А.С. АДЖЕМОВ

# Мир Информационной Реальности

Москва
2006

А.С. Аджемов

# МИР ИНФОРМАЦИОННОЙ РЕАЛЬНОСТИ



Москва



ИРИАС

2006 г.

УДК 004

**А.С. Аджемов**. Мир информационной реальности. – М.: ИРИАС, 2006. – 296 с., ил. 68

**ISBN 5-93592-014-X**

Процесс интеграции информационных и телекоммуникационных систем приводит к формированию качественно нового объекта, а именно, инфокоммуникационной среды, позволяющей решать не только традиционные задачи данного направления, но и рассчитывать на появление нового информационного мира с новыми возможностями и новыми отношениями. Книга рассчитана на широкий круг читателей, вовлекаемых все сильнее и сильнее в информационные и телекоммуникационные технологии.

Ил. 68. Табл. 20.

Аджемов Артем Сергеевич.

ЛР № 70785 от 15.12.97 г.
Подписано в печать 1.02.06 г.
Формат 60х90/16. Печать офсетная. Усл. печ. л. 12. Уч. изд. л. 9
Тираж 3000 экз. Изд. 4. Зак. 192.
Агентство ИРИАС, 101000, Москва, Кривоколенный пер., 14, стр. 1

ОАО ПП «Наш Современник»
445043, г. Тольятти, Южное шоссе, 30

ISBN 5-93592-014-X 

## Предисловие

Был август месяц, точнее его вторая половина, а еще точнее 21 августа 2002 года. Ежегодная, но каждый раз особенная и непредсказуемая, буря вступительных экзаменов в самый лучший университет связи и информатики пошла на убыль, и наступил период относительного затишья, что создавало ощущение незанятости и какого-то дискомфорта. Окружающие телефоны больше не заполняли воздушное пространство, то трамвайным звоном, то отрывками из классических произведений великих композиторов, а то и каким-то космическим улюлюканьем, и как-то само собой появилось время для написания этой книги. Книги, в которой автору хотелось избежать сложных формул и специальной терминологии, дабы сделать ее приятной для чтения максимально широкому кругу читателей.

В то же время были предприняты усилия по сохранению строгости вводимых понятий и обоснованию всех выводов и заключений. Кроме того, очень хотелось сформировать у любопытствующих творческий азарт при прочтении тех или иных разделов, а также заинтересованность, ведущую к желанию почитать еще что-нибудь на эту тему, дабы поосновательней разобраться в предмете. Это особенно актуально, поскольку сегодняшнее развитие средств связи и вычислительной техники создали серьезные предпосылки для кардинального влияния на окружающий нас мир и общество.

Размышляя об этом, автор решил, что традиционная форма изложения подобных материалов не сможет помочь в реализации поставленной задачи, поэтому были предприняты усилия осуществить это несколько иначе, в надежде, что результат будет положительно оценен читателями.

Конечно, многое, о чем хотелось и, наверное, следовало бы сказать, по разным причинам не вошло в данную книгу, которую автор рассматривает, как некоторое начало. Более того, по техническим причинам не получилось сопроводить текст книги соответствующими настроению музыкальными фрагментами, что было бы весьма полезно при неспешном прочтении и обдумывании написанного.

Однако, кто нам мешает сделать все это в будущем?

# Введение

Мир Информационной Реальности **(МИР)** - несколько замысловатое словосочетание, которое впоследствии мы постараемся развернуть при подробном обсуждении проблем, которые уже существуют, и будут продолжать возникать нарастающими темпами по мере того, как человеческая цивилизация, начав говорить об информации, информатизации, информационных технологиях, наконец, информационном обществе, переходит к стадии практического воплощения этих идей.

С древних времен известно, что прежде чем начинать что-то обсуждать следует договориться о терминах, т.е. постараться достичь некого единого или одинакового понимания того, о чем идет речь. Однако уже здесь мы сталкиваемся с проблемой оценивания того, что значит единое или одинаковое понимание? Если при общении с кем-либо, Вы предложите, собираясь на пикник, взять с собой мясо для шашлыка, например, баранину или свинину, то в такой постановке вопроса и его обсуждении Вы наверняка, достигнув консенсуса, будете знать, что шашлык, в зависимости от результатов договоренности, будет либо из свинины, либо из баранины (для определенности полагаем, что другие возможные решения не принимаются). Но как только Вы попробуете установить какой степени жирности надо выбрать мясо, то тут уже, оперируя понятиями жирное, не очень жирное, совсем не жирное и т.д., столь же ясные как ранее договоренности станут невозможны, поскольку представления о степени жирности могут оказаться не совпадающими. В обыденной жизни, встречаясь на каждом шагу с аналогичными задачами, мы научились неплохо ориентироваться и находить соответствующие решения. Однако, как только мы пытаемся описать данные проблемы, придать им некий строгий формализованный вид, то сталкиваемся со значительными трудностями, преодолеть которые зачастую не удается. В общем виде вышеприведенный пример выбора мяса для шашлыка Математики отнесли бы к проблемам, существующим в метрических или топологических пространствах, а само существование решения к проблеме существования континуума. Физики - Химики приступили бы к изучению вещества, оно же мясо, его количественных и качественных характеристик, а всевозможные Технари озаботились бы проблемой того, как из мяса приготовить требуемое изделие, а именно, шашлык. Медики, наверняка, высказались бы о вреде и пользе предполагаемого продукта для человеческого организма. Философы и представители других гуманитарных наук и профессий могли бы порассуждать вообще о философской и этической сторонах поедания мяса и т.д. и т.п. Как видим, обычное, обыденное дело, которое большинство людей решает без особых проблем, может превратиться в сложнейшую математико-физико-химико-технико-медико-философско-прочую конструкцию, смысл которой по мере ее увеличения делается все более не ясным, а вид - раздражающе величественным, но бесцельным. Так зачем нам все это? Просто жуть, какая-то!

Однако!!!

В самом начале было объявлено об идеях формирования нового информационного общества, которое должно стать новой стадией развития земной цивилизации. Пока не очень понятно, что это за общество. Кто в нем будет жить и по каким правилам? Но элементы этого здания уже начинают формироваться. Информационные технологии в сочетании со средствами телекоммуникаций уже вторглись практически во все сферы человеческой деятельности. Появился и похоже уже занял прочное место даже термин инфокоммуникации (инфотелекоммуникации), объединивший в себе вышеназванные понятия. Поражающими темпами ведутся работы в области генетики, биологии, медицины. Появляются все более мощные компьютеры, «обещающие» в недалеком будущем помочь человеку в решении множества проблем.

А может быть и заменить его?!

В связи с этим представляется весьма важным обсудить базовые, концептуальные положения, которые следует или целесообразно использовать при формировании нового информационного мира - **мира сосуществования человека и инфокоммуникационных (инфотелекоммуникационных) систем**. Каким будет это сосуществование — мирным или враждебным, — предвидеть очень сложно, но, по-видимому, нужно или, по крайней мере, хочется, поскольку экологические проблемы сегодняшнего дня доказывают, что относительно простое сосуществование людей и механизмов может иметь необратимые и губительные для человека последствия, а инфокоммуникационные технологии по силе своего воздействия на мир людей оказываются еще более могущественными. **Отсюда главное условие: руководствуясь чувством самосохранения, необходимо быть твердо уверенным в том, что выпущенный из бутылки Джин в необходимом случае может быть усмирен и вновь отправлен на проживание по старому адресу**.

Для введения некой определенности назовем вышеназванный мир - **Мир Информационной Реальности (МИР)!**

Поскольку Мир Информационной Реальности - это **МИР**, — то, следуя очевидной логике, он, этот **МИР**, не должен быть пуст. Кто-то или что-то должны существовать в нем, осуществлять какие-то действия, подчиняться неким законам и проч. Хотя, как отмечалось выше, всякие попытки формализовано и стройно представить это зачастую оказываются какими-то надуманными и бессмысленными.

Завершив данный абзац, невольно начинаешь чувствовать себя известным персонажем, который ходит по кругу, не помня начала и не понимая как можно что-либо изменить. Пытаясь договориться о терминах, приходится оперировать словами, каждое из которых может иметь очень разное толкование различными людьми и фактически нуждается в уточнениях, определениях, пояснениях и т.д.

Единственным выходом из этого положения может быть принятие «волевого» решения по принципу: «Да будет так!» Так вот, разрывая круг, провозгласим судьей для всех наших рассуждений **Здравый Смысл (ЗДРСМ)**, полагая, что уж эта штука нам хорошо известна. В дальнейшем к ЗДРСМу мы добавим и другие способы обоснования суждений, но это будет позднее. А сейчас есть ЗДРСМ и мы знаем, что это такое!

Пользуясь ЗДРСМом, как неким универсальным инструментом, пригласим к участию в наших последующих встречах, дискуссиях и спорах представителей очень важных областей человеческих знаний, полагая, что каждый из них, владея ЗДРСМом, в то же время является специалистом в своей особенной области и его видение проблем, в результате этого, имеет соответствующую профессиональную окраску.

Поскольку ЗДРСМ подсказывает, что количество приглашенных не должно быть очень велико, но в то же время каждый из них напротив должен по возможности отражать разнообразные области человеческих знаний и действий, то пригласим, для начала пятерых, а именно, тех, кто помимо ЗДРСМа понимает кое-что в математике, физике-химии, инфокоммуникациях, медицине и гуманитарных науках: философии, искусстве и т.д.

Конечно, в каждой из вышеназванных областей есть большое количество достойнейших, гениальных представителей человечества, и мы будем прибегать к их суждениям и трудам, однако в наше «путешествие» по **МИР**у пригласим виртуальных персонажей, которые на самом деле могут существовать и заниматься совершенно другим делом. В этом случае, как это принято, оговоримся, что всякие совпадения и соответствия реальных людей и «приглашенных» виртуальных персонажей являются случайными и ни в коей степени не предполагают нанести кому-либо обиду или огорчения.

По видимому большинство людей, если не все, изучавшие когда-либо математику, помнят и иногда с удивлением отмечают, что в ней существуют некие постоянные величины, имеющие огромное значение. Прежде всего - это числа **«π»** и **«е»**! Соглашаясь с вышеизложенным и отдавая дань уважения великим восточным ученым и мыслителям, назовем нашего героя, владеющего ЗДРСМом и понимающего кое-что в математике, господином Пи. А отчество у него пусть будет Е. При этом, конечно, не следует думать, что если у кого-то по имени Е появился малыш по имени Пи, то это означает, что число **«π»** появилось из числа **«е»**!

Хотя кто его знает?! Ведь если **«π»** скрестить с **«d»**, то получится **πxd**, а это длина окружности **С**! Так что все может быть. Шутка!

Понятно, что основным орудием труда всякого математика является то, что находится в его голове. Исходя из этого утверждения, фамилия господина Пи Е, конечно же, Тет. В результате такого обоснования и отбора первым в нашей истории персонажем и жителем **МИР**а оказался математик Тет Пи Е!

Вторым по номеру, но не по значению, персонажем и жителем **МИР**а будет замечательная особа Сила Водородовна Вселенская! Во-первых, как известно, «...без женщин жить нельзя на свете, нет...», а во-вторых, и в мире людей, когда он создавался, было как-то так же, а в третьих - ЗДРСМ и женщины неразделимы, да и специалист по физике, химии и т.д. она неплохой!

Поскольку **МИР** - это Мир Информационной Реальности, то рассматривать его без специалиста в областях информатики и телекоммуникаций совершенно невозможно. При этом, как отмечалось, взаимное проникновение этих областей столь сильно, что целесообразно говорить об их интегральном представлении в виде инфотелекоммуникаций или сокращенно инфотел. Именно из этих букв, как оказалось, состоит фамилия третьего жителя **МИР**а, а именно, Филетон, что как выяснилось позднее, имеет определенный смысл при написании ее (фамилии) на различных европейских языках, а это очень важно, поскольку люди, говорящие на этих языках, сделали для инфотелекоммуникаций настолько много, что придуманные ими слова проникают в другие языки с необычайной легкостью и приживаются там навсегда. А вот имя и отчество у господина Филетона (позднее выяснилось, что правильное звучание фамилии на русском языке - Файлтон), конечно же, Бит Байтович!

Следующим персонажем, находящимся в **МИР**е, разумно выбрать представителя медицины, поскольку, как уже отмечалось, вопросы охраны здоровья человека в условиях совместного проживания с различными машинами и механизмами являются чрезвычайно актуальными, а уж с инфотелекоммуникационными системами тем более. Соглашаясь с этим, Пи Е, Сила Водородовна и Бит Байтович пришли к выводу, что в их компании ну никак нельзя обойтись без представителя медицины и при этом выходца из народов Кавказа. Там ведь и долгожителей больше, чем где-либо, и Ноев Ковчег там, и воздух прекрасный, а песни и танцы какие, а вино, а ....! В общем, знакомьтесь Зонгаид Лечевич Профилактян!

Самым сложным получилось пригласить кого-либо из представителей гуманитарных областей, поскольку что-либо измерить там (в этих областях) и как-то выстроить по порядку оказалось невозможно. Попытки Пи Е и Бита Байтовича внести какое-либо обоснование на основе строгих логических доказательств не имели успеха у Силы Водородовны. Пришлось прибегать к доводам господина Профилактяна, который все-таки сумел убедить всех, что в их компании необходима еще одна прекрасная особа, а именно, Муза-Диф! Муза-Диф, и этим все сказано. Отчество и фамилия в данном случае ни к чему!

Итак, **МИР** и пять его жителей, выбранных благодаря ЗДРСМу, начинают свой информационный путь и существование, за которым в меру наших возможностей мы будем наблюдать, надеясь почерпнуть что-либо важное для себя.

## 1. Где мы живем? И кто мы?!

Я живу в Москве. А я - в деревянной избе, а мой родственник — на Аляске. Я — Заслуженный ветеринар, а я Скрепкин Фердинанд Максудович, а вот он - очень хороший человек.

Так, где мы живем и кто мы?

Ответов, как следует из приведенного выше, может быть очень много. И каждый из них в зависимости от контекста будет справедлив, логичен и главное адекватен той ситуации, в которой происходит данное обсуждение. А помогает разобраться во всем этом, как мы видим, ЗДРСМ!

«Хорошо, хорошо,- послышался голос прекрасной Силы Водородовны. - Но давайте все же посмотрим на этот вопрос глобально, во вселенском масштабе. Да вот и Муза меня поддерживает».

«Правильно, дорогая моя, Силочка Водородовна! А то как-то скучно. Живу в Москве, в деревянной избе, да еще вдобавок и хороший ветеринар. Что-то уж больно приземленно это. Давайте посмотрим на это с позиций небожителей, философов, наконец».

«Давайте, давайте, - поддержали остальные жители МИРа, - но вот только кого попросим первым изложить свой взгляд на данную проблему. Может быть, Вы, Муза, и начнете»?

«Я?! Ну что ж, - охотно согласилась Муза-Диф. - Хотя постойте. Пусть лучше это сделает Пи Е! Вы не возражаете, господин Тет?»

«Да нет, что Вы! С огромным удовольствием! - без колебаний откликнулся Тет, довольный тем, что среди прочих он оказался как-то особо отмечен вниманием дам. - Но только с Вашего разрешения я позволю себе некоторые отступления, которые могут показаться Вам лишними и не относящимися к существу вопроса. Однако по другому мне будет трудно выразить свою мысль. Хотя в любой момент Вы можете прервать меня».

«Слушай, тебе кокетничать не надоело? - вмешался Профилактян. - Давай, начинай, а мы уж с Байтычем проследим, чтобы ты не очень увлекался».

## 2. Точка зрения Тета Пи Е на вопросы 1

«За своеобразной символикой формул, за интегралами и сигмами, словно за высокой стеной, уединилась математика от окружающего ее мира. То, что происходит за этой стеной, остается обычно тайной для непосвященного, и в стремлении ее разгадать он представляет себе бескровный механизм «мертвых чисел», функционирующий по законам внутренней необходимости. Тому же, кто остается за стеной, она зачастую закрывает горизонт, мешает взглянуть на внешний мир; он увлекается возможностью оценивать математические факты собственными мерками и находит тщеславное удовлетворение в том, что в его владения не проникает профан».

Вот такое литературное описание, принадлежащее перу известных математиков Г. Радемахера и О. Теплица, я хотел бы процитировать прежде чем перейти к хорошо известным, я надеюсь всем, математическим основам, без которых математика просто не может существовать.

Начнем с чисел.

Почему с них? Да потому, что ЗДРСМ не позволяет представить себе **МИР**, где невозможно что-либо оценить или измерить количественно. Вот, например, сколько нас сейчас здесь жителей **МИР**а? Правильно, Зонгаид, говоришь, ровно пять. Вот видите без чисел никуда! Хотя надо признать, что не все представители живого мира наделены способностью к счету. Например, многие птицы или особи животного мира не могут сосчитать даже свое потомство, фиксируя лишь факт его присутствия или отсутствия, но не их количество. То есть, если один или несколько детенышей исчезают, но при этом какая-то часть остается, то их родители никакого беспокойства на этот счет не выказывают.

Отметив вышеизложенное как результат практических наблюдений исследователей, будем утверждать, что благодаря ЗДРСМу людям пришло в голову отмечать что-либо количественно (а возможно их кто-то этому научил). По-видимому, вначале приходилось использовать только целые числа, применяя для этого какие-то условные обозначения и некую систему счисления. Не вдаваясь в историю данного вопроса, хотя чрезвычайно увлекательно проследить как это было, отметим, что в настоящее время люди оперируют хорошо известными условными обозначениями целых чисел **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9** и в большинстве случаев даже не задумываются о системе счисления, точнее о том, что используемая система - десятичная».

«Вот именно, - вмешался в повествование Бит Байтович. - А задумываться иногда нужно. Вот в компьютерах, например, используется либо двоичная система счисления, либо восьмеричная. И это, кстати, намного удобнее, чем десятичная! С точки зрения компьютера, разумеется, если допустить, конечно, что у него может быть эта самая точка зрения».

«Да, это действительно очень интересный факт. Людям удобна десятичная система счисления, а компьютерам двоичная или восьмеричная, - включилась в разговор Сила Водородовна. - Кстати обратите внимание на то, что и речь людей при формировании чисел в основном имеет характер десятичной системы счисления. Для этого достаточно взглянуть на таблицу 1, где приведены названия чисел на нескольких языках: русском, английском, немецком и французском, и по просьбе нашего коллеги Зоиганда на армянском языке.

**Таблица 1**

| | Русский | Английский | Французский | Немецкий | Армянский |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | Нуль | Zero | Zero | Null | Զրո |
| 1 | Один | One | Un | Ein | Մեկ |
| 2 | Два | Two | Deux | Zwei | Երկու |
| 3 | Три | Three | Trois | Drei | Երեք |
| 4 | Четыре | Four | Quatre | Vier | Չորս |
| 5 | Пять | Five | Cinq | Fnf | Հինգ |
| 6 | Шесть | Six | Six | Sechs | Վեց |
| 7 | Семь | Seven | Sept | Sieben | Յոթ |
| 8 | Восемь | Eight | Huit | Acht | Ութ |
| 9 | Девять | Nine | Neuf | Neun | Ինը |
| 10 | Десять | Ten | Dix | Zehn | Տաս |
| 11 | Одиннадцать | Eleven | Onze | Elf | Տասնմեկ |
| 12 | Двенадцать | Twelve | Douze | Zwölf | Տասներկու |
| 13 | Тринадцать | Thirteen | Treize | Dreizehn | Տասներեք |
| 14 | Четырнадцать | Fourteen | Quatorze | Vierzehn | Տասնչորս |
| 15 | Пятнадцать | Fifteen | Quinze | Fnfzehn | Տասնհինգ |
| 16 | Шестнадцать | Sixteen | Seize | Sechszehn | Տասնվեց |
| 17 | Семнадцать | Seventeen | Dix-sept | Siebzehn | Տասնյոթ |
| 18 | Восемнадцать | Eighteen | Dix-huit | Achtzehn | Տասնութ |
| 19 | Девятнадцать | Nineteen | Dix-neuf | Neunzehn | Տասնինը |
| 20 | Двадцать | Twenty | Vingt | Zwanzig | Քսան |
| 21 | Двадцать один | Twenty one | Vingt un | Ein und zwanzig | Քսանմեկ |
| 30 | Тридцать | Thirty | Trente | Dreiig | Երեսուն |
| 32 | Тридцать два | Thirty two | Trente deux | Zwei und dreiig | Երեսուն երկու |
| 40 | Сорок | Forty | Quarante | Vierzig | Քառասուն |
| 43 | Сорок три | Forty three | Quarante trois | Drei und vierzig | Քառասուն երեք |
| 50 | Пятьдесят | Fifty | Cinquante | Fnfzig | Հիսուն |
| 54 | Пятьдесят четыре | Fifty four | Cinquante quatre | Vier und fnfzig | Հիսուն չորս |
| 60 | Шестьдесят | Sixty | Soixante | Sechzig | Վաթսուն |
| 65 | Шестьдесят пять | Sixty five | Soixante cinq | Fnf und sechzig | Վաթսուն հինգ |
| 70 | Семьдесят | Seventy | Soixante-dix | Siebzig | Յոթանասուն |
| 76 | Семьдесят шесть | Seventy six | Soixante seize | Sechs und siebzig | Յոթանասուն վեց |
| 80 | Восемьдесят | Eighty | Quatre-vingts | Achtzig | Ութսուն |

| | Русский | Английский | Французский | Немецкий | Армянский |
|---|---|---|---|---|---|
| 87 | Восемьдесят семь | Eighty seven | Quatre-vingts sept | Sieben und achtzig | Ութանասուն յոթ |
| 90 | Девяносто | Ninety | Quatre-vingt-dix | Neunzig | Իննսուն |
| 98 | Девяносто восемь | Ninety eight | Quatre-vingt-dix huit | Acht und neunzig | Իննսուն ութ |
| 100 | Сто | Hundred | Cent | Hundert | Հարյուր |
| 200 | Двести | Two hundred | Deux cents | Zwei hundert | Երկու հարյուր |
| 300 | Триста | Three hundred | Trois cents | Drei hundert | Երեք հարյուր |
| 1000 | Тысяча | One thousand | Mille | Tausend | Հազար |
| 5000 | Пять тысяч | Five thousand | Cinq mille | Fnf tausend | Հինգ հազար |
| 23785 | Двадцать три тысячи семьсог восемьдесят пять | Twenty three thousand seven hundred eighty five | Vingt trois mille sept cents quatre-vingts cinq | Drei und zwanzig tausend sieben hundert fnf und achtzig | Քսան երեք հազար յոթ հարյուր ութանասուն հինգ |

Интересно отметить, что во всех примерах, указанных в таблице 1, формирование названий чисел в целом совпадает. Вначале каждое из чисел от **0** до **9** получает свое наименование. Далее десятки, сотни, тысячи и т.д. также именуются по сходным правилам. Название же любого конкретного числа состоит из некоторого соединения слов, указывающих на количество единиц, десятков, сотен, тысяч и т.д. При этом формирование слова начинается с названия старшего разряда. Все это достаточно привычно и следует из таблицы 1, но есть некоторые странности. В английском и немецком языках числа **10, 11 и 12** имеют свои особенные названия, как если бы использовалась не десятичная, а тринадцатиричная система счисления. В русском же и французском языках этого нет. Однако, французы «навыдумывали» необычные названия внутри второго десятка и самих десятков, называя, например, число семьдесят, как шестьдесят и десять, а число восемьдесят, как четыре раза по двадцать и проч. Конечно, можно сказать, что все это дело вкуса. Какая разница как называть? Как говорится: «Хоть горшком назови, только в печь не сажай»! Но с другой стороны и речь человека является определенным порождением тех процессов, которые в нем происходят, и, безусловно, является его определенной характеристикой, с которой необходимо считаться. Так, что...».

«Стойте, стойте, - запротестовала Муза-Диф. - Мы прервали уважаемого Пи Е в его повествовании, и теперь он скромно ждет, когда мы наговоримся. Давайте все же выслушаем его, а потом приступим к обсуждению. Откровенно говоря, я себя ели сдерживаю как историк, философ и представитель искусств. Так и хочется поделиться своими познаниями».

«Большое спасибо, дорогая Муза, - промолвил Тет, - с Вашего разрешения я продолжаю.

Итак, в **МИР**е возникло понятие целых чисел. Однако сами по себе они могли иметь весьма ограниченное применение без использования определенных действий над ними. Действительно, представим себе древнего кормильца

- отца семейства, который добыл трех мамонтов и одного из них отдал соседу (или соседке). Как ему отчитаться перед вождем или семьей, если известно, что было добыто три мамонта, а притащил он только двух. Налицо необходимость в операциях сложения и вычитания!

Продолжим пример. В силу внушительных размеров упомянутых мамонтов, семья за вечер не смогла съесть целиком и одного, осилила только часть. Следовательно, появилась необходимость в новых числах — не целых, а отражающих часть от целого. Кроме того, очевидна потребность во введении новых действий, а именно, умножения и деления.

Возможно, зарождение чисел и простейших действий над ними происходило несколько иначе, однако можно утверждать, что начало этому было положено благодаря практической необходимости и наличию ЗДРСМа. Это позже некоторые странные люди стали увлекаться числами и действиями над ними, как чем-то особенным и самоценным, и превращаться в то, о чем было сказано в начале п. 2.

Итак, рассмотрим целые числа. Несмотря на то, что каждое из них имеет свое, отличное от других написание и название, можно заметить некоторые общие черты. Так ряд чисел делятся без остатка на **2** и их называют за это четными, а другие на **2** без остатка не делятся и их называют нечетными. При этом может возникнуть вопрос. А есть ли такие числа, которые не являются четными и в тоже время не являются нечетными? Странный вопрос. Но именно такими, отвлеченными от жизни, на первый взгляд, вопросами и занимается математика. Но потом оказывается, что найденные решения и доказательства имеют огромное практическое значение. В этой связи, избегая, по возможности, строгих математических преобразований, займемся изложением некоторых результатов, которые помогут в поисках ответа на поставленные вопросы.

Среди целых чисел выделяют числа, которые делятся без остатка только на **1** и на само себя. Называют их простыми. Например, числа **7** и **13** - простые, а **6** и **105** - нет, т.к. **6=2•3**, а **105=3•5•7**. Простые числа очень важны, хотя бы потому, что любое число представимо в виде произведения простых чисел. Т.е. эти числа - своеобразные неделимые кирпичи, из которых можно построить здание всех целых чисел. Точнее целых и положительных чисел, которые принято называть натуральными. Термин же целые числа подразумевает более широкий класс чисел с учетом не только положительных, но и отрицательных чисел.

К сожалению, до настоящего времени не найдена точная формула простого числа (если она, конечно, существует), однако известно, что простых чисел бесконечно много, и в то же время между двумя простыми числами может расположиться сколько угодно других непростых чисел. Если первое утверждение было доказано во времена Великих Греков (Евклида), то последнее принадлежит достижениям математики не столь далекого прошлого. Хотя, что такое **1000** или **10000** лет для бесконечности? Но это уже видимо к поэтам, к Музе, Музе-Диф!

Занимаясь вычислением площадей различных фигур, греческие геометры обнаружили, что известная теорема Пифагора: сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы, не всегда имеет решение в целых числах. Обратимся к рис. 1.

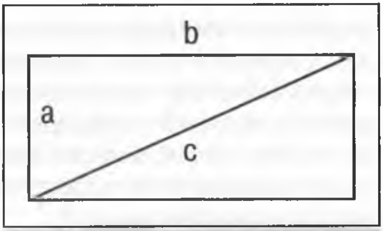



**Рис. 1**

Хорошо известное соотношение $\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$ имеет целочисленное решение при $\mathbf{a = 3}$ и $\mathbf{b = 4}$. В этом случае $\mathbf{c = 5}$. Одна сторона прямоугольника состоит из трех единиц, вторая - из четырех, а диагональ - из пяти. Следовательно, стороны и диагональ прямоугольника соизмеримы, т.е. существует некая единая величина, которая кратное число раз укладывается в сторонах и диагонали прямоугольника. Но при $\mathbf{a = 3}$ и $\mathbf{b = 5}$ выясняется, что не только среди натуральных, но и среди дробных чисел не удается найти такое **c**, которое соответствовало бы заданным **a** и **b**. В рассматриваемом примере приходится писать $\mathbf{c = \sqrt{34}}$ и все. Данное обстоятельство указывает на то, что диагональ прямоугольника в этом случае не соизмерима со своими сторонами, поскольку не существует некой величины, которая кратное число раз укладывалась бы в сторонах и диагонали прямоугольника.

История доносит до нас огромное потрясение от этого факта, которое испытал греческий ученый Платон. Действительно, стройная по тем временам теория об атомистическом строении вещества, предложенная Демокритом, никак не согласовывалась с тем, что различные отрезки оказываются несоизмеримыми и их нельзя измерить какой-либо единой мерой длины. Возникало очевидное противоречие: если материя, а значит и отрезок прямой атомистичен, то как он должен делиться на бесконечное количество частей, чтобы оказаться соизмеримым с другим отрезком. И наоборот, если отрезок делится на бесконечное количество мелких частей, то что тогда представляет собой эта часть? Эта неделимая мера!

Выход из создавшегося положения математики искали столетия, решая великую проблему непрерывности. А числа, о которых говорилось выше, стали называть иррациональными.

В дальнейшем, когда возникли понятия о числовой оси и отрицательных числах, пришлось столкнуться с проблемой извлечения корней из отрицательных чисел. Действительно $\mathbf{\sqrt{4} = \pm 2}$; $\mathbf{\sqrt[3]{-27} = -3}$; а как быть с $\mathbf{\sqrt{-4}}$? Вопрос?! Пришлось ввести новую абстракцию $\mathbf{i = \sqrt{-1}}$ и помимо целых, рациональных, иррациональных, положительных и отрицательных чисел предложить еще комплексные числа, состоящие из понятных нам реальных вышеназванных чисел и еще мнимых чисел, отмечаемых введенной абстракцией **i**. Таким образом, все, что мы собираемся характеризовать некой количественной величиной, представляется в общем виде в качестве комплексного числа **Z = X + iY**, а само одномерное понятие числа трансформируется в двухмерную абстракцию в виде комплексной плоскости. При этом как пойдут дела дальше — покажет время, в зависимости от вводимых действий над числами, поскольку, как мы проследили ранее, всякий новый вид чисел возникал как естественное продолжение (дополнение) уже существующих чисел, отвечающих введению тех или иных новых действий над ними.

В этой связи можно предложить любопытным и увлекающимся читателям попробовать доказать теорему существования каких-либо других, кроме вышеназванных, чисел или доказать противоположное утверждение».

«Как интересно! - воскликнула Муза-Диф. - Надо же, оказывается, есть не только реальные, но и мнимые числа. Однако какими из них можно охарактеризовать что-либо прекрасное или наоборот безобразное, какие действия надо ввести при этом?»

«Это очень серьезный вопрос,- продолжил Тет, - и он решается в математике на основе особых подходов, о которых мы поговорим позднее, потому что сейчас целесообразно вернуться к целым числам, кажущимся такими знакомыми и очевидными, и убедиться в справедливости поговорки о том, что «в тихом омуте - ....».

Для начала позвольте задать «детский вопрос». Каких целых чисел больше: четных или нечетных? Как ты думаешь, Зонгаидушка?»

«Как думаю, как думаю. Хорошо думаю, вот, что я тебе скажу!» - насторожился Профилактян, потому что на этот вопрос был очевиден ответ, что скорее всего количество четных чисел такое же, как и нечетных, вот только число **0** смущало и беспокоило.

Понимая состояние своих товарищей, Тет не стал настаивать на ответе, а задал следующий вопрос.

«Ну, а что Вы скажете: каких чисел больше целых или четных?»

«Слушай, - занервничал Профилактян, - какие странные вопросы задаешь! Вот возьми, посчитай от **1** до **100**. Сколько чисел? Сто! А сколько четных? Половина из них, т.е. всего **50**. О чем тут говорить? Все ясно, как день. А ты нас, что, за несмышленышей принимаешь? Да?!»

«Нет, конечно, - успокоил его и всех остальных Пи Е. - Просто на этом примере я хотел Вам продемонстрировать, сколь увлекательны и даже парадоксальны могут быть математические выводы, противоречащие, на первый взгляд, даже самому ЗДРСМу.

Рассмотрим последовательность положительных целых чисел (**a**) и поставим ее в соответствие последовательности четных чисел (**b**)

$$\begin{array}{ll} (a) & 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ldots \\ (b) & 2\ \ 4\ \ 6\ \ 8\ \ 10\ \ 12\ \ 14\ \ldots \end{array} \qquad (1)$$

Совершенно очевидно, что для каждого целого числа можно указать четное число и наоборот. Таким образом, ни одно из чисел из последовательности (**a**) не остается без пары из последовательности (**b**). Поразительно, но такое объединение осуществляется без остатка! Значит напрашивается странный ответ о равенстве количества целых и четных чисел, который совершенно не совпадает с ясным и четким примером, указанным Зонгаидом.

Впервые данный вопрос был сформулирован создателем теории множеств Георгом Кантом. При этом он заметил существенное различие, которое грамматически выражается различием между количественными и порядковыми числительными. Возвращаясь к приведенному выше примеру, действительно, при рассмотрении бесконечных последовательностей (**a**) и (**b**) на основе принципа попарного соответствия устанавливается, что мощность множества целых чисел такая же, как и мощность множества четных чисел. При этом для конечных последовательностей, о которых говорил Зонгаид Лечевич, выводы очевидны и дорогой Зонгаид прав!»

«Постойте, - оживился Бит Байтович. - А что, если соответствие между последовательностями (**a**) и (**b**) устанавливать по следующему правилу. Из последовательности (**a**) в (1) выбираем нечетные числа и ставим им в соответствие четные числа из последовательности (**b**) в (1). В результате получаем следующие последовательности (**c**) и (**d**):

(c) 1 2 3 4 5 6 7 . . .

(2)

(d) 2 4 6 8 . . .

Что же получается? Попарное соответствие установлено, как и в вышеприведенном примере. Однако в последовательности целых чисел (**c**) в (2) появились «лишние» числа, причем это четные числа такие же, как в последовательности (**b**) в (1), а значит всего целых чисел в последовательности (**c**), приведенной в (2), в два раза больше, чем в последовательности (**d**). И, следовательно, Зонгаид прав всегда! Конечная ли последовательность или бесконечная».

«Не торопитесь, Бит Байтович! - вступила в разговор Сила Водородовна. А я вот предлагаю такое попарное соответствие. Выберем в последовательности четных чисел числа, делящиеся на **10**, и поставим их в соответствие целым числам. В результате получим последовательности (**e**) и (**f**), показанные в (3):

(e) 1 2 3 4 . . .

(3)

(f) 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 32 34 36 38 40 . . .

Теперь получается, что уже в последовательности четных чисел (**f**) в (3) при выполнении принципа попарного соответствия, по сравнению с последовательностью целых чисел (**e**) в (3) появятся «лишние» числа. А значит все наоборот. Чисел больше в последовательности четных чисел (**f**), а не в последовательности целых чисел (**e**)! Да еще во сколько раз! В 5 раз больше, если исходить из (3)!»

После последних слов госпожи Вселенской наступила недоуменная пауза, и только один Пи Е Тет хитро поглядывал на Музу-Диф, ожидая ее реакции, поскольку все остальные, высказавшись, пришли к конфликту с самим ЗДРСМом, а ведь с него все начиналось и он был главным учителем и судьей.

Муза-Диф медлила со вступлением в обсуждение, но затем как-то повеселела и сказала: «Ну и что, подумаешь, а вот Вы, вместо того, чтобы считать какие-то числа, лучше скажите, что красивее восход солнца или его закат и во сколько раз красивее?!».

После этих слов Тет еще больше оживился и продолжил: «Действительно, попробуйте оценить во сколько раз закат красивее восхода солнца или наоборот. Это в зависимости от того, что кому нравится. И в этом случае придется оперировать вообще какими-то странными понятиями: больше - меньше, лучше - хуже, красивее - некрасивее и т.д. При этом количественное измерение этих понятий потребует установления некоего соответствия между ними и числовой шкалой. Однако предлагаю снова вернуться к нашим числам, поскольку именно из этих примеров начинает складываться математическая сторона нашего МИРа, точнее его свойств, которые проявляются в соответствии с вышеназванными законами.

Попробую привести пример из жизни людей. Представь себе Зонгаид, что к тебе в гости придут все твои друзья, а также друзья твоих друзей, а еще друзья друзей твоих друзей и т.д. Разве ты им откажешь в гостеприимстве? Нет, конечно! Так сколько их может придти. Можно сказать, что бесконечно много. Пронумеруем их в соответствии с последовательностью (**a**) из (1). Пусть также каждый из гостей придет в шляпе, которую снимет и положит в прихожей. Шляпы же пронумеруем в соответствии с последовательностью (**b**) из (1). Так вот получается, что когда гости будут уходить, то важно сохранить соответствие между шляпами и их владельцами согласно (1). В противном случае либо кто-то останется без шляпы, хотя в ней пришел (2), либо все уйдут со шляпами, но при этом на вешалке останутся еще лишние головные уборы (3).

Разбирая задачи, эквивалентные вышеизложенному, Г. Кантор предложил отказаться от произвольности в выборе способов попарного соответствия, требуя лишь существования хотя бы одного такого разбиения на пары, которое осуществлялось бы без остатка. В этом случае утверждается, что исследуемые множества имеют одинаковую мощность.

Исходя из данного предложения, удается доказать еще более удивительное утверждение о том, что множество всех рациональных чисел, включающих в себя все целые и дробные числа, имеет мощность не большую, чем мощность множества целых чисел. Доказательство основано также на отыскании попарного соответствия целых и рациональных чисел. В результате Г. Кантор говорит, что множество рациональных чисел «счетное», поскольку при попарном объединении с целыми числами их можно пересчитать.

«Вот здорово! - воскликнул Бит Байтович. - Ну, прям все, как в компьютере, который все считает. Значит в этом смысле компьютерный мир одинаков с миром людей, и мы можем характеризовать МИР, где мы обитаем в настоящий момент».

«К сожалению или к счастью, нет, - возразил Тет, - поскольку Г. Кантор доказал, что множество всех точек отрезка имеет более высокую мощность, чем множество натуральных чисел, о которых мы только что говорили. Другими словами, множество точек отрезка не является счетным. Недостаточно целых чисел, чтобы пересчитать все точки отрезка, даже если он очень короткий, ну, например, **10** см в длину! Хотя, постойте, мы же не знаем, что такое метр, сантиметр и проч. Об этом нам еще поведает Сила Водородовна. А математика, благодаря усилиям Г. Кантора, утверждает и доказывает, что множество рациональных чисел менее мощно, чем множество всех чисел между **0** и **1**. Отсюда следует, что помимо рациональных чисел есть еще какие-то другие, названные нами выше как иррациональные числа».

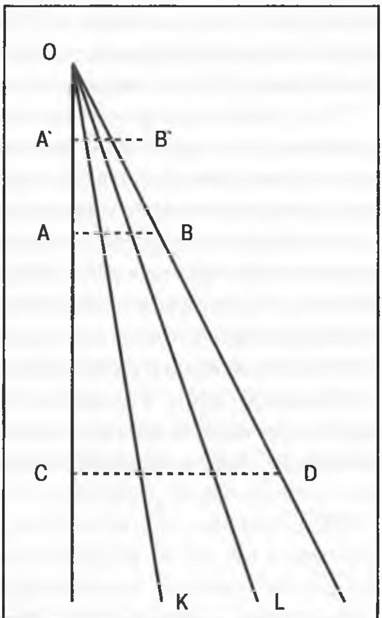


**Рис. 2.**

«А скажите, все-таки, Пи Е, - прервала повествование Тета Сила Водородовна, - в каком отрезке больше точек, где каждая точка есть некое число, в отрезке длиной **1** см или **2** см?».

«Ну что же, давайте, нарисуем эти два отрезка **AB** и **CD**, один под другим, так, как это показано на рис. 2, - начал объяснять Тет. — После этого проведем прямые линии, проходящие соответственно через концы отрезков, т.е. через точки **A** и **C**, а также **B** и **D**. Очевидно, что данные прямые пересекутся в некоторой точке **O**. Далее из точки **O** будем проводить «секущие» прямые, например, **OK** или **OL**, с помощью которых можно утверждать о наличии попарного соответствия точек пересечения этих прямых с отрезком **AB** и соответственно отрезком **CD**. Таким образом, мощность чисел отрезка **AB** такая же, как и мощность чисел на отрезке **CD**.

Обратимся еще раз к рис. 2. Представим себе, что на данном рисунке отрезок **AB** сместится несколько вверх и примет положение отрезка **A'B'**. В результате, сохраняя углы наклона прямых **OC** и **OD**, при попарном соответствии точек (чисел) отрезка **A'B'** и точек (чисел) отрезка **CD** в отрезке **A'B'** окажутся «лишние» точки. Противоположный результат можно получить при смещении вверх не отрезка **AB** на рис. 2, а отрезка **CD**. Как видно, здесь повторяется та же ситуация, которую мы обсуждали, отвечая на вопрос, каких чисел больше целых или четных.

Еще более удивительный результат был получен Г. Кантором, когда ему удалось доказать, что множество точек площади квадрата имеет мощность не большую, чем мощность множества точек стороны квадрата. (Отметим, что на самом деле данное утверждение следует из тех геометрических построений, которые мы демонстрировали на рис. 2).

Кроме того, выяснилось, что мощность множества точек одномерного отрезка не меньше не только мощности множества точек квадрата, но и объема куба! ЗДРСМ начинает бунтовать, но факт остается фактом!!

Таким образом, введенные благодаря ЗДРСМу понятия чисел и действий над ними начали свою «жизнь» в рамках отведенных правил и пришли к результатам, которые не противоречат этим правилам, а прямо вытекают из них, но в то же время воспринимаются ЗДРСМом как очень странные и не понятные. В основе этого, по-видимому, лежит то, что ЗДРСМ знает, что такое **0** или $\infty$, но представить себе это или ощутить не может. По крайней мере, пока не может!

Итак, начав с рассмотрения таких очевидных понятий как целые числа, мы пришли к удивительным результатам, что все, что может быть пронумеровано, или оценено, или поставлено в соответствие неким числам, распадается на два «лагеря», имеющих разные мощности множества этих чисел. Однако до сих пор никому не удалось доказать существует или не существует некий третий «лагерь», занимающий промежуточное положение. Другими словами, не известно существует или не существует некое множество, мощность которого выше мощности множества натуральных чисел, но ниже мощности множества точек отрезка. Данная проблема носит название «проблемы континуума». Она чрезвычайно проста и изящна в своей постановке, но к удивлению не решена до сих пор, являясь блестящим подтверждением того, что зачастую наиболее сложными оказываются именно простые, на первый взгляд, вопросы».

## 3. Дискуссия по сообщению Тета Пи Е по вопросу 1

«Да уж, действительно, задача! Но возможно это не имеет практического значения. По крайней мере, у компьютеров не должны возникать подобные проблемы, - задумчиво проговорил Бит Байтович. - У них ведь все счетно».

«В том то и дело, - согласился Тет, - и получается, что **компьютерный мир по определению не совпадает с миром людей, и следовательно формируемый МИР, как мир сосуществования людей и инфокоммуникационных систем, должен учитывать данные обстоятельства»**.

«Позвольте, а кто Вам сказал, что все то, о чем нам так увлекательно рассказывал Тет, действительно адекватно в полной мере тому, что существует в мире, - вступила в разговор Сила Водородовна. - Ведь помимо представленных нам абстракций существует мир, воспринимаемый нами индивидуально через соответствующие внутренние и внешние органы взаимодействия, в том числе с помощью искусственных механизмов, приборов и проч. Прекрасный пример, вытекающий из математических построений, о друзьях Зонгаида. Стоит комулибо ошибиться и взять не свою шляпу, как вдруг либо кому-то их не хватит, либо они появятся в избытке. ЗДРСМ протестует и требует объяснений. При этом прошу понять меня правильно. Я не оспариваю доказательность изложенных положений, но предлагаю посмотреть на **МИР** с позиций того, что можно измерить, почувствовать и оценить».

«Ну, что же, - согласился Файлтон, - компьютеры уже умеют измерять и оценивать. Пока, правда, не очень ясно, что значит чувствовать, но полагаю, что в дальнейшем этому действию мы найдем соответствующую форму».

«Чувствовать - это чувствовать, - вздохнула Муза-Диф. - Я пока не хочу вступать в дискуссию, но все же позволю себе сказать, что парадоксальность в явлениях или поступках людей не является чем-то невозможным. Не все нуждается в обосновании и объяснениях. Во что-то люди просто верят! Кстати, господин Тет, Вы верите, что **2+2** это **4**, ну и всякое прочее, вытекающее из этого, а кто-то верит во что-то другое. И Вы и другие при этом не оказываетесь свободными от парадоксальности результатов, которые с трудом воспринимаются ЗДРСМом. А, кстати, множества - что это такое? Из чего они состоят? Вот мы, например, тоже множество?»

«Да, конечно, - ответил Тет, - можно сказать, что мы множество жителей **МИР**а. Множество - это некая абстракция, которая характеризует определенную общность объектов или элементов в него входящих. Возвращаясь к нам, еще раз повторю, что мы представляем собой множество жителей **МИР**а и в этом смысле являемся элементами этого множества. Я в то же время могу рассматриваться как элемент множества математиков, Зонгаид Лечевич, как элемент множества медиков и т.д. и т.п. Кроме того, элементы множества могут быть сами множества. При этом возникает интересный вопрос. Может ли множество содержать само себя в качестве элемента? На первый взгляд, ответ на данный вопрос отрицательный, поскольку рассмотренные ранее множества таковыми не являются, да и ЗДРСМ противится, так как в такой постановке вопроса нечто целое, состоящее из каких-то частей (элементов) при этом является своей собственной частью.

Однако такие необычные множества все же существуют. Это, например, множество всех мыслимых множеств. Поскольку здесь элементами являются все мыслимые множества, то следовательно и само вышеназванное необычное множество является также элементом».

«Слушайте, голова кругом идет от Ваших абстракций, - заговорил Бит Байтович, - то ли дело компьютеры. Все ясно! Команда дана, исполняй! Хотя бывает, что и зацикливаются».

«Вот, вот, - обрадовался Тет, - дело все в том, что даже строгая логика порой приводит к противоречиям в самых, казалось бы, обыденных вещах. Например, сейчас я попрошу Вас, уважаемый Бит Байтович, налить каждому из нас по чашке кофе. Вы это сможете сделать без затруднений. А теперь задачу сформулируем немного по-другому. Налить кофе каждому, кто не делает это сам. Итак, также как в предыдущем случае, Вы без затруднений нальете нам кофе. Но как Вы нальете кофе себе? Вы же должны наливать кофе только тем, кто не делает это сам, а значит себе нельзя. Но если себе нельзя, то Вы — тот, кто не наливает себе кофе, а раз без кофе, значит можно. Но опять нельзя, поскольку Вы - это Вы. Парадокс!».

«Браво, браво! - воскликнула Муза-Диф, - совсем нас запутали. Ну, раз так, то вот Вы и наливайте всем кофе и думайте, как выбираться из Ваших парадоксов. Все же мир людей прекрасен и благодаря ЗДРСМу мы находим устраивающие нас решения. Правда, Силушка Водородовна, Вселенская Вы наша»!

## 4. Размышления Силы Водородовны Вселенской по вопросам 1

«Повествование Пи Е, отвечающее на вопросы 1, раскрывает на самом деле некие правила, по которым, возможно, устроен **МИР**, и это важно. Но с другой стороны, реальный мир людей оформлен не просто как набор чисел и формул, взаимодействующих друг с другом. Мы все-таки как-никак из чего-то состоим и называем это материей. Однако Пи Е и множество математиков помогают и очень сильно помогают своими абстракциями компактно, подчеркиваю, компактно и во взаимосвязи явлений составить модель мира и того, что в нем происходит. Например, математика дает прекрасные возможности рассчитать, когда встретятся велосипедист Федя, выехавший из города Вашингтон, и пешеход Сидоров, вышедший из города Париж, если они двигаются навстречу друг другу при соответствующих условиях. Надеюсь, никто не обижается на меня за этот шутливый пример, но смысл его состоял в том, что помимо абстракций математика чрезвычайно практическая наука, используемая как для очень простых задач, так и для весьма сложных. Следует заметить, что выделение математиков в отдельное подмножество множества ученых состоялось относительно недавно. А до этого ученый был «многостаночник», занимающийся и математикой, и философией, и физикой, и медициной, и .... Одним словом кладезь знаний и умений!

Но вернемся, как говорит французская поговорка, к нашим баранам. Прежде всего, физики, позднее химики и другие естественные науки были озабочены вопросами о том, из чего состоит мир людей и какие в нем осуществляются взаимодействия (медицина, кстати, занимается тем же самым, но в отношении самого человека). Для этого, помимо описания видов материи и предполагаемого ее деления на некоторые элементарные составляющие, надо было договориться об измерителях этой самой материи. И здесь, для упрощения изложения, сделаем скачок и объявим, что мы живем в мире, где известно, что такое вперед-назад, налево-направо, вверх-вниз, или, как говорят математики, в трехмерном мире. При этом имеется еще одна интересная вещь, называемая временем, которая по представлениям ЗДРСМа изменяется только в одном направлении».

«Позвольте, уважаемая Сила Водородовна, прервать Вас и дополнить то, что Вы сказали формулировками, принятыми в сегодняшней математике, - проговорил Пи Е, вежливо обратив взгляд за согласием к госпоже Вселенской. - Итак, сегодняшний мир людей может быть представлен математической моделью пустого физического пространства положений, так называемого «конфигурационного пространства» $\mathbf{R}^3$ - трехмерного, однородного и изотропного, непрерывного и дифференцируемого любое число раз, плоского с определенной метрикой над полем вещественных чисел.

Время же представимо в виде пространства $\mathbf{R}^1$ - одномерного, однородного, непрерывного и дифференцируемого любое число раз, плоского и метрического над тем же полем вещественных чисел **R**».

«Слушай, Пи, давай пока больше ничего не говори, - остановил вдохновенные слова Тета Зонгаид. - Давай немного отдохнем от твоих абстракций и послушаем Силу Водородовну. Все же мир реальный - это то место, где люди живут, ссорятся, веселятся. А абстракции твои мы чуть-чуть позже обсудим. Не возражаешь? Вот и хорошо.

Ну а Вы, уважаемая Сила Водородовна, продолжайте, нам это очень интересно» - закончил свою речь Профилактян.

«Спасибо, спасибо, - произнесла госпожа Вселенская, - но Пи Е сделал свое дополнение с моего согласия, и мы воспользуемся этим несколько позже. А сейчас отметим, что **математика - это, по-видимому, единственная наука, где нет времени. Математика со всей своей известной и, наверное, в еще большей степени неизведанной мощью не имеет фактора времени**. Положение о том, что **2 + 2 = 4** было справедливо 100 лет назад, справедливо оно и сейчас. Другими словами, все положения и выводы математики зависят лишь от начальных условий, определений, аксиом и введенных действий. До сих пор уважаемый Пи Е не касался определения функций и действий над ними. По-видимому, мы это еще сможем обсудить, однако, благодаря ЗДРСМу, мы понимаем, что в реальном мире события и явления связаны между собой, они зависят друг от друга. Зачастую эти зависимости не вполне ясны, а уж тем более бывают не понятны природа или сущность этих зависимостей. Однако путем многолетних наблюдений физике удается выявить эти закономерности, находить им объяснения и для компактного описания использовать математические конструкции.

Но вернемся однако к тому, что мир реальный представляется нам трехмерным с одномерным временем. Благодаря ЗДРСМу данный мир было предложено как-то оценивать. Поэтому для пространственных измерений был введен стандарт длины (размера), который для определенности назовем метром, указав еще раз на то, что это чистая условность, поскольку на различных землях и в различных государствах исторически меры длины (размера) были разные. Но в любом случае такая мера была.

История этого вопроса, безусловно, увлекательна, но мы не станем ее касаться, а лишь отметим, что благодаря ЗДРСМу, есть мера длины (размера) - метр и его доли, исходя из десятичной системы счисления, о чем мы уже говорили выше.

В результате этого стало возможным измерить трехмерный мир, Но очевидно, что этого мало, поэтому надо было измерить и время. История этого столь же увлекательна. Действительно, есть такие разные понятия как год, месяц, неделя, день, час, минута и секунда и все они организованны ЗДРСМом в общую конструкцию, которую, кстати, иногда приходится поправлять ввиду того, что найденный довольно давно земной календарь оказался не совсем точен по отношению к звездному календарю. На самом деле абсолютно точное соответствие может оказаться вообще невозможным, и вопрос может ставиться только о точности соответствия. То есть точно также, как если бы мы говорили о точности соответствия рационального числа иррациональному.

При обосновании единицы измерения времени древние ученые выбрали шестидесятеричную систему счисления, что весьма удобно и наглядно представляется на окружности. Отсюда некий диссонанс с десятичной системой счисления, которой, как правило, оперируют люди. В соответствии с этим **60** сек. - это **1** минута, **60** минут - это **1** час, а также **60**-летние циклы, которые используются в календарях многих цивилизаций. Отметим еще раз, что история этого вопроса чрезвычайно увлекательна, но мы будем использовать введенные меры лишь как данность, дополнив только, что стандарт введенной меры длины (размера) хранится в Севре (предместье Парижа) в Международном бюро мер и весов в виде платиноиридиевого стержня, длиной **102** см, на котором нанесены два штриха, обозначающих расстояние в **1** метр. Выбранный сплав и условия хранения стержня уменьшают влияние температуры, влажности и проч. на изменение геометрических размеров. Однако совершенно ясно, что многократное тиражирование стандартов меры длины не вполне удобно для современного мира. Поэтому было предложено за **1** метр принять длину, равную **1650763,73** длины волны оранжевого света, излучаемого специальной лампой, в которой под воздействием электрического разряда светится газ криптон-86. Такое определение значительно удобнее с точки зрения тиражирования стандарта длины и сохранения его точности. Вместе с тем до настоящего времени продолжают использоваться другие стандарты длины, которые имеют определенные соответствия с метром, являющимся основной единицей измерения системы СИ (Systeme Internationale), в соответствии с которой предложена единая унифицированная система измерений различных параметров реального мира. Для примера приведем некоторые соответствия мер длины:

**1** дюйм - **25,4** мм;

**1** фут - **12** дюймов - **302,8** мм;

**1** миля сухопутная («статутная») - **1609** м;

**1** миля морская («адмиралтейская») - **1852** м (длина одной минуты дуги земного меридиана);

**1** вершок - **4,445** см;

**1** аршин - **28** дюймов - **16** вершков - **0,7112** м;

**1** сажень - **3** аршина - **2,1336** м;

**1** верста - **500** сажень - **1,0668** км;

**1** русская миля — **7** верст - **7,4676** км.

На самом деле за пройденный исторический путь использовалось значительно большее количество измерителей длины. Отметим дополнительно лишь то, что с 1983 года метр определен так же, как расстояние, проходимое в вакууме плоской электромагнитной волной за **1/299792458** долю секунды».

«Сила, дорогая моя, - заговорила Муза-Диф. — А почему такие цифры некрасивые? Какие-то они корявые. Почему нельзя как-то все ровненько «нарезать» и измерить кратно **10**? Так, как нам рассказывал Пи Е про десятичную систему счисления».

«Никаких проблем, - отвечая Музе, продолжила Сила Водородовна. - Пожалуйста, пусть за единицу длины будет принято расстояние, которое проходит в вакууме плоская электромагнитная волна за $\mathbf{10^{-8}}$ доли секунды или за $\mathbf{10^{-9}}$ доли секунды. Тогда в первом случае привычный нам метр возрастет в **2,9979248** раза, а во втором наоборот уменьшится в **3,335641** раза. Если это Вас устаивает, пользуйтесь, но ведь неудобно как-то это. Привыкли мы к метру, сроднились, можно сказать, с ним. Да и «корявость», о которой говорила Муза, проявляется только при установлении стандарта длины. Дальше все красиво по системе СИ, согласно десятичной системе счисления. Однако то, о чем говорила Муза-Диф, может иметь значение при оптимизации в целом единиц измерений различных параметров мира реального. Поговорим об этом несколько позже, отметив лишь, что последнее определение меры длины устанавливает через понятие электромагнитной волны связь между трехмерным пространством, в котором представляется мир реальный, и одномерным пространством времени.

Действительно, имея измеритель времени, с помощью геометрических характеристик волны можно определить единицу размера. Можно и наоборот, однако, договорились о некой первичности измерения времени. При этом за секунду принимается промежуток времени, равный сумме **9192631770** периодов излучения, соответствующего переходу между двумя определенными энергетическими уровнями атома цезия-133. Опережая вопрос Музы о «корявости» числа периодов, отметим, что это своеобразная подгонка данного стандарта тому определению единиц измерения времени, к которому мы все привыкли. Измеряемая таким образом секунда приблизительно ровна **1/86400** средних солнечных суток.

Итак, размеры трехмерного мира и время измеримы. Однако, реальный мир не пуст, в нем существуют так называемые материальные объекты, которые к тому же взаимодействуют друг с другом. Почему они существуют и взаимодействуют, никто из людей не знает! Удается лишь наблюдать за тем, что происходит и находить причинно-следственные связи. И здесь к удивлению следует отметить, что феноменологические наблюдения находят математическое описание, как если бы мир реальный «жил» по некоторым математическим канонам и предсказаниям. Однако всегда появлялись новые явления, не укладывающиеся в выбранные математические модели, и приходилось все начинать заново. Ярчайшим примером этого служит классическая механика, когда казалось, что все абсолютно ясно и теоретические построения физиков способны объяснить все явления. Как вдруг из-за маленьких необъяснимых фактов вся теоретиская конструкция закачалась и рухнула, как всеобщая теория, превратившись в весьма уютное «здание» частного случая, использовать которое можно лишь в случаях ограниченных требований к точности получаемых результатов. При этом следует подчеркнуть, что с позиций ЗДРСМа, такая точность в большинстве случаев вполне устраивает людей при анализе тех или иных явлений и использовании законов физики в повседневных практических расчетах. Однако для формирования **МИР**а необходимы более совершенные теоретические построения с тем, чтобы **МИР** был адекватен миру реальному.

Оставим данную формулу в таком общем виде, не уточняя, что значит адекватен, как это оценивать и проч., а провозгласим это лишь как принцип ЗДРСМа. **Итак, МИР должен быть адекватен миру реальному!**

В противном случае **МИР** будет развиваться по-своему и может прийти к каким-либо другим, в том числе, возможно и лучшим результатам, но бесполезным для мира реального, поскольку **мир реальный людям изменить не дано** (имеются в виду его фундаментальные законы)».

«Уважаемая Сила Водородовна, позвольте на секунду прервать Вас, - заговорил Бит Байтович, - какие же все-таки рекомендации Вы предполагаете дать **МИР**у, и на чем они будут основаны?»

«Начнем с обоснования, - продолжила Вселенская, - обоснование - это всегда экспериментальное подтверждение. Да и вообще все науки, занимающиеся исследованием мира реального, начинали и завершают все практической проверкой результатов. Другое дело, что для компактного описания явлений и их прогнозирования на будущее используются математические формулы. При этом заметим, что из-за феномена одностороннего течения времени **все наши практические суждения и выводы относятся к прошлому, а к будущему они имеют отношение лишь как предполагаемая оценка того, что будет.** Речь, конечно, не идет о фундаментальных законах, а об их проявлениях в мире реальном с учетом множества факторов, влияющих на окончательный результат. Например, решая задачу о движении тел, всегда приходится вводить некоторые ограничения по учету влияния всевозможных факторов. Это и силы трения, и упругость ударяющихся частиц, и различные поля и т.д. и т.п. При этом, как выяснилось, аналогично парадоксам в математике, у физиков тоже есть свои неопределенности, например, в модели микромира нельзя одновременно точно указать для микрочастицы ее координаты и импульс. Представить себе аналогичное положение вещей для окружающего людей мира просто невозможно. Действительно, согласно ЗДРСМу мы всегда точно знаем, где находится тот или иной объект, например, самолет или автомобиль, и с какой скоростью они движутся. В противном случае все бы находились в растерянности и недоумении.

Правда, если признать истинность представлений о микромире, то с «его точки зрения» окружающий людей мир также будет казаться странным, но уже от своей определенности.

Однако вернемся к вопросу экспериментальных и теоретических результатов в физике. Рассмотрим пример известных законов Ньютона, которые были им получены путем многочисленных наблюдений, анализа результатов и подбора соответствующего математического описания. В так называемом втором законе Ньютона установлено, что под влиянием внешнего воздействия (силы **F**), тело массой (**m**), получит ускорение (**a**), то есть:

$$\mathbf{F} = \mathbf{m} \bullet \mathbf{a}. \quad (4)$$

Можно, правда, сейчас же запротестовать и сказать, а что такое сила, масса и ускорение? Какова их природа и прочее? На самом деле, что это такое не знает никто. Но как оценки явлений материального мира, позволяющие его измерить и описать, - это с помощью ЗДРСМа воспринимается достаточно хорошо. Таким образом, помимо измерителей размеров пространства и времени необходимо ввести определенные дополнения про массу, например, про силу и т.д. Однако прежде чем перейти к этому, закончим начатое обсуждение второй формулы Ньютона. Итак, экспериментально полученная формула (4) может быть также выведена из простых теоретических рассуждений, если воспользоваться определениями трехмерного пространства и одномерного пространства времени, данных господином Тетом. При этом масса тела (**m**) возникнет как необходимое дополнение при выводе формулы, а не как некое физически осязаемое явление или свойство материи. Для желающих убедиться в этом можно порекомендовать обратиться к книге В. Харитонова «Сотворение мира или «Что может бог». При этом следует дополнить, что помимо определений пространства и времени следует учесть наличие двух известных науке дальнодействующих взаимодействий материальных образований, а именно, гравитационного и электромагнитного. Оба этих явления обнаруживались через экспериментальные наблюдения. Впоследствии им было предложено некое теоретическое обоснование, как с математической точки зрения, так и с точки зрения физики, которая подразумевает некие модели, воспринимаемые ЗДРСМом. При этом электромагнитное взаимодействие представляется более изученным и разработанным в теоретическом и экспериментальном плане, а также в использовании электромагнитного взаимодействия для искусственно созданных человеком конструкций, обеспечивающих инфокоммуникационное общение людей, о чем, я полагаю, Бит Байтович неприменет рассказать. Гравитационное же взаимодействие на сегодня не подвластно человеку и воспринимается им как данность, которую надо учитывать, но как-то повлиять на нее пока не представляется возможным».

«Скажите, пожалуйста, уважаемая Сила Водородовна, - обратился с вопросом Пи Е, - а можно ли утверждать, что кроме названных Вами никаких других дальнодействующих взаимодействий нет? И можно ли как-то доказать это или доказать обратное, что могут быть другие виды дальнодействующих взаимодействий? Ведь если вести речь о формировании **МИР**а, то очень важно заложить в нем адекватные явления и способы взаимодействия».

«В отношении последнего, об адекватности, Вы абсолютно правы. Но на первые вопросы у меня ответов нет! Существуют, конечно, многочисленные гипотезы о существовании так называемых тонких миров с особыми типами влияния. Кроме того, известны описания и некоторых необъяснимых явлений. Обо всем этом я предлагаю поговорить позже в разделе «удивительные истории» и «сумасшедшие идеи». Кстати, мы же уже говорили о том времени, когда классическая механика, как тогда казалось, могла объяснить все. Но этого не случилось. Так, что наше обсуждение, возможно, натолкнет кого-либо на оригинальные и конструктивные идеи. Но вернемся к миру реальному.

Физики, наблюдая за ним, предложили измерять его с помощью меры длины (размера), меры времени, меры массы и т.д. и т.п. При этом для единого понимания и стандартизации существуют определенные эталоны единиц измерений, точность изготовления которых определяет и точность практического их использования. Химики исследовали состав материи и обнаружили, что все известные и даже не известные элементы могут быть структурированы по определенным правилам. Впервые это удалось сделать Дмитрию Менделееву, создавшему свою знаменитую таблицу (таблица 2), которая, как рассказывают, приснилась ему во сне. При этом позднее физики подыскали хорошее обоснование этим правилам на основе атомистической теории строения вещества.

Таким образом, известные объекты мира реального, характеризуются и измеряются через систему различных физических и химических параметров, а также ряда биологических подходов, о которых пока не было ничего сказано. Оставим это для господина Профилактяна и вернемся к физическим измерителям.

В системе СИ помимо стандартов размера и времени основной единицей является также масса тела, равная 1 килограмму. Платиноиридиевый эквивалент этого также хранится в Международном бюро мер и весов под Парижем.

Помимо этого к основным единицам системы СИ относятся также:

- единица силы тока - Ампер (А);
- единица термодинамической температуры - кельвин (К);
- единица силы света - кандела (кд);
- единица количества вещества - моль (моль).

Все остальные единицы измерения являются производными от основных, поскольку определяются на основе соответствующих формул и соотношений. Кроме того, в системе СИ применяют дополнительные единицы измерений, а именно, единица плоского угла - радиан (рад) — и единица телесного угла - стерадиан (ср).

Указанных выше производных единиц измерения достаточно много. Это, например, единица силы **1 Ньютон (Н)**, равная силе, под воздействием которой

**Таблица 2**

**ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ТАБЛИЦА Д.И. МЕНДЕЛЕЕВА**

| ПЕРИОД | РЯД | ГРУППА ЭЛЕМЕНТОВ I | II | III | IV | V | VI | VII | VIII | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | I | (H) | | | | | | H 1 Водород | He 2 Гелий | | |
| 2 | II | Li 3 Литий 1,710 | Be 4 Бериллий 1.000 | B 5 Бор 0,758 | C 6 Углерод 0,631 | N 7 Азот 0,803 | O 8 Кислород 1.000 | F 9 Фтор 1,208 | Ne 10 Неон 1,423 | | |
| 3 | III | Na 11 Натрий 1,169 | Mg 12 Магний 1.000 | Al 13 Алюминий 0,879 | Si 14 Кремний 0,789 | P 15 Фосфор 0,812 | S 16 Сера 0,856 | Cl 17 Хлор 0,911 | Ar 18 Аргон 0,973 | | |
| 4 | IV | K 19 Калий 0,891 | Ca 20 Кальций 0,823 | Sc 21 Скандий 0,766 | Ti 22 Титан 0,719 | V 23 Ванадий 0,726 | Cr 24 Хром 0,746 | Mn 25 Марганец 0,773 | Fe 26 Железо 0.806 | Co 27 Кобальт 0.842 | Ni 28 Никель 0,88 |
| | V | Cu 29 Медь 1,023 | Zn 30 Цинк 0,964 | Ga 31 Галий 0,912 | Ge 32 Германий 0,866 | As 33 Мышьяк 0,861 | Se 34 Селен 0,865 | Br 35 Бром 0.876 | Kr 36 Криптон 0,892 | | |
| 5 | VI | Rb 37 Рубидий 0,853 | Sr 38 Стронций 0,818 | Y 39 Иттрий 0,787 | Zr 40 Цирконий 0,757 | Nb 41 Ниобий 0,787 | Mo 42 Молибден 0,796 | Tc 43 Технеций 0,808 | Ru 44 Рутений 0,822 | Rh 45 Родий 0,839 | Pd 46 Палладий 0,909 |
| | VII | Ag 47 Серебро 0,877 | Cd 48 Кадмий 0,847 | In 49 Индий 0,82 | Sn 50 Олово 0,795 | Sb 51 Сурьма 0,791 | Te 52 Теллур 0,792 | I 53 Йод 0.796 | Xe 54 Ксенон 0.804 | | |
| 6 | VIII | Cs 55 Цезий 0,781 | Ba 56 Барий 0,760 | La * 57 Лантан 0,741 | Hf 72 Гафний 0,788 | Ta 73 Тантал 0,784 | W 74 Вольфрам 0,783 | Re 75 Рений 0,785 | Os 76 Осмий 0,788 | Ir 77 Иридий 0,793 | Pt 78 Платина 0,823 |
| | IX | Au 79 Золото 0,831 | Hg 80 Ртуть 0,814 | Tl 81 Таллий 0,799 | Pb 82 Свинец 0,783 | Bi 83 Висмут 0,779 | Po 84 Полоний 0,778 | At 85 Астат 0,779 | Rn 86 Радон 0,782 | | |
| 7 | X | Fr 87 Франций 0,768 | Ra 88 Радий 0,755 | Ac ** 89 Актиний 0,742 | 104 Резерфордий 0,755 | 105 Дубний 0,752 | 106 Сиборгий 0,751 | 107 Борий 0,751 | 108 Гассий 0,753 | 109 Мейтнерий 0,755 | ... 110 ... 0,774 |
| | XI | 111 ... ... 0,778 | 112 ... ... 0,767 | 113 ... ... 0,757 | 114 ... ... 0,747 | 115 ... ... 0,744 | 116 ... ... 0,743 | 117 ... ... 0,743 | 118 ... ... 0,744 | | |

Обозначение элемента — Атомный номер

U 92
Уран
0,715

Значение R-функции системы электронных подоболочек атома

тело массой **1 кг** получит ускорение **1 м/с2**. То есть **1Н=1кг•1м/с²=1кг•м/с²**. При этом ускорение вычисляется через единицы размера и времени. Благодаря такому определению в формуле (4) нормирующий коэффициент равен **1**. Однако такое случается не всегда. В знаменитых формулах, отражающих Закон всемирного тяготения (5), Закон Кулона (6) и закон магнитного притяжения (7), соответственно имеем:

$$\mathbf{F = G \cdot m_1 \cdot m_2 / r^2;} \qquad (5)$$

$$\mathbf{F = k \cdot q_1 \cdot q_2 / r^2;} \qquad (6)$$

$$\mathbf{F = k' \cdot M_1 \cdot M_2 / r^2;} \qquad (7)$$

где $m_1$ и $m_2$ - массы двух тел, $q_1$ и $q_2$ - электрические заряды двух тел, $M_1$ и $M_2$ - магнитные заряды двух тел, **r** - расстояния между телами. Величины **G, к, к’** являются нормирующими коэффициентами. При этом **к** и **к’** зависят от параметров среды, окружающей соответственно заряды $q_1$ и $q_2$ или магниты $M_1$ и $M_2$.

Для любопытных граждан МИРа можно предложить **задачу имени Музы-Диф**: можно ли, а если можно, то как, сделать формулы (5), (6) и (7) «красивыми», добившись равенства единице всех нормирующих коэффициентов **G, к, к’**. Одновременно следует подумать о последствиях и целесообразности этого.

Однако вернемся к формулам (5), (6) и (7). Их очевидная похожесть возбуждает воображение, особенно, если учесть, что эти выражения отражают произведение соответственно удельных значений масс, электрического и магнитного зарядов, приходящихся на единицу расстояния между объектами (**m/r** - удельное количество массы, **q/r** и **M/r** - соответственно удельное количество электрического и магнитного зарядов). Поиск дальнейших аналогий приводит нас к тому, что напряженности электрического и магнитного полей (**E** и **H**) оказываются сходны с понятием ускорения (**a**), являющимся второй производной от понятия размера (длины, расстояния). Однако, прежде чем обсуждать это, попросим господина Тета продолжить свое повествование о математических абстракциях, которые, как выясняется, очень удобны при описании физических явлений и их прогнозировании».

## 5. Дополнения Тета Пи Е к разделу 2

«Действительно, - с видимым удовольствием продолжил разговор Пи Е, - пора обсудить новые математические абстракции, как, например, функции, действия над ними и прочее. Как Вы помните, мы закончили наши математические упражнения обсуждением понятий чисел, действий над ними, а также общих соображений из теории множеств. Мы убедились в том, что иногда выводы, вытекающие из правил, которые устанавливались с самого начала ЗДРСМом, им же впоследствии не воспринимаются и кажутся абсурдными. Однако с этим приходится мириться, так как ЗДРСМ не находит противоречий в исходных формулировках и, таким образом, не видит оснований для их изменения.

Итак, сделаем еще один шаг далее. Видимо, однажды ЗДРСМ позволил заметить, что различные события или явления, происходящие в мире реальном, оказываются зависимыми друг от друга. Например, если подбросить вверх камень и не отойти в сторону, то можно получить неприятные, но весьма запоминающиеся последствия, на основании которых ЗДРСМ помогает прогнозировать поведение и происходящие события. Значит есть нечто изменяющееся исходное и нечто вторичное, также изменяющееся под воздействием исходного. Математика нашла этому определение, введя понятия аргумента и функции. Аргумент чаще всего обозначают через **x, y, z** или **t**, а функции соответственно **F(x)**, $\phi$**(y)**, $\Psi$**(z)** или **f(t)**. При этом возможны различные вариации обозначений как аргумента, так и функций.

В наиболее часто исследуемых математикой случаях аргумент принимает числовые значения из некоторой области, которую принято называть областью значений аргумента или областью определения функции. В зависимости от вида функции формируется новая числовая область, называемая областью значений функции. Для более наглядного отображения используют числовые оси: абсцисс (например, для аргумента **x**) и ординат (например, для функции **f(x)**), на которых представляют графическое отображение функции от аргумента, что хорошо воспринимается ЗДРСМом. В общем виде аргумент может принимать не только просто числовые значения, но и быть функцией от другого или других аргументов, или вообще не являться числовой величиной! Для описания этого и используется понятие области значений аргумента или другими словами области определения функции. В такой же мере это относится и к области значений функции, которая также может выражаться как числами, так и чем- либо другим.

Разнообразие функций безгранично. Однако в своей структуре они базируются на тех действиях, которые были установлены для чисел. Поэтому можно выделить ряд основных элементарных функций, исходя из определения понятия функции и известных действий над числами. К названным функциям относятся:

- степенная функция $y = x^a$, где $a$ - действительное число (при иррациональном $a$ аналогом степенной функции является выражение $\log y = a \bullet \log x$, получаемое путем логарифмирования и потенцирования для $x > 0$).

- показательная функция $y = \alpha^x$, где $\alpha$ - положительное число.

- логарифмическая функция (обратная показательной функции) $y = \log_a x$, где $x > 0$ и $a$ - положительное число.

Помимо вышеназванного с помощью ЗДРСМа было замечено, что многие явления в природе имеют колебательный характер с определенным периодом повторения. Например, ...-день-ночь-..., ...-зима-весна-лето-осень-... и так далее. Использование указанных выше функций не позволяло найти компактное описание таких явлений. В результате пришлось придумать так называемые тригонометрические функции **y=sin x, y=cos x, y=tg x, y=ctg x, y=sec x и y=cosec x**. Обратные тригонометрические функции **y=arcsin x**, **y=arccos x, y=arctg x, y=arcctg x, y=arcsec x** и **y=arccosec x**. Позднее гиперболические, сферические и прочие функции.

Функции, удовлетворяющие условию:

$$P_0(x) \bullet y^a + P_1(x) \bullet y^{a-1} + \ldots + P_a(x) = 0 \qquad (8)$$

где $P_0(x)$, $P_1(x)$,..., $P_a(x)$ - некоторые многочлены от $x$, называемые алгебраическими.

Не алгебраические функции принято называть трансцендентными. Например, $y = \sin 2x$ или $y = 7^{x+1}$ и прочее.

Важнейшей составляющей в исследовании функций явились определения предела переменной $x$ и соответственно функции $f(x)$, а также непрерывности функции $f(x)$. Несколько позже нам потребуются эти определения, поэтому приведем их без каких-либо дополнительных обсуждений, которые могут показаться скучными Музе-Диф и не очень практичными для остальных.

Постоянное число $a$ называется пределом переменной величины $x$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое значение $x$, для которого все последующие значения переменной $x$ будут удовлетворять неравенству:

$$|x - a| < \varepsilon. \qquad (9)$$

Постоянная величина $b$ называется пределом функции $y = f(x)$ при переменной $x$, стремящейся к $a$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$, найдется величина $\delta > 0$, при которой для всех $x$, удовлетворяющих неравенству:

$$|x - a| < \delta, \qquad (10)$$

будет справедливо неравенство для функции $y = f(x)$

$$|f(x) - b| < \varepsilon. \qquad (11)$$

Символически это записывается следующим образом:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad (12)$$

Функция **y = f(x)** непрерывна в точке $x = x_0$, если она определена в ней и в некоторой окрестности **Δx** точки $x_0$ и если выполняется равенство:

$$\lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0 \quad . \quad (13)$$

Изложенное выше дало основание предсказывать поведение функции **f(x)** в зависимости от аргумента **x**, не опасаясь того, что «вдруг» функция вне расчетного значения «поведет» себя вне рамок предсказанного. Так, например, на рис.3a, b изображены соответственно функции **f(x)= 3x + 2** и $F(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$.

Приведенные графики построены на основе анализа функций, включающего в себя анализ так называемых особых точек. Такими точками принято называть значения аргумента, при которых функция **f(x)** стремится к ±∞ или принимает минимальные (максимальные) значения. Последнее обнаруживается с помощью нового действия над функцией, а именно, нахождением ее производной или другими словами ее дифференцированием.

Понятие производной со стороны ЗДРСМа начинает возникать, если задаться вопросом насколько изменится функция **f(x)**, если ее аргумент изменится на величину **Δx**. Ответ очевиден **Δf(x) = f(x + Δx) - f(x)**. Однако зачастую абсолютные значения не столь содержательны, как относительные. Например, у кого-то появилось **1000** таньга-маньга. Так, что это много или мало? Но если известно, что у всех других не больше **10** таньга-маньга

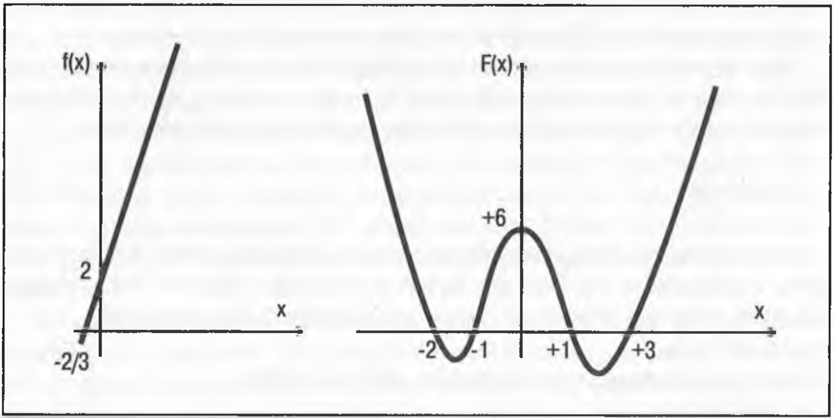



**Рис. 3.**

на каждого, то сразу ясно **1000** таньга-маньга - это круто! Видимо поэтому производная функции определяется как относительная величина, а именно, как предел отношения изменения функции к изменению аргумента при условии, что значение последнего стремится к нулю. Итак, по определению производной функции **f(x)** называют следующий предел, если он, конечно, существует:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x + \Delta x) - f(x)] / \Delta x \quad . \tag{14}$$

Вторая производная **f''(x)** определяется по той же формуле (14) при условии, что в качестве функции **f(x)** берется ее производная **f'(x)**. Аналогично определяются производные более высоких порядков, если они, конечно, существуют.

Понятие производной очень важно в практическом отношении, о чем говорила Сила Водородовна. Первая производная имеет смысл скорости изменения функции, а вторая - соответственно скорости изменения скорости, то есть ускорения. Таким образом, если известна функция **f(x)**, например, рис. 3, и она отражает изменение пути с течением времени (время **t** эквивалентно аргументу **x**), то после несложных вычислений и нахождения второй производной можно оценить ускорение движущегося объекта, а, следовательно, и силу по известной формуле (4), если, конечно, известна масса объекта **m**.

Как видите, математические абстракции оказались очень полезны и более того зачастую незаменимы при проектировании и построении искусственных систем, в отношении которых необходим точный прогноз их существования и «поведения».

Введение согласно (14) понятия производной дает возможность вывести соответствующие выражения для производных основных элементарных функций, а также определить правила дифференцирования сложных функций, состоящих из всевозможных композиций названных основных элементарных функций на основе применения известных действий над числами (сложения, умножения и прочее), а также в случаях, когда многократно аргументом функции являются также функции.

Дальнейшее обобщение достигается в случаях, когда функция зависит от многих аргументов и соответственно процесс дифференцирования ведется по многим переменным. Так, например, рассматривая движение объекта в реальном мире, следует рассматривать его в трехмерном конфигурационном пространстве расстояний с изменяющемся временем. В результате можно анализировать возникающие силы по направлениям трехмерного пространства и делать на основании этого соответствующие выводы и практические рекомендации».

«Пи Е, - остановила повествования Тета Сила Водородовна. - Да Вы в



3 з. 192

физика-механика переквалифицировались. Вот, что значит мир реальный. Абстракции абстракциями, но ведь хочется увидеть их действия! Не так ли?»

«Согласен, - не стал возражать Тет, хотя чувствовалось, что примеры из физики он употребил специально, дабы снискать благосклонность госпожи Вселенской. - Но если позволите, я продолжу. Итак, производные основных элементарных функций известны. Установлены также правила дифференцирования сложных функций. Укажем это

$y = x^n$, где $n$ – действительное число; $y' = nx^{n-1}$;

$y = a^x$, где $a > 0$; $y' = a^x \bullet \ln a$;

$y = \log_a x$, где $x > 0$; $y' = \frac{1}{x}\log_a e$;

$y = \sin x$; $y' = \cos x$;

$y = \cos x$; $y' = -\sin x$;

$y = \operatorname{tg} x$; $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$;

$y = \operatorname{ctg} x$; $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;

$y = \arcsin x$; $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$y = \arccos x$; $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$y = \operatorname{arctg} x$; $y' = \frac{1}{1+x^2}$;

$y = \operatorname{arcctg} x$; $y' = -\frac{x^2}{1+x^2}$

$y = C \bullet U(x)$; где $C$ – const; $y' = cU'(x)$;

$y = u(x) + V(x) + \ldots$; $y' = U'(x) + V'(x) + \ldots$;

$y = U(x) \bullet V(x)$; $y' = U'(x)V(x) + U(x)V'(x)$;

$$y = \frac{U(x)}{V(x)}; y' = \frac{U(x)V(x) - U(x)V'(x)}{V^2(x)} \qquad (15)$$

$y = F(u)$; $u = \varphi(x)$; $y'_x = y'_u \bullet u'_x$, где $y'_x$ - производная по переменной $x$; $y'_u$ – производная по переменной $u$, $u'_x$ – производная переменной $u$ по переменной $x$.

$y = \varphi(x)^{V(x)}$; $y' = V(x) \cdot U(x)^{V(x)-1} \cdot U'(x) + U(x)^{V(x)} \cdot V'(x) \cdot \ln U(x)$;

если для $y = f(x)$ существует обратная функция $x = \varphi(y)$, то $f'(x) = \dfrac{1}{\varphi'(y)}$.

Вместе с тем возникает естественный вопрос об обратном в отношении дифференцирования действии. Это точно так же, как вычитание противоположно (обратно) сложению; деление - умножению и так далее. Поэтому если есть функция **f(x)** и найдена ее производная **f'(x)**, то хотелось бы знать, можно ли зная **f'(x)** провести некие обратные дифференцированию действия и найти исходную **f(x)**.

Математика отвечает утвердительно на поставленный выше вопрос и называет обратное дифференцированию действие - интегрированием. При этом функция **f(x)** называется первообразной, а процесс интегрирования - отысканием первообразной. Если после дифференцирования функции **f(x)** найдена производная **f'(x)**, то при обратном преобразовании из **f'(x)** будет найдена **f(x)** + **C**, где **C** - любая константа. Это означает, что одна и та же производная **f'(x)** соответствует бесконечно большому количеству функций **f(x) + C**, отличающихся друг от друга на некоторую константу.

Кроме того, оказывается, что существуют такие функции, у которых нет первообразной в явном виде, то есть интеграл от такой функции не берется. Некоторым аналогом этого является вычисление корней из чисел. Для одних чисел это возможно, а для других нет. И как Вы помните, из этих рассуждений появились иррациональные числа.

Продолжая аналогию дальше, можно задаться вопросом каких функций больше? Тех, у которых существует первообразная в явном виде или тех, у которых этого нет? Отыскание ответа предоставим жителям **МИР**а.

В отличие от дифференцирования процесс взятия интеграла, то есть нахождение первообразной функции, является задачей значительно более сложной и не формальной. К тому же, как отмечалось выше, значительная часть интегралов не берется. Несмотря на это, интегрирование, как эквивалент суммирования, играет чрезвычайно важную роль в качестве одного из методов преобразований (действий) над функциями. В практическом применении интегрирование помогает в решении задач по нахождению площадей и объемов различных фигур, а также в определении неких зависимостей в случаях, когда известна производная данной функции. Например, если известна функциональная зависимость скорости от времени, то интегрирование этой функции даст возможность найти соответствующую зависимость пути от времени. Кроме того, при построении математических моделей, отражающих некие реальные процессы, используются не только конструкции, при которых функции взаимодействуют с помощью алгебраических операций, но также и посредством операций дифференцирования и интегрирования. В результате образуются дифференциальные уравнения, решение которых дает возможность достаточно хорошо описывать различные процессы и явления. Например, дифференциальное уравнение

$$d^2q/dt^2 + (1/LC)\, q = 0 \qquad (16)$$

позволяет получить адекватное описание колебательного процесса в электрической цепи, показанной на рис.4а. При этом **q** - величина заряда конденсатора, **C** - емкость конденсатора, а **L** - индуктивность, **I** - ток, протекающий по цепи.

Согласно решению данного дифференциального уравнения заряд на обкладках конденсатора изменяется в соответствии с законом гармонических колебаний

$$q = q_{max} \bullet \cos(\omega_o t + \varphi_o), \qquad (17)$$

с частотой

$$\omega_o = 1/\sqrt{LC} \qquad (18)$$

и некоторой начальной фазой $\varphi_o$.

Уравнение аналогичное (16) используется при описании колебательного процесса в механической системе, когда на пружине подвешен груз массой **m**. При этом масса **m** играет роль индуктивности **L**, а жесткость пружины **k** эквивалентна величине **(1/C)**. Заряду **q** соответствует смещение маятника из положения равновесия **S**, а силе тока **I = dq/dt** - скорость **V=dS/dt**.

«Дорогой, Пи Е, - вступила в разговор Сила Водородовна, - Вы забыли упомянуть также об энергетических аналогиях. Сопоставляя механические и элек-

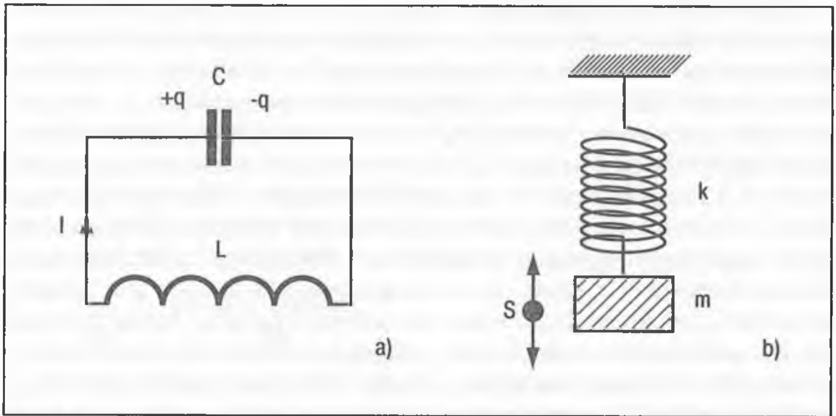



Рис. 4.

трические колебания, можно отметить сходство энергии электрического поля $q^2/2C$ и потенциальной энергии упругой деформации $kS^2/2$, а также сходство энергии магнитного поля $LI^2/2$ и кинетической энергии груза $mV^2/2$. Все это подчеркивает всеобщность неких законов, которые одинаково проявляются в различных физических процессах. Это также подтверждает «практичность» математических абстракций и их удивительную полезность в различных областях человеческих знаний.

Однако, уважаемый господин Тет, продолжайте Ваше повествование, - завершила свое вмешательство госпожа Вселенская».

«С удовольствием, поскольку Ваша поддержка не только приятна, но и полезна с точки зрения оценки важности математических построений. А то некоторые из находящихся здесь персон имеют довольно-таки скучный вид. Ну да ладно, не будем показывать пальцами, - заговорил Тет, - я продолжаю.

Итак, мы познакомились с числами, функциями, а также действиями над ними. Однако оказалось, что в мире реальном иногда важно отмечать не только величину чего-либо или ее зависимость, но и направление действия. Данное обстоятельство хорошо воспринимается ЗДРСМом. Действительно, человек идет по некоторому направлению; паровоз, воздействуя на вагоны, тащит целый состав; буксир, прикладывая усилия, толкает баржу и так далее. Совершенно очевидно, что если изменить направление воздействия, то паровоз вместе с составом поедет назад, да и буксир с баржой также. Таким образом, рассматривая различные взаимодействия в мире реальном, надо ввести понятие направления действия. Математики предложили осуществлять это с помощью векторных величин, для которых задается величина вектора и его направление. Традиционные же числа договорились называть скалярными величинами, подчеркивая этим их отличие от векторных величин, для которых помимо этого задано направление. Новое определение потребовало соответствующих уточнений в отношении действий над векторными величинами, а также действий между скалярными и векторными величинами.

Исходя из требований ЗДРСМа, суммой $\mathbf{n}$ векторов $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n$ является также вектор, определяемый по следующему правилу. К концу вектора $\mathbf{a}_1$ прикладываем начало вектора $\mathbf{a}_2$, затем к концу $\mathbf{a}_2$ прикладываем начало вектора $\mathbf{a}_3$ и так далее. В завершении к концу вектора $\mathbf{a}_{n-1}$ прикладываем начало вектора $\mathbf{a}_n$ (рис. 5). Суммой явится вектор, соединяющий начало вектора $\mathbf{a}_1$ и конец вектора $\mathbf{a}_n$. Операция вычитания векторов реализуется аналогично, но при этом направление отрицательного вектора противоположно направлению положительного вектора. (Для более точного описания этого следовало бы определить понятие противоположного направления в неких количественных терминах. Однако опустим это, понадеявшись на ЗДРСМ, но обратим на это внимание, поскольку в общем случае это может оказаться существенным).

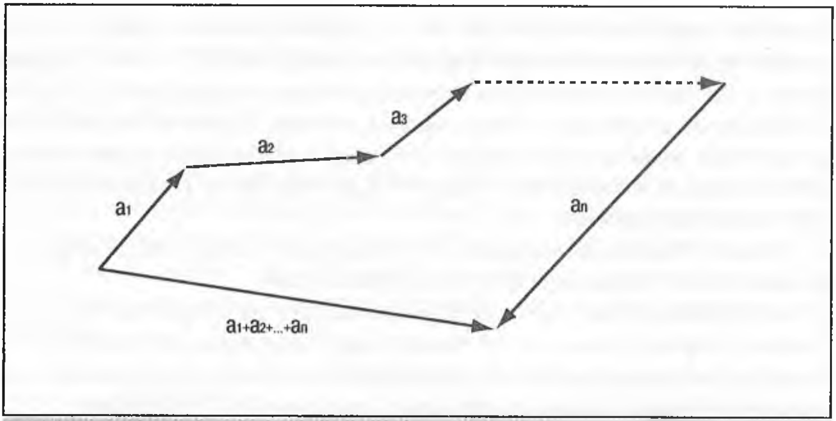



**Рис. 5.**

Отмечая «взаимодействие» скалярных и векторных величин, приведем согласованные со ЗДРСМом соотношения.

1. $(\gamma+\lambda)\mathbf{a} = \gamma\mathbf{a} + \lambda\mathbf{a}$,
2. $\gamma(\lambda\mathbf{a}) = (\gamma\lambda)\mathbf{a}$, (19)
3. $\gamma(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \gamma\mathbf{a} + \gamma\mathbf{b}$,

где $\gamma$ и $\lambda$ - скалярные величины, а **a** и **b** - векторы.

Согласно (19) умножение вектора на скаляр означает соответствующее изменение величины (длины) вектора, но направление его при этом не изменяется.

При перемножении векторов было предложено традиционную операцию умножения скалярных чисел дополнить понятиями скалярного и векторного произведения векторов. Сила Водородовна подтвердит практическую целесообразность вводимых абстракций. Уповая на это, а также на согласие ЗДРСМ, скалярным произведением двух векторов будем называть число (скаляр), равное произведению модулей этих двух векторов на косинус угла между ними. Обозначать это произведение будем через $|\mathbf{ab}|$ и запишем в виде следующей формулы:

$$|\mathbf{ab}| = |\mathbf{a}| \bullet |\mathbf{b}| \bullet \cos\alpha. \qquad (20)$$

При этом справедливы следующие соотношения, доказательства которых можно предложить любопытным жителям **МИР**а:

$$\mathbf{ab} = \mathbf{ba},$$
$$(\gamma\mathbf{a})\mathbf{b} = \gamma(\mathbf{ab}), \qquad (21)$$
$$\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}.$$

Очень часто в решении ряда задач используется то, что если скалярное произведение двух векторов **a** и **b** равно нулю, то векторы **a**, **b** взаимно перпендикулярны и наоборот. Позднее при рассмотрении вопросов разложения функций на элементарные составляющие мы убедимся, что в качестве элементов разложения целесообразно выбирать такие элементарные функции, которые отвечают условию ортогональности. При этом функции **f(x)** и **F(x)** ортогональны на отрезке **[a, b]**, если выполняется следующее равенство:

$$\int_a^b \mathbf{f(x)\,F(x) = 0}. \qquad (22)$$

Если вернуться к рассмотрению действий над числами, то можно заметить, что всякое действие порождает необходимость во введении противоположного действия. Так и в случае скалярного произведения напрашивается вопрос о существовании скалярного деления. Вопрос, безусловно, справедливый, но, к сожалению ЗДРСМ не может найти широкого применения данной операции для мира реального, а математики - для своих математических абстракций. Однако для сохранения традиций рассмотрим операцию скалярного деления, как операцию деления скаляра $\lambda$ на вектор **a** с известным углом $\alpha$ между ним и искомым вектором $\lambda/\mathbf{a}$, где $\lambda/\mathbf{a}$ - вектор, получаемый в результате скалярного деления:

$$\lambda/\mathbf{a} = \lambda/[|\mathbf{a}|\bullet\mathbf{cos}\,\alpha\,]. \qquad (23)$$

В результате такого определения будет получено множество решений, отображающих такие векторы $\lambda/\mathbf{a}$, которые будучи скалярно умножены на вектор **a** дадут в результате скаляр $\lambda$. Графически на плоскости возможны два решения

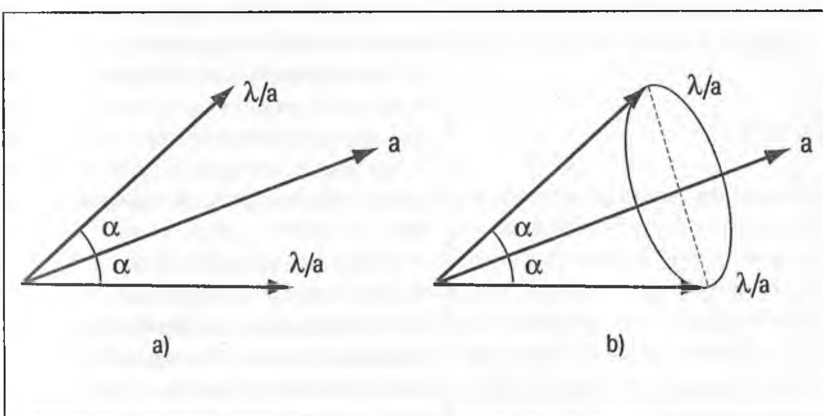



Рис. 6.

для вектора λ/**a**, отстоящего от вектора **a** на угол α (рис. 6а). В трехмерном пространстве решения по вектору λ/**a** образуют некий конус относительно вектора **a** (рис. 6b).

Многозначность в вычислении вектора λ/**a** вызвана тем, что при определении операции скалярного произведения не был надлежащим образом ориентирован угол α относительно вектора **a**. Если данное определение доработать с учетом необходимой ориентации угла α относительно вектора **a**, то многозначность операции скалярного деления будет упразднена. При этом однако изменятся и свойства скалярного произведения, как, например, свойство перестановочности, когда **a•в** = **в•a** и так далее. Однако оставим данные рассуждения для любопытствующих граждан **МИР**а и перейдем к рассмотрению векторного произведения векторов.

Векторным произведением вектора **a** на вектор **b** будем называть вектор, обозначаемый символом **[ab]** , который определяется по следующим правилам:

- модуль вектора **[ab]** равен |**a**|•|**b**|**sin** α, где α угол между векторами **a** и **b**;

- вектор **[ab]** перпендикулярен и к вектору **a** и к вектору **b** одновременно;

- вектор **[ab]** направлен так относительно векторов **a** и **b**, что глядя с его конца поворот от вектора **a** к вектору **b** на угол α должен осуществляться против часовой стрелки (рис. 7)».

«Ох, и хитрецы эти математики, - захлопала в ладоши Муза-Диф. - Говорят, все у них абстракции, да абстракции. Но ведь и реальный мир не забывают. Даже часовую стрелку в математические дела привлекли! Браво!»

«Муза, дорогая, - немного смутился Пи Е. - Ну а как же нам быть? Как и во всем мы исходим из рекомендаций ЗДРСМа. Это потом у нас получаются всяческие противоречия и парадоксы. Но в самом начале мы ученики ЗДРСМа, а он знает, что такое часовая стрелка и в какую сторону она крутится.

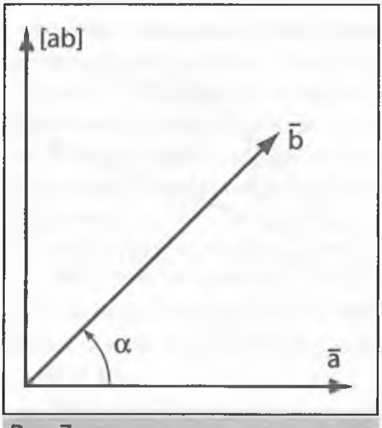


**Рис. 7.**

Скорее это у Вас в области искусств и эмоций случается, что в начале, ах, как все прекрасно и великолепно, но тут же — фу, какое безобразие. Бедный ЗДРСМ просто убегает при этом, прячется и молчит.

Однако я думаю, что Вы все равно правы, и нечего ЗДРСМу так уж много о себе воображать, как сказал бы Зонгаид Лечевич. Что важнее трезвый расчет или восторженная эмоциональность до сих пор не определено и уж тем более не доказано.

Однако позвольте вернуться к этой теме несколько позже, а сейчас продолжить повествования из математики.

Векторное произведение векторов обладает рядом алгебраических свойств:

- антиперстановочности сомножителей

$$[\mathbf{ab}] = - [\mathbf{ba}]; \tag{24}$$

- сочетательности по отношению к скалярному множителю $\lambda$

$$[(\lambda\mathbf{a})\mathbf{b}] = \lambda[\mathbf{ab}]; \tag{25}$$

$$[\mathbf{a}(\lambda\mathbf{b})] = \lambda[\mathbf{ab}]; \tag{26}$$

- распределительное относительно сложения

$$[\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c})] = [\mathbf{ab}] + [\mathbf{ac}]; \tag{27}$$

$$[(\mathbf{b} + \mathbf{c})\mathbf{a}] = [\mathbf{ba}] + [\mathbf{ca}]. \tag{28}$$

Введенное понятие векторного произведения векторов чрезвычайно удобно при описании физиками электромагнитных явлений, а также любых других процессов, описываемых с помощью векторных величин. Очень часто в решении различных задач используют свойство, что если векторы **a** и **b** коллинеарны, то их векторное произведение равно нулю и наоборот.

Как и в случае со скалярным произведением, с целью сохранения традиций введем операцию векторного деления векторов **a** и **b**, как процедуру обратную векторному умножению. Обозначим это, как **[a/b]** и определим это следующим образом с учетом (рис. 7) и свойства (24):

$$|\,[\mathbf{a}/\mathbf{b}]\,| = |\mathbf{a}| \,/\, |\mathbf{b}| \bullet \sin\alpha \tag{29}$$

При этом вектор **[a/b]** из (29), если это первый сомножитель векторного произведения, перпендикулярен вектору **a** и расположен по отношению к вектору **b** так, что если смотреть с конца вектора **a**, то вектор **[a/b]** повернут относительно **b** на угол $\alpha$ по часовой стрелке (рис.8а). Если вектор **[a/b]** является вторым сомножителем в векторном произведении, то он определяется несколько иначе: он также перпендикулярен вектору **a** и повернут относительно **b** на угол $\alpha$, но против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора **a** (рис. 8b).

Как видно из введенных определений и (рис. 6 - 8) алгебраические операции над векторами, векторами и скалярами имеют характерные особенности по сравнению с действиями только над скалярами. Из-за возникновения понятия направления, что характерно для векторов, возникает необходимость в доопределении и уточнении действий над векторами и получаемых результатов. В качественном отношении это эквивалентно процессу возникновения новых чисел при введении новых действий над ними, о чем мы говорили ранее. Таким образом, математика демонстрирует неразрывную связь объектов и действий над ними. Более того, всякое новое действие над известными объектами приводит к возникновению новых объектов. Отсюда вывод, что **новые объекты возникают как результат новых действий над уже известными объектами**. Кстати, любопытствующие могут подумать о единственности такого правила или закона возникновения новых объектов».

Последние слова Пи Е привели в полный восторг присутствующих. Улыбаясь и переглядываясь, Профилактян и Муза-Диф, перебивая друг друга, проговорили: «Пи, да Вы просто Всемирный Закон огласили. Например, процесс размножения в природе просто частный случай Вашего закона. Действительно, известные объекты осуществили новые действия и получился новый или новые объекты. Вот только как быть с действиями. Откуда и как берутся новые действия? Как это происходит в математике?»

«Только по рекомендациям ЗДРСМа, - не задумываясь, ответил Тет. - Да мы ведь уже обсуждали это, когда рассматривали числа и действия над ними, а также другие математические абстракции. Всегда в начале используются предложения ЗДРСМа. Но затем, путем применения предложенных действий получаются новые понятия или абстракции, которые иногда хорошо воспринимаются ЗДРСМом, а иногда не очень. Бывает, что вообще не воспринимаются и тогда ЗДРСМ отказывается это понимать и сваливает всю вину за это на

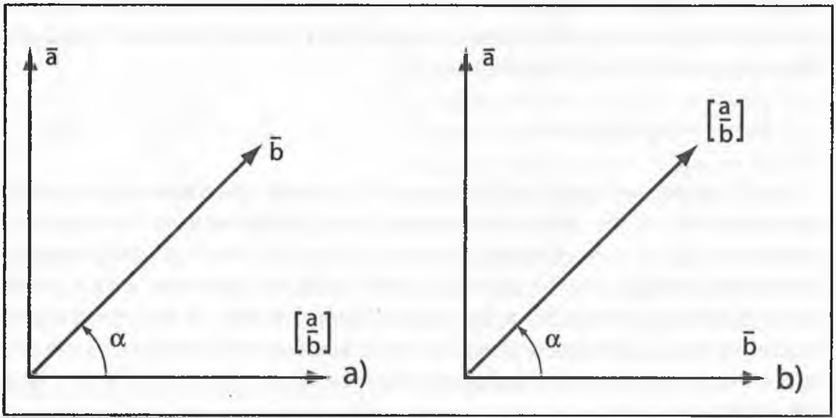



**Рис. 8.**

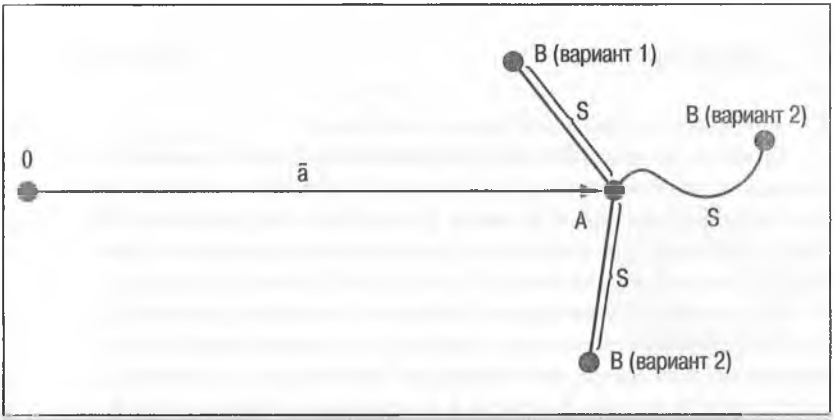



**Рис. 9.**

некиx теоретиков, среди которых частенько оказываются математики. И мы с этим согласны, поскольку допустить или представить себе, что ЗДРСМ чего-то не понимает, невозможно, хотя бы по той причине, что у каждого из нас есть частичка Его Величества ЗДРСМа.

Однако давайте постараемся завершить обсуждение взаимодействия векторных и скалярных величин. Среди рассмотренных выше недостает понятия суммы векторной и скалярной величины. Сумма векторов определена, сумма скаляров также, а вот сумма вектора и скаляра нет! Исправим этот пробел, воспользовавшись с помощью ЗДРСМа следующим примером из физики.

Пусть из точки **O** по заданному с помощью вектора **a** направлению прямолинейно движется путник и доходит до точки **A**. После этого путник, заблудившись, проходит путь величиной **S** и оказывается в точке **B**. Вопрос. Где по отношению к точке **A** на плоскости находится точка **B**? Представим на рис. 9 варианты возможных решений.

При этом очевидно, что множество всех решений находится в пределах окружности с центром в точке **A** и радиусом **S**. Если рассматривать аналогичный процесс в трехмерном пространстве, то множество решений будет соответствовать шару с центром в точке **A**. Исходя из рассмотренного примера суммой вектора **a** и скаляра **S** будем называть множество векторов, совпадающих с вектором **a** в его начале и оканчивающихся в любой из точек **B** окружности (шара для трехмерного пространства) с центром в точке **A** и радиусом, равном величине скаляра **S** (рис. 9). Суммой скаляра **S** и вектора **a** будем называть множество векторов, у которых окончания совпадают с окончанием вектора **a**, а начало находится в любой точке окружности с центром, совпадающим с началом вектора **a** и радиусом, равном скаляру **S**. Очевидно, что равенство

$$\mathbf{a} + \mathbf{S} = \mathbf{S} + \mathbf{a} \qquad (30)$$

выполняется в отдельных случаях, а не всегда.

Отметим, что введенное действие уравнивает понятия сложения и вычитания скаляра по отношению к вектору, поскольку направление скаляра произвольно по отношению к векторной величине. Если исходить из графических построений, то можно сказать, что прибавление скаляра как бы «размывает» в соответствии с предложенным определением либо, начало либо окончание вектора.

Многократное суммирование векторов и скаляров соответствует многократному повторению операции векторного и соответственно скалярного суммирования. Для наглядности приведем графические построения для суммы **a + S + b + R** и суммы **S + a + b + R**, где **a** и **b** - векторы, а **S** и **R** - скаляры (рис. 10 и рис. 11).

Как видно из проведенных построений, в результате суммирования получаем множество векторов, начало и конец которых находятся в некоторых областях, определяемых окружностями с радиусами, равными значениям скалярных величин **R** и **S**.

Процесс суммирования векторной и скалярной величины, для наглядности, можно также представить в виде прямого шеста, исполняющего роль вектора **r**, и веревки, привязанной на его конце и исполняющей роль скаляра. Очевидно, что конец веревки по отношению к точке привязывания может занимать любое положение внутри окружности радиусом **R**, где **R** - длина веревки, величина скалярная (рис. 12).

Пусть веревка длиной **R** привязана к шесту в точке **A**. Вытянем веревку по направлению вышеназванного шеста, или, выражаясь математическим языком,

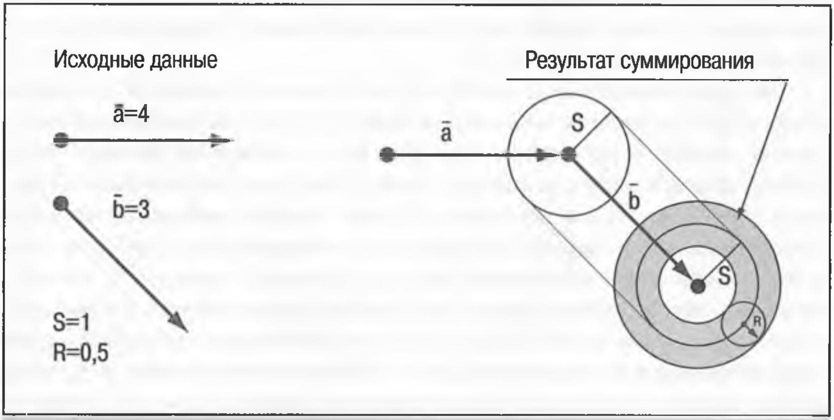



**Рис. 10.**

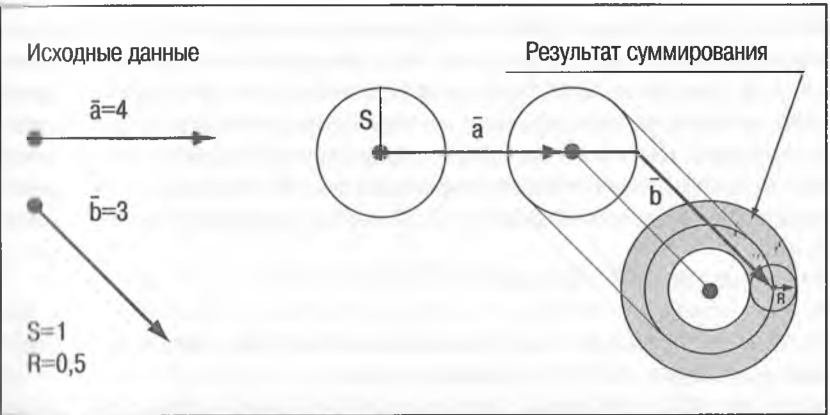


Рис. 11.

по направлению вектора **r**. Тогда точка **B** - это точка пересечения продолжения вектора **r** с окружностью радиусом **R** и с центром в точке **A**. Аналогичным образом определяется и точка **C**. Рассмотренные положения единственны, поскольку длина веревки ограничена величиной **R**. Однако, если взять за окончание веревки любую точку **K**, лежащую на прямой **BC**, то положений веревки, с учетом всех возможных ее изгибов, будет бесконечно много. Однако, в силу ограниченности длины веревки все ее возможные положения будут находиться в некоторой зоне, площадь которой будет изменяться в зависимости от положения точки **K** на прямой **BC**.

Исследуем данную область на примере, представленном на рис. 12.

Зафиксируем на прямой **BC** свободный конец веревки в произвольной

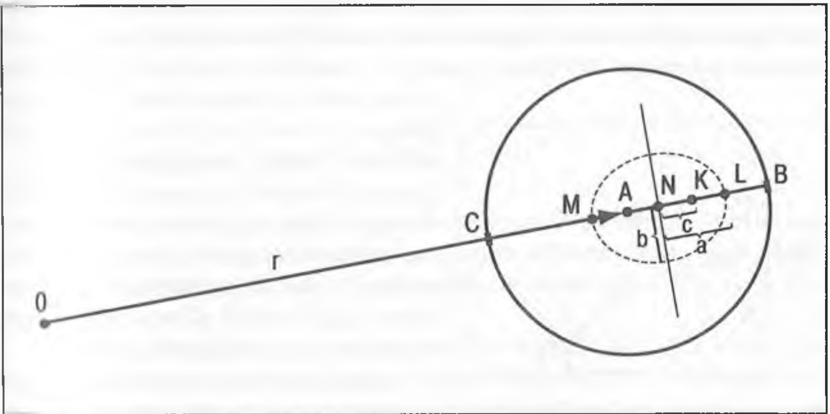


Рис. 12.

точке **K**. В этом случае, потянув за провисающую веревку по направлению к точке **B**, можно вытянуть ее до точки **L**. Аналогично, если выбрать направление к точке **C**, получим точку **M**. Из условия ограниченности длины веревки и фиксации ее начала и конца областью различных положений веревки будет эллипс. Рассматривая точки **A** и **K** как фокусы образованной фигуры, а - это эллипс с центром в точке **N**, можно вывести параметры данной фигуры **a, b, c**, позволяющие решить поставленную задачу по вычислению площади **(S)** вышеназванной области.

$$S = (\pi R^2/4R) \bullet \sqrt{(R^2-t^2)} = (\pi R/4) \bullet \sqrt{(R^2-t^2)}, \qquad (31)$$

где **t** - переменная величина, принимающая значения от **0** до **R** и определяющая смещение точки **K** относительно точки **A**.

На рис. 13 представлена зависимость **S** от **t**, являющаяся тоже частью эллипса с параметрами $a = R$, $b = \pi R^2/4$.

Данная зависимость дает представление о многообразии форм, которые может принимать веревка в зависимости от точки ее окончания. При этом, однако, следует помнить о континуальности данного явления, а, следовательно, об одинаковой мощности множества положений веревки при различных точках **K**, исключая, конечно, случаи совпадения точки **K** с **B** или **C**».

«Послушайте, Пи Е, - обратился с вопросом-предложением Бит Байтович. - А что, если на рис.13 наложить сетку с мелкой квадратной ячейкой, в соответствии с которой осуществить дискретизацию положений веревки в рассмотренном примере. Как тогда можно трактовать полученные результаты?»

«В этом случае площадь рассмотренной области будет определять мощность множества положений веревки. При этом характер зависимости данного множества от местоположения точки **K** станет дискретным и более понятным с позиций ЗДРСМа. Кроме того, появится возможность говорить о вероятности нахождения веревки в рамках той или иной области, что во многих случаях чрезвычайно важно. Однако, отложим рассмотрение этого на потом, поскольку мы еще не знаем, как математика трактует понятие вероятности, и из каких действий оно возникло. Да и знания из области комбинаторики нам понадобятся.

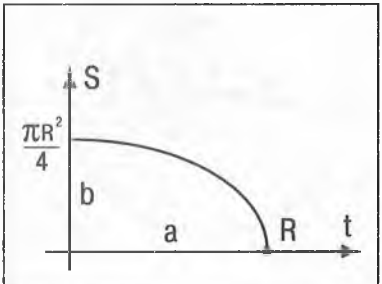


**Рис. 13.**

Завершая рассмотрение векторных величин, укажем еще на одну абстракцию, а именно, смешанное или векторно-скалярное произведение векторов. Данная абстракция применяется для решения ряда задач трехмерного пространства и определяется согласно названию как последовательные действия над тремя векторами **a, b, c**, когда вектор **a** векторно умножается на вектор **b**, а затем полученный в результате вектор **[ab]** умножается скалярно на вектор **c**. Результатом смешанного произведения является скаляр, который равен нулю в том и только том случае, если векторы **a, b, c** - компланарны, в частности лежат в одной плоскости».

«Уважаемый Пи Е, - прервала речь Тета Муза-Диф. - Почти все, что Вы нам рассказываете, я, существо далекое от математики, очень хорошо понимаю, но время от времени все же возникают вопросы, особенно, когда Вы начинаете произносить разные мудреные словечки: «скаляр», «компланарны» и прочее. Просто язык сломаешь. Да и хотелось бы уточнить понятие пространства. Вот мне, например, очень хорошо представляется воздушное пространство, где летают птицы, самолеты и бабочки; водное пространство, где плавают рыбки, наконец, пространство, где мы находимся. А как математики трактуют это слово?»

«Муза-Диф прекрасна и вопрос прекрасен, - начал Пи Е. - Мне тоже очень нравятся Ваши представления о пространстве, однако математики, как мы уже ни раз говорили, используют слова для определения неких абстракций общего вида, в которых, при этом, всегда можно найти место и для частных случаев. Поэтому пространство - это абстракция, позволяющая рассматривать различные объекты и их разложение на элементарные составляющие. При этом в определенных частных случаях получаемые результаты имеют прекрасную аналогию с миром реальным и хорошо воспринимаются ЗДРСМом.

Представим себе, что есть некий объект, поведение которого можно отобразить с помощью функции **S(t)**. Допустим также, что выполняется следующее условие:

$$S(t) = C_0\eta_0(t) + C_1\eta_1(t) + \ldots + C_n\eta_n(t) = \sum_{k=0}^{n} C_k\eta_k(t). \qquad (32)$$

Тогда говорят, что функция **S(t)** линейно зависит от элементов разложения $\eta_0(t), \eta_1(t), \ldots, \eta_n(t)$ или другими словами функция **S(t)** может быть представлена в виде линейной комбинации элементарных функций $\eta_0(t), \eta_1(t), \ldots, \eta_n(t)$ с коэффициентами $C_0, C_1, \ldots, C_n$.

Линейная зависимость, хотя и является наиболее простой с точки зрения математических преобразований, играет огромную роль, поскольку служит весьма эффективным инструментом при математическом представлении реальных физических процессов. Кроме того, создаваемые при этом модели, при относительной простоте, позволяют зачастую выявить наиболее важные стороны изучаемых явлений.

Выражение (32) можно переписать также в новом виде, введя новые коэффициенты , $\alpha$, $\alpha_0$, $\alpha_1$, ..., $\alpha_n$, и перенеся **S(t)** в правую часть данного равенства.

$$\alpha S(t) + \alpha_0 \eta_0(t) + \alpha_1 \eta_1(t) + \ldots + \alpha_n \eta_n(t) = 0. \qquad (33)$$

При такой записи функция **S(t)** и элементы разложения $\eta_0(t)$, $\eta_1(t)$,..., $\eta_n(t)$ становятся «равноправными» участниками линейной зависимости одного от других при коэффициентах $\alpha$, $\alpha_0$, $\alpha_1$, ..., $\alpha_n$ не равных нулю. В случае, если равенство (33) выполняется только когда $\alpha = \alpha_0 = \alpha_1 = \ldots \alpha_n = 0$, говорят, что **S(t)**, $\eta_0(t)$, $\eta_1(t)$, ..., $\eta_n(t)$ линейно независимы.

Если функцию **S(t)** можно разложить по некоторой известной системе функций $\{\eta_k(t)\}$, то это означает, что функция **S(t)** полностью определяется **(n + 1)** коэффициентами $C_k$. Зная область значений коэффициентов $C_k$ можно определить множество значений функции **S(t)**. При этом говорят, что данное множество **N**-мерное, где **N = n + 1**. Также его называют еще **N**-мерным функциональным пространством или просто пространством, в котором имеется **N** координат или **N** степеней свободы. С точки зрения ЗДРСМа весьма удобны и наглядны пространства при **N = 2** или **N = 3**. В этих случаях, как правило, рассматривается соответственно плоскость или привычный нам трехмерный мир. Однако в общем случае это определяется метрикой пространства, то есть некоторыми правилами, по которым осуществляется измерение расстояний между точками **N**-мерного пространства. Если эти правила установлены и имеют количественную оценку, то пространство называется метрическим. Если правила сравнения расстояния между точками пространства имеют характер оценивания близости одной точки к другой, по каким-либо другим признакам, то такое пространство называют топологическим.

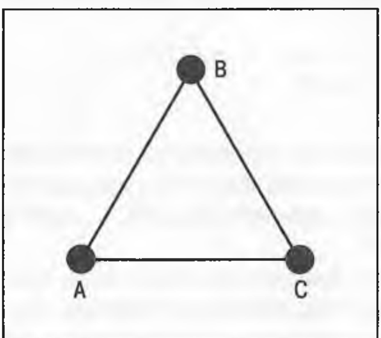


Рис. 14.

Более подробно остановимся на этом позднее. Полагаю, что и Бит Байтович примет в этом активное участие. Сейчас же остановимся лишь на краткой характеристике геометрии пространств. Существуют различные геометрические системы, среди которых наиболее часто теоретики используют системы Евклида, Римана и Лобачевского. Наиболее наглядно различия можно продемонстрировать на следующем примере при **N=2**. В геометрии Евклида построения ведутся на плоскости (рис.14), в геометрии Римана - на «выпуклой» поверхности сферы (рис. 15) и у Лобачевского - на «вогнутой» поверхности, напоминающей граммофонную трубку (рис. 16).

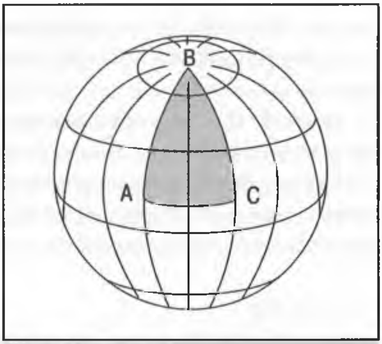


Рис. 15.

Если на приведенных поверхностях зафиксировать три точки **A, B, C** и построить соответственно треугольники с вершинами в выбранных точках, то окажется, что на плоскости сумма углов треугольника **ABC** равна **180°**, на сфере больше **180°**, а на граммофонной трубке, наоборот, меньше **180°**. Данный пример иллюстрирует также, что кратчайшие расстояния между точками на различных поверхностях оказываются разными. В общем случае это расстояние **r** между точкой **A** с координатами **($x_1$;$y_1$)** и точкой **B** с координатами **($x_2$;$y_2$)** можно вычислить по формуле:

$$r^2 = g_{xx} \bullet (x_2 - x_1)^2 + (g_{xy} + g_{yx}) \bullet |x_2 - x_1| \bullet |y_2 - y_1| + g_{yy} \bullet (y_2 - y_1)^2, \qquad (34)$$

где $g_{xx}$, $g_{xy}$, $g_{yx}$, $g_{yy}$ характеризуют геометрическую систему и носят название фундаментального метрического тензора. В случае определения расстояния **r** на плоскости коэффициенты $g_{xx} = g_{yy} = 1$, $g_{xy} = g_{yx} = 0$. В результате получим хорошо известное выражение:

$$r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2. \quad (35)$$

Аналогичные, но более громоздкие выражения можно записать для любого **N**-мерного пространства».

«С разрешения Пи Е, я бы дополнил, - прервал рассказ Тета Бит Байтович, - что понятие **N**-мерного пространства широко используется в теории связи, рассматривающей теоретические и практические аспекты передачи различных сигналов на расстояние. При этом особое значение имеют модели, использующие линейные метрические пространства, для которых введены следующие утверждения (аксиомы):

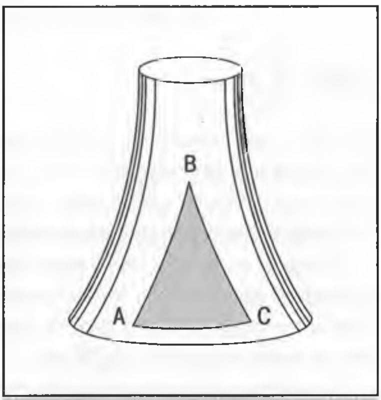


Рис. 16.

- **|A - A| = 0,**

- $|\mathbf{A} - \mathbf{B}| = |\mathbf{B} - \mathbf{A}|$ - условие симметрии (36)
- $|\mathbf{A} - \mathbf{B}| \leqslant |\mathbf{A} - \mathbf{C}| + |\mathbf{C} - \mathbf{B}|$ - условие треугольника,

где **A, B, C** - точки пространства, а $|\mathbf{A} - \mathbf{A}|$, $|\mathbf{A} - \mathbf{B}|$, $|\mathbf{A} - \mathbf{C}|$ и так далее соответственно расстояния между точками.

Нормой линейного метрического пространства называют расстояние между точкой и началом координат, обозначая ее через $|\mathbf{A}|$. При этом для линейного пространства должны выполняться следующие условия для нормы:

- $|\mathbf{A}| \geqslant 0$,
- $|\mu \bullet \mathbf{A}| = \mu \bullet |\mathbf{A}|$, где $\mu$ - вещественное число, (37)
- $|\mathbf{A} + \mathbf{B}| \leqslant |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$ - условие треугольника.

Если для евклидова метрического пространства определить норму и расстояние по следующим правилам:

$$|A| = \sqrt{\sum_{r=1}^{N} x^2_r} \tag{38}$$

$$|A - B| = \sqrt{\sum_{r=1}^{N} (X_{Ar} - X_{Br})^2},$$

то такое пространство принято называть пространством $\mathbf{L}_2$ со среднеквадратичной нормой (38).

Помимо этого при исследовании передачи цифровых сигналов, теории кодирования используют для описания происходящих процессов пространство с нормой и расстоянием, определяемыми следующим образом:

$$|A| = \sum_{r=1}^{N} |x_r| \tag{39}$$

$$|A - B| = \sum_{r=1}^{N} |X_{Ar} - X_{Br}|,.$$

Данное пространство не является евклидовым. Его принято обозначать $\mathbf{L}_1$.

Следует отметить, что в ряде случаев применяют другие типы пространств, добиваясь адекватного отображения теории и практики. При этом, безусловно, следует определить, что значит «адекватное отображение», либо руководствоваться рекомендациями ЗДРСМа.

А теперь позвольте передать слово Пи Е, поскольку мое дальнейшее повествование уведет нас в специальные области человеческих знаний».

Услышав это Тет продолжил: «Как мы уже неоднократно отмечали, математические формулы, выражения и прочее используются различными науками для компактного и наглядного с точки зрения ЗДРСМа описания различных явлений и процессов. Аналогичная ситуация существует и в математике, в результате чего возникло понятие матриц и действий над ними. При этом оказалось, что для сегодняшнего уровня развития математической мысли наиболее употребимы прямоугольные и квадратные формы матриц, то есть прямоугольные и квадратные таблицы чисел, как, например,

$$\begin{Vmatrix} 3 & -4 & 1 & 3 & -2 & 7 & 5 \\ 5 & 7 & 15 & 8 & 3 & 2 & 0 \\ -8 & -35 & 0 & 1 & 0 & 13 & 2 \end{Vmatrix} \qquad (40)$$

$$\begin{Vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 54 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{Vmatrix} \qquad (41)$$

В общем виде матрицы принято записывать следующим образом:

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} \qquad (42)$$

где **m** - количество строк, а **n** - количество столбцов в матрице **A** с элементами $a_{ij}$. Выражение (42) можно еще более кратко записать, как:

$$\mathbf{A} = \|a_{ij}\| (i = 1,2,\dots,m;\ j = 1,2,\dots n). \qquad (43)$$

Если **m** = **n**, то прямоугольная матрица становится квадратной. Для нее предложено понятие определителя матрицы **A**, обозначаемого как $\Delta_A$ и равного некоторому числу, вычисляемому по определенному правилу, исходя из значений $a_{ij}$. Прежде чем перейти к этому правилу, введем еще ряд понятий на примере матрицы **A** в случае, когда **m** = **n** = **3**.

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}$$

(44)



4*

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Будем называть минором элемента определителя $a_{ij}$ определитель, который получиться при вычеркивании соответственно **i**-ой строки и **j**-ого столбца в исходном определителе. В рассматриваемом примере у элемента $a_{22}$ минором будет следующий определитель:

$$M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (45)$$

Помимо этого математики ввели понятие алгебраического дополнения элемента $a_{ij}$, обозначаемого как $A_{ij}$ и равного минору элемента $a_{ij}$, если $i + j$ число четное. Если же $i + j$ нечетное число, то алгебраическое дополнение $A_{ij}$ равно соответствующему минору со знаком минус. Введение понятия алгебраического дополнения становится понятным, если учесть, что определитель можно разложить по любой из его строк или по любому столбцу, используя элементы определителя и их алгебраические дополнения. Не приводя доказательств, укажем примеры разложения определителя (44) по всем возможным строкам и соответственно столбцам.

$$\begin{aligned} \Delta_A &= a_{11} \bullet A_{11} - a_{12} \bullet A_{12} + a_{13} \bullet A_{13}\ ; \\ \Delta_A &= - a_{21} \bullet A_{21} + a_{22} \bullet A_{22} - a_{23} \bullet A_{23}\ ; \\ \Delta_A &= a_{31} \bullet A_{31} - a_{32} \bullet A_{32} + a_{33} \bullet A_{33}\ ; \qquad (46) \\ \Delta_A &= a_{11} \bullet A_{11} - a_{21} \bullet A_{21} + a_{31} \bullet A_{31}\ ; \\ \Delta_A &= - a_{12} \bullet A_{12} + a_{22} \bullet A_{22} - a_{32} \bullet A_{32}\ ; \\ \Delta_A &= a_{13} \bullet A_{13} - a_{23} \bullet A_{23} + a_{33} \bullet A_{33}. \end{aligned}$$

Применяя последовательно разложение определителей на более простые, то есть понижая значения **m** и **n** последовательно до **2**, можно получить числовое значение любого определителя. Для примера (44) имеем:

$$\Delta_A = a_{11} \bullet A_{11} - a_{12} \bullet A_{12} + a_{13} \bullet A_{13};$$

$$\Delta_{A11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22} \bullet a_{33} - a_{23} \bullet a_{32};$$

$$\Delta_{A12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21} \bullet a_{33} - a_{23} \bullet a_{31}; \qquad (47)$$

$$\Delta_{A13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21} \bullet a_{32} - a_{22} \bullet a_{31}.$$

Заметим, что в случае, когда $m = n = 1$ определитель сводится фактически к одному числу, элементу $a_{ij}$, у которого минор и алгебраическое дополнение должны быть доопределены. По-видимому, целесообразно считать их равными **1**.

Введенные понятия и действия дают возможность сформулировать ряд свойств определителей. Опуская соответствующие доказательства, назовем некоторые из них:

1. Величина определителя не изменится, если все строки определителя заменить на столбцы с теми же номерами и наоборот.

2. Если переставить местами любые две строки или любые два столбца, то знак определителя изменится на противоположный.

3. Если в определителе хотя бы одна строка или один столбец состоят из нулевых элементов, то определитель равен нулю.

4. Если в определителе имеются равные строки или столбцы, то определитель равен нулю.

5. Сумма произведений элементов какого-нибудь столбца (или какой-нибудь строки) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другого столбца (или другой строки) равна нулю.

6. Если элементы одной строки (или столбца) умножить на коэффициент $k$, то в результате величина определителя изменится в $k$ раз.

7. Если к элементам какой-либо строки (или столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (или столбца), каждый их которых умножен на коэффициент $k$, то величина полученного при этом определителя не изменится.

8. Если какую-либо строку (или столбец) определителя представить в виде суммы двух слагаемых, то данный определитель можно представить в виде суммы двух определителей, у которых в качестве строк (или столбцов) будут строки (или столбцы) исходного определителя, кроме той строки (или столбца), которая была разложена на два слагаемых. Первое слагаемое будет в строке (или столбце) первого нового определителя, а второе слагаемое соответственно во втором.

Помимо названных свойств определителей существует ряд других, которые могут быть обнаружены при наличии соответствующего желания. Однако более интересным представляется проследить аналогии между определителем и числом, которое, как отмечалось, можно рассматривать в качестве определителя с параметрами $m = n = 1$. Некоторые свойства, как, например, свойство 3 или 6, очевидны для числа, а некоторые потребуют определенных размышлений и расширения представлений о числе и определителе. Отметим также, что одному и тому же значению определителя, то есть скалярному числу, может соответствовать множество различных определителей.

Использование понятия определителя и действий над ними оказывается чрезвычайно удобным для компактного и наглядного представления решений систем уравнений, в том числе дифференциальных уравнений. Однако оставим эту тему для специалистов и вернемся к понятию матрица.

Следуя аналогии с числами, определим действия над матрицами.

Если матрица **A** и матрица **B** имеют одинаковое количество строк и столбцов, то их суммой будет являться матрица **C**, элементы которой формируются по правилу:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \ (i=1, 2,\ldots m; \ j=1, 2,\ldots n). \qquad (48)$$

Поскольку элементами матриц **A** и **B** могут быть, как положительные, так и отрицательные числа, то операция вычитания матриц аналогична операции сложения. Умножение матрицы на число **k** по определению соответствует умножению на это число всех элементов матрицы. Операция деления матрицы на число **k** очевидна.

Более сложные действия приходится осуществлять при перемножении матриц. При этом напомним, что в данном случае нет каких-либо оснований доказывать, что вводимая операция должна быть такой и никакой иной. Во всем «виноват» ЗДРСМ. Он одному ему известным образом, обозревая все возможные способы определения, считает рациональным предложить операцию умножения матриц установить по следующему правилу: элемент $c_{ij}$ матрицы **C**, полученной в результате умножения матрицы **A** с элементами $a_{ij}$ на матрицу **B** с элементами $b_{ij}$:

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{ij} \cdot b_{lj}; \ (i=1,2,\ldots,m; \ j=1,2,\ldots,n). \qquad (49)$$

При этом величина **k** является по определению условием «умножаемости» матрицы **A** на матрицу **B**. Как видно, матрица **A** содержит **m** строк и **k** столбцов, а матрица **B** соответственно **k** строк и **n** столбцов. Очевидно, что матрица **C** будет содержать в результате умножения **A** на **B** **m** строк и **n** столбцов. Если количество столбцов матрицы **A** не равно количеству строк матрицы **B**, то умножать **A** на **B** нельзя!

Не определена операция умножения!

Хотя это вовсе не означает, что умножать в этих условиях матрицы вообще нельзя. Надо просто договориться, как это делать. То есть посоветовавшись со ЗДРСМом, предложить новое определение правил умножения матриц.

Весьма любопытным является произведение матрицы **A** с параметрами **m=1, n=k** на матрицу **B** с параметрами **m=k, n=1**. (Часто матрицу **A** такого вида называют вектор-строка, а матрицу **B** - вектор-столбец, подчеркивая тем самым, что матрицы **A** и **B** можно рассматривать, как запись координат некоторых векторов **A** и **B** в **k**-мерном пространстве). В этом случае матрица $C=A \bullet B$ будет иметь размерность $m=n=1$, то есть состоять из одного элемента, одного числа. При перестановке сомножителей, когда $C=B \bullet A$, результирующая матрица имеет вид квадратной матрицы с размерами $m=n=k$, то есть состоит из $k^2$ элементов, чисел. Пространство при перемножении матриц то сжимается в «точку» до одного числа, а то расширяется в **k** раз.

В общем случае при выполнении условия «умножаемости» матриц справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned}&(\lambda \bullet A) \bullet B = A \bullet (\lambda \bullet B),\\&(A + B) \bullet C = A \bullet C + B \bullet C,\\&C \bullet (A + B) = C \bullet A + C \bullet B,\\&A \bullet (B \bullet C) = (A \bullet B) \bullet C,\end{aligned} \tag{50}$$

где **A,B,C** - матрицы, а $\lambda$ - скаляр.

Помимо рассмотренных выше алгебраических действий над матрицами, известных нам еще с момента рассмотрения действий над числами, матрицы можно транспонировать, то есть строчки заменять на столбцы с теми же номерами и наоборот.

Существуют нулевая матрица, у которой все элементы равны нулю, и единичная матрица, у которой почти все элементы равны нулю, за исключением элементов $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{ii}, \ldots$, равных **1**. Говорят, что элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{ii}, \ldots$ расположены на главной диагонали матрицы.

Нулевая и единичная матрица играют туже роль, что и числа **0** и **1**. При этом очевидно, что прибавление нулевой матрицы не изменяет исходную, а умножение на нулевую матрицу дает в результате также нулевую. Умножение на единичную матрицу (будем в дальнейшем обозначать ее через **E**) не изменяет исходной матрицы.

Помимо рассмотренных в различных случаях с успехом применяют определенные типы матриц, отличающиеся от других рядом свойств, которые оказываются весьма полезными при рассмотрении тех или иных вопросов. Полезными, в смысле компактного и наглядного описания изучаемых или происходящих процессов. Более подробно об этом, возможно, расскажет Бит Байтович, поскольку матричные формы активно используются в теории кодирования, передачи и обработки сигналов».

«Господин Тет, - заговорила прекрасная Муза-Диф. - Вы так хорошо нам все рассказываете, что даже мне, не очень большому знатоку математики, все кажется стройным и совершенным. Но позвольте Вас спросить, а где же операция деления матриц?»

«Ваш вопрос совершенно уместен, - ответил Пи Е, - и мы сейчас перейдем к этому. Совершенно ясно, что если число **a** разделить на некое число **b** **(b≠0)**, это все равно, что **a** умножить на величину обратную **b**, то есть умножить на **1/b**. При **b=a** очевидно, что $a \bullet 1/a = a \bullet a^{-1} = 1$. Исходя из этой аналогии, в матричном виде для квадратичных форм и при условии, что некая матрица **A** не является особой (не равна нулю), говорят о существовании обратной матрицы $A^{-1}$. При этом:

$$A^{-1} \bullet A = A \bullet A^{-1} = E, \tag{51}$$

где **E**- единичная матрица той же размерности, что и матрица **A**.

Обратная матрица $A^{-1}$ находится по следующему правилу:

$$A^{-1} = 1/\Delta_A \bullet \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \dots & A_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{Vmatrix}, \tag{52}$$

где $A_{ij}$ - алгебраические дополнения соответствующих элементов $a_{ij}$ определителя $\Delta_A$.

Для развлечения найдем обратную матрицу $A^{-1}$ для заданной матрицы **A**:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{Vmatrix}. \tag{53}$$

Находим определитель

$$\Delta_A = \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{Vmatrix} = -6. \tag{54}$$

Алгебраические дополнения очевидны:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2; \ A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0; \ A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -4;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -8; \ A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -6; \ A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 13; \tag{55}$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}3&2\\1&0\end{vmatrix}=-2;\ A_{32}=-\begin{vmatrix}1&2\\0&0\end{vmatrix}=0;\ A_{33}=\begin{vmatrix}1&3\\0&1\end{vmatrix}=1.$$

Матрица $\tilde{\mathbf{A}}$, состоящая из алгебраических дополнений, называется присоединенной к исходной матрице **A**. При этом нумерация строк присоединенной матрицы $\tilde{\mathbf{A}}$ соответствует нумерации транспонированной матрицы **A**. Таким образом имеем $\tilde{\mathbf{A}}$:

$$\tilde{\mathbf{A}}=\begin{Vmatrix}2&-8&-2\\0&-6&0\\-4&13&1\end{Vmatrix}. \qquad (56)$$

После несложной операции деления элементов присоединенной матрицы из (56) на определитель из (54) находим искомую обратную матрицу $\mathbf{A}^{-1}$.

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{Vmatrix}-1/3&4/3&1/3\\0&1&0\\2/3&-13/6&-1/6\end{Vmatrix}. \qquad (57)$$

Для проверки правильности вычислений найдем произведение $\mathbf{A}\bullet\mathbf{A}^{-1}$ согласно (49)

$$\mathbf{A}\bullet\mathbf{A}^{-1}=\begin{Vmatrix}1&3&2\\0&1&0\\4&-1&2\end{Vmatrix}\bullet\begin{Vmatrix}-1/3&4/3&1/3\\0&1&0\\2/3&-13/6&-1/6\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{Vmatrix}. \qquad (58)$$

Произведение равно единичной матрице **E**. Таким образом, проверка подтвердила правильность вычислений, которые, однако, с ростом размерности матрицы **A** делаются все более сложными и громоздкими».

## 6. Сила Водородовна продолжает повествование по разделу 4

«Надеюсь, дорогой наш математик не слишком далеко увел нас от физических основ мира реального, и мы можем вернуться к формулам (5), (6) и (7). Как уже отмечалось, их очевидная похожесть возбуждает воображение и заставляет искать аналогии между понятиями массы и электрическими или магнитными зарядами, а также аналогии между гравитационным и электрическими или магнитными полями. Традиционно отмечается прямо пропорциональная зависимость силы **F** от величины массы **m** (электрического **q** или магнитного **M** зарядов) взаимодействующих объектов и обратно пропорциональная зависимость от квадрата расстояния между ними $\mathbf{r}^2$. В уже упоминаемой книге «Сотворение мира или «что может Бог» такой характер зависимостей вытекает из свойств определенных конфигурационных пространств. Классическая же физика рассматривает данные выражения, как результат многочисленных экспериментов и наблюдений в мире реальном. В то же время, если рассматривать значение силы как произведение удельных значений масс, электрического и магнитного зарядов, приходящихся на единицу расстояния между объектами (**m/r** - удельное количество массы, **q/r** и **M/r** - соответственно удельное количество электрического и магнитного зарядов), то характер вышеназванных зависимостей станет очевидным и вытекающим из принятого определения силы. Остается вопрос только о том, почему сила определена именно так, а не иначе. Но это вопрос к тому, кто внес данное определение. Если же оно принято, то так тому и быть!

Выражения (5), (6) и (7) могут быть записаны в векторной форме, что позволит доопределить направление силы **F** в зависимости от знаков электрического (магнитного) зарядов.

В этой связи интересно отметить, что многочисленные наблюдения в мире реальном пока не обнаруживают существования масс, имеющих противоположные заряды, хотя теоретически это можно допустить. Поэтому будем считать, что масса нейтральна в отличие от электрических или магнитных зарядов, имеющих явно выраженную противоположность зарядов, что дает основания условиться о присвоении им знаков плюс (+) и минус (-). Для определенности, помните как устанавливали меры длины, времени и так далее, договорились, что электрическому заряду (+) соответствует заряд, получаемый на стеклянном стержне при его трении о шелк, а электрическому заряду (-) соответствует заряд, получаемый на сургуче при его трении о шерсть. Позднее, конечно, появились более совершенные возможности по стандартизации знаков (полярности) электрических и магнитных зарядов. Не вдаваясь в детали этого, отметим лишь, что в данном случае, также как и ранее, исходя из рекомендаций ЗДРСМа, осуществлена стандартизация.

Экспериментальным путем было установлено, что одноименные заряды отталкиваются, а разноименные - притягиваются. Как построить такой эксперимент догадаться не трудно, но при этом следует помнить, как о корректности постановки эксперимента, так и о корректности трактовки результатов. Приведем пример.

В темном помещении имеется неизвестный объект, состоящий из каких-то частей, различной конфигурации. Был проведен эксперимент по освещению помещения и зафиксирован результат исчезновения объекта. Делаем вывод, что объект обладает способностью отличать свет от темноты. При свете он исчезает. Поскольку известно, что объект состоит из каких-то частей, то возник вопрос о том, какая из этих частей реагирует на свет, после чего объект исчезает. Исходя из имеющихся в наличии способов, было предложено поочередно удалять в темноте части объекта, а далее включать свет и наблюдать за результатом. Удалили одну часть, включили свет, объект исчез. Делаем вывод, что это не та часть, которая реагирует на свет, поскольку в противном случае объект утратил бы способность реагирования на свет. Повторяем эксперимент, но удаляем другую часть. Включаем свет и убеждаемся, что объект на месте. Делаем вывод, раз объект на месте, то он утратил способность реагировать на свет и, следовательно, удаленная часть как раз и является той частью, которая отличает свет от темноты.

Поскольку объект остался на освещенном месте, то экспериментаторы обнаружили, что неизвестным объектом является букашка-таракашка зеленая с удаленными ножками. В результате вывод: букашка-таракашка зеленая видит ножками! Шутка, конечно. Но, исследуя мир, проводя эксперименты и подыскивая теоретические обоснования, нужно каждый раз искать доказательства истинности принимаемых решений».

«Силушка Водородовна, - стараясь быть серьезным, заговорил Зонгаид, - а если бы на месте неизвестного объекта был бы Пи Е или Бит Байтович. Как бы тогда разворачивался эксперимент?»

«Кто бы спрашивал, - принимая шутливый тон, ответила Вселенская. - Я думаю, что здесь более компетентны Вы, Зонгаид Лечевич. Болит, например, зуб. Чик и нет его. Ничего не болит. Вылечили!

Ну да ладно, давайте вернемся к физике!

Формулы (5), (6) и (7) определяют силу взаимодействия между двумя объектами. При этом в ряде случаев удобно исследовать происходящие процессы, определив понятие напряженности **E**, численно равной силе воздействия объекта с массой **m** (соответственно **q, M**) на объект с единичной массой (соответственно единичными значениями **q**, **M**), находящихся на расстоянии **r**. В результате векторная форма для напряженностей гравитационного ($\mathbf{E_g}$), электрического ($\mathbf{E_e}$) и магнитного ($\mathbf{E_m}$) полей примет следующий вид:

$$\mathbf{E_g} = -(\mathbf{G} \bullet \mathbf{m}/\mathbf{r}^2) \bullet \mathbf{e_r} \qquad (59)$$

$$\mathbf{E_e = (k \cdot q/r^2) \cdot e_r} \qquad (60)$$

$$\mathbf{E_m = (k` \cdot M/r^2) \cdot e_r}, \qquad (61)$$

где **m** - масса тела, **q** - электрический заряд, **M** - магнитный заряд, создающие соответствующие напряженности на расстоянии **r** от себя. Вектор $\mathbf{e_r}$, равный по модулю единице, в формуле (59) направлен от тела массой **m**, а в формулах (60) и (61) от положительного заряда к отрицательному.

Памятуя историю про букашку-таракашку зеленую и строгости математического обоснования, укажем на интересный факт, что на самом деле ничто не доказывает наличие напряженности того или иного вида в отсутствие второго объекта. А что, если напряженность «включается» только при появлении соответствующего партнера, а при его отсутствии находится в состоянии «выкл». Физически смоделировать такую ситуацию и экспериментально проверить это невозможно по очевидным причинам. Поэтому посоветовавшись со ЗДРСМом, принимаем постоянное наличие напряженностей на веру!

Отмечая сходство выражений, теперь уже (59), (60) и (61), заметим, что нейтральная масса тела притягивает к себе другое тело, обладающее массой, но никогда не отталкивает. Тело, обладающее зарядом **q**, будет отталкивать тело с одноименным зарядом и притягивать с противоположным. Так же реализуется магнитное взаимодействие. Однако при этом любое тело, обладающее магнитными свойствами всегда проявляет себя как магнит, имеющий одновременно равные по модулю заряды (+) и (-). В то же время в отношении электрических зарядов тела ведут себя по другому. Тело (проводник) может обладать зарядом только одного знака. Все это подчеркивает как общность, так и отличия известных в физике дальнодействующих взаимодействий.

Принимая во внимание (4), можно отметить, что выражение (59) для напряженности гравитационного поля $\mathbf{E_g}$ эквивалентно ускорению **a**, которое получило бы некое тело под воздействием силы **F** гравитационного поля, создаваемого телом массой **m**. При этом ускорение является второй производной от понятия размера (длины, расстояния) по времени. Учитывая схожесть рассматриваемых формул (59), (60) и (61) напрашивается вопрос об установлении аналогий не только между ними, но и между их интегральными представлениями.

Проводя многочисленные наблюдения и эксперименты, физики получали определенные выражения, связывающие между собой различные характеристики изучаемых процессов и явлений. Однако всегда при этом возникало желание «докопаться» до глубинных причин происходящего. Почему тело имеет массу, почему существуют электрические заряды и что это такое и так далее и так далее. К сожалению, эти, на первый взгляд, простые вопросы оказываются самыми трудными и зачастую не имеют ответов. В связи с этим рассматриваемые в дальнейшем некие модели и теоретические конструкции, которые получили достаточно хорошее экспериментальное подтверждение, хотя и являются величайшим достижением современной науки, но в то же время ни в коем случае не могут считаться абсолютно истинными и полностью адекватными тем явлениям, которым они посвящены. (В качественном отношении это напоминает аппроксимацию иррационального числа с помощью рациональных чисел.) Вместе с тем мы будем на основе известных теоретических конструкций описывать мир реальный, предполагая, что это явится полезным для конструируемого **МИР**а.

Экспериментально установлено с помощью доступных на сегодня приборов и методик измерений, что в мире реальном существует некий элемент, обладающий отрицательным электрическим зарядом $q_e$**=1,6021892•10**$^{-19}$ **Кл**, меньше которого нет или, точнее, не обнаружено. Этот элемент назван электроном. Его масса, измеренная косвенным путем, равна $m_e$**=0,9109534•10**$^{-30}$ **кГ**. А теперь давайте представим себе этот самый электрон. Практически у всех этот элемент будет отождествляться с маленьким-маленьким шариком, хотя никто его никогда не видел. Объясняется это, по-видимому, способностью человека представлять себе образ чего-либо неизвестного на основе уже имеющихся представлений и ассоциаций. Вспомним забавную историю про крестьянина, который впервые в городе увидел паровоз и, вернувшись в деревню, стал рассказывать о нем своим односельчанам, используя сравнения с телегой, печью, самоваром и прочее. Но в завершении, когда любопытные спросили, как же паровоз едет, за счет чего, он ответил, что вот все про паровоз ему понятно, но вот куда лошадь впрягается - не ясно!

Таким образом, имеющийся у человека ЗДРСМ, который формируется на основе предыдущей истории познания, с одной стороны, обеспечивает устойчивость повседневного восприятия и общения с окружающей средой, но с другой стороны, может быть препятствием для синтеза новых представлений и образов. Однако это тема отдельного большого разговора, в котором, я полагаю, все примут активное участие. Сейчас же вернемся к физике мира реального».

«Давайте вернемся, давайте, - воскликнула в поддержку Муза-Диф. - Это так интересно, что Вы рассказываете. Хотя электрончик, на мой взгляд, больше похож на кубик. Или нет - на крутящееся колечко!»

«На что похож электрон в явном виде узнать, по-видимому, сложно, но об этом можно судить, исходя из его свойств, - продолжила разговор Сила Водородовна. - Поэтому вернемся к имеющимся представлениям физиков об атомистическом строении вещества. Давняя теория греков (Демокрит) об атомистическом строении материи, при которой единой и неделимой частицей выступал атом, сегодня развита в направлении описания структуры самого атома, который состоит из ядра и двигающихся вокруг него электронов. Модель напоминает планетарную систему с центром, где расположено солнце, и вращающимися вокруг планетами. Однако дальнейшее описание поведения электронов, как планет, вращающихся вокруг солнца, делается совершенно не похожим на то, что предложил бы ЗДРСМ, рассматривая движение реальных небесных тел вокруг светила, руководствуясь правилами классической механики.

Во-первых, электроны могут вращаться только по круговым стационарным орбитам с радиусом $r_n$, определяемым из следующего соотношения:

$$m_e \bullet v_n \bullet r_n = \hbar \bullet n, \tag{62}$$

где $m_e$ - масса электрона, $v_n$ - скорость электрона, $r_n$ - радиус орбиты электрона, $n$ - номер стационарной орбиты электрона (другими словами квантовое число $n=1,2,3,...$), $\hbar=h/2\pi$, где $h$ - постоянная Планка.

Во-вторых, согласно принципу запрета Паули в одном квантовом состоянии, описываемом набором квантовых чисел ($n$, $l$, $m$, $m_s$), не может находиться более одного электрона.

Числа $n=1, 2, ...$; $l=0, 1, 2, ... (n-1)$; $m=0, \pm1, \pm 2, ... \pm l$ определяются на основе теории Шредингера, позволяющей описывать поведение электрона с помощью дифференциальных уравнений. Величина $m_s=\pm1/2$ в зависимости от «спина» электрона. «Спин» электрона - это новый параметр, описывающий наравне с массой и зарядом электрона его состояние. Для объяснения ряда наблюдений было предложено считать, что электрон, вращаясь вокруг ядра, дополнительно крутится вокруг своей оси. За счет этого возникает собственный момент импульса - «спин». Оказалось, что такая догадка или предположение, позволили получить хорошее согласование результатов теоретических расчетов с экспериментальными данными.

Существуют и другие условия, о которых мы не будем говорить, поскольку это займет много времени для обсуждения и потребует специальных знаний в области физики. Отметим лишь принципиальное отличие микромира и действующих там законов от того, что нам представляется в мире реальном на основе положений ЗДРСМа. Одновременно подчеркнем еще раз, что адекватность теоретических построений следует из многочисленных экспериментов. При этом ряд значительных формул были выведены не на основе исходной аксиоматики и последующих строгих математический доказательств, а получены как теоретическое озарение или догадка после продолжительного осмысливания результатов наблюдений и экспериментов и попыток придать им законченное математическое описание.

Ядро атома рассматривается в настоящее время как нечто сложное, состоящее из протонов, нейтронов и всякой, всякой всячины, что проявляет себя в процессе различных наблюдений и экспериментов самым разным образом. Однако удается вычленить устойчивые показатели, характеризующие те или

Таблица 3

| Период | Элемент | n=1 | n=2 | | n=3 | | | Электронная конфигурация |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1s | 2s | 2p | 3s | 3p | 3d | |
| I | | 1 | - | - | - | - | - | $1s^1$ |
| | He | 2 | - | - | - | - | - | $1s^2$ |
| II | Li | 2 | 1 | - | - | - | - | $1s^22s^1$ |
| | Be | 2 | 2 | - | - | - | - | $1s^22s^2$ |
| | B | 2 | 2 | 1 | - | - | - | $1s^22s^22p^1$ |
| | C | 2 | 2 | 2 | - | - | - | $1s^22s^22p^2$ |
| | N | 2 | 2 | 3 | - | - | - | $1s^22s^22p^3$ |
| | O | 2 | 2 | 4 | - | - | - | $1s^22s^22p^4$ |
| | F | 2 | 2 | 5 | - | - | - | $1s^22s^22p^5$ |
| | Ne | 2 | 2 | 6 | - | - | - | $1s^22s^22p^6$ |
| III | Na | 2 | 2 | 6 | 1 | - | - | $1s^22s^22p^63s^1$ |
| | Mg | 2 | 2 | 6 | 2 | - | - | $1s^22s^22p^63s^2$ |
| | Al | 2 | 2 | 6 | 2 | 1 | - | $1s^22s^22p^63s^23p^1$ |
| | Si | 2 | 2 | 6 | 2 | 2 | - | $1s^22s^22p^63s^23p^2$ |
| | P | 2 | 2 | 6 | 2 | 3 | - | $1s^22s^22p^63s^23p^3$ |
| | S | 2 | 2 | 6 | 2 | 4 | - | $1s^22s^22p^63s^23p^4$ |
| | Cl | 2 | 2 | 6 | 2 | 5 | - | $1s^22s^22p^63s^23p^5$ |
| | Ar | 2 | 2 | 6 | 2 | 6 | - | $1s^22s^22p^63s^23p^6$ |

иные атомы. Так, например, важнейшим параметром атомного ядра является зарядовое число **Z**, численно равное количеству протонов, входящих в ядро. А учитывая, что протон имеет такой же заряд как электрон, но только противоположного знака, заряд ядра будет $\mathbf{Z \bullet q_e}$. При этом **Z** определяет порядковый номер химического элемента, которому принадлежит данный атом, в периодической таблице Менделеева. Сумма количества протонов (**Z**) и нейтронов (**N=A-Z**) образует массовое число (**A**) ядра. Сам атом нейтрален и таким образом вокруг положительно заряженного ядра с **Z** протонами должны вращаться **Z** отрицательно заряженных электронов. Исходя из таких представлений, а также вышеназванных ограничений в отношении положения электронов можно привести обоснование таблицы Менделеева, опираясь на электронную конфигурацию атомов различных химических элементов. В качестве примера в таблице 3 представлены данные для первых трех периодов таблицы Менделеева.

Условные обозначения в таблице 3 поясним на примере. В атоме водорода (**H**) имеется один электрон. Набор квантовых чисел следующий **(n, l, m,) = (1, 0, 0,)**, при этом, поскольку есть один электрон, то либо $\mathbf{m_s=+1/2}$, либо $\mathbf{m_s=-1/2}$. Тогда, переобозначая **l=0, 1, 2, 3,..** через **l=s, p, d, f,...**, и, указывая в начале числовое значение n, а в верхнем индексе количество электронов, для атома водорода запишем электронную конфигурацию $\mathbf{1S^1}$.

Для атома гелия (**He**), обладающего двумя электронами, имеем следующие наборы квантовых чисел: **(n, l, m, $m_s$)=(1, 0, 0, +1/2)** и **(n, l, m, $m_s$)=(1, 0, 0, -1/2)**. Электронная конфигурация при этом имеет вид **$1S^2$**, так как на орбите вращаются уже два электрона.

В квантовой теории физики полагают, что электроны с одинаковыми квантовыми числами **n** формируют некие электронные оболочки. При этом в каждой оболочке не может находиться более чем **$2n^2$** электронов. Атомы, у которых электронные оболочки полностью заполнены, образуют элементы, обладающие очень слабым взаимодействием с атомами других элементов. Примером этого являются инертные газы **He, Ne,...** . В противоположность этому атомы, имеющие на внешней незаполненной оболочке только один электрон, обладают ярко выраженной активностью при взаимодействии с другими элементами. Примером этого служат атомы таких элементов, как **Li, Na,...** . Более того химики в целом отмечают по таблице Менделеева уменьшение химической активности при последовательном переходе элементов от **Li** к **Ne** и далее соответственно от **Na** к **Ar**, что в рассмотренной модели соответствует увеличению электронов на внешней оболочке от одного до максимально возможного.

С точки зрения ЗДРСМа такая модель представляется достаточно понятной, да и экспериментальные данные служат подтверждением такой конструкции, хотя, конечно, никто и никогда не видел атом с вышеназванным ядром и электронными оболочками.

Можно продолжить повествование о мельчайших основах строения вещества. Однако не станем этого делать, поскольку существующие в настоящее время теории так и не сумели решить эту проблему, а различные эксперименты и наблюдения также пока не позволили исследователям сделать это. Отметим лишь как итог, что наблюдаемые дальнодействующие силы (гравитационная, электрическая и магнитная) носят векторный характер, имеют схожие и отличные черты, но первопричина их не ясна! При этом имеются теоретические модели, которые в большинстве случаев дают хорошее описание окружающего людей мира реального. Эти модели используют выражения для вышеназванных сил, а также еще ряда сил, которые возникают в случаях, когда тело находится не в состоянии покоя, а движется или находится на двигающемся объекте.

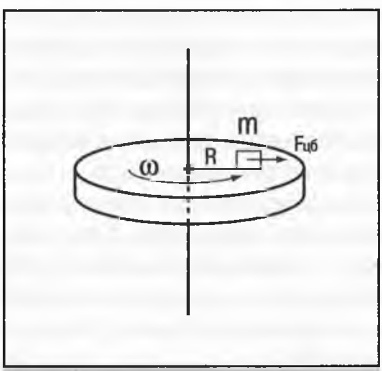


**Рис. 17.**

Рассмотрим случай, когда тело массой **m** помещено на вращающемся с угловой скоростью ω диске, на расстоянии **R** от центра вращения (рис. 17).

Представив себя на месте данного тела и руководствуясь воспоминаниями

ЗДРСМа о катаниях на карусели, мы скажем, что при вращении возникает некая сила, которая толкает и уносит от центра. Причем чем сильнее крутиться диск, тем заметнее эта сила. Проведя соответствующие измерения, удалось установить, что величина этой силы, названной центробежной силой инерции, может быть вычислена по формуле:

$$\mathbf{F_{цб}} = \mathbf{m} \bullet \omega^2 \bullet \mathbf{R}, \qquad (63)$$

где $\omega^2 \bullet \mathbf{R}$ соответствует модулю нормального ускорения $\mathbf{a_n}$ тела массой $\mathbf{m}$, вращающегося с угловой скоростью $\omega$ на расстоянии $\mathbf{R}$ от оси вращения.

Таким образом, центробежная сила $\mathbf{F_{цб}}$ возникает при вращении и направлена от центра вращения. При этом она не зависит от скорости движения тела массой $\mathbf{m}$ относительно вращающегося диска. Последнее, очевидным образом, следует из (63). Однако более поздние исследования показали, что на движущееся относительно системы отсчета тело (в рассмотренном выше примере относительно диска) действует еще одна сила инерции, называемая силой Кориолиса, по имени французского физика, механика. Значение этой силы ($\mathbf{F_k}$) можно вычислить по формуле:

$$\mathbf{F_k} = \mathbf{2} \bullet \mathbf{m} \bullet [\mathbf{V_k} \bullet \omega], \qquad (64)$$

где $\mathbf{m}$ - масса тела, двигающегося со скоростью $\mathbf{V_k}$ относительно системы отсчета, вращающейся с угловой скоростью $\omega$.

Напомним, что квадратные скобки означают вычисление векторного произведения векторов, находящихся внутри их. Исходя из этого, можно констатировать, что сила Кориолиса всегда находится в плоскости, перпендикулярной к оси вращения системы, а также то, что она не изменяет модуля скорости $\mathbf{V_k}$, а изменяет лишь ее направление.

Величина силы Кориолиса в условиях Земли при небольших значениях $\mathbf{V_k}$ и $\mathbf{m}$ не всегда заметна. Однако при стрельбе на дальние расстояния влиянием этой силы пренебрегать ни в коем случае нельзя. Интересно также отметить, что реки северного полушария всегда подмывают правый берег, а соответственно реки южного полушария - левый. Вот так мало помалу, но в конечном итоге весьма заметно влияет сила Кориолиса.

Проводя аналогии между электрическим и гравитационным полями, нельзя не отметить еще одну и очень важную силу, возникающую при движении материального объекта в электрическом поле. Данное выражение было получено известным физиком Лоренцом и носит его имя:

$$\mathbf{F} = \mathbf{q} \bullet \mathbf{E} + \mathbf{q} \bullet [\mathbf{V} \bullet \mathbf{B}], \qquad (65)$$



5 з. 192

где **q** - заряд материального объекта, **E** - напряженность электрического поля, в котором движется вышеназванный объект со скоростью **V**, **B** - магнитная индукция, являющаяся аналогом напряженности электрического поля, за которой, однако, в силу определенных исторических причин закрепилось именно это название.

Следует отметить также, что вопреки всем стараниям так и не удалось обнаружить элементарных источников магнитных сил. В связи с этим современная теория магнитного поля основывается на описании электрических полей и взаимодействии электрических токов через магнитное поле, причиной возникновения которого являются движущиеся заряды. Напомню, что током называется направленное движение электрических зарядов. При этом магнитное поле в отличие от электрического появляется и действует только при условии движения электрических зарядов. Покоящиеся электрические заряды магнитного поля не создают, а магнитное поле, в свою очередь, не действует на покоящиеся заряды.

Интересна аналогия между силой инерции, которая возникает при движении системы отсчета, и силой Лоренца, которая возникает при движении зарядов. Для сравнения можно еще раз обратиться к формулам (64) и (65), чтобы сопоставить параметры электрического, магнитного и гравитационного полей. При этом возникает предположение о существовании «инерциального» поля, дополняющего гравитационное поле, так же как магнитное дополняет электрическое.

Итак, подведем промежуточный итог в отношении известных дальнодействующих сил:

- почему существуют гравитационная и электрическая силы, что является их первопричиной - не ясно, но их влияние отмечается в мире реальном;

- не обнаружено величины электрического заряда меньше, чем заряд электрона;

- сказанное выше в отношении минимального электрического заряда не имеет аналогии для некого минимального значения массы. Более того, современная теория допускает существование элементов с массой, стремящейся к нулю;

- магнитные заряды не обнаружены. Весьма вероятно, что их нет, а магнитные свойства элементов и магнитное влияние - это результат движущихся электрических зарядов;

- покоящиеся электрические заряды влияют на другие электрические заряды, но не влияют на элементы, имеющие магнитные свойства, например, магнитную стрелку. Как только происходит движение электрических зарядов относительно магнитной стрелки, она занимает положение перпендикулярное направлению движения электрических зарядов;

- движущиеся электрические заряды приводят к возникновению магнитного поля, которое в свою очередь начинает влиять на движущиеся заряды;

- рассматривая аналогии между электрическим и гравитационным полем, следует отметить, что если движущийся электрический заряд создает магнитное поле, то что создает движущаяся масса — не известно. Однако при определении силы Лоренца (65) имеется параметр **V**, который можно определить, как интеграл от ускорения **а**. Ускорение же **а** определяется по закону Ньютона в зависимости от силы **F** и массы **m**, что является характеристикой гравитационного поля;

- почему движущийся электрический заряд создает магнитное — поле не известно. Отмечается лишь факт того, что при движении электрического заряда возникает нечто, влияющее на магнитную стрелку, что и послужило причиной того, что это нечто было названо магнитным полем;

- почему возникает сила инерции — не известно, однако ее действие отмечается приборами;

- силы взаимодействия в гравитационном или электростатическом поле пропорциональны соответственно произведению удельных масс или зарядов взаимодействующих элементов, приходящихся на единицу расстояния между ними».

«Силочка Водородовна, - не выдержала Муза-Диф. - Что же это у Вас все не известно, да не известно? Как-то грустно получается. Может Вы сейчас в пессимистическом настроении пребываете?»

«Да нет, - ответила Вселенская. - Вовсе я не пессимист. Просто, если следовать строгому тону, который задал наш Пи Е, получается, что многие основополагающие вещи в физике следует принять на веру. Это как аксиома в математике. Измените аксиоматику - получите другую математику. Основы физики измените - попадете в другой мир, Вы уж извините! Так что вот такие стихи получаются. И коль скоро мы говорим о **МИР**е, то следует заранее оговорить границы применимости наших знаний, ни в коем случае не претендуя на их абсолютность и завершенность. Однако, с Вашего позволения, я продолжу повествование про физику.

При изучении электрических и магнитных полей известному физику Максвеллу удалось установить определенные соотношения между параметрами, характеризующими их. В результате появилась возможность, используя эти эмпирические формулы, названные позднее по имени автора, производить расчеты параметров электрических и магнитных полей при заданных пространственных распределениях зарядов и токов (движущихся зарядов). Не вдаваясь в подробное обсуждение данного вопроса, приведем лишь эти замечательные выражения:

$$\mathbf{rot\,E = -\,\partial B/\partial t}, \tag{66}$$
$$\mathbf{div\,B = 0}, \tag{67}$$
$$\mathbf{rot\,H = j + \partial D/\partial t}, \tag{68}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = \rho, \tag{69}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \bullet \varepsilon \bullet \mathbf{E}, \tag{70}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \bullet \mu \bullet \mathbf{H}, \tag{71}$$

$$\mathbf{j} = \sigma \bullet \mathbf{E}, \tag{72}$$

где **E** - напряженность электрического поля, **B** - магнитная индукция, **H** - напряженность магнитного поля, **D** - электрическое смещение (электрическая индукция), **j** - плотность тока, $\rho$ = **dq/dV** - объемная плотность заряда, $\varepsilon_0$ = $\mathbf{1/4 \bullet \pi \bullet 9 \bullet 10^{a}}$ **[Кл²/(Н•м²)]** - электрическая постоянная, $\varepsilon$ - диэлектрическая проницаемость вещества (для вакуума $\varepsilon = 1$, в остальных случаях $\varepsilon > 1$), $\mu_0 = 4 \bullet \pi \bullet \bullet 10^{-1}$**[Тл•м/А]** - магнитная постоянная, **μ** - магнитная проницаемость вещества (в отличии от $\varepsilon$ величина **μ** может быть как больше, так и меньше **1**), $\sigma$ = **dq/dS** - поверхностная плотность заряда.

Уравнения (66 - 72) образуют теоретическую основу электродинамики покоящихся сред и носят название векторных уравнений Максвелла в дифференциальной форме. Поскольку электрические и магнитные поля рассматриваются в трехмерном пространстве, то векторные уравнения (66 - 69) можно записать в скалярной форме в следующем виде:

$$\partial E_z/\partial y - \partial E_y/\partial z = -\,\partial B_x/\partial t,\ \partial E_x/\partial z - \partial E_z/\partial x = -\,\partial B_y/\partial t,$$
$$\partial E_y/\partial x - \partial E_x/\partial y = -\,\partial B_z/\partial t\,; \tag{73}$$

$$\partial B_x/\partial x + \partial B_y/\partial y + \partial B_z/\partial z = 0\,; \tag{74}$$

$$\partial H_z/\partial y - \partial H_y/\partial z = j_x + \partial D_x/\partial t,\ \partial H_x/\partial z - \partial H_z/\partial x = j_y + \partial D_y/\partial t,$$
$$\partial H_y/\partial x - \partial H_x/\partial y = j_z + \partial D_z/\partial t\,; \tag{75}$$

$$\partial D_x/\partial x + \partial D_y/\partial y + \partial D_z/\partial z = \rho. \tag{76}$$

Уравнения Максвелла (66 - 69) можно также представить в интегральной форме.

$$\int_{\Gamma} \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\int_{S} \mathbf{B}\,d\mathbf{S}, \tag{77}$$

$$\int_{S} \mathbf{B}\,d\mathbf{S} = 0, \tag{78}$$

$$\int_{\Gamma} \mathbf{H}\,d\mathbf{l} = \int_{S} \mathbf{j}\,d\mathbf{S} + \frac{d}{dt}\int_{S} \mathbf{D}\,d\mathbf{S}, \tag{79}$$

$$\int_{S} \mathbf{D}\,d\mathbf{S} = \int_{V} \rho\,dV. \tag{80}$$

В зависимости от решаемых задач исследователи используют те или иные формы уравнений Максвелла. При этом следует особо подчеркнуть важность соединения электрической и магнитной теорий в одну электромагнитную, что позволило установить существование электромагнитных волн, распространяющихся со скоростью света, и предложить электромагнитную теорию самого света. Кроме того, данные уравнения подтвердили еще раз представления ЗДРСМа о единстве мира, взаимосвязи и взаимозависимости различных и не похожих друг на друга, на первый взгляд, явлений и процессов.

Помимо изложенного выше векторного и «силового» отображения мира реального физики используют также «энергетическое» описание, что соответствует скалярному представлению мира. Поскольку наш дорогой Пи Е Тет не говорил ни о каких других возможностях, то будем считать, что на данном этапе между математиками и физиками нет противоречий. Хотя для особо осторожных и недоверчивых следует потребовать предъявления доказательства того, что кроме скалярных и векторных величин других не существует.

Понятия энергии и работы хорошо воспринимаются ЗДРСМом, а выражение о том, что когда много энергии можно сделать много работы подчеркивает, что энергия используется для выполнения работы. Для формального и количественного определения этих понятий рассмотрим пример, когда прикладывая силу **F**, некто протащил груз на расстояние **S**. Условимся работой **A** называть скалярное произведение вышеназванных векторов, то есть:

$$\mathbf{A} = |\mathbf{F} \bullet \mathbf{S}| \qquad (81)$$

Пусть под действием силы **F** тело массой **m** начнет движение с ускорением **a** и через некоторое время **t** пройдет путь **S**. При равноускоренном характере движения, через время **t** скорость тела будет равна $\mathbf{V} = \mathbf{a} \bullet \mathbf{t}$. Тогда, подставляя в (81) $\mathbf{F} = \mathbf{m} \bullet \mathbf{a}$, $\mathbf{S} = \mathbf{a} \bullet \mathbf{t}^2/2$ и $\mathbf{a} = \mathbf{v}/\mathbf{t}$ и полагая, что направление силы совпадает с направлением движения, получим выражение для так называемой, кинетической энергии тела $\mathbf{W}_k$, которую тело приобретает благодаря воздействию силы **F**. Таким образом, энергия двигающегося тела массой **m** равна:

$$\mathbf{W}_k = \mathbf{m} \bullet \mathbf{v}^2/2 \qquad (82)$$

Представим теперь себе ситуацию, когда тело массой **m** было под воздействием силы **F** поднято над землей на высоту **h**. Для поднятия тела приходилось преодолевать силу притяжения Земли, при этом $\mathbf{a} = \mathbf{g}$ и, следовательно, на высоте **h** тело массой **m** будет иметь энергию $\mathbf{W}_P$, называемую потенциальной и равной:

$$\mathbf{W}_P = \mathbf{m} \bullet \mathbf{g} \bullet \mathbf{h} \qquad (83)$$

Несложно представить себе и убедиться в этом на опыте как один вид энергии переходит в другой и как запас энергии характеризует потенциально возможную работу, а выполненная работа в свою очередь характеризует запас энергии.

Сумма кинетической и потенциальной энергий образуют полную механическую энергию. Однако в мире реальном существуют силы сопротивления и трения, которые приводят к диссипации (рассеиванию) механической энергии. При этом было замечено, что взаимодействующие тела нагреваются. Из этих наблюдений ЗДРСМом был сделан вывод, что механическая энергия может переходить в тепловую. Впоследствии энергию тепла научились преобразовывать в механическую энергию и затем - в электрическую. Был также найден еще более могущественный источник энергии, а именно, атомное ядро. Кроме того, удалось найти способы добычи этой энергии, и получено выражение для характеристики энергетического запаса тела массой **m**:

$$\mathbf{E_m = m \bullet c^2} \qquad (84)$$

Используя это выражение, можно определить потенциальные энергетические запасы систем, обладающих той или иной массой, что следует учитывать при стратегических исследованиях и анализе энергетической перспективы.

Огромное значение имеет также закон сохранения энергии, который подразумевает то, что энергия переходит из одного вида в другой, от одного объекта к другому, но при этом не может куда-либо безвозвратно исчезнуть. Этот постулат применим ко всем явлениям природы и до сих пор не получал экспериментального опровержения».

«Уважаемая Сила Водородовна, - вступил в разговор, давно молчавший Бит Байтович, - Пи Е просветил нас относительно неких теоретических конструкций, которые при задании определенных начальных условий (аксиом) начинают соответствующую самостоятельную жизнь, не допускающую отступления от установленных законов. При этом развитие происходит как бы от корня конструкции. Есть некоторые основы и действия над ними, а все последующее проистекает как следствие из этого. Не всегда очевидное, не всегда заметное и доказанное, но все же следствие. В физике все не так. Физики занимаются как бы подгонкой ключей под различные замки, открывая каждый раз двери в некие новые залы, где неизвестно, что нас ждет. При этом, поскольку таких ключей накопилось довольно много, удалось выявить определенные основы их изготовления, что позволило с помощью уже известных ключей открыть до этого запертые двери.

Вы обрисовали основные черты мира реального, который удалось с той или иной степенью точности описать с помощью тех же математических моделей, но при этом используемое описание имело еще больше ограничений. Более того, первопричина рассматриваемых явлений и процессов, как правило, не выявлена. Пока, по крайней мере. Физики, «изготовляя ключи», фактически установили те же аксиомы или постулаты, которые используют в своих построениях, но при этом каждое новое явление, найденный «новый ключ» необходимо обязательно соотнести с известными и убедиться, что нет противоречия с основами. Если же такое противоречие обнаруживается, то все надо менять. Конструкция разрушена, и все надо начинать с начала»!?

«Ну что же, - согласилась Вселенская. - Это действительно так, если говорить о некой всеобщей конструкции. Однако уже известные решения не пропадают бесследно, поскольку оказываются очень удобными в рамках тех границ, при которых не возникало противоречий. Более того, в ряде случаев они будут иметь существенные преимущества в силу ряда причин, зависящих от конкретных обстоятельств. Например, в повседневной жизни человек использует различные приборы, часы, весы и прочее, не отличающиеся высокой точностью измерения, но вполне его устраивающие. Вместе с тем можно представить себе ситуацию, когда, договариваясь о свидании, молодые люди фиксируют время встречи с точностью до миллионной доли секунды. Опоздал или опоздала больше, чем на пять миллионных долей секунды, то все, никаких больше свиданий и дружбы. Но ведь если бы это было так, то это был бы совсем другой мир. Так что мир, представляемый физикой, - это постоянно расширяющаяся конструкция знаний, которая каждый раз, при новых своих фундаментальных основах все предыдущее включает в себя как частный случай, допустимый при более грубых начальных условиях.

Кстати у математиков время от времени происходит то же самое».

«Познание - безгранично и прекрасно, хотя никто не знает, что это такое. Но как-то приятно это. Есть над чем поработать. Неправда ли?! - воскликнула Муза-Диф и продолжила. Однако различные тела, материя, в каких видах все это существует? Как это представляет физика?»

«Физики, наблюдая за миром реальным, обнаружили, что вещество может находиться в одном из трех состояний: твердом, жидком и газообразном. В добавлении к этому известны также состояния плазмы и излучения в виде волны, что является моделью микромира, мало понятному со стороны ЗДРСМа. Пребывание вещества в том или ином состоянии зависит от параметров окружающей среды, таких как температура, давление и прочее. При этом возникает интересный вопрос о размерности пространства, в котором существуют реальные объекты. До этого мы говорили о трехмерном пространстве положений и одномерном пространстве времени. Но уважаемый Пи Е научил нас, что пространства могут иметь значительно большую размерность. При этом если для описания сложного явления необходимо выбрать **N** координат, отвечающих условию (32), то пространство будет **N**-мерным. Так вот, для описания существования вещества и объектов, из него состоящих, в мире реальном необходимо учитывать ряд дополнительных показателей, например, температуру, давление и прочее. При этом, чем сложнее объект, тем большей размерности пространство. Возьмем, например, для сравнения камень и цветок, надеюсь, Музе будет приятно.

Для характеристики существования камня, как некого твердого вещества определенной массы и размера, в некой пространственной точке, по-видимому, важны показатели температуры и давления, но наличие или отсутствие кислорода или другого газа в этом месте не важно, тогда как для цветка это принципиально необходимо, поскольку при одних условиях он существует, а при других - нет. Это означает, что можно поставить вопрос о необходимой и достаточной размерности пространства, в котором могут существовать объекты той или иной степени сложности. В этой связи, предвидя вопросы создания **МИР**а, следует учесть размерности формируемого пространства, а, следовательно, и его адекватности миру реальному. При этом многие объекты могут никогда не «встретиться» в **N**-мерном пространстве. Например, цветок никогда не «встретится» с плазмой или кипящей лавой. А если кто-то попытается совместить их в пространстве положений, то цветок погибнет, потому, что ему нет места там, где находится плазма или лава. Кстати, верно и обратное утверждение. Лавы не будет там, где есть цветок. Задание такого описания в **МИР**е позволит отобразить явления мира реального.

Но вернемся, однако, к рассмотрению состояний вещества.

Начнем с твердых тел, большинство из которых имеют кристаллическую структуру, то есть состоят из одинаковых «первокирпичиков» (кристаллов), имеющих строго определенную для данного вещества форму. При этом в зависимости от параметров внешней среды (давление, температура, электрические и магнитные

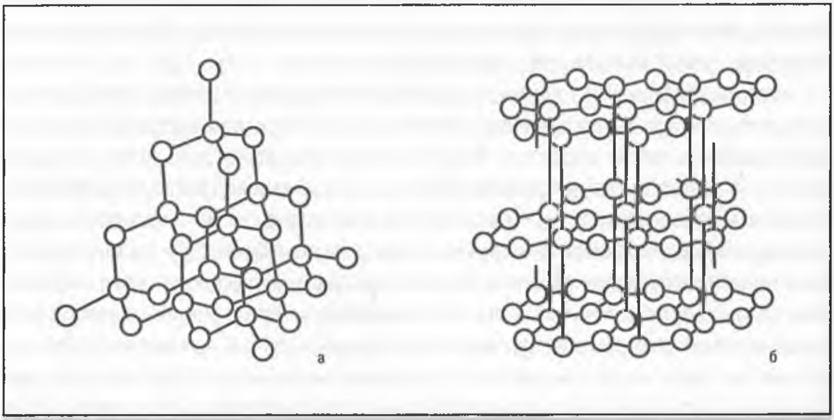



**Рис. 18.**

поля) кристаллы могут изменяться, что приводит и к изменению свойств вещества. Замечательным примером этого служат алмаз и графит, кристаллы которых построены из атомов углерода, но имеют совершенно разные структуры кристаллической решетки. Достаточно одного взгляда на рис. 18, чтобы стало понятно свойство твердости соответственно алмаза (рис. 18а) и графита (рис. 18б).

Твердые вещества, имеющие кристаллическую структуру, в силу имеющейся асимметрии кристаллов обладают анизотропными свойствами. Это означает, что в зависимости от направления воздействия (механического, теплового и прочее) вещество будет проявлять себя по-разному. При этом, чем более асимметрична кристаллическая решетка, тем ярче выражены эти свойства и наоборот. Например, кристаллы, имеющие кубическую структуру, обладают высокой степенью симметрии и ведут себя как изотропные тела, то есть тела, у которых свойства не зависят от направления внешнего воздействия.

В сегодняшней физике выделяют следующие группы кристаллов: атомные, ионные, металлические и молекулярные. Такая систематизация достаточно условна и определяется видом элементов, располагающихся в узлах кристаллической решетки, а также характером сил, обеспечивающих «закрепление» конструкции кристалла. Возможно, существуют и другие типы кристаллов, если таковые будут обнаружены. Более того, на сегодня известны вещества, которые получили название жидких кристаллов из-за выявленных у них анизотропных оптических свойств.

Кристаллические твердые вещества отличаются строгим порядком внутреннего построения. В отличие от них газообразное вещество характеризуется отсутствием, какого либо порядка, если, конечно, не считать за порядок хаос. Жидкость в этом отношение занимает промежуточное положение, при котором каждая молекула находится в некотором относительно устойчивом состоянии и существует, так называемый, ближний порядок, поддерживаемый межмолекулярными связями. Под влиянием внутренних процессов вышеназванные молекулы в жидкости скачкообразно меняют свое положение, «закрепляясь» на время в другом относительно устойчивом состоянии. Этим явлением объясняется текучесть жидкости в отличие от твердых тел.

Экспериментально было замечено, что с увеличением температуры молекулы в жидкости начинают перемещаться все чаще, в результате чего вязкость жидкости уменьшается. Увеличивается испарение и далее с ростом температуры жидкость переходит в газообразное состояние. При дальнейшем увеличении температуры, уже при газообразном состоянии вещества, вязкость начинает возрастать, что современная теория объясняет нарастающим хаотичным движением молекул, увеличивающих скорость движения с увеличением температуры. Почему это они делают, благодаря какому механизму в точности не известно. Но то, что это происходит, - объективный результат наблюдений!

Весьма интересны экспериментальные данные, описывающие переходы


**Рис. 19.**

вещества из твердого состояния соответственно в жидкое и газообразное в зависимости от температуры и давления. На рис. 19 изображены состояния вещества в зависимости от вышеназванных параметров: давления **p** и температуры **t**.

Особо следует выделить значения $\mathbf{p_{тр}}$ и $\mathbf{t_{тр}}$, характеризующие, так называемую тройную точку, при которой вещество может находиться в одном из состояний: твердом, жидком или газообразном. Во всех других случаях состояние может быть только одно. Конечно, переход из одного состояния в другое не происходит мгновенно и вещество на границах перехода находится частично в одном состоянии, а частично в другом. Например, застывающие льдинки в холодной воде. При этом время перехода из одного состояния в другое также зависит от значений **p** и **t**. Отметим также значение критической температуры $\mathbf{t_{кр}}$, характерной тем, что при $\mathbf{t>t_{кр}}$ вещество независимо от значения давления **p** всегда находится только в газообразном состоянии. Отмеченные явления получены в результате наблюдений ЗДРСМа с последующим подбором теоретической модели, вполне адекватной в доступных для экспериментальных исследований диапазонах давления и температуры. Что происходит за этими пределами, не известно. Более того, вполне вероятны некие «сюрпризы», заставляющие уже не раз пересматривать теоретические конструкции. Об этом свидетельствует хотя бы тот факт, что четвертое названное выше состояние вещества, а именно, плазма, возникает при очень высоких температурах, которые до сравнительно недавнего прошлого не были доступны исследователям.

Переход из твердого состояния в жидкое называют плавлением, из жидкого в газообразное - испарением, а из твердого сразу в газообразное - сублимацией. Примером последнего является твердая углекислота, часто называемая сухим льдом. Кроме того, при различных сочетаниях давления и температуры твердые вещества могут приобретать различные кристаллические состояния. Так, например, у воды в изученных диапазонах **p** и **t** имеется семь различных модификаций льда. В общем случае переход вещества из одного состояния в другое называют фазовым переходом. При этом фазовым переходом первого рода называют процесс изменения состояния вещества с выделением или поглощением тепла, а фазовым переходом второго рода - аналогичный процесс, но без изменения тепла. Однако во всех случаях происходят изменения других свойств вещества, а именно, механических, электрических, магнитных, оптических и прочее. Примеров довольно много, но нет, к сожалению, пока обобщающей теории, которая могла бы описать поведение всех веществ и изменение их свойств в зависимости от параметров окружающей среды.

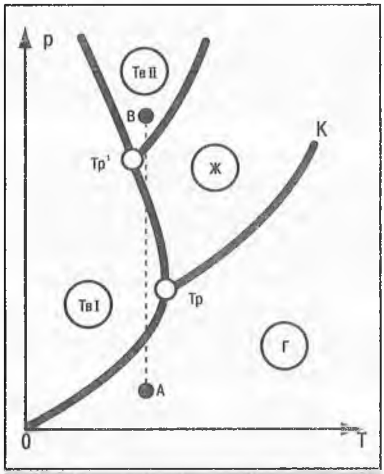



Рис. 20.

Диаграммы, отражающие состояние вещества, могут иметь по сравнению с рис.19 более сложный вид, как, например, показано на рис. 20. Здесь, в частности, при переходе из точки **А** в точку **В**, при неизменной температуре, но изменяющемся давлении, вещество, находящееся в газовом состоянии, сначала перейдет в твердое состояние, затем в жидкое, а затем опять в твердое. Для ЗДРСМа - не вполне знакомая ситуация, но она реально наблюдается в экспериментах».

«Как разнообразен мир реальный, - воскликнула Муза-Диф. - Как сложно найти первоосновы его, которые обеспечивают эти различия и в то же время очевидные закономерности. Но можно все-таки изобразить некую физическую и достаточно наглядную модель, как приближение к миру реальному?»

«Конечно, можно! - ответила Сила Водородовна. - Собственно говоря, мы об этом и говорили. Другое дело, что точность такой модели оказывается не всегда достаточной и приходится вводить определенные поправки».

«Позвольте мне, уважаемая госпожа Вселенская, обрисовать эту модель, исходя из тех пояснений, которые Вы нам дали, - вмешался в разговор Зонгаид. И, видя, что возражений нет, продолжил. - Любое вещество, с которым сталкиваются люди в мире реальном, состоит из мельчайших элементов, называемых молекулами. При этом с помощью оптических приборов можно наблюдать эти молекулы. В свою очередь молекулы состоят из еще более мелких элементов - атомов, а каждый атом состоит из ядра и вращающихся вокруг него электронов. Благодаря косвенным методам измерений можно оценить размеры ядра и электронов, однако наблюдать их с помощью оптических приборов уже не удается в силу малости их размеров. Ядро атома включает в себя много - много всякого, о чем каждый раз сообщают физики. Однако при этом сказать о том, что в ядре больше ничего неведомого не осталось, пока не могут. Следует также учесть, что то, что происходит в микромире, совершенно не похоже на то, к чему привыкли люди и что хорошо воспринимается ЗДРСМом.

Ядро, электрон, атом и, наконец, молекулу при моделировании и расчетах часто полагают за некий шарик с соответствующими геометрическими размерами. Уважаемому ЗДРСМу это нравится, а в случаях существенного отличия теоретических и экспериментальных результатов вводятся соответствующие поправки.

При очень высокой температуре вещество находится в состоянии плазмы. При снижении температуры из атомов образуются молекулы, которые в начале «создают» газообразное вещество, а затем жидкое и твердое. Хотя, как мы в этом убедились, переход вещества из одного фазового состояния в другое не происходит столь прямолинейно».

После этих слов господин Профилактян остановил свое повествование, весьма довольный тем, как ему удалось несколькими фразами обрисовать долгие изыскания физиков.

«Ну что же, - продолжила Вселенская, - в общих чертах все так и есть. Надо только дополнить, что снижение температуры происходит до некоторого предела, называемого абсолютным нулем. При измерении по шкале Кельвина $\mathbf{T_{абсолют.}} = \mathbf{0^\circ\ K}$ и по шкале Цельсия $T_{абсолют.} = \mathbf{-273{,}15^\circ\ C}$. При столь низких температурах вещество зачастую приобретает ряд замечательных качеств, которые не наблюдались при более высоких «обычных» температурах. Так, например, известно явление сверхпроводимости, при котором протекание токов через вещество происходит без потерь, связанных с наличием в обычных условиях сопротивления. Известны и другие феномены, что свидетельствует о том, что при температуре, близкой к абсолютному нулю, в веществе происходят фазовые переходы. При этом невольно вспоминаешь об удивительных соотношениях на числовой оси, о которых рассказывал Пи Е. Помните, на отрезке от нуля до единицы чисел больше, чем количество всех целых чисел или даже всех рациональных чисел. Для лучшего восприятия этой картины со стороны ЗДРСМа можно представить себе пример, когда на числовой оси справа от единицы располагается равномерный уходящий вдаль ряд целых чисел **1, 2, 3,...**, а слева — «сжимающийся клубок» обратных чисел **1/1, 1/2, 1/3,...** При этом, если все числа перевернуть, взяв обратные, то картина также перевернется относительно точки симметрии, то есть относительно единицы».

«Уважаемая Сила Водородовна, - вмешался в разговор Тет. - Ваш последний пример заставил меня прервать Ваше повествование. Но дело в том, что Вы упомянули об очень интересном разделе математики, который вместо чисел оперирует формами. Поэтому Ваш замечательный пример об уходящем вдаль ряде и клубке чисел - это тоже некая форма. Полагаю, что несколько позднее у меня будет возможность остановиться на этом подробнее. Но сейчас я хотел бы сконцентрировать внимание уважаемых жителей **МИР**а на том, что математическая наука - это не только числа и действия над ними, но и другие абстрактные понятия, а также действия над ними».

Сила Водородовна с удовольствием выслушала добавление Пи Е и продолжила: «Да, действительно, понятие формы очень важно. Полагаю, что и математики данную абстракцию заимствовали в мире реальном, наблюдая за листьями растений, папоротника, например; за архитектурой пчелиных сот и так далее. Во всех случаях существенным являлось выделение общих объектов и правил действий над ними или с ними.

Как мы уже говорили, физики, подбирая ключи к дверям в новые неизведанные помещения, руководствуются некими постулатами, которые считаются истинными и помогают ограничивать возможности общего перебора ключей. О некоторых из них мы уже говорили. Следует также упомянуть и о проблеме вечного двигателя. Физики утверждают, что:

- вечный двигатель (перпетуум мобиле) первого рода не может существовать как периодически действующий двигатель, который совершал бы работу в большем количестве, чем получаемая им извне энергия;

- вечный двигатель (перпетуум мобиле) второго рода не может существовать как периодически действующий двигатель, который получал бы теплоту от одного резервуара и превращал ее полностью в работу.

Приведенные формулировки являются продолжением двух постулатов, именуемых первым и соответственно вторым началами термодинамики, а именно:

- количество теплоты, сообщенное системе, идет на приращение внутренней энергии системы и на совершение системой работы над внешними силами;

- невозможны такие процессы, единственным конечным результатом которых был бы переход некоторого количества теплоты от тела, менее нагретого, к более нагретому телу.

Отметим, что хотя природа теплоты до конца не понятна (никто не объяснил почему, например, электроны начинают двигаться с большей скоростью с увеличением температуры), однако с позиций ЗДРСМа первое и второе начало термодинамики представляются вполне обоснованными и разумными.

Как мы уже отмечали, физический объект существует в некой N-мерной системе координат. Если рассматривать его элементарные составляющие и их существование в этой системе, то окажется, что аналитическое описание этого станет столь громоздким, что потеряет смысл для ЗДРСМа. Например, если вы скажете, что вот перед нами клубок ниток, который запутал играющий котенок, то практически все благодаря ЗДРСМу поймут, о чем речь. Но если то же самое вы попытаетесь обрисовать в виде записи координат точек перегиба нити в трехмерном пространстве, то те же представители, обладающие ЗДРСМом, могут просто вас поколотить, не дождавшись перечисления всех цифр. В этой связи все многообразие состояний элементов объекта было предложено характеризовать количеством этих состояний, чтобы иметь представление об объекте в целом, без излишней детализации.

Представим себе, что объект состоит из двух частей. Пусть первая часть соответствует $Q_1$ состояниям элементов объекта, а вторая - $Q_2$. Тогда общее количество различных состояний очевидно равно $Q_\Sigma = Q_1 \bullet Q_2$. Мы видим, что в данном случае не выполняется условие аддитивности и, исходя из этого, ЗДРСМ предложил характеризовать количество состояний не напрямую, как было показано, а взяв от этой величины натуральный логарифм. Тогда имеем:

$$H_\Sigma = \ln Q_\Sigma = \ln Q_1 + \ln Q_2 \qquad (85)$$

Величина $\ln Q_\Sigma$ называется энтропией системы, а $\ln Q_i$ - частной энтропией.

Оперируя вновь введенными понятиями, физики формулируют второе начало термодинамики как закон неубывания энтропии. Утверждается, что любая изолированная система стремится к состоянию максимальной энтропии, достигнув которое будет находиться в состоянии равновесия.

Рассматривая энтропийное описание вещества при различных температурах, было предложено третье начало термодинамики, которое утверждает, что:

$$\lim_{T \to 0} H_\Sigma = 0. \qquad (86)$$

Данная формула следует из предположения о том, что при температуре равной абсолютному нулю объект будет находиться только в одном состоянии, то есть $Q_\Sigma=1$».

«Так что, при температуре абсолютного нуля все замерзает и исчезает?» - заволновалась Муза-Диф.

«Практически ответить на Ваш вопрос невозможно, поскольку в экспериментах такую температуру получать не удавалось. Что же касается теоретических воззрений на это, то предполагается не исчезновение объекта, а исчезновение разнообразия. Другими словами, это застывший в неком одном состоянии мир - ответила Вселенская. - В этом мире ничего не должно меняться и таким образом фактически исчезает понятие времени. Поэтому, если говорить о возможности существования «машины времени», то это через абсолютный нуль».

«А как же можно путешествовать в такой машине? - вновь заволновалась Муза-Диф. - Застынешь так, что не разморозят! Да и вообще, давайте поговорим о живом! А то все формулы да объекты. Аксиомы да постулаты. Не возражаете?

Зонгаид Лечевич, внесите разнообразие в наш разговор!»

## 7. Зонгаид Лечевич Профилактян вносит разнообразие в разговор по вопросу 1

«Конечно, я постараюсь «оживить» не только наш разговор, но и те формулы и постулаты, о которых мы говорили до этого, поскольку все вышеизложенное действует и в мире живом. Кстати, именно с этого мы и начнем. Нам необходимо договориться о том, что относится к живому миру, а что нет. Причем именно договориться, поскольку опереться на что-либо в качестве обоснования и доказательства, по-видимому, не возможно. За исключением ЗДРСМа, разумеется!

Итак, в поисках определения предположим, что живое - это то, что перемещается в пространстве. Но тогда дерево или цветок могут быть не отнесены к миру живых, но зато камень, катящейся с горы, окажется в этом мире. Отметив неудачность такого определения, попробуем к живому относить все то, что изменяется со временем, растет, увеличиваясь в размерах, и прочее. Но тогда в качестве живых существ придется признать кристаллы, сталактиты, сталагмиты и так далее. Опять не вполне удачное определение получается.

Более тщательный анализ по выявлению общих и отличных черт живого, показывает, что последние обладают особыми свойствами приспособляемости под условия окружающей среды. Конечно, все это может происходить в определенных пределах, но все же данная способность характерна для живых существ и ее принято называть свойством реактивности. На самом деле таким же свойством обладает, по-видимому, все сущее в мире реальном. Например, река меняет русло вод воздействием определенных условий, метеорит падает на Землю под воздействием соответствующих сил и так далее. Другими словами происходят изменения согласно действующим законам, в частности, физики. Для живых же объектов, кроме этих законов, существуют некие дополнительные, о чем мы поговорим подробнее чуть позже. Здесь уместно отметить, что указанная ранее возможность отображения объектов, в том числе и живых, в некотором **N**-мерном пространстве весьма заманчива. Однако до настоящего времени не определен размер этого пространства, не выявлены те «ключевые» элементы разложения, которые обеспечили бы соответствующее отображение сложного объекта в виде суммы минимально необходимого количества элементарных составляющих с требуемым качеством или точностью разложения (см. формулу 32).

Рассматривая условия существования какого-либо живого существа, необходимо указать параметры давления, температуры, химического состава атмосферы и прочее и прочее, при которых это существо может выполнять свои жизненные функции, поскольку в других пределах оно погибает и, следовательно, не существует. Таким образом, помимо трехмерного пространства положений и одномерного времени следует указать недостающие элементы разложения

**N**-мерного пространства живого мира, которые тем самым вообще определят размерность **N**, что до настоящего времени неизвестно. При этом следует учесть, что само живое существо внутри себя так же характеризуется определенными параметрами. Например, человек имеет определенный диапазон внутреннего давления, ритма сердца, содержания определенных элементов в крови и так далее. Таким образом, возникает интересная задача описания существования в **N**-мерном мире **M**-мерного мира, где **M**-размерность «внутреннего» пространства живого существа, обитающего в **N**-мерном мире».

После этих слов Зонгаид сделал паузу и посмотрел на Тета, показывая всем своим видом, что поучения математика не пропали даром.

Затем он продолжил: «Наиболее существенные открытия и теории в отношении живых организмов начали появляться с изобретением Галилео Галилеем микроскопа. Данное устройство, прошедшее после этого определенный этап усовершенствования, позволило в 1665 году Роберту Гуку увидеть до того недоступные человеческому глазу, а значит и ЗДРСМу, мельчайшие структуры живого мира, названные им «cell» - «клетка». Вслед за этим, добиваясь все большего увеличения в приборах и осуществляя все более детальные наблюдения, замечательные ученые, перечисление которых заняло бы несколько страниц, создали направление в биологии - цитологию, посвященное изучению начального уровня всего живого, а именно, клетки. Исходя из этого, условимся относить к живому миру все те объекты, которые в качестве «первокирпичиков» в своих конструкциях используют клетки.

Рассматривая сложные живые организмы, вершиной которых, по нашей договоренности, мы будем полагать человека, можно сформулировать определенную последовательность формирования биологической конструкции. Клетки - основа всего — формируют ткани (эпителиальные, внутренней среды, мышечные и другие). Из тканей образуются морфофункциональные единицы отдельных органов живого существа. Далее на их основе образуются органы, которые составляют аппараты и, наконец, системы единого живого организма.

Современная наука выделяет следующие аппараты:

- мочеполовой,
- опорно-двигательный,
- эндокринный и
- сенсорный.

Системы подразделяют на:

- дыхательную,
- кроветворную и иммунную,
- мочевую,
- мышечную, костную, соединения костей,
- нервную (анимальная и вегетативная),
- органов чувств,

- пищеварительную,
- половую,
- сердечно-сосудистую.

Конечно, приведенная систематизация носит достаточно условный характер, поскольку существование всех аппаратов и систем в отрыве друг от друга невозможно. Изменения в одном, как правило, сопровождаются изменениями в другом, что еще раз указывает на замечательное свойство живых организмов адаптироваться под изменяющиеся условия. Кроме того, названные выше аппараты и системы в процессе жизнедеятельности организма в целом осуществляют свои действия во взаимосвязи и взаимообусловленности».

«Слушай, Зонгаид, - прервал повествование Бит Байтович, - а что если попытаться сравнить названные тобой системы и аппараты с тем, что уже сейчас существует в искусственных объектах, созданных человеком, например, автомобилях или компьютерах, или же в других аналогичных «произведениях» людей».

«Ну что же, давайте попробуем это сделать, - согласился Профилактян, - хотя каждый из нас должен понимать весьма условный, а иногда просто и забавный характер такого сравнения. Но все же выберем в качестве прототипа весьма изысканный автомобиль фирмы Мерседес.

Начнем с дыхательной системы. В автомобиле такая система имеется, обеспечивая поступление воздуха к тем аппаратам, где он необходим.

Кроветворная и иммунная система, по-видимому, отсутствуют, хотя определенные меры по смазыванию деталей, защите их от коррозии, других вредных воздействий применяются. Но осуществляется это, как правило, не на постоянной основе, а время от времени.

Мочевая система как система, выводящая отработанные продукты, безусловно, имеется.

Мышечная, костная, соединения костей система в автомобиле выражается в наличии силовых механизмов, а также несущих конструкциях системы и их соединениях. Так что аналог имеется.

Нервная система также имеет свой прототип в виде сигнальной и управляющей системы автомобиля.

Органы чувств - это различные датчики.

Пищеварительная система - это системы преобразования горючего в полезное механическое движение.

Половая система для автомобиля - это то, что не нашло отражения даже в описаниях фантастов и сочинителей анекдотов. Нет такой системы, по определению, как говорится. Поскольку при создании автомобиля не ставилась такая задача. Хотя даже если сформулировать такую задачу, то как ее решать - не понятно.

Аналогом сердечно-сосудистой системы может служить двигатель автомобиля.



6 з. 192

Итак, наполовину всерьез, наполовину в шутку проведенное сравнение показывает, что мир механизмов и живой мир имеют как сходные черты, так и существенные отличия. При этом зачастую оказывается, что наиболее совершенные искусственно созданные системы более других похожи на свои аналоги из мира живого. Это обстоятельство дает основание ЗДРСМу признать, что живой мир при существующих условиях является миром совершенным. Однако при этом следует помнить, что когда условия изменяются, то должен изменяться и живой мир, поскольку в противном случае он не будет им соответствовать и, следовательно, не будет совершенным.

Конечно, определить понятие совершенства весьма не просто. Однако остается надежда на помощь в этом вопросе со стороны Пи Е Тета, Силы Водородовны Вселенской и Музы-Диф, наконец. Отметим также, что человеком зачастую решаются непростые задачи создания искусственного объекта, близкого к совершенному и имеющему прототип в живом мире. Но гораздо более сложной оказывается задача создания искусственного объекта в условиях, при которых нет живого аналога и можно только предполагать форму и вид его существования. Что же тогда принять за совершенство?!

Однако вернемся к основе основ всего живого, к клетке!

Воспользуемся книгой (Г.Л. Билич, В.А. Крыжановский «Биология, полный курс, том 1, Москва «ОНИКС 21 ВЕК» 2002), где сказано, что клетка является основной структурной и функциональной единицей живых организмов, осуществляющей рост, развитие, обмен веществ и энергии, хранящей, перерабатывающей и реализующей генетическую информацию. Клетка представляет собой сложную систему биополимеров, отделенную от внешней среды плазматической мембраной (цитоплазмой, плазмалеммой) и состоящую из ядра и цитоплазмы, в которой располагаются органеллы и включения. Несмотря на огромное разнообразие форм клеток (шарообразные, веретенообразные, кубические, чешуйчатые и прочее и прочее), а также их размеров (от 7 до 200 мкм, соответственно, человеческие клетки: малые лимфоциты и яйцеклетка) клетки имеют схожую структуру и определенное единство функций. При этом можно подчеркнуть, что огромный ,и на первый взгляд, очень разный живой мир в своей основе состоит из относительно небольшого набора «строительных элементов».

Современная биология, так же как и физика, проводит наблюдения, обобщения и подбор теоретических конструкций, которые позволили бы прогнозировать поведение тех или иных существ. К сожалению, добраться до первооснов и ответить на вопросы о том, как это все могло произойти и почему столь разумно и совершенно устроен мир, до настоящего времени не удается. Однако проведенный анализ и обобщения позволяют надеяться на продвижение вперед в этих вопросах. Для демонстрации этого, а также для представления многообразия наблюдаемых фактов, приведем, взятое в вышеназванной

Таблица 4

**Прокариотические и эукариотические клетки**

| Признак | Прокариоты | Эукариоты |
|---|---|---|
| Клеточная организация | В основном одноклеточные организмы | В основном многоклеточные организмы с выраженной дифференцировкой клеток и ткаей |
| Размеры клеток | ~ 1 – 10 мкм | ~ 10 - 200 мкм |
| Энергетический обмен | Аэробный или анаэробный | Аэробный |
| Органеллы | Отсутствуют или весьма малочисленные | Многочисленные |
| Синтез РНК и белка | В цитоплазме | Разделен: синтез и процессинг РНК – в ядре; синтез белка – в цитоплазме |
| Плазматическая мембрана | Имеется | Имеется |
| Ядерная оболочка | Отсутствует | Имеется |
| Хромосомы | Одиночные оголенные структуры, состоящие только из ДНК кольцевой формы | Несколько структур, состоящих из ДНК и белка |
| Митохондрии | Отсутствуют | Имеются |
| Цитоплазматическая сеть | Отсутствует | Имеется |
| Аппарат Гольджи | Отсутствует | Имеется |
| Рибосомы | Имеются – 70 S | Имеются – 80 S (в цитоплазме), 70 S (в органеллах) |
| Клеточная стойка | Имеется, состоит из аминосахаров и мурамовой кислоты | Отсутствует у животных клеток, у растительных клеток состоит главным образом из целлюлозы |
| Капсула | Если имеется, то состоит из мукополисахаридов | Отсутствует |
| Вакуоли | Отсутствуют | Имеются (особенно у растительных клеток) |
| Лизосомы | Отсутствуют | Имеются |
| Фотосинтетический аппарат | Мембраны с хлорофиллом и фикоцианином у сине-зеленых водорослей и с бактериохлорофиллом у некоторых бактерий | Хлоропласты, содержащие хлорофиллы А и В, собранные в стопки (у растений) |
| Жгутики | Имеются у некоторых видов, но лишены структуры (9+2) | Имеются у некоторых видов и обладают структурой (9+2) |

| Признак | Прокариоты | Эукариоты |
|---|---|---|
| Ядрышко | Отсутствует | Имеется |
| Цитоскелет | Отсутствует | Имеется |
| Амебоидное движение | Отсутствует | Имеется |
| Ток цитоплазмы | Отсутствует | Самостоятельный |
| Эндоцитоз, экзоцитоз | Отсутствуют | Имеются |
| Внутриклеточное пищеварение | Отсутствует | Имеется |
| Деление клеток | Бинарное | Митоз (у половых клеток – мейоз) |

книге, сравнение двух классов клеток, на которые сегодня биология разделяет все известные виды клеток.

Прокариотические клетки являются строительным материалом для актиномицет, бактерий, микоплазмы, риккетсий, сине-зеленых водорослей, спирохет и хламидий.

Эукариотические клетки «используются при строительстве» многочисленных (но не сине-зеленых) водорослей, грибов, лишайников, растений и животных, в том числе человека.

Подробное сравнение приведено в таблице 4.

Уважаемая Сила Водородовна при описании физических явлений часто прибегала к услугам математики, с помощью которой подыскивались соответствующие формулы. В результате получалось весьма компактное и эффективное описание тех или иных явлений или процессов. К сожалению, в биологии подобное использование математических выражений или зависимостей не создано. Описания носят в основном качественный характер с имеющимися количественными характеристиками, но содержащими относительно размытые границы. Так, например, по результатам наблюдений отмечается, что клетка состоит на **65 - 75 %** из кислорода, на **15 - 18 %** из углерода, на **8 - 10 %** из водорода и на **1,5 - 3,0 %** из азота, что составляет приблизительно **98 %** всей массы клетки. Оставшуюся часть (приблизительно **1,9 %**) занимают микроэлементы: железо, калий, кальций, магний, натрий, сера, фосфор и хлор; а также микроэлементы (приблизительно **0,1 %**): ванадий, йод, кобальт, марганец, медь, молибден, никель, селен, стронций, фтор, хром, цинк и другие. Если в качестве составляющих разложения **N**-мерного пространства выбрать элементы таблицы Менделеева, то выясняется, что в клетке обнаружено до 86 постоянно присутствующих элементов. При этом все они играют весьма существенную роль, несмотря на различное количественное содержание.

Совершенно удивительно значение особого неорганического вещества в клетке, а именно, воды. Она занимает **70 - 80 %** ее объема и является основным участником многих процессов, происходящих в клетке. Более того, вода уникальна по ряду своих физических свойств, что позволяет вообще живым организмам существовать в относительно широких пределах температур окружающей среды, обеспечивать деятельность аппаратов и систем, а также многое, многое другое. Можно с уверенностью утверждать, что **наличие вещества, обладающего характеристиками воды, является ключевым условием существования живых организмов**. Это именно то, что надо было придумать, чтобы поддержать жизнедеятельность всех биологических структур».

«Действительно, - подхватила госпожа Вселенская. - Вода уникальна по ряду своих физических свойств. Посмотрите хотя бы на зависимости объема и плотности воды от температуры. С уменьшением температуры до приблизительно **+4°С** объем некой массы воды уменьшается, а плотность увеличивается, достигая своего максимума. При дальнейшем охлаждении до **0°С** происходит необычное для других веществ явление - объем начинает возрастать, а плотность уменьшаться. И это продолжается после перехода воды из жидкого состояния в твердое! Благодаря этому водоемы, покрываясь льдом, не промерзают до дна и в них продолжают жить живые организмы, а земля защищается от стужи снеговой шубой. Поскольку при **+1°С** плотность воды меньше чем при **+4°С**, нижние слои водоемов подымаются наверх, а верхние соответственно опускаются вниз и таким образом происходит теплообмен и прочее и прочее.

Вода обладает также рядом замечательных химических свойств. Однако не станем углублять эту тему, зафиксировав внимание лишь на той исключительной роли, которую играет вещество **$H_2O$**, под названием вода!»

«Ура воде! - продолжил восхваление этого вещества Зонгаид. - Кстати, не выпить ли нам по стаканчику или чашечке чего-нибудь? О, я вижу, Муза-Диф сейчас все организует. Тогда я продолжаю про клетку.

Клетка, как «первокирпич» в биологии, напоминает атом в физике. При этом в клетке, как и в атоме, происходят «странные» и необычные для окружающего человека мира процессы и взаимодействия. Оказывается, что помимо выявленных физиками явлений, действующих сил и прочее в клетке и соответственно атоме происходят особые, свойственные только им процессы, имеющие свои характерные черты и законы. При этом основное влияние данных процессов сосредотачивается внутри самого объекта соответственно клетке или атоме. То есть их влияние не является дальнодействующим по сравнению с силой притяжения или электрической силой. В клетке и атоме существует понятие времени, поскольку происходящие там процессы имеют определенную скорость и продолжительность. Правда совершенно не ясно, кто и как задал эту скорость, но она существует и имеет номинальное значение. Например, деление клетки - митоз, завершающий клеточный цикл, имеет определенную продолжительность. Более того, для клетки существует генетически запрограммированный механизм ее появления, жизни и гибели (апоптоз), имеющий также определенную длительность.

Интересно отметить, что в процессе своей жизнедеятельности клетки обмениваются информацией с помощью специфических молекул, названных цитокинами, что привело к понятию «цитокинная сеть».

Уверен, Бит Байтович, в этот момент невольно подумал о телекоммуникационных сетях, существующих у людей. И наверно он прав, поскольку явления, происходящие в реальном мире, живом мире, мире людей, имеют глубинные общие корни и закономерности.

Еще больший интерес, я думаю, вызовет у моего друга то, что все живые организмы, известные сегодняшней науке, обладают одинаковым кодом, с помощью которого формируется, сохраняется и передается информация о них, другими словами, формируется соответствующий генетический код или генетическая последовательность того или иного живого организма.

Расшифровать генетический код удалось сравнительно недавно в 60-х годах XX столетия. Благодаря работам М Ниренберга, У. Холла и X. Корана, было

**Таблица 5**

**Генетический код**

| | | 2-е положение | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | U | | C | | A | | G | | |
| 1-е положение | U | UUU | Phe | UCU | Ser | UAU | Tyr | UGU | Cys | U |
| | | UUC | Phe | UCC | Ser | UAC | Tyr | UGC | Cys | C |
| | | UUA | Leu | UCA | Ser | UAA | ochre | UGA | opal | A |
| | | UUG | Leu | UCG | Ser | UAG | amber | UGG | Try | G |
| | C | CUU | Leu | CCU | Pro | CAU | His | CGU | Arg | U |
| | | CUC | Leu | CCC | Pro | CAC | His | CGC | Arg | C |
| | | CUA | Leu | CCA | Pro | CAA | Gln | CGA | Arg | A |
| | | CUG | Leu | CCG | Pro | CAG | Gln | CGG | Arg | G |
| | A | AUU | Ile | ACU | Thr | AAU | Asn | AGU | Ser | U |
| | | AUC | Ile | ACC | Thr | AAC | Asn | AGC | Ser | C |
| | | AUA | Ile | ACA | Thr | AAA | Lys | AGA | Arg | A |
| | | AUG* | Met | ACG | Thr | AAG | Lys | AGG | Arg | G |
| | G | GUU | Val | GCU | Ala | GAU | Asp | GGU | Gly | U |
| | | GUC | Val | GCC | Ala | GAC | Asp | GGC | Gly | C |
| | | GUA | Val | GCA | Ala | GAA | Glu | GGA | Gly | A |
| | | GUG* | Val | GCG | Ala | GAG | Glu | GGG | Gly | G |
| | | | | | | | | | | 3-е положение |

*Триплетные комбинации азотистых оснований мРНК (U, C, A, G) определяют следующие аминокислоты: Phe - фениланин, Leu - лейцин, Ile - изолейцин, Met - метионин, Val - валин, Ser - серин, Pro - пролин, Thr - треонин, Ala - аланин, Tyr - тирозин, His - гистидин, Gln - глутамин, Asn - аспарагин, Lys - лизин, Asp - аспарагиновая кислота, Glu - глутаминовая кислота, Cys - цистеин, Try - триптофан, Arg - аргинин, Gly -глицин.*
*Звездочкой обозначены стартовые кодоны, а триплеты ochre. amber, opal действуют как стоп кодоны.*
*(по F. Crick)*

установлено, что код, выражаясь на языке биологической науки, основан на триплетах или кодонах. При этом три нуклеотида определяют присоединение одной аминокислоты к полипептидной цепи (таблица 5).

Можно заметить, что код устроен так, что одной и той же аминокислоте в большинстве случаев соответствует несколько разных триплетов. При этом в этих комбинациях первые два нуклеотида всегда одинаковые. Для определения начала и конца генной последовательности среди триплетов имеются стартовые и соответственно стоповые кодоны, завершающие синтез полипептидной цепи. При этом после стартовых кодонов генетическая последовательность дешифрируется как последовательность триплетов».

«Лечевич, дорогой! Подожди, подожди минуту! Дай одно слово сказать, - имитируя кавказский акцент, вмешался Бит Байтович. - Дело в том, что то, что Вы рассказываете, имеет относительно хорошее и полное описание в теории кодирования источников сообщений и помехоустойчивом кодировании. Только в отличие от используемой в биологии терминологии в названных теориях оперируют другими наименованиями. С Вашего общего согласия я, что называется «по горячим следам», попробую дать аналогичное описание с позиций этих теорий.

Итак, будем полагать, что существует **M** разных сообщений или объектов. Поставим в соответствие каждому из **M** сообщений кодовую комбинацию, состоящую из **n** элементов. При этом каждый элемент может принимать одно из целых значений от **0** до некоторого целого, равного (**d - 1**). Исходя из этого, в дальнейшем будем говорить, что сообщение кодируется с помощью кодовых комбинаций, длиной **n**, кода по основанию **d**. Очевидно, что общее количество различных кодовых комбинаций в этом случае равно:

$$\mathbf{N = d^n}. \qquad (87)$$

Если каждому сообщению будет соответствовать одна кодовая комбинация и наоборот, то говорят о взаимнооднозначном кодировании. Можно применять и другие вариации, когда одному сообщению будут соответствовать несколько кодовых комбинаций, либо наоборот —одной комбинации несколько сообщений. В каждом из этих случаев надо оценить последствия, то есть, с какой целью это делается и что будет при декодировании. Очевидно, что при $\mathbf{N \geqslant M}$ можно построить код с однозначным декодированием, но при $\mathbf{N<M}$ - нельзя.

В генетической последовательности, о которой рассказал нам наш друг Профилактян, использован код по основанию **d=4** и длине кодовой комбинации **n=3**. Всего, как следует из (87), возможно **N=64** различных кодовых комбинаций. Однако с их помощью кодируется меньшее количество «сообщений», на что у природы, по-видимому, есть веские причины. Кроме того, часть кодовых комбинаций расходуется на служебные сообщения о начале и конце всего кодового блока, что абсолютно необходимо и имеет аналогичное применение, например, в телеграфных кодах, которые были придуманы и начали применяться на практике задолго до расшифровки генетического кода.

Следует также отметить, что данный код является блоковым кодом, у которого строго определена длина кодовой комбинации и, следовательно, должен быть предусмотрен «механизм» отсчета **n** элементов. В системах связи это обеспечивается за счет синхронизации по элементам, благодаря определенным действиям, о чем мы, надеюсь, поговорим позднее. Но сейчас важно подчеркнуть, что у живой природы должен быть некий аналог такой системы, поскольку в противном случае декодирование будет с ошибками. Кстати, в голову приходят аналогии, связанные со сбоем синхронизации в системе связи, в результате чего начинается лавинообразный процесс размножения ошибок. Нечто схожее должно происходить и в живой природе.

Для оценки эффективности используемого кода вводят относительную величину, численно равную:

$$\mathbf{k} = \mathbf{M} / \mathbf{N}. \tag{88}$$

В рассмотренном Зонгаидом случае всего имеется **M=22** различных сообщений, закодированных с помощью **N=64** кодовых комбинаций. Значит **k=22/64=0,34375**. Как видно, относительная эффективность меньше **1**. Большего можно достичь, вводя неравномерное кодирование, при котором длины кодовых комбинаций оказываются разными, или используя код с другим основанием. Однако более подробно мы остановимся на этом позже».

«Ай, какие Вы молодцы! - воскликнул, подмигивая окружающим, Профилактян. - Еще до расшифровки генетического кода, сами догадались как нужно кодировать сообщения. Если учесть, что природа совершенна, то Вы молодцы вдвойне! Но продолжим про клетку.

Мы уже говорили, что сложные объекты, в том числе реальный мир и живые организмы можно представить в виде некоторых многомерных пространств. При этом живой мир, подстраиваясь под окружающую среду, стремится к состоянию, называемому гомеостазом, при котором сохраняется динамическое относительное постоянство состава и свойств внутренней среды, то есть внутреннего многомерного пространства существования того или иного живого организма в условиях изменяющегося внешнего пространства. Например, живой организм поддерживает внутри себя определенное давление, могущее изменяться в определенных пределах в зависимости от внутренних факторов, а также состояния внешней среды. Аналогичные примеры несложно привести и по другим характеристикам живых организмов, которые, как отмечалось выше, могут рассматриваться в качестве координат многомерного пространства.

В чрезвычайно интересном повествовании Силы Водородовны были названы фундаментальные основы реального мира, постулаты, на базе которых строятся все теоретические конструкции. В живом мире эти положения так же считаются справедливыми и действующими, а именно закон сохранения энергии, законы термодинамики и прочее. При этом однако следует подчеркнуть генетическую упорядоченность и определенность существования живых систем в отличие от неживой природы. Поэтому сформулированный ранее закон неубывания энтропии не может применяться отдельно к какому-либо живому объекту, который к тому же не является изолированной системой и нуждается в постоянном энергетическом пополнении извне.

Современная биология установила, что среди живых организмов существует группа прокариот, добывающая необходимую энергию в результате химических реакций неорганических веществ. Однако подавляющее большинство других живых организмов находят себе пропитание благодаря фотосинтезу, при котором энергия солнечного света через хлорофиллы превращается в энергию от химических реакций органических веществ (в первую очередь глюкозы, а также других веществ). Ряд живых существ не обладают способностью к фотосинтезу, позволяющей обеспечить себя требуемым количеством энергии. Такие существа вынуждены в результате этого потреблять других живых существ и таким образом опосредованно получать необходимую энергию солнечного света.

Одним из основных участников добывания энергии живыми существами является химический элемент - кислород, участвующий в биохимических реакциях окисления, за счет чего извлекается необходимая энергия. При этом замечено, что без участия молекулярного кислорода при расщеплении молекулы глюкозы выделяется 27 ккал, а с участием молекулы кислорода выделяется 674 ккал, то есть почти в 25 раз больше. Первый случай биологи называют анаэробным дыханием, а второй - аэробным. Оказалось, что второй аэробный тип дыхания имеет более сложную реализацию в клетках, однако при этом его энергетическая эффективность, как уже отмечалось, оказывается существенно выше и таким образом как бы оправдывает вышеназванную сложность.

Данное замечание является существенным, поскольку как показывают многочисленные наблюдения **одним из фундаментальных принципов живой природы является то, что она стремится максимально просто достичь результата**. Любое усложнение живого организма или его части всегда имеет под собой основание в достижении нового качества, более высокой эффективности и так далее. Однако и при этом решения оказываются наиболее простыми из огромного множества различных вариантов. И в этом, по-видимому, состоит одна из составляющих природного совершенства».

«Вы совершенно правы, - почти одновременно поддержали последние слова Профилактяна госпожа Вселенская и Пи Е. - Абсолютно тоже можно сказать и про результаты в физике и математике. Здесь так же наилучшими решениями оказываются наиболее простые. Кроме того, они отличаются и необычайной красотой, хотя объяснить это, не разбираясь в сути решаемой или изучаемой проблемы, бывает не всегда легко. Однако мы просим поверить нам на слово, что простые решения в математике и физике потрясающе красивы и человек, постигающий это, получает неописуемое удовольствие».

«Верим, верим, - согласился Зонгаид и лукаво добавил, - медицине такие случаи известны».

Однако, увидев небольшие искорки во взгляде Силы Водородовны, он поспешил добавить: «Шутка. Невинная шутка. Просто современной медицине многое о человеке известно. Хотя не буду спорить, что, наверное, еще большее остается пока неведомо.

Как уже отмечалось, биология, медицина - это науки, в которых математические формулы распространены меньше, чем описание тех или иных явлений, как феноменов, происходящих в живом объекте под управлением генома, то есть некой совокупностью генетической информации, хранящейся в хромосомах. Наверное, все это очень похоже на работу компьютера под управлением определенной программы. Однако почему это происходит, почему так устроен геном, можно ли на него влиять и какие будут при этом последствия, до сих пор неизвестно.

Попробуем подвести сравнительный итог того, что обсуждалось. Уважаемый Пи Е ознакомил нас с основами математической науки, оперирующей некими абстракциями, выражаемыми через скалярные и векторные величины. При этом эти величины взаимодействуют между собой, благодаря определенным действиям. А все это записывается в компактном виде через формулы, то есть через обусловленные знаки и символы.

Физики, проводя обширные наблюдения, заметили, что вполне реальные явления можно количественно описать с помощью названных выше формул. И если взятым из математики абстрактным символам поставить в соответствие определенные физические величины, то окажется, что между ними существуют введенные математикой действия и физические величины связаны между собой по законам не только физики, но и математики.

В биологии и медицине к названному выше добавляются действия, осуществляемые на основе определенных команд, которые по неизвестным законам «разворачиваются» во времени, обеспечивая развитие, жизнедеятельность и старение живого организма. Я думаю, и Муза-Диф меня, надеюсь, поддержит, что это еще далеко не выясненный вопрос, почему генетически заложено рождение, развитие, но и обязательно угасание и смерть. Конечно, можно сослаться на закон неубывания энтропии. Но видимо существуют еще какие-то, неведомые нам законы, которые устанавливают правила игры, исход в которой может быть разный, но правила едины. Кстати весьма любопытно, почему внутренние силы в атоме не дальнодействующие и почему дальнодействующие сигналы обмена информацией не используются в клетке. А представьте себе ситуацию, когда каждый человек, принимая дальнодействующие сигналы, понимает, о чем думает другой человек. Вот ведь будет спектакль или нет, скорее полная сумятица и неразбериха. Хотя, откровенно говоря, как человек думает, на сегодня не знает пока никто. И полагаю, что эта проблема может оказаться столь же сложной как и проблема континуума, о которой нам рассказывал Пи Е.

Вместе с тем следует отметить, что современные медико-биологические исследования показали, что регуляцию движения, ощущения, умственную деятельность и другие управляющие интеграционные функции выполняет нервная система. У человека в отличие от всех известных животных нервная система имеет существенно более сложную конфигурацию, обеспечивая множественность человеческих способностей, например, осмысленной речи, абстрактного мышления и так далее. Базовым элементом нервной системы является нейрон, структуру которого мы обсудим позднее, поскольку Бит Байтович подает мне сигналы о том, что он тоже хотел бы высказаться по данному вопросу.

Нервная система у человека состоит из центральной и периферической. К первой относятся спинной и головной мозг, а ко второй - парные спинномозговые и черепные нервы с корешками, их ветви, нервные окончания и ганглии (нервные узлы, образованные нейронами). Конечно, введенная классификация весьма условна и объясняется сложившейся традицией, а также рекомендациями ЗДРСМа тех исследователей, которые занимались этими проблемами. По-видимому, более обоснованной классификация выглядела бы, если бы нам было точно известно, на что должна быть способна нервная система, какие к ней предъявляются требования и с помощью каких элементов и материалов такая система должна быть реализована.

Однако поскольку проектировщиком, конструктором и строителем был Творец (Муза-Диф, надеюсь, чуть позже просветит нас в этой области), не оставивший нам никакой информации на этот счет, то приходится продвигаться в этих вопросах как в темной комнате на ощупь. Поэтому наравне с вышеизложенной классификацией используют также разделение нервной системы на соматическую (анимальную) и вегетативную (автономную). Такое разделение обусловлено разной функциональной направленностью. Так, соматическая часть нервной системы поддерживает (иннервирует) в основном тело человека и обеспечивает его взаимодействие с внешней средой. Вегетативная же часть отвечает за внутренние органы во всем их многообразии. Следует отметить, что многочисленные исследования и наблюдения, а также практический опыт показывают, что, с одной стороны, в нервной системе имеются локализованные, как бы специализированные области, отвечающие за определенный вид деятель-

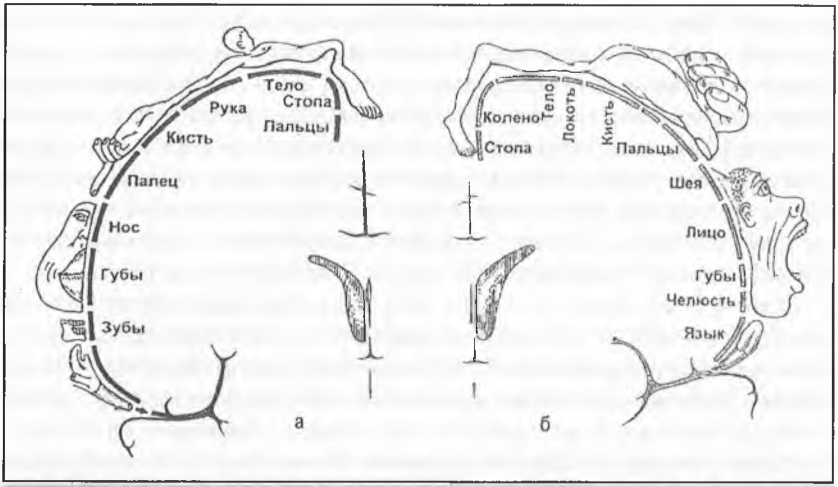



**Рис. 21. а) Корковый центр общей чувствительности (чувствительный «гомункулюс»; из В. Пенфилда и И. Расмуссена). Изображения на поперечном срезе мозга (на уровне постцентральной извилины) и относящиеся к ним обозначения показывают пространственное представительство поверхности тела в коре большого мозга;**

**в) Двигательная область коры (двигательный «гомункулюс»; из В.Пенфилда и И. Расмусссена). Изображение двигательного «гомункулюса» отражает относительные размеры областей представительства отдельных участков тела в коре предцентральной извилины большого мозга**

ности, но с другой стороны, в случае их повреждения эти функции берут на себя другие части нервной системы. Конечно, во всех случаях есть свои ограничения. Существуют и невосполнимые потери, но и заметна компенсаторная деятельность, направленная на поддержку жизнедеятельности системы в целом.

Весьма показательны в этом отношении «представительства» отдельных участков тела человека в коре головного мозга (рис. 21 a, b).

На рисунках видна локализация, выявленная опытным путем. При этом, к сожалению, каких-либо теоретических построений, доказывающих оптимальность такой конструкции, в настоящее время не имеется. А мы приняли за аксиому, что живой мир совершенен. Следовательно, существуют законы и условия, выполнение которых приводит к указанным выше решениям. Если бы знать все про это, то и объяснения нашлись бы! В целом же мы являемся свидетелями того, что сложная система, функционируя как нечто целое, состоит из действующих в той или иной степени самостоятельно отдельных частей. Таким образом, еще одной характеристикой совершенства является оптимальная в имеющихся условиях централизация и децентрализация (распределенность) деятельности системы в целом и ее частей в отдельности.

Еще одним подтверждением этого является открытие Р. Сперри, удостоенное в 1982 году Нобелевской премии, о функциональной специализации полушарий головного мозга. Экспериментально было показано, что левое полушарие отвечает за вербальное общение, понимание речи, абстрактное мышление, включающее в себя математические способности и восприятие символических понятий. Правое же полушарие ответственно за понимание зрительных образов, пространственные ориентацию и взаимоотношения, музыкальные способности. Имея анатомические различия, правое и левое полушария головного мозга вместе образуют целостную систему.

Человек как живой организм находится во внешней среде и взаимодействует с ней через обнаруженные у него на сегодня шесть чувств. А именно, через органы зрения, слуха, равновесия, осязания, вкуса и обоняния (таблица 6). Каждый из этих органов поставляет в мозг человека информацию о различных параметрах окружающей среды, указанных в таблице 6 в графе «Качество». Отметим также некоторые количественные характеристики органов чувств человека.

Так, человек с нормальным, по статистическим наблюдениям, зрением различает предметы на расстоянии **60** метров. Более точные оценки даются по специально разработанным таблицам и рисункам. Следует добавить, что человек обладает способностью различать цвета в диапазоне световых волн от **400** до **700** нм. При этом имеющиеся рецепторы (три типа колбочек) воспринимают три цвета: красный, синий и желтый.

Параметры зрения человека меняются с возрастом. Так, например, минимальное расстояние, на котором человек хорошо различает предметы в возрасте **10** лет равно **7** см, в возрасте **20** лет - **15** см, в возрасте **40** лет - **25** см, а в возрасте **50** лет - **40** см.

В живой природе есть и другие примеры, характеризующие органы зрения. Так «друг человека» собака видит мир в черно-белом изображении, а лягушка видит лишь движущиеся объекты. В то же время беркут видит свою добычу за **3** км, а сокол замечает летящего голубя за **8** км!

Органы слуха человека позволяют ему слышать гармонические колебания с частотой от **16** до **21000** Гц. С возрастом этот диапазон уменьшается.

В животном мире есть и по части слуха рекордсмены. Так летучая мышь различает звук с частотой **210000** Гц, а дельфины **280000** Гц.

Способности человека удерживать равновесие зависят от ряда его физических показателей и имеют весьма широкий диапазон количественного оценивания. Так, например, канатоходцы, путем многочисленных тренировок развивают свои способности в этом до уровня, который поражает обычного человека. Большими возможностями в пространственной ориентации обладают также представители животных и птиц, что можно наблюдать в реальном мире. Человек же различает пространственные изменения во времени в интервале от

**1/18** до **2** сек.

Способности человека к осязанию можно характеризовать следующими цифрами: реакция на боль - **0,9** сек, реакции на прикосновение к чему-либо - **0,12** сек, реакция на температуру - **0,16** сек. Вибрация ощущается при амплитуде до **0,02** мкм. Кроме того, различные участки тела человека имеют разную чувствительность. Например, лицо человека и кисти его рук имеют разную чувствительность к холоду и теплу и так далее.

**Таблица 1**

**Чувственные способности человека (по Ф. Блуму и соавт., с редакционными изменениями)**

| Чувство | Чувствительный орган | Качество | Рецепторы |
|---|---|---|---|
| Зрение | Сетчатка глаза | Яркость<br>Контрастность<br>Движение<br>Размеры<br>Цвет | Палочки и колбочки- отростки фоторецепторных клеток |
| Слух | Улитка | Высота<br>Тембр | Волосковые рецепторные клетки |
| Равновесие | Вестибулярный орган | Сила тяжести<br>Вращение | Волосковые рецепторные клетки |
| Осязание | Кожа | Давление<br>Вибрация<br>Тепло<br>Холод | Рецепторы кожи |
| Вкус | Язык (вкусовые почки) | Вкус:<br>сладкий, кислый, горький, соленый | Вкусовые сосочки языка (вкусовые клетки) |
| Обоняние | Обонятельная область слизистой оболочки полости носа | Запахи:<br>цветочные (душистые),<br>фруктовые (эфирные),<br>мускусные (амброзиевые),<br>камфарные или миндальные (ароматные),<br>чесночные, хлорные или серные (чесночные),<br>горелые,<br>потовые,<br>зловонные (отталкивающие),<br>гнилостные (тошнотворные) | Обонятельные клетки |

Вкусовое восприятие человека весьма многообразно. Однако в основном складывается из восприятия сладкого, кислого, горького и соленого. В среднем продукт представляется сладким, если содержит более **0,5%** сахара, кислым - более **0,001%** кислоты, горьким - более **0,002%** и соленым - более **0,25** соли. Конечно, вкусы бывают разные и о них, как говорится, не спорят, но все же некоторые вышеприведенные ориентиры существуют.

Весьма многообразны человеческие способности различать запахи. Всего человек способен отличить до **3000** разных запахов, которые по-крупному принято объединять в группы, указанные в таблице 6. Запах ощущается, если в **1** м$^3$ воздуха содержится **500 000 000** и более молекул пахучего вещества. Компенсируя свои «зрительные недостатки» собака, в отличие от человека, различает до **100 000** различных запахов и при этом делает это, если в **1** м$^3$ воздуха содержится всего **200 000** молекул вещества. Настоящими же рекордсменами по этому чувству являются насекомые. Так самец бабочки «ночной павлиний глаз» ловит запах своей подруги на расстоянии **10** км.

Сравнивая способности живых существ по возможностям их органов чувств надо понимать, что в данном процессе участвуют как непосредственные «датчики» чувств, так и центральный анализатор, то есть мозг. Кроме того, следует учитывать и особенности доставки информации от датчиков к мозгу. То как это происходит, каким способом и какими путями. Если вернуться к нашему постулату о совершенстве природы, то следует признать совершенными как способности человека к чувственному восприятию, так и способности лягушки или собаки. Их отличия по возможностям органов чувств не являются превосходством или недостатками перед человеком. Это просто реализация совершенного существа, но при других внешних и внутренних условиях. Действительно, мы же не требуем от лягушки, чтобы она разговаривала, а собака писала стихи, впрочем, как и они не просят нас ловко ловить комаров или по запаху находить чей-либо след. У каждого существа свое место в многомерном пространстве! Поэтому **любые, кажущиеся иногда человеку уродства, на самом деле есть совершенное творение природы, исполненное в измененных исходных данных**. Именно в них заложены те последующие биологические решения, которые получаются под воздействием объективных сил влияния, как дальнодействующих, о которых рассказывала Сила Водородовна, так и специальных «сил ближнего действия».

Следует также отметить, что живые существа в зависимости от обстоятельств могут изменять свои чувственные способности, в том числе за счет утраченных других. В общем, это еще раз подчеркивает их возможности к адаптации под измененные условия. И сделано это будет самым совершенным образом, что следует из принятого нами постулата. Кстати, это одно из возможных направлений исследований для разгадывания секретов совершенства. Наблюдая за тем, что происходит в этих случаях, можно попытаться понять, каким путем достигается совершенство в новых условиях. Понимание же этого позволит составить теоретическое обоснование при формировании исходной живой конструкции».

«Дорогой Профи, - обратилась к Зонгаиду Муза-Диф. - Когда Вы рассказываете нам об органах чувств, то как Вы предполагаете выделить такие понятия, как любовь, вдохновение, ненависть, страх и так далее. Какие органы чувств продуцируют это? Да и есть ли такие органы?!»

«Вопрос вполне закономерен, тем более что в используемом человеческом языке слово чувство имеет несколько значений. Одно значение относится к органам чувств и применяется для описания их действия, что мы и делали. Другое же относится к области эмоционального восприятия человеком тех или иных событий с учетом внешних и внутренних факторов. При этом одно и тоже внешнее событие может восприниматься по- разному, в зависимости от предыдущих внешних сообщений, а также от внутреннего состояния. По-видимому каждый из нас может привести множество примеров тому, подтверждая поговорку о том, что от любви до ненависти - один шаг.

Веселая музыка может поднять настроение, но может оказаться и чрезвычайно раздражающей и назойливой, если внутренне человек чувствует себя угнетенно в силу того, что у него болит зуб и он не спал всю ночь.

Сообщение о победе любимой спортивной команды может несказанно обрадовать, но может и разозлить, если перед этим Вы узнаете, что Ваша супруга поставила все деньги в тотализаторе на другую команду, воспользовавшись советом соседа, тем более что по всем объективным показателям именно эта команда должна была победить, да и Вы сами об этом не раз говорили, переживая за любимую команду и ее слабую игру до этого. В общем, все как в известной песне: «Вот уж действительно, все относительно. Все, все... Все!»

Современные научные воззрения на высшую нервную деятельность человека рассматривают понятие «эмоции» с разных позиций. Прежде всего, отмечается, что используемое слово «эмоция», может иметь несколько толкований и применений, отражая субъективные реакции на внутренние и внешние раздражения и проявляясь в виде удовольствия, страха, гнева, радости, тоски, надежды и так далее. Существует теория о том, что эмоции связаны с удовлетворением трех основных потребностей, а именно, пищевой, защитной и половой. При этом полагается, что мотивационная деятельность осуществляется на основе соответствующего эмоционального возбуждения с целью в конечном итоге достичь удовлетворения потребности и получить положительные эмоции. Существуют и другие теории, которые рассматривают эмоции как самостоятельный мозговой механизм, играющий некую важную, но до конца не понятную роль, которая заключена не только в том, чтобы удовлетворять потребности, о которых было сказано выше. Весьма различны и мнения о том, где зарождаются эмоции, в какой части мозга. Все это предстоит еще исследовать, однако ясно то, что эмоции являются своеобразными посредниками, способствующими принятию тех или иных решений (мотиваций), направленных на сохранение состояния обобщенного гомеостаза, включающего в себя помимо надлежащего уровня содержания в крови питательных веществ, газового состава, осмотического давления, температуры и прочее, также адекватного данному организму эмоционального состояния. По-видимому, формирующийся в процессе своего развития организм помимо всего прочего приобретает и определенную эмоциональную окраску, отражающую построение нервной системы во всем ее многообразии. Очевидно, что в этом случае поддержание требуемой температуры в организме столь же важно, как и поддержание соответствующего эмоционального баланса, который у различных людей, обладающих отличающимися нервными системами, будет также различным. При этом следует иметь в виду свойства, данные от рождения, и они у разных людей вначале могут быть очень близкими, и свойства, приобретенные в процессе существования. Представляется, что эмоции в этом смысле могут иметь ту же классификацию, что и рефлексы, условные и безусловные, определяющие формы поведения живых существ. Примеров этого достаточно много. И это лишний раз подчеркивает взаимосвязь и взаимообусловленность различных составляющих живого организма.

Хотя до настоящего времени все эти связи в полной мере не выявлены и точно нельзя указать на то, как следует повлиять на какую-либо часть организма, чтобы в условиях поддержания обобщенного гомеостаза можно было бы исправить другую его часть, все же такой подход к описанию живого организма представляется наиболее полным и перспективным. В этой связи отметим в качестве примера влияние музыки на организм человека. Первые упоминания об этом можно найти в Ветхом Завете, когда Давид, играя на арфе, избавил Саула от нервной депрессии.

Действительный механизм воздействия музыки на человека складывается через влияние на его эмоциональное состояние, а также через непосредственное физическое воздействие на те или иные органы посредством акустических волн, из которых складывается музыка. Внутренние органы человека согласно законам физики входят в резонанс с той или иной частотой и начинают вибрировать, что оказывает определенное воздействие на организм. Точно так же наблюдается «эмоциональный резонанс» на различные музыкальные произведения. Так, например, замечено, что музыка Баха и Моцарта благотворно влияет на состояние человека, приводит в норму частоту пульса и артериальное давление. В то же время некоторые произведения Шнитке наоборот способствуют возникновению тахикардии и состояния, близкого к стрессу. В целом это, конечно, не означает, что какая-то музыка абсолютно полезна, а какая-то – вредна. Так же, как стресс нельзя рассматривать как абсолютно вредное явление. Не будь его, не было бы тренинга и «закаливания» организма, обеспе-



7 3. 192

чивающих его устойчивость к влиянию внешней среды. В общем, во всем нужна определенная мера и индивидуальное оценивание состояния организма.

В таких случаях можно вспомнить известный фильм, в котором герой отказывается есть надоевшую ему черную икру и просит кусочек черного хлеба.

Все это еще раз подчеркивает справедливость предположения о **существовании обобщенного гомеостаза, соответствующего гармоничному сочетанию различных взаимоувязанных параметров, характеризующих тот или иной организм»**.

«Уважаемые друзья, - вступил вдруг в разговор Пи Е, - раз уж мы заговорили о музыке, то позвольте прервать нашего дорогого Зонгаида и сообщить Вам, что математика внесла свой вклад и в это удивительное изобретение человечества.

Согласно легенде, которую, конечно, проверить сейчас не возможно, огромная статуя колосса Мемнона, существовавшая около древнеегипетского города Фивы, издавала определенный звук, по которому местные музыканты настраивали свои музыкальные инструменты. Впоследствии этот звук был «присвоен» ноте ля первой октавы на клавиатуре фортепиано и, как оказалось, он имеет частоту **440 Гц**. Исходя из представлений ЗДРСМ о благозвучности звучания аккордов, звуки, имеющие частоту в два раза выше и, соответственно, в два раза ниже, весьма подходили для вышеназванной ноты ля. Выяснилось также, что при извлечении колебания **440 Гц** с помощью натянутой струны, одновременно с этим формируются гармоники с частотами в два раза выше (**880 Гц**) и в два раза ниже (**220Гц**). Таким образом, органичность сочетания названных частот получила практическую поддержку и со стороны законов физики. Музыканты же называют интервал между этими частотами октавой.

Совершенно понятно, что используя только эти звуки, невозможно составить разнообразные мелодии. Поэтому интервал между частотами следует разбить на более мелкие части. При этом следует также учитывать, что мелодия не должна искажаться в зависимости от той начальной ноты, с которой она начинает строиться. В противном случае теноры, исполняя какую-либо песню, пели бы ее на один мотив, а басы - на другой.

Исходя из этого, составим очевидное неравенство:

$$F_{ля}=F_0<F_1<F_2<F_3<\ldots<F_{n-1}<F_n=2\cdot F_{ля} \quad (89)$$

где $F_{ля}=F_0=$**440 Гц** - частота ноты ля, а $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_{n-1}, F_n$ - частоты, расположенные внутри октавы.

Для того, чтобы мелодию можно было бы играть без искажений, начиная с любой ноты, должно выполняться следующее соотношение, определяющее относительную равномерность музыкальной шкалы:

$$\ldots F_1/F_0=F_2/F_1=F_3/F_2=\ldots=F_n/F_{n-1} = \ldots \quad (90)$$

Очевидно, что частоты $F_0,...F_n$ образуют геометрическую прогрессию с коэффициентом **q**. Причем, поскольку $F_n=q^n \cdot F_0=2 \cdot F_0$, то $q^n=2$. В результате имеем, что определив **n**, можно полностью установить и частоты $...,F_0,...F_n,...$, памятуя, что $F_0=440$ **Гц**.

С помощью известных законов физики и практических экспериментов было установлено, что извлекая с помощью струны звук с частотой $F_i$, мы получим в спектре частот не только удвоенную, но и утроенную частоту, то есть $3F_i$. Поскольку ранее мы установили, что в спектре имеется половинная частота от $F_i$, то, следовательно, в спектре должна быть и частота $1/2 \cdot 3F_i=3/2F_i$. Положим $i=0$, тогда в исследуемой октаве на **k**-ом интервале будет находиться частота $F_k=3/2F_0$. После логарифмирования и некоторых преобразований можно получить следующее соотношение:

$$\log_2(3/2) = k/n. \qquad (91)$$

Если бы удалось установить целые **k** и **n**, удовлетворяющие (91), то это означало бы, что найдено решение, на какое количество целых частей n следует разбить октаву, при соблюдении вышеназванных условий. Однако оказалось, что выполнение соотношения (90) при наличии в октаве частот $F_0$ и $3/2F_0$ не возможно в целых числах. Выходом из данного положения может быть либо отказ от условия (90), либо отказ от существования в октаве, начинающейся с частоты $F_0$, частоты $3/2F_0$, то есть отказ от существования музыкального интервала ($F_0$ - $3/2F_0$), называемого чистой квинтой.

Отказаться от условия (90) крайне не желательно по уже сказанным ранее причинам, поэтому приходится жертвовать чистой квинтой и находить решение (91) с некоторой погрешностью.

Эксперименты показали, что в среднем человек способен различать звуки, если они отличаются по частоте всего на **1 Гц**. Исходя из этого, было предложено при подборе решения обеспечить погрешность меньше данного значения. Опуская промежуточный подбор, зафиксируем приемлемое решение:

$$k/n = 7/12. \qquad (92)$$

В этом случае частотный диапазон октавы в логарифмическом масштабе разбивается на **12** равных частей и отношение (90) равно $2^{1/12}$.

Интервал между двумя соседними частотами музыканты стали называть полутоном, а, два таких интервала образуют тон. На рис. 22 представлены значения частот для нот первой октавы фортепиано.

Помимо них используются промежуточные значения (на фортепиано это черные клавиши), которые музыканты обозначают через понятия «диез» и «бемоль». Однако это уже требует специальных знаний, которыми, безусловно,

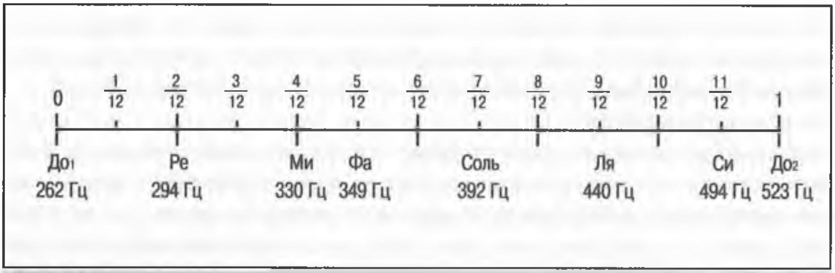



**Рис. 22.**

владеет прекрасная Муза-Диф, и я не рискую более распространяться в ее присутствии на эту тему. Заканчивая повествование о влиянии математики на музыку, хотел бы подчеркнуть, что такое решение было найдено сравнительно недавно (около 1700 года) немецким ученым и музыкантом (а такое случается) Андреасом Веркмейстером. До этого в настройке музыкальных инструментов главенствовал принцип чистой квинты, но при этом возникали огромные затруднения при использовании разных тональностей во время исполнения музыкальных произведений.

Предложенная система и сконструированные по ней музыкальные инструменты имели как своих противников - знаменитый французский философ и музыкант Дидро, так и своих сторонников, среди которых возвышается Иоганн Себастьян Бах. Именно он своими сочинениями убедительно доказал преимущества предложенной конструкции музыкального ряда.

Значительно позднее, уже в XX веке, с помощью математиков были созданы музыкальные инструменты, содержащие в октаве 24, 48 и даже 53 ступени. В результате этого звучание квинты и других аккордов было еще более приближено к идеальным соотношениям. Однако практического распространения эти инструменты не получили из-за сложности их применения.

Отметим, что ряд музыкальных инструментов, таких как скрипка, виолончель и другие, в силу своей конструкции не имеют разбиения на ступени. Точность извлечения звука целиком и полностью определяется умением и талантом исполнителя.

Вот такая история математики в музыке!»

«Какая прекрасная история, Пи, - проговорила Муза-Диф, - действительно математика своими абстрактными законами позволяет достичь гармонии в областях, которые, на первый взгляд, весьма далеки от нее. Однако, какими формулами можно объяснить, что хаотичное сочетание звуков воспринимается человеком как что-то неприятное, а построение гаммы в виде последовательности нот, разделяемых между собой по правилу: тон-тон-полутон-тон-тон-тон-полутон, воспринимается как радостная и светлая музыкальная конструкция? Кстати, называется такая гамма мажорной. Минорная гамма, воспринимаемая человеком как грустная и даже трагическая, строится по правилу: тон-полутон-тон-тон-полутон-тон-тон. При этом оказалось, что эмоциональное восприятие мажорных и минорных конструкций, имеющих одинаковую структуру, но начинающихся с разных нот, также по-разному воспринимается человеком. Возможно, это связано с некоторой неточностью построения нотного ряда, а возможно - с какими-то особенностями человеческого слуха и его нервной системы.

Подозреваю, что уважаемый Тет уже пытается найти этому объяснение и, возможно, математике удастся это сделать, но похоже для этого надо немало потрудиться. Однако давайте послушаем господина Профилактяна, который только начал говорить о музыке, а его тут же оматематил Пи Е».

Последние слова Музы вызвали веселую улыбку у собравшихся, а Профилактян, рассмеявшись, продолжил: «Оматемаченная, извиняюсь за выражение, биология и медицина - это, насколько я понимаю, мечта поэта. Но, к сожалению, достижений здесь не так уж много в силу сложности задачи, коей является живой организм и, в частности, человек. Поэтому данные науки продолжают накапливать результаты наблюдений и экспериментов, что в будущем послужит постаментом для Великой Теории Жизни.

Определенным шагом в этом направлении явилась теория эволюции живых существ, предложенная в Европе Ч. Дарвином и достаточно хорошо известная широкому кругу людей. Справедливости ради следует отметить, что элементы предложенной им конструкции можно найти у Аристотеля, а также в описаниях других ученых. Революционная для своего времени теория эволюции на сегодня представляется достаточно понятной ЗДРСМу, хотя до сих пор существуют вопросы, на которые с ее помощью не удается ответить, что напоминает ситуацию с классической механикой в физике.

Поскольку биологам и медикам, исследующим в основном материальные объекты, все чаще приходится сталкиваться с проявлениями таких понятий как информация, энтропия, генетический код, мутация и прочее, то изучение и понимание их влияния на живые существа становится чрезвычайно важной задачей. При этом зачастую весьма интересные решения проистекают не только из материалистических представлений о человеке и живой природы, а и из особой группы знаний, не имеющих, как правило, логического обоснования или доказательств, но предлагаемых к восприятию «на веру». Часть подобных знаний находит впоследствии свои доказательства и объяснения, исходя из известных материалистических представлений о мире. Другая часть оказывается ложной и это доказывается. Но самой интересной оказывается третья часть, которая содержит в себе знания, ложность которых доказать не удается, но не удается и их объяснить, исходя из принятых теоретических построений.

В качестве примера можно привести методы Восточной медицины (китайской, японской, вьетнамской и так далее), которые имеют тысячелетнюю историю, доказали свою эффективность и при этом существенно отличаются от европейской медицинской науки. Конечно, за последнее время ряд методов и приемов врачевания находят свое обоснование в рамках общих медицинских подходов, но в то же время многие фундаментальные представления Восточной медицины базируются на особых представлениях о человеке и природе в целом. Так, руководствуясь, по-видимому, многолетними наблюдениями, экспериментами и опытом, на теле человека выделяются особые точки, воздействуя на которые уколами игл, прижиганием или другими механическими способами, удается объективно добиваться положительного лечебного эффекта. Весьма интересны различные системы гимнастических упражнений Индии, Китая, Японии и так далее, с помощью которых поддерживается эффективная жизнедеятельность организма. Однако помимо чисто механических или физических действий в Восточной медицине огромную роль играет духовное состояние человека, поскольку полагается, что кроме мира материального (физического, телесного) человек существует еще в ряде миров.

Наиболее завершенная концепция такого представления предполагает, что человек имеет семь тел: физическое, эфирное (энергетическое) и пять так называемых тонких тел: астральное, интуитивное, каузальное, ментальное, духовное. Конечно, исходя из требований ЗДРСМа, следует как-то обосновать это. Однако все здесь настолько не материалистично, что без Музы-Диф и ее пояснений мы никак не обойдемся. Муза, дорогая, растолкуйте нам эти удивительные и не ЗДРСМовские вещи».

## 8. По просьбе жителей МИРа Муза-Диф продолжает обсуждение вопроса 1

«Большое спасибо за любезное предложение,- несколько кокетничая, заговорила Муза-Диф. Мне весьма приятно поделиться своими знаниями в рассматриваемой сфере со столь образованными и умными представителями МИРа. Действительно, все что мы обсуждали до этого, относится к так называемому материальному миру, в котором действуют законы физики, химии, биологии и так далее, проявляющиеся во времени. Довольно часто удается их кратко формулировать на языке математики, которая также устанавливает определенные законы, исходя из представлений ЗДРСМа, но при этом они инвариантны по отношению ко времени. Помимо этого человеческие знания строятся также на основе Веры в чудесное, божественное происхождение природы и человека, как ее части. Доказательством этого служат различные религиозные книги (Библия, Евангелие, Коран и так далее), обряды (Крещение, Причастие, Хадж и прочее) и удивительные необъяснимые явления (Мироточение икон, Сошествие божественного огня, Чудесные исцеления людей и тому подобное). С точки зрения формальной логики все это, в определенном смысле, эквивалентно тому, что обсуждалось ранее. Математик вводит аксиому, что 2 х 2 это 4 и «свято» верит в это. Точно также существует вера в божественное происхождение человека. Отличие состоит лишь в том, что первое утверждение человек может легко проверить в мире реальном, складывая, например, яблоки или полочки, а второе утверждение не имеет столь легкой и каждодневной проверки с помощью ЗДРСМа. Но разве это служит доказательством ошибочности утверждения? Конечно, нет! Более того, не материалистические представления о мире зачастую оказываются весьма точными моделями, отражающими то, что происходит в мире реальном. Кстати, никто и никогда не видел электрон, но физики уверенно чертят его портрет, не допуская того, что может быть электроны и не существуют в том виде, как это принято, а все косвенные наблюдения, которые свидетельствуют об их наличии, были результатом действия других процессов. Однако остановимся в обсуждении этого, поскольку двигаясь в этом направлении, мы очень скоро можем прейти к тому, что вообще познать что-либо невозможно. Оставим мысль о такой возможности для других компаний и займем оптимистическую позицию, согласно которой познание возможно!

Из множества различных религий, известных на Земле, семь наиболее распространенных: христианство, иудаизм, ислам, индуизм, дзен-буддизм, даосизм и буддизм служат идеологической опорой подавляющего большинства верующих людей, проживающих на планете Земля. При этом все эти религии едины в том, что человек - это творение Бога, созданное им по своему образу и подобию, и, состоящее из трех частей: физического тела, души и духа. Физическое тело предназначено для познания окружающего его материального мира, душа - для самопознания и самосовершенствования, дух - для познания Бога. Следует отметить, что ключевым положением является действие, то есть **познание**. Таким образом, основная задача человека в мире реальном - это **познание** материального мира, себя и Бога. В результате складывается знаменитое число три, которое, как известно из геометрии, и Пи Е это подтвердит, характеризует уникальные «жесткие» геометрические фигуры. Число три имеет также ряд других замечательных свойств, о которых мы не станем распространяться более подробно, заметив лишь, что данное число удивительно часто становится участником моделей, описывающих мир реальный, в результате чего приходится задумываться об этом и предполагать, что происходит это не просто так, а под воздействием неких правил или законов. В конце концов, окружающий людей мир реальный - это трехмерный мир, да и генетический код также состоит из трех символьных кодовых комбинаций (триплетов).

Помимо числа три особое значение уделяется и числу семь. Так в книге (Л.Г. Пучко Многомерная медицина. – М.: АНС, 2001) приводятся доказательства особенности числа семь. Например, в неделе семь дней, лунный месяц равен 28 дням (7x4), радуга состоит из семи цветов, музыкальная октава из семи нот, номинальный период беременности у человека 280 дней (7x40). Ветхий Завет писали 21 человек (7x3), упомянутых в Библии. При этом суммарное числовое значение их имен равно 3808 (7x544).

Количество подобных примеров огромно и на основании этого в вышеуказанной книге провозглашается семеричная закономерность, имеющаяся в канонической Библии, содержащей 39 книг Ветхого Завета и 27 книг Нового Завета. Утверждается, что если переставить хотя бы одну букву в тексте, то семеричная закономерность исчезнет, что может служить признаком несоответствия данной книги истинной. В частности, это относится к неканоническим церковным книгам, добавляемым иногда к Библии и якобы разъясняющим ее содержание.

Цифра семь встречается не только в христианстве, но и в других религиях. Так отмечается наличие семи чакр, 14 дополнительных чакр (7x2), 21 командных зон в голове человека (7x3) и так далее и тому подобное. В связи с этим вернемся к особенностям Восточной медицины, о которой начал говорить наш добрый доктор Профилактян, и что служит подтверждением практичности и «материальности» знаний, следующих из веры в некую модель человека, адекватность которой подтверждается положительным лечебным эффектом. Однако перед этим, чтобы закончить с цифрами, заметим, что придание им неких магических свойств и способностей воздействия на человека является давним изобрете-

Правый ирис    Левый ирис

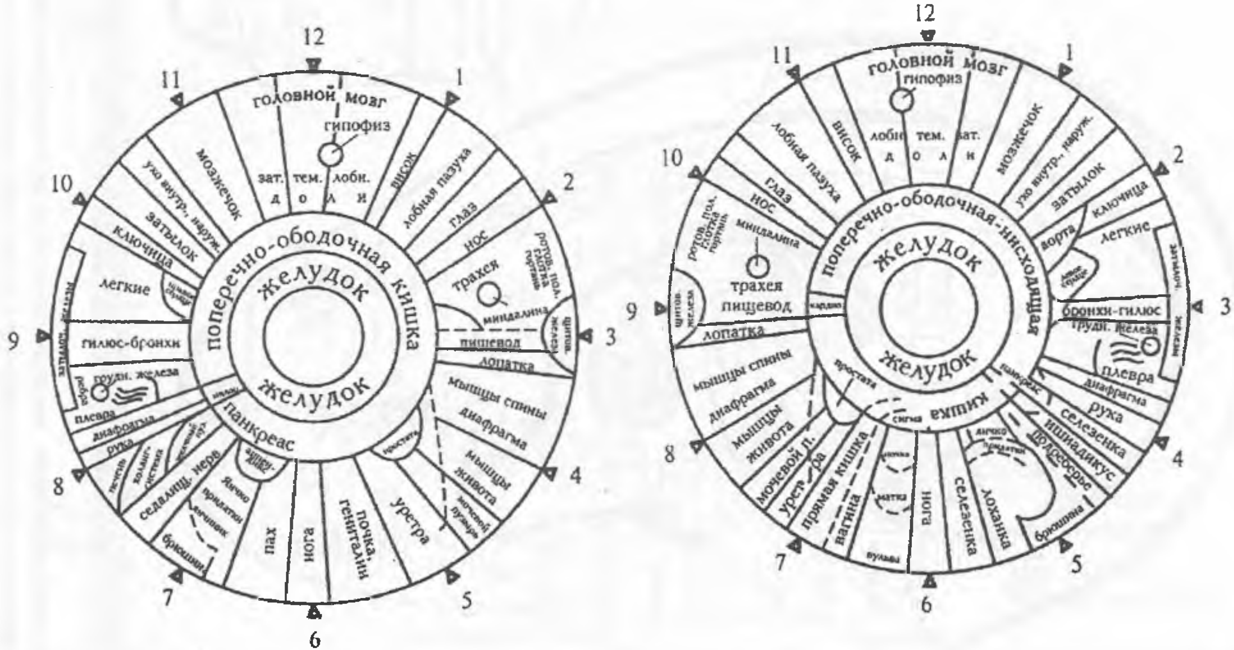



Рис. 23.

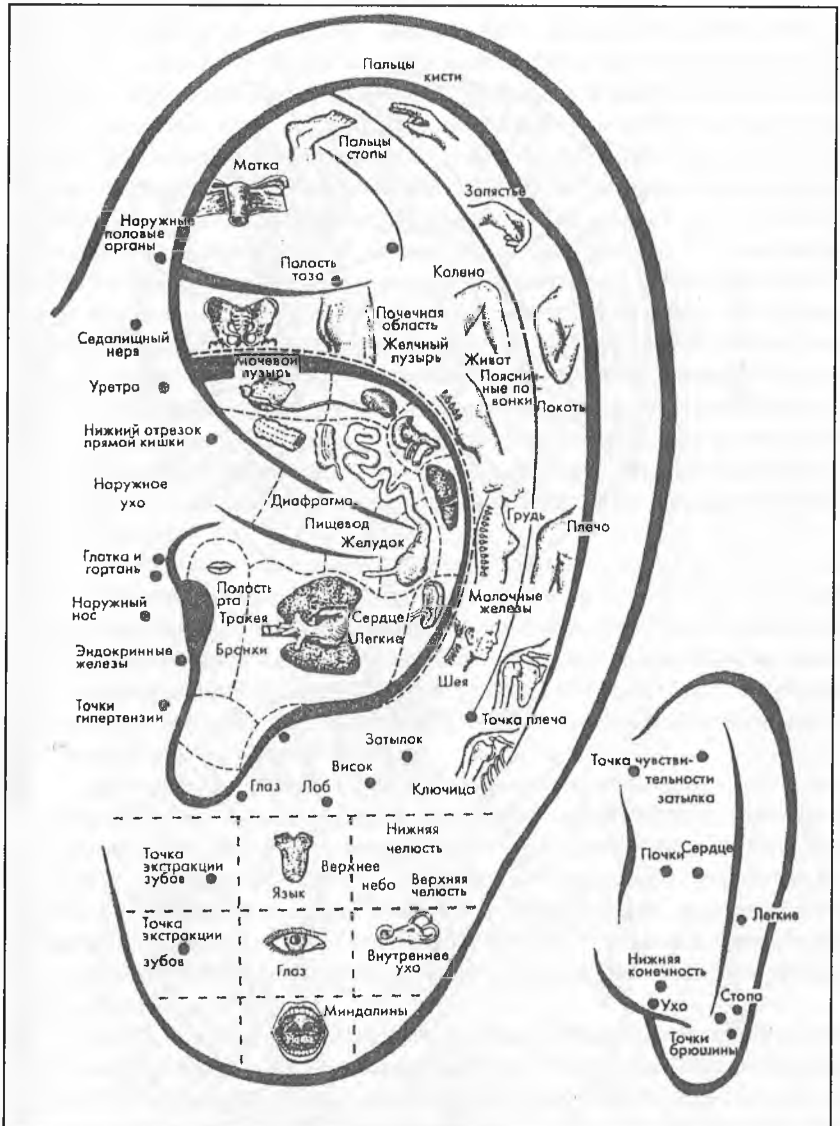



**Рис. 24.**

нием людей, возникшим, по-видимому, в эпоху возникновения чисел вообще. Не опровергая и не отбрасывая в целом этих идей, заметим, что сами по себе числа, скорее всего не могут оказывать какого-либо воздействия: положи-

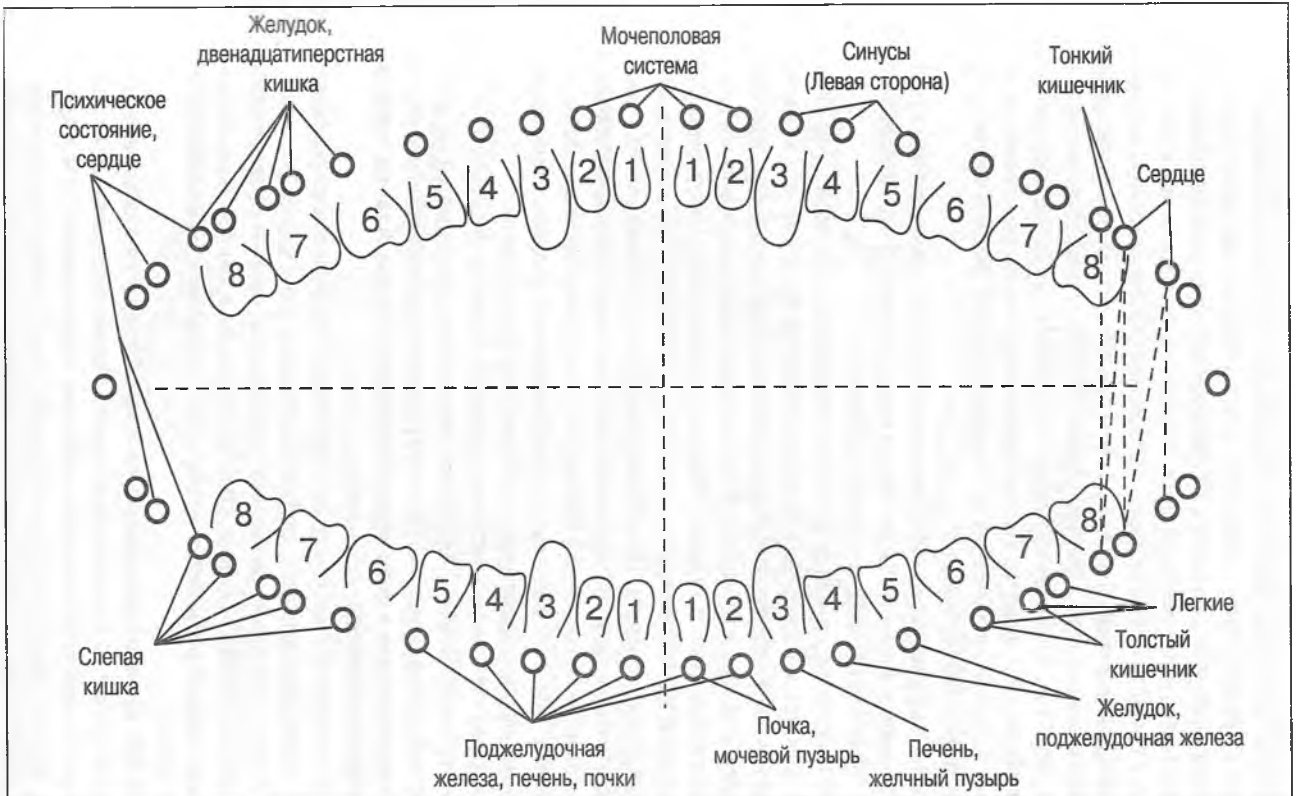

Желудок,
двенадцатиперстная
кишка
Мочеполовая
система
Синусы
(Левая сторона)
Тонкий
кишечник
Психическое
состояние,
сердце
Сердце
8
7
6
5
4
3
2
1
1
2
3
4
5
6
7
8
8
7
6
5
4
3
2
1
1
2
3
4
5
6
7
8
Легкие
Толстый
кишечник
Слепая
кишка
Желудок,
поджелудочная железа
Почка,
мочевой пузырь
Печень,
желчный пузырь
Поджелудочная
железа, печень, почки

Рис. 25.

тельного ли, отрицательного ли. Однако они могут нести сведения о проявлении каких-либо закономерностей и таким образом как бы предупреждать о последствиях или раскрывать математическую суть происходящего. Кстати, возвращаясь к приведенным выше примерам о числе семь, заметим, что в них неявно присутствует число ноль, а это значит, что для описания на самом деле используется не семь, а восемь разных понятий или соответственно чисел. При этом восемь - это два в третьей степени ($8 = 2^3$) и таким образом вновь возникает число три! Число два также понятно ЗДРСМу, как размерность плоскости в трехмерном пространстве и как количественный измеритель вечного дуализма, вечного отрицания и наличия противоположностей: белое и черное, доброе и злое, плюс и минус, рай и ад!

Если же обратиться к вычислительной технике, к компьютерам, то в основе их «жизнедеятельности» лежит так же число 2 и число $8 = 2^3$, называемое байтом. Так что магия цифр и чисел продолжается.

Но вернемся, однако, к Восточной медицине, о которой начал рассказывать Зонгаид. Фундаментом этой науки является Вера в то, что человек представим в виде модели Микрокосма, являющейся зеркальным отображением Макрокосма, то есть Вселенной. Несмотря на имеющиеся отличия различных философских школ и течений, таких как буддизм, йога, оккультизм, Каббала, пифагорийская школа, христианские гностики и другие, вышеназванное положение остается общим. Полагается также, что у человека имеется семь биоэнергетических центров (чакр), являющихся своеобразными преобразователями энергии Макрокосма в Микрокосм, то есть энергии Вселенной в энергию человека. При этом речь идет о некой необычной энергии, отличающейся от того, что мы рассматривали с помощью Силы Водородовны.

Первые системные описания отражения Космоса (Вселенной) в человеке известны со времен, отстоящих на несколько тысячелетий от Рождества Христова. Принадлежат они Гермесу Трисмегисту, утверждавшему, что **каждая частица содержит в себе всю информацию о целом, а также, что наверху, то и внизу, что внизу, то и наверху**.

В строении человеческого тела можно найти определенное подтверждение этих идей. Так, например, радужные оболочки глаз, ушные раковины, зубы, ступни ног и так далее, по мнению ряда медиков, состоят из зон, отражающих состояние органов человека. (Для иллюстрации приведем поясняющие диаграммы (рис. 23 - 26), взятые из книги (Л.Г. Пучко Многомерная медицина. – М.: АНС, 2001)).

В ДНК заложена информация, по которой создается вообще весь организм в целом. Кроме того, мы можем вспомнить недавние пояснения господина Тета о том, что мощность множества точек на отрезке длиной 1 см такая же, как мощность множества точек линии длиной 10 км, а также площади квадрата со стороной 100 км или объема куба с длиной ребра 1000 км. Весьма показательно

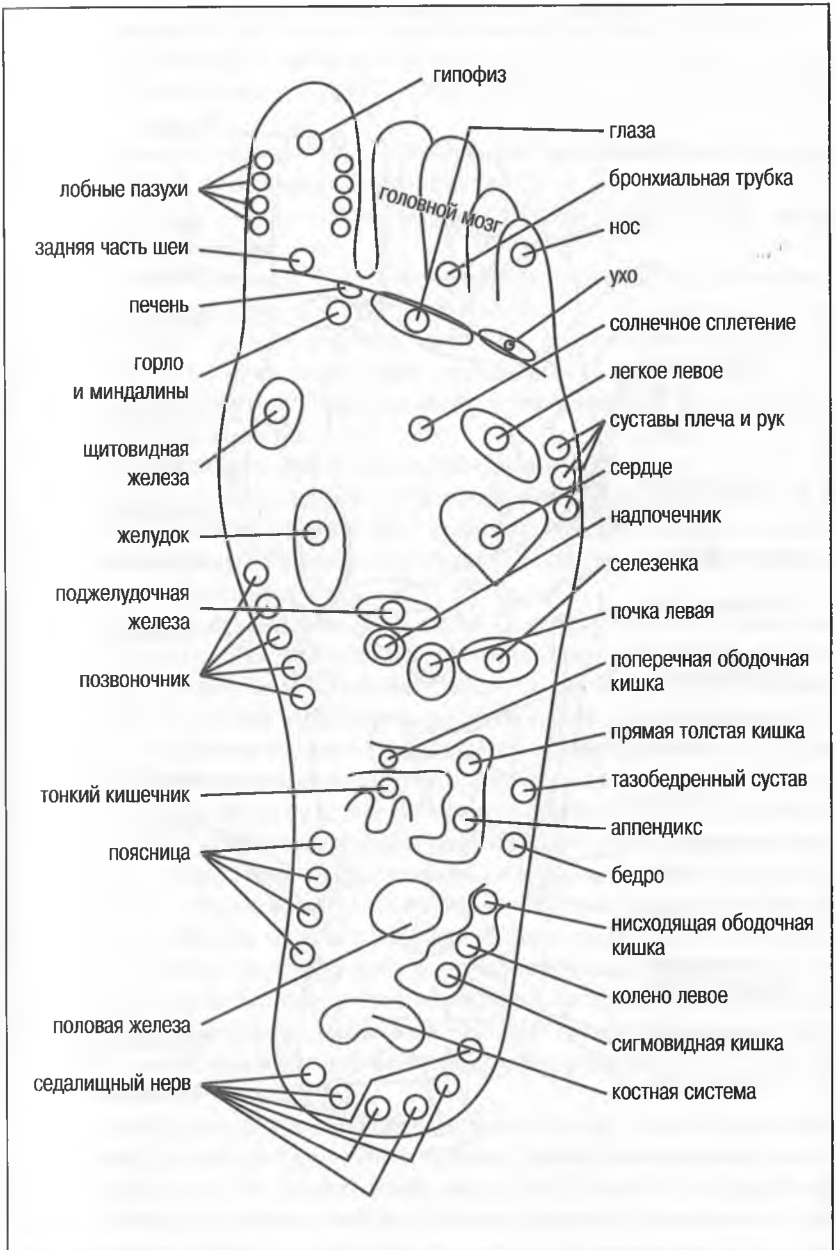

гипофиз
глаза
бронхиальная трубка
нос
ухо
солнечное сплетение
легкое левое
суставы плеча и рук
сердце
надпочечник
селезенка
почка левая
поперечная ободочная кишка
прямая толстая кишка
тазобедренный сустав
аппендикс
бедро
нисходящая ободочная кишка
колено левое
сигмовидная кишка
костная система
лобные пазухи
задняя часть шеи
печень
горло и миндалины
щитовидная железа
желудок
поджелудочная железа
позвоночник
тонкий кишечник
поясница
половая железа
седалищный нерв
головной мозг

Рис. 26а.

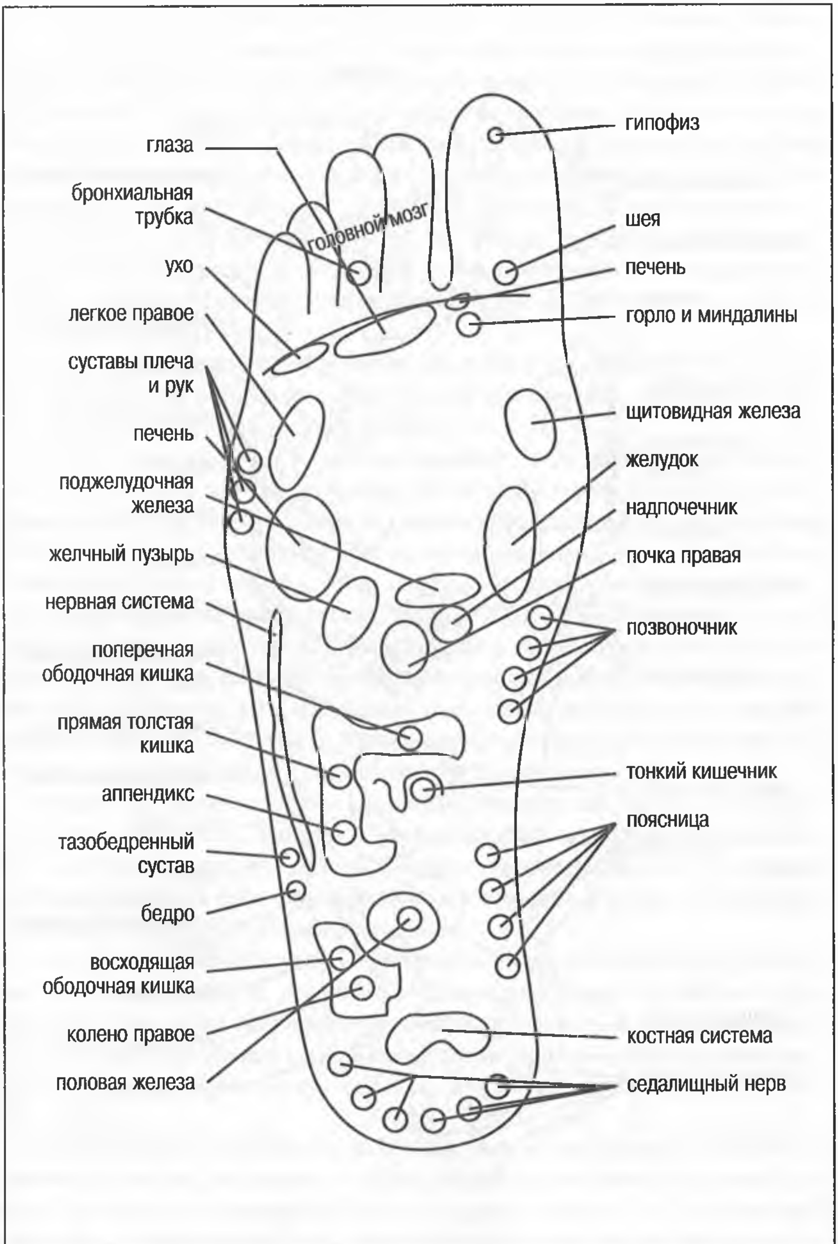

глаза
бронхиальная трубка
ухо
легкое правое
суставы плеча и рук
печень
поджелудочная железа
желчный пузырь
нервная система
поперечная ободочная кишка
прямая толстая кишка
аппендикс
тазобедренный сустав
бедро
восходящая ободочная кишка
колено правое
половая железа
головной мозг
гипофиз
шея
печень
горло и миндалины
щитовидная железа
желудок
надпочечник
почка правая
позвоночник
тонкий кишечник
поясница
костная система
седалищный нерв

**Рис. 26b.**

определение множества, которое содержит само себя в качестве элемента.

Открытые Гермесом Трисмегистом законы можно согласно книге (Л.Г. Пучко Многомерная медицина – М.: АНС, 2001) сформулировать следующим образом:

1-ый принцип (ментальности) - «Все есть ум». Вселенная проявляется при этом и как разум, и как энергия, и как материя.

2-ой принцип (соответствия) - устанавливает соответствие между Макрокосмом и Микрокосмом.

3-ий принцип (вибраций) - все вибрирует и все излучает. Семь тел человека, вибрируя и излучая, взаимодействуют с Вселенной.

4-ый принцип (полярности) - все имеет свою противоположность. Плюс и минус, добро и зло, мужчина и женщина и так далее.

5-ый принцип (ритма) - все подчиняется ритмическому воздействию и имеет определенный период.

6-ой принцип (причинности) - все имеет причину и следствие.

7-ой принцип (двойственности) - все в действии имеет противодействие. В организме человека это проявляется в существовании двух энергий: Ян (мужской), обеспечивающей процессы возбуждения, и Инь (женской), обслуживающей процессы торможения.

Для современного человека, живущего в XXI веке и знакомого с работами и идеями более поздних философов, а также с достижениями науки и техники, принципы египтянина Гермеса Трисмегиста кажутся удивительно прозорливыми и поражают тем, что сформулированы они, были несколько тысячелетий назад.

Господин Профилактян, рассказывая нам о достижениях биологии и медицины, приводил очень интересные данные, относящиеся к миру физическому. В этой области наиболее существенные результаты были получены научными школами Европы и позднее Америки. Представители же Восточной медицины помимо физического тела рассматривают у человека, как уже отмечалось, еще шесть тел. При этом основное внимание восточные медики уделяют не лечению тела физического, а правильности циркуляции некой жизненной энергии по каналам эфирного тела. Так индо-тибетская медицина выделяет энергетические центры (чакры), энергетические магистрали и мелкие каналы. Указывается на наличие 7 основных чакр, основной магистрали - позвоночнику Сушумне), двух боковых магистралей (Идее и Пингале нади), а так же 64000 мелких каналов.

Китайские медики обнаружили биологически активные точки на теле человека, которые, будучи структурированы, образуют энергетические каналы (меридианы), по которым циркулирует жизненная энергия. Считается, что существует 14 меридианов, подводящих энергию к соответствующим органам и имеющим соответствующее название, а именно, каналы: желудка, желчного пузыря, легких, мочевого пузыря, перикарда (сексуальный), печени, почек, селезенки-под-

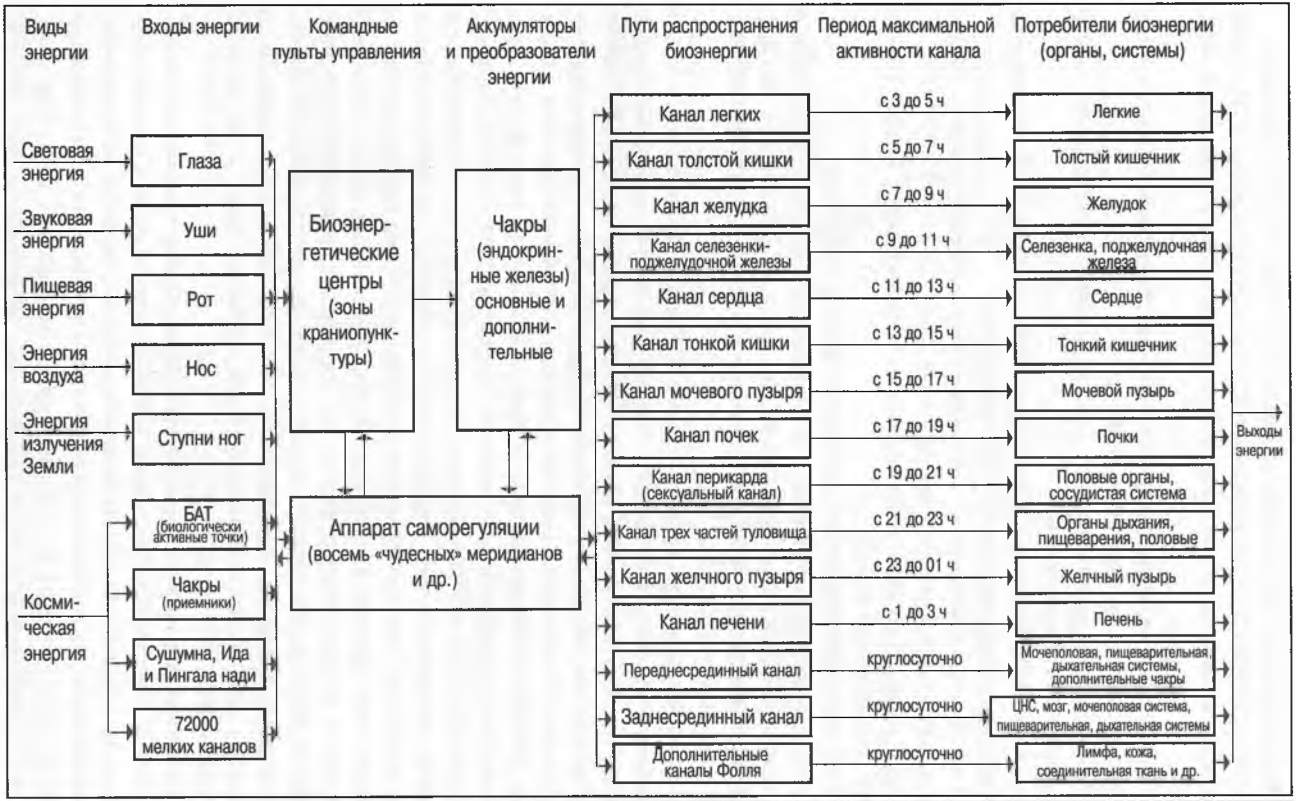

Виды энергии
Входы энергии
Командные пульты управления
Аккумуляторы и преобразователи энергии
Пути распространения биоэнергии
Период максимальной активности канала
Потребители биоэнергии (органы, системы)
Световая энергия
Звуковая энергия
Пищевая энергия
Энергия воздуха
Энергия излучения Земли
Косми-ческая энергия
Глаза
Уши
Рот
Нос
Ступни ног
БАТ (биологически активные точки)
Чакры (приемники)
Сушумна, Ида и Пингала нади
72000 мелких каналов
Биоэнер-гетические центры (зоны краниопунк-туры)
Чакры (эндокрин-ные железы) основные и дополни-тельные
Аппарат саморегуляции (восемь «чудесных» меридианов и др.)
Канал легких
Канал толстой кишки
Канал желудка
Канал селезенки-поджелудочной железы
Канал сердца
Канал тонкой кишки
Канал мочевого пузыря
Канал почек
Канал перикарда (сексуальный канал)
Канал трех частей туловища
Канал желчного пузыря
Канал печени
Переднесрединный канал
Заднесрединный канал
Дополнительные каналы Фолля
с 3 до 5 ч
с 5 до 7 ч
с 7 до 9 ч
с 9 до 11 ч
с 11 до 13 ч
с 13 до 15 ч
с 15 до 17 ч
с 17 до 19 ч
с 19 до 21 ч
с 21 до 23 ч
с 23 до 01 ч
с 1 до 3 ч
круглосуточно
круглосуточно
круглосуточно
Легкие
Толстый кишечник
Желудок
Селезенка, поджелудочная железа
Сердце
Тонкий кишечник
Мочевой пузырь
Почки
Половые органы, сосудистая система
Органы дыхания, пищеварения, половые
Желчный пузырь
Печень
Мочеполовая, пищеварительная, дыхательная системы, дополнительные чакры
ЦНС, мозг, мочеполовая система, пищеварительная, дыхательная системы
Лимфа, кожа, соединительная ткань и др.
Выходы энергии

**Рис. 27.**

желудочной железы, сердца, толстой кишки, тонкой кишки, а также задне-срединный, переднесрединный и меридиан трех обогревателей. (В скобках укажем на сравнимость данного разбиения с тем, что недавно нам рассказывал Зонгаид Лечевич об органах и системах человеческого организма).

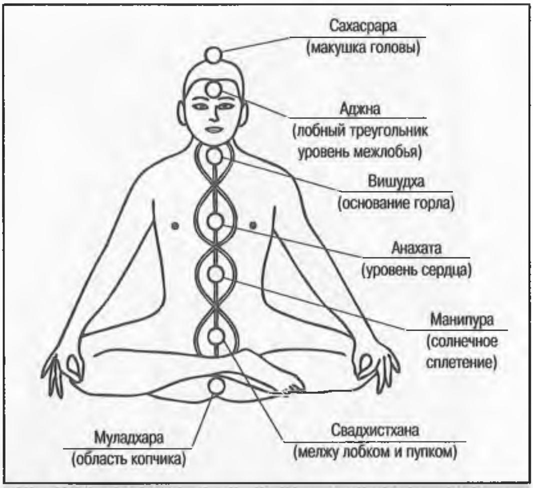



**Рис. 28.**

Энергетические каналы связанны между собой и должны обеспечивать сбалансированный приток и обмен жизненной энергии. В случае нарушения баланса выявляется синдром «Инь-Ян» (недостаток - избыток энергии), после чего назначается соответствующее лечение, направленное на восстановление баланса.

Аналогичны изложенному и другие системы Восточной медицины: Японии, Вьетнама и так далее. Конечно, каждая из них имеет свои особенности, о которых должны говорить специалисты, однако объединяющей для них является «работа» не только с телом физическим, но и с телом эфирным.

Не вдаваясь в более подробное обсуждение приведем модель эфирного тела, взятую в книге (Л.Г. Пучко Многомерная медицина. – М.: АНС, 2001) (рис. 27). Здесь достаточно наглядно представлены информационно-биологические связи эфирного тела, связанного с телом физическим, хотя многое вызывает вопросы у ЗДРСМа. Ну да что поделаешь, в математике тоже не все им воспринималось.

На рис. 28 изображено расположение семи основных чакр, а в таблице 7 представлено их описание.

Индо-тибетская медицина полагает, что чакра состоит из:

- резонирующего приемного элемента, который реагирует на определенный цвет и определенные звуки. Другими словами в чакре есть своеобразные фильтры, настроенные на определенную длину световой волны и определенные звуковые колебания, возникающие при произнесении соответствующих звуков, называемых мантрами;

- командного центра управления, находящегося внутри канала оболочки спинного мозга (Падма);



8 з. 192

Таблица 7

**Основные чакры**

| Номер чакры | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Название | Муладхара | Свадхистхана | Манипура | Анахата | Вишудха | Аджна | Сахасрара |
| Элемент | Земля | Вода | Огонь | Воздух | | | |
| Расположение чакры | Область копчика | Посредине между лобком и пупком | На 2 см выше пупка | В середине груди на уровне сердца | На уровне гортани | Лобный треугольник | Центр макушки |
| Расположение центра управления чакрой (падмы) | Область копчика | Область копчика | 5-й поясничный позвонок | 5-й грудной позвонок | 1-й грудной позвонок | 2-й шейный позвонок | Центр макушки |
| Сопровождающие органы, эндокринные железы | Толстая и прямая кишка, мужские половые органы, простата | Женские половые органы, почки, мочевой пузырь, надпочечники | Печень, желчный пузырь, селезенка, желудок, тонкий кишечник, кровеносные сосуды, поджелудочная железа | Сердце, легкие, тимус (вилочковая железа) | Щитовидная и паращитовидная железа | Мозг, гипофиз | Эпифиз (шишковидная железа) |
| Соответствующие нервные сплетения | Крестцовое сплетение | Сплетение простаты | Солнечное сплетение | Кардиальное сплетение | Шейное, плечевое и гортанное сплетение | | |
| Связь с телами | Физическое тело | Эфирное тело | Астральное тело | Душевное (интуитивное тело) | Кармическое тело (каузальное) | Ментальное тело | Духовное тело |
| Энергетический источник питания чакры | Электромагнитное и гравитационное поле Земли | Энергия солнечного и пищевого происхождения | Гравитационное поле Луны | Гравитационное поле Солнечной системы | Гравитационное поле Солнца | Гравитационное поле Галактики | Гравитационное поле Вселенной |
| Проявление сбалансированности энергии в чакре | Чувство безопасности, стабильности | Терпение, выносливость, уверенность в себе, благополучие | Сила духа, самомотивация решения, сила воли, самосознание | Сострадание, благосклонное отношение, любовь, исполнительность | Коммуникабельность, экспрессивность, творчество, взаимодействие, вдохновение | Способность вызывать зрительные образы, воображение, интеллектуальность | Восприятие энергии Вселенной и Космоса, космическое сознание и любовь, просветленность |
| Психологические проявления дисбаланса энергии в чакре | Потворство своим желаниям, эгоцентризм, чувство опасности, нестабильность, депрессия, меланхолия | Прострация, неуверенность в себе, беспокойство, страх | Бессилие, сомнение, чувство вины, гнев, жадность | Бесчувствие, замкнутость, пассивность, грусть | Косность, одержимость, подавленность | Трудность сосредоточения, шизофрения, отрешенность, интеллектуальная косность | Депрессия, ограниченность, самосозерцание, беспокойство |
| Физические проявления дисбаланса энергии в чакре | Геморрой, запор, ишиас, заболевания простаты | Импотенция, фригидность, гиперсексуальность, заболевания почек и мочевого пузыря | Язвы, желтуха, гепатит, гипогликемия, камни в желчном пузыре, диабет | Сердечно-сосудистые заболевания, артриты, респираторные заболевания, паралич, гипертония | Боль в горле, заболевания щитовидной железы, простуда | Головные боли, неясность мысли | Церебральные опухоли, повышение внутричерепного давления |
| Мантра (биджна) | ЛАМ | ВАМ | РАМ | ПАМ | ХАМ | ОБ (БОМ) | АУМ (АМИНЬ) |
| Цвет | Красный | Оранжевый | Желтый | Зеленый | Голубой | Синий | Фиолетовый |
| Микроэлементы | Fe (железо) | Ni (никель) | Mg (магний) | K (калий) | Co (кобальт) - паращитовидная железа; I (йод) – щитовидная железа | Mn (марганец) - передняя доля гипофиза; Cl (хлор) – задняя доля гипофиза | Li (литий) |
| Точки акупунктуры (указаны в последовательности воздействия на них) | G14, V47, VG5, VG4, RP6, V52, R13, R7, V37, VG3, VC6 | V52, V47, R7, V16, V17, VG6, VC7 | RP3, VB20, V67, R3, R5, R15, F2, VG3 | VC17 | IG3 | VG15, VG16, VG17, VG20, VG19 - передняя доля гипофиза; G14, RP6, RP5, V52, V47, V60, R13, V37, VG10, VG11 – задняя доля гипофиза | |
| Геометрические фигуры (платоновы тела) | Куб  | Икосаэдр  | Тетраэдр  | Октаэдр  | | Додекаэдр  | |

- нервных сплетений;

- эндокринных желез, лежащих в основании каждой чакры.

Для воздействия на чакры Восточные медики разработали специальные гимнастические упражнения, состоящие из определенных положений человеческого тела Хатка-йоги (асаны), дыхательных упражнений (Пранайама), воздействий светом и звуком (мантры), различные медитации и прочее. Так, например, в таблице 7 в строке «Мантра» указаны основные сочетания звуков (биджна), произнесение которых способствует увеличению энергии в соответствующей чакре. При этом количество произнесений должно быть кратно 3 и минимально мантра произносится 36 раз.

Считается, что мантры «ОМ» и «АУМ» позволяют установить связь с высшими духовными силами и восточным эгрегором. Поэтому людям, исповедующим христианскую религию, не рекомендуется пользоваться этими мантрами и в таблице 7 вместо них указаны соответственно словосочетания «БОМ» и «АМИНЬ».

Как мы уже отмечали, приводимые сведения следует принимать как данность, полученную в результате многовековых наблюдений и экспериментов. Однако даже если все это считать абсолютно истинным, то возникает вопрос, как диагностировать то или иное состояние и как удержать баланс «Инь-Ян»? Ответ дает существующая практика Восточных медиков, которая объективно подтверждает положительный лечебный эффект при работе соответствующего специалиста. Вместе с тем следует отметить, что рекомендации Восточных целителей, пригодные для восточных народов, могут оказаться бесполезными и даже вредными для европейцев и наоборот. Можно это объяснять принадлежностью к различным эгрегорам, а можно и объективными отличиями в конструкции тел людей, принадлежащих разным расам. Однако, следует отметить наметившееся сближение различных направлений медицины. Свидетельством этого являются европейские центры цветовой и звуковой терапии. Обращение все большего внимания на наличие тех или иных микроэлементов в организме человека и так далее и тому подобное».

«Дорогая Муза, - прервал рассказ Пи Е Тет, - математика любит точность и это извиняет мое вмешательство в Ваше повествование. Честно говоря, количество аксиом в называемых Вами моделях поражает. Однако нарушений логики или каких-либо противоречий не видно. Но все же ряд понятий, которые Вы используете, нуждается в доопределении. Например, что такое эгрегор?»

Выслушав реплику Тета, Муза-Диф согласно кивнула головой и продолжила: «Выдающийся ученый Вернадский назвал это ноосферой, а восточные философы называют эгрегором. По их представлениям - это некое пространство, в котором находится мысленная энергия отдельных групп людей. Поэтому есть религиозные эгрегоры, профессиональные, семейные и так далее. При крещении человек подключается к христианскому и, например, православному эгрегору. Тогда впоследствии подключение к восточному, например, буддистскому эгрегору оказывается не безопасным, поскольку определенные нравственные понятия могут отличаться и это весьма существенно при использовании неких действий, приносящих пользу для восточного человека, в аналогичных целях для православного. Верно и обратное утверждение. Неслучайно в христианских храмах священники обязательно интересуются: крещен человек или нет. Тоже происходит и в мусульманской религии.

Но вернемся к тонким телам человека. Их у него пять. Астральное - это эмоции и воображение, ментальное - это мысли и разум, душевное - это интуиция и предчувствия, каузальное - это карма, отражающая историю причинно-следственных связей с прошлым и, наконец, духовное - это истинное «Я». В ряде эзотерических учений последние четыре тонких тела человека относят к категории ментальных и обозначают соответственно **М1, М2, М3, М4**.

В обычной жизни человек, как правило, не воспринимает тонких тел, а знания о них получены, так называемыми, интравертными способами, особыми людьми, находящимися в особых состояниях, как бы отключенном от мира реального. Конечно, можно признать все это за фантазии человеческого ума, однако такие видения имеют повторяемость в различных местах земного шара, у разных людей и в разное время. Кроме того, построенные на их основе практические рекомендации, в ряде случаев оказываются весьма полезны и действенны. Поэтому есть основания допустить такие представления, как определенные аксиомы многомерной модели человека. Кстати о многомерности. Считается, что астральное тело четырехмерное, интуитивное и кармическое - пятимерное, ментальное - шестимерное, а духовное - семимерное. Все тонкие тела связаны между собой, а также с эфирным (энергетическим) телом через чакры.

Для тех, кому это удается, астральное тело видится в форме яйца, расположенного горизонтально у женщин и вертикально у мужчин над головой. В идеале астральное тело должно быть хрустально прозрачным, но у многих людей оно окрашено в различные цвета, что свидетельствует об их эмоциональном состоянии. Люди, способные к интравертным восприятиям (экстрасенсы, маги, шаманы и так далее), наблюдают и другие особенности астрального тела: его размеры, целостность, плотность и прочее, на основании чего делают заключение о состоянии организма.

Ментальное тело представляется специалистами интравертных знаний в виде небольшого неправильной формы шарика с двумя «глазами», которые как бы осматривают мысли человека. Душевное тело видится ими в форме трех пересекающихся торов. Каузальное - в виде упругой пластины и, наконец, духовное тело имеет вид светящейся точки. В своей совокупности пять тонких тел образуют сущность родившегося человека, которая впоследствии во взаимодействии с физическим и эфирным (энергетическим) телами трансформируется в личность, закладывающую основу для последующей сущности и так далее».

«Муза, дорогая, простите меня за назойливость, - снова вступил в разговор Пи Е, - но если допустить ту размерность тонких тел, о которой Вы говорили, то как же сопоставить с этим видимые особыми людьми геометрические отображения этих самых тел. Ведь те образы, о которых Вы говорите - это образы трехмерного пространства, тогда как тонкие тела, по Вашим же словам, имеют большую размерность. Значит либо надо говорить о некоторых сечениях тонких тел, либо... . Даже и не знаю, что сказать».

«Любезный Пи Е Тетик, - нисколько не смущаясь, заговорила Муза-Диф. - Все, что я Вам рассказывала - это некие общие рассуждения об эзотерических моделях человека. Как мы уже договорились в них надо либо верить, либо не верить. С одной стороны все, действительно, выглядит совершенно необычно и поэтому кажется вздором, но с другой стороны, когда Сила Водородовна рассказывала нам о микромире, то там, по представлениям современных физиков, все тоже выглядит не слишком привычно для ЗДРСМа. Поэтому раз уж мы обсуждаем вопрос номер 1, то постараемся собрать как можно больше информации на эту тему, понимая, что разговор об этом как у нас, в нашей компании жителей МИРа, так и в мире реальном только начинается, хотя и длится уже не одно тысячелетие.

Кстати, как красиво у меня получилось. «Разговор только начинается, хотя и длится уже не одно тысячелетие». В масштабах человеческой жизни и представлений ЗДРСМа - это полная чушь, но ведь Вы поняли меня, поняли некий особый смысл, который скрыт за словами, формально противоречащими друг другу. Значит, пространственный трехмерный мир с одномерным временем следует дополнить еще чем-то, что отвечало бы тем удивительным образам, мыслям и сравнениям, которые так легко воспринимаются человеком, но так трудно формализуемы на основе традиционных моделей и конструкций мира реального.

Предпринятая мной попытка познакомить Вас с не физическими моделями человека и Вселенной далеко не исчерпывает все то многообразие, которое известно людям. Однако наиболее общие и характерные черты этих моделей я постаралась представить Вашему вниманию и, надеюсь, это будет полезно для наших дальнейших бесед. Следует также отметить, что до сих пор служители религий, ученые из самых разных областей изучают религиозные книги, находя в них все новые и новые откровения и предвидения. Несколько большее внимание, уделенное семиуровневой модели человека, объясняется просьбой Зонгаида дать некое обоснование методам Восточной медицины, хотя христианские и другие модели человека и Вселенной заслуживают не меньшего интереса. Однако это требует значительного времени и приглашения соответствующих специалистов. Но все же для сравнения отметим, что в христианстве в понятие человеческой души включаются те тонкие тела, которые в семиуровневой модели названы, как: астральное тело, интуитивное и ментальное. Каузальное тело также иногда включается в это понятие, но чаще всего вообще исключается, то есть отвергается сам принцип кармического наследования прошлого. Правильно ли это или нет, к сожалению, на сегодня никто не знает. Но в этом то и смысл сегодняшнего дня человечества, находящегося на пути познания.

Завершая сравнение, укажем, что согласно христианской модели кроме видимого мира (мира физического) существует и мир невидимый, который сотворен Богом прежде мира видимого. Невидимый мир - это ангелы, являющиеся существами духовными и бестелесными, но наделенные умом, волей и могуществом. Все ангелы разделяются на девять чинов, а чины - на три лика. К первому лику относятся Серафимы, Херувимы и Престолы. Ко второму - Господства, Сила и Власти, К третьему - Начала, Архангелы и Ангелы. Главным вождем небесных сил является Св. Архистратиг Михаил, который явился защитником славы Божьей, когда сатана восстал против Господа».

Муза-Диф, остановившись в своем повествовании, стала оглядывать своих собеседников и коллег по **МИР**у, понимая, что сказанное ею вызывает противоречивые чувства у представителей «точных» наук, которые свое познание мира реального строили на логических построениях, доказываемых множеством примеров и экспериментов.

Подождав еще немного, Муза обратилась к Вселенской: «Силочка Водородовна, Вы хорошо знаете физику, как «точную» науку, но разве в ее истории, да и в сегодняшних ее постулатах и выводах нет маленьких темных пятен, которые впоследствии разворачиваются в огромные неизученные проблемы. При этом, как правило, приходится заново переосмысливать весь научный фундамент, на котором до этого стоилась вышеназванная «точная» наука. Да, сегодняшние достижения физики величественны и общепризнанны! Но можем ли мы утверждать, что «точные» физики превзошли в своих достижениях «неточных» лириков, которые в своей творческой деятельности всегда отдавали предпочтение не рассудку, а эмоциям. Не точному расчету, а чувствам!

Как Вы полагаете?»

«Полагаю, что Вы правы, указывая нам на еще одну возможность человеческого восприятия **МИР**а и его познания. Конечно, крайне заманчиво обнаружить некую абсолютную формулу жизни, да и всего мира реального. Но, по-видимому, здесь не все так просто. Ведь недаром математики до сих пор не могут разрешить проблему континуума, хотя сформулирована она уже давно и в своей постановке чрезвычайно проста. Более того, можно утверждать, что даже ЗДРСМу, как мы убедились, многие понятия не подвластны. Например, что такое бесконечность или 0, попробуйте представить их себе. Весьма затруднительно. Но в тоже время «неточные» лирики, да и физики, следующие их примеру, предпринимают попытки сделать это и, надо сказать, не безуспешно. По крайней мере, их чувственные поэтические образы на данную тему оказываются более понятны ЗДРСМу, нежели попытки «точно» представить себе бесконечность.

В этой связи позвольте еще несколько добавлений относительно обсуждаемого вопроса 1».

## 9. Дополнительные соображения Силы Водородовны по вопросу 1

«Представьте себе ситуацию, когда вы едете в поезде. Или нет. Начнем с момента, когда вы - Зонгаид, Пи, Байтович и Муза - только сели в вагон, устроились на своих местах в четырехместном купе, разложили на столике все, что надо и смотрите в окно в ожидании отправления. К сожалению, рядом стоящий поезд загораживает пространство, но за неимением лучшей перспективы вы продолжаете на него смотреть и, наконец, замечаете, что ваш поезд поехал, поскольку очевидно заметным стало его перемещение относительно другого поезда, стоящего за окном. При этом, например, Вы, Зонгаид Лечевич, первым замечаете движение и сообщаете об этом своим попутчикам. Однако к Вашему удивлению они поправляют Вас и говорят, что да движение есть, но только это едет не ваш поезд, а тот, другой, который виден из окна. Конечно, в реальной жизни по определенным дополнительным признакам можно, в конце концов, установить какой же поезд начал движение. Однако абсолютным утверждением является лишь то, что один объект движется не вообще, а относительно некоторого другого объекта. Таким образом, изучая движение различных тел, следует определить систему отсчета, относительно которой осуществляется данное движение.

Физики путем многочисленных наблюдений сформулировали Закон существования, так называемых, **инерциальных** систем отсчета, относительно которых тела движутся прямолинейно и равномерно, если на них не действуют никакие силы. При этом очевидно, что если существует хотя бы одна такая система, то любая другая система, движущаяся относительно нее прямолинейно и равномерно, тоже будет **инерциальной** системой. Вышеизложенное хорошо воспринимается ЗДРСМом и поэтому преобразования координат, предложенные Великим Галилеем (принцип относительности Галилея), кажутся совершенно очевидными, истинными и неизменными.

Действительно, рассмотрим точку **K**, с координатами (**x, y, z**) в одной системе и соответственно с координатами (**x', y', z'**) в другой системе, двигающейся относительно первой равномерно и прямолинейно по направлению оси **X** со скоростью **V** (рис. 29).

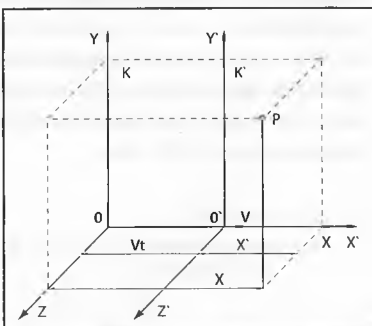



**Рис. 29. Инерциальная система K' движется с постоянной скоростью V относительно инерциальной системы K. Оси x и x' совпадают, оси y и y', а также z и z' параллельны друг другу**

Очевидно, что для данного рисунка, исходя из имеющихся у ЗДРСМа представлений, можно записать соотношения между координатами **(x, y, z)** и **(x', y', z')**.

$$x=x'+Vt,\ y=y',\ z=z',\ t=t', \qquad (93)$$

где **t** и **t'** соответственно время в системах отсчета (**x, y, z**) и (**x', y', z'**). При этом полагается, что время во всех инерциальных системах отсчета протекает одинаково.

Учитывая последнее утверждение, можно, продифференцировав по времени **t** последовательно выражения для координат, приведенные в (93), получить следующие значения для проекций скорости (**v**) движения некоторого тела в рассматриваемых системах координат:

$$v_x=v'_{x'}+V,\ v_y=v'_{y'},v_z=v'_{z'}, \qquad (94)$$

Формулы (94) определяют закон сложения скоростей. При этом очевидно, что к скорости движения частицы **v'**, определенной по отношению к системе (**x', y', z'**), добавляется скорость **V**, характеризующая скорость движения данной системы отсчета по отношению к системе (**x, y, z**).

Проведя повторное дифференцирование по **t** формул (94), можно говорить о равенстве ускорений в различных инерциальных системах отсчета, а также равенстве действующих сил. При этом, поскольку **F=ma**, то, следовательно, значения массы тела **m** в различных инерциальных системах одинаково.

Данные основы классической механики оказались низвергнуты после предложения Альберта Эйнштейна считать, что время в различных инерциальных системах может протекать по-разному, а скорость движения не может быть больше некоторой величины **C**, которую позднее вычислили и назвали скоростью света.

Учитывая данные предложения, после повторного рассмотрения случая, приведенного на рис. 29, и несложных алгебраических действий, получим выражения для преобразования координат и времени, аналогичные формулам, приведенным в (93). Итак:

$$x=\frac{x'+Vt'}{\sqrt{1-V^2/C^2}},\ y=y',\ z=z',\ t=\frac{t'+(V/C^2)x'}{\sqrt{1-V^2/C^2}}. \qquad (95)$$

Полученные выражения носят название **преобразования Лоренца**. Самое удивительное в них это то, что время **t** оказалось «на равных» с пространственными координатами. Пространство и время смешались!

Очевидно, что при малых скоростях, когда **V<<C**, выражения (95) очень близки (93). Однако при сравнимых скоростях различия начинают проявляться

все более заметно. Этим физики объясняют границы применимости классической механики и ее ограничения при рассмотрении явлений, когда скорости движения сравнимы со скоростью света.

Следует особо отметить удивительные для ЗДРСМа последствия преобразований (95). Так, например, если рассмотреть интервал времени между событиями **A** и **B** в системе (**x', y', z'**), обозначив их соответственно $t'_A$ и $t'_B$, то время этих же событий в системе (**x, y, z**) будет соответственно $t_A$ и $t_B$. При этом после несложных преобразований, учитывая (95), можно получить:

$$t_B - t_A = \frac{t'_B - t'_A}{\sqrt{1 - V^2/C^2}}. \qquad (96)$$

Поскольку в выражении (96) знаменатель всегда меньше **1**, то, следовательно, всегда $(t_B - t_A) > (t'_B - t'_A)$. Это означает, что время, отсчитываемое по часам, находящимся в системе (**x,y,z**), будет всегда больше, чем время, отсчитываемое по часам, находящимся в системе (**x', y', z'**), то есть в состоянии покоя по отношению к происходящим событиям **A** и **B**.

Рассмотрим теперь еще одно «забавное» следствие для случая, показанного на рис.29. Пусть в системе (**x, y, z**) в одно и тоже время $t_0$ происходят разные события **C** и **D** с координатами $X_C$ и $X_D$. Для определенности положим $X_C > X_D$ и будем считать, что событие **C** соответствует рождению собачки Жучки в деревне Игнатово (с координатой $X_C$), а событие **D** - рождению кота Васьки в поселке Жостово (с координатой $X_D$). Определим время этих событий в системе (**x', y', z'**). Воспользуемся формулой для времени из (95), заменяя переменные со штрихом на переменные без штриха соответственно, а также, заменяя значение скорости (**V**) на (**-V**), поскольку по отношению к системе (**x', y', z'**) система (**x, y, z**) движется влево со скоростью **V**, то есть вектор скорости имеет противоположное направление. В результате имеем для события **C**:

$$t'_0(C) = \frac{t_0 - (V/C^2)X_C}{\sqrt{1 - V^2/C^2}} \qquad (97)$$

и для события **D**:

$$t'_0(D) = \frac{t_0 - (V/C^2)X_D}{\sqrt{1 - V^2/C^2}}. \qquad (98)$$

Поскольку $X_C > X_D$, то, следовательно, $t'_0(C) < t'_0(D)$. А это значит, что в системе $(x',y',z')$ собака Жучка родится раньше, чем кот Васька, тогда как в системе $(x, y, z)$ это по нашей договоренности происходило одновременно!

Если же система $(x, y, z)$ будет двигаться в противоположном направлении по отношению к системе $(x', y', z')$, то все будет наоборот. Первым родится кот Васька, а лишь затем собачка Жучка.

Рассмотренные примеры плохо воспринимаются ЗДРСМом. Более того, для причинно-связанных событий это делается вообще не понятным, поскольку нарушаются причинно-следственные связи. В пушке взрывается заряд и только потом летит ядро. Но не наоборот. Хотя, строго говоря, определение зависимости и независимости событий тоже носит весьма условный и относительный характер. Всегда можно придумать такую цепочку обстоятельств, которые объединят, казалось бы, совершенно разные события и ничтожная мелочь может явиться причиной величайших потрясений».

Произнеся последние слова, госпожа Вселенская сделала паузу, понимая, что ее слушателям надо дать время на осознание того, что ею было сказано. Было видно, что ЗДРСМу каждого из жителей **МИР**а приходится непросто. Первым решился на комментарии Бит Байтович: «По-видимому, разрешением этих проблем должны явится определенные ограничения, которые возникают при переходе того или иного события к состоянию, когда система, в которой он находится, изменяет свою скорость. Невозможен моментальный переход от одной скорости к другой. Другими словами, ускорение не может равняться бесконечности. В данном случае должны происходить процессы, как мне кажется, аналогичные тем, что происходят в электрических цепях при поступлении прямоугольного импульса. Но об этом позже. А сейчас, уважаемая Сила Водородовна, продолжайте нас удивлять. Мы все во внимании!»

«Ну, что же, - продолжила Вселенская. - Обратимся теперь к пространственным размерам объекта, двигающегося с некоторой скоростью $v = V$ по отношению к системе $(x, y, z)$, и, находящегося в состоянии покоя относительно системы $(x', y', z')$ (рис. 29). Для наглядности положим, что таким объектом явится обыкновенный карандаш, положенный вдоль оси $x'$. При этом координаты начала и конца данного предмета будут $X'_1$ и $X'_2$. Проводя рассуждения, аналогичные вышеприведенным, и используя выражение для координаты $X$ из (95), получим соотношени:

$$X'_2 - X'_1 = \frac{X_2 - X_1}{\sqrt{1 - V^2/C^2}} \qquad (99)$$

Окончательно обозначая через $L' = X'_2 - X'_1$ длину стержня в системе $(x',y',z')$, а через соответственно $L = X_2 - X_1$ длину стержня в системе $(x, y, z)$, получим соотношение:

$$L = L' \cdot \sqrt{1 - V^2/C^2}. \qquad (100)$$

Формула (100) позволяет судить об изменяющихся размерах тела в зависимости от скорости движения и системы координат, по отношению к которой данное наблюдение осуществляется.

Помимо рассмотренных выше временных и пространственных особенностей, совершенно иное трактование получают такие понятия как масса, сила, энергия и прочее. Не вдаваясь в подробное рассмотрение этих вопросов, отметим лишь, что, например сила в отличие от классической механики оказывается неколлинеарна с ускорением. Кроме того, в различных системах отсчета сила может иметь различное значение и направление воздействия. При этом масса тела перестает быть простым коэффициентом пропорциональности между силой и ускорением (см. формулу 4), поскольку становится величиной, зависимой от скорости согласно следующему соотношению:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - V^2/C^2}}, \qquad (101)$$

где $m_0$ - масса тела в состоянии покоя.

Полная энергия тела вычисляется следующим образом:

$$E = \frac{m_0 C^2}{\sqrt{1 - V^2/C^2}}. \qquad (102)$$

Очевидно, что в состоянии покоя, когда $V=0$, энергия покоя равна $E=m_0C^2$. Отметим также, что формула (102) отображает лишь кинетическую энергию и энергию покоя, не включая другие виды энергии, что на самом деле следует учитывать при наличии различных полей.

Отметим еще одну особенность приведенных выражений. Как следует из (101) при скорости, приближающейся к скорости света, величина $m$ стремится к бесконечности. Таким образом, приходится допускать, что микрочастицы, движущиеся со скоростью света, имеют нулевую массу в состоянии покоя. Тогда выражение (101) может, при раскрытии неопределенности $0/0$ иметь значение, отличное от $0$ или $\infty$.

Надо заметить, что эти, на первый взгляд, парадоксальные результаты дают теоретическое обоснование результатам экспериментов по наблюдениям за микрочастицами, которые до этого было невозможно объяснить с позиций классической механики. Однако говорить о завершенности рассмотренных выше теоретических построений пока слишком рано и физика, как наука продолжает развиваться и совершенствоваться. И может быть кому-либо, участвующему в наших дискуссиях, удастся найти новые и более совершенные объяснения существования мира реального, а также тех явлений и процессов, которые в нем происходят».

Пи Е Тет, который внимательно слушал госпожу Вселенскую, после последних ее слов решил предложить нестандартные суждения относительно услышанного. «Во время своих рассуждений, уважаемая Сила Водородовна, Вы зачастую использовали понятие плотности, как некой относительной единицы, указывающей на то, сколько, например, вещества приходится на единицу объема и так далее. Так вот, говоря о скорости, можно заметить, что формально - это плотность расстояния на единицу времени. Не знаю насколько это интересно с точки зрения физического смысла, но мне показалось, что во многих физических законах понятие плотности встречается весьма часто. Так что данное формальное с точки зрения математики наблюдение, возможно, имеет под собой определенную физическую подоснову.

Второе, на что я хотел бы обратить внимание, так это на выражение:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - V^2/C^2}}, \qquad (103)$$

которое входит сомножителем во многие приведенные выше формулы. Его можно записать в следующем виде:

$$\frac{\mathbf{C}}{\sqrt{\mathbf{C}^2 - \mathbf{V}^2}}. \qquad (104)$$

Если представить себе, что **C** - это гипотенуза некого прямоугольного треугольника, а **V** - его катет, то выражение (104) будет соответствовать величине, обратной по определению некоему синусу или косинусу угла между гипотенузой и катетом, то есть между **C** и **V** соответственно. К сожалению, я не готов сейчас предложить дальнейшие комментарии сказанному, но тем не менее посчитал необходимым отметить это как информацию для размышления».

«Прекрасно, прекрасно, - захлопала в ладоши Муза-Диф, - мне очень понравились Ваши комментарии, особенно про плотность. Теперь мне совершенно ясно, что скорость **C** - это максимально возможная скорость. Действительно скорость обязательно должна быть ограничена, как плотность расстояния в единицу времени. Нас же не удивляет ограниченность количества апельсинов, которые можно расположить в неком ящике как единице объема. Так же и скорость. Особенно в условиях, когда пространство и время смешались. Иначе как-то нелогично получается. Плотность апельсинов, да и всего прочего ограничена, а плотность расстояния - нет! Нет уж! Если ограничивать, то ограничивать все и на основе общего подхода, а именно, **всегда и везде должна быть ограничена плотность!** И давайте назовем этот закон Законом имени...».

Тут Муза-Диф остановилась, поскольку, во-первых, ей как-то сразу в голову не пришло красивое название данного закона, а во-вторых, ей всегда не нравились различные ограничения, с которыми постоянно приходится считаться.

Видя замешательство Музы, Пи Е решил снова включиться в разговор. «Ваши обобщения очень интересны, и если их принять, то можно вывести ряд следствий об ограниченности физических величин, например, сил взаимодействия и прочее. Однако не станем углубляться в это, оставив поиски следствий Вашего Закона любопытным гражданам, а отметим лишь, что данное утверждение созвучно с тем, что явления, происходящие в мире реальном, всегда имеют конечную первую производную. В связи с этим при формировании **МИР**а возможно следует также придерживаться данного ограничения».

«Ограничения, ограничения, - задумчиво произнесла Вселенская. - Действительно в математике, в физике существуют различные пределы и ограничения. Пытаясь ответить на вопрос 1, мы должны признать, что они существенно влияют на мир реальный и, в том числе, на людей, проживающих в нем. Например, по вполне понятным причинам плотность людей, проживающих в том или ином месте, ограничена. Причем здесь существенными являются множество факторов: обеспеченность питанием, энергетическая обеспеченность и так далее и так далее. Следует также учитывать дополнительные ограничения, которые формируются в самом человеческом обществе. Речь идет о формирующихся стереотипах качества жизни, складывающихся в тех или иных общественных формированиях. В результате изменяющийся уровень рождаемости (ниже уровня воспроизводства), не эффективное, зачастую расточительное потребление ресурсов, загрязнение среды обитания и прочее. Таким образом, вычисление пределов существования в рамках многомерной модели реального мира оказывается принципиально необходимым для прогнозирования будущего. Причем достаточно близкого по историческим меркам будущего. Известная фраза короля Людовика: «После нас хоть потоп!», сегодня звучит особенно кощунственно, когда нефти, при современном уровне потребления, осталось лет на 35 - 50, угля на 100 - 200 лет и так далее. При вычислении таких пределов невольно возникает вопрос, а что будет дальше? Сможет ли земная цивилизация развиваться, найдутся ли другие источники энергии, или всех ждет жалкий удел Стрекозы из известной басни!?

Изучая данные проблемы, следует отличать теоретические возможности от их реального воплощения, которое по некому Закону «Ну не шмогла!» всегда отличается от того, что можно было бы сделать, если бы, да кабы, ну и так далее. Безусловно, прогнозирование будущего - задача чрезвычайно увлекательная, но и безумно сложная. Реально складывающиеся зависимости оказываются существенно нелинейными и не поддаются строгому и доказательному линейному описанию. При этом количество факторов, влияющих на реальные процессы, оказывается очень большим, да и кроме того наиболее существенными становятся именно те, которые до этого были малозначимы и незаметны. Исходя из этого, была разработана теория нелинейных систем, которая на сегодняшний день является далеко не полной и состоит из многих составляющих, как, например, нелинейная динамика, нелинейное программирование и так далее. Весьма интересным математическим образом нелинейных систем явилось открытие **странных аттракторов** (attract - привлекать (англ.)). Для лучшего понимания этого со стороны ЗДРСМа, нарисуем в трехмерном пространстве рельсы фантастического аттракциона «Американские горки» (в Америке, говорят, их наоборот называют «Русскими горками»). Далее представим себе, что по этим рельсам (рис. 30) движется тележка. При этом она может двигаться только по ним, но в то же время в результате неких воздействий может с одних рельсов переходить на другие и таким образом существенно изменять направление своего движения.

Приведенный пример странного аттрактора дает описание поведения того или иного процесса, что позволяет ввести некий порядок в его теоретическое представление и получить возможность прогнозирования, поскольку процесс происходит не просто абсолютно хаотично и непредсказуемо, а по неким траекториям. При этом, безусловно, существенным является знание причин и способов, переводящих тележку с одних рельсов на другие».

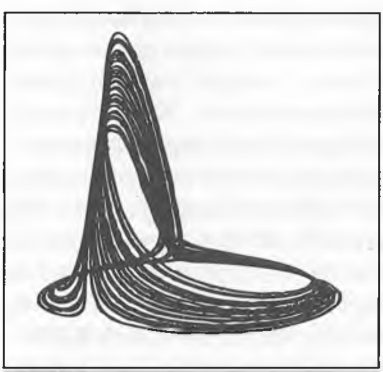


Рис. 30.

«Какие они увлекательные, эти странные аттракторы, - воскликнула Муза-Диф, перебивая Вселенскую. - А как это похоже на жизнь человека. Ведь недаром говорят, что перед каждой личностью открыто множество путей. Но вот какой путь она выберет, или по какому пути ее заставят идти те или иные обстоятельства - это уже вопрос практической реализации возможностей. Очень интересная модель. Она, кстати, сродни астрологическому прогнозированию, если рассматривать странный аттрактор как астрологическую карту человека, а его практическое воплощение как «дороги жизни» в рамках странного аттрактора.

Интересно различные маги и прорицатели додумались до этого или пока нет??»

Муза-Диф, завершив свои оживленные комментарии по поводу странных аттракторов, повернулась к Пи Е: «Уважаемый Математик, обсуждая проблему 1, мы довольно часто оперируем понятием возможности, имея в виду, что какое-либо событие может произойти, а может и не произойти. При этом в силу множества факторов, влияющих на это, заранее с полной уверенностью об исходе сказать невозможно. Отсюда, как бы само собой, возникает желание знать, насколько вероятно произойдет то или иное событие. Могли бы Вы дать нам некоторые пояснения на эту тему?

А наша дорогая Силушка Водородовна немного передохнет от столь информационно насыщенного повествования».

Госпожа Вселенская согласно кивнула головой, взяв чашечку кофе, а господин Тет приготовился осветить тему, заданную Музой-Диф.



9-1 192

## 10. Пи Е Тет о теории вероятностей

«Как уже отмечалось в начале нашей встречи, математические построения, переходящие затем в стройные теории, возникали, как правило, в результате некоторой практической необходимости. Так и теория вероятностей начиналась с подсчетов шансов в азартных играх в XV - XVI веках. История сохранила имена итальянских математиков Кардано, Пачоли, Тарталья и других, занимавшихся среди прочего такими подсчетами. Однако сама теория начала формироваться позже, с середины XVII века, трудами известных математиков: Паскаля, Ферма, Гюйгенса, Бернулли, позднее Лапласа, Чебышева, Маркова, Ляпунова. Современную форму и стройность теория вероятностей приобрела совсем недавно, в XX столетии, благодаря таланту известного математика А.Н. Колмогорова.

Заканчивая краткий исторический экскурс, следует отметить, что теория вероятностей возникла и стала развиваться в ответ на насущную потребность хоть как-то количественно характеризовать те явления и процессы, которые не поддавались точному описанию и оцениванию на основе традиционных математических подходов. В основном, если не всегда, это происходило в тех случаях, когда невозможно точно учесть воздействие множества факторов, число которых весьма велико, а способы их воздействия многообразны и не вполне ясны.

Разберем один простой пример.

Представим себе, что нам предстоит сыграть в нарды, а для этого следует бросить игральные кости (кубики). Пусть для определенности каждый из них имеет размер **2х2х2** метра!»

«Ничего себе игральный кубик, - не выдержал Зонгаид, который услышав про нарды, стал особо внимателен к словам Тета. - Интересно, какого же размера будут нарды?»

«А нарды, - ни чуть не смутился Пи, - будут обычного размера. Так, что не волнуйтесь. Итак, наши кубики имеют объявленный выше размер и сделаны из чистого золота. Каково! Совершенно ясно, что бросить такие кубики никому из нас не под силу. Более того, никто из нас не сможет даже сдвинуть их с места. Таким образом, выпавшая комбинация предопределена тем, как лежат эти кубики. Все ясно и понятно. Или другими словами - **детерминировано**.

Теперь предположим, что кубики сделаны из более легкого материала, и, поднапрягшись, человек в состоянии их перевернуть. С точки зрения игры мало что изменилось, поскольку переворот через одну грань приводит к заранее известному результату. Однако, продолжая облегчать кубики и уменьшая их размеры, мы будем двигаться к ситуации, когда предугадать исход бросания кубика будет все сложнее и сложнее. Если в начале переворот кубика осуществлялся под воздействием превалирующей силы и влияние всевозможных мелких бугорков и трещин можно было не учитывать, то при уменьшении размеров кубика эти «малозначительные» факторы воздействия становятся все более заметными. Когда их становится «ну очень много» и наши вычислительные возможности не справляются с задачей оценивания их влияния на бросаемый кубик, мы будем вынуждены признать, что уже не в состоянии точно предсказывать результат. С этого момента данный процесс приобретет новое качество. Он перестает быть **детерминированным**, а станет **случайным** или **стохастическим**. С этого же момента появится смысл играть в нарды, да и в другие интересные игры, где правит бал его величество случай.

Рассмотренный выше пример продемонстрировал нам, как детерминированный процесс приобрел новое качество и стал случайным. Однако это не доказало нам, что детерминированный процесс исчез. Просто начиная с некоторого момента, мы не можем учесть все детали и для нас процесс становится случайным, в то время как для более внимательного и способного наблюдателя он останется детерминированным. Таким образом, напрашивается вывод, что все дело в точности измерения и возможности учесть влияние взаимодействующих объектов, а, следовательно, все детерминировано и в силу нашего несовершенства и слабости развития проявляется перед нами, как случайное явление.

Подобная точка зрения существовала в физике до появления квантовой механики и открытия принципа неопределенности, о чем мы говорили выше. В математике же данная проблема должна разрешаться на основе исследования того, что такое оценивание, в чем оно выражается для данного конкретного явления. В общем же случае надо доказывать теорему существования случайного явления. Необходимо сравнить скорость нарастания влияющих факторов и скорость вычислений, которые необходимы произвести для учета всех воздействий. При этом может оказаться, что при предельном переходе адекватная скорость вычислений не может быть достигнута в принципе. Тогда окажется, что в этой ситуации процесс не детерминированный, а строго случайный. Возможно, именно по этой причине микромир столь не похож на мир реальный. Однако для таких исследований нам потребуется ввести некие количественные измерители и определения, опираясь в начале этого процесса, как это мы всегда делали, на ЗДРСМ.

Прежде чем мы перейдем к этому отметим еще одну интересную особенность, следующую из рассмотренного примера. Важными являются не абсолютные размеры, а относительные. Кубик относительно бросающего и влияющих на него факторов должен отвечать определенным условиям и наоборот, чтобы процесс выпадения тех или иных очков можно было считать случайным. Данное наблюдение не должно ускользать от нашего внимания, поскольку это свидетельствует о существовании **всеобщего принципа относительности**.

Другими словами любые явления или процессы становятся заметными, если это происходит относительно чего-либо. В противном случае такое явление не существует или, по крайней мере, не доступно для нашего восприятия. Последнее довольно наглядно в плане практической реализации невозможности восприятия демонстрирует природа на примере построения зрения у лягушки, которая видит только движущиеся объекты, в то время как все неподвижное вокруг нее ей недоступно.

Однако обратимся к способам количественного оценивания случайных процессов.

Итак, рассмотрим процесс наблюдения за интересующими нас явлениями или действиями. Допустим, мы смогли установить, что всего может быть n разных элементарных событий или исходов. Для определенности положим, что мы наблюдаем за стрельбой по круговой мишени и **n=10**. Попадание в центральный круг назовем элементарным событием $A_1$, за которое начисляется **10** очков, в следующий - $A_2$ и **9** очков и так далее. Последний внешний круг мишени - это $A_{10}$ и **0** очков. Однако можно вообще промахнуться мимо мишени и в таком случае надо либо вводить еще одно событие, либо сопоставить его с событием $A_{10}$, за которое начисляется **0** очков. Теперь представим себе случай, когда вылетевшая после выстрела пуля из-за дефекта разделится на две части, и в мишени сразу будут поражены два круга. Как быть в этом случае? Какому событию сопоставить этот выстрел? При определенной фантазии можно придумать ряд других ситуаций, которые не вписываются в модель теоретической конструкции, когда наблюдатель встречается только с **10-ю** вышеназванными элементарными событиями. Указанный пример доказывает, что применяя на практике результаты теории вероятностей, в первую очередь следует озаботиться адекватностью выбираемой теоретической модели исследуемой реалии. Данный анализ также является предметом особого раздела математики, которая предоставляет количественные критерии для того, чтобы оценить точность выбранной модели по отношению к реальной ситуации, которую эта модель описывает.

Но вернемся в наш тир, где ведется стрельба по мишени. Условимся, что в данном случае возможны лишь те десять исходов $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$, о которых мы говорили выше, а все иное невозможно, что, конечно, огрубляет реальную ситуацию, но нас это устраивает. Какие же количественные показатели выбрать? Ну, например, можно выбрать количество попаданий соответственно в $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$. Однако это не совсем удачное решение, поскольку оно не учитывает, сколько всего было выстрелов. Например, один стрелок стрелял пять раз, и каждый выстрел был в десятку. Итого пять раз в $A_1$. Другой же стрелок попал в $A_1$ десять раз, то есть в два раза больше, только при этом он стрелял сто двадцать четыре раза. Если судить по количеству попаданий в $A_1$, то второй стрелок лучше первого. Однако наш ЗДРСМ, по понятным причинам, не может с этим согласиться и предлагает оценивать результаты относительной величиной, а именно, количество попаданий в $A_1$ разделить на общее количество произведенных стрелком выстрелов. Тогда показатель первого стрелка по попаданию в $A_1$ будет **5/5**, а соответственно показатель второго - **10/124**. Очевидно, что при таком измерении первый стрелок более меткий и ему можно вручить главный приз - один миллион таньга-маньга. Но узнав про это, коварный второй стрелок возмутился и сказал, что решение не правильное, поскольку все же он попал десять раз, а не пять, как первый. Судьи посовещались и решили, что второй стрелок по-своему прав и надо предложить первому стрелку продолжить стрельбу, поскольку очевидно, что выстрелив пять раз, невозможно попасть в $A_1$ десять раз. Первый стрелок, несмотря на возражения руководителя команды, который уже готовился поделить миллион таньга-маньга, согласился и продолжил стрельбу. Каков же итог?

В результате волнения первый стрелок последующие двадцать выстрелов вообще не попадает в мишень. Затем ему со стороны нехорошего второго стрелка подсунули бракованные патроны и он опять никак не мог попасть в $A_1$. Все это продолжалось до **119** выстрела. Но в этот момент стрелок вспомнил о ... и все последующие шесть выстрелов попал точно в $A_1$! Ура! Первый стрелок победил по все статьям! Правда, нехороший второй стрелок и его тренер пытались представить справку о болезни их любимого кота и попугая, повлиявших на нервную систему второго стрелка, но судьи не согласились по этим причинам аннулировать результаты соревнования, и первый приз достался первому стрелку.

Конечно, никакая теория вероятностей не может отразить все многообразие происходящего на соревновании стрелков, но совершенно очевидно, что для справедливого, с точки зрения ЗДРСМа, соперничества следует продолжить стрельбу до бесконечности, чтобы различные факторы, влияющие на настроение стрелков, были нивелированы, и они могли бы продемонстрировать их истинное мастерство.

Исходя из этого, а также **«всеобщего принципа относительности»**, математики предлагают в качестве количественного измерителя попадания в $A_1$ избрать отношение количества попадания в $A_1$, обозначим это как $K(A_1)$, к общему количеству выстрелов, при условии, что общее количество выстрелов стремится к бесконечности. Эту величину принято называть вероятностью соответствующего события. Обозначают ее, как $p(A_1)$. Итак, в общем виде для события $A_i$ имеем:

$$p(Ai) = \lim_{K_{общ} \to \infty} K(Ai)/K_{общ}, \qquad (105)$$

где $K_{общ}=K(A_1)+K(A_2)+\ldots+K(A_n)$.

Поскольку в реальных условиях не возможно бесконечное количество испытаний (выстрелов), то оценкой вероятности события $A_i$ является частость данного события, равная:

$$k(A_i) = K(A_i)/K_{общ}. \qquad (106)$$

Данное обстоятельство следует всегда иметь в виду при решении вопроса адекватности выбранной математической модели исследуемому процессу.

Несложно убедиться, что всегда должно выполняться следующее равенство:

$$\sum_{i=1}^{n} p(A_i) = 1. \qquad (107)$$

В большинстве случаев обозначение $p(A_i)$ заменяют на $p_i$, что дает некоторое сокращение при записи формул.

Итак, подводя первый итог, отметим, что для задания вероятностной модели (иногда говорят вероятностного пространства) необходимо знать множество событий $A_1,A_2,\dots,A_n$ и соответственно их вероятности $p_1,p_2,\dots,p_n$.

В общем случае количество событий может стремиться к бесконечности ($n\to\infty$) и более того множество событий $A_1,A_2,\dots,A_n$ может быть не только счетным, но и континуальным.

Как правило, для начинающих знакомиться с теорией вероятностей, предлагается для рассмотрения случай бросания монеты, для которого возможными исходами является выпадения «орла» или «решетки». Однако мне показалось, что следует начать с более сложного случая, чтобы продемонстрировать особенности реальных процессов и соответствующей вероятностной модели, описывающей его. В то же время многие явления могут быть представлены в виде неких стандартных конструкций, для которых математиками разработаны формулы вычисления. Приведем несколько примеров.

1. Подбрасывается монета и результатом является либо выпадение «орла» ($A_1$), либо «решетки» ($A_2$). Полагается, что другие исходы, как, например, попадание на ребро или исчезновение монеты не возможны. Кроме того, считается, что монета не содержит каких-либо особенностей, целенаправленно влияющих на выпадение «орла» или «решетки». При таких допущениях очевидно, что:

$$p(A_1) = p(A_2) = 0,5. \qquad (108)$$

2. Бросается игральная кость с одинаковыми гранями. Рассматриваются в качестве исходов только выпадение одной из граней, то есть $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$, $A_6$.

Другое не возможно. Тогда соответственно имеем:

$$\mathbf{p(A_1) = p(A_2) = p(A_3) = p(A_4) = p(A_5) = p(A_6) = 1/6}. \qquad (109)$$

3. В мешке находится **M** одинаковых по размеру, весу и прочее шаров, но пронумерованных от **1** до **M** и это является единственным их отличием, что на ощупь обнаружить невозможно. Из мешка вынимается один шар, записывается его номер и возвращается обратно в мешок. Данная процедура осуществляется n раз, в результате чего будет записана та или иная комбинация чисел, сформированная по номерам шаров, вынутым из мешка. Такая модель получила название **выбор с возвращением**. Очевидно, что поскольку шары возвращаются в мешок, то можно несколько раз случайно достать из мешка шар с одним и тем же номером. Кроме того, возможно доставание одних и тех же шаров, но в разной последовательности. Например, при **M=7** и **n=5** можно получить комбинацию (**1, 2, 6, 1, 3**) и комбинацию (**2, 1, 1, 6, 3**). Данные комбинации содержат одинаковые наборы чисел, но отличаются порядком их следования. Если такие комбинации считать разными комбинациями, то такая модель называется **упорядоченной**. При этом количество разных комбинаций $\mathbf{N(\Omega)}$ ($\mathbf{\Omega = \{\omega: \omega = (A_1,\dots,A_n); A_i=1,\dots,M\}}$) равно:

$$\mathbf{N(\Omega) = M^n}. \qquad (110)$$

Если же данные комбинации считать одинаковыми, то модель будет **неупорядоченной** и будет отражать только факт попадания тех или иных шаров в комбинацию без учета их последовательности. В этом случае имеем:

$$\mathbf{N(\Omega) = C^n_{M+n-1}}. \qquad (111)$$

4. Случай отличается от рассмотренного случая 3 тем, что вынимаемые из мешка шары не возвращаются. Данная модель называется **выбор без возвращения**. Упорядоченные комбинации, когда порядок чисел является существенным, в этой модели называют **размещением**. Их число равно

$$\mathbf{N(\Omega) = (M)_n = M(M\text{-}1)(M\text{-}2)\dots(M\text{-}n+1)}. \qquad (112)$$

Для случая, неупорядоченных комбинаций, называемых в этой модели **сочетаниями**, имеем:

$$\mathbf{N(\Omega) = C^n_M}. \qquad (113)$$

5. Разместим **n** шаров по **M** ящикам. В данном случае, по аналогии с при-

Таблица 8

N (Ω) в задаче размещения n дробинок по M ячейкам

| Тип дробинок / Размещение | Различимые дробинки | Неразличимые дробинки | |
|---|---|---|---|
| Без запрета | $M^n$ (статистика Максвелла-Больцмана) | $C^n_{M+n-1}$ (статистика Бозе-Эйнштейна) | С возвращением |
| С запретом | $(M)_n$ | $C^n_M$ (статистика Ферми-Дирака) | Без возвращения |
| | Упорядоченные выборки | Неупорядоченные выборки | Выбор / Набор |

N (Ω) в задаче выбора n шаров из урны с M шарами

мерами (3) и (4), следует различать ситуации, когда номера шаров существенны и **различимы** и когда номера - **неразличимы** или, что то же самое, не существенны. Следует также рассматривать два случая, когда в любом из ящиков может находиться **не более одного шара** и когда в любом из ящиков может находиться **неограниченное число шаров**. Оказалось, что формулы, полученные в примерах (3, 4), пригодны и для данных моделей. Не вдаваясь в подробное обсуждение этого, приведем результаты в таблице 8:

В этой же таблице наравне с формулами (110 - 113), указаны названия статистик, принятые в физике, о чем, я полагаю, более подробно могла бы рассказать Сила Водородовна. Однако сделаем это в другое время, а я продолжу про теорию вероятностей.

В первом и втором примере были приведены формулы (108, 109) для расчета вероятности события, тогда как в последующих примерах указывались выражения для расчета количества возможных исходов (110 - 113). Это было сделано намеренно, с целью обсудить еще одну особенность вероятностных моделей. В примерах 1 и 2 всячески подчеркивалась равновероятность исходов в силу вышеназванных особенностей монеты и игральной кости. Поэтому вероятность события в такой модели, когда все исходы равновероятны, обратна величине **N(Ω)**. Следует также подчеркнуть, что в данном случае под событием понимается один из исходов в рассмотренных примерах. В общем же случае понятие события может включать в себя не один, а несколько исходов. Например, в модели 2 нас может интересовать, какова вероятность того, что произойдет событие, состоящее в выпадении четного числа. Тогда число исходов, формирующих событие будет $N(A)=K(A_2)+K(A_4)+K(A_6)=3$. Всего возможных исходов $N(\Omega)=6$. Следовательно окончательно имеем $p(A)= N(A)/N(\Omega)=0,5$. Данные рассуждения опять же верны, если исходы равновероятны для некой идеальной игральной кости, у которой абсолютно одинаковые пространственные геометрические размеры. В противном случае надо либо пытаться как-то учесть реальную ассиметрию в теоретической модели, либо проводить экспериментальное исследование с вычислением вероятности по формуле (106).

Формула (106) предполагает бесконечное количество испытаний, что реально не осуществимо. Однако математикам удалось доказать ряд теорем, которые показывают, что искомую точность определения значения вероятности можно достичь при проведении конечного числа испытаний. При этом естественно, чем более точно определяется вероятность, тем больше испытаний следует проводить. Эта зависимость не является линейной, а определяется характером случайного процесса, что требует дополнительного и иногда весьма сложного исследования. Поскольку данная задача должна решаться для каждого конкретного случая, то ограничим наше дальнейшее обсуждение этого констатацией данного факта. В то же время, для примера, укажем без доказательства наиболее известные теоремы теории вероятностей, помогающие в решении данного вопроса и названные по имени их авторов.

**Локальная предельная теорема Муавра**.

Если вероятность наступления некоторого события в **n** независимых испытаниях постоянна и равна **p** ($0<p<1$, а $q=1-p$), то вероятность $P_n(m)$ того, что в этих испытаниях событие **A** наступит ровно **m** раз, удовлетворяет при $n\to\infty$ соотношению:

$$\sqrt{npq}\,P_n(m): \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{x^2}{2}\} \to 1 \qquad (114)$$

равномерно для всех **m**, для которых:

$$x = x_{mn} = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \qquad (115)$$

находится в каком-либо конечном интервале.

**Интегральная предельная теорема Муавра-Лапласа**.

Если $\mu$ есть число наступлений события в **n** независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность этого события равна **p**, причем $0<p<1$, $q=1-p$, то равномерно относительно **a** и **b** ($-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty$) при $n\to\infty$ имеет место соотношение:

$$P\{a \leqslant \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} < b\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\{-\frac{z^2}{2}\} dz. \qquad (116)$$

Приведенные теоремы доказывают не только практическую возможность оценить вероятность события при ограниченном числе испытаний, но и позволяют планировать эксперимент, помогая установить необходимое их количество для получения требуемой оценки вероятности события. В частности следует назвать одно из следствий, которое носит название **закона больших чисел** или **теоремы Бернулли**, а именно, для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$, вероятность неравенства $|\mu/n - p| < \varepsilon$ стремится к единице!

Подводя промежуточный итог сказанному, отметим еще раз, что теория вероятностей - это часть математики, позволяющая находить количественное описание процессов и явлений, для которых не удается найти точной формулы в силу множественности действующих факторов и неясности способов их влияния. Другими словами, мы не знаем, что происходит в черном ящике, но имеем возможность наблюдать как из него выскакивает всякое разное, формируя в терминах теории вероятностей некие исходы. Один или несколько исходов формируют события. Мы подсчитываем количество этих событий и рассчитываем частость, что служит оценкой вероятности событий. При этом теория вероятностей дает также рекомендации как долго следует проводить наблюдения, чтобы результаты имели требуемую точность. Последнее является весьма непростой задачей, поскольку определить, что такое требуемая точность, не зная процесса, протекающего в черном ящике, а только наблюдая исходы, бывает весьма затруднительно. Приведем довольно наглядный пример.

Рассмотрим хорошо известные игры, когда играющие заполняют карточки лото, пытаясь угадать счастливую комбинацию цифр, приносящую огромный выигрыш. Очевидно, что именно эта возможность вдруг стать сказочно богатым влечет людей и заставляет их покупать лотерейные билеты, играть и, как правило, проигрывать. Теперь, представим себе, что правила игры с информацией о возможных выигрышах «спрятаны» в черном ящике, но у нас есть возможность наблюдать за отдельными людьми, которые покупают лотерейные билеты, зачеркивают в них комбинации и затем выигрывают некий приз, либо не выигрывают. Наблюдая за этими исходами, можно оценить вероятность выигрыша того или иного приза, но обнаружить возможность выигрыша главного приза вряд ли удастся в силу большой редкости такого события. Таким образом, сформированная на основе наблюдений за черным ящиком вероятностная модель игры окажется лишенной главной интриги, главного события, которое и привлекает участников. Следовательно, требования к точности модели в данном случае должны быть особыми с тем, чтобы рассчитываемое по формулам (114-116) количество испытаний оказалось достаточным для обнаружения исходов, связанных с главным призом. При этом, правда, поскольку правила игры спрятаны в черном ящике, нам все равно не удастся получить исчерпывающий ответ на вопрос, а последний ли этот главный приз, да и вообще, является ли он главным призом? А может быть есть еще более главный приз, а может быть еще и еще. Таким образом, ужесточение требований к вероятностной модели может продолжаться до бесконечности, что в практической жизни вряд ли приемлемо. Поэтому, если не удается раскрыть секрет черного ящика, то приходиться ограничиваться теми значениями точности модели, которые по тем или иным соображениям приемлемы. И здесь, безусловно, последнее и решающее слово имеет ЗДРСМ!

Выше было отмечено, что для построения вероятностной модели необходимо установить множество событий $A_1,A_2,\dots,A_n$ и соответственно их вероятности $p_1,p_2,\dots,p_n$. Приведенный же пример показал, что в практическом применении, данный подход не всегда легко реализуем из-за проблем, связанных с установлением исчерпывающего перечня событий $A_1,A_2,\dots,A_n$ и, как следствие, их вероятностей $p_1,p_2,\dots,p_n$. При этом, определяя $A_1,A_2,\dots,A_n$, следует озаботиться тем, что бы эти события были несовместны и представляли из себя полную группу событий. Это означает, что при испытании (бросании игральной кости, стрельбе по мишени, наблюдении за черным ящиком и прочее) может происходить только одно из перечисленных событий $A_1,A_2,\dots,A_n$. Наступление же каких-либо других событий невозможно (условие полноты системы), так же невозможно одновременное наступление двух или более событий из множества $A_1,A_2,\dots,A_n$ (условие несовместимости событий). Условие полноты не требует выполнения условия несовместимости событий. Однако при выполнении обоих требований построение вероятностной модели оказывается более простым и наглядным.

Рассмотрим еще один пример состязания двух игроков в игру «кому повезет» по следующим правилам. Начиная с удара гонга, каждый игрок в любой момент последующей одной минуты должен сделать ставку, например, **105 у.е.** При этом ставка действительна в течение **13** секунд с момента ее постановки. Игроки разделены перегородкой и не видят действий партнера. Если в течение минуты с момента гонга на столе оказываются ставки двух игроков, то обе ставки передаются первому игроку и он становится победителем. Если же на столе в течение минуты на столе ставки двух игроков «не пересекаются», то есть на столе находится всегда не более одной ставки, то выигрыш достается второму игроку. Спрашивается, какой игрок имеет большую вероятность выиграть? Да и на кого нам поставить в тотализаторе?

Для решения этой задачи обозначим через $t_1$ момент, когда первый игрок сделает ставку, а через $t_2$ момент, когда второй игрок сделает ставку. Поскольку каждая ставка с момента ее постановки действует в течение **13** секунд, то «пере-

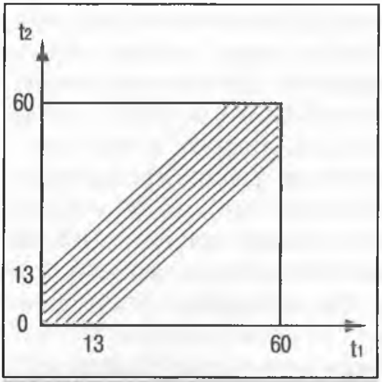


**Рис. 31.**

сечение» ставок возможно только в случае выполнения следующего неравенства:

$$|t_1 - t_2| \leqslant 13 \qquad (117)$$

Для наглядности изобразим графически область решения неравенства (117) с указанием всех других возможностей (рис. 31). Для этого по оси абсцисс будем откладывать $t_1$, а по оси ординат $t_2$.

Руководствуясь ЗДРСМом вероятность выигрыша первого игрока $p_1$ можно оценить как отношение площади заштрихованного участка к площади квадрата со стороной равной **60** сек, а вероятность выигрыша второго игрока $p_2$ соответственно, как отношение не заштрихованной части к общей площади квадрата. Запишем это в виде формул.

$$p_1 = \frac{2 \bullet 13 \bullet 47 + 13 \bullet 13}{60 \bullet 60} = 0{,}39 \ ; \ p_2 = \frac{47 \bullet 47}{60 \bullet 60} = 0{,}61 \qquad (118)$$

Полученные значения $p_1$ и $p_2$ свидетельствуют о том, что шансы на выигрыш у второго игрока выше.

Если допустить, что данная информация станет известна первому игроку, то он, очевидно, должен опротестовать предложенные правила игры как не справедливые. При этом для уравнивания шансов они могут каждый тур игры меняться местами, либо изменить продолжительность действия ставки от **13** секунд в большую сторону либо найти какое-либо иное решение.

Оставим для любопытных поиски справедливого решения и перейдем к аксиоматике, предложенной известным математиком А.Н. Колмогоровым. Однако предварительно необходимо оговорить некоторые условия, на основе которых устанавливается данная аксиоматика.

Введем множество $\Omega$, элементами которого будут исходы наблюдаемого или изучаемого процесса. Исходы, как отмечалось выше, формируют события, включающие в себя один или несколько исходов. Будем так же рассматривать множество $\mathcal{A}$ подмножеств исходов. При этом множество $\mathcal{A}$ называется алгеброй множеств, если выполняются следующие условия:

- множество $\Omega$ принадлежит множеству $\mathcal{A}$;
- пустое множество $\varnothing$ принадлежит множеству $\mathcal{A}$;
- если событие $\mathcal{A}$ принадлежит множеству $\mathcal{A}$, то событие, отрицающие

событие **A**, и, обозначаемое как $\bar{\mathbf{A}}$, тоже принадлежит множеству $\mathcal{A}$;

- если событие **A** и событие **B** принадлежат множеству $\mathcal{A}$, то сумма и произведение событий **A** и **B** также принадлежат множеству $\mathcal{A}$.

Размышляя над приведенными выше условиями, математики пришли к выводу, что это слишком широкие условия. Поэтому было предложено дополнительно еще одно, фактически заменяющее последнее условие из вышеуказанных:

- если некое событие $\mathbf{A_n}$, где **n=1, 2, 3,...**, принадлежит множеству $\mathcal{A}$, то сумма всех событий $\mathbf{A_n}$ и произведение всех событий $\mathbf{A_n}$ так же принадлежат множеству $\mathcal{A}$. При этом множество $\mathcal{A}$ принято обозначать через $\mathcal{F}$ и называть σ-алгеброй.

**Таблица 9**

| Обозначения | Интерпретация теории множеств | Интерпретация теории вероятностей |
|---|---|---|
| $\omega$ | элемент, точка | исход, элементарное событие |
| $\Omega$ | множество точек | пространство исходов, элементарных событий; достоверное событие |
| $\mathcal{F}$ | σ-алгебра подмножеств | σ-алгебра событий |
| $A$ $\mathcal{F}$ | множество точек | событие ( если ω A, то говорят, что наступило событие A) |
| $A = \Omega \setminus A$ | дополнение множества A, то есть множество точек ω, не входящих в A | событие, состоящее в не наступлении события A |
| $A \cup B$ | объединение множеств A и B, т.е. множество точек ω, входящих или в A или в B | событие, состоящее в том, что произошло либо в A либо в B |
| $A \cap B$(или AB) | пересечение множеств A и B, т.е. множество точек ω, входящих и в A и в B | событие, состоящее в том, что одновременно произошло и A и B |
| $\varnothing$ | пустое множество | невозможное событие |
| $A \cap B = \varnothing$ | множества A и B не пересекаются | события A и B несовместны (не могут наступать одновременно) |
| $A + B$ | сумма множеств, т.е. объединение непересекающихся множеств | событие, состоящее в том, что произошло одно из двух несовместных событий |
| $A \setminus B$ | разность множеств A и B, т.е. множество точек, входящих в A, но не входящих в B | событие, состоящее в том, что произошло A, но не произошло B |
| $A \Delta B$ | симметрическая разность множеств, т.е. множество (A\B) U (B\A) | событие, состоящее в том, что произошло одно из событий A или B, но не оба одновременно |

| Обозначения | Интерпретация теории множеств | Интерпретация теории вероятностей |
|---|---|---|
| $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ | объединение множеств $A_1, A_2, \dots$ | событие, состоящее в наступлении по крайней мере одного из событий $A_1, A_2, \dots$ |
| $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ | сумма, т.е. объединение попарно непересекающихся множеств $A_1, A_2, \dots$ | событие, состоящее в наступлении одного из несовместных событий $A_1, A_2, \dots$ |
| $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ | пересечение множеств $A_1, A_2, \dots$ | событие, состоящее в том, что одновременно произошли $A_1, A_2, \dots$ |
| $A_n \uparrow A$ (или $A = \lim\limits_{n} \uparrow A_n$) | возрастающая последовательность множеств $A_n$ сходящаяся, к $A$, т.е. $A_1 A_2 \dots$ и $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ | возрастающая последовательность событий, сходящихся к событию A |
| $A_n \downarrow A$ (или $A = \lim\limits_{n} \downarrow A_n$) | убывающая последовательность множеств $A_n$ сходящаяся, к $A$, т.е. $A_1 A_2 \dots$ и $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ | убывающая последовательность событий, сходящихся к событию A |
| $\overline{\lim\limits_{n}} A_n$ (или $\lim \sup A_n$, или $\{A_n$ б. ч.$\}$) | множество $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ | событие, состоящее в том что произойдет бесконечно много событий из $A_1, A_2, \dots$ |
| $\underline{\lim\limits_{n}} A_n$ (или $\lim \inf A_n$) | множество $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ | событие, состоящее в том, что произойдут все события $A_1, A_2, \dots$ за исключением, быть может, конечного числа |

Множество $\Omega$ вместе с $\sigma$-алгеброй его подмножеств $\mathcal{F}$ называют измеримым пространством и обозначают, как $(\Omega, \mathcal{F})$.

Демонстрируя преемственность математических построений, небезынтересно отметить то, как в теории вероятностей используются результаты теории множеств. Для этого обратимся к таблице 9, в которой установлено соответствие между понятиями (объектами) и действиями над ними в теории множеств и в теории вероятностей.

Теперь приведем известные аксиомы Колмогорова.

Аксиома 1. Каждому случайному событию $A_n$, где $n=1, 2, 3, \dots$, соответствуот неотрицательное число $p(A_n)$, называемое его вероятностью.

Аксиома 2. $p(\Omega) = 1$.

Аксиома 3. Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$, где $n=1,2,3,\ldots$, попарно несовместны, то $p(A_1+A_2+\ldots+A_n)=p(A_1)+p(A_2)+\ldots+p(A_n)$.

Предложенные аксиомы являются **непротиворечивыми**, но в тоже время **неполными**. Последнее обстоятельство не является недостатком теории, поскольку при одном и том же множестве $\Omega$ можно во множестве $\mathcal{F}$ устанавливать различные вероятности $p(A_n)$. Рассмотрим пример. Бросаются две игральные кости, имеющие по шесть поверхностей, то есть шесть исходов $A_1, A_2, \ldots, A_6$. Следовательно, в обоих случаях мы имеем одно и тоже множество $\Omega$. Однако у одной кости все поверхности одинаковые и можно считать, что $p(A_1)=p(A_2)=\ldots=p(A_6)$, тогда как у другой кости все поверхности разные и условие равенства вероятностей не справедливо. То есть мы имеем дело с другими значениями $p(A_1),p(A_2),\ldots,p(A_6)$. Таким образом, введенная аксиоматика дает возможность строить вероятностные модели для различных случаев, пример чего и был только что продемонстрирован.

Триаду символов $(\Omega, \mathcal{F}, p(A_n))$ принято называть вероятностным пространством и говорить, что с их помощью представлена вероятностная модель того или иного явления или процесса.

Исходя из предложенных аксиом, можно вывести ряд следствий, которые, несмотря на кажущуюся очевидность, играют важную роль в теории вероятностей, получившей за последнее время широкое применение на практике. Не вдаваясь в подробное обоснование и обсуждение результатов, укажем эти следствия.

- $p(\Omega) = p(\varnothing) + p(\Omega)$ и, следовательно, вероятность невозможного события $p(\varnothing)$ равна $0$.
- $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.
- $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$.
- $p(A+B) = p(A) + p(B) - p(AB)$.
- $p(A_1+A_2+\ldots+A_n) \leqslant p(A_1)+p(A_2)+\ldots+p(A_n)$.

Последние два соотношения относятся к случаям, когда события могут не быть попарно несовместными и более того наступление одного события может зависеть от наступления другого, то есть события являются зависимыми. Поясним это на примере. Допустим, бросается наугад монета. В случае выпадения решетки бросается кубик с шестью поверхностями, на которых отображены цифры от **1** до **6**, а в случае выпадения герба бросается такой же кубик, но на одной из его плоскостей вместо цифры **6** написана цифра **3**. Спрашивается, каковы вероятности $p(A_1),p(A_2),\ldots,p(A_6)$ после проведения бросания монеты и затем соответствующего кубика. Совершенно очевидно, что бросание кубика становится событием, зависящим от результатов бросания монеты. Поэтому в общем виде можно говорить о событии **B** (бросание кубика и выпадение некоторого количества очков), которое зависит от предыдущего и наступившего события **A** (бросание монеты и выпадении либо герба либо решетки). Иногда говорят в обратной последовательности о событии **A**, влекущем за собой наступление события **B**. При этом очевидно, что $p(A) \leqslant p(B)$.

В начале нашего разговора про теорию вероятностей мы уже говорили о детерминированности и случайности. Отмечалось, что при детерминированном процессе наступление последующего события **B** точно увязано с предыдущим **A**. В случайных явлениях столь жесткой связи нет, однако это не значит, что какая либо зависимость отсутствует. Поэтому в теории вероятностей разработаны специальные способы, оценивающие, сколь сильно происходящие события зависят друг от друга. Часто критерием независимости событий **A** и **B** является выполнение следующего равенства:

$$p(A \bullet B) = p(A) \bullet p(B). \qquad (119)$$

При этом в общем случае вероятность произведения двух событий **A** и **B** вычисляется, как произведение вероятности одного из этих событий на условную вероятность другого события при условии, что первое произошло. Кратко это выглядит следующим образом:

$$p(A \bullet B) = p(A) \bullet p(B|A) = p(B) \bullet p(A|B). \qquad (120)$$

Отметим очень важную формулу полной вероятности, которая позволяет рассчитывать вероятность наступления события **B** после наступления одного из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, где $n=1,2,3,\ldots$

$$p(B) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i) \bullet p(B|A_i). \qquad (121)$$

Столь же важна и часто употребима формула Байеса:

$$p(A_i|B) = \frac{p(A_i) \bullet p(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} p(A_j) \bullet p(B|A_j)}. \qquad (122)$$

«Дорогой Пи Е, - прервала повествование Тета Муза-Диф. - Вы так обстоятельно рассказываете нам о теории вероятностей, что через некоторое время мы сами вообразим себя математиками. Однако лично мне все становится более понятным в Вашей уважаемой науке, если это сопровождается какими-либо примерами из практики. Можно Вас попросить сделать это».

«С удовольствием, - согласился Пи Е Тет, - именно это я и собирался сделать.

Итак, математики договорились о количественном оценивании случайных явлений с помощью относительных величин (105), названных вероятностью событий. Затем мы убедились, что важно знать каковы эти события, зависят они друг от друга или нет, наступают ли они одновременно или последовательно и так далее и так далее. Кроме того, по-видимому, важно знать и другие характеристики случайных явлений. Для демонстрации этого, в соответствии с просьбой Музы, представим себе ситуацию, когда кому-либо из Вас, пожелавшему посетить казино, Ваши друзья сообщают о своих результатах игры у «одноруких бандитов».

Один друг сообщил, что играл **1000** раз, ставя каждый раз по одной таньге-маньге. При этом в **57** случаях он выиграл по **2** таньге-маньге, в **104** случаях по **4** таньге-маньге и в **5** случаях по **10** таньге-маньге. В остальных случаях из **1000** он не выигрывал ничего.

Другой друг сказал, что играл рядом, но на другом автомате, и играл он **1050** раз. При этом его результаты следующие: **102** раза он выиграл по **2** таньге-маньге; **38** раз по **4**; **18** раз по **6**; **3** раза по **10** и **1** раз взял малый суперприз - **100** таньге-маньге.

Выслушав столь подробные данные, Вы, естественно, озаботитесь тем, а как их использовать и выбрать более удачный автомат для игры. Однако сведений так много, что сориентироваться в такой ситуации будет не просто. Однако, привлекая ЗДРСМ, Вы решили подсчитать общий итог игры каждого из двух друзей. Итак, один потратил **1000** и «выиграл» **57x2+104x4+5x10=580** таньга-маньга. Другой потратил **1050** и «выиграл» **102x2+38x4+18x6+3x10+1x1-00=594** таньга-маньга. По этим данным получается, что второй игрок выиграл больше, но ведь и потратил он больше. Как же быть? И здесь нам на помощь приходит «всеобщий принцип относительности», который по согласованию с ЗДРСМом рекомендует вычислить отношение выигранных денег к затраченным. В первом случае имеем **580/1000=0,580**, а во втором **594/1050=0,566**. Полученные значения говорят о том, что при игре на первом автомате на каждую ставку в одну таньгу-маньгу выпадал выигрыш в **0,580** таньга-маньга, тогда как при игре на втором автомате этот показатель равнялся **0,566**. Значит, уж если играть, то лучше на первом автомате.

В терминах теории вероятностей данная задача решалась бы схожим образом, но с некоторыми отличиями. Для начала следовало бы сразу перейти к относительным единицам, вычислив вероятности выигрышей для первого игрока **p(2)=-57/1000=0,057; p(4)=104/1000=0,104, p(10)=5/1000=0,005** и вероятность проигрыша **p(0)=834/1000=0,834**, а также для второго **p(2)=102/1050=0,097;**

**p(4)=38/1050=0,036; p(6)=18/1050=0,017; p(10)=3/1050=0,003; p(100)= =1/1050=0,001** и **p(0)=888/1050=0,846**. Далее рекомендуется вычислить среднее значение выигрыша, называемое в теории вероятностей математическим ожиданием случайной величины $\xi$. В нашем примере значения случайной величины $\xi$ соответствуют размерам выигрыша, то есть **2, 4, 6, ...** таньга-маньга, что происходит соответственно с вероятностями **p(2), p(4), p(6),...** Математическое ожидание вычисляется по следующей формуле:

$$\mathbf{M}\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{x_n} \bullet \mathbf{p(x_n)}, \qquad (123)$$

где $\mathbf{x_n}$ значение случайной величины, а $\mathbf{p(x_n)}$ соответственно ее вероятность.

Воспользовавшись формулой (123), вычислим математическое ожидание для двух игроков. В первом случае **M**$\xi$**=2x0,057+4x0,104+10x0,005=0,580**. Во втором случае имеем **M**$\xi$**=2x0,097+4x0,036+6x0,017+10x0,003+100x0, 001=0,570** Сравнивая полученные результаты с тем, что было сделано ранее, убеждаемся в их совпадении, что свидетельствует о «практичности» теории вероятностей.

Итак, наши вычисления показали, что из двух автоматов предпочтительней выбрать первый. Однако когда Вы уже приняли это решение, к Вам подошел еще один знакомый, который с интересом наблюдал за проводимыми расчетами и сказал: «А на сколько Вы уверены в том, что **1000** и **1050** испытаний достаточны, чтобы делать окончательные выводы. Ведь в соответствии с формулой (105) для вычисления вероятности следует провести бесконечное количество испытаний. Кроме того, Вы забыли о формулах (114-116), которые могли бы помочь Вам в этой оценке».

Ну что же, замечания знакомого абсолютно справедливы. Более того, может оказаться так, что принятое до этого решение будет изменено под влиянием дополнительных сведений, которые можно извлечь, анализируя полученные значения вероятностей. Одной из таких характеристик, оценивающих устойчивость вычисленных средних значений, является дисперсия (**D**$\xi$), определяемая по формуле:

$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}\{(\xi - \mathbf{M}\xi)^2\} = \mathbf{M}(\xi^2) - \mathbf{M}^2\xi = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{x_n} - \mathbf{M}\xi)^2 \bullet \mathbf{p(x_n)}. \qquad (124)$$

Данное выражение является отклонением от среднего значения, возведенное в квадрат. Поэтому часто используют понятие отклонения ($\sigma$), вычисляемое, как $\sigma^2 = \mathbf{D}\xi$.

Проведем вычисление **(σ)** для рассматриваемого выше примера. В первом случае, используя формулу (1.124) имеем $\sigma^2$ = **(2-0,58)²x0,057 + (4-0,58)²x0,104 + (10-0,58)²x0,005 +(0-0,58)²x0,834 = 2,056**. Во втором соответственно $\sigma^2$ = **(2-0,57)²x0,097 + (4-0,57)²x0,036 + (6-0,57)²x0,017 +(10-0,57)²x0,003 + (100-0,57)²x0,001 + (0-0,57)²x0,846 = 11,250**. Или соответственно для первого случая **σ=1,434**, а для второго **-σ=3,354**. Эти данные указывают на большее уклонение от среднего значения во втором случае, что позволяет рассчитывать на большие выигрыши, однако в среднем выигрыш оказался больше в первом случае. Таким образом, разрешившиеся было сомнения, за каким автоматом играть вновь возродились. Теперь уже придется всерьез озаботиться анализом достаточности выборки, то есть достаточности проведенных испытаний, что бы можно было делать обоснованные выводы. При этом целесообразно сравнить данные для двух автоматов и выяснить, являются ли они различимы или это случайные выборки одного и того же случайного процесса. Теория вероятностей предлагает для решения данного вопроса ряд методик, о чем следует упомянуть. Однако из-за боязни наскучить Музе-Диф дальнейшее выяснение этого оставим до иных времен, когда возникнет в этом необходимость. Сейчас же зафиксируем лишь факт того, что подобные задачи должны рассматриваться и при этом математики уже знают, как это делать.

Современная теория вероятностей, с одной стороны, пытается и не безуспешно построить аналитические модели, отражающие часто встречающиеся явления, а с другой стороны, развивается, как некая абстрактная наука, в которой что-то происходит в соответствии с введенными правилами. При этом здесь нет ничего удивительного, поскольку, как это отмечалось в начале нашего разговора про математику, всякие новые действия ведут к порождению новых объектов, что на самом деле не всегда заметно в начале пути. Однако в конечном итоге найденные новые сведения лишь укрепляют здание **МИР**а, связывая воедино, казалось бы, разрозненные факты и события. Учитывая пожелания Музы-Диф, мы не станем погружаться в океан математических абстракций, а рассмотрим наиболее наглядные модели теории вероятностей, однако указывая на пути обобщения получаемых результатов.

Уже отмечалось, что одной из наиболее часто используемых моделей, является модель, в которой случайные события происходят с равной вероятностью. Например, бросание монеты или бросание игральной кости. Конечно, всегда можно заметить, что в реальной монете, как и в реальной игральной кости есть определенная ассиметрия, что может нарушить равновероятное наступление событий. Однако, как при начальных теоретических рассуждениях, так и на практике, зачастую этим пренебрегают, согласовывая данное решение с ЗДРСМом.

Итак, рассмотрим бросание монеты, полагая, что вероятность выпадений герба **(p)** равна вероятности выпадения решетки **(q)**. Внесем еще одно добавление, что результат каждого бросания монеты не зависит от результатов предыдущих бросаний. В результате мы получим процесс, который в теории вероятностей называют последовательностью независимых испытаний.

Совершенно очевидно, что поскольку **$p + q = 1$**, то **$p = q = 0,5$**. Можно также отметить, что вероятности выпадения различных сочетаний гербов и решеток одинаковые. Например, вероятность того, что при трехкратном бросании выпадет три раза герб, точно такая же, как вероятность того, что два первых раза выпадет герб, а затем, на третий раз решетка. В первом случае, в силу независимости событий имеем **$p(Г,Г,Г) = ppp = 0,125$**. Во втором случае - **$p(Г,Г,Р) = ppq = 0,125$**. Однако если мы несколько иначе сформулируем вопрос, а именно, какова вероятность выпадения трех гербов при трех бросаниях и какова вероятность выпадения двух гербов и одной решетки при трех бросаниях без указания последовательности их выпадения, то вероятности этих событий не будут равными, поскольку в первом случае вероятность останется той же, а во втором следует учесть вероятности **$p(Г,Р,Г) = pqp = 0,125$**; **$p(Р,Г,Г) = qpp = 0,125$**. Таким образом, вероятность выпадения двух гербов и одной решетки в три раза выше, нежели вероятность выпадения трех гербов при трех бросаниях. В общем случае вероятность выпадения **$k$** гербов и **$m$** решеток при **$n=k+m$** бросаниях равна:

$$p_n(k,m) = C^k_{k+m} \cdot p^k \cdot q^m = C^k_n \cdot p^k \cdot q^{n-k}. \qquad (125)$$

Данное выражение именуется формулой Бернулли, **а $p_n(k,m)$** называется **биномиальным законом распределения вероятностей**.

Завершим бросание монеты и займемся бросанием игральной кости. Принципиальным отличием в данном случае будет то, что количество исходов возрастет от двух до шести. При этом мы, естественно, сохраняем последовательность независимых испытаний. В общем же случае можно говорить, что в последовательности независимых испытаний мы можем иметь **$k$** независимых исходов **$A_1, A_2, \ldots, A_k$** с вероятностями **$p_1, p_2, \ldots, p_k$**. Тогда вероятность того, что за **$n = m_1 + m_2 + \ldots + m_k$** испытаний событие **$A_1$** появится ровно **$m_1$** раз, событие **$A_2$** - ровно **$m_2$** раза и так далее, а событие **$A_k$** - ровно **$m_k$** раз, равна:

$$p_n(m_1, m_2, \ldots, m_k) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \ldots \cdot m_k!} \cdot p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{m_k}. \qquad (126)$$

Данная вероятность называется **полиномиальным распределением**.

Можно применить (126) для случая, когда, например, при бросании игральной кости два раза выпала единица, один раз двойка, три раза тройка, один раз четверка, один раз пятерка и четыре раза шестерка. Имеем $n = 2 + 1 + 3 + 1 + 1 + 4 = 12$ и соответственно:

$$P_{12}(2,1,3,1,1,4) = \frac{12!}{2!\bullet 1!\bullet 3!\bullet 1!\bullet 1!\bullet 4!}(1/6)^2\bullet(1/6)^1\bullet(1/6)^3\bullet(1/6)^1\bullet(1/6)^1\bullet$$
$$\bullet(1/6)^4=0{,}000764.$$

В данном примере мы не учитывали порядка выпадения комбинации, а говорили лишь о количестве очков, равном **46** при **12** бросаниях игральной кости. Если же зафиксировать порядок выпадения очков, то вероятность такой комбинации будет очень мала и равна **1/6**, возведенной в **12** степень, то есть **0,00000000459!**

Немаловажно отметить значительную роль еще одного раздела математики, а именно, комбинаторики при построении вероятностных моделей.

Для демонстрации этого рассмотрим еще одну, как просила Муза, практическую ситуацию. Допустим, мы решили поиграть в кости по следующим правилам. Поочередно бросается три игральные кости, а затем суммируется результат выпадения очков. Спрашивается, выпадение какой суммы очков наиболее вероятно? Минимальное количество очков очевидно **3**, а максимальное **18**. Но далее, сразу не скажешь. Однако, применяя комбинаторные методы, можно рассчитать, что всего может быть **216** комбинаций и при этом сумма в **3** или **18** очков достигается единственными комбинациями. Сумма в **4** или **17** очков - тремя комбинациями, **5** или **16** - **6**-тью, **6** или **15** - **10**-тью, **7** или **14** - **15**-тью, **8** или **13** - **21**-ой, **9** или **12** - **25**-тью, и, наконец, **10** или **11** очков достигаются **27**-мью различными комбинациями. Теперь уже не сложно сделать правильный выбор и если нужно рассчитать вероятности соответствующих событий.

Но, однако, оставим игральные кости и постараемся сделать некие общие выводы. Итак, в теории вероятностей существует ряд моделей, которые с успехом могут применяться в самых различных областях человеческой деятельности, если происходящие события укладываются в определенные конструкции. Уважаемый Бит Байтович, я думаю, подтвердит, сколь широко в теории связи используется модель бросания монеты, да и другие рассмотренные выше игры. Поэтому то, что сейчас демонстрировалось на, казалось бы, простых примерах, на самом деле имеет весьма широкое применение.

Дальнейшее обобщение последовательности независимых испытаний было предложено известным русским математиком А.А. Марковым. Предложенная им модель получила название цепей Маркова и состоит в следующем. Рассматриваются несовместные события $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Устанавливаются (определяются) вероятности перехода из любого **i**-ого состояния, соответствующего событию $A_i$, в любое **j**-ое состояние, соответствующее любому событию

$A_j$ ($i$ и $j$ - целые величины, изменяющиеся от 1 до $k$). При этом полагается, что данные вероятности всегда остаются неизменными. В результате имеем простую, односвязную цепь Маркова, в которой переход из состояния $A_i$ в $A_j$ всегда осуществляется с вероятностью $p_{ij}$ и не зависит от предыстории, то есть от того какие до этого были состояния и в какой последовательности.

Рассмотренные выше примеры бросания монеты или игральной кости можно легко вписать в предложенную марковскую цепь. Для этого воспользуемся очень удобной матричной формой представления цепи Маркова, задаваемой матрицей переходных вероятностей $P$, состоящей из вероятностей $p_{ij}$.

$$P = \begin{array}{c|cccc|} & A_1 & A_2 & \dots & A_k \\ A_1 & p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1k} \\ A_2 & p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_k & p_{k1} & p_{k2} & \dots & p_{kk} \end{array} \qquad (127)$$

Используя (127), вероятностные модели бросания симметричной монеты и соответственно игральной кости можно записать с помощью следующих матриц переходных вероятностей.

$$P_{монета} = \begin{array}{c|cc|} & A_{герб} & A_{реш.} \\ A_{герб} & 0{,}5 & 0{,}5 \\ A_{реш.} & 0{,}5 & 0{,}5 \end{array},$$

$$P_{иг.кости} = \begin{array}{c|cccc|} & A_1 & A_2 & \dots & A_6 \\ A_1 & 1/6 & 1/6 & \dots & 1/6 \\ A_2 & 1/6 & 1/6 & \dots & 1/6 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_6 & 1/6 & 1/6 & \dots & 1/6 \end{array}.$$

В общем случае, конечно, матрицы переходных вероятностей не состоят из одинаковых чисел, однако всегда сумма вероятностей в каждой строке матрицы равна единице, что следует из условия полноты системы событий $A_1, A_2, \dots, A_k$.

В матричной форме можно компактно записать с какой вероятностью мы будем наблюдать то или иное событие $A_j$ после бесконечного числа испытаний. Эти вероятности принято называть финальными вероятностями $p_j$ и вычислять по формуле:

$$p_j = \lim_{n\to\infty} P^n = p_j \cdot P, \qquad (128)$$

при условии, что $\sum p_j = 1$.

Если вернуться к рассмотренному ранее примеру наблюдения за событиями, «появляющимися» из черного ящика, когда мы не знаем о процессе, происходящем в нем, то данные наблюдения как раз и позволяют определить финальные вероятности, если, конечно, выполнены требования о достаточном количестве наблюдаемых исходов.

Весьма наглядной характеристикой случайного процесса является его отображение в виде распределения вероятностей. Для случая счетного количества состояний распределение вероятностей представляет собой таблицу, в которой указаны состояния и соответствующие им вероятности. Для наглядности, при этом не уменьшая общности рассуждений, приведем таблицу 10, в которой укажем взятое наугад распределение вероятностей $p_1, p_2, \ldots, p_6$ выпадения соответствующего количества очков событий $A_1, A_2, \ldots, A_6$ у «неправильной» игральной кости, имеющей несимметричные грани. Заметим, что в качестве событий могут выступать не только количественно измеренные явления. Например, события $A_1, A_2, \ldots, A_6$ могут соответствовать различным цветам: красному, оранжевому, желтому, зеленому и так далее. Поэтому последовательность упорядоченного расположения $A_1, A_2, \ldots, A_6$ в таблице является прерогативой ЗДРСМа.

Таблица 10

| $A_1, A_2, \ldots, A_6$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1, A_2, \ldots, A_6$ | красный | оранжевый | желтый | зеленый | голубой | синий |
| $p_1, p_2, \ldots, p_6$ | 0,05 | 0,25 | 0,05 | 0,50 | 0,05 | 0,10 |

Для определенной наглядности распределения вероятностей изображают в графическом виде, откладывая по оси абсцисс события, упорядоченные в соответствии с решением ЗДРСМа, а по оси ординат значения вероятностей. В качестве примера на рис.1.32 приведены распределения вероятностей, взятых из таблицы 10, но по разному упорядоченных.

В одном случае мы упорядочили количество выпадающих очков по следующему правилу: в начале возрастающие нечетные числа $A_1, A_3, A_5$, а затем возрастающие четные числа $A_2, A_4, A_6$. В результате по оси абсцисс получили последовательность $A_1, A_3, A_5, A_2, A_4, A_6$ и по оси ординат соответствующие значения вероятностей.

В другом случае по оси абсцисс откладывались соответствующие цветам $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ так, как это указано в таблице 10.

Сравнивая распределения, изображенные на рис. 32, замечаем их существенно различный вид, что подчеркивает, во-первых, значение ЗДРСМа, а во-вторых, еще раз говорит об относительности тех конструкций, которые мы используем или строим для прогностического описания различных явлений.

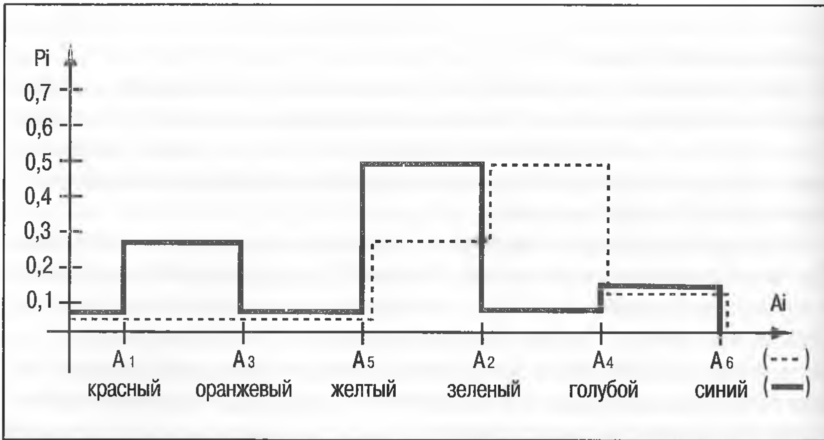


**Рис. 32.**

Данное обстоятельство, зачастую ускользает от внимания исследователей. В то время как удачная структуризация событий, в частности задание метрики, может позволить найти наглядную и аналитически «красивую» форму записи. Более того, может оказаться, что на первый взгляд случайный процесс таковым не является, а состоит из своеобразной «суммы» детерминированных явлений. Подобное открытие может оказаться весьма полезным и перспективным, как в теоретическом, так и в практическом плане.

В теории вероятностей распределение вероятностей принято обозначать через **p(x)** и полагать функцией от **x**, соответствующей событиям $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$, $A_6$. Весьма удобно, с точки зрения «количественной» математики, чтобы величина **x** принимала численные значения, что облегчает аналитические преобразования, хотя, как уже отмечалось, это не является обязательным.

Помимо распределения вероятностей в математике используется понятие функции распределения вероятностей, определяемой по формуле:

$$F(x) = p\{-\infty, x\}. \qquad (129)$$

Функция распределения вероятностей (не путать ни текстуально, ни каким иным образом с распределением вероятностей) графически отображается в виде ступенчато нарастающей кривой и имеет широкое применение в математических конструкциях. Для примера на рис. 33 представлены функции распределения вероятностей для случаев, показанных на рис. 32.

Как мы уже отмечали, случайная величина может принимать значения из континуального множества (вспоминаем пример, изображенный на рис. 31). Тогда распределение вероятностей **p(x)** называют плотность распределения

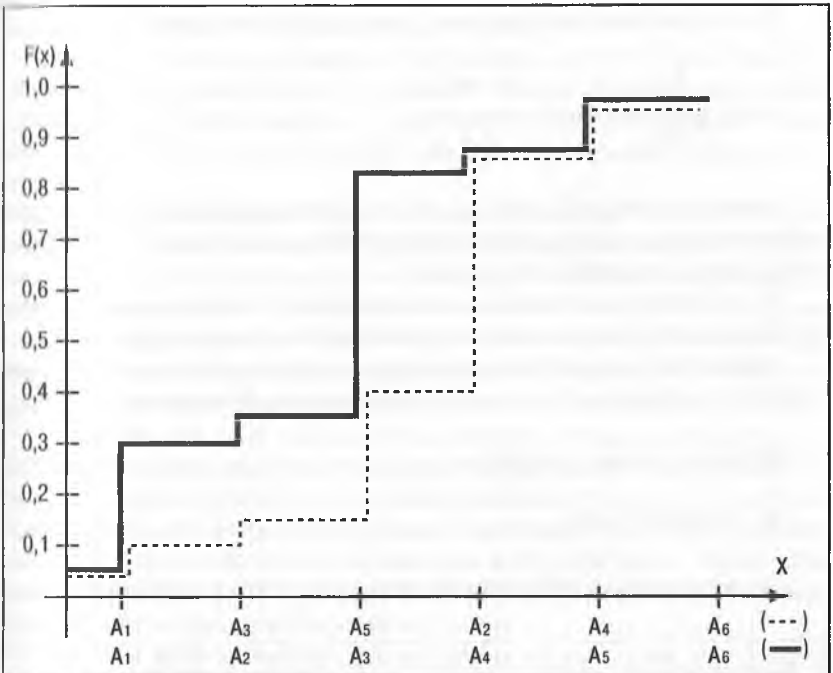



**Рис. 33.**

вероятностей, а функция распределения плотности вероятностей определяется по формуле:

$$\mathbf{F(x)} = \int_{-\infty}^{x} \mathbf{p(z)\,dz}. \tag{130}$$

Благодаря всеобщему закону об «ограниченной плотности», открытом Музой-Диф, а также данным в теории вероятности определениям имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{p(x)\,dx = 1}, \tag{131}$$

при этом формы распределения **p(x)** могут быть совершенно различные. Это и равномерное распределение, когда на отрезке **x = [a,b]** величина

$$\mathbf{p(x) = 1/(b\text{-}a)}. \tag{132}$$

Это и нормальное распределение, когда при **x = (-∞,∞)** имеем:

$$\mathbf{p(x)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\}, \quad (133)$$

причем при **x=a** функция **p(x)** достигает своего максимума, а в точках **x=a±σ** имеет перегибы, стремясь асимптотически к **0** при x→ ±∞ (рис. 34, когда **a=0** и σ=**0,5** - ряд **1**, σ=**1** - ряд **2**, σ=**2** - ряд **3**).

Это и множество других видов распределений, использование которых в тех или иных случаях обосновывается их адекватностью изучаемым явлениям.

По аналогии с тем, как были определены математическое ожидание и дисперсия для дискретных случайных величин, в данном случае имеем:

$$M\xi = \int x \cdot p(x)\,dx = \int x\,d\,F(x). \quad (134)$$

$$D\xi = \int (x - M\xi)^2\,d\,F(x). \quad (135)$$

После несложных преобразований можно установить, что для равномерного

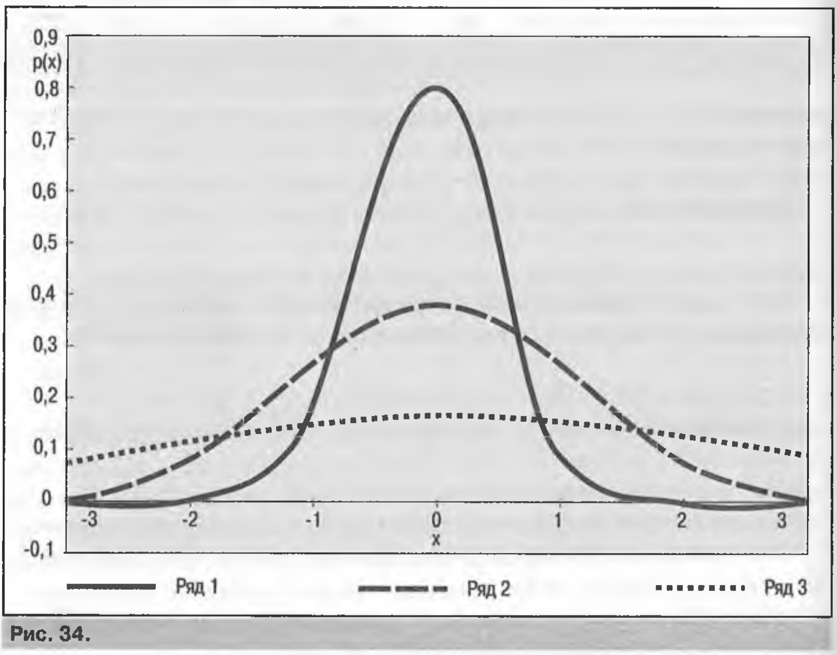



**Рис. 34.**

распределения **M**$\xi$**=(a+b)/2**, а дисперсия **D**$\xi$**=(b-a)²/12**.

Для нормального распределения имеем **M**$\xi$**=a** и **D**$\xi$=$\sigma^2$. Таким образом, параметры распределения **a** и $\sigma$, показанного на рис. 34, имеют совершенно ясный смысл среднего значения и среднеквадратичного отклонения случайного процесса, для которого нормальный закон представляется адекватным описанием.

Довольно часто, изучая то или иное явление, возникает вопрос о том, как «развивается» во времени или в пространстве наблюдаемый процесс. Физики, например, а госпожа Вселенская это подтвердит, наблюдают за движением мелких частиц, скажем, молекул, которые хаотически сталкиваются с другими молекулами и двигаются по сложной траектории. Таким образом, местоположение частицы в каждый момент времени оказывается случайным, а траектория ее движения становится некой реализацией случайного процесса.

Приведем еще один пример. Наш дорогой Зонгаид вместе с Битом Байтовичем решили поиграть в лото, покупая при каждом розыгрыше за **10** таньга по одной игральной карточке. Проследим за их успехами в этой игре, где результатом будет алгебраическая сумма затраченных и выигранных средств, если по условиям игры возможны выигрыши в **20** и **100** таньга. Совершенно очевидно, что траектории двух игроков очень скоро разойдутся (на рис. 35 изображены выдуманные результаты наших игроков).

При этом среди возможных траекторий будут две крайние, когда всегда осуществляется выигрыш и когда всегда осуществляется проигрыш. Других

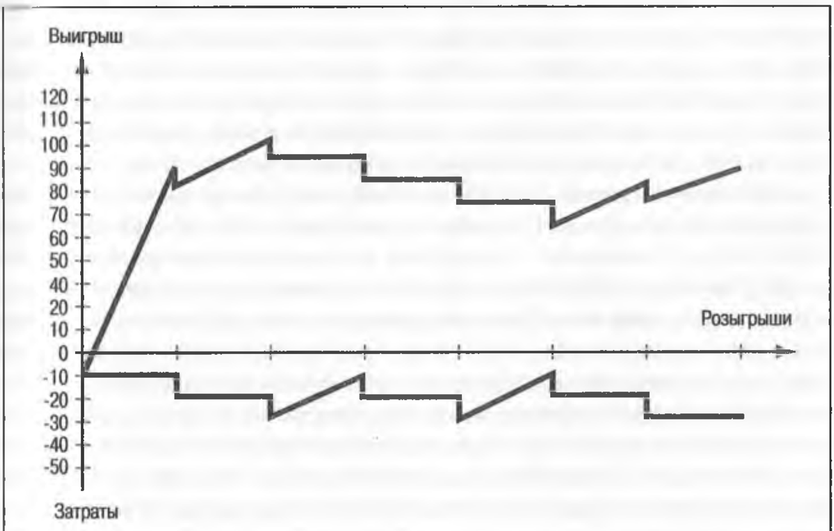



**Рис. 35.**

траекторий, когда выигрыши чередуются с проигрышами, будет существенно больше. Причем в зависимости от вероятностей выигрышей и соответственно проигрыша будут формироваться наиболее вероятные траектории.

Рассмотренные примеры представляют случайные процессы, которые принято называть стохастическими процессами. Их теоретическое исследование и обобщения оказываются чрезвычайно полезными в современной теории телекоммуникаций и, особенно, в сочетании с информационными системами, о чем, я полагаю, нам расскажет уважаемый Бит Байтович.

А сейчас позвольте обратить Ваше внимание на некоторые эмоциональные заблуждения, которые встречаются в мире реальном. Обратимся снова к игре в лото, когда требуется из **36** цифр угадать **5**. Все выше сказанное позволяет ЗДРСМу сделать вывод о том, что любая комбинация из пяти цифр имеет равные шансы на выигрыш, если розыгрыш осуществляется при условии равновероятного выпадения любого числа. Однако если выигрышной комбинацией окажется последовательность цифр **1,2,3,4,5**, то это будет воспринято, как нечто из ряда вон выходящее, в то время как выпадение комбинации **9,13,24,27,32** такого удивления не вызовет. Объяснение кроется в особенности восприятия комбинаций. Первая - содержит в себе ярко выраженные признаки порядка и она уникальна поэтому, тогда как другая лишена этой особенности и заметим, что таких комбинаций значительно больше. Если более внимательно взглянуть на это то можно отметить, что чаще выигрывают комбинации, у которых количество четных или нечетных чисел отличается на единицу, поскольку таких комбинаций больше по сравнению с комбинациями, состоящими только из четных или нечетных чисел. Примеры таких классификаций по определенным признакам можно продолжить и дальше, что иногда создает иллюзию обнаружения неких наиболее вероятных комбинаций, что неверно. Верным же может являться то, что вероятнее выиграет комбинация, принадлежащая тому классу комбинаций, в котором просто больше комбинаций данного класса.

Еще одно наблюдение. Предположим Некто, не будем уточнять кто, выиграл в лотерею **10** тысяч таньга. Спрашивается, уменьшится или увеличится от этого вероятность его выигрыша в последствии, если он продолжит заниматься эти делом? Полагаю, что ЗДРСМ ответит, что это независимые события и поэтому вероятность не изменится. Однако эмоционально это кажется не так. И в этом есть доля истины, поскольку вероятность траектории, когда Некто выигрывает дважды существенно ниже вероятности, когда Некто выигрывает только один раз. Да, вероятность выигрыша, как впрочем, и вероятность проигрыша не меняются, однако вероятность того, что данный конкретный Некто «идет» по траектории, содержащей два выигрыша, существенно меньше. Конечно, точный ответ можно дать, только проведя конкретные расчеты. Убедимся в этом на примере, когда с вероятностью **p** Некто выигрывает **20** таньга, а с вероятностью **q=1-p** этот же Некто проигрывает **10** таньга. Игра состоит из пяти независимых туров.

Укажем в таблице 11 два возможных случая значений вероятностей выигрыша и соответственно проигрыша и, воспользовавшись формулой (125), рассчитаем вероятности того, что в игре не выпадет ни одного выигрыша - **p(0)**, выпадет ровно один выигрыш - **p(1)**, два выигрыша - **p(2)**, три - **p(3)**, четыре - **p(4)** и наконец пять выигрышей подряд - **p(5)**.

**Таблица 11**

| | p(0) | p(1) | p(2) | p(3) | p(4) | p(5) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| p=0,1;q=0,9 | 0,5905 | 0,3281 | 0,0729 | 0,0081 | 0,0004 | 0,00001 |
| p=0,3;q=0,8 | 0,1681 | 0,3601 | 0,3087 | 0,1323 | 0,0284 | 0,0024 |

Анализируя полученные результат, несложно заметить, что во втором случае, хотя каждый раз вероятность выигрыша меньше вероятности проигрыша, тем не менее, выиграть в серии из пяти игр один или даже два раза более вероятно, чем не выиграть ни разу, другими словами это более вероятные траектории. В первом же случае все очень тоскливо. И вероятность проигрыша всегда больше и в серии тоже мало шансов выиграть хотя бы один раз, поскольку сумма вероятностей возможных выигрышей все равно меньше вероятности проигрыша все пять раз.

По формуле (123) можно выяснить средний размер результата игры. Для первого случая имеем, что в среднем проигрыш составит **35,01** таньга. Во втором случае опять проигрыш, но уже всего **5** таньга! Хотя, что значит всего **5** таньга не ясно, так как мы не проверяли этот результат на всеобщий принцип относительности.

Для организаторов такой игры, которые, как выясняется, в среднем будут всегда в выигрыше, полученные результаты очень важны. Настраивая игральный автомат по первому соотношению, они, хотя и имеют возможность сразу выиграть больше, однако скорее всего распугают клиентов, которые постоянно проигрывают и не испытывают азарта от выигрыша. Другое дело второй вариант. В нем более вероятны траектории, когда Некто выигрывает хотя бы один раз. Это создает иллюзию успеха, хотя в среднем теория вероятностей предсказывает все равно проигрыш.

Однако играйте и выигрывайте, вопреки теории вероятностей, потому, что мир без риска, без эмоций - это не мир реальный, в котором вопреки логике происходят такие удивительные вещи, когда ясно, что проиграешь, а все равно играешь. Следовательно, **МИР** или его модель должны найти адекватное этому описание. В противном случае это будет другой мир, несовпадающий с **МИР**ом, причем масштабы этого несовпадения слабо прогнозируемы. Более того, можно вообще поставить под сомнение способности «разумных» существ этого нового мира познавать что-либо вне рамок известных им аксиом и вытекающих из них заключений. Ибо наиболее важные открытия, как правило, не являлись следствием из предыдущих теорий, а как раз наоборот разрушали их и вводили новые постулаты, отменяющие старые. Однако здесь опять, по-видимому, без Музы-Диф не разобраться. А посему я умолкаю.

Хотя, в качестве последнего слова, позвольте упомянуть о так называемой теореме Геделя о неполноте формальных систем. Суть ее заключена в том, что в любой непротиворечивой логической теории (формальном языке, множестве аксиом и правил) всегда можно сформулировать истинное предложение, которое **недоказуемо** в рамках только этой теории, то есть с использованием только тех аксиом и правил, которые являются ее основой. Эта теорема раскрывает бесконечные просторы в попытках построить общую и полную теорию, способную все описать и все объяснить. При этом особое значение приобретают понятия, про которые в известной сказке говорилось «поди туда, не знаю куда и принеси то, не знаю что». Поэтому повторяю еще раз: «Без Музы-Диф нам не обойтись!».

Последние слова Пи Е привели всех в некоторое замешательство, поскольку никто не ожидал, что уважаемый математик, вдруг закончит свое повествование таким нестрогим, да и вообще мало понятным изречением, как «поди туда, не знаю куда и принеси то, не знаю что». Но видимо, также как в реальном мире «уживаются» порядок и хаос, так и в теоретических построениях должно быть место для «строгих» теорий, построенных на аксиомах и четких правилах, а также для «нестрогих» теорий, допускающих «размытость» утверждений, понятий и действий. Кстати язык, на котором мы ведем наше повествование, прекрасный пример этого. Любое слово, взятое из только что приведенного предложения, может быть «атаковано» вопросами, а что оно собственно означает в данном контексте. Что значит строго или нестрого? Что суть теория, понятия и действие? И так далее и тому подобное. Мы уже говорили об этом в самом начале нашей встречи с персонажами **МИР**а и, помнится, решили, что главным судьей и вершителем всех решений будет ЗДРСМ. Поэтому и сейчас, возлагая всю ответственность и надежду на него, продолжим обсуждение.

## 11. Варианты ответов Великих Поэтов на вопросы 1 и особенности стиховыражения

«Да-а, - прервала всеобщее молчание Муза-Диф, - в непростую ситуацию мы, однако, попали. Математик просит помощи у тех, кто сам страшится математики, в ней не разбирается и поэтому иногда ее очень не любит, но всегда уважает. Хотя, наверно, так и должно быть. Не случайно изречение древних мудрецов о том, что «я знаю, что я ничего не знаю», подчеркивает постоянное возвращение к истокам, постоянное обновление исходных позиций, постоянное переосмысливание того, что казалось абсолютно истинным и непоколебимым. Если исключить из этого процесса свойственную ЗДРСМу способность иррационального мышления и отхода от логических построений, то совершенно очевиден тупик познания, поскольку все, что не будет соответствовать некой исходной аксиоматике, не будет восприниматься вообще, то есть, как говорил Пи Е, по определению. Таким образом, **МИР**, как среди чисел (о чем нам рассказывал Тет), так и среди других своих проявлений, выражающихся в существующих объектах и каких-либо действий над ними должен содержать элемент иррациональности. Что это такое, сказать сложно, однако, отталкиваясь от противного, можно отметить, что это все то, что не является рациональным. Рациональное же это то, что вписывается в установленные правила и определения. При этом прошу заметить, что данные рассуждения вполне рациональны и в тоже время иррациональны, поскольку иррациональное я пытаюсь ввести через определение, которое по нашей договоренности является рациональным.

В общем все! Сейчас запутаюсь окончательно, и поэтому идем туда, не знаю куда, для поиска того, не знаю чего!

Конечно, только ЗДРСМ может навести здесь хоть какой-то порядок и остановить кружение слов и мыслей. Но в качестве примера того, как иррациональное уживается и сосуществует с рациональным, рассмотрим размышления, изложенные в форме стихов. Почему вообще стихи существуют и вызывают такой интерес - это особый разговор, который потребует очень много времени и, видимо, поэтому не стоит его и начинать. Отметим лишь, что, конечно, не только рифмованность сама по себе вызывает интерес и удивление, но и то, что благодаря этой форме, совершенно неожиданно, открываются новые фантастические образы, до этого недоступные и даже более скрытые до этого за «забором» правильно построенных рациональных фраз.

Стихи - отраженье личности. Одним нравится одно, другим другое. Но для примера я предлагаю всем нам вспомнить и прочитать некоторые из них, отвечающие в той или иной степени на обсуждаемые нами вопросы: «Кто мы, какие мы? Где мы живем, какой мир нас окружает? Что мы переживаем и как мы познаем и воспринимаем окружающих нас людей и среду?»...

При этом предлагаю не называть имен авторов стихов, дабы во главе всего поставить тот смысл, который они содержат».

«Мы согласны, - при общем одобрении сказал Бит Байтович, - однако я предлагаю ограничить круг цитируемых поэтов, имена которых мы все же назовем, но в закодированной форме, а именно: F/F[vfnjdf? F/<kjr? C/Tctyby? V/Wdtnftdf? F/Geirby? A/N.nxtd и другие».

«Прекрасно, мистер Файлтон, - воскликнул Профилактян. - Вы задали нам «высокую планку». Ну что же извольте:

**В кабаках, в переулках, в извивах,**
**В электрическом сне наяву**
**Я искал бесконечно красивых**
**И бессмертно влюбленных в молву.**

**Были улицы пьяны от криков,**
**Были солнца в сверканьи витрин.**
**Красота этих женственных ликов!**
**Эти гордые взоры мужчин!**

**Это были цари - не скитальцы!**
**Я спросил старика у стены:**
**«Ты украсил их тонкие пальцы**
**Жемчугами несметной цены?**

**Ты им дал разноцветные шубки?**
**Ты зажег их снопами лучей?**
**Ты раскрасил пунцовые губки,**
**Синеватые дуги бровей?»**

**Но старик ничего не ответил,**
**Отходя за толпою мечтать.**
**Я остался, таинственно светел,**
**Эту музыку блеска впивать...**

**А они проходили все мимо,**
**Смутно каждая в сердце тая,**
**Чтоб навеки, ни с кем несравнимой,**
**Отлететь в голубые края.**
**И мелькала за парою пара...**

**Ждал я светлого ангела к нам,**
**Чтобы здесь, в ликованьи тротуара,**
**Он одну приобщил к небесам...**

**А вверху - на уступе опасном -**
**Тихо съежившись, карлик приник,**
**И казался нам знаменем красным**
**Распластавшийся в небе язык. (2)**

Или вот еще, но несколько иначе:

**Еще шумел веселый день,**
**Толпами улица блистала,**
**И облаков вечерних тень**
**По светлым кровлям пролетала.**

**И доносилися порой**
**Все звуки жизни благодатной -**
**И все в один сливались строй,**
**Стозвучный, шумный и невнятный.**

**Весенней негой утомлен,**
**Я впал в невольное забвенье;**
**Не знаю, долог ли был сон,**
**Но странным было пробужденье...**

**Затих повсюду шум и гам,**
**И воцарилося молчанье -**
**Ходили тени по стенам**
**И полусонное мерцанье...**

**Украдкою в мое окно**
**Глядело бледное светило,**
**И мне казалось, что оно**
**Мою дремоту сторожило.**

**И мне казалось, что меня**
**Какой-то миротворный гений**
**Из пышно-золотого дня**
**Увлек, незримый, в царство теней. (6)**



11 з. 192

А еще можно и вот так:

**Звенела музыка в саду**
**Таким невыразимым горем.**
**Свежо и остро пахли морем**
**На блюде устрицы во льду.**

**Он мне сказал: «Я верный друг!»**
**И моего коснулся платья.**
**Как не похожи на объятья**
**Прикосновенья этих рук.**

**Так гладят кошек или птиц,**
**Так на наездниц смотрят стройных...**
**Лишь смех в глазах его спокойных**
**Под легким золотом ресниц.**

**А скорбных скрипок голоса**
**Поют за стелющимся дымом:**
**«Благослови же небеса -**
**Ты первый раз одна с любимым». (1)**

Зонгаид остановился, чтобы, как говорится, перевести дух, но остальные жители **МИР**а, воспользовавшись этой паузой, тоже приступили к поэтическому чтению. И вот, что получилось в итоге.

**Есть некий час, в ночи, всемирного молчания,**
**И в оный час явлений и чудес**
**Живая колесница мирозданья**
**Открыто катится в святилище небес.**
**Тогда густеет ночь, как хаос на водах,**
**Беспамятство, как Атлас, давит сушу;**
**Лишь Музы девственную душу**
**В пророческих тревожат боги снах! (6)**

**--------**

**Задремали звезды золотые,**
**Задрожало зеркало затона,**
**Брезжит свет на заводи речные**
**И румянит сетку небосклона.**

Улыбнулись сонные березки,
Растрепали шелковые косы.
Шелестят зеленые сережки,
И горят серебряные росы.

У плетня заросшая крапива
Обрядилась ярким перламутром
И, качаясь, шепчет шаловливо:
«С добрым утром!» (3)

-------------------------------

В час, когда пьянеют нарциссы,
И театр в закатном огне,
В полутень последней кулисы
Кто-то ходит вздыхать обо мне...

Арлекин, забывший о роли?
Ты, моя тихоокая лань?
Ветерок, приносящий с поля
Дуновений легкую дань?

Я, паяц, у блестящей рампы
Возникаю в открытый люк.
Это бездна смотрит сквозь лампы -
Ненасытно-жадный паук.

И, пока пьянеют нарциссы,
Я кривляюсь, крутясь и звеня...
Но в тени последней кулисы
Кто-то плачет, жалея меня.

Нежный друг с голубым туманом,
Убаюкан качелью снов.
Сиротливо приникший к ранам
Легкоперстный запах цветов. (2)

--------------

Откуда в темень снегопада
Берется светлый Водолея лик?
Все от весны, цветенья сада,
Когда таинства стался миг!

И отмечая дни рожденья,
Как дни явления на свет,
Февраль - период Водолея,
То в мае собранный букет!

А майский знак - могучий Бык
Черпает силы в урожае.
Так августовский львиный рык
Сквозь зиму отзовется в мае...

Год распадается на части
И четвертинки целого
В смешении и стремлении к счастью
Жизнь начинают набело.

Одно является предтечей,
А вот иное следствие,
И каждый очарован встречей,
Сходясь всегда на острие.

На острие небесного кинжала,
Делящего созвездий круг,
На три циклических начала
Из четырех господ и слуг.

Где каждый за судьбу в ответе,
Где каждый раб иль господин
Попеременно явлен в свете
Разнообразен и един. (7)

---------------

Целый день провела у окошка
И томилась: «Скорей бы гроза».
Раз у дикой затравленной кошки
Я такие заметил глаза.

Верно, тот, кого ждешь, не вернется
И последние сроки прошли.
Душный зной, словно олово, льется
От небес до иссохшей земли

**Ты тоской только сердце измучишь,**
**Глядя в серую тусклую мглу.**
**И мне кажется - вдруг замяучишь,**
**Изгибаясь на грязном полу. (1)**

Последние строки вызвали вновь бурную активность Зонгаида, который потребовал уступить ему слово для декламации, а потом, как он сказал, говорите что хотите. Итак, о том, какими люди видят друг друга.

**Она стройна и высока,**
**Всегда надменна и сурова.**
**Я каждый день издалека**
**Следил за ней, на все готовый.**

**Я знал часы, когда сойдет**
**Она - и с нею отблеск шаткий.**
**И как злодей, за поворот**
**Бежал за ней, играя в прятки.**

**Мелькали жолтые огни**
**И электрические свечи.**
**И он встречал ее в тени,**
**А я следил и пел их встречи.**

**Когда, внезапно смущены,**
**Они предчувствовали что-то,**
**Меня скрывали в глубины**
**Слепые темные ворота.**

**И я, невидимый для всех,**
**Следил мужчины профиль грубый,**
**Ее сребристо-черный мех**
**И что-то шепчущие губы. (2)**

---------------------

**Вы, чьи широкие шинели**
**Напоминали паруса,**
**Чьи шпоры весело звенели**
**И голоса,**

И чьи глаза, как бриллианты,
На сердце оставляли след, -
Очаровательные франты
Минувших лет!

Одним ожесточеньем воли
Вы брали сердце и скалу, -
Цари на каждом бранном поле
И на балу.

Вас охраняла длань Господня
И сердце матери, - вчера
Малютки-мальчики, сегодня -
Офицера!

Вам все вершины были малы
И мягок самый черствый хлеб,
О, молодые генералы
Своих судеб!

Ах, на гравюре полустертой,
В один великолепный миг,
Я видела, Тучков-четвертый,
Ваш нежный лик.

И Вашу хрупкую фигуру,
И золотые ордена...
И я, поцеловав гравюру,
Не знала сна...

О, как, мне кажется, могли вы
Рукою, полною перстней,
И кудри дев ласкать - и гривы
Своих коней.

В одной невероятной скачке
Вы прожили свой краткий век...
И ваши кудри, ваши бачки
Засыпал снег.

**Три сотни побеждало - трое!**
**Лишь мертвый не вставал с земли.**
**Вы были дети и герои,**
**Вы все могли!**

**Что так же трогательно-юно,**
**Как ваша бешеная рать?**
**Вас златокудрая Фортуна**
**Вела, как мать.**

**Вы побеждали и любили**
**Любовь и сабли острие -**
**И весело переходили**
**В небытие. (4)**

**--------------**
**Я встретил вас - и все былое**
**В отжившем сердце ожило;**
**Я вспомнил время золотое -**
**И сердцу стало так тепло...**

**Как поздней осени порою**
**Бывают дни, бывает час,**
**Когда повеет вдруг весною**
**И что-то встрепенется в нас, -**

**Так, весь обвеян дуновеньем**
**Тех лет душевной полноты,**
**С давно забытым упоеньем**
**Смотрю на милые черты...**

**Как после вековой разлуки,**
**Гляжу на вас, как бы во сне, -**
**И вот - слышнее стали звуки,**
**Не умолкавшие во мне...**

**Тут не одно воспоминанье,**
**Тут жизнь заговорила вновь,**
**И то же в вас очарованье,**
**И та ж в душе моей любовь! (6)**

---------------

Я помню чудное мгновенье:
Передо мной явилась ты,
Как мимолетное виденье,
Как гений чистой красоты.

В томленьях грусти безнадежной,
В тревогах шумной суеты,
Звучал мне долго голос нежный
И снились милые черты.

Шли годы. Бурь порыв мятежный
Рассеял прежние мечты,
И я забыл твой голос нежный,
Твои небесные черты.

В глуши, во мраке заточенья
Тянулись тихо дни мои
Без божества, без вдохновенья,
Без слез, без жизни, без любви.

Душе настало пробужденье:
И вот опять явилась ты,
Как мимолетное виденье,
Как гений чистой красоты.

И сердце бьется в упоенье,
И для него воскресли вновь
И божество, и вдохновенье,
И жизнь, и слезы, и любовь. (5)

--------------------

То ли я с тобой осталась,
То ли ты ушел со мной,
Но оно не состоялось,
Разлученье, ангел мой!
И не вздох печали томной,
Не затейливый укор,
Мне внушает ужас темный
Твой спокойный ясный взор. (1)

------------------

Я вас любил: любовь еще, быть может,
В душе моей угасла не совсем;
Но пусть она вас больше не тревожит;
Я не хочу печалить вас ничем.
Я вас любил безмолвно, безнадежно,
То робостью, то ревностью томим;
Я вас любил так искренно, так нежно,
Как дай вам бог любимой быть другим. (5)

--------------------------

Все мы бражники здесь, блудницы,
Как невесело вместе нам!
На стенах цветы и птицы
Томятся по облакам.

Ты куришь черную трубку,
Так странен дымок над ней.
Я надела узкую юбку,
Чтоб казаться еще стройней.

Навсегда забиты окошки:
Что там, изморозь или гроза?
На глаза осторожной кошки
Похожи твои глаза.

О, как сердце мое тоскует!
Не смертного ль часа жду?
А та, что сейчас танцует,
Непременно будет в аду. (1)

-----------------------

Что в имени тебе моем?
Оно умрет, как шум печальный
Волны, плеснувшей в берег дальный,
Как звук ночной в лесу глухом.

Оно на памятном листке
Оставит мертвый след, подобный

**Узору надписи надгробной**
**На непонятном языке.**

**Что в нем? Забытое давно**
**В волненьях новых и мятежных,**
**Твоей душе не даст оно**
**Воспоминаний чистых, нежных.**

**Но в день печали, в тишине,**
**Произнеси его тоскуя;**
**Скажи: есть память обо мне,**
**Есть в мире сердце, где живу я... (5)**

«Послушайте, - раздался голос Вселенской, - давайте продолжим только что прозвучавшую здесь тему и вспомним о том, какими себя и свою судьбу видят поэты».

**Безумных лет угасшее веселье**
**Мне тяжело, как смутное похмелье.**
**Но, как вино - печаль минувших дней**
**В моей душе, чем старее, тем сильней.**
**Мой путь уныл. Сулит мне труд и горе**
**Грядущего волнуемое море.**
**Но не хочу, о други, умирать;**
**Я жить хочу, чтоб мыслить и страдать;**
**И ведаю, мне будут наслажденья**
**Меж горестей, забот и треволненья;**
**Порой опять гармонией упьюсь,**
**Над вымыслом слезами обольюсь,**
**И может быть - на мой закат печальный**
**Блеснет любовь улыбкою прощальной. (5)**

---------------------

**Край любимый! Сердцу снятся**
**Скирды солнца в водах лонных.**
**Я хотел бы затеряться**
**В зеленях твоих стозвонных.**

**По меже на переметке**
**Резеда и риза кашки.**
**И вызванивают в четки**
**Ивы, кроткие монашки.**

Курит облаком болото,
Гарь в небесном коромысле.
С тихой тайной для кого-то
Затаил я в сердце мысли.

Все встречаю, все приемлю,
Рад и счастлив душу вынуть.
Я пришел на эту землю,
Чтоб скорей ее покинуть. (3)

----------------------------

Когда дряхлеющие силы
Нам начинают изменять
И мы должны, как старожилы,
Пришельцам новым место дать, -

Спаси тогда нас, добрый гений,
От малодушных укоризн,
От клеветы, от озлоблений
На изменяющую жизнь;

От чувства затаенной злости
На обновляющийся мир,
Где новые садятся гости
За уготованный им пир;

От желчи горького сознанья,
Что нас поток уж не несет
И что другие есть призванья,
Другие вызваны вперед;

Ото всего, что тем задорней,
Чем глубже крылось с давних пор, -
И старческой любви позорней
Сварливый старческий задор. (6)

-------------------

Уж сколько их упало в эту бездну,
Разверзтую вдали!

Настанет день, когда и я исчезну
С поверхности Земли.

Застынет все, что пело и боролось,
Сияло и рвалось:
И зелень глаз моих, и нежный голос,
И золото волос.

И будет жизнь, с ее насущным хлебом,
С забывчивостью дня.
И будет все - как будто бы под небом
И не было меня!

Изменчивой, как дети, в каждой мине
И так не долго злой,
Любившей час, когда дрова в камине
Становятся золой,

Виолончель, и кавалькады в чаще,
И колокол в селе...
- Меня, такой живой и настоящей,
На ласковой земле!

К вам всем - что мне, ни в чем не знавшей
меры,
Чужие и свои?! -
Я обращаюсь с требованьем веры
И с просьбой о любви.

И день, и ночь, и письменно и устно:
За правду да и нет,
За то, что мне так часто - слишком грустно
И только двадцать лет.

За то, что мне прямая неизбежность -
Прощение обид,
За всю мою безудержную нежность
И слишком гордый вид,

За быстроту стремительных событий,
За правду, за игру...

**Послушайте! - Еще меня любите**
**За то, что я умру. (4)**

**--------------------**

**Пригвождена к позорному столбу**
**Славянской совести старинной,**
**С змеею в сердце и с клеймом на лбу,**
**Я утверждаю, что - невинна.**

**Я утверждаю, что во мне покой**
**Причастницы перед причастьем,**
**Что не моя вина, что я с рукой**
**По площадям стою - за счастьем.**

**Пересмотрите все мое добро,**
**Скажите - или я ослепла?**
**Где золото мое? Где серебро?**
**В моей руке - лишь горстка пепла!**

**И это все, что лестью и мольбой**
**Я выпросила у счастливых.**
**И это все, что я возьму с собой**
**В край целований молчаливых. (4)**

«Очень красиво, но и очень грустно, - вновь заговорил Зонгаид, - давайте завершим нашу поэтическую часть неоконченной шуткой Гения. Итак,

**К кастрату раз пришел скрипач,**
**Он был бедняк, а тот богач.**
**«Смотри, - сказал скопец, (- - - - -), -**
**Мои алмазы, изумруды -**
**Я их от скуки разбирал.**
**А! кстати, брат, - он продолжал, -**
**Когда тебе бывает скучно,**
**Ты что творишь, сказать прошу».**
**В ответ бедняга равнодушно:**
**- Я? я (- - - - -) себе чешу». (5)**

Произнесенные стихи вызвали смех у одних и небольшое замешательство у других. Но, поскольку строки эти принадлежали Гению, то критическое их оценивание не проводилось, а Муза-Диф, подводя некоторые итоги, сказала: «Ну, что ж. Я думаю, каждый из нас что-то нашел в прозвучавших стихах. Но вот как это измерить - не знаю. Да и есть ли такая мера? Может ли она существовать вообще? Вспомните, Сила Водородовна объясняла нам, как здорово, что в мире реальном мы ввели некие эталоны, которые позволили измерять размеры, вес, время и так далее. В свою очередь это дало возможность количественного сравнения и выработки соответствующих практических рекомендаций, благодаря которым и сложился тот реальный мир, в котором живут реальные люди и другие - тоже реальные. А как все же оценить то, что передается после прочтения стихов? Материальных объектов здесь, как будто бы, не производят и не передают. Однако созданное одним становится достоянием многих, не утрачивая при этом своего первоначального состояния. Энергия, материя, будучи передаваемыми другим, уменьшаются в том месте, где их берут. Но то, что берется из стихов и «раздается», не уменьшается в «точке раздачи», хотя, конечно, что-то изменяется. Хотя бы то, что это что-то становится объектом обладания многих. Каковы последствия этого - не знаю.

В большинстве случаев это что-то стали называть информацией. При этом представители различных философских течений пытаются дать определение этому понятию, относя его то к идеальному (божественному), то материальному, а то и к чему-то третьему, вплоть до того, что информация - это некое начало, из которого формируется и идеальное и материальное. Мне самой этот вопрос безумно интересен и поэтому я предлагаю открыть дискуссию на эту тему».



## 12. Информация - это сведения о чем или о ком-либо, или информация - это объективное неотъемлемое свойство материи, отражающее ее внешнее и внутреннее разнообразие, или информация - это...

«Что же такое информация? И почему именно сегодня это понятие вдруг стало столь величественным и в тоже время таинственным? - начал дискуссию Бит Байтович.

К сожалению, на первый вопрос однозначного ответа нет, и более того может так статься, что в используемом языке - это вообще не разрешимая задача (см. упомянутую выше теорему Геделя).

На второй вопрос ответить проще, поскольку мощь любого современного государства в мире реальном основывается на применении новых знаний, новых технологий и в том числе технологий, широко использующих вычислительную технику, объединяемую при этом в специализированные сети с возможностью глобальной интеграции с сетями общего пользования. Поэтому из чисто утилитарных соображений, вычислительная техника и реализуемые с ее помощью информационные системы, становятся весьма значимыми, широко используемыми и приносящими большие доходы тем, кто их правильно применяет. Более того, можно сказать, что именно эти обстоятельства и привели к постановке первого вопроса о том, что же такое информация, что же это за феномен такой, который, как казалось, был всем очевиден, но вдруг стал столь непонятен, но заметен. И в этом нет ничего удивительного, поскольку мы не раз отмечали то, что многие теоретические конструкции появлялись не сами по себе, а как ответ на потребность практики. Поэтому хорошо воспринимаемое ЗДРСМом определение, что информация - это сведения, до определенных пор всех устраивало, пока ее значимость не стала столь заметна».

«Ну, это бывает, сплошь и рядом, - оживилась Муза-Диф, - был человек, как человек, обыкновенный. А стал начальником, да еще если большим, то уже не человек, а памятник. Все его изучают, беспокоятся. Бегают вокруг, кудахчут: «Ах, и ох! Какие таланты невиданные у него открылись! А как говорит, что не слово, то откровение». В общем, бывает!»

Бит Байтович никак не ожидал такого комментария. Однако видя, что Муза больше не проявляет активности и думает о чем-то своем, решил не сбиваться и не обращать внимания на ее высказывание и продолжил: «Давайте вернемся несколько назад и вспомним, что нам рассказывали Пи Е Тет и Сила Водородовна Вселенская.

Нас просветили, что в математике есть векторы и скаляры, а в физике соответствующие явления выражаются через данные абстракции. Например, сила представляется, как вектор, а энергия, как скаляр. Возникает вопрос, а информация - это что: скаляр или вектор?

В физике существуют не опровергнутые практикой до сих пор законы сохранения и преобразования энергии, сохранения импульса и так далее. Вопрос - есть ли нечто схожее для информации? Ведь если реальный мир един, а мы уже не раз убеждались в общности открытых законов и правил, то, следовательно, и феномен информации должен быть «уложен» в общую конструкцию.

Итак, начнем по порядку. Является ли информация векторной величиной? Для ответа на этот вопрос разберем пример. Имеются кастрюля, вода, газовая плита, газ, спички, кусочек мяса, свекла, капуста, соль, перец, морковь, лук, картофель, масло, нож и разделочная доска. Имеется поваренная книга, в которой написано, как используя все это, приготовить борщ. Таким образом, можно задать некое направление от состояния наличия разрозненных продуктов к состоянию «борщ». Следовательно, информацию можно представить векторной величиной, но только в неком особом пространстве, для которого можно различать вышеназванные состояния. Величина данного вектора будет определяться метрикой, введенной для такого особого пространства. При этом, очевидно, необходимо также учитывать некий объект, который, следуя рекомендациям поваренной книги, из разрозненных продуктов сварит борщ. Таким объектом может быть начинающий повар или автомат. Главное, чтобы им или ими была осуществлена последовательность действий, приводящих к переходу от состояния наличия разрозненных продуктов к состоянию «борщ».

Переворачивая страницы поваренной книги, можно обнаружить еще рецепты, содержащие информацию о том, как из тех же самых продуктов можно приготовить новые блюда. Таким образом, из уже известного состояния наличия разрозненных продуктов можно построить новые векторы, соответствующие переходу в состояния новых блюд.

Следует отметить, что в поваренной книге может быть еще тысяча и более других рецептов, благодаря которым можно сформировать множество различных векторов. Однако принципиальным положением, с точки зрения реализации этих векторов, является наличие объекта, который воспринимает информацию и совершает некие действия, во-первых, по ее восприятию, а во-вторых, по ее реализации.

Итак, сравним ситуации.

В физике векторные величины, такие, как, например, силы всемирного притяжения действуют как бы сами по себе, тогда, как информация «действует» только через посредника, способного ее воспринять и ей следовать.

В физике метрическое пространство задается теоретической моделью. Например, в механике Ньютона используется хорошо воспринимаемая ЗДРСМом модель евклидового трехмерного пространства, и действующие силы наглядно отображаются в виде векторов с присущими им операциями сложения и умножения. В тоже время внутриядерные силы, свойственные микромиру, не имеют столь же наглядного для ЗДРСМа описания и модель метрического пространства для них не сформулирована столь же определенно. Это говорит о том, что главнейшим вопросом количественного оценивания какого либо явления или процесса является определение метрического пространства. При этом, чем более сложным и малоизученным оказывается явление или процесс, тем сложнее это сделать. Аналогичная ситуация и с заданием метрического пространства для информационных векторов. При этом, однако, существует еще одна особенность, связанная с заданием алгебраических операций над векторами. Если для векторной модели действующих сил все оказывается достаточно понятным, то для информационных векторов подобные действия с позиций ЗДРСМа зачастую лишены смысла. Действительно попробуем представить себе сложение вектора «борщ» и вектора «щи». Бурда какая-то получается. Хотя в общем случае можно ввести и такое состояние - «бурда», определив соответствующим образом метрическое пространство.

Приведенный пример показывает, что информация может быть представлена в векторной форме, однако при этом возникает довольно много проблем с определением метрического пространства, что во многих случаях оказывается трудно разрешимой задачей. Кроме того, может потребоваться ввести уточнения относительно алгебраических действий над векторами, что может настолько усложнить модель, что ее применение станет невозможным.

Значительно чаще информацию предлагают количественно оценивать, как величину скалярную. Остановимся на этом чуть позже, а сейчас рассмотрим еще один пример.

Человек, играя на бильярде, ударяет по шару, который попадает в два других. Исходя из закона сохранения, энергия этого шара, имеющаяся у него до столкновения, перераспределится между другими шарами после столкновения. При этом первый шар лишится части энергии, в то время как другие наоборот ее приобретут. В сумме же совокупная энергия системы не изменится.

Совершенно иная ситуация возникает, когда человек сообщает некую информацию двум другим. В этом случае количество людей, обладающих



12 з. 192

информацией, утроится. При этом тот, кто сообщил ее, и те, кто получили ее, будут обладателями одного и того же, но при этом значимость этого может быть существенно разной. Например, наш дорогой Зонгаид узнал, что лотерейный билет с номером **21132748** выиграл **10** млн. таньга и сообщил об этом Пи и Музе. Билет самого Зонгаида оказался с другим номером, и он ничего не выиграл. Пи Е не играл вообще, а Муза-Диф выиграла. Вот теперь и представьте, какое значение для каждого из них имеет одна и та же, на первый взгляд, информация. Зонгаид Лечевич играл, но не выиграл, Пи Е не играл вовсе, а Муза-Диф выиграла. ЗДРСМ подсказывает, что в этом случае, чем неожиданнее сообщенная информация, тем количественно она должна быть больше. Что же касается общего количества информации системы, то в случае, если она определена, то общее количество информации должно оставаться неизменным. Действительно, если известно, что среди играющих один выигрывает, а остальные нет, то понятно, что для каждого в отдельности исход игры может содержать разную информацию, но в целом все равно один выигрывает, а остальные нет и общее количество информации неизменно. Можно конечно заметить, что выигрыш для одного очень ценен, а для другого может быть и не очень, поскольку у него этих таньга и так много-много. Но такое добавление означает расширение системы и учет множества других факторов, что может увеличить общее количество информации, поскольку описывает иную систему с учетом гораздо большего количества факторов. Таким образом, определенная аналогия между общим количеством энергии и количеством информации в системе имеется. При этом естественно речь должна идти о замкнутых системах, включающих в себя точно оговоренный список участников, не изменяющих собственного состояния без взаимодействия друг с другом. Кроме того, не следует путать понятие сообщений, несущих ту или иную информацию и саму информацию, заключенную в этих сообщениях, ценность которой определяется только во взаимодействии с предшествующей информацией и имеющимися надеждами на будущее.

Итак, подводя итог, отметим, что информация имеет определенную схожесть с понятием энергии и может быть представлена в виде скалярной величины. При этом информации свойственен всеобщий принцип относительности, что фактически определяет ее ценность и, следовательно, ее количество. Кроме того, ей должен быть свойственен и всеобщий закон об ограниченной плотности.

Во время выступления Силы Водородовны мы отмечали, что физики часто оперируют понятиями, которые ими изучаются в их проявлениях, тогда как само понятие берется как данность. Например, что такое гравитационная сила или масса никто не знает, но их проявления в мире реальном исследуются, измеряются, формируются теоретические модели и так далее. Так же, по-видимому, следует поступить и с понятием информации, отмечая ее свойства и проявления в надежде, что когда-либо глубинная сущность этого феномена станет известна, хотя возможно, это в принципе не достижимо. По крайней мере, теорем, доказывающих или опровергающих это, пока не существует».

«Уважаемый Бит Байтович, - вступила в разговор Муза, - слушая Вас, я поняла, что Вы предлагаете считать, что информация - это нечто, содержащееся в различных сообщениях. Например, в написанном тексте, формулах, увиденных снах или сказанных словах. При этом должен быть объект, который сначала воспринимает информацию, сравнивая ее с предыдущей, а затем совершает некие действия, исходя из общей информационной совокупности. Причем не совершение действий есть частный случай совершения. Таким образом, информация задает как бы правила поступков. Некто или нечто, получая дополнительную информацию, изменяет свое информационное состояние и изменяет свои действия. Таким образом, можно сказать, что некая абсолютная информация, становясь достоянием различных объектов, приобретает относительное проявление, поскольку объекты разные и финальная сумма будет зависеть от этого».

«Я полагаю, что Вы весьма логичны в своих комментариях, - встрепенулась госпожа Вселенская - и я поддерживаю такую точку зрения, поскольку это созвучно представлениям физиков о других феноменах природы. При этом я особо хочу подчеркнуть, что все познаваемое нами формулируется именно как информация об этом. Все наши теоретические конструкции - это информационное взаимодействие, происходящее в формулах или компьютерных моделях. Последние вообще иногда создают иллюзию у ЗДРСМа о реальности происходящего. И только наше несовершенство моделей разрушает это, выявляя различия между миром реальным и миром виртуальным. Однако стремительное развитие вычислительной техники дает основание рассчитывать на возможность формирования виртуального мира все более похожего на мир реальный. Не так ли, уважаемый Бит Байтович?»

«В отношении надежд Вы абсолютно правы. Но строгих доказательств такой возможности нет, - начал Бит Байтович. - Поэтому я бы поостерегся делать окончательные выводы об этом. Да и вот Вам пример. Примитивный калькулятор выполняет операции умножения с такой скоростью, которую невозможно достичь обычному человеку. Итак, калькулятор превзошел человека?! Но вместе с тем его вычислительные возможности не в состоянии сделать и миллионной доли того, что с легкостью делается человеком: ориентация в пространстве, распознавание образов, звуков и запахов и многое, многое другое. Так что если посмотреть на все в совокупности, то это еще большой вопрос. В состоянии ли будущая вычислительная техника соперничать с человеком глобально. Хотя такая возможность, скорее всего, все же существует. Однако для боле корректной оценки надо подсчитать теоретически достижимые возможности компьютеров и практически реализованные в человеке вычислительные ресурсы».

«Ну и если окажется, что возможности компьютеров достаточны, то что же делать, - вновь вступила в разговор Муза-Диф, - создавать себе конкурентов? То есть «вложить» накопленную информацию, как правила игры в компьютеры, а они дальше уже посмотрят, что им делать, в том числе и с людьми.

Мы что же предполагаем взять на себя задачу создания нового мира? Кстати, как Вы относитесь к словам, приведенным в Евангелие от Иоанна:

**«Вначале было Слово, и Слово было у Бога, и Слово было Бог.**

**Оно было в начале у Бога.**

**Все чрез Него начало быть, и без Него ничто не начало быть, что начало быть.**

**В Нем была жизнь, и жизнь была свет человеков....**

**.............................................................................**

**И Слово стало плотию, и обитало с нами, полное благодати и истины; и мы видели славу Его, славу, как Единородного от Отца....»**

Не кажется ли Вам, что в данном случае, если Слово является носителем информации, то именно через это и создавался мир реальный по описанию Иоанна».

«Дорогая Муза, - несколько разволновавшись заговорил Бит Байтович, - я думаю, что на поставленный Вами вопрос никто не знает ответа. Мы можем только строить предварительные догадки и искать аналогии. Путь познания, и Вы все это знаете, тернист и парадоксален. Кажущаяся простота скрывает невероятную сложность конструкции и наоборот видимая сложность на поверку оказывается результатом действия простых законов. Так что наше обсуждение **МИР**а и есть попытка целостно со всех сторон посмотреть на данную проблему».

«Спасибо Вам за ответ, дорогой Битик, - произнесла Муза. - Если бы Вы знали ответ, то это бы меня сильно расстроило, поскольку я уверенна, что здесь нет простого решения. Кстати обратите внимание на то, что человеческая речь, оперирующая словами, построена очень по-разному. Взять хотя бы наличие родов или их отсутствие. В английском языке слова не разделяются по родам, в русском слово «Слово» - среднего рода, во французском слово «Слово» в Евангелие от Иоанна отображается словом «la parole» женского рода, хотя в этом языке есть другой вариант слова «слово» - «le mot», но уже мужского рода, а в немецком слово «Слово» обозначается словом «das Wort» среднего рода. В общем, простое стало сложным. Но как интересно надо всем этим поразмышлять и попытаться докопаться до истоков, до причин такого разнообразия. Кстати все Священное Писание Нового Завета было написано по-гречески, за исключением Евангелие от Матфея, которое, по преданию, было написано по древнееврейски или по арамейски. Но так как этот текст не сохранился, то греческий текст считается подлинником и для Евангелия от Матфея. Таким образом, только греческий текст Нового Завета - подлинник, тогда как многочисленные издания на различных языках являются переводами.

Греческий язык, на котором был написан Новый Завет, являлся разговорным повседневным языком первого века по Р.Х. и широко распространенным в греко-римском мире того времени. Однако стиль и обороты речи священных писателей Нового Завета позволяют специалистам говорить о древнееврейском или арамейском влиянии.

Однако я увлеклась, и, похоже, всех сейчас уведу от обсуждаемой темы. Бит Байтович, Вам слово. Слово!»

«Муза-Диф! Вы как всегда великолепны! - проговорил Файлтон. - И прерывать Ваше повествование не только не прилично, но и не интересно. Однако, если Вы настаиваете, то я продолжу рассказ про информацию, хотя то, о чем Вы начали говорить, мне представляется чрезвычайно увлекательным и достойным всеобщего внимания. Но, все же вернемся к информации.

Впервые идея количественного измерения информации возникла в трудах известных ученых К. Шеннона и А.Н. Колмогорова, для оценки свойств передаваемых и принимаемых сигналов. Действительно, исходя из представлений ЗДРСМа, передача и прием сигналов обеспечивают перенос информации из одной точки в другую, или, как принято говорить от источника к получателю. ЗДРСМ так же согласен с тем, что чем неожиданнее информация, тем более сильный эффект она производит и мы уже приводили примеры этого. Ну, а что значит, что информация неожиданна? В количественном отношении - это значит, что ее вероятность меньше, чем вероятность другой информации. Следовательно, если источник информации формирует сигналы $s_1,s_2,...s_n$ с соответствующими вероятностями $p_1,p_2,...p_n$, то логично определить, что сигнал $s_1$ содержит в себе информацию, равную $1/p_1$, сигнал $s_2$ - информацию, равную $1/p_2$, а соответственно $s_n$ - $1/p_n$. В этом случае как раз и получится, что чем вероятность $p_k$ некого события $s_k$ меньше, тем информация того же события $s_k$, равная по определению $1/p_k$, будет больше. Однако оказалось, что такое определение не вполне удобно для дальнейшего применения, поскольку при вычислении количества информации суммы событий, надо находить произведение вероятностей. Поэтому было решено количество информации измерять, как логарифмическую меру. Таким образом, количество информации в сигнале $s_k$ определяется по следующей формуле:

$$I_k = \log\left(\frac{1}{p_k}\right) = -\log p_k. \qquad (136)$$

Если основание логарифма равно **2**, то количество информации измеряется в единицах, называемых **бит**. Единица информации называется **нат** при основании логарифма, равном числу **e** и называется **дит** при десятичном логарифме. Наиболее часто применяют измерение в битах, что объясняется широким распространением систем связи, использующих передачу двоичных сигналов, о чем я полагаю, мы поговорим более подробно несколько позднее.

Важное значение в теории информации имеет среднее значение количества информации. Согласно определению (123) и формуле (136) среднее значение, называемое энтропией, равно

$$H = -\sum_{k=1}^{n} p_k \bullet \log p_k. \qquad (137)$$

В (85) уже встречалось определение энтропии системы и частной энтропии, сделанные физиками. Ими так же был сформулирован закон неубывания энтропии, являющийся фундаментальной основой естествознания. В этой связи интересно проследить аналогию между (85) и введенными только что понятиями (136) и (137).

Для выяснения этого рассмотрим источник сигналов $s_1, s_2, \ldots s_n$, формирующий их с вероятностями $p_1, p_2, \ldots p_n$. В дальнейшем будем говорить, что источник порождает дискретный ансамбль сигналов (сообщений), который будем обозначать $\{s_i; p_i\}$ при $i=1..n$. Отметим попутно, что понятия сообщения и сигналы часто синонимичны. Однако иногда полезно понятие сообщения использовать как форму представления информации в виде ли печатного текста, произнесенных ли слов, увиденных ли световых сигналов и прочее. Тогда как понятие сигналы используется для отображения того, что передается с помощью систем связи и является отображением сообщений в том виде, который удобен для передачи. Как правило, это электромагнитные волны, параметры которых люди научились изменять в соответствии с сообщениями, поступающими для передачи.

Итак, известен дискретный ансамбль сигналов $\{s_i; p_i\}$ при $i=1..n$. Очевидно, что всего сигналов **n**. При этом можно доказать, что

$$\log n \geqslant H, \tag{138}$$

где **H** - энтропия источника, определяемая из (137).

Удается также выяснить, что равенство в (138) достигается только в том случае, когда вероятности в ансамбле $\{s_i;p_i\}$ при $i=1..n$ равны, то есть

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1/n, \tag{139}$$

Во всех других случаях равенство не выполняется, а это значит, что максимальной энтропия дискретного источника оказывается только в ансамбле, где все сигналы (сообщения) равновероятны. Однако не следует обобщать этот вывод на источники непрерывных сигналов, о чем будет сказано несколько ниже.

Приведенные выражения (138, 139) доказывают, что введенное через (85) понятие энтропии является верхней оценкой этого понятия, введенного через (137).

Рассмотрим наиболее часто встречающийся случай дискретного источника, порождающего ансамбль, состоящий из двух элементов, то есть сигналов $s_1$ и $s_2$. Изменяя значение вероятностей двоичного ансамбля, и, понимая, что в данном случае $p_1 = 1 - p_2$, можно построить зависимость энтропии **H** от вероятности сигналов (рис.36). Очевидно, что максимальное значение энтропии равно **1** и достигается при $p_1 = p_2 = 0{,}5$.

При увеличении количества сигналов в ансамбле максимальное значение энтропии будет увеличиваться в логарифмической мере согласно (138). Для наглядности данная зависимость приведена на рис. 37.

Интересно также проследить, как ведет себя элемент энтропии, а именно, выражение $(- p_k \cdot \log p_k)$, входящее в формулу (137) в зависимости от значения $p_k$. На рис. 38 представлено графическое отображение этого. При этом оказалось, что максимальное значение достигается при $p_k = 1/e$, а выражение $(- p_k \cdot \log p_k) = 1/e \cdot \log e \approx 0{,}531$».

«Как замечательно, - воскликнула Муза-Диф, - опять родственники Пи Е Бета оставили след в математике. Но у

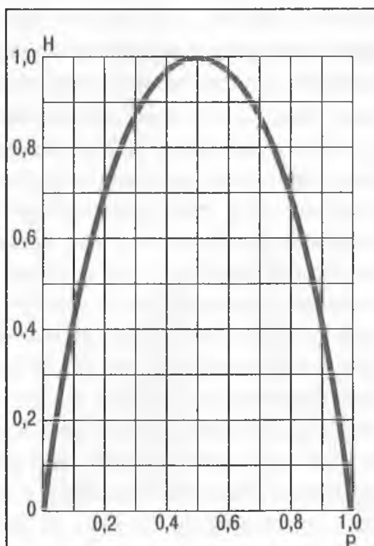



Рис. 36.

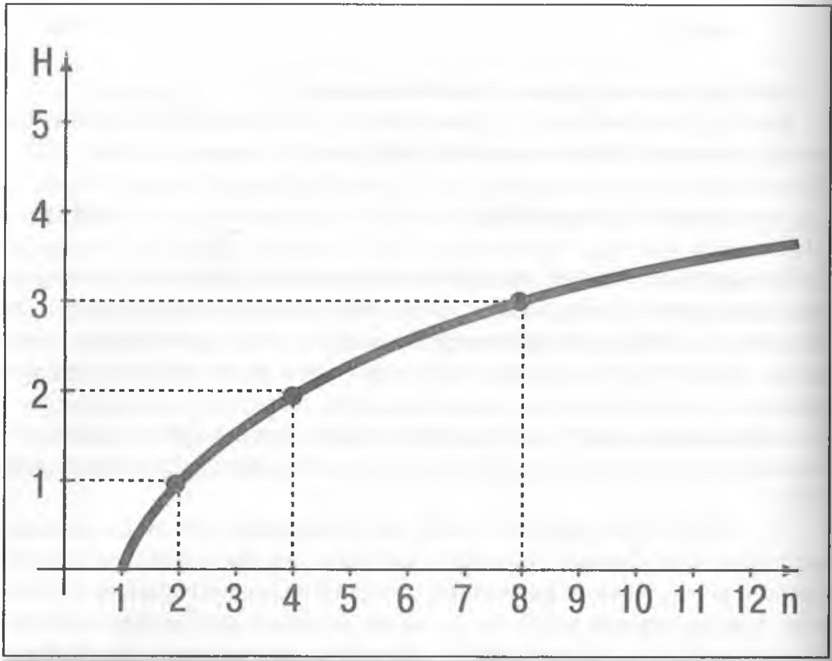



Рис. 37.

меня есть другой вопрос. Вот Вы нам рассказали, что есть **n** сигналов, ну а если появится другой, какой-то **(n+1)**-ый сигнал, отличающийся от всех предыдущих. Какая будет в нем информация?»

«Ох уж эта Муза-Диф, - тихо вздохнул Бит Байтович, поскольку вопрос был, безусловно, важным, но несколько уводящим в сторону. - Ответ с одной стороны прост. Надо рассматривать новую теоретическую модель ансамбля, включающую в себя не только **n** сигналов, но и Ваш **(n+1)**-ый сигнал. В этом случае проблем нет. Но я полагаю, что Вы скорее интересуетесь тем, а как это вообще и, в частности, у людей, получается, распознавать сигналы, которые до этого они никогда не слышали или не видели, и какая при этом ими получается информация. Для этого, как мне кажется, используются методы корреляционного приема и расширения ансамбля, о чем мы поговорим несколько позднее, когда происходит сравнение незнакомых сигналов с уже известными прототипами. Неслучайно, когда один человек рассказывает другому о новом знакомстве, им используются сравнения типа: ну он похож на..., или она такая же, как ... и так далее. То есть всякое новое соотносится с предыдущим и познается не само по себе, а в сравнимости с другим и уже известным. И в этом опять таки проявляется всеобщий принцип относительности. Однако позвольте обсудить это позднее, ознакомив Вас перед этим с основами теории информации, кодирования и связи.

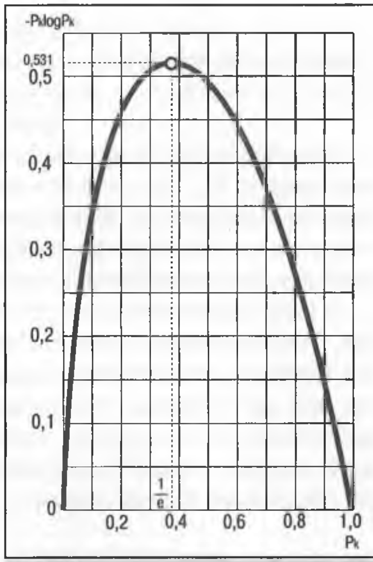


Рис. 38.

Выше мы обсудили понятия количества информации и энтропии, определенные для случая, когда сообщения (сигналы) $s_1, s_2, \ldots s_n$ принимают фиксированные значения с вероятностями $p_1, p_2, \ldots p_n$. Такие сообщения принято называть дискретными. Однако в общем случае сообщения могут быть не дискретными, а непрерывными. Тогда значения $s_1, s_2, \ldots s_n$ могут быть любыми в некоторой области $(s_{min}, s_{max})$, причем границы интервала $s_{min}$ и $s_{max}$ могут быть, как ограничены, так и не ограничены. Для наглядности обратимся к рис.39, на котором представлен пример сообщения $s_1, s_2, \ldots s_n$, для некоторой области $(s_{min}, s_{max})$. На этом же рисунке приведен пример плотности вероятности **p(s)** сообщений $s_1, s_2, \ldots s_n$.

Понятие плотности вероятности, уважаемый Пи Е Тет, уже нам разъяснял, однако напомним очевидное соотношение, позволяющее рассчитывать вероятность того, что элемент сообщения $s_i$ будет принимать какое-либо значение на интервале от $s_a$ до $s_b$.

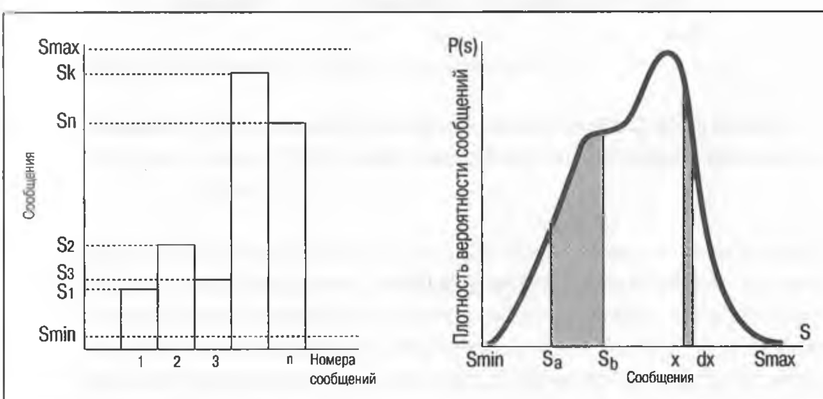


Рис. 39.

$$p(s_a<s_i<s_b) = \int_{s_a}^{s_b} p(s)\, ds. \qquad (140)$$

Графически выражение (140) соответствует площади заштрихованного участка (рис.39). При этом интересно отметить, что вероятность того, что элемент сообщения $s_i$ примет какое либо точное значение, когда $i=a=b$, стремится к нулю. Отсюда, следуя (136), вывод, что количество информации в данном случае будет стремиться к $\infty$.

В (137) было определено понятие энтропии для дискретных сообщений. Воспользуемся этим выражением для непрерывного сообщения, предположив, что интервал $(s_{min}, s_{max})$ разбит на $n$ участков с шагом квантования $\Delta s$. Очевидно, что чем меньше шаг квантования, тем более точно дискретное описание будет отображать непрерывное. При этом вероятность того, что элемент сообщения принимает значение $s_i$, равна $p_i=p(s_i)\bullet\Delta s$. Подставляя это выражение в (137), получим:

$$H = -\sum_{i=1}^{n} p(s_i)\bullet\Delta s\bullet\log\{p(s_i)\bullet\Delta s\} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} p(s_i)\bullet\Delta s\bullet\log\{p(s_i)\} - \sum_{i=1}^{n} p(s_i)\bullet\Delta s\bullet\log\{\Delta s\} = \qquad (141)$$

$$= -\int_{S_{min}}^{S_{max}} p(s)\bullet\log\{p(s)\}ds - \log\{\Delta s\} = H^* - \log\{\Delta s\}.$$

Величину $\log\{\Delta s\}$ обычно за малостью не принимают во внимание, полагая, что энтропия непрерывного сообщения равна

$$H = H^* = -\int_{S_{min}}^{S_{max}} p(s)\bullet\log\{p(s)\}ds, \qquad (142)$$

что, строго говоря, нуждается в дополнительном обосновании для каждого конкретного случая.

В (139) было указано условия максимума энтропии для дискретного сообщения. Для непрерывного сообщения интересно рассмотреть два случая. Первый - когда дисперсия состояния элементов сообщений не ограничена ($\sigma^2=\infty$) и второй - когда дисперсия ограниченна ($\sigma^2$ - const).

Опуская математические преобразования, надеюсь, Пи Е нас простит за это, укажем окончательные результаты.

В первом случае оказалось, что энтропия максимальна, если плотность распределения вероятностей подчиняется равномерному закону.

$$p(s) = \frac{1}{s_{max} - s_{min}}, \tag{143}$$

При этом энтропия равна:

$$H = \log \frac{s_{max} - s_{min}}{\Delta s}. \tag{144}$$

Во втором случае энтропия максимальна, если плотность распределена по нормальному центрированному закону.

$$p(s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{s^2}{2\sigma^2}\right). \tag{145}$$

При этом максимальное значение энтропии равно:

$$H = \log\left(\frac{\sigma}{\Delta s}\sqrt{2\pi e}\right). \tag{146}$$

И в первом, и во втором случае оказалось, что энтропия не зависит от среднего значения, как от некой константы, а зависит от дисперсии, когда она ограничена, и от точности дискретизации **Δs**. Данное наблюдение очень хорошо согласуется с тем, что нам рассказывали Сила Водородовна и Зонгаид. Абсолютное постоянство, отсутствие движения и изменений не свойственно миру реальному, в нем в таком случае нет информации, она равна нулю, а это по представлениям физиков может быть только при температуре, равной абсолютному нулю.

Характер зависимостей энтропии очевиден из формул (144 и 146), но все же следует обратить внимание на то, что с ростом точности (уменьшением **Δs**) энтропия стремиться к ∞. Этот результат очень интересно дополняет то, о чем нам рассказывал Пи Е, указывая на выводы Г. Кантора относительно одинаковой мощности множества точек отрезка прямой, площади квадрата и объема куба. Созвучно этому и выражение, которое мы тоже обсуждали, принадлежащее древнему египетскому ученому, Гермесу Трисмегисту, утверждавшему, что **каждая частица содержит в себе всю информацию о целом, а также, что наверху, то и внизу, что внизу, то и наверху**. Вопрос фактически во всех случаях решается путем выбора соответствующей точности. Кстати об этом мы уже подробно говорили при обсуждении понятия вероятности событий, случайных и детерминированных явлений. Тогда мы обнаружили, что детерминированное явление становится случайным, когда мы не можем точно описать его поведение из-за того, что нам не хватает точности, что в свою очередь связано с очень быстрым, просто огромным нарастанием проблем учета влияния всех возможных факторов. При этом мы отметили, что в этом-то и состоит основная проблема, проблема доказательства возможности или наоборот невозможности учета всех влияний при определенных условиях реализации этого. Таким условием может быть, например компьютер, выполняющий определенное количество операций в секунду. В результате, этот ресурс вносит ограничения в возможность учета влияний. Совершенно ясно, что если будут требоваться более значительные вычислительные возможности, то данный компьютер с задачей не справится. Можно, конечно надеяться на более совершенное устройство, но принципиально это ничего не меняет, так как в любом случае, хотя мы и можем вообразить себе компьютер с колоссальными вычислительными возможностями, но они всегда ограниченны сверху, тогда, как сложности вычислений могут стремиться к ∞, да и энтропия точек отрезка тоже равна ∞.

Последнее обстоятельство привело к необходимости в условиях существующих реалий аппроксимировать непрерывные сообщения некими «заменителями», которые могут нас устраивать в соответствии с определенными критериями качества аппроксимации. Таких критериев может быть великое множество, и их выбор зависит от решаемой задачи. Например, Муза-Диф может, наверное, указать нам на одежду из кожзаменителей или синтетики в сравнимости с изделиями из натуральных материалов и предложить нам свои критерии оценки качества. Пи Е Тет приведет нам примеры использования иных критериев качества, таких как, например, максимальное отличие между аппроксимируемым и аппроксимирующим или среднеквадратичное отличие и так далее и так далее. Исходя из этих соображений, в теории информации возникло понятие ε - энтропии (**H(ε)**), характеризующее взаимную информацию между аппроксимирующим и аппроксимируемым ансамблями относительно



некоторого критерия качества, не превосходящего определенной величины ε. Каким выбрать критерий качества и как установить значение ε, следует решать в каждом конкретном случае, исходя из специфики решаемых задач и поставленной цели. Мы же, ограничиваясь констатацией вышеизложенного, перейдем сейчас к рассмотрению общих вопросов, решаемых системами связи (телекоммуникаций, коммуникаций).

## 13. Бит Байтович рассказывает, что и как реализуют системы связи

Обратимся к рис. 40, на котором представлен «круговорот информации в природе». Термин этот взят под впечатлением от круговорота воды в природе, с желанием подчеркнуть множественность трансформаций и преобразований информации с возможными потерями и изменениями.

Представим себе, что в некотором пункте **А** возникла информация. Это может быть наш друг Зонгаид, который, как мы уже рассматривали выше, узнал о выигрышном билете и собирается информировать об этом своих знакомых. Это может быть и весенний певец, соловей, который желает сообщить своей подруге, что он ищет ее. Это может быть и цветок, который распустился, желая привлечь, для только ему известных целей, бабочек, жучков и паучков. В общем, примеров много. Однако для мира реального информацию, возникшую у природного объекта, необходимо «облечь» в некую форму, **сообщение**, которое может быть воспринято окружающими. Для этих целей служит **преобразователь информация - сообщение**, который информацию преобразует, отображает, вкладывает, трансформирует и прочее в сообщение. Как это происходит совершенно не понятно, поскольку не ясно, что такое информация, но это происходит, и в мире реальном осуществляется формирование, передача и прием сообщений. Исходя из известных на сегодняшний день способов восприятия окружающего мира, укажем на разные виды сообщений. Это акустические сообщения в различных диапазонах частот, электромагнитные сообщения, в том числе видео, механические, химические и всяческие другие, как известные нам, так и, наверное, не известные.

В силу дарованных природой способностей объекты этой самой природы обмениваются сообщениями через окружающую среду. При этом, однако, дальность такого взаимодействия весьма ограничена, хотя и может достигать десятков километров (восприятие запахов насекомыми, восприятие обитателями морей и океанов акустических волн и прочее). Для человека, как наиболее интересного из известных представителя природы, дальность ограничивается сотнями метров в соответствии с возможностями его голосовых связок. Поэтому не случайно его желание раздвинуть просторы общения и научиться передавать сообщения на значительно большие расстояния. Для этого, однако, сообщения следует преобразовать в **сигналы**, которые будут лучше приспособлены для передачи на большие расстояния. Например, зажигание костров, как сигнал опасности, заметный за многие километры или удары в барабаны с той же целью.

Итак, **сигналы - это новая форма сообщений, а значит и информации**.

Довольно часто слова сообщения и сигналы используются для обозначения одного и того же. Однако в данном случае эти понятия целесообразно разделить. Слово сообщение мы будем относить к природному объекту, преобразу-

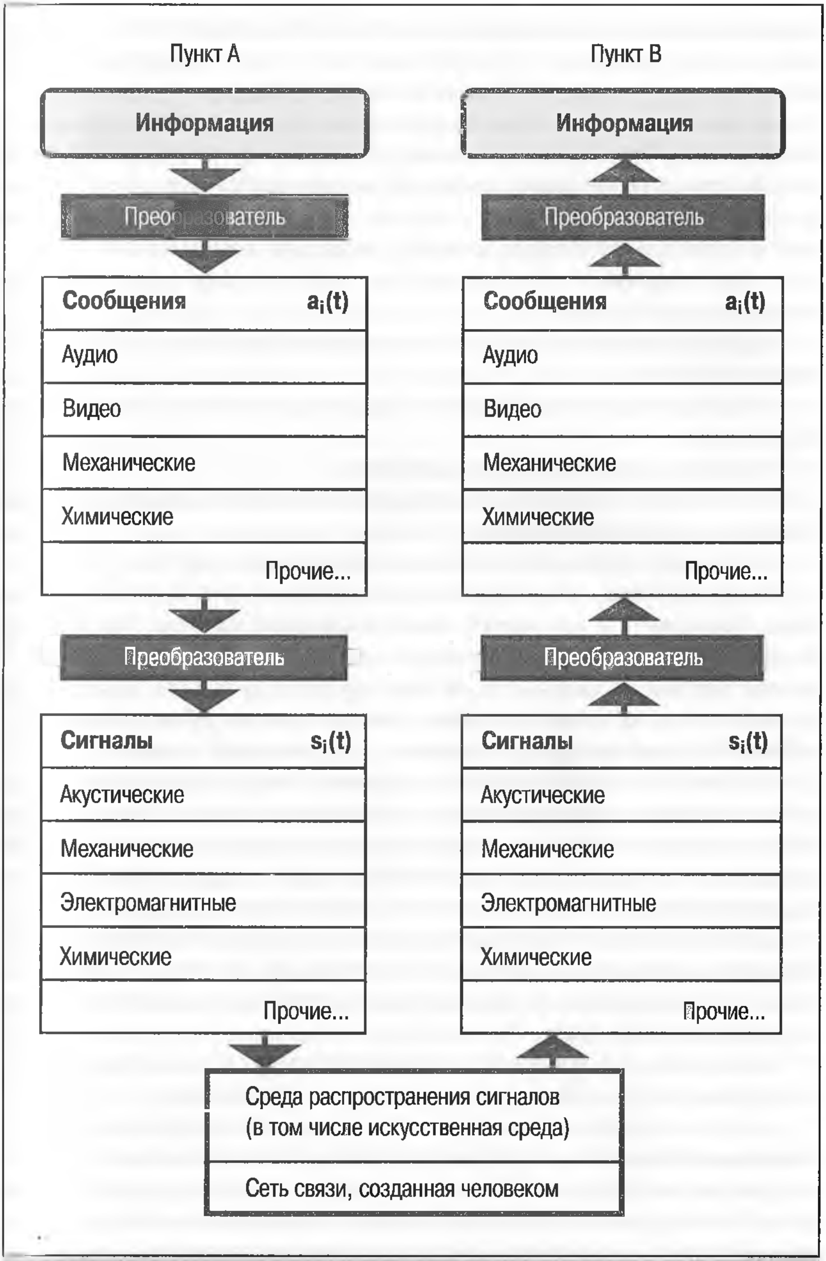

Пункт А
Пункт В
Информация
Информация
Преобразователь
Преобразователь
Сообщения $a_i(t)$
Аудио
Видео
Механические
Химические
Прочие...
Сообщения $a_i(t)$
Аудио
Видео
Механические
Химические
Прочие...
Преобразователь
Преобразователь
Сигналы $s_i(t)$
Акустические
Механические
Электромагнитные
Химические
Прочие...
Сигналы $s_i(t)$
Акустические
Механические
Электромагнитные
Химические
Прочие...
Среда распространения сигналов
(в том числе искусственная среда)
Сеть связи, созданная человеком

**Рис. 40.**

ющему информацию в сообщение и обозначать **a(t)**, а слово сигнал закрепим за искусственно созданным человеком изделием, которое придает сообщению новую форму, то есть сигнал. Обозначим его через **s(t)**.

Сигналы, как и сообщения, могут быть акустическими, электромагнитными, механическими, химическими и прочее. Для отображения сообщений в виде сигналов служат также **преобразователи**, но уже **сообщение - сигнал**. Эти преобразователи - искусственно созданные, а потому с понятным принципом работы. Приведем примеры разных преобразователей сообщений в сигналы:

- музыка симфонического оркестра с помощью микрофона преобразуется в электромагнитный сигнал;

- видимое изображение с помощью видеокамеры преобразуется в электромагнитный сигнал;

- человеческая речь переносится в более высокий частотный диапазон акустических волн;

- сообщение отображается в виде письма;

- сообщение представляется в виде химической комбинации ингредиентов, составляющих особый запах духов;

- сообщение отображается через механические удары по стене.

Совершенно ясно, что примеры преобразования сообщений в сигналы можно продолжить, и они станут еще более разнообразными. При этом их общей чертой является то, что сигналы подбираются так, чтобы это было наилучшим образом согласовано со средой передачи. В противном случае не решается или плохо решается основная задача, а именно, **обеспечение максимально возможной дальности связи с требуемым качеством**.

В простейшем случае средой распространения является окружающее человека пространство: твердые, жидкие и газообразные сферы, а также космос. В более сложных случаях - это искусственно созданная сеть связи со своими принципами взаимодействия и правилами. Причем окружающая человека среда распространения сигналов явится частным элементом сети связи.

Для согласования сигналов с сетью необходимо также применять **преобразователи**, типа **сигнал - сигнал**, обеспечивающие соответствующее согласование сигналов с сетью по определенным параметрам, о чем более подробно мы поговорим чуть позже.

В пункте **В**, как следует из рис. 1.40 осуществляются обратные преобразования, благодаря которым завершается «круговорот информации».

Для полноты картины заметим, что сигналы могут порождаться **искусственными объектами**, созданными человеком. Это всевозможные датчики, измеряющие температуру, влажность, давление и прочее, компьютеры и так далее. С точки зрения системы связи эти источники сигналов ни чем не отличаются от рассмотренных ранее. Однако их следует выделить особо, поскольку, во-первых, они создаются от искусственно созданных человеком объектов, а, во-вторых, у них, как правило, совершенно иные требования к качеству передачи сообщений.

Сеть связи - это весьма сложный «черный ящик», секреты которого мы постараемся приоткрыть несколько позднее, а сейчас отметим лишь, что сеть дает возможность организовать общение не только между одним пунктом **А** и одним пунктом **В**, а между миллиардами людей, различными датчиками и компьютерами».

«Ого, - воскликнула Муза-Диф, - какова проблема. Но позвольте мне небольшой вопросик. Как Вы считаете, возможен ли перенос информации сразу из пункта **А** в пункт **В**, минуя все ваши преобразователи, сообщения и сигналы? Вы ведь, наверное слышали об историях, когда люди видели каким-то своим внутренним зрением и чувствовали, что происходит с их близкими? Разве это не похоже на прямой перенос информации из, как Вы говорите, пункта **А** в пункт **В**?»

«Безусловно, похоже, - согласился Файлтон, - но вот только, к сожалению, нет точных доказательств того, что подобное случалось на самом деле, а не явилось плодом фантазии или мистификацией. Однако давайте не будем спорить на эту тему, хотя бы потому, что мы не смогли установить, что же такое информация. Полагаю, что когда нам удастся это сделать, то мы сможем получить и ответ на Ваш, как всегда очень интересный, вопрос.

Но вернемся к нашим информации, сообщениям и сигналам, а так же преобразователям из одного в другое и в третье. Для большей наглядности сузим круг рассматриваемых сигналов, выбрав только электромагнитные. На самом деле это не уменьшает общности рассуждений, но делает их более конкретными и практичными по отношению к реально существующим системам связи. Широкое же распространение электромагнитных сигналов объясняется только тем, что при современном уровне развития науки и техники их удобно искусственно создавать, изменять, обрабатывать, передавать и принимать. К тому же, окружающая людей воздушная среда и космос весьма пригодны для передачи электромагнитных сигналов по сравнению с другими известными способами. В других условиях следует, конечно же, применять другие виды сигналов. Подтверждением этому служат решения по организации связи в воде с помощью акустических волн, или внутри твердой поверхности на основе сейсмических волн, возникающих под влиянием механических ударов. Можно так же указать на химический способ передачи сообщений, который реализуется в биологических существах в клетках.

Для того, что бы можно было различать сообщения друг от друга их надо пометить, каждое особенным образом, отличным от других. В противном случае сообщения будут неразличимы. В теории связи такой процесс называется первичным кодированием. Несколько слов на эту тему уже было сказано (формулы 87 и 88), когда рассматривался генетический код.

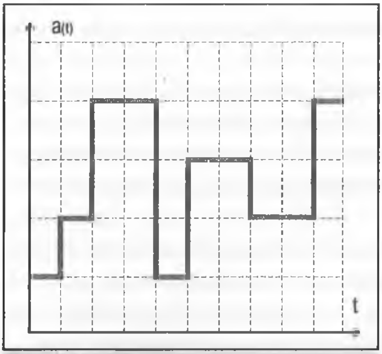



Рис. 41.

Человек при формировании сообщений научился выражать свои мысли в устной форме на определенном языке. В последствии устная форма была дополнена письменной речью, что заложило основу для сохранения и накопления знаний, а также развития логической мысли, базирующейся на строгих доказательствах. Другие представители мира реального, хотя и могут продемонстрировать свой язык общения, однако до письменной речи дело у них пока не дошло. На основании этого сделаем, может быть и не очень обоснованный, но все же вывод, что человек сумел достичь больше других живых существ на Земле в плане развития своего логического мышления и сформированных на основе этого наук. Как это могло произойти, до сих пор занимает умы многих исследователей. Мы же возьмем это за счастливую данность, отметив лишь, что сохранение этих завоеваний и их приумножение является, безусловно, приоритетной задачей человечества.

Но вернемся к первичному кодированию. Как уже отмечалось, представителям природы каким-то, не выясненным пока способами, удалось все же его реализовать, причем зачастую весьма успешно. Не вторгаясь пока в эту область, будем рассматривать в качестве исходного и данного сообщения **a(t)** и постараемся разобраться с их первичным кодированием и преобразованием в сигналы **s(t)**.

Сообщения **a(t)** принято представлять, как функцию времени. При этом, очевидно, что можно выделить следующие типы сообщений:

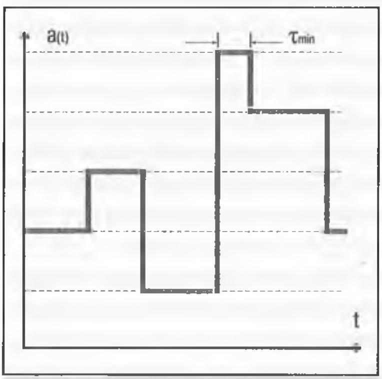



Рис. 42.

- дискретные сообщения дискретного времени - это сообщения, принимающие значения из некоторого счетного множества в дискретные и заранее известные моменты времени (рис. 41). Причем как значения сообщений, так и дискретные моменты времени могут отстоять друг от друга на неравные промежутки. (На рис. 41 интервалы взяты равные. Это частный, но весьма распространенный на практике случай);

- дискретные сообщения непрерывного времени - это сообщения, принимающие значения из некоторого счетного множества в любые моменты времени, отстоящие друг от друга на величину $\tau$, где $\tau_{min} \leqslant \tau \leqslant \infty$ (рис. 42);

- непрерывные сообщения дискретного времени - это сообщения, принимающие значения из некоторого континуального множества в дискретные и заранее известные моменты времени (рис. 43). Дискретные моменты времени, как уже отмечалось выше, могут отстоять друг от друга на неравные промежутки. (На рис. 43 интервалы взяты равные. Частный, но весьма распространенный на практике случай);

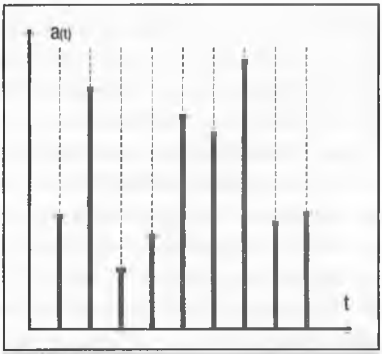


Рис. 43.

- непрерывные сообщения непрерывного времени - это сообщения, принимающие значения из некоторого континуального множества в любые моменты времени (рис. 44).

(Сигналы, как и сообщения, относятся к одному из вышеназванных типов, а именно дискретные сигнала дискретного времени, дискретные сигналы непрерывного времени, непрерывные сигналы дискретного времени, непрерывные сигналы непрерывного времени).

Рассмотрим **дискретные сообщения дискретного времени (ДСДВ)**. Для большей наглядности выберем в качестве таких сообщений буквы русского алфавита. Как известно, от **а** до **я** включительно, таких букв ровно **33**. Вспомнив выражение (87), можно отметить, что таким образом основание кода **d=33**, а это в свою очередь позволяет рассчитать, какое количество **(N)** сообщений **a(t)** может быть закодировано словами, состоящими из **n** букв. Итак, из (87) следует:

$$\mathbf{N = d^n = 33^n}. \qquad (147)$$

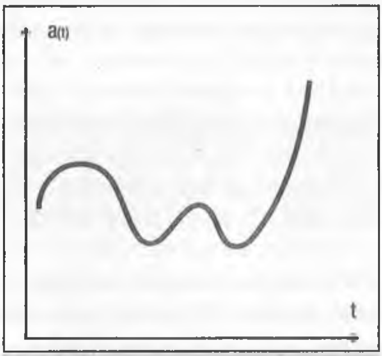


Рис. 44.

Одна из жителей **МИР**а, по имени Эллочка, имела словарный запас, состоящий из **20** слов. Это означает, что для их произнесения ей достаточно было использовать всего по одной букве из **33**. Для объяснения простейших желаний человеку вполне хватает приблизительно тысячи слов, что можно реализовать при двухбуквенных сочетаниях, когда **N=33²=1089**.

При трехбуквенных сочетаниях величина **$N=33^2=35937$**. Такого количества слов хватит для весьма разнообразного общения между людьми. Однако в реальной практике значительное количество граждан не применяют столь обширного словаря (к сожалению, как нам кажется). Несложно подсчитать значения **N** при **n=4; 5** и так далее. Уже при **n=4** количество различных четырехбуквенных сочетаний столь велико **(N=1185921)**, что с их помощью можно закодировать слова не только русского языка, но и английского, армянского, немецкого и французского. Но почему тогда человек - творение природы строит свой язык, применяя слова, состоящие из десятка и более букв, «недоиспользуя» ресурс кода по основанию **d=33**. Это тем более вызывает удивление, поскольку нам известен закон природы, утверждающий, что все ее творения совершенны и при этом цель должна достигаться максимально просто и экономно.

Ответ, по-видимому, состоит в том, что наш подход «в лоб» оптимизировать первичное кодирование сообщений, а именно речи, по принципу минимизации кодового слова, слишком примитивен и не адекватен реальной ситуации. Действительно попробуйте произнести слова из четырех или даже трех одинаковых букв, например **«ддд»** или **«ррр»**. Жуть какая-то получается, рычание, а не речь. Ну а если попытаться произнести **«ььь»** или **«ъяь»**, то, что получится? Точно, ничего не получится. Поэтому, конечно, каждый раз, предпринимая попытку говорить о какой-либо оптимизации, следует озаботиться ее адекватностью тем задачам, которые ставятся в совокупности.

(Для размышлений, хотя это и уводит нас от темы, можно попробовать сформулировать причины, по которым на Земле существует столько разных языков. Противоречит ли это названным выше законам? И что это, элемент случайности или определенности?)

Но вернемся к русской речи. Проведенные исследования показали, что русская письменная речь, состоящая из букв и различных дополнительных знаков, имеет неравномерный характер распределения. Для примера укажем среднюю частоту встречаемости букв на **1000** знаков, взяв эти данные в книге (А.М. Яглом, И.М. Яглом «Вероятность и информация» Наука, Москва, 1973).

**Таблица 11/1**

| знак | пробел | о | е | а | и | т | н | с | р | в | л | к | м | д | п | у |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ч-та | 174 | 90 | 72 | 62 | 62 | 53 | 53 | 45 | 40 | 38 | 35 | 28 | 26 | 25 | 23 | 21 |
| знак | я | ы | з | ь,ъ | б | г | ч | й | х | ж | ю | ш | ц | щ | э | ф |
| ч-та | 18 | 16 | 16 | 14 | 14 | 13 | 12 | 10 | 9 | 7 | 6 | 6 | 4 | 3 | 3 | 2 |

Если воспользоваться формулой (137), то по данным таблицы можно оценить энтропию. В данном случае она равна **H=4,35**, а это означает, что для кодирования одного знака (буквы) требуется не **5** двоичных символов, а **4,35**.

Буквы кодируют слова и таким образом формируют сообщения. Слова отражают мысль человека и являются формой представления информации. Однако очень часто мы сталкиваемся с тем, что имеющиеся словесные возможности не достаточны для выражения той информации, которую человек хотел бы передать. Но делать нечего. Слова, как детерминированное представление информации, безусловно, вносят некое «огрубление», которое можно было бы измерить, если бы удалось установить меру. Как это сделать пока не известно, но следует подчеркнуть, что речь строится так, что одно и тоже слово может приобретать разные значения. И более того, зачастую, смысл (информация) кроется не в словах по отдельности, а в целой фразе и даже не одной фразе, а неком тексте, включающем в себя множество фраз и уж тем более множество слов. Для демонстрации этого стоит всего лишь вернуться к стихам, которые так прекрасно звучали здесь и совсем недавно. О чем это говорит? О том, что компьютерный мир, превосходящий человека в своей определенности, существенно уступает в иной области, а именно, в области неопределенности. А мы уже установили, что именно неопределенность содержит информацию, тогда как **определенность имеет информацию, равную нулю!** Следовательно, **познание неопределенного** (определенное познавать не надо, ибо оно познано, если, конечно, не забыто) **возможно только через неопределенность**».

Последние слова Бит Байтович произнес со смешанным чувством, поскольку он собирался говорить о конкретных вещах, связанных с системами связи, но вдруг, увлекшись «вышел» на совершенно иные умозаключения, которые были скорее свойственны Музе-Диф. И это его несколько самоудивило. Однако видя, что коллеги внимательно слушают его, продолжил: «Системы связи относятся к искусственно созданным системам, которые работают по определенным правилам, заданным для них человеком. По этим системам или с помощью этих систем передаются сигналы, которые являются формой представления сообщений. Причем в данном случае мы можем ввести меру качества отображения сообщений в сигналах и на основе этого ввести ряд других количественных характеристик, которые позволяют рассчитывать системы связи, оптимизируя их построение. Таким образом, перенесем наше внимание на первичное кодирование дискретных сообщений дискретного времени **a(t)** посредством дискретных сигналов дискретного времени **s(t)**. Оставим для примера алфавит русского языка, содержащий в качестве сообщений **a(t) 33** буквы, а в качестве сигналов **s(t)** выберем электрические сигналы напряжением **U=U$_0$[B]**, соответствующего логической единице и **U=0[B]**, соответствующего логическому нулю. Таким образом, основание кода для первичного кодирования сообщений **a(t)** будет равно **d=2**. Такая конкретика хорошо согласуется с практикой современных систем связи, построенных на цифровых устройствах, реализованных на основе двоичных переключающих устройств. Это объясняется очень простой и дешевой технологией изготовления таких устройств, их высокой надежностью, экономичностью и прочее, что в целом можно характеризовать, как высокая технологическая эффективность. Возможно, этому найдутся объяснения и из общих областей, в которых весьма сведуща Муза-Диф, но я бы это оставил на потом, для, как говорится, домашней проработки, а сейчас мы это примем за широко распространенный частный случай, который при необходимости можно легко обобщить на другие условия.

Итак, мы имеем **M=33** сообщений (букв русского алфавита) и собираемся их закодировать посредством кода с основанием **d=2**. Используя выражение (87), легко вычислить, что при **n=5** количество различных комбинаций **N=32**, а при **n=6** соответственно **N=64**. Очевидно, что для однозначного кодирования сообщений, когда **N⩾M**, впервые подойдет случай, когда **n=6**. Однако при этом из **N=64** комбинаций для кодирования будут задействованы только **M=33**. Как-то не по-хозяйски, не используется **31** комбинация, то есть почти половина. Но что делать? Ведь надо, что бы выполнялось соотношение **N⩾M**.

После определенных размышлений на эту тему было предложено исключить одну букву из русского алфавита, как «не особо важную» при написании (все, конечно, догадались, что это была буква **«ё»**), и таким образом количество сообщений сократилось до **M=32**, а, следовательно, и кодировать их можно уже двоичной кодовой комбинацией из **n=5** элементов (иногда говорят символов). При этом и эффективность кодирования замечательная (ровно **1**), что следует из простых расчетов по формуле (88). Однако, как это часто бывает, наша радость по поводу удачного выбора кода оказалась преждевременной. Действительно, а где цифры, где знаки препинания, где, наконец «пробел», без которого все слова сольются в трудно различимую последовательность. Если все это учесть, то количество сообщений **M**, которые должны быть закодированы двоичным кодом, существенно возрастает. На практике известен ряд кодов, например, телеграфный код МТК-2, КОИ-8 и так далее, в которых каждому сообщению (букве, цифре, знаку препинания и прочее) ставится в соответствие двоичная кодовая комбинация определенной длины **(n)**. Отличие кодов состоит лишь в количестве сообщений **M**, которые ими отображаются в виде кодовых комбинаций. При этом, естественно, у разных кодов и разная длина кодовой комбинации **(n)**. Уместно так же обратить внимание на то, что выбор числа кодируемых сообщений связан с определенными требованиями к качеству передаваемых сообщений. Так, например, телеграфный код строился из предположения, что в тексте все буквы будут одного размера, то есть не будет ни заглавных, ни строчных. Понятно, что такой текст при распечатке будет иметь низкое качество и не вполне удобен для чтения. Но если исходить из того, что с помощью телеграмм передавались короткие тексты, не претендующие на литературное и полиграфическое совершенство, то такое решение по выбору количества кодируемых сообщений **M** можно считать приемлемым, понимая также, что такая потеря качества «возвратиться» меньшей длиной кодовой комбинации **(n)**, а, следовательно, это будет более экономное решение.

Обратим так же внимание на то, что при практической реализации кодов было замечено, что различные сообщения используются по-разному. Так, например, при печати текста сравнительно редко приходится печатать цифры. С другой стороны при печати цифрового материала, наоборот, редко приходится печатать буквы. Таким образом, сообщения можно из практических сооб-

**Таблица 12**

| Номер кодовой комбинации в десятичной форме | Кодовые комбинации в двоичной форме | | | | | Телеграфные сообщения | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | Русский регистр | Цифровой регистр | Латинский регистр |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | Перевод на русский регистр | | |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | Т | 5 | Т |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | Возврат каретки | | |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | О | 9 | О |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | Пробел | | |
| 5 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | Х | Щ | Н |
| 6 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | Н | , | N |
| 7 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | М | . | M |
| 8 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | Перевод строки | | |
| 9 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | Л | ) | L |
| 10 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | Р | 4 | R |
| 11 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | Г | Ш | G |
| 12 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | И | 8 | I |
| 13 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | П | 0 | P |
| 14 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | Ц | : | C |
| 15 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | Ж | = | V |
| 16 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | Е | 3 | E |
| 17 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | З | + | Z |
| 18 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | Д | Кто там? | D |
| 19 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | Б | ? | B |
| 20 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | С | , | S |
| 21 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | Ы | 6 | J |
| 22 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | Ф | Э | F |
| 23 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | Ь | / | X |
| 24 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | А | - | A |
| 25 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | В | 2 | W |
| 26 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | Й | Ю | J |
| 27 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | Перевод на цифры | | |
| 28 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | У | 7 | U |
| 29 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | Я | 1 | Q |
| 30 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | К | ( | K |
| 31 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | Перевод на латинский | | |

ражений разбить на группы (классы, регистры, кластеры). Далее часть кодовых комбинаций зарезервировать для передачи сведений о том, в какой группе будет вестись работа, и после этого оставшиеся кодовые комбинации можно использовать и для кодирования букв в одной группе, и для кодирования цифр в другой группе, и так далее. Пример такого распределения представлен в таблице 12, для широко применяемого в прошлом телеграфного кода МТК-2.

Более современные коды, которые используются при работе с компьютерами имеют сходный принцип построения и поэтому мы опустим их описание, указав лишь еще раз на то, что при практической реализации следует учитывать некие требования по качеству, исходя из которых осуществляется выбор **M**. Далее проводится анализ статистических свойств сообщений, что позволяет или не позволяет разложить их на классы, что, в свою очередь, дает возможность построить более экономный, с точки зрения минимизации **n**, первичный код.

В теории кодирования, рассмотренные выше примеры первичного кодирования сообщений, относят к категории равномерных блоковых кодов, когда каждое сообщение отображается кодовой комбинацией одинаковой длины **n**. При этом по умолчанию полагается, что при декодировании известно начало каждой кодовой комбинации. Подробно об этом мы будем говорить несколько позднее, но понимать данную проблему нужно уже сейчас, так как привычное для нас чтение текста с пробелами и знаками препинания, совершенно иначе реализуется в системах связи, которые тоже должны понимать начало и конец слова, начало и конец предложения и так далее. Реализуется это с помощью специальных устройств синхронизации или специальных самосинхронизирующихся кодов.

После кодирования каждое сообщение отображается **n** символьной кодовой комбинацией. Очевидно, что чем меньше требуемое для кодирования **n**, тем более экономным, а значит и более совершенным будет код.

Рассмотрим еще одну особенность блокового кодирования. Вернемся к примеру, когда требуется закодировать все буквы русского алфавита и **M=33**. Мы уже отмечали, что для однозначного кодирования потребуется кодовая комбинация из шести символов. При этом относительная эффективность кода согласно (88) равна:

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{33}}{\mathbf{64}} = \mathbf{0{,}516.} \qquad (148)$$

Теперь рассмотрим все возможные двухбуквенные и трехбуквенные сочетания, а после этого выясним, какой длины должны быть кодовые комбинации, что бы однозначно закодировать не отдельно буквы, а соответственно двух и трехбуквенные сочетания. Несложно определить, что всевозможных разных двухбуквенных сочетаний будет **$M=33^2=1089$**. Соответственно трехбуквенных сочетаний будет **$M=33^3=35937$**. (Если вспомнить о формуле (87), то мы имеем дело с кодом по основанию **$d=33$**, состоящему соответственно из кодовых комбинаций длиной **$m=1$, $m=2$, $m=3$**. При этом в данном случае через **M** и **m** обозначено то, что в формуле (87) обозначалось через **N** и **n**).

Для однозначного кодирования всех двухбуквенных сочетаний потребуется двоичная кодовая комбинация из **$n=11$** символов. При этом всего кодовых комбинаций будет **$N=2048$** и, следовательно, относительная эффективность равна:

$$k = \frac{1089}{2048} = 0{,}532. \tag{149}$$

Аналогично рассмотренному для кодирования трехбуквенных сочетаний потребуется кодовые комбинации, состоящие из **$n=16$** символов и всего их может быть **$N=65536$**. Относительная эффективность равна:

$$k = \frac{35937}{65536} = 0{,}548. \tag{150}$$

Сравнение предложенных способов кодирования показывает, что, увеличивая длину кодируемого сообщения **m**, можно повысить эффективность блокового кодирования, то есть уменьшить относительное количество символов **n**, затрачиваемых на одно сообщение из **M** возможных. Однако расплатой за это становится задержка сообщения, которое надо накапливать, чтобы получить соответственно двухбуквенное или трехбуквенное сочетание. Причем задержка растет линейно, тогда, как относительная эффективность возрастает значительно медленнее.

Поскольку сообщение можно рассматривать, как кодовую комбинацию из **m** элементов кода по основанию **$d_1$** (в нашем примере **$d_1=33$**), а сигнал так же, как кодовую комбинацию, но соответственно длиной n и по основанию **$d_2$** (в нашем примере **$d_2=2$**), то для количественного сопоставления вводят относительный показатель **n/m**, определяющий количество символов сигнала **s(t)**, затрачиваемых на кодирование одного элемента сообщения **a(t)**. Из очевидного условия однозначного кодирования **$N \geqslant M$** следует соотношение:

$$n \geqslant \log_{d_2} M = \frac{\log M}{\log d_2} \tag{151}$$

Соответственно относительный показатель **n/m** определяется, как:

$$\frac{n}{m} \geq \frac{\log M}{m \cdot \log d_2}. \tag{152}$$

Величину

$$R = \frac{\log M}{m} \tag{153}$$

принято называть скоростью кода источника сообщений. В нашем примере, когда кодирование сообщений производится посредством двоичных символов сигнала $s(t)$ ($d_2=2$), скорость кода представляет собой число двоичных символов, затрачиваемых на кодирование одного сообщения.

Из понятных соображений экономного кодирования возникает очевидная потребность выяснить минимально необходимое число $n$ и соответственно минимально необходимую скорость кода $R$. Для этого следует рассматривать источник сообщений, как ансамбль сообщений $\{a_i; p_i\}$ при $i=1...M$, характерный не только перечислением множества сообщений $M$, но и вероятностью появления каждого сообщения $p_i$. В общем случае каждое сообщение можно представить, как некоторую последовательность $M_m$, состоящую из $m$ элементов сообщения $a(t)$. Если вернуться к нашему примеру, то не сложно заметить, что появление ряда сообщений весьма маловероятно, например, сообщений, при $m=3$, вида «**ЪЪЪ**» или «**ЙЪЯ**» и так далее. Таким образом, все множество последовательностей $M_m$ можно разделить на два непересекающихся подмножества $T_m$ и $\bar{T}_m$. При этом, как нам подсказывает теорема о высоковероятных множествах, доказанная в теории вероятностей, при $m \to \infty$, вероятность того, что сообщение будет принадлежать подмножеству $T_m$ стремится к **1**, а вероятность того, что сообщение будет принадлежать подмножеству $\bar{T}_m$ соответственно к **0**. Конечно, точные значения этих вероятностей принадлежностей подмножествам $T_m$ и $\bar{T}_m$ следует каждый раз рассчитывать для конкретного распределения вероятностей сообщений и определенной величины $m$. Кроме того, нет общего решения, позволяющего формально указать, для всех возможных ансамблей, сообщения из множества $M_m$, которые следует отнести к $T_m$ или $\bar{T}_m$. Решение этих вопросов фактически будет определять точность результатов оценки и явится условием адекватности теоретической модели реально возможной.

Рассматривая вышеуказанное разбиение $M_m$ на $\bar{T}_m$ и $\bar{T}_m$, можно доказать, что наименьшая скорость кодирования источника сообщений (**R**) равна энтропии источника (**H**).

Если перейти к рассмотрению кодирования сообщений посредством двоичных символов, то минимальная скорость кодирования, соответствующая наименьшему количеству символов, затрачиваемых на кодирование одного сообщения, равна **H** битам.

Итак, мы подошли к важнейшей потенциальной характеристике первичного кодирования, что **наименьшая скорость блокового кодирования равна энтропии источника**. Это означает, что и здесь существует определенное ограничение, которое нельзя «перепрыгнуть» в попытке реализовать код с характеристиками, превосходящими значение энтропии.

Несмотря на вышеизложенное, была предпринята попытка поискать более эффективные способы кодирования, отказавшись от принципа блокового кодирования, когда каждому сообщению ставится в соответствие кодовая комбинация определенной и всегда одинаковой длины **n**. Возникла идея, наиболее вероятным сообщениям ставить в соответствие кодовые комбинации покороче, а маловероятным сообщениям, наоборот, ставить в соответствие более длинные кодовые комбинации. При этом сохранялось условие **N⩾M**. Одним из практических создателей такого кода явился человек по имени Морзе, предложивший до сих пор применяемый код, названный по его имени. Используя статистические наблюдения за частотой встречаемости букв в английском языке, он предложил неравномерный способ кодирования, который имеет определенный эквивалент и для русского языка (таблица 13).


**Код Морзе**

Этот код широко применялся в прошлом в телеграфии, при приеме на слух, и для случаев установления простейшей связи, когда ресурсов для других, более совершенных видов связи, недостаточно или просто нет. Например, в случае аварии или при обмене сообщениями радиолюбителями. Этот код является кодом по основанию **d=3** (точка, тире и пауза) и отличается чрезвычайной простотой и эффективностью практического применения. Кроме того, это удивительный пример того, как не специалист в области кодирования, коим являлся господин Морзе, смог предложить способ кодирования, получивший столь широкое применение».

«Ну, а как теперь? Возможны ли подобные неожиданности от «новичков»? - немедленно среагировав на последние слова Файлтона, спросила Муза-Диф. - Или уже все зашло настолько далеко, что специалисты из разных областей уже не понимают друг друга. И прежде чем обнаружить что-либо новое следует «продираться» сквозь толщу уже пройденных знаний. А ведь если это так, то путь познания может оказаться ограниченным, в силу естественного ограничения возможностей по переработке информации. Как же быть?»

«Ну что же, действительно, такая опасность существует, - выслушав Музу, продолжил Бит Байтович. - однако будем надеяться на нераскрытые возможности человека, да еще и в союзе с компьютерами. Обратите внимание, что именно телекоммуникации и компьютеры позволили создать среду глобального информационного обмена. Кроме того, как мне кажется, «разошедшиеся в разные стороны» специалисты разных профессий все чаще обнаруживают проявления схожих законов, что ведет к их объединению и взаимопониманию. Кстати и наша беседа служит и этой цели в том числе. Однако я возвращаюсь к неравномерным кодам.

Как уже отмечалось, специальные устройства синхронизации позволяют при приеме сигнала **s(t)** определять начало каждой **n**-символьной комбинации блокового кода. Это принципиально возможно только потому, что заранее известно, что каждая кодовая комбинация имеет определенную длину. При неравномерном кодировании такое условие не выполнимо, так как разные сообщения могут кодироваться кодовыми комбинациями разной длины, а какие сообщения будут передаваться заранее не известно. Таким образом, неравномерные коды надо строить так, что бы они были декодируемы на приеме. А это означает, что ни одна кодовая комбинация неравномерного кода не должна совпадать с началом другой кодовой комбинации.

Благодаря коллегам Пи Е Тета, удалось доказать очень важную теорему, которая получила название **неравенство Крафта**. В принятых у нас обозначениях эта теорема гласит: для кодирования **M** сообщений посредством неравномерного кода по основанию **d**, содержащего кодовые комбинации из $m_1, m_2, \ldots, m_M$ символов, необходимо и достаточно выполнение следующего неравенства:

$$\sum_{i=1}^{M} d^{-mi} \leqslant 1. \qquad (154)$$

Данная теорема оговорила общие условия, при которых можно построить декодируемый неравномерный код, однако не указала пути, как это сделать. Но благодаря усилиям известного специалиста Хаффмена, была предложена процедура построения оптимального неравномерного кода, которая получила название **кода Хаффмена**. Оставим для интересующихся строгое обоснова-

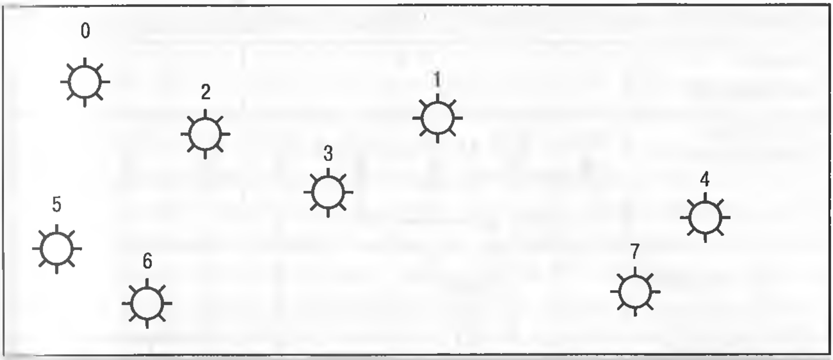



**Рис. 45.**

ние этого кода, а продемонстрируем лишь найденный способ на конкретном примере, который можно обобщить на все другие возможные случаи.

Рассмотрим конкретный случай, когда на некотором рекламном панно расположено **8** лампочек так, как это изображено на рис. 45. Пронумеруем все эти лампочки цифрами от **0** до **7**, например, слева направо и сверху вниз.

Зажигание лампочек будет происходить последовательно под руководством известнейшего светомузыканта. При этом зажигание каждой лампочки будет сопровождаться формированием кодовой комбинации, передаваемой средствами связи на другой конец Земли для того, что бы там собравшиеся у аналогичного панно люди смогли увидеть, благодаря поступающим кодовым комбинациям, выдающуюся игру светомузыканта. (У собравшихся и особенно у Музы-Диф заранее прошу прощения за чрезмерную напыщенность примера.) Возникает вопрос, как наиболее экономно осуществить однозначное кодирование передаваемых сообщений.

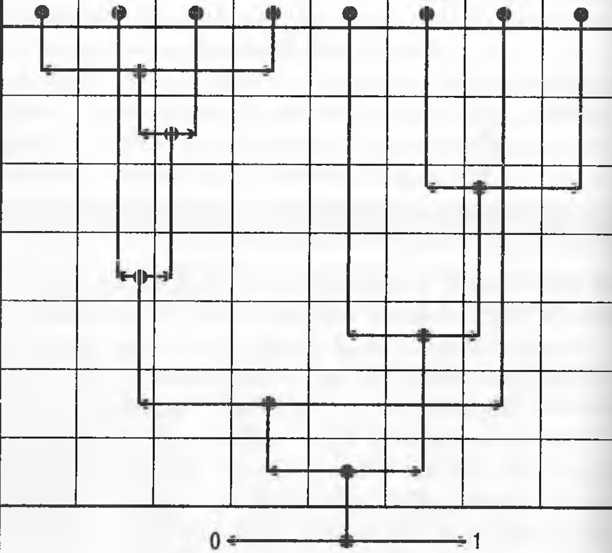
Для полноты картины при построении оптимального неравномерного кода помимо того, что надо передавать сообщения о **8** лампочках, надо знать вероятности передачи сообщений о зажигании каждой лампочки. Поэтому предположим, что во время репетиций выдающегося светомузыканта удалось получить необходимые статистические данные и нам известен ансамбль сообщений $\{a_i; p_i\}$ при **i=0,...,7**.

В таблице 14 в верхней строке представлены сообщения под номерами от **0** до **7**. Следующая строка представляет вероятности появления соответствующих сообщений.

В следующих строках представлены этапы построения неравномерного оптимального кода Хаффмена. На первом этапе из второй строки выбираются сообщения, имеющие наименьшие вероятности из всех приведенных сообщений. В нашем примере это сообщения с номерами **0** и **3**. В результате объединения мы получаем сумму вероятностей, которая сравнивается с веро-

**Таблица 14**

| Номера сообщений ($a_i$) | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Вероятности сообщений ($P_i$) | | 0,05 | 0,18 | 0,06 | 0,05 | 0,19 | 0,10 | 0,25 | 0,12 |
| Дерево Хаффмена | 1-й этап | | | | | | | | |
| | 2-й этап | | | | | | | | |
| | 3-й этап | | | | | | | | |
| | 4-й этап | | | | | | | | |
| | 5-й этап | | | | | | | | |
| | 6-й этап | | | | | | | | |
| | 7-й этап | | | | | | | | |
| Условие кодирования | | 0 ← → 1 | | | | | | | |
| Неравномерный код Хаффмена | | 00100 | 000 | 0011 | 00101 | 10 | 110 | 01 | 111 |
| Равномерный код | | 000 | 001 | 010 | 011 | 100 | 101 | 110 | 111 |



ятностями оставшихся сообщений. По результатам сравнения происходит объединение двух наименее вероятных событий. В нашем примере это полученное ранее от объединения событие и сообщение с номером **2**. На следующем шаге наименьшие вероятности имеют события **5** и **7**, которые должны быть в результате этого объединены. И так далее. В результате каждого объединения количество сообщений «сокращается» на единицу. Поэтому через семь шагов построение кода Хаффмена будет закончено, и мы получим некоторое дерево, окончания ветвей которого соответствует сообщениям с номерами от **0** до **7**, а его основание находится внизу таблицы.

Двигаясь от основания дерева к окончанию его ветвей, условимся, что всякий поворот направо кодируется, как **1**, а всякий поворот налево, как **0**. В результате этого исходные сообщения с номерами от **0** до **7** будут закодированы неравномерным кодом Хаффмена, указанном в предпоследней строке таблицы 14.

Далее дан пример равномерного кода при **n=3** с указанием конкретных кодовых комбинаций. Несложно заметить, что эти комбинации соответствуют десятичным числам от **0** до **7** в двоичном исчислении. Такой двоичный код называют взвешенным, поскольку каждый символ имеет свой вес. Так первый справа символ в двоичной комбинации имеет вес $2^0=1$, второй $2^1=2$ третий $2^2=4$ и так далее для кодовых комбинаций большей длины.

Сравним результаты кодирования равномерным и неравномерным кодом. В первом случае длина кодовой комбинации одинаковая и равна **3**. Во втором случае кодовые комбинации имеют длину от **2** до **5**. В среднем же, памятуя формулу (123), средняя длина равна **2,82**. Это говорит о том, что неравномерный код обеспечивает при конечной длине кодовой комбинации, более экономное кодирование. Однако неравномерное кодирование вносит определенную неравномерность и в процесс декодирования, что весьма неудобно при восстановлении исходного сообщения. Отметим так же, что неравномерный код Хаффмена «избирательно настроен» на исходные статистические данные. Если они изменятся, то достигнутый с его помощью выигрыш может обернуться проигрышем по отношению к равномерному коду. В то время как равномерный код во всех случаях имеет одну и ту же длину кодовой комбинации, и он как бы «прозрачен» для сообщений с любыми распределениями вероятностей. Таким образом, выбор кода следует тщательно обдумывать с различных позиций».

«Бит Байтович, - с очевидным коварством в голосе, начала Муза-Диф. - Мы вот тут с Силушкой Водородовной подумали, а что, если взять реальное дерево, например, яблоньку-трехлетку. Ведь мы можем считать это реальное дерево кодом Хаффмена!? И раз это так, то, следовательно, это некое закодированное послание, которое передает своими ветвями данное дерево. А дальше - больше. Яблоневый сад - это целая книга. Но вот кто ее читал, да и есть ли во всем этом смысл»?

«На счет смысла, не знаю. Такой «яблоневой» книги не читал, - подхватив тон Музы, не растерялся Файлтон, - но если серьезно, то надо начинать с определения букв, слов и так далее. Это так, как если бы мы занимались расшифровкой незнакомого языка или письменности. При этом дело усложняется еще и тем, что мы далеко не уверены, что дерево «способно» выражать свои «мысли» через код Хаффмена. Скорее конструкция ветвей - это проявление других влияний и, прежде всего стремления ветвей к свету. Однако не буду ни на чем настаивать, поскольку исчерпывающих доказательств за, или против Вашего романтического примера у меня нет. Пусть над этим поразмышляют любопытные граждане **МИР**а, склонные к поиску сюрпризов природы. Я же возвращаюсь к вопросам первичного кодирования сообщений.

Итак, мы выяснили, что при определенных условиях неравномерное кодирование обеспечивает в среднем меньшую длину кодовой комбинации по сравнению с блоковым равномерным кодом. До этого мы узнали, что минимальная скорость кодирования равномерным кодом равна энтропии. Тогда правомерен вопрос, а какова минимальная скорость кодирования для неравномерного кода? Оказалось, что она тоже равна энтропии источника. При этом следует еще раз подчеркнуть, что источник сообщений в этом случае должен быть эргодическим, для которого к последовательности выдаваемых сообщений применим закон больших чисел.

Подводя итог рассмотренным вопросам, еще раз укажем на то, что при любом способе кодирования (равномерный или неравномерный) минимальная скорость кодирования определяется энтропией источника. Данное утверждение хорошо согласуется с нашим пониманием того, что мерой информации является ее неопределенность. Если же все определено, то количество информации равно **0**, а, следовательно, и передавать нечего, поскольку все известно».

«Битик Байтович, - вновь раздался голос Музы, которой, по-видимому, очень хотелось чем-нибудь «огорошить» Файлтона, - а почему в рассматриваемом примере Вы именно так пронумеровали лампочки. А, что, если это сделать по-другому? Может быть, тогда и кодирование будет чем-то лучше? А может хуже? Но что-то от этого зависит или нет?

Вот Вас, например, зовут Бит Байтович. Ну а, если Вас назвать Вольдемар Вольдемарович. Это изменит что-то или нет? Как Вы думаете»?

«Ну, конечно, изменит. Ну, например, хотя бы мой паспорт, - подыгрывая Музе-Диф, ответил Файлтон. - Кроме того, возможны изменения и по другим линиям жизни. Кому-то понравится такое имя, а кому-то нет, так что всякие изменения возможны. Ну да, что я Вам рассказываю, когда Вы это можете представить не хуже меня. Однако для первичного кодирования, как это не странно, поставленный Вами вопрос тоже имеет значение. И действительно вовсе не все равно, как перенумеровать лампочки или в какой последовательности ставить в соответствие двоичные кодовые комбинации исходным сообщениям. Однако названные особенности начинают проявляться только при введении дополнительных условий, а именно, действии помех, которые приводят к ошибкам, в результате которых одна кодовая комбинация может быть принята, как другая и, следовательно, вместо одного сообщения будет принято другое. Рассмотрим это более подробно на примере равномерного блокового кода, представленного в таблице 14.

Мы уже отмечали, что для этого примера в качестве равномерного блокового кода, отображающего сообщения с номерами от **0** до **7**, был выбран двоичный взвешенный код (последняя строка в таблице 14). Однако в общем случае количество способов кодирования **(D)** равно:

$$\mathbf{D = (d^n)!.} \qquad (155)$$

Следовательно, для рассматриваемого примера, когда **d=2**, а **n=3**, имеем:

$$D = (2^n)! = 40320. \qquad (156)$$

Выберем для наглядности, три разных варианта равномерного кодирования сообщений, изображенных на рис. 45. Первым - возьмем двоичный взвешенный код, вторым и третьим способами, выберем наугад взятые варианты соответствия двоичной кодовой комбинации сообщениям **($a_i$)**, имеющим номера от **0** до **7** (таблица 15).

Таблица 15

| **Номера сообщений ($a_i$)** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Вариант 1 | 000 | 001 | 010 | 011 | 100 | 101 | 110 | 111 |
| Вариант 2 | 000 | 111 | 011 | 101 | 010 | 100 | 110 | 001 |
| Вариант 3 | 101 | 011 | 010 | 000 | 100 | 110 | 111 | 001 |

Построим еще одну таблицу (табл. 16), в которой укажем расстояние (в километрах) между лампочками, изображенными на рис. 45

Таблица 16

| **Номера сообщений $a_i$ в десятичной форме** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 52 | 18 | 41 | 90 | 44 | 48 | 96 |
| 1 | 52 | 0 | 40 | 20 | 40 | 75 | 65 | 57 |
| 2 | 18 | 40 | 0 | 22 | 72 | 36 | 32 | 73 |
| 3 | 41 | 20 | 22 | 0 | 49 | 54 | 45 | 55 |
| 4 | 90 | 40 | 72 | 49 | 0 | 98 | 85 | 31 |
| 5 | 44 | 75 | 36 | 54 | 98 | 0 | 15 | 88 |
| 6 | 48 | 65 | 32 | 45 | 85 | 15 | 0 | 74 |
| 7 | 96 | 57 | 73 | 55 | 31 | 88 | 74 | 0 |

Совершенно очевидно, что в основной диагонали данной таблицы (матрицы расстояний сообщений **$a_i$** - **$M_a$**) будут стоять нули, а на остальных местах конкретные значения расстояния между **i** и **j** лампочками, измеренные по рис.45 в соответствующем масштабе. Следует так же отметить, что таблица 16 симметрична относительно главной диагонали, что очевидно следует из того условия, что расстояние от **i** до **j** такое же как, наоборот, от **j** до **i**. Хотя, я думаю, Пи Е мог бы предложить экзотичные случаи, когда это не справедливо.

Аналогично рассмотренному составим таблицу расстояний (матрицу расстояний сигналов - **$M_s(n)$**) для двоичных кодовых комбинаций (таблица 17). При этом расстоянием между комбинациями будет являться количество разрядов, по которым кодовые комбинации отличаются друг от друга. В теории кодирова-

Таблица 16

| Двоичный взвешенный код | 000 | 001 | 010 | 011 | 100 | 101 | 110 | 111 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 000 | 0 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 3 |
| 001 | 1 | 0 | 2 | 1 | 2 | 1 | 3 | 2 |
| 010 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 |
| 011 | 2 | 1 | 1 | 0 | 3 | 2 | 2 | 1 |
| 100 | 1 | 2 | 2 | 3 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 101 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 |
| 110 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 2 | 0 | 1 |
| 111 | 3 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 0 |

ния это расстояние принято называть расстоянием Хемминга по имени автора, определившего таким образом метрику двоичного пространства.

Таблица 17 имеет несколько осей симметрии, которые можно разглядеть за кажущейся сумятицей цифр. Более того, эта таблица строится по следующему правилу: матрица $\mathbf{M_s(n)}$ для некоторого $\mathbf{n}$ имеет размерность $\mathbf{2^n x 2^n}$ и формируется из матрицы $\mathbf{M_s(n\text{-}1)}$, построенной для $\mathbf{(n\text{-}1)}$, соответственно размерностью $\mathbf{2^{n-1}x2^{n-1}}$, и матрицы $\mathbf{E}$ той же размерности, то есть $\mathbf{2^{n-1}x2^{n-1}}$, целиком состоящей из $\mathbf{1}$. Представим это в виде следующего рекуррентного выражения:

$$\mathbf{M_s(n)} = \begin{Vmatrix} \mathbf{M_s(n-1);\ M_s(n-1) + E} \\ \\ \mathbf{M_s(n-1) + E;\ M_s(n-1)} \end{Vmatrix} \qquad (157)$$

Любопытные и неверующие на слово могут проверить построение таблицы 17 по формуле (157).

Несколько отвлекаясь на детали, следует отметить чрезвычайно интересную структуру матрицы $\mathbf{M_s(n)}$, которая с ростом $\mathbf{n}$ делается с одной стороны все более разнообразной, но с другой стороны в ней все более весомое значение будут приобретать числа, равные и близкие к $\mathbf{n/2}$. Для демонстрации этого укажем $\mathbf{M_s(n)}$ для $\mathbf{n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4}$ и мы увидим, как из нуля начнет появляться рекуррентное разнообразие.

$$\mathbf{M_s(0)} = \|\mathbf{0}\|,$$

$$\mathbf{M_s(1)} = \begin{Vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{M_s(2)} = \begin{Vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{Vmatrix}$$

$$
M_s(3) = \begin{Vmatrix}
0&1&1&2&1&2&2&3\\
1&0&2&1&2&1&3&1\\
1&2&0&1&2&3&1&2\\
2&1&1&0&3&2&2&1\\
1&2&2&3&0&1&1&2\\
2&1&3&1&1&0&2&1\\
2&3&1&2&1&2&0&1\\
3&2&2&1&2&1&1&0
\end{Vmatrix}
$$

$$
M_s(4) = \begin{Vmatrix}
0&1&1&2&1&2&2&3&1&2&2&3&2&3&3&4\\
1&0&2&1&2&1&3&1&2&1&3&2&3&2&4&2\\
1&2&0&1&2&3&1&2&2&3&1&2&3&4&2&3\\
2&1&1&0&3&2&2&1&3&2&2&1&4&3&3&2\\
1&2&2&3&0&1&1&2&2&3&3&4&1&2&2&3\\
2&1&3&1&1&0&2&1&3&2&4&2&2&1&3&2\\
2&3&1&2&1&2&0&1&3&4&2&3&2&3&1&2\\
3&2&2&1&2&1&1&0&4&3&3&2&3&2&2&1\\
1&2&2&3&2&3&3&4&0&1&1&2&1&2&2&3\\
2&1&3&2&3&2&4&2&1&0&2&1&2&1&3&1\\
2&3&1&2&3&4&2&3&1&2&0&1&2&3&1&2\\
3&2&2&1&4&3&3&2&2&1&1&0&3&2&2&1\\
2&3&3&4&1&2&2&3&1&2&2&3&0&1&1&2\\
3&2&4&2&2&1&3&2&2&1&3&1&1&0&2&1\\
3&4&2&3&2&3&1&2&2&3&1&2&1&2&0&1\\
4&3&3&2&3&2&2&1&3&2&2&1&2&1&1&0
\end{Vmatrix}
$$

Любопытным гражданам **МИР**а можно предложить поискать способ определения числа, стоящего в матрице $\mathbf{M_s(n)}$ на пересечении **i**-ой строки и **j**-ого столбца. Однако вернемся к обсуждаемому примеру.

В таблице 15 помимо взвешенного кода (вариант 1) даны два наугад взятых вариантов кодирования. Для них несложно получить матрицы расстояний, аналогичных таблице 17 путем соответствующей перестановки строк и столбцов. Однако при этом, к сожалению, нарушится правило построения таблицы 17 по формуле (157) и построения будут более трудоемкими, что как-то огорчает. Так вот после этих предварительных замечаний рассмотрим пример, который докажет, что Муза-Диф была права, когда спрашивала о влиянии того, как кого зовут.

Предположим, что лампочки на панно загорятся в следующей последовательности (укажем их номера) - **{3,5,6,1}**. Эквивалентом этому будут следующие комбинации двоичного кода, для варианта **1** имеем - **{011,101,110,001}**, для варианта **2 - {101,100,110,111}**, для варианта **3 - {000,110,111,011}**.

Предположим далее, что из-за различных помех, возможен с вероятностью **p** неверный прием одного символа в кодовой последовательности, передающей информацию о зажигаемых лампочках.

Для первого варианта при ошибке в первом символе кодовая комбинация **011** будет трансформирована в **111**. При ошибке во втором символе соответственно в **001** и при ошибке в третьем символе в **010**. Это будет означать (см. таблицу 15), что вместо лампочки с номером **3** из-за указанных ошибок будут зажигаться соответственно лампочки с номерами или **7**, или **1**, или **2** (схематично запишем это в следующем виде **3→7,1,2**). Проведя аналогичные рассуждения для варианта **2**, получим, что однократные ошибки в первой комбинации приведут к тому, что вместо лампочки с номером **3** будут зажигаться лампочки с номерами или **7**, или **1**, или **5 (3→7,1,5)**. Для третьего варианта соответственно, вместо **3**-ей лампочки, или **4**-ая, или **2**-ая, или **7**-ая **(3→4,2,7)**. Как мы видим в зависимости от варианта кодирования мы получаем в результате одних и тех же ошибок разные варианты неверного восстановления исходного сообщения. Отсюда вывод, что на самом деле важно, памятуя вопрос Музы-Диф, как назвать Ивана, Иваном или Петром.

Проведя дальнейшее изучение влияния ошибок на декодирование сообщений, можно для первого варианта представить следующий итог **{3→7,1,2; 5→1,7,4; 6→2,4,7; 1→5,3,0}**. Для второго варианта - **{3→7,1,5; 5→0,6,3; 6→4,5,1; 1→2,3,6}** и, наконец, для третьего - **{3→4,2,7; 5→2,4,6; 6→1,0,5; 1→7,6,4}**. (Между прочим, заметим, что приведенные соотношения можно получить из таблицы 17, взяв кодовые комбинации, отличающиеся от исходных на расстояние Хемминга, равное **1**).

Итак, во всех случаях мы получили разные исходы влияния ошибок, но при этом не ответили на вопрос, а что же хуже? Для того, что бы сделать это, надо ввести метрику, позволяющую «измерять» последствия ошибки. И сделать это надо, выбрав среди множества способов, которые приходят в голову, тот, который отвечает потребностям реальной практике. Ну а тут уж, кроме как на ЗДРСМ, надеяться не на кого!

Одним из используемых способов является задание евклидовой метрики. Рассмотрим этот случай в качестве примера, тем более что в таблице 16 приведены расстояния между лампочками, изображенными на рис. 45. Таким образом, для варианта **1**, если вместо лампочки **3** загорается лампочка **7**, ошибка будет измеряться, исходя из таблицы 16, величиной равной **55 км**. Соответственно, если ошибочно загорается лампочка **1** то это **20км** и, если лампочка **2**, то это **22 км**. В результате, вместо схемы **3→7,1,2** для варианта **1**, будем писать «результаты измерений» в следующем виде: **3→55,20,22**. Совокупно для варианта **1** «измеренные» ошибки можно записать следующим образом: **{3→55,20,22; 5→75,88,98; 6→32,85,74; 1→75,20,52}**. Для варианта **2** - **{3→55,20,54; 5→44,15,54; 6→85,15,65; 1→40,20,65}** и для варианта **3** - **{3→49,22,55; 5→36,98,15; 6→65,48,15; 1→57,65,40}**. Общая «длина» возможных ошибок для варианта **1**, равная сумме длин, следующая - **696 км**. Для варианта **2** - **532 км** и для варианта **3** - **565 км**.

Надеюсь, что в приведенной выше арифметике я не совершил ошибок, что было бы особенно обидно в присутствии Пи Е Тета, и мы видим, как достаточно существенно варианты кодирования влияют на результат передачи и восстановления исходных сообщений. Конечно, справедливы вопросы, а что произойдет, если будут передаваться другие сообщения или будут другие ошибки. К сожалению, исчерпывающего ответа на эти вопросы пока нет. Так что есть область, в которой можно себя проявить. При этом особый интерес могут представлять исследования общей постановки данного вопроса о многократных преобразованиях в различных метрических пространствах. В нашем примере расстояние между лампочками измерялось в евклидовом пространстве, а расстояние между кодовыми комбинациями в хемминговом пространстве. Вот и получается вопрос, как при условии возможного возникновения ошибок надо закодировать в пространстве Хемминга, что бы в пространстве Евклида все было хорошо?!

Интересен общий вывод из того, что мы только что рассмотрели. Он состоит в том, что под всякие изменяющиеся условия существует свое наилучшее решение. Да, мы часто не знаем этого решения, но нам известно, что оно есть. Кроме того, надо всегда помнить о существовании потенциальных границ, определяющих «пределы совершенства». Это очень важно, поскольку, во-первых, еще раз доказывает существование, открытого Музой-Диф всеобщего закона об «ограниченной плотности», а, во-вторых, предупреждает исследователей в их стремлении найти все более эффективное по сравнению с известными решение, в какой бы области это не происходило. При этом, конечно, необходимо, чтобы пределы были определены корректно и адекватно исследуемой ситуации.

В теории связи кроме первичного кодирования сообщений изучают также вопросы помехоустойчивого кодирования. Основная идея состоит в том, что для кодирования сообщений используются не все кодовые комбинации, а только некоторая часть, называемая разрешенные кодовые комбинации. Оставшиеся же кодовые комбинации называют запрещенными. Используя такое разделение на разрешенные и запрещенные кодовые комбинации, строят процессы обнаружения и исправления ошибок.

Рассмотрим эти идеи на примере блокового кода по основанию **d=2** и при длине кодовой комбинации **n=3**. Предположим также, что нам надо передать всего лишь сведения (сообщения) о том какое в данный момент время суток - день или ночь. Исходя из поставленной задачи, совершенно ясно, что надо передавать сигналы только о двух сообщениях, для кодирования которых вполне достаточно одного двоичного символа. Например, «день» - это единица, а «ночь» - это ноль. Но мы договорились, что наша кодовая комбинация будет состоять из **n=3** символов, и значит можно получить **$2^n$=8** различных кодовых комбинаций. В таблице 17 представлены все кодовые комбинации, а также кодовые расстояния между ними. Руководствуясь ЗДРСМом, несложно догадаться, что для кодирования сообщений «день» и «ночь» целесообразно выбрать комбинации, максимально отличающиеся друг от друга. Таких пар (табл.17 см. диагональ из нижнего левого угла в верхний правый) будет восемь и различия между ними будут во всех трех разрядах. Конкретный выбор пары может определяться какими-либо дополнительными условиями, либо в отсутствии их сделан наугад. Остановимся наугад на паре (**111**) - «день» и (**000**) - «ночь». Это, кстати, будет соответствовать, часто встречающемуся случаю, когда мы трижды повторяем одно и тоже. Совершенно ясно, что только трехкратная ошибка, искажающая все три символа кодовой комбинации, может привести к неверному приему сообщения, то есть приему сообщения «день» вместо «ночь» или наоборот. Все остальные ошибки меньшей кратности приводят к переходу от одной из разрешенных кодовых комбинаций (**000**) или (**111**) к каким-либо запрещенным, а именно, (**001**), (**010**), (**011**), (**100**), (**101**), (**110**). Поступление таких кодовых комбинаций свидетельствует о том, что произошла ошибка и таким образом ее обнаруживают. Более того, при соответствующих условиях ошибки можно исправлять. Но об этом чуть позже.

Теперь представим себе, что от нас потребовалось передавать сведения не о двух, а о четырех состояниях: «утро», «день», «вечер», «ночь». В этом случае надо из восьми кодовых комбинаций выбрать четыре для кодирования сообщений. Однако по сравнению с предыдущим случаем, придется немного напрячь ЗДРСМ, чтобы отобрать те комбинации, между которыми при попарном сравнении будет максимально возможное кодовое расстояние. В теории помехоустойчивого кодирования часто применяют понятие минимального кодового расстояния ($d_{min}$), равного минимальному значению кодового расстояния между разрешенными комбинациями кода при их попарном сравнении.

После размышлений выберем один из возможных вариантов разрешенных кодовых комбинаций, а именно, «утро» - (**000**), «день» - (**011**), «вечер» - (**101**) и «ночь» - (**110**). Оставшиеся комбинации (**001,010,100,111**) явятся запрещенными и будут служить обнаружению ошибок.

Запишем результаты попарного сравнения в виде спектра **w(000,011,101,110)**, образуемого при последовательном сравнении **000** с **000, 000** с **011, 000** с **101, 000** с **110**; потом **011** с **000, 011** с **011** и так далее, как матрицу

$$\mathbf{w(000,011,101,110)} = \left\| \begin{matrix} 0\,2\,2\,2 \\ 2\,0\,2\,2 \\ 2\,2\,0\,2 \\ 2\,2\,2\,0 \end{matrix} \right\| \qquad (158)$$

При любых попарных сравнениях кодовое расстояние между комбинациями оказалось равным 2. (За исключением случаев, когда комбинация сравнивается сама с собой). Можно сказать, что минимальное кодовое расстояние $\mathbf{d_{min}=2}$ и при этом оно наибольшее среди других вариантов выбора разрешенных кодовых комбинаций. Например, если выбрать разрешенными кодовыми комбинациями (**000,011,100,111**), то спектр весов следующий

$$\mathbf{w(000,011,100,111)} = \left\| \begin{matrix} 0&2&1&3 \\ 2&0&3&1 \\ 1&3&0&2 \\ 3&1&2&0 \end{matrix} \right\| \qquad (159)$$

При этом минимальное кодовое расстояние $\mathbf{d_{min}=1}$.

Если теперь вообразить задачу выбора сотен или тысяч разрешенных кодовых комбинаций среди еще большего множества возможных комбинаций, то станет ясно, что простым перебором это сделать практически не возможно. Значит нужно найти некоторые правила, позволяющие это реализовывать, руководствуясь формальными действиями. Собственно в этом и состоит задача выбора помехоустойчивого кода, который из множества комбинаций по определенным правилам выбирал бы разрешенные кодовые комбинации с максимально возможным минимальным кодовым расстоянием. Кроме того, следует выяснить определенные пределы, устанавливающие границы для теоретически достижимого значения $\mathbf{d_{min}}$. То, что такие пределы существуют - это очевидно, но вот как их вычислить? Например, в рассмотренном случае при $\mathbf{n=3}$ невозможно найти три таких кодовых комбинации, между которыми при попарном сравнении минимальное кодовое расстояние было бы равно **3**. Две кодовые комбинации, да еще и с множеством вариантов найти можно, а вот три нельзя.

Существующая теория помехоустойчивого кодирования смогла ответить на многие вопросы, в том числе и о потенциальных возможностях кодов, хотя общего завершенного решения для всех случаев пока не найдено.

Рассмотрим несколько математических подходов для построения помехоустойчивых кодов. Пусть кодовая комбинация состоит из $\mathbf{n}$ символов (элементов, разрядов). При этом первые $\mathbf{k}$ символов, назовем их информационными, служат для кодирования сообщений, а оставшиеся $\mathbf{r=n-k}$ символов, назовем их проверочными, формируются по определенным правилам в интересах основной цели помехоустойчивого кодирования, а именно, обнаружения максимально возможного числа ошибок. (Терминологически коды, в которых можно указать информационные и проверочные разряды, принято называть систематическими или разделимыми.) Для определенности будем рассматривать код по основанию **2**, и, таким образом, при общем числе кодовых комбинаций $\mathbf{N=2^n}$, разрешенных комбинаций будет $\mathbf{K=2^k}$, а запрещенных соответственно $\mathbf{R=N-K=2^k(2^{n-k}-1)=2^k(2^r-1)}$.

Эффективностью кодирования будем называть отношение

$$Э = \frac{k}{n}, \qquad (160)$$

понимая, что из передаваемых **n** символов, только **k** несут информацию о сообщениях, а остальные **r** символов, хотя и лишние для этих целей, но в тоже время весьма необходимые для обнаружения ошибок. Это противоречие является основной задачей оптимизации помехоустойчивого кодирования, поскольку с одной стороны хотелось бы иметь **Э** как можно ближе к **1**, но с другой стороны при малом значении **r** исправляющие способности помехоустойчивого кода оказываются зачастую недостаточными по отношению к возникающим требованиям. (Эффективность из (160) имеет тот же смысл, что и скорость кодирования, введенная через (153), и поэтому ее тоже можно назвать скоростью помехоустойчивого кода).

В теории кодирования был доказан ряд предельных теорем, которые очертили достижимые границы эффективности при тех или иных исправляющих способностях помехоустойчивого кода, однако они не установили способа как достичь этого, что является следующей задачей, а именно, отыскания такого правила, руководствуясь которым, можно было бы построить код с характеристиками, приближающимися к предельным.

В настоящее время известно большое количество различных помехоустойчивых кодов, что затрудняет возможность их достаточно полного описания в ограниченное время. Поэтому остановимся на их общих характеристиках и основных идеях.

Кодовая комбинация из **n** символов может рассматриваться, как некоторый вектор $\alpha$, имеющий координаты в **n**-мерном пространстве:

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n). \qquad (161)$$

Можно рассматривать кодовую комбинацию и как число **A** в **d**-ичной системе счисления.

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i d^i, \quad 0 \leqslant a_i \leqslant d-1 \qquad (162)$$

При таком представлении была развита теория арифметических кодов. (В наших обозначениях величину **d** мы называли основанием кода, а в рассмотренных примерах принимали **d=2**).

Широко используется методика, когда кодовая комбинация из **n** символов представляется в виде многочлена **a(x)** степени **(n-1)**.

$$a(x) = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-1} + \ldots + a_n,\ 0 \leqslant a_i \leqslant d-1 \qquad (163)$$

Кроме того, применяются табличные формы записи кодовых комбинаций. При перечислении всех комбинаций таблицы будут иметь размерность $d^k$ строк и соответственно **n** столбцов. Для двоичного кода это $(2^k \times n)$ чисел. Очевидно, что с ростом **k** и **n** размеры таблиц очень быстро возрастают, что потребовало нахождения более экономных решений. Оно было найдено для так называемых линейных кодов, у которых проверочные разряды **(r)** формируются как линейные комбинации информационных **(k)**. Исходя из этого, для линейных кодов можно записать:

$$r\,i = \sum_{s=1}^{k} h_{is} k_s,\ i = 1, 2, \ldots, r, \qquad (164)$$

где $k_s$ - информационные разряды кодового слова, а $h_{is}$ коэффициенты при $i=1,2,\ldots,r;\ s=1,2,\ldots,k$, записываемые в виде матрицы **R** размерностью **r x k**, то есть

$$R = \left\| \begin{matrix} h_{11}\ h_{12} \ldots h_{1k} \\ h_{21}\ h_{22} \ldots h_{2k} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_{r1}\ h_{r2} \ldots h_{rk} \end{matrix} \right\| \qquad (165)$$

Для двоичного кода коэффициенты $h_{is}$ принимают значение либо **0**, либо **1** и могут быть заданы произвольно. Однако при этом корректирующие свойства кода будут разные. Следовательно, по соображениям ЗДРСМа, выбирать коэффициенты $h_{is}$ надо все же не произвольно, а так, что бы обеспечить максимальное минимальное кодовое расстояние $d_{min}$. Данное требование выдвигается, как правило, хотя могут быть и другие соображения, например, что бы разрешенные кодовые комбинации имели равное количество нулей и единиц или что-либо иное. (См. сравнение (158) и (159)). Конкретные требования следует каждый раз тщательно обдумывать, исходя из исследуемой ситуации.

Матрица (165) дает возможность построить порождающую матрицу **G** линейного помехоустойчивого кода и его проверочную матрицу **H**. Каноническая форма этих матриц следующая:

$$G = \| \ I_k R' \ \|, \qquad (166)$$

$$H = \| R\, I_r \|, \qquad (167)$$

где **R'** - транспонированная матрица к матрице **R**; $I_k$ и $I_r$ - соответственно единичные матрицы размерностью **k x k** и **r x r**.

Порождающая матрица **G** дает возможность формально вычислить разрешенную кодовую комбинацию $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ (см. определение (161)) для любой комбинации информационных разрядов $\mathbf{k} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ по формуле:

$$\alpha = \mathbf{k}\,\mathbf{G}, \qquad (168)$$

а проверочная матрица **H** служит для обнаружения ошибок. Для этого вычисляется синдром (**с**) кодового слова $\acute{\alpha} = (\acute{\alpha}_1, \acute{\alpha}_2, \ldots, \acute{\alpha}_n)$ из следующего соотношения:

$$\mathbf{c} = \acute{\alpha}\,\mathbf{H}', \qquad (169)$$

где **H'** - матрица, транспонированная к проверочной матрице **H**, а $\acute{\alpha}$ - кодовое слово, поступившее на прием, в котором могут содержаться ошибки.

Если синдром **с=0**, то $\acute{\alpha} = \alpha$ и либо ошибок нет, либо ошибки были, но они не были обнаружены. Исследуем этот вопрос.

Итак, рассмотрим кодовую комбинацию $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, в которой в результате действия помех возникли ошибки $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, и на прием поступает комбинация $\acute{\alpha} = (\acute{\alpha}_1, \acute{\alpha}_2, \ldots, \acute{\alpha}_n)$, которая формально может быть получена из следующего соотношения:

$$\acute{\alpha} = \alpha + \mathbf{e}. \qquad (170)$$

Сложение разрешенной кодовой комбинации $\alpha$ с вектором ошибок **е** приведет к ее переходу либо в запрещенную, либо в другую разрешенную кодовую комбинацию. В первом случае ошибка будет обнаружена и даже, может быть, исправлена, а во втором случае ошибка не обнаруживается. Действительно, в этом случае синдром будет равен **0** и поступившая кодовая комбинация $\acute{\alpha}$, оказавшись разрешенной, будет таковой и принята.

Линейный код обладает рядом интересных свойств, в частности, сумма двух разрешенных кодовых комбинаций также является разрешенной кодовой комбинацией. Отсюда вывод, что если вектор ошибок совпадает с какой-либо из разрешенных кодовых комбинаций, то его воздействие не обнаруживается.

Для большей наглядности всего сказанного обратимся к примеру кодирования **8**-ми лампочек, изображенному на рис. 45. В качестве первичного кода возьмем двоичный взвешенный код при числе символов **k=3**. Таким образом, число кодовых комбинаций равно **8** и они имеют следующий вид: $k_0$**=(000)**, $k_1$**=(001)**, $k_2$**=(010)**, $k_3$**=(011)**, $k_4$**=(100)**, $k_5$**=(101)**, $k_6$**=(110)**, $k_7$**=(111)**.

Пусть матрица **R** имеет следующее значение:

$$R = \begin{Vmatrix} 1\,1\,0 \\ 0\,1\,1 \\ 1\,0\,1 \end{Vmatrix} \qquad (171)$$

Используя (166) и (167), составим порождающую матрицу **G** и проверочную матрицу **H**.

$$G = \begin{Vmatrix} 1\,0\,0\,1\,0\,1 \\ 0\,1\,0\,1\,1\,0 \\ 0\,0\,1\,0\,1\,1 \end{Vmatrix} \qquad (172)$$

$$H = \begin{Vmatrix} 1\,1\,0\,1\,0\,0 \\ 0\,1\,1\,0\,1\,0 \\ 1\,0\,1\,0\,0\,1 \end{Vmatrix} \qquad (173)$$

Применяя (168) определим все разрешенные кодовые комбинации помехоустойчивого кода: $\alpha_0$=**(000000)**, $\alpha_1$=**(100101)**, $\alpha_2$=**(010110)**, $\alpha_3$=**(001011)**, $\alpha_4$=**(110011)**, $\alpha_5$=**(011101)**, $\alpha_6$=**(101110)**, $\alpha_7$=**(111000)**. Таких комбинаций ровно 8-мь, тогда как запрещенных будет **64-8=56** кодовых комбинаций.

Для большей наглядности можно построить по формуле (157) таблицу кодовых расстояний при **n=6**, аналогичную таблице 17, из которой выберем спектр весов для вышеуказанных разрешенных кодовых комбинаций.

$$\mathbf{w(000000,100101,\ldots,111000)} = \begin{Vmatrix} 0\,3\,3\,3\,4\,4\,4\,3 \\ 3\,0\,4\,4\,3\,3\,3\,4 \\ 3\,4\,0\,4\,3\,3\,3\,4 \\ 3\,4\,4\,0\,3\,3\,3\,4 \\ 4\,3\,3\,3\,0\,4\,4\,3 \\ 4\,3\,3\,3\,4\,0\,4\,3 \\ 4\,3\,3\,3\,4\,4\,0\,3 \\ 3\,4\,4\,4\,3\,3\,3\,0 \end{Vmatrix} \qquad \mathbf{(174)}$$

Из (174) следует, что минимальное кодовое расстояние $\mathbf{d_{min}=3}$. Кроме того, в спектре весов отсутствуют значения **5** и **6**. Это свидетельствует о том, что все ошибки **e = (e**$_1$**, e**$_2$**,..., e**$_6$**)**, имеющие вес **1, 2, 5** и **6**, при сложении с любой разрешенной кодовой комбинацией будут ее переводить в запрещенную и, значит, они будут все обнаружены. Следует при этом отметить, что ошибки с весом **3** или **4** могут быть не обнаружены, что также следует из (174).

Предположим теперь, что на прием поступила кодовая комбинация $\alpha' = (\alpha'_1, \alpha'_2, ..., \alpha'_6) =$ **(010101)**. Для ее декодирования можно осуществить ее последовательное отождествление со всеми разрешенными кодовыми комбинациями. В результате имеем:

$$\alpha'+\alpha_0 = \mathbf{(010101)},\ \alpha'+\alpha_1 = \mathbf{(110000)},\ \alpha'+\alpha_2 = \mathbf{(000011)},\ \alpha'+\alpha_3 = \mathbf{(011110)},$$
$$\alpha'+\alpha_4 = \mathbf{(100110)},\ \alpha'+\alpha_5 = \mathbf{(001000)},\ \alpha'+\alpha_6 = \mathbf{(111011)},\ \alpha'+\alpha_7 = \mathbf{(101101)}. \quad (175)$$

Как следует из (175) поступившая кодовая комбинация $\alpha'$ не совпала ни с одной из разрешенных и, значит, это запрещенная кодовая комбинация и таким образом мы обнаруживаем ошибку. К сожалению, мы пока не можем сказать, какая же комбинация передавалась на самом деле, мы просто фиксируем факт, что поступившая кодовая комбинация $\alpha'$ содержит ошибку, и на основании этого вводим новую операцию «стирание». Таким образом, указанная выше комбинация $\alpha'$ стирается, а для восстановления исходной, если это необходимо, следует предпринять дополнительные меры.

Последовательное сравнение принятой комбинации $\alpha'$ со всеми возможными разрешенными кодовыми комбинациями может оказаться слишком громоздким. Поэтому обнаружить ошибку можно путем вычисления синдрома в соответствии с (169). Для $\alpha' = (\alpha'_1, \alpha'_2, ..., \alpha'_6) =$ **(010101)** имеем:

$$\mathbf{c} = \alpha' \mathbf{H}' = \mathbf{(011)}, \quad (176)$$

То, что синдром не равен нулю, свидетельствует о наличии ошибки в комбинации $\alpha'$, и мы вправе ввести операцию стирания.

Следует отметить, что тоже значение синдрома будет получено, если комбинация, поступающая на прием, будет одна из вычисленных в (175). Поэтому комбинации из (175) называют смежным классом.

Как правило, вероятность однократной ошибки существенно больше, чем вероятности ошибок большей кратности. Поэтому из смежного класса (175) целесообразно выбрать в качестве представителя смежного класса комбинацию, имеющую наименьший вес. Такой комбинацией, как следует из (175), будет комбинация $\mathbf{e}_5 = \alpha'+\alpha_5 =$ **(001000)**. В результате операцию стирания можно заменить решением об исправлении обнаруженной ошибки и замене стертой комбинации $\alpha'$ комбинацией $\alpha_5=$**(011101)**.

Естественно может возникнуть вопрос, а что если это была не однократная ошибка, а двукратная. Ну, что же в этом случае наше исправление будет ложным, и мы этого не обнаружим. Единственно, чем можно утешиться в этом случае, это тем, что вероятность такого события невелика. Однако, если нас не устраивает такая ситуация, то следует предпринять дополнительные меры по проверки исправления. Но при этом следует понимать, что добиться абсолютно истинного приема невозможно. Да, можно добиться очень малой вероятности ошибки, но сделать ее равной **0** - не возможно!

Мы уже несколько раз использовали понятие минимальное кодовое расстояние $d_{min}$. Чем же оно интересно? Оказывается, минимальное кодовое расстояние позволяет вычислить гарантированную кратность ошибок, которые могут быть обнаружены ($t_{обн}$) и исправлены ($t_{испр}$) помехоустойчивым кодом. Довольно легко можно догадаться, что между $t_{обн}$, $t_{испр}$ и $d_{min}$ существуют определенные соотношения:

$$t_{обн} \leqslant d_{min} - 1 \tag{177}$$

$$t_{испр} \leqslant (d_{min}-1)/2, \text{ когда } d_{min} \text{ нечетное,} \tag{178}$$

$$t_{испр} \leqslant (d_{min}/2)-1, \text{ когда } d_{min} \text{ четное.} \tag{179}$$

Конечно, и это показал выше рассмотренный пример, минимальное кодовое расстояние не раскрывает все возможности помехоустойчивого кода. Однако этот показатель позволяет делать важные предварительные заключения о корректирующих способностях кода, не прибегая к детальному анализу спектра весов, что зачастую весьма трудоемко при большом числе разрешенных кодовых комбинаций. Кроме того, установленные через $d_{min}$ в (177-179) кратности обнаруживаемых и исправляемых ошибок дают возможность вывести некие предельные соотношения, характеризующие потенциальные возможности корректирующих кодов. Эти соотношения принято называть границами по имени авторов. Например, граница Хемминга

$$\sum_{t=0}^{t_{испр}} C_n^t \leqslant 2^r, \tag{180}$$

которая позволяет для любой величины $n$ установить верхнюю границу для $t_{испр}$ и соответственно $d_{min}$ при заданном числе проверочных символов $r$ или соответственно нижнюю границу для $r$ при заданном $d_{min}$.

Известна также граница Плоткина, которая, как и граница Хемминга, показывает, насколько большим может быть $d_{min}$ при оговоренных $n$ и $r$. Для двоичного кода эта граница имеет вид:

$$k \leqslant n - 2d_{min} + 2 + \log_2 d_{min} \tag{181}$$

Границы Хемминга и Плоткина можно записать не только для двоичных кодов. Однако оставим это для тех, кого это особенно заинтересует. Сейчас же отметим, что граница Хемминга близка к оптимальной для помехоустойчивых кодов с высокой скоростью, тогда как граница Плоткина, для кодов с небольшой скоростью (эффектвностью см. (160).

Весьма интересна граница Варшамова-Гильберта, которая определяет существование нижней оценки для минимального кодового расстояния для некого «наилучшего» кода. В двоичном случае эта граница выглядит следующим образом:

$$2^{n-k} > \sum_{i=0}^{d_{min}-2} C^{i}_{n-1} \qquad (182)$$

Все представленные выше границы оперируют понятием $d_{min}$, которое, как мы убедились на приведенном выше примере, далеко не исчерпывает все исправляющие возможности помехоустойчивых кодов. Поэтому для «хороших» кодов можно получить более высокие показатели корректирующей способности, которые, однако, не будут существенно превосходить границ. Следует также отметить, что граничные соотношения позволяют доказать очень важное утверждение о том, что вероятность ошибки при применении помехоустойчивого кода может быть сделана сколь угодно малой при увеличении длины кодовой комбинации $n$ и скорости кода, стремящейся к единице. Однако на практике это положение не удается применить в полной мере, поскольку передача сигналов должна, помимо прочего, осуществляться в рамках определенного времени. А это означает, что применение длинных кодов, ведущих к большой задержке сообщений, не возможно.

Как уже отмечалось в настоящее время известно огромное количество различных помехоустойчивых кодов и поэтому попытка хоть как-то полно их описать, обречена на провал. Исходя из этого, после краткого ознакомления с понятием линейных кодов, укажем на их подкласс, называемый полиномиальными кодами, который получил дастаточно широкое распространение. Это циклические коды, коды Боуза -Чоудхури - Хоквингема (БЧХ), коды Рида - Соломона, коды Рида - Маллера, проективно - геометрические коды, квадратично -вычетные коды и прочее. Кодовые комбинации, порождающие и проверочные матрицы в этих кодах представляются с помощью полиномов, над которыми затем осуществляются определенные преобразования, ведущие к формированию разрешенных кодовых комбинаций в виде полиномов, обладающих высокими корректирующими свойствами. При этом ряд кодовых конструкций могут одновременно являться представителем нескольких кодов, например, БЧХ кодов и обобщенных кодов Рида - Малера. Возможны и другие сочетания. Данное обстоятельство не является чем-то особенным, а указывает лишь на то, что, благодаря неким формальным правилам, в матрице (157) выбирается один и тот же набор разрешенных кодовых комбинаций, обладающих «хорошими» свойствами. При большом желании, совпадающим, как говорил «классик», с возможностями, отбор «хороших» кодовых комбинаций можно проводить путем перебора вариантов в матрице (157). Однако это очень сложно и требует большого времени. Поэтому столь важно найти «быстрые» формальные процедуры кодирования помехоустойчивым кодом. Не менее важно обеспечить аналогичные свойства и при декодировании на приеме. Поэтому данный показатель сложности реализации кодов является весьма существенным и часто определяющим.

Показатель сложности реализации помехоустойчивых кодов зависит от многих причин: от элементной базы, от технологии производства и прочее и прочее. Однако всегда приходится учитывать количество формальных операций, которые необходимо осуществить для, например, кодирования или декодирования. Учитывая, что современная технология реализации кодов - это, как правило, компьютеры, то целесообразно единицей формальной операции выбрать операцию двоичного сложения. Тогда, говоря о большей сложности реализации какого-либо кода, мы будем понимать, что речь идет о большем количестве операций сложения. Если же речь пойдет еще о каких-либо «сложностях», то данное обстоятельство должно оговариваться отдельно с соответствующими пояснениями.

Одним из наиболее простых и часто используемых кодов является код с проверкой на четность. В этом коде имеется один проверочный разряд **r=1**, который равен результату сложения по модулю два всех предыдущих информационных разрядов. Этот код обнаруживает все ошибки нечетной кратности и этим замечателен. Кроме того, этот код часто используется в итерированных и каскадных кодах, предложенных впервые в 1966 году Форни.

Идея этих конструкций состоит в том, что помехоустойчивое кодирование реализуется в несколько ступеней. Рассмотрим пример итерированного кода с двойным кодированием, хотя в общем виде может быть значительно большее количество ступеней кодирования. Для наглядности вернемся к уже рассмотренному выше примеру помехоустойчивого линейного **(n,k)-(6,3)** кода, используемого для кодирования лампочек. Запишем взятую наугад последовательность зажигания лампочек (рис. 45), указывая их по десятичным номерам **3, 1, 5, 0, 0, 5, 7, 0, 6,....** Этой последовательности будет соответствовать последовательность кодовых слов: $\alpha_3$=**(001011)**, $\alpha_1$=**(100101)**, $\alpha_5$=**(011101)**, $\alpha_0$=**(000000)**, $\alpha_0$=**(000000)**, $\alpha_5$=**(011101)**, $\alpha_7$=**(111000)**, $\alpha_0$=**(000000)**, $\alpha_6$=**(101110)....**

Объединим теперь последовательность кодовых слов в виде матриц, где первыми строками будут выше указанные слова, а последние строчки будут использоваться для помехоустойчивого кодирования символов, но уже не по строкам, а по столбцам. Изобразим это на примере рассматриваемого кода (таблица 18), полагая при этом, что в данной матрице берется по четыре кодовых слова, а кодирование по столбцам осуществляется кодом с проверкой на четность.

**Таблица 18**

| Первое кодовое слово итерированного кода | | | | | | | | Второе кодовое слово итерированного кода | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha_3$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | | $\alpha_0$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\alpha_1$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | | $\alpha_5$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| $\alpha_5$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | | $\alpha_7$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $\alpha_0$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | $\alpha_6$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Проверка столбцов | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | | Проверка столбцов | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |

Полученный итерированный код имеет кодовое слово длиной **nx5=6x5==30** символов, а количество информационных символов равно **kx4=3x4=12**. Очевидно, что эффективность кода, как следует из (160), равна **Э=12/30=0,4**. При этом он обладает расширенными по сравнению с линейным **(6,3)** кодом возможностями. Желающие могут это проверить. Однако при этом резонен вопрос, а можно ли достигнуть того же результата, взяв просто линейный код с параметрами не **(6,3)**, а, например, **(10,4)** с эффективностью **Э=4/10=0,4** и получить те же, а может даже лучшие корректирующие способности кода.

К сожалению общего ответа, на подобные вопросы теория помехоустойчивого кодирования не дает и этому есть объективные причины в виду того, что многие задачи имеют решение путем перебора всех вариантов, что весьма затруднительно. В то же время граничные решения, определяющие некие потенциальные возможности, не указывают конструктивного пути их достижения. Исходя из этого, следует учитывать имеющийся опыт, традиции, совместимость с другими системам, а так же сложность реализации тех или иных вариантов. Возможно, стоит заглянуть и в решения, которые накопила природа, о чем мы кратко говорили, когда господин Профилактян рассказывал нам о генетическом коде.

Каскадные коды, как и итерированные коды, имеют несколько ступеней. Однако при этом кодовые слова первой ступени становятся кодовыми символами второй ступени и так далее. При таком построении длина кодовой комбинации $n=n_1 x n_2$, а количество информационных символов $k=k_1 x k_2$, где $n_1$ и $n_2$, $k_1$ и $k_2$ -длины кодовых комбинаций первой и второй ступени и соответственно количество информационных символов первой и второй ступени. Можно доказать, что в каскадных кодах $d_{min} \geqslant d_{min1} \times d_{min2}$, что весьма важно в поиске подходящей каскадной кодовой конструкции ($d_{mm1}$ и $d_{mm2}$ - минимальные кодовые расстояния кодов, образующих каскадный код).

Интересно отметить, что идея каскадного кодирования по существу реализуется людьми в их обычной жизни при письменном общении. Действительно буквы - это код первой ступени, образующий слова. Слова - это символы кода второй ступени, на основе которых строятся фразы (предложения). Фразы - это символы третьей ступени, образующие информационное содержание.

Ошибка в буквах может быть исправлена, поскольку слова обладают избыточностью и на основании этого нарушения в орфографии легко исправляются. Если же ошибка существенно изменила слово, преобразовав его, например, в другое слово, но с правильной орфографией, то данное обстоятельство не может быть исправлено кодом первой ступени, но может быть обнаружено на уровне анализа предложения. И, наконец, предложение воспринимается в сочетании с другими предложениями, то есть в рамках конкретного контекста.

Вот такие интересные аналогии получаются между разделами теории связи и тем, что мы можем наблюдать в реальной жизни. Это обстоятельство, на мой взгляд, оправдывает столь пристальное внимание, которое следует уделить инфокоммуникационным системам, искусственно созданным системам, системам, задуманным и сконструированным человеком.

Завершая знакомство с помехоустойчивыми кодами, укажем на еще одно направление, которое принято называть сверточными (непрерывными, рекуррентными, цепными) кодами. В отличие от блоковых кодов, когда каждое сообщение отображается строго определенной кодовой комбинацией, в блоковых кодах кодирование осуществляется с учетом предыстории. Поэтому одно и то же сообщение может иметь разное отображение в виде кодовой комбинации. Однако перейдем к примеру, который поможет разъяснить общие идеи сверточного кодирования.

Пусть на вход регистра сдвига (рис. 46), состоящего из трех ячеек, поступает исходная последовательность **a(t)** в виде следующего двоичного сигнала **1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1** (таблица 19, верхняя строка).

В начальный момент в ячейках регистра сдвига записаны нули, то есть их состояние **0**. Далее поступающие символы входного сигнала **a(t)** будут последовательно продвигаться с первой по третью ячейку, а в конце, то есть после третьей ячейки, они будут просто исчезать, поскольку на их место будет поступать новый символ и ему нужно «освобождать» место. Таким образом, после поступления первого символа **1** из входного сигнала состояние регистра сдвига

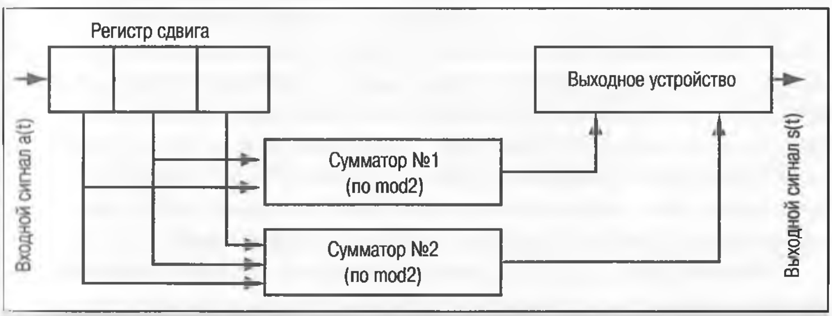



**Рис. 46.**



15 з. 192

станет соответственно **100** (таблица 19), затем после поступления еще одного символа **1** состояние станет **110** и так далее.

Выходы ячеек регистра сдвига в определенных комбинациях заведены на входы сумматоров, осуществляющих сложение двоичных чисел. На рис. 46 выбран некий вариант, который влияет на корректирующие способности сверточного кода. Однако, анализ этого выходит за рамки данного повествования и мы ограничимся только констатацией данного факта. Результирующие сигнала на выходе сумматоров также представлены в таблице 19.

Выходное устройство, «беря» сигналы от сумматоров, формирует выходной сигнал **s(t)**, в котором каждому символу входного сигнала **a(t)** будет соответствовать два символа выходного сигнала **s(t)**.

**Таблица 19**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Входной сигнал a(t) | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| Регистр сдвига | 100 | 110 | 011 | 101 | 010 | 101 | 010 | 001 | 100 |
| Сумматор №1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| Сумматор №2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| Выходной сигнал s(t) | 11 | 00 | 10 | 10 | 11 | 10 | 11 | 01 | 11 |

Таким образом, входному сигналу **a(t)=(1,1,0,1,0,1,0,0,1)** будет соответствовать выходной сигнал **s(t)=(11,00,10,10,11,10,11,01,11)**.

Для сравнения закодируем тот же входной сигнал **a(t)=(1,1,0,1,0,1,0,0,1)** линейным блоковым кодом с проверкой на четность с той же скоростью кодирования **Э=0,5**. В результате получаем сигнал **$s_{бл}$(t)=(11,11,00,11,00,11,0-0,00,11)**. Сопоставление сигналов **s(t)** и **$s_{бл}$(t)** показывает их существенное различие, причем структура **s(t)** кажется более хаотичной и запутанной. Однако на поверку оказывается, что сверточные коды имеют высокие корректирующие свойства при весьма простой реализации и меньшей задержке сообщения при его кодировании и декодировании.

В рассмотренном выше примере сверточного кодирования регистр сдвига состоял из трех ячеек, число которых принято называть кодовым ограничением и обозначать через **k** (в данном случае **k=3**), и использовались два сумматора. Кроме того, исходное сообщение поступало на один вход, а заключительный сигнал формировался также на одном выходе. В общем случае сообщение **a(t)** может распределяться на **m** входов (регистров сдвига), а выходной сигнал **s(t)** формироваться с **n** сумматоров, обрабатывающих сигналы с различных регистров сдвига и, содержащих разное количество ячеек. Кроме того, можно представить себе «гибридные» системы помехоустойчивого кодирования, объединяющие в себе идей блокового и сверточного кодирования.

Перейдем теперь к рассмотрению **дискретных сигналов непрерывного времени (ДСНВ)** и для наглядности будем изучать двоичный сигнал непрерывного времени (рис. 47а).

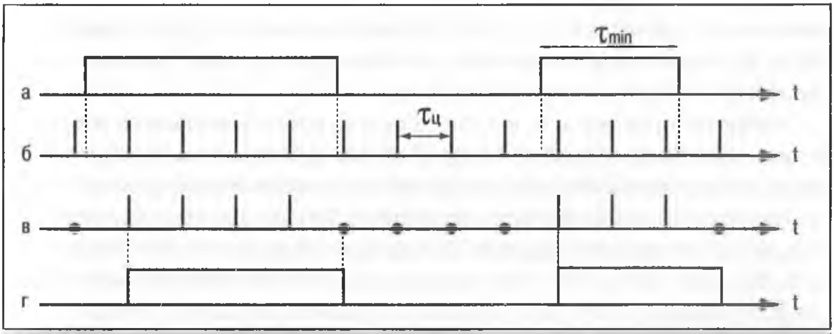



**Рис. 47.**

Если его преобразовать в дискретный сигнал дискретного времени (ДСДВ), то тогда можно воспользоваться всем тем, что уже обсуждалось выше. Исходя из этого, рассмотрим предельные соотношения, которые покажут, какой «ценой» ДСНВ может быть преобразован в ДСДВ. Само преобразование будет означать, что дискретный сигнал непрерывного времени заменяется (аппроксимируется) дискретным сигналом дискретного времени с определенным критерием качества. Мы уже отмечали, что критерии могут быть весьма различны, однако в данном случае применим в качестве критерия то, что максимальная абсолютная погрешность преобразования не должна превышать некоторого значения $\Delta\tau$.

Пусть шаг дискретизации длительности элементов дискретного сигнала непрерывного времени равен $\Delta\tau=\tau_ц/k$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$ Тогда последовательность элементов ДСНВ $S_0; S_1;\ldots S_n \ldots$ будет преобразована в последовательность ДСДВ $S'_0; S'_1;\ldots, S'_n \ldots$, в которой все элементы $S'_i$ имеют длительность кратную шагу дискретизации $\Delta\tau$. Очевидно, что при этом элемент $S'_i$, имеющий

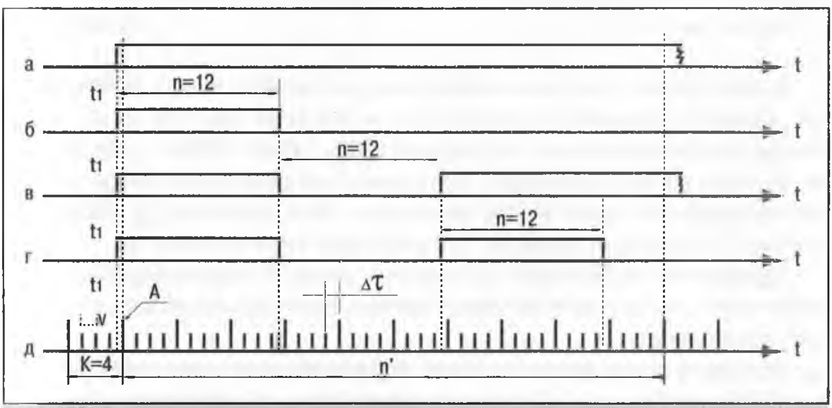



**Рис. 48.**

наименьшую длительность, то есть соответствующий $\tau_{min}$, будет состоять из $n=\lceil\tau_{min}/\Delta\tau\rceil$ элементов дискретизации длительностью $\Delta\tau$ (знак $\lceil\cdot\rceil$ означает взятие целой части от числа, стоящего в скобках).

Перейдем к рис. 48 а, б, в, г, где показаны возможные реализации ДСНВ, которые необходимо преобразовать в ДСДВ или другими словами закодировать в виде последовательности двоичных символов, изображенных на рис. 48 д.

Рассмотрим некоторый интервал времени $T=n`\cdot\Delta\tau$. Назовем этот интервал блоком **n`**. Очевидно, что за время $T=n`\cdot\Delta\tau$ будет передано $(\lceil n`/k\rceil+1)$ символов, изображенных на рис.48д. При этом с помощью этих символов необходимо передать (закодировать) все возможные реализации ДСНВ, которые могут возникнуть над блоком **n`** за интервал времени $T=n`\cdot\Delta\tau$ с условием введенного критерия качества $\Delta\tau$.

Пусть первый символ **А** блока **n`** передает знак первого элемента реализации ДСНВ. Тогда оставшиеся символы двоичной последовательности в блоке **n`** можно использовать для передачи сведений о местоположении элементов ДСНВ над блоком **n`**. Поскольку с помощью указанных выше символов можно получить $2^{\lceil n/k\rceil}$ различных кодовых комбинаций, то для однозначного кодирования всех реализаций ДСНВ с введенным критерием качества, необходимо, чтобы выполнилось неравенство:

$$N \leqslant 2^{\lceil n/k\rceil} \qquad (173)$$

где **N**- число различных реализаций ДСНВ над блоком **n`**.

Учитывая, что в последовательности $S`_0;\ S`_1;\ldots S`_n\ \ldots$ наименьшая длительность элемента равна $\tau_{min}=n\cdot\Delta\tau$, а $\tau_ц=k\cdot\Delta\tau$, выражение эффективности преобразования ДСНВ в ДСДВ можно записать в следующем виде

$$Э \geqslant \tau_ц / \tau_{min} = k / n \qquad (174)$$

Таким образом, при оценке эффективности преобразования ДСНВ в ДСДВ при заданной величине абсолютной погрешности $\Delta\tau$ или, что то же самое, относительной погрешности $\delta = (\Delta\tau/\tau_{mm})\cdot 100\% = (1/n)\cdot 100\%$ и, следовательно, определенном **n**, можно из (174) получить значении эффективности **Э** при любом выбранном блоке **n`**, рассчитав число всех реализаций ДСНВ **(N)** над блоком **n`**, и используя формулу (173) для определения величины **k**.

Предельное теоретически достижимое значение эффективности можно найти при $n`\to\infty$, что уже было нами отмечено выше при рассмотрении первичного кодирования.

Обратимся еще раз к рис. 48, на котором изображены различные реализации ДСНВ над блоком **n`**. Очевидно, что над блоком **n`** возможна только одна реализация, не содержащая ни одного фронта рис. 48 а. Запишем это в следующем виде

$$N(0)=1. \qquad (175)$$

На рис. 48б изображена реализация ДСНВ, когда над блоком **n`** имеется ровно один фронт. Учитывая, что в ДСНВ элементы **S`**ι могут иметь любую длительность, но не меньше некоторой минимальной, которая равна $\tau_{min}=n\cdot\Delta\tau$, легко установить, что число реализаций ДСНВ, содержащих ровно один фронт над блоком **n`** можно определить по формуле:

$$N(1)=n`-n+1. \qquad (176)$$

Продолжая аналогичные рассуждения, можно установить, что количество реализаций ДСНВ, содержащих ровно два фронта (рис 48 в) над блоком **n'**, можно получить в виде следующей суммы:

$$N(2)=(n`-2n+1)+(n`-2n)+...+1. \qquad (177)$$

Количество реализаций ДСНВ, содержащих ровно три фронта над блоком **n'** (рис. 48 в), можно получить в виде следующего выражения:

$$\begin{aligned} N(3)=(n`-3n+1)&+(n`-3n)+(n`-3n-1)+...+1+ \\ &+(n`-3n)+(n`-3n-1)+...+1+ \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+1. \end{aligned} \qquad (178)$$

Несложно показать, что формулы (175 - 178) можно записать в более компактном виде:

$$N(0)=C^0_{n`}\ ; \qquad (179)$$

$$N(1)=C^1_{n`-n+1}\ ; \qquad (180)$$

$$N(2)=C^2_{n`-2n+2}\ ; \qquad (181)$$

$$N(3)=C^3_{n`-3n+3}\ . \qquad (182)$$

В общем случае, число реализаций ДСНВ, имеющих ровно **l** фронтов над блоком **n`** определяется по следующей формуле:

$$N(1)=C^{l}_{n`-ln+l}\,. \qquad (183)$$

Поскольку наименьшая длительность элемента в последовательности **$S`_0$; $S`_1$;...$S`_n$ ...** равна $\tau_{min}=n\cdot\Delta\tau$, то над блоком **n`** не может быть реализацией, имеющих больше чем $\lceil n'/n \rceil$ фронтов. Следовательно, суммарное число реализаций ДСНВ для случаев, когда первый фронт (момент $t_1$) совпадает с крайним правым участком (участок **IV** на рис. 48 д) можно определить в виде следующей суммы

$$N_{IV}=\sum_{i=0}^{\lceil n'/n \rceil} C^{i}_{n`-in+i}\,. \qquad (184)$$

Если бы первый фронт ДСНВ (момент $t_1$) совпал с участком **III** (рис.48 д), то это можно было бы рассматривать, как эквивалентное увеличение длины блока **n`** на один участок длительностью $\Delta\tau$. При этом суммарное число реализаций ДСНВ над блоком **n`**, когда первый фронт совпадает с участком **III** (рис.48 д), равно:

$$N_{III} = \sum_{i=0}^{\lceil (n`+1)/n \rceil} C^{i}_{n`+1-in+i}\,. \qquad (185)$$

Поскольку тактовый интервал, последовательности двоичных символов (рис. 48 д) разбит на **k** участков, то величина блока **n`** будет соответственно изменяться от **n`** до **(n`+k–1)**. Учитывая это, общее число реализаций ДСНВ над блоком **n`** можно определить по формуле:

$$N= \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^{\lceil (n`+j)/n \rceil} C^{i}_{n`+j-in+i}\,. \qquad (186)$$

Выражение (173) для предельного случая можно записать в следующем виде:

$$N / 2^{\lceil n`/k \rceil} = 1. \qquad (187)$$

Далее, прежде чем мы им воспользуемся, рассмотрим очевидное неравенство

$$( N_{max} / 2^{n`/k} ) < ( N / 2^{n`/k} ) < (((n`+k-1 / n)\bullet k\bullet N_{max} ) / 2^{n`/k} ), \qquad (188)$$

где $N_{max}$ максимальный член в выражении (186).

Неравенство (188) после логарифмирования можно записать в следующем виде:

$$\frac{k \log_2 N_{max}}{n`} < \frac{k \log_2 N}{n`} < \frac{k \log_2 (n+k-1)/n}{n`} + \frac{k \log_2 k}{n`} + \frac{k \log_2 N_{max}}{n`} \quad (189)$$

Для оценки предельной эффективности рассмотрим правую часть выражения (189) при $n` \to \infty$.

$$\lim_{n` \to \infty} ((k \bullet \log_2(n`+k-l) /n)/n` + (k \bullet \log_2 k) / n` + (k \bullet \log_2 N_{max}) / n`) =$$

$$= \lim_{n` \to \infty} (k \bullet \log_2 N_{max}) / n` \quad (190)$$

Учитывая (190) неравенство (189) после сокращения одинаковых сомножителей при $n` \to \infty$ можно записать в следующем виде:

$$N_{max} \leqslant N \leqslant N_{max}, \quad (191)$$

а это доказывает, что $\lim_{n` \to \infty} N = \lim_{n` \to \infty} N_{max}$.

В результате этого сложное и громоздкое выражение (186) при $n` \to \infty$ может быть заменено максимальным членом $N_{max}=N(m)$, где $m$ - количество фронтов в ДСНВ, при котором получается максимальный член в сумме (186).

Если $N(m)$ - максимальный член ряда, то должно выполняться неравенство

$$\frac{N(m)}{N(m+1)} = (C^{m}_{n`+k-1-mn+m}) : (C^{m+1}_{n`+k-1-mn+m-n+1}) \quad (192)$$

При $n` \to \infty$ неравенство (192) после преобразований может быть представлено для предельного случая в виде равенства следующим образом:

$$(m+1)/(n`+k-1-mn-n+1) \prod_{i=0}^{n-2} (n`+k-1-mn+m-i)/(n`+k-1-mn-i) = 1 \quad (193)$$

Пусть $m=\beta \cdot n`$, тогда выражение (193) примет вид

$$(\beta n'+1)/(n'+k-1-\beta n\cdot n'-n+1)\prod_{i=0}^{n-2}(n'+k-1-\beta n\cdot n'+\beta n'-i)/(n'+k-1-\beta n\cdot n'-i) = 1 \quad (194)$$

Рассматривая предел левой части неравенства (194) при $n'\to\infty$, после преобразований окончательно получим:

$$(\beta/(1-\beta\cdot n))\cdot(1+\beta/(1-\beta\cdot n))^{n-1} = 1. \quad (1.195)$$

Для придания красивой формы выражению (195) введем $M=\beta/(1-\beta\cdot n)$, тогда выражение (195) имеет весьма компактный вид:

$$M\,(M+1)^{n-1}=1. \quad (196)$$

Решая уравнение (1.196) относительно **M**, при заданных **n**, можно затем определить соответствующие значения $\beta$ по формуле:

$$\beta=M/(1+M\cdot n). \quad (197)$$

Поскольку $m=\beta\cdot n'$, то величина $\beta$ должна удовлетворять неравенству $0\leqslant\beta\leqslant 1$. Следовательно, корни уравнения (196) должны быть действительные и неотрицательные. Анализируя выражение (196), несложно убедится, что это уравнение имеет единственный действительный и неотрицательный корень на отрезке **[0;1]**. Поскольку было доказано, что $\lim_{n'\to\infty} N = \lim_{n'\to\infty} N(m)$, то выражение (187), которое

должно выполняться для однозначного отображения ДСНВ в ДСДВ, можно записать в следующем виде, заменяя **N** на максимальный член **N(m)**:

$$(n'+\kappa-1-\beta\cdot n\cdot n'+\beta\cdot n')!\ /\ ((n'+\kappa-1-\beta\cdot n\cdot n')!\ (\beta\cdot n')!) = 2^{n'/\kappa} \quad (198)$$

Используя для вычисления факториалов известную формулу Стирлинга $S!\cong\sqrt{2\pi S}\cdot e^{-S}\cdot S^S$, получаем после сокращений и логарифмирования правой и левой частей равенства (198), что при $n'\to\infty$ величина **k** и соответственно предельная эффективность $Э_{пр}$ преобразования ДСНВ в ДСДВ при введенном критерии качества $\delta = (\Delta\tau/\tau_{min})\cdot 100\% = (1/n)\cdot 100\%$ могут быть найдены по формулам:

$$k = 1/\ ((1-\beta n+\beta)\cdot\log_2(1-\beta n+\beta)-(1-\beta n)\cdot\log_2(1-\beta n)-\beta\cdot\log_2\beta); \quad (199)$$

$$Э_{пр}=1/\ (n\cdot[(1-\beta n+\beta)\cdot\log_2(1-\beta n+\beta)-(1-\beta n)\cdot\log_2(1-\beta n)-\beta\cdot\log_2\beta]). \quad (200)$$

Выражение (200) устанавливает очень важную теоретически достижимую границу преобразования ДСНВ в ДСДВ при введенном критерии качества данного преобразования. Фактически это аналог первичного кодирования сообщений, рассмотренного выше. Исходя из этого, в дальнейшем можно использовать все те теоретические построения, которые нами применялись при рассмотрении ДСДВ. А это очень важно, поскольку обеспечивает преемственность теории для различных случаев».

«Уважаемый Бит Байтович, - раздался голос Пи Е Тета, которому последние рассуждения Файлтона явно нравились, - но позвольте Вам заметить, что, вычисляя количество реализаций над блоком **n'**, Вы не разу не упомянули о вероятности каждой из реализаций. А ведь мы с Вами знаем, что это весьма существенно при отыскании предельных границ. Кстати напоминаю, что эти границы определяются энтропией источника или в Вашем случае $\varepsilon$ - энтропией источника относительно введенного критерия качества $\Delta\tau$ или $\delta$».

«Вы читаете мои мысли, - воодушевляясь от понимания проблемы со стороны окружающих, продолжил Бит Байтович, - однако я предполагал обсудить это несколько позднее после рассмотрения еще одного интересного случая, когда в ДСНВ кроме ограничения снизу $\tau_{min}$ существует и ограничение сверху $\tau_{max}$, то есть в ДСНВ нет элементов, длительность которых менее чем $\tau_{min}$ и более, чем $\tau_{max}$.

Для оценки предельной эффективности преобразования таких сигналов в ДСДВ рассмотрим **(S+1)** - множество $X=\{x_0; x_1;...x_s\}$, элементами которого $x_0;x_1;...x_s$ являются соответственно элементы ДСНП длительностью $\Delta\tau n$; $\Delta\tau(n+1);...\Delta\tau(n+S)$ при вышеуказанном критерии качества.

В этом случае каждой реализации ДСНВ над блоком **n'** будет соответствовать **(S+1)** -вектор $(\alpha_0; \alpha_1;... \alpha_s)$ над множеством **X** с целочисленными координатами, такими, что $\alpha_0+\alpha_1+...+\alpha_s=1$; $\alpha_i \geqslant 0$; $i=0; 1...S$. При этом величины $\alpha_0$; $\alpha_1$;... $\alpha_s$ показывают, сколько раз встречаются элементы длительности $\Delta\tau \bullet n$ ; $\Delta\tau \bullet (n+1)$;... $\Delta\tau \bullet (n+S)$ в реализации ДСНВ над блоком **n'**.

Очевидно, что для каждой реализации ДСНВ должно выполняться неравенство:

$$\alpha_0 n+\alpha_1(n+1)+...\alpha_s(n+S) \leqslant n'. \qquad (201)$$

Учитывая, что минимальный элемент ДСНВ состоит из **n** единиц величиной $\Delta\tau$, можно определить величину **S**, соответствующую максимальному элементу ДСНВ в данной реализации над блоком **n'** при определенном числе фронтов **I**. Величина **S** равна:

$$S=n'-n \bullet I. \qquad (202)$$

Воспользовавшись равенством(1.202), а также тем, что $\alpha_0+\alpha_1+...+\alpha_s=I$ неравенство (1.201) можно записать в следующем виде:

$\alpha_1+2\alpha_2...+S\alpha_s \leqslant S.$ (203)

Каждой реализации ДСНВ, имеющей ровно **l** фронтов над блоком **n`**, соответствует **(S+1)** - векторов над множеством **X**. При этом число реализаций ДСНВ, имеющих ровно **l** фронтов, соответствует **(l)** - мультимножеству первичной спецификации $[x_0^{\alpha_0};x_1^{\alpha_1};...x_s^{\alpha_s}]$, порожденному множеством **X**. Таким образом, величина **N(l)** может быть подсчитана по формуле

$$N(l)=\sum_{\substack{\alpha_0+\alpha_1+...+\alpha_s=l\\ \alpha_1+2\alpha_2+S\cdot\alpha_s\leqslant S}} l!/(\alpha_0!\alpha_1!...\alpha_s!) \qquad (204)$$

Суммирование в формуле (204) производится для всех целочисленных решений системы уравнений

$$\begin{cases}\alpha_0+\alpha_1+...+\alpha_s=l\\ \alpha_1+2\alpha_2+...+S\cdot\alpha_s\leqslant S;\end{cases} \qquad (205)$$

Формулы (204) тождественна с выделенной ранее формулой (183). Проиллюстрируем это на примере, показанном на рис.48, когда **n=12, n'=40**. По формуле (183) получаем, что **N(0)=1;N(1)=29;N(2)=153;N(3)=35**.

Для расчетов по формуле (204) определим все целочисленные решения системы уравнений (205), учитывая, что **S=n`- n•l**.

При **l=0** величина **S=40** и существует только одно решение $\alpha_0=\alpha_1=...=\alpha_{40}=0$.

В этом случае по формуле (204) получаем, **N(0)=1**.

При **l=1** величина **S=28**. Система уравнений (205) при этом имеет **29** следующих целочисленных решений:

$\alpha_0=1;\ \alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_{28}=0;$

$\alpha_1=1;\ \alpha_0=\alpha_2=...=\alpha_{28}=0;$

$\alpha_2=1;\ \alpha_0=\alpha_1=...=\alpha_{28}=0;$

..........................

$\alpha_{28}=1;\ \alpha_0=\alpha_1=...=\alpha_{27}=0.$

Подставляя полученные решения в формулу (204), получаем **N(1)=29**.

При **l=2** величина **S=16**. Система уравнений (205) имеет в этом случае **81** целочисленное решение. А именно:

Одно решение, когда $\alpha_0=2$, а $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_{16}=0$.

Далее имеется **16** решений, когда $\alpha_0=1$, а величина $\alpha_1;\alpha_2;...\alpha_{16}$ принимают последовательно значение равное **1**.

Имеется также **8** решений, когда $\alpha_0$**=0**, а величины $\alpha_1;\alpha_2;...\alpha_8$ принимают последовательно значение равное **2**.

При $\alpha_0=0;\alpha_1=1$ имеется **14** решений, когда $\alpha_2;\alpha_3;...,\alpha_{15}$ последовательно принимают значения равные **1**.

При $\alpha_0=\alpha_1=0;\alpha_2=1$ имеется соответственно **12** решений, когда $\alpha_3;\alpha_4;...\alpha_{14}$ принимают последовательно значение равное **1**.

Аналогично, нетрудно убедится, что при $\alpha_0=\alpha_1=\alpha_2=0;\alpha_3=1$ имеется **10** решений; при $\alpha_0=\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0;\alpha_4=1$ - **8** решений; при $\alpha_0=\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0;\alpha_5=1$ - **6** решений; при $\alpha_0=\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=\alpha_5=0;\alpha_6=1$ - **4** решения, а при $\alpha_0=\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=\alpha_5=\alpha_6=0;\alpha_7=1$ имеется **2** решения, когда $\alpha_8$ и $\alpha_9$ принимают последовательное значение равное **1**.

Подставляя все эти решения в формулу(204) получаем **N(2) = 153**.

При **l=3** величина **S=4**. Система уравнений (205) имеет в этом случае **11** ненулевых целочисленных решений: $\alpha_0=3$; $\alpha_0=2,\alpha_1=1$; $\alpha_0=2,\alpha_2=1$; $\alpha_0=2,\alpha_3=1$; $\alpha_0=2,\alpha_4=1$; $\alpha_0=1,\alpha_1=2$; $\alpha_0=1,\alpha_2=2$; $\alpha_0=\alpha_1=\alpha_2=1$; $\alpha_0=\alpha_1=\alpha_3=1$; $\alpha_1=3$; $\alpha_1=2,\alpha_2=1$.

В соответствии с этим по формуле (204) получаем **N(3) = 35**.

Сравнение результатов расчетов по формулам (183) и (204) показывает их полное совпадение. При этом также видно, что расчеты по формуле (204) значительно сложнее, однако в этом случае создается более полная картина, позволяющая оценить величину **N(l)** в случае, когда показатели первичной спецификации **(l)** - мультимножества принимают любые целочисленные значения и когда появление различных реализаций ДСНВ неравновероятно.

Выше было показано, что $\lim\limits_{n'\to\infty} N=\lim\limits_{n'\to\infty} N(m)$. Учитывая это, формулу (204) можно записать в следующем виде:

$$\lim_{n'\to\infty} N=\lim_{n'\to\infty} N(m)=\lim_{n'\to\infty} \sum_{\substack{\alpha_0+\alpha_1+...\alpha_s=m \\ \alpha_1+2\alpha_2+...+s\alpha_s\leqslant s}} l!/(\alpha_0!\alpha_1!...\alpha_s!), \tag{206}$$

где величину **S**, учитывая, что $m=\beta\cdot n'$, можно найти по формуле:

$$S=n'(1-\beta\cdot n). \tag{207}$$

Как уже отмечалось, в рассматриваемом ДСНВ, ограничена максимальная длительность элемента. Таким образом множество **X** состоит из конечного числа элементов $x_0;x_1;...x_p$, где величина **p** определяет наибольшую длительность элемента ДСНВ равную $\Delta\tau\cdot(n+p)$.

В этом случае, учитывая (206), число различных реализаций ДСНВ **N'** над блоком **n`** можно рассчитать по формуле:

$$N' = \sum_{\substack{\alpha_0+\alpha_1+\ldots\alpha_p=m \\ \alpha_1+2\alpha_2+\ldots+p\alpha_p\leqslant s}} m!/(\alpha_0!\alpha_1!\ldots\alpha_p!) \qquad (208)$$

Обозначим через $V(p+1;m)$ число целочисленных решений уравнения $\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_p=m$. Можно показать, и Пи Е это подтвердит, что это число, определяющее количество всевозможных $m$ - мультимножеств, порожденных $(p+1)$-множеством $X$, без учета дополнительных ограничений, налагаемых уравнением $\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+p\alpha_p\leqslant s$, вычисляется по формуле:

$$V(p+1;m) = C^m_{p+m}\ . \qquad (209)$$

Тогда справедлива система неравенств:

$$N'_{max} < N' < C^m_{p+m} \cdot N'_{max}, \qquad (210)$$

где $N'_{max}$ - максимальный член в выражении (208).

Учитывая, что

$$\lim_{n'\to\infty} C^m_{p+m} = \lim_{n'\to\infty} m^p / p!$$

неравенство (210) можно записать, аналогично неравенствам (188).

$$N'_{max}/2^{n'/k} < N'/2^{n'/k} < (m^p/p!)\cdot (N'_{max}/2^{n'/k}). \qquad (211)$$

Переходя к пределу при $n'\to\infty$, после логарифмирования и преобразований получаем

$$(\log_2 N'_{max}) / n' < (\log_2 N') / n' < (\log_2 N'_{max}) / n'. \qquad (212)$$

Из чего заключаем, что при ограниченном $(p+1)$ - множестве $X$ и $n'\to\infty$, величина $N'$, определяемая по формуле (208), численно равна максимальному члену, входящему в эту формулу. Нетрудно показать, что максимальный член будет в случае, когда

$$\alpha_0=\alpha_1=\ldots\alpha_i = m / (i+1). \qquad (213)$$

При этом должно выполняться также неравенство:

$$\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+i\,\alpha_i\leqslant S. \qquad (214)$$

Подставляя значения $\alpha_1$, $\alpha_2$, ..., $\alpha_i$ из (213) в формулу (214), находим максимальное значение величины **i**.

$$i=\frac{2S}{m}=\frac{2(1-\beta n)}{\beta}; \qquad (215)$$

Тогда по формуле (208), учитывая, что при $n'\to\infty$ сумма ряда может быть заменена максимальным членом получим:

$$N'_{max}=\frac{m!}{\{[(\beta m)/(2-2\beta n+\beta)]!\}^{\frac{2-2\beta n+\beta}{\beta}}} \qquad (216)$$

Используя для вычисления факториалов формулу Стирлинга, после преобразований, аналогичных тем, что были проведены ранее, можно получить для предельной эффективности преобразования ДСНВ с ограниченной длительностью минимального и максимального элементов в ДСДВ следующее выражение:

$$Э'_{пр}=\frac{1}{\beta n\,[\log_2(2-2\beta n+\beta)-\log_2\beta]} \qquad (217)$$

Из выражения (217) следует, что предельная эффективность не зависит от величины **p**, при условии, разумеется, что величина **i** из формулы (215), удовлетворяет неравенству:

$$i\leqslant p. \qquad (218)$$

Если неравенство (218) не выполняется, то значение эффективности возрастет, поскольку уменьшится максимальный член. Точное значение в этом случае надо отдельно рассчитывать, исходя из конкретных данных.

На рис. 49 приведены зависимости $Э_{пр}$ и $Э'_{пр}$ от **n**, построенные по формулам (200) и (217). Совершенно очевидно, что с ростом **n**, а, следовательно, уменьшением величины $\delta$, определяющей погрешность отображения ДСНВ в ДСДВ, значения предельной эффективности в обоих случаях уменьшаются. Да это и

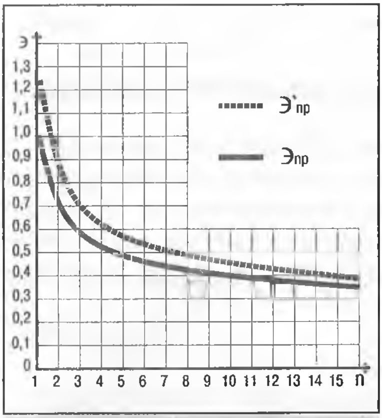



Рис. 49.

понятно. Ведь чем более точно мы отображаем ДСНВ в ДСДВ, тем больше следует нести «затрат» на такое преобразование. Весьма интересно отметить, что величина $Э'_{пр}$ может быть больше **1**, что на первый взгляд кажется парадоксальным. Однако после более внимательного изучения определения эффективности становится ясно, что ничего странного в этом нет при условии, когда ограничена величина $\tau_{max}$. Более детальное пояснение этого опустим для создания заинтересованности у специалистов, объявив, что при определенных условиях эффективность может быть равна и **100**, и **1000**, и более.

Перейдем теперь к обсуждению результатов с учетом того, что мы исследовали ранее применительно к первичному кодированию ДСДВ.

Из выражения (173) вычислим величину **k** и подставим ее в выражение (174). Тогда для предельной эффективности имеем:

$$Э_{пр} = \frac{1}{n\dfrac{\log_2 N}{n'}} = \frac{\delta}{\dfrac{\log_2 N}{n'}}. \qquad (219)$$

Обратившись к (153), где введено понятие скорости кодирования (R) источника сообщений, мы убеждаемся, что эффективность связана со скоростью кодирования следующим соотношением:

$$Э_{пр} = \frac{1}{n R} = \frac{\delta}{R} \qquad (220)$$

При этом следует отметить, что качество отображения ДСНВ в ДСДВ в рассматриваемом случае задается параметром δ.

Выше было указано, что теоретически достижимая скорость кодирования равна энтропии источника. Таким образом, предельная эффективность **($Э_{пр}$)** так же определяется энтропией, точнее ε - энтропией относительно введенного критерия качества δ.

Теперь несколько слов относительно вероятностей реализаций ДСНВ над блоком **n'**. Это тот вопрос, о котором говорил Пи Е.

Рассмотренный выше случай эквивалентен ситуации, когда все реализации ДСНВ равновероятны. А это, как мы знаем, случай, когда энтропия дискретного источника максимальна. Таким образом, найденные значения предельной эффективности определяют нижнею предельную границу. Во всех других ситуациях энтропия будет меньше, а значит, эффективность преобразования будет больше. При этом конкретное значение эффективности будет зависеть от распределения вероятностей и его следует рассчитывать для каждого конкретного случая.

Несколько слов о выборе критерия качества. В рассмотренном выше случае была выбрана величина максимально допустимой абсолютной погрешности отображения элемента ДСНВ $\Delta\tau$ или при соответствующем пересчете максимально допустимая относительная погрешность $\delta$. В каких-то других случаях можно использовать другие критерии, например, среднюю или среднеквадратичную погрешность. Это зависит от конкретной ситуации, и принимать решение об этом следует после соответствующего анализа и советов ЗДРСМа. Для того, что бы это стало понятно и не специалисту приведу пример.

Допустим у Зонгаида есть **100** таньга и он собирается пригласить госпожу Вселенскую в ресторан, поужинать, однако для этого ему нужно сделать предварительный заказ. Естественно наш дорогой Профилактян интересуется, сколько будет стоить ужин, дабы не очутиться в неловком положении. В ответ на его вопрос в первом ресторане ему отвечают, что стоимость ужина на двоих **80** таньга и в среднем превышение данной цены может быть на **10** таньга. Во втором ресторане ему сообщили, что цена ужина на двоих с тем же меню так же **80** таньга, а возможное превышение будет в среднем на **15** таньга, но не более **20** таньга. Я не буду спрашивать Зонгаида какое предложение он выберет, но полагаю, что второе предложение, когда в кармане всего **100** таньга, предпочтительнее, поскольку гарантирует не превышение имеющейся суммы. Если же жестких ограничений по возможной стоимости ужина нет, то первое предложение может оказаться интереснее, так как гарантирует среднее превышение всего на **10** таньга, в то время как второе предложение дает среднее превышение на **15** таньга.

Однако вернемся к нашим сигналам и перейдем к изучению **непрерывного сигнала дискретного времени (НСДВ)**, пример которого изображен на рис.43. Применим ту же логику в рассуждениях, а именно, определим какими «затратами» можно преобразовать данный сигнал в ДСДВ.

В данном случае решение оказывается более наглядным и очевидным, поскольку фактически следует НСДВ подвергнуть только дискретизации по уровню (амплитуде) и далее, исходя из количества уровней, определить какое количество символов ДСДВ потребуется для кодирования.

Продолжим обсуждение данного вопроса, полагая, что в качестве ДСДВ будет использоваться двоичный сигнал дискретного времени (очень часто такой сигнал называют цифровым).

Итак, НСДВ для его преобразования в ДСДВ разбивается на **N** уровней. При этом следует решить очень важный вопрос выбора количества уровней или, что эквивалентно, выбора шага квантования **ΔU**. В более общем случае квантование может быть неравномерным, что выбирается из конкретных условий в зависимости от критерия качества преобразования НСДВ в ДСДВ. В качестве примера можно указать на достаточно широко применяемую на практике логарифмическую шкалу дискретизации.

НСДВ в теории связи часто называют отсчетами, что терминологически станет понятно чуть позже при рассмотрении преобразования непрерывного сигнала непрерывного времени в ДСДВ.

На рис. 50а,б представлены диаграммы преобразования НСДВ в цифровой сигнал при условии равномерного и неравномерного квантования по уровню, а на рис. 50в показан пример, когда НСДВ следует в определенные дискретные моменты времени, но в отличие от вышеуказанных случаев эти моменты отстоят друг от друга на разные интервалы времени. Очевидно, что ДСДВ, эквивалентный рис. 50а, имеет вид **(110,100,101,001)**. Соответственно для рис.50б имеем **(010,110,001,100)** и для рис. 50в - **(100,110,010,110)**. Совершенно очевидно, что кодовые комбинации должны быть во времени переданы до появления следующего отсчета и формирования новой двоичной

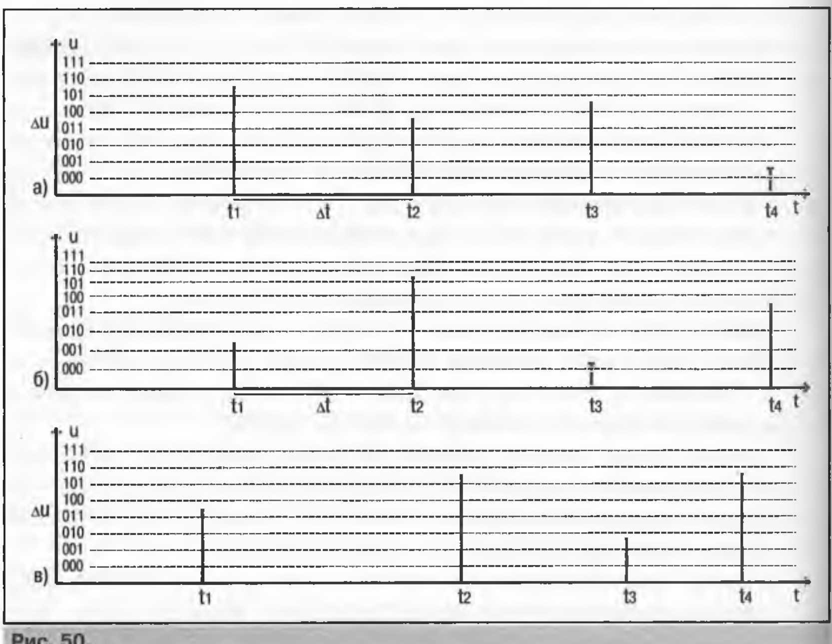



**Рис. 50.**

кодовой комбинации. Таким образом для примеров, показанных на рис.50а,б, за время между отсчетами **Δt** надо успеть передать **$n=\log_2 N$** двоичных символов. В случае, изображенном на рис.50в, в качестве временного интервала, за который надо передать **$n=\log_2 N$** двоичных символов, следует выбрать либо наименьшее значение временного интервала между отсчетами, либо среднее значение, но не более его. При этом в любом случае появятся определенные накопительные устройства, возникнет неравномерная задержка, что в практическом отношении оказывается малопривлекательным при реализации конкретных устройств.

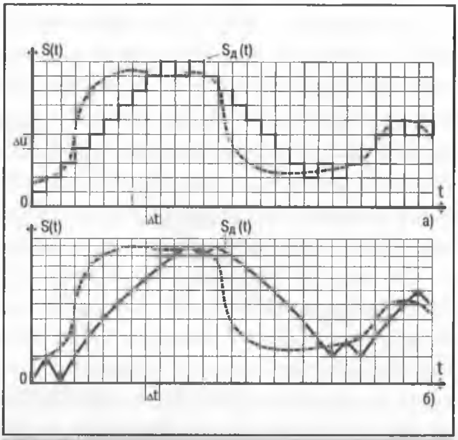


Рис. 51.

Для восстановления исходного сигнала на приеме, необходимы адекватные обратные преобразования, с учетом «временного расстояния» между отсчетами и используемой шкалы дискретизации.

**Непрерывный сигнал непрерывного времени (НСНВ)** - последний тип сигналов из введенной нами выше классификации (рис. 44). Рассматривая его трансформацию в ДСДВ, необходимо осуществить две дискретизации по уровню и по времени, или наоборот вначале по времени, а затем по уровню, или одновременно. Последнее реализуется «наложением» на НСНВ некой «решетки», ячейки которой определяют шаг дискретизации по уровню и по времени. В результате этого НСНВ (сигнал **s(t)**, рис. 51а,б) заменяется (аппроксимируется) ДСДВ (сигнал **$s_д(t)$**, рис. 51а,б). При этом, безусловно, следует учитывать качество аппроксимации в соответствии с выбранным критерием, о чем мы уже неоднократно говорили.

Для примера на рис. 51а показан случай, когда сигнал **s(t)** заменяется ступенчатым сигналом **$s_д(t)$** с равномерным временным шагом дискретизации **Δt** и равномерным квантованием по уровню **ΔU**. Правило формирования ступенчатого сигнала очень простое. В определенные моменты времени, следующие через интервал **Δt**, происходит сравнение сигналов **s(t)** и **$s_д(t)$**. Если **$s_д(t) < s(t)$**, то сигнал **$s_д(t)$** увеличивается на один уровень **ΔU**. В противном случае сигнал **$s_д(t)$**, наоборот, уменьшается на один уровень **ΔU**. При этом кодовая последовательность двоичного сигнала, отображающая уже сигнал **$s_д(t)$** в двоичной форме, строится по правилу: увеличение **$s_д(t)$** на один уровень соответствует **1**, а уменьшение на один уровень соответствует **0**.



16 з. 192

Как следует из рис. 51а ступенчатый сигнал не всегда «успевает» за НСДВ **s(t)**. Это говорит о том, что следует либо уменьшить шаг дискретизации $\Delta t$, либо увеличить шаг квантования по уровню $\Delta U$. Второе приведет к более грубому отображению НСНВ в ДСДВ, что может оказаться недопустимо в соответствии с введенным критерием качества. Уменьшение же $\Delta t$ потребует в конечном итоге большего количества двоичных символов для кодирования НСНВ, что также нежелательно по экономическим соображениям. Поэтому, как мы уже не раз наблюдали, приходится решать оптимизационную задачу при выборе $\Delta U$ и $\Delta t$.

На рис. 51б показана аппроксимация того же сигнала **s(t)**, но с помощью пилообразной кривой $s_д(t)$, которая стоится по тому же правилу, что и рассмотренная выше ступенчатая кривая. Кроме того, в данном случае при равномерной дискретизации по времени с шагом $\Delta t$, квантование по уровню осуществляется неравномерно. Целесообразность такой аппроксимации зависит от критерия качества, что является задачей, сопряженной с выбором эффективного метода кодирования. Кроме того, приходится учитывать возможности практической реализации, что так же немаловажно.

Методы преобразования НСНВ, показанные на рис. 51, получили в теории связи название методов дельта модуляции (δ - модуляция). На практике они без дополнительной обработки двоичного сигнала не получили широкого распространения, ввиду низкой эффективности преобразования НСНВ в ДСДВ. Их использование может быть оправдано в сочетании с другими методами преобразования закодированной последовательности, либо при плавно меняющемся НСНВ без резких переходов через ячейки «наложенной» решетки.

Рассмотрим еще один подход к преобразованию НСНВ в ДСДВ (рис. 52а, б, в, г). Изображенный на рис. 52а НСНВ **s(t)** путем дискретизации по уровню преобразуется в два сигнала. Первый - это ДСНВ (рис. 52б) $s_д(t)$, который нами изучался ранее, несет информацию о том, за какое время НСНВ переходит от одного уровня до другого, а второй - это некий «сопутствующий» сигнал $s_и(t)$, который по времени совпадает с фронтами сигнала $s_д(t)$, показанного на рис. 52б, и, принимающий значение **1**, если НСНВ возрастает, и соответственно **0**, если НСНВ уменьшается по уровню. В результате такого преобразования и передачи на прием сигналов $s_д(t)$ и $s_и(t)$ можно восстановить точки пересечения сигналом **s(t)** различных уровней и по ним восстановить исходный НСНВ. Как это сделать мы в данном случае не станем рассматривать, адресуя любопытных к разделам математики, относящихся к теории аппроксимации. Нам же будет интересно установить эффективность такого преобразования НСНВ в ДСДВ.

Выше было показано, как можно вычислить эффективность преобразования ДСНВ в ДСДВ. В отличие от этого теперь при проведении аналогичных преобразований необходимо учитывать не только сигнал $s_д(t)$, но и сопутствующий сигнал $s_и(t)$. Таким образом, по аналогии с формулой (183), определяющей

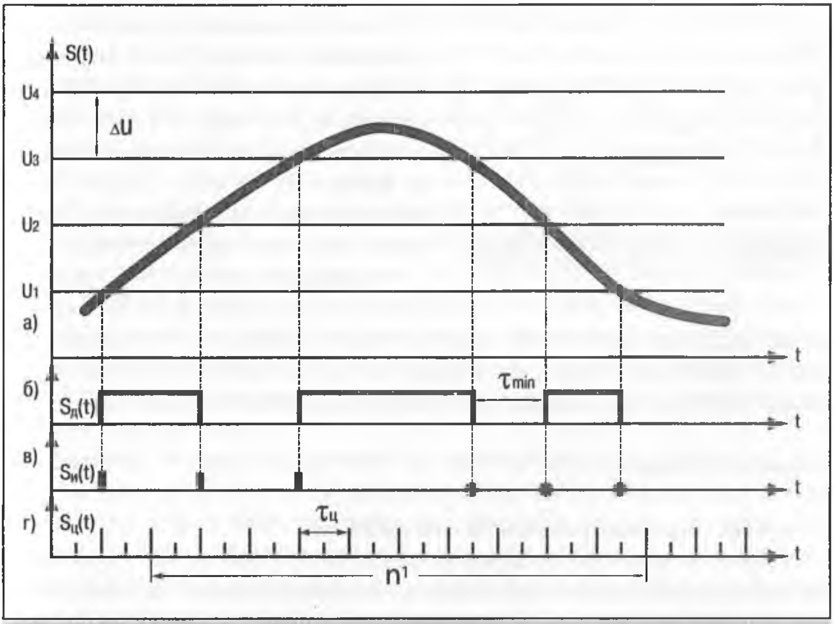



**Рис. 52.**

число реализаций ДСНВ над блоком **n`**, и, учитывая необходимость передачи **l** - символьной кодовой комбинации, отражающей сигнал **sи(t)**, имеем:

$$\mathbf{N}_{s_д(t);s_и(t)}(l) = 2\,C^{l}_{n'-nl+l} \qquad (221)$$

Опуская преобразования аналогичные приведенным выше, запишем окончательное выражение для эффективности преобразования НСНВ в ДСДВ, аналогичное (200):

$$Э_{пр}=1/\left(n\cdot[\beta + (1-\beta n+\beta)\cdot\log_2(1-\beta n+\beta)-(1-\beta n)\cdot\log_2(1-\beta n)-\beta\cdot\log_2\beta]\right). \qquad (222)$$

Для случая, когда ограничена не только минимальная, но и максимальная длительность элемента в сигнале **sд(t)**, имеем по аналогии с (217)

$$Э'_{пр} = \frac{1}{\beta n\,[\,1 + \log_2(2-2\beta n+\beta) - \log_2\beta]} \qquad (223)$$

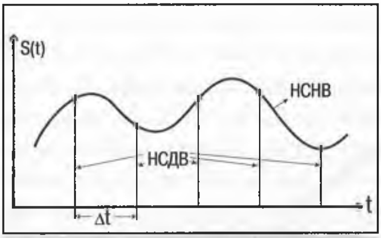



**Рис. 53.**

Можно оценить эффективность преобразования НСНВ в ДСДВ при любых других трансформациях НСНВ в совокупность сигналов $s_д(t)$ и $s_и(t)$. При этом следует озаботиться решением вопроса о том, как на приеме восстановить исходный сигнал **s(t)** по поступившим сведениям о значениях этого сигнала в отдельных точках.

Размышления на эту тему привели к доказательству очень важной теоремы, называемой теоремой Котельникова или теоремой отсчетов. Эта теорема гласит, что НСНВ можно представить в виде последовательности отсчетов, то есть в виде НСДВ, причем интервал между отсчетами должен быть не более

$$\Delta t \leqslant (1/\,2\,f_{max}), \qquad (224)$$

где $f_{max}$ - максимальная частота спектра НСНВ.

Мы пока не знаем, что такое максимальная частота спектра, но, тем не менее, соотношение (224) весьма конструктивно, поскольку указывает на возможность определить величину **Δt**, что фактически означает определение НСДВ, который через этот временной интервал принимает значения исходного НСНВ (рис. 53)

Для восстановления исходного сигнала необходимо на месте отсчетов сформировать сигнал типа **(sin x) / x**. Выражаясь языком математики, сигнал **s(t)** следует на приеме представить в виде ряда:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k\,\Delta t)\,\frac{\sin 2\pi f_{max}\,(t - k\,\Delta t)}{2\pi f_{max}\,(t - k\,\Delta t)} \qquad (225)$$

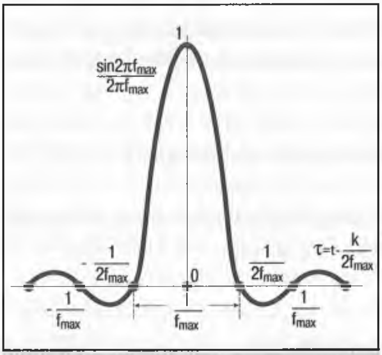



**Рис. 54.**

где **s(k Δt)** - значения отсчетов, то есть значения НСДВ сформированного из НСНВ.

Для наглядности на рис. 54 показана функция отсчетов, центр основного лепестка которой, должен совпадать с местоположением отсчета.

Следует подчеркнуть, что теорема Котельникова дает с точки зрения математики разложение функции **s(t)** в ряд с бесконечным количеством членов, а с позиций теории связи эта теорема позволяет обосновать представление НСНВ в виде НСДВ. Далее для представления НСДВ в виде ДСДВ можно воспользоваться изложенными выше положениями.

Особо надо подчеркнуть, что разложение функции в ряд Котельникова далеко не исчерпывает подобные решения (см. формулу 32). На сегодня известны и применяются другие виды разложений сигнала в ряд, или, другими словами, разложение на элементарные составляющие, или разложение по координатному базису. Разное терминологически все это в конечном итоге сводится к попытке представить нечто сложное, в данном случае сигнал **s(t)**, в виде суммы простых элементарных составляющих, что в последствии делает возможным анализ процессов, происходящих при передаче сигналов. Не углубляясь далее, назовем для сведения наиболее известные системы разложения. Это, прежде всего тригонометрические функции, функции Матье, функции Уолша, комплексные экспоненциальные функции, полиномы Лежандра, функции Чебышева, функции Эрмита и прочее.

Широкое же распространение на практике разложения НСНВ в ряд Котельникова, объясняется относительной простотой реализации такого преобразования, а также простотой генерации на приеме функций типа **(sin x) / x**.

Итак, мы рассмотрели все типы сигналов, а так же варианты их преобразований в ДСДВ, точнее в двоичный сигнал дискретного времени, который обычно называют цифровым сигналом. Мы установили предельные границы этих преобразований, которые чрезвычайно важны в поисках хороших практических решений. Мы указали так же на то, что во всех преобразованиях очень важно определить критерий качества преобразования. Причем выбор критерия - это задача, вытекающая из конкретной практической ситуации. Теперь же обратимся к изучению среды, по которой или через которую передаются различные типы сигналов.

**Мы уже отмечали, что будем заниматься изучением передачи электромагнитных сигналов**. Поэтому, обращаясь к среде передачи, необходимо изучить ее свойства по отношению к электромагнитным волнам. Благодаря достижениям физиков и лично Силы Водородовны Вселенской, мы узнали, что существуют материалы, хорошо проводящие электромагнитные колебания, а есть материала с обратными свойствами, которые называют изоляторами. Вслед за этим производственники, подталкивая физиков к индустриальным решениям, научились делать из вышеназванных материалов длинные проводящие линии и начали опутывать Землю своими искусственно созданными проводящими средами. Причем в начале это были металлические проводники, а теперь все чаще это стекловолокно, пропускающее потоки света. И происходит это не только потому, что металла не хватает или жалко его на это тратить, но и по более существенным причинам, связанным с пропускной способностью систем. Оказалось, что на базе стекловолокна можно реализовать гораздо более мощные проводящие среды по сравнению с тем, что можно было бы достигнуть на основе металлических линий связи. Для анализа причин этого обратимся к характеристикам сигналов. При этом для определенности начнем с ДСДВ, а точнее цифровых сигналов.

Мы уже отмечали, что сигнал **s(t)**, как функция времени, может быть представлен в виде ряда (32). При этом элементы разложения $\eta_k(t)$ могут быть разными и математики увлеченно занимались этим, в том числе, используя тригонометрические функции. Однако вдруг выяснилось, что эти отвлеченные абстрактные рассуждения, имеют важную практическую направленность, поскольку проводящие среды по разному «реагируют» на гармонические колебания разной частоты. Таким образом, появилась возможность анализировать влияние сред на составляющие сигналов, коими выступают синусоиды и косинусоиды, а затем, осуществляя синтез, то есть, «собирая» на приеме исходный сигнал из элементов разложения, делать заключение о передачи сигнала в целом.

Благодаря усилиям математиков мы знаем, что периодический сигнал **s(t)**, с периодом **T**, можно представить в виде тригонометрического ряда Фурье.

$$s(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [\, a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \,], \qquad (226)$$

где $\eta_k(t) = \{1, 0, \cos \omega t, \sin \omega t, \cos 2\omega t, \sin 2\omega t, \ldots, \cos k\omega t, \sin k\omega t, \ldots\}$, а соответственно

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\, dt \qquad (227)$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\cos(k\omega t)\, dt \qquad (228)$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\sin(k\omega t)\, dt \qquad (229)$$

Коэффициенты при $\eta_k(t)$, а в нашем случае это $C_0$, $a_k$ и $b_k$, называются спектром сигнала **s(t)**.

Для непериодических функций **s(t)**, устремляя **T** к $\infty$, и, заменяя дискретные значения $k\omega$ на текущее значение частоты $\omega$, получим обобщенное разложение Фурье в комплексной форме.

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega, \qquad (230)$$

где $\dot{S}(\omega)$ - называется спектральной плотностью. При этом

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, e^{-i\omega t}\, dt. \qquad (231)$$

Модуль спектральной плотности называют просто спектром сигнала **s(t)**.

Итак, мы ввели помимо понятного ЗДРСМу описания сигнала, как функции времени, новое представление, а именно, описание сигнала в спектральной области или другими словами описание сигнала в новом координатном базисе $\eta_k$**(t)**.

Как уже отмечалось такое описание весьма удобно, поскольку среда передачи сигналов избирательно реагирует на гармонические колебания разной частоты. Это позволило ввести описание среды через ее частотные характеристики, а именно, зависимость амплитуды от частоты и соответственно фазы от частоты. Эти характеристики получили название амплитудно-частотной характеристики **(АЧХ)** и фазо-частотной характеристики **(ФЧХ)**. Определяются они, как отношение соответствующего показателя на выходе к значению этого показателя на входе и обозначаются $\dot{K}(\omega)$ и $\varphi(\omega)$. В идеале, если в сигнал **s(t)** не вносится искажений, то величина $\dot{K}(\omega)$ - постоянна, а $\varphi(\omega)$ линейно изменяется. На рис. 55а показан пример **АЧХ** и **ФЧХ** для устройства, называемого фильтром нижних частот **(ФНЧ)**, поскольку, как видно из характеристик, гармонические колебания с частотой от **0** до некоторого граничного значения $\omega_{гр}$ пропускаются, а с частотой $\omega > \omega_{гр}$ - нет. Аналогично рассмотренному, можно представить себе фильтр высоких частот **(ФВЧ)** (рис. 55б) или полосовой фильтр **(ПФ)**, который из всего диапазона частот от **0** до $\infty$ про-

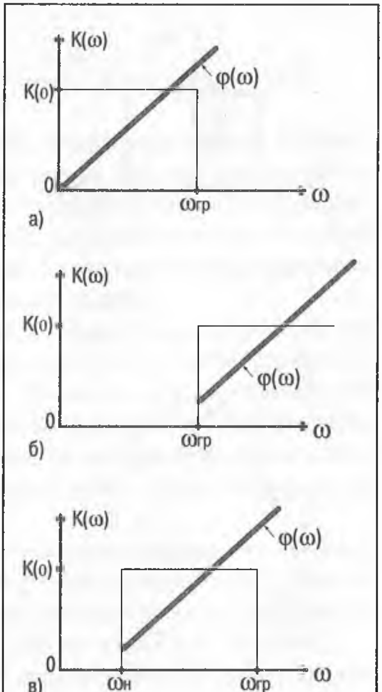



**Рис. 55.**

пускает гармонические колебания с частотами от некоторого нижнего $\omega_н$ до некоторого верхнего $\omega_в$ значений (рис. 55в).

Разберем теперь часто встречающийся пример, когда сигнал **s(t)** представляет собой прямоугольный импульс с амплитудой $U_o$ и длительностью $\tau_o$ (рис. 56а).

Во временной области сигнал **s(t)** имеет вид:

$$s(t) = \begin{cases} U_o \text{ при } -\tau_o/2 \leqslant t \leqslant \tau_o/2, \\ 0 \text{ при } -\tau_o/2 > t \text{ и } t > \tau_o/2. \end{cases} \qquad (232)$$

Воспользовавшись (231) найдем спектр сигнала $|\dot{S}(\omega)|$.

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\tau o/2}^{\tau o/2} Uo\, e^{-i\omega t}\, dt. \qquad (233)$$

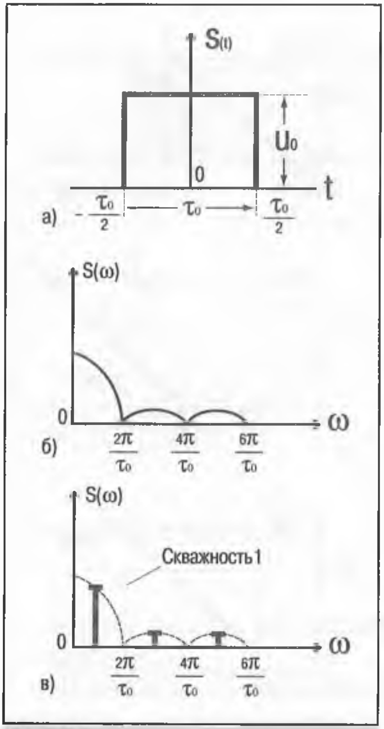



**Рис. 56.**

Используя для дальнейших преобразований формулу Эйлера,

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x \qquad (234)$$

после интегрирования выражения (233) и подстановки пределов получаем:

$$\dot{S}(\omega) = U_o \tau_o \frac{\sin(\omega \tau_o / 2)}{(\omega \tau_o / 2)} \qquad (235)$$

Из простых геометрических наблюдений следует, что произведение $U_o\tau_o$ определяет площадь прямоугольного импульса сигнала **s(t)**. Сам же спектр сигнала $|\dot{S}(\omega)|$ изображен на рис. 56б. При этом $|\dot{S}(0)| = U_o\tau_o$, а в точках $\omega = \pm(2\pi k / \tau o)$ спектр $|\dot{S}(\omega)| = 0$. В целом же спектр имеет форму соотношения **(sin x) / x**.

(Любопытные граждане могут поискать общность между разложением

Котельникова и полученным результатом о спектре прямоугольного импульса).

Как видно спектр сигнала ограниченной длительности во времени имеет бесконечное количество спектральных составляющих. Но к нашему счастью амплитуда этих составляющих, хотя и не монотонно, но все же быстро уменьшается с ростом $\omega$. Это позволяет говорить об эффективной или эквивалентной ширине спектра ($\omega_э$), понимая под этим ту часть спектра, в которой сосредоточена основная энергия. Понятие основная энергия задается коэффициентом $\gamma$, который обычно берется равным **0,9-0,99**. Таким образом, основная энергия составляет **0,9-0,99** от полной энергии. Конечно, в отдельных случаях коэффициент $\gamma$ может принимать и другие значения в зависимости от потребности.

Полная энергия по теореме Парсеваля может быть определена следующим образом:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\, dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} |\dot{S}(\omega)|^2\, d\omega, \tag{236}$$

Тогда основная энергия, обозначим ее $E_\gamma$, может быть вычислена по формулам:

$$E_\gamma = \gamma\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\, dt = \int_{0}^{\tau_э} s^2(t)\, dt = \frac{\gamma}{\pi}\int_{0}^{\infty} |\dot{S}(\omega)|^2\, d\omega = \int_{0}^{\omega_э} |\dot{S}(\omega)|^2\, d\omega, \tag{237}$$

Соотношения (237) позволяют установить связь между полной энергией ($E$), основной энергией ($E_\gamma$), а также эквивалентной шириной спектра ($\omega_э$) и эквивалентной длительностью импульса ($\tau_э$). При этом оказывается, что произведение ($\omega_э\tau_э$) является величиной постоянной, которая определяется формой импульса. Отсюда простой, но очень важный вывод: **чем меньше длительность импульса, тем шире его эквивалентный спектр**.

Таким образом, наше желание передать за некий ограниченный отрезок времени много-много импульсов будет означать, что их длительность должна стремиться к **0**, а, следовательно, спектр - к $\infty$. Значит и среда передачи должна обеспечить бесконечно большую полосу пропускания частот, что, как показывает реальная практика, не достижимо. Хотя и известны такие явления, как сверхпроводимость, при очень низких температурах. Однако об этих особенностях среды предлагается поговорить позднее.

Представленный на рис. 56б спектр соответствует одиночному импульсу прямоугольной формы. При другой форме сигнала сообразно (231) будет и другой формы спектр. Однако во всех случаях основная часть энергии спектра будет концентрироваться вблизи **0**-ой частоты.

Если рассмотреть периодическую последовательность прямоугольных импульсов, то для нахождения спектра целесообразно воспользоваться соотношениями (227-229). В результате будет получен спектр, состоящий из отдельных спектральных составляющих, но вписывающихся в огибающую спектра одиночного импульса. Например, для периодической последовательности **...1,0,1,0,1,0,...** спектр состоит из спектральных составляющих, показанных на рис.1.56в, на частотах $\omega=\pm(\pi \mathbf{k} / \tau)$, где **k=1,3,5,...** Для периодических сигналов с большей «скважностью», например, **...1,0,0,1,0,0,1,0...**(«скважность» **2**) или **...1,0,0,0,1,0,0,0,1,...** («скважность» **3**) количество спектральных составляющих будет возрастать, стремясь в пределе к виду, характерному для одиночного импульса.

Периодические сигналы не могут нести информацию о сообщениях, поскольку заранее известна их структура, а мы знаем, что информация «скрыта» в неопределенности. Поэтому реальный «информационный» сигнал содержит случайное сочетание единиц и нулей. Периодические же сигналы используются нами для иллюстрации процессов, а в технике связи для проведения различных настроек, как эталонные сигналы, что бы была возможность с чем-то сравнивать. Это точно так же, как эталоны веса или длины.

Спектр реального «информационного» сигнала имеет сложную конфигурацию и для его оценки обычно используют, либо энергетические соображения, о которых мы говорили выше, либо более сложные понятия, такие как мгновенный или текущий спектр.

Характеризуя сигнал во временной области, мы подразумеваем, что во времени меняется некое напряжение или ток, что в аналитическом виде описывается в виде функции времени **s(t)**. При этом мы реально фиксируем изменения во времени параметров сигнала. Теперь, говоря о спектре сигнала, может возникнуть вопрос, а насколько реален спектр. Ведь в нашем обсуждении, спектр - это некое разложение по элементарным составляющим, которые никто в процессе формирования исходного сигнала **s(t)** не создавал. Ответ на этот вопрос можно проиллюстрировать следующим примером.

Представим себе некое здание, которое нарисовал художник и это будет сигнал **s(t)**. А теперь подумаем, как строители будут сооружать это здание. Одни в качестве материала возьмут обычные кирпичи, другие бетонные блоки, ну а третьи станут использовать бревна и доски. Вот и получается, что нечто целое, может быть сформировано самыми разными способами. Так и сигнал, он может быть получен устройством, отражающем изменение напряжения или тока во времени, а может быть получен путем суммирования определенного количества гармонических колебаний, или еще иных элементов, если разложение осуществляется в иной базе элементарных сигналов. Во времени это всегда сигнал **s(t)**, хотя способы его формирования различны и, кстати, наблюдая во времени за параметрами сигнала **s(t)**, мы никаким способом не сможем определить, как он был получен, при условии, естественно, соответствия образованного сигнала введенному критерию качества».

«Постойте, постойте, - заволновалась Муза-Диф, - это что же получается, Вы думаете, что сигнал сформировали одним способом, а он оказывается, сформирован совсем по другому? Обман какой-то».

«Никакого обмана здесь нет, - улыбаясь, ответил Файлтон, - просто некоторая неоднозначность, которая Вами не обнаруживается. Представьте себе, что Вы пошли шить платье к Вашему знакомому портному. Он у Вас заказ принял, но исполнял его другой портной, например, ученик Вашего знакомого. Сделал он все прекрасно, в соответствии с Вашими критериями качества. Так какая Вам разница кто шил платье, если Вас это устраивает? Конечно, если Вы захотите как-то по-особенному отблагодарить портного за проделанную работу, то будет не очень справедливо, если все слова благодарности, а может быть и еще что-то, достанутся не реальному исполнителю, а только тому, кто ухитряется быть в нужном месте и в нужное время. Но, что поделать, реальный мир так устроен, если нет возможности внести показатель относительности, и приходится принимать явление или процесс, как некий абсолют. Кстати мы уже не раз говорили об условном характере наших представлений о мире реальном. Видимые и воспринимаемые нами законы вполне могут явиться результатом действия совершенно неведомых нам процессов. К сожалению, доказать, что наши представления единственны, не всегда удается, особенно в области открытых феноменологических законов.

Но позвольте мне продолжить про сигналы и их спектры, переходя от ДСДВ к ДСНВ.

Выражения (230-231) определяют обобщенное преобразование Фурьё и могут применяться для нахождения спектра ДСНВ. Вместе с тем, используя полученные выше результаты по преобразованию ДСНВ в ДСДВ, и, применяя затем преобразование Фурье, можно получить характеристику спектра ДСДВ, отражающего ДСНВ. Сравнение предельных значений преобразований, например, для выявления эквивалентной ширины спектра при условии одинаковых показателей качества должны оказаться совпадающими. В противном случае оказываются не учтенными какие-либо особенности сигналов либо параметров качества.

Для относительно грубой оценки эффективной ширины спектра ДСНВ принимается значение ($\omega_э$), взятое из предположения, что минимальная длительность элемента ДСНВ равна некоторому $\tau_{min}$. Такая оценка не учитывает ряд существенных факторов, влияющих на качество отображения сигнала после ограничения его спектра. Однако этот непростой вопрос оставим для более позднего обсуждения.

Рассмотрим теперь НСДВ. Этот сигнал, который зачастую называют отсчетами, имеет длительность, стремящуюся к **0**, что соответствует эквивалентной ширине спектра, стремящейся к $\infty$. Однако отсчеты следуют через определенный интервал времени **Т**. Следовательно, НСДВ можно рассматривать не только как последовательность отсчетов, но и как последовательность «ступеней» длительностью **T**, имеющих различные уровни такие же, как отсчеты. В этом случае, используя преобразование Фурье, можно найти спектр сигнала и определить эквивалентную ширину спектра. Для грубых оценок **($\omega_э$)** НСДВ можно найти спектр одиночного импульса длительностью $\tau_0$**=T/n**, где **n=log$_2$N**, а **N** - количество уровней, на которые разбивается НСДВ при его дискретизации по уровню.

Для нахождения спектра НСНВ следует также воспользоваться формулами (230 - 231). При этом, поскольку элементами разложения выбраны элементарные тригонометрические функции, которые сами по себе являются НСНВ, то спектры сигналов могут иметь как относительно сложную, так и относительно простую структуру. Приведем пример. Конечный во времени простой прямоугольный импульс длительностью **($\tau$)**, имеет бесконечный спектр (рис. 56), тогда, как синусоидальное колебание бесконечной продолжительности имеет ограниченный спектр, состоящий из всего одной спектральной составляющей, расположенной на частоте синусоидального сигнала. Поскольку спектральное представление помогает описать характеристики среды передачи, то вышеприведенные соотношения еще раз подчеркивают общность и единство законов природы. Действительно, чем больше количество импульсов мы хотим передать в единицу времени, тем, естественно, меньше длительность каждого импульса. Следовательно, эффективная ширина спектра такого сигнала будет шире, а значит, требуется и более широкополосная среда передачи. При этом, как отмечалось величина **($\omega_э\tau_э$)** является константой и зависит от формы сигнала. Наиболее любопытным гражданам можно предложить поискать диапазон изменения данного произведения **($\omega_э\tau_э$)** в зависимости от формы сигнала.

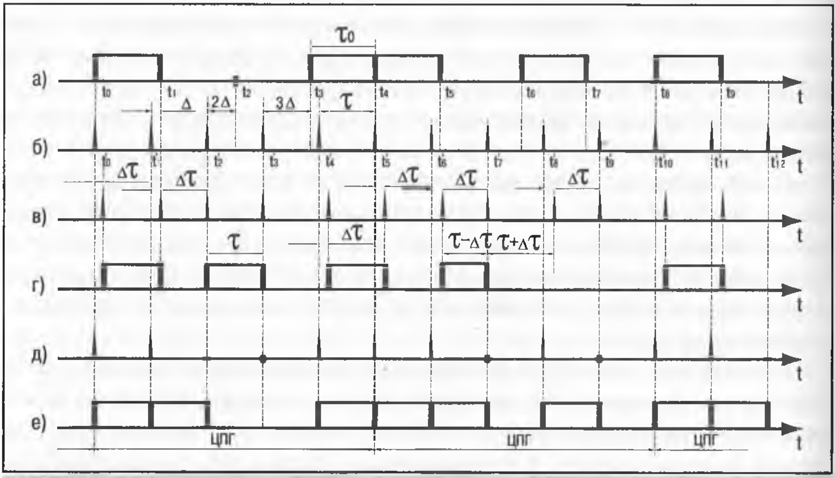



**Рис. 57.**

**Модуляция - один из широко применяемых видов преобразований сигналов, характеризующийся изменением параметров одного сигнала под воздействием другого**. Принято первый из названных сигналов называть несущим сигналом или модулируемым, а второй - модулирующим. Виды несущих сигналов могут быть самые разные, но мы рассмотрим лишь два из них, а именно, последовательность отсчетов и гармоническое колебание. В качестве модулирующего сигнала выберем ДСДВ с длительностью элементов **($\tau_0$)**.

Обратимся к рис. 57, на котором изображены различные виды модуляции последовательности отсчетов (рис. 57б), отстоящих друг от друга на величину **($\tau$)**, под воздействием случайного двоичного сигнала (рис. 57а). Как уже отмечалось, под влиянием модулирующего сигнала изменяются параметры несущего сигнала. В качестве примера можно предложить изменять местоположение отсчета относительно его номинального положения на величину $\Delta\tau$, если в модулирующем сигнале единица, и не изменять положения отсчета, если - ноль. Тогда последовательность отсчетов, показанная на рис. 57б будет преобразована в последовательность, изображенную на рис. 57в. Таким образом, информация о модулирующем сигнале будет закодирована в местоположении отсчета последовательности **(в)** по отношению к последовательности **(б)**. При этом, очевидно, надо на приеме для осуществления обратных преобразований иметь возможность сравнения вышеназванных последовательностей, что обеспечивается специальными устройствами синхронизации, о которых придется поговорить позднее.

Последовательность отсчетов может быть преобразована в двоичный сигнал (рис.57г), элементы которого будут иметь длительность $\tau$ или $\tau\pm\Delta\tau$. Знак элементов в данном случае не имеет значение, поскольку информация о модулирующем сигнале скрыта в длительности элементов. При этом можно заметить, что укороченный элемент длительностью $\tau-\Delta\tau$, всегда соответствует переходу от **1** к **0** в исходном модулирующем сигнале, а удлиненный, длительностью $\tau+\Delta\tau$ - наоборот переходу от **0** к **1**. Данное обстоятельство можно использовать на приеме для восстановления начального сигнала.

Из приведенных выше рассуждений ясно, что сигнал, состоящий из отсчетов (рис.57в), не следует использовать для передачи, поскольку эффективная ширина спектра такого сигнала стремится к $\infty$. Таким образом, передавать следует сигнал, показанный на рис. 57г, у которого минимальная длительность элемента равна $\tau-\Delta\tau$, что и определяет эффективную ширину спектра, существенно меньшую по сравнению с сигналом в виде отсчетов.

Несущая последовательность отсчетов (рис. 57б) характеризуется двумя параметрами, а именно, местоположением отсчета во времени и значением по уровню (амплитуде). Мы рассмотрели пример, когда изменялось временное положение отсчета. Однако, возможно, более наглядным будет изменение амплитуды отсчета, что и продемонстрировано на рис. 57д. На рис. 57е приведен двоичный сигнал, соответствующий сигналу амплитудно-модулированных отсчетов.

В общем случае можно осуществлять модуляцию сразу двух параметров и при этом задать не два значения для каждого параметра, а больше. Например, отсчет может во времени занимать не два положения относительно несущей, а, например, три. Также амплитуда отсчета может занимать, скажем, не два положения, а четыре. В результате это позволяет отобразить не два, как в рассмотренных примерах состояния исходного модулирующего сигнала, а **3х4=12** состояний.

Поскольку в качестве модулирующего сигнала мы рассматриваем двоичный сигнал, то удобнее, что бы число состояний было кратно степени двойки, хотя это вовсе не обязательно, поскольку «лишние» состояния можно использовать в интересах помехоустойчивого кодирования. В результате мы видим, как смыкаются такие понятия, как кодирование и модуляция, а оптимизация выбора эффективных методов становится все более сложной и многозначной.

Для придания наглядности сказанному приведем диаграммы модуляции несущей последовательности отсчетов, если местоположение отсчета занимает одно из трех положений: номинально, смещенное относительно номинального на $\Delta\tau$ и смещенное на $2\Delta\tau$. Амплитуда отсчета пусть принимает одно из трех значений: или $U_1$, или $U_2$ или $U_3$. В результате таких условий можно получить **3х3=9** различных состояний отсчета в несущей последовательности. Из простых рассуждений следует, что в исходном модулирующем сигнале можно взять трехэлементные комбинации, коих будет ровно $2^3=8$, и отождествить их с различными состояниями отсчетов. Отобразим это в таблице 20.

**Таблица 20**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Модулирующий сигнал | Трибиты | 000 | 001 | 010 | 011 | 100 | 101 | 110 | 111 |
| Параметры модулиров. | Смещ. во врем. | 0 | 0 | 0 | $\Delta\tau$ | $\Delta\tau$ | $\Delta\tau$ | $2\Delta\tau$ | $2\Delta\tau$ |
| сигнала (отсчета) | Амплитуда | $U_1$ | $U_2$ | $U_3$ | $U_1$ | $U_2$ | $U_3$ | $U_1$ | $U_2$ |

Используя условия таблицы 20, построим диаграммы, иллюстрирующие комбинированный и многоуровневый вид модуляции последовательности отсчетов (рис.58). На диаграмме **(а)** показан исходный модулирующий двоичный сигнал, «разбиваемый» на тройки элементов (трибиты). Каждой тройке по таблице 20 ставится в соответствие положение отсчетов, показанных на диаграмме **б**. При этом следует дождаться поступления трех элементов модулирующего сигнала, в результате чего модулированный сигнал запаздывает относительно модулирующего. Затем формируется трехуровневый модулированный сигнал отсчетов (диаграмма **в**), в котором расстояние относительно номинального временного положения меняется на $+\Delta\tau$ или на $+2\Delta\tau$. Наконец на диаграмме **(г)** изображен ДСДВ, уровень которого принимает различные значения в моменты времени,

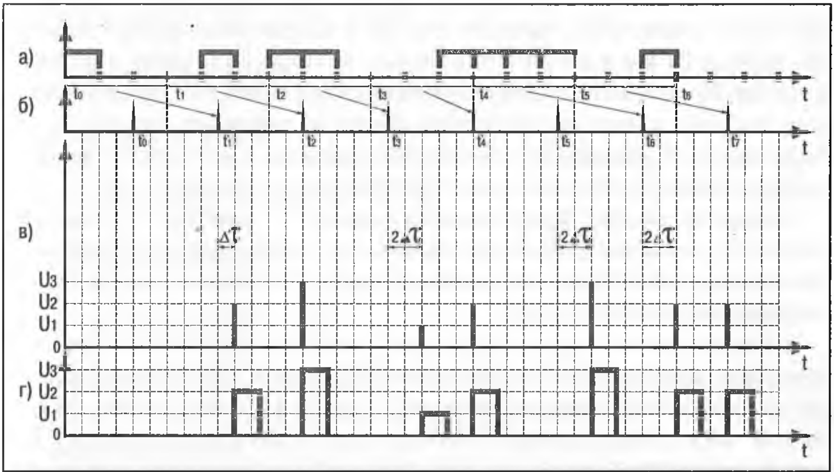


Рис. 58.

определяемые модулированной последовательностью отсчетов, а минимальная длительность элемента равна **(τ-2Δτ)/2**.

При этом следует отметить, что по сравнению с примером, показанном на рис.57, в данном случае величина τ может быть взята в три раза больше, поскольку кодирование осуществляется не «поэлементно», а по три элемента сразу. Данное обстоятельство позволяет рассчитывать на некоторое уменьшение эффективной ширины спектра модулированного сигнала, что, однако, следует исследовать в каждом конкретном случае. При многоуровневой модуляции возникает также дополнительная задержка, связанная с накоплением трех элементов. Кроме того, уменьшается расстояние между различными значениями сигнала при фиксированном общем диапазоне амплитуд или временного смещения».

«Уважаемый Бит Байтович, - прервал повествование Пи Е Тет, - однако я замечаю некоторую погрешность в Ваших рассуждениях. Она очень хорошо заметна на рис. 58б, момент **$t_5$`**. Перед этим в момент **$t_4$`** Вы сформировали соответствующий отсчет, а что же Вы делаете в момент **$t_5$`**. С одной стороны передавать сведения о следующей тройке элементов модулирующего сигнала еще рано, но с другой - надо что-то делать с отсчетом. Как же поступили Вы»?

«Вы абсолютно правы, обратив на это внимание, - сказал с удовольствием Файлтон, - действительно из-за разных значений τ и $τ_0$ в какой-то момент времени происходит указанная Вами коллизия, когда отсчет становиться как бы лишним, но выкинуть его нельзя, потому, что мы имеем дело с процессом, происходящим в реальном времени. А «лишние» кусочки времени «вырезать» мы пока не научились, да и Сила Водородовна о таких возможностях не говорила.

Поэтому на месте этого «лишнего» отсчета я сформировал несуществующее (см. таблицу 20) значение отсчета, а именно, скачок на $2\Delta\tau$ и уровень $U_3$. Такого в таблице 20 нет и, значит, на приеме мы имеем возможность обнаружить это, а, следовательно принять соответствующие меры по наведению порядка. Однако я воздержусь от дальнейших комментариев, указав лишь на то, что это является задачей, решаемой специальными устройствами синхронизации.

Вернемся к рис. 57. Здесь так же мы можем легко заметить то, о чем говорил Пи Е. Причем при условии постоянства $\tau_0$ и $\tau$ данные коллизии будут появляться регулярно и более того периодично, если $\tau_0$ и $\tau$ взаимно простые целые числа. Исследуем этот вопрос.

Положим, что $\tau/\tau_0 = \mathbf{p_0}/\mathbf{q_0}$, где $\mathbf{p_0}$ и $\mathbf{q_0}$ - взаимно простые целые числа, то есть у этих целых чисел нет общих делителей кроме **1**. Тогда можно говорить, что за некоторый промежуток времени $\mathbf{T_0}$ будет передано $\mathbf{p_0}$ элементов длительностью $\tau_0$, или $\mathbf{q_0}$ отсчетов, отстоящих друг от друга на расстояние $\tau$. При этом очевидно, что $\mathbf{T_0} = \tau \bullet \mathbf{q_0} = \tau_0 \bullet \mathbf{p_0}$. В дальнейшем промежуток длительностью $\mathbf{T_0}$ (рис.57е) будем называть циклически повторяющейся группой **(ЦПГ)**.

Обратимся к диаграммам **(а)** и **(б)**, представленным на рис.57. На них в качестве примера изображен случай, когда моменты времени $\mathbf{t_0}$ и $\mathbf{t'_0}$ совпадают. Далее между $\mathbf{t_1}$ и $\mathbf{t'_1}$ возникает разница величиной $\mathbf{\Delta}$, между $\mathbf{t_2}$ и $\mathbf{t'_2}$ - величиной $\mathbf{2\Delta}$ и так далее до некоторого момента времени (в нашем случае это момент $\mathbf{t_4}$), когда накапливающееся расхождение станет равным $\tau$. После этого происходит как бы «обнуление» временного расхождения между $\mathbf{t_i}$ и $\mathbf{t'_i}$ и процесс, рассмотренный выше, повторяется вновь.

В общем случае на один элемент модулирующего ДСДВ приходится не менее $\mathbf{S_0}$ отсчетов, где

$$\mathbf{S_0} = [\mathbf{q_0}/\mathbf{p_0}].^* \qquad (238)$$

Квадратные скобки в данном и последующих случаях будут означать взятие целого числа от выражения, приведенного в скобках.

Поскольку длительность элементов ДСДВ не изменяется, то можно показать, что количество отсчетов, отображающих один элемент, равно либо $\mathbf{S_0}$, либо $\mathbf{S_0{+}1}$. Назовем их соответственно короткой и длинной кодовой комбинацией.

В зависимости от значения соотношения $\mathbf{p_0}/\mathbf{q_0}$ в ЦПГ может быть больше либо коротких либо длинных кодовых комбинаций. Исходя из этого, выделим из всего множества значений $\mathbf{p_0}/\mathbf{q_0}$ три подмножества: первое - $\mathbf{A_0}$, где коротких комбинаций больше, чем длинных; второе - $\mathbf{B_0}$, где коротких комбинаций меньше, чем длинных и третье - $\mathbf{C_0}$, где число коротких комбинаций равно числу длинных.

---

** В выводе формулы 238-295 принимал участие vfubcnhfyn VNECB Cthutq Fl; tvjd*

Для подмножества $\mathbf{A_o}$ справедливо:

$$1 / S_o \geqslant p_o / q_o > 2 / (2S_o+1). \tag{239}$$

Для подмножества $\mathbf{B_o}$:

$$2 / (2S_o+1) > p_o / q_o > 1 / (S_o+1). \tag{240}$$

Для подмножества $\mathbf{C_o}$:

$$p_o / q_o = 2 / (2S_o+1). \tag{241}$$

Поскольку длинная комбинация состоит из $\mathbf{S_o+1}$ отсчетов, а всего в **ЦПГ** имеется $\mathbf{q_o}$ отсчетов на $\mathbf{p_o}$ элементов ДСДВ, то количество длинных кодовых комбинаций $(\alpha_o)$ равно:

$$\alpha_o = q_o - p_o S_o. \tag{242}$$

Соответственно число коротких кодовых комбинаций $(\beta_o)$ равно:

$$\beta_o = p_o (S_o+1) - q_o \tag{243}$$

Будем говорить, что **ЦПГ** имеет нулевой порядок разбиения, если либо $\alpha_o=1$, либо $\beta_o=1$. В первом случае **ЦПГ** состоит из $(p_o-1)$ короткой кодовой комбинации и одной длинной, а во втором случае, наоборот, из $(p_o-1)$ длинной кодовой комбинации и одной короткой. Для примера можно указать случай, показанный на рис. 57, где **ЦПГ** состоит из одной длинной кодовой комбинации и трех коротких. При этом $p_o/q_o = 4/5$, $S_o=1$, $\alpha_o=1$, $\beta_o=3$.

При других значениях $p_o/q_o$ могут возникать более сложные случаи, когда **ЦПГ** состоит из подгрупп. Несложно показать, что при $p_o/q_o \in A_o$ в **ЦПГ** существует ровно $\alpha_o$ подгрупп и в каждой подгруппе - ровно одна длинная комбинация. Тогда с учетом (242) каждая подгруппа состоит не меньше, чем из $\mathbf{l_o}$ комбинаций, где:

$$l_o = [p_o/\alpha_o] = [p_o/(q_o - p_oS_o)]. \tag{244}$$

При $p_o/q_o \in B_o$ имеется $\beta_o$ подгрупп, в каждой из которых присутствует одна короткая комбинация, а все остальные комбинации в подгруппах длинные. С учетом (243) минимальная длина подгруппы $\mathbf{l_o}$ определяется по формуле:

$$l_o = [p_o/\beta_o] = [p_o/(p_o(S_o+1) - q_o)]. \tag{245}$$



17 з. 192

При $p_o/q_o \in C_o$ понятие подгруппы совпадает с понятием группы, так как $\alpha_o=\beta_o=1$.

В зависимости от соотношения $p_o/q_o$ **ЦПГ** состоит из подгрупп как длиной $l_o$, так и $(l_o+1)$. Количество длинных подгрупп можно рассчитать по формулам:

$$\alpha_1= p_o - l_o \alpha_o \text{, для } p_o/q_o \in A_o, \tag{246}$$

$$\alpha_1= p_o - l_o \beta_o \text{, для } p_o/q_o \in B_o. \tag{247}$$

Соответственно количество коротких подгрупп равно:

$$\beta_1= \alpha_o (l_o+1) - p_o \text{ для } p_o/q_o \in A_o, \tag{248}$$

$$\beta_1= \beta_o (l_o+1) - p_o \text{ для } p_o/q_o \in B_o. \tag{249}$$

Сравнивая формулы (238, 242-249) можно отметить ряд формальных совпадений, позволяющих ввести следующие соотношения:

$$p_{i+1}= \alpha_i;\ q_{i+1}=p_i;\ S_{i+1}=l_i \text{, для } p_o/q_o \in A_o, \tag{250}$$

$$p_{i+1}= \beta_i;\ q_{i+1}=p_i;\ S_{i+1}=l_i \text{, для } p_o/q_o \in B_o. \tag{251}$$

Выше мы ввели понятие разбиения **ЦПГ** нулевого порядка. По аналогии с этим разбиением первого порядка будем называть **ЦПГ**, в которой либо $\alpha_1=1$, либо $\beta_1=1$.

Обобщая проведенное обсуждение, можно записать рекуррентные соотношения для **ЦПГ** любого **i**-ого порядка.

$$p_i = p_{i-2} - p_{i-1} [p_{i-2}/p_{i-1}] \text{,}$$

$$q_i = q_{i-2} - q_{i-1} [q_{i-2}/q_{i-1}] \text{,}$$

$$\alpha_i = \alpha_{i-2} - \alpha_{i-1} [\alpha_{i-2}/\alpha_{i-1}] \text{, при } p_o/q_o \in A_i,$$

$$\alpha_i = \beta_{i-2} - \beta_{i-1} [\beta_{i-2}/\beta_{i-1}] \text{, при } p_o/q_o \in B_i, \tag{252}$$

$$\beta_i = \beta_{i-1}( [\beta_{i-2}/\beta_{i-1}] + 1) - \beta_{i-2} \text{, при } p_o/q_o \in B_i,$$

$$\beta_i =\alpha_{i-1}( [\alpha_{i-2}/\alpha_{i-1}] + 1) - \alpha_{i-2} \text{, при } p_o/q_o \in A_i,$$

$$S_i = [\ 1 / (\ ]S_{i-1}[ - S_{i-1})\ ] \text{,}$$

$I_i = [\ 1\ /\ (\ ]I_{i-1}[\ -\ I_{i-1})\ ]$ .

(В последних двух формулах для $S_i$ и $I_i$ знак **]...[** означает устранение операции взятия целого числа, что применялось ранее в отношении этих величин).

Формулы (252) позволяют для любого соотношения $p_o/q_o$ построить **ЦПГ** и таким образом определить структуру сигнала после преобразования одного периодического процесса в другой то же периодический. При этом возникающие коллизии могут в отдельных случаях показаться проявлением каких-либо случайных явлений, хотя на самом деле в данном случае здесь имеется строгая закономерность, определяемая формулами (252), что для практического применения весьма существенно.

Рассмотренное преобразование одного периодического процесса в другой может повторяться многократно. При этом очевидно будет многократно трансформироваться и структура **ЦПГ**.

После первого преобразования длительность **ЦПГ** $T_o = \tau \bullet q_o = \tau_o \bullet p_o$. Введем дополнительное обозначение о том, что это первое преобразование и запишем это соотношение в следующем виде:

$$T_o(1) = \tau(1) \bullet q_o(1) = \tau_o(1) \bullet p_o(1). \qquad (253)$$

Рассмотрим при следующем преобразовании величину $T_o(1)$, как длительность элемента нового периодического процесса. Тогда по аналогии с (1.253) длительность следующей **ЦПГ** будет:

$$T_o(2) = \tau(2) \bullet q_o^*(2) = T_o(1) \bullet p_o^*(2)\ , \qquad (254)$$

где $\tau(2)$ - расстояние между отсчетами новой последовательности несущей, а $q_o^*(2)$ и $p_o^*(2)$ - взаимно простые целые числа, полученные по аналогии с определением $q_o(1)$ и $p_o(1)$, из соотношения $T_o(1) / \tau(1) = q_o^*(2) / p_o^*(2)$. Тогда, подставив $T_o(1)$ из (253) в (254), и, понимая, что $p_o(1) = p_o^*(1)$ получим:

$$T_o(2) = \tau_o(1) \bullet p_o^*(1) \bullet p_o^*(2), \qquad (255)$$

Повторяя многократно данные рассуждения можно записать выражение для длительности **ЦПГ** после **i** преобразований:

$$T_o(i) = \tau_o(1) \bullet \prod_{j=1}^{i} p_o^*(j), \qquad (256)$$

Выражение (256) показывает, сколь быстро может увеличиваться длительность **ЦПГ** с увеличением количества преобразований одной периодической



17*

последовательности в другую. Этот факт свидетельствует так же о том, что при относительно непродолжительном наблюдении весьма вероятно заблуждение о случайном характере длительности элементов после многих преобразований. При большой длительности **ЦПГ** относительно краткое наблюдение не позволяет заметить ее периодичность, и поэтому наши теоретические рассуждения на эту тему весьма полезны.

Для большей наглядности сказанного рассмотрим несколько последовательных преобразований, аналогичных тем, что были представлены на рис.57, диаграммы а, д, е.

Пусть $\tau_o(1)$ - длительность элементов исходного сигнала, а $\tau(1)$, $\tau(2)$, $\tau(3)$, $\tau(4),\ldots$ - соответственно расстояние между отсчетами первой, второй, третьей, четвертой и так далее несущих последовательностей. Пусть так же $\tau_o(1)/\tau(1) = q_o(1)/p_o(1)$, $\tau(1)/\tau(2) = q_o(2)/p_o(2)$, $\tau(2)/\tau(3) = q_o(3)/p_o(3)$, $\tau(3)/\tau(4) = q_o(4)/p_o(4),\ldots$, где $q_o(i)$ и $p_o(i)$ - взаимно простые целые числа.

В выражении (256) была определена длительность **ЦПГ** после **i** преобразований. Используя это можно получить соотношения между $q_o(i) / p_o(i)$ и $q_o{}^*(i) / p_o{}^*(i)$, а именно:

$$q_o{}^*(i) / p_o{}^*(i) = \prod_{j=1}^{i} \left( q_o(j) / p_o(j) \right) \bullet p_o{}^*(j-1), \qquad (257)$$

имея в виду, что $q_o{}^*(1)=q_o(1)$ и $p_o{}^*(1)=p_o(1)$, а $p_o{}^*(0)=1$.

Выражение (257) позволяет по известным значениям $\tau_o$, $\tau(1)$, $\tau(2),\ldots,\tau(i)$, определить $q_o(1)/p_o(1)$, $q_o(2)/p_o(2),\ldots$, $q_o(i)/p_o(i)$ и далее вычислить $q_o{}^*(1)/p_o{}^*(1)$, $q_o{}^*(2)/p_o{}^*(2),\ldots$, $q_o{}^*(i)/p_o{}^*(i)$, что затем можно использовать для определения структуры **ЦПГ** после **i** преобразований.

На рис.59 представлена иллюстрация процесса образования **ЦПГ** для четырех преобразований, когда $\tau_o(1)=7{,}44$**мс**, $\tau(1)=2{,}79$**мс**, $\tau(2)=4{,}90$**мс**, $\tau(3)=4{,}32$**мс**, $\tau(4)=3{,}72$**мс**.

На рис. 59 обозначено: а - исходный ДСДВ, б - первая несущая последовательность, в - восстановленный исходный сигнал после первого преобразования, г - вторая несущая последовательность, д - восстановленный исходный сигнал после двух преобразований, е - третья несущая последовательность, ж - восстановленный исходный сигнал после трех преобразований, з - четвертая несущая последовательность, и - восстановленный исходный сигнал после четырех преобразований, к - диаграммы **ЦПГ** после преобразований.

Согласно введенным определениям получаем $q_o(1)/p_o(1)=8/3$, $q_o(2)/p_o(2)=9/16$, $q_o(3)/p_o(3)=31/27$, $q_o(4)/p_o(4)=36/31$. Далее по формуле (1.257) имеем: $q_o{}^*(1)/p_o{}^*(1)=8/3$, $q_o{}^*(2)/p_o{}^*(2)=9/2$, $q_o{}^*(3)/p_o{}^*(3)=31/3$, $q_o{}^*(4)/p_o{}^*($-

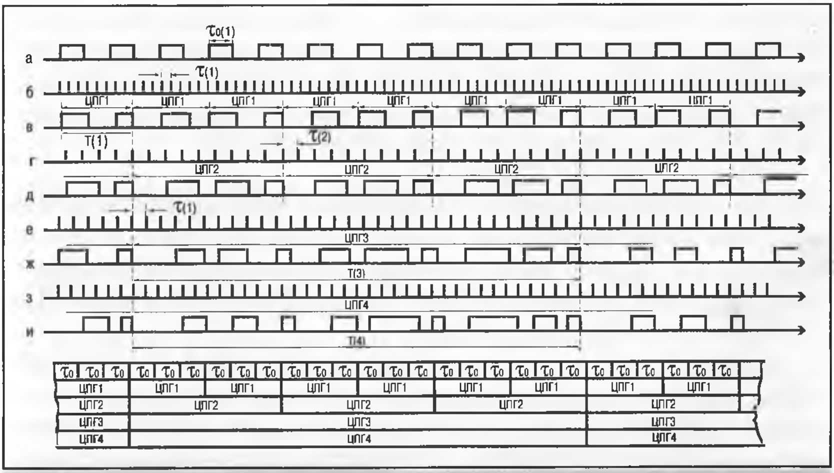


**Рис. 59.**

**4)=36/1**. Окончательно длительности **ЦПГ** по формуле (1.256) после каждого из четырех преобразований равны: **$T_o$(0) = $T_o$(1) = 7,44мс, $T_o$(1) = 22,32мс, $T_o$(2) = 44,64мс, $T_o$(3) = 133,92мс, $T_o$(4) = 133,92мс**. Так оказалось, что **$T_o$(3) = $T_o$(4)**. Это случайное совпадение не является чем-то особенным, а лишь облегчило графические построения на рис. 59.

Сравнение диаграмм **(а)** и **(и)** показывает, сколь существенно может измениться исходный периодический сигнал после нескольких преобразований с помощью других периодических последовательностей. При этом, как уже отмечалось, исходный сигнал после преобразований (диаграмма **(и)**), приобретает, на первый взгляд, вид сигнала со случайной длительностью элементов, хотя на самом деле это не так. Все определяется структурой **ЦПГ**.

Не буду утверждать, но мне кажется, что подобные вещи можно встретить и в других явлениях или процессах, не связанных напрямую с теорией связи. Возможно, Зонгаид, Муза-Диф или Сила Водородовна поразмышляют на эту тему и дадут нам наглядные примеры. С моей точки зрения это только укрепит известное нам положение о всеобщности действующих законов.

Поскольку каждый элемент ДСДВ отображается кодовой комбинацией либо из **($S_o$)**, либо **($S_o$ +1)** символов, то это означает, что после первого преобразования элементы ДСДВ длительностью **$\tau_o$(1)** в восстановленном сигнале будут иметь две длительности. Одну - **$\tau(1) \bullet S_o$** , а другую **$\tau(1) \bullet (S_o+1)$**. Эти элементы после второго преобразования в свою очередь «удвоят» номенклатуру длительностей элементов восстановленного сигнала и так далее. Таким образом, после **i** преобразований в восстановленном сигнале элементы могут иметь **$2^i$**

различных длительностей по сравнению с исходным случаем, когда все элементы ДСДВ были одной длительности $\tau_o(1)$. При этом следует иметь в виду, что количество различных длительностей может существенно уменьшиться при определенных $q_o(i)/p_o(i)$ за счет совпадения значений длительностей элементов после преобразований, что легко заметить из рис. 59.

Рассмотрим это более подробно.

Итак, исходная длительность $\tau_o(1)$, имеющаяся перед первым преобразованием, трансформировалась в две новые $\tau_o^1(2)$ и $\tau_o^2(2)$, что будем обозначать в верхнем индексе. Эти длительности элементов перед вторым преобразованием имеют следующие значения: $\tau_o^1(2)=\tau(1)\bullet S_o(1)=5{,}58$**мс** и $\tau_o^2(2)=\tau(1)\bullet(S_o(1)+$ $+1)=8{,}37$**мс**, где $S_o(1)=[\tau_o(1)\ /\ \tau(1)]=2$.

Во втором преобразовании имеем $S_o^1(2)=[\tau_o^1(2)\ /\ \tau(2)]=1$ и $S_o^2(2)=[\tau_o^2(2)\ /$ $\tau(2)]=1$, а, следовательно, длительности элементов исходного сигнала после второго преобразования или, что то же самое, перед третьим преобразованием равны: $\tau_o^1(3)=\tau(2)\bullet S_o^1(2)=4{,}96$**мс**, $\tau_o^2(3)=\tau(2)\bullet(S_o^1(2)+1)=9{,}92$**мс**, $\tau_o^3(3)=\tau(2)$ $\bullet S_o^2(2)=4{,}96$**мс** и $\tau_o^4(3)=\tau(2)\bullet(S_o^2(2)+1)=9{,}92$**мс**. При этом можно заметить, что при данных значениях $\tau_o(1)$, $\tau(1)$, $\tau(2)$, после второго преобразования из четырех возможных длительностей в результате совпадения $\tau_o^1(3)$ и $\tau_o^3(3)$, а так же $\tau_o^2(3)$ и $\tau_o^4(3)$, в восстановленном сигнале присутствуют элементы только этих двух длительностей.

Продолжая аналогичные рассуждения можно определить длительности элементов исходного сигнала после третьего и четвертого преобразования.

При анализе структуры **ЦПГ** после нескольких преобразований помимо значений длительности элементов, входящих в состав **ЦПГ**, важно знать их количество. Обозначим через $k_j(i)$ количество элементов, имеющих после $i$ преобразований соответственно длительность $\tau_{oj}(i)$. Тогда после первого преобразования, с учетом новых обозначений и формул (242) и (243), имеем:

$$k_1(1) = \beta_o(1) = p_o(1)\ (S_o^1(1) + 1) - q_o(1), \tag{258}$$

$$k_2(1) = \alpha_o(1) = q_o(1) - p_o(1)\ S_o^1(1). \tag{259}$$

Для определения $k_j(2)$ после второго преобразования рассмотрим структуру вспомогательной **ЦПГ**, образованной при преобразовании первой несущей последовательности с длительностью $\tau(1)$ во вторую несущую последовательность с длительностью $\tau(2)$. Исходя из этого, несложно определить соотношение $q_o(2)/p_o(2)=9/16$, что уже приводилось выше, и далее построить **ЦПГ** (рис.60), которую, учитывая ее промежуточный характер между первым и вторым преобразованием, обозначим **ЦПГ(1-2)**.

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | $I_1$ | | | | | | | | $I_1+1$ |
| | | $I_0+1$ | | $I_0$ | | $I_0$ | | | $I_0+1$ | | $I_0$ | | $I_0$ | | $I_0$ |
| $S_0+1$ | $S_0+1$ | $S_0$ | $S_0+1$ | $S_0$ | $S_0+1$ | $S_0$ | $S_0+1$ | $S_0+1$ | $S_0$ | $S_0+1$ | $S_0$ | $S_0+1$ | $S_0$ | $S_0+1$ | $S_0$ |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |

**Рис. 60.**

В данном случае длительность **ЦПГ(1-2)** совпала с длительностью **ЦПГ2**, хотя в общем случае этого может и не быть. Однако следует подчеркнуть, что длительность **ЦПГ2** всегда кратна длительности **ЦПГ(1-2)**.

Как следует из рис. 59 **ЦПГ2** состоит из двух **ЦПГ1**. При этом в соответствии со структурой **ЦПГ1**, которая как бы «накладывается» на **ЦПГ(1-2)**, формируется **ЦПГ2**. Этот процесс очевиден из рис. 59. Однако поскольку между несущими сигналами и исходной последовательностью могут быть и иные фазовые соотношения, а не только те, что изображены на рис. 59, то следует рассмотреть все возможные варианты.

На рис.61 представлена иллюстрация процесса формирования **ЦПГ2**. Для этого образована таблица, в которой каждая строка является **ЦПГ(1-2)**, смеща-

| ЦПГ2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ЦПГ1 | | | | | | | | ЦПГ1 | | | | | | | | ЦПГ2 | | | | | |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| M1,2 | | | | | | | | | | | | | | | | M2 | | | | | |

**Рис. 61.**

| ЦПГ3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ЦПГ2 | | | | | | | | | ЦПГ2 | | | | | | | | | ЦПГ2 | | | | | | | | |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| М2,3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

| ЦПГ3 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 3 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 |
| 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 |
| 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| 3 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 3 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 3 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 |
| 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 |
| 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| 3 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 3 | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 |
| 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 |
| 3 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| 3 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 |
| 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 |
| 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| 3 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| М3 | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Рис. 62.

ЦПГ 4 (ЦПГ 3)

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

М 3,4

ЦПГ 4

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 4 | 1 | 1 | 2 | 4 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 3 | 3 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 4 | 1 | 1 | 3 | 3 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 3 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 1 | 1 | 3 | 3 | 1 | 3 | 1 | 1 |
| 4 | 2 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 | 2 | 3 | 1 | 3 | 1 | 1 |
| 4 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| 4 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 4 | 1 | 1 | 2 | 4 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 4 | 1 | 1 | 2 | 4 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 3 | 3 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 4 | 1 | 1 | 2 | 4 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 3 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 1 | 1 | 3 | 3 | 1 | 3 | 1 | 1 |
| 4 | 2 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 3 | 1 | 3 | 1 | 1 |
| 4 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| 4 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 4 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 4 | 1 | 1 | 2 | 4 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 3 | 3 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 4 | 1 | 1 | 2 | 4 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 3 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 2 | 1 | 4 | 1 | 1 | 3 | 3 | 1 | 3 | 1 | 1 |
| 4 | 2 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 1 | 1 | 3 | 3 | 1 | 3 | 1 | 1 |
| 4 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| 4 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 | 1 | 2 | 4 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 4 | 1 | 1 | 2 | 4 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 3 | 3 | 1 | 2 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 4 | 1 | 1 | 2 | 4 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 3 | 3 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 4 | 1 | 1 | 3 | 3 | 1 | 3 | 1 | 1 |
| 4 | 2 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 1 | 1 | 3 | 3 | 1 | 3 | 1 | 1 |
| 4 | 2 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| 4 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 | 1 | 2 | 4 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 3 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 4 | 1 | 1 | 2 | 4 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 4 | 1 | 1 | 2 | 4 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 3 | 3 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 4 | 1 | 1 | 3 | 3 | 1 | 3 | 1 | 1 |
| 3 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 1 | 1 | 3 | 3 | 1 | 3 | 1 | 1 |
| 4 | 2 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| 4 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 | 1 | 2 | 4 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 4 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 4 | 1 | 1 | 2 | 4 | 1 | 2 | 1 | 1 |

М 4

Рис. 63.



18 з. 192

емая последовательно на одно положение влево. (Совершенно ясно, что можно сдвигать и вправо. Результаты от этого не изменятся).

Сформированная таким образом таблица $\mathbf{M}_{1,2}$ может рассматриваться, как квадратная матрица, в которой **i** - ая строка тождественна **i** - омо столбцу. В этой таблице на рис.61, для наглядности, утолщенными линиями обозначены **ЦПГ1**. Тогда в результате наложения **ЦПГ1** на **ЦПГ(1-2)** образуется **ЦПГ2**, структура которой изображена на том же рисунке в виде таблицы **М2**. Каждая строка данной таблицы показывает структуру **ЦПГ2** при различных, точнее всех возможных, фазовых соотношениях между исходным сигналом и несущими последовательностями.

Описанный процесс образования **ЦПГ2** можно формально записать в матричной форме. Для этого, кроме матриц $\mathbf{M}_{1,2}$ и $\mathbf{M}_2$ введем матрицу $\mathbf{M}_1^*$ , которая строится в соответствии со структурой **ЦПГ1** по следующему правилу: каждая строка матрицы $\mathbf{M}_1^*$ последовательно отображает элементы **ЦПГ1**, «накладывающиеся» на **ЦПГ(1-2)**. При этом символы строки равны **1** только для данного элемента **ЦПГ1**, а все остальные равны **0**. Таким образом для $\mathbf{M}_1^*$ можно записать:

$$\mathbf{M}_1^* = \begin{Vmatrix} 1110000000000000 \\ 0001110000000000 \\ 0000001100000000 \\ 0000000011100000 \\ 0000000000011100 \\ 0000000000000011 \end{Vmatrix} \qquad (260)$$

В результате для рассматриваемого случая имеем:

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{M}_1^* \bullet \mathbf{M}_{1,2} \qquad (261)$$

Или в общем случае

$$\mathbf{M}_{i+1} = \mathbf{M}_i^* \bullet \mathbf{M}_{i+1} \qquad (263)$$

На рис. 62 показана структура **ЦПГ** после трех преобразований, а на рис. 63 структура **ЦПГ** после четырех преобразований. Построения эквивалентны тому, что было разъяснено для рис. 61 и потому более подробно не поясняются.

Приведенные рассуждения показывают, что структура **ЦПГ** при любом числе преобразований имеет вполне определенный характер, при котором установлен порядок следования элементов той или иной длительности. Однако многообразие **ЦПГ**, зависимое от заранее неизвестных фазовых соотношений между исходным сигналом и несущими, делает для наблюдателя как бы случайным характер формирования той или иной структуры **ЦПГ**, и более важным оказывается расчет количества элементов исходного сигнала той или иной длительности без учета порядка их следования.

В формулах (258, 259) было определено количество элементов $k_1(1)$ и $k_2(1)$ длительностью $\tau_o^1(2)$ и $\tau_o^2(2)$ после первого преобразования. Для определения $k_j(2)$ после второго преобразования рассмотрим матрицу $M_{1,2}$. Ее можно представить в виде $p_o{}^*(2)$ матриц $N_{1,2}$, определяемых **ЦПГ1**. Матрицы в качестве столбцов имеют **ЦПГ(1-2)**, смещенные друг относительно друга на одну позицию. При этом в соответствии со структурой **ЦПГ1** происходит объединение этих столбцов в «колонны» по соответственно $(S_o(1)+1)$ и $S_o(1)$ столбцов (рис.61).

Рассмотрим «колонну» из $S_o(1)$ столбцов. Поскольку каждый столбец представляет собой условную запись **ЦПГ(1-2)**, то сумма всех его членов равна $q_o(2)$. Таким образом, сумма членов «колонны» будет $S_o(1)\bullet q_o(2)$. При втором преобразовании, как это было показано выше, элементы длительностью $\tau_o^1(2)=\tau(1)\bullet S_o(1)$ преобразуются в элементы длительностью $\tau_o^2(3)=\tau(2)\bullet S_o^1(2)$ и $\tau_o^1(3)=\tau(2)\bullet(S_o^1(2)+1)$. Учитывая, что в **ЦПГ(1-2)** содержится $p_o(2)$ элементов исходного сигнала, поступающего после первого преобразования, можно рассчитать количество элементов длительностью $\tau_o^1(3)$ после второго преобразования:

$$k_2(2) = S_o(1) \bullet q_o(2) - S_o^1(2) \bullet p_o(2). \qquad (264)$$

Учитывая, что:

$$p_o(2) = k_1(2) + k_2(2) \qquad (265)$$

после подстановки (264) в (265) и некоторых преобразований, получаем:

$$k_1(2) = (S_o^1(2) + 1) \bullet p_o(2) - S_o(1) \bullet q_o(2). \qquad (266)$$

Проводя аналогичные рассуждения для «колонны» из столбцов, с учетом того, что

$$p_o(2) = k_3(2) + k_4(2) \qquad (267)$$

получаем:

$$k_4(2) = (S_o(1) + 1) \bullet q_o(2) - S_o^2(2) \bullet p_o(2) \qquad (268)$$

$$k_3(2) = (S_o^2(2) + 1) \bullet p_o(2) - (S_o(1) + 1) \bullet q_o(2) \qquad (269)$$

Значения **$k_1(1)$** и **$k_2(1)$** определяют количество элементов длительностью $\tau_0^1(2)$ и $\tau_0^2(2)$ после первого преобразования. После второго преобразования в силу возможного разного фазового соотношения между сигналом и несущими, следует учитывать все возможные варианты. Поскольку вычисленные в (266) и (264) значения **$k_1(2)$** и **$k_2(2)$** определяют количество элементов длительностью $\tau_0^1(3)$ и $\tau_0^2(3)$ только в одной «колонне», то в целом, учитывая, что имеется **$k_1(1)$** таких колонн, получаем общее число элементов соответствующей длительности с учетом всех возможных фазовых соотношений исходного сигнала и несущих по формулам:

$$K_1(2) = k_1(1) \bullet k_1(2) \tag{270}$$

$$K_2(2) = k_1(1) \bullet k_2(2) \tag{271}$$

(Попутно заметим, что для первого преобразования $K_1(1) = k_1(1)$, $K_2(1) = k_2(1)$).

Несложно вывести и следующие соотношения:

$$K_3(2) = k_2(1) \bullet k_3(2) \tag{272}$$

$$K_4(2) = k_2(1) \bullet k_4(2) \tag{273}$$

Полученные выражения выведены для двух преобразований. Проведем обобщение для **i** преобразований.

Рассмотрим некоторую матрицу $N_{i-1,i}$, аналогичную $N_{1,2}$, которую мы обсуждали выше. Очевидно, что столбцы этой матрицы представляют структуру вспомогательной **ЦПГ(i-1,i)**. Исходя из этого, сумма всех $p_0(i)$ членов столбца равна $q_0(i)$. Матрица $N_{i-1,i}$ в соответствии со структурой **ЦПГ(i-1)** разбивается на «колонны», состоящие соответственно из $S_0^1(i-1)$ и $(S_0^1(i-1)+1)$; $S_0^2(i-1)$ и $(S_0^2(i-1)+1)$;...; $S_0^\alpha(i-1)$ и $(S_0^\alpha(i-1)+1)$ столбцов, где $a=2^{i-2}$. Таким образом, каждая «колонна» состоит из членов, сумма которых равна либо $S_{0j}(i-1) \bullet q_0(i)$, либо $(S_{0j}(i-1)+1) \bullet q_0(i)$, где $j=1,2,\dots,a$. В результате можно записать выражения для вычисления количества элементов той или иной длительности после любого числа преобразований.

С целью более наглядного понимания формул введем соответствующие переобозначения. Для первого преобразования:

$$\begin{aligned} k_1(1) &= k(S_0^1(1)) = k(0); \\ k_2(1) &= k(S_0^1(1)+1) = k(1) \end{aligned} \tag{274}$$

Для второго преобразования:

$$k_1(2) = k(S_o^1(1); S_o^1(2)) = k(0;0);$$
$$k_2(2) = k(S_o^1(1); S_o^1(2)+1) = k(0;1); \qquad (275)$$
$$k_3(2) = k(S_o^1(1)+1; S_o^1(2)) = k(1;0);$$
$$k_4(2) = k(S_o^1(1)+1; S_o^1(2)+1) = k(1;1) \qquad (276)$$

Выражаясь языком математики, будем при новых обозначениях указывать в скобках значение вычета соответственно по **mod** $S_0^1(1)$; **mod** $S_0^1(2)$;... . Аналогичные обозначения будем использовать для записи $S_{oj}(i)$. Тогда с учетом всего изложенного выше запишем значения $K_j(i)$ в новых обозначениях. После первого преобразования имеем:

$$K(0) = k(0) = S(1) \bullet p_o(t) - q_o(1) \qquad (277)$$

$$K(1) = k(1) = q_o(1) - S(0) \bullet p_o(t) \qquad (278)$$

После второго преобразования получим:

$$K(0;0) = (S(0;1) \bullet p_o(2) - S(0) \bullet q_o(2)) \bullet k(0) \qquad (279)$$

$$K(0;1) = (S(0) \bullet q_o(2) - S(0;0) \bullet p_o(2)) \bullet k(0) \qquad (280)$$

$$K(1;0) = (S(1;1) \bullet p_o(2) - S(1) \bullet q_o(2)) \bullet k(1) \qquad (281)$$

$$K(1;1) = (S(1) \bullet q_o(2) - S(1;0) \bullet p_o(2)) \bullet k(1) \qquad (282)$$

После третьего преобразования:

$$K(0;0;0) = (S(0;0;1) \bullet p_o(3) - S(0;0) \bullet q_o(3)) \bullet k(0;0) \qquad (283)$$

$$K(0;0;1) = (S(0;0) \bullet q_o(3) - S(0;0;0) \bullet p_o(3)) \bullet k(0;0) \qquad (284)$$

$$K(0;1;0) = (S(0;1;1) \bullet p_o(3) - S(0;1) \bullet q_o(3)) \bullet k(0;1) \qquad (285)$$

$$K(0;1;1) = (S(0;1) \bullet q_o(3) - S(0;1;0) \bullet p_o(3)) \bullet k(0;1) \qquad (286)$$

$$K(1;0;0) = (S(1;0;1) \bullet p_o(3) - S(1;0) \bullet q_o(3)) \bullet k(1;0) \qquad (287)$$

$$K(1;0;1) = (S(1;0) \bullet qo(3) - S(1;0;0) \bullet p_o(3)) \bullet k(1;0) \qquad (288)$$

$$K(1;1;0) = (S(1;1;1) \bullet p_o(3) - S(1;1) \bullet q_o(3)) \bullet k(1;1) \qquad (289)$$

$$K(1;1;1) = (S(1;1) \cdot q_o(3) - S(1;1;0) \cdot p_o(3)) \cdot k(1;1) \qquad (290)$$

Выражения после четырех и более преобразований образуются аналогично.

Полученные значения $K(\bullet)$ позволяют рассчитать вероятность появления элементов той или иной длительности, после любого числа преобразований. Для этого необходимо значение $K(\bullet)$ разделить на сумму $K(\bullet)$ для данного преобразования.

Для одного преобразования очевидно, что

$$K(0) + K(1) = p_o(1). \qquad (291)$$

Для второго

$$K(0;0) + K(0;1) + K(1;0) + K(1;1) = p_o(1) \bullet p_o(2). \qquad (292)$$

Для третьего

$$K(0;0;0) + K(0;0;1) + \ldots + K(1;1;0) + K(1;1;1) = p_o(1) \bullet p_o(2) \bullet p_o(3). \qquad (293)$$

Для $i$ - ого

$$K(0;\ldots;0) + K(0;\ldots;1) + \ldots + K(1;\ldots;0) + K(1;\ldots;1) =$$
$$= p_o(1) \bullet p_o(2) \bullet \ldots \bullet p_o(i). \qquad (294)$$

Таким образом, общее выражение для определения вероятности появления элемента соответствующей длительности после преобразования равно:

$$p(\bullet) = \frac{K(\bullet)}{\prod\limits_{J=1}^{i} p_o(j)} \qquad (295)$$

**Модуляция непрерывного сигнала непрерывного времени.** Рассмотренные выше процессы относятся к случаю, когда модулирующим и несущими сигналами являлись сигналы дискретного времени. Продолжим изучение методов модуляции, но уже для случая, когда несущим сигналом будет непрерывный сигнал непрерывного времени, и, в частности, гармоническое колебание вида $U(t) = U_н \cos(\omega_н t + \varphi_н)$, где $U_н$, $\omega_н$, $\varphi_н$ - соответственно амплитуда, частота и начальная фаза несущего сигнала. Модулирующим сигна-

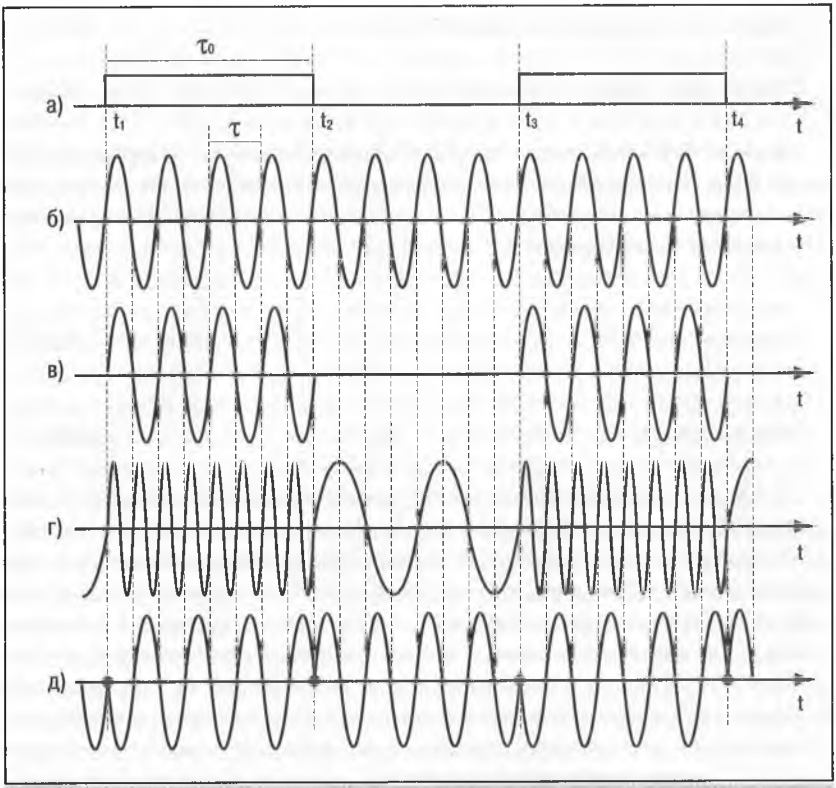



**Рис. 64.**

лом выберем ДСДВ для, как говорится, поддержания преемственности с предыдущим материалом. Поскольку гармоническое колебание характеризуется тремя вышеназванными параметрами $U_н$, $\omega_н$, $\varphi_н$, то, следовательно, их и можно изменять, или другими словами модулировать под воздействием модулирующего ДСДВ. В результате мы имеем амплитудную модуляцию **(АМ)**, частотную модуляцию **(ЧМ)** и фазовую модуляцию **(ФМ)**.

Обратимся к рис.64, где на диаграмме **(а)** представлен модулирующий ДСДВ **S(t)**, на диаграмме **(б)** - несущее гармоническое колебание **U(t)**, на диаграмме **(в)** - **АМ** сигнал $S_{ам}(t)$, на диаграмме **(г)** - **ЧМ** сигнал $S_{чм}(t)$ и на диаграмме **(д)** - **ФМ** сигнал $S_{фм}(t)$.

Будем рассматривать линейные методы модуляции, когда модулирующий сигнал аддитивно влияет на параметры несущего колебания. Исходя из этого, можно записать следующие аналитические выражения:

$$S_{ам}(t) = (\Delta U \cdot S(t) + U_н) \cdot \cos(\omega_н t + \varphi_н); \qquad (296)$$

$$S_{чм}(t) = U_н \bullet \cos((\omega_н + \Delta\omega \bullet S(t))\, t + \varphi_н); \tag{297}$$

$$S_{фм}(t) = U_н \bullet \cos(\Delta_\varphi \bullet S(t) + \omega_н t + \varphi_н). \tag{298}$$

Методы **ЧМ** и **ФМ** иногда, как бы объединяя, называют методами угловой модуляции. И это справедливо, поскольку изменение частоты сигнала приводит к изменению фазы и наоборот. Данное обстоятельство может быть выражено следующими соотношениями:

$$\omega(t) = \frac{d\,\varphi(t)}{d\,t}; \tag{299}$$

$$\varphi(t) = \int \omega(t)\, d\,t. \tag{300}$$

В общем случае возможны многократные методы модуляции, когда под воздействием исходного сигнала изменяется несколько параметров несущего колебания. Этот вопрос мы уже обсуждали, поэтому ограничимся сейчас лишь упоминанием об этом, и тем, что в современных системах связи многократные методы модуляции получили весьма широкое распространение в сочетании с методами помехоустойчивого кодирования в виде сигнально-кодовых конструкций. В частности в сочетании с каскадными кодами методы модуляции позволяют сформировать весьма эффективные способы передачи сообщений, о чем следует сказать особо, поскольку это прекрасный пример того, что разделение методов преобразования сигналов на методы модуляции или методы кодирования, является больше терминологическим разделением, чем разделением по общей сути. И те и другие методы решают общую задачу эффективного представления сообщений для передачи и приема с установленным критерием качества и при определенных условиях передачи, которые проистекают из наличия соответствующей среды передачи с теми или иными характеристиками. Если в качестве среды передачи рассматривать искусственно созданную среду в виде цифрового канала, то методы модуляции терминологически будут в теории связи трансформированы в методы сопряжения (согласования) сигналов с цифровым каналом связи, хотя решаемая ими задача эквивалентна той, что реализовывалась с помощью методов модуляции.

Ну а что же делают методы модуляции? Какую задачу решают они?

Методы модуляции обеспечивают согласование спектральных характеристик сигналов с частотными характеристиками среды передачи, что очень часто называют каналом связи.

Рассмотрим спектральные характеристики **АМ**, **ЧМ**, **ФМ** сигналов, если модулирующим сигналом **S(t)** является периодическая последовательность

**...1,0,1,0,1,0...** с длительностью элементов $\tau_o$, а несущее колебание имеет следующий вид: $U(t) = U_н \cos(\omega_н t + \varphi_н)$. Выражения (296 - 298), определяющие временное представление модулированных сигналов, следует подставить в выражения (227 - 229) для разложения периодического сигнала в ряд Фурье (226) и получения спектрального представления модулированных сигналов. (Для не периодических сигналов следует использовать обобщенное преобразование Фурье (230 и 231).

Опустим не очень сложные, но достаточно громоздкие преобразования и дадим лишь графическую интерпретацию полученных результатов (рис.65). На диаграмме **(а)** представлен спектр исходного модулирующего сигнала, на диаграмме **(б)** - спектр несущего сигнала, на диаграмме **(в)** - спектр **АМ** сигнала, на диаграммах **(г₁)** и **(г₂)** - спектры **ЧМ** сигналов при разных индексах модуляции $\beta=\Delta\omega/\Omega$, где $\Omega=\pi/\tau_o$, $\omega_1=\omega_н-\Delta\omega$, $\omega_2=\omega_н+\Delta\omega$, на диаграммах **(д₁)** и **(д₂)** - спектры **ФМ** сигналов при разных значениях $\Delta\varphi$. Представленные диаграммы весьма полезно сопоставить с соответствующими диаграммами, представленными на рис.64, на которых дается временное представление сигналов.

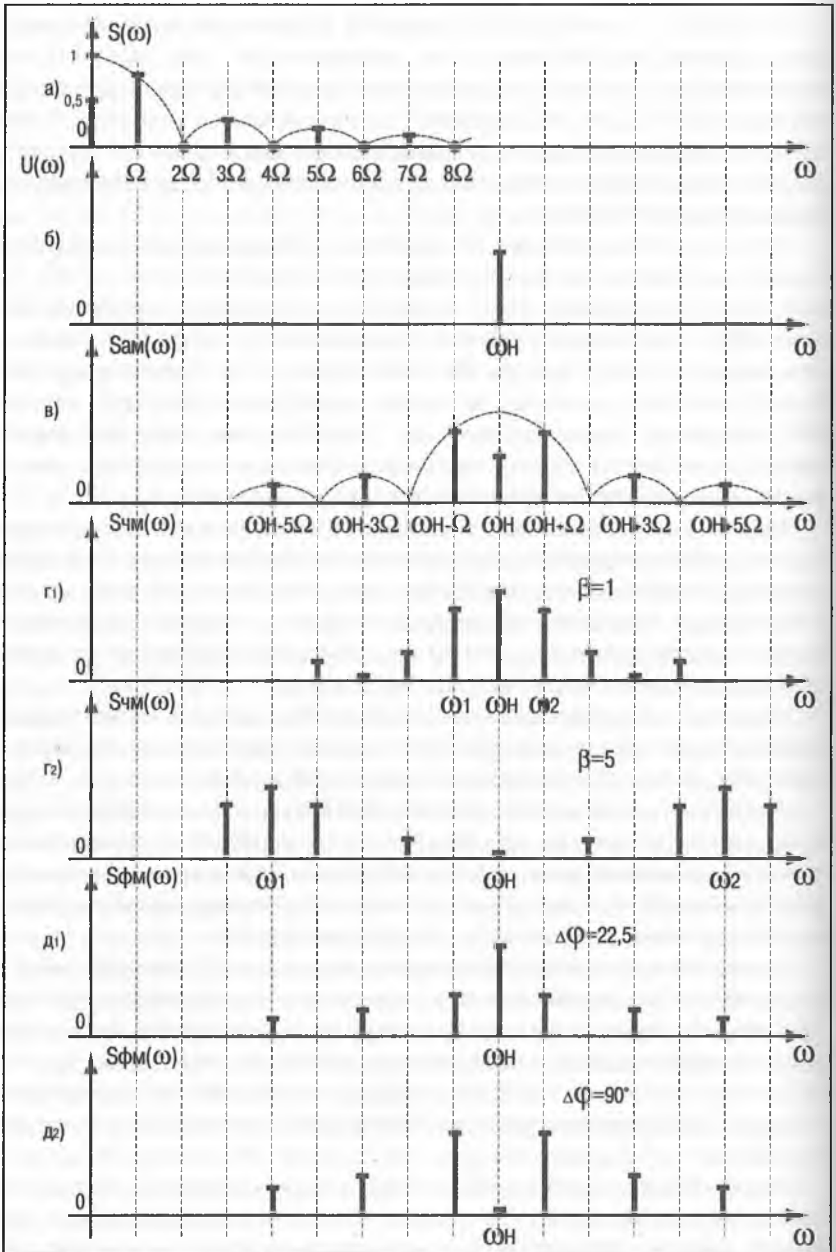
Как мы уже отмечали спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов (диаграмма **(а)**) является линейчатым, бесконечным и вписывается в огибающую типа **sinx/x**. При этом основная энергия спектральных составляющих сосредоточена вблизи **0**-ой частоты и поэтому эффективная ширина спектра ограничена. Спектр несущего колебания состоит из одной спектральной составляющей на частоте несущей $\omega_н$.

Спектры модулированных сигналов переносятся в область частот, определяемую несущей частотой $\omega_н$. При этом выделяют само несущее колебание с частотой $(\omega_н)$ и верхнею $(\omega>\omega_н)$ и нижнею $(\omega<\omega_н)$ боковые полосы.

Для **АМ** сигнала верхняя боковая полоса **(ВБП)** идентична спектру исходного модулирующего сигнала, а нижняя боковая полоса **(НБП)** является зеркальным отображением. Исходя из этого, **АМ** широко применяется для переноса спектра из одной области в другую, что часто требуется осуществить в различных системах связи, и, в частности, в аппаратуре передачи.

Спектр **ЧМ** сигналов зависит от индекса модуляции $\beta$. Причем при малых $\beta$ спектр **ЧМ**, как и спектр **АМ** отличается концентрацией основной энергии спектральных составляющих около частоты несущей $\omega_н$. Тогда как при возрастании индекса модуляции концентрация энергии происходит вокруг частот $\omega_1$ и $\omega_2$, на которых, собственно, и ведется передача, поскольку **ЧМ** сигнал состоит из чередующихся отрезков гармонических колебаний с соответственно частотами $\omega_1$ и $\omega_2$.

Спектр **ФМ** сигналов при малых значениях $\Delta\varphi$ (диаграмма **(д₁)**) напоминает спектр **АМ** сигнала. Однако при больших значениях картина меняется и при $\Delta\varphi=90^\circ$ (диаграмма **(д₂)**) спектр приобретает вид, когда энергия несущей равна **0** и вся энергия сигнала распределена между боковыми спектральными



S(ω)
1
а)
0,5
0
U(ω)
Ω 2Ω 3Ω 4Ω 5Ω 6Ω 7Ω 8Ω
ω
б)
0
Sам(ω)
ωн
ω
в)
0
Sчм(ω)
ωн-5Ω ωн-3Ω ωн-Ω ωн ωн+Ω ωн+3Ω ωн+5Ω
ω
г1)
β=1
0
Sчм(ω)
ω1 ωн ω2
ω
г2)
β=5
0
Sфм(ω)
ω1 ωн ω2
ω
д1)
Δφ=22,5
0
Sфм(ω)
ωн
ω
д2)
Δφ=90°
0
ωн
ω


**Рис. 65.**

составляющими. Это отрадный факт, поскольку сама несущая никакой информации не несет и поэтому целесообразно, чтобы энергия была сосредоточена в спектральных составляющих, что придаст им большую устойчивость к вредному влиянию помех.

Представленные на рис.65 диаграммы показывают, что при **АМ** форма спектра исходного сигнала без искажений переносится в новую область частот около значения несущей $\omega_н$. При **ЧМ** и **ФМ** помимо переноса происходит изменение формы спектра сигнала. Данное обстоятельство объясняет широкое применение именно **АМ** в аппаратуре связи на этапах промежуточного преобразования, когда требуется перенести спектр сигнала из одной области в другую. Кроме того, спектр **АМ** сигнала имеет по сравнению с **ЧМ** и **ФМ** меньшую эффективную ширину спектра, что так же является достоинством **АМ**. Вместе с тем **АМ** сигналы оказываются более уязвимы со стороны мешающих воздействий, со стороны помех. Не вдаваясь в подробное обсуждение этих вопросов, укажем лишь, что это объясняется в первую очередь тем, что большинство видов помех искажают именно форму сигнала, изменяют его амплитуду. А ведь при **АМ** именно в амплитуде и «заложена» информация об исходном модулирующем сигнале. В результате **ЧМ** и **ФМ** чаще применяются для передачи сигналов по каналам связи, как более помехоустойчивые виды модуляции.

В современных системах связи применяют многократные методы модуляции, что позволяет достичь относительно высоких показателей по скорости передачи с заданным критерием качества. При этом решение об этом принимается после достаточно обстоятельных и непростых исследований по поиску наилучших методов передачи сигналов с учетом множества факторов и требований, предъявляемых пользователями системы, существующими возможными технологическими решениями, стоимостью реализации, видом помех и прочее и прочее. Представляется, что аналогичным образом осуществлялось «проектирование» систем связи и в живых организмах. Однако здесь слово нашему другу Профилактяну, который, дослушав мой рассказ об основах теории связи, возможно, приведет нам аналогии из живой природы».

Последние слова Бита Байтовича вызвали некоторое замешательство у Зонгаида Лечевича, поскольку поставленный вопрос был не вполне для него традиционен. Однако, поразмыслив, он согласно кивнул головой, обещая сказать что-либо на эту тему, но несколько позднее.

Получив такое согласие, господин Файлтон продолжил свое повествование: «Мы уже не раз убеждались, что в мире реальном всякому действию есть «мешающее» противодействие, влияние которого, как правило, нелинейно. Однако при построении аналитической модели приходится использовать относительно простые приемы с тем, что бы «не погибнуть» под тяжестью конструкции. Исходя из этих соображений, все виды мешающих воздействий на сигнал **($S(t)$)** принято подразделять на аддитивные **($\xi_а(t)$)** и мультипликативные **($\xi_м(t)$)**

помехи. Таким образом, сигнал на выходе канала **($S^*(t)$)** можно представить в следующем виде:

$$S^*(t) = S(t)\,\xi_м(t) + \xi_а(t). \qquad (301)$$

Выражение (301) дает временное описание влияния помех на сигнал. Схожим образом можно описать и их спектральное взаимодействие.

Помехи принято также классифицировать и по явлениям, порождающих их. Например, грозовой разряд - причина многих бед и электромагнитных помех в том числе. Солнечная активность, дождевые осадки и прочее, изменяющие условия распространения радиоволн. Искрящая линия трамвая, токи силового питания, взаимное влияние электромагнитных сигналов, передающих сообщения, - вот далеко не полный перечень источников помех. Это очень важный раздел в практическом применении теории связи. Однако мы не станем проводить более детального обсуждения этих вопросов, поскольку они всегда будут иметь определенную частную «окраску» в зависимости от условий передачи сигналов. Завершая столь краткую информацию на эту тему, укажем, что в современных системах связи все более существенным оказывается источник помех, появляющихся за счет внутренних причин, а именно, теплового шума. Объясняется это тем, что при применении многократных методов модуляции уровень сигнала делается соизмеримым с уровнем флюктуационного (теплового) шума, а посему и его влияние делается все более заметным.

По этой же причине все более точной для практического применения при мощности передаваемого сигнала **($P_s$)** оказывается формула Шеннона по оценки потенциально достижимой пропускной способности **(C)** частотно ограниченного канала связи с полосой пропускания **($\Delta F$)**, в котором действует флюктуационная помеха мощностью $P_\xi = 4k_б T^\circ \Delta F$, где $k_б = 1{,}37 \cdot 10^{-23}$ **дж/град** - постоянная Больцмана, а $T^\circ$ - абсолютная температура.

$$C = \Delta F \cdot \log_2 (1 + P_s / P_\xi)\ [\text{бит/с}]. \qquad (302)$$

Если поискать аналогию, то данную ситуацию можно отождествить с тем, когда на поверхность жидкости опускается какой-либо плавающий предмет, на который со стороны внешних сил оказывается некое воздействие. При уменьшении размеров этого предмета в конечном итоге влияние этих сил будет все менее заметно по сравнению с влиянием хаотично двигающихся молекул, что принято называть Броуновским движением. Желающие могут провести такой эксперимент со стаканом воды и небольшими плавающими предметами. В качестве внешних сил можно использовать дуновение ветра или какие-либо его заменители.

**Прием сигналов.** Устройства приема сигналов - очевидная, необходимая и естественная составляющая систем связи. Рассматривая выше различные способы формирования сигналов, мы по умолчанию предполагали, что существуют некие приемные устройства, которые смогут «во всем разобраться» и обеспечат прием передаваемых сигналов.

Человек обладает дарованной природой способностью формирования и передачи звуковых сигналов, которые с помощью имеющейся у него системы приема трансформируются в исходные сигналы. Источником их зарождения и потребления, служит, по-видимому, биологический компьютер, мозг человека, который через нервную систему во взаимодействии с речеобразующей и слуховой системами формируют систему связи через естественную среду обитания человека. Искусственная система связи как бы раздвигает пространство и позволяет передавать и принимать сигналы на значительно большие расстояния. Кроме того, в этой системе появляются новые участники, порождающие и принимающие сигналы, а именно, различные датчики, устройства управления и, наконец, компьютеры.

Общей задачей, решаемой во всех приемных устройствах, является то, что необходимо среди множества различных сигналов выделить тот, который был передан. Конечно, такое может случиться не всегда из-за вредного влияния помех и других мешающих, маскирующих факторов, однако надо постараться построить систему приема так, что бы это можно было сделать в максимально возможном количестве случаев. Но как это можно сделать? Ответ прост. По отличительным признакам. Например, по амплитуде, по форме, по частоте, по запаху и прочее и прочее. Не будем разбирать того, как это делается в живой природе, а перейдем к рассмотрению приема электромагнитных сигналов, хотя во многих случаях полученные выводы справедливы вообще, независимо оттого, что или кто является переносчиком сигналов - электромагнитная волна ли, химическое соединение ли, температура ли, али еще что-то или кто-то».

«Вот-вот, - подхватила Муза-Диф, - представляете, Бит Байтович, приносит нам в авоське электромагнитную волну и предлагает ее принять и распознать. Ну, уж нет, приносите что-нибудь поинтересней для приема и распознавания. Например, духи или какие-нибудь вина для Зонгаида. Он, я думаю, с ними быстро разберется. Примет их и распознает».

«Совершенно с Вами согласен, прекрасная Вы наша, - тут же согласился Файлтон, - я и сам не прочь принять и распознать то, о чем Вы говорили. Но сейчас я хотел бы осветить некие общие принципы приема, которые годятся для всего. Однако иллюстрировать мы их все же будем на примере электромагнитных сигналов.

Для выяснения этого рассмотрим источник сигналов $\mathbf{S_1, S_2, \ldots S_n}$, формирующий их с вероятностями $\mathbf{p_1, p_2, \ldots p_n}$. При этом будем говорить, что источник порождает дискретный ансамбль сигналов (сообщений), который обозначим $\mathbf{\{S_i;p_i\}}$ при $\mathbf{i=1..n}$. Отметим попутно, что понятия сообщения и сигналы в данном случае синонимичны.

На прием сигнал, подверженный влиянию помех, поступит в виде $S_i^*(t) = S_i(t)\ \xi_м(t) + \xi_а(t)$, что отражено в формуле (301). Таким образом, возникает задача установления сигнала $S_i(t)$ из поступившего сигнала $S_i^*(t)$. Как же это сделать?

Наиболее очевидное решение состоит, по-видимому, в последовательном сравнении поступающего сигнала $S_i^*(t)$ со всеми известными сигналами из ансамбля $\{S_i;p_i\}$. Тот сигнал $S_i(t)$ из ансамбля $\{S_i;p_i\}$, на который будет более всего похож сигнал $S_i^*(t)$, и следует признать его эквивалентом. При этом, естественно, возникает вопрос, а что значит похож? Этот вопрос является более сложным и должен решаться в каждом конкретном случае для известного ансамбля $\{S_i;p_i\}$ и соответственно моделей мультипликативных и аддитивных помех $\xi_м(t)$ и $\xi_а(t)$.

Коллеги Пи Е Тета предлагают рассматривать эту проблему, как проблему разбиения пространства сигналов $\{S_i^*(t)\}$ на n подпространств, каждому из которых будет соответствовать один из сигналов $S_i(t)$. Таким образом, качество приема будет определяться тем, насколько удачно выбрано правило формирования n подпространств.

Обозначим через $p(S_i^*(t)/S_i(t))$ вероятность попадания поступившего сигнала в подпространство $S_i^*(t)$ при передаче соответственно сигнала $S_i(t)$. Эта вероятность соответствует правильному приему исходного сигнала $S_i(t)$, а вероятность ошибочного приема $(p_e(S_i(t)))$ может быть вычислена из следующего выражения:

$$p_e(S_i(t)) = 1 - p(S_i^*(t)/S_i(t)) = \sum_{k \neq i} p(S_k^*(t)/S_i(t)). \qquad (303)$$

Полная вероятность неверного приема сигнала $(p_e)$ из ансамбля $\{S_i;p_i\}$ равна:

$$p_e = 1 - \sum_{i=1}^{n} p_i \bullet p(S_i^*(t)/S_i(t)). \qquad (304)$$

Выражение (304) дает основание предложить в качестве правила оптимального приема обеспечение минимума данного соотношения, то есть минимума вероятности ошибки $(p_e)$. Однако такое решение будет справедливо, если последствия каждой из ошибок будут одинаковы с точки зрения получателя. В общем случае это неверно и, по-видимому, каждый из нас может согласиться с этим.

Для учета последствий возникающих ошибок вводят матрицу потерь $\| L \|$, учитывающую в виде неких коэффициентов $a_{i,j}$ потери, которые понесет получатель, если вместо сообщения $S_i$ будет принято сообщение $S_j$. Как правило, полагают, что чем больше потери, тем больше соответствующий коэффициент

$a_{i,j}$. Однако как точно установить эти коэффициенты ответить очень сложно, поскольку здесь приходится учитывать множество обстоятельств, зачастую противоречащих друг другу. Тем не менее, если предположить, что матрица $\|L\|$ определена, то можно в общем виде записать величину средних потерь **(r)**:

$$r = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} p_i \bullet a_{k,i} \bullet p(S_k^{*}(t)/S_i(t)). \quad (305)$$

Как следует из формулы (305), для оптимального приема следует минимизировать величину **(r)**, хотя для этого надо заранее знать много-много всего о передаваемом сигнале, о помехах, об их влиянии на сигнал, о потерях и прочее. Зачастую такая информация носит весьма приблизительный характер и ее использование не может быть оправдано. Поэтому в целях упрощения расчетов вносят определенные допущения. Например, что коэффициенты $a_{i,j}$ одинаковы для всех **i** и **j**, или, что энергии передаваемых сигналов $S_i$ при **i=1..n** одинаковы и так далее. В результате получают оптимальные правила приема в условиях вышеназванных допущений, которые при практической реализации обеспечивают функционирование систем связи.

В любом случае следует отметить важную особенность реальных коммуникационных систем, состоящую в том, что передаются и принимаются заранее известные сигналы, хотя неизвестно в какой последовательности они передаются. В противном случае на приеме возникнет ситуация невозможности отождествления поступающего сигнала с одним из возможно переданных. Данное положение относится и к непрерывным сигналам непрерывного времени, которые по определению континуальны, но, тем не менее, имеют определенные ограничения, например, по уровню, амплитуде, мощности и т.д. Выход за пределы введенных ограничений требует введения дополнительного результата приема сигналов, а именно, введение нового состояния, называемого состоянием «стирания». В этом случае, когда поступающий на прием сигнал не может быть отождествлен ни с одним из известных сигналов, которые могли бы быть переданы, и вводится новое состояние «стирания», означающее, что принято невесть что и это невесть что не похоже ни на один из известных сигналов. Значит, данный неизвестный сигнал следует пометить особой меткой и далее решать, что же следует делать. Например, можно, если есть такая возможность, запросить повторение данного сигнала в надежде, что уж в этом случае его удастся идентифицировать. А можно просто стереть данный сигнал, как если бы его не было, полагая, что в последующей обработке и приеме сигнала такое решение не приведет к плохим и нежелательным последствиям.

Разберем для наглядности пример. Предположим, что передается телеграмма на русском языке: **«ДОРОГАЯ ДУСЯ, ПРИЕЗЖАЮ 13 НОЯБРЯ. ЦЕЛУЮ, КОЛЯ»**. Пусть в результате помех изменяется только один из переданных знаков. При этом, поскольку влияние помех носит случайный характер, то возможны следующие варианты:

Первый - **«ДОРАГАЯ ДУСЯ, ПРИЕЗЖАЮ 13 НОЯБРЯ. ЦЕЛУЮ, КОЛЯ»**.

Второй - **«ДОРОГАЯ ДУСЯ, ПРИЕЗЖАЮ 23 НОЯБРЯ. ЦЕЛУЮ, КОЛЯ»**.

Третий - **«ДОРОГАЯ ДУСЯ, ПРИЕЗЖАЮ 53 НОЯБРЯ. ЦЕЛУЮ, КОЛЯ»**.

Четвертый - **«ДОРОГАЯ ДУСЯ, ПРИЕЗЖАЮ 13 НОЯБРЯ. ЦЕЛУЮ, ТОЛЯ»** и так далее.

В первом случае возникает грамматическая ошибка в слове **«ДОРОГАЯ»**, что не может существенно повлиять на смысл телеграммы. Во втором случае ошибка весьма значительна, поскольку в результате Дуся будет ждать Колю не **13 ноября**, а **23**, что может привести к непоправимым последствиям в их отношениях. В третьем случае возникает несуществующее число **53 ноября**, что потребует ввести операцию стирания и создаст неопределенность, которую придется разрешать каким либо доступным способом. В четвертом случае Дуся будет встречать уже не **Колю**, а **Толю**. Что получится в результате - неизвестно.

Таким образом, мы видим, что изменение всего лишь одного знака в зависимости от ситуации может приводить к совершенно разным последствиям, что, безусловно, следует учитывать при оптимизации системы приема и задании матрицы $\| \mathbf{L} \|$. При этом очевидно, что более эффективные решения можно получить, если оптимизацию проводить в комплексе, рассматривая и систему приема, и систему передачи. Однако полный учет всех факторов делает систему чрезвычайно сложной и практически не реализуемой. Поэтому приходится вводить определенные ограничения и допущения, что в конечном итоге определяется критерием качества той или иной системы связи».

«Битик Байтович, - как всегда вмешалась с вопросом в повествование Муза-Диф, - а как же мы познаем **МИР**. Ведь многое познаваемое изначально не имеет аналогов в известной базе знаний. Если следовать Вашей логике, то мы как бы принимаем в процессе познания новые сигналы природы и в результате должны их отождествить с уже известными. В противном случае получается одно сплошное «стирание». Так ли это?»

«Наверное, так. Однако следует заметить, что известная нам база знаний состоит из весьма небольшого числа аксиом и огромного количества последующих логических доказательств через установленные, введенные правила действий. Давайте вспомним то, что нам рассказывал, уважаемый Пи Е Тет. В то же время остается неясным вопрос с началом этого процесса. Как он был запущен и кем. Это, действительно, проблема из проблем, которую, по-видимому, так же сложно решить, как и представить себе, что такое ноль или бесконечность.

Но, разрешите продолжить про телекоммуникации.

Сигналы, с которыми работают телекоммуникационные системы - это некие процессы, изменяющиеся во времени. Исходя из этого, весьма важно обеспечить правильный во времени прием сигналов. В терминах теории связи это означает, что надо решить проблему синхронизации. Особую актуальность эти вопросы приобретают при широко используемой на практике цифровой системе передачи, где в качестве сигнала выступает дискретный (двоичный) сигнал дискретного времени. При этом приходится решать две задачи. Первая - это определить начало и конец дискретных элементов или другими словами решить проблему тактовой синхронизации. Вторая - это определить начало и конец блока дискретных элементов, составляющих некое кодовое слово. Эта задача зачастую называется задачей цикловой или блоковой синхронизации.

Поясним это на примере телеграфного кода, приведенного в таблице 12. Каждая буква кодируется двоичной кодовой комбинацией из пяти символов. Таким образом, выше приведенная телеграмма **«ДОРОГАЯ ДУСЯ, ПРИЕЗЖАЮ 13 НОЯБРЯ. ЦЕЛУЮ, КОЛЯ»** будет закодирована в виде следующей последовательности:

**{10010,00010,01010,00010,01011,11000,11101,00100,10010, 11100,10100,11101,00100,...}**.

В данном случае для лучшего понимания и отделения кодовых слов друг от друга использован знак запятой, который в таком виде, конечно же, отсутствует при передаче двоичной последовательности, состоящей только из единиц и нулей. Однако для верного декодирования букв такой знак совершенно необходим.

При практической реализации различают так называемый старт-стопный режим цикловой синхронизации и непрерывный (синхронный).

В первом случае системы передачи и приема находятся в состоянии «стоп», что для рассматриваемого телеграфного кода означает передачу по линии связи логической единицы. При необходимости передачи буквы, а, следовательно, соответствующей ей пятиэлементной комбинации, вначале передается логический ноль установленной длительности, как стартовый элемент «старт», и только затем кодовая комбинация. В завершении система снова переходит в состояние «стоп», то есть логической единицы и так далее. Для примера на рис.

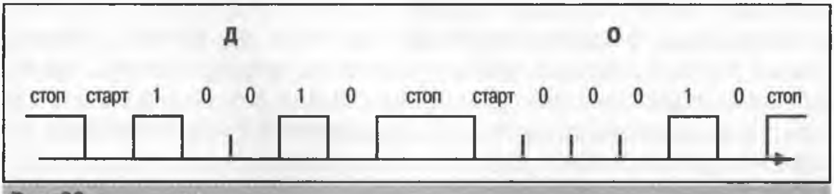



**Рис. 66.**

66 представлены диаграммы передачи старт-стопным способом двух первых букв вышеуказанной телеграммы.

Указанный способ называют также асинхронным способом, поскольку момент начала передачи буквы зависит от момента нажатия соответствующей клавиши на клавиатуре и не зависит от частоты работы системы связи. При этом состояние «стоп» может быть сколь угодно продолжительно, но не меньше некоторого оговоренного заранее в системе значения. В электромеханических телеграфных аппаратах продолжительность сигнала «стоп» была номинально равна полуторной длительности информационного элемента, что объяснялось малой стабильностью работы электромеханического генератора, задающего длительность элементов.

В современных системах связи принцип остается прежним, но «старт» и «стоп» реализуются иным образом. Как правило, с помощью заранее определенных кодовых комбинаций. Подробнее этот аспект рассматривается в специализированных протоколах или иными словами неком своде правил, о которых «знает» как передающее, так и приемное устройство, что бы в рамках этих договоренностей извлекать из двоичного сигнала полезное информационное содержание. При этом, как уже отмечалось, приходится решать противоречивые задачи, а именно, обеспечивать высокое качество и помехоустойчивость, а с другой стороны добиваться максимально возможной эффективности системы связи.

Кстати очень интересно вспомнить то, что рассказывал нам Зонгаид о генетическом коде. Действительно здесь есть полное соответствие. Стартовой комбинацией является стартовый кодон, а соответственно стоповой комбинацией является стоп кодон (таблица 5). При этом элементами кодовой комбинации выступают триплеты, образующие кодовую последовательность между стартом и стопом.

Из-за действия помех при передаче телеграфных сообщений происходят различные ошибки, часть из которых мы разобрали в выше приведенном примере передачи телеграммы. Кроме этого могут быть ложные старты. Например, при продолжающемся сигнале стоп, соответствующем логической единице, какая-либо помеха может привести к формированию логического нуля. Совершенно очевидно, что на приеме это будет воспринято как старт, а последующие значения сигнала будут декодированы как информационная комбинация. Если в это время продолжалось состояние стоп, то есть логической единицы, то кодовая комбинация будет иметь вид **{11111}**. Согласно таблице 12 эта комбинация означает переход на латинский регистр. Значит, все последующие знаки будут декодировать именно в латинском регистре. В этом случае вышеприведенная телеграмма **«ДОРОГАЯ ДУСЯ, ПРИЕЗЖАЮ 13 НОЯБРЯ. ЦЕЛУЮ, КОЛЯ»** превратится в телеграмму следующего содержания: **«DOROGAQ DUSQ, ПРИЕЗЖАЮ 13 НОЯБРЯ. ЦЕЛУЮ, КОЛЯ»**. Исправление ошибки произойдет по причине перехода на цифровой регистр при передаче запятой и затем обратно на русский. Однако в общем случае размножение ошибки может носить более существенный характер. В этой связи резонно предположить, что подобные сбои могут быть и в живой природе, что, безусловно, интересно исследовать, применяя методы, разработанные в теории связи».

«Дорогие друзья, - посовещавшись с Музой-Диф, произнесла несравненная госпожа Вселенская, - не кажется ли Вам, что наша беседа несколько затянулась. Конечно, все, что здесь обсуждалось чрезвычайно интересно и нам всем есть, что рассказать друг другу. Но я, тем не менее, предлагаю перейти к общему обсуждению, учитывая теперь некое общее понимание проблемы **МИР**а. Я предлагаю обсудить возможности формирования искусственных «мыслящих» существ, которые могли бы населять некий виртуальный мир. Да и вообще насколько реальный мир реален?! И что может быть причиной существования мира?! Ну, в общем, предлагаю повеселиться и пофантазировать.

А затем, затем объявим небольшой перерыв и договоримся о следующей встрече. Согласны?!»

«Согласны!» - ответил стройный хор голосов присутствующих жителей **МИР**а.

## 14. Общая дискуссия по теме МИРа

«Муза, дорогая, - первым начал Зонгаид, - Вы умеете играть в шахматы? Что, умеете, но не очень хорошо? Ну, это не страшно. Давайте с Вами поспорим, что Вы и я, играющий на скромный 2-ой разряд, легко выиграем у всех гроссмейстеров, вместе взятых и еще сотен тысяч людей в придачу. Не верите, как это может быть. Пожалуйста, сейчас объясню. Для этого надо, чтобы решение о ходе играющих принималось большинством голосов. Тогда смотрите, что получится. Гроссмейстеры будут предлагать делать сильные ходы и нам действительно с ними не справиться, однако сотня тысяч людей, скорее всего, будут предлагать гораздо более слабые решения, слабее, чем мой второй разряд. Вот и получится, что большинство, не умея как следует играть в шахматы, поможет нам выиграть у гроссмейстеров».

«Ну и историю Вы нам рассказали, - с некоторым удивлением вздохнула Муза-Диф, - к чему это?»

«А вот к чему, - не смутился Профилактян, - во-первых, это смешно, мне выиграть у гроссмейстеров, а мы договорились повеселиться. Во-вторых - это означает, что большинство не всегда означает верное решение и, следовательно, это не может быть признано неким всеобщим правилом. Скорее - это частный случай, при условии, что все участники равны между собой. Будь то умение играть в шахматы или что-либо еще. Таким образом, следует напротив, относительно принципа большинства, выдвинуть идею, что играть должны наиболее компетентные люди. Их решение будет отличаться максимальной точностью и именно им надо доверить или поручить принимать эти решения. Вот только как найти, выявить наиболее компетентных. Особенно в целом по жизни, когда надо разобраться в сложной ситуации, в частности, избрать, например, себе руководителя».

«Какой же Вы, Зонгаид Лечевич, хитрец, - встрепенулся Бит Байтович, - а ведь Вы подводите нас к тому, как надлежит принимать решения. Действительно - это одна из наиболее существенных проблем, которая существует при желании построить искусственный интеллект, о чем мы договорились пофантазировать.

Итак, бывает, что самое простое и ясное вдруг оказывается чрезвычайно сложным и непонятным. Особенно это становится заметным, когда требуется дать определение обычным и общепринятым в человеческом обществе понятиям. По-видимому именно в этой ситуации сталкиваются эмоциональные, чувственные и логические способности человека, когда эмоционально понятные вещи не находят адекватного отображения в части человеческого сознания, оперирующего логическими понятиями.

Искусственный интеллект. Данное понятие эмоционально воспринимается достаточно ясно, однако если попытаться формализовать и определить его, то сделать это будет весьма затруднительно, а, скорее всего и невозможно при использовании лишь логического инструментария. Не развивая далее эту тему, обсудим проблему выбора и принятия решения искусственным интеллектом или просто интеллектом, полагая, что ЗДРСМ знает, что подразумевается под вышеназванным понятиями. Далее нам станет ясно, что именно этот вопрос принятия решения является ключевым в попытках сформировать искусственный интеллект, умеющий решать то многообразие задач, которое характерно для обычного человека, обладающего природным достоянием, или даром божьим - интеллектом.

Рассмотрим некоторые примеры, полагая при этом, что интеллект достаточно развит для того, что бы в исследуемых ситуациях мог принимать соответствующие решения. Проблему того, как интеллект приобрел эти способности - наследственно, искусственно или в процессе своего существования и эволюции, рассматривать не будем.

Пример № 1.

а - маленький ребенок бегает, играя возле крутого обрыва;

б - взрослый человек прогуливается в том же месте.

Очевидно, в обоих случаях, опасаясь упасть с обрыва, что угрожает биологическому существованию интеллекта, и ребенок, и взрослый человек предпримут надлежащие меры, чтобы этого не произошло, поскольку разбиться, получить увечья, а может быть даже и погибнуть, опасно и страшно. Однако по вполне понятным причинам ребенок может заиграться, проявить неосторожность и таким образом, с большой вероятностью по сравнению с взрослым человеком попасть в критическую ситуацию и все же упасть с обрыва. Таким образом, у ребенка чувство опасности, страха перед падением окажется заглушенным, притупленным или подавленным какими-либо другими и, по-видимому, на тот момент более важными эмоциями.

Рассматривая вариант (б), можно также предположить критическую ситуацию. Например, взрослый человек может быть чем-то сильно огорчен или задумался над чем-то для него очень важным и так далее. В результате чувство страха также окажется заглушенным, притупленным или подавленным.

Пример № 2.

История войн рассказывает, когда люди, призрев страх, шли на пулеметы, грудью закрывая амбразуры укреплений, подрывали вместе с собой танки, совершали тараны самолетов и прочее. Во всех случаях страх физической гибели заглушался другими более сильными эмоциями.

Пример № 3.

Гениальное произведение В. Шекспира «Ромео и Джульетта». Молодые люди погибают во имя любви. Другими словами, высокие в человеческом понимании сильные чувства превзошли страх смерти.

Попробуем сформулировать в краткой форме описание эмоций, под влиянием которых в рассмотренных выше примерах, чувство СТРАХА физической гибели интеллекта оказалось заглушенным.

В примере 1а ребенок очень сильно заигрался, в 1б - взрослый человек очень сильно задумался, во 2-м примере воины очень сильно ненавидели врага и в примере 3 молодые люди очень сильно любили друг друга. Заменим выражение очень сильно на страшно, и в результате получается, что чувство страха было заглушено тем, что ребенок страшно заигрался, взрослый человек страшно задумался, воины страшно ненавидели врага, а Ромео и Джульетта страшно любили друг друга.

Приведенное выше описание наталкивает на мысль о том, что в принятии решений интеллект фактически сравнивает что страшнее: физическая гибель или позор от поражения, физическая гибель или потерянная любовь и так далее. Таким образом, можно предположить, что у интеллекта в конечном итоге решение принимается в неком измерителе страха. При этом системы, отвечающие за эмоционально-чувственные стороны существования интеллекта, направляют в измеритель страха сигналы, сила которых пропорциональна силе того или иного чувства (эмоции). (В данном случае слова чувства и эмоции синонимичны).

Известно, что большие полушария головного мозга человека функционально ассиметричны. При этом, как правило, левое полушарие выступает в роли счетно-аналитического устройства, а правое отвечает за эмоционально-чувственную сторону деятельности интеллекта. Учитывая сказанное, можно предложить структурную схему функционирования интеллекта при принятии решения (рис. 67).

Информационной основой принятия решений является некая динамическая модель, складывающаяся в интеллекте на основе предыдущего опыта, сигналов от внешних раздражителей (зрение, слух и прочее), а также на основе внутренней интеллектуальной деятельности.

В зависимости от уровня развития интеллекта можно выделить определенной количество эмоционально-чувственных составляющих, которые представим в виде соответствующего количества генераторов чувств.

Сигналы из генераторов чувств попадают в некие усилители-преобразователи, куда одновременно поступают также сигналы от блока «Динамическая модель». Согласно этим сигналам на выходе «Усилителей-преобразователей» в унифицированной форме образуются сигналы, сила или мощность которых пропорциональна соответствующему эмоционально-чувственному возбуждению, формирующемуся согласно «Динамической модели». Принципиально важно отметить, что сигналы должны быть теперь унифицированы, поскольку в противном случае их сравнение невозможно. Нельзя же сравнить что больше 12 секунд или 3 килограмма. Эти понятия должны быть унифицированы, подведены, как сказал бы Пи Е под общий знаменатель.

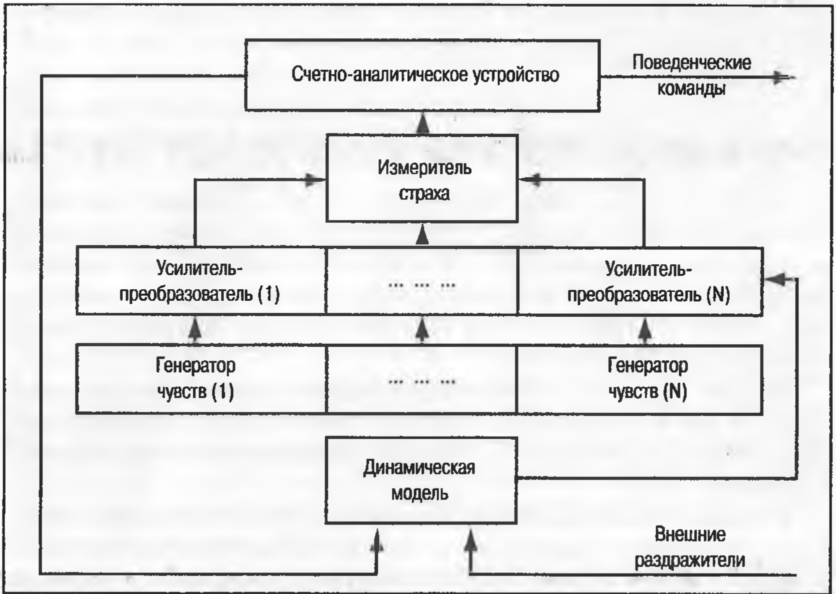



**Рис. 67.**

Итак, унифицированные сигналы из «Усилителей-преобразователей» попадают в «Измеритель страха». Результатом измерений становятся некие данные, поступающие в «Счетно-аналитическое устройство», которое издает поведенческие команды для приведения в соответствие состояния интеллекта с имеющейся в данный момент «Динамической моделью».

Конечно, рассматриваемая модель (структурная схема) носит весьма условный и обобщенный характер. Так, например, вовсе не обязательно, что «Динамическая модель» должна формироваться в одном блоке. Она может иметь распределенный характер. Возможно, воздействие оказывается непосредственно на генераторы чувств и так далее. Однако общий характер и последовательность взаимодействия отдельных блоков интеллекта представляется непротиворечивым и достаточно адекватным нашим представлениям, жизненному опыту и логике.

Рассмотрим еще ряд примеров, на которых постараемся показать «работу» предложенной структурной схемы интеллекта при принятии решения.

Пример № 4.

По неосторожности человек прикоснулся к очень горячему предмету.

Очевидно, что благодаря органам осязания изменится «Динамическая модель». Соответствующий сигнал поступит на эмоциональную линию, выражающую боль. Далее в «Измерителе страха» формируется определенный результат измерения, на основании которого «Счетно-аналитическое устройство» даст поведенческую команду и человек отдернет руку.

Пример № 5.

Чтобы получить от человека необходимую информацию, его подвергают пытке, заставляя касаться горячего предмета. При этом он, пренебрегая болью, не выдает секретов.

Ситуация отчасти схожая с примером № 4. Однако дополнительно включается или усиливается еще одна эмоциональная линия человека, отражающая его нежелание подчиниться пытке. В результате в «Измерителе страха» сформируется иной результат измерения, который, поступив в «Счетно-аналитическое устройство», приведет к тому, что человек не будет отдергивать руку, как это произошло в примере № 4.

Как уже отмечалось «Динамическая модель» может формироваться не только за счет внешних раздражителей, но также и под влиянием внутренней интеллектуальной деятельности. В качестве примеров можно вновь обратиться к примерам 1б и 2.

В примере 1б взрослый человек, задумавшись, попадает в критическую ситуацию. Это означает, что внутренняя интеллектуальная деятельность столь сильно возбудила соответствующие эмоциональные линии, что влияние внешних раздражителей, предупреждающих об опасности, оказалось приглушенным.

В примере 2 сильная установка на сопротивление врагу формирует также соответствующую «Динамическую модель». При этом она такова, что по результатам измерения адекватность состояния интеллекта и «Динамической модели» в «Счетно-аналитическом устройстве» понимается так, что дается поведенческая команда на героический поступок, который, однако, может привести к физической гибели.

Итак, подведем некоторые итоги рассмотренным выше примерам, демонстрирующих ряд идей относительно того, как интеллект принимает те или иные решения. Поскольку интеллекту приходится вырабатывать решение на основе множества факторов, отражающих очень разные стороны его жизнедеятельности, то понятно, что необходимо ввести единый измеритель поступающей информации, а точнее поступающих сигналов. Далее должны быть реализованы способы «измерения» сигналов и сформированы кодовые таблицы принятия того или иного решения в зависимости от значений поступающих сигналов. При этом очевидно, что все эти процессы, как правило, не линейны и не стационарны. Более того, внутри них должен быть заложен принцип адаптации под изменяющуюся ситуацию.

Размышляя над возможным «общим знаменателем» различных сигналов, с которыми приходится работать интеллекту, наталкиваешься на мысль, что такой общей основой может быть страх, да, да, некий обобщенный страх. Конечно, у уважаемой Музы-Диф могут возникнуть вопросы: а как же такие возвышенные чувства, как любовь, патриотизм и так далее. Однако в примерах

2 и 3 было показано, каким образом данные возвышенные чувства могут быть унифицированы. Кроме того, человеческая речь, а ее формирование не случайно, содержащая словосочетания «страшно люблю», «страшно волнуюсь» и тому подобное, дают основания полагать, что все же унифицированной базой следует выбрать страх. Заметим, что приводимые выше словосочетания из русского языка находят эквивалентные формы и в других языках. Так, например, в английском языке «I'm terrible sorry» означает «Я ужасно (страшно) извиняюсь». Во французском языке выражения «Cela fait peur de...» «C'est terrible de...» также позволяют образовывать аналогичные конструкции.

Можно предположить, что слова страшно, ужасно и так далее зачастую, помимо их основного значения, выступают в качестве неких измерителей, подчеркивая силу воздействия, и, заменяя выражение «очень сильно» и ему подобные. И это свойственно, по-видимому, всем известным человеческим языкам. Доказательство данной гипотезы, очевидно, может состоять в анализе верности данного утверждения для всех известных языков. Работа не очень сложная для того, кто эти языки знает, но видимо достаточно громоздкая, поскольку языков очень много. Исходя из этого, ограничимся тем, что было сказано выше, оставив остальное для любопытных.

Объяснение того, что чувство страха может быть некой унифицированной базой, следует, по-видимому, из того, что появившийся на свет человек, формируя свой интеллект, проходит разные стадии развития. Но первыми из них являются те, которые на основе страха формируют поведенческие привычки и умение выживать и приспосабливаться.

Если согласиться с тем, что изложенная выше гипотеза, по крайней мере, не противоречива, а может быть и верна, то предложенная на рис.67 структурная схема оказывается весьма наглядной при анализе поведения человека, и анализе того, как им принимаются решения. Так, например, малое количество «Генераторов чувств» будут свидетельствовать об ограниченности личности и наоборот. Малое количество «Генераторов чувств» соответствует обедненной «Динамической модели», а также свидетельствует об упрощенных «Измерителе чувств» и «Счетно-аналитическом устройстве». Следовательно, такая личность проще управляема и легко программируется на совершение тех или иных поступков.

Поведение людей в обществе также можно анализировать и предсказывать на основе приведенной структурной схемы, поскольку тот или иной тип общества формирует «Динамическую модель». Конечно, за счет своей внутренней интеллектуальной деятельности каждая личность может изменить навязываемую ей «Динамическую модель», однако по вполне понятным причинам большинству людей это сделать очень нелегко. Примеры этого каждый может найти в своей истории. Действительно, как бы вдруг исчезают, казалось бы, вечные идеалы и истины, а им на смену приходит то, что раньше порицалось или, как казалось, вообще не существовало. Предложенная структурная схема дает достаточно наглядное описание этого и более того может быть использована для выработки стратегии влияния и формирования «Динамической модели» в массах. Кстати можно попутно заметить, что в период избирательных компаний фактически реализуются названные принципы и, исходя из этого, становится понятным, почему участники избирательного процесса постоянно «запугивают» электорат ужасными последствиями, если они проголосуют не так как надо. Видимо многие подспудно понимают, что решения вырабатываются «со страху» и поэтому надо «правильно» напугать.

Под влиянием мощнейших средств массовой информации, а также других информационных источников изменяется динамическая модель. Сообразно этому происходит заглушение одних «Генераторов чувств» и возбуждение других. В результате «Измеритель страха» выдает в «Счетно-аналитическое устройство» совершенно иные данные, на основе которых принимаются опять же совершенно иные решения, приводящие в адекватное состояние «Динамическую модель».

Как уже отмечалось формирование «Динамической модели» происходит в определенном социуме, который ее определяет и затем зачастую жестко реагирует на отличающиеся от номинальных для него решений, стремясь сохранить определенную устойчивость и неизменность. Поэтому-то в обиходе можно слышать: «А что, я как все», «Тебе что, больше всех надо», «Все так делают, а я что «рыжий» и так далее. Таким образом, формируемая главным образом за счет внешней среды «Динамическая модель» оказывается достаточно устойчивой и неизменной, что предопределяет непонимание или отторжение тех, кто ведет себя не так как все.

Поведение не так, как все, возможно только за счет сильной внутренней интеллектуальной деятельности, способной существенно повлиять на «Динамическую модель». Вводя определенные задержки в «Динамическую модель», и тем самым, уменьшая влияние внешних раздражителей или влияние счетно-аналитического устройства, можно моделировать разные типы личности и общества в целом. При этом удобно использовать рассмотренный выше метод формирования сложного сигнала из совокупности простых (формула 32). Для этого следует принять каждый «Генератор чувств», как источник сообщений, порождающий некий простой сигнал $\eta_i$**(t)**, где **i** - целое число, принимающее значения от **1** до **N**. А далее, определив некий закон **Q**, который будет ставить в соответствие «суммарному» сигналу **S(t)** совокупность элементарных сигналов $\eta_i$**(t)**, можно построить аналитическую модель принятия решения на основе теоретических подходов, изложенных в теории связи. В сокращенной форме это выглядит следующим образом:

$$\mathbf{S(t) = Q\ [\eta_i(t)]}. \qquad (306)$$

Сравнивая данное выражение с (32), замечаем, что в (32) приводился случай линейной независимости элементов разложения $\eta_i$**(t)**, а оператор **Q** реализовывал операцию суммирования. Достоинства и недостатки такого подхода уже не раз нами обсуждались, рассматривались так же и вопросы выбора базисных функций $\eta_i(t)$. Поэтому, вспомнив об этом, укажем еще раз, что все эти вопросы следует рассматривать не абстрактно, а в сочетании с контекстом решаемой задачи».

Бит Байтович замолчал, понимая, что нафантазировать он нафантазировал, но как-то не смешно. А ведь договаривались повеселиться. Поэтому в завершении он решил предложить задачку.

«Определите правило формирования следующей последовательности цифр **{190415100112020251051152100855...}**».

Видя недоуменный вид Музы-Диф, сосредоточенность Пи Е Тета и раздражение Профилактяна, Файлтон поспешил пояснить: «Не надо, не надо напрягаться. Это всего-навсего даты рождения родителей и их детей. А задачку эту я привел для того, что бы подчеркнуть удивительные вещи, которые на первый взгляд кажутся очень сложными, а на самом деле таковыми не являются. Смешно ведь, правда»?

«Действительно, смешно, - согласился Пи Е, - а вот я Вам предложу еще одну смешную вещь. Представим себе, что в компьютерном пространстве мы формируем некий эквивалент реального мира. Задаем правила, описываем объекты и прочее. При этом все действия будут осуществляться в строго определенные моменты времени, определяемые частотой задающего генератора. Таким образом, для нас, для «творцов» виртуального мира, время жизни в компьютере дискретно. Однако для «жителей» компьютерного мира время будет течь непрерывно, поскольку для них не существует других времен и «заглянуть» между тактами задающего генератора они не могут в принципе, ибо они там не существуют. Веселая история, правда. А что мы можем сказать о своем мире? Каков он? Может мы тоже живем в соответствии с заданной частотой, а параллельно нам, но в соответствии с другими отсчетами живут другие миры? Кстати мы уже знаем, что между двумя отсчетами можно расположить бесконечное количество других отсчетов, значит и миров может быть бесконечно много. При этом они как бы сдвинуты по фазе друг относительно друга во времени. Но если время и пространство связаны между собой, то сдвиг произойдет и в пространстве.

Вот ведь как забавно все может получиться. При этом обратите внимание на удивительную трансформацию счетного и континуального. Кстати давайте рассмотрим еще один пример, который с трудом воспринимается ЗДРСМом. Речь пойдет о так называемых островах Коха.

Построим равносторонний треугольник со стороной а (рис. 68а).

Совершенно очевидно, что периметр такого треугольника равен $P_0=3\cdot a$. Теперь каждую сторону треугольника трансформируем, построив некие выступы в виде равносторонних треугольников со стороной, равной $(1/3)\cdot a$ (рис. 68b). Тогда периметр вновь образованной фигуры будет равен $P_1=3\cdot(4/3)\cdot a$. Продолжив далее аналогичные построения (рис. 68с), получим, что на втором шаге периметр фигуры равен $P_2=3\cdot(4/3)^2\cdot a$. После $n$ шагов периметр

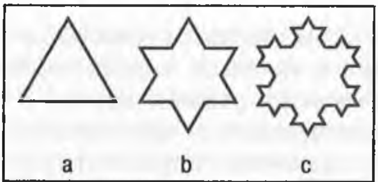


**Рис. 68.**

можно вычислить по следующей формуле $P_n=3\bullet(4/3)^n\bullet a$. Устремляя $n$ к бесконечности, убеждаемся, что периметр фигуры $P_n$ так же стремиться к бесконечности. Ну что же к бесконеннести, так к бесконечности. Но рассмотри теперь площадь образованных фигур.

Обозначим через $S_0$ площадь фигуры, показанной на рис. 68а. Поскольку сторона выступов-треугольничков (рис. 68b) по определению в три раза меньше стороны исходного треугольника, то, следовательно, площадь выступов будет в девять раз меньше площади исходного треугольника. Таким образом, площадь фигуры, показанной на (рис. 68b), будет равна $S_1 = S_0 + 3\bullet S_0/9$. Продолжая аналогичные рассуждения, получим, что площадь фигуры, изображенной на (рис. 68с), равна $S_2 = S_0 + 3\bullet S_0/9 + 3\bullet 4\bullet S_0/9^2$. В общем случае при построении аналогичных выступов на $n$ шаге площадь фигуры можно вычислить по формуле:

$$S_n = S_0 + 3\,\frac{S_0}{9} + 3\,\frac{4\,S_0}{9^2} + 3\,\frac{4^2\,S_0}{9^3} + \ldots + 3\,\frac{4^{n-1}\,S_0}{9^n} + \ldots =$$
$$= S_0 + 3\,S_0\left(\frac{1}{9} + \frac{4}{9^2} + \frac{4^2}{9^3} + \ldots + \frac{4^{n-1}}{9^n} + \ldots\right). \tag{307}$$

Выпишем отдельно выражение, стоящее в скобках, и проведем с ним простые преобразования.

$$\left(\frac{1}{9} + \frac{4}{9^2} + \frac{4^2}{9^3} + \ldots + \frac{4^{n-1}}{9^n} + \ldots\right) =$$
$$= \frac{1}{9} + \frac{4}{9}\left(\frac{1}{9} + \frac{4}{9^2} + \frac{4^2}{9^3} + \ldots + \frac{4^{n-1}}{9^n} + \ldots\right). \tag{308}$$

Если выше названное выражение в скобках обозначить через $L$, то формулу (308) можно записать в следующем виде:

$$L = 1/9 + (4/9)\,L. \tag{309}$$

Откуда следует, что $L=1/5$, а, следовательно, $S_n = (8/5)\bullet S_0$ и ограниченна.

Получается удивительный результат, что существуют фигуры, площадь которых ограниченна, а периметр бесконечен. Помимо этого данные фигуры непрерывны, но не имеют производной и к ним невозможно построить касательную. Вот такой ужас, а не фигуры.

Оказалось также, что можно построить фигуры, уже в трехмерном пространстве, у которых ограничен объем, в то время как площадь поверхности бесконечна. Данные парадоксальные результаты, плохо воспринимаемые ЗДРСМом, привели к возникновению нового раздела математики, а именно, теории фракталов, имеющей существенное отличие от традиционной «количественной» математики».

«Пи Е Тетик, - взмолилась Муза-Диф, - остановитесь, пожалуйста. Оставьте эти Ваши фракталы на следующую нашу встречу. Но поясните ради бога, что же это получается. Вы, например, приносите Силе Водородовне обычный бидон с краской объемом 5 литров для покраски поверхности некоего сосуда объемом, например, 2 литра. Вроде бы должно хватить краски. Но оказывается, что если поверхность этого окрашиваемого сосуда сродни островам Коха, то краски не хватит? Так ли это»?

«Именно так и в этом то и парадокс, дорогая Муза, - отвечал Тет, - и, следовательно, при формировании виртуального компьютерного мира мы обязаны сохранить подобные штучки, что бы мир виртуальный соответствовал реальному». «Какие, однако, интересные вещи открывает математика, - вступил в разговор Профилактян. – И Вы знаете эти Ваши фигуры с бесконечной площадью и ограниченным объемом натолкнули меня на мысль о возможном строении человеческого мозга. Вы, наверное, слышали о попытках исследователей найти объяснение гениальности одних людей по отношению к другим. Измеряли даже размеры мозга, точнее его объем или вес. И оказалось, что этот параметр существенно отличается у признанных гениев и таким образом не может являться отличительным признаком и свидетельством гениальности. Так вот теперь я высказываю предположение, что все определяется площадью, которая согласно Вашим пояснениям, может быть сколь угодно велика при ограниченной величине объема. Другими словами я полагаю, что природа давно знала, что такое острова Коха и использовала это на практике».

«Браво Зонгаид, - воскликнул Пи Е, - твое предположение может еще раз доказать сколь практична математика. Но давайте разберем еще один пример.

Он более «понятен» ЗДРСМу, хотя, как мне кажется, тоже весьма парадоксален. Рассмотрим площадь прямоугольника со сторонами **a** и **b**. Периметр данной фигуры равен $\mathbf{P=2\bullet(a+b)}$, а площадь соответственно $\mathbf{S=a\bullet b}$. Пусть при постоянной величине периметра **P** сторона прямоугольника **a** увеличивается. Тогда очевидно, что сторона **b** должна уменьшаться сообразно следующему выражению $\mathbf{b=P/2-a}$. При этом площадь прямоугольника можно записать в следующем виде $\mathbf{S=a\bullet(P/2-a)}$. Несложно заметить, что при $\mathbf{a\to P/2}$ величина $\mathbf{b\to 0}$, а, следовательно, и площадь $\mathbf{S\to 0}$. Таким образом, имеем результат: существуют фигуры, имеющие одинаковый периметр **P**, но площадь этих фигур **S** может изменяться от некоторой максимальной величины до **0**».

«Прекрасно, прекрасно, - воскликнула Муза-Диф, - какой замечательный результат: фигура с периметром есть, а площади нет. Это называется похудеть до крайности. Но раз уж математика об этом говорит, то этому следует верить.

Однако мне тоже пришла в голову смешная мысль. Однажды, говорят, у великого Мекельанжело Буанorotти спросили, как ему удается создать столь совершенные скульптуры. На что он ответил, что все очень просто. Надо взять глыбу мрамора и отсечь все лишнее. Вот и все, все очень просто. Так вот моя смешная мысль состоит в том же. Как создать прекрасные стихи или гениальную формулу? Да точно также. Надо из всех вариантов сочетания букв, уместившихся, например, на листе формата **А4**, выбросить все лишнее и останутся гениальные строки всех времен и народов. Конечно, как это сделать не очень ясно, но может быть есть решение?»

«Решение есть. Например, перебор всех вариантов, - почти одновременно ответили Пи Е и Файлтон, - но вот какова его эффективность с учетов сложности реализации. И это главный вопрос, с которым мы всегда сталкиваемся в реальной жизни. Любые достижения сопряжены с нарастающими сложностями их реализации. Кстати в физике мы уже отмечали наличие диссипативных сил, которые, с одной стороны, препятствуют тому или иному, но с другой стороны, их отсутствие вообще не позволило бы развиваться многим, если не всем, явлениям. Например, человек летит в самолете со все возрастающей скоростью. Возникающая сила сопротивления воздуха препятствует нарастанию скорости и вносит, таким образом, ограничения. Однако в отсутствии этой силы самолет вообще не мог бы взлететь, поскольку ему не на что было бы «опереться». Без наличия силы трения человек не смог бы ходить, поскольку его ноги «проскальзывали» бы и так далее. Таким образом, мы должны констатировать, что, видимо, неким всеобщим правилом должно быть наличие диссипативных сил. А если это не обнаруживается, то, значит, что-то не так.

Следовательно, при формировании виртуального мира следует не забыть об обязательности исполнения принципа «диссипативности»».

«Скорее всего, Вы правы, - вступила в разговор Сила Водородовна, - действительно всегда всякому действию находится противодействие. Но, кроме того, я бы напомнила о законе ограничения плотности. При этом, что за пределами этих границ и почему они существуют и могут ли быть расширенны не ясно. Однако, если уж мы ведем разговор о возможности формирования виртуального мира, подобного миру реальному, то следует озаботиться адекватностью представления действующих законов».

«Да, да, - поддержал ее Пи Е Тет, - а кроме того надо научиться правильно измерять исследуемые явления. А это, прежде всего, связано с введением «правильной» метрики. Приведу Вам пример. Сравниваем генетический код человека с кодом его «ближайшего родственника» обезьянки Читы и дождевого червячка Джонни. Сравнение строим по правилу совпадения элементов генетического кода. Таким образом, в результате получится фактически двоичная комбинация со следующим правилом формирования. Знак **0**, если совпадение есть и знак **1**, если совпадения нет (можно договориться и о противоположном правиле). Теперь можно попытаться сделать вывод о том, насколько генетические коды близки и далее порассуждать на данную тему, например, кто на самом деле «ближайший родственник», а кто нет. Однако такой подход может оказаться не вполне корректным и даже более того ошибочным, поскольку не определенна значимость каждого отличия или совпадения. А это очень важно. Например, кодовое слово **A={10000}** отличается от кодового слова **B={01111}** на **5** позиций, а от кодового слова **C={00001}** только на две позиции. Математики сказали бы, что в первом случае расстояние Хемминга равно **5**, а во втором **2**. Значит комбинация **A** больше отличается от **B**, чем от **C**. Однако если те же комбинации **A**, **B** и **C** записать в десятичной форме, а именно, **A={16}**, **B={15}** и **C={1}**, то можно сделать противоположный вывод. Действительно **A** больше **B** на **1**, в то время как **A** больше **C** на **15**. Таким образом, прежде чем что-то сравнивать, надо озаботиться адекватностью сравнения».

«Браво, - воскликнула Муза-Диф, - прекрасный пример того, как надо быть очень внимательным, когда возникает желание что-либо измерить или сравнить. Но я хотела бы попросить господина Файлтона, как специалиста по информационным системам, сказать нам несколько слов о возможности формирования искусственного разума».

«Ну, что же, хотя мы и засиделись за нашей беседой до самого вечера и слегка устали, начал Бит Байтович, - я бы добавил одно, как мне кажется существенное соображение. На этапе создания искусственного разума, а затем и искусственного существа, возможно, объективным фактором должно стать его самосохранение. Если это так, то человек, его создатель, может оказаться в определенных ситуациях источником опасности и, следовательно, с ним будут бороться, то есть уничтожать создателя во имя самосохранения. Да, конечно, можно заложить в искусственном существе, что приоритет создателя выше самосохранения. Но тогда должна быть уверенность в незыблемости этого. Нет ли здесь аналога с известной историей совращения Адама. Почему не допустить, что злонамеренный программист из числа создателей (аналог дьявола) не внесет соответствующие изменения в искусственное существо, когда статус создателя будет ниже чувства самосохранения. Если это возможно, то нет гарантий того, что искусственно созданные существа, будут абсолютно безопасны для человека.

Ну а сейчас я предлагаю всем нам попробовать мысленно окинуть взором все то, что обсуждалось нами и перечитать замечательные строки известного произведения».

«Однажды весной, в час небывало жаркого заката, в Москве, на Патриарших прудах, появились два гражданина...».

# Оглавление

**АДЖЕМОВ**
**Артем Сергеевич** -

ректор Московского Технического Университета Связи и Информатики, д.т.н., профессор, Лауреат Премии Правительства Российской Федерации в области образования.
Известный специалист в областях теории связи и информационных систем.
Владеет несколькими иностранными языками, увлекается музыкой и спортом.
Уверен, что будущее цивилизационное развитие человечества тесно связано и зависит от развития инфокоммуникаций.