Г.Худойберганов, А.Ворисов,
Ҳ.Мансуров, Б.Шоимкулов

МАТЕМАТИК АНАЛИЗ

3
кисм

Тошкент - 2006

Ўзбекисон Республикаси

Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги

Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий Университети

Г.Худойберганов, А.Ворисов,

Ҳ.Мансуров, Б.Шоимқулов

Математик анализ

(маърузалар)

3

қисм

Тошкент - 2006

Сўз боши

Ушбу ўқув қўлланма 2003 йили "Насаф" нашриётида чоп этилган "Математик анализ" (Маърузалар) 1− ва 2− қисмларнинг давоми. У 19 та маърузадан иборат бўлиб, унда кўп ўзгарувчили функциялар, уларнинг лимити, узлуксизлиги, дифференциал ҳисоби, шунингдек функционал кетма−кетликлар ва қаторлар, даражали ва Фурье қаторлари мавзулари баён этилган.

Ўқув қўлланмаларни ёзишдаги асосий тамойиллар (қоидалар) 1−қисмда ёзилган сўз бошида келтирилган.

Қўлланманинг 1− ва 2− қисмлари нашр этилгандан буён ўтган давр мобайнида ҳамкасблар томонидан кўплаб маслаҳатлар бўлди. Мазкур қўлланмани ёзишда муаллифлар ўз тажрибаларига таянган ҳолда ҳамкасбларнинг маслаҳатларини ҳам эътиборга олдилар.

Муаллифлар

12–боб

Кўп ўзгарувчили функциялар, уларнинг лимити, узлуксизлиги

55–маъруза

R^m фазо. R^m фазода очиқ ва ёпиқ тўпламлар

1°. R^m фазо тушунчаси. Айтайлик, ҳақиқий сонлар тўплами R ёрдамида ушбу

$$\underbrace{RxRx....xR}_{m\ ma}=\{(x_1,x_2,...,x_m):x_1\in R\ ,\ x_2\in R,...,x_m\in R\} \qquad (1)$$

тўпламни (R нинг декарт кўпайтмаларидан тузилган тўпламни) ҳосил қилайлик. Равшанки, (1) тўпламнинг ҳар бир элементи m та $x_1,x_2,...,x_m$ ҳақиқий сонлардан ташкил топган тартибланган m лик

$$(x_1,x_2,...,x_m)$$

дан иборат бўлади. Уни (1) тўпламнинг нуқтаси дейилиб, битта ҳарф билан белгиланади:

$$x=(x_1,x_2,...,x_m)$$

Бунда $x_1,x_2,...,x_m$ сонлар x нуқтанинг мос равишда биринчи, иккинчи,..., m – координаталари дейилади.

Агар $x=(x_1,x_2,...,x_m)$, $y=(y_1,y_2,...,y_m)$ нуқталар учун $x_1=y_1,\ x_2=y_2,...,\ x_m=y_m$ бўлса, у ҳолда $x=y$ дейилади.

Фараз қилайлик,

$$x=(x_1,x_2,...,x_m),\ y=(y_1,y_2,...,y_m)$$

лар (1) тўпламнинг ихтиёрий икки нуқтаси бўлсин. Ушбу

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(y_k-x_k)^2}$$

миқдор x ва y нуқталар орасидаги масофа дейилади ва $\rho(x,y)$ каби белгиланади:

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(y_k-x_k)^2} \qquad (2)$$

Энди масофанинг хоссаларини келтирамиз:

1) Ҳар доим $\rho(x,y)\ge 0$ ва

$$\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$$

бўлади.

◁ (2) муносабатга кўра, ҳар доим $\rho(x,y)\ge 0$ бўлади. Агар $\rho(x,y)=0$ бўлса, унда

$$(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+...+(y_m-x_m)^2=0$$

бўлиб, $x_1=y_1\ ,\ x_2=y_2,....,x_m=y_m$, яъни $x=y$ бўлиши келиб чиқади. Аксинча, агар $x_1=y_1\ ,\ x_2=y_2,....,x_m=y_m$ бўлса, унда (2) муносабатдан фойдаланиб $\rho(x,y)=0$ бўлишини топамиз. ▷

2) $\rho(x,y)$ масофа x ва y уларга нисбатан симметрик бўлади: $\rho(x,y)=\rho(y,x)$.

◁ Бу хоссаниг исботи (2) муносабатдан келиб чиқади:

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(y_k-x_k)^2}=\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(x_k-y_k)^2}=\rho(y,x). \ \triangleright$$

3) (1) тўпламнинг ихтиёрий

$$x=(x_1,x_2,...,x_m),\ y=(y_1,y_2,...,y_m),\ z=(z_1,z_2,...,z_m)$$

нуқталари учун

$$\rho(x,z)\le\rho(x,y)+\rho(y,z)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

◁ Маълумки, ихтиёрий $a_1,a_2,...,a_m$ ва $b_1,b_2,...,b_m$ ҳақиқий сонлар учун

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(a_k+b_k)^2}\le\sqrt{\sum_{k=1}^{m}a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{m}b_k^2} \tag{3}$$

бўлади (қаралсин, [2], 12−боб, 1−§; одатда бу тенгсизликни Минковский тенгсизлиги дейилади). (3) тенгсизликда

$$a_k=y_k-x_k\ ,\ b_k=z_k-y_k \qquad (k=1,2,...,m)$$

деб топамиз

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(z_k-x_k)^2}\le\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(y_k-x_k)^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(z_k-y_k)^2}$$

Бу эса

$$\rho(x,z)\le\rho(x,y)+\rho(y,z)$$

бўлишини билдиради. ▷

Шундай қилиб, (1) тўпламда (тўплам элементлари орасида) масофа тушунчасининг киритилишини ҳамда масофа учта хоссага эга бўлишини кўрдик.

Одатда (1) тўплам R^m фазо дейилади. Демак,

$$R^m=\{(x_1,x_2,...,x_m): x_1\in R\ ,\ x_2\in R,...,x_m\in R\}$$

Энди R^m фазодаги баъзи бир тўпламларни келтирамиз.

Айтайлик, бирор $a=(a_1,a_2,...,a_m)\in R^m$ нуқта ва $r>0$ сон берилган бўлсин.

Ушбу

$$B_r(a)=\left\{(x_1,x_2,...,x_m)\in R^m:\sqrt{(x_1-a_1)^2+...+(x_m-a_m)^2}<r\right\}$$

қисқача

$$B_r(a)=\{x\in R^m:\rho(x,a)<r\}$$

тўплам маркази a нуқта, радиуси r бўлган шар дейилади.

Қуйидаги

$$\overline{B}_r(a)=\{x\in R^m:\rho(x,a)\le r\}$$

тўплам R^m фазода ёпиқ шар,

$$B_r^0(a)=\{x\in R^m : \rho(x,a)=r\}$$

тўплам эса, R^m фазода сфера дейилади.

Равшанки,

$$\overline{B_r}(a)=B_r(a)\cup B_r^0(a)$$

бўлади.

Ушбу

$$\Pi(a_1,...,a_m;b_1,b_2,...,b_m)=\{(x_1,x_2,...,x_m)\in R^m : a_1<x_1<b_1, a_2<x_2<b_2,...,a_m<x_m<b_m\}$$

тўплам R^m фазода параллелепипед дейилади, бунда $a_1,a_2,...,a_m;b_1,b_2,...,b_m$ ҳақиқий сонлар.

2^0. R^m фазода нуқтанинг атрофи. Бирор $x^0=(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)\in R^m$ нуқта ҳамда $\varepsilon>0$ сон берилган бўлсин.

1–таъриф. Маркази x^0 нуқтада радиуси ε бўлган R^m фазодаги шар, $x^0\in R^m$ нуқтанинг сферик атрофи дейилади ва $U_\varepsilon(x^0)$ каби белгиланади:

$$U_\varepsilon(x^0)=\{x\in R^m : \rho(x,x^0)<\varepsilon\}$$

2–таъриф. Ушбу

$$\Pi(\delta_1,\delta_2...,\delta_m)=\{(x_1,x_2,...,x_m)\in R^m :$$
$$: x_1^0-\delta_1<x_1<x_1^0+\delta_1, x_2^0-\delta_2<x_2<x_2^0+\delta_2,...,x_m^0-\delta_m<x_m<x_m^0+\delta_m\}$$

параллелепипед нуқтанинг параллелепипедиал атрофи дейилади ва $\overline{U}_{\delta_1\delta_2...\delta_m}(x^0)$ каби белгиланади, бунда $\delta_1>0,\ \delta_2>0,...,\delta_m>0$.

R^m фазодаги нуқтанинг бу атрофлари орасидаги муносабатни қуйидаги лемма ифодалайди.

Лемма. $x^0\in R^m$ нуқтанинг ҳар қандай $U_\varepsilon(x^0)$ сферик атрофи олинганда ҳам ҳар доим x^0 нуқтанинг шундай $\overline{U}_{\delta_1\delta_2...\delta_m}(x^0)$ параллелепипедиал атрофи топиладики,

$$\overline{U}_{\delta_1\delta_2...\delta_m}(x^0)\subset U_\varepsilon(x^0)$$

бўлади.

Шунингдек, нуқтанинг ҳар қандай $\overline{U}_{\delta_1\delta_2...\delta_m}(x^0)$ параллелепепидиал атрофи олинганда ҳам ҳар доим x^0 нуқтанинг шундай $U_\varepsilon(x^0)$ сферик атрофи топиладики,

$$U_\varepsilon(x^0)\subset\overline{U}_{\delta_1\delta_2...\delta_m}(x^0)$$

бўлади.

$\triangleleft$ $x^0\in R^m$ нуқтанинг сферик атрофи

$$U_\varepsilon(x^0)=\{x\in R^m : \rho(x,x^0)<\varepsilon\}$$

берилган бўлсин. Модомики, $\varepsilon > 0$ сон берилган экан, унга кўра $\delta < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$ тенгсизликни қаноатлантирувчи δ сонни олиб, x^0 нуқтанинг ушбу

$$\overline{U}_{\delta}(x^0) = \overline{U}_{\delta\delta\ldots\delta}(x^0) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^m :$$
$$: x_1^0 - \delta < x_1 < x_1^0 + \delta, x_2^0 - \delta < x_2 < x_2^0 + \delta, \ldots, x_m^0 - \delta < x_m < x_m^0 + \delta\}$$

параллелепипедиал атрофини тузамиз. Натижада x^0 нуқтанинг

$$U_{\varepsilon}(x^0) \text{ ва } \overline{U}_{\delta}(x^0)$$

атрофларига эга бўламиз.

Айтайлик, $\forall x \in \overline{U}_{\delta}(x^0)$ бўлсин. Унда

$$|x_k - x_k^0| < \delta \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

бўлиб

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(x_k - x_k^0)^2} < \sqrt{\sum_{k=1}^{m}\delta^2} = \delta \cdot \sqrt{m}$$

бўлади. Юқоридаги $\delta < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$ тенгсизликни эътиборга олиб топамиз:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(x_k - x_k^0)^2} < \varepsilon$$

Демак, $\rho(x, x_0) < \varepsilon$ бўлиб, $x \in U_{\varepsilon}(x^0)$ бўлади. Бундан

$$\overline{U}_{\delta}(x^0) \subset U_{\varepsilon}(x^0)$$

бўлиши келиб чиқади.

$x^0 \in R^m$ нуқтанинг параллелепипедиал атрофи

$$\overline{U}_{\delta_1\delta_2\ldots\delta_m}(x^0) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^m :$$
$$: x_1^0 - \delta_1 < x_1 < x_1^0 + \delta_1,\ x_2^0 - \delta_2 < x_2 < x_2^0 + \delta_2, \ldots, x_m^0 - \delta_m < x_m < x_m^0 + \delta_m\}$$

берилган бўлсин. Берилган $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$ мусбат сонлар ёрдамида

$$\varepsilon = \min\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m\}$$

сонини топиб x^0 нуқтанинг ушбу

$$U_{\varepsilon}(x^0) = \{x \in R^m : \rho(x, x^0) < \varepsilon\}$$

сферик атрофни тузамиз. Натижада x^0 нуқтанинг

$$U_{\varepsilon}(x^0) \text{ ва } \overline{U}_{\delta_1\delta_2\ldots\delta_m}(x^0)$$

атрофларига эга бўламиз.

Айтайлик, $\forall x \in U_{\varepsilon}(x^0)$ бўлсин. У ҳолда

$$\rho(x, x^0) = \sqrt{\sum_{k=1}^{m}(x_k - x_k^0)^2} < \varepsilon \le \delta_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

бўлиб,

$$|x_k - x_k^0| < \delta_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

бўлади. Бундан эса $x \in \overline{U}_{\delta_1\delta_2\ldots\delta_m}(x^0)$ бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$U_\varepsilon(x^0) \subset \overline{U}_{\delta_1\delta_2\ldots\delta_m}(x^0). \ \triangleright$$

Бу лемма R^m фазо нуқтасининг бир атрофидан иккинчи атрофига ўтиши имконини беришини ифодалайди.

3^0. R^m фазода очиқ ва ёпиқ тўпламлар. Айтайлик R^m фазода бирор G тўплам $(G \subset R^m)$ берилган бўлиб, $x^0 \in G$ бўлсин.

Агар x^0 нуқта G тўпламга тегишли бўлган $U_\varepsilon(x^0)$ атрофга эга бўлса, $(U_\varepsilon(x^0) \subset G)$ x^0 нуқта G тўпламнинг ички нуқтаси дейилади.

3–таъриф G тўпламнинг ҳар бир нуқтаси унинг ички нуқтаси бўлса, у очиқ тўплам дейилади.

1–мисол. R^m фазодаги ушбу

$$B_r(a) = \{x \in R^m : \rho(x,a) < r\}$$

шарнинг очиқ тўплам эканлиги кўрсатилсин.

$\triangleleft$ $\forall x^0 \in B_r(a)$ нуқтани оламиз. Унда

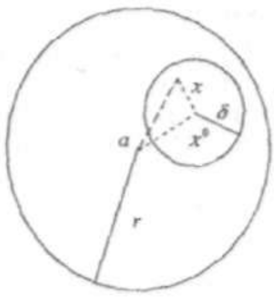
$$r - \rho(x^0, a)$$

миқдор мусбат бўлади. Уни δ дейлик: $\delta = r - \rho(x^0, a)$.

Энди x^0 нуқтанинг ушбу

$$U_\delta(x^0) = \{x \in R^m : \rho(x, x^0) < \delta\}$$

атрофини қараймиз (1 – чизма).



1 – чизма

Бунда $U_\delta(x^0) \subset B_r(a)$ бўлади. Ҳақиқатдан ҳам,

$$\forall x \in U_\delta(x^0) \Rightarrow \rho(x, x^0) < \delta$$

бўлиб, масофанинг 3) – хоссасига кўра

$$\rho(x,a) \le \rho(x,x^0) + \rho(x^0,a) < \delta + \rho(x^0,a) = r$$

бўлади. Демак,

$$\forall x \in U_\delta(x^0) \Rightarrow x \in B_r(x^0)$$

Бундан $U_\delta(x^0) \subset B_r(x^0)$ бўлиши келиб чиқади.

Демак, $B_r(a)$ тўпламнинг ҳар бир нуқтаси унинг ички нуқтаси бўлади. Бинобарин, $B_r(x^0)$ очиқ тўплам. ▷

Айтайлик, $F \subset R^m$ тўплам ҳамда $x^0 \in R^m$ нуқта берилган бўлсин. Агар x^0 нуқтанинг ихтиёрий $U_\varepsilon(x^0)$ атрофида $(\forall \varepsilon > 0)$ F тўпламнинг x^0 дан фарқли камида битта нуқтаси бўлса, x^0 нуқта F тўпламнинг лимит нуқтаси дейилади.

Масалан, ушбу

$$B_r(a) = \{x \in R^m : \rho(x,a) < r\}$$

тўпламнинг ҳар бир нуқтаси унинг лимит нуқтаси бўлади. Айни пайтда

$$B_r^0 = \{x \in R^m : \rho(x,a) = r\}$$

тўпламнинг барча нуқталари ҳам шу $B_r(a)$ тўпламнинг лимит нуқтаси бўлади. Бироқ бу лимит нуқталар $B_r(a)$ тўпламга тегишли бўлмайди.

4– таъриф. Агар $F \subset R^m$ тўпламнинг барча лимит нуқталари шу тўпламга тегишли бўлса, F ёпиқ тўплам дейилади.

Масалан,

$$\overline{B}_r(a) = \{x \in R^m : \rho(x,a) \le r\}$$

тўплам (R^m фазодаги ёпиқ шар) ёпиқ тўплам бўлади

Бирор $M \subset R^m$ тўплам ҳамда $x^0 \in R^m$ нуқтани қарайлик.

Агар x^0 нуқтанинг ихтиёрий $U_\varepsilon(x^0)$ атрофида ҳам М тўпламнинг, ҳам $R^m \setminus M$ тўпламнинг нуқталари бўлса, x^0 нуқта M тўпламнинг чегаравий нуқтаси дейилади. M тўпламнинг барча чегаравий нуқталари унинг чегарасини ташкил этади. M тўпламнинг чегараси $\partial(M)$ каби белгиланади.

Масалан,

$$B_r^0(x^0) = \{x \in R^m : \rho(x,a) = r\}$$

тўплам

$$B_r(x^0) = \{x \in R^m : \rho(x,a) < r\}$$

тўпламнинг чегараси бўлади:

$$\partial(B_r(x^0)) = B_r^0(x^0)$$

Агар $F \subset R^m$ тўпламнинг чегараси $\partial(F)$ шу тўпламга тегишли бўлса, F ёпиқ тўплам бўлади.

Масалан,

$$B_r(a) = \{x \in R^m : \rho(x,a) \le r\}$$

ёпиқ тўплам бўлади, чунки

$$\partial(\overline{B}_r(a)) = B_r^0(a) \subset \overline{B}_r(a)$$

4⁰. R^m фазода тўғри чизиқ ва кесма. Фараз қилайлик, R^m фазода

$$a=(a_1,a_2,...,a_m)\ ,\ b=(b_1,b_2,...,b_m)$$

нуқталар берилган бўлсин. Бу нуқталар координаталари ёрдамида қуйидагиларни

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1t+b_1(1-t), \\ x_2 &= a_2t+b_2(1-t), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m &= a_mt+b_m(1-t), \end{aligned} \qquad (4)$$

тузиб, бунда $t\in R$, t ўзгарувчига боғлиқ бўлган R^m фазонинг

$$x=(x_1,x_2,...,x_m)$$

нуқталарини ҳосил қиламиз. Бундай нуқталар тўплами

$$\{x=(x_1,x_2,...,x_m)\in R^m : x_1=a_1t+b_1(1-t)\ ,$$
$$x_2=a_2t+b_2(1-t),...,x_m=a_mt+b_m(1-t)\ ,\ t\in R\}$$

R^m фазода $a=(a_1,a_2,...,a_m)$ ва $b=(b_1,b_2,...,b_m)$ нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизиқ дейилади.

Энди юқоридаги a ва b нуқталарнинг координаталари ёрдамида тузилган (4) муносабатда $0\le t\le 1$ бўлсин. R^m фазонинг бундай нуқталари тўплами

$$\{x=(x_1,x_2,...,x_m)\in R^m : x_1=a_1t+b_1(1-t)\ ,\ x_2=a_2t+$$
$$+b_2(1-t),...,x_m=a_mt+b_m(1-t)\ \ ,\ 0\le t\le 1\}$$

R^m фазода a ва b нуқталарни бирлаштирувчи тўғри чизиқ кесмаси дейилади.

R^m фазода чекли сондаги нуқталар берилган бўлсин. Бу нуқталарни бирин – кетин тўғри чизиқ кесмалари билан бирлаштиришдан ташкил топган чизиқ синиқ чизиқ дейилади.

Агар $M\subset R^m$ тўпламнинг ихтиёрий икки нуқтасини бирлашитрувчи шундай синиқ чизиқ топилсаки, у шу M тўпламга тегишли бўлса, M боғламли тўплам дейилади.

5–таъриф. Агар $M\subset R^m$ тўплам очиқ ҳамда боғламли тўплам бўлса, у соҳа дейилади.

Масалан,

$$B_r(a)=\{x\in R^m : \rho(x,a)<r\}$$

соҳа бўлади.

5⁰. Хусусий ҳоллар. $m=1$ бўлганда $R^m=R$ бўлиб, у барча ҳақиқий сонлардан иборат тўплам бўлади. Бу тўпламнинг ҳар бир элементи тўғри чизиқ нуқтасини, тўпламнинг ўзи эса тўғри чизиқни ифодалайди.

Икки $x\in R$, $y\in R$ нуқталар орасида масофа

$$\rho(x,y)=|x-y|,$$

$x_0 \in R$ нуқтанинг атрофи

$$U_\varepsilon(x_0)=\{x\in R:\rho(x_1,x_0)<\varepsilon\}=(x_0-\varepsilon\ ,\ x_0+\varepsilon)$$

бўлади.

$m=2$ бўлганда $R^m=R^2$ бўлиб, у барча текислик нуқталаридан иборат тўплам бўлади. Бу тўпламнинг икки $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$ нуқталари орасидаги масофа

$$\rho(x,y)=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2},$$

$x^0=(x_0,y_0)$ нуқтанинг сферик атрофи

$$U_\varepsilon(x^0)=\{(x,y)\in R^2:\rho((x,y),(x_0,y_0))<\varepsilon\}=$$
$$=\left\{(x,y)\in R^2:\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\varepsilon\right\}$$

бўлади.

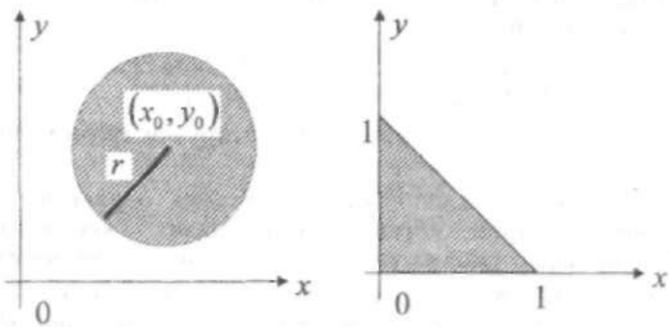
R^2 фазода ушбу

$$\{(x,y)\in R^2:\rho((x,y),(x_0,y_0))<r\}$$

тўплам очиқ, қуйидаги

$$\{(x,y)\in R^2:x\geq 0\ ,\ y\geq 0\ ,\ x+y\leq 1\}$$

тўплам эса ёпиқ тўплам бўлади. Улар 2 – чизмада тасвирланган.



2 – чизма

Машқлар

1. Агар $G_1\subset R^m$, $G_2\subset R^m$ очиқ тўпламлар бўлса,

$$G_1\cup R^m\ ,\ G_2\cap R^m$$

тўпламларнинг очиқ тўплам бўлиши кўрсатилсин.

2. Агар $F_1\subset R^m$, $F_2\subset R^m$ ёпиқ тўпламлар бўлса,

$$F_1\cup R^m\ ,\ F_2\cap R^m$$

тўпламларнинг ёпиқ тўплам бўлиши кўрсатилсин.

R^m фазода кетма-кетлик ва унинг лимити

1⁰. R^m фазода кетма-кетлик ва унинг лимити тушунчалари. Айтайлик, бирор қоидага кўра ҳар бир натурал сон n га R^m фазонинг битта

$$x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}) \qquad (n=1,2,\dots)$$

нуқтаси мос қўйилган бўлсин. Бу мослик натижасида R^m фазо нуқталаридан ташкил топган ушбу

$$(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_m^{(1)}),\ (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_m^{(2)}),\ (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}), \dots$$

қисқача

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}, \dots$$

тўплам ҳосил бўлади. Уни $R^{(m)}$ фазода кетма-кетлик дейилиб, $\{x^{(n)}\}$ каби белгиланади. Демак, $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг ҳадлари R^m фазо нуқталаридан иборат бўлиб, бу нуқталарнинг координаталари m та

$$\{x_1^{(n)}\}, \quad \{x_2^{(n)}\}, \dots \quad \{x_m^{(n)}\} \qquad (n=1,2,\dots)$$

сонлар кетма-кетликларини юзага келтиради.

Фараз қилайлик, R^m фазода $\{x^{(n)}\}$:

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}, \dots \qquad (1)$$

кетма-кетлик ҳамда

$$a = (a_1, a_2, \dots a_m) \in R^m$$

нуқта берилган бўлсин.

1-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $n_0 \in N$ сон топилсаки, барча $n > n_0$ учун

$$\rho(x^{(n)}, a) < \varepsilon$$

яъни

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in N, \quad \forall n > n_0: \quad \rho(x^{(n)}, a) < \varepsilon$$

бўлса, a нуқта $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг лимити дейилади ва

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = a \quad \text{ёки } n \to \infty \text{ да } x^{(n)} \to a$$

каби белгиланади.

$\forall n > n_0$ да

$$\rho(x^{(n)}, a) < \varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши, (1) кетма-кетликнинг n_0 дан катта номерли ҳадлари a нуқтанинг $U_\varepsilon(a)$ атрофига тегишли бўлишини билдиради. Бу ҳол (1) кетма-кетликнинг лимитини қуйидагича таърифлаш имконини беради.

2-таъриф. Агар $a \in R^m$ нуқтанинг ихтиёрий $U_\varepsilon(a)$ атрофи олингандан ҳам, $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг бирор ҳадидан кейинги барча ҳадлари шу атрофга тегишли бўлса, a нуқта $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетликнинг лимити дейилади.

1-мисол. R^m фазода ушбу

$$\{x^{(n)}\} = \left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots \frac{1}{n}\right\}$$

кетма-кетликнинг лимити $a = (o, o, \dots, o)$ бўлиши кўрсатилсин.

$\lhd \forall \varepsilon > 0$ сонини олиб, унга кўра $n_0 = \left[\frac{\sqrt{m}}{\varepsilon}\right] + 1$ни топамиз.

Унда $\forall n > n_0$ учун

$$\rho(x^{(n)}, a) = \rho((\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}), (0,0,\dots,0)) = \frac{\sqrt{m}}{n} < \frac{\sqrt{m}}{n_0} = \frac{\sqrt{m}}{\left[\frac{\sqrt{m}}{\varepsilon}\right] + 1} < \varepsilon$$

бўлади. Демак,

$$\lim_{n \to \infty} x^{(n)} = a \ . \rhd$$

2⁰. Кетма-кетлик лимитининг мавжудлиги. Фараз қилайлик, R^m фазода $\{x^{(n)}\}$ кетма-кетлик ва $a \in R^m$ нуқта берилган бўлсин.

1-теорема. Агар R^m фазода

$$x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}) \qquad (n = 1,2,\dots)$$

кетма-кетлик

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$$

лимитга эга бўлса;

$$\lim_{n \to \infty} x^{(n)} = a$$

у ҳолда

$$\lim_{n \to \infty} x_1^{(n)} = a_1,$$
$$\lim_{n \to \infty} x_2^{(n)} = a_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\lim_{n \to \infty} x_m^{(n)} = a_m,$$

бўлади.

$\lhd$ Айтайлик

$$\lim_{n \to \infty} x^{(n)} = a$$

бўлсин. Лимит таърифига биноан $\forall n > n_0 \in N$ учун

$x^{(n)} \in U_\varepsilon(a) = \{x \in R^m : \rho(x,a) < \varepsilon\} \qquad (\forall \varepsilon > 0)$
бўлади. Равшанки,

$$U_\varepsilon(a) \subset \tilde{U}_\varepsilon(a)$$

бунда

$$\tilde{U}_\varepsilon(a) = \{x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in R^m :$$
$$: a_1 - \varepsilon < x_1 < a_1 + \varepsilon, a_2 - \varepsilon < x_2 < a_2 + \varepsilon, ..., a_m - \varepsilon < x_m < a_m + \varepsilon,\}$$

Кейинги муносабатлардан, $\forall n > n_0$ учун

$$a_1 - \varepsilon < x_1^{(n)} < a_1 + \varepsilon,$$
$$a_2 - \varepsilon < x_2^{(n)} < a_2 + \varepsilon,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_m - \varepsilon < x_m^{(n)} < a_m + \varepsilon$$

яъни

$$| x_1^{(n)} - a_1 | < \varepsilon,$$
$$| x_2^{(n)} - a_2 | < \varepsilon,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$|x_m^{(n)} - a_m| < \varepsilon$$

бўлишини топамиз. Бундан эса

$$\lim_{n \to \infty} x_1^{(n)} = a_1,$$
$$\lim_{n \to \infty} x_2^{(n)} = a_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\lim_{n \to \infty} x_m^{(n)} = a_m,$$

бўлиши келиб чиқади. ▷

2–теорема. Агар R^m фазодаги

$$\{x^n\} = \{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, ..., x_m^{(n)})\} \qquad (n = 1,2...)$$

кетма – кетлик ва $a = (a_1, a_2, ..., a_m)$ нуқта учун

$$\lim_{n \to \infty} x_1^{(n)} = a_1,$$
$$\lim_{n \to \infty} x_2^{(n)} = a_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\lim_{n \to \infty} x_m^{(n)} = a_m,$$

бўлса, у ҳолда $\{x^{(n)}\}$ кетма – кетлик лимитига эга бўлиб,

$$\lim_{n \to \infty} x^{(n)} = a,$$

бўлади.

◁Теореманинг шарти ҳамда лимит таърифидан фойдаланиб топамиз:

$\lim\limits_{n\to\infty} x_1^{(n)} = a_1 \Rightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists n_0^{(1)}\in N,\ \forall n>n_0^{(1)}: \left|x_1^{(n)}-a_1\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$ бўлади.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_2^{(n)} = a_2 \Rightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists n_0^{(2)}\in N,\ \forall n>n_0^{(2)}: \left|x_2^{(n)}-a_2\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$ бўлади.

....

$\lim\limits_{n\to\infty} x_m^{(n)} = a_m \Rightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists n_0^{(m)}\in N,\ \forall n>n_0^{(m)}: \left|x_m^{(n)}-a_m\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$ бўлади.

Агар

$$n_0 = \max\left\{n_0^{(1)}, n_0^{(2)}, \dots, n_0^{(m)}\right\}$$

дейилса, унда $\forall n>n_0$ да бир йўла

$$\left|x_k^{(n)}-a_k\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} \qquad (k=1,2,..,m)$$

тенгсизликлар бажарилади. У ҳолда

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(x_k^{(n)}-a_k)^2} < \sqrt{\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}\right)^2} = \varepsilon$$

яъни

$$\rho(x^{(n)},a) < \varepsilon$$

бўлади. Демак,

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = a\,.\triangleright$$

Бу теоремалардан қуйидаги тасдиқ келиб чиқади.

R^m фазода $\left\{x^{(n)}\right\} = \left\{\left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}\right)\right\}$ кетма-кетлик $a=(a_1,a_2,\dots,a_m)$ лимитга,

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = a$$

эга бўлиши учун бир йўла

$$\lim_{n\to\infty} x_1^{(n)} = a_1,$$
$$\lim_{n\to\infty} x_2^{(n)} = a_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\lim_{n\to\infty} x_m^{(n)} = a_m,$$

бўлиши зарур ва етарли.

Бу муҳим тасдиқ бўлиб, у R^m фазодаги кетма-кетликлар лимитларини ўрганишни сонлар кетма-кетликлар лимитларини ўрганишга олиб келади. Сонлар кетма-кетликларнинг лимити эса [1], 2-бобда батафсил баён этилган.

Агар (1) кетма-кетлик лимитга эга бўлса, у яқинлашувчи кетма-кетлик дейилади.

Юқоридаги келтирилган тасдиқдан фойдаланиб исботланадиган муҳим теоремани келтирамиз. Аввало R^m фазода кетма-кетликнинг фундаменталлигини таърифлаймиз.

3–таъриф. R^m фазода $\{x^{(n)}\}$ кетма – кетлик берилган бўлсин. Агар $\forall\varepsilon>0$ олинганда ҳам, шундай $n_0\in N$ топилсаки, $\forall n>n_0$, $\forall\rho>n_0$ лар учун

$$\rho(x^{(n)},x^{(\rho)})<\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $\{x^{(n)}\}$ фундаментал кетма – кетлик дейилади.

3–теорема (Коши теоремаси). $\{x^{(n)}\}$ кетма – кетликнинг яқинлашувчи бўлиши учун унинг фундаментал бўлиши зарур ва етарли.

Бу теорема [1], 9 – маърузада келтирилган 3 – теорема каби исботланади.

3⁰. Ичма–ич жойлашган ёпиқ шарлар принципи. R^m фазода марказлари

$$a^{(n)}=(a_1^{(n)},a_2^{(n)},...,a_m^{(n)})\qquad (n=1,2,...)$$

нуқталарда, радиуслари $r_n>0\quad(n=1,2,..)$ бўлган ушбу

$$B_1=\bar B_{r_1}(a^{(1)})=\{x\in R^m:\rho(x,a^{(1)})\le r_1\}$$
$$B_2=\bar B_{r_2}(a^{(2)})=\{x\in R^m:\rho(x,a^{(2)})\le r_2\}$$
$$\dots\qquad\dots\qquad\dots\qquad\dots$$
$$B_n=\bar B_{r_n}(a^{(n)})=\{x\in R^m:\rho(x,a^{(n)})\le r_n\}$$
$$\dots\qquad\dots\qquad\dots\qquad\dots$$

ёпиқ шарлар кетма – кетлигини қарайлик. Агар бу ёпиқ шарлар кетма – кетлигининг ҳадлари учун қуйидаги

$$B_1\supset B_2\supset...\supset B_n\supset...$$

муносабат ўринли бўлса, $\{B_n\}$ ичма – ич жойлашган ёпиқ шарлар кетма – кетлиги дейилади.

Айтайлик, $\{B_n\}$ R^m фазода ичма – ич жойлашган ёпиқ шарлар кетма – кетлиги бўлсин.

4–теорема. Агар $n\to\infty$ да шар радиуслари r_n нолга интилса, яъни

$$\lim_{n\to\infty}r_n=0$$

бўлса, у ҳолда барча ёпиқ шарларга тегишли бўлган a нуқта $(a\in R^m)$ мавжуд ва у ягона бўлади.

◁ Шар марказларидан тузилган

$$\{a^{(n)}\}\quad(a^{(n)}\in R^m,\quad n=1,2,..)$$

кетма – кетликни қарайлик. Унинг фундаментал кетма – кетлик бўлишини кўрсатамиз.

Шартга кўра $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=0$. Унда

$$\forall\varepsilon>0,\quad\exists n_0\in N,\quad n>n_0:r_n<\varepsilon$$

бўлади. Айни пайтда ёпиқ шарлар ичма-ич жойлашганлигидан ихтиёрий

$$\rho > n > n_0$$

учун

$$\overline{B}_{r_\rho}(a^{(\rho)}) \supset \overline{B}_{r_n}(a^{(n)})$$

бўлиб,

$$\rho\left(a^{(n)}, a^{(\rho)}\right) \le r_\rho < \varepsilon$$

бўлади.

Демак, $\left\{a^{(n)}\right\}$ фундаментал кетма-кетлик. Унда теоремага кўра у яқинлашувчи бўлади:

$$\lim_{n\to\infty} a^{(n)} = a \qquad (a \in R^m)$$

Бу a нуқта $\overline{B}_{r_n}(a^{(n)})$ тўпламнинг лимит нуқтаси ва $\overline{B}_{r_n}(a^{(n)})$ ёпиқ бўлганлиги учун $a \in \overline{B}_{r_n}(a^{(n)})$ $(n = 1,2..)$ бўлади. Демак, a барча шарларга тегишли бўлган нуқта. Фараз қилайлик, a нуқтадан фарқли барча шарларга тегишли бўлган b нуқта $\left(b \in R^m\right)$ мавжуд бўлсин: $b \in \overline{B}_{r_n}(a^{(n)})$ $b \ne a$

Масофанинг 3-хоссасидан фойдаланиб топамиз:

$$\rho(a,b) \le \rho\left(a, a^{(n)}\right) + \rho\left(a^{(n)}, b\right) \le 2r_n$$

Агар $n \to \infty$ да $r_n \to 0$ бўлишини эътиборга олсак, кейинги муносабатдан $\rho(a,b) = 0$, яъни $a = b$ бўлиши келиб чиқади. ▷

Одатда бу теорема ичма-ич жойлашган ёпиқ шарлар принципи дейилади.

4^0. Қисмий кетма-кетликлар. Больцано-Вейерштрасс теоремаси. R^m фазода $\left\{x^{(n)}\right\}$:

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}, \dots$$

кетма-кетлик берилган бўлсин. Ушбу кетма-кетлик

$$x^{(n_1)}, x^{(n_2)}, \dots, x^{(n_k)}, \dots,$$

бунда

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots;\ n_k \in N, \quad k = 1,2,\dots,$$

берилган $\left\{x^{(n)}\right\}$ кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетлиги дейилади. У $\left\{x^{(n_k)}\right\}$ каби белгиланади.

Равшанки, битта кетма-кетликнинг турлича қисмий кетма-кетликлари бўлади.

Агар $\left\{x^{(n)}\right\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиб,

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = a$$

бўлса, бу кетма-кетликнинг ҳар қадай қисмий кетма-кетлиги $\left\{x^{(n_k)}\right\}$ ҳам яқинлашувчи бўлиб,

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = a$$

бўлади.
Бу тасдиқнинг исботи кетма-кетлик лимити таърифидан бевосита келиб чиқади.

Айтайлик, R^m фазода бирор M тўплам берилган бўлсин: $M \subset R^m$. Агар R^m фазода маркази $(0,0,..,0)\in R^m$, радиуси $r>0$ бўлган шар

$$U^0 = \{(x_1,x_2,...,x_m)\in R^m : \rho((x_1,x_2,..,x_m,),(0,0,...0)) < r\}$$

топилсаки

$$M \subset U^0$$

бўлса, M чегараланган тўплам дейилади.

Энди Больцано–Вейерштрасс теоремасини исботсиз келтирамиз.

5–теорема (Больцано–Вейерштрасс теоремаси). R^m фазода ҳар қандай чегараланган кетма-кетликдан яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкин.

5⁰. Хусусий ҳоллар. $m=1$ бўлганда $R^m = R$ бўлиб, ундаги кетма-кетлик сонлар кетма-кетлиги бўлади. Маълумки, сонлар кетма-кетлиги ва унинг лимити [1] да батафсил ўрганилган.

$m=2$ бўлганда $R^m = R^2$ бўлиб, ундаги кетма-кетлик текислик нуқталаридан иборат

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2),....(x_n,y_n),.... \qquad (x_n\in R, \quad y_n \in R, \quad n=1,2,..)$$

кетма-кетлик бўлади. Бу кетма-кетликнинг лимити $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ сонлар кетма-кетликларининг лимитлари орқали ўрганилади.

Масалан, ушбу

$$\{(-1^n),(-1)^n\}:$$

$$(-1,-1),\ (1,1),\ \ (-1,-1),...,((-1)^n,(-1)^n),...$$

кетма-кетлик лимитга эга бўлмайди, чунки

$$x_n = (-1)^n,\ \ y_n = (-1)^n \qquad (n=1,2,..)$$

кетма-кетликлар лимитга эга эмас.

Машқлар.

1. Агар $x^0 \in R^m$ нуқта $M \subset R^m$ тўпламнинг лимит нуқтаси бўлса, M тўплам элементларидан ташкил топган ва x^0 нуқтага яқинлашадиган

$$\{x^{(n)}\} \qquad (x^{(n)}\in M,\ \ x^{(n)} \neq x_0, \quad n=1,2,...)$$

кетма-кетликларнинг мавжудлиги кўрсатилсин.

2. Агар

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = a \qquad (x^{(n)}\in R^m,\ a\in R^m, \quad n=1,2,...)$$

бўлса, $\{x^{(n)}\}$ кетма – кетликнинг чегараланганлиги кўрсатилсин.

57 маъруза
Кўп ўзгарувчили функция ва унинг лимити

1^0. Кўп ўзгарувчили функция тушунчаси. Фараз қилайлик, R^m фазода бирор Е тўплам берилган бўлсин: $E \subset R^m$.

1– таъриф. Агар Е тўпламдаги ҳар бир $x=(x_1,x_2,...x_m)$ нуқтага бирор f қоидага кўра битта ҳақиқий u сон мос қўйилган бўлса, Е тўпламда кўп ўзгарувчили (m та ўзгарувчили), функция берилган (аниқланган) дейилади. Уни

$$f\ ;\ x=(x_1,x_2,...,x_m)\to u \ \text{ ёки } \ u=f(x)=f(x_1,x_2,...,x_m)$$

$$(x=(x_1,x_2,...,x_m)\in R^m\ ,\ u\in R)$$

каби белгиланади. Бунда Е функциянинг берилиш (аниқланиш) тўплами, $x_1,x_2,...,x_m$ лар (эркли ўзгаручилар) функция аргументлари, u эса $x_1,x_2,...,x_m$ ларнинг функцияси дейилади.

Масалан, f – ҳар бир

$$x=(x_1,x_2,...x_m)\in M,$$

$$M=\{x\in R^m\ ;\ \rho(x,0)\le 1\}\qquad \mathbf{0}=(0,0,...,0)\in R^m$$

нуқтага ушбу

$$(x_1,x_2,...,x_m)\to\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-...-x_m^2}$$

қоида билан битта ҳақиқий u сони мос қўйсин. Бу ҳолда $M\subset R^m$ тўпламда аниқланган

$$u=\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-...-x_m^2}$$

функция ҳосил бўлади.

Айтайлик, $u=f(x_1,x_2,...x_m)$ функция (кўп ҳолларда бу функцияни $u=f(x)$ каби ёзамиз) $E\subset R^m$ тўпламда берилган бўлсин. $x^0=(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)\in E$ нуқтага мос келувчи u_0 сон $u=f(x)$ функциянинг x^0 нуқтадаги хусусий қиймати дейилади: $u_0=f(x^0)$. Берилган функциянинг барча хусусий қийматларидан иборат ушбу

$$\{u=f(x): x\in E\} \tag{1}$$

сонлар тўплам $u=f(x)$ функция қийматлари тўплами дейилади. Агар (1) тўплам чегараланган бўлса, $u=f(x)=f(x_1,x_2,...x_m)$ функция Е тўпламда чегараланган дейилади.

R^{m+1} фазодаги ушбу

$$\{(x,f(x)): x=(x_1,x_2,...x_m)\in R^m, f(x)\in R\}$$

тўплам кўп ўзгарувчили $u=f(x_1,x_2,...x_m)$ функциянинг графиги дейилади.

Фараз қилайлик, юқорида қаралаётган $f(x_1,x_2,...x_m)$ функцияда

$$x_1 = \varphi_1(t) = \varphi_1(t_1, t_2, ..., t_k),$$
$$x_2 = \varphi_2(t) = \varphi_2(t_1, t_2, ..., t_k),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_m = \varphi_m(t) = \varphi_m(t_1, t_2, ..., t_k),$$

бўлсин, бунда $\varphi_i(t)$ функция $(i = 1,2,...,m)$ $T \subset R^k$ тўпламда аниқланган бўлиб, $t = (t_1, t_2, ..., t_k) \in T$ бўлганда унга мос $x = (x_1, x_2, ... x_m) \in E$ бўлсин. Натижада

$$f(x(t)) = f(\varphi_1(t_1, ..., t_k), \varphi_2(t_1, ..., t_k), ..., \varphi_m(t_1, ..., t_k)) = F(t_1, t_2, ..., t_k)$$

функция ҳосил бўлади. Уни мураккаб функция дейилади.

2^0. Кўп ўзгарувчили функция лимити (каррали лимити) таърифлари. Фараз қилайлик, $f(x)$ $(x \in R^m)$ функция $E \subset R^m$ тўпламда берилган, $x^0 \in R^m$ нуқта E нинг лимит нуқтаси бўлсин. У ҳолда R^m фазода шундай $\{x^{(n)}\}$:

$$x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(n)}, ...$$

кетма – кетлик топиладики:

1) $\forall_n \in N$ да $x^{(n)} \in E, \quad x^{(n)} \neq x^0$
2) $n \to \infty$ да $x^{(n)} \to x^0$

бўлади (бундай кетма – кетликлар исталганча бўлади).

2–таъриф (Гейне). Агар

1) $\forall_n \in N$ да $x^{(n)} \in E, \quad x^{(n)} \neq x^0;$
2) $n \to \infty$ да $x^{(n)} \to x^0$

шартларни қаноатлантирувчи ихтиёрий $\{x^{(n)}\}$ кетма – кетлик учун

$$n \to \infty \quad \text{да } f(x^{(n)}) \to A$$

бўлса, A га $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функциянинг $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ нуқтадаги лимити (каррали лимити) дейилади. Уни $\lim\limits_{x \to x^0} f(x) = A$ ёки

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_2 \to x_2^0 \\ \dots\dots \\ x_m \to x_m^0}} f(x_1, x_2, ..., x_m) = A$$

каби белгиланади.

Эслатма. Агар

$$\{x^{(n)}\} \quad (x^{(n)} \in E, \quad x^{(n)} \neq x^0, n = 1,2,....),$$
$$\{y^{(n)}\} \quad (y^{(n)} \in E, \quad y^{(n)} \neq x^0, n = 1,2,....)$$

кетма – кетликлар учун $n \to \infty$ да

$$x^{(n)} \to x^0 \quad , y^{(n)} \to x^0$$

бўлиб,

$$f(x^{(n)}) \to A, \ f(y^{(n)}) \to B, \ A \neq B$$

бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада лимитга эга бўлмайди.

3–таъриф (Коши). Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ топилсаки,

$0 < \rho(x, x^0) < \varepsilon$

тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall x \in E$ $(E \subset R^m)$ да

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, A сон $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтадаги лимити (каррали лимити) дейилади.

Бу таърифни қисқача қилиб қуйидагича ҳам айтса бўлади.

Агар

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \forall x \in E \cap \left(U_\delta(x^0) \setminus \{x^0\}\right): \ |f(x) - A| < \varepsilon.$$

бўлса, A сони $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтадаги лимити дейилади.

3^0. Функция лимитининг мавжудлиги. Фараз қилайлик, $f(x) = f(x_1, x_2, \dots x_m)$ функция $E \subset R^m$ тўпламда берилган бўлиб, $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in R^m$ нуқта E тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

1–теорема (Коши). $f(x)$ функция x^0 нуқтада лимитга эга бўлиши учун $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топилиб,

$$\forall x' \in E \cap \left(U_\delta(x^0) \setminus \{x^0\}\right), \quad \forall x'' \in E \cap \left(U_\delta(x^0) \setminus \{x^0\}\right)$$

нуқталарда

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

◁ **Зарурлиги**. Айтайлик, $f(x)$ функция x^0 нуқтада A лимитга эга бўлсин:

$$\lim_{x \to x^0} f(x) = A$$

Лимит таърифига кўра,

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \forall x \in E \cap \left(U_\delta(x^0) \setminus \{x^0\}\right):$$

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

бўлади, Жумладан

$$x' \in E \cap (U_\delta(x^0) \setminus \{x^0\}), \quad x'' \in E \cap (U_\delta(x^0) \setminus \{x^0\}):$$

нуқталар учун

$$|f(x') - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \ |f(x'') - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

бўлади.

Кейинги тенгсизликлардан

$$|f(x'') - f(x')| \le |f(x') - A| + |f(x'') - A| < \varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади.

Етарлилиги. Айтайлик, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топиладики,

$$\forall x' \in E \cap (U_\delta(x^0) \setminus \{x^0\}), \quad \forall x'' \in E \cap (U_\delta(x^0) \setminus \{x^0\})$$

нуқталар учун

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилсин.

x^0 нуқтага интилувчи иккита $\{x^{(n)}\}, \{y^{(n)}\}$ кетма-кетликларни оламиз: $n \to \infty$ да

$$x^{(n)} \to x^0 \quad (x^{(n)} \in E, \quad x^{(n)} \ne x^0, n = 1,2,....),$$

$$y^{(n)} \to x^0 \quad (y^{(n)} \in E, \quad y^{(n)} \ne x^0, n = 1,2,....)$$

Бу кетма-кетликлар ҳадларидан фойдаланиб, ушбу

$$x^{(1)},\ y^{(1)},\ x^{(2)},\ y^{(2)},....,x^{(n)},\ y^{(n)},....$$

кетма-кетликни ҳосил қиламиз. Уни $\{z^{(n)}\}$ кетма-кетлик дейлик. Равшанки, бу кетма-кетликнинг ҳам лимити x^0 бўлади: $n \to \infty$ да

$$z^{(n)} \to x^0 \quad (z^{(n)} \in E, \quad z^{(n)} \ne x^0, n = 1,2,....),$$

Лимит таърифига биноан юқоридаги $\delta > 0$ сонга кўра шундай $n_0 \in N$ топиладики, $\forall n > n_0$, $\forall m > n_0$ да

$$z^{(n)} \in E \cap (U_\delta(x^0) \setminus \{x^0\}),$$

$$z^{(m)} \in E \cap (U_\delta(x^0) \setminus \{x^0\})$$

бўлади.

Теореманинг шартидан

$$|f(z^{(n)}) - f(z^{(m)})| < \varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши келиб чиқади. Демак, $\{f(z^{(n)})\}$ сонлар кетма-кетлиги фундаментал кетма-кетлик бўлади. Бинобарин, у яқинлашувчи :

$$n \to \infty \quad \text{да } f(z^{(n)}) \to A$$

Унда $n \to \infty$ да

$$f(x^{(n)}) \to A, \quad f(y^{(n)}) \to A$$

бўлиб, функция лимитининг Гейне таърифига кўра

$$\lim_{x \to x^0} f(x) = A$$

бўлади. ▷

4^0. Такрорий лимитлар. Фараз қилайлик, $f(x) = f(x_1, x_2, ... x_m)$ функция $E \subset R^m$ тўпламда берилган бўлиб, $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0) \in R^m$ шу Е тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

m та $x_1, x_2, ... x_m$ ўзгарувчиларга боғлиқ бўлган $f(x_1, ... x_m)$ функцияда $x_2, x_3, ... x_m$ ўзгарувчилар тайинланса, равшанки, у битта

x_1 ўзгарувчининг функциясига айланади. Айтайлик, бу функция $x_1 \to x_1^0$ да лимитга эга бўлсин :

$$\lim_{x_1 \to x_1^0} f(x_1, x_2, ..., x_m) = \varphi_1(x_2, x_3, ..., x_m)$$

Энди $\varphi_1(x_2, x_3, ..., x_m)$ функцияда $x_3, x_4, ..., x_m$ ўзгарувчилари тайинланиб, сўнг $x_2 \to x_2^0$ лимитга ўтилса

$$\lim_{x_2 \to x_2^0} \varphi_1(x_2, x_3, ..., x_m) = \varphi_2(x_3, x_4, ..., x_m)$$

бўлиб, берилган функциянинг

$$\lim_{x_2 \to x_2^0} \lim_{x_1 \to x_1^0} f(x_1, x_2, ..., x_m)$$

лимити ҳосил бўлади.

Худди шунга ўхшаш $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функциянинг

$$x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}$$

ўзгарувчилари мос равишда $x_{i_1}^0, x_{i_2}^0, ..., x_{i_k}^0$ ларга интилгандаги лимити

$$\lim_{x_{i_k} \to x_{i_k}^0} \cdots \lim_{x_{i_1} \to x_{i_1}^0} f(x_1, x_2, ..., x_m)$$

ни ҳам қараш мумкин.

Одатда бу лимитлар $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функциянинг такрорий лимитлари дейилади. $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функция аргументлари $x_1, x_2, ... x_m$ лар мос равишда $x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0$ сонларга турли тартибда интилганда функциянинг турли такрорий лимитлари ҳосил бўлади.

Кўп ўзгарувчили функциянинг лимити (каррали лимити) ҳамда унинг такрорий лимитлари турлича муносабатда бўлади. Улар ҳақида, хусусий ҳолда кейинги банда баён этамиз.

5^0 Хусусий ҳоллар. $m = 1$ бўлганда битта ўзгарувчига боғлиқ бўлган R фазодаги бирор тўпламда аниқланган $u = f(x)$ функцияга эга бўламиз. Бу функция ва унинг лимити [1] даги 11 – ва 12 – маърузаларда ўрганилган ва тўлиқ маълумотлар келтирилган.

$m = 2$ бўлганда R^2 фазодаги (текисликдаги) бирор тўпламда аниқланган икки ўзгарувчига боғлиқ бўлган $u = f(x, y)$ функцияга эга бўламиз.

Масалан,

$$u = \frac{\ln(x^2 + y^2 - 1)}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}.$$

1 – чизма

Бу функциянинг аниқланиш тўплами текисликнинг ушбу

$$x^2 + y^2 - 1 > 0,$$
$$4 - x^2 - y^2 < 4$$

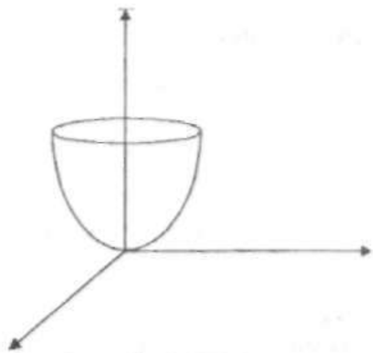
системани қаноатлантирадиган нуқталар тўплами 1 – чизмада тасвирланган халқани ифодалайди:

Икки ўзгарувчига боғлиқ бўлган $u = f(x,y)$ функциянинг графиги умуман R^3 фазода (биз яшаб турган фазода) сиртни ифодалайди.

Масалан, ушбу

$$u = x^2 + y^2$$

функциянинг графиги R^3 фазода 2 – чизмада тасвирланган айланма параболоид бўлади:



2 – чизма

Айтайлик, $f(x,y)$ функция $E \subset R^2$ тўпламда берилган бўлиб, $(x_0, y_0) \in R^2$ нуқта E нинг лимит нуқтаси бўлсин. Бу икки ўзгарувчили функция лимити таърифлари қуйидагича бўлади:

Агар

1) $\forall n \in N$ да $(x_n, y_n) \in E,\ (x_n, y_n) \neq (x_0, y_0)$

2) $n \to \infty$ да $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$

шартни қаноатлантирувчи ихтиёрий $\{(x_n, y_n)\}$ нуқталар кетма – кетлиги учун

$n \to \infty$ да $f(x_n, y_n) \to A$

бўлса, A функциянинг (x_0, y_0) нуқтадаги лимити (каррали лимити) дейилади ва

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A \text{ ёки } \lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y) = A$$

каби белгиланади.

Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ топилсаки, $0 < \rho\left((x,y),(x_0,y_0)\right) < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall (x,y) \in$ E да

$$|f(x,y) - A| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, A сон $f(x,y)$ функциянинг (x_0, y_0) нуқтадаги лимити (каррали лимити) дейилади.

Берилган функциянинг иккита такрорий лимитлари

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x,y)\ ,\ \lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

бўлиши мумкин.

1–мисол. Ушбу

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{агар } x^2+y^2\neq 0 \text{ бўлса}\\ 0 \quad\quad, \text{агар } x^2+y^2=0 \text{ бўлса}\end{cases}$$

функциянинг $(x,y)\to(0,0)$ даги лимити 0 бўлиши кўрсатилсин.

◁ Коши таърифидан фойдаланиб топамиз:

$\forall\varepsilon>0$ сон учун $\delta=2\varepsilon$ дейилса,

$$0<\rho\left((x,y),(0,0)\right)<\delta$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall(x,y)\in R^2$ да

$$|f(x,y)-0|=\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leq\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\rho\left((x,y),(0,0)\right)<\frac{1}{2}\delta=\varepsilon$$

бўлади. Демак,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0. \ ▷$$

2–мисол. Ушбу

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

функциянинг (0,0) нуқтада лимити мавжуд эмаслиги кўрсатилсин.

◁ Равшанки, бу функция

$$R^2\setminus\{(0,0)\}$$

тўпламда аниқланган ва (0,0) нуқта шу тўпламнинг лимит нуқтаси.

(0,0) нуқтага интилувчи $\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}, \left\{\left(\frac{1}{n},-\frac{1}{n}\right)\right\}$

кетма – кетликларни олайлик:

$$\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\to(0,0)\ ,\left(\frac{1}{n},-\frac{1}{n}\right)\to(0,0).$$

$\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$ ҳамда $\left(\frac{1}{n},-\frac{1}{n}\right)$ нуқталарда $(n=1,2,3,....)$ берилган функциянинг қийматлари

$$f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=1\ ,f\left(\frac{1}{n},-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{5}\qquad (n=1,2,....)$$

бўлиб

$$f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\to 1\ ,f\left(\frac{1}{n},-\frac{1}{n}\right)\to\frac{1}{5}$$

бўлади. Функция лимитининг Гейне таърифидан фойдала[нка] берилган функциянинг $(x,y)\to(0,0)$да лимитга эга эмаслиги[ни] топамиз. ▷

3–мисол. Ушбу

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, агар\ x^2+y^2\neq 0\ бўлса,\\ 0 \quad , агар\ x^2+y^2=0\ бўлса\end{cases}$$

функциянинг (0,0)да такрорий лимитлари топилсин.

◁ Берилган функциянинг такрорий лимитларини топамиз:

$$\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,\ \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=0,$$

$$\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,\ \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=0$$

Демак, берилган функциянинг (0,0)нуқтадаги такрорий лимитлар[и] бир–бирига тенг бўлиб, улар 0 га тенг. ▷

4–мисол. Ушбу

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x-y}{x+3y}, агар\ x+3y^2\neq 0\ бўлса,\\ 0 \quad , агар\ x^2+3y=0\ бўлса\end{cases}$$

функциянинг (0,0) нуқтадаги такрорий лимитлари топилсин.

◁ Берилган функциянинг такрорий лимитлари қуйидагича бўлади:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-y}{x+3y}=-\frac{1}{3},\ \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{2x-y}{x+3y}=-\frac{1}{3};$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{2x-y}{x+3y}=2,\ \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{2x-y}{x+3y}=2$$

Айни пайтда берилган функция $(x,y)\to(0,0)$да лимитга (карра[ли] лимитга) эга бўлмайди, чунки

$$\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\to(0,0)\ ,\left(\frac{5}{n},-\frac{4}{n}\right)\to(0,0)$$

кетма–кетликлар учун

$$f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{4}\to\frac{1}{4},$$

$$f\left(\frac{5}{n},\frac{4}{n}\right)=\frac{6}{17}\to\frac{6}{17}$$

бўлиб, улар бир–бирига тенг эмас. ▷

5–мисол. Ушбу

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y\sin\frac{1}{x}, & агар\ x\neq 0\ булса,\\ 0 & ,агар\ x=0\ булса\end{cases}$$

функциянинг (0,0) нуқтадаги такрорий лимитлари топилсин.

◁ Бу функция учун

$$\lim_{y\to 0} f(x,y)=x,\ \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=0,$$

бўлиб,

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$$

эса мавжуд бўлмайди.

Айни пайтда $(x,y)\to(0,0)$ да берилган функциянинг лимити (каррали лимити) мавжуд бўлади, чунки

$$|f(x,y)-0|=\left|x+y\sin\frac{1}{x}\right|\leq|x|+|y| \qquad (x\neq 0)$$

бўлиб,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$$

бўлади. ▷

Фараз қилайлик, $f(x,y)$ функция R^2 фазодаги

$$E=\{(x,y)\in R^2: |x-x_0|<a, |y-y_0|<b\}$$

тўпламда берилган бўлсин.

2–теорема. Агар

1) $(x,y)\to(x_0,y_0)$ да $f(x,y)$ функциянинг лимити (каррали лимити) мавжуд ва

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A,$$

2) ҳар бир тайинланган x да

$$\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\varphi(x) \tag{2}$$

мавжуд бўлса, у ҳолда

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$$

такрорий лимит мавжуд ва

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=A$$

бўлади.

◁ Айтайлик,

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

бўлсин. Лимит таърифига биноан, $\forall\varepsilon>0$ олинганда ҳам шундай $\delta>0$ топиладики, ушбу

$$\{(x,y)\in R^2:\ |x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta\}\subset E$$

тўпламнинг барча (x,y) нуқталари учун

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади. Кейинги тенгсизликдан, $y\to y_0$ да лимитга ўтиб топамиз:

$$|\varphi(x)-A|\le\varepsilon.$$

Демак,

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=A$$

(2) ва (3) муносабатлардан

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=A$$

бўлиши келиб чиқади. ▷

Худди шунга ўхшаш қуйидаги теорема исботланади.

3–теорема. Агар

1) $(x,y)\to(x_0,y_0)$ да $f(x,y)$ функциянинг лимити (каррали лимити) мавжуд ва

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A,$$

2) ҳар бир тайинланган y да

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\phi(y)$$

мавжуд бўлса, у ҳолда

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

такрорий лимит мавжуд ва

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=A$$

бўлади.

Натижа. Агар $f(x,y)$ функция учун бир вақтда юқоридаги 2,3– теоремаларнинг шартлари бажарилса, у ҳолда

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

бўлади.

Машқлар

1. Функция лимитининг Гейне ва Коши таърифларининг эквивалентлиги кўрсатилсин.
2. Лимитга эга бўлган функцияларнинг хоссалари келтирилсин.
3. Ушбу

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} f(x,y)=A$$

лимит таърифлансин.

4. Ушбу

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} (x^2 \cdot y^2)e^{-(x+y)}$$

лимит ҳисоблансин.

58–маъруза

Кўп ўзгарувчили функциянинг узлуксизлиги. Текис узлуксизлик. Кантор теоремаси

1^0. Кўп ўзгарувчили функция узлуксизлиги тушунчаси. Фараз қилайлик, $f(x)=f(x_1,x_2,...,x_m)$ функция R^m фазодаги E тўпламда берилган бўлиб, $x^0\in E$ нуқта E тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

1–таъриф. Агар

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x^0) \tag{1}$$

бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада узлуксиз дейилади.

2–таъриф (Гейне). Агар

1) $\forall n\in N$ да $x^{(n)}\in E$;

2) $n\to\infty$ да $x^{(n)}\to x^0$

шартларни қаноатлантирувчи ихтиёрий $\{x^{(n)}\}$ кетма – кетлик учун

$$n\to\infty \text{ да } f(x^{(n)})\to f(x^0)$$

бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада узлуксиз дейилади.

3–таъриф (Коши). Агар

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\ \forall x\in E\cap U_\delta(x^0):\ |f(x)-f(x^0)|<\varepsilon$$

бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада узлуксиз дейилади.

Умуман, $u=f(x)$ функциянинг $x^0\in E$ нуқтадаги узлуксизлиги қуйидагини англатади:

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\ \forall x\in E\cap U_\delta(x^0),\ f(x)\in U_\varepsilon(f(x^0)).$$

Одатда, ушбу

$$\Delta u=f(x)-f(x^0) \qquad (x=(x_1,x_2,...,x_m),\ x^0=(x_1^0,...,x_k^0))$$

айирма, $u=f(x)$ функциянинг x^0 нуқтадаги орттирмаси (тўлиқ орттирмаси) дейилади.

Агар

$$\Delta x_1=x_1-x_1^0\ \ \Delta x_2=x_2-x_2^0,\ ...,\ \Delta x_m=x_m-x_m^0$$

дейилса, унда

$$\Delta u=f(x_1^0+\Delta x_1,\ x_2^0+\Delta x_2,\ ...,\ x_m^0+\Delta x_m)-f(x_1^0\ x_2^0\ ...,x_m^0)$$

бўлади. Юқоридаги (1) муносабатдан фойдаланиб қуйидаги тасдиқни айта оламиз:

$f(x)$ функциянинг x^0 нуқтада узлуксиз бўлиши учун

$$\lim_{x\to x_0}\Delta u=0, \text{ яъни } \lim_{\substack{\Delta x_1\to 0\\ \Delta x_2\to 0\\ \dots\\ \Delta x_m\to 0}}\Delta u=0$$

бўлиши зарур ва етарли.

4-таъриф. Агар $f(x)$ функция E тўпламнинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлса, функция шу E тўпламда узлуксиз дейилади.

Кўп ўзгарувчили функцияларда функциянинг нуқтадаги тўлиқ орттирмаси тушунчаси билан бир қаторда унинг хусусий орттирмалари тушунчалари ҳам киритилади.

Ушбу

$$\Delta_{x_1}u=f(x_1^0+\Delta x_1,x_2^0,x_3^0,\dots,x_m^0)-f(x_1^0,x_2^0,\dots,x_m^0),$$
$$\Delta_{x_2}u=f(x_1^0,x_2^0+\Delta x_2,x_3^0,\dots,x_m^0)-f(x_1^0,x_2^0,\dots,x_m^0),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\Delta_{x_m}u=f(x_1^0,x_2^0,\dots,x_{m-1}^0,x_m^0+\Delta x_m)-f(x_1^0,x_2^0,\dots,x_m^0)$$

айирмалар мос равишда $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтадаги $x_1,x_2,\dots,x_m$ ўзгарувчилар бўйича хусусий орттирмалари дейилади.

Равшанки,

$$\lim_{x\to x^0}\Delta u=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\lim\limits_{\Delta x_1\to 0}\Delta_{x_1}u=0\ ,\\ \lim\limits_{\Delta x_2\to 0}\Delta_{x_2}u=0\ ,\\ \dots\dots\dots\dots\\ \lim\limits_{\Delta x_m\to 0}\Delta_{x_m}u=0\end{cases}$$

бўлади. Бироқ, $\Delta x_k\to 0$да $\Delta_{x_k}u\to 0\ (k=1,2,\,.\,.,m)$ бўлишидан

$$\lim_{x\to x_0}\Delta u=0$$

бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди (бунга мисол кейинги пунктда келтирилади).

2^0. Узлуксиз функцияларнинг содда хоссалари. Фараз қилайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $E\subset R^m$ тўпламда берилган бўлиб, $x^0\in E$ нуқтада узлуксиз бўлсин. У ҳолда

$$C\cdot f(x),\ f(x)\pm g(x),\ f(x)\cdot g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}\quad \left(g(x^0)\neq 0\right)$$

функциялар ҳам x^0 нуқтада узлуксиз бўлади, бунда $C=const$.

Бу тасдиқнинг исботи [1] даги мос тасдиқнинг исботи кабидир.

Айтайлик,

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \varphi_1(t_1,t_2,\dots,t_k) = \varphi_1(t),\\
x_2 &= \varphi_2(t_1,t_2,\dots,t_k) = \varphi_2(t),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
x_m &= \varphi_m(t_1,t_2,\dots,t_k) = \varphi_m(t)
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

функцияларнинг ҳар бири $M \subset R^k$ тўпламда аниқланган бўлсин. Бу (2) муносабат натижасида M тўпламнинг ҳар бир $t=(t_1,t_2,\dots,t_k)$ нуқтасига мос келувчи R^m фазонинг $x=(x_1,x_2,\dots,x_m)$ нуқтаси ҳосил бўлади. Бундай нуқталар тўпламини E дейлик. Равшанки, $\mathrm{E} \subset R^m$ бўлади.

Фараз қилайлик, бу E тўпламда

$$u = f(x) = f(x_1,x_2,\dots,x_m)$$

функция аниқланган бўлсин. Натижада

$$t \in M \to x \in \mathrm{E} \to u \in R,$$

яъни

$$(t_1,t_2,\dots,t_k) \in M \to (x_1,x_2,\dots,x_m) \in \mathrm{E} \to u \in R$$

бўлиб,

$$u = f(x(t)) = f\big(\varphi_1(t_1,\dots,t_k),\varphi_2(t_1,\dots,t_k),\dots,\varphi_m(t_1,\dots,t_k)\big) = \Phi(t) = \Phi(t_1,t_2,\dots,t_k)$$

функция ҳосил бўлади. Уни мураккаб функция дейилар эди.

1-теорема. Агар

$$x_1 = \varphi_1(t),\ \ x_2 = \varphi_2(t),\dots, x_m = \varphi_m(t) \qquad (t=(t_1,\dots,t_k))$$

функциялар $t^0 = (t_1^0,\dots,t_k^0) \in M \subset R^k$ нуқтада узлуксиз, $u = f(x)$ функция $x^0 = (x_1^0,x_2^0,\dots,x_m^0) \in \mathrm{E} \subset R^m$ нуқтада $(x_1^0 = \varphi_1(t^0),\ x_2^0 = \varphi_2(t^0),\dots,x_m^0 = \varphi_m(t^0))$ узлуксиз бўлса, у ҳолда $f(x(t)) = f(\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_m)$ мураккаб функция t^0 нуқтада узлуксиз бўлади.

◁ Шартга кўра $f(x)$ функция x^0 нуқтада узлуксиз. Таърифга биноан

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \sigma > 0,\ \forall x \in \mathrm{E} \cap \tilde{U}_\sigma(x^0):\ \ \left|f(x) - f(x^0)\right| < \varepsilon \qquad (3)$$

бўлади. Равшанки.

$$\forall x \in \mathrm{E} \cap \tilde{U}_\sigma(x^0) \Rightarrow \left|x_i - x_i^0\right| < \sigma \qquad (i = 1,2,\dots,m) \qquad (4)$$

бўлади.

Шартга кўра $\varphi_i(t)$ $(i=1,2,\dots,m)$ функциялар t^0 нуқтада узлуксиз. Таърифга кўра $\delta > 0$ учун шундай $\delta_i > 0$ топиладики,

$$\forall t \in M \cap U_{\delta_i}(t^0): \left|\varphi_i(t) - \varphi_i(t^0)\right| < \delta_i$$

бўлади, $i = 1,2,\dots,m$

Энди $\min\{\delta_1,\delta_2,\dots,\delta_m\} = \delta$ деб оламиз. У ҳолда $\forall t \in M \cap U_\delta(t^0)$ ва барча $i = 1,2,\dots,m$ лар учун

$$\left|\varphi_i(t) - \varphi_i(t^0)\right| < \delta, \text{ яъни } \left|x_i - x_i^0\right| < \delta$$

бўлади. (3) ва (4) муносабатлардан $\forall t \in M \cap U_\delta(t^0)$ учун

$$|f(x(t)) - f(x(t_0))| < \varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, мураккаб $f(x(t))$ функция t^0 нуқтада узлуксиз. ▷

3⁰. Тўпламда узлуксиз бўлган функцияларнинг хоссалари. Энди тўпламда узлуксиз бўлган функцияларнинг хоссаларини келтирамиз.

2–теорема. Агар $f(x)$ функция чегараланган ёпиқ $E \subset R^m$ тўпламда узлуксиз бўлса, функция E да чегараланган бўлади.

◁ Айтайлик, функция шу E тўпламда чегараланмаган бўлсин. Унда

$$\forall n \in N, \ \exists x^{(n)} \in E : \left|f(x^{(n)})\right| \geq n \quad (n = 1,2,.....)$$

бўлади. Равшанки, $\left\{x^{(n)}\right\}$ кетма–кетлик чегараланган. Больцано–Вейерштрасс теоремасига кўра яқинлашувчи

$$\left\{x^{(n_k)}\right\} \qquad \left(x^{(n_k)} \in E, \ k = 1,2,.....\right)$$

қисмий кетма–кетлик мавжуд:

$$k \to \infty \text{ да } x^{(n_k)} \to x^0 \text{ ва } x^0 \in E.$$

Айни пайтда $f(x)$ функциянинг E да узлуксизлигидан

$$k \to \infty \text{ да } f(x^{(n_k)}) \to f(x^0) \ .$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса

$$k \to \infty \text{ да } \left|f(x^{(n_k)})\right| \geq n_k \to +\infty$$

дейилишига зид. Зиддият $f(x)$ функциянинг E да чегараланмаган дейилишидан келиб чиқди. Демак, $f(x)$ функция E да чегараланган.▷

3–теорема. Агар $f(x)$ функция чегаралган ёпиқ $E \subset R^m$ тўпламда узлуксиз бўлса, функция шу тўпламда ўзининг аниқ юқори ҳамда аниқ қуйи чегараларига эришади, яъни

$$\exists x^{(*)} \in E, \quad \sup_{x \in E}\{f(x)\} = f(x^{(*)})$$

$$\exists x^{(**)} \in E, \quad \inf_{x \in E}\{f(x)\} = f(x^{(**)})$$

бўлади.

◁ Юқоридаги теоремага кўра $f(x)$ функция E тўпламда чегараланган бўлади. Унда бу функция аниқ чегараларга эга:

$$\sup_{x \in E}\{f(x)\} = a, \quad \inf_{x \in E}\{f(x)\} = b$$

Аниқ юқори чегара таърифига кўра

$$\forall n \in N, \ \exists x^{(n)} \in E : a - \frac{1}{n} < f(x^{(n)}) \leq a \quad (n = 1,2,...)$$

бўлади. Равшанки, $\left\{x^{(n)}\right\}$ чегараланган кетма–кетлик бўлиб, ундан $\left\{x^{(n_k)}\right\}$ қисмий кетма–кетлик ажратиш мумкинки,

$$k \to \infty \text{ да } x^{(n_k)} \to x^{(*)} \text{ ва } x^{(*)} \in E. \qquad (5)$$

бўлади. Берилган функциянинг узлуксизлигидан фойдаланиб топмиз:

$$k \to \infty \text{ да } f(x^{(n_k)}) \to f(x^{(*)}).$$

Айни пайтда

$$\forall n \in N \text{ да } a - \frac{1}{n_k} < f(x^{(n_k)}) \le a$$

бўлиб, ундан $k \to \infty$ да

$$f(x^{(n_k)}) \to a \qquad (6)$$

бўлиши келиб чиқади.

(5) ва (6) муносабатлардан

$$f(x^{(*)}) = a = \sup\{f(x)\} \quad (x^* \in E)$$

бўлишини топамиз.

Худди шунга ўхшаш

$$f(x^{(**)}) = b = \inf\{f(x)\} \quad (x^{(**)} \in E)$$

бўлиши исботланади. ▷

4-теорема. Фараз қилайлик. $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функция боғламли $E \subset R^m$ тўпламда берилган бўлсин.

Агар

1) $f(x)$ функция E да узлуксиз

2) $a = (a_1, a_2, ..., a_m) \in E$, $b = (b_1, b_2, ..., b_m) \in E$

нуқталарда турли ишорали қийматларга эга

$$(f(a) > 0, f(b) < 0 \text{ ёки } f(a) < 0, f(b) > 0)$$

бўлса, у ҳолда шундай $c = (c_1, c_2, ..., c_m) \in E$ нуқта топиладики

$$f(c) = 0$$

бўлади.

◁ Айтайлик, $f(x)$ функция боғламли $E \subset R^m$ тўпламда узлуксиз бўлиб,

$$f(a) < 0, \ f(b) > 0$$

бўлсин.

E боғламли тўплам. Бинобарин, a ва b нуқталарни бирлаштирувчи ва шу тўпламга тегишли синиқ чизиқ топилади. Агар бу синиқ чизиқ учларини ифодаловчи нуқталарнинг бирида $f(x)$ функция нолга айланса теорема исботланади.

Агар синиқ чизиқ учларида $f(x)$ функция нолга айланмаса, у ҳолда синиқ чизиқнинг шундай кесмаси топиладики, унинг бир учи $a' = (a_1', a_2', ..., a_m')$ да $f(a') < 0$, иккинчи учи $b' = (b_1', b_2', ..., b_m')$ да $f(b') > 0$ бўлади.

Энди $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ ни шу кесма

$$x_1 = a_1' + t(b_1' - a_1'),\ x_2 = a_2' + t(b_2' - a_2'), ..., x_m = a_m' + t(b_m' - a_m')$$

$(0 = t \le 1)$ да қараймиз. Унда

$$f(a_1' + t(b_1' - a_1'),\ a_2' + t(b_2' - a_2'), \dots a_m' + t(b_m' - a_m')) = F(t)$$

бўлиб, битта t ўзгарувчига боғлиқ функция ҳосил бўлади. Бу функция $[0, 1]$ сегментда узлуксиз ва

$$F(0) = f(a') < 0 \quad , \ F(1) = f(b') > 0$$

бўлади. Унда [1] даги 16 – маърузада келтирилган теоремага кўра, шундай $t_0 \in (0,1)$ нуқта топиладики,

$$F(t_0) = 0$$

яъни

$$f(a_1' + t_\circ(b_1' - a_1'),\ a_2' + t_\circ(b_2' - a_2'), \dots a_m' + t_\circ(b_m' - a_m')) = 0$$

бўлади. Агар

$$c_1 = a_1' + t_\circ(b_1' - a_1'),\ c_2 = a_2' + t_\circ(b_2' - a_2'), \dots, c_m = a_m' + t_\circ(b_m' - a_m'))$$

дейилса, унда $c = (c_1, c_2, \dots, c_m) \in E$ нуқтада

$$f(c) = 0$$

бўлади. ▷

5–теорема. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция боғламли $E \subset R^m$ тўпламда берилган бўлсин. Агар

1) $f(x)$ функция E да узлуксиз,

2) $a \in E, b \in E$ нуқталарда $f(a) = A$, $f(b) = B$

қийматларга эга ва $A \ne B$ бўлса, у ҳолда А билан В орасида ҳар қандай С сон олинса ҳам, шундай $c \in E$ нуқта топиладики,

$$f(c) = C$$

бўлади.

◁ Бу теоремага юқоридаги 4 – теорема каби исботланади. ▷

4^0 Функциянинг текис узлуксизлиги. Кантор теоремаси. Айтайлик, $f(x)$ функция $E \subset R^m$ тўпламда берилган бўлсин.

5–таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ сон топилсаки,

$$\rho(x', x'') < \delta$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий $x' \in E, x'' \in E$ учун

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$. функция E тўпламда текис узлуксиз дейилади.

Агар $f(x)$ функция E тўпламда текис узлуксиз бўлса, у шу тўпламда узлуксиз бўлади.

◁ Ҳақиқатдан ҳам, юқоридаги таърифда x'' нуқта сифатида $x^0 \in E$ олинса, функциянинг x^0 нуқтада узлуксизлиги, бинобарин E тўпламда узлуксизлиги келиб чиқади. ▷

$f(x)$ функциянинг $E \subset R^m$ тўпламда текис узлуксиз эмаслиги қуйидагича:

$$\exists \varepsilon_0 > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists x' \in E,\ \exists x'' \in E,\ \rho(x', x'') < \delta : \left| f(x'') - f(x') \right| \geq \varepsilon_0$$

бўлади.

6–теорема. (Кантор). Агар $f(x)$ функция чегараланган ёпиқ $E \subset R^m$ тўпламда узлуксиз бўлса, функция шу тўпламда текис узлуксиз бўлади.

◁ Фараз қилайлик, $f(x)$ функция чегараланган ёпиқ $E \subset R^m$ тўпламда узлуксиз бўлиб, у шу тўпламда текис узлуксиз бўлмасин. Унда бирор $\varepsilon_0 > 0$ сон ва $\forall n \in N$ учун E тўпламда

$$\rho(x^{(n)}, y^{(n)}) < \frac{1}{n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи шундай

$$x^{(n)} \in E, \qquad y^{(n)} \in E$$

нуқталар топиладики,

$$\left| f(x^{(n)}) - f(y^{(n)}) \right| \geq \varepsilon_0$$

бўлади. Равшанки,

$$\left\{ x^{(n)} \right\} \qquad (x^{(n)} \in E,\ n = 1, 2, 3, \ldots)$$

кетма–кетлик чегараланган. Ундан яқинлашувчи қисмий кетма–кетлик ажратиш мумкин:

$$k \to \infty \text{ да } x^{(n_k)} \to x^0 \text{ ва } x^0 \in E.$$

Масофа хоссасидан фойдаланиб топамиз:

$$\rho(y^{(n_k)}, x^0) \leq \rho(y^{(n_k)}, x^{(n_k)}) + \rho(x^{(n_k)}, x^0) < \frac{1}{n_k} + \rho(x^{(n_k)}, x^0).$$

Кейинги муносабатдан, $k \to \infty$ да лимитга ўтиш билан

$$y^{(n_k)} \to x^0$$

бўлишини топамиз. $f(x)$ функция E тўпламда, жумладан $x^0 \in E$ нуқтада узлуксиз. Унда $k \to \infty$ да

$$f(x^{(n_k)}) \to f(x^0), \quad f(y^{(n_k)}) \to f(x^0)$$

бўлиб, ундан

$$f(x^{(n_k)}) - f(y^{(n_k)}) \to 0$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса

$$\left| f(x^{(n_k)}) - f(y^{(n_k)}) \right| \geq \varepsilon_0$$

деб қилинган фаразга зиддир. Демак, $f(x)$ функция E тўпламда текис узлуксиз. ▷

Айтайлик, R^m фазода бирор E тўплам берилган бўлсин, $E \subset R^m$. Ушбу

$$\alpha = \sup_{x' \in E,\, x'' \in E} \rho(x', x'')$$

миқдор E тўпламнинг диаметри дейилади ва $\alpha(E)$ каби белгиланади.

6–таъриф. $f(x)$ функция $E\subset R^m$ тўпламда аниқланган бўлсин. Унда

$$\omega(f,E)=\sup_{x'\in E,x''\in E}\left\{\left|f(x')-f(x'')\right|\right\}$$

сон $f(x)$ функциянинг E тўпламидаги тебраниши дейилади.

Натижа. $f(x)$ функция чегараланган ёпиқ $E\subset R^m$ тўпламда узлуксиз бўлса, у ҳолда $\forall\varepsilon>0$ сон учун шундай $\delta>0$ сон топиладики, E тўпламнинг диаметри δ дан кичик бўлган тўпламларга шундай ажратиш мумкинки,

$$\bigcup_k E_k=E,\ E_k\cap E_i=\phi\quad(k\neq i),$$

унда ҳар бир E_k да

$$\omega(f;E_k)\le\varepsilon$$

бўлади.

◁ Натижанинг шартидан $f(x)$ функциянинг E тўпламда текис узлуксизлиги келиб чиқади. Унда таърифга биноан $\forall\varepsilon>0$ учун шундай $\delta>0$ топиладики, $\rho(x',x'')<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий $x'\in E, x''\in E$ нуқталарда

$$\left|f(x'')-f(x')\right|<\varepsilon$$

бўлади.

Равшанки, $\forall x'\in E_k, \forall x''\in E_k$ нуқталар учун

$$\rho(x',x'')<\delta$$

тенгсизлик бажарилади. Демак,

$$\left|f(x'')-f(x')\right|<\varepsilon.$$

Кейинги тенгсизликдан

$$\sup_{x'\in E_k,x''\in E_k}\left\{\left|f(x')-f(x'')\right|\right\}\le\varepsilon,$$

яъни

$$\omega(f;E_k)\le\varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади. ▷

5^0 Хусусий ҳоллар. $m=1$ бўлганда $R^m=R$ ва бундаги тўпламда берилган функциянинг узлуксизлиги бир ўзгарувчили $u=f(x)$ функциянинг $(x\in R, u\le R)$ узлуксизлиги бўлиб, унинг хоссалари [1] да ўрганилган. $m=2$ бўлганда $R^m=R^2$ ва ундан M тўпламда берилган функциянинг узлуксизлиги, икки ўзгарувчили $u=f(x,y)$ функциянинг $\left((x,y)\in E\subset R^2, u\in R\right)$ узлуксизлиги бўлиб, унинг $(x_0,y_0)\in E$ нуқтадаги узлуксизлиги қуйидагича бўлади: Агар

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)\ \text{бўлса},$$

ёки

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall(x,y)\in E\cap U_\delta((x_0,y_0)):\ \left|f(x,y)-f(x_0,y_0)\right|<\varepsilon$$

бўлса, ёки

$$\forall n \in N \text{ да } (x_n, y_n) \in E \text{ бўлган ва } n \to \infty \text{ да}$$

$(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$ бўладиган ихтиёрий $\{(x_n, y_n)\}$ кетма-кетлик учун $f(x_n, y_n) \to f(x_0, y_0)$ бўлса, ёки

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = 0$$

бўлса, $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада узлуксиз бўлади.

1-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = x + y$$

функциянинг R^2 да узлуксиз бўлиши кўрсатилсин.

$\triangleleft$ $\forall \varepsilon > 0$ сонини оламиз. Унга кўра $\delta > 0$ сони $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ дейилса, у ҳолда

$$\rho((x, y), (x_0, y_0)) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall (x, y) \in R^2$ нуқталарда

$$|f(x, y) = f(x_0, y_0)| = |x + y - (x_0 + y_0)| \le |x - x_0| + |y - y_0| \le$$

$$\le 2\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < 2\delta = \varepsilon$$

бўлади. Бу эса таърифга кўра берилган функциянинг $\forall (x_0, y_0) \in R^2$ нуқтада узлуксиз бўлишини билдиради. $\triangleright$

Айтайлик, $f(x, y)$ функция $E \subset R^2$ тўпламда берилган бўлиб, $(x_0, y_0) \in E$ бўлсин. Маълумки, бу функциянинг тўлиқ орттирмаси

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0, \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0),$$

хусусий орттирмаси

$$\Delta_x f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$

$$\Delta_y f(x_0, y_0) = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0),$$

бўлади $((x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in E, (x_0 + \Delta x, y_0) \in E, (x_0, y_0 + \Delta y) \in E)$

Агар

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta_x f(x_0, y_0) = 0, \quad \left(\lim_{\Delta y \to 0} \Delta_y f(x_0, y_0) = 0 \right)$$

бўлса, $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада x ўзгарувчи бўлса (y ўзгарувчи бўйича) узлуксиз дейилади. Равшанки, $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада узлуксиз бўлса, функция шу нуқтада ҳар бир ўзгарувчиси бўйича узлуксиз бўлади.

Бироқ, $f(x, y)$ функциянинг (x_0, y_0) нуқтада ҳар бир ўзгарувчиси бўйича узлуксиз бўлишидан унинг шу нуқтада узлуксиз бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди

2-мисол. Ушбу

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & агар \quad x^2+y^2\neq 0 \;\; булса, \\ 0, & агар \quad x^2+y^2=0 \;\; булса \end{cases}$$

функция $(0,0)$ нуқтада узлуксизликка текширилсин.

◁ Берилган функциянинг $(0,0)$ нуқтадаги хусусий орттирмалари

$$\Delta_x f(0,0)=f(0+\Delta x,0)-f(0,0)=0\ ,$$
$$\Delta_y f(0,0)=f(0,0+\Delta y,)-f(0,0)=0$$

бўлиб

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta_x f(0,0)=0\ ,\quad \lim_{\Delta y\to 0}\Delta_y f(0,0)=0$$

бўлади. Демак, $f(x,y)$ функция $(0,0)$ нуқтада ҳар бир ўзгарувчиси бўйича узлуксиз.

Қаралаётган функциянинг $(0,0)$ нуқтадаги тўлиқ орттирмаси

$$\Delta f(0,0)=f(0+\Delta x\,,\,0+\Delta y)-f(0,0)=\frac{2\,\Delta x\cdot\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

бўлади. Ушбу

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta f(0,0)$$

лимит мавжуд бўлмайди, чунки

$$\begin{aligned}\Delta x&=\frac{1}{n}\to 0\\ \Delta y&=\frac{2}{n}\to 0\end{aligned}\qquad да \qquad \Delta f(0,0)=\frac{2\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^2}}=\frac{4}{5}\to\frac{4}{5}$$

$$\begin{aligned}\Delta x&=\frac{1}{n}\to 0\\ \Delta y&=\frac{2}{n}\to 0\end{aligned}\qquad да \qquad \Delta f(0,0)=\frac{2\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=1\to 1\ .$$

Демак, берилган функция $(0,0)$ нуқтада узлуксиз бўлмайди. ▷

3-мисол. Ушбу

$$f(x,y)=\frac{1}{\sin^2\pi x+\sin^2\pi y}$$

функциянинг узилиш нуқталари топилсин.

◁ Бу функция R^2 тўпламнинг

$$\sin\pi x=0\,,$$
$$\sin\pi y=0$$

системасини қаноатлантирувчи (x,y) нуқталарида узилишга эга бўлади. Равшанки, системанинг ечими

$$\{(x,y)\in R^2;\ x=n\in Z\,,\ y=m\in Z\}$$

тўплам нуқталаридан иборат. Демак, берилган функциянинг узилиш нуқталари чексиз кўп бўлиб, улар

$$\{(n,m)\in R^2\ ;\ n\in Z\ ,\ m\in Z\}$$

тўпламни ташкил этади. ▷

Машқлар

1. Агар бирор $E\subset R^m$ тўплам ва $x\in R^m$ учун

$$\rho(x,E)=\inf_{y\in E}\rho(x,y)$$

бўлса, ушбу

$$f(x)=\rho(x,E)$$

функциянинг R^m да узлуксиз бўлиши исботлансин.

2. Ушбу

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}\ , & агар\quad x^2+y^2>0\ \ булса,\\ 0, & агар\quad x=y=0\ \ булса\end{cases}$$

функция узлуксизликка текширилсин.

13-боб

Кўп ўзгарувчили функциянинг ҳосила ва дифференциаллари

59-маъруза

Кўп ўзгарувчили функциянинг хусусий ҳосилалари. Функциянинг дифференциалланувчилиги

1^0. Функциянинг хусусий ҳосилалари тушунчаси. Фараз қилайлик, $f(x)=f(x_1,x_2,...,x_m)$ функция $E\subset R^m$ тўпламда бериган бўлиб,

$$x^0=\left(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0\right)\in E,\ \left(x_1^0+\Delta x_1,x_2^0,...,x_m^0\right)\in E \qquad \left(\Delta x_1 \gtrless 0\right)$$

бўлсин. Бу функциянинг x_0 нуқтадаги x_1 ўзгарувчи бўйича хусусий ортирмаси

$$\Delta_{x_1} f\left(x^0\right)=f\left(x_1^0+\Delta x_1,x_2^0,...,x_m^0\right)-f\left(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0\right)$$

Δx_1 га боғлиқ бўлади.

1-таъриф. Ушбу

$$\lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{\Delta_{x_1} f\left(x^0\right)}{\Delta x_1}$$

лимит мавжуд бўлса, бу лимит $f(x)=f(x_1,x_2,...,x_m)$ функциянинг $x^0=\left(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0\right)$ нуқтадаги x_1 ўзгарувчиси бўйича хусусий ҳосиласи дейилади.

Уни

$$\frac{\partial f\left(x^0\right)}{\partial x_1} \text{ ёки } f'_{x_1}\left(x^0\right)$$

каби белгиланади:

$$\frac{\partial f\left(x^0\right)}{\partial x_1}=f'_{x_1}\left(x^0\right)=\lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{\Delta_{x_1} f\left(x^0\right)}{\Delta x_1}=$$

$$=\lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{f\left(x_1^0+\Delta x_1,x_2^0,...,x_m^0\right)-f\left(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0\right)}{\Delta x_1}$$

Берилган функциянинг бу хусусий ҳосиласини қуйидагича

$$f'_{x_1}\left(x^0\right)=\lim_{x_1\to x_1^0}\frac{f\left(x_1,x_2^0,...,x_m^0\right)-f\left(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0\right)}{\Delta x_1}$$

таърифласа ҳам бўлади.

Худди шунга ўхшаш $f(x_1,x_2,...,x_m)$ функциянинг бошқа $x_2,x_3,...,x_m$ ўзгарувчилари бўйича хусусий ҳосилалари таърифланади:

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2}=\lim_{\Delta x_2\to 0}\frac{\Delta_{x_2} f(x^0)}{\Delta x_2}=$$

$$=\lim_{\Delta x_2\to 0}\frac{f(x_1^0,x_2^0+\Delta x_2,x_3^0,...,x_m^0)-f(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)}{\Delta x_2}, ...$$

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_m}=\lim_{\Delta x_m\to 0}\frac{\Delta_{x_m} f(x^0)}{\Delta x_m}=$$

$$\lim_{\Delta x_m\to 0}\frac{f(x_1^0,x_2^0,...,x_{m-1}^0,x_m^0+\Delta x_m)-f(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)}{\Delta x_m}$$

Юқорида келтирилган таърифлардан кўп ўзгарувчили функциянинг хусусий ҳосилалари бир ўзгарувчили функциянинг ҳосиласи каби эканлиги кўринади. Демак, кўп ўзгарувчили функциянинг хусусий ҳосилаларини топишда маълум жадвал ва қоидалардан фойдаланиш мумкин. Жумладан, агар

$$f(x)=f(x_1,x_2,...,x_m) \quad , \quad g(x)=g(x_1,x_2,...,x_m)$$

функциялар $E\subset R^m$ тўпламда берилган бўлиб, $x\in E$ нуқтада хусусий ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда:

1) $\forall c\in R$: $\quad \dfrac{\partial(c f(x))}{\partial x_k}=c\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_k}$; $\quad (c=const)$

2) $\dfrac{\partial(f(x)+g(x))}{\partial x_k}=\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_k}+\dfrac{\partial g(x)}{\partial x_k}$;

3) $\dfrac{\partial(f(x)\cdot g(x))}{\partial x_k}=\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_k}g(x)+f(x)\dfrac{\partial g(x)}{\partial x_k}$;

4) $\dfrac{\partial\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)}{\partial x_k}=g^{-2}(x)\left(\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_k}g(x)-f(x)\dfrac{\partial g(x)}{\partial x_k}\right) \quad (g(x)\neq 0), \quad k=1,2,...,m$

бўлади.

2^0. Кўп ўзгарувчили функциянинг дифференциалланувчилиги. Зарурий шарт. Айтайлик, $f(x)=f(x_1,x_2,...,x_m)$ функция $E\subset R^m$ тўпламда берилган бўлиб,

$$x^0=(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)\in E,$$

$$(x_1^0+\Delta x_1,x_2^0+\Delta x_2,...,x_m^0+\Delta x_m)\in E$$

бўлсин. Маълумки, берилган функциянинг x^0 нуқтадаги тўлиқ орттирмаси

$$\Delta f(x^0)=f(x^0+\Delta x_1,x_2^0+\Delta x_2,...,x_m^0+\Delta x_m)-f(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)$$

бўлиб, у $\Delta x_1,\Delta x_2,...,\Delta x_m$ ларга боғлиқ бўлади.

2–таъриф. Агар $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_m$ орттирмаларга боғлиқ бўлмаган шундай $A_1, A_2, ..., A_m$ сонлари топилиб, функциянинг x^0 нуқтадаги тўла орттирмаси ушбу

$$\begin{aligned}\Delta f\left(x^0\right) = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + ... + A_m \Delta x_m + \\ + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + ... + \alpha_m \Delta x_m\end{aligned} \tag{1}$$

кўринишда ифодаланса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада дифференциалланувчи дейилади, бунда $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ лар $\Delta x_1 \to 0, \Delta x_2 \to 0, ..., \Delta x_m \to 0$ да чексиз кичик миқдорлар.

Агар $\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0\right)$ ҳамда $\left(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, ..., x_m^0 + \Delta x_m\right)$ нуқталар орасидаги масофа

$$\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + ... + \Delta x_m^2}$$

учун, $\Delta x_1 \to 0$, $\Delta x_2 \to 0$, ..., $\Delta x_m \to 0$ да

$$\alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + ... + \alpha_m \Delta x_m = 0(\rho)$$

бўлишини эътиборга олсак, (1) муносабат ушбу

$$\Delta f\left(x^0\right) = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + ... + A_m \Delta x_m + 0(\rho) \tag{2}$$

кўринишга келади.

Одатда, (1) ва (2) муносабатлар $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтада дифференциалланувчи шарти дейилади.

1–мисол. Ушбу

$$f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_m) = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_m^2$$

функциянинг $\forall\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0\right) \in R^m$ нуқтада дифференциалланувчи бўлиши кўрсатилсин.

◁ Берилган функциянинг $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0\right)$ нуқтадаги тўла орттирмасини топамиз:

$$\begin{aligned}\Delta f\left(x^0\right) = \left(x_1^0 + \Delta x_1\right)^2 + \left(x_2^0 + \Delta x_2\right)^2 + ... + \left(x_m^0 + \Delta x_m\right)^2 - \\ - \left(x_1^{0^2} + x_2^{0^2} + ... + x_m^{0^2}\right) = 2x_1^0 \Delta x_1 + 2x_2^0 \Delta x_2 + ... + \\ + 2x_m^0 \Delta x_m + \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + ... + \Delta x_m^2\end{aligned}$$

Агар

$$A_1 = 2x_1^0, A_2 = 2x_2^0, ..., A_m = 2x_m^0,$$
$$\alpha_1 = \Delta x_1, \alpha_2 = \Delta x_2, ..., \alpha_m = \Delta x_m$$

дейилса, унда

$$\Delta f\left(x^0\right) = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + ... + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + ... + \alpha_m \Delta x_m$$

бўлади. Демак, берилган функция $\forall x^0 \in R^m$ нуқтада дифференциалланувчи. ▷

Агар $f(x)$ функция $E\subset R^m$ тўпламнинг ҳар бир нуқтасида дифференциалланувчи бўлса, функция E тўпламда дифференциалланувчи дейилади.

1–теорема. Агар $f(x)$ функция $x^0\in E\subset R^m$ нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда функция шу нуқтада узлуксиз бўлади.

◁ Шартга кўра $f(x)$ функция x^0 нуқтада дифференциалланувчи. Демак, функциянинг шу нуқтадаги тўла орттирмаси

$$\Delta f\left(x^0\right)=A_1\Delta x_1+A_2\Delta x_2+....+A_m\Delta x_m+\alpha_1\Delta x_1+\alpha_2\Delta x_2+...+\alpha_m\Delta x_m$$

бўлади. Бу тенгликдан

$$\lim_{\substack{\Delta x_1\to 0\\ \Delta x_2\to 0\\ \cdots\cdots\\ \Delta x_m\to 0}} f(x)=0$$

бўлишини топамиз. Демак, $f(x)$ функция x^0 нуқтада узлуксиз. ▷

2–теорема. Агар $f(x)$ функция x^0 нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда функция шу нуқтада барча хусусий ҳосилаларга эга ва

$$f'_{x_1}\left(x^0\right)=A_1,\ f'_{x_2}\left(x^0\right)=A_2,...,\ f'_{x_m}\left(x^0\right)=A_m$$

бўлади.

◁ Шартга кўра $f(x)$ функция x^0 нуқтада дифференциалланувчи. Бинобарин, (1) шарт бажарилади.

Унда

$$\Delta x_1\neq 0\ ,\ \Delta x_2=\Delta x_3=...=\Delta x_m=0$$

деб олинса қуйидаги

$$\Delta_{x_1}f\left(x^0\right)=A_1\ \Delta x_1+\alpha_1\Delta x_1$$

тенглик ҳосил бўлади. Бу тенгликдан топамиз:

$$\lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{\Delta_{x_1}f\left(x^0\right)}{\Delta x_1}=\lim_{\Delta x_1\to 0}\left(A_1+\alpha_1\right)=A_1.$$

Демак,

$$f'_{x_1}\left(x^0\right)=A_1.$$

Худди шунга ўхшаш $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтада $f'_{x_2}\left(x^0\right), f'_{x_3}\left(x^0\right),..., f'_{x_m}\left(x^0\right)$ хусусий ҳосилаларнинг мавжудлиги ҳамда

$$f'_{x_2}\left(x^0\right)=A_2,\ f'_{x_3}\left(x^0\right)=A_3,...,f'_{x_m}\left(x^0\right)=A_m$$

бўлиши кўрсатилади. ▷

Бу теоремадан x^0 нуқтада дифференциалланувчи $f(x)$ функциянинг орттирмаси учун

$$\Delta f\left(x^0\right)=f'_{x_1}\left(x^0\right)\cdot\Delta x_1+f'_{x_2}\left(x^0\right)\Delta x_2+...+f'_{x_m}\left(x^0\right)\Delta x_m+0(\rho)$$

бўлиши келиб чиқади.

Эслатма. $f(x)$ функциянинг бирор x^0 нуқтада барча хусусий ҳосилалари

$$f'_{x_1}(x^0),\ f'_{x_2}(x^0),\ f'_{x_3}(x^0),\ldots,f'_{x_m}(x^0)$$

нинг мавжуд бўлишидан, унинг шу нуқтада дифференциалланувчи бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди. (бунга мисол кейинги пунктда келтирилади).

Юқорида келтирилган 2–теорема ва эслатмадан $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтада барча хусусий ҳосилаларга эга бўлиши функциянинг шу нуқтада дифференциалланувчи бўлишининг зарурий шарти эканлиги келиб чиқади.

3^0. Функция дифференциалланувчилигининг етарли шарти. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $E\subset R^m$ тўпламда берилган бўлиб, $U_\delta(x^0)\subset E$ бўлсин $(\delta>0)$.

3–теорема. Агар $f(x)$ функция $U_\delta(x^0)$да барча хусусий ҳосилаларга эга бўлиб, бу хусусий ҳосилалар x^0 нуқтада узлуксиз бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада дифференциалланувчи бўлади.

◁Ушбу

$$(x_1^0+\Delta x_1,\ x_2^0+\Delta x_2,\ldots,x_m^0+\Delta x_m)\in U_\delta(x^0)$$

нуқтани олиб, берилган функциянинг $x^0=(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_m^0)$ нуқтадаги тўла орттирмасини топамиз:

$$\Delta f(x^0)=f(x_1^0+\Delta x_1,x_2^0+\Delta x_2,\ldots,x_m^0+\Delta x_m)-f(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_m^0)$$

Бу орттирмани қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\begin{aligned}\Delta f(x^0)=&\left[f(x_1^0+\Delta x_1,x_2^0+\Delta x_2,\ldots,x_m^0+\Delta x_m)-f(x_1^0,x_2^0+\Delta x_2,\ldots,x_m^0+\Delta x_m)\right]+\\&+\left[f(x_1^0,x_2^0+\Delta x_2,\ldots,x_m^0+\Delta x_m)-f(x_1^0,x_2^0,x_3^0+\Delta x_3,\ldots,x_m^0+\Delta x_m)\right]+\\&+\ldots+\left[f(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_{m-1}^0,x_m^0+\Delta x_m)-f(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_m^0)\right]\end{aligned}\tag{3}$$

Лагранж теоремасидан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned}&f(x_1^0+\Delta x_1,x_2^0+\Delta x_2,\ldots,x_m^0+\Delta x_m)-f(x_1^0,x_2^0+\Delta x_2,\ldots,x_m^0+\Delta x_m)=\\&\qquad=f'_{x_1}(x_1^0+\theta_1\cdot\Delta x_1,x_2^0+\Delta x_2,\ldots,x_m^0+\Delta x_m)\cdot\Delta x_1,\\&f(x_1^0,x_2^0+\Delta x_2,\ldots,x_m^0+\Delta x_m)-f(x_1^0,x_2^0,x_3^0+\Delta x_3,\ldots,x_m^0+\Delta x_m)=\\&\qquad=f'_{x_2}(x_1^0,x_2^0+\theta_2\cdot\Delta x_2,x_3^0+\Delta x_3,\ldots,x_m^0+\Delta x_m)\cdot\Delta x_2;\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&f(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_{m-1}^0,x_m^0+\Delta x_m)-f(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_m^0)=\\&\qquad=f'_{x_m}(x_1^0,x_2^0,\ldots,x'_{m-1},x_m^0+\theta_m\Delta x_m)\cdot\Delta x_m\end{aligned}\tag{4}$$

$(0<\theta_k<1\ ,\ k=1,2,\ldots,m)$

Шартга кўра $f'_{x_1}, f'_{x_2}, ..., f'_{x_m}$ хусусий ҳосилалар $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ нуқтада узлуксиз. Унда

$$\begin{aligned} &f'_{x_1}(x_1^0 + \theta_1 \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, ..., x_m^0 + \Delta x_m) = f'_{x_1}(x^0) + \alpha_1, \\ &f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0 + \theta_2 \Delta x_2, x_3^0 + \Delta x_3, ..., x_m^0 + \Delta x_m) = f'_{x_2}(x^0) + \alpha_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &f'_{x_m}(x_1^0, x_2^0, ..., x_{m-1}^0, x_m^0 + \theta_m \Delta x_m) = f'_{x_m}(x^0) + \alpha_m, \end{aligned} \tag{5}$$

бўлади. Бунда

$$\Delta x_1 \to 0, \ \Delta x_2 \to 0, ..., \Delta x_m \to 0 \quad да \quad \alpha_1 \to 0, \ \alpha_2 \to 0, ..., \alpha_m \to 0$$

Юқоридаги (3), (4) ва (5) муносабатлардан

$$\Delta f(x^0) = f'_{x_1}(x^0)\Delta x_1 + f'_{x_2}(x^0)\Delta x_2 + ... + f'_{x_m}(x^0)\Delta x_m + \\ + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + ... + \alpha_m \Delta x_m$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $f(x)$ функция x^0 нуқтада дифференциалланувчи. ▷

Бу теорема $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтада дифференциалланувчи бўлишининг етарли шартини ифодалайди.

4°. Мураккаб функциянинг дифференциалланувчилиги, мураккаб функциянинг ҳосиласи. Айтайлик, ушбу

$$\begin{aligned} &x_1 = \varphi_1(t) = \varphi_1(t_1, t_2, ..., t_k), \\ &x_2 = \varphi_2(t) = \varphi_2(t_1, t_2, ..., t_k), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &x_m = \varphi_m(t) = \varphi_m(t_1, t_2, ..., t_k), \end{aligned}$$

функцияларнинг ҳар бир $M \subset R^m$ тўпламда,

$$u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$$

функция эса

$$E = \{ (x_1, x_2, ..., x_m) \in R^m ; x_1 = \varphi(t), \ x_2 = \kappa_2(t), ..., x_m = \varphi_m(t) \}$$

тўпламда берилган бўлсин. Бу ҳолда

$$f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)) = F(t_1, t_2, ..., t_k)$$

мураккаб функцияга эга бўламиз:

4-теорема. Агар $x_i = \varphi_i(t_1, t_2, ..., t_k)$ функциянинг ҳар бири $(i = 1, 2, ... m)$, $(t_1^0, t_2^0, ..., t_k^0) \in M$ нуқтада дифференциалланувчи бўлиб, $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функция мос $(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ нуқтада

$$(x_1^0 = \varphi_1(t_1^0, t_2^0, ..., t_k^0), \ x_2^0 = \varphi_2(t_1^0, ..., t_k^0), ..., \ x_m^0 = \varphi_m(t_1^0, ..., t_k^0))$$

дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда мураккаб

$$f(\varphi_1(t_1, ..., t_k) \ \varphi_2(t_1, ..., t_k), ..., \varphi_m(t_1, ..., t_k))$$

функция $(t_1^0, t_2^0, ..., t_k^0)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлади.

◁ $(t_1^0, t_2^0, ..., t_k^0) \in M$ нуқтанинг координаталарига мос равишда $\Delta t_1, \Delta t_2, ..., \Delta t_k$ орттирмалар берайликки

$$\left(t_1^0+\Delta t_1, t_2^0+\Delta t_2,\dots,t_k^0+\Delta t_k\right)\in M$$

бўлсин. Унда ҳар бир $x_i=\varphi_i(t_1,t_2,\dots,t_k)$ функция $(i=1,2,\dots,m)$ ҳам Δx_i $(i=1,2,\dots,m)$ орттирмаларга ва ниҳоят $f(x)$ функция Δf орттирмага эга бўлади.

Шартга кўра $x_i=\varphi_i(t_1,t_2,\dots,t_k)$ функцияларнинг ҳар бири $\left(t_1^0,t_2^0,\dots,t_k^0\right)$ нуқтада дифференциалланувчи. Демак,

$$\begin{aligned}
\Delta x_1&=\frac{\partial x_1}{\partial t_1}\Delta t_1+\frac{\partial x_1}{\partial t_2}\Delta t_2+\dots+\frac{\partial x_1}{\partial t_k}\Delta t_k+0(\rho),\\
\Delta x_2&=\frac{\partial x_2}{\partial t_1}\Delta t_1+\frac{\partial x_2}{\partial t_2}\Delta t_2+\dots+\frac{\partial x_2}{\partial t_k}\Delta t_k+0(\rho),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\Delta x_m&=\frac{\partial x_m}{\partial t_1}\Delta t_1+\frac{\partial x_m}{\partial t_2}\Delta t_2+\dots+\frac{\partial x_m}{\partial t_k}\Delta t_k+0(\rho)
\end{aligned}\tag{6}$$

бўлади, бунда

$$\frac{\partial x_i}{\partial t_j}\qquad (i=1,2,\dots,m;\ \ j=1,2,\dots,k)$$

хусусий ҳосилаларнинг $\left(t_1^0,t_2^0,\dots,t_k^0\right)$ нуқтадаги қийматлари олинган ва

$$\rho=\sqrt{\Delta t_1^2+\Delta t_2^2+\dots+\Delta t_k^2}$$

Шартга кўра $f(x_1,x_2,\dots,x_m)$ функция $\left(x_1^0,x_2^0,\dots,x_m^0\right)$ нуқтада дифференциалланувчи. Демак,

$$\Delta f=\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_m}\Delta x_m+\alpha_1\Delta x_1+\alpha_2\Delta x_2+\dots+\alpha_m\Delta x_m \tag{7}$$

бўлади, бунда $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $(i=1,2,\dots,m)$ хусусий ҳосилаларнинг $\left(x_1^0,x_2^0,\dots,x_m^0\right)$ нуқтадаги қийматлари олинган ва

$$\Delta x_1\to 0\,,\ \Delta x_2\to 0\,,\dots,\ \Delta x_m\to 0\quad да\quad \alpha_1\to 0,\ \alpha_2\to 0\,,\dots,\alpha_m\to 0\,.$$

(6), (7) муносабатлардан топамиз:

$$\begin{aligned}
\Delta f&=\frac{\partial f}{\partial x_1}\left[\frac{\partial x_1}{\partial t_1}\Delta t_1+\frac{\partial x_1}{\partial t_2}\Delta t_2+\dots+\frac{\partial x_1}{\partial t_k}\Delta t_k+0(\rho)\right]+\\
&+\frac{\partial f}{\partial x_2}\left[\frac{\partial x_2}{\partial t_1}\Delta t_1+\frac{\partial x_2}{\partial t_2}\Delta t_2+\dots+\frac{\partial x_2}{\partial t_k}\Delta t_k+0(\rho)\right]+\\
&+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_m}\left[\frac{\partial x_m}{\partial t_1}\Delta t_1+\frac{\partial x_m}{\partial t_2}\Delta t_2+\dots+\frac{\partial x_m}{\partial t_k}\Delta t_k+0(\rho)\right]=
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x\cdot 0}{\Delta x^3}=0,$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{2\Delta y\cdot 0}{\Delta y^3}=0. \ \triangleright$$

4-мисол. Ушбу

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

функциянинг хусусий ҳосилалари топилсин.

$\triangleleft$ Айтайлик, $(x,y)\neq(0,0)$ бўлсин. Бу ҳолда

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2}=\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

бўлади.

Айтайлик, $(x,y)=(0,0)$ бўлсин. Таърифга кўра

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{|\Delta y|}{\Delta y}$$

бўлиб, бу лимитлар мавжуд бўлмаганлиги сабабли берилган функция $(0,0)$ нуқтада хусусий ҳосилаларга эга бўлмайди.

5-мисол. Ушбу

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}, & \text{агар} \quad (x,y)\neq(0,0) \ \text{булса},\\ 0, & \text{агар} \quad (x,y)=(0,0) \ \text{булса}\end{cases}$$

функциянинг $(0,0)$ нуқтадаги хусусий ҳосилалари топилсин.

$\triangleleft$Таърифга кўра

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0,$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0$$

бўлади. Бироқ берилган функция $(0,0)$ нуқтада узлуксиз бўлмайди, чунки

$$\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^3}\right)\to(0,0) \ \text{да}$$

$$f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^3}\right)=\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}\neq f(0,0). \ \triangleright$$

6-мисол. Ушбу

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{ агар } & (x,y)\neq(0,0) \text{ булса,} \\ 0 \quad , \text{ агар } & (x,y)=(0,0) \text{ булса} \end{cases}$$

функциянинг $(0,0)$ нуқтада хусусий ҳосилаларнинг мавжудлиги ҳамда шу нуқтада дифференциалланувчи эмаслиги кўрсатилсин.

◁ Равшанки,

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y,)-f(0,0)}{\Delta y}=0$$

Демак, берилган функциянинг $(0,0)$ нуқтада хусусий ҳосилалари мавжуд ва улар 0 га тенг.

Бу функция $(0,0)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлмайди. Шуни исботлаймиз.Тескарисини фараз қилайлик, қаралаётган функция $(0,0)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлсин.

$$\Delta f(0,0)=\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}\Delta y+\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y=$$

$$=\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y\ . \qquad (\Delta x\to 0,\ \Delta y\to 0 \text{ да } \alpha_1\to 0\ ,\ \alpha_2\to 0)$$

Айни пайтда

$$\Delta f(0,0)=f(0+\Delta x,\ 0+\Delta y)-f(0,0)=f(\Delta x,\Delta y)=$$

$$=\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

бўлади. Демак,

$$\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y.$$

Бу тенгликдан, $\Delta x=\Delta y>0$ бўлганда

$$\alpha_1+\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса $\Delta x=\Delta y>0$ да $\alpha_1\to 0,\alpha_2\to 0$ бўлишиги зид. Демак, берилган функция $(0,0)$ нуқтада дифференциалланувчи эмас. ▷

7-мисол. Агар $f(x,y)$ функция R^2 да дифференциалланувчи бўлиб, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ бўлса, $\dfrac{\partial f}{\partial r},\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}$ лар топилсин.

Равшанки,

$$f(x,y)=f(r\cos\varphi,r\sin\varphi).$$

Мураккаб функциянинг хусусий ҳосилаларини топиш коидасига кўра

$$\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi}=-r\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial x}+r\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial y}=-y\frac{\partial f}{\partial x}+x\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Машқлар

1. Ушбу

$$f(x,y)=(\frac{y}{x})^x, \qquad f(x,y)=\ln\sin\frac{x+1}{\sqrt{y}}$$

функцияларнинг хусусий ҳосилалари топилсин.

2. Агар

$$f(x,y)=x\sin y+y\sin x, \qquad x=\frac{u}{v},\ y=u\cdot v$$

бўлса, $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$ лар топилсин.

3. Айтайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $U_\delta(x^0)\subset R^m$ да аниқланган бўлиб,

   1) $f(x)$ функция x^0 нуқтада дифференциалланувчи ва $f(x^0)=0$

   2) $g(x)$ функция x^0 нуқтада узлуксиз бўлса, $f(x)\cdot g(x)$ функциянинг x^0 нуқтада дифференциалланувчи бўлиши кўрсатилсин.

4. Ушбу

$$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$$

функциянинг $(0,0)$ нуқтада дифференциалланувчи эмаслиги исботлансин.

60–маъруза

Ўрта қиймат ҳақида теорема. Йўналиш бўйича ҳосила

1⁰. Ўрта қиймат ҳақида теорема. Фараз қилайлик $f(x)=f(x_1,x_2,...,x_m)$ функция $E\subset R^m$ тўпламда берилган бўлсин. Шу E тўпламда шундай

$$a=(a_1,a_2,...,a_m),\qquad b=(b_1,b_2,...,b_m)$$

нуқталарни қараймизки, бу нуқталарни бирлаштирувчи тўғри чизиқ кесмаси E тўпламга тегишли бўлсин.

Равшанки, бу кесма ушбу

$$K=\{(x_1,x_2,...,x_m)\in R^m: x_1=a_1+t(b_1-a_1), x_2=a_2+$$
$$+t(b_2-a_2),...,x_m=a_m+t(b_m-a_m)\}$$

нуқталар тўплами билан ифодаланади: $K\subset E$

1–теорема. Агар $f(x)$ функция K кесманинг a ва b нуқталарида узлуксиз бўлиб, кесманинг қолган барча нуқталарида дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда K кесмада шундай $c=(c_1,c_2,...,c_m)$ нуқта топилдики,

$$f(b)-f(a)=f'_{x_1}(c)(b_1-a_1)+f'_{x_2}(c)(b_2-a_2)+....\qquad(1)$$
$$+f'_{x_m}(c)(b_m-a_m)$$

бўлади.

◄$f(x)$ функция $K\subset E$ кесмада қуйидаги

$$f(x)=f(x_1,x_2,....,x_m)=$$
$$=f(a_1+t(b_1-a_1),a_2+t(b_2-a_2),....,a_m+t(b_m-a_m))\quad(0\le t\le 1)$$

кўринишда бўлади. Бу t ўзгарувчининг функциясини $F(t)$ билан белгилайлик:

$$F(t)=f(a_1+t(b_1-a_1),a_2+t(b_2-a_2),....,a_m+t(b_m-a_m)).$$

Равшанки, $F(t)$ функция $[0,1]$ сегментда узлуксиз бўлиб, $(0,1)$ да

$$F'(t)=f'_{x_1}\cdot(b_1-a_1)+f'_{x_2}\cdot(b_2-a_2)+....+f'_{x_m}\cdot(b_m-a_m)$$

ҳосилага эга бўлади. Бунда $f'_{x_1},f'_{x_2},....,f'_{x_m}$ хусусий ҳосилаларнинг

$$(a_1+t(b_1-a_1),a_2+t(b_2-a_2),....,a_m+t(b_m-a_m))$$

нуқтадаги қийматлари олинган.

Лагранж теоремасидан фойдаланиб топамиз:

$$F(1)-F(0)=F'(t_0)\qquad(0<t_0<1).\qquad(2)$$

Агар

$$F(0)=f(a)\qquad F(1)=f(b)\qquad(3)$$

ҳамда

$$F'(t_o)=f'_{x_1}\left(a_1+t_o(b_1-a_1),\quad a_2+t_o(b_2-a_2),\ldots\ldots,a_m+t_o(b_m-a_m)\right)\cdot$$
$$\cdot(b_1-a_1)+f'_{x_2}\left(a_1+t_o(b_1-a_1),a_2+t_o(b_2-a_2),\ldots,a_m+t_o(b_m-a_m)\right)\cdot \qquad (4)$$
$$\cdot(b_2-a_2)+\ldots+f'_{x_m}\left(a_1+t_o(b_1-a_1),\ldots,a_m+t_o(b_m-a_m)\right)\cdot(b_m-a_m)$$

бўлишини эътиборга олсак, сўнг ушбу

$$a_1+t_o(b_1-a_1)=c_1,$$

$$a_2+t_o(b_2-a_2)=c_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_m+t_o(b_m-a_m)=c_m,$$

белгилашларини бажарсак, унда

$$c=(c_1,c_2,\ldots,c_m)\in K$$

бўлиб, (2), (3), (4) муносабатдан

$$f(b)-f(a)=$$
$$=f'_{x_1}(c)\cdot(b_1-a_1)+f'_{x_2}(c)\cdot(b_2-a_2)+\ldots+f'_{x_m}(c)\cdot(b_m-a_m)$$

бўлиши келиб чиқади. ▶

Одатда, (1) формула Лагранжнинг чекли орттирмалар формуласи дейилади.

2^0. Хусусий ҳоллар. Йўналиши бўйича ҳосила.

$m=1$ бўлганда юқоридаги теоремада келтирилган формула

$$f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$$

$(a\in R, b\in R,\ a<c<b)$ кўринишга келади. Бу Лагранж теоремаси ифодаловчи формула бўлиб, [1] да ўрганилган.

$m=2$ бўлганда (1) формула

$$f(b)-f(a)=f'_x(c)\cdot(b_1-a_1)+f'_y(c)(b_2-a_2)$$
$$\left(b=(b_1,b_2)\in R^2\quad a=(a_1,a_2)\in R^2\quad c=(c_1,c_2)\in R^2\right)$$

кўринишида бўлади.

Маълумки, $u=f(x)$ $(x\in R,\ u\in R)$ функциянинг ҳосиласи $f'(x)$ шу функциянинг ўзгаришини (ўзгариш тезлигини) ифодалар эди. $u=f(x,y)$ $\left((x,y)\in R^2,\ u\in R\right)$ икки ўзгарувчили функциянинг $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ хусусий ҳосилалари функциянинг мос равишда OX ҳамда OY ўқлар бўйича ўзгариш тезлигини билдиради. Бошқача айтганда $f(x,y)$ функциянинг хусусий ҳосилалари координата ўқлари йўналиши бўйича ҳосилалар бўлади.

Энди $f(x,y)$ функциянинг текисликдаги ихтиёрий тайин йўналиши бўйича ҳосиласи тушунчасини келтирамиз.

Фараз қилайлик, $f(x,y)$ функция $E\subset R^2$ тўпламда берилган бўлсин. Бу функцияни Декарт координаталар системасида тасвирланган $A_0=(x_0,y_0)$ нуқтанинг $U_\delta(A_0)\subset E$ $(\delta>0)$ атрофида қараймиз. Ушбу $A=(x,y)\subset U_\delta(A_0)$ нуқтани олиб, A_0 ва A нуқталари орқали тўғри чизиқ ўтказамиз. Ундаги икки йўналишдан бирини мусбат йўналиш (1 – чизмада кўрсатилгандек), иккинчисини эса манфий йўналиш деб қабул қиламиз. Бу йўналган тўғри чизиқни l билан белгилаймиз. A_0 ва A нуқталар орасидаги масофа

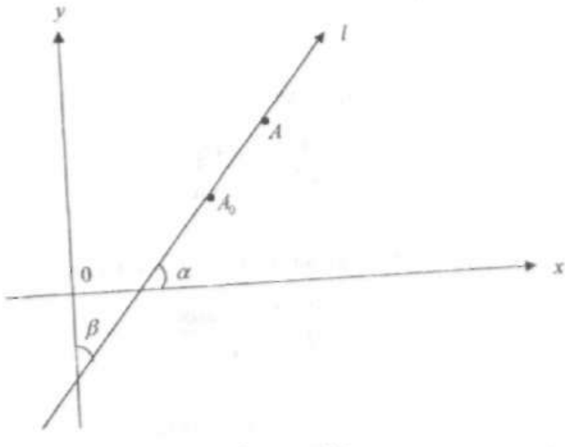
$$\rho=\rho(A_0,A)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

бўлиб, у агар $\overline{A_0A}$ векторнинг йўналиши l нинг йўналиши билан бир ҳил бўлса, мусбат ишора билан акс ҳолда манфий ишора билан олинади.

Агар l нинг мусбат йўналиши билан OX ва OY координата ўқларининг мусбат йўналишилари орасидаги бурчакни мос равишда α ва β дейилса, (1 – чизма) унда

$$\frac{x-x_0}{\rho}=\cos\alpha\ ,\ \frac{y-y_0}{\rho}=\cos\beta$$

бўлиши топилади.



1 – чизма

1–таъриф. Агар

$$\lim_{A\to A_0}\frac{f(A)-f(A_0)}{\rho}$$

лимит мавжуд бўлса, бу лимит $f(x,y)$ функциянинг $A_0=(x_0,y_0)$ нуқтадаги l йўналиш бўйича ҳосила дейилади. Уни

$$\frac{\partial f(A_0)}{\partial l}\ \text{ёки}\ \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l}$$

каби белгиланади. Демак,

$$\frac{\partial f(A_0)}{\partial l}=\lim_{A\to A_0}\frac{f(A)-f(A_0)}{\rho}$$

1-мисол. Ушбу

$$f(x,y)=\sqrt[3]{x^2 y}$$

функциянинг $(0,0)$ нуқтада барча йўналишлар бўйича ҳосилаларининг мавжудлиги кўрсатилган.

◀Айтайлик, $\alpha\neq\pm\frac{\pi}{2}$ бўлсин. Бу ҳолда

$$y=tg\,\alpha\cdot x$$

бўлиб,

$$f(x,y)=\sqrt[3]{x^3\,tg\,\alpha}=x\sqrt[3]{tg\,\alpha}$$

$$\rho\left((x,y),(0,0)\right)=\sqrt{x^2+x^2\,tg^2\alpha}=|x|\,\sqrt{1+tg^2\alpha}$$

бўлади. Унда берилган функциянинг $(0,0)$ нуқтадаги $\alpha\neq\pm\frac{\pi}{2}$ бўлган ихтиёрий йўналиш бўйича ҳосиласи, таърифга биноан

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial l}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\sqrt[3]{tg\alpha}\cdot x}{\sqrt{1+tg^2\alpha}\cdot|x|}$$

бўлади.

Агар $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ бўлса, унда $x>0$, $|x|=x$ бўлиб,

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial l}=\frac{\sqrt[3]{tg\alpha}}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$$

бўлади.

Агар $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ бўлса, унда $x<0$, $|x|=-x$ бўлиб,

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial l}=-\frac{\sqrt[3]{tg\alpha}}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$$

Айтайлик, $\alpha=\pm\frac{\pi}{2}$ бўлсин. Бу ҳолда $x=0$, $f(0,y)=0$ бўлиб, бу йўналишлар бўйича ҳосила

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial l}=0$$

бўлади.▶

1-теорема. Агар $f(x,y)$ функция $A_0=(x_0,y_0)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда функция шу нуқтада ҳар қандай йўналиш бўйича ҳосилага эга ва

$$\frac{\partial f(A_0)}{\partial l}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\cos\beta \qquad (5)$$

бўлади.

◀Айтайлик, $f(x,y)$ функция $A_0=(x_0,y_0)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда

$$f(A)-f(A_0)=f(x,y)-f(x_0,y_0)$$

орттирма учун

$$f(A)-f(A_0)=\frac{\partial f(A_0)}{\partial x}\cdot(x-x_0)+\frac{\partial f(A_0)}{\partial y}\cdot(y-y_0)+o(\rho)$$

бўлади, бунда

$$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

Кейинги тенгликнинг ҳар икки томонини ρ га бўламиз:

$$\frac{f(A)-f(A_0)}{\rho}=\frac{\partial f(A_0)}{\partial x}\cdot\frac{x-x_0}{\rho}+\frac{\partial f(A_0)}{\partial y}\cdot\frac{y-y_0}{\rho}+\frac{o(\rho)}{\rho}$$

Маълумки,

$$\frac{x-x_0}{\rho}=\cos\alpha \quad , \quad \frac{y-y_0}{\rho}=\cos\beta$$

Шуни эътиборга олиб, $\rho\to0$ да лимитта ўтиб топамиз:

$$\lim_{\rho\to0}\frac{f(A)-f(A_0)}{\rho}=\frac{\partial f(A_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(A_0)}{\partial y}\cos\beta$$

Демак,

$$\frac{\partial f(A_0)}{\partial l}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\cos\beta \ . \ ▶$$

2–мисол. Ушбу

$$f(x,y)=x^2+y^2$$

функциянинг (1,1) нуқтада $\vec{r}=\vec{i}+2\vec{j}$ вектор йўналиш бўйича ҳосиласи топилсин.

◀ Равшанки, бу ҳолда

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt5} \quad , \ \cos\beta=\frac{2}{\sqrt5}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x}=2x \ , \ \frac{\partial f(1,1)}{\partial x}=2 \ ,$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial y}=2y \ , \ \frac{\partial f(1,1)}{\partial y}=2 \ ,$$

бўлади. (5) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial l}=2\cdot\frac{1}{\sqrt5}+2\cdot\frac{2}{\sqrt5}=\frac{6}{\sqrt5} \ . \ ▶$$

Фараз қилайлик, $f(x,y)$ функция очиқ $E\subset R^2$ тўпламда дифференциалланувчи бўлсин. Бинобарин функция Е тўпламнинг ҳар бир $(x,y)\in E$ нуқтасида

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

хусусий ҳосилаларга эга бўлади. Координаталари шу хусусий ҳосилалардан иборат бўлган векторни тузамиз:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\cdot\vec{i}+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\cdot\vec{j}\quad, \tag{6}$$

бунда $\vec{i}$ ва $\vec{j}$ координата ўқлари бўйича йўналган бирлик векторлар. (6) вектор $f(x,y)$ функциянинг градиенти дейилади ва $grad\, f$ каби белгиланади:

$$grad\, f=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\cdot\vec{i}+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\cdot\vec{j}$$

Демак, $grad\, f$ E тўпламнинг ҳар бир (x,y) нуқтасига битта векторни мос қўювчи қоида, бошқача айтганда икки ўзгарувчили вектор функция бўлади.

$f(x,y)$ функциянинг $\vec{e}=(\cos\alpha,\ \cos\beta)$ вектор йўналиши бўйича $\frac{\partial f(x,y)}{\partial l}$ ҳосиласини унинг градиенти орқали ифодалаш мумкин.

Ҳақиқатан ҳам, $grad\, f$ ва $\vec{e}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси

$$\vec{e}\ grad\, f=\cos\alpha\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\cos\beta\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \tag{7}$$

бўлиб, у (5) формулага кўра $\frac{\partial f(x,y)}{\partial l}$ га тенг бўлади:

$$\vec{e}\ grad\, f=\frac{\partial f(x,y)}{\partial l}$$

Айни пайтда $\vec{e}$ ва $grad\, f$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси шу вектор узунликлари кўпайтмасини улар орасидаги бурчак косинусига кўпайтирилганига тенг бўлади:

$$\vec{e}\ grad\, f=|grad\, f|\cdot\left|\vec{e}\right|\cdot\cos\left(\vec{e},\ grad\, f\right) \tag{8}$$

Равшанки, $\left|\vec{e}\right|=1$

(7) ва (8) муносабатлардаги

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial l}=|grad\, f(x,y)|\cdot\cos\left(\vec{e}, grad\, f(x,y)\right)$$

бўлиши келиб чиқади.

Кейинги тенгликдан кўринадики, $\vec{e}$ ҳамда $grad\, f$ векторлар параллел бўлганда $\frac{\partial f(x,y)}{\partial l}$ нинг қиймати энг катта ва у

$$|grad\, f(x,y)|=\sqrt{f_x'^2(x,y)+f_y'^2(x,y)}$$

га тенг бўлади.

Шундай қилиб, $f(x,y)$ функциянинг градиенти $grad\, f$ функциянинг (x,y) нуқтадаги энг тез ўсадиган томонга йўналган бўлиб, унинг узунлиги шу йўналиш бўйича ўсиш тезлигига тенг экан.

3-мисол. Ушбу

$$f(x,y)=x^2+2y^2$$

функциянинг $(1,1)$ нуқтада энг тез ўсадиган йўналиш аниқлансин ва шу йўналиш бўйича ўсиш тезлиги топилсин.

◀ Равшанки,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial\left(x^2+2y^2\right)}{\partial x}=2x \quad , \quad \frac{\partial f(1,1)}{\partial x}=2;$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial\left(x^2+2y^2\right)}{\partial y}=4y \quad , \quad \frac{\partial f(1,1)}{\partial y}=4;$$

бўлиб,

$$grad\, f(1,1)=2\vec{i}+4\vec{j}\ ,$$

$$|grad\, f(1,1)|=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$$

бўлади. ▶

Машқлар

1. Айтайлик, $f(x)$ функция боғламли $E\subset R^m$ тўпламда дифференциалланувчи бўлсин. Агар E тўпламнинг ҳар бир $x\in E\subset R^m$ нуқтасида $f(x)$ функциянинг барча хусусий ҳосилалари нолга тенг бўлса, функция E тўпламда ўзгармас бўлиши исботлансин.

2. Агар $f(x,y)$ функция $(0,0)$ нуқтада барча йўналишлар бўйича ҳосилага эга бўлса, $f(x,y)$ функция $(0,0)$ нуқтада дифференциалланувчи бўладими?

61–маъруза

Кўп ўзгарувчили функциянинг дифференциали

1^0. Функция дифференциали тушунчаси. Фараз қилайлик, $f(x)=f(x_1,x_2,...,x_m)$ функция $E\subset R^m$ да берилган бўлиб, $x^0=(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)\in E$ нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. Унда таърифга кўра функциянинг x^0 нуқтадаги тўла орттирмаси

$$\Delta f(x^0)=\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2}\Delta x_2+...+\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_m}\Delta x_m+o(\rho) \qquad (1)$$

бўлади. Бу муносабатда

$$\rho=\sqrt{\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+...+\Delta x_m^2}$$

бўлиб, $\Delta x_1\to 0,\Delta x_2\to 0,...,\Delta x_m\to 0$ да $\rho\to 0$.

1–таъриф. $f(x)$ функциянинг $\Delta f(x^0)$ орттирмасидаги

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2}\Delta x_2+...+\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_m}\Delta x_m$$

ифода $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтадаги дифференциали (тўлиқ дифференциали) дейилади ва

$$df(x^0) \text{ ёки } df(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)$$

каби белгиланади:

$$df(x^0)=\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2}\Delta x_2+...+\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_m}\Delta x_m$$

Демак, $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтадаги дифференциали $\Delta x_1,\Delta x_2,...,\Delta x_m$ ларга боғлиқ ва уларнинг чизиқли функцияси бўлади.

Агар

$$\Delta x_1=dx_1,\Delta x_2=dx_2,...,\Delta x_m=dx_m$$

дейилса, $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтадаги дифференциали ушбу

$$df(x^0)=\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2}dx_2+...+\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_m}dx_m \qquad (2)$$

кўринишга келади. Демак,

$$\Delta f(x^0)=df(x^0)+0(\rho).$$

Равшанки, ρ етарлича кичик бўлганда

$$\Delta f(x^0)\approx df(x^0)$$

бўлади. Бу тақрибий формуланинг моҳияти шундаки, функциянинг орттирмаси $\Delta x_1,\Delta x_2,...,\Delta x_m$ ларнинг, умуман айтганда мураккаб функцияси бўлган ҳолда функциянинг дифференциали $\Delta x_1,\Delta x_2,...,\Delta x_m$ ларнинг чизиқли функцияси бўлишидадир.

2^0. Мураккаб функциянинг дифференциали. Дифференциал шаклининг инвариантлиги. Айтайлик,

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t) = \varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k), \\ x_2 &= \varphi_2(t) = \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m &= \varphi_m(t) = \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_m) \end{aligned}$$

функцияларнинг ҳар бири $M \subset R^k$ тўпламда берилган бўлиб,

$$E = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) : t = (t_1, t_2, \dots, t_k) \in M\} \subset R^m$$

тўпламда эса $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция аниқланган бўлсин. Булар ёрдамида

$$f(x(t)) = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)) = F(t_1, t_2, \dots, t_k)$$

мураккаб функция ҳосил қилинган бўлсин.

Маълумки, $x_i(t) = \varphi_i(t_1, \dots, t_k)$ функциялар $(i = 1, 2, \dots m)$ $t^0 = (t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлиб, $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция мос $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтада $(x_1^0 = \varphi_1(t^0), x_2^0 = \varphi_2(t^0), \dots, x_m^0 = \varphi_m(t^0))$ дифференциалланувчи бўлса, мураккаб функция $t^0 = (t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нуқтада дифференциаланувчи бўлар эди. Модомики, $f(x(t))$ функция $t_1, t_2, \dots, t_k$ ўзгарувчиларга боғлиқ экан, унда

$$df = \frac{\partial f}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial f}{\partial t_2} dt_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial t_k} dt_k \tag{3}$$

бўлади.

Мураккаб функциянинг хусусий ҳосилаларини ҳисоблаш формулаларидан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_1}, \\ \frac{\partial f}{\partial t_2} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_2}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial f}{\partial t_k} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_k}. \end{aligned}$$

Бу хусусий ҳосилаларни (3) ифодадаги $\frac{\partial f}{\partial t_1}, \frac{\partial f}{\partial t_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial t_k}$ ларнинг ўрнига қўямиз. Натижада

$$\begin{aligned} df &= \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_1}\right] dt_1 + \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_2}\right] dt_2 + \\ &+ \dots + \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_k}\right] dt_k = \frac{\partial f}{\partial x_1}\left[\frac{\partial x_1}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x_1}{\partial t_2} dt_2 + \dots + \frac{\partial x_1}{\partial t_k} dt_k\right] + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x_2}\left[\frac{\partial x_2}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x_2}{\partial t_2} dt_2 + \dots + \frac{\partial x_2}{\partial t_k} dt_k\right] + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}\left[\frac{\partial x_m}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x_m}{\partial t_2} dt_2 + \dots + \frac{\partial x_m}{\partial t_k} dt_k\right] \end{aligned}$$

бўлади.

Равшанки,

$$\frac{\partial x_1}{\partial t_1}dt_1+\frac{\partial x_1}{\partial t_2}dt_2+\ldots+\frac{\partial x_1}{\partial t_k}dt_k=dx_1,$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial t_1}dt_1+\frac{\partial x_2}{\partial t_2}dt_2+\ldots+\frac{\partial x_2}{\partial t_k}dt_k=dx_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial x_m}{\partial t_1}dt_1+\frac{\partial x_m}{\partial t_2}dt_2+\ldots+\frac{\partial x_m}{\partial t_k}dt_k=dx_k.$$

Демак, мураккаб функциянинг дифференциали

$$df=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_m}dx_m \qquad (4)$$

бўлади.

Биз юқорида $f(x)$ ҳамда $f(x(t))$ мураккаб функциянинг дифференцаллари учун (2) ва (4) ифодаларни топдик. Бу ифодаларни солиштириб уларнинг формаси (шакли, кўриниши) бир хил, яъни (2) ва (4) формулаларда функциянинг дифференциали хусусий ҳосилаларни мос дифференциалларга кўпайтмалардан тузилган йиғиндига тенг эканлигини пайқаймиз. Бу хосса дифференциал шаклининг инвариантлиги дейилади.

Эслатма. $f(x)$ функция дифференциалининг (2) ифодасидаги $dx_1,dx_2,\ldots,dx_m$ лар мос равишда $\Delta x_1,\Delta x_2,\ldots,\Delta x_m$ лар бўлса, $f(x(t))$ функция дифференциалидаги $dx_1,dx_2,\ldots,dx_m$ лар $t_1,t_2,\ldots,t_k$ ўзгарувчиларнинг функциялари бўлади. Демак, (2) ва (4) формулаларнинг кўринишларигина бир хил бўлади.

3^0. Содда қоидалар. Айтайлик,

$$u=u(x_1,x_2,\ldots,x_m),\quad v=v(x_1,x_2,\ldots,x_m)$$

функциялари $E\subset R^m$ тўпламда берилган бўлиб, $x^0=(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_m^0)\in E$ нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда:

1) $d(u+v)=du+dv,$

2) $d(u\cdot v)=vdu+udv,$

3) $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$ $\qquad (v\neq 0)$

бўлади.

Бу муносабатлардан бирини, масалан, 3) нинг исботини келтирамиз.

◄ Айтайлик,

$$F=\frac{u}{v}$$

бўлсин. Бу ҳолда F функция u ва v ларга ва u ва v лар ўз навбатида $x_1,x_2,\ldots,x_m$ ўзгарувчиларга боғлиқ бўлиб, мураккаб функцияга эга бўламиз. Дифференциал шаклининг инвариантли хоссасига кўра

$$dF = \frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial v} dv$$

бўлади. Равшанки,

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{1}{v}, \ \frac{\partial F}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}$$

Демак,

$$dF = \frac{1}{v} du - \frac{u}{v^2} dv = \frac{vdu - ydv}{v^2},$$

яъни

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

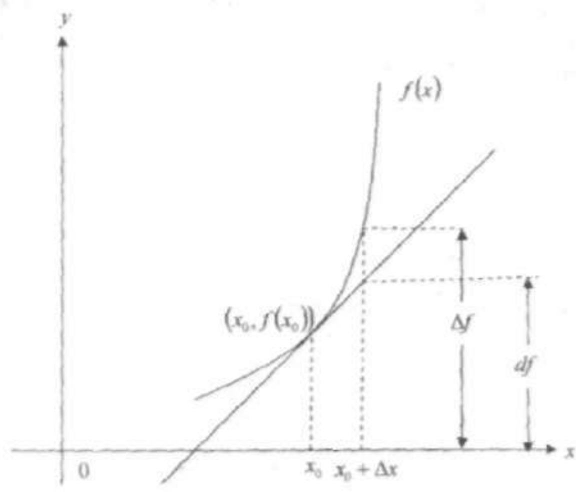
бўлади. ►

4⁰. Хусусий ҳоллар. Функция дифференциалининг геометрик маъноси. Айтайлик, $m=1$ бўлсин. Бу ҳолда $u=f(x)$ $(x \in R, u \in R)$ функция ва унинг дифференциали

$$du = df = f'(x)dx$$

га эга бўламиз.

Маълумки, $u=f(x)$ функциянинг дифференциали шу функция тасвирланган эгри чизиққа $(x_0, f(x))$ нуқтада ўтказилган уринма ординатасининг орттирмасини ифодалайди (1 – чизма; қаралсин, [1])



1 – чизма

$m=2$ бўлсин. Бу ҳолда икки ўзгарувчили $u=f(x,y)$ $\left((x,y) \in R^2, u \in R\right)$ функцияга эга бўлиб, унинг (x_0, y_0) нуқтадаги дифференциал

$$du = df(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} dy \qquad (5)$$

бўлади, бунда $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$.

Δx ва Δy лар етарлича кичик бўлганда

$$\Delta f(x_0, y_0) \approx df(x_0, y_0)$$

яъни

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x_1} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y$$

тақрибий формула ҳосил бўлади.

1–мисол. Ушбу

$$u = x^y$$

функциянинг дифференциали топилсин.

◀ Равшанки,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln x.$$

Унда (5) формулага кўра

$$du = yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy$$

бўлади. ▶

2–мисол. Томонлари $x = 6м$ ва $y = 8м$ бўлган тўғри тўртбурчак берилган. Агар бу тўғри тўртбурчакнинг x томонини 5 см. га оширилса, у томонини 10 см. га камайтирилса, тўртбурчакнинг диоганали қанчага ўзгаради?

◀Агар берилган тўғри тўртбурчакнинг диоганалини u десак, унда

$$u = \sqrt{x^2 + y^2}$$

бўлади. Энди

$$\Delta u(x_0, y_0) \approx \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \Delta x + \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \Delta y$$

бўлишини эътиборга олиб, топамиз:

$$\Delta u(x_0, y_0) \approx \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \cdot \Delta x + \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \Delta y = \frac{x_0 \cdot \Delta x + y_0 \Delta y}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$$

Бу муносабатда

$$x_0 = 6\,м, \ \Delta x = 0,05\,м, \ y_0 = 8\,м, \ \Delta y = -0,10\,м$$

дейилса, унда

$$\Delta u \approx \frac{6 \cdot 0,06 + 8 \cdot (-0,10)}{\sqrt{36 + 64}} м = -0,05\,м$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак, тўғри тўртбурчакнинг диогонали тахминан 5 см. га камаяр экан. ▶

Энди $f(x, y)$ функция дифференциалининг геометрик маъносини келтирамиз.

Айтайлик,

$$z = f(x, y)$$

функция очиқ $E \subset R^2$ тўпламда дифференциалланувчи бўлсин. Бу функция графиги R^3 фазода бирор $\Gamma(f)$ сирти ифодаласин. $\Gamma(f) = \{(x, y, z) \in R^3 : (x, y) \in E, z = f(x, y)\}$ сиртда $(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma(f)$ $(z_0 = f(x_0, y_0))$ нуқтани ва шу нуқтадан ўтувчи, қаралаётган сиртга тегишли бўлган силлиқ

$$\Gamma = \{x = x(t), y = y(t), z = z(t) : \alpha \le t \le \beta\}$$

эгри чизиқни оламиз. Модомики, эгри чизиқ сиртда ётар экан, унда

$$z(t) = f(x(t), y(t))$$

$$((x(t_0), y(t_0), z(t_0)) = (x_0, y_0, z_0), t_0 \in (\alpha, \beta))$$

бўлади. Равшанки,

$$z(t) = f(x(t), y(t))$$

мураккаб функция бўлиб, унинг t_0 нуқтадаги дифференциали, дифференциал шаклнинг инвариантлиги хоссасига биноан, ушбу

$$df(x_0, y_0) = dz = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} dy \tag{6}$$

кўринишга эга.

Координаталари dx, dy, dz бўлган вектор Γ эгри чизиққа (x_0, y_0, z_0) нуқтада ўтказилган уринма вектор бўлади.

Энди координаталари

$$-\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, -\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, 1$$

бўлган $\vec{n}$ векторни қарайлик. Юқоридаги (6) муносабат $\vec{n}$ вектор уринма векторга (x_0, y_0, z_0) нуқтада ортогонал бўлишини билдиради. Шунинг учун $\vec{n}$ вектор эгри чизиққа (x_0, y_0, z_0) нуқтада ортогонал дейилади.

Маълумки, Γ эгри чизиқ (x_0, y_0, z_0) нуқтадан ўтувчи ва $\Gamma(f)$ сиртда ётувчи ихтиёрий эгри чизиқ эди. Бинобарин, $\vec{n}$ вектор шу (x_0, y_0, z_0) нуқтадан ўтувчи ва $\Gamma(f)$ сиртда ётувчи ихтиёрий эгри чизиққа ортогонал бўлади. Шунинг учун $\vec{n}$ вектор $\Gamma(f)$ сиртнинг нуқтасидаги нормал ветори дейилади.

Сиртнинг (x_0, y_0, z_0) нуқтасида ўтувчи ва сиртнинг нормал векторига ортогонал бўлган текислик, $\Gamma(f)$ сиртга (x_0, y_0, z_0) нуқтада ўтказилган уринма текислик дейилади. Унинг тенгламаси

$$Z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(X - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(Y - y_0)$$

бўлади, бунда (X, Y, Z) уринма текисликдаги ўзгарувчи нуқта. Бу тенгликдан фойдаланиб,

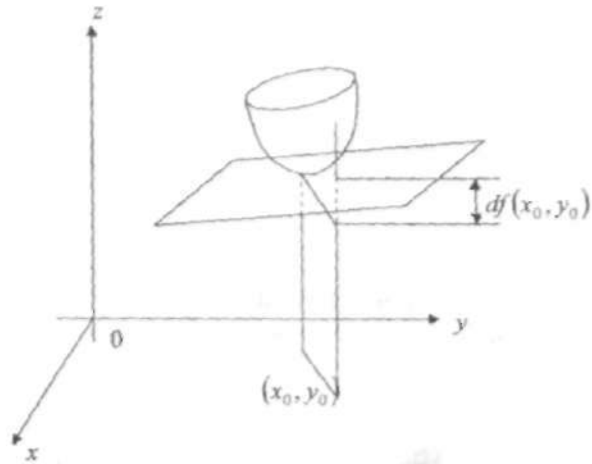
$$Z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

бўлишини оламиз. Келтирилган тенглик ва (6) муносабатдан

$$df(x_0, y_0) = Z - z_0$$

бўлиши келиб чиқади.

Шундай қилиб, $z = f(x, y)$ функциянинг (x_0, y_0) нуқтадаги дифференциали $df(x_0, y_0)$ бу функция графигига $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ нуқтасида уринма текислик аппликатасининг орттирмасини ифодалар экан (2 – чизма)



2 – чизма

Машқлар

1. Ушбу

$$f\left(x^2 + y^2, arctg\frac{y}{x}\right) \qquad \left(x^2 + y^2 > 0\right)$$

функциянинг дифференциали топилсин.

2. Ушбу

$$\alpha = (1,02)^{3,01}$$

миқдорнинг тақрибий қиймати топилсин.

62-маъруза

Кўп ўзгарувчили функциянинг юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллари. Тейлор формуласи

1⁰. Юқори тартибли хусусий ҳосилалар. Фараз қилайлик, $f(x)=f(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ функция очиқ $E\subset R^m$ тўпламнинг ҳар бир $x=(x_1,x_2,\ldots,x_m)\in E$ нуқтасида

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}=f'_{x_i} \qquad (i=1,2,\ldots,m)$$

хусусий ҳосилаларга эга бўлсин. Бу хусусий ҳосилалар $x_1,x_2,\ldots,x_m$ ўзгарувчиларнинг функцияси бўлиб, улар ҳам хусусий ҳосилаларга эга бўлиши мумкин:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right)=\left(f'_{x_i}(x)\right)'_{x_k} \qquad (i,k=1,2,\ldots,m)$$

Бу хусусий ҳосилалар берилган $f(x)$ функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилалари дейилади ва

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k\,\partial x_i} \quad \text{ёки} \quad f''_{x_i x_k}(x) \qquad (i,k=1,2,\ldots,m)$$

каби белгиланади:

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k\,\partial x_i}=f''_{x_i x_k}(x)=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right)$$

Агар $i\neq k$ бўлса,

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k\,\partial x_i}$$

иккинчи тартибли хусусий ҳосила аралаш ҳосила дейилади.

Агар $i=k$ бўлса, иккинчи тартибли хусусий ҳосилалар

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k\,\partial x_i}=f''_{x_i x_k}(x)$$

қуйидагича

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2}=f''_{x_i^2}(x)$$

ёзилади.

$f(x)$ функциянинг учинчи, тўртинчи ва ҳ.к. тартибдаги хусусий ҳосилалари худди юқоридагига ўхшаш таърифланади. Умуман, $f(x)=f(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ функциянинг $x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_{n-1}},x_{i_n}$ ўзгарувчилари бўйича n-тартибли хусусий ҳосиласи берилган функциянинг $(n-1)$-тартибли хусусий ҳосиласи

$$\frac{\partial^{n-1} f(x)}{\partial x_{i_{n-1}} \partial x_{i_{n-2}} \dots \partial x_{i_1}} \qquad (i_1 + i_2 + \dots + i_{n-1} = n-1)$$

нинг x_{i_n} ўзгарувчи бўйича хусусий ҳосиласи сифатида таърифланади:

$$\frac{\partial^n f(x)}{\partial x_{i_n} \partial x_{i_{n-1}} \dots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_n}} \left(\frac{\partial^{n-1} f(x)}{\partial x_{i_{n-1}} \dots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}} \right)$$

Бу ҳолда ҳам $i_1, i_2, \dots, i_n$ лар бир-бирига тенг бўлмаганда

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \dots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}}$$

аралаш ҳосила дейилади.

Агар $i_1 = i_2 = \dots = i_n = k$ бўлса, n-тартибли хусусий ҳосилалар қуйидагича

$$\frac{\partial^n f(x)}{\partial x_k^n}$$

ёзилади. Ушбу

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \qquad (i \neq k)$$

аралаш ҳосилалар функциянинг турли ўзгарувчилари бўйича дифференциаллаш тартиби билан фарқ қилади:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}$$

да $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг аввал x_i ўзгарувчиси бўйича, сўнг x_k ўзгарувчиси бўйича хусусий ҳосиласи ҳисобланган бўлса,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$$

да эса аввал x_k ўзгарувчиси бўйича, сўнг x_i ўзгарувчиси бўйича хусусий ҳосиласи ҳисобланган. Улар бир-бирига тенг ҳам бўлиши мумкин, тенг бўлмасдан қолиши ҳам мумкин. (мисоллар кейинги пунктда келтирилади).

Аралаш ҳисилаларнинг тенглигини қуйидаги теорема ифодалайди.

1-теорема. Фараз қилайлик, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in E \subset R^m$ нуқтада n марта дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда x^0 нуқтада $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг ихтиёрий n-тартибли аралаш ҳосилаларнинг қиймати $x_1, x_2, \dots, x_m$ ўзгарувчилар бўйича қандай тартибда дифференциалланишига боғлиқ бўлмайди.

◁ Бу теореманинг исботи, кейинги пунктда икки ўзгарувчили функция учун келтириладиган теорема исботи каби бўлади.▷

2⁰. Юқори тартили дифференциалар. Фараз қилайлик, $f(x)=f(x_1,x_2,\dots,x_m)$ функция очиқ $E\subset R^m$ тўпламда берилган, $x\in E$ нуқтада икки марта дифференциалланувчи бўлсин.

1–таъриф. $f(x)$ функция дифференциали $d\,f(x)$ нинг дифференциали берилган функциянинг x нуқтадаги иккинчи тартибли дифференциали дейилади ва $d^2 f(x)$ каби белгиланади:

$$d^2 f(x)=d(d\,f(x))$$

Энди функция иккинчи тартибли дифференциалини унинг хусусий ҳосилалари орқали ифодаланишини кўрсатамиз.

Равшанки,

$$d\,f(x)=\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}d\,x_1+\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}d\,x_2+\dots+\frac{\partial f(x)}{\partial x_m}d\,x_m$$

бўлиб, у $x=(x_1,x_2,\dots,x_m)$ га ҳамда $d\,x_1, d\,x_2,\dots, d\,x_m$ ларга боғлиқ бўлади. Бу тенгликда $dx_1,dx_2,\dots dx_m$ ларни тайинланган деб ҳисоблаб, $d\,f(x)$ ни $x_1,x_2,\dots,x_m$ ўзгарувчиларнинг функцияси сифтаида қараб, унинг дифференциалини топамиз:

$$d(d\,f)=d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}d\,x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}d\,x_2+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_m}d\,x_m\right)=$$

$$=d\,x_1\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)\cdot d\,x_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)\cdot d\,x_2+\dots+\frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)\cdot d\,x_m\right]+$$

$$+d\,x_2\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\cdot d\,x_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)d\,x_2+\dots+\frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)d\,x_m\right]+$$

$$+\dots+d\,x_m\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)d\,x_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)d\,x_2+\dots+\frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)d\,x_m\right]=$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}d\,x_1^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}d\,x_2^2+\dots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}d\,x_m^2+2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}d\,x_1\,d\,x_2+\right.$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_3}dx_1dx_3+\dots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_m}dx_1dx_m+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 d\,x_3}dx_2dx_3+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_4}dx_2dx_4+$$

$$\left.+\dots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_m}dx_2dx_m+\dots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_{m-1}\partial x_m}dx_{m-1}\,dx_m\right]=$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+\dots+\frac{\partial}{\partial x_m}\partial x_m\right)^2$$

Бунда символлик равишда ёзилишидан фойдаланилади. У қуйидагича тушунилади: қавс ичидаги йиғинди квадратга кўтарилиб, сўнг f га "кўпайтирилади". Кейин даража кўрсаткичлари хусусий ҳосилалар тартиби деб ҳисобланади. Демак,

$$d^2 f(x)=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}d x_1+\frac{\partial}{\partial x_2}d x_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_m}d x_m\right)^2 \qquad (1)$$

$f(x)$ функциянинг x нуқтадаги учинчи, тўртинчи ва ҳ.к. тартибдаги дифференциаллари ҳам юқоридагидек таърифланади. Умуман, $f(x)$ функциянинг x нуқтадаги $(n-1)-$тартибли дифференциали $d^{n-1}f(x)$ нинг дифференциали $f(x)$ нинг $n-$тартибли дифференциали дейилади ва $d^n f(x)$ каби белгиланади:

$$d^n f(x)=d\left(d^{n-1}f(x)\right)$$

Айтайлик, $f(x)$ функуия x нуқтада n марта дифференциаланувчи бўлсин. У ҳолда

$$d^n f(x)=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}d x_1+\frac{\partial}{\partial x_2}d x_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_m}d x_m\right)^n f \qquad (2)$$

бўлади.

3^0. Мураккаб функциянинг юқори тартибли дифференциаллари. Биз юқорида функциянинг юқори тартибли дифференцалларини баён этдик. Унда функция аргументи $x_1,x_2,\ldots,x_m$ лар эркли ўзгарувчилар эди.

Айтайлик, $f(x)=f(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ функцияда $x_1,x_2,\ldots,x_m$ ўзгарувчиларнинг ҳар бири $t_1,t_2,\ldots,t_k$ ўзгарувчиларнинг функциялари бўлсин $(x_i=\varphi_i(t_1,t_2,\ldots,t_k))$.

Қаралаётган $f(x)$ ва $x_i=\varphi_i(t)$ $(i=1,2,\ldots,m)$ функциялар n марта дифференциалланувчилик шартларини бажарган деб, мураккаб $f(x(t))$ функциянинг юқори тартибли дифференциалларини ҳисоблаймиз.

Маълумки, дифференциал шаклнинг инвариантлиги хоссасига биноан, мураккаб функциянинг дифференциали

$$d f=\frac{\partial f}{\partial x_1}d x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}d x_2+\ldots.+\frac{\partial f}{\partial x_m}d x_m$$

бўлади. Дифференциаллаш қоидаларидан фойдаланиб функциянинг иккинчи тартибли дифференциалини топамиз:

$$d^2 f=d(d f)=d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_m}dx_m\right)=$$

$$=d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1\right)+d\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2\right)+\ldots.+d\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}dx_m\right)=$$

$$=d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)\cdot dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_1}d(dx_1)+d\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\cdot dx_2+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot d(dx_2)+$$

$$+\ldots+d\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)\cdot dx_m+\frac{\partial f}{\partial x_m}d(dx_m)=$$

$$=d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)\cdot dx_1+d\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)dx_2+\ldots+d\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)dx_m+$$

$$+\frac{\partial f}{\partial x_1}d^2x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}d^2x_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_m}d^2x_m=$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right)^2 f+$$

$$+\frac{\partial f}{\partial x_1}d^2x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}d^2x_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_m}d^2x_m$$

Демак,

$$d^2f=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right)^2 f+$$
$$+\frac{\partial f}{\partial x_1}d^2x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}d^2x_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_m}d^2x_m \qquad (3)$$

Шу йўл билан берилган мураккаб функциянинг кейинги тартибдаги дифференциаллари топилади.

1–эслатма. (1) ва (3) формулаларни солиштириб, иккинчи тартибли дифференциаларда дифференциал шаклнинг инвариантлиги хоссаси ўринли эмаслигини кўрамиз.

2–эслатма. Агар $f(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ функция аргументлари $x_1,x_2,\ldots,x_m$ ларнинг ҳар бири $t_1,t_2,\ldots,t_k$ ўзгарувчиларнинг чизиқли функцияси бўлса, у ҳолда $f(x)$ функциянинг иккинчи тартибли (умуман, n –тартибли) дифференциали дифференциал шаклнинг инвариантлик хоссасига эга бўлади.

◃ Айтайлик,

$$x_i=b_i+a_{i_1}t_1+a_{i_2}t_2+\ldots+a_{i_k}t_k \qquad (i=1,2,\ldots,m)$$

бўлсин. У ҳолда, равшанки,

$$d^2t_1=d^2t_2=\ldots=d^2t_k=0$$

бўлиб,

$$d^2x_i=a_{i_1}d^2t_1+a_{i_2}d^2t_2+\ldots+a_{i_k}d^2t_k=0$$

бўлади. (3) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$d^2f=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right)^2 f$$

Бу эса d^2f нинг (1) формула кўринишига эга эканлигини билдиради. ▹

4^0. Кўп ўзгарувчили функциянинг Тейлор формуласи. Айтайлик, $f(x)=f(x_1,x_2,...,x_m)$ функция очиқ $E\subset R^m$ тўпламда берилган бўлиб, $U_\delta(x^0)\subset E$ бўлсин, бунда $x^0=(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)$ ва $\delta>0$. Равшанки,

$$\forall x=(x_1,x_2,...,x_m)\in U_\delta(x^0),\quad x^0=(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)$$

нуқталарни бирлаштирувчи тўғри чизиқ кесмаси

$$A=\{x_1^0+t(x_1-x_1^0),\ x_2^0+t(x_2-x_2^0),...,x_m^0+t(x_m-x_m^0);\ 0\le t\le 1\}$$

шу $U_\delta(x^0)$ га тегишли бўлади.

Фараз қилайлик, $f(x_1,x_2,...,x_m)$ функция $U_\delta(x^0)$ тўпламда $(n+1)$ марта дифференциалланувчи бўлсин. Бу функцияни A тўпламда қарасак, $[0,1]$ сегментда аниқланган ушбу

$$F(t)=f(x_1^0+t(x_1-x_1^0),x_2^0+t(x_2-x_2^0),...,x_m^0+t(x_m-x_m^0))$$

функцияга эга бўламиз. $F(t)$ функция $[0,1]$ да ҳосилага эга бўлиб,

$$F'(t)=\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot(x_1-x_1^0)+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot(x_2-x_2^0)+...+\frac{\partial f}{\partial x_m}\cdot(x_m-x_m^0)=$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\cdot(x_1-x_1^0)+\frac{\partial}{\partial x_2}\cdot(x_2-x_2^0)+...+\frac{\partial}{\partial x_m}(x_m-x_m^0)\right)f$$

бўлади, бунда $f(x)$ функциянинг барча хусусий ҳосилалари

$$(x_1^0+t(x_1-x_1^0),\ x_2^0+t(x_2-x_2^0),...,x_m^0+t(x_m-x_m^0)) \tag{4}$$

нуқтада ҳисобланган.

Умуман, ҳосил қилинган $F(t)$ функция k – тартибли $(k=1,2,...,n+1)$ ҳосилаларга эга ва у

$$F^{(k)}(t)=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\cdot(x_1-x_1^0)+\frac{\partial}{\partial x_2}\cdot(x_2-x_2^0)+...+\frac{\partial}{\partial x_m}(x_m-x_m^0)\right)^k f$$

га тенг, бундаги барча хусусий ҳосилалар (4) нуқтада ҳисобланган. Бу муносабатнинг тўғрилиги математик индукция усули ёрдамида исботланади.

Шундай қилиб, $F(t)$ функция $F'(t)$, $F''(t)$,...,$F^{(n+1)}(t)$ ҳосилаларга эга бўлади. Тейлор формуласига кўра (қаралсин,[1]) t_0 нуқтада $(0\le t_0\le 1)$

$$\begin{gathered}F(t)=F(t_0)+F'(t_0)(t-t_0)+\frac{1}{2!}F''(t_0)(t-t_0)^2+...+\\+\frac{1}{n!}F^{(n)}(t_0)\cdot(t-t_0)^n+\frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(c)\cdot(t-t_0)^{n+1}\end{gathered} \tag{5}$$

бўлади, бунда $c=t_0+\theta(t-t_0)$, $0<\theta<1$. Бу тенгликда $t_0=0, t=1$ дейилса, унда

$$F(1)=F(0)+\frac{1}{1!}F'(0)+\frac{1}{2!}F''(0)+\ldots+\frac{1}{n!}F^{(n)}(0)+\frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(0)$$

бўлиши келиб чиқади.

Айни пайтда

$$F(0)=f\left(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_m^0\right),$$
$$F(1)=f(x_1,x_2,\ldots,x_m), \tag{6}$$
$$F^{(k)}(0)=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\cdot\left(x_1-x_1^0\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\cdot\left(x_2-x_2^0\right)+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_m}\cdot\left(x_m-x_m^0\right)\right)f$$

(бунда f функциянинг барча хусусий ҳосилалари $\left(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_m^0\right)$ нуқтада ҳисобланган) бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда (5) ва (6) тенгликлардан ушбу

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_m)=f\left(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_m^0\right)+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\cdot\left(x_1-x_1^0\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\cdot\left(x_2-x_2^0\right)+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_m}\left(x_m-x_m^0\right)\right)^k f\left(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_m^0\right)+$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1-x_1^0\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_2-x_2^0\right)+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_m}\left(x_m-x_m^0\right)\right)^{n+1}\times$$
$$\times f\left(x_1^0+\theta\left(x_1-x_1^0\right),x_2^0+\theta\left(x_2-x_2^0\right),\ldots,x_m^0+\theta\left(x_m-x_m^0\right)\right)$$

$(0<\theta<1)$ тенгликка келамиз. Бу кўп ўзгарувчили $f(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ функциянинг Лагранж кўринишидаги қолдиқ ҳадли Тейлор формуласи дейилади.

5⁰. Хусусий ҳоллар. Аралаш ҳосиланинг тенглиги ҳақида теорема. $m=1$ бўлсин. бу ҳолда $u=f(x)$ $(x\in R,u\in R)$ функциянинг юқори тартибли ҳосила ва дифференциалларига келамиз. Улар [1] да батафсил баён этилган.

$m=2$ бўлганда $u=f(x,y)$ $\left((x,y)\in R^2,u\in R\right)$ икки ўзгарувчили функция бўлиб, унинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилалари (улар 4 та бўлади) қуйидагича бўлади:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right),$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right),$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right).$$

1–мисол. Ушбу

$$f(x,y)=arctg\frac{x}{y} \quad (y\neq 0)$$

функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилалари топилсин.

◁ Равшаки,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{y}=\frac{y}{x^2+y^2}\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{x}{x^2+y^2}$$

бўлади.

Энди таърифдан фойдаланиб берилган функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=-\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\ ,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=-\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\ ,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\ ,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\ .\ \triangleright$$

2–мисол. Ушбу

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\ \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\ , & агар\ \ x^2+y^2>0\ \ бyлса\ , \\ 0 & ,\ агар\ \ x^2+y^2=0\ \ бyлса \end{cases}$$

функциянинг $(0,0)$ нуқтадаги аралаш ҳосилалари топилсин.

◁Айтайлик, $(x,y)\neq(0,0)$ бўлсин. Бу ҳолда

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right),\ \frac{\partial f}{\partial y}=x\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-\frac{4x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\cdot\left(1+\frac{8x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\cdot\left(1+\frac{8x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)$$

бўлади.

Айтайлик, $(x,y)=(0,0)$ бўлсин. Бу ҳолда функциянинг ҳосилаларини таърифга кўра ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0\ ,$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0\ ,$$

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\,\partial x}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{\partial f(0,\Delta y)}{\partial x}-\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-\Delta y}{\Delta y}=-1\ ,$$

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\,\partial y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\partial f(\Delta x,0)}{\partial y}-\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1\ \triangleright$$

Юқорида келтирилган мисоллардан кўринадики, $f(x,y)$ функциянинг

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$$

аралаш ҳосилалари бир-бирига тенг ҳам бўлиши мумкин, тенг бўлмасдан қолиши ҳам мумкин экан.

2-теорема. Фараз қилайлик, $f(x,y)$ функция $(x_0,y_0)\in R^2$ нуқтанинг $U_\delta((x_0,y_0))$ атрофида

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y},\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\,\partial x}\qquad ((x,y)\in U_\delta((x_0,y_0)))$$

аралаш ҳосилаларга эга бўлиб, бу ҳосилалар (x_0,y_0) нуқтада узлуксиз бўлсин. У ҳолда $f(x,y)$ функциянинг аралаш ҳосилалари (x_0,y_0) нуқтада тенг бўлади:

$$\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\,\partial y}\ ,$$

$\triangleleft$ Айтайлик, $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$, $(x_0+\Delta x, y_0)$, $(x_0, y_0+\Delta y)$ нуқталар (x_0,y_0) нуқтанинг атрофига тегишли бўлсин:

$$(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\in U_\delta((x_0,y_0)),\ (x_0+\Delta x, y_0)\in U_\delta((x_0,y_0)),$$
$$(x_0, y_0+\Delta y)\in U_\delta((x_0,y_0))\ .$$

Ушбу

$$\Phi(\Delta x,\Delta y)=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0+\Delta y)+f(x_0,y_0)$$
$$\varphi(x)=f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0)$$

функцияларни қарайлик

Равшанки,

$$\Phi(\Delta x,\Delta y)=\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)$$

бўлади. Бу тенгликнинг ўнг томонига Лагранж теоремасини икки марта қўллаб топамиз:

$$\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)=\varphi'(x_0+\theta_1\cdot\Delta x)\cdot\Delta x=$$
$$=\left[\frac{\partial f(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)}{\partial x}-\frac{\partial f(x_0+\theta_1\Delta x, y_0)}{\partial x}\right]\Delta x=$$
$$=\frac{\partial^2 f(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y)}{\partial y\,\partial x}\cdot\Delta x\cdot\Delta y\qquad (0<\theta_1,\theta_2<1)$$

Шартга кўра аралаш ҳосила (x_0, y_0) нуқтада узлуксиз. Демак, $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ да

$$\frac{\partial^2 f(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y)}{\partial y \partial x} \Delta x \Delta y = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x} \Delta x \Delta y + 0(1)$$

бўлиб,

$$\Phi(\Delta x, \Delta y) = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x} \Delta x \Delta y + 0(1) \tag{7}$$

бўлади.

Энди $\Phi(\Delta x, \Delta y)$ функция билан бирга қуйидаги

$$\psi(y) = f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y)$$

функцияни қараймиз. Равшанки,

$$\Phi(\Delta x, \Delta y) = \psi(y_0 + \Delta y) - \psi(y_0)$$

бўлади. Юқоридагидек, бу тенгликнинг ўнг томонига Лагранж теоремасиини икки марта қўллаб, сўнг аралаш ҳосиланинг (x_0, y_0) нуқтада узлуксизлигидан фойдаланиб топамиз:

$$\psi(y_0 + \Delta y) - \psi(y_0) = \left[\frac{\partial f(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta_1' \Delta y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x_0, y_0 + \theta_1' \Delta y)}{\partial y}\right] \Delta y =$$

$$= \frac{\partial^2 f(x_0 + \theta_2' \Delta x, y_0 + \theta_1' \Delta y)}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + 0(1)$$

$(0 < \theta_1', \theta_2' < 1 \ , \ \Delta x \to 0 \ , \Delta y \to 0)$. Демак,

$$\Phi(\Delta x, \Delta y) = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + 0(1) \tag{8}$$

(7) ва (8) муносабатлардан

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x}$$

бўлиши келиб чиқади. ▹

Машқлар

1. Ушбу

$$u = f(x, y) \ , \ x = t^2 + s^2 \ , \ y = t \cdot s$$

функциянинг иккинчи тартибли дифференциали топилсин.

2. Ушбу

$$u = y \cdot \varphi(x^2 - y)$$

функция қуйидаги

$$\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u}{y^2}$$

тенгликни қаноатлантирилиши исботлансин.

63–маъруза

Кўп ўзгарувчили функциянинг экстремумлари

1⁰. Функция экстремуми тушунчаси. Зарурий шарт. Фараз қилайлик, $f(x)=f(x_1,x_2,...,x_m)$ функция $E\subset R^m$ тўпламда берилган бўлиб, $x^0=(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)\in E$ бўлсин.

1–таъриф. Агар шундай $\delta>0$ сон топилсаки,

$$U_\delta(x^0)\subset E \text{ бўлиб, } \forall x\in U_\delta(x^0) \text{ да } f(x)\le f(x^0)$$

бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада локал максимумга. $f(x)\ge f(x^0)$ бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада локал минимумга эришади дейилади.

2–таъриф. Агар шундай $\delta>0$ сон топилсаки,

$$U_\delta(x^0)\subset E \text{ бўлиб, } \forall x\in U_\delta(x^0)\setminus\{x^0\} \text{ да}$$

$f(x)<f(x^0)$ бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада локал қатъий максимумга, $f(x)>f(x^0)$ бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада локал қатъий минимумга эришади дейилади.

Функциянинг локал максимуми, локал минимумга умумий ном билан униг локал экстремуми дейилади.

Бунда x^0 нуқта $f(x)$ функциянинг локал экстремум нуқтаси $f(x^0)$га эса функциянинг локал экстремум қиймати дейилади.

Функциянинг максимум (минимум) қиймати қуйидагича белгиланади:

$$f(x^0)=\max_{x\in U_\delta(x^0)} f(x) \qquad \left(f(x^0)=\min_{x\in U_\delta(x^0)} f(x)\right).$$

Маълумки,

$$\Delta f(x^0)=f(x)-f(x^0)$$

айирма $f(x)$ функциянинг x^0 нуқтадаги тўла орттирмаси дейилар эди.

$f(x)$ функция x^0 нуқтада локал максимумга эришса, унда $\forall x\in U_\delta(x^0)$ да

$$\Delta f(x^0)\le 0$$

бўлади ва аксинча.

Шунингдек, $f(x)$ функция x^0 нуқтада локал минимумга эришса, унда $\forall x\in U_\delta(x^0)$ да

$$\Delta f(x^0)\ge 0$$

бўлади ва аксинча.

1–теорема. Агар $f(x)=f(x_1,x_2,\dots,x_m)$ функция $x^0=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_m^0)$ нуқтада локал эстремумга эришса ва шу нуқтада барча

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (i=1,2,\dots,m)$$

хусусий ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}=0 \qquad (i=1,2,\dots,m)$$

бўлади.

◁Айтайлик, $f(x)=f(x_1,x_2,\dots,x_m)$ функция $x^0=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_m^0)$ нуқтада локал минимумга эришсин. У ҳолда

$$\forall x=(x_1,x_2,\dots,x_m)\in U_\delta(x^0) \text{ да } f(x_1,x_2,\dots,x_m)\geq f(x_1^0,x_2^0,\dots,x_m^0)$$

тенгсизлик бажарилади. Жумладан

$$f(x_1,x_2^0,x_3^0,\dots,x_m^0)\geq f(x_1^0,x_2^0,\dots,x_m^0)$$

бўлади. Агар

$$\varphi(x_1)=f(x_1,x_2^0,x_3^0,\dots,x_m^0)$$

дейилса, унда $\forall x_1\in(x_1^0-\delta,x_1^0+\delta)$ да

$$\varphi(x_1)\geq\varphi(x_1^0)$$

бўлиб, бир ўзгарувчили $\varphi(x_1)$ функция x_1^0 нуқтада локал минимумга эришади. Унда [1] да келтирилган теоремага кўра

$$\varphi'(x_1^0)=0, \text{ яъни } \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1}=0$$

бўлади.

Худди шунга ўхшаш

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2}=0,\dots,\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_m}=0$$

бўлиши исботланади. ▷

1–эслатма. Агар $f(x)$ функциянинг бирор x^0 нуқтада локал экстремумга эришса ва шу нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда

$$d f(x^0)=0$$

бўлади.

2–эслатма. $f(x)=f(x_1,x_2,\dots,x_m)$ функциянинг бирор x^0 нуқтада барча хусусий ҳосилаларга эга бўлиши ва

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}=0 \qquad (i=1,2,\dots,m)$$

бўлишидан берилган функциянинг шу нуқтада локал эстремумга эришиши ҳар доим келиб чиқавермайди. (мисоллар кейинги пунктда келтирилади).

Демак, 1-теорема функциянинг локал экстремумга эришишининг зарурий шартини ифодалайди.

$f(x)$ функция хусусий ҳосилаларини нолга айлантирадиган нуқталар унинг стационар нуқталари дейилади.

2^0. Функция экстремумга эришишининг етарли шарти. Айтайлик, $f(x)=f(x_1,x_2,...,x_m)$ функция $x^0\in R^m$ нуқтанинг бирор $U_\delta(x^0)$ атрофида берилган, шу атрофда барча иккинчи тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга ва

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}=0 \qquad (i=1,2,...,m)$$

бўлсин. Бу функциянинг Тейлор формуласи (62-маърузада келтирилган Тейлор формуласида $n=2$ бўлган ҳол),

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}=0 \qquad (i=1,2,...,m)$$

шартни ҳисобга олган ҳолда, қуйидагича

$$f(x)=f(x^0)+\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_k}\Delta x_i\,\Delta x_k \tag{1}$$

бўлади, бунда иккинчи тартибли хусусий ҳосилалар

$$\left(x_1^0+\theta\cdot\Delta x_1,\, x_2^0+\theta\cdot\Delta x_2,...,\, x_m^0+\theta\cdot\Delta x_m\right)$$

$(0<\theta<1)$ нуқтада ҳисобланган ва

$$\Delta x_1=x_1-x_1^0,\ \Delta x_2=x_2-x_2^0,...,\Delta x_m=x_m-x_m^0$$

Берилган $f(x)$ функция иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларининг стационар нуқта x^0 даги қийматларини

$$a_{ik}=\frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_i\,\partial x_k} \qquad (i,k=1,2,...,m)$$

билан белгилаймиз. Барча иккинчи тартибли хусусий ҳосилалар

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_k}$$

ларнинг $x^0=(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)$ нуқтада узлуксизлигидан

$$a_{ik}=a_{ki}$$

ҳамда

$$\frac{\partial^2 f\left(x_1^0+\theta\Delta x_1,\, x_2^0+\theta\cdot\Delta x_2,...,x_m^0+\theta\cdot\Delta x_m\right)}{\partial x_i\,\partial x_k}=\frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_i\,\partial x_k}+\alpha_{ik}=a_{ik}+\alpha_{ik}$$

бўлиши келиб чиқади, бунда

$$\Delta x_i\to 0 \qquad (i=1,2,...,m)\ да \quad \alpha_{ik}\to 0 \quad (k=1,2,...,m)$$

Натижада (1) тенглик ушбу

$$\Delta f(x^0)=f(x)-f(x_0)=\frac{1}{2}\left[\sum_{i,k=1}^{m}a_{ik}\,\Delta x_i\,\Delta x_k+\sum_{i,k=1}^{m}\alpha_{ik}\,\Delta x_i\,\Delta x_k\right]$$

кўринишга келади.

Агар

$$\rho=\sqrt{\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+\ldots+\Delta x_m^2}\ ,$$

$$\Delta x_i=\rho\cdot\zeta_i \qquad (i=1,2,\ldots,m)$$

дейилса, сўнг $\Delta x_i\to 0$ $(i=1,2,\ldots,m)$ да, яъни $\rho\to 0$ да

$$\sum_{i,k=1}^{m}\alpha_{ik}\Delta x_k\,\Delta x_i=\rho^2\sum_{i,k}^{m}\alpha_{ik}\zeta_i\zeta_k=\rho^2\cdot\alpha(\rho)$$

(бунда, $\rho\to 0$ да $\alpha(\rho)\to 0$) бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\Delta f(x^0)=\frac{\rho^2}{2}\left[\sum_{i,k=1}^{m}a_{i,k}\zeta_i\zeta_k+\alpha(\rho)\right] \tag{2}$$

бўлишини топамиз.

Маълумки, $\Delta f(x^0)=f(x)-f(x^0)$ айирма $U_\delta(x^0)$да ишора сақласа, яъни $\forall x\in U_\delta(x^0)$ да

$$\Delta f(x^0)\geq 0$$

бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада локал минимумга,

$$\Delta f(x^0)\leq 0$$

бўлса $f(x)$ функция x^0 нуқтада локал максимумга эришади.
Юқоридаги (2) тенгликдан кўринадики, $\Delta f(x^0)$ нинг ишораси коэффициентлари

$$a_{ik}=\frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_i x_k}\quad (i,k=1,2,\ldots,m)$$

бўлган

$$\sum_{i,k=1}^{m}a_{ik}\zeta_i\zeta_k \tag{3}$$

квадратик формага боғлиқ бўлади.

2–теорема. Агар (3) квадратик форма мусбат аниқланган бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада локал минимумга, манфий аниқланган бўлса, локал максимумга эришади.

Агар (3) квадратик форма ноаниқ бўлса, $f(x)$ функция x^0 нуқтада локал эстремумга эришмайди.
◁ Бу теорема, кейинги пунктда, хусусий ҳолда яъни икки ўзгарувчили функциялар учун исботланади. ▷

3⁰. Хусусий ҳоллар. $m=1$ бўлсин. Бу ҳолда $u=f(x)$ $(x\in R, u\in R)$ функциянинг локал экстремумлари, экстремумнинг зарурий ва етарли шартлари каби тушунча ва тасдиқларга келамиз. Улар [1] да баён этилган.

$m=2$ бўлсин. Бу ҳолда $u=f(x,y)\left((x,y)\in R^2, u\in R\right)$ икки ўзгарувчили функциянинг локал экстремум тушунчалари юзага келиб, бу ҳол учун уларнинг таърифлари қуйидагича бўлади.

Айтайлик, $u=f(x,y)$ функция $E\subset R^2$ тўпламда берилган бўлиб, $(x_0,y_0)\in E$ бўлсин.

Агар шундай $\delta>0$ сон топилсаки, $U_\delta((x_0,y_0))\subset E$ бўлиб, $\forall(x,y)\in U_\delta((x_0,y_0))$ учун

$$f(x,y)\geq f(x_0,y_0) \quad (f(x,y)\leq f(x_0,y_0))$$

бўлса, $f(x,y)$ функция (x_0,y_0) нуқтада локал минимумга (локал максимумга) эришади дейилади. (x_0,y_0) $f(x,y)$ функциянинг локал минимум (максимум) нуқтаси, $f(x_0,y_0)$ миқдор эса функциянинг минимум (максимум) қиймати дейилади.

Агар шундай $\delta>0$ сон топилсаки, $U_\delta((x_0,y_0))\subset E$ бўлиб, $\forall(x,y)\in U_\delta((x_0,y_0))\setminus\{(x_0,y_0)\}$ учун

$$f(x,y)>f(x_0,y_0) \quad (f(x,y)<f(x_0,y_0))$$

бўлса, $f(x,y)$ функция (x_0,y_0) нуқтада қатъий локал минимумга (қатъий локал максимумга) эришади дейилади.

1–мисол. Ушбу

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$$

функцияни $(0,0)$ нуқтада қатъий максимумга эришишини кўрсатинг.

◁ $\delta>0$ $(0<\delta<1)$сонни олиб, $(0,0)$ нуқтанинг $U_\delta((0,0))$ атрофини ҳосил қиламиз. Унда $\forall(x,y)\in U_\delta((0,0))\setminus\{(0,0)\}$ учун

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}<f(0,0)=1$$

бўлади. Демак, берилган функция $(0,0)$ нуқтада максимумга эришади. ▷

Агар $f(x,y)$ функция $(x_0,y_0)\in E\subseteq R^2$ нуқтада локал экстремумга эришса ва шу нуқтада

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$$

хусусий ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=0$$

бўлади.

Бироқ $f(x,y)$ функциянинг бирор (x^*,y^*) нуқтада $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ хусусий ҳосилалари мавжуд бўлиб, улар шу нуқтада нолга тенг бўлса, қаралаётган функция (x^*,y^*) нуқтада экстремумга эришмасдан қолиши мумкин. Масалан,

$$f(x,y)=xy$$

функция

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=x$$

хусусий ҳосилаларга эга бўлиб, улар $(0,0)$ нуқтада нолга тенг,

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0$$

бўлса ҳам бу функция $(0,0)$ нуқтада экстремумга эришмайди (функция графиги – гиперболик параболоидни тасаввур қилинг).

Айтайлик, $f(x,y)$ функция $(x_0,y_0)\in R^2$ нуқтанинг бирор $U_\delta((x_0,y_0))$ атрофида $(\delta>0)$ берилган бўлиб, қуйидаги шартларни бажарсин:

1) $f(x,y)$ функция $U_\delta((x_0,y_0))$ да узлуксиз ва узлуксиз $f'_x, f'_y, f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{y^2}$ хусусий ҳосилаларга эга,

2) (x_0,y_0) стационар нуқта:

$$f'_x(x_0,y_0)=0, \quad f'_y(x_0,y_0)=0$$

Бу $f(x)$ функция учун 2^0 да юритилган мулоҳазаларни қўллаб

$$\Delta f(x_0,y_0)=f(x,y)-f(x_0,y_0)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(a_{11}\Delta x^2+2a_{12}\Delta x\Delta y+a_{22}\Delta y^2+\alpha_{11}\Delta x^2+2\alpha_{12}\Delta x\Delta y+\alpha_{22}\Delta y^2\right) \quad (*)$$

бўлишини топамиз, бунда

$$a_{11}=f''_{x^2}(x_0,y_0), \ a_{12}=f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0), \ a_{22}=f''_{y2}(x_0,y_0)$$

бўлиб,

$$\Delta x\to 0\ , \ \Delta y\to 0 \ \ да \ \ \alpha_{11}\to 0\ , \ \alpha_{12}\to 0\ , \ \alpha_{22}\to 0$$

бўлади.

3–теорема. Агар

$$a_{11}\Delta x^2+2a_{12}\,\Delta x\Delta y+a_{22}\Delta y^2 \tag{1}$$

квадратик форма мусбат аниқланган, яъни

$$a_{11}>0\ , \ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$$

бўлса, $f(x,y)$ функция (x_0,y_0) нуқтада локал минимумга эришади, агар (1) квадратик форма манфий аниқланган, яъни

$$a_{11}<0, \ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$$

бўлса, $f(x,y)$ функуия (x_0,y_0) нуқтада локал максимумга эришади.

◁ Маълумки, $f(x,y)$ функциянинг (x_0,y_0) нуқтада экстремумга эришиши $U_\delta((x_0,y_0))$ да ушбу

$$\Delta f(x_0,y_0)=f(x,y)-f(x_0,y_0)$$

айирманинг ишора сақлаши билан боғлиқ:

$\forall(x,y)\in U_\delta((x_0,y_0))$ да $\Delta f(x_0,y_0)>0$ бўлса,

(x_0,y_0) нуқтада локал минимум, $\Delta f(x_0,y_0)<0$ бўлса, (x_0,y_0) нуқтада локал максимум содир бўлади.

$\Delta f(x_0,y_0)$ айирманинг ишорасини аниқлаш қулай бўлиши мақсадида (1) да

$$\Delta x=\rho\cdot\cos\varphi\ ,\ \Delta y=\rho\cdot\sin\varphi$$

алмаштиришни бажарамиз, бунда

$$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

Натижада (•) муносабат ушбу

$$\Delta f(x_0,y_0)=\frac{\rho^2}{2}\Big[\big(a_{11}\cos^2\varphi+2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi+a_{22}\sin 2\varphi\big)+ \\ +\big(\alpha_{11}\cos^2\varphi+2\alpha_{12}\cos\varphi\sin\varphi+\alpha_{22}\sin^2\varphi\big)\Big] \tag{2}$$

кўринишга келади.

Айтайлик,

$$a_{11}>0\ ,\ a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$$

бўлсин.

Равшанки,

$$a_{11}\cos^2\varphi+2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi+a_{22}\sin^2\varphi= \\ \frac{1}{a_{11}}\Big[(a_{11}\cos\varphi+a_{12}\sin\varphi)^2+\big(a_{11}a_{22}-a_{12}^2\big)\cdot\sin^2\varphi\Big]$$

Айни пайтда бу функция, φ нинг функцияси сифатида $[0,2\pi]$ да узлуксиз бўлиб, ўзининг энг кичик қиймати (уни m билан белгилайлик) m га эга бўлади:

$$\left|a_{11}\cos^2\varphi+2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi+a_{22}\sin^2\varphi\right|\geq m>0$$

Иккинчи томондан, $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ яъни $\rho\to 0$ да $\alpha_{11}\to 0$, $\alpha_{12}\to 0$, $\alpha_{22}\to 0$ бўлганлиги сабабли, ρ нинг етарли кичик қийматларида

$$\left|\alpha_{11}\cos^2\varphi+2\alpha_{12}\cos\varphi\sin\varphi+\alpha_{22}\sin^2\varphi\right|\leq|\alpha_{11}|+2|\alpha_{12}|+|\alpha_{22}|<m$$

бўлаолади.

Демак, $a_{11}>0$, $a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$ бўлганда (2) тенгликнинг ўнг томонидаги ифода мусбат бўлади. бинобарин,

$$\Delta f(x_0,y_0)>0$$

бўлиб, $f(x,y)$ функция (x_0,y_0) нуқтада локал минимумга эришади.

Айтайлик,

$$a_{11}<0\ ,\ a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$$

бўлсин. Бу ҳолда (2) тенгликнинг ўнг томонидаги ифода манфий бўлади. Бинобарин,

$$\Delta f(x_0, y_0) < 0$$

бўлиб, $f(x,y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада локал максимумга эришади.▷

3 – **эслатма.** Агар

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$$

бўлса, $f(x,y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада экстремумга эришмайди.

4–эслатма. Агар

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

бўлса, $f(x,y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада экстремумга эришиши ҳам мумкин, эришмаслиги ҳам мумкин.

2–мисол. Ушбу

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$$

функция экстремумга текширилсин.

◁ Аввало берилган функциянинг стационар нуқталарини топамиз:

$$\begin{matrix} f'_x(x,y) = 2x + y - 2, \\ f'_y(x,y) = x + 2y - 3, \end{matrix} \quad \begin{cases} 2x + y - 2 = 0, \\ x + 2y - 3 = 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} x_0 = \dfrac{1}{3} \\ y_0 = \dfrac{4}{3} \end{matrix}$$

Демак, $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ стационар нуқта.

Равшанки,

$$f''_{x^2}(x,y) = 2\ ,\ f''_{xy}(x,y) = 1\ ,\ f''_{y^2}(x,y) = 2$$

Демак,

$$a_{11} = 2\ ,\ a_{12} = 1\ ,\ a_{22} = 2$$

$a_{11} = 2 > 0$ ва $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 3 > 0$ бўлганлиги учун берилган функция $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ нуқтада локал минимумга эришади ва

$$\min f(x,y) = f\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) = -\frac{7}{3}$$

бўлади. ▷

3–мисол. Ушбу

$$f_1(x,y) = x^4 + y^4\ ,$$
$$f_2(x,y) = -(x^4 + y^4),$$
$$f_3(x,y) = x^3 + y^3\ ,$$

функциялар экстремумга текширилсин.

◁ Берилган функциялар учун $(0,0)$ стационар нуқта бўлади. Бу функциялар учун

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

бўлади. Равшанки, (0,0) нуқтада $f(x,y)$ функция минимумга, $f_2(x,y)$ функция эса максимумга эришади. $f_3(x,y)$ функция (0,0) нуқтада экстремумга эга бўлмайди. ▹

Машқлар

1. 3–теоремада келтирилган $f(x,y)$ функция учун (x_0,y_0) стационар нуқтада

$$f''_{x^2}(x_0,y_0)\cdot f''_{y^2}(x_0,y_0)-\left[f''_{xy}(x_0,y_0)\right]^2<0$$

бўлса, $f(x,y)$ функция (x_0,y_0) нуқтада экстремумга эришмаслиги исботлансин.

2. Ушбу

$$f(x,y)=(y-x)^2+(y+2)^3$$

функция экстремумга текширилсин.

64–маъруза

Ошкормас функциялар

1°. **Ошкормас функция тушунчаси.** Маълумки, $X \subset R, Y \subset R$ тўпламлар ва бирор f қоида берилган ҳолда ҳар бир $x \in X$ сонга f қоидага кўра битта $y \in Y$ сон мос қўйилса, X тўпламда $y = f(x)$ функция аниқланган дейилар эди.

x ва y ўзгарувичларни боғловчи қоида турлича жумладан аналитик ифодалар ёрдамида, жадвал ёрдамида, эгри чизиқ ёрдамида бўлиши мумкин.

Энди x ва y ўзгарувчилар тенглама ёрдамида боғланган ҳолда функция юзага келишини кўрсатамиз.

Айтайлик, x ва y ўзгарувчиларнинг $F(x, y)$ функцияси

$$E = \{(x, y) \in R^2 : a < x < b,\ c < y < d\}$$

тўпламда берилган бўлсин. Ушбу

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

тенгламани қарайлик. Ҳар бир тайинланган $x = x_0$ да (1) тенглама y га исбатан тенгламага айланади. Бу тенглама ягона y_0 ечимга эга бўлсин. Демак,

$$F(x_0, y_0) = 0$$

Бундай хусусиятта эга бўлган x_0 нуқталар бир қанча бўлиши мумкин. Улардан ташкил топган тўпламни X дейлик. Равшанки, бундай $X \subset (a, b)$ бўлади.

Энди X тўпламдан олинган ҳар бир x га $(x \in X)$ (1) тегламанинг ягона ечими y ни мос қўяйлик. Натижада X да аниқланган функция ҳосил бўлади. Уни $\varphi(x)$ дейлик. Демак,

$$\varphi : x \to y \text{ ва } F(x, \varphi(x)) = 0$$

Бу $\varphi(x)$ ошкормас (ошкормас кўринишда берилган) функция дейилади.

1–мисол. Ушбу

$$F(x, y) = y\sqrt{x^2 - 1} - 2 = 0 \tag{2}$$

тенглама ёрдамида ошкормас фукция аниқланиши кўрсатилсин.

◄Равшанки, (2) тенглама ҳар бир $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ да ягона

$$y = \varphi(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

ечимга эга ва

$$F(x, \varphi(x)) = 0$$

Демак, (2) тенглама $\varphi(x)$ ошкормас функцияни аниқлайди. ►

2–мисол. Ушбу

$$F(x,y)=x-y+\frac{1}{2}\sin y=0 \tag{3}$$

тенглама ёрдамида ошкормас функция аниқланиши кўрсатилсин.

◀Берилган тенгламани қуйидагича ёзиб оламиз:

$$x=y-\frac{1}{2}\sin y=\alpha(y) \qquad (y\in(-\infty,+\infty))$$

Бу $\alpha(y)$ функция R да узулуксиз ва $\alpha'(y)=1-\frac{1}{2}\cos y>0$ бўлади. Унда $\alpha(y)$ функция $(-\infty,+\infty)$ да тескари $y=\alpha^{-1}(x)$ функцияга эга ва

$$F(x,\alpha^{-1}(x))=0$$

бўлади. Демак, (3) тенглама ушбу

$$\varphi: x\to\alpha^{-1}(x)$$

ошкормас функцияни аниқлайди. ▶

3-мисол. Ушбу

$$F(x,y)=x^2+y^2-\ln y=0 \qquad (y>0)$$

тенглама y ни x нинг ошкормас функцияси сифатида аниқлайдими?

◀Аниқламайди, чунки ҳар бир $x\in(-\infty,+\infty)$ да $y^2-\ln y>0$ бўлганлиги сабабли, ечимга эга эмас. ▶

Ошкормас функцияларни ўрганишда қуйидаги масалалар муҳимдир:

1) $F(x,y)$ функция бирор $E\subset R^2$ тўпламда берилган ҳолда $y=\varphi(x)$ ошкормас функция мавжуд бўладими ва бу функциянинг аниқланиш тўплами қандай бўлади?
2) (1) тенглама билан аниқланган ошкормас функция $y=\varphi(x)$ қандай хоссаларга эга ва бу хоссалар $F(x,y)$ функция хоссалари билан қандай боғланган?

2°. Ошкормас функциянинг мавжудлиги.

1-теорема. Фараз қилайлик, $F(x,y)$ функция (x_0,y_0) нуқтанинг бирор атрофи

$$U_{hk}((x_0,y_0))=\{(x,y)\in R^2: x_0-h<x<x_0+h \quad y_0-k<y<y_0+k\}$$

да $(h>0,k>0)$ берилган бўлиб, қуйидаги шартларни бажарсин:

1) $F(x,y)$ функция $U_{hk}((x_0,y_0))$ да узлуксиз;

2) Ҳар бир тайин $x\in(x_0-h,x_0+h)$ да y ўзгарувчининг функцияси сифатида ўсувчи;

3) $F(x_0,y_0)=0$.

У ҳолда (x_0,y_0) нуқтанинг шундай атрофи

$$U_{\delta\varepsilon}((x_0,y_0))=\{(x,y)\in R^2: x_0-\delta<x<x_0+\delta,\ y_0-\varepsilon<y<y_0+\varepsilon\}$$

топиладики, $(0<\delta<h,\ 0<\varepsilon<k)$,

а) $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ да

$$F(x,y)=0$$

тенглама ягона y $(y\in(y_0-\varepsilon\,,\,y_0+\varepsilon))$ ечимга эга яъни $F(x,y)=0$ тенглама ёрдамида ошкормас $y=\varphi(x)$ функция аниқланади,

б) $\varphi(x_0)=y_0$ бўлади

в) $y=\varphi(x)$ функция $(x_0-\delta\,,\,x_0+\delta)$ да узлуксиз бўлади.

◄ $U_{hk}((x_0,y_0))$ атрофга тегишли бўлган

$$(x_0\,,y_0-\varepsilon)\quad(x_0,y_0+\varepsilon)\qquad\qquad(0<\varepsilon<k)$$

нуқталарни олиб, $[y_0-\varepsilon\,,\,y_0+\varepsilon]$ сегментда

$$\psi(y)=F(x_0,y)$$

функцияни қараймиз. Теореманинг 2) – шартига кўра $\psi(y)$ ўсувчи, 3) – шартига кўра $\psi(y_0)=F(x_0,y_0)=0$ бўлади. Бунда эса

$$\psi(y_0-\varepsilon)=F(x_0,y_0-\varepsilon)<0\,,$$
$$\psi(y_0+\varepsilon)=F(x_0,y_0+\varepsilon)>0$$

бўлиши келиб чиқади.

Теореманинг 1) – шартига кўра $F(x,y)$ функция $U_{hk}((x_0,y_0))$ да узлуксиз. Унда узлуксиз функциянинг хоссасига кўра, x_0 нуқтанинг шундай $(x_0-\delta\,,x_0+\delta)$ атрофи $(0<\delta<h)$ топиладики, $\forall x\in(x_0-\delta,\,x_0+\delta)$ да

$$F(x,y_0-\varepsilon)<0,$$
$$F(x,y_0+\varepsilon)>0 \tag{3}$$

бўлади.

Энди (x_0,y_0) нуқтанинг

$$U_{\delta\varepsilon}((x_0,y_0))=\{(x,y)\in R^2:x_0-\delta<x<x_0+\delta\,,\ y_0-\varepsilon<y<y_0+\varepsilon\}$$

атрофида

$$F(x,y)=0$$

тенглама y ни x нинг ошкормас функцияси сифатида аниқлашини кўрсатамиз.

Ихтиёрий $x^*\in(x_0-\delta,\,x_0+\delta)$ нуқтани олиб, $[y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon]$ да ушбу

$$g(y)=F(x^*,y)$$

функцияни қараймиз. Равшанки, бу функция $[y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon]$ сегментда узлуксиз ва айни пайтда (3) муносабатга биноан

$$g(y_0-\varepsilon)=F(x^*,y_0-\varepsilon)<0\,,$$
$$g(y_0+\varepsilon)=F(x^*,y_0+\varepsilon)>0$$

бўлади. Унда Больцано – Кошининг теоремасига кўра шундай $y^*\in[y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon]$ нуқта топиладики,

$$g(y^*)=F(x^*,y^*)=0$$

бўлади.

Айни пайтда $g(y)$ функция $[y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon]$ да ўсувчи (қатъий ўсувчи) бўлганлиги сабабли y шу оралиққа биттадан ортиқ нуқтада нолга айланмайди.

Шундай қилиб, ихтиёрий $x\in(x_0-\delta\ , x_0+\delta)$ учун ягона $y\in(y_0-\varepsilon\ , y_0+\varepsilon)$ топиладики,

$$F(x,y)=0$$

бўлади. Бу эса $U_{\delta\varepsilon}((x_0,y_0))$ да $F(x,y)=0$ тенглама y ни x нинг ошкормас функцияси сифатида аниқлашни билдиради:

$$y=\varphi(x)\ :\ \ F(x,\varphi(x))=0.$$

Айтайлик, $x=x_0$ бўлсин. Унда теореманинг 3) шартига кўра

$$F(x_0,y_0)=0$$

бўлади. Бинобарин, аниқланган ошкормас функциянинг x_0 нуқтадаги қиймати $\varphi(x_0)=y_0$ бўлади.

Модомики, $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ учун $\varphi(x)$ га кўра унга мос келадиган $y\in(y_0-\varepsilon\ , y_0+\varepsilon)$ бўлар экан, унда

$$|x-x_0|<\delta\ \Rightarrow\ |y-y_0|=|\varphi(x)-\varphi(x_0)|<\varepsilon$$

бўлади. Демак, ошкормас функция x_0 нуқтада узлуксиз.

Ошкормас функциянинг $\forall x^*\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ нуқтада узлуксиз бўлишини кўрсатиш бу функциянинг x_0 нуқтада узлуксиз бўлишини кўрсатиш кабидир. Демак, мавжудлиги кўрсатилган ошкормас функция $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ да узлуксиз бўлади. ►

3°. **Ошкормас функциянинг ҳосилалари.** Ошкормас функциянинг ҳосиласини аниқлайдиган теоремани келтирамиз.

2-теорема. Фараз қилайлик, $F(x,y)$ функция (x_0,y_0) нуқтанинг бирор атрофи $U_{hk}((x_0,y_0))$ да $(h>0\ , k>0)$ берилган бўлиб, қуйидаги шартларни бажарсин:

1) $U_{hk}((x_0,y_0))$ да узлуксиз;

2) $U_{hk}((x_0,y_0))$ да узлуксиз $F'_x(x,y)$, $F'_y(x,y)$ хусусий ҳосилаларга эга ва $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$;

3) $F(x_0,y_0)=0$.

У ҳолда (x_0,y_0) нуқтанинг шундай $U_{\delta\varepsilon}((x_0,y_0))$ атрофи $(0<\delta<h\ , 0<\varepsilon<k)$ топиладики, $F(x,y)=0$ тенглама y ни x нинг ошкормас $y=\varphi(x)$ функцияси сифатида аниқлайди ва бу $y=\varphi(x)$ функция $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ да узлуксиз дифференциаланувчи бўлиб,

$$\varphi'(x)=-\frac{F'_x(x,\varphi(x))}{F'_y(x,\varphi(x))}$$

бўлади.

◀Теореманинг шартига кўра $F'_y(x,y)$ функция $U_{hk}((x_0,y_0))$ да узлуксиз ва $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$. Айтайлик, $F'_y(x_0,y_0)>0$ бўлсин. Узлуксиз функция хоссасига кўра (x_0,y_0) нуқтанинг шундай $U_{\delta\varepsilon}((x_0,y_0))$ атрофи $(0<\delta<h\ ,\ 0<\varepsilon<k)$ топиладики, $\forall(x,y)\in U_{\delta\varepsilon}((x_0,y_0))$ да $F'_y(x,y)>0$ бўлади. Бундан эса ҳар бир тайин $x\in(x_0-\delta\ ,\ x_0+\delta)$ да $F(x,y)$ функция y ўзгарувчининг функцияси сифатида ўсувчи бўлиши келиб чиқади. У ҳолда 1– теоремага кўра $F(x,y)=0$ тенглама $(x_0-\delta\ ,\ x_0+\delta)$ да y ни x нинг ошкормас $y=\varphi(x)$ функцияси сифатида аниқлайди ва $y=\varphi(x)$ ошкормас функция $x\in(x_0-\delta\ ,\ x_0+\delta)$ да узлуксиз бўлиб, $\varphi(x_0)=y_0$ бўлади.

Айтайлик, $x\in(x_0-\delta\ ,\ x_0+\delta)$, $x+\Delta x\in(x_0-\delta\ ,\ x_0+\delta)$ бўлсин. Равшанки,

$$F(x,y)=0\ ,\ F(x+\Delta x\ ,\ y+\Delta y)=0$$

бўлиб,

$$\Delta F(x,y)=F(x+\Delta x\ ,\ y+\Delta y)-F(x,y)=0 \tag{4}$$

бўлади.

Теореманинг шартидан $F(x,y)$ функциянинг (x,y) нуқтада дифференциаланувчи бўлиши келиб чиқади. Бинобарин,

$$\Delta F(x,y)=F'_x(x,y)\Delta x+F'_y(x,y)\Delta y+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y \tag{5}$$

бўлиб $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ да $\alpha\to 0$, $\beta\to 0$ бўлади.

(4) ва (5) муносабатлардан топамиз:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{F'_x(x,y)+\alpha}{F'_y(x,y)+\beta}$$

Кейинги тенгликда $\Delta x\to 0$ да лимитга ўтсак, унда

$$\varphi'(x)=y'=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$$

ҳосил бўлади.

$U_{\delta\varepsilon}((x_0,y_0))$ да $F'_x(x,y)$, $F'_y(x,y)$ хусусий ҳосилалар узлуксиз ва $F'_y(x,y)\neq 0$ бўлишидан ошкормас функциянинг ҳосиласи

$$\varphi'(x)=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$$

нинг $(x_0-\delta\ ,\ x_0+\delta)$ да узлуксиз бўлиши келиб чиқади. ▶

4–мисол. Ушбу

$$F(x,y)=e^y+y\sin x-x^3+7=0$$

тенглама $(2,0)$ нуқтанинг атрофида y ни x нинг ошкормас функцияси сифатида аниқлаши ва бу ошкормас функциянинг ҳосиласи топилсин.

◀ Равшанки,

$$F(x,y) = e^y + y\sin x - x^3 + 7$$

функция R^2 да аниқланган ва узлуксиз. Бинобарин, у $(2,0)$ нуқтанинг атрофида узлуксиз, $F(x,y)$ функциянинг хусусий ҳосилалари қуйидагича бўлади:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^y + y\sin x - x^3 + 7\right) = y\cos x - 3x^2 ,$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^y + y\sin x - x^3 + 7\right) = e^y + \sin x.$$

Демак, $F(x,y)$ функциянинг хусусий ҳосилалари R^2 да, жумладан $(2,0)$ нуқтанинг атрофида узлуксиз.

Сўнг

$$\frac{\partial F(2,0)}{\partial y} = \left(e^y + \sin x\right)_{x=2,\, y=0} = 1 + \sin 2 \neq 0$$

Ва ниҳоят,

$$F(2,0) = \left(e^y + y\sin x - x^3 + 7\right)_{x=2,\, y=0} = 0$$

бўлади. Унда 2– теоремага кўра

$$F(x,y) = e^y + y\sin x - x^3 + 7 = 0$$

тенглама $(2,0)$ нуқтанинг атрофида y ни x нинг ошкормас функцияси сифатида аниқлайди ва бу ошкормас $\varphi(x)$ функциянинг ҳосиласи

$$\varphi'(x) = \frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = -\frac{y\cos x - 3x2}{e^y + \sin x}$$

бўлади. ▶

1–эслатма. Ошкормас функциянинг ҳосиласини қуйидагича ҳам ҳисобласа бўлади:

$$F(x,y) = 0$$

ни (y ўзгарувчи x нинг функцияси эканини ҳисобга олиб) дифференциаллаб топамиз:

$$F'_x(x,y) + F'_y(x,y)\cdot y' = 0$$

Кейинги тенгликдан эса

$$y' = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$$

бўлиши келиб чиқади.

Айтайлик, $F(x,y)$ функция $U_{\delta\varepsilon}((x_0,y_0))$ да узлуксиз иккинчи тартибли

$$F''_{x^2}(x,y)\ ,\ \ F''_{xy}(x,y)\ ,\ \ F''_{y^2}(x,y)$$

хусусий ҳосилаларга эга бўлсин.

Маълумки,

$$y' = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}.$$

Буни дифференциаллаб топамиз:

$$y'' = -\frac{\left(F'_x(x,y)\right)'_x \cdot F'_y(x,y) - \left(F'_y(x,y)\right)'_x \cdot F'_x(x,y)}{F'^2_y(x,y)}$$

Агар

$$\begin{aligned} \left(F'_x(x,y)\right)'_x &= F''_{x^2}(x,y) + F''_{xy}(x,y)\cdot y' \\ \left(F'_y(x,y)\right)'_x &= F''_{yx}(x,y) + F''_{y^2}(x,y)\cdot y' \end{aligned} \tag{6}$$

эканини ҳисобга олсак. Унда

$$y'' = \frac{\left(F''_{yx}(x,y) + F''_{y^2}(x,y)\cdot y'\right)F'_x(x,y) - \left(F''_{x^2}(x,y) + F''_{xy}(x,y)\cdot y'\right)\cdot F'_y(x,y)}{\left(F'_y(x,y)\right)^2} =$$

$$= \frac{F''_{yx}(x,y)\cdot F'_x(x,y) - F''_{x^2}(x,y)\cdot F'_y(x,y) + \left[F''_{y^2}(x,y)\cdot F'_x(x,y) - F''_{xy}(x,y)\cdot F'_y(x,y)\right]y'}{\left(F'_y(x,y)\right)^2}$$

бўлади. Бу ифодадаги y' нинг ўрнига

$$-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$$

ни қўйиб, ошкормас функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи учун қуйидаги муносабатга (формулага) келамиз:

$$y'' = \frac{2F'_x\cdot F'_y\cdot F''_{xy} - F'^2_y\cdot F''_{x^2} - F'^2_x\cdot F''_{y^2}}{F'^3_y}$$

2–эслатма. Ошкормас функциянинг юқори тартибли ҳосилаларини қуйидагича ҳам ҳисобласа бўлади.

Юқорида

$$F(x,y) = 0$$

ни дфференциаллаб,

$$F'_x(x,y) + F'_y(x,y)\cdot y' = 0$$

бўлишини топган эдик. Буни яна бир марта дифференциаллаб топамиз:

$$\left[F'_x(x,y) + F'_y(x,y)\cdot y'\right]'_x = \left(F'_x(x,y)\right)'_x + y'\left(F'_y(x,y)\right)'_x + F'_y(x,y)\cdot y'' = 0$$

Агар (6) мунсабатлардан фойдалансак, кейинги тенглик ушбу

$$F''_{x^2}(x,y) + 2F''_{xy}(x,y)\cdot y' + F''_{y^2}(x,y)\cdot y'^2 + F'_y(x,y)\cdot y'' = 0$$

тенгликка келади. Ундан эса

$$y'' = -\frac{F''_{x^2}(x,y) + 2F''_{xy}(x,y)\cdot y' + F''_{y^2}(x,y)\cdot y'^2}{F'_y(x,y)}$$

бўлиши келиб чиқади.

5-мисол. Ушбу

$$F(x,y) = xe^y + ye^x - 2 = 0$$

тенглама билан аниқланадиган ошкормас функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи топилсин.

◀ Дифференциаллаб топамиз:

$$(F(x,y))'_x = (xe^y + ye^x - 2)'_x = 0 \quad ,$$

$$e^y + ye^x + (xe^y + e^x)\cdot y' = 0 \tag{7}$$

$$y' = -\frac{e^y + ye^x}{e^x + xe^y} \tag{8}$$

Энди (7) ни яна бир марта дифференциаллаймиз:

$$e^y \cdot y' + y'e^x + ye^x + e^y \cdot y' + xe^y y' \cdot y' + xe^y \cdot y'' + y''e^x + y'e^x = 0$$

Кейинги тенгликдан

$$y'' = -\frac{2e^y y' + 2e^x y' + xe^y \cdot y'^2 + ye^x}{xe^y + e^x}$$

бўлиши келиб чиқади. Бу тенгликдан y' нинг ўрнига (8) да ифодаланган қийматини қўйиб, *ошкормас функциянин* иккинчи тартибли ҳосиласи топилади. ▶

Машқлар

1. Ушбу

$$y^5 + y - x = 0$$

тенглама билан аниқланган $y = \varphi(x)$ ошкормас функциянинг графиги ясалсин.

2. Ушбу

$$x^y = y^x \quad (x \neq y)$$

тенглама билан аниқланадиган $y = \varphi(x)$ ошкормас функциянинг y' ва y'' ҳосилалари топилсин.

14–боб

Функционал кетма–кетлик ва қаторлар

65–маъруза

Функционал кетма–кетликлар ва уларнинг текис яқинлашувчанлиги

1^0. Функционал кетма–кетлик ва лимит функция тушунчалари. Айтайлик, ҳар бир натурал n сонга $E \subset R$ тўпламда аниқланган битта $f_n(x)$ функциянинг мос қўювчи қоида берилган бўлсин. Бу қоидага кўра

$$f_1(x),\ f_2(x)\ ,\ ...,f_n(x),... \tag{1}$$

тўплам ҳосил бўлади. Уни функционал кетма–кетлик дейилади. E тўплам (1) функционал кетма–кетликнинг аниқланиш соҳаси дейилади.

Одатда, (1) функционал кетма–кетлик, унинг n–ҳади ёрдамида $\{f_n(x)\}$ ёки $f_n(x)$ каби белгиланади. Масалан,

$$f_n(x)=\frac{n+1}{n+x^2}\ :\frac{2}{1+x^2},\frac{3}{2+x^2},...,\frac{n+1}{n+x^2},...;$$

$$f_n(x)=\sin\frac{\sqrt{x}}{n}\ :\sin\frac{\sqrt{x}}{1},\sin\frac{\sqrt{x}}{2},...,\sin\frac{\sqrt{x}}{n},...$$

лар функционал кетма–кетликлар бўлади ва уларнинг аниқланиш соҳаси мос равишда

$$E=R\ ,\ E=[0,+\infty)$$

бўлади.

x ўзгарувчининг бирор тайинланган $x=x_0 \in E$ қийматида ушбу

$$\{f_n(x_0)\}:\ f_1(x_0), f_2(x_0),..., f_n(x_0),...$$

сонлар кетма–кетлигига эга бўламиз.

1–таъриф. Агар $\{f_n(x_0)\}$ сонлар кетма–кетлиги яқинлашувчи бўлса, $\{f_n(x)\}$ функционал кетма–кетлик $x=x_0$ нуқтада яқинлашувчи дейилади, x_0 нуқта бу функционал кетма–кетликнинг яқинлашиш нуқтаси дейилади.

2–таъриф. $\{f_n(x)\}$ функционал кетма–кетликнинг барча яқинлашиш нуқталарида иборат $E_0 \subset E$ тўплам, $\{f_n(x)\}$ функционал кетма–кетликнинг яқинлашиш соҳаси дейилади.

Масалан, ушбу

$$f_n(x)=x^n : x, x^2, x^3,..., x^n,...$$

функционал кетма–кетлик аниқлашиш соҳаси $E=R$ бўлиб, у $\forall x \in (-1,1]$ нуқтада яқинлашувчи, $x \in R \setminus (-1,1]$ да узоқлашувчи бўлади.

Бу функционал кетма–кетликнинг яқинлашиш соҳаси $E_0 = (-1,1]$ бўлади.

Фараз қилайлик, $\{f_n(x)\}$ функционал кетма–кетликнинг яқинлашиш соҳаси $E_0 (E_0 \subset R)$ бўлсин. Равшанки, бу ҳолда ҳар бир $x \in E_0$ да

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

кетма–кетлик яқинлашувчи, яъни

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

мавжуд бўлади. Энди ҳар бир $x \in E_0$ га $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ ни мос қўйсак, ушбу

$$f : x \to \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

функция ҳосил бўлади. Бу $f(x)$ функция $\{f_n(x)\}$ функционал кетма–кетликнинг лимит функцияси дейилади:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad (x \in E_0)$$

Бу муносабат қуйидагини англатади:
ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон ва ҳар бир $x \in E_0$ учун шундай натурал $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$ топиладики, ихтиёрий $n > n_0$ да

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon ,$$

яъни

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in E_0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon, x) \in N \ , \forall n > n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

бўлади.

1–мисол. Ушбу

$$f_n(x) = n \sin \frac{\sqrt{x}}{n}$$

функционал кетма–кетликнинг лимит функцияси топилсин.

◀ Берилган функционал кетма–кетлик $E = [0, +\infty)$ да аниқланган. Унинг лимит функцияси

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} n \sin \frac{\sqrt{x}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{\sqrt{x}}{n}}{\frac{\sqrt{x}}{n}} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{x}$$

бўлади. Демак, функционал кетма–кетлик $E = [0, +\infty)$ да яқинлашувчи ва

$$\lim_{n\to\infty} n \sin \frac{\sqrt{x}}{n} = \sqrt{x} . \blacktriangleright$$

2–мисол. Ушбу

$$f_n(x) = x^n$$

функционал кетма–кетликнинг лимит функцияси топилсин.

◀Бу функционал кетма-кетлик $E=R$ да аниқланган. Равшанки

$$\forall x \in (1,+\infty) \text{ да } \lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty} x^n=+\infty \,,$$
$$\forall x \in (-1,1) \text{ да } \lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty} x^n=0,$$
$$x=1 \text{ да } \lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty} 1=1,$$
$$\forall x \in (-\infty,-1) \text{ да } \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ мавжуд эмас.}$$

Демак, берилган функционал кетма-кетлик $E_0=(-1,1]$ яқинлашувчи бўлиб, унинг лимит функцияси

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} x^n=\begin{cases} 0 \;, & \text{агар } -1<x<1 \quad \text{булса} \\ 1 \;, & \text{агар } \;x=1 \quad \text{булса} \end{cases}$$

бўлади. ▶

3-мисол. Ушбу

$$f_n(x)=n^2\left(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x}\right) \qquad (x>0)$$

функционал кетма-кетликнинг лимит функцияси топилсин.

◀ Берилган функционал кетма-кетликнинг лимит функцияси қуйидагича топилади:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x}\right)=\lim_{n\to\infty} n^2\left(x^{\frac{1}{n}}-x^{\frac{1}{n+1}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty} n^2 x^{\frac{1}{n+1}}\left(x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n}x^{\frac{1}{n+1}}\cdot\frac{x^{\frac{1}{n^2+n}}-1}{\frac{1}{n^2+n}}=\ln x. \;▶$$

2^0. Функционал кетма-кетликнинг текис яқинлашувчанлиги. Фараз қилайлик, $\{f_n(x)\}$:

$$f_1(x)\,,\; f_2(x),\ldots, f_n(x),\ldots$$

функционал кетма-кетлик E_0 тўпламда яқинлашувчи (яъни яқинлашиш соҳаси E_0) бўлиб, унинг лимит функцияси $f(x)$ бўлсин:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$$

Маълумки, бу муносабат

$$\forall \varepsilon>0,\, x\in E_0\,,\; \exists n_0=n_0(\varepsilon,x)\in N,\; \forall n>n_0:\; |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

бўлишини англатади. Шуни таъкидлаш лозимки, юқоридаги натурал n_0 сон ихтиёрий олинган $\varepsilon>0$ сон билан бирга қаралаётган $x\in E_0$ нуқтага ҳам боғлиқ бўлади (чунки, $x\in E_0$ нинг турли қийматларида уларга мос кетма-кетлик, умуман айтганда турлича бўлади).

3–таъриф. Агар $\forall\varepsilon>0$ сон олинганда ҳам шу $\varepsilon>0$ гагина боғлиқ бўлган натурал $n_0=n_0(\varepsilon)$ сон топилсаки, ихтиёрий $x\in E_0$ да

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, яъни

$$\forall\varepsilon>0\ ,\ \exists n_0=n_0(\varepsilon)\in N\ \forall n>n_0\quad \forall x\in E_0:\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

бўлса, $\{f_n(x)\}$ функционал кетма–кетлик E_0 тўпламда $f(x)$ га текис яқинлашади (функционал кетма–кетлик E_0 тўпламда текис яқинлашувчи) дейилади.

Шундай қилиб, $\{f_n(x)\}$ функционал кетма–кетлик E_0 тўпламда $f(x)$ лимит функцияга эга бўлса, унинг шу лимит функциясига яқиналишиши икки хил бўлар экан:

1) $\forall\varepsilon>0, x\in E_0\ ,\ \exists n_0=n_0(\varepsilon,x)\in N\ \ ,\forall n>n_0:\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

бўлса, $\{f_n(x)\}$ функционал кетма–кетлик E_0 да $f(x)$ га яқинлашади (оддий яқинлашади). Бу ҳолда

$$f_n(x)\to f(x)\qquad (x\in E_0)$$

каби белгиланади.

2) $\forall\varepsilon>0\ ,\ \exists n_0=n_0(\varepsilon)\in N\ \forall n>n_0\quad \forall x\in E_0\ :\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

бўлса, $\{f_n(x)\}$ функционал кетма–кетлик E_0 да $f(x)$ га текис яқинлашади. Бу ҳолда

$$f_n(x)\underset{\to}{\to} f(x)\qquad (x\in E_0)$$

каби белгиланади.

Равшанки, $\{f_n(x)\}$ функционал кетма–кетлик E_0 тўпламда $f(x)$ га $f(x)$ функцияга текис яқинлашса у шу тўпламда $f(x)$ га яқинлашади:

$$f_n(x)\underset{\to}{\to} f(x)\ \Rightarrow\ f_n(x)\to f(x)\qquad (x\in E_0).$$

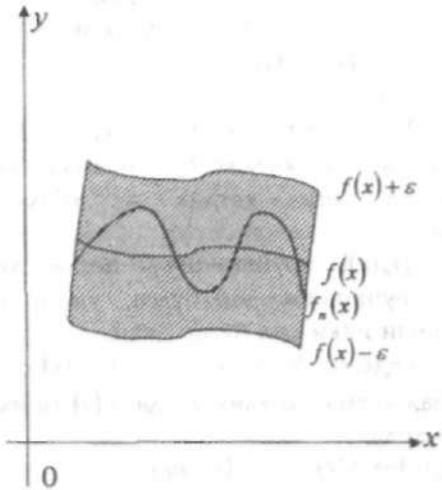
Айтайлик,

$$f_n(x)\underset{\to}{\to} f(x)\qquad (x\in E_0)$$

бўлсин . Бу ҳолда $\forall n>n_0$ ва $\forall x\in E_0$ да

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,\ \text{яъни}\ f(x)-\varepsilon<f_n(x)<f(x)+\varepsilon$$

бўлади. Бу эса $\{f_n(x)\}$ функционал кетма–кетликнинг бирор ҳадидан бошлаб, кейинги барча ҳадлари $f(x)$ функциянинг "ε – оралиғи"да бутунлай жойлашишини билдиради(1 – чизма)



1 – чизма

4–мисол. Ушбу

$$f_n(x)=\frac{\sin nx}{n}$$

функционал кетма – кетликнинг R да текис яқинлашувчилиги кўрсатилсин.

◀ Равшанки,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin nx}{n}=0.$$

Демак, лимит функция $f(x)=0$.

Агар $\forall\varepsilon>0$ сон олинганда $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ дейилса, унда $\forall n>n_0$ ва $\forall x\in R$ учун

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|=\left|\frac{\sin nx}{n}-0\right|=\left|\frac{\sin nx}{n}\right|\le\frac{1}{n}\le\frac{1}{n_0+1}<\varepsilon$$

бўлишини топамиз. Демак таърифга биноан

$$\frac{\sin nx}{n}\rightrightarrows 0$$

бўлади. ▶

Фараз қилайлик, $\{f_n(x)\}$ функционал кетма – кетлик E_0 тўпламда $f(x)$ лимит функцияга эга бўлсин.

1–теорема. $\{f_n(x)\}$ функционал кетма – кетлик E_0 тўпламда $f(x)$ функцияга текис яқилашиши учун

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in E_0}\left|f_n(x)-f(x)\right|=0$$

бўлиши зарур ва етарли.

◀ **Зарурлиги**. Айтайлик,

$$f_n(x) \underset{\rightarrow}{\overset{\rightarrow}{}} f(x) \qquad (x \in E_0)$$

бўлсин. Таърифга биноан

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in N,\ \forall n > n_0,\ \forall x \in E_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

бўлади. Бу тенгсизликдан

$$\sup_{x \in E_0} |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$$

бўлиб ундан.

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in E_0} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

бўлиши келиб чиқади.

Етарлилиги. Айтайлик

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in E_0} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

бўлсин. Лимит таърифга кўра

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in N,\ \forall n > n_0, : \mathop{Sup}_{x \in E_0} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

бўлади. Равшанки

$$|f_n(x) - f(x)| \le \sup_{x \in E_0} |f_n(x) - f(x)|$$

У ҳолда $\forall x \in E_0$ учун

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

бўлади. Бундан

$$f_n(x) \underset{\rightarrow}{\overset{\rightarrow}{}} f(x) \qquad (x \in E_0)$$

бўлиши келиб чиқади. ▶

5–мисол. Ушбу

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$$

функционал кетама–кетликни $E_0 = R$ да текис яқинлашувчилиги кўрсатилсин.

◀ Берилган функционал кетма–кетликнинг лимит функцияси

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} = |x| \qquad (x \in R)$$

бўлади. Энди

$$\sup_x |f_n(x) - f(x)|$$

ни топамиз:

$$\sup_{x\in R}\left|\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}-|x|\right|=\sup_{x\in R}\left|\frac{\frac{1}{n^2}}{\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+|x|\right)}\right|=\sup_{x\in R}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+||x|\right)}=\frac{1}{n}$$

Демак,

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in R}\left|\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}-|x|\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

бўлиб,

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}\underset{\to}{\overset{\to}{}}|x| \qquad (x\in R)$$

бўлади. ▶

Эслатма. Агар $\{f_n(x)\}$ функционал кетма – кетлиги учун $E\subset R$ тўпламда

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in E}|f_n(x)-f(x)|\neq 0$$

бўлса, $\{f_n(x)\}$ функционал кетма – кетлик E да текис яқинлашмайди.

Энди функционал кетма – кетликнинг лимит функцияга эга бўлиши ва унга текис яқинлашишини ифодаловчи теоремани келтирамиз:

2–теорема (Коши теоремаси). $\{f_n(x)\}$ функционал кетма – кетлик E тўпламда лимит функцияга эга бўлиши ва унга текис яқинлашиши учун $\forall\varepsilon>0$ сон олинганда ҳам шундай $n_0=n_{0(\varepsilon)}\in N$ топилиб, $\forall n>n_0$, $\forall p\in N$ ва $\forall x\in E$ да

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon,$$

яъни

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0=n_0(\varepsilon)\in N,\ \forall n>n_0,\ \forall p\in N \text{ да}$$

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon \tag{2}$$

бўлиши зарур ва етарли.

◀ **Зарурлиги.** Айтайлик, E тўпламда $\{f_n(x)\}$ функционал кетма – кетлик лимит функция $f(x)$ га эга бўлиб, унга текис яқинлашсин:

$$f_n(x)\underset{\to}{\overset{\to}{}}f(x) \qquad (x\in E_0)$$

Текис яқинлашиш таърифига кўра

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0=n_0(\varepsilon)\in N,\ \forall k>n_0,\ \forall x\in E:|f_k(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{бўлади}$$

Хусусан, $k=n$, $n>n_0$ ва $k=n+p$, $p\in N$ да

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |f_{n+p}(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизликлар бажарилиб, улардан

$$\left|f_{n+p}(x)-f_n(x)\right|=\left|f_{n+p}(x)-f(x)-(f_n(x)-f(x))\right|\le$$
$$\le\left|f_{n+p}(x)-f(x)\right|+\left|f_n(x)-(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$
бўлиши келиб чиқади. Демак, (2) шарт ўринли.

Етарлилиги. $\{f_n(x)\}$ функционал кетма–кетлик учун (2) шарт бажарилсин. Уни қуйидагича ёзамиз:

$\forall\varepsilon>0$, $\exists n_0=n_0(\varepsilon)\in N$, $\forall n>n_0$, $\forall p\in N$, $\forall x\in E$ да

$$\left|f_{n+p}(x)-f_n(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{3}$$

бўлади.

Равшанки, тайин $x_0\in E$ да $\{f_n(x_0)\}$ сонлар кетма–кетлиги учун (3) шартнинг бажарилишидан унинг фундаментал кетма–кетлик эканлиги келиб чиқади. Коши теоремасига кўра $\{f_n(x_0)\}$ яқинлашувчи бўлади. Бинобарин, чекли

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x_0) \tag{4}$$

лимит мавжуд.

Модомики, ҳар бир $x\in E$ да (4) лимит мавжуд бўлар экан, унда аввал айганимиздек, E тўпламда аниқланган

$$x\to\lim_{n\to\infty}f_n(x) \qquad (x\in E)$$

функция ҳосил бўлади Уни $f(x)$ билан белгилаймиз. Бу функция $\{f_n(x)\}$ функционал кетма–кетликнинг лимит функцияси бўлади:

$$f_n(x)\to f(x) \qquad (x\in E)$$

Энди (3) тенгсизликда, n ва x ларни тайинлаб $(n>n_0, x\in E)$ $p\to\infty$ да лимитга ўтамиз. Натижада

$$\left|f(x)-f_n(x)\right|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

ҳосил бўлади. Бу

$$f_n(x)\overset{\to}{\underset{\to}{}}f(x) \qquad (x\in E_0)$$

бўлишини билдиради. ►

6–мисол. Ушбу

$$f_n(x)=\frac{\ln nx}{\sqrt{nx}}$$

функционал кетма–кетлик $E=(0,1)$ тўпламда текис яқинлашувчиликка текширилсин.

◄Агар ихтиёрий $k\in N$ учун

$$n=k\ ,\ p=k=n\ ,\ x^*=\frac{1}{k}=\frac{1}{n}$$

дейилса,

$$\left|f_{n+p}(x^*)-f(x^*)\right|=\left|f_{2n}\left(\frac{1}{n}\right)-f_n\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\left|\frac{\ln 2}{\sqrt{2}}-\ln 1\right|=\frac{\ln 2}{\sqrt{2}}=\varepsilon_0$$

бўлади. Демак,

$$\exists\varepsilon_0=\frac{\ln 2}{\sqrt{2}}\ \ \forall k\in N,\ \exists n\geq k,\ \exists p\in N,\ \exists x^*=\frac{1}{n}\in(0,1):\left|f_{n+p}(x^*)-f_n(x^*)\right|\geq\varepsilon_0 .$$

Бу эса юқоридаги теореманинг шартини бажарилмаслигини кўрсатади. Демак, берилган функционал кетма-кетлик $E=(0,1)$ да текис яқинлашувчи эмас. ▶

Айтайлик, $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик E тўпламда яқинлашувчи бўлиб, $f(x)$ функция унинг лимит функцияси бўлсин:

$$f_n(x)\to f(x)\qquad (x\in E)$$

Агар

$$\exists\varepsilon_0>0\ ,\ \forall k\in N\ ,\ \exists n>k\ ,\ \exists x^*\in E:\left|f_n(x^*)-f(x^*)\right|\geq\varepsilon_0$$

бўлса, $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик E тўпламда $f(x)$ функцияга нотекис яқинлашади дейилади.

7-мисол. Ушбу

$$f_n(x)=n\sin\frac{1}{nx}$$

функционал кетма-кетлик $E=(0,1)$ да текис яқинлашишга текширилсин.

◀Равшанки,

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{1}{nx}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{nx}}{\frac{1}{nx}\cdot x}=\frac{1}{x}$$

Демак, берилган функционал кетма-кетликнинг лимит функцияси $f(x)=\frac{1}{x}$ бўлади.

Айтайлик, $x^*=\frac{1}{n}$ бўлсин. Унда

$$\left|f_n(x^*)-f(x^*)\right|=|n\sin 1-n|\geq 1-\sin 1=\varepsilon_0$$

муносабат ихтиёрий $n\in N$ да ўринли бўлади.

Демак, $f_n(x)=n\sin\frac{1}{nx}$ функционал кетма-кетлик лимит функция $f(x)=\frac{1}{x}$ га $E=(0,1)$ да нотекис яқинлашади. ▶

3^0. Текис яқинлашувчи функционал кетма-кетликнинг хоссалари. Текис яқинлашувчи функциянал кетма-кетликлар қатор хоссаларга эга. Бу хоссаларни келтирамиз.

Айтайлик, $\{f_n(x)\}$:

$$f_1(x)\ ,\ f_2(x),\dots,f_n(x),\dots$$

функционал кетма-кетлик $E \subset R$ тўпламда яқинлашувчи бўлиб, $f(x)$ унинг лимит функцияси бўлсин:

$$f_n(x) \to f(x) \qquad (x \in E)$$

1-хосса. Агар $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг ҳар бир $f_n(x)$ $(n=1,2,3,...)$ ҳади E тўпламда узлуксиз бўлиб,

$$f_n(x) \underset{\to}{\to} f(x) \qquad (x \in E)$$

бўлса, лимит функция $f(x)$ шу E тўпламда узлуксиз бўлади.

Демак, бу ҳолда

$$\lim_{t \to x}\left(\lim_{n \to \infty} f_n(t)\right) = \lim_{n \to \infty}\left(\lim_{t \to x} f_n(t)\right)$$

муносабат ўринли бўлади.

2-хосса. Агар $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг ҳар бир $f_n(x)$ $(n=1,2,3,...)$ ҳади $E=[a,b]$ да узлуксиз бўлиб,

$$f_n(x) \underset{\to}{\to} f(x) \qquad (x \in [a,b])$$

бўлса,

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

бўлади.

Демак, бу ҳолда

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x)\right)dx$$

муносабат ўринли бўлади.

3-хосса. Агар $\{f_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг ҳар бир $f_n(x)$ $(n=1,2,3,...)$ ҳади $E=[a,b]$ да узлуксиз $f_n'(x)$ $(n=1,2,3,...)$ ҳосилаларга эга бўлиб,

$$f_n'(x) \underset{\to}{\to} \varphi(x) \qquad (x \in [a,b])$$

бўлса,

$$\varphi(x) = f'(x)$$

бўлади.

Шу каби хоссаларга кейинроқ ўрганиладиган текис яқинлашувчи функционал қаторлар ҳам эга бўлади. Айни пайтда улар бир мулоҳаза асосида исботланади. Мазкур хоссаларнинг исботини функционал қаторларга нисбатан келтирамиз.

Машқлар.

1. Ушбу

$$f_n(x) = n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$$

функционал кетма – кетликни $E=(0,+\infty)$ да текис яқинлашувчиликка текширилсин.

2. Айтайлик, $f(x)$ функция (a,b)да узлуксиз $f'(x)$ ҳосилага эга бўлиб,

$$f_n(x)=n\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right)$$

бўлсин. Бу функционал кетма – кетликнинг $[a_1,b_1]\subset(a,b)$ да $f'(x)$ га текис яқинлашиши исботлансин.

66-маъруза

Функционал қаторлар ва уларнинг текис яқинлашувчилиги

1⁰. Функционал қатор ва унинг йиғиндиси. Фараз қилайлик, $E \subset R$ тўпламда аниқланган

$$u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$$

функционал кетма-кетлик берилган бўлсин. Бу кетма-кетлик ҳадлари ёрдамида тузилган қуйидаги

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

ифода функционал қатор дейилади ва $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ каби белгиланади:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \qquad (1)$$

E тўплам функционал қаторнинг аниқланиш соҳаси дейилади. Масалан,

1) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \ldots,$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{nx} = e^x + 2e^{2x} + 3e^{3x} + \ldots + ne^{nx} + \ldots$

функционал қаторлар бўлиб, уларнинг аниқланиш соҳаси $E = (-\infty, +\infty)$ бўлади. (1) функционал қатор ҳадларидан ушбу

$$\begin{aligned} &S_1(x) = u_1(x), \\ &S_2(x) = u_1(x) + u_2(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad (2)$$

йиғиндиларини тузамиз. Улар (1) функционал қаторнинг қисмий йиғиндилари дейилади. Демак, (1) функционал қатор берилган ҳолда ҳар доим бу қаторнинг (2) қисмий йиғиндиларидан иборат $\{S_n(x)\}$:

$$S_1(x), S_2(x), \ldots, S_n(x), \ldots$$

функционал кетма-кетлик ҳосил бўлади. Равшанки, $x = x_0 \in E$ нуқтада $\{S_n(x_0)\}$ сонлар кетма-кетлиги бўлади.

1-таъриф. Агар $\{S_n(x_0)\}$ яқинлашувчи бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор $x = x_0$ нуқтада яқинлашувчи дейилади, x_0 нуқта функционал қаторнинг яқинлашиш нуқтаси дейилади.

2-таъриф. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қаторнинг барча яқинлашиш нуқталаридан иборат $E_0 \subset E$ тўплам, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қаторнинг яқинлашиш соҳаси дейилади. Бу ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор E_0 тўпламда яқинлашувчи ҳам деб юритилади.

Агар E_0 тўпламда ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)| = |u_1(x)| + |u_2(x)| + \ldots + |u_n(x)| + \ldots$$

қатор яқинлашувчи бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор E_0 да абсолют яқинлашувчи дейилади.

3–таъриф. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат $\{S_n(x)\}$ кетма-кетликнинг лимит функцияси $S(x)$:

$$S_n(x) \to S(x) \qquad (x \in E_0)$$

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор йиғиндиси дейилади.

Уни
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x) \qquad (x \in E_0)$$

каби ёзилади.

1– мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \ldots$$

функционал қаторнинг яқинлашиш соҳаси ва йиғиндиси топилсин.

◀Берилган функционал қаторнинг аниқланиш соҳаси $E = R$ бўлади. Қаторнинг қисмий йиғиндисини топамиз:

$$S_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \ldots = \begin{cases} \dfrac{1-x^n}{1-x}, & агар\ \ x \neq 1 \\ n, & агар\ \ x = 1 \end{cases}$$

$n \to \infty$ да $S_n(x)$ нинг лимити x га боғлиқ:

а) $x \in (-1, 1)$ да

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x};$$

б) $x \in [1, +\infty)$ да

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \infty;$$

в) $x \in (-\infty,-1]$ да $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ мавжуд эмас.

Демак, берилган функционал қаторнинг яқинлашиш соҳаси $E_0 = (-1,1)$ бўлиб, йиғиндиси

$$S(x) = \frac{1}{1-x}$$

бўлади. ►

2-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$$

функционал қаторнинг яқинлашиш соҳаси топилсин.

◄Сонли қаторлар назариясидаги Даламбер аломатидан фойдаланиб топамиз:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{1+x^{2n+2}} : \frac{x^n}{1+x^{2n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x(1+x^{2n})}{1+x^{2n+2}}\right|;$$

а) $x \in (-1,1)$ да

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x(1+x^{2n})}{1+x^{2n+2}}\right| = |x|$$

Бу ҳолда берилган функционал қатор $(-1,1)$ да яқинлашувчи бўлади

б) $x \in (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ да

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x(1+x^{2n})}{1+x^{2n+2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{x^{2n+1}}+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^{2n+2}}+1}\right| = \left|\frac{1}{x}\right|$$

бўлиб, функционал қатор $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ да яқинлашувчи бўлади.

в) $x = \pm 1$ да берилган функционал қатор мос равишда ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2}$$

сонли қаторга айланади ва улар узоқлашувчи бўлади.

Шундай қилиб қаралаётган функционал қаторнинг яқинлашиш соҳаси

$$E_0 = R \setminus \{-1;1\} = (-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$$

бўлади.▶

2^0. Функционал қаторнинг текис яқинлашувчилиги. Айтайлик,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

функционал қатор E_0 тўпламда яқинлашувчи (яъни қаторнинг яқинлашиш соҳаси E_0) бўлиб, йиғиндиси $S(x)$ бўлсин:

$$S_n(x) \to S(x) \qquad (x \in E_0), \tag{3}$$

бунда $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$

(3) муносабат

$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in E_0,\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon, x) \in N,\ \forall n > n_0 :\ |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$

бўлишини англатади.

4−таъриф. Агар E_0 тўпламда

$$S_n(x) \overset{\to}{\underset{\to}{}} S(x) \qquad (x \in E_0)$$

яъни

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in N, \ \forall n > n_0 \quad \forall x \in E_0 \ : \ |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$$

бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор E_0 тўпламда текис яқинлашувчи дейилади.

Агар

$$r_n(x) = S(x) - S_n(x)$$

дейилса, функционал қаторнинг E_0 тўпламда текис яқинлашувчилигини қуйидагича

$$r_n(x) \underset{\to}{\to} 0 \qquad (x \in E_0)$$

яъни

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in E_0, \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in N, \ \forall n > n_0, \ \forall x \in E_0 : |r_n(x)| < \varepsilon$$

таърифлаш мумкин бўлади.

Шундай қилиб

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

функционал қатор, унинг қисмий йиғиндиси

$$S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...$$
ва йиғиндиси $S(x)$ учун
$$S_n(x)\to S(x) \qquad (x\in E_0)$$
бўлса, функционал қатор E_0 да яқинлашувчи,
$$S_n(x)\overset{\to}{\underset{\to}{}} S(x) \qquad (x\in E_0)$$
бўлса, функционал қатор E_0 да текис яқинлашувчи бўлади.

1–теорема. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ функционал қатор E_0 да қатор йиғиндиси $S(x)$ функцияга текис яқинлашиши учун
$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in E_0}|S_n(x)-S(x)|=0,$$
яъни
$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in E_0}|r_n(x)|=0$$
бўлиши зарур ва етарли.

◀Бу теореманинг исботи равшан, қаралсин 99 – бет.▶

3–мисол. Ушбу
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$$
функционал қаторнинг $[0,+\infty)$ да текис яқинлашувчи бўлиши исботлансин.

◀Берилган функционал қаторнинг қисмий йиғиндисини ҳисоблаб, сўнг йиғиндисини топамиз:
$$S_n(x)=\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+...+\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}=$$
$$=\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)+...+\left(\frac{1}{x+n}-\frac{1}{x+n+1}\right)=$$
$$=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+n+1}.$$
$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+n+1}\right)=\frac{1}{x+1}$$
Демак,
$$S(x)=\frac{1}{x+1}.$$
Унда
$$S_n(x)-S(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+n+1}-\frac{1}{x+1}=-\frac{1}{x+n+1}$$
бўлиб,
$$\sup_{x\in[0,+\infty)}|S_n(x)-S(x)|=\frac{1}{n+1}$$
бўлади. Кейинги тенгликдан
$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,+\infty)}|S_n(x)-S(x)|=0$$
бўлиши келиб чиқади. 1 – теоремага кўра берилган функционал қатор $[0,+\infty)$ да текис яқинлашувчи.▶

Эслатма. Агар

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,+\infty)} |S_n(x)-S(x)| \neq 0$$

бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор E_0 да текис яқинлашувчи бўлмайди. Масалан,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1+x+x^2+...+x^{n-1}+...$$

функционал қаторнинг $(-1,1)$ да яқинлашувчи, йиғиндиси

$$S(x)=\frac{1}{1-x}$$

бўлишини кўрган эдик. Бу функционал қатор учун

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{-1<x<1} |S_n(x)-S(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{-1<x<1} \left|\frac{x^n}{1-x}\right| = +\infty$$

бўлади. Демак, функционал қатор $(-1,1)$ да текис яқинлашувчи эмас.

Фараз қилайлик,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...$$

функционал қатор $E\subset R$ тўпламда берилган бўлсин.

2–теорема (Коши). $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қаторнинг E тўпламда текис яқинлашувчи бўлиши учун

$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0=n_0(\varepsilon)\in N,\ \forall n>n_0,\ \ \forall p\in N,\ \forall x\in E$ да

$$|S_{n+p}(x)-S_n(x)| = |u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+...+u_{n+p}(x)|<\varepsilon$$

бўлиши зарур ва етарли.

Бу теореманинг исботи 65–маърузадаги 2–теоремадан келиб чиқади.

3⁰. Функционал қаторларнинг текис яқинлашувчилиги аломатлари.

а) Вейерштрасс аломати. Айтайлик, E тўпламда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+... \tag{5}$$

функционал қатор берилган бўлиб,

1) $\forall n\in N,\ \forall x\in E$ да $|u_n(x)|\le C_n$,

2) $\sum_{n=1}^{\infty} C_n = C_1+C_2+...+C_n+...$ сонли қатор яқинлашувчи бўлсин.

У ҳолда (5) функционал қатор E тўпламда текис яқинлашувчи бўлади.

◀1) – шартга кўра $\forall n>n_0,\ \forall p\in N$ ва $\forall x\in E$ учун

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+...+u_{n+p}(x)| \le |u_{n+1}(x)|+|u_{n+2}(x)|+...+|u_{n+p}(x)| \le C_{n+1}+C_{n+2}+...+C_{n+p}$$

бўлиб, 2)–шартда, яъни $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ қаторнинг яқинлашувчилигидан Коши теоремасига биноан

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in N,\ \forall n > n_0,\ \forall p \in N$ да

$$C_{n+1} + C_{n+2} + \ldots + C_{n+p} < \varepsilon$$

бўлади. Демак,

$$\left|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)\right| < \varepsilon .$$

Юқоридаги 2−теоремага кўра $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор E тўпламда текис яқинлашувчи бўлади.▶

4−мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin x}{\sqrt{1+n^2}\left(1+nx^2\right)}$$

функционал қатор текис яқинлашишига текширилсин.

◀Берилган қаторнинг аниқланиш соҳаси $E = (-\infty, +\infty)$ бўлиб, унинг умумий ҳади

$$u_n(x) = \frac{x \sin nx}{\sqrt{1+n^2}\left(1+nx^2\right)} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

бўлади. Равшанки,

$$\left|u_n(x)\right| = \left|\frac{x \sin x}{\sqrt{1+n^2}\left(1+nx^2\right)}\right| \le \frac{|x|}{\sqrt{1+n^2}\left(1+nx^2\right)}$$

Энди $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ учун

$$\frac{|x|}{1+nx^2} \le \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

бўлишини эътиборга олиб топамиз:

$$\frac{|x|}{\sqrt{1+n^2}\left(1+nx^2\right)} \le \frac{1}{2\sqrt{n\left(1+n^2\right)}} \le \frac{1}{2n^{3/2}} .$$

Демак, берилган функционал қаторнинг ҳадлари учун

$$\left|u_n(x)\right| \le \frac{1}{2n^{3/2}}$$

бўлади. Маълумки, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ қатор яқинлашувчи. Бинобарин, Вейерштрасс аломатига кўра берилган функционал қатор $(-\infty, +\infty)$ да текис яқинлашувчи бўлади.▶

Функционал қаторларнинг текис яқинлашишини ифодаловчи кейинги аломатларини исботсиз келтирамиз.

б) Дирихле аломати. Айтайлик, $E \subset R$ тўпламда аниқланган $u_n(x)$ ва $v_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ функциялар қуйидаги шартларни бажарсин:

1) $\forall x \in E$ да $\{u_n(x)\}$ кетма−кетлик монотон;

2) $\{u_n(x)\}$ функционал кетма−кетлик E да 0 га текис яқинлашувчи:

$$u_n(x) \underset{\rightarrow}{\rightarrow} 0 \quad (x \in E);$$

3) шундай $C \in R$ мавжудки, $\forall n \in N,\ \forall x \in E$ да

$$\left|v_1(x)+v_2(x)+\ldots+v_n(x)\right|=\left|\sum_{k=1}^{n} v_k(x)\right|\le C.$$

У ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\cdot v_n(x)$$

функционал қатор E тўпламда текис яқинлашувчи бўлади.

5‒мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x\cdot\sin nx}{\sqrt{n+x}}$$

функционал қаторнинг $E=[0,+\infty)$ да текис яқинлашувчилиги исботлансин.

◀Айтайлик,

$$u_n(x)=\frac{1}{\sqrt{n+x}}, \quad v_n(x)=\sin x\cdot\sin nx$$

бўлсин. Бу функциялар учун Дирихле аломатидаги учта шарт бажарилади. Ҳақиқатан ҳам,

1) $\forall x\in E$ да $u_n(x)=\frac{1}{\sqrt{n+x}}$ учун

$$\frac{1}{\sqrt{n+x}}-\frac{1}{\sqrt{n+1+x}}=\frac{\sqrt{n+1+x}-\sqrt{n+x}}{\sqrt{n+x}\sqrt{n+1+x}}=\frac{1}{\sqrt{(n+x)(n+1+x)}\cdot\left(\sqrt{n+1+x}+\sqrt{n+x}\right)}>0$$

бўлганлигидан унинг камаювчилиги келиб чиқади;

2) равшанки,

$$u_n(x)=\frac{1}{\sqrt{n+x}}\le\frac{1}{\sqrt{n}},\ n\to\infty \text{ да } \frac{1}{\sqrt{n}}\to 0.$$

Демак,

$$u_n(x)\overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{}}0\ (x\in E);$$

3) бу ҳолда

$$\left|\sum_{k=1}^{n} v_k(x)\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}\sin x\sin kx\right|=2\left|\cos\frac{x}{2}\right|\left|\sin\frac{nx}{2}\cdot\sin\frac{n+1}{2}x\right|\le 2$$

бўлади.

Дирихле аломатига кўра берилган функционал қатор $E=[0,+\infty)$ да текис яқинлашувчи.▶

в) Абель аломати. Айтайлик, $E\subset R$ тўпламда аниқланган $u_n(x)$ ва $v_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ функциялар қуйидаги шартларни бажарсин.

1) $\forall x\in E$ да $\{u_n(x)\}$ кетма‒кетлик монотон;

2) шундай $C\in R$ топиладики, $\forall n\in N,\ \forall x\in E$ да

$$|u_n(x)|\le C;$$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ функциялар қатор E тўпламда текис яқинлашувчи.

У ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\cdot v_n(x)$

функционал қатор E тўпламда текис яқинлашувчи бўлади.

6−мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$$

функционал қаторнинг $E=[0,1]$ текис яқинлашувчи эканлиги исботлансин.

◀Айтайлик

$$u_n(x)=x^n,\ v_n(x)=\frac{(-1)^{n+1}}{n}\qquad (x\in[0,1])$$

бўлсин. Бу функциялар учун Абель аломатидаги учта шарт бажарилади (бу равшан). Унда Абель аломатига кўра берилган функционал қатор $[0,1]$ да текис яқинлашувчи бўлади.▶

Машқлар.

1. Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\qquad (x\in E)$$

функционал қатор E тўпламда текис яқинлашувчи бўлса, $\{u_n(x)\}$ функционал кетма−кетликни E тўпламда 0 га текис яқинлашиши исботлансин.

2. Ушбу $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}arctgnx\qquad (x\in R)$ функционал қатор R да текис яқинлашувчи эканлиги исботлансин.

67–маъруза

Текис яқинлашувчи функционал қаторларнинг хоссалари

1⁰. Функционал қатор йиғиндисининг узлуксизлиги. Фараз қилайлик, $E \subset R$ тўпламда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{1}$$

функционал қатор берилган бўлсин.

1–теорема. Айтайлик, (1) қатор ушбу шартларни бажарсин:

1) қаторнинг ҳар бир $u_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ ҳади E тўпламда узлуксиз.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ қатор E да текис яқинлашувчи. У ҳолда функционал қаторнинг йиғиндиси $S(x)$ функция E тўпламда узлуксиз бўлади.

◀Айтайлик, $x_0 \in E$,

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$$

бўлсин. Теореманинг 2) – шартига кўра

$$S_n(x) \underset{\to}{\to} S(x) \qquad (x \in E)$$

бўлади. Таърифга биноан

$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in N, \ \forall n > n_0$ ва $\forall x \in E$ да

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2}$$

жумладан

$$|S_n(x_0) - S(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{3}$$

тенгсизликлар бажарилади.

Равшанки, (2) ва (3) тенгсизликлар n нинг n_0 дан катта бирор тайин n_1 қийматида ҳам ўринли бўлади:

$$|S_{n_1}(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{2'}$$

$$|S_{n_1}(x_0) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{3'}$$

Теореманинг 1) шартидан ва чекли сондаги узлуксиз функциялар йиғиндиси яна узлуксиз бўлишидан

$$S_{n_1}(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_{n_1}(x)$$

функциянинг E тўпламда узлуксиз эканлиги келиб чиқади. Демак, $S_{n_1}(x)$ функция $x = x_0$ да узлуксиз. Унда, таърифга биноан

$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \ |x - x_0| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $x \in E$ да

$$|S_{n_1}(x) - S_{n_1}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{4}$$

бўлади.

Юқоридаги (2'), (3'), ва (4) тенгсизликлардан фойдаланиб топамиз:

$$|S(x)-S(x_0)|=|(S(x)-S_{n_0}(x))+(S_{n_0}(x)-S_{n_0}(x_0))+(S_{n_0}(x_0)-S(x_0))|\le|S(x)-S_{n_0}(x)|+$$

$$+|S_{n_0}(x)-S_{n_0}(x_0)|+|S_{n_0}(x_0)-S(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

Бу эса $S(x)$ функциянинг x_0 нуқтада узлуксиз бўлишини билдиради. Модомики, x_0 нуқта E тўпламнинг ихтиёрий нуқтаси экан, $S(x)$ функция E тўпламда узлуксиз бўлади. ▶

Юқорида келтирилган теореманинг шартлари бажарилганда унинг тасдиқини қуйидагича

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lim_{x\to x_0}u_n(x)\right)$$

ифодалаш мумкин.

2^0. Функционал қаторларни ҳадлаб интеграллаш. Фараз қилайлик, $[a,b]$ сегментда

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+... \qquad (5)$$

функционал қатор берилган бўлсин.

2−теорема. Айтайлик, (5) қатор қуйидаги шартларни бажарсин:

1) қаторнинг ҳар бир $u_n(x)$ $(n=1,2,3,...)$ ҳади $[a,b]$ сегментда узлуксиз,

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ қатор $[a,b]$ да текис яқинлашувчи,

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=S(x)$

У ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x u_n(t)dt=\int_a^x u_1(t)dt+\int_a^x u_2(t)dt+...$$

қатор $[a,b]$ да текис яқинлашувчи ва

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x u_n(t)dt=\int_a^x S(t)dt \qquad (x\in[a,b])$$

бўлади.

◀Берилган функционал қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)$$

ни оламиз. Унда теореманинг 2) − ва 3) − шартларига кўра

$$S_n\rightrightarrows S(x) \qquad (x\in[a,b])$$

бўлади. Текис яқинлашиш таърифига биноан
$\forall\varepsilon>0,\ \ \exists n_0=n_0(\varepsilon)\in N,\ \ \forall n>n_0$ ва $\forall t\in[a,b]$ да

$$|S_n(t)-S(t)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

тенгсизлик бажарилади.

Теореманинг 1) – шартидан ҳамда юқорида исбот этилган 1 – теоремадан фойдаланиб

$$\int_a^x u_n(t)\,dt \quad (n=1,2,3,\ldots), \qquad \int_a^x S(t)\,dt$$

интегралларнинг мавжудлигини топамиз.

Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x u_n(t)dt = \int_a^x u_1(t)dt + \int_a^x u_2(t)dt + \ldots + \int_a^x u_n(t)dt + \ldots$$

функционал қаторни қараймиз. Бу қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\int_a^x u_k(t)\,dt \qquad (x\in[a,b])$$

бўлсин. Равшанки,

$$\sum_{k=1}^{n}\int_a^x u_k(t)\,dt = \int_a^x\left(\sum_{k=1}^{n}u_k(t)\right)dt$$

Демак, $\sigma_n(x) = \int_a^x S_n(t)dt$.

Энди

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x u_n(t)\,dt$$

функционал қаторнинг $[a,b]$ да текис яқинлашувчилигини кўрсатамиз. Қуйидаги

$$\left|\sigma_n(x) - \int_a^x S(t)dt\right|$$

айирма учун

$$\left|\sigma_n(x) - \int_a^x S(t)\,dt\right| = \left|\int_a^x S_n(t)\,dt - \int_a^x S(t)\,dt\right| \le \int_a^x\left|S_n(t) - S(t)\right|dt < \frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^x dt = \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(x-a) < \varepsilon$$

бўлади. Демак,

$$\sigma_n(x) \mathop{\rightrightarrows}\int_a^x S(t)\,dt \quad (x\varepsilon[a,b]).$$

Бу эса

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x u_n(t)\,dt$$

функционал қаторни $[a,b]$ да текис яқинлашувчилиги ва

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x u_n(t)\,dt = \int_a^x S(t)\,dt$$

бўлишини билдиради. ▶

Келтирилган теореманинг шартлари бажарилганда теореманинг тасдиғини қуйидагича

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x u_n(t)\,dt = \int_a^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\right)dt$$

ифодалаш мумкин.

3^0. **Функционал қаторларни ҳадлаб дифференциаллаш.** Фараз қилайлик, $[a,b]$ сегментда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_{n_1}(x) + \ldots \tag{6}$$

функционал қатор берилган бўлсин.

3–теорема. Айтайлик, (6) функционал қатор қуйидаги шартларни бажарсин:

1) қаторнинг ҳар бир $u_n(x)$ $(n=1,2,3,....)$ ҳади $[a,b]$ сегментда узлуксиз $u'_n(x)$ $(n=1,2,3,....)$ ҳосилага эга,

2) Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = u'_1(x) + u'_2(x) + \ldots + u'_{n_1}(x) + \ldots$$

функционал қатор $[a,b]$ да текис яқинлашувчи,

3) $x_0 \in [a,b]$ нуқта мавжудки,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \ldots + u_{n_1}(x_0) + \ldots$$

қатор яқинлашувчи.

У ҳолда

а) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор $[a,b]$ да текис яқинлашувчи,

б) бу қаторнинг йиғиндиси

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

$[a,b]$ да узлуксиз $S'(x)$ ҳосилага эга,

в) $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$

бўлади.

◀Ушбу $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$

қаторнинг йиғиндисини $\sigma(x)$ билан белгилайлик:

$$\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \tag{7}$$

Бу қатор текис яқинлашувчи ва ҳар бир ҳади $[a,b]$ узлуксиз. Юқорида келтирилган 2–теоремага кўра (7) ни ҳадлаб интеграллаш мумкин:

$$\int_{x_0}^{x} \sigma(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u'_n(x)dx$$

бунда $x_0 \in [a,b]$, $x \in [a,b]$. Айни пайтда

$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u'_n(x)$ функционал қатор $[a,b]$ да текис яқинлашувчи.

Равшанки,

$$\int_{x_0}^{x} u'_n(x) = u_n(x) - u_n(x_0).$$

Демак, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n(x) - u_n(x_0)\right)$ қатор $[a,b]$ текис яқинлашувчи.

Шартга кўра

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$$

қатор яқинлашувчи (уни $[a,b]$ да текис яқинлашувчи деб қараш мумкин).

Шундай қилиб

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n(x) - u_n(x_0)\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$$

қаторлар $[a,b]$ да текис яқинлашувчи бўлади. Бундан эса бу қаторларнинг йиғиндиси бўлган

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

функционал қаторнинг $[a,b]$ да текис яқинлашувчилиги келиб чиқади. Шуни эътиборга олиб топамиз:

$$\int_{x_0}^{x} \sigma(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n(x) - u_n(x_0)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = S(x) - S(x_0).$$

$\sigma(x)$ функция, ҳар бир ҳади узлуксиз, ўзи текис яқинлашувчи

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$$

қаторнинг йиғиндиси бўлгани учун 1−теоремага кўра, $[a,b]$ да узлуксиз бўлади.

Унда кейинги тенгликдан

$$\sigma(x) = \left(S(x) - S(x_0)\right)' = S'(x)$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

қатор йиғиндиси узлуксиз $S'(x)$ ҳосилага эга ва

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$$

бўлади. ▶

Бу келтирилган теореманинг шартлари бажарилганда унинг тасдиқини қуйидагича ёзиш мумкин

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{d}{dx} u_n(x)\right).$$

1−мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{(n+1)(n+x)}{n(n+1+x)} \qquad (0 \le x < +\infty)$$

функционал қаторнинг йиғиндиси топилсин.

◀Маълумки

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)(n+1+x)}$$

функционал қатор $[0,+\infty)$ да текис яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси

$$S(x) = \frac{1}{1+x}$$

га тенг (қаралсин, 66 — маъруза):

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)(n+1+x)}.$$

Равшанки, бу қаторнинг ҳар бир ҳади $[0,+\infty)$ да узлуксиз. Демак, уни 2 — теоремага кўра ҳадлаб интеграллаш мумкин:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{dt}{(n+t)(n+1+t)}$$

Аниқ интегралларни ҳисоблаймиз:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+t)\Big|_0^x = \ln(1+x)$$

$$\int_0^x \frac{1}{(n+t)(n+1+t)} dt = \int_0^x \left(\frac{1}{n+t} - \frac{1}{n+1+t} \right) dt = \ln(n+t)\Big|_0^x - \ln(n+1+t)\Big|_0^x = \ln \frac{(n+1)(n+x)}{n(n+1+x)}.$$

Демак, $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{(n+1)(n+x)}{n(n+1+x)} = \ln(1+x).$ ▶

Машқлар

1. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n \quad (-1 < x < 1)$$

функционал қаторнинг йиғиндиси топилсин.

2. Ушбу

$$S(x) = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2} \qquad (x \in R)$$

функция функционал қаторни ҳадлаб дифференциаллаш билан топилсин.

68–маъруза

Даражали қаторлар, уларнинг яқинлашиш радиуси ва яқинлашиш интерваллари

1⁰. Даражали қатор тушунчаси. Абель теоремаси.

Ҳар бир ҳади

$$U_n(t)=a_n(t-t_0)^n \qquad (t_0\in R;\ n=0,1,2...)$$

функциядан иборат бўлган ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(t-t_0)^n=a_0+a_1(t-t_0)+a_2(t-t_0)^2+... \tag{1}$$

функционал қатор даражали қатор дейилади, бунда

$$a_0,a_1,...,a_n,...$$

ҳақиқий сонлар даражали қаторнинг коэффициентлари дейилади.

(1) да $t-t_0=x$ дейилса, у қуйидаги

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+... \quad (x\in R) \tag{2}$$

кўринишга келади ва биз шу кўринишдаги даражали қаторларни ўрганамиз.

Равшанки, (2) қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$S_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$$

кўпҳаддан иборат бўлиб, $x=0$ да $S_n(0)=a_0$ бўлади.

Демак, ҳар қандай (2) кўринишдаги даражали қатор $x=0$ нуқтада яқинлашувчи бўлади.

1–теорема (Абель). Агар

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...$$

даражали қатор $x=x_0\neq 0$ нуқтада яқинлашувчи бўлса, ушбу

$$|x|<|x_0|$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи барча x ларда даражали қатор яқинлашувчи (абсолют яқинлашувчи) бўлади.

◀ Айтайлик, $x=x_0\neq 0$ да

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n$$

қатор яқинлашувчи бўлсин. Қатор яқинлашишини зарурий шартига кўра

$$\lim_{n\to\infty}a_nx_0^n=0$$

бўлади. Демак, $\{a_nx_0^n\}$ кетма–кетлик чегараланган:

$$\exists M>0,\ \forall n\in N \text{ да } |a_nx_0^n|\le M.$$

Равшанки,

$$|a_nx^n|=|a_nx_0^n|\left|\frac{x}{x_0}\right|^n\le M\cdot\left|\frac{x}{x_0}\right|^n \tag{3}$$

ва $|x|<|x_0|$ да $\left|\frac{x}{x_0}\right|<1$ бўлади. Демак $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ геометрик қатор яқинлашувчи. Унда ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty}M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

қатор ҳам яқинлашувчи бўлади. (3) муносабатни эътиборга олиб, сўнг солиштириш теоремасидан фойдаланиб

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

даражали қаторнинг яқинлашишини (абсолют яқинлашишини) топамиз. ►

Натижа. Агар

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...$$

даражали қатор $x = x_1$ нуқтада узоқлашувчи (ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x_1^n = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + ... + a_n x_1^n + ...$$

сонли қатор узоқлашувчи) бўлса, қуйидаги

$$|x| > |x_1|$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи барча x ларда $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ қатор узоқлашувчи бўлади.

◄Тескарисини фараз қилайлик, $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ қатор $|x| > |x_1|$ тенгсизликни қаноатлантирувчи бирор $x = x^*$ нуқтада $(|x^*| > |x_1|)$ яқинлашувчи бўлсин. У ҳолда Абель теоремасига кўра $|x| < |x^*|$ тенгсизликнинг қаноталантирувчи барча x ларда яқинлашувчи, жумладан x_1 нуқтада ҳам яқинлашувчи бўлиб қолади. Бу эса шартга зиддир. ►

Абель теоремаси ва унинг натижаси даражали қаторларнинг яқинлашиш (узоқлашиш) соҳасининг структурасини (тузилишини) аниқлаб беради.

2^0. Даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси ва яқинлашиш интервали. Фараз қилайлик, бирор

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...$$

даражали қатор берилган бўлсин. Бу қаторнинг яқинлашиш ёки узоқлашиш нуқталари ҳақида қуйидаги уч ҳол бўлиши мумкин:

1) барча мусбат сонлар қаторнинг яқинлашиш нуқталари бўлади;

2) барча мусбат сонлар қаторнинг узоқлашиш нуқталари бўлади;

3) шундай мусбат сонлар борки, улар қаторнинг яинлашиш нуқталари бўлади, шундай мусбат сонлар борки, улар қаторнинг узоқлашиш нуқталари бўлади.

Биринчи ҳолда, Абель теоремасига кўра даражали қатор барча $x \in R$ да яқинлашувчи бўлиб, даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси $E = (-\infty, +\infty)$ бўлади. Бундай қаторга ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + ... + \frac{1}{n!} x^n + ..$$

даражали қатор мисол бўлади.

Иккинчи ҳолда, Абель теоремасининг натижасига кўра даражали қатор барча $x \in R \setminus \{0\}$ да узоқлашувчи бўлиб, унинг яқинлашиш соҳаси $E = \{0\}$ бўлади. Бундай қаторга ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n = x + 2! x^2 + 3! x^3 + ... + n! x^n + ...$$

даражали қатор мисол бўла олади.

Энди учинчи ҳолни қараймиз. Бу ҳолга ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ...$$

даражали қатор мисол бўлади. Бу даражали қатор барча $x \in (0,1)$ да яқинлашувчи ва демак, Абель теоремасига кўра қатор $(-1,1)$ да яқинлашади, барча $x \in [1, +\infty)$ да қатор узоқлашувчи ва демак, Абель теореасининг натижасига кўра қатор $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ да узоқлашади. Демак, даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси $E = (-1,1)$ бўлади.

Айтайлик,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...$$

даражали қатор $x = r_1$ нуқтада $(r_1 > 0)$ яқинлашувчи, $x = R_1$ нуқтада $(R_1 > 0)$ нуқтада эса узоқлашувчи бўлсин. Равшанки,

$$r_1 < R_1$$

бўлади.

Агар $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қатор

$$\frac{r_1 + R_1}{2}$$

нуқтада яқинлашувчи бўлса,

$$r_2 = \frac{r_1 + R_1}{2}, \qquad R_2 = R_1$$

деб, узоқлашувчи бўлса,

$$r_2 = r_1, \; R_2 = \frac{r_1 + R_1}{2}$$

деб r_2 ва R_2 нуқталарни оламиз. Равшанки,

$$r_1 \le r_2,\ R_1 \ge R_2 \quad \text{ва} \quad R_2 - r_2 = \frac{R_1 - r_1}{2}$$

бўлади. Бу муносабатдаги r_2 ва R_2 сонларга кўра r_3 ва R_3 сонларни юқоридагига ўхшаш аниқлаймиз:

агар $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қатор

$$\frac{r_2 + R_2}{2}$$

нуқтада яқинлашувчи бўлса,

$$r_3 = \frac{r_2 + R_2}{2}, \quad R_3 = R_2$$

деб, узоқлашувчи бўлса,

$$r_3 = r_2, \quad R_3 = \frac{r_2 + R_2}{2}$$

деб r_3 ва R_3 нуқталарни оламиз. Бунда

$$r_2 \le r_3,\ R_2 \ge R_3 \quad \text{ва} \quad R_3 - r_3 = \frac{R_1 - r_1}{2^2}$$

бўлади.

Бу жараённи давом эттирабориш натижасида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қаторнинг яқинлашиш нуқталаридан иборат $\{r_n\}$, узоқлашиш нуқталаридан иборат $\{R_n\}$ кетма – кетликлар ҳосил бўлади. Бунда

$$r_1 \le r_2 \le \ldots \le r_n \le \ldots, \qquad R_1 \ge R_2 \ge \ldots \ge R_n \ge \ldots, \quad r_n < R_n$$

ва $n \to \infty$ да

$$R_n - r_n = \frac{R_1 - r_1}{2^{n-1}} \to 0$$

бўлади. Унда [2], 3 – боб, 8 – § да келтирилган теоремага кўра $\lim_{n\to\infty} r_n$ ва $\lim_{n\to\infty} R_n$ лимитлар мавжуд ва

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} R_n$$

бўлади. Уни r билан белгилаймиз:

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} R_n = r$$

Энди x ўзгарувчининг $|x| < r$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий қийматини олайлик. Унда

$$\lim_{n\to\infty} r_n = r$$

бўлишидан, шундай $n_0 \in N$ топиладики,

$$|x| < r_{n_0} < r$$

бўлади. Бинобарин, берилган даражали қатор r_{n_0} нуқтада, демак қаралаётган x нуқтада яқинлашувчи бўлади.

x ўзгарувчининг $|x| > r$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий қийматини олайлик. Унда

$$\lim_{n\to\infty} R_n = r$$

$$|x| > R_{n_1} > r$$

бўлади. Бинобарин, берилган даражали қатор R_{n_1} нуқтада, демак қаралаётган x нуқтада узоқлашувчи бўлади.

Демак, 3) − ҳолда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қатор учун шундай мусбат r сони мавжуд бўладики, $|x| < r$, яъни $\forall x \in (-r, r)$ да қатор яқинлашувчи, $|x| > r$, яъни $\forall x \in (-\infty, -r) \cup (r, +\infty)$ да қатор узоқлашувчи бўлади.

$x = \pm r$ нуқталарда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қатор яқинлашувчи ҳам бўлиши мумкин, узоқлашувчи ҳам бўлиши мумкин.

1−таъриф. Юқорида келтирилган r сон $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси, $(-r, r)$ интервал эса даражали қаторнинг яқинлашиш интервали дейилади.

Эслатма. 1) − ҳолда даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r = +\infty$ деб, 2) − ҳолда даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r = 0$ деб олинади.

3⁰. Даражали қаторнинг яқинлашиш радиусини топиш. Бирор

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

даражали қаторни қарайлик. Бу қатор коэффициентларида тузилган $\{a_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ кетма−кетлик учун

1) $\forall n \geq 0$ да $a_n \neq 0$,

2) $\lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ мавжуд бўлсин. У ҳолда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

бўлади.

Айтайлик, қаралаётган даражали қатор учун

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = L \qquad (a_n \neq 0,\ n = 0, 1, 2, 3 \ldots)$$

бўлсин. Бу $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қаторда x ни параметр ҳисоблаб, Даламбер аломатидан фойдаланиб яқинлашишга текширамиз:

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x| = |x| \lim_{n \to \infty} \left| \frac{1}{\frac{a_n}{a_{n+1}}} \right| = |x| \cdot \frac{1}{L}$$

Демак,

$$\frac{|x|}{L}<1, \text{ яъни } |x|<L$$

бўлганда даражали қатор яқинлашувчи бўлади,

$$\frac{|x|}{L}>1, \text{ яъни } |x|>L$$

бўлганда даражали қатор узоқлашувчи бўлади.

Бундан $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси

$$r = L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \tag{4}$$

бўлиши келиб чиқади. ►

1–мисол. Ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^n}{e^n n!}x^n$$

даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси топилсин.

◄Бу қатор учун

$$a_n = \frac{n^n}{e^n n!},\ a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}(n+1)!}$$

бўлади. Равшанки,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^n}{e^n\cdot n!}\cdot\frac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = 1.$$

Демак, берилган даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r=1$ бўлади. ►

Ихтиёрий даражали қаторнинг яқинлашиш радиусини аниқлаб берадиган теоремани исботсиз келтирамиз.

2–теорема (Коши–Адамар). Ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси

$$r = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}} \tag{5}$$

бўлади.

Эслатма. Агар

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$$

бўлса, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r=0$ деб,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = 0$$

бўлса, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r=+\infty$ деб олинади.

2–мисол. Ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{5n}$$

даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси топилсин.

◀Аввало

$$2x^5 = t$$

деб оламиз. Натижада берилган қатор қуйидаги

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = 1 + t + t^2 + ... + t^n + ...$$

кўринишга келади. Бу қаторнинг яқинлашиш радиуси (5) формулага кўра

$$r = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1}} = 1$$

бўлади. Демак, $|t| < 1$ да қатор яқинлашувчи, $|t| > 1$ да узоқлашувчи. Унда

$|2x^5| < 1$, яъни $|x| < \frac{1}{\sqrt[5]{2}}$ да берилган қатор яқинлашувчи,

$|2x^5| > 1$, яъни $|x| > \frac{1}{\sqrt[5]{2}}$ да узоқлашувчи бўлади. Берилган даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r = \frac{1}{\sqrt[5]{2}}$ бўлади. ▶

3–мисол. Ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-1}\sqrt{n}} x^n$$

даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси топилсин.

◀Равшанки, $a_n = \frac{(-1)^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}$, $a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{3^n\sqrt{n+1}}$.

Берилган даражали қаторнинг яқинлашиш радиусини (4) формулага кўра топамиз:

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{3^{n-1}\sqrt{n}} \cdot \frac{3^n\sqrt{n+1}}{(-1)^{n+1}}\right| = \lim_{n\to} 3\sqrt{\frac{n+1}{n}} = 3$$

Даражали қатор $x = -3$ нуқтада ушбу $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}}$ сонли қаторга айланади ва бу сонли қатор узоқлашувчи бўлади. $x = 3$ нуқтада эса қуйидаги $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ сонли қатор ҳосил бўлади ва бу қатор Лейбниц теоремасига кўра яқинлашувчи бўлади. Демак, берилган даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси $E = (-3, 3]$ тўпламдан иборат. ▶

Машқлар.

1. Агар $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r > 0$ бўлса, ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(n^2+1\right)a_n x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+3}a_n x^n$$

даражали қаторларнинг яқинлашиш радиуслари ҳам r га тенг бўлиши исботлансин.

2. Ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)}{(2n)!}x^n$$

даражали қаторнинг яқинлашиш интервали топилсин.

69–маъруза

Даражали қаторнинг текис яқинлашиши. Даражали қаторнинг хоссалари

1⁰. Даражали қаторнинг текис яқинлашиши. Айтайлик, ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (1)$$

даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r > 0$ бўлсин.

1–теорема. (1) даражали қатор $[\alpha, \beta] \subset (-r, r)$ да текис яқинлашувчи бўлади, бунда $\alpha \in R$, $\beta \in R$.

◄Фараз қилайлик, (1) даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r > 0$ бўлсин. Равшанки, бу қатор $(-r, r)$ да абсолют яқинлашувчи бўлади.

Айтайлик, $\alpha \in (0, r)$ бўлсин. Унда $\forall n \geq 0$ ва $\forall x \in [-\alpha, \alpha]$ да

$$\left|a_n x^n\right| \leq \left|a_n \alpha^n\right|$$

бўлганлиги учун, Вейерштрасс аломатига кўра (1) қатор $[-\alpha, \alpha]$ да текис яқинлашувчи бўлади. ►

Демак, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r > 0$ бўлса, юқорида келтирилган теоремага кўра бу қатор $[-c, c] \subset (-r, r)$ да $(c > 0)$ текис яқинлашувчи бўлади. Бунда c сонни r сонга ҳар қанча яқин қилиб олиш мумкин бўлсада, қатор $(-r, r)$ да текис яқинлашмасдан қолиши мумкин. Масалан, ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r = 1$, бироқ қатор $(-1, 1)$ да текис яқинлашувчи эмас.

2⁰. Даражали қаторнинг хоссалари. Маълумки, даражали қаторлар функционал қаторларнинг хусусий ҳоли. Бинобарин, улар текис яқинлашувчи функционал қаторларнинг хоссалари каби хоссаларга эга.

2–теорема. Агар

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r > 0$ бўлиб, йиғиндиси

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

бўлса, $S(x)$ функция $(-r, r)$ да узлуксиз бўлади.

◄Равшанки, қаралаётган даражали қатор $(-r, r)$ да яқинлашувчи бўлади.

Айтайлик, $x_0 \in (-r, r)$ бўлсин. Ушбу

$$|x_0| < c < r$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи c сонини олайлик. Унда даражали қатор $[-c,c]$ да текис яқинлашувчи бўлади. Текис яқинлашувчи функционал қаторнинг хоссасига кўра $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қаторнинг йиғиндиси $S(x)$ функция $[-c,c]$ да узлуксиз, жумладан x_0 нуқтада узлуксиз. ►

3–теорема. Айтайлик, даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r>0$ бўлиб, йиғиндиси $S(x)$ бўлсин:

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Бу қаторни $(-r,r)$ га тегишли бўлган ихтиёрий $[a,b]$ бўйича $([a,b]\subset(-r,r))$ ҳадлаб интеграллаш мумкин:

$$\int_a^b S(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_a^b a_n x^n dx\right)$$

Хусусан, $\forall x\in(-r,r)$ учун

$$\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1} \tag{2}$$

бўлади.

◄Равшанки, даражали қатор $[a,b]$ да $([a,b]\subset(-r,r))$ текис яқинлашувчи бўлади. Текис яқинлашувчи функционал қаторнинг хоссасига кўра уни ҳадлаб интеграллаш мумкин. Айни пайтда, (2) қаторнинг яқинлашиш радиуси r га тенг бўлади. Ҳақиқатан ҳам Коши – Адамар теоремасига кўра

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\frac{a_n}{n+1}\right|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\sqrt[n]{|a_n|}}{\sqrt[n]{n+1}}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=r$$

бўлади. ►

Натижа. Айтайлик, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қатор берилган бўлиб, унинг яқинлашиш радиуси $r>0$ бўлсин. Бу қаторни $[0,x]$ бўйича $(\forall x\in(-r,r))$ ихтиёрий марта ҳадлаб интеграллаш мумкин. Интеграллаш натижасида ҳосил бўлган даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси ҳам r га тенг бўлади.

3–теорема. Фараз қилайлик,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r>0$, йиғиндиси $S(x)$ бўлсин:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=S(x).$$

У ҳолда $S(x)$ функция $(-r,r)$ да узлуксиз $S'(x)$ ҳосилага эга ва

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \tag{3}$$

бўлади, бунда (3) қаторнинг яқинлашиш радиуси ҳам r га тенг.

◀Берилган даражали қатор $[-c,c]$ да $(0<c<r)$ текис яқинлашувчи бўлади. Текис яқинлашувчи функционал қаторнинг хоссасига кўра даражали қаторни ҳадлаб дифференциаллаш мумкин. Демак, $\forall x\in(-r,r)$ да

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n x^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1}$$

Бу даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси ҳам r га тенг бўлиши қуйидаги муносабатдан келиб чиқади:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|na_n|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{|a_n|}\right)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}\,.$$ ▶

Натижа. Айтайлик, $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ даражали қатор берилган бўлиб, унинг яқинлашиш радиуси $r>0$ бўлсин. Бу қаторни $(-r,r)$ да ихтиёрий марта ҳадлаб дифференциаллаш мумкин. Дифференциаллаш натижасида ҳосил бўлган даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси ҳам r га тенг бўлади.

4–теорема. Айтайлик,

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r>0$, йиғиндиси $S(x)$ бўлсин:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=S(x) \qquad (4)$$

У ҳолда $\forall n\geq 0$ да

$$a_n=\frac{S^{(n)}(0)}{n!}$$

бўлади.

◀ (4) муносабатда $x=0$ деб топамиз:

$$a_0=S(0).$$

(4) қаторни ҳадлаб дифференциаллаймиз:

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

Бу тенгликда $x=0$ дейилса

$$a_1=S'(0)$$

бўлиши келиб чиқади. Шу жараённи давом эттирабориб

$$a_n=\frac{S^{(n)}(0)}{n!} \qquad (n=2,3,\ldots)$$

бўлишини топамиз. ▶

1–мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x+2x^2+3x^3+\ldots+nx^n+\ldots$$

даражали қатор йиғиндиси топилсин.

◀Маълумки,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

даражали қатор $(-1,1)$ да яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $\frac{x}{1-x}$ га тенг:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.$$

Бу қаторни ҳадлаб дифференциаллаб топамиз:

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Кейинги тенгликнинг ҳар икки томонини x га кўпайтирсак, унда

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

бўлиши келиб чиқади. ►

2–мисол. Ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \ln(1+x)$$

тенгликнинг тўғрилиги исботлансин.

◄Равшанки,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

даражали қатор $(-1,1)$ да яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси $\frac{1}{1-x}$ га тенг:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Бу тенгликда x ни $-x$ га алмаштирсак, натижада

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$$

тенглик ҳосил бўлади. Уни $[0,x]$ бўйича $(0<x<1)$ интеграллаб топамиз:

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n\right) dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n dt = \ln(1+t)\Big|_0^x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \ln(1+x). ►$$

3–мисол. Ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

даражали қатор йиғиндиси топилсин ва ундан фойдаланиб

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$$

бўлиши кўрсатилсин.

◄Маълумки,

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x} \qquad (-1<x<1).$$

Бу тенгликда x ни $-x^2$ га алмаштирамиз. Натижада $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2}$ ҳосил бўлади. Уни $[0,x]$ бўйича $(0<x<1)$ интеграллаб топамиз:

$$\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\right)dt=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^{2n}dt=arctgt\Big|_0^x,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=arctgx.$$

Бу тенгликда $x=1$ дейлик. Унда тенгликнинг ўнг томони

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

сонли қаторга айланиб, у Лейбниц теоремасига кўра, яқинлашувчи бўлади. Демак,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=arctg1=\frac{\pi}{4}.►$$

Машқлар

1. Ҳадлаб дифференциаллаш билан ушбу

$$1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...$$

даражали қаторнинг йиғиндиси топилсин.

2. Ҳадлаб интеграллаш билан ушбу

$$x-4x^2+9x^3-16x+...$$

даражали қаторнинг йиғиндиси топилсин.

70–маъруза

Тейлор қатори

1⁰. Функциянинг Тейлор қатори. Айтайлик, $f(x)$ функция $x_0 \in R$ нуқтанинг бирор

$$U_\delta(x_0) = \{x \in R : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta; \delta > 0\}$$

атрофида исталган тартибдаги ҳосилага эга бўлсин. Бу ҳол $f(x)$ функциянинг Тейлор формуласининг ёзиш имконини беради:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

бунда $R_n(x)$ – қолдиқ ҳад.

Модомики, $f(x)$ функция $U_\delta(x_0)$ да исталган тартибдаги ҳосилага эга экан, унда ушбу

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots \qquad (1)$$

даражали қаторни қараш мумкин бўлади.
(1) даражали қаторнинг коэффициентлари махсус сонлар бўлиб, улар $f(x)$ функция ва унинг ҳосилаларининг x_0 нуқтадаги қийматлари орқали ифодаланган.
(1) даражали қатор $f(x)$ функциянинг Тейлор қатори дейилади.

Хусусан, $x_0 = 0$ бўлганда (1) даражали қатор ушбу

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

кўринишга келади.

Фараз қилайлик, $f(x)$ функция бирор $(-r, r)$ да $(r > 0)$ исталган тартибдаги ҳосилага эга бўлиб, унинг $x_0 = 0$ нуқтадаги Тейлор қатори

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \qquad (2)$$

бўлсин. Бу қаторнинг қолдиқ ҳадини $r_n(x)$ дейлик:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n(x)$$

1–теорема. (2) даражали қатор $(-r, r)$ да $f(x)$ га яқинлашиши учун ушбу

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n(x)$$

Тейлор формуласида, $\forall x \in (-r, r)$ учун

$$\lim_{n \to \infty} r_n(x) = 0$$

бўлиши зарур ва етарли.

◄**Зарурлиги**. Айтайлик, (2) даражали қатор $(-r,r)$ да яқинлашувчи, йиғиндиси $f(x)$ бўлсин. Таърифга биноан

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)=f(x), \qquad (x\in(-r,r))$$

бўлади, бунда

$$S_n(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Равшанки, $\forall x\in(-r,r)$ да $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)=f(x)$ бўлишидан

$$\lim_{n\to\infty}[f(x)-S_n(x)]=\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0$$

бўлиши келиб чиқади.

Етарлилиги. Айтайлик, $\forall x\in(-r,r)$ да $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$ бўлсин. У ҳолда

$$\lim_{n\to\infty}[f(x)-S_n(x)]=\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0$$

бўлиб, ундан

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)=f(x)$$

бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

бўлади. ►

Одатда, бу муносабат ўринли бўлса, $f(x)$ функция Тейлор қаторига ёйилган дейилади.

2⁰. Функцияни Тейлор қаторига ёйиш. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция бирор $(-r,r)$ да исталган тартибдаги ҳосилаларга эга бўлсин.

2–теорема. Агар $\exists M>0$, $\forall x\in(-r,r)$, $\forall n\geq 0$ да

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\leq M$$

бўлса, $f(x)$ функция $(-r,r)$ да Тейлор қаторига ёйилади:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \qquad (3)$$

◄Маълумки, $f(x)$ функциянинг Лагранж кўринишидаги қолдиқ ҳадли Тейлор формуласи қуйидагича бўлади:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+r_n(x),$$

бунда

$$r_n(x)=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad (0<\theta<1).$$

Теореманинг шартидан фойдаланиб топамиз:

$$|r_n(x)|=\left|\frac{f^{(n)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\leq M\cdot\frac{r^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (x\in(-r,r))$$

Равшанки,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}}{(n+1)!}=0.$$

Демак, $\forall x \in (-r, r)$ да

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$$

бўлиб, ундан қаралаётган $f(x)$ функциянинг Тейлор қаторига ёйилиши келиб чиқади.►

3^0. Элементар функцияларни Тейлор қаторига ёйиш.

а) Кўрсаткичли ва гиперболик функцияларнинг Тейлор қаторларини топамиз. Айтайлик,

$$f(x) = e^x$$

бўлсин. Равшанки, $f(0) = 1,\ f^{(n)}(0) = 1 \quad (n \in N)$ бўлиб, $\forall x \in (-\alpha, \alpha)$ да $(\alpha > 0)$

$$0 < f(x) < e^\alpha,\ 0 < f^{(n)}(x) < e^\alpha$$

бўлади. Бинобарин, 2—теоремага кўра $f(x) = e^x$ функция $(-\alpha, \alpha)$ да Тейлор қаторига ёйилади ва (3) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (0! = 1) \tag{4}$$

α ихтиёрий мусбат сон. Демак, (4) даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r = +\infty$ бўлади.

(4) муносабатда x ни $-x$ га алмаштириб топамиз:

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Маълумки гиперболик синус ҳамда гиперболик косинус функциялари қуйидагича

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

таърифланар эди.

Юқоридаги

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

формулалардан фойдаланиб топамиз:

$$shx = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$chx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Бу shx, chx функцияларининг Тейлор қаторлари бўлиб, улар ифодаланган даражали қаторларнинг яқинлашиш радиуслари $r = +\infty$ бўлади.

б) Тригонометрик функцияларнинг Тейлор қаторларини топамиз. Айтайлик, $f(x) = \sin x$ бўлсин. Равшанки, $\forall x \in R$, $\forall n \in N$ да

$$|f(x)| \le 1,\ \left|f^{(n)}(x)\right| \le 1$$

бўлиб, $f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f^{(2n)}(0)=0,\ f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n\ \ (n\in N)$ бўлади. Демак, 2 − теоремага кўра $f(x)=\sin x$ функция Тейлор қаторига ёйилади ва (3) формулага биноан

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\ldots \tag{5}$$

бўлади.

Айтайлик,

$$f(x)=\cos x$$

бўлсин. Бу функция учун $\forall x\in R,\ \forall n\in N$ да

$$|f(x)|\le 1,\ |f^{(n)}(x)|\le 1$$

бўлиб,

$$f'(0)=1,\ f'(0)=0,\ f^{(2n)}(0)=(-1)^n,\ f^{(2n+1)}(0)=0\quad (n\in N)$$

бўлади. Унда 2 − теоремага кўра $f(x)=\cos x$ функция Тейлор қаторига ёйилади ва (3) формулага биноан

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\ldots \tag{6}$$

бўлади.

(5) ва (6) даражали қаторларнинг яқинлашиш радиуси $r=+\infty$ бўлади.

в) Логарифмик функциянинг Тейлор қаторини топамиз. Айтайлик,

$$f(x)=\ln(1+x)$$

бўлсин. Маълумки,

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}\qquad (n\in N)$$

бўлиб,

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

бўлади. Бу функциянинг Тейлор формуласи

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+r_n(x) \tag{7}$$

кўринишга эга.

$f(x)=\ln(1+x)$ функцияни Тейлор қаторига ёйишда 1 − теоремадан фойдаланмиз. Бунинг учун (7) формулада $n\to\infty$ да $r_n(x)$ нинг 0 га интилишини кўрсатиш етарли бўлади.

Айтайлик, $x\in[0,1]$ бўлсин. Бу ҳолда Лагранж кўринишида ёзилган

$$r_n(x)=\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}\qquad (0<\theta<1)$$

қолдиқ ҳад учун

$$|r_n(x)|\le\frac{1}{n+1}$$

бўлади ва

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0$$

тенглик бажарилади.

Айтайлик, $x\in[-\alpha,0]$ бўлсин, бунда $0<\alpha<1$.
Бу ҳолда Коши кўринишида ёзилган

$$r_n(x)=\frac{(-1)^n(1-\theta_1)^n\cdot x^{n+1}}{(1+\theta_1 x)^{n+1}} \qquad (0<\theta_1<1)$$

қолдиқ ҳад учун

$$|r_n(x)|\le\frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

бўлиб,

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0$$

бўлади.
Демак, $\forall x\in(-1,1]$

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0.$$

Унда 1 – теоремага кўра

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+... \qquad (8)$$

бўлади.

(8) даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r=1$ га тенг.
Агар юқоридаги $\ln(1+x)$ нинг ёйилмасида x ни $-x$ га алмаштирилса, унда

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-...-\frac{x^n}{n}-...$$

формулалар келиб чиқади.

г) Даражали функциянинг Тейлор қаторини топамиз. Айтайлик,

$$f(x)=(1+x)^{\alpha} \quad (\alpha\in R)$$

бўлсин. Маълумки,

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)..(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \qquad (n\in N)$$

бўлиб,

$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)..(\alpha-n+1)$$

бўлади. Бу функциянинг Тейлор формуласи ушбу

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)..(\alpha-n+1)}{n!}x^n+r_n(x)$$

кўринишга эга.

Энди $n\to\infty$ да $r_n(x)\to 0$ бўлишини кўрсатамиз.
Маълумки, Тейлор формуласидаги қолдиқ ҳаднинг Коши кўриниши қуйидагича

$$r_n(x)=\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)...[(\alpha-1)-(n-1)]}{n!}x^n\alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$$

$(0<\theta<1)$ бўлар эди.

Айтайлик, $x \in (-1,1)$ бўлсин. Бу ҳолда:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!}(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots[(\alpha-1)-(n-1)]x^n = 0$ бўлади,

чунки, лимит ишораси остидаги ифода яқинлашувчи ушбу

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

қаторнинг умумий ҳади;

2) $|\alpha x|(1-|x|)^{\alpha-1} < \alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1} < |\alpha x|(1+|x|)^{\alpha-1}$;

3) $\left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^n \le \left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right| < 1$

бўлади. Бу муносабатлардан фойдаланиб, $\forall x \in (-1,1)$ да

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$$

бўлишини топамиз. 1– теоремага кўра

$$(1+x)^\alpha = 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots \tag{9}$$

бўлади.

Бу даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $\alpha \ne 0,\ \alpha \notin N$ бўлганда 1 га тенг: $r=1$.

(9) муносабатда $\alpha=-1$ деб олинса, унда ушбу

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = 1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots+(-1)^n x^n+\ldots$$

формула ҳосил бўлади. Бу формулада x ни $-x$ га алмаштириб топамиз:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = 1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$$

1–мисол. Ушбу

$$f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$$

функция Тейлор қаторига ёйилсин.

◄Маълумки,

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)$$

бўлади.

Биз юқорида

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots$$

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\ldots\frac{x^n}{n}-\ldots$$

бўлишини кўрган эдик. Бу муносабатлардан фойдаланиб топамиз:

$$\ln(1+x)-\ln(1-x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots$$

$$-\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\ldots-\frac{x^n}{n}-\ldots\right)=2x+\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{5}+\ldots+\frac{2x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots$$

Демак,

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots\right) \tag{10}$$

(10) даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r=1$ бўлиб, яқинлашиш соҳаси $(-1,1)$ бўлади. ►

2−мисол. Ушбу

$$f(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt$$

функция Тейлор қаторига ёйилсин.

◄Маълумки,

$$\sin t=t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$$

Унда

$$\frac{\sin t}{t}=1-\frac{t^2}{3!}+\frac{t^4}{5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{t^{2n-2}}{(2n-1)!}+\ldots$$

бўлади. Бу даражали қаторни ҳадлаб интеграллаб топамиз:

$$\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt=\int_0^x\left(1-\frac{t^2}{3!}+\frac{t^4}{5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{t^{2n-2}}{(2n-1)!}+\ldots\right)dt=$$

$$=x-\frac{x^3}{3!\cdot 3}+\frac{x^5}{5!\cdot 5}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!(2n-1)}+\ldots$$

Кейинги даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r=+\infty$ бўлади. ►

3−мисол. Ушбу

$$f(x)=\frac{2x-1}{x^2+x-6}$$

функция Тейлор қаторига ёйилсин ва бу қаторнинг яқинлашиш радиуси топилсин.

◄Аввало $f(x)$ функцияни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$f(x)=\frac{2x-1}{x^2+x-6}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-3}=\frac{1}{2\left(1+\frac{1}{2}x\right)}-\frac{1}{3\left(1-\frac{1}{3}x\right)}$$

Маълумки,

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^n,$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

Бу формулалардан фойдаланиб топамиз:

$$\frac{1}{2\left(1+\frac{1}{2}x\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(-1)^n\cdot\left(\frac{1}{2}x\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n, \qquad (r=2)$$

$$\frac{1}{3\left(1-\frac{1}{3}x\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}x^n \qquad (r=3)$$

Демак,

$$\frac{2x-1}{x^2+x-6}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)x^n$$

бўлади.

Бу даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r=2$ бўлади. ►

Машқлар.

1. Ушбу

$$f(x)=\sin^3 x,\ f(x)=\ln(1-x^2),\qquad f(x)=\frac{1}{1+x+x^2}$$

функциялар Тейлор қаторига ёйилсин.

2. Ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}\qquad (x\in R)$$

қаторнинг йиғиндиси топилсин.

71–маъруза

Узлуксиз функцияни кўпҳад билан яқинлаштириш. Вейерштрасс теоремаси

1⁰. Бернштейн кўпҳади. Айтайлик, $f(x)$ функция $[0,1]$ сегментда берилган бўлсин.

Ушбу

$$\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = f(0)\cdot(1-x)^n + f\left(\frac{1}{n}\right) C_n^1 x(1-x)^{n-1} + \ldots + f(1)x^n$$

кўпҳад $f(x)$ функциянинг Бернштейн кўпҳади дейилади ва $B_n(f;x)$ каби белгиланади:

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

Бунда $C_n^k = \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}$.

Демак, Бернштейн кўпҳади n –даражали кўпҳад бўлиб, унинг коэффициентлари $f(x)$ функциянинг

$$\frac{k}{n} \qquad (k = 0,1,2,\ldots,n)$$

нуқталардаги қийматлари орқали ифодаланади.

Масалан,

$$B_1(f;x) = f(0) + [f(1) - f(0)]x,$$

$$B_2(f;x) = f(0) = \left[2f\left(\frac{1}{2}\right) - 2f(0)\right]x + \left[f(0) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)\right]x^2$$

бўлади.

2⁰. Муҳим лемма. Ушбу

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1, \tag{1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n} \qquad (0 \le x \le 1) \tag{2}$$

айниятлар ўринли.

◀Ньютон – Биноми формуласи

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} = (a+b)^n$$

да $a = x,\quad b = 1-x$ дейилса, у ҳолда

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1$$

бўлиши келиб чиқади.

(2) айниятни исботлаш учун қуйидаги

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

йиғиндиларни ҳисоблаймиз.

Бу йиғиндиларни ҳисоблашда юқорида келтирилган C_n^k нинг ифодаси ва Ньютон биноми формуласидан фойдаланамиз:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}x^k(1-x)^{n-k}=$$

$$=x\cdot\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k-(k-1)}=x[x+(1-x)]^{n-1}=x.$$

Демак,

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=x \tag{3}$$

Энди

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

йиғиндини ҳисоблаймиз:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}C_{n-1}^{k-1}x^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{n-1}{n}\frac{k-1}{n-1}C_{n-1}^{k-1}x^k(1-x)^{n-k}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}C_{n-1}^{k-1}x^k(1-x)^{n-k}=\frac{n-1}{n}x^2\sum_{k=2}^{n}C_{n-2}^{k-2}x^{k-2}(1-x)^{n-2-(k-2)}+$$

$$+\frac{1}{n}x\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-1-(k-1)}=\frac{n-1}{n}x^2[x+(1-x)]^{n-2}+\frac{1}{n}x[x+(1-x)]^{n-1}=x^2+\frac{x(1-x)}{n}$$

Демак,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=x^2+\frac{x(1-x)}{n} \tag{4}$$

Юқоридаги (1), (3) ва (4) муносабатлардан фойдаланиб топамиз:

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}-2x\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}C_n^k(1-x)^{n-k}+$$

$$+x^2\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=x^2+\frac{x(1-x)}{n}-2x\cdot x+x^2=\frac{x(1-x)}{n}.\blacktriangleright$$

Натижа. $\forall x\in[0,1]$, $\forall n\in N$ учун

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\le\frac{1}{4n} \tag{5}$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

◀Равшанки, $\forall x\in[0,1]$ учун

$$x(1-x)\le\frac{1}{4}$$

бўлади. Бу тенгсизлик ва леммадаги (2) муносабатдан (5) тенгсизликнинг ўринли бўлиши келиб чиқади. ▶

3⁰. Узлуксиз функцияни кўпҳад билан яқинлаштириш.

1–теорема. (Бернштейн). Агар $f(x)$ функция $[0,1]$ сегментда узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\lim_{n\to\infty}\max_{0\le x\le 1}|f(x)-B_n(f,x)|=0$$

бўлади, бунда

$$B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k} \tag{6}$$

◄ (1) ва (6) муносабатлардан фойдаланиб топамиз:

$$B_n(f;x)-f(x)=\sum_{k=0}^{n}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right]C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

Кантор теоремасига кўра қаралаётган $f(x)$ функция $[0,1]$ да текис узлуксиз бўлади. Унда таърифга биноан

$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x',x''\in[0,1]$ учун $|x'-x''|<\delta$

бўлганда

$$|f(x'')-f(x')|<\frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизлик бажарилади.

Маълумки,

$$B_n(f;x)-f(x)$$

айирмани ифодаловчи йиғиндида $n+1$ та ҳад бўлиб, улар k нинг $0,1,2,\dots,n$ қийматларида юзага келади. Бу k нинг ушбу

$$\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta \qquad (x\in[0,1])$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган қийматлари тўпламини $E_n(k)$ билан,

$$\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\delta \qquad (x\in[0,1])$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган қийматлари тўпламини $F_n(k)$ билан белгилайлик.

Равшанки,

$$E_n(k)\cup F_n(k)=\{0,1,2,\dots,n\}$$

бўлади. Шуни эътиборга олиб, юқоридаги йиғиндини икки қисмга ажратамиз:

$$\sum_{k=0}^{n}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right]C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=\sum_{E_n(k)}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right]C_n^k x^k(1-x)^{n-k}+$$
$$+\sum_{F_n(k)}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right]C_n^k x^k(1-x)^{n-k}.$$

Энди бу йиғиндиларни баҳолаймиз. $f(x)$ функциянинг $[0,1]$ да текис узлуксизлигидан ҳамда леммадан фойдаланиб топамиз:

$$\left|\sum_{E_n(k)}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right]C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\right|\leq\sum_{E_n(k)}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=$$
$$=\sum_{k:\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|C_n^k x^k(1-x)^{n-k}<\frac{\varepsilon}{2}\sum_{E_n(k)}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\leq$$
$$\leq\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Равшанки, $f(x)$ функция $[0,1]$ да чегараланган. Унда $\max\limits_{0\le x\le 1}|f(x)| = M \in R$ бўлади. Шуни эътиборга олиб топамиз:

$$\left|\sum_{F_n(k)}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right]C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\right| \le \sum_{k:\left|\frac{k}{n}-x\right|\ge\delta}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \le$$

$$\le 2M \sum_{k:\left|\frac{k}{n}-x\right|\ge\delta} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

Агар

$$\left|\frac{k}{n}-x\right|\ge\delta \quad \Rightarrow \left(\frac{k}{n}-x\right)^2\cdot\frac{1}{\delta^2}\ge 1$$

бўлишини ҳисобга олсак, унда леммага кўра

$$\sum_{k:\left|\frac{k}{n}-x\right|\ge\delta} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \le \frac{1}{\delta^2}\sum_{k:\left|\frac{k}{n}-x\right|\ge\delta}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \le$$

$$\le \frac{1}{\delta^2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \le \frac{1}{4n\delta^2}$$

бўлади.

Шундай қилиб,

$$|B_n(f;x)-f(x)| \le \left|\sum_{E_n(k)}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right]C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\right| +$$

$$+\left|\sum_{F_n(k)}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right]C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{M}{2n\delta^2}$$

бўлади. Агар $n > \dfrac{M}{2\delta^2\varepsilon}$ дейилса, у ҳолда

$$\frac{M}{2\delta^2\varepsilon} < \frac{1}{2}\varepsilon$$

бўлиб,

$$|B_n(f;x)-f(x)| < \varepsilon$$

бўади. Бу муносабатдан эса

$$\lim_{n\to\infty}\max_{0\le x\le 1}|B_n(f;x)-f(x)| = 0$$

бўлиши келиб чиқади. ▶

Бу теоремадан $n\to\infty$ да

$$B_n(f;x)\rightrightarrows f(x) \qquad (0\le x\le 1)$$

бўлишини топамиз. Демак, $[0,1]$ да узлуксиз бўлган $f(x)$ функция $B_n(f;x)$ кўпҳад билан яқинлаштирилди:

$$f(x)\approx\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \qquad (0\le x\le 1).$$

Айтайлик, $f(x)$ функция $[a,b]$ сегментда узлуксиз бўлсин. Маълумки, ушбу

$$t=\frac{1}{b-a}x-\frac{a}{b-a}$$

чизиқли алмаштириш $[a,b]$ сегментни $[0,1]$ сегментга алмаштиради. Бу алмаштиришдан фойдаланиб ушбу

$$\varphi(t)=f\left(a+(b-a)t\right) \qquad (0\le t\le 1) \tag{7}$$

функцияни ҳосил қиламиз. Равшанки, $\varphi(t)$ функция $[0,1]$ да узлуксиз бўлади. Юқоридаги теоремадан фойдаланиб топамиз:

$$\lim_{n\to\infty}\max_{0\le t\le 1}\left|B_n(\varphi;t)-\varphi(t)\right|=0, \tag{8}$$

бунда

$$B_n(\varphi;t)=\sum_{k=0}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k t^k(1-t)^{n-k}$$

(7) ва (8) муносабатлардан

$$\lim_{n\to\infty}\max_{a\le x\le b}\left|B_n\left(f;\frac{x-a}{b-a}\right)-f(x)\right|=0$$

бўлиши келиб чиқади, бунда

$$B_n\left(f;\frac{x-a}{b-a}\right)=\sum_{k=0}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)C_n^k\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^k\left(1-\frac{x-a}{b-a}\right)^{n-k}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)C_n^k\frac{(x-a)^k(b-x)^{n-k}}{(b-a)^n}.$$

Шундай қилиб қуйидаги теоремага келамиз.

2−теорема (Вейерштрасс). Агар $f(x)$ функция $[a,b]$ сегментда узлуксиз бўлса,

$$\lim_{n\to\infty}\max_{a\le x\le b}\left|B_n\left(f;\frac{x-a}{b-a}\right)-f(x)\right|=0$$

бўлади.

Машқлар

1. Агар $f(x)$ функция $[0,1]$ сегментда узлуксиз бўлса, $\forall x\in[0,1]$ да

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=0$$

бўлиши исботлансин.

2. Агар $f(x)$ функция $[0,1]$ сегментда узлуксиз бўлса,

$$\sup_{0\le x\le 1}\left|B_n(f;x)-f(x)\right|\le\frac{3}{2}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

бўлиши исботлансин, бунда $\omega(\delta)$ − $f(x)$ функциянинг узлуксизлик модули.

72–маъруза

Фурье қатори тушунчаси

1^0. Даврий функциялар ҳақида баъзи маълумотлар. $f(x)$ функция $R=(-\infty,+\infty)$ тўпламда берилган бўлсин. Маълумки, шундай $T\in R\setminus\{0\}$ сон топилсаки, $\forall x\in R$ да

$$f(x+T)=f(x)$$

тенглик бажарилса, $f(x)$ даврий функция, $T\neq 0$ сон эса унинг даври дейилар эди.

Агар $f(x)$ даврий функция бўлиб, $T\neq 0$ сон унинг даври бўлса, kT сонлар $(k=\pm1,\pm2,\ldots)$ ҳам шу функциянинг даври бўлади.

Агар $f(x)$ ва $g(x)$ даврий функциялар бўлиб, $T\neq 0$ уларнинг даври бўлса,

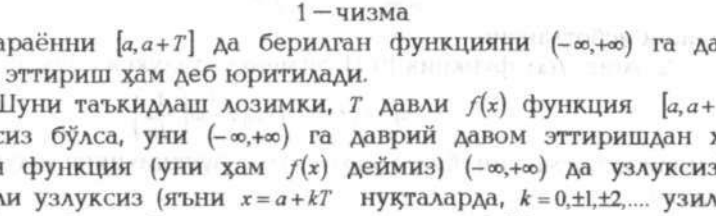
$$f(x)\pm g(x)\ ,\ f(x)\cdot g(x)\ ,\ \frac{f(x)}{g(x)}\quad (g(x)\neq 0)$$

функциялар ҳам даврий бўлиб, уларнинг даври T га тенг бўлади.

Айтайлик, $f(x)$ даврий функция бўлиб, унинг даври T бўлсин. Агар бу функция графигини тасвири $[a,a+T]$ оралиқда $(a\in R)$ маълум бўлса, уни бирин – кетин

$$x=a+kT\qquad (k=\pm1,\pm2,\ldots)$$

вертикал тўғри чизиққа нисбатан симметрик кўчириш натижасида $f(x)$ нинг $(-\infty,+\infty)$ даги графиги ҳосил бўлади (1 – чизма)



1 – чизма

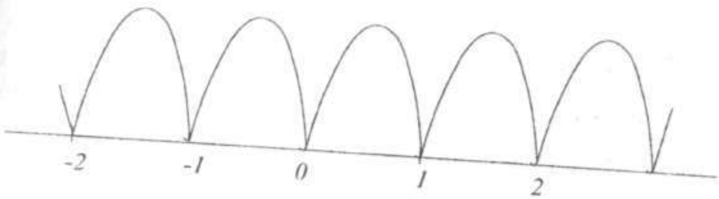
Бу жараённи $[a,a+T]$ да берилган функцияни $(-\infty,+\infty)$ га даврий давом эттириш ҳам деб юритилади.

Шуни таъкидлаш лозимки, T давли $f(x)$ функция $[a,a+T]$ да узлуксиз бўлса, уни $(-\infty,+\infty)$ га даврий давом эттиришдан ҳосил бўлган функция (уни ҳам $f(x)$ деймиз) $(-\infty,+\infty)$ да узлуксиз ёки бўлакли узлуксиз (яъни $x=a+kT$ нуқталарда, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ узилишга эга бўлиб, бошқа барча нуқталарда узлуксиз) бўлиши мумкин.

Масалан, $[0,1]$ да берилган

$$f(x)=2\sqrt{x(1-x)}$$

функцияни $(-\infty,+\infty)$ га даврий давом эттиришдан ҳосил бўлган функция $(-\infty,+\infty)$ да узлуксиз бўлади (2 – чизма)

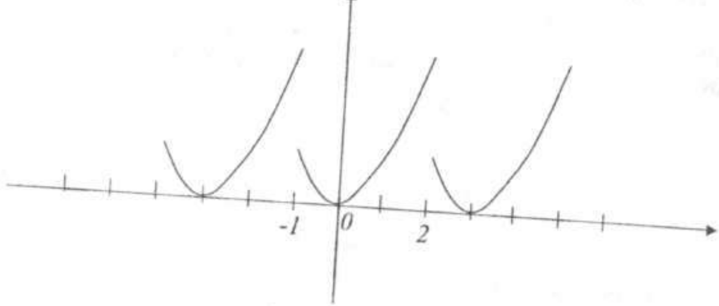


2 — чизма

$[-1,2]$ да берилган

$$f(x)=x^2$$

функцияни $(-\infty,+\infty)$ га даврий давом эттиришдан ҳосил бўлган функция $(-\infty,+\infty)$ да бўлакли узлуксиз бўлади (3 — чизма)



3 — чизма

Лемма. Агар $f(x)$ даврий функция, унинг даври T бўлиб, $[a,a+T]$ да интегралланувчи бўлса, у ҳолда

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)dx=\int\limits_b^{b+T} f(x)dx \qquad (b\in R)$$

бўлади.

◀Аниқ интеграл хоссасидан фойдаланиб топамиз:

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)dx=\int\limits_a^{b} f(x)dx+\int\limits_b^{b+T} f(x)dx+\int\limits_{b+T}^{a+T} f(x)dx \qquad (1)$$

Бу тенгликдаги

$$\int\limits_{b+T}^{a+T} f(x)dx$$

интегралда $x=t+T$ алмаштириш бажарамиз. Натижада

$$\int\limits_{b+T}^{a+T} f(x)dx=\int\limits_b^{a} f(t+T)dt=\int\limits_b^{a} f(t)dt=-\int\limits_a^{b} f(x)dx \qquad (2)$$

бўлади. (1) ва (2) муносабатлардан

$$\int\limits_{b+T}^{a+T} f(x)dx=\int\limits_b^{b+T} f(x)dx$$

бўлиши келиб чиқади. ▶

2^0. Гармоникалар. Ушбу

$$f(x)=A\sin(\alpha x+\beta) \tag{3}$$

функцияни қарайлик, бунда A,α,β — ҳақиқий сонлар. Бу даврий функция бўлиб, унинг даври

$$T=\frac{2\pi}{\alpha} \qquad (\alpha\neq 0)$$

га тенг бўлади.

◀Ҳақиқатан ҳам,

$$f\left(x+\frac{2\pi}{\alpha}\right)=A\sin\left(\alpha\left(x+\frac{2\pi}{\alpha}\right)+\beta\right)=A\sin(\alpha x+\beta+2\pi)=A\sin(\alpha x+\beta)=f(x).$$ ▶

Одатда, (3) функция гармоника дейилади. Гармониканинг графиги $y=\sin x$ функция графигини Ox ва Oy ўқлар бўйича сиқиши (чўзиш) ҳамда Ox ўқи бўйича суриш натижасида ҳосил бўлади. Гармоникани қуйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$f(x)=A\sin(\alpha x+\beta)=A(\cos\alpha x\sin\beta+\sin\alpha x\cdot\cos\beta)=$$
$$=A\sin\beta\cdot\cos\alpha x+A\cos\beta\cdot\sin\alpha x=a\cos\alpha x+b\sin\alpha x,$$

бунда

$$a=A\sin\beta \quad , \quad b=A\sin\beta.$$

Аксинча,

$$f(x)=a\cos\alpha x+b\sin\alpha x$$

функция гармоникани ифодалайди:

$$f(x)=a\cos\alpha x+b\sin\alpha x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha x\right)=$$
$$=A(\sin\beta\cos\alpha x+\cos\beta\sin\alpha x)=A\sin(\alpha x+\beta)$$

бунда

$$\sqrt{a^2+b^2}=A \quad , \quad \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\beta \quad , \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\beta$$

3^0. Фурье қаторининг таърифи. Ҳар бир ҳади

$$u_n(x)=a_n\cos nx+b_n\sin nx \qquad (n=0,1,2,....)$$

гармоникадан иборат ушбу

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{4}$$

функционал қатор тригонометрик қатор дейилади. Бунда

$a_0,a_1,b_1,a_2,b_2,....,a_n,b_n,....$

сонлар тригонометрик қаторнинг коэффициентлари дейилади.

Одатда (4) тригонометрик қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$T_n(x)=a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

тригонометрик кўпҳад дейилади.

Айтайлик, $f(x)$ функция $[-\pi,\pi]$ да берилган бўлиб, у шу оралиқда интегралланувчи бўлсин.

Равшанки,

$f(x)\cos nx$, $f(x)\sin nx$ $(n=1,2,3,....)$

функциялар ҳам интегралланувчи бўлади. Юқорида келтирилган функцияларнинг интегралларини қуйидагича белгилаймиз:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\ ,\qquad (n=1,2,...) \tag{5}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\ ,\qquad (n=1,2,...)$$

Сўнг ушбу

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{6}$$

тригонометрик қаторни тузамиз.

Равшанки, (6) тригонометрик қатор (5) муносабатлардан топиладиган

$$a_0,a_1,b_1,a_2,b_2,....,a_n,b_n,....$$

сонлар билан тўла аниқланади.

1−таъриф. Коэффициентлари (5) муносабатлар билан аниқланган (6) тригонометрик қатор $f(x)$ функциянинг Фурье қатори дейилади. Бунда

$$a_0,a_1,b_1,a_2,b_2,....,a_n,b_n,....$$

сонлар $f(x)$ функциянинг **Фурье коэффициентлари** дейилади.

Демак, $f(x)$ функциянинг Фурье қатори шундай тригонометрик қаторки, унинг коэффициентлари (5) формулалар ёрдами аниқланади. Шуни эътиборга олиб, $f(x)$ функциянинг Фурье қаторини қуйидагича ёзилади:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

Мисол. Ушбу

$$f(x)=e^{\alpha x}\qquad(-\pi\le x\le\pi,\alpha\ne 0)$$

функциянниг Фурье қатори топилсин.

◀(5) формулалардан фойдаланиб, берилган функциянинг Фурье коэффициентларини ҳисоблаймиз:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha\pi}\left(e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi}\right)=\frac{2}{\alpha\pi}sh\alpha\pi\ ,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\alpha x}\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\frac{\alpha\cos nx+n\sin nx}{\alpha^2+n^2}e^{\alpha x}\Big|_{-\pi}^{\pi}=$$

$$=(-1)^n\frac{1}{\pi}\frac{2\alpha}{\alpha^2+n^2}sh\alpha\pi\qquad(n=1,2,....),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\alpha x}\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\frac{\alpha\sin nx-n\cos nx}{\alpha^2+n^2}e^{\alpha x}\Big|_{-\pi}^{\pi}=$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{1}{\pi} \frac{2n}{\alpha^2 + n^2} sh\alpha\pi \qquad (n = 1,2,....)$$

Демак,

$$f(x) = e^{\alpha x}$$

функциянинг Фурье қатори

$$f(x) = e^{\alpha x} - \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) =$$

$$= \frac{2sh\alpha\pi}{\pi} \left[\frac{1}{2\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 + n^2} (\alpha \cos nx - n \sin nx) \right.$$

бўлади. ▶

Айтайлик, ушбу шартлар бажарилсин:

1) қуйидаги

$$\frac{a}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \ (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{7}$$

тригонометрик қатор $[-\pi, \pi]$ да яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $f(x)$ га тенг:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,, \tag{8}$$

2) (8) ни ҳамда уни $\cos kx$ ва $\sin kx$ ларга $(k = 0,1,2,...)$ кўпайтиришдан ҳосил бўлган

$$f(x) \cos kx = \frac{a_0}{2} \cos kx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cos kx + b_n \sin nx \cos kx)\ ,$$

$$f(x) \sin kx = \frac{a_0}{2} \sin kx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \sin kx + b_n \sin nx \sin kx)$$

қаторлар $[-\pi, \pi]$ да ҳадлаб интеграллансин.

У ҳолда

$$a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_n, b_n, ...$$

сонлар $f(x)$ функциянинг Фурье коэффициентлари бўлади, (7) тригонометрик қатор эса $f(x)$ функциянинг Фурье қатори бўлади.

Бу тасдиқнинг исботи қуйидаги

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad , \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \quad , \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx$$

интегралларни ҳисоблашдан келиб чиқади.

4^0. Жуфт ва тоқ функцияларнинг Фурье қаторлари. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ да берилган жуфт функция бўлиб, у шу оралиқда интегралланувчи бўлсин. Бу функциянинг Фурье коэффициентларини топамиз:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} f(x) \cos nx dx + \int_{0}^{\pi} f(x) \cos nx dx \right] =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos nx dx \qquad (n = 0,1,2,....) \quad ,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nxdx + \int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx + \int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx\right] = 0 \qquad (n = 1,2,....)$$

Демак, жуфт $f(x)$ функциянинг Фурье коэффициентлари

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx \qquad (n = 0,1,2,....)$$

$$b_n = 0 \qquad (n = 1,2,..)$$

бўлиб, Фурье қатори

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_0 \cos nx$$

бўлади.

Айтайлик, $f(x)$ функция $[-\pi,\pi]$ да берилган тоқ функция бўлиб, у шу оралиқда интегралланувчи бўлсин. Бу функциянинг Фурье коэффициентларини топамиз:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos xdx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nxdx + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx\right] = 0 \qquad (n = 0,1,2,....)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nxdx + \int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx \qquad (n = 1,2,....)$$

Демак, тоқ $f(x)$ функциянинг Фурье коэффициентлари

$$a_n = 0 \ , \quad (n = 0,1,2,...),$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx \ , \ (n = 1,2,....)$$

бўлиб, Фурье қатори

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

бўлади.

1-мисол. Ушбу

$$f(x) = x^2 \qquad (-\pi \le x \le \pi)$$

жуфт функциянинг Фурье қатори топилсин.

◀Аввало берилган функциянинг Фурье коэффициентларини топамиз:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3}\pi^2 \qquad ,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 \cos nxdx = \frac{2}{\pi} x^2 \frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{4}{n\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nxdx =$$

$$=\frac{4}{\pi n}\left(\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^\pi-\frac{1}{n}\int_0^\pi\cos nxdx\right)=(-1)^n\cdot\frac{4}{n^2}\qquad (n=1,2,...)$$

Демак, $f(x)=x^2$ функциянинг Фурье қатори

$$f(x)=x^2\sim\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$$

бўлади. ▶

2–мисол. Ушбу

$$f(x)=x\qquad (-\pi\le x\le\pi)$$

тоқ функциянинг Фурье қатори топилсин.

◀Берилган функциянинг Фурье коэффициентларини ҳисоблаймиз:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^\pi+\frac{1}{n}\int_0^\pi\cos nxdx\right)=\frac{2(-1)^{n-1}}{n}.$$

Демак, $f(x)=x$ функциянинг Фурье қатори

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{n}\sin nx$$

бўлади. ▶

5^0. $[-l,l]$ оралиқда берилган функциянинг Фурье қатори. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $[-l,l]$ оралиқда $(l>0)$ берилган бўлиб, у шу оралиқда интегралланувчи бўлсин.

Равшанки, ушбу

$$t=\frac{\pi}{l}\cdot x$$

алмаштириш натижасида $[-l,l]$ оралиқ $[-\pi,\pi]$ оралиққа ўтади. Агар

$$f(x)=f\left(\frac{l}{\pi}t\right)=\varphi(t).$$

дейилса, $\varphi(t)$ функция $[-\pi,\pi]$ оралиқда берилган ва шу оралиқда интегралланувчи функция бўлади.

Унинг Фурье қатори

$$\varphi(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)$$

бўлиб,

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos ntdt\qquad (n=0,1,2,...)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin ntdt\qquad (n=1,2,...)$$

бўлади. Энди

$$t=\frac{\pi}{l}x$$

бўлишини эътиборга олиб топамиз

$$\varphi\left(\frac{\pi}{l}x\right)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\frac{\pi}{l}x+b_n\sin n\frac{\pi}{l}x\right)$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\varphi\left(\frac{\pi}{l}x\right)\cos n\frac{\pi}{l}xdx \quad , \ (n=0,1,2,\ldots)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\varphi\left(\frac{\pi}{l}x\right)\sin n\frac{\pi}{l}xdx \quad , \ (n=1,2,\ldots)$$

Натижада берилган $f(x)$ функциянинг Фурье қаторини қуйидагича

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

бўлишини топамиз, бунда

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \qquad (n=0,1,2,\ldots),$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \qquad (n=1,2,\ldots),$$

бўлади.

3−мисол. Ушбу

$$f(x)=e^x \qquad (-1\le x\le 1)$$

функциянинг Фурье қатори топилсин.

◀ Юқоридаги формулалардан фойдаланиб, $f(x)=e^x$ функциянинг Фурье коэффициентларини топамиз:

$$a_0=\int_{-1}^{1}e^x dx=e-e^{-1},$$

$$a_n=\int_{-1}^{1}e^x\cos n\pi x dx=\frac{n\pi\sin n\pi x-\cos n\pi x}{1+n^2\pi^2}e^x\Big|_{-1}^{1}=$$

$$=\frac{1}{1+n^2\pi^2}\left(e\cos n\pi-e^{-1}\cos n\pi\right)=(-1)^n\frac{e-e^{-1}}{1+n^2\pi^2} \qquad (n=1,2,\ldots),$$

$$b_n=\int_{-1}^{1}e^x\cos n\pi x dx=\frac{\sin n\pi x-n\pi\cos n\pi x}{1+n^2\pi^2}e^x\Big|_{-1}^{1}=$$

$$=\frac{1}{1+n^2\pi^2}\left(en\pi\cos n\pi+n\pi e^{-1}\cos n\pi\right)=\frac{n\pi(-1)^n}{1+n^2\pi^2}\left(e^{-1}-e\right)=$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{e-e^{-1}}{1+n^2\pi^2} \qquad (n=1,2,\ldots)$$

Демак,

$$f(x)=e^x \qquad (-1\le x\le 1)$$

функциянинг Фурье қатори

$$e^x\sim\frac{e-e^{-1}}{2}+\left(e-e^{-1}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{1+n^2\pi^2}\cos n\pi x+\frac{(-1)^{n+1}}{1+n^2\pi^2}n\pi\sin n\pi x\right]$$

бўлади. ▶

Машқлар

1. Ушбу

$$f(x) = 2\sin(2x + 2)$$

гармониканинг графиги топилсин.

2. Ушбу

$$f(x) = |x| \qquad (-\pi \le x \le \pi)$$

функциянинг Фурье қатори топилсин.

73–маъруза

Фурье қаторининг яқинлашувчилиги

1⁰. Леммалар. Фурье қаторининг яқинлашишини исботлашда муҳим бўлган леммаларни келтирамиз.

1–лемма. Агар $\varphi(x)$ функция $[a,b]$ да интегралланувчи бўлса,

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b \varphi(x)\sin pxdx=0\ ,$$

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b \varphi(x)\cos pxdx=0$$

бўлади.

◀Равшанки, лемманинг шартида

$$\varphi(x)\sin px\ \ ,\ \varphi(x)\cos px$$

функциялар $[a,b]$ да интегралланувчи бўлади. $[a,b]$ сегментда

$$x_{\circ},x_1,...,x_{n-1},x_n \qquad (a=x_1<x_2<....<x_{n-1}<x_n=b)$$

нуқталарни олиб,

$$\int_a^b \varphi(x)\sin pxdx$$

ни қуйидагича ёзиб оламиз

$$\int_a^b \varphi(x)\sin pxdx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\varphi(x)\sin pxdx=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left[\varphi(x)-m_k\right]\sin pxdx+\sum_{k=0}^{n-1}m_k\int_{x_k}^{x_{k+1}}\sin pxdx\ , \qquad (1)$$

бунда

$$m_k=\inf_{x\in[x_k,x_{k+1}]}\varphi(x) \qquad (k=0,1,2,...,n-1)$$

Бу (1) тенгликнинг ўнг томонидаги интегралларни баҳолаймиз:

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left[\varphi(x)-m_k\right]\sin pxdx\right|\le\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\varpi_k dx=\sum_{k=0}^{n-1}\varpi_k\Delta x_k\ ,$$

бунда ϖ_k — $\varphi(x)$ функциянинг $[x_k,x_{k+1}]$ даги тебраниши, $\Delta x_k=x_{k+1}-x_k$.

Модомики, $\varphi(x)$ функция $[a,b]$ да интегралланувчи экан, унда

$$\sum_{k=0}^{n-1}\varpi_k\Delta x_k<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (2)$$

қилиб олиниши мумкин.

Энди (1) тенгликнинг ўнг томонидаги иккинчи интегрални баҳолаймиз:

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}m_k\int_{x_k}^{x_{k+1}}\sin pxdx\right|\le\sum_{k=0}^{n-1}|m_k|\cdot\left|\frac{\cos px_k-\cos px_{k+1}}{p}\right|\le$$

$$\le \sum_{k=0}^{n-1} |m_k| \cdot \frac{2}{p} = \frac{2}{p} \sum_{k=0}^{n-1} |m_k|$$

Равшанки, p нинг етарлича катта қилиб олиш ҳисобига

$$\frac{2}{p} \sum_{k=0}^{n-1} |m_k| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (3)$$

га эришиш мумкин.

Натижада (1) , (2) ва (3) муносабатлардан

$$\left| \int_a^b \varphi(x) \sin px dx \right| < \varepsilon$$

бўлиши ва ундан

$$\lim_{p \to \infty} \int_a^b \varphi(x) \sin px dx = 0$$

бўлиши келиб чиқади.

Худди шунга ўхшаш

$$\lim_{p \to \infty} \int_a^b \varphi(x) \cos px dx = 0$$

исботланади. ▶

Бу лемма $\varphi(x)$ функция $[a,b]$ да бўлакли узлуксиз **функция** бўлган ҳолда ҳам ўринли бўлади.

1 – леммадан қуйидаги натижа келиб чиқади.

Натижа. Агар $f(x)$ функция $[-\pi,\pi]$ оралиқда бўлакли – узлуксиз бўлса, унинг Фурье коэффициентлари $n \to \infty$ да нолга интилади:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0 \ ,$$

$$\lim_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0$$

2-лемма. Ушбу

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos ku = \frac{\sin(2n+1)\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}}$$

тенглик ўринли.

◀Равшанки

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos ku = \frac{1}{2\sin\frac{u}{2}} \left[\sin\frac{u}{2} + \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{u}{2} \cos ku \right]$$

бўлади.

Агар

$$\sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{u}{2} \cos ku = \sum_{k=1}^{n} \left[\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)u - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)u \right] =$$

$$= \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u - \sin\frac{u}{2}$$

бўлишин эътиборга олсак, унда юқоридаги тенгликдан

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos u = \frac{\sin(2n+1)}{2\sin\frac{u}{2}}$$

тенгликнинг келиб чиқишини топаиз. ▶

2⁰. Фурье қаторининг қисмий йиғиндиси. Дирихле интеграли. Функционал қаторлар назариясидан маълумки, қаторнинг яқинлашишини аниқлашда авало унинг қисмий йиғиндиси топилиб, сўнг бу қисмий йиғиндининг лимити ўрганилар эди.

Функциянинг Фурье қаторининг яқинлашишини аниқлашда ҳам аввало унинг қисмий йиғиндиси топилади.

Айтайлик, $f(x)$ функция $[-\pi,\pi]$ оралиқда интегралланувчи бўлсин. Бу функциянинг Фурье коэффициентларини топиб, унинг Фурье қаторини тузамиз:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt dt \qquad (k = 0,1,2,...)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt dt \qquad (k = 1,2,3.....)$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right)$$

Равшанки, бу қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$F_n(f;x) = \frac{a_*}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right)$$

бўлади.

Бу тенгликдаги a_k ва b_k ларнинг ўрнига уларнинг юқорида келтирилган ифодаларни қўйиб топамиз:

$$F_n(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)[\cos kt\cos kx + \sin kt\cdot\sin kx]dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]dt$$

Маълумки, 2 – леммага кўра

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x) = \frac{\sin(2n+1)\frac{t-x}{2}}{2\sin\frac{t-x}{2}}$$

бўлади. Унда $F_n(f,x)$ йиғинди қуйидаги кўринишга келади:

$$F_n(f,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin(2n+1)\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}dt \qquad (4)$$

Одатда, (4) тенгликнинг ўнг томонидаги интеграл $f(x)$ функциянинг Дирихле интеграли дейилади.

$F_n(f;x)$ йиғиндининг бу ифодасини янада ўзгартириб, $n\to\infty$ да $F_n(f;x)$ нинг лимитини топишга қулайлик келтирадиган кўринишга олиб келамиз.

Аввало (4) интегралда $t-x=u$ алмаштиришни бажарамиз. Бунда, интеграл остидаги функция 2π даврли бўлганлиги сабабли интеграллаш чегарасининг ўзгармай қолишини эътиборга олиб топамиз:

$$F_n(f;x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\frac{\sin(2n+1)\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}du$$

Бу тенгликни ушбу

$$F_n(f;x)=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x+u)\frac{\sin(2n+1)\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}du+\right.$$

$$\left.+\int_{0}^{\pi} f(x+u)\frac{\sin(2n+1)\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}du\right]$$

икки қисмга ажратиб, ўнг томонидаги биринчи интегралда u ни $-u$ га алмаштириб топамиз:

$$F_n(f;x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left[f(x+u)+f(x-u)\right]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}du$$

Хусусан, $f(x)\equiv 1$ бўлганда

$$F_n(1;x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}}du$$

бўлиб, у 1 га тенг бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, 2 – леммадан фойдалансак, унда

$$F_n(1,x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}2\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos ku\right]du=1+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{0}^{\pi}\cos ku\,du=$$

$$=1+\frac{2}{\pi}\frac{\sin ku}{k}\Big|_{u=0}^{u=\pi}=1$$

бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}}du \tag{5}$$

3⁰. Локаллаштириш принципи. $f(x)$ функция Фурье қаторининг қисмий йиғиндиси

$$F_n(f;x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[f(x+u)+f(x-u)\right]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}du \tag{6}$$

нинг битта муҳим хоссасини келтирамиз.

Ихтиёрий δ сонни $(0<\delta<\pi)$ олиб, (6) интегрални икки интегралга ажратамиз:

$$F_n(f;x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\left[f(x+u)+f(x-u)\right]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}du+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\left[f(x+u)+f(x-u)\right]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}du=$$

$$=J_1(n,\delta)+J_2(n,\delta). \tag{7}$$

__1–теорема.__ $n\to\infty$ да $J_2(n,\delta)$ нинг лимити нолга тенг бўлади:

$$\lim_{n\to\infty}J_2(n,\delta)=0.$$

◀ $f(x)$ функция $[-\pi,\pi]$ да интегралланувчи бўлганлиги сабабли

$$\varphi(u)=\frac{1}{2\sin\frac{u}{2}}\left[f(x+u)+f(x-u)\right]$$

функция ҳам $[\delta,\pi]$ да интегралланувчи бўлади.

Унда 1 – леммага кўра

$$\lim_{n\to\infty}J_2(n,\delta)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\left[f(x+u)+f(x-u)\right]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}du=$$

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\int_{\delta}^{\pi}\varphi(u)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)udu=0$$

бўлади. ▶

(7) муносабат ва келтирилган теоремадан муҳим натижа келиб чиқади:

ушбу

$$J_1(n,\delta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\left[f(x+u)+f(x-u)\right]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}du$$

интегралнинг $n\to\infty$ даги лимити мавжуд бўлгандагина $F_n(f;x)$ нинг лимити мавжуд бўлади ва

$$\lim_{n\to\infty}F_n(f;x)=\lim_{n\to\infty}J_1(n,\delta)$$

муносабат ўринли бўлади.

Маълумки, $J_1(n,\delta)$ интегралда f функциянинг $[x-\delta\,,\,x+\delta]$ оралиқдаги қийматларигина қатнашади.

Демак, $f(x)$ функция Фурье қаторининг x нуқтада яқинлашувчилиги ёки узоқлашувчилиги бу функуциянинг шу нуқта атрофи $(x-\delta\,,\,x+\delta)$ даги қийматларигагина боғлиқ бўлади. Буни локалаштириш принципи деб юритилади.

4⁰. Фурье қаторининг яқинлшувчилиги. Энди функция Фурье қаторининг яқинлашиши ҳақидаги теоремани келтирамиз.

2−теорема. 2π даврли $f(x)$ функция $[-\pi,\pi]$ оралиқда бўлакли−дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда бу функциянинг Фурье қатори

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)$$

$[-\pi,\pi]$ да яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

га тенг бўлади.

◀ (5) тенгликнинг ҳар икки томонини

$$\frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right]$$

га кўпайтириб, ушбу

$$F_n(f;x)-\frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right]$$

айирмани қуйидагича

$$F_n(f;x)-\frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[f(x+u)+f(x-u)-f(x+0)-f(x-0)\right]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2sin\frac{u}{2}}du$$

ёзиб оламиз. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интеграл иккита

$$J_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[f(x+u)-f(x+0)\right]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}du\,,$$

$$J_2=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[f(x-u)-f(x-0)\right]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}du$$

интегралларга ажратамиз. Натижада

$$F_n(f;x)-\frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right]=J_1+J_2$$

бўлади.

Энди J_1 ва J_2 интегралларни баҳолаймиз. J_1 интегрални баҳолаш учун аввало ихтиёрий $\delta(0<\delta<\pi)$ сонни олиб, J_1 ни икки қисмга ажратиб ёзамиз:

$$J_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\left[f(x+u)-f(x+0)\right]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}du+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\left[f(x+u)-f(x+0)\right]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}du. \qquad (8)$$

Локаллаштириш принципига асосан

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\left[f(x+u)-f(x+0)\right]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}du=0$$

Демак,

$\forall\varepsilon>0$, $\exists n_* =n(\varepsilon,\delta)\in N$, $\forall n>n_*$ да

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\left[f(x+u)-f(x+0)\right]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}du\right|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (9)$$

бўлади. Шартга кўра $f(x)$ функция $[-\pi,\pi]$ да бўлакли дифференциалланувчи. Унда $\forall x\in[-\pi,\pi]$ да

$$\lim_{u\to+0}\frac{f(x+u)-f(x+0)}{u}=f'(x+0)$$

мавжуд бўлиб, $\exists\delta_1>0$, $0<u<\delta_1$ да

$$\left|\frac{f(x+u)-f(x+0)}{u}\right|\le M_1 \qquad (M_1=const)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Шунингдек, $\exists\delta_2>0$, $0<u<\delta_2$ да

$$\frac{\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\le M_2 \qquad (M_2=const)$$

тенгсизлик бажарилади.

Энди $\min\left\{\delta_1, \delta_2, \frac{\pi\varepsilon}{2M_1M_2}\right\}=\delta$ деб оламиз. Натижада, $\forall n\in N$ учун (8) тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи интеграл учун ушбу

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\left[\frac{f(x+u)-uf(x+0)}{u}\right]\frac{\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)udu\right|\le$$

$$\le\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\left|\frac{f(x+u)=f(x+0)}{u}\right|\cdot\frac{\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}du\le\frac{1}{\pi}M_1M_2\delta<\frac{\varepsilon}{2} \tag{10}$$

баҳога эга бўламиз.

(8), (9) ва (10) муносабатлардан

$$|J_1|=\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[f(x+u)-f(x-0)\right]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}du\right|<\varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади.

J_2 интеграл ҳам худди шунга ўхшаш баҳоланади ва

$$|J_2|=\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[f(x-u)-f(x-0)\right]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}du\right|<\varepsilon$$

бўлиши топилади.

Демак,

$$\left|F_n(f;x)-\frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right]\right|<2\varepsilon$$

бўлиб, ундан

$$\lim_{n\to\infty}F_n(f;x)=\frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right]$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса $f(x)$ фунциянинг Фурье қаторининг яқинлашувчилиги ва

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)=\frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right]$$

бўлишини билдиради. ▶

Натижа. Агар f функция юқоридаги теореманинг шартларини бажариб, x нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)=f(x)$$

бўлади.

Мисол. Ушбу

$$f(x)=\cos ax \qquad (-\pi\le x\le\pi\,,\ a\ne n\in z)$$

функциянинг Фурье қатори топилсин ва уни яқинлашига текширилсин.

◀Бу функциянинг Фурье коэффициентларини топамиз. Қаралаётган функция жуфт бўлгани учун

$$b_n = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

бўлиб,

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos ax \cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(a-n)x + \cos(a+n)x]dx =$$

$$= \frac{\sin a\pi}{\pi}(-1)^n\left[\frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n}\right]$$

бўлади. Демак,

$$f(x) \sim \frac{\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n}\right)\cos nx\right]$$

Агар $f(x) = \cos ax$ функция теореманинг ҳамда натижани шартларини бажаришини эътиборга олсак, унда

$$\cos ax = \frac{\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{a-n} + \frac{1}{a+n}\right)\cos nx\right]$$

бўлишини топамиз. ▶

Агар кейинги тенглик $x = 0$ дейилса,

$$1 = \frac{\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{a} + 2a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2 - n^2}\right]$$

бўлиб, ундан

$$\frac{\pi}{\sin a\pi} = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n}\right)$$

бўлиши келиб чиқади.

Машқлар

1. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{агар } -\pi \le x \le 0 \text{ булса}, \\ 0, & \text{агар } 0 < x < \pi \text{ булса} \end{cases}$$

функциянинг Фурье қатори топилсин ва уни яқинлашига текширилсин.

2. Ушбу

$$f(x) = -\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right| \qquad (x \ne 2k\pi,\ k \in z)$$

функциянинг Фурье қатори топилсин ва уни яқинлашига текширилсин.

Адабиёт

1. Худойберганов Г., Варисов А., Мансуров Ҳ. Математик анализ, 1 ва 2 қисмлар, Қарши, "Насаф нашриёти" 2003
2. Азларов Т., Мансуров Ҳ. Математик анализ, 1 ва 2 томлар, Тошкент "Ўқитувчи" 1994, 1995
3. Архипов Г., Садовничий В., Чубариков В. Лекции по математическому анализу, Москва, "Высшая школа", 1999
4. Дороговцев А. Математический анализ, Киев, "Высшая школа", 1985.
5. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. М.: «Наука», 1979.
6. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.1., М., 1973.
7. Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1976.
8. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т.1, М.: «Наука», 1964.
9. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: «Наука», 1990.
10. Саъдуллаев А., Худойберганов Г., Мансуров Х., Ворисов А., Ғуломов Р. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами. 1 – том. Т.: «Ўзбекистон», 1993.

Мундарижа

Сўз боши

12–боб. Кўп ўзгарувчили функциялар, уларнинг лимити, узлуксизлиги

55 – маъруза. R^m фазо. R^m фазода очиқ ва ёпиқ тўпламлар

56 – маъруза R^m фазода кетма – кетлик ва унинг лимити

57 – маъруза. Кўп ўзгарувчили функция ва унинг лимити

58 – маъруза. Кўп ўзгарувчили функциянинг узлуксизлиги. Текис узлуксизлик. Кантор теоремаси.

13–боб. Кўп ўзгарувчили функциянинг ҳосила ва дифференциаллари

59 – маъруза. Кўп ўзгарувчили функциянинг хусусий ҳосилалари. Функциянинг дифференциалланувчилиги.

60 – маъруза. Ўрта қиймат ҳақида теорема. Йўналиш бўйича ҳосила.

61 – маъруза. Кўп ўзгарувчили функциянинг дифференциали.

62 – маъруза. Кўп ўзгарувчили функциянинг юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллари. Тейлор формуласи.

63 – маъруза. Кўп ўзгарувчили функциянинг экстремумлари.

64 – маъруза. Ошкормас функциялар

14–боб

Функционал кетма–кетликлар ва қаторлар

65 – маъруза. Функционал кетма – кетликлар ва уларнинг текис яқинлашувчилиги.

66 – маъруза. Функционал қаторлар ва уларнинг текис яқинлашувчилиги

67 – маъруза. Текис яқинлашувчи функционал қаторларнинг хоссалари

68 – маъруза. Даражали қаторлар, уларнинг яқинлашиш радиуси ва яқинлашиш интерваллари