРЕД ЭТИМ Я ДАМ КОНКРЕТНОЕ ОБЪЯСНЕНИЕ ПО ПОВОДУ ЭФФЕКТА РЕЗОНАНСА ЧАСТОТ...
ВЗГЛЯНИТЕ НА ЭКРАН...
10000 9000 8000 7000 6000 5000 4000 3000 2000 1000 0
0 2000 4000 6000 8000 10000
ПОСМОТРИТЕ НА СПЕКТР, КОТОРЫЙ ОТОБРАЖАЕТСЯ СЕЙЧАС...
УГУ.
АГА...
452
344
1400
1852
3144
ПИКИ СПЕКТРА, ТО ЕСТЬ ЕГО ЗАОСТРЁННЫЕ УЧАСТКИ, РАСПОЛОЖЕНЫ В ПОРЯДКЕ ВОЗРАСТАНИЯ НА ЧАСТОТАХ 344, 452, 1400, 1852, 3144 ГЦ.

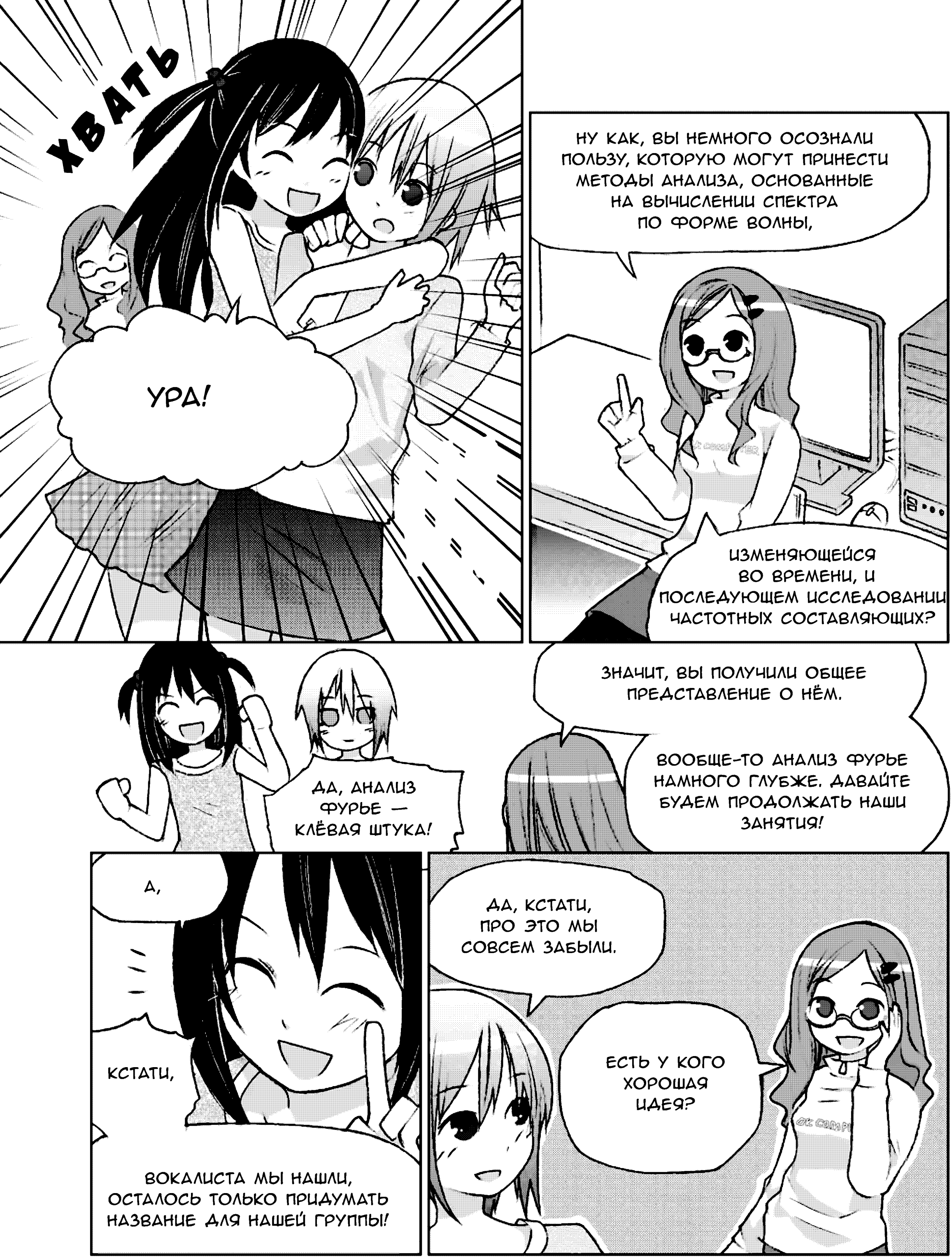

Резонанс возникает, когда присутствуют высокочастотные составляющие с частотами, кратными низкому звуку, то есть низким частотам.
Когда говорят про "сбалансированность низких частот" музыкальных инструментов, например, гитары,
то имеют в виду именно это, да?
Рассмотрим частоты, которые отображаются сейчас...
1852 Гц — это примерно в 4 раза больше, а 3144 Гц — примерно в 7 раз больше, чем 452 Гц, 1400 Гц где-то в 4 раза больше, чем 344 Гц.
452 Гц × 4 ≈ 1852 Гц
× 7 ≈ 3144 Гц
344 Гц × 4 ≈ 1400 Гц
Все частоты находятся в кратных отношениях!
Кроме того, 1400 Гц составляет примерно 3/4 от 1852 Гц.
Отношение 3/4 соответствует гамме "до(C1)—соль(G1)—до(C2)", спектр показывает, что произношение одного гласного звука формирует чистый резонирующий аккорд!
Да?!
Смотри! Значит у нас на мониторе спектр "хорошего" голоса!
А...
...Чьи же это данные?
Да,
действительно, чьи?


мои...
ты опять шутишь?
А, кстати, ведь Рика только что вертелась у микрофона...
...
значит... значит...
у Рики...
Хорошие вокальные данные?!
OK COMPUT


Да, это означает, что голос у неё хороший...
Но... ведь кратность частот была не совсем точной, не так ли?!
Точного числового совпадения может и не быть, так как существует влияние различных факторов в ротовой полости.
Однако,
можно сказать, что это ещё больше подчёркивает особенности голоса, что совсем неплохо!
Ну, Рика... вот ты у нас какая!
Непредвзятый взгляд на спектр позволяет понять, что он имеет простую форму, сопровождаемую незначительными отклонениями.
Полагают, что это — особенность спектра приятно звучащего голоса!


Ну,
Ну-ка попробуй спеть эту мелодию!
Да...
...
Тум-тум
Хм...
...
Кхе-кхе


ЗАЧАРОВАНА
ГОЛОС, КОНЕЧНО, ТИХИЙ...
ЧУДЕСНО!
НУ...
ЧТО ЖЕ ТЫ МОЛЧАЛА ДО ЭТОГО?!
ЦАП
Я И НЕ ДУМАЛА,
ЧТО МОГУ ПЕТЬ...
ПРОШУ ТЕБЯ...
ДА, РИКА, ПОЖАЛУЙСТА...
РИКА! ДАВАЙ ТЫ БУДЕШЬ НАШИМ ВОКАЛИСТОМ!
...
НУ, ЕСЛИ ВЫ ВДВОЁМ ТАК МЕНЯ ОБ ЭТОМ ПРОСИТЕ...


ХВАТЬ
УРА!
НУ КАК, ВЫ НЕМНОГО ОСОЗНАЛИ ПОЛЬЗУ, КОТОРУЮ МОГУТ ПРИНЕСТИ МЕТОДЫ АНАЛИЗА, ОСНОВАННЫЕ НА ВЫЧИСЛЕНИИ СПЕКТРА ПО ФОРМЕ ВОЛНЫ,
ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ВО ВРЕМЕНИ, И ПОСЛЕДУЮЩЕМ ИССЛЕДОВАНИИ ЧАСТОТНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ?
ДА, АНАЛИЗ ФУРЬЕ — КЛЁВАЯ ШТУКА!
ЗНАЧИТ, ВЫ ПОЛУЧИЛИ ОБЩЕЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ О НЁМ.
ВООБЩЕ-ТО АНАЛИЗ ФУРЬЕ НАМНОГО ГЛУБЖЕ. ДАВАЙТЕ БУДЕМ ПРОДОЛЖАТЬ НАШИ ЗАНЯТИЯ!
А,
КСТАТИ,
ВОКАЛИСТА МЫ НАШЛИ, ОСТАЛОСЬ ТОЛЬКО ПРИДУМАТЬ НАЗВАНИЕ ДЛЯ НАШЕЙ ГРУППЫ!
ДА, КСТАТИ, ПРО ЭТО МЫ СОВСЕМ ЗАБЫЛИ.
ЕСТЬ У КОГО ХОРОШАЯ ИДЕЯ?


Да как сказать...
Используя начальные буквы наших имён...
И вот, наконец...
День фестиваля
Галдёж
О-о-о-о...!


Итак...
Благодарим всех!!!
Итак,
Сколько же баллов набрала группа "Priere"?!
Шурх-шурх-шурх
Вот это да!
93 балла!!!
Мы намного обогнали всех!
Да, у нас неплохой рейтинг...
Теперь, Фумика, твоя очередь! Старайся как следует!

Хе...
А где же ваш вокалист?!
Есть, не беспокойся!
Ой,
ой...
Неужели,
ты будешь петь сама?!
Ну, и наконец, последнее выступление!
Смогут ли они обогнать "Priere"?! Впервые на нашем фестивале выступит группа...
"Фурье"!!!
Уфф...


ЧТО? ЭТА МОЛЧАЛИВАЯ РИКА...
НЕ МОЖЕТ БЫТЬ!
О-О-О....!!!

ТАДАМ...
ИТАК, СКОЛЬКО ЖЕ БАЛЛОВ НАБРАЛА ГРУППА "ФУРЬЕ"?!
О-О-О!!!
НЕВЕРОЯТНО!
93 БАЛЛА!!!
В ЭТОМ ГОДУ НА ПЕРВОМ МЕСТЕ ДВЕ ГРУППЫ: "PRIERE" И "ФУРЬЕ"!.
О-О-О!!!
О-О-О!!!

ХИ-ХИ...
А-ХА-ХА...
...!!
...
НУ ЧТО, ПРОДЛИМ НАШЕ ПАРИ ДО СЛЕДУЮЩЕГО РАЗА?!
ДА, ВРОДЕ БЫ ТАК!
БИС-С-С!!!
СМОТРИ,
БИС!!!
НАС ЗОВУТ...
ДАВАЙ,
ПОШЛИ!
МЫ ТОЖЕ ВЫЙДЕМ!
ЗВУК ЗА ЗВУКОМ, СЛАГАЯСЬ,


Рождают мелодию,
о это мгновение...
наше
"Фурье"
продолжается!

ПРИЛОЖЕНИЕ

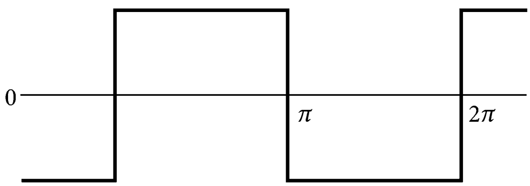
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЯДОВ ФУРЬЕ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ СУММЫ БЕСКОНЕЧНОГО РЯДА

ПРИМЕР НАХОЖДЕНИЯ ЗНАЧЕНИЯ СУММЫ БЕСКОНЕЧНОГО РЯДА

Давайте здесь, используя ряды Фурье, вычислим значение суммы одного бесконечного ряда. Как мы видели в главе 5, посвящённой рядам Фурье:

$$\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \ \ldots$$

является выражением для функции следующего вида:

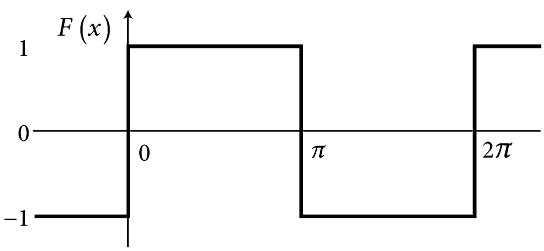


Амплитуды в том примере подробно не рассматривались.
Здесь мы, строго задав форму функции, выразим её с помощью ряда Фурье. Это позволит нам вычислить значение суммы следующего бесконечного ряда:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots \ = \frac{\pi}{4}\ .$$

■ШАГ 1-1

Итак, сначала давайте вычислим коэффициенты Фурье для следующей функции:



$$F(x) = \begin{cases} +1 & (0 \le x < \pi) \\ -1 & (\pi \le x < 2\pi) \end{cases}$$

Во-первых, a_0 вычисляется следующим образом.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\,dx =$$

Разбиваем интервал (0; 2π) на две части

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} F(x)\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} F(x)\,dx\right) =$$

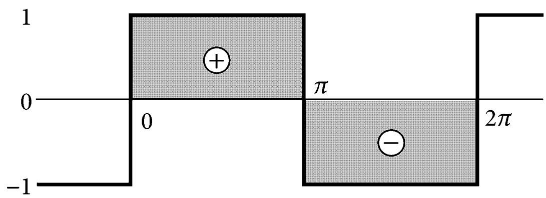
$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} 1\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-1)\,dx\right) =$$

← Подставляем значения $F(x)$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\left[x\right]_0^{\pi} - \left[x\right]_{\pi}^{2\pi}\right) = \frac{1}{2\pi}(\pi - 0 - 2\pi + \pi) =$$

$$= 0.$$

Даже одного взгляда на форму исходной функции $F(x)$:



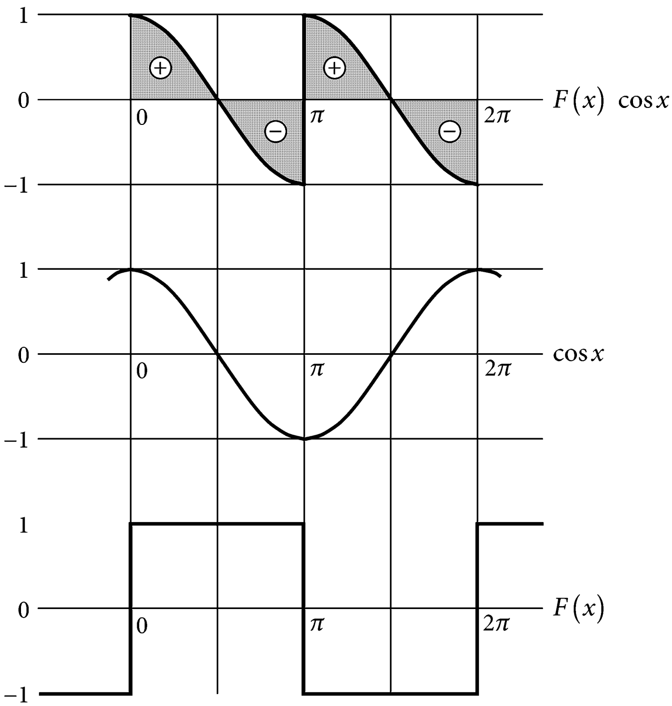
достаточно, чтобы понять, что $a_0 = 0$, так как площади положительных и отрицательных участков равны.

■ШАГ 1-2

А как же быть с коэффициентами a_n?
Как мы видели в главе 5, коэффициенты a_n находятся интегрированием произведения $F(x)$ на $\cos nx$.
В виде формулы это выглядит, например, вот так:

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\cos x\,dx$$

Однако перед вычислениями давайте посмотрим на следующий график.
Как видно из него, площади положительных и отрицательных участков равны между собой и взаимно уничтожаются.



то же самое справедливо для a_2 и последующих a_n : интуитивно понятно, что все они равны 0.

Теперь будем рассчитывать b_n, начиная с b_1.

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\sin x\,dx = \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\sin x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi}(-\sin x)\,dx\right) = \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\cos x\right]_0^{\pi} + \left[\cos x\right]_{\pi}^{2\pi}\right) = \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{(1+1)+(1+1)\right\} = \\
&= \frac{4}{\pi}\,.
\end{aligned}
$$

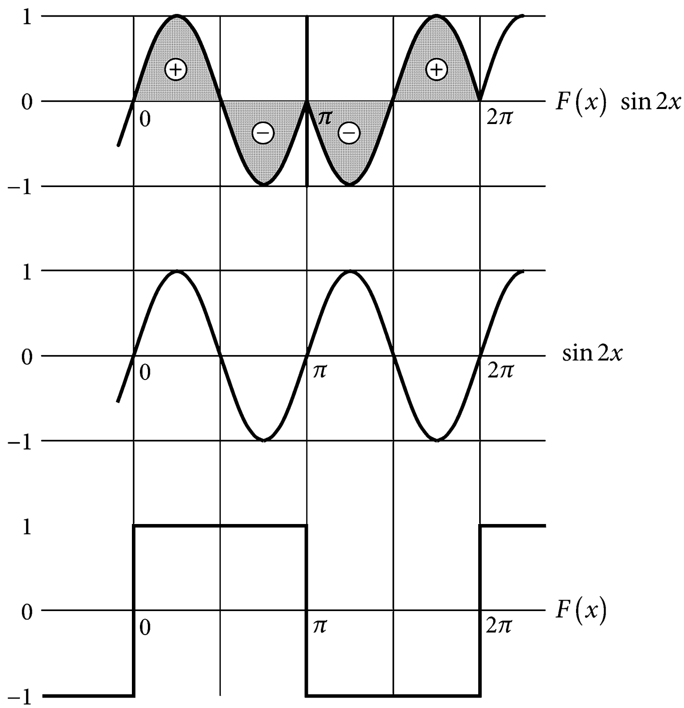
То есть, мы получили $b_1 = 4/\pi$.

■ШАГ 1-3

Теперь вычислим b_2.

$$
\begin{aligned}
b_2 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \sin 2x \, dx = \\
&= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \sin 2x \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin 2x) \, dx \right\} = \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\left[-\frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^{\pi} + \left[\frac{1}{2} \cos 2x \right]_{\pi}^{2\pi} \right) = \\
&= \frac{1}{2\pi} (-1 + 1 + 1 - 1) = \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

То есть, мы получили, что $b_2 = 0$. График позволяет понять это более наглядно.

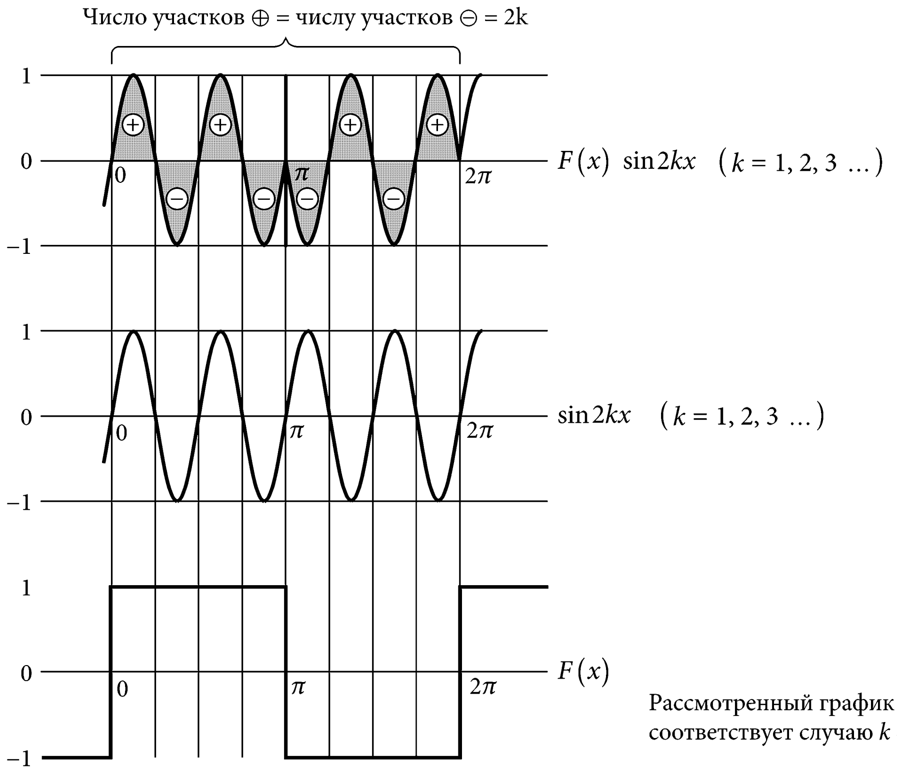


Видно, что участки положительной и отрицательной площадей взаимно уничтожаются.

Для чётных n выполняется равенство:

$$
b_n = \int_0^{2\pi} F(x) \sin nx \, dx = 0.
$$

Случай $n = 2, 4, 6\dots$ хорошо демонстрируется следующим графиком.



Рассмотренный график соответствует случаю $k = 2$

А что же получится для нечётных n, то есть $n = 3, 5, 7\dots$. Ещё немного повычисляем. На этот раз рассчитаем b_3.

$$b_3 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\sin 3x\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \sin 3x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin 3x\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{3}\left[-\cos 3x\right]_0^{\pi} + \frac{1}{3}\left[\cos 3x\right]_{\pi}^{2\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{3\pi}(1 + 1 + 1 + 1) =$$

$$= \frac{1}{3}\times\frac{4}{\pi}.$$

Вычисляя для других нечётных n, получим, что для нечётных n:

$$b_n = \frac{1}{n} \times \frac{4}{\pi}.$$

Итак, мы вычислили все коэффициенты Фурье.

■ШАГ 2

Используя полученные коэффициенты Фурье, функцию можно выразить так:

$$F(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \ldots\right)$$

или, используя знак общей суммы:

$$F(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx \quad \text{(только для нечётных } n\text{).}$$

Однако писать словами «только для нечётных n» — писать не принято, поэтому n следует подставить как:

$$n = 2m + 1 \quad (m = 0, 1, 2\ldots),$$

тогда выражение для функции примет следующий вид:

$$F(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2m+1}\sin(2m+1)x.$$

■ШАГ 3

Кстати, можно заметить, что sin(π/2) = 1, sin(3π/2) = –1, sin(5π/2) = 1…

Поэтому, подставив $\frac{\pi}{2}$ в функцию, мы получим:

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2m+1}\sin\left(\frac{2m+1}{2}\pi\right) =$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2m+1}(-1)^m =$$

$$= \frac{4}{\pi}\Big(\underbrace{1}_{\text{При } m=0} + \underbrace{\frac{1}{3}(-1)}_{\text{При } m=1} + \underbrace{\frac{1}{5}(-1)^2}_{\text{При } m=2\ldots} + \frac{1}{7}(-1)^3 \;\ldots\Big) =$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \;\ldots\right).$$

Кроме того, из графика $F(x)$ видно, что:

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

поэтому можно записать:

$$1 = \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \;\ldots\right).$$

Умножив левую и правую части на π/4 и переставив их местами, получим:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \;\ldots\; = \frac{\pi}{4}\,.$$

То есть значение суммы ряда в левой части равно π/4.

Умножив обе части на 4 и используя знак общей суммы, перепишем это выражение:

$$4\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1} = \pi.$$

РЕАЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ СУММЫ РЯДА

Сумму этого ряда можно вычислить, например, на компьютере, однако ряд сходится очень медленно из-за чередования положительных и отрицательных членов при том, что вычисление суммы ряда

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}$$

даже для $m = 100$ даёт погрешность $^1/_{201}$ (около 0,005%).
В действительности, вычисление, например, с помощью Excel, для $m = 100$ даёт значение 3,15149…, для $m = 101$ получается 3,13178…, для $m = 10000$ результат равен 3.14169…, но для $m = 10001$ получается уже 3,14149…Отсюда видно, что ряд сходится медленно, колеблясь около значения π. (см. табл. на следующей странице).
Интересно отметить, что ряд, состоящий из дробей с только нечётным знаменателем (попеременно вычитаемых и прибавляемых), сходится к дроби $^\pi/_4$, включающей в себя иррациональное число.

Таким образом, здесь мы смогли с помощью преобразования Фурье вычислить значение суммы бесконечного ряда. Представляет интерес то, что преобразование Фурье находит применение и для других подобных алгебраических вычислений.

В этой книге мы описали только основы преобразования Фурье. Тем читателям, которые хотели бы изучить данную тему глубже, я могу порекомендовать воспользоваться книгами, в которых более подробно рассмотрены производные, интегралы, преобразование Фурье.

n	сумма (× 4)
0	4.00000000000
1	2.66666666667
2	3.46666666667
3	2.89523809524
4	3.33968253968
5	2.97604617605
6	3.28373848374
7	3.01707181707
8	3.25236593472
9	3.04183961893
10	3.23231580941
11	3.05840276593
12	3.21840276593
13	3.07025461778
14	3.20818565226
15	3.07915339420
16	3.20036551541
17	3.08607980112
18	3.19418790923
19	3.09162380667
20	3.18918478228
21	3.09616152646
22	3.18505041535
23	3.09994403237
24	3.18157668544
25	3.10314531289
26	3.17861701100
27	3.10588973827

n	сумма (× 4)
89	3.13048188536
90	3.15258133288
91	3.13072340938
92	3.15234503100
93	3.13095465667
94	3.15211867783
95	3.13117626945
96	3.15190165806
97	3.13138883754
98	3.15169340607
99	3.13159290356
100	3.15149340107
101	3.13178896757
102	3.15130116270
103	3.13197749120
104	3.15111624718
105	3.13215890121
106	3.15093824393
107	3.13233359277
108	3.15076677249
109	3.13250193231
110	3.15060147982
111	3.13266426009
112	3.15044203787
113	3.13282089249
114	3.15028814140
115	3.13297212408
116	3.15013950606

n	сумма (× 4)
9992	3.14169272364
9993	3.14149259355
9994	3.14169270361
9995	3.14149261357
9996	3.14169268360
9997	3.14149263359
9998	3.14169266359
9999	3.14149265359
10000	3.14169264359
10001	3.14149267359
10002	3.14169262360
10003	3.14149269357
10004	3.14169260361
10005	3.14149271355
10006	3.14169258364
10007	3.14149273353
10008	3.14169256367
10009	3.14149275349
10010	3.14169254371
10011	3.14149277345
10012	3.14169252376
10013	3.14149279339
10014	3.14169250381
10015	3.14149281333
10016	3.14169248388
10017	3.14149283327
10018	3.14169246395
10019	3.14149285319

❒ Таблица. Сумма ряда, вычисленная с помощью Excel

Список литературы

- *Аксененкова И., Малыгина О., Чекалкин Н., Шухов А.* «Ряды. Интеграл Фурье и преобразование Фурье. Приложения», изд-во «Либроком», 2009.
- *Титчмарш Э. Ч.* «Введение в теорию интегралов Фурье», изд-во «КомКнига», 2009.
- *Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А.* «Математический анализ в задачах и упражнениях. Несобственные интегралы и ряды Фурье», изд-во «Факториал», 1998.
- *Виноградова И.А., Садовничий С.Н.* «Задачи и упражнения по математическому анализу. В 2-х частях. Часть 2: Ряды, несобственные интегралы, ряды Фурье», изд-во «Дрофа», 2004.
- *Рогозинский В., Харди Г.* «Преобразования Фурье и Лапласа в системах компьютерной математики», изд-во «Либроком», 2009.
- *Кристалинский Р., Кристалинский В.* «Преобразования Фурье и Лапласа в системах компьютерной математики», изд-во «Горячая Линия — Телеком», 2012.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Р

С

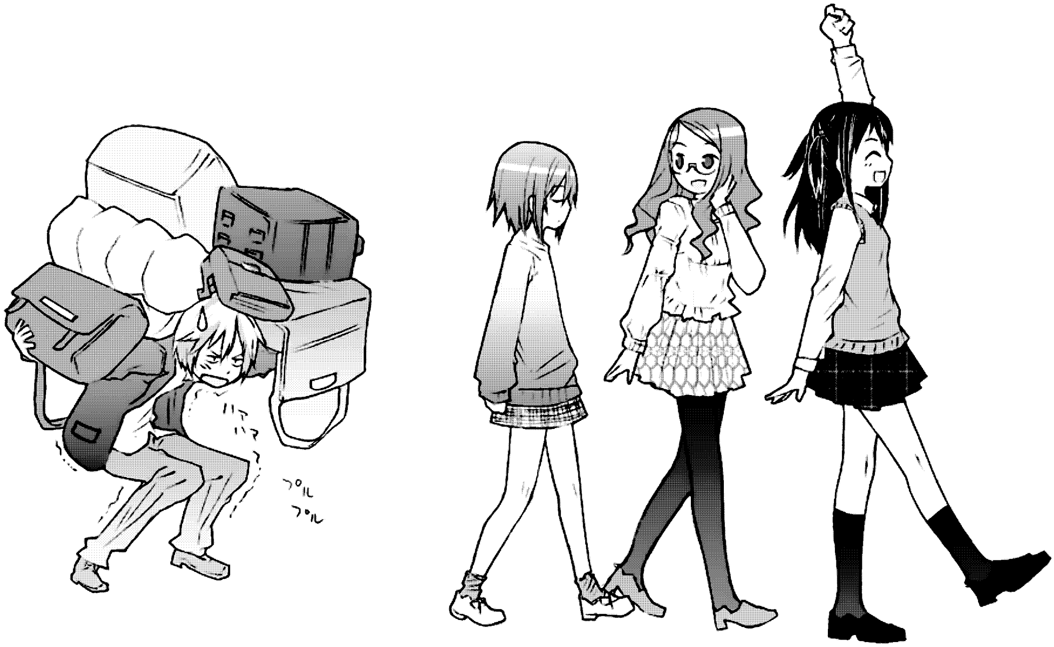
Т

У

Ф

Ч

Э



Книги издательства «ДМК Пресс» можно заказать в торгово-издательском холдинге «Планета Альянс» наложенным платежом, выслав открытку или письмо по почтовому адресу:
115487, г. Москва, 2-й Нагатинский пр-д, д. 6А
При оформлении заказа следует указать адрес (полностью), по которому должны быть высланы книги; фамилию, имя и отчество получателя.
Желательно также указать свой телефон и электронный адрес.
Эти книги вы можете заказать и в интернет-магазине: www.alians-kniga.ru.
Оптовые закупки: тел. (499) 782-38-89
Электронный адрес: books@alians-kniga.ru.

Митио Сибуя (автор), Хироки Харусэ (художник)

Занимательная математика. Анализ Фурье. Манга

Издательство выражает благодарность *Панфилову В. О.*

Главный редактор *Д. А. Мовчан*
dmkpress@gmail.com

Перевод с японского *А. Б. Клионский*
Научный редактор *И. А. Сенников*
Верстальщик *А. Ю. Анненков*

Формат 70×90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Объём 16 п. л. Усл. п. л. 18,7. Тираж 200 экз.

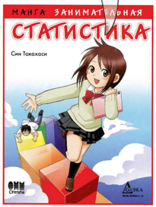
Веб-сайт издательства ДМК Пресс: www.dmkpress.com

ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ МАНГА

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ СТАТИСТИКА

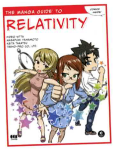
ПРОСТОЙ, ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ, НАГЛЯДНЫЙ И НЕОБРЕМЕНИТЕЛЬНЫЙ ПУТЬ ИЗУЧЕНИЯ ШКОЛЬНОЙ И ИНСТИТУТСКОЙ ПРОГРАММЫ!

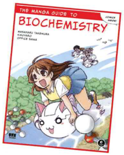
ЯПОНЦЫ ТАКИЕ УМНЫЕ, ПОТОМУ ЧТО УЧАТСЯ ПО МАНГЕ!



ЧИТАЙ КОМИКСЫ И СТАНОВИСЬ ОТЛИЧНИКОМ!

ВСЕ КНИГИ ПРОВЕРЕНЫ ПРЕПОДАВАТЕЛЯМИ И ПРОФЕССОРАМИ ВЕДУЩИХ ПРОФИЛЬНЫХ ВУЗОВ ДЛЯ ТОЧНОГО ПЕРЕВОДА И АДАПТАЦИИ.





КНИГИ СЕРИИ "ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ МАНГА" МОЖНО ЗАКАЗАТЬ НА САЙТЕ ИЗДАТЕЛЬСТВА WWW.DMKPRESS.COM ИЛИ WWW.ДМК.РФ

Нет кризису! Весь 2015 год при заказе на сайте цена 349 руб + доставка

ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ МАНГА

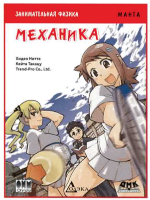
ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ ФИЗИКА

– ПОЧЕМУ ЯПОНЦЫ ТАКИЕ УМНЫЕ?

ПРОСТОЙ, ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ, НАГЛЯДНЫЙ И НЕОБРЕМЕНИТЕЛЬНЫЙ ПУТЬ ИЗУЧЕНИЯ ШКОЛЬНОЙ И ИНСТИТУТСКОЙ ПРОГРАММЫ!

ЧИТАЙ КОМИКСЫ И СТАНОВИСЬ ОТЛИЧНИКОМ!

– ОНИ УЧАТСЯ ПО МАНГЕ!



ВСЕ КНИГИ ПРОВЕРЕНЫ ПРЕПОДАВАТЕЛЯМИ И ПРОФЕССОРАМИ ВЕДУЩИХ ПРОФИЛЬНЫХ ВУЗОВ ДЛЯ ТОЧНОГО ПЕРЕВОДА И АДАПТАЦИИ.

КНИГИ СЕРИИ "ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ МАНГА" МОЖНО ЗАКАЗАТЬ НА САЙТЕ ИЗДАТЕЛЬСТВА WWW.DMKPRESS.COM ИЛИ WWW.ДМК.РФ

Нет кризису! Весь 2015 год при заказе на сайте цена 349 руб + доставка

ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ МАНГА

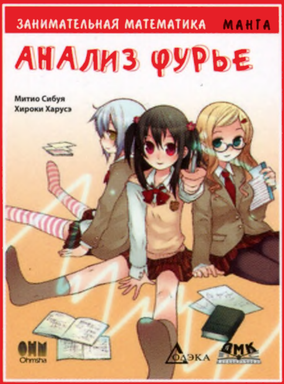
ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

ЗАНИМАТЕЛЬНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

ПРОСТОЙ,
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ,
НАГЛЯДНЫЙ И
НЕОБРЕМЕНИТЕЛЬНЫЙ ПУТЬ
ИЗУЧЕНИЯ
ШКОЛЬНОЙ И
ИНСТИТУТСКОЙ
ПРОГРАММЫ!

ЯПОНЦЫ
ТАКИЕ УМНЫЕ,
ПОТОМУ ЧТО
УЧАТСЯ
ПО МАНГЕ!

ЧИТАЙ КОМИКСЫ И
СТАНОВИСЬ ОТЛИЧНИКОМ!



ВСЕ КНИГИ ПРОВЕРЕНЫ
ПРЕПОДАВАТЕЛЯМИ
И ПРОФЕССОРАМИ
ВЕДУЩИХ ПРОФИЛЬНЫХ
ВУЗОВ
ДЛЯ ТОЧНОГО ПЕРЕВОДА
И АДАПТАЦИИ.

ISBN 978-5-97060-269-0
9 785970 602690 >

КНИГИ СЕРИИ "ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ МАНГА"
МОЖНО ЗАКАЗАТЬ НА САЙТЕ ИЗДАТЕЛЬСТВА
WWW.DMKPRESS.COM ИЛИ WWW.ДМК.РФ

Нет кризису! Весь 2015 год при заказе на сайте
цена 349 руб + доставка