Министерство образования Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Национальный минерально-сырьевой университет «Горный»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

В ШЕСТИ ТОМАХ

Том 1

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

УЧЕБНИК

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2015

ISBN 978-5-94211-710-8 (Том 1)
ISBN 978-5-94211-709-2

УДК 517.1 + 517.2 (075.8)
ББК 22.161+22.171+22.172
В 723

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. В шести томах. Том 1. Линейная алгебра.
В 723 **Векторная алгебра. Аналитическая геометрия.** Учебник / *А.П.Господариков*, *Е.А.Карпова*, *О.Е.Карпухина*, *С.Е.Мансурова*. Национальный минерально-сырьевой университет «Горный». СПб, 2015.

ISBN 978-5-94211-710-8 (Том 1)
ISBN 978-5-94211-709-2

УДК 517.1 + 517.2 (075.8)
ББК 22.161+22.171+22.172

Авторы:
А.П.Господариков, Е.А.Карпова, О.Е.Карпухина, С.Е.Мансурова

Том 1 учебника дает возможность получить теоретические знания по следующим разделам курса высшей математики: «Линейная алгебра», «Векторная алгебра» и «Аналитическая геометрия».

Пособие предназначено для аудиторных и самостоятельных занятий студентов дневной и заочной форм обучения специальностей вузов горного профиля.

Научный редактор проф. *А.П.Господариков*

Рецензенты: кафедра управления медико-биологическими системами, д-р физ.-мат. наук, проф. *С.И.Перегудин* (Санкт-Петербургский государственный университет).

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящий учебник предназначается для студентов (специалистов, бакалавров и магистров) всех направлений подготовки Национального минерально-сырьевого университета «Горный» (г. Санкт-Петербург), а также для аспирантов и научно-технических работников, желающих пополнить и углубить свои знания и навыки по применению математических методов при решении прикладных задач. Данный учебник по высшей математике может быть рекомендован и для студентов других высших технических учебных заведений, где различные разделы курса высшей математики объединены в общий курс.

Содержание учебника определяется программами курса высшей математики, рассчитанными на 300-450 учебных часов, и предусматривает возможность его использования как для аудиторного, так и самостоятельного обучения.

Учебник состоит из 20 глав, размещенных в шести томах:

• том 1 – главы «Линейная алгебра», «Векторная алгебра», «Аналитическая геометрия»;

• том 2 – главы «Начала математического анализа», «Производная и дифференциал», «Приложение дифференциального исчисления функций одной переменной»;

• том 3 – главы «Элементы высшей алгебры»», «Неопределенный интеграл», «Определенный интеграл и его приложения»;

• том 4 – главы «Дифференциальные уравнения», «Ряды. Ряды Фурье», «Функции многих переменных», «Интегральное исчисление функций многих переменных»;

• том 5 – главы «Теория вероятностей», «Математическая статистика», «Теория функций комплексного переменного», «Операционное исчисление»;

• том 6 – главы «Специальные функции», «Основные уравнения математической физики», «Основы линейного программирования».

Изложение в учебнике необходимых теоретических сведений и формул сопровождается разбором многочисленных примеров, иллюстрирующих приведенный теоретический материал и дающих образцы решения практических задач.

Подбор задач и примеров в каждом разделе призван способствовать более глубокому усвоению излагаемого материала. Многие приведенные примеры и задачи раскрывают связь математики с другими дисциплинами. Все это делает книгу полезной и студентам заочного обучения для самостоятельного изучения курса высшей математики.

Особенность данного учебника, отличающая его от других, ранее изданных, состоит в том, что он содержит значительное число практических задач и примеров с подробными решениями по всем разделам курса. Таким образом, учебник объединяет традиционный курс лекций и задачник по курсу высшей математики с подробными решениями рассматриваемых задач и примеров.

В связи с наличием в вузовской программе для инженерно-технических специальностей дисциплин, тесно связанных с автоматизацией технологических процессов и производств, электротехникой и электроэнергетикой, радиоэлектронными системами и комплексами, теплоэнергетикой и теплотехникой и т.п., в учебнике достаточно подробно изложены такие разделы курса высшей математики, как ряды Фурье, элементы теории поля, операционное исчисление, теория функций комплексного переменного. Разделы специальных функций и уравнений математической физики рекомендуются, в основном, студентам-геофизикам, а разделы линейного программирования будущим специалистам в области экономики, информатики и вычислительной техники, информационных систем и технологий и т.п.

В конце каждой главы приведены контрольные вопросы и экзаменационные тестовые задания, ответы и решения на которые должны помочь студенту лучше усвоить теоретический материал и проявить навыки применения теоретических знаний в практических занятиях.

Таким образом, учебник может служить основой как для приобретения базовых математических знаний, необходимых выпускнику технического университета, так и способствовать усвоению студентами навыков построения математических моделей для решения практических и перспективных инженерно-технических проблем современного производства.

Глава 1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1.1. МАТРИЦЫ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел. Числа, образующие матрицу, называются ее ***элементами***.

Матрицы обозначаются заглавными латинскими буквами, а их элементы – соответствующими строчными буквами с индексами, указывающими местоположение этого элемента в матрице. Пусть, например, матрица A состоит из m строк и n столбцов. Тогда в общем виде ее записывают следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \{a_{ij}\}_{m\times n},$$

где a_{ij} – элемент матрицы, стоящий в строке с номером i и в столбце с номером j. Строки нумеруются сверху вниз, а столбцы – слева направо.

Совокупность чисел m и n образует ***размерность*** матрицы и обозначается $\dim A = [m\times n]$ (от слова *dimension*) или $A_{[m\times n]}$.

Если количество строк в прямоугольной матрице равно количеству ее столбцов, матрица называется ***квадратной***. Для квадратной матрицы слово размерность обычно заменяют словом *порядок*: матрица n-го порядка имеет размерность $[n \times n]$.

Среди всех элементов квадратной матрицы выделяют элементы, у которых номер строки совпадает с номером столбца: a_{ii}. Эти элементы образуют *главную диагональ* матрицы и называются *диагональными элементами*.

Если в квадратной матрице все элементы, стоящие ниже главной диагонали, равны нулю, матрица называется *треугольной* (или *верхнетреугольной*).

Если равны нулю все элементы квадратной матрицы, стоящие выше главной диагонали, матрица называется *нижнетреугольной.*

Если в квадратной матрице все элементы, кроме диагональных, равны нулю, матрица называется *диагональной*.

Две матрицы называются ***равными***, если совпадают их размерности и каждый элемент первой матрицы равен соответствующему элементу второй матрицы. При этом под *соответствующими* элементами понимаются элементы, имеющие одинаковые пары индексов. Таким образом,

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dim A = \dim B = [m\times n]; \\ a_{ij} = b_{ij}, \;\; i = 1,\dots,m; \;\; j = 1,\dots,n. \end{cases}$$

Над матрицами, как и над любыми математическими объектами, можно производить некоторые операции. Рассмотрим основные из них.

Сложение матриц:

$$C = A + B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dim A = \dim B = \dim C = [m \times n]; \\ c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1,\dots,m; \; j = 1,\dots,n. \end{cases}$$

Иначе говоря, если размерности матриц A и B совпадают, то матрица C будет их ***суммой*** тогда и только тогда, когда имеет такую же размерность, как A и B, а каждый элемент матрицы C равен сумме соответствующих элементов матриц A и B.

Сумма матриц обладает следующими свойствами:

1. **Коммутативность** (перестановочный закон): $A + B = B + A$.

Доказательство. $A + B = \{a_{ij} + b_{ij}\}_{m \times n} = \{b_{ij} + a_{ij}\}_{m \times n} = B + A.$

2. **Ассоциативность** (сочетательный закон):

$$A + (B + C) = (A + B) + C .$$

3. **Нейтральный элемент для сложения:** существует такая матрица $\Theta_{[m\times n]}$, что для любой матрицы $A_{[m\times n]}$ справедливо равенство $A + \Theta = A$. По аналогии с числами такая матрица называется ***нулевой***. Все элементы нулевой матрицы – нули.

Доказательство. Пусть θ_{ij} – элементы матрицы Θ. Тогда по определению сложения $a_{ij} + \theta_{ij} = a_{ij}$, откуда $\theta_{ij} = 0$.

4. **Противоположный элемент:** для любой матрицы $A_{[m\times n]}$ существует такая матрица $P_{[m\times n]}$, что $A + P = \Theta$. По аналогии с числами такая матрица называется ***противоположной*** к A и обозначается $(-A)$. Все элементы противоположной к A матрицы равны соответствующим элементам матрицы A с обратным знаком, т.е. $p_{ij} = - a_{ij}$.

Доказательство. Пусть p_{ij} – элементы матрицы $(-A)$. Тогда по определению сложения $a_{ij} + p_{ij} = \theta_{ij} = 0$, откуда получим $p_{ij} = - a_{ij}$.

5. **Вычитание матриц** (операция, обратная сложению). Матрица C называется ***разностью*** матриц A и B, если матрица A есть сумма матриц B и C, т.е. $C = A - B \;\Leftrightarrow\; A = C + B$. Исходя из свойств сложения, разность будет определяться по формулам

$$C = A - B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dim A = \dim B = \dim C = [m \times n]; \\ c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}, \quad i = 1,..,m; \; j = 1,..,n. \end{cases}$$

Доказательство. Так как $A = C + B$, то размерности всех трех матриц совпадают и $a_{ij} = c_{ij} + b_{ij}$, откуда по свойствам обычных чисел получим $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

Замечание. Пользуясь свойством 4, разность матриц A и B можно заменить на сумму матрицы A с матрицей, противоположной B: $A - B = A + (-B)$. Таким образом, разность матриц, по сути, является суммой и, следовательно, обладает всеми свойствами суммы матриц.

Умножение матрицы на число. Матрица C будет равна матрице A, умноженной на число λ, если имеет такую же размерность как A, а каждый элемент матрицы C равен произведению соответствующего элемента матрицы A и числа λ:

$$C = \lambda A,\ \lambda = \mathrm{const} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dim C = \dim A = [m \times n]; \\ c_{ij} = \lambda a_{ij}, \quad i = 1,\dots,m; \ j = 1,\dots,n. \end{cases}$$

Умножение матрицы на число обладает следующими свойствами:

1. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.

Доказательство. $\lambda(A + B) = \{\lambda(a_{ij} + b_{ij})\}_{m\times n} =$

$$= \{\lambda a_{ij} + \lambda b_{ij}\}_{m\times n} = \{\lambda a_{ij}\}_{m\times n} + \{\lambda b_{ij}\}_{m\times n} = \lambda A + \lambda B.$$

2. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$, где λ, μ = const.

Доказательство. Аналогично предыдущему (провести самостоятельно).

3. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$, где λ, μ – числа, A – матрица.

Доказательство. Провести самостоятельно.

4. Вычисление противоположной матрицы равносильно умножению исходной матрицы на (-1): $(-A) = (-1)\cdot A$.

Замечание. Операции сложения матриц и умножения матрицы на число называются *линейными*.

Транспонирование матрицы:

$$C = A^T \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dim A = [m \times n] \ \Leftrightarrow \ \dim C = [n \times m]; \\ c_{ji} = a_{ij}, \quad i = 1,\dots,m; \ j = 1,\dots,n. \end{cases}$$

При транспонировании матрицы ее строки меняются местами со столбцами (первая строка становится первым столбцом и т.д.). Например, элемент a_{23}, который стоял в матрице A во второй строке на третьем месте, после транспонирования будет стоять в третьей строке на втором месте. Таким образом

$$A_{[2\times 3]} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ (A^T)_{[3\times 2]} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Транспонирование обладает следующими свойствами:

1. Диагональные элементы при транспонировании остаются на своих местах (так как индексы a_{ii} не изменяются при перестановке номеров строки и столбца местами).

2. $(A + B)^T = A^T + B^T$.

3. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.

4. $\left(A^T\right)^T = A$.

Произведение матриц. Две матрицы A и B называются ***согласованными***, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Замечание. Если A и B согласованы, то B и A могут быть и не согласованы.

Для согласованных матриц определена операция их умножения: матрица C называется ***произведением*** согласованных матриц A и B, если она содержит столько же строк, сколько и матрица A (первый множитель) и столько же столбцов, сколько матрица B (второй множитель), а элемент c_{ij} произведения матриц равен сумме попарных произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B, т.е.

$$C = AB \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dim A = [m \times r], \ \dim B = [r \times n] \quad \Leftrightarrow \quad \dim C = [m \times n], \\ c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{ir} b_{rj}, \quad i = 1,\ldots,m; \ j = 1,\ldots,n. \end{cases}$$

Пример 1.1. Найти произведения AB и BA, если

$$A_{[2\times3]} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \ B_{[3\times2]} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрицы A и B согласованы, пусть $C = AB$. Размерность $\dim C = [2 \times 2]$. Для того, чтобы вычислить, например, элемент произведения c_{21}, нужно все элементы второй строки матрицы A умножить на соответствующие (по местоположению) элементы первого столбца матрицы B, и полученные произведения сложить:

$$c_{21} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 4 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot (-2) = 4 + 0 - 12 = -8.$$

Вычислив таким способом каждый элемент матрицы C, получим

$$C = AB = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ -2 & 4 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \substack{1\text{-я строка } A \text{ на } 1\text{-й столбец } B:} & \substack{1\text{-я строка } A \text{ на } 2\text{-й столбец } B:} \\ 1\cdot 1+2\cdot 0+3\cdot(-2) & 1\cdot(-1)+2\cdot 3+3\cdot 4 \\ \hline \substack{2\text{-я строка } A \text{ на } 1\text{-й столбец } B:} & \substack{2\text{-я строка } A \text{ на } 2\text{-й столбец } B:} \\ 4\cdot 1+5\cdot 0+6\cdot(-2) & 4\cdot(-1)+5\cdot 3+6\cdot 4 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} -5 & 17 \\ -8 & 35 \end{pmatrix}.$$

Так как матрицы B и A также согласованы, можно найти $D = BA$, $\dim D = [3 \times 3]$.

$$D = BA = \left(\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ \hline 0 & 3 \\ \hline -2 & 4 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c} \substack{1\text{-я строка. } B \text{ на } 1\text{-й столбец } A:} & \substack{1\text{-я строка } B \text{ на } 2\text{-й столбец } A:} & \substack{1\text{-я строка } B \text{ на } 3\text{-й столбец } A:} \\ 1\cdot 1+(-1)\cdot 4 & 1\cdot 2+(-1)\cdot 5 & 1\cdot 3+(-1)\cdot 6 \\ \hline \substack{2\text{-я строка } B \text{ на } 1\text{-й столбец } A:} & \substack{2\text{-я строка } B \text{ на } 2\text{-й столбец } A:} & \substack{2\text{-я строка } B \text{ на } 3\text{-й столбец } A:} \\ 0\cdot 1+3\cdot 4 & 0\cdot 2+3\cdot 5 & 0\cdot 3+3\cdot 6 \\ \hline \substack{3\text{-я строка } B \text{ на } 1\text{-й столбец } A:} & \substack{3\text{-я строка } B \text{ на } 2\text{-й столбец } A:} & \substack{3\text{-я строка } B \text{ на } 3\text{-й столбец } A:} \\ (-2)\cdot 1+4\cdot 4 & (-2)\cdot 2+4\cdot 5 & (-2)\cdot 3+4\cdot 6 \end{array}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 12 & 15 & 18 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}.$$

Произведение матриц обладает следующими свойствами.

1. $AB \neq BA$. Здесь имеется в виду отсутствие свойства коммутативности умножения для произвольных матриц. В приведенном выше примере существовали и $C = AB$, и $D = BA$, причем очевидно $C \neq D$ хотя бы из-за несовпадений размерностей произведений. В самом общем случае из существования произведения AB вообще не следует существования произведения BA (скажем, при $\dim A = [2 \times 3]$, $\dim B = [3 \times 4]$ существует AB и не существует BA).

Матрицы, для которых $AB = BA$, называются ***перестановочными***. Очевидно, что для перестановочности необходимо, чтобы A и B были квадратными матрицами одного порядка, но этого недостаточно для равенства элементов матриц AB и BA.

2. **Ассоциативность.** $A(BC) = (AB)C$ (без доказательства).

3. **Дистрибутивность (распределительный закон):**

$$(A+B)C = AC + BC, \quad A(B+C) = AB + AC.$$

4. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$, где $\lambda = \text{const}$.

5. $(AB)^T = B^T A^T$.

Доказательство. Пусть $\dim A = [m \times r]$, $\dim B = [r \times n]$. Тогда эти матрицы можно перемножить: $C = AB$, и результат слева будет равен $D = (AB)^T = C^T$. Тогда

$$C = AB : \begin{cases} \dim C = [m \times n]; \\ c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj}, \ i = 1,...,m; \ j = 1,...,n \end{cases}$$

$$\underline{\text{и } D = C^T : \begin{cases} \dim D = [n \times m]; \\ d_{ji} = c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj}, \ \ i = 1,...,m; \ j = 1,...,n. \end{cases}}$$

Справа получим

$$U = B^T : \begin{cases} \dim U = [n \times r]; \\ u_{ji} = b_{ij}, \ \ i = 1,...,m; \ j = 1,...,n \end{cases}$$

$$\text{и } \ V = A^T : \begin{cases} \dim V = [r \times m]; \\ v_{ji} = a_{ij}, \ i = 1,...,m; \ j = 1,...,n. \end{cases}$$

Таким образом, матрицы U и V согласованы и можно найти их произведение:

$$\underline{P = UV : \begin{cases} \dim P = [n \times m], \\ p_{ji} = \sum_{k=1}^{r} u_{jk} v_{ki} = \sum_{k=1}^{r} b_{kj} a_{ik} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj}, \ i = 1,...,m; \ j = 1,...,n. \end{cases}}$$

Подчеркнутые выражения доказывают, что $D = P$, т.е. левая и правая части рассматриваемого равенства совпадают.

6. **Умножение на нулевую матрицу.**

$$\Theta_{[m \times r]} A_{[r \times n]} = \Theta_{[m \times n]}, \qquad A_{[r \times n]} \Theta_{[n \times m]} = \Theta_{[r \times m]}.$$

Доказательство. Провести самостоятельно, используя определения произведения матриц и нулевой матрицы**.**

7. **Возведение в степень.** $\left(A_{[n \times n]}\right)^k = \underbrace{A_{[n \times n]} \cdot A_{[n \times n]} \cdot ... \cdot A_{[n \times n]}}_{k \ \text{множителей}}$ при $k \in N$.

Легко видеть, что возведение в степень возможно только для квадратных матриц.

Рассмотрим возведение матрицы в куб: $A^3 = A \cdot A \cdot A = (A \cdot A) \cdot A = A \cdot (A \cdot A)$ в силу свойства 2. Тогда, если $B = A^2 = A \cdot A$, получим: $BA = AB$, т.е. здесь мы имеем две *перестановочные* матрицы.

8. **Нейтральный элемент для умножения матриц.** Существуют такие матрицы $E_{[m\times m]}$ и $E_{[n\times n]}$, что для любой матрицы $A_{[m\times n]}$ выполняются равенства: $E_{[m\times m]}\cdot A_{[m\times n]} = A_{[m\times n]}\cdot E_{[n\times n]} = A_{[m\times n]}$. По аналогии с числами такая матрица называется ***единичной***.

Определим вид единичной матрицы. Пусть

$$E_{[m\times m]} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1m} \\ e_{21} & e_{22} & \dots & e_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{m1} & e_{m2} & \dots & e_{m\,m} \end{pmatrix}, \quad A_{[m\times n]} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m\,n} \end{pmatrix}.$$

Для произвольной матрицы A выполняется $EA = A$. Тогда

$$EA = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1m} \\ e_{21} & e_{22} & \dots & e_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{m1} & e_{m2} & \dots & e_{m\,m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m\,n} \end{pmatrix} = A.$$

Умножая строки матрицы E на столбцы матрицы A и приравнивая результат к соответствующим элементам матрицы A, получим систему уравнений вида $\sum\limits_{k=1}^{m} e_{ik}a_{kj} = a_{ij}$ относительно неизвестных e_{ij}, причем эти равенства должны выполняться для любой матрицы A. Распишем сумму, стоящую в левой части: $e_{i1}a_{1j} + e_{i2}a_{2j} + \ldots + \underline{e_{ii}a_{ij}} + \ldots + e_{in}a_{nj} = \underline{a_{ij}}$. Учитывая подчеркнутые члены, получим очевидное решение: $e_{ij} = 0$ при $i \neq j$, $e_{ii} = 1$. Легко убедиться, что такая матрица удовлетворяет как равенству $AE = A$, так и равенству $EA = A$.

Таким образом, единичная матрица имеет вид

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

9. **Обратный элемент.** По аналогии с числами можно предположить, что для некоторых матриц A существует такая матрица A^{-1}, что выполняются равенства $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = E$. Тогда матрица A^{-1} называется ***обратной*** к матрице A.

Легко видеть, что указанное двойное равенство возможно только для квадратных матриц $A_{[n\times n]}$. При этом обратная матрица существует не для любой квадратной.

Чтобы выяснить условия существования обратной матрицы рассмотрим характеристику квадратной матрицы, называемую ее определителем.

1.2. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ И ЕГО СВОЙСТВА

Каждой квадратной матрице A по определенному правилу можно сопоставить число, называемое ***определителем*** этой матрицы. Обозначение определителя (от слова *determinant*)

$$\det A_{[n\times n]} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta\,.$$

Строгое определение определителя достаточно сложно и требует знания многих дополнительных понятий. Введем рекуррентное определение (т.е. определение следующего элемента через предыдущие элементы), используя два вспомогательных понятия.

Минором элемента a_{ij}, обозначаемым M_{ij}, называется определитель порядка $(n-1)$, получаемый из определителя Δ порядка n вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Алгебраическом дополнением элемента a_{ij}, обозначаемым A_{ij}, называется число, вычисляемое по формуле $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Тогда имеем:

1. Определитель 1-го порядка $\det A_{[1\times 1]} = a_{11}$.

2. Определитель n-го порядка (***теорема разложения***)

$$\det A_{[n\times n]} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj}\,,$$

где i, j – любые числа от 1 до n..

Иначе говоря, определитель n-го порядка матрицы A равен сумме попарных произведений элементов какой-либо строки или столбца на их алгебраические дополнения. При этом результат не зависит от выбора строки или столбца.

Вычислим определитель 2-го порядка, пользуясь этим определением:

$$\det A_{[2\times 2]} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}\,,$$

где $A_{11} = (-1)^{1+1} a_{22} = a_{22}$;

$$A_{12} = (-1)^{1+2} a_{21} = -a_{21} \;\Rightarrow\; \det A_{[2\times 2]} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Вычислим определитель 3-го порядка:

$$\det A_{[3\times 3]} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$= (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) - a_{12}\left(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right) =$$

$$= \left(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\right) - \left(a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}\right).$$

Свойства определителя следующие:

1. $\det A = \det(A^T)$, что следует из теоремы разложения.

Следствие. Все свойства, сформулированные для строк определителя, остаются справедливыми и для его столбцов.

2. Если в определителе *поменять местами две строки*, то знак определителя изменится на противоположный.

Доказательство. Пусть определитель Δ_2 получается из определителя Δ_1 после перестановки местами двух соседних строк с номерами i и $i + 1$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ & \ldots\ldots & \\ x_1 & \ldots & x_n \\ y_1 & \ldots & y_n \\ & \ldots\ldots & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ i \\ i+1 \\ \\ \\ \end{matrix} \;\Rightarrow\; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ & \ldots\ldots & \\ y_1 & \ldots & y_n \\ x_1 & \ldots & x_n \\ & \ldots\ldots & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ i \\ i+1 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

и необходимо доказать, что $\Delta_2 = -\Delta_1$.

Если каждый из этих определителей раскладывать по элементам выделенной строки, то миноры элементов x_i будут совпадать, так как при вычеркивании выделенных строк оставшиеся части определителей будут полностью совпадать. Тогда

$$\Delta_1 = (-1)^{i+1} x_1 M_{i1} + \ldots + (-1)^{i+n} x_n M_{in};$$

$$\Delta_2 = (-1)^{i+1+1} x_1 M_{i1} + \ldots + (-1)^{i+n+1} x_n M_{in} =$$

$$= (-1)\cdot[(-1)^{i+1} x_1 M_{i1} + \ldots + (-1)^{i+n} x_n M_{in}] = -\Delta_1.$$

Рассмотрим теперь случай, когда строки не стоят рядом. Очевидно, что поменять местами две строки S_i и S_k можно в несколько шагов, меняя при каждом шаге две соседние строчки. Пусть $i < k$. Сначала опустим строку S_i на место строки S_k, для этого потребуется $p = k - i$ шагов, а строка S_k автоматически займет место строки $(k - 1)$ и, чтобы поднять ее на место строки S_i, потребуется на один шаг меньше: $k - i - 1 = p - 1$.

Таким образом, чтобы поменять местами строки S_i и S_k, необходимо сделать $p + p - 1 = 2p - 1$ перемены местами соседних строк, при каждой из которых меняется знак определителя, т.е. $\Delta_2 = (-1)^{2p-1}\Delta_1$, а так как число $(2p - 1)$ нечетное, получим $\Delta_2 = -\Delta_1$.

3. Если определитель содержит *нулевую строку*, то он равен нулю.

Доказательство. Пусть i-я строка определителя нулевая, т.е. все ее элементы равны нулю. Тогда, разложив определитель по этой строке, получим

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hdashline 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hdashline \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}_i = 0 \cdot A_{i1} + 0 \cdot A_{i2} + \dots + 0 \cdot A_{in} = 0 + 0 + \dots + 0 = 0\,.$$

4. Если определитель содержит *две одинаковые строки*, то он равен нулю.

Доказательство. Пусть в определителе Δ_1 имеем $S_i = S_k$, а определитель Δ_2 получается из определителя Δ_1 перестановкой этих двух строк местами. Тогда, по свойству 2, $\Delta_2 = -\Delta_1$. С другой стороны, от перестановки местами двух равных строк определитель не изменится, т.е. $\Delta_2 = \Delta_1$. Отсюда $\Delta_2 = -\Delta_1 = \Delta_1 \Rightarrow \Delta_1 = 0$.

5. Если умножить каждый элемент некоторой строки определителя на число k, то определитель увеличится в k раз.

Доказательство. Пусть определитель Δ_2 получается из определителя Δ_1 после умножения всех элементов i-й строки на число k. Докажем, что $\Delta_2 = k\,\Delta_1$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hdashline a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \hdashline \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hdashline ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & ka_{in} \\ \hdashline \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Вычислим определители, раскладывая их по i-й строке:

$$\Delta_1 = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in}\,,$$

$$\Delta_2 = ka_{i1} \cdot A_{i1} + ka_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + ka_{in} \cdot A_{in} = k\left(a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in}\right) = k\,\Delta_1.$$

Следствие. Общий множитель всех элементов некоторой строки можно выносить за знак определителя.

6. Если определитель содержит *пропорциональные строки*, то он равен нулю.

Доказательство (следует из свойств 4 и 5). Пусть в определителе Δ строки S_i и S_j пропорциональны, т.е. существует такое число k, что $S_i = k\,S_j$. Тогда имеем

$$\Delta = \left|\begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots\dots & \\ x_1 & \dots & x_n \\ & \dots\dots & \\ k x_1 & \dots & k x_n \\ & \dots\dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{matrix}\right| \begin{matrix} \\ \\ {\scriptstyle j} \\ \\ {\scriptstyle i}\,|:k \\ \\ \\ \end{matrix} = k \left|\begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots\dots & \\ x_1 & \dots & x_n \\ & \dots\dots & \\ x_1 & \dots & x_n \\ & \dots\dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{matrix}\right| = 0.$$

7. Если в некоторой строке определителя каждый элемент представить в виде суммы двух чисел, то будет выполняться равенство

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1 + y_1 & x_2 + y_2 & \dots & x_n + y_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix}\right| =$$

$$= \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix}\right|.$$

Доказательство. Обозначим определитель, стоящий в левой части равенства, Δ, а определители справа – Δ_1 и Δ_2 соответственно. Тогда нужно доказать, что справедливо равенство $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$.

Вычислим каждый определитель данного равенства, раскладывая их по i-й (выделенной) строке:

$$\Delta_1 = x_1 A_{i1} + x_2 A_{i2} + \dots + x_n A_{in}, \quad \Delta_2 = y_1 A_{i1} + y_2 A_{i2} + \dots + y_n A_{in}.$$

Отметим, что все элементы определителей, кроме элементов выделенной строки, совпадают, поэтому указанные алгебраические дополнения одни и те же для Δ, Δ_1 и Δ_2, Тогда

$$\Delta = (x_1 + y_1)A_{i1} + (x_2 + y_2)A_{i2} + \ldots + (x_n + y_n)A_{in} =$$

$$= (x_1 A_{i1} + x_2 A_{i2} + \ldots + x_n A_{in}) + (y_1 A_{i1} + y_2 A_{i2} + \ldots + y_n A_{in}) = \Delta_1 + \Delta_2.$$

8. Определитель не изменится, если к элементам одной его строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.

Доказательство (следует из свойств 6 и 7). Пусть определитель Δ_2 получается из определителя Δ, если к элементам i-й строки прибавить соответствующие элементы j-й строки, умножив каждый из них на число k (при этом j-я строка не изменяется). Докажем, что $\Delta_2 = \Delta$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ j\,(\times k) \\ \\ i \\ \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1 + ky_1 & x_2 + ky_2 & \ldots & x_n + ky_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ j \\ \\ i \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Упростим Δ_2, используя свойство 6 для i-й строки:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ j \\ \\ i \\ \\ \\ \end{matrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ ky_1 & ky_2 & \ldots & ky_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ j \\ \\ i \\ \\ \\ \end{matrix} = \Delta + 0 = \Delta.$$

9. Сумма попарных произведений элементов какой-либо строки определителя на соответствующие алгебраические дополнения элементов другой строки равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0, \quad i \neq j\,.$$

Доказательство. Пусть Δ – некоторый определитель. Разложим его по j-й строке:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \hdashline a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \hdashline \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{matrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} A_{jk} .$$

Заменим в этом определителе j-ю строку на i-ю и снова разложим его по j-й строке:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \hdashline a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \hdashline \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{matrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0,$$

так как определитель содержит две одинаковые строки.

10. $\det(kA) = k^n \det A$, где $\dim A = [n \times n]$.

Доказательство. Равенство следует из определения умножения матрицы на число и свойства 5 определителей.

11. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ (без доказательства).

12. Определитель диагональной и треугольной (верхнетреугольной, нижнетреугольной) матрицы равен произведению диагональных элементов.

Доказательство. Провести самостоятельно, пользуясь теоремой разложения.

1.3. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Если для матрицы A существует такая матрица A^{-1}, что выполняется двойное равенство $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, то матрица A^{-1} называется ***обратной матрицей*** к матрице A.

Легко видеть, что двойное равенство требует, чтобы A и A^{-1} были квадратными матрицами одного порядка. Это требование является необходимым, но не достаточным для существования обратной матрицы. Для того чтобы сформулировать достаточное свойство существования обратной матрицы, введем следующее определение.

Квадратная матрица A называется ***невырожденной (неособой)***, если $\det A \neq 0$. В противном случае матрица называется ***вырожденной (особой)***.

Теорема 1. Если матрица A вырожденная, т.е. $\det A = 0$, то у нее нет обратной матрицы.

Доказательство (от противного). Пусть $\det A = 0$ и существует обратная A^{-1}, для которой $A \cdot A^{-1} = E$.

Тогда $\det (A \cdot A^{-1}) = \det E \Rightarrow$ (по свойству 11 определителей) $\det A \cdot \det (A^{-1}) = \det E$. Легко вычислить, что $\det E = 1$. Отсюда получаем равенство $0 \cdot \det (A^{-1}) = 1$, невозможное ни для какой матрицы A^{-1}, следовательно такая матрица не существует.

Теорема 2. Любая невырожденная матрица имеет обратную.

Доказательство. Пусть квадратная матрица A невырожденная, т.е. $\det A \neq 0$. Составим матрицу, элементами которой будут алгебраические дополнения к соответствующим элементам матрицы A:

$$S = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрица S называется матрицей *алгебраических дополнений* или *союзной* (*присоединенной*) для матрицы A.

Докажем, что матрица $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta} S^T$, где $\Delta = \det A$, является обратной к матрице A (таким образом, мы докажем, что обратная существует). Для этого надо доказать, что $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$. Докажем первую часть этого равенства (вторая доказывается аналогично):

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\Delta} \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hdashline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hdashline a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c:c:c:c} A_{11} & A_{21} & \vdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \vdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \vdots & A_{nn} \end{array}\right).$$

Если элементы произведения матриц обозначить c_{ij}, то все диагональные элементы $c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = \Delta$ (по теореме разложения), а все остальные $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{i1} A_{jk} = 0$ (по свойству 9 определителей).

Таким образом, в результате перемножения матриц получим

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \Delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Теорема 3. Если у матрицы A существует обратная, то она единственная.

Доказательство. Пусть для матрицы A существуют две обратных: A^{-1} и B, для которых выполняются равенства $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ и $A \cdot B = B \cdot A = E$. Докажем, что обязательно будет $B = A^{-1}$. Действительно,

$$B = EB = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}E = A^{-1}.$$

Для прямоугольной матрицы двойное равенство $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ невозможно. В некоторых случаях можно найти прямоугольную матрицу, называемую *псевдообратной*, которая является обратной исходной матрице только слева или только справа, но общего алгоритма поиска такой матрицы не существует.

Обратная матрица тесно связана с задачей нахождения неизвестного множителя в матричном уравнении вида $AX = B$ или $XA = B$, где A и B – заданные матрицы; A – квадратная невырожденная матрица; X – искомая матрица.

Пусть $\dim A = [m \times m]$, $\dim B = [m \times n]$, $\det A \neq 0$ и $X_{[m\times n]}$ – решение матричного уравнения $AX = B$. Домножив это уравнение на A^{-1} слева, получим

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \;\Rightarrow\; (A^{-1}A)X = A^{-1}B \;\Rightarrow\; EX = A^{-1}B \;\Rightarrow\; X = A^{-1}B.$$

Последнее равенство дает формулу для нахождения неизвестной матрицы X.

Аналогично уравнение $X_{[m\times n]}\, A_{[n \times n]} = B_{[m\times n]}$ на матрицу A^{-1} надо умножить справа:

$$(AX)\, A^{-1} = BA^{-1} \;\Rightarrow\; X\,(A^{-1}A) = BA^{-1} \;\Rightarrow\; XE = BA^{-1} \;\Rightarrow\; X = BA^{-1}.$$

1.4. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ. МАТРИЧНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ. ФОРМУЛЫ КРАМЕРА

Рассмотрим систему из m линейных уравнений относительно n неизвестных $x_1, ..., x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.1}$$

где числа a_{ij} называются *коэффициентами* системы, а числа b_i – *свободными членами*.

Если из коэффициентов этой системы составить матрицу коэффициентов $A_{[m\times n]}$, свободные члены объединить в матрицу-столбец $B_{[m\times 1]}$, а неизвестные – в матрицу-столбец $X_{[n\times 1]}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

то система уравнений (1.1) будет эквивалентна матричному уравнению $AX = B$.

Пусть в системе уравнений (1.1) число неизвестных равно числу уравнений и матрица коэффициентов A невырожденная. Тогда имеем матричное уравнение с неизвестной матрицей X, для нахождения которой справедлива формула

$$X = A^{-1}B. \tag{1.2}$$

Данный прием называют *матричным* методом решения систем линейных уравнений (1.1).

На основе формулы (1.2) можно получить еще один метод решения систем линейных уравнений с невырожденной матрицей коэффициентов, менее трудоемкий, чем матричный.

Пусть $AX = B$ и $\det A_{[n\times n]} = \Delta \neq 0$. Тогда у матрицы A существует обратная, причем единственная. Найдем эту обратную матрицу и вычислим X по формуле (1.2).

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}S^T = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

$$X=\frac{1}{\Delta}\left(\begin{array}{cccc} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ \hdashline A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \hdashline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hdashline A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{array}\right)\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} b_1A_{11}+b_2A_{21}+\ldots+b_nA_{n1} \\ b_1A_{12}+b_2A_{22}+\ldots+b_nA_{n2} \\ \ldots \\ b_1A_{1n}+b_2A_{2n}+\ldots+b_nA_{nn} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим определитель матрицы A, разложенный по первому столбцу:

$$\Delta=\left|\begin{array}{:c:cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array}\right| = a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\ldots+a_{n1}A_{n1}.$$

Легко видеть, что если заменить в этом определителе первый столбец на столбец свободных членов B, а все остальные элементы оставить такими же, получим выражение, что стоит в первой строке вычисленной матрицы X:

$$\Delta_1=\left|\begin{array}{:c:cccc} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array}\right| = b_1A_{11}+b_2A_{21}+\ldots+b_nA_{n1}.$$

Если то же самое проделать по очереди со всеми остальными столбцами определителя Δ, называемого *главным*, то получим, что неизвестные можно определять по формулам

$$x_k=\frac{\Delta_k}{\Delta},\quad k=1,\ldots,n, \tag{1.3}$$

где для нахождения каждого *вспомогательного* определителя Δ_k надо заменить k-й столбец в определителе Δ на столбец свободных членов системы уравнений (1.1).

Полученные формулы (1.3) называют ***формулами Крамера.*** Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема Крамера. Система из n линейных уравнений с n неизвестными, главный определитель которой Δ отличен от нуля, имеет единственной решение, определяемое по формулам Крамера (1.3), где Δ — главный определитель системы, а Δ_k — вспомогательные определители, получаемые из главного путем замены k-го столбца на столбец свободных членов.

Замечание. Если главный определитель системы равен нулю, то система или имеет множество решений, или не имеет ни одного решения (несовместна).

Формулы (1.2) и (1.3) позволяют решить любую квадратную систему уравнений с невырожденной матрицей коэффициентов (заметим, что для систем больших порядков эти методы являются очень трудоемкими).

1.5. РАНГ МАТРИЦЫ

Если в прямоугольной матрице $A_{[m\times n]}$ выделить k строк и k столбцов, то определитель, составленный из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов, называется ***минором k-го порядка*** матрицы A.

Например, для матрицы

$$A_{[3\times 4]}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 8\\ 9 & 10 & 11 & 12\end{pmatrix} \tag{1.4}$$

можно найти:

1) миноры 1-го порядка, например $M_{1(S2;\,R3)}=7$ или $M_{1(S3;\,R4)}=12$. Здесь нижний индекс показывает порядок минора и выбранные строки (S) и столбцы (R). Очевидно, что можно составить 12 различных миноров 1-го порядка для этой матрицы;

2) миноры 2-го порядка, например

$$M_{2\,(S1,2;\,R2,4)}=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\end{vmatrix}=16-24=-8;$$

$$M_{2\,(S1,3;\,R1,4)}=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 9 & 12\end{vmatrix}=12-36=-24.$$

Определить количество миноров 2-го порядка можно, найдя количество способов выбрать две строки из трех и два столбца из четырех. Используя формулу числа сочетаний $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, где $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$, $0!=1$, находим, что число миноров 2-го порядка для этой матрицы

$$C_4^2\cdot C_3^2=\frac{4!}{2!(4-2)!}\cdot\frac{3!}{2!(3-2)!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(1\cdot 2)\cdot(1\cdot 2)}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1\cdot 2)\cdot 1}=6\cdot 3=18;$$

3) миноры 3-го порядка, например

$$M_{3\,(S1,2,3;\,R1,2,4)}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 5 & 6 & 8\\ 9 & 10 & 12\end{vmatrix}=0.$$

Количество миноров 3-го порядка у данной матрицы $C_4^3C_3^3=4$.

Первое определение ранга матрицы. Рангом матрицы, обозначаемым $r(A)$, называется число, равное наивысшему порядку минора, отличного от нуля.

В приведенном выше примере все миноры 3-го порядка будут равны нулю (проверить самостоятельно) и есть хотя бы один минор 2-го порядка, отличный от нуля, следовательно $r(A) = 2$.

Замечание. Если в матрице все миноры k-го порядка равны нулю, то все миноры $(k + 1)$-го порядка также будут равны нулю, так как минор $(k + 1)$-го порядка можно по теореме разложения представить как линейную комбинацию миноров k-го порядка.

Несмотря на простоту этого определения, оно очень трудоемкое и неудобное для использования на практике.

1.6. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ И ЛИНЕЙНАЯ НЕЗАВИСИМОСТЬ СТРОК И СТОЛБЦОВ МАТРИЦЫ. ВТОРОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАНГА МАТРИЦЫ

Пусть задан набор $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ некоторых элементов одинаковой природы, для которых определены понятия равенства и сложения элементов, умножения элемента на число и нулевого элемента (будем его обозначать θ).

Тогда, если $\lambda_1, \lambda_2, ... , \lambda_n$ — числа, то выражение

$$\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + ... + \lambda_n\varphi_n, \tag{1.5}$$

называется ***линейной комбинацией*** элементов.

Набор элементов $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ называется ***линейно зависимым* (ЛЗ)**, если можно найти такой набор чисел $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, где по крайней мере одно из чисел $\lambda_k \neq 0$, при котором линейная комбинация (1.5) была бы равна нулевому элементу:

$$\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + ... + \lambda_n\varphi_n = \theta. \tag{1.6}$$

Если равенство (1.6) возможно только тогда, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$, набор элементов $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ называется ***линейно независимым* (ЛНЗ)**.

Пример 1.2. Рассмотрим в качестве элементов три матрицы-строки S_1, S_2 и S_3 размерности $[1 \times 3]$:

$$S_1 = (1\ 2\ 3);\ S_2 = (1\ 0\ 0);\ \ S_3 = (2\ 4\ 6).$$

Нулевой элемент в этом случае будет нулевой строкой: $\theta = (0\ 0\ 0)$.

Легко видеть, что набор из элементов S_1 и S_3 будет ЛЗ. Действительно, элементы S_3 пропорциональны элементам S_1. Положим $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_3 = -1$, тогда

$$2S_1 - S_3 = 2\cdot(1\ 2\ 3) - (2\ 4\ 6) = (2\ 4\ 6) - (2\ 4\ 6) = (0\ 0\ 0) = \theta,$$

т.е. $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 = \theta$ при $\lambda_1 \neq 0$.

Набор из трех элементов S_1, S_2, S_3 также будет ЛЗ: возьмем $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -1$, тогда

$$2S_1 + 0\cdot S_2 - S_3 = 2\cdot(1\ 2\ 3) + 0\cdot(1\ 0\ 0) - (2\ 4\ 6) =$$
$$= (2\ 4\ 6) + (0\ 0\ 0) - (2\ 4\ 6) = (0\ 0\ 0) = \theta,$$

т.е. $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 S_3 = \theta$ при $\lambda_1 \neq 0$.

Набор же из двух элементов S_1 и S_2 будет ЛНЗ, так как равенство

$$\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 = \lambda_1(1\ 2\ 3) + \lambda_2(1\ 0\ 0) = (\lambda_1 + \lambda_2\ \ 2\lambda_1\ \ 3\lambda_1) = (0\ 0\ 0),$$

эквивалентное системе уравнений $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, $2\lambda_1 = 0$, $3\lambda_1 = 0$, возможно только при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

***Некоторые свойства элементов ЛЗ*:**

1. Если набор элементов ЛЗ, то один из элементов можно выразить через линейную комбинацию остальных элементов.

Доказательство. Пусть набор $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ является ЛЗ. Тогда существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, одно из которых отлично от нуля (пусть $\lambda_1 \neq 0$), что выполняется равенство $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + ... + \lambda_n\varphi_n = \theta$. Тогда

$$\lambda_1\varphi_1 = -\lambda_2\varphi_2 - ... - \lambda_n\varphi_n \ \Big|: \lambda_1 \text{ (так как } \lambda_1 \neq 0) \ \Rightarrow\ \varphi_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\varphi_2 - ... - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\varphi_n .$$

2. Если в наборе элементов есть нулевой элемент, то весь набор является ЛЗ.

Доказательство. Пусть в наборе $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ один из элементов нулевой, например, $\varphi_1 = \theta$. Возьмем тогда $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$. Тогда

$$\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + ... + \lambda_n\varphi_n = 1\cdot\theta + 0\cdot\varphi_2 + ... + 0\cdot\varphi_n = \theta, \text{ причем } \lambda_1 \neq 0 .$$

Следовательно, набор $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ ЛЗ.

3. Если к набору ЛЗ элементов добавить еще несколько элементов, получится ЛЗ набор.

Доказательство. Пусть набор $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k$ ЛЗ. Следовательно, существуют такие $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$, что $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + ... + \lambda_k\varphi_k = \theta$ и одно из чисел, например $\lambda_1 \neq 0$. Добавим к этому набору элементы $\varphi_{k+1}, ..., \varphi_n$ и возьмем $\lambda_{k+1} = ... = \lambda_n = 0$. Тогда

$$\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + ... + \lambda_k\varphi_k + \lambda_{k+1}\varphi_{k+1} + ... + \lambda_n\varphi_n = \theta + 0\cdot\varphi_{k+1} + ... + 0\cdot\varphi_n = \theta$$

при $\lambda_1 \neq 0$, следовательно, набор элементов $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k, \varphi_{k+1}, ..., \varphi_n$ ЛЗ.

4. Если при добавлении элемента φ_{n+1} к ЛНЗ набору $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ получается ЛЗ набор $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, \varphi_{n+1}$, то элемент φ_{n+1} выражается через линейную комбинацию элементов $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$.

Доказательство. Так как набор $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, \varphi_{n+1}$ ЛЗ, то существуют такие $\lambda_1, \lambda_2, ... , \lambda_n, \lambda_{n+1}$, что

$$\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + ... + \lambda_n\varphi_n + \lambda_{n+1}\varphi_{n+1} = \theta,$$

где хотя бы один из коэффициентов $\lambda_k \neq 0$. Если $\lambda_{n+1} = 0$, получим равенство: $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + ... + \lambda_n\varphi_n = \theta$, возможное только при $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$ (в силу ЛНЗ набора $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$), но это противоречит условию $\lambda_k \neq 0$. Таким образом, $\lambda_{n+1} \neq 0$, откуда и получается возможность выразить элемент φ_{n+1} через остальные ЛНЗ элементы набора.

Теорема. Количество ЛНЗ строк матрицы равно ее рангу.

Доказательство. 1. Рассмотрим матрицу A и один из ее миноров:

$$A_{[m\times n]} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad M_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}.$$

Пусть $r(A) = k$ и от нуля отличен выделенный минор $M_k \neq 0$ (этого всегда можно добиться перестановкой строк и столбцов матрицы). Докажем, что строки $S_1, ..., S_k$ будут ЛНЗ. Составим линейную комбинацию этих строк:

$$\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + ... + \lambda_k S_k = \theta \Rightarrow$$

$$\lambda_1\cdot(a_{11} \dots a_{1k} \dots a_{1n}) + ... + \lambda_k\cdot(a_{k1} \dots a_{kk} \dots a_{kn}) = (0 \dots 0 \dots 0).$$

Умножим каждую строку на соответствующее число λ_i и сложим поэлементно:

$$((\lambda_1 a_{11} + ... + \lambda_k a_{k1}) \ \dots \ (\lambda_1 a_{1k} + ... + \lambda_k a_{kk}) \dots (\lambda_1 a_{1n} + ... + \lambda_k a_{kn})) = (0 \dots 0 \dots 0).$$

Приравняв соответствующие элементы в правой и левой матрицах, получим систему уравнений относительно неизвестных λ_i:

$$\begin{cases} \lambda_1 a_{11} + ... + \lambda_k a_{k1} = 0 \\ \quad . \ . \ . \ . \ . \\ \lambda_1 a_{1k} + ... + \lambda_k a_{kk} = 0 \\ \quad . \ . \ . \ . \ . \\ \lambda_1 a_{1n} + ... + \lambda_k a_{kn} = 0 \end{cases}.$$

Выделенная квадратной скобкой подсистема уравнений является квадратной и ее определитель $\det A = M_k \neq 0$. По теореме Крамера эта подсистема имеет единственное решение. Легко увидеть, что это решение ($\lambda_1 = ...= \lambda_k = 0$) удовлетворяет также всем остальным уравнениям системы. Таким образом, только при нулевых значениях коэффициентов линейная комбинация строк $S_1, ..., S_k$ равна нулю. Следовательно, эти строки ЛНЗ, причем их количество равно рангу матрицы.

2. Докажем, что набор из $(k + 1)$ строк $S_1, ..., S_k, S_i$ будет ЛЗ (здесь S_i – любая из оставшихся в матрице строк, т.е. $i = k + 1, ..., m$). Для этого докажем, что последняя строка выражается через линейную комбинацию остальных строк.

Составим минор $(k + 1)$-го порядка, присоединив к минору M_k строку i и столбец p. Так как ранг матрицы $r(A) = k$, то все миноры порядка, большего чем k, равны нулю. Тогда

$$M_{k+1} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{kp} \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & a_{ip} \end{vmatrix} = 0.$$

При разложении этого минора по последнему столбцу учтем, что алгебраическим дополнением к последнему элементу является выделенный минор $M_k \neq 0$:

$$a_{1p}A_{1p} + \dots + a_{kp}A_{kp} + a_{ip}M_k = 0 \;\Big|\; : M_k \;\Rightarrow$$

$$a_{ip} = -\frac{A_{1p}}{M_k}a_{1p} - \dots - \frac{A_{kp}}{M_k}a_{kp} \quad (p = 1, 2, ..., n).$$

Таким образом, элемент a_{ip} из p-го столбца строки S_i выражается через линейную комбинацию элементов p-го столбца строк $S_1, ..., S_k$. При этом в качестве столбца p можно взять любой столбец матрицы, включая те, что входят в M_k. Алгебраические дополнения при этом будут оставаться одними и теми же, так как они не зависят от последнего столбца M_{k+1}. Пусть $\lambda_j = -A_{jp} / M_k$. После выполнения указанных вычислений для каждого столбца матрицы A, строка S_i примет вид

$$S_i = (a_{i1} \; \dots \; a_{ik} \; \dots \; a_{in}) =$$

$$= \left(\lambda_1 a_{11} + \dots + \lambda_k a_{k1} \quad \dots \quad \lambda_1 a_{1k} + \dots + \lambda_k a_{kk} \quad \dots \quad \lambda_1 a_{1n} + \dots + \lambda_k a_{kn}\right) =$$

$$= \left(\lambda_1 a_{11} \; \dots \; \lambda_1 a_{1k} \; \dots \; \lambda_1 a_{1n}\right) + \dots + \left(\lambda_k a_{k1} \; \dots \; \lambda_k a_{kk} \; \dots \; \lambda_k a_{kn}\right) =$$

$$= \lambda_1 \cdot \left(a_{11} \; \dots \; a_{1k} \; \dots \; a_{1n}\right) + \dots + \lambda_k \cdot \left(a_{k1} \; \dots \; a_{kk} \; \dots \; a_{kn}\right) = \lambda_1 S_1 + \dots + \lambda_k S_k.$$

Получили, что строка S_i представима как линейная комбинация строк $S_1, ..., S_k$ и, следовательно, строки $S_1, ..., S_k, S_i$ $(i = k + 1, ..., n)$ ЛЗ.

Таким образом, матрица имеет столько же ЛНЗ строк, каков ее ранг.

***Следствие* 1.** Количество ЛНЗ строк матрицы равно количеству ее ЛНЗ столбцов.

***Следствие* 2.** Если определитель отличен от нуля, то строки и столбцы, его образующие, ЛНЗ (и наоборот); если определитель равен нулю, то строки и столбцы, его образующие, ЛЗ (и наоборот).

***Следствие* 3.** Максимально возможное число ЛНЗ строк матрицы не больше числа ее столбцов (если в матрице строк больше, чем столбцов, то они ЛЗ), и наоборот.

Второе определение ранга матрицы. Рангом матрицы называется количество ЛНЗ строк (или столбцов) матрицы.

Для примера рассмотрим матрицу (1.4), ранг которой по первому определению (через миноры) был равен двум.

$$A_{[3\times4]} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

В качестве ЛЗ и ЛНЗ элементов будем рассматривать строки матрицы

$$S_1 = (1\ \ 2\ \ 3\ \ 4);\ \ S_2 = (5\ \ 6\ \ 7\ \ 8);\ \ S_3 = (9\ \ 10\ \ 11\ \ 12),$$

за нулевой элемент возьмем нулевую строку $\theta = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)$. Составим линейную комбинацию первой и второй строк:

$$\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 = \lambda_1\cdot(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4) + \lambda_2\cdot(5\ \ 6\ \ 7\ \ 8) =$$

$$= (\lambda_1 + 5\lambda_2\ \ 2\lambda_1 + 6\lambda_2\ \ 3\lambda_1 + 7\lambda_2\ \ 4\lambda_1 + 8\lambda_2) = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 0),$$

откуда получим систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda_1 + 5\lambda_2 = 0, \\ 2\lambda_1 + 6\lambda_2 = 0, \\ 3\lambda_1 + 7\lambda_2 = 0, \\ 4\lambda_1 + 8\lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что единственным решением этой системы является $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, следовательно, строки S_1 и S_2 ЛНЗ.

Рассмотрим теперь линейную комбинацию строк S_1, S_2 и S_3:

$$\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 S_3 =$$

$$= \lambda_1(1\ 2\ 3\ 4) + \lambda_2(5\ 6\ 7\ 8) + \lambda_3(9\ 10\ 11\ 12) = (0\ 0\ 0\ 0)\ \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 5\lambda_2 + \ 9\lambda_3 = 0, \\ 2\lambda_1 + 6\lambda_2 + 10\lambda_3 = 0, \\ 3\lambda_1 + 7\lambda_2 + 11\lambda_3 = 0, \\ 4\lambda_1 + 8\lambda_2 + 12\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Легко убедиться, что набор чисел $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 1$ является одним из решений этой системы (вообще же решений этой системы бесконечное множество; все они определяются формулами $\lambda_1 = \lambda_3$, $\lambda_2 = -2\lambda_3$, где λ_3 – любое число). Таким образом, получим

$$\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 S_3 = (1\ 2\ 3\ 4) - 2\cdot(5\ 6\ 7\ 8) + (9\ 10\ 11\ 12) =$$
$$= (1 - 10 + 9\quad 2 - 12 + 10\quad 3 - 14 + 11\quad 4 - 16 + 12) = (0\ 0\ 0\ 0),$$

причем $\lambda_1 \neq 0$. Следовательно, строки S_1, S_2 и S_3 линейно зависимы. Итак, заданная матрица A имеет две ЛНЗ строки и ее ранг $r(A) = 2$.

Понятие ЛЗ и ЛНЗ элементов очень важно в математике, но решать эту проблему непосредственно, как в приведенном выше примере, очень неудобно и трудоемко. Однако существует вид матриц, в котором количество ЛНЗ строк (или столбцов) определяется очень легко. Такие матрицы называются ступенчатыми (трапецеидальными).

1.7. СТУПЕНЧАТАЯ МАТРИЦА. ТРЕТЬЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАНГА МАТРИЦЫ

Матрица называется ***ступенчатой*** (*трапецеидальной*), если она имеет следующую структуру:

- каждая строка (кроме первой) начинается с нулей;
- первый ненулевой элемент в строке называется *базисным*;
- все элементы матрицы, стоящие левее и ниже базисного, – нулевые;
- элементы, стоящие правее базисного, могут быть любыми;
- строки, содержащие базисные элементы, называются *базисными строками*; столбцы, содержащие базисные элементы, – *базисными столбцами*. Все остальные строки матрицы (небазисные), если они есть, – полностью нулевые;
- нулевые строки стоят ниже базисных (или вычеркиваются из матрицы).

Рассмотрим пример ступенчатой матрицы:

$$A_{[4\times 8]} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\delta_1} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} \\ 0 & \boldsymbol{\delta_2} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{\delta_3} & a_{36} & a_{37} & a_{38} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{\delta_4} & a_{48} \end{pmatrix}. \qquad (1.7)$$

Здесь $\boldsymbol{\delta_1}$, ..., $\boldsymbol{\delta_4}$ – базисные элементы ($\boldsymbol{\delta_i} \neq 0$), все элементы, стоящие ниже и левее (под чертой) равны нулю, все остальные элементы (a_{ij}) произвольны. Базисные строки – S_1, S_2, S_3, S_4; небазисные (нулевые) строки вычеркнуты. Базисные столбцы – R_1, R_2, R_5, R_7.

Теорема. Базисные строки и столбцы ступенчатой матрицы линейно независимые.

Доказательство. Если в ступенчатой матрице n базисных строк, то в ней будет и n базисных столбцов. Составим минор n-го порядка, состоящий из базисных строк и базисных столбцов матрицы. Очевидно, что он будет треугольным (все элементы, стоящие ниже и левее главной диагонали – нули). Такой минор равен произведению диагональных элементов, а на диагонали будут стоять базисные элементы $\boldsymbol{\delta}_i \neq 0$. Следовательно, этот минор $M_n \neq 0$ и строки и столбцы, его образующие (базисные) ЛНЗ по следствию 2 теоремы (см. раздел 1.6).

Так, для матрицы (1.7) минор 4-го порядка, содержащий базисные строки и столбцы,

$$M_4 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\delta_1} & a_{12} & a_{15} & a_{17} \\ 0 & \boldsymbol{\delta_2} & a_{25} & a_{27} \\ 0 & 0 & \boldsymbol{\delta_3} & a_{37} \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{\delta_4} \end{vmatrix} = \boldsymbol{\delta_1}\cdot\boldsymbol{\delta_2}\cdot\boldsymbol{\delta_3}\cdot\boldsymbol{\delta_4} \neq 0 \;\Rightarrow\; r(A) = 4.$$

Таким образом, строки S_1, S_2, S_3, S_4 и столбцы R_1, R_2, R_5, R_7 ЛНЗ.

В теории матриц существуют такие преобразования, называемые *элементарными преобразованиями* строк (или столбцов) матрицы, которые не изменяют ее ранга.

К ***элементарным преобразованиям*** относятся следующие:

1) $S_i \leftrightarrow S_j$ (перемена местами двух строк матрицы);

2) $S_i \to k\,S_j, k \neq 0$ (умножение элементов строки на число $k \neq 0$);

3) $S_i \to S_i + k\,S_j$ (прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число k).

4) Вычеркивание нулевой строки из матрицы.

С помощью элементарных преобразований можно любую матрицу привести к ступенчатому виду, при этом ЛНЗ строки станут базисными, а все ЛЗ – нулевыми (нулевые строки можно вычеркнуть). Очевидно, что полученная ступенчатая матрица не будет равна исходной, но их ранги будут совпадать.

Будем называть матрицы, полученные одна из другой с помощью элементарных преобразований, *эквивалентными*.

Третье определение ранга матрицы. Рангом матрицы называется количество ненулевых строк в ступенчатой матрице, эквивалентной исходной матрице.

Алгоритм приведения матрицы к ступенчатому виду (метод Гаусса):

1. Выбрать *рабочий* столбец. На первом шаге это первый столбец, на каждом следующем шаге – столбец, следующий за предыдущим рабочим столбцом.

2. Выбрать *рабочую* строку. Для этого в рабочем столбце нужно найти ненулевой элемент, стоящий ниже всех ранее полученных базисных строк (на первом шаге – в любой из строк, на втором шаге – начиная со второй строки и т.д.). Если все элементы в текущем рабочем столбце, стоящие ниже базисных строк, равны нулю, нужно взять следующий столбец в качестве *рабочего*. Если следующего столбца нет, процесс закончен и матрица стала ступенчатой.

3. Элемент, стоящий в рабочем столбце и рабочей строке является ***базисным***, соответственно, рабочие строки и столбец становятся базисными. Строки матрицы меняются местами таким образом, чтобы новая базисная строка стояла ниже ранее найденных базисных и выше всех остальных (на первом шаге базисная строка ставится на 1-е место; на 2-м шаге – на 2-е место и т.д.).

4. Элементы, стоящие в базисном (рабочем) столбце ниже базисной (рабочей) строки должны стать нулевыми. Для этого к каждой строке, стоящей ниже базисной, нужно прибавить базисную, умноженную на коэффициент $\lambda_k = -\,a_{kp}\,/\,\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{p}}$, где $\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{p}}$ – базисный элемент, a_{kp} – элемент, который нужно «обнулить».

5. Полностью нулевую строку можно вычеркнуть. Можно также вычеркнуть одну из двух равных строк или одну из двух пропорциональных строк, так как при следующем шаге из двух равных (пропорциональных) строк одна станет нулевой. Можно также для облегчения вычислений выносить общий множитель из строки, т.е. разделить все элементы строки на их общий делитель.

6. Если после выполнения п.4 данного алгоритма с каждой строкой, стоящей ниже рабочей базисной, все стоящие ниже строки стали нулевыми, процесс получения ступенчатой матрицы, эквивалентной исходной, завершен. В противном случае нужно взять следующий за базисным столбцом столбец в качестве рабочего и повторить всю процедуру с п.1.

Пример 1.3. Привести матрицу (1.4) к ступенчатому виду.

Решение. Запишем исходную матрицу

$$A_{[3\times4]} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

Выберем первый столбец и первую строку в качестве рабочих. Так как $a_{11} = 1 \neq 0$, то первая строка и первый столбец будут базисными (т.е. реализованы пп.1-3 алгоритма для 1-го шага).

Реализуем п.4: $S_2 \to S_2 + (-5)\cdot S_1$; $S_3 \to S_3 + (-9)\cdot S_1$. Получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ |:(-4) \\ \\ \end{matrix}$$

Первый шаг выполнен. Вычеркнем 3-ю строку, так как она пропорциональна 2-й строке ($S_3 = 2S_2$), а 2-ю для упрощения разделим на (-4):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Получена ступенчатая матрица, эквивалентная исходной. Так как ступенчатая матрица содержит две ненулевых строки, то $r(A) = 2$.

Пример 1.4. Привести к ступенчатому виду и определить ранг матрицы

$$A_{[9\times9]} = \begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 4 & 1 & 8 & 16 \\ 2 & -3 & -2 & -13 & 0 & -12 & 4 & 23 & 13 \\ 1 & 3 & 8 & 7 & -1 & -2 & -2 & -12 & -7 \\ 5 & -3 & 4 & -19 & 2 & -11 & -3 & 7 & -5 \\ 2 & -1 & 2 & -7 & 2 & 2 & -4 & -5 & -7 \\ 3 & 1 & 8 & -3 & -3 & -22 & 1 & 0 & -10 \\ 1 & -1 & 0 & -5 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 4 & -3 & -14 & -2 & -17 & -24 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & -1 & -6 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}. \qquad (1.8)$$

Решение. Для наглядности пронумеруем строки в заданной матрице. Выберем 1-й столбец в качестве рабочего и 1-ю строку в качестве рабочей. Так как $a_{11} = 1 \neq 0$, 1-я строка и 1-й столбец будут базисными (т.е. реализованы п.1-3 алгоритма для 1-го шага). Реализуем п.4:

$$S_2 \to S_2 + (-2)\cdot S_1;\ S_3 \to S_3 + (-1)\cdot S_1;\ S_4 \to S_4 + (-5)\cdot S_1;$$

$$S_5 \to S_5 + (-2)\cdot S_1;\ S_6 \to S_6 + (-3)\cdot S_1;\ S_7 \to S_7 + (-1)\cdot S_1;$$

$$S_8 \to S_8 + (-1)\cdot S_1;\ S_9 \to S_9 + (-1)\cdot S_1.$$

Покажем эти действия

$$A_{[9\times9]} = \begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9 \end{array} \left(\begin{array}{c:cccccccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 4 & 1 & 8 & 16 \\ \hdashline 2 & -3 & -2 & -13 & 0 & -12 & 4 & 23 & 13 \\ 1 & 3 & 8 & 7 & -1 & -2 & -2 & -12 & -7 \\ 5 & -3 & 4 & -19 & 2 & -11 & -3 & 7 & -5 \\ 2 & -1 & 2 & -7 & 2 & 2 & -4 & -5 & -7 \\ 3 & 1 & 8 & -3 & -3 & -22 & 1 & 0 & -10 \\ 1 & -1 & 0 & -5 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 4 & -3 & -14 & -2 & -17 & -24 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & -1 & -6 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-2)\,(-1)\,(-5)\,(-3) \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

После выполнения указанных действий получим матрицу

$$
\begin{array}{r}
1\\ 2\\ 3\\ 4\\ 5\\ 6\\ 7\\ 8\\ 9
\end{array}
\left(\begin{array}{c|cccccccc}
1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 4 & 1 & 8 & 16\\ \hline
0 & -5 & -10 & -15 & -2 & -20 & 2 & 7 & -19\\
0 & 2 & 4 & 6 & -2 & -6 & -3 & -20 & -23\\
0 & -8 & -16 & -24 & -3 & -31 & -8 & -33 & -85\\
0 & -3 & -6 & -9 & 0 & -6 & -6 & -21 & -39\\
0 & -2 & -4 & -6 & -6 & -34 & -2 & -24 & -58\\
0 & -2 & -4 & -6 & 0 & -4 & -2 & -6 & -16\\
0 & 1 & 2 & 3 & -4 & -18 & -3 & -25 & -40\\
0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -10 & 0 & -6 & -14
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ |\times(-1)\\ \\ |\times(-1)\\ |:(-3)\\ |:(-2)\\ |:(-2)\\ \\ |:(-2)
\end{array}
$$

Первый шаг полностью выполнен. Для облегчения дальнейшей работы умножим 2-ю и 4-ю строки на (− 1); 6-ю, 7-ю и 9-ю строки разделим на (− 2), а 5-ю строку на (− 3). После этого поменяем местами 2-ю и 7-ю строки, чтобы 2-я строка (будущая рабочая) была как можно более простой:

$$
\begin{array}{r}
1\\ 2\\ 3\\ 4\\ 5\\ 6\\ 7\\ 8\\ 9
\end{array}
\left(\begin{array}{cc|ccccccc}
1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 4 & 1 & 8 & 16\\
0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 1 & 3 & 8\\ \hline
0 & 2 & 4 & 6 & -2 & -6 & -3 & -20 & -23\\
0 & 8 & 16 & 24 & 3 & 31 & 8 & 33 & 85\\
0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 2 & 7 & 13\\
0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 17 & 1 & 12 & 29\\
0 & 5 & 10 & 15 & 2 & 20 & -2 & -7 & 19\\
0 & 1 & 2 & 3 & -4 & -18 & -3 & -25 & -40\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 3 & 7
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ (-2)\,(-8)\,(-5)\,(-1)\\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\
\end{array}
$$

Делаем второй шаг. Выберем вторую строку и второй столбец в качестве рабочих. Так как $a_{22} = 1 \neq 0$, то 2-я строка и 2-й столбец будут базисными (т.е. реализованы п.1-3 алгоритма для 2-го шага). Реализуем п.4, в качестве рабочей базисной используя 2-ю строку:

$$S_3 \to S_3 + (-2)\cdot S_2;\ S_4 \to S_4 + (-8)\cdot S_2;\ \ S_5 \to S_5 + (-1)\cdot S_2;$$

$$S_6 \to S_6 + (-1)\cdot S_2;\ \ S_7 \to S_7 + (-5)\cdot S_2;\ \ S_8 \to S_8 + (-1)\cdot S_2.$$

В результате имеем

$$\begin{array}{c} 1\\ 2\\ 3\\ 4\\ 5\\ 6\\ 7\\ 8\\ 9 \end{array}
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 4 & 1 & 8 & 16\\
0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 1 & 3 & 8\\
0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -10 & -5 & -26 & -39\\
0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 15 & 0 & 9 & 21\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5\\
0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 15 & 0 & 9 & 21\\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 10 & -7 & -22 & -21\\
0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -20 & -4 & -28 & -48\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 3 & 7
\end{pmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ |\times(-1)\\ \\ \\ \\ \\ |:(-4)\\ \\ \end{array}$$

Второй шаг выполнен. В получившейся матрице 4-я строка равна 6-й и обе они пропорциональны 9-й ($S_4 = S_6 = 3S_9$), значит 4-ю и 6-ю строки можно вычеркнуть. Для облегчения дальнейшей работы 8-ю строку разделим на (-4), а третью умножим на (-1). После этого поменяем местами 3-ю и 9-ю строки, чтобы 3-я строка (будущая рабочая) была как можно более простой:

$$\begin{array}{c} 1\\ 2\\ 3\\ 4\\ 5\\ 6\\ 7 \end{array}
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 4 & 1 & 8 & 16\\
0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 1 & 3 & 8\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 3 & 7\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5\\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 10 & -7 & -22 & -21\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 7 & 12\\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 10 & 5 & 26 & 39
\end{pmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ (-2)\ (-1)\\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Делаем третий шаг. Так как в 3-м и 4-м столбцах все элементы, стоящие ниже 2-й строки, равны нулю, выбираем 3-ю строку и 5-й столбец в качестве рабочих. Так как $a_{35} = 1 \neq 0$, то 3-я строка и 5-й столбец будут базисными (т.е. реализованы п.1-3 алгоритма для 3-го шага). Реализуем п.4, в качестве рабочей базисной используя 3-ю строку:

$$S_5 \to S_5 + (-2)\cdot S_3;\ S_6 \to S_6 + (-1)\cdot S_3;\ S_7 \to S_7 + (-2)\cdot S_2.$$

Получена ступенчатая матрица:

$$\begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 4 & 1 & 8 & 16\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 1 & 3 & 8\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 3 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & -28 & -35\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 20 & 25 \end{pmatrix}$$

Третий шаг выполнен. В получившейся матрице 5-я и 7-я строки пропорциональны 4-й, а 6-я строка равна 4-й ($S_5 = -7S_4$, $S_6 = S_4$, $S_7 = 5S_4$), поэтому эти три строки (S_5, S_6 и S_7) можно вычеркнуть:

$$\begin{array}{c} 1\\2\\3\\4 \end{array}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 4 & 1 & 1 & 4 & 1 & 8 & 16\\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 3 & 0 & 2 & 1 & 3 & 8\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 5 & 0 & 3 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица является ступенчатой. Она имеет четыре ненулевых строки, значит ее ранг $r(A) = 4$. Базисные элементы выделены жирным шрифтом.

1.8. СОВМЕСТНОСТЬ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА – КАПЕЛЛИ. МЕТОД ГАУССА

Рассмотрим произвольную систему из m линейных уравнений относительно n неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1;\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2;\\ \qquad\dots\\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.9}$$

и введем некоторые определения.

1. Набор чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется ***решением*** системы (1.9), если при подстановке этих чисел в каждое уравнение системы, все уравнения системы обращаются в тождественные равенства.

2. Система линейных уравнений называется ***совместной***, если у нее существует хотя бы одно решение, т.е. хотя бы один набор чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Если не существует такого набора чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$, при подстановке которого выполнялось бы каждое уравнение системы, система называется ***несовместной*** (не имеет решения).

3. Две системы называются ***равносильными***, если они имеют одно и то же множество решений, т.е. набор чисел, являющийся решением одной из них, будет решением и другой.

Очевидно, что существуют некоторые преобразования системы уравнений, которые позволяют получить из заданной системы равносильную ей систему:

1) перестановка местами двух уравнений;

2) умножение (деление) одного из уравнений на число $k \neq 0$;

3) сложение или вычитание уравнений и, как следствие, прибавление к одному из уравнений другого, умноженного на какое-либо число k;

4) удаление из системы уравнения, ЛЗ со всеми остальными уравнениями (ЛЗ уравнение представляется как линейная комбинация других уравнений, т.е. не несет новой информации относительно неизвестных).

Запишем систему уравнений (1.9) в матричном виде $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

4. Если к матрице коэффициентов системы присоединить столбец свободных членов, мы получим матрицу, которая называется ***расширенной матрицей системы*** (1.9):

$$A \mid B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Тогда указанные четыре действия, производимые с уравнениями системы (1.9) равнозначны четырем элементарным операциям, производимым над строками расширенной матрицы.

Таким образом, эквивалентные матрицы соответствуют равносильным системам уравнений.

Метод Гаусса решения систем линейных уравнений заключается в том, чтобы последовательно исключить каждую неизвестную из всех уравнений, кроме одного – если это возможно. Здесь можно использовать алгоритм нахождения ранга матрицы с помощью элементарных преобразований строк, который приводит заданную матрицу к ступенчатому виду. Исследование рангов матрицы коэффициентов и расширенной матрицы позволяет сделать вывод о совместности системы.

Теорема Крóнекера – Капéлли. Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранги матрицы коэффициентов системы и расширенной матрицы равны.

Доказательство.

1. ***Необходимость.*** Докажем, что для того, чтобы у системы уравнений существовало хотя бы одно решение, необходимо, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу расширенной матрицы, т.е. из существования решений должно следовать совпадение рангов этих матриц.

Итак, пусть мы имеем систему m линейных уравнений с n неизвестными, причем ранг матрицы коэффициентов $r(A) = r$. Это означает, что матрица A имеет r ЛНЗ строк и столько же ЛНЗ столбцов.

Пусть эта система имеет решение (λ_1, λ_2, ..., λ_n) – набор чисел, который при подстановке в систему обращает каждое уравнение этой системы в тождественное равенство:

$$\begin{cases} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \ldots + a_{1n}\lambda_n = b_1; \\ a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}\lambda_1 + a_{m2}\lambda_2 + \ldots + a_{mn}\lambda_n = b_m. \end{cases}$$

В полученных равенствах все элементы первого столбца матрицы A умножаются на одно и то же число λ_1, все элементы второго столбца – на λ_2 и т.д. Тогда относительно столбцов R_1, R_2, ..., R_n можно составить равенство

$$\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 + \ldots + \lambda_n R_n = B,$$

т.е. столбец свободных членов системы B выражается через ЛК столбцов матрицы A и, следовательно, является ЛЗ со столбцами матрицы A. Таким образом, в расширенной матрице остается r ЛНЗ столбцов. Следовательно, $r(A) = r(A\,|\,B)$.

2. ***Достаточность.*** Докажем, что равенства рангов матрицы коэффициентов системы и расширенной матрицы достаточно для существования хотя бы одного решения этой системы, т.е. из равенства рангов должно следовать существование хотя бы одного решения.

Пусть $r(A) = r(A\,|\,B) = r$. Это означает, что в матрице A имеется r ЛНЗ столбцов. Ранг расширенной матрицы также равен r, причем все столбцы, которые были ЛНЗ в матрице A, остаются ЛНЗ и для расширенной матрицы. Все остальные столбцы матриц A и $A\,|\,B$ можно представить как линейную комбинацию ЛНЗ столбцов по свойству 4 ЛЗ элементов (см. с.26). Тогда столбец свободных членов системы B можно представить как линейную комбинацию всех столбцов матрицы A (взяв нули в качестве коэффициентов для столбцов, не входящих в число ЛНЗ):

$$B = \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 + \ldots + \lambda_n R_n\,,$$

а это равенство означает, что числа λ_1, λ_2, ..., λ_n являются решением рассматриваемой системы уравнений.

Расширенная матрица получается из матрицы коэффициентов путем добавления столбца свободных членов. Этот столбец может быть ЛЗ с остальными столбцами матрицы A и тогда $r(A) = r(A \mid B)$, или быть ЛНЗ с ними – тогда $r(A \mid B) = r(A) + 1$. Таким образом, при приведении расширенной матрицы системы к ступенчатому виду может получиться одна из трех ситуаций.

1. Если $r(A) \neq r(A \mid B)$, то система несовместна, решений нет.

В данном случае ранг расширенной матрицы больше ранга матрицы коэффициентов на единицу, что соответствует наличию в системе уравнения вида

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 1,$$

очевидно невыполнимому ни при каких значениях неизвестных.

Пример 1.5. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + \ x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 - \ x_2 + x_3 = 2; \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$A \mid B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{matrix} (-1) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ (+) \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right).$$

Таким образом, $r(A) = 2$ (две ненулевые строки до черты) и $r(A \mid B) = 3$ (три ненулевых строки во всей матрице), поэтому эта система несовместна.

2. Если $r(A) = r(A \mid B) = n$, то система совместна и имеет единственное решение. В этом случае число ЛНЗ уравнений системы равно числу неизвестных, матрица коэффициентов в ступенчатой форме становится треугольной и ее определитель отличен от нуля и по теореме Крамера система имеет единственное решение.

Пример 1.6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + \ x_2 + x_3 = 2; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0; \\ x_1 - \ x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу и приведем ее к ступенчатому виду:

$$A\,|\,B=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\1&2&1&0\\1&-1&-1&4\end{array}\right)(-1)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&1&0&-2\\0&-2&-2&2\end{array}\right)(2)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&1&0&-2\\0&0&-2&-2\end{array}\right).$$

Таким образом, здесь $r(A)=r(\,A\,|\,B\,)=3$ (три ненулевые строки). Пусть $\tilde{A}$ – преобразованная матрица коэффициентов, тогда $\det\tilde{A}=-2\neq 0$ и $\det A\neq 0$. Следовательно, система имеет единственное решение, которое легко найти: $x_3=1$; $x_2=-2$; $x_1=3$.

3. Если $r(A)=r(A\,|\,B)<n$, то система имеет бесконечное множество решений. В этом случае число ЛНЗ уравнений системы меньше числа неизвестных и поэтому не хватает уравнений, чтобы однозначно найти все неизвестные (из одного уравнения можно найти одну неизвестную).

Количество неизвестных, которые можно найти (выразить) из системы, равно рангу матрицы (т.е. количеству ЛНЗ уравнений). Эти неизвестные будем называть ***базисными***. Остальные неизвестные, для определения которых «не хватило» уравнений, будем называть ***свободными***. Таким образом, количество базисных неизвестных равно $r(A)$; количество свободных равно $n-r(A)$.

Каждую базисную неизвестную можно выразить через свободные неизвестные. Свободные неизвестные при этом могут принимать любые значения.

Задав каждой свободной неизвестной какое-либо конкретное значение, получим набор чисел, который называется ***частным решением*** системы (и который при подстановке обращает каждое уравнение системы в тождественное равенство).

Общим решением системы уравнений называются такие соотношения между базисными и свободными неизвестными, из которых можно получить любое частное решение системы. Таким образом, в случае существования бесконечного множества решений системы ***общее решение*** представляет собой соотношения, в которых каждая базисная неизвестная выражена через свободные неизвестные.

Расширенная матрица системы называется ***разрешенной***, если в каждом базисном столбце все элементы, кроме базисного, равны нулю.

Понятие разрешенной матрицы равносильно исключению базисных неизвестных из всех уравнений, кроме одного. При этом коэффициент перед базисной неизвестной должен быть равен единице, тогда разрешенная расширенная матрица равносильна решению исходной системы уравнений.

Достигается этот результат применением алгоритма метода Гаусса: действовать надо снизу вверх и справа налево. Этот метод называется методом ***Жордана – Гаусса***.

Пример 1.7. Применим метод Жордана – Гаусса, чтобы найти решение системы уравнений в примере 1.5. После приведения к ступенчатому виду расширенной матрицы системы мы получили

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2; \\ x_2 + 2x_2 + x_3 = 0; \\ x_1 - x_2 - x_3 = 4, \end{cases} \Rightarrow A \mid B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right).$$

Базисными здесь будут все диагональные элементы (они выделены штриховкой). Приведем матрицу к разрешенному виду. Для начала разделим последнюю строку на (-2), чтобы базисный элемент был равен единице, а затем, действуя снизу вверх, обнулим элементы, стоящие выше главной диагонали:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) | : (-2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) (-1) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) (-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

В результате получена расширенная матрица, соответствующая системе $\{x_1 = 3;\ x_2 = -2;\ x_3 = 1\}$, т.е. фактически решение исходной системы уравнений.

Общий алгоритм решения систем линейных уравнений методом Жордана – Гаусса следующий:

1. Составить расширенную матрицу системы.
2. Привести расширенную матрицу к ступенчатому виду.
3. Определить ранги матриц коэффициентов и расширенной, сделать вывод о совместности системы и количестве решений.
4. В случае, если система совместна, привести расширенную матрицу к *разрешенному* виду («прямой ход»), т.е. выбрать *базисные* неизвестные и исключить их из всех строк (кроме соответствующих им базисных). Алгоритм этих действий такой же, как и при приведении матрицы к ступенчатому виду, только двигаться надо снизу вверх («обратный ход»).
5. Записать систему уравнений, соответствующую *разрешенной* матрице. Если решение единственно, то это и будет ответом. Если решений множество, нужно выразить каждую базисную неизвестную через правые части и свободные неизвестные. Полученные соотношения будут являться *общим решением* системы.
6. Если необходимо найти *частное решение* системы (в случае существования множества решений), то следует задать какие-либо значения всем свободным неизвестным и вычислить соответствующие значения базисных неизвестных.

Пример 1.7. Найти общее и два частных решения системы уравнений

$$\begin{cases} x_1+x_2+4x_3+x_4+x_5+4x_6+x_7+8x_8=16; \\ 2x_1-3x_2-2x_3-13x_4-12x_6+4x_7+23x_8=13; \\ x_1+3x_2+8x_3+7x_4-x_5-2x_6-2x_7-12x_8=-7; \\ 5x_1-3x_2+4x_3-19x_4+2x_5-11x_6-3x_7+7x_8=-5; \\ 2x_1-x_2+2x_3-7x_4+2x_5+2x_6-4x_7-5x_8=-7; \\ 3x_1+x_2+8x_3-3x_4-3x_5-22x_6+x_7=-10; \\ x_1-x_2-5x_4+x_5-x_7+2x_8=0; \\ x_1+2x_2+6x_3+4x_4-3x_5-14x_6-2x_7-17x_8=-24; \\ x_1+x_2+4x_3+x_4-x_5-6x_6+x_7+2x_8=2. \end{cases}$$

Решение. 1. Составим расширенную матрицу этой системы:

$$A\,|\,B=\left(\begin{array}{c:cccccccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 4 & 1 & 8 & 16 \\ \hdashline 2 & -3 & -2 & -13 & 0 & -12 & 4 & 23 & 13 \\ 1 & 3 & 8 & 7 & -1 & -2 & -2 & -12 & -7 \\ 5 & -3 & 4 & -19 & 2 & -11 & -3 & 7 & -5 \\ 2 & -1 & 2 & -7 & 2 & 2 & -4 & -5 & -7 \\ 3 & 1 & 8 & -3 & -3 & -22 & 1 & 0 & -10 \\ 1 & -1 & 0 & -5 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 4 & -3 & -14 & -2 & -17 & -24 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & -1 & -6 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

2. Приведем эту матрицу к ступенчатому виду. Матрица совпадает с матрицей (1.8), и в примере 1.4 она уже была приведена к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 4 & 1 & 8 & 16 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right).$$

3. Проанализируем результат: система уравнений имеет восемь неизвестных ($n=8$), при этом ранги матриц совпадают и $r(A)=r(A\,|\,B)=4$, $r(A)<n$. Следовательно, система совместна и имеет бесконечное множество решений. Общее решение будет иметь четыре базисных неизвестных: x_1, x_2, x_5

и x_7 (в матрице они выделены), и $n - r(A) = 8 - 4 = 4$ свободных x_3, x_4, x_6 и x_8. Дальнейшая задача состоит в том, чтобы выразить базисные неизвестные через свободные.

4. Преобразуем матрицу к *разрешенному* виду. Для этого во всех базисных столбцах нужно получить нули выше базисного элемента. Будем действовать снизу вверх, т.е. начнем с последней строки и 7-го столбца:

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 4 & 1 & 8 & 16 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ \\ \\ (-1) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 4 & 0 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right).$$

Получили нули в 7-м столбце. Теперь возьмем 3-ю строку и с ее помощью получим нули в 5-м столбце:

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 4 & 0 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ \\ (-1) \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right).$$

Осталось «обнулить» 2-й столбец. Сделаем это с помощью 2-й строки:

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ (-1) \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & -3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right).$$

Полученная матрица является *разрешенной.* Запишем соответствующую ей систему уравнений и выразим все базисные неизвестные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - 2x_4 - 3x_6 + 2x_8 = 1; \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_6 - x_8 = 3; \\ x_5 + 5x_6 + 3x_8 = 7; \\ x_7 + 4x_8 = 5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - 2x_3 + 2x_4 + 3x_6 - 2x_8; \\ x_2 = 3 - 2x_3 - 3x_4 - 2x_6 + x_8; \\ x_5 = 7 - 5x_6 - 3x_8; \\ x_7 = 5 - 4x_8. \end{cases}$$

Полученные формулы и являются *общим решением* заданной системы.

Найдем два частных решения: первое при $x_3 = x_4 = x_6 = x_8 = 0$; во втором свободные неизвестные вычислим по формуле $x_k = k$. Получим:

1) $x_1 = 1$; $x_2 = 3$; $x_3 = 0$; $x_4 = 0$; $x_5 = 7$; $x_6 = 0$; $x_7 = 5$; $x_8 = 0$;

2) $x_1 = 5$; $x_2 = -19$; $x_3 = 3$; $x_4 = 4$; $x_5 = -47$; $x_6 = 6$; $x_7 = -27$; $x_8 = 8$.

Замечание. Среди всех систем линейных уравнений выделяют *однородные* системы. Система (1.9) называется ***однородной***, если в каждом уравнении свободный член $b_k = 0$. Так как столбец свободных членов является нулевым, ранги матрицы коэффициентов системы и расширенной матрицы совпадают: $r(A) = r(A \mid B)$. Таким образом, по теореме Кронекера – Капелли однородная система всегда совместна. Она очевидно имеет нулевое решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, которое называется ***тривиальным***. Чтобы однородная система имела нетривиальное (т.е. отличное от нулевого) решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы коэффициентов был меньше количества неизвестных: $r(A) < n$. В случае, когда количество уравнений однородной системы совпадает с количеством неизвестных, это условие равносильно равенству нулю главного определителя системы: $\Delta = 0$.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется матрицей, элементами матрицы, размерностью матрицы? Какие матрицы называются квадратными?
2. Какие матрицы называются равными?
3. Назовите основные действия над матрицами и укажите их свойства.
4. Сформулируйте правила вычисления определителей 2-го и 3-го порядков?
5. Что называется минором и алгебраическим дополнением к элементу квадратной матрицы?
6. Сформулируйте теорему разложения и свойства определителей n-го порядка.
7. Что такое система линейных уравнений? Что называется решением системы линейных уравнений? Какая система называется несовместной?
8. В чем заключается матричный метод решения систем линейных уравнений?
9. Сформулируйте теорему Крамера.
10. Сформулируйте первое определение ранга матрицы.
11. Какой набор элементов называется линейно зависимым и какой – линейно независимым?
12. Сформулируйте основные свойства линейно зависимых и линейно независимых элементов.
13. Какая матрица называется ступенчатой?
14. Какие преобразования строк матрицы называются элементарными? Перечислите эти преобразования.
15. Сформулируйте третье определение ранга матрицы.
16. В чем заключается метод Гаусса решения систем линейных уравнений?
17. Сформулируйте теорему Кронекера – Капелли.
18. При каких условиях система линейных уравнений совместна и имеет единственное решение; совместна и имеет бесконечное множество решений; несовместна?

19. Что называется общим решением системы линейных уравнений в случае, когда решений бесконечное множество? Что называется частным решением? Какие неизвестные называются базисными и какие свободными?

20. Какие системы линейных уравнений называются однородными? В каких случаях однородные системы имеют только тривиальное решение? Какие условия необходимы для того, чтобы однородная система уравнений имела нетривиальные решения?

Тесты

№ п/п	Вопрос	Варианты ответа
1	Дана матрица $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 4 & -4 \\ 5 & -5 & 6 & -6 \end{pmatrix}$. Вычислить $a_{23}+a_{12}-a_{31}$	1. 3 2. −4 3. −2 4. 0
2	Даны матрицы $A=(1\ \ 0\ \ 2),\ B=(3\ \ 4\ \ 1),\ C=\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$. Какая из указанных сумм не существует?	1. $A+B$ 2. $A+C$ 3. A^T+C 4. A^T+B^T
3	Какое из свойств транспонирования матрицы сформулировано неверно?	1. $(A^T)^T=A$ 2. $(\lambda A)^T=\lambda A^T$ 3. $(AB)^T=A^T B^T$ 4. $\det(A^T)=\det A$
4	Найти алгебраическое дополнение A_{32}, если $A=\begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$.	1. $-\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$ 4. $-\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$

5	Найти ранг матрицы $$A=\begin{pmatrix}1&7&2&0&1\\0&0&5&0&7\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$	1. 1 2. 2 3. 3 4. 4

Продолжение таблицы

№ п/п	Вопрос	Варианты ответа
6	Какое из указанных преобразований строк матрицы не является элементарным?	1. Сложение всех элементов строки с одним и тем же числом $k \neq 0$ 2. Перемена местами двух строк 3. Замена строки матрицы на строку, полученную сложением этой строки с другой, умноженной на число $k \neq 0$ 4. Умножение всех элементов строки на одно и то же число $k \neq 0$
7	Сколько решений имеет система линейных уравнений, если ее расширенная матрица после преобразований имеет вид $$A\,\vert\,B=\left(\begin{array}{ccc\vert c}1&3&0&1\\0&1&5&2\\0&0&0&5\end{array}\right)?$$	1. Одно 2. Бесконечное множество 3. Два 4. Система несовместна
8	Дано: $$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&2\\3&-2\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix};$$ $AX=B$. Найти X.	1. $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix}2\\2.5\end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

№ п/п	Вопрос	Варианты ответа
9.	Общее решение системы линейных уравнений имеет вид $$\begin{cases} x_1 = 3 - 2x_2 + x_4, \\ x_3 = 12 - 5x_4. \end{cases}$$ Указать частное решение при $x_2 = -2$, $x_4 = 2$.	1. $\begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$
10	Если $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n = 0$ и $\lambda_i \neq 0$, то какое из утверждений справедливо?	1. Элементы $a_1, a_2, \ldots a_n$ линейно независимы 2. Элемент a_i выражается через линейную комбинацию остальных элементов 3. Элемент a_i равен нулю 4. Все элементы, кроме a_i, равны нулю

Глава 2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

2.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Определение 1. Скалярной величиной или скаляром называется любое вещественное число.

Определение 2. Величина, для задания которой необходимо указать ее численное значение и направление, называется векторной или вектором.

Геометрическая модель вектора – прямолинейный направленный отрезок определенной длины. Направление фиксируется тем, что одна из конечных точек считается началом, а другая – концом.

Векторы обозначаются $\overline{a}$ или $\overline{M_1M_2}$, где точки M_1 и M_2 являются соответственно началом и концом вектора.

Определение 3. Численное значение вектора, т.е. расстояние между его началом и концом, называется длиной, или модулем, вектора и обозначается $|\overline{a}|$ или $|\overline{M_1M_2}|$.

Определение 4. Нулевым вектором называется вектор, модуль которого равен нулю, а направление не определено (произвольно). Итак, если $\overline{0}$ – нулевой вектор, то $\left|\overline{0}\right| = 0$.

Определение 5. Два вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или параллельных прямых (обозначение $\overline{a} \parallel \overline{b}$).

Определение 6. Три вектора называются компланарными, если они лежат на одной плоскости или на параллельных плоскостях.

Определение 7. Два вектора равны (обозначение $\overline{a} = \overline{b}$), если выполнены три условия: 1) $|\overline{a}| = |\overline{b}|$; 2) $\overline{a} \parallel \overline{b}$; 3) $\overline{a}$ и $\overline{b}$ одинаково направлены.

Замечание **1**. Условия 2 и 3 можно заменить одним: векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ сонаправлены (обозначение $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$).

Замечание **2**. Из определения равенства векторов следует, что параллельное перемещение не меняет вектора. Этим свойством можно воспользоваться, например, чтобы привести векторы к общему началу.

2.2. СЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Пусть даны два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Определение. Суммой двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется третий вектор $\overline{c}$, который совпадает с диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и имеющий с ними общее начало. Обозначение суммы векторов: $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$ (рис.2.1).

Это правило сложения двух векторов называется ***правилом параллелограмма.***

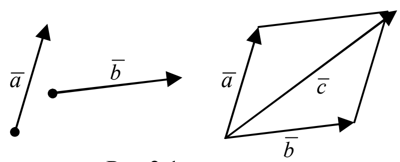

Рис.2.1

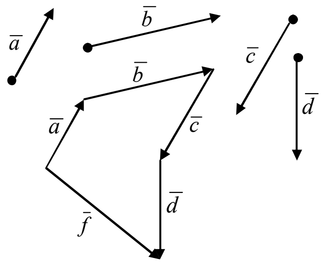

Рис.2.2

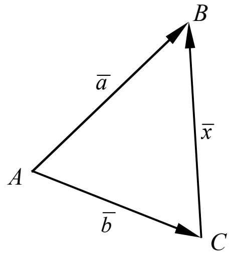

Рис.2.3

***Замечание* 1**. Из механики известно, что действие двух сил $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$ на точку M тела равносильно действию одной силы $\overline{F}$, их равнодействующей, определяемой по правилу параллелограмма. Таким образом, $\overline{F} = \overline{F_1} + \overline{F_2}$.

***Замечание* 2.** Из определения следует, что имеет место переместительное свойство: $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$.

Замечание* 3**. Если началом вектора $\bar{b}$ является конец вектора $\bar{a}$, то сумму двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ можно представить, как третий вектор $\bar{c}$, начало которого совпадает с началом вектора $\bar{a}$, а конец – с концом вектора $\bar{b}$. Этот способ определения вектора $\bar{c}$ называется ***правилом треугольника.

***Замечание* 4**. При сложении векторов имеет место сочетательное свойство

$$\left(\bar{a} + \bar{b}\right) + \bar{c} = \bar{a} + \left(\bar{b} + \bar{c}\right).$$

***Замечание* 5.** Сочетательное свойство позволяет найти сумму любого конечного числа векторов: для этого надо построить векторы так, чтобы конец предыдущего вектора был началом следующего. Вектор, замыкающий ломаную, построенную на этих векторах, началом которого является начало первого вектора, а концом – конец последнего, называется суммой заданных векторов.

Например, вектор $\bar{f}$ (рис.2.2) есть сумма заданных векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ и $\bar{d}$:

$$\bar{f} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d}\ .$$

Это правило называют ***правилом многоугольника***.

Замечание 6. Операция вычитания векторов есть действие, обратное сложению векторов: если $\bar{x} + \bar{b} = \bar{a}$, то $\bar{x} = \bar{a} - \bar{b}$. Для определения вектора $\bar{x}$ векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ приводим к общему началу A так, чтобы $\overline{AC} = \bar{b}$, $\overline{AB} = \bar{a}$. На векторах $\overline{AC}$ и $\overline{AB}$ строим треугольник ABC. По правилу треугольника находим вектор $\bar{x} = \bar{a} - \bar{b}$ (рис.2.3).

2.3. УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА СКАЛЯР

Пусть $\bar{a}$ – вектор, α – скаляр.

Определение 1. Произведением вектора $\bar{a}$ на скаляр α называется новый вектор $\bar{c} = \alpha\,\bar{a}$, который удовлетворяет трем условиям:

1) $|\bar{c}| = |\alpha\bar{a}| = |\alpha||\bar{a}|$;

2) $\alpha\,\overline{a}=\overline{c}\,\|\,\overline{a}$;

3) вектор $\overline{c}$ однонаправлен с вектором $\overline{a}$ при $\alpha > 0$ и противоположно направлен при $\alpha < 0$.

Замечание* 1.** Условия 2 и 3 можно заменить следующим: вектор $\overline{c}$ ***сонаправлен вектору $\overline{a}$, если $\alpha > 0$ и ***направлен противоположно***, если $\alpha < 0$.

***Замечание* 2.** Из определения следует, что если $\alpha\,\overline{a}=\overline{0}$, то либо $\alpha = 0$, либо $\overline{a}=\overline{0}$.

Умножение вектора на скаляр обладает следующими свойствами:

1) $\alpha\,\overline{a}=\overline{a}\,\alpha$;

2) $(\alpha\beta)\overline{a}=\alpha(\beta\,\overline{a})=\beta(\alpha\,\overline{a})$;

3) $(\alpha+\beta)\,\overline{a}\;=\alpha\,\overline{a}+\beta\,\overline{a}$;

4) $\alpha(\overline{a}+\overline{b})=\alpha\overline{a}+\alpha\overline{b}$.

Определение 2. Ортом вектора $\overline{a}$ называется вектор $\overline{a}_0$ единичной длины и соноправленный вектору $\overline{a}$, т.е. $|\,\overline{a}_0\,|=1$ и $\overline{a}_0 \uparrow\uparrow \overline{a}$.

***Замечание* 3.** Если $\overline{a}_0$ – орт вектора $\overline{a}$, то $\overline{a}=\overline{a}_0\,|\,\overline{a}\,|$.

Определение 3. Операции сложения векторов и умножение вектора на скаляр называются ***линейными.***

Определение 4. Вектор $\overline{A}=\alpha_1\,\overline{a}_1+\alpha_2\,\overline{a}_2+\ldots+\alpha_k\,\overline{a}_k$, где $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2,\ldots,\overline{a}_k$ – векторы; $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ – скаляры, называется ***линейной комбинацией*** векторов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2,\ldots,\overline{a}_k$, скаляры $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ – коэффициентами линейной комбинации.

2.4. ТЕОРЕМЫ О РАЗЛОЖЕНИИ ВЕКТОРА ПО НАПРАВЛЕНИЮ ДАННЫХ ВЕКТОРОВ

Теорема 1 (линейный случай). Если даны вектор $\overline{a}$ и вектор $\overline{b}\neq\overline{0}$, ему коллинеарный, то справедливо равенство $\overline{a}=\alpha\overline{b}$, где α – скаляр.

Доказательство. Если вектор $\overline{b}$ сонаправлен вектору $\overline{a}$, то $\alpha=|\,\overline{a}\,|/|\,\overline{b}\,|$. Если $\overline{b}$ направлен противоположно вектору $\overline{a}$, то $\alpha=-|\,\overline{a}\,|/|\,\overline{b}\,|$. По определению произведения вектора на скаляр имеем $\overline{a}=\alpha\overline{b}$.

Теорема 2 (плоский случай). Если два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ не коллинеарные, то любой третий вектор $\overline{c}$, компланарный с ними, можно представить единственным образом как линейную комбинацию векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, т.е. $\overline{c}=\alpha\,\overline{a}+\beta\overline{b}$.

Доказательство. Приведем три вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ к общему началу A и построим параллелограмм, диагональю которого является вектор $\overline{c}$, а

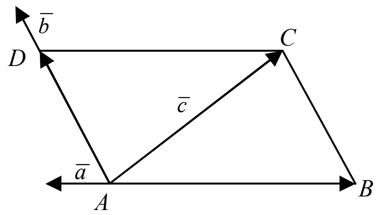

Рис.2.4

стороны AB и AD лежат на одних прямых с векторами $\bar a$ и $\bar b$ (рис.2.4). По правилу параллелограмма

$$\bar c = \overline{AB} + \overline{AD}. \qquad (2.1)$$

Заметим, что $\bar a \| \overline{AB}$ и $\bar b \| \overline{AD}$. Отсюда

$$\overline{AB} = \alpha \bar a; \quad \overline{AD} = \beta \bar b. \qquad (2.2)$$

Подставляя (2.2) в (2.1), получим

$$\bar c = \alpha \bar a + \beta \bar b. \qquad (2.3)$$

Из построения следует, что разложение (2.3) единственно.

Теорема 3 (пространственный случай). Если три вектора $\bar a$, $\bar b$ и $\bar c$ не компланарны, то любой четвертый вектор $\bar d$ можно представить единственным образом как линейную комбинацию первых трех векторов, т.е.

$$\bar d = \alpha \bar a + \beta \bar b + \gamma \bar c,$$

где α, β и $\gamma -$ скаляры.

Доказательство. Приведем все векторы к общему началу O и построим параллелепипед, диагональю которого является вектор $\bar d$, а ребра OA, OB и OC лежат на тех же прямых, что и векторы $\bar a$, $\bar b$ и $\bar c$ (рис.2.5). Основанием параллелепипеда является параллелограмм $AOBE$. Докажем сначала, что вектор

$$\bar d = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}. \qquad (2.4)$$

По правилу параллелограмма

$$\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OE}; \quad \overline{OE} + \overline{OC} = \bar d,$$

где $\overline{OE}$ – вектор, совпадающий с диагональю параллелограмма $AOBE$; вектор $\bar d$ – диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\overline{OE}$ и $\overline{OC}$.

Следовательно,

$$\bar d = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}.$$

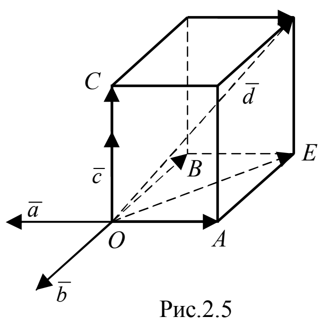

Рис.2.5

Заметим, что $\bar a \| \overline{OA}$, $\bar b \| \overline{OB}$, $\bar c \| \overline{OC}$. Отсюда

$$\overline{OA} = \alpha \bar a; \quad \overline{OB} = \beta \bar b; \quad \overline{OC} = \gamma \bar c. \qquad (2.5)$$

Подставляя (2.5) в (2.4), получим

$$\bar d = \alpha \bar a + \beta \bar b + \gamma \bar c. \qquad (2.6)$$

Из построения следует, что разложение (2.6) единственно.

2.5. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ И НЕЗАВИСИМОСТЬ ВЕКТОРОВ. БАЗИС

Пусть даны векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_k$ и скаляры $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$.

Определение 1. Векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_k$ называются ***линейно независимыми***, если их линейная комбинация равна нулевому вектору ***только*** при условии, что все ее коэффициенты равны нулю, т.е.

$$\alpha_1 \overline{a}_1 + \alpha_2 \overline{a}_2 + ... + \alpha_k \overline{a}_k = \overline{0} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = 0. \qquad (2.7)$$

Определение 2. Векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_k$ называются ***линейно зависимыми***, если равенство (2.7) выполняется при условии, что хотя бы один из скаляров отличен от нуля.

***Замечание* 1.** Пусть, например, скаляр $\alpha_1 \neq 0$. Тогда можно записать

$$\overline{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\overline{a}_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\overline{a}_3 - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\overline{a}_n,$$

т.е. вектор $\overline{a}_1$ есть линейная комбинация векторов $\overline{a}_2, \overline{a}_3, ..., \overline{a}_n$.

Таким образом, если система векторов линейно зависима, то по крайней мере один из векторов есть линейная комбинация остальных векторов и наоборот.

Используя теоремы 1-3 о разложении вектора по направлению данных векторов можно доказать: два ненулевых вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны, а три ненулевых вектора $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$ компланарны, если они линейно зависимы.

Определение 3. Любая пара неколлинеарных векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ на плоскости или любая тройка некомпланарных векторов $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$ в пространстве, заданных в определенном порядке, называются ***базисом*** множества векторов, лежащих соответственно на плоскости или в пространстве.

Любой вектор на плоскости или в пространстве может быть представлен в виде линейной комбинации базисных векторов (согласно теоремам 2 и 3 раздела 2.4).

***Замечание* 2.** По теореме 2 (см. раздел 2.4) любой вектор $\overline{c}$, компланарный с неколлинеарными векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, можно представить в виде

$$\overline{c} = \alpha \overline{a} + \beta \overline{b}, \qquad (2.8)$$

т.е. вектор $\overline{c}$ разложен по базису $\overline{a}, \overline{b}$.

По теореме 3 (раздел 2.4) любой вектор $\overline{d}$ может быть представлен в виде линейной комбинации трех некомпланарных векторов $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$:

$$\overline{d} = \alpha \overline{a} + \beta \overline{b} + \gamma \overline{c}, \qquad (2.9)$$

т.е. вектор $\overline{d}$ разложен по базису $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$.

Определение 4. Коэффициенты в разложениях вектора по базисным векторам называются ***координатами*** вектора в данном базисе и обозначаются $\overline{c}=\{\alpha,\beta\}$ или $\overline{d}=\{\alpha,\beta,\gamma\}$.

***Замечание* 3.** Задание вектора координатами полностью определяет вектор.

***Замечание* 4.** Из единственности разложения вектора по базису следует утверждение: если два вектора равны, то равны и их координаты в одном и том же базисе, и обратно.

***Замечание* 5.** Пусть дан базис $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$ и в этом базисе – два вектора, заданные координатами

$$\overline{d}_1=\{\alpha_1,\beta_1,\gamma_1\} \text{ и } \overline{d}_2=\{\alpha_2,\beta_2,\gamma_2\}.$$

Тогда

$$d_1=d_2 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases}\alpha_1=\alpha_2,\\ \beta_1=\beta_2,\\ \gamma_1=\gamma_2.\end{cases}$$

Найдем произведение $\lambda\overline{d}_1$:

$$\lambda\overline{d}_1=\lambda(\alpha_1\overline{a}+\beta_1\overline{b}+\gamma_1\overline{c})=(\lambda\alpha_1)\overline{a}+(\lambda\beta_1)\overline{b}+(\lambda\gamma_1)\overline{c}.$$

Отсюда

$$\lambda\overline{d}_1=\{\lambda\alpha_1,\lambda\beta_1,\lambda\gamma_1\}.$$

Найдем сумму $\overline{d}_1+\overline{d}_2$:

$$\overline{d}_1+\overline{d}_2=(\alpha_1\overline{a}+\beta_1\overline{b}+\gamma_1\overline{c})+(\alpha_2\overline{a}+\beta_2\overline{b}+\gamma_2\overline{c})=(\alpha_1+\alpha_2)\overline{a}+(\beta_1+\beta_2)\overline{b}+(\gamma_1+\gamma_2)\overline{c}.$$

Тогда

$$\overline{d}_1+\overline{d}_2=\{\alpha_1+\alpha_2;\ \beta_1+\beta_2;\ \gamma_1+\gamma_2\}.$$

2.6. ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ОСЬ. ТЕОРЕМЫ О ПРОЕКЦИЯХ

Пусть дан вектор $\overline{AB}$ и некоторая ось l. Спроецируем вектор $\overline{AB}$ на ось и обозначим проекцию начала вектора на ось A_1, а проекцию конца вектора – B_1. Введем вспомогательный вектор $\overline{A_1B_1}$ (рис.2.6, *а*).

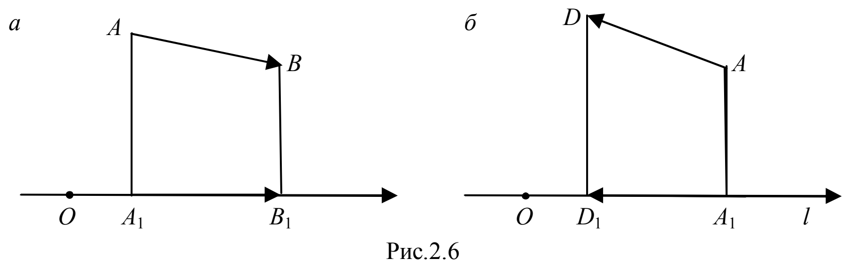

Рис.2.6

Определение 1. Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось l называется длина отрезка оси A_1B_1, взятая со знаком плюс, если вспомогательный вектор $\overline{A_1B_1}$ и ось сонаправлены, и со знаком минус в противном случае (обозначение $np_l\overline{AB}$).

Для вектора $\overline{AD}$ (рис.2.6, *б*) в соответствии с определением имеем

$$np_l\,\overline{AD} = -\left|\,A_1\,D_1\,\right|.$$

Из определения проекции следует:

1) проекция вектора – это скалярная величина, которая может быть положительной, отрицательной и равной нулю;

2) проекции равных векторов равны.

Пусть даны два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Приведем их к общему началу так, чтобы

$$\overline{OA} = \overline{a}\,;\,\overline{OB} = \overline{b}\,.$$

Определение 2. Углом φ между двумя векторами называется наименьший угол, на который надо повернуть один из векторов, чтобы его направление совпало с направлением другого вектора. Из определения угла между двумя векторами следует, что $0 \le \varphi \le \pi$.

Аналогично определяется угол между вектором и осью.

Теорема 1. Проекция суммы векторов равна алгебраической сумме проекций слагаемых векторов.

Доказательство. Пусть $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$ (рис.2.7).

Заметим, что

$$|AB| + |BC| = |AC|. \qquad (2.10)$$

В соответствии с определением проекции вектора на ось, для данного расположения векторов имеем

$$np_l\overline{a} = +|BC|\,;\quad np_l\overline{b} = -|AC|;\quad np_l\overline{c} = -|AB|. \qquad (2.11)$$

С учетом (2.11) равенство (2.10) можно переписать в виде

$$-np_l\overline{c} + np_l\overline{a} = -np_l\overline{b}$$

или

$$np_l\overline{c} = np_l\overline{a} + np_l\overline{b}\,.$$

Заменяя вектор $\overline{c}$, суммой $\overline{a} + \overline{b}$, окончательно получим

$$np_l\left(\overline{a} + \overline{b}\right) = np_l\overline{a} + np_l\overline{b}\,.$$

Замечание. Теорема обобщается на сумму любого конечного числа векторов:

$$np_l\left(\sum_{k=1}^{n}\overline{a}_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(np_l\overline{a}_k\right).$$

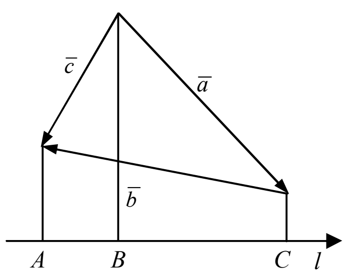

Рис.2.7

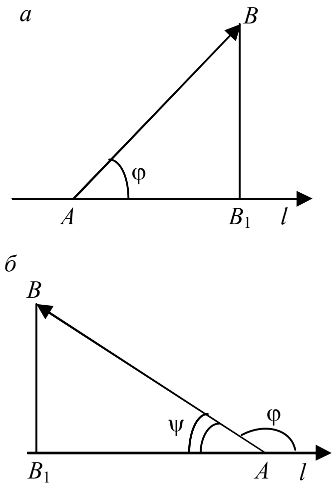

Рис.2.8

Теорема 2. Проекция вектора на ось равна произведению модуля вектора на косинус угла между вектором и осью.

Доказательство. Рассмотрим два случая.

1. Пусть угол между вектором $\overline{a}$ и осью l острый $(\varphi < \pi/2)$. Обозначим B_1 проекцию точки B на ось l (рис.2.8, *а*). По определению проекции вектора на ось $np_l\,\overline{AB} = np_l\overline{a} = +|AB_1|$. Из прямоугольного треугольника AB_1B, находим

$$np_l\,\overline{AB} = |AB_1| = \left|\overline{AB}\right|\cos\varphi = |\overline{a}|\cos\varphi.$$

2. Пусть угол между вектором $\overline{a}$ и осью l тупой: φ > π/2 (рис.2.8, *б*). Тогда

$$np_l\,\overline{AB} = np_l\overline{a} = -|AB_1|;$$

$$|AB_1| = \left|\overline{AB}\right|\cos\psi = \left|\overline{AB}\right|\cos(\pi-\varphi) = -|\overline{a}|\cos\varphi.$$

Окончательно

$$np_l\overline{a} = -|AB_1| = -\left(-|\overline{a}|\cos\varphi\right) = |\overline{a}|\cos\varphi.$$

Таким образом, теорема верна для любых углов, образованных вектором $\overline{a}$ и положительным направлением оси l.

Следствие. Если $\overline{n}$ – единичный вектор, то $np_l\overline{n} = \cos\left(\widehat{\overline{n},l}\right)$.

Теорема 3. Проекция произведения вектора на скаляр равна произведению скаляра на проекцию вектора на ось l, т.е.

$$np_l(\lambda\,\overline{a}) = \lambda\, np_l\overline{a}.$$

Доказательство. Приведем векторы $\overline{a}$ и $\lambda\overline{a}$ к общему началу. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $\lambda > 0$. Заметим, что векторы $\overline{a}$ и $\lambda\overline{a}$ сонаправлены. По теореме 2 можно записать

$$np_l(\lambda\,\overline{a}) = |\lambda\,\overline{a}|\cos\varphi = |\lambda|\,|\overline{a}|\cos\varphi = \lambda|\overline{a}|\cos\varphi = \lambda\, np_l\overline{a}.$$

Итак,

$$np_l(\lambda\,\overline{a}) = \lambda\, np_l\overline{a}.$$

2. Пусть $\lambda < 0$. Векторы $\overline{a}$ и $\lambda\overline{a}$ в этом случае направлены противоположно. Поэтому

$$np_l(\lambda\,\overline{a}) = |\lambda\,\overline{a}|\cos\psi = |\lambda|\,|\overline{a}|\cos(\pi-\varphi) = -\lambda|\overline{a}|(-\cos\varphi) = \lambda\cos\varphi = \lambda\, np_l\overline{a}.$$

Окончательно

$$np_l(\lambda\,\overline{a}) = \lambda\, np_l\overline{a}.$$

Таким образом, теорема верна для любого λ, как положительного, так и отрицательного.

2.7. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ КООРДИНАТ В ОРТОГОНАЛЬНОМ И НОРМИРОВАННОМ БАЗИСЕ

Определение 1. Три вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ образуют ***правую тройку*** векторов, если с конца третьего вектора $\overline{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\overline{a}$ ко второму вектору $\overline{b}$ виден происходящим против часовой стрелки (рис.2.9). В противном случае три вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ образуют ***левую тройку векторов.***

Рассмотрим декартову прямоугольную систему координат в пространстве xyz. Введем орты положительных осей координат $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$. Векторы $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ – единичные и взаимно-перпендикулярные векторы. Эти векторы не компланарны и образуют базис в пространстве. Базис $\left(\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\right)$ называют ***ортогональным и нормированным.***

Определение 2. Прямоугольная система координат называется правой, если три вектора $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$, образуют правую тройку векторов.

В дальнейшем будем использовать правую систему координат.

Пусть дан произвольный вектор $\overline{a}$ в пространстве. Его можно единственным образом разложить по базису $\left(\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\right)$:

$$\overline{a} = \alpha\,\overline{i} + \beta\,\overline{j} + \gamma\,\overline{k}\,, \qquad (2.12)$$

где α, β и γ – скаляры.

Как известно, коэффициенты при базисных векторах в разложении (2.12) называются координатами вектора $\overline{a}$ в базисе $\left(\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\right)$. Выясним их геометрический смысл. Для этого спроецируем равенство (2.12) на ось Ox. Применяя теоремы о проекциях, получим

$$np_x\overline{a} = \alpha\, np_x\overline{i} + \beta\, np_x\overline{j} + \gamma\, np_x\overline{k}\,. \qquad (2.13)$$

Заметим, что

$$np_x\overline{i} = \left|\,\overline{i}\,\right| \cos\left(\widehat{\overline{i}, Ox}\right) = 1; \;\; np_x\overline{j} = 0; \;\; np_x\overline{k} = 0\,. \qquad (2.14)$$

Равенство (2.13) с учетом (2.14) примет вид

$$np_x\,\overline{a} = \alpha\,. \qquad (2.15)$$

Аналогично можно доказать, что

$$np_y\,\overline{a} = \beta; \;\; np_z\,\overline{a} = \gamma\,. \qquad (2.16)$$

Введем для проекций вектора $\overline{a}$ на оси декартовой системы координат следующие обозначения:

$$np_x\overline{a} = a_x \;;\; np_y\overline{a} = a_y \;;\; np_z\overline{a} = a_z\,. \qquad (2.17)$$

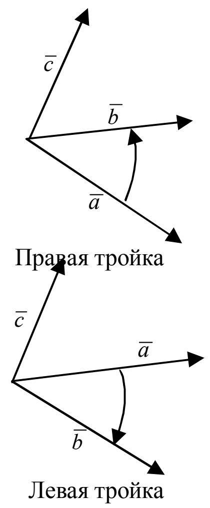

Рис.2.9

Разложение вектора $\bar{a}$ по базису $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ с учетом формул (2.15), (216) и (2.17) примет вид

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}\,. \tag{2.18}$$

Таким образом, ***координаты вектора в базисе*** $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ ***есть его проекции на оси декартовой прямоугольной системы координат.*** Тот факт, что вектор $\bar{a}$ задан своими проекциями, записывается в виде

$$\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\}.$$

Замечание **1.** Возможно следующее представление вектора

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}\{a_x, a_y, a_z\}.$$

Замечание **2.** Пусть заданы два вектора $\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\bar{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$. Тогда действия над векторами, заданными своими проекциями на оси прямоугольной системы координат, определяются формулами

$$\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_x = b_x\,, \\ a_y = b_y\,, \\ a_z = b_z\,; \end{cases} \qquad \lambda\,\bar{a} = \{\lambda\,a_x, \lambda\,a_y, \lambda\,a_z\};$$

$$\bar{a} + \bar{b} = \{a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\}.$$

Замечание 3. По определению проекции вектора на ось имеем

$$a_x = |\bar{a}|\cos\left(\bar{a}\,\hat{,}\,Ox\right) = |\bar{a}|\cos\alpha\,.$$

Отсюда $\cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\bar{a}|}$. Аналогично можно получить $\cos\beta = \dfrac{a_y}{|\bar{a}|}$; $\cos\gamma = \dfrac{a_z}{|\bar{a}|}$.

Определение 3. Косинусы углов, образованных вектором с положительным направлением осей координат, т.е. $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, называются ***направляющими косинусами*** вектора.

Замечание 4. Пусть два ненулевых вектора $\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\bar{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ коллинеарны. По теореме 1 (см. раздел 2.4) имеет место равенство

$$\bar{a} = \lambda\bar{b}\,.$$

Из равенства векторов следует:

$$a_x = \lambda\,b_x; \quad a_y = \lambda\,b_y; \quad a_z = \lambda\,b_z,$$

откуда

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \quad (b_x \neq 0, b_y \neq 0, b_z \neq 0)\,.$$

Таким образом, если два вектора коллинеарны, то их проекции на оси координат пропорциональны. Заметим, что если, например, $b_x = 0$, то и $a_x = 0$.

***Замечание* 5.** Если $\overline{n}$ – единичный вектор, то

$$\overline{n} = \{ \cos\alpha\, ,\, \cos\beta\, ,\cos\gamma \ \}.$$

2.8. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДВУХ ВЕКТОРОВ

Определение. Скалярным произведением двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число, равное произведению их модулей на косинус угла между векторами, т.е.

$$\left(\overline{a},\overline{b}\right) = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\left(\overline{a}\,\widehat{,}\,\overline{b}\right) = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi\,.$$

Другие обозначения скалярного произведения: $\overline{a}\cdot\overline{b}$, $(\overline{a}\overline{b})$, $(\overline{a},\overline{b})$. Будем использовать обозначение $\overline{a}\cdot\overline{b}$.

Выясним механический смысл скалярного произведения. Пусть под действием постоянной силы $\overline{F}$ точка перемещается по прямой линии из точки M_1 в точку M_2 (рис.2.10). Сила образует с прямой $M_1\,M_2$ угол φ. Работа силы $\overline{F}$ на указанном перемещении

$$A = |\overline{F}||M_1M_2|\cos\varphi\,.$$

Введем в рассмотрение вектор $\overline{M_1M_2}$. Тогда

$$A = |\ \overline{F}\ ||\ \overline{M_1M_2}\ |\cos\varphi = \overline{F}\cdot\overline{M_1M_2}\,.$$

Свойства скалярного произведения следующие:

1. Из определения следует $\overline{a}\cdot\overline{b} = \overline{b}\cdot\overline{a}$.

2. Скалярное произведение равно нулю, т.е. $\overline{a}\cdot\overline{b} = 0$ или $|\ \overline{a}\ ||\ \overline{b}\ |\cos\left(\overline{a}\,\widehat{,}\,\overline{b}\right) = 0$, если хотя бы один из векторов нулевой:

$$|\ \overline{a}\ | = 0 \ \Rightarrow\ \overline{a} = \overline{0} \ \text{ или } \ |\ \overline{b}\ | = 0 \ \Rightarrow\ \overline{b} = \overline{0}$$

или $\cos\left(\overline{a}\,\widehat{,}\,\overline{b}\right) = 0$. В этом случае векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ перпендикулярны.

Таким образом, ненулевые векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ перпендикулярны, если их скалярное произведение равно нулю.

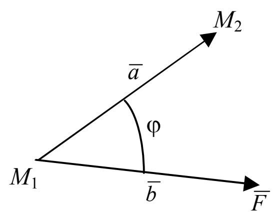

Рис.2.10

3. Рассмотрим скалярный квадрат вектора $\overline{a}^2$, т.е. скалярное произведение вектора $\overline{a}$ на себя:

$$\overline{a}^2 = \overline{a}\cdot\overline{a} = |\overline{a}||\overline{a}|\cos 0 = |\overline{a}|^2 \quad \Rightarrow \quad |\overline{a}| = \sqrt{(\overline{a}\ ,\overline{a})}\,.$$

4. По теореме 2 (раздел 2.6)

$$|\ \overline{a}\ |\cos\left(\overline{a},\overline{b}\right) = пр_{\overline{b}}\overline{a} \quad ; \quad \left|\ \overline{b}\ \right|\cos\left(\overline{a},\overline{b}\right) = пр_{\overline{a}}\overline{b}\ .$$

Тогда

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = |\ \overline{a}\ |пр_{\overline{a}}\overline{b} \quad \text{или} \quad \overline{a}\cdot\overline{b} = \left|\ \overline{b}\ \right|пр_{\overline{b}}\overline{a} \quad \Rightarrow$$

$$пр_{\overline{a}}\overline{b} = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|} \quad \text{или} \quad пр_{\overline{b}}\overline{a} = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{b}\right|} \tag{2.19}$$

5. $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\cdot\overline{c} = \overline{a}\cdot\overline{c}+\overline{b}\cdot\overline{c}$

Доказательство.

$$\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\cdot\overline{c} = |\overline{c}|пр_{\overline{c}}\left(\overline{a}+\overline{b}\right) = |\overline{c}|пр_{\overline{c}}\overline{a} + |\overline{c}|пр_{\overline{c}}\overline{b} = \overline{c}\cdot\overline{a}+\overline{c}\cdot\overline{b} = \overline{a}\cdot\overline{c}+\overline{b}\cdot\overline{c}.$$

6. $\lambda\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right) = \lambda\,\overline{a}\cdot\overline{b} = \overline{a}\cdot\lambda\,\overline{b}$.

7. Пусть векторы заданы координатами в базисе $\left(\overline{i}\ ,\overline{j}\ ,\overline{k}\ \right)$. Если

$$\overline{a} = \left\{\,a_x\ ,a_y\ ,a_z\ \right\} = a_x\overline{i}+a_y\overline{j}+a_z\overline{k}\ ,\ \overline{b} = \left\{\,b_x\ ,b_y\ ,b_z\ \right\} = b_x\overline{i}+b_y\overline{j}+b_z\overline{k}\ ,$$

то

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = \left(a_x\overline{i}+a_y\overline{j}+a_z\overline{k}\right)\cdot\left(b_x\overline{i}+b_y\overline{j}+b_z\overline{k}\right) = \underline{\underline{a_xb_x\left(\overline{i}\,\overline{i}\right)}} +$$

$$+ a_xb_y\left(\overline{i}\overline{j}\right) + a_xb_z\left(\overline{i}\overline{k}\right) + a_yb_x\left(\overline{j}\overline{i}\right) + \underline{\underline{a_yb_y\left(\overline{j}\,\overline{j}\right)}} + a_yb_z\left(\overline{j}\overline{k}\right) +$$

$$+ a_zb_x\left(\overline{k}\overline{i}\right) + a_zb_y\left(\overline{k}\overline{j}\right) + \underline{\underline{a_zb_z\left(\overline{k}\overline{k}\right)}} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.$$

Замечание. Неподчеркнутые слагаемые равны нулю, так как скалярное произведение взаимно перпендикулярных ортов равно нулю, а в подчеркнутых слагаемых скалярный квадрат единичных векторов равен единице.

Итак,

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z\,.$$

Скалярное произведение двух векторов, заданных в базисе $\left(\overline{i}\ ,\overline{j}\ ,\overline{k}\ \right)$, равно сумме произведений одноименных координат (проекций).

Следствие 1. Модуль вектора, заданного в базисе $\left(\overline{i}\ ,\overline{j}\ ,\overline{k}\ \right)$, равен корню квадратному из суммы квадратов координат (проекций):

$$|\ \overline{a}\ | = \sqrt{(a_x)^2 + \left(a_y\right)^2 + (a_x)^2}\,.$$

Следствие 2. Направляющие косинусы вектора, заданного в базисе $\left(\bar{i}\,,\bar{j}\,,\bar{k}\right)$, определяются по формулам

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\,\bar{a}\,|}=\frac{a_x}{\sqrt{(a_x)^2+(a_y)^2+(a_x)^2}}\;;$$

$$\cos\beta=\frac{a_y}{|\,\bar{a}\,|}=\frac{a_y}{\sqrt{(a_x)^2+(a_y)^2+(a_x)^2}}\;;$$

$$\cos\gamma=\frac{a_z}{|\,\bar{a}\,|}=\frac{a_z}{\sqrt{(a_x)^2+(a_y)^2+(a_x)^2}}\;.$$

Следствие 3. Из определения скалярного произведения следует

$$\cos\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\,\bar{a}\,\|\,\bar{b}\,|}$$

или

$$\cos\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{(a_x)^2+(a_y)^2+(a_x)^2}\,\sqrt{(b_x)^2+(b_y)^2+(b_x)^2}}\;. \qquad (2.20)$$

2.9. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДВУХ ВЕКТОРОВ

Определение. Векторным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется третий вектор $\bar{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) его модуль равен площади параллелограмма, построенного на данных векторах, как на сторонах;

2) вектор перпендикулярен плоскости параллелограмма;

3) вектор направлен таким образом, что три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ образуют правую тройку векторов (рис.2.11).

Обозначение векторного произведения: $\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}$, $\bar{c}=\left[\bar{a}\;\bar{b}\right]$ или $\bar{c}=\left[\bar{a},\bar{b}\right]$. Будем использовать обозначение $\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}$.

Из школьного курса математики известно, что площадь параллелограмма равна произведению двух сторон параллелограмма на синус угла, заключенного между ними. Отсюда модуль вектора $\bar{c}$ определяется по формуле

$$|\,\bar{c}\,|=\left|\,\bar{a}\times\bar{b}\,\right|=|\,\bar{a}\,\|\,\bar{b}\,|\sin\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right).$$

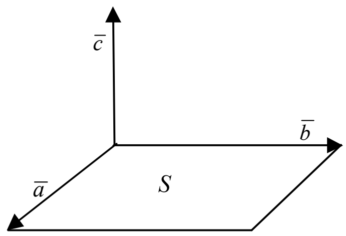

Рис.2.11

Свойства векторного произведения следующие:

1. При перестановке сомножителей знак векторного произведения меняется на противоположный. Рассмотрим два вектора $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ и $\bar{c}' = \bar{b} \times \bar{a}$. Из определения векторного произведения следует, что $|\bar{c}| = |\bar{c}'| = S_{\text{парал.}}$. Направления же векторов противоположны. Следовательно, $\bar{c} = -\bar{c}'$, т.е. $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$.

2. Если вектор $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$, то равен нулю его модуль, т.е.

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right).$$

Этот результат возможен в двух случаях:

а) один из векторов нулевой: $|\bar{a}| = 0 \Rightarrow \bar{a} = \bar{0}$ или $|\bar{b}| = \bar{0} \Rightarrow \bar{b} = \bar{0}$;

б) синус угла между векторами равен нулю $\sin\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right) = 0$, следовательно, векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарные.

Таким образом, для коллинеарности двух ненулевых векторов необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение было равно нулю.

3. Из определения векторного произведения легко получить

$$\lambda\left[\bar{a}\,\bar{b}\right] = (\lambda\,\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times \left(\lambda\,\bar{b}\right).$$

4. Векторное произведение двух векторов обладает распределительным свойством:

$$\left(\bar{a} + \bar{b}\right) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}.$$

5. Рассмотрим векторное произведение двух векторов, заданных в ортонормированном базисе $\left(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\right)$:

$$\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}; \quad \bar{b} = \{b_x, b_y, b_z\} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}.$$

Предварительно выясним, чему равны векторные произведения ортов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$:

$$\bar{i} \times \bar{i} = \bar{0};\ \bar{i} \times \bar{j} = \bar{k};\ \bar{i} \times \bar{k} = -\bar{j};\ \bar{j} \times \bar{i} = -\bar{k};$$

$$\bar{j} \times \bar{j} = \bar{0};\ \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i};\ \bar{k} \times \bar{i} = \bar{j};\ \bar{k} \times \bar{j} = -\bar{i};\ \bar{k} \times \bar{k} = \bar{0}.$$

Тогда

$$\bar{a} \times \bar{b} = \left(a_x\,\bar{i} + a_y\,\bar{j} + a_z\,\bar{k}\right) \times \left(b_x\,\bar{i} + b_y\,\bar{j} + b_z\,\bar{k}\right) =$$

$$= a_x\,b_x\left[\bar{i}\,\bar{i}\right] + a_x\,b_y\underbrace{\left[\bar{i}\,\bar{j}\right]}_{\bar{k}} + a_x\,b_z\underbrace{\left[\bar{i}\,\bar{k}\right]}_{-\bar{j}} + a_y\,b_x\underbrace{\left[\bar{j}\,\bar{i}\right]}_{-\bar{k}} +$$

$$+ a_y\,b_y\left[\bar{j}\,\bar{j}\right] + a_y\,b_z\left[\bar{j}\,\bar{k}\right] + a_z\,b_x\left[\bar{k}\,\bar{i}\right] + a_z\,b_y\left[\bar{k}\,\bar{j}\right] + a_z\,b_z\left[\bar{k}\,\bar{k}\right].$$

С учетом результатов векторного умножения ортов, приведенных выше, можно записать

$$\overline{a}\times\overline{b}=\left(a_y\, b_z - a_z\, b_y\right)\overline{i}+\left(a_z\, b_x - a_x\, b_z\right)\overline{j}+\left(a_x\, b_y\ - a_y\, b_x\right)\overline{k}$$

или

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

Замечание. Выясним механический смысл векторного произведения. Для этого рассмотрим следующую задачу. Твердое тело имеет одну неподвижную точку O, а к точке M тела приложена сила $\overline{F}$ (рис.2.12). Воздействие силы $\overline{F}$ на тело с неподвижной точкой O характеризуется моментом силы относительно этой точки.

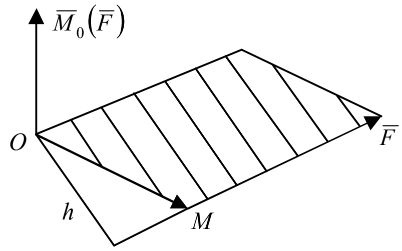

Рис.2.12

Числовая мера момента (его модуль) равна произведению модуля силы на плечо, т.е. на расстояние h от точки O до линии воздействия силы $\overline{F}$. Модуль момента, таким образом, равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{OM}$ и $\overline{F}$. Направлен момент перпендикулярно плоскости, проходящей через точку O и силу $\overline{F}$ в ту сторону, откуда вращение тела вокруг точки O, вызываемое силой $\overline{F}$, видно происходящим против часовой стрелки.

Следовательно, момент силы $\overline{F}$ относительно точки O есть векторное произведение вектора $\overline{OM}$, соединяющего точку O с точкой M приложения силы, и вектора $\overline{F}$, т.е. $\overline{M}_0\left(\overline{F}\right)=O\overline{M}\times\overline{F}$.

2.10. СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ТРЕХ ВЕКТОРОВ

Пусть даны три вектора: $\overline{a},\overline{b}$ и $\overline{c}$. Перемножив два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ векторно, получим новый вектор $\overline{R}=\overline{a}\times\overline{b}$. Этот новый вектор умножим скалярно на вектор $\overline{c}$. В результате получим скаляр, называемый ***смешанным*** или ***векторно-скалярным*** произведением данных векторов. Обозначение смешанного произведения векторов: $\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}$, $\left(\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\right)$ или $\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)$

Установим геометрический смысл смешанного произведения. Пусть векторы $\overline{a},\overline{b}$ и $\overline{c}$ образуют правую тройку векторов. Обозначим $\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=\lambda_1$. Приведем векторы к общему началу O и на трех векторах как на ребрах построим параллелепипед (рис.2.13).

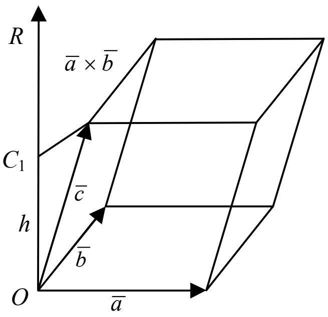

Рис.2.13

Заметим, что его объем $V = S_{осн.}\, h$, где $S_{осн.}$ и h – соответственно площадь основания параллелепипеда и его высота. С учетом определения и свойств векторного и скалярного произведений запишем

$$\left|\bar R\right| = \left|\,\bar a \times \bar b\,\right| = \left|\,\bar a\,\right|\left|\,\bar b\,\right| \sin\left(\widehat{\bar a, \bar b}\right) = S_{осн},$$

$$\bar R \cdot \bar c = \left|\,\bar R\,\right| np_{\bar R}\, \bar c = \left|\,\bar R\,\right| \cdot OC_1 = \left|\,\bar R\,\right| \cdot h = S_{осн}\, h = V.$$

Итак,

$$\lambda_1 = \left(\bar a \times \bar b\right) \cdot \bar c = +V.$$

Рассмотрим смешанное произведение $\left(\bar b \times \bar a\right) \cdot \bar c$. Заметим, что три вектора $\bar b, \bar a, \bar c$ образуют левую тройку векторов. Обозначим

$$\lambda_2 = \left(\bar b \times \bar a\right) \cdot \bar c \;\; ; \;\; \bar R' = \bar b \times \bar a.$$

Тогда

$$\left|\,\bar R'\,\right| = \left|\,\bar b \times \bar a\,\right| = S_{парал.} = \left|\,\bar R\,\right| = S_{осн.},$$

$$\bar R' \cdot \bar c = \left|\,\bar R'\,\right| np_{\bar R'}\, \bar c = \left|\,\bar R'\,\right| \left(-OC\right) = -\left|\,\bar R'\,\right| h = -S_{осн.} h = -V.$$

Итак,

$$\lambda_2 = \left(\bar b \times \bar a\right) \cdot \bar c = -V.$$

Отсюда

$$\lambda_1 = -\lambda_2 \quad \text{или} \quad \left(\bar a \times \bar b\right) \cdot \bar c = -\left(\bar b \times \bar a\right) \cdot \bar c$$

Таким образом, смешанное произведение векторов есть скаляр, модуль которого равен объему параллелепипеда, построенного на данных векторах. Этот скаляр положителен, если векторы образуют правую тройку векторов, и отрицателен в противном случае.

Свойства смешанного произведения следующие:

1. Круговая перестановка сомножителей в смешанном произведении не меняет его величины, так как при круговой перестановке сомножителей правая тройка векторов остается правой, а левая – левой, т.е.

$$\left(\bar a \bar b \bar c\right) = \left(\bar c \bar a \bar b\right) = \left(\bar b \bar c \bar a\right).$$

2. Перестановка двух соседних сомножителей меняет знак смешанного произведения на противоположный, так как правая тройка векторов становится левой, а левая – правой, т.е.

$$\left(\bar a \bar b \bar c\right) = -\left(\bar b \bar a \bar c\right) = -\left(\bar a \bar c \bar b\right) = -\left(\bar c \bar b \bar a\right).$$

3. Пусть смешанное произведение равно нулю, т.е. $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}=0$. Это возможно в следующих случаях:

1) $\bar{c}=\bar{0}$;

2) $\bar{R}=\bar{a}\times\bar{b}=\bar{0}\ \Rightarrow\ \left|\bar{R}\right|=\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|=\left|\bar{a}\right|\left|\bar{b}\right|\sin\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)$.

Отсюда следует, во-первых, что или $\left|\bar{a}\right|=0\Rightarrow\bar{a}=\bar{0}$, или $\left|\bar{b}\right|=0\Rightarrow\bar{b}=\bar{0}$; во-вторых, $\sin\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=0\ \Rightarrow\ \bar{a}\|\bar{b}$, т.е. векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарные.

3. Скалярное произведение векторов $\bar{R}$ и $\bar{c}$ равно нулю, т.е.

$$\bar{R}\cdot\bar{c}=\left|\bar{R}\right|\left|\bar{c}\right|\cos\left(\widehat{\bar{R},\bar{c}}\right)=0.$$

Равенство возможно, если векторы $\bar{R}$ или $\bar{c}$ – нулевые векторы, что уже рассмотрено, или векторы $\bar{R}$ и $\bar{c}$ перпендикуляры.

Из определения векторного произведения $\bar{R}=\bar{a}\times\bar{b}$ следует, что вектор $\bar{R}$ перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Следовательно, вектор $\bar{R}$ должен быть перпендикулярен трем векторам $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, что возможно, только если эти три вектора компланарны.

Таким образом, смешанное произведение обращается в нуль в трех случаях:

а) если один из векторов нулевой;

б) если любые два вектора коллинеарные;

в) если векторы векторам $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ компланарны.

4. Найдем смешанное произведение трех векторов, заданных своими координатами в базисе $\left(\bar{i},\bar{j},\bar{k}\right)$:

$$\bar{a}=\left\{a_x, a_y, a_z\right\}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k};\quad \bar{b}=\left\{b_x, b_y, b_z\right\}=b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k};$$

$$\bar{c}=\left\{c_x, c_y, c_z\right\}=c_x\bar{i}+c_y\bar{j}+c_z\bar{k}.$$

Известно, что векторное произведение определяется с помощью определителя третьего порядка:

$$\bar{R}=\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\left\{\underbrace{\left(a_yb_z-a_zb_y\right)}_{R_x};\underbrace{\left(a_zb_x-a_xb_z\right)}_{R_y};\underbrace{\left(a_xb_y-a_yb_x\right)}_{R_z}\right\}.$$

Скалярное произведение векторов $\bar{R}$ и $\bar{c}$ определяется по правилу

$$\left(\bar{R},\bar{c}\right)=R_xc_x+R_yc_y+R_zc_z.$$

Следовательно,

$$\overline{R}\cdot\overline{c}=\left(a_y b_z-a_z b_y\right)c_x+\left(a_z b_x-a_x b_z\right)c_y+\left(a_x b_y-a_y b_x\right)c_z=$$

$$=\begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Итак,

$$\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (2.21)$$

Пример 2.1. Доказать, что векторы $\overline{a}=\overline{i}+\overline{j}+\lambda\overline{k}$, $\overline{b}=\overline{i}+\overline{j}+\left(\lambda+1\right)\overline{k}$ и $\overline{c}=\overline{i}-\overline{j}+\lambda\overline{k}$ не компланарны при любом значении λ.

Решение. Известно, что три вектора компланарны, если их смешанное произведение равно нулю. Найдем смешанное произведение векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ по (2.21):

$$\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda+1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda+\lambda+1-\lambda-\lambda+\left(\lambda+1\right)-\lambda=2.$$

Так как определитель не равен 0 при любом λ, то и векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ не компланарны при любом λ.

Пример 2.2. Вершинами треугольной пирамиды $ABCD$ являются точки: $A(1;1;1)$, $B(3;-1;4)$, $C(1;5;7)$, $D(-2;2;3)$. Найти:

1) объем пирамиды;

2) площадь треугольника ABD, лежащего в основании пирамиды;

3) угол BAC грани ABC и проекцию ребра AC на сторону основания AB;

4) длину высоты, опущенной из вершины C на основание пирамиды;

Решение. 1. Объем пирамиды, построенной на векторах $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$, составляет одну шестую часть от объема параллелепипеда, построенного на тех же векторах. Используя свойство смешанного произведения векторов, получим

$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\overline{AB}\times\overline{AC}\right)\cdot\overline{AD}\right|.$$

Найдем координаты векторов: $\overline{AB}\,(2;-2{,}3)$, $\overline{AC}\,(0;4;6)$, $\overline{AD}\,(-3;1;2)$. Их смешанное произведение

$$\left(\overline{AB}\times\overline{AC}\right)\cdot\overline{AD}=\begin{vmatrix}2 & -2 & 3\\ 0 & 4 & 6\\ -3 & 1 & 2\end{vmatrix}=76\ .$$

Объем пирамиды $V=\frac{1}{6}\cdot 76=\frac{38}{3}=12\frac{2}{3}(\text{ед}^3)$.

2. Площадь параллелограмма, построенного на двух векторах, исходящих из одной точки, равна модулю их векторного произведения. Площадь треугольника есть половина площади параллелограмма, поэтому площадь основания пирамиды можно найти как половину модуля векторного произведения векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$. Произведем соответствующие вычисления:

$$A\overline{B}\times A\overline{D}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & -2 & 3\\ -3 & 1 & 2\end{vmatrix}=-7\bar{i}-13\bar{j}-4\bar{k}$$

Длина этого вектора

$$\left|\overline{AB}\times\overline{AD}\right|=\sqrt{(-7)^2+(-13)^2+(-4)^2}=\sqrt{234}=3\sqrt{26}.$$

Тогда

$$S_{\text{ABD}}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AD}\right|=\frac{3\sqrt{26}}{2}.$$

3. Угол BAC грани ABC можно рассматривать, как угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, и использовать для его нахождения формулу (2.20):

$$\cos\angle A=\frac{\left(\overline{AB},\overline{AC}\right)}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right|}=\frac{2\cdot 0+(-2)\cdot 4+3\cdot 6}{\sqrt{2^2+(-2)^2+3^2}\sqrt{0^2+4^2+6^2}}=\frac{10}{\sqrt{17\cdot 52}}=\frac{5}{\sqrt{91}};$$

$$\angle A=\arccos\frac{5}{\sqrt{91}}\ .$$

Проекцию ребра AC на сторону основания AB найдем по (2.19)

$$np_{\overline{AB}}\ \overline{AC}=\frac{\left(\overline{AB},\overline{AC}\right)}{\left|\overline{AB}\right|}=\frac{10}{\sqrt{52}}=\frac{5}{\sqrt{13}}.$$

4. Как известно, объем пирамиды, равен одной трети произведения площади ее основания на высоту, т.е.

$$V=\frac{1}{3}S_{\text{ABD}}\ h;$$

$$h=\frac{3V}{S_{ABD}}=\frac{3\cdot 38\cdot 2}{3\cdot 3\sqrt{26}}=\frac{76}{3\sqrt{26}}\ .$$

Вопросы для самопроверки

1. Что такое вектор? Какие существуют линейные операции над векторами?

2. Как определяется базис и координаты вектора в базисе?

3. Какой базис называется ортонормированным?

4. Как осуществляются арифметические операции над векторами, заданными своими координатами?

5. Каков геометрический смысл координат вектора в ортонормированном базисе?

6. Что называется проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось l?

7. Как определяется скалярное произведение двух векторов?

8. Каков физический смысл скалярного произведения векторов?

9. Каковы основные свойства скалярного произведения?

10. При каком условии скалярное произведение векторов обращается в нуль?

11. Что называется векторным произведением векторов?

12. При каком условии векторное произведение векторов обращается в нуль?

13. Каков геометрический смысл модуля векторного произведения векторов?

14. Каков механический смысл векторного произведения векторов?

15. Каковы основные свойства векторного произведения?

16. Что называется смешанным произведением векторов?

17. Какие основные свойства смешанного произведения вы знаете?

18. Каков геометрический смысл смешанного произведения векторов?

19. При каких условиях смешанное произведение векторов обращается в нуль?

20. Как определить, могут ли три вектора образовывать базис, если они заданы своими координатами в ортонормированном базисе?

Тесты

№ п/п	Вопрос	Варианты ответа
1	Даны векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Площадь параллелограмма, построенного на этих векторах как на сторонах, равна	1. $S=\frac{1}{2}\lvert\overline{a}\times\overline{b}\rvert$ 2. $S=\lvert\overline{a}\times\overline{b}\rvert$ 3. $S=\frac{1}{2}\lvert\overline{a}\cdot\overline{b}\rvert$ 4. $S=\lvert\overline{a}\cdot\overline{b}\rvert$

№ п/п	Вопрос	Варианты ответа
2	Каким из перечисленных свойств не обладает векторное произведение двух ненулевых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$?	1. $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\times\overline{c}=\overline{a}\times\overline{c}+\overline{b}\times\overline{c}$ 2. $\overline{a}\times\overline{b}=\overline{b}\times\overline{a}$ 3. $\overline{a}\times\overline{b}\perp\overline{a}$ *и* $\overline{a}\times\overline{b}\perp\overline{b}$ 4. $\overline{a}\times\overline{b}=\overline{0}\Leftrightarrow\overline{a}\Vert\overline{b}$
3	Если $\overline{a}=\{0;4;3\}$, $\vec{b}=\{0;4;3\}$, то чему равно $\left\|3\vec{a}+\vec{b}\right\|$?	1. 14 2. 5 3. $5\sqrt{14}$ 4. 11
4	$\left(\overline{i}\times\left(2\overline{j}+3\overline{k}-5\overline{i}\right)\right)\cdot\overline{j}=$	1. $\overline{i}$ 2. $\overline{j}$ 3. 0 4. –3
5	Векторы $\begin{cases}\vec{a}=\{0;1;1\}, \quad \vec{b}=\left\{\frac{1}{3};-2;-\frac{1}{3}\right\}, \\ \vec{c}=\{-2;12\,;2\}\end{cases}$	1. Равны 2. Компланарные 3. Коллинеарные 4. Единичные
6	Направляющий косинус $\cos\gamma=$ $=\cos\left(\vec{a}\,\hat{,}\,Oz\right)$ радиуса-вектора точки $M_0(4;\,0;\,3)$ равен	1. 4 2. 4/5 3. 3/5 4. 0
7	Указать верную формулу	1. $\vec{i}\times\vec{i}=1$ 2. $\vec{i}\times\vec{k}=\vec{j}$ 3. $\vec{k}\times\vec{j}=\vec{i}$ 4. $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$
8	Даны три вектора $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, причем векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарные. Указать, какое из предложенных соотношений неверно.	1. $(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b}=0$ 2. $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ 3. $\vec{a}\times\vec{b}=0$ 4. $\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$

Окончание таблицы

№ п/п	Вопрос	Варианты ответа
9	Площадь треугольника, образованного векторами $\vec{a} = \{1;\ 2;\ 0\}$ и $\vec{b} = \{0;\ 2;\ 1\}$, равна	1. 1 2. 2 3. 3 4. 3/2
10	Даны векторы $\overline{a} = \{1;\ 2;\ 3\}$ и $\overline{b} = \{-1{,}5{,}1\}$. Тогда проекция вектора $\overline{c} = [\overline{a}, \overline{b}]$ на ось Ox равна	1. −4 2. 4 3. 13 4. −13

Глава 3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

3.1. ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Рассмотрим декартову систему координат в пространстве и точку $M(x, y, z)$ в ней. Введем вектор $\overline{OM}$ (рис.3.1).

Определение. Вектор, начало которого совпадает с началом координат, а концом его является точка $M(x, y, z)$, называется ***радиусом-вектором*** точки $M(x, y, z)$ и обозначается $\overline{OM} = \bar{r}$.

Заметим, что $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + zk \Leftrightarrow \bar{r} = \{x, y, z\}$.

Таким образом, задание точки равносильно заданию ее радиуса – вектора.

Задача 1. Найти расстояние между двумя точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$.

Решение. Очевидно, что расстояние между точками A и B есть длина вектора $\overline{AB}$. По правилу треугольника

$$\overline{AB} = \bar{r}_B - \bar{r}_A = \{ (x_2 - x_1); (y_2 - y_1); (z_2 - z_1) \}.$$

Тогда,

$$d = \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} .$$

Задача 2. Найти площадь треугольника по координатам его вершин $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ и $C(x_3, y_3, z_3)$.

Решение. Площадь треугольника равна половине площади параллелограмма. Введем векторы $\overline{AC}$ и $\overline{AB}$. По правилу треугольника

$$\overline{AB} = \bar{r}_B - \bar{r}_A ; \quad \overline{AC} = \bar{r}_C - \bar{r}_A .$$

Отметим, что

$$\bar{r}_A = \{ x_1, y_1, z_1 \}; \bar{r}_B = \{ x_2, y_2, z_2 \}; \bar{r}_C = \{ x_3, y_3, z_3 \};$$

$$S = \left| \overline{AB} \times \overline{AC} \right| = \left| (\bar{r}_B - \bar{r}_A) \times (\bar{r}_C - \bar{r}_A) \right|$$

или с учетом правила действия над векторами, заданными своими координатами,

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}.$$

Вычислим векторное произведение и тем самым найдем вектор $\overline{AB} \times \overline{AC}$, а затем его длину, т.е. $\left| \overline{AB} \times \overline{AC} \right| = S_{\text{парал}}$. Тогда

$$S_{\text{треуг}} = \frac{1}{2} S_{\text{парал}} = \left| \overline{AB} \times \overline{AC} \right| .$$

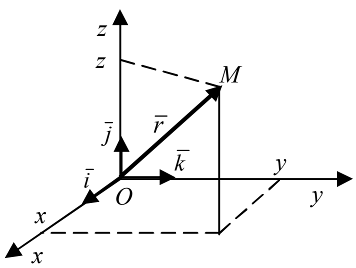

Рис.3.1

Пример 3.1. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(0;0;1)$, $B(2;3;5)$, $C(6;2;3)$.

Решение. Найдем $\overline{AB}=\{\,2;3;4\,\}$, $\overline{AC}=\{\,6;2;2\,\}$. Чтобы найти $S_{\Delta ABC}=0{,}5\,|[\overline{AB},\overline{AC}]|$, вычислим

$$[\overline{AB}\,,\,\overline{AC}]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & 3 & 4\\ 6 & 2 & 2\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & 2\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}2 & 4\\ 6 & 2\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 6 & 2\end{vmatrix}=-2\bar{i}+20\bar{j}-14\bar{k}\,;$$

$$|[\overline{AB},\overline{AC}]|=\sqrt{(-2)^2+20^2+(-14)^2}=\sqrt{4+400+196}=\sqrt{600}=10\sqrt{6}\,.$$

Тогда $S_{\Delta ABC}=5\sqrt{6}$.

Задача 3. Даны две точки $A(x_A\,,y_A\,,z_A)$ и $B(x_B\,,y_B\,,z_B)$. Найти координаты точки $C(x_C\,,y_C\,,z_C)$, лежащей на отрезке AB и делящей длину отрезка в данном отношении: $|AC|:|CB|=\lambda$ (рис.3.2).

Решение. Введем векторы $\overline{AC}$ и $\overline{CB}$:

$$\overline{AC}=\bar{r}_C-\bar{r}_A\ ;\ \overline{CB}=\bar{r}_B-\bar{r}_C$$

Эти векторы сонаправлены, т.е. $\overline{AC}\uparrow\uparrow\overline{CB}\ \Rightarrow\ \overline{AC}=\alpha\,\overline{CB}$. Заметим, что скаляр $\alpha>0$ и $\alpha=\left|\overline{AC}\right|/\left|\overline{CB}\right|$, т.е. $\alpha=\lambda$.

Итак, имеем

$$\bar{r}_C-\bar{r}_A=\lambda(\bar{r}_B-\bar{r}_C)\ \Rightarrow\ \bar{r}_C(1+\lambda)=\bar{r}_A+\lambda\bar{r}_B\,.$$

Окончательно

$$\bar{r}_C=\frac{\bar{r}_A+\lambda\,\bar{r}_B}{1+\lambda}$$

или

$$x_C=\frac{x_A+\lambda\,x_B}{1+\lambda};y_C=\frac{y_A+\lambda\,y_B}{1+\lambda};z_C=\frac{z_A+\lambda\,z_B}{1+\lambda}.$$

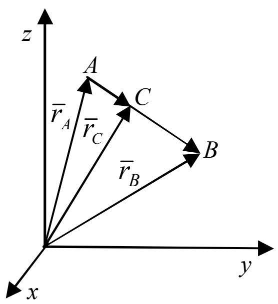

Рис.3.2

Замечание. Если точка C делит отрезок AB пополам, то формулы имеют вид

$$\bar{r}_C=\frac{\bar{r}_A+\bar{r}_B}{2}\,,$$

или

$$x_C=\frac{x_A+x_B}{2};y_C=\frac{y_A+y_B}{2};z_C=\frac{z_A+z_B}{2}.$$

3.2. СВЯЗКА ПЛОСКОСТЕЙ

Рассмотрим плоскость α. Пусть эта плоскость проходит через заданную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{N} = \{A, B, C\}$.

Возьмем любую точку $M(x, y, z)$, принадлежащую плоскости α. Вектор $\overline{M_0M}$ принадлежит плоскости, а, следовательно, вектор $\overline{N}$ перпендикулярен вектору $\overline{M_0M}$. Известно, что если векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю:

$$\overline{M_0M} \cdot \overline{N} = 0$$

или

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (3.1)$$

Если в уравнении (3.1) изменять проекции вектора $\overline{N}$, то будем получать различные плоскости, проходящие через точку M_0. Поэтому уравнение (3.1) называют связкой плоскостей.

3.3. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ

Теорема. Уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (3.2)$$

где A, B и C не равны нулю одновременно, т.е. $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, есть уравнение плоскости в некоторой декартовой системе координат.

Доказательство. Уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ имеет бесконечное множество решений. Выберем три числа x_0, y_0 и z_0 как одно из решений. Получим тождество

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \equiv 0.$$

Из тождества найдем

$$D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0). \qquad (3.3)$$

Подставляя (3.3) в (3.2), получим

$$Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0$$

или

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

т.е. уравнение связки плоскостей (3.1).

Таким образом, уравнение (3.2) определяет плоскость в пространстве. Три числа x_0, y_0 и z_0, обратившие уравнение (3.2) в тождество, – координаты точки, принадлежащей плоскости с уравнением (3.2). Числа A, B и C – проекции вектора, перпендикулярного плоскости с уравнением (3.2).

Вектор $\overline{N} = \{A, B, C\}$, перпендикулярный плоскости, называют ***вектором нормали*** к плоскости или просто ***нормалью***.

3.4. ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОСТИ

Пусть плоскость α задана уравнением (3.2). Выясним особенности расположения плоскости α относительно осей координат, если некоторые коэффициенты этого уравнения и свободный член обращаются в нуль.

1. Пусть $D = 0$. Тогда уравнение (3.2) примет вид

$$Ax + By + Cz = 0 .$$

Этому уравнению удовлетворяют координаты $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$, т.е. точка $O(0,0,0)$ – начало системы координат.

Таким образом, если в уравнении плоскости отсутствует свободный член, то плоскость проходит через начало координат.

2. Пусть $A = 0$. Тогда уравнение (3.2) примет вид

$$By + Cz + D = 0 . \qquad (3.4)$$

Вектор нормали плоскости (3.4) $\overline{N} = \{\,0, B, C\,\}$.

Проекция вектора $\overline{N}$ на ось Ox равна нулю. Следовательно, вектор $\overline{N} \perp Ox$. Плоскость с уравнением (3.4) параллельна оси Ox.

3. Пусть $A = 0$ и $B = 0$. Тогда уравнение (3.2) примет вид

$$Cz + D = 0 . \qquad (3.5).$$

Вектор нормали плоскости (3.5) $\overline{N} = \{\,0, 0, C\,\}$. Проекции вектора $\overline{N}$ на оси Ox и Oy равны нулю. Следовательно, вектор $\overline{N}$ одновременно перпендикулярен осям Ox и Oy. Тогда плоскость с уравнением (3.5) параллельна осям координат Ox и Oy.

Таким образом, если в общем уравнении плоскости отсутствует одна или две переменных, то плоскость параллельна той оси координат, переменная которой отсутствует.

Пример 3.2. Плоскость имеет вид $3x + 4y = 0$. Определить ее положение в пространстве.

Решение. Вектор нормали этой плоскости $\overline{N} = \{3, 4, 0\}$ и, следовательно, плоскость параллельна оси Oz. Плоскость также проходит через начало координат, так как свободный член равен нулю.

Общий вывод: плоскость проходит через ось Oz.

Пример 3.3. Написать уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и точку $M(2;1;5)$.

Решение. Уравнение плоскости, проходящей через ось Oz, имеет вид $Ax+By=0$. Коэффициенты A и B найдем из условия, что плоскость проходит через заданную точку $M(2;1;5)$:

$$2A+B=0 \;\Rightarrow\; A=B/2.$$

Полагая $B=-2$, находим $A=1$. Таким образом, уравнение искомой плоскости $x-2y=0$.

3.5. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ТРИ ЗАДАННЫЕ ТОЧКИ

Пусть плоскость проходит через точки $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ и $C(x_3,y_3,z_3)$.

Возьмем любую точку $M(x,y,z)$ на плоскости и введем три вектора (рис.3.3):

$$\overline{AM}=\{x-x_1, y-y_1, z-z_1\},$$

$$\overline{AB}=\{x_2-x_1\,,\, y_2-y_1\,,\, z_2-z_1\};$$

$$\overline{AC}=\{x_3-x_1\,,\, y_3-y_1\,,\, z_3-z_1\}.$$

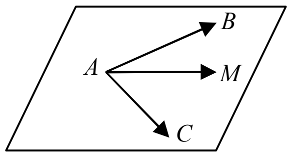

Рис.3.3

Векторы лежат в одной плоскости, т.е. компланарны. Следовательно, их смешанное произведение равно нулю:

$$\left(\overline{AM}\;\overline{AB}\;\overline{AC}\right)=0$$

или

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (3.6)$$

Уравнение (3.6) называют уравнением плоскости, проходящей через три данные точки.

3.6. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ В ОТРЕЗКАХ

Пусть плоскость отсекает на осях декартовой системы координат отрезки a, b, c. Это означает, что плоскость пересекает оси координат в точках $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, С$(0, 0, c)$ причем $a, b, c \neq 0$ или плоскость проходит через данные три точки (рис.3.4). Для получения уравнения плоскости воспользуемся уравнением (3.6). Тогда

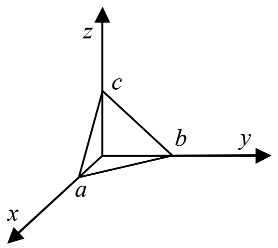

Рис.3.4

$$\begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ 0-a & b-0 & 0-0 \\ 0-a & 0-0 & c-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} =$$

$$= (x-a)bc + yac + xbc = 0.$$

Отсюда

$$xbc + yac + xbc = abc$$

Умножая последнее уравнение на дробь $1/(abc)$, получим

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (3.7)$$

Уравнение (3.7) называется уравнением плоскости в отрезках.

Пример 3.4. Найти отрезки, отсекаемые плоскостью $4x - y + 2z - 12 = 0$ на осях координат.

Решение. Данное общее уравнение плоскости приведем к уравнению в отрезках. Для этого перенесем свободный член в правую часть равенства и умножим на дробь $1/12$. Получим

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-12} + \frac{z}{6} = 1.$$

Из полученного уравнения следует, что на оси Ox плоскость отсекает отрезок, равный 3 единицам, на отрицательной полуоси Oy отрезок, равный 12 единицам, а на оси Oz – отрезок, равный 6.

3.7. УГОЛ МЕЖДУ ДВУМЯ ПЛОСКОСТЯМИ. УСЛОВИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ

Пусть плоскости α_1 и α_2 (рис.3.5) заданы уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0;$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Выпишем их нормали:

$$\overline{N}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}; \overline{N}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}.$$

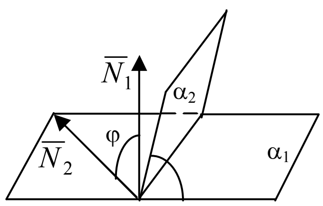

Рис.3.5

Определение. Углом между двумя плоскостями называется любой из смежных двугранных углов, образованных этими плоскостями.

Один из этих двугранных углов равен углу φ между векторами $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$. По определению угла между двумя векторами найдем

$$\cos\varphi = \cos\left(\overline{N}_1 \hat{,} \overline{N}_2\right) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^{\ 2} + B_1^{\ 2} + C_1^{\ 2}}\sqrt{A_2^{\ 2} + B_2^{\ 2} + C_2^{\ 2}}} .$$

Если плоскости параллельны, то их нормали коллинеарные. Следовательно, проекции пропорциональны:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} .$$

Если плоскости перпендикулярны, то перпендикулярны и их нормали. Следовательно, $\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2 = 0$ или $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

3.8. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ

Пусть требуется найти расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости α с уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Нормаль к плоскости $\overline{N} = \{A, B, C\}$.

Опустим из точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на плоскость перпендикуляр и обозначим точку его пересечения с плоскостью $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Введем в рассмотрение вектор $\overline{M_0M_1} = \{\,(x_1 - x_0), (y_1 - y_0), (z_1 - z_0)\,\}$.

Найдем проекцию вектора $\overline{M_0M_1}$ на ось, направление которой совпадает с направлением вектора $\overline{N}$:

$$np_{\overline{N}}\ \overline{M_0M_1} = \frac{\overline{M_0M_1} \cdot \overline{N}}{\left|\overline{N}\right|} = \frac{A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

$$= -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax_1 + By_1 + Cz_1)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} .$$

Заметим, что искомое расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости

$$d = \left|np_{\overline{N}}\overline{M_0M_1}\right| = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax_1 + By_1 + Cz_1)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right| . \qquad (3.8)$$

Точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ принадлежит плоскости α и, следовательно, $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \equiv 0$. Отсюда

$$D = -(Ax_1 + By_1 + Cz). \qquad (3.9)$$

Подставляя (3.9) в (3.8), окончательно получим

$$d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right| . \qquad (3.10)$$

Пример 3.5. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $P(2;1;3)$ и параллельной плоскости, проходящей через три точки: $M_1(1;-1;2)$, $M_2(1;3;1)$ и $M_3(2;1;5)$.

Решение. Искомой плоскости принадлежат векторы $\overline{M_1M_2}=\{0;4;-1\}$, $\overline{M_1M_3}=\{1;2;3\}$. Вектор $\overline{PM}=\{x-2,y-1,z-3\}$ параллелен данной плоскости, где $M(x,y,z)$ – любая точка плоскости. В силу компланарности векторов $\overline{PM}$, $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_1M_3}$ их смешанное произведение равно нулю:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0.$$

Тогда $14x-y-4z-15=0$ – уравнение искомой плоскости.

Пример 3.6. Вычислить площадь треугольника, который образуют прямые пересечения плоскости $4x+3y+6z-12=0$ с координатными плоскостями.

Решение. Найдем уравнение заданной плоскости в отрезках по формуле (3.4):

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{2}=1$$

и определим координаты точек пересечения плоскости с осями координат: $A(3;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;2)$.

Искомую площадь можно найти по формуле

$$S_{\Delta ABC}=0{,}5\,|[\overline{AC},\overline{AB}]|,$$

где $\overline{AC}=\{-3;0;2\}$, $\overline{AB}=\{-3;4;0\}$.

Далее вычислим векторное произведение и его модуль:

$$\left[\overline{AC},\overline{AB}\right]=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -3 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 0 \end{vmatrix}=-8\bar{i}-6\bar{j}-12\bar{k}.$$

Итак,

$$S_{\Delta ABC}=0{,}5\sqrt{(-8)^2+(-6)^2+(-12)^2}=\sqrt{61}.$$

3.9. КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ ЛИНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

На прямой l заданы точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектор $\overline{S} = \{m, n, p\}$, параллельный прямой l (рис.3.6).

Определение. Ненулевой вектор $\overline{S}$, параллельный прямой l, называется ***направляющим*** вектором прямой.

Возьмем на прямой произвольную точку $M(x, y, z)$ и рассмотрим вектор $\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$.

Векторы $\overline{S}$ и $\overline{M_0M}$ коллинеарны. Следовательно,

$$\overline{M_0M} = t\overline{S}, \tag{3.11}$$

где t – скаляр.

Уравнение (3.11) есть уравнение прямой линии в векторной форме. Из равенства векторов следует равенство их проекций, т.е.

$$\begin{cases} x - x_0 = tm; \\ y - y_0 = tn; \\ z - z_0 = tp \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x_0 + tm; \\ y = y_0 + tn; \\ z = z_0 + tp. \end{cases} \tag{3.12}$$

Скаляр t в уравнениях (3.12) играет роль переменного параметра. При изменении параметра t точка M с координатами, определяемыми по формулам (3.12), перемещается по прямой линии l.

Уравнения (3.12) называются ***параметрическими уравнениями*** прямой.

Из коллинеарности векторов $\overline{S}$ и $\overline{M_0M}$ следует пропорциональность их координат:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \tag{3.13}$$

Уравнения (3.13) называют ***каноническими уравнениями*** прямой или уравнениями прямой в виде отношений.

Замечание **1.** Так как вектор $\overline{S}$ параллелен прямой l, то направляющие косинусы вектора $\overline{S}$ можно принять за направляющие косинусы прямой:

$$\cos\alpha = \frac{m}{\pm\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}; \quad \cos\beta = \frac{n}{\pm\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{p}{\pm\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

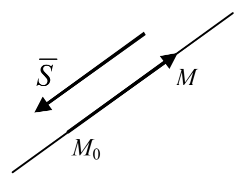

Рис.3.6

***Замечание* 2.** Канонические уравнения прямой (3.13) можно записать в виде системы двух уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}; \\ \dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}. \end{cases}$$

Первое из уравнений системы определяет плоскость, параллельную оси Oz, а второе уравнение системы определяет плоскость, параллельную оси Ox.

Обе плоскости проходят через рассматриваемую прямую линию, так как любая точка прямой удовлетворяет каждому из уравнений плоскости. Эти плоскости проецируют прямую линию на координатные плоскости xOy и yOz.

Канонические уравнения прямой линии определяют прямую как линию пересечения плоскостей, проецирующих эту прямую на координатные плоскости.

***Замечание* 3.** В канонических уравнениях прямой числа m, n и p одновременно в нуль обращаться не могут, так как направляющий вектор прямой линии $\overline{S} \neq \overline{0}$. Некоторые же из этих чисел могут быть нулями. Например, прямая линия с уравнениями

$$\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{0}$$

перпендикулярна осям координат Ox и Oz, что следует из задания ее направляющего вектора: $\overline{S}=\{\,0, n, 0\,\}$.

Канонические уравнения прямой линии равносильны системе двух уравнений:

$$\begin{cases} x-x_0=0 \\ z-z_0=0 \end{cases}$$

Первое из этих уравнений определяет плоскость, параллельную осям координат Oy и Oz, а второе – плоскость, параллельную осям координат Oy и Ox.

Рассмотренные одновременно уравнения определяют прямую как линию пересечения плоскостей.

3.10. ДРУГИЕ ФОРМЫ ЗАПИСИ УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ ЛИНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Уравнения прямой, проходящей через две данные точки. Даны две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Требуется найти уравнения прямой, проходящей через эти точки (рис.3.7).

Рассмотрим векторы: $\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\}$ и $\overline{M_1M} = \{x - x_1;\ y - y_1;\ z - z_1\}$, где $M(x,y,z)$ – произвольная точка на искомой прямой линии.

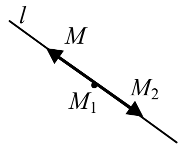

Рис.3.7

Векторы $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_1M}$ коллинеарны, а потому их проекции пропорциональны:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (3.14)$$

Уравнения (3.14) называют уравнениями прямой, проходящей через две данные точки.

Прямая как линия пересечения двух плоскостей. Пусть даны две непараллельные плоскости:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{aligned} \qquad (3.15)$$

Рассмотренные совместно уравнения (3.15) определяют прямую как линию пересечения двух плоскостей. Для перехода к каноническим уравнениям прямой необходимо знать точку, принадлежащую этой прямой, и ее направляющий вектор.

Для нахождения точки, принадлежащей прямой, надо решить систему двух уравнений с тремя неизвестными: координатами x, y и z точки. Такая система имеет бесконечно много решений.

Одну из координат, например x, можно выбрать произвольно и, подставив выбранное значение x в систему, далее решать систему двух уравнений с двумя неизвестными y и z.

Направляющий вектор прямой найдем по формуле

$$\overline{S} = \left[\overline{N_1} \times \overline{N_2}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix},$$

где $\overline{N_1}$ и $\overline{N_2}$ – нормальные векторы плоскостей, определяемых уравнениями (3.15). Вектор $\overline{S}$ перпендикулярен векторам $\overline{N_1}$ и $\overline{N_2}$. Следовательно, он параллелен обеим данным плоскостям и потому параллелен линии пересечения этих плоскостей.

Пример 3.7. Прямая (рис.3.8) задана как линия пересечения плоскостей $x-2y+3z+1=0$ и $2x + y - 4z - 8 = 0$. Составить ее канонические и параметрические уравнения.

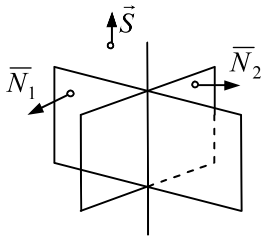

Рис.3.8

Решение. Найдем направляющий вектор $\overline{S}$, параллельный каждой из плоскостей. Следовательно, $\overline{S} \perp \overline{N_1}$ и $\overline{S} \perp \overline{N_2}$, где $\overline{N_1}$ и $\overline{N_2}$ – векторы нормалей.

Вектор $\overline{S}$ можно найти по формуле

$$\overline{S} = \lambda\left[\overline{N_1}, \overline{N_2}\right] = \lambda \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \lambda\left(5\overline{i} + 10\overline{j} + 5\overline{k}\right).$$

Полагая $\lambda = 1/5$, получим $\overline{S} = \{1,\ 2,\ 1\}$. Для нахождения координат точки, принадлежащей линии пересечения плоскостей, необходимо решить систему вида

$$\begin{cases} x_0 - 2y_0 + 3z_0 + 1 = 0; \\ 2x_0 + y_0 - 4z_0 - 8 = 0. \end{cases}$$

Исключая из полученной системы, например y_0, найдем

$$5x_0 - 5z_0 - 15 = 0; \quad x_0 = 3 + z_0.$$

Полагая $z_0 = 0$, получим $x_0 = 3$, $y_0 = 2$.

Таким образом, искомая точка $M_0(3;\ 2;\ 0)$. Канонические и параметрические уравнения прямой линии имеют вид

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1}; \qquad \begin{cases} x = t + 3; \\ y = 2t + 2; \\ z = t + 1. \end{cases}$$

3.11. УГОЛ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРЯМЫМИ В ПРОСТРАНСТВЕ. УСЛОВИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ДВУХ ПРЯМЫХ

Пусть прямые линии заданы каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}; \quad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$

Направляющие векторы этих прямых: $\overline{S_1} = \{m_1, n_1, p_1\}$ и $\overline{S_2} = \{m_2, n_2, p_2\}$.

Определение. Углом между двумя прямыми в пространстве называется угол между их направляющими векторами.

Косинус угла между двумя векторами

$$\cos\varphi = \cos\left(\overline{S_1}, \hat{\ } \overline{S_2}\right) = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Если прямые параллельны, то коллинеарны и их направляющие векторы, т.е . $\overline{S_1} \| \overline{S_2}$ Следовательно, проекции векторов $\overline{S_1}$ и $\overline{S_2}$ пропорциональны:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2} \text{ (\textbf{\textit{условие параллельности}} прямых).}$$

Если прямые перпендикулярны, то перпендикулярны и их направляющие векторы $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$. Следовательно, равно нулю их скалярное произведение:

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0 \text{ (\textbf{\textit{условие перпендикулярности}} прямых).}$$

Пример 3.8. В плоскости yOz найти уравнения прямой линии, проходящей через начало координат и перпендикулярной прямой с уравнениями

$$\frac{x-2}{16}=\frac{y}{-3}=\frac{z+1}{3}.$$

Решение. Искомая прямая лежит в плоскости yOz. Направляющий вектор прямой $\overline{S}\perp\overline{i}$, где $\overline{i}=\{1;0;0\}$ – базисный орт. По условию $\overline{S}\perp\overline{S_1}$ (рис.3.9) и $\overline{S_1}=\{16;-3;3\}$. Тогда направляющий вектор $\overline{S}$ коллинеарен вектору $\left[\overline{S_1},\overline{i}\right]$ и, следовательно, $\overline{S}=\lambda\left[\overline{S_1},\overline{i}\right]$.

Итак,

$$\overline{S}=\lambda\left[\overline{S_1},\overline{i}\right]=\lambda\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 16 & -3 & 3\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=\lambda\left(3\overline{j}+3\overline{k}\right)=\lambda\{0;3;3\}.$$

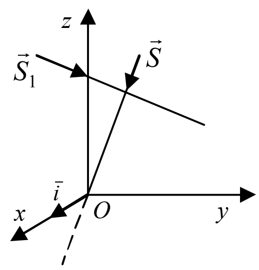

Рис.3.9

Выбирая $\lambda=1/3$, найдем вектор $\overline{S}=\{0;1;1\}$. Так как искомая прямая линия проходит через начало координат, то ее канонические уравнения имеют вид

$$\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}.$$

Пример 3.9. Определить уравнение плоскости, проходящей через точку $P(8;2;-1)$ и прямую

$$\frac{x-5}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{1}.$$

Решение. Во-первых, в искомой плоскости лежит прямая, т.е. плоскости принадлежит точка $M_0(5;1;-3)$ и направляющий вектор прямой $\overline{S}=\{2;2;1\}$.

Во-вторых, искомая плоскость проходит через точку $P(8;2;-1)$ и, следовательно, ей принадлежит вектор $\overline{M_0P}=\{3;1;2\}$. Третий вектор, принадлежащий искомой плоскости, например, соединяет точку M_0 с произвольной точкой $M(x,y,z)$ плоскости: $\overline{M_0M}=\{x-5,y-1,z+3\}$.

В силу компланарности векторов $\overline{S}$, $\overline{M_0P}$, $\overline{M_0M}$ их смешанное произведение равно нулю:

$$\begin{vmatrix} x-5 & y-1 & z+3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad -3(x-5)+y-1+4(z+3)=0.$$

Следовательно, $3x - y - 4z - 26 = 0$ – уравнение искомой плоскости.

3.12. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАССТОЯНИЯ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ

Требуется найти расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до прямой (рис.3.10), уравнения которой

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$$

Прямая линия проходит через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Вектор $\bar{S}_1 = \{m_1, n_1, p_1\}$– направляющий вектор прямой. Опустим из точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикуляр на прямую линию. Длина этого перпендикуляра есть искомое расстояние d от точки M_0 до прямой линии.

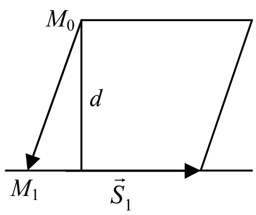

Рис.3.10

Рассмотрим вектор $\overline{M_0M}_1 = \{x_1 - x_0;\ y_1 - y_0;\ z_1 - z_0\}$. Вектор $\bar{S}_1 = \{m_1, n_1, p_1\}$ перенесем параллельно самому себе так, чтобы его началом была точка M_1 на прямой. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{M_0M}_1$ и $\bar{S}_1$, можно найти по формуле

$$S_{\text{парал.}} = \left|\bar{S}_1 \times \overline{M_0M}_1\right|.$$

С другой стороны, площадь параллелограмма можно определить как произведение основания на высоту:

$$S_{\text{парал}} = \left|\ \bar{S}_1\ \right| d,$$

так как искомое расстояние d для параллелограмма является высотой.

Приравнивая эти два результата, получим

$$d = \frac{\left|\bar{S}_1 \times \overline{M_0M_1}\right|}{\left|\ \bar{S}_1\ \right|}.$$

Пример 3.10. Найти расстояние от точки $M_1(2; -1; 5)$ до прямой линии с уравнениями

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-1}.$$

Решение. Воспользуемся формулой расстояния от точки до прямой линии:

$$\overline{M_0M_1} = \{-1;\, 0;\, 5\};$$

$$\left[\overline{M_0M_1}, \overline{S}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -15\bar{i} + 9\bar{j} - 3\bar{k};$$

$$\left|\left[\overline{M_0M_1}, \overline{S}\right]\right| = \sqrt{(-15)^2 + 9^2 + (-3)^2} = \sqrt{315}; \quad |\overline{S}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}.$$

Искомое расстояние

$$d = \frac{\sqrt{315}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{45}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{10}.$$

3.13. УСЛОВИЕ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ДВУХ ПРЯМЫХ ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ (УСЛОВИЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ДВУХ ПРЯМЫХ)

Пусть прямые линии заданы уравнениями

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}; \qquad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Их направляющие векторы $\overline{S}_1 = \{m_1, n_1, p_1\}$ и $\overline{S}_2 = \{m_2, n_2, p_2\}$. Прямые линии проходят через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Введем вектор $\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$. Векторы $\overline{S}_1, \overline{S}_2$ и $\overline{M_1M_2}$ компланарны и, следовательно, прямые лежат в одной плоскости. Условие компланарности векторов:

$$\left(\overline{M_1M_2}\ \overline{S}_1\ \overline{S}_2\right) = 0$$

или

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.16}$$

Известно, что, если векторы коллинеарны, то их проекции пропорциональны.

Если проекции векторов $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ не пропорциональны, то условие (3.16) есть условие пересечения двух прямых в пространстве.

3.14. УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ. УСЛОВИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Пусть прямая l и плоскость α заданы соответственно уравнениями

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p};$$

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Направляющий вектор прямой $\overline{S}=\{m\,,n\,,p\}$ и нормаль к плоскости $\overline{N}=\{m\,,n\,,p\}$.

Определение. Углом между прямой и плоскостью называется угол φ между прямой и проекцией прямой на плоскость α.

Приведем векторы $\overline{S}$ и $\overline{N}$ к общему началу O, совпадающему с точкой пересечения прямой с плоскостью (рис.3.11).

Угол между векторами $\overline{S}$ и $\overline{N}$

$$\cos\left(\overline{S}\,\hat{,}\,\overline{N}\right)=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Заметим, что

$$\cos\left(\overline{S}\,\hat{,}\,\overline{N}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi,$$

причем из определения следует, что $0\le\varphi\le\pi$.

Окончательно имеем

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

Если прямая линия l параллельна плоскости α, то $\overline{S}\perp\overline{N}$.

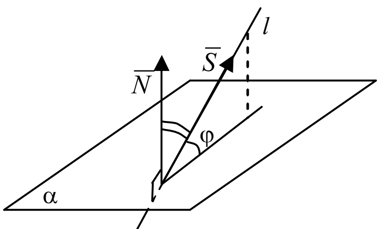

Рис.3.11

Следовательно, $\left(\overline{S}\,\overline{N}\right)=0$ или $Am+Bn+Cp=0$. Если прямая линия l перпендикулярна плоскости α, то вектор $\overline{S}$ коллинеарен вектору $\overline{N}$. Тогда

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$$

3.15. ТОЧКА ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПРЯМОЙ ЛИНИИ С ПЛОСКОСТЬЮ

Прямая l и плоскость α заданы уравнениями соответственно

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}; \tag{3.17}$$

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{3.18}$$

Прямая линия проходит через точку $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ и ее направляющий вектор $\overline{S}=\{\,m\,,n\,,\,p\,\}$. Нормаль к плоскости $\overline{N}=\{\,A\,,B\,,C\,\}$.

Перейдем от канонических уравнений данной прямой линии (3.17) к параметрическим уравнениям:

$$\begin{cases} x=x_0+t\,m\,; \\ y=y_0+t\,n\,; \\ z=z_0+t\,p\,. \end{cases} \tag{3.19}$$

Найдем значение параметра t, при котором точка, с координатами (3.19), принадлежит как прямой l, так и плоскости α. Для этого подставим (3.19) в формулу (3.18). Получим

$$A(x_0+t\,m)+B(y_0+t\,n)+C(z_0+t\,p)+D\equiv 0$$

или

$$(Am+Bn+Cp)t=-(Ax_0+By_0+Cz_0+D). \tag{3.20}$$

Исследуем полученное соотношение (3.20).

1. Пусть $Am+Bn+Cp\neq 0$. Прямая и плоскость не параллельны, т.е. пересекаются. Из формулы (3.20) найдем единственное значение параметра

$$t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Am+Bn+Cp}.$$

Подставив это значение в формулы (3.19), получим координаты точки пересечения прямой с плоскостью.

2. Пусть

$$Am+Bn+Cp=0\,;$$

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0.$$

В этом случае прямая и плоскость параллельны. Однако, точка $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$, принадлежащая прямой, не принадлежит плоскости. Следовательно, прямая и плоскость не имеют ни одной общей точки, т.е. не пересекаются.

3. Пусть

$$Am+Bn+Cp=0;$$

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0.$$

В этом случае прямая линия и плоскость параллельны. Точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, принадлежащая прямой, принадлежит и плоскости. Тогда

$$\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0; \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{cases} \tag{3.21}$$

Условия (3.21), рассмотренные совместно, есть условия того, что прямая принадлежит плоскости.

Пример 3.11. Найти проекцию точки $P(3;1;-6)$ на плоскость $2x - y + 5z - 5 = 0$ (рис.3.12).

Решение. Проекцией точки на плоскость является точка P – основание перпендикуляра, опущенного из точки P на плоскость.

Выпишем уравнения прямой, проходящей через точку P и перпендикулярной данной плоскости. Направляющий вектор прямой $\overline{S}$ коллинеарен вектору нормали плоскости $\overline{N} = \{2;-1;5\}$. Выбирая $\overline{S} = \overline{N}$, уравнения прямой получим в виде

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+6}{5}.$$

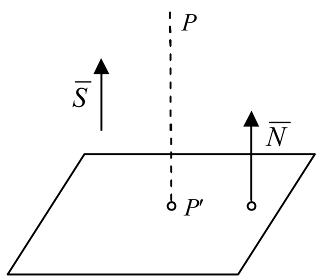

Рис.3.12

Чтобы найти точку пересечения прямой и плоскости, перейдем к параметрическим уравнениям прямой:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+6}{5} = t; \qquad \begin{cases} x = 2t + 3; \\ y = -t + 1; \\ z = 5t - 6. \end{cases}$$

Подставляя x, y, z в уравнение плоскости, найдем t:

$$2(2t+3) - (-t+1) + 5(5t-6) - 5 = 0; \quad 30t - 30 = 0; \quad t = 1.$$

Из параметрических уравнений прямой получим координаты точки P' – точки пересечения прямой с плоскостью: $P'(5;0;-1)$.

Пример 3.12. Написать уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-1}, \qquad \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{-1},$$

и найти расстояние между ними.

Решение. $\overline{S} = \{2;1;-1\}$ – направляющий вектор заданных прямых. Точки $M_1(-3;-2;-1)$ и $M_2(1;0;5)$ также принадлежат прямым (рис.3.13). Пусть $\overline{N}$ – вектор нормали искомой плоскости.

Тогда $\overline{N} \perp \overline{S}$, $\overline{N} \perp \overline{M_1M_2} = \{4;2;6\}$. Поэтому

$$\overline{N}=\left[\overline{S},\overline{M_1M_2}\right]=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 2 & 1 & -1\\ 4 & 2 & 6\end{vmatrix}=8\overline{i}-16\overline{j}\,.$$

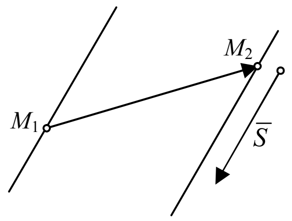

Рис.3.13

Уравнение искомой плоскости имеет вид

$$8(x-1)-16(y-0)=0 \quad \text{или} \quad x-2y-1=0\,.$$

Расстояние между прямыми линиями найдем как расстояние от точки M_1, принадлежащей первой прямой, до второй прямой по формуле расстояния от точки до прямой линии. Таким образом,

$$\left|\left[\overline{S}\,,\overline{M_1\,M_2}\right]\right|=|\,8\overline{i}-16\overline{j}\,|=\sqrt{64+256}=\sqrt{320}\,;$$

$$|\,\overline{S}\,|=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6} \quad\Rightarrow\quad d=\sqrt{320}\,/\,\sqrt{6}=4\sqrt{10/3}\,.$$

3.16. ПРЯМАЯ ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

3.16.1. Различные формы записи прямой на плоскости

Общее уравнение прямой линии на плоскости. Прямую линию на плоскости можно задать как линию пересечения двух плоскостей: плоскости, заданной общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, и координатной плоскости xOy, уравнение которой $z=0$. Тогда уравнение прямой имеет вид

$$Ax+By+D=0\,. \tag{3.22}$$

Уравнение (3.22) называют ***общим уравнением прямой*** на плоскости.

Уравнение прямой линии в отрезках. Для получения этого уравнения пересечем плоскость с уравнением $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ координатной плоскостью xOy, уравнение которой $z=0$. Получим

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\,. \tag{3.23}$$

Уравнение (3.23) называют ***уравнением прямой в отрезках***.

Уравнение прямой линии с угловым коэффициентом. Так называют уравнение прямой линии, которое имеет вид

$$y=kx+b\,.$$

Обозначим: $\alpha-$наименьший угол, на который нужно повернуть против часовой стрелки ось Ox, чтобы она совпала с данной прямой (или оказалась параллельной ей); $b-$ ордината точки пересечения прямой с осью Oy.

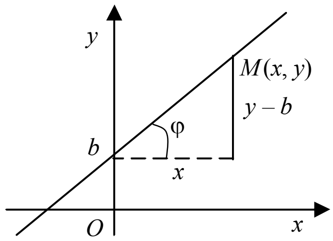

Рис.3.14

Тогда для любой точки $M(x,y)$, принадлежащей прямой, имеем

$$\frac{y-b}{x}=tg\alpha \quad \text{или} \quad y=kx+b,$$

где $k=\text{tg}\alpha$ (рис.3.14).

Заметим, что k – тангенс угла наклона прямой к оси Ox, называют ***угловым коэффициентом*** прямой.

Итак, уравнение $y=kx+b$ – уравнение прямой линии с угловым коэффициентом.

Частные случаи:

1) $y=kx$ $(b=0)$ – прямая линия, проходящая через начало координат;

2) $y=b$ $(k=0)$ – прямая линия, параллельная оси Ox и отсекающая на оси Oy (положительной или отрицательной с учетом знака b) отрезок, равный b.

Пучок прямых линий, проходящих через заданную точку $M_0(x_0,y_0)$. Пусть прямая линия задается уравнением

$$y=kx+b. \tag{3.24}$$

Потребуем, чтобы эта прямая прошла через точку $M_0(x_0,y_0)$:

$$y_0=kx_0+b. \tag{3.25}$$

Вычитая почленно из (3.24) уравнение (3.25), получим

$$y-y_0=k(x-x_0). \tag{3.26}$$

Изменяя в уравнении (3.26) угловой коэффициент k, будем получать различные прямые, проходящие через точку $M_0(x_0,y_0)$. Потому уравнение (3.26) называют ***пучком прямых линий***, проходящих через заданную точку.

Замечание. Уравнением (3.26) нельзя задать прямую линию, проходящую через точку $M_0(x_0,y_0)$ и параллельную оси Oy, так как угловой коэффициент $k=\infty$. Легко заметить, однако, что все точки такой прямой имеют одну и ту же абсциссу $x=x_0$. Уравнение $x=x_0$ и есть уравнение прямой, параллельной оси Oy.

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки: $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$**.** Проведем через точку $M_1(x_1,y_1)$ пучок прямых линий:

$$y-y_1=k(x-x_1). \tag{3.27}$$

Выделим из пучка прямых линий ту линию, которая проходит через точку $M_2(x_2,y_2)$:

$$y_2-y_1=k(x_2-x_1). \tag{3.28}$$

Поделив почленно уравнение (3.27) на уравнение (3.28), получим уравнение прямой, проходящей через две заданные точки:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \qquad (3.29)$$

Замечание. Если точки лежат на прямой, параллельной оси Ox, то ее уравнение

$$y-y_1=0.$$

Если точки лежат на прямой, параллельной оси Oy, то ее уравнение

$$x-x_1=0.$$

3.16.2. Нахождение угла между двумя прямыми на плоскости. Условия параллельности и перпендикулярности прямых линий на плоскости

Пусть прямые линии задаются уравнениями

$$y=k_1x+b_1, \quad y=k_2x+b_2,$$

где $k_1=\operatorname{tg}\alpha_1$; $k_2=\operatorname{tg}\alpha_2$.

Обозначим один из углов между прямыми линиями при их пересечении φ_1 (рис.3.15). Тогда другой угол $\varphi_2=\pi-\varphi_1$.

Угол φ_1 (угол поворота прямой с угловым коэффициентом k_1 против часовой стрелки до совмещения с прямой, угловой коэффициент которой равен k_2) можно найти из условия

$$\alpha_2=\alpha_1+\varphi_1.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}\varphi_1=\operatorname{tg}(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{\operatorname{tg}\alpha_2-\operatorname{tg}\alpha_1}{1+\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2}=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}.$$

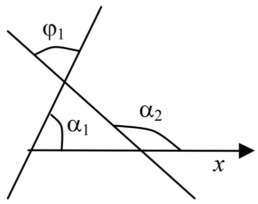

Рис.3.15

Окончательно имеем

$$\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}. \qquad (3.30)$$

Если прямые линии параллельны, то $k_1=k_2$. Если прямые линии перпендикулярны, то в формуле (3.30) перейдем к обратным величинам:

$$\operatorname{ctg}\varphi_1=\frac{1+k_1k_2}{k_2-k_1}.$$

При перпендикулярности прямых линий угол между ними $\varphi_1=\pi/2$. Следовательно, числитель дроби равен нулю т.е.

$$1+k_1k_2=0 \qquad \text{или} \qquad k_1=-\frac{1}{k_2}.$$

3.17. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

3.17.1. Эллипс

Определение. ***Эллипсом*** называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух заданных точек (фокусов) постоянна и принимается равной $2a$ (рис.3.16).

Для получения канонического уравнения эллипса выберем прямоугольную систему координат таким образом: проведем ось Ox через фокусы F_1 и F_2 и обозначим расстояние между ними $2c$; ось Oy проведем перпендикулярно оси Ox так, чтобы точка O разделила бы расстояние между фокусами пополам, координаты фокусов соответственно $F_1(c\,;0)$; $F_2(-c\,;0)$.

Возьмем произвольно точку $M(x;y)$ на эллипсе и обозначим расстояния от этой точки до первого фокуса r_1, а до второго фокуса r_2. Тогда определение эллипса можно записать в виде

$$r_2 + r_1 = 2a\,. \tag{3.31}$$

Координаты точек M, F_1 и F_2 известны. Потому имеем

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

или

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\,. \tag{3.32}$$

Возведем равенство в квадрат и раскроем при этом скобки (квадрат суммы и разности). Получим

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2xc + c^2 + y^2\,.$$

Отсюда

$$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4xc$$

или

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + xc.$$

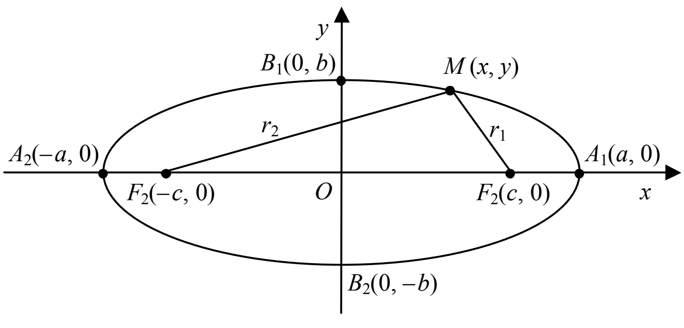

Рис.3.16

Возведем в квадрат полученное равенство

$$a^2x^2 + 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2xc + x^2c^2$$

и, собрав подобные члены, найдем

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

После умножения на дробь $\frac{1}{a^2\left(a^2-c^2\right)}$, получим

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1. \tag{3.33}$$

Рассмотрим треугольник с вершинами: F_2, M, F_1. Известно, что

$$r_1+r_2>\left|F_1F_2\right| \Leftrightarrow 2a>2c \Leftrightarrow a>c.$$

Обозначим

$$a^2-c^2=b^2. \tag{3.34}$$

Уравнение (3.33) с учетом (3.34) можно переписать в виде

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{3.35}$$

Уравнение (3.35) – каноническое уравнение эллипса, где a и b – большая и малая полуоси эллипса соответственно.

Положение фокусов можно установить без вычисления c, проведя циркулем, установленным в точке $B(b,0)$, дугу радиуса a до пересечения с осью Ox в точках F_1 и F_2 (фокусах эллипса).

***Замечание* 1.** Если $a=b=R$**,** то уравнение (3.35) принимает вид

$$x^2+y^2=R^2.$$

Таким образом, частным случаем эллипса является окружность радиуса R с центром в начале координат.

***Замечание* 2.** Уравнение эллипса (3.35) содержит переменные в четной (второй) степени. Отсюда следует, что эллипс представляет собой кривую, симметричную относительно координатных осей и начала координат.

Эллипс пересекает оси координат в точках: $A_1(a,0)$, $A_2(-a,0)$, $B_1(0,b)$ и $B_2(0,-b)$. Эти точки называются вершинами эллипса.

Отрезок, соединяющий точки $A_1(a;0)$ и $A_2(-a;0)$, называется большой осью эллипса, а отрезок, соединяющий точки $B_1(0,b)$ и $B_2(0,-b)$ – малой осью эллипса. Отсюда a – большая, b – малая полуось эллипса.

***Замечание* 3.** Если задано положение фокусов F_1 и F_2 и известна длина его большой оси $2a$, то построение эллипса можно провести следующим образом.

Концы гибкой нити длиной $2a$ закрепим в точках F_1 и F_2. Тогда кривая, описываемая острием карандаша, скользящим по туго натянутой нити, имеет форму эллипса (рис.3.17).

Возьмем на эллипсе произвольную точку $M(x,y)$. Найдем длину отрезков r_1 и r_2, соединяющих эту точку с фокусами F_1 и F_2.

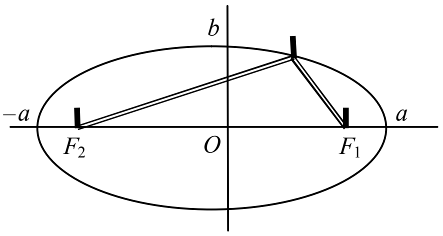

Рис.3.17

Вычислим

$$r_2^{\,2}-r_1^{\,2}=(x+c)^2+y^2-(x-c)^2-y^2=4cx\,.$$

Кроме того из формулы (3.31) имеем $r_2+r_1=2a$.

Таким образом, для определения r_1 и r_2 получена система двух уравнений

$$\begin{cases} r_2^{\,2}-r_1^{\,2}=4cx\,; \\ r_2+r_1=2a\,, \end{cases}$$

разделив которые друг на друга, найдем

$$r_2-r_1=2\frac{c}{a}x\,. \tag{3.36}$$

Объединяя это уравнение с уравнением (3.31), получим систему двух уравнений, из которой определим r_1 и r_2:

$$\begin{cases} r_2+r_1=2a\;\;; \\ r_2-r_1=2\dfrac{c}{a}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1=a-\dfrac{c}{a}x\,; \\ r_2=a+\dfrac{c}{a}x\,. \end{cases} \tag{3.37}$$

Введем в рассмотрение величину

$$\varepsilon=c/a\,. \tag{3.38}$$

Эта величина называется эксцентриситетом эллипса. Заметим, что для эллипса $c<a$, и потому $\varepsilon<1$. Далее с учетом $c=\sqrt{a^2-b^2}$ **,** найдем

$$\varepsilon=\sqrt{1-(b/a)^2}\,. \tag{3.39}$$

Величина ε характеризует отношение длин полуосей эллипса $\dfrac{b}{a}$, т.е. степень «сплюснутости» эллипса.

Для окружности $c=0$, а потому $\varepsilon=0$. Для эллипсов, близких по форме к окружности, отношение $\dfrac{b}{a}$ близко к единице, и, стала быть, ε – малая величина. Например, для эллипса меридианального сечения Земли $\varepsilon\approx 0{,}08$.

С учетом определения эксцентриситета (3.38) формулы (3.37) можно переписать в виде

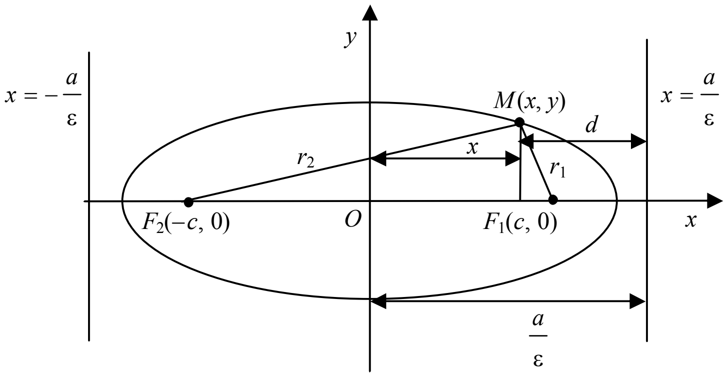

Рис.3.18

$$\begin{cases} r_1 = a - \varepsilon x\,; \\ r_2 = a + \varepsilon x\,. \end{cases} \tag{3.40}$$

Введем в рассмотрение прямую линию с уравнением $x = a/\varepsilon$. Обозначим d – расстояние от произвольной точки $M(x, y)$ эллипса до указанной прямой. Согласно рис.3.18 имеем

$$d = \frac{a}{\varepsilon} - x\,.$$

Учитывая этот факт и первую из формул (3.40), найдем отношение

$$\frac{r_1}{d} = \frac{a - \varepsilon x}{\dfrac{a}{\varepsilon} - x} = \varepsilon \frac{a - \varepsilon x}{a - \varepsilon x} = \varepsilon\,.$$

Итак, для любой точки эллипса

$$\frac{r_1}{d} = \varepsilon = \text{const}\,. \tag{3.41}$$

Отношение расстояния от любой точки эллипса до фокуса $F_1(c; 0)$ ***и до прямой линии с уравнением*** $x = \dfrac{a}{\varepsilon}$ ***есть величина постоянная и равная эксцентриситету эллипса*** ε**.** Указанная прямая линия называется директрисой эллипса.

В силу симметрии эллипса существует другая директриса эллипса с уравнением $x = -a/\varepsilon$, отвечающая фокусу $F_2(-c, 0)$. Окончательно имеем следующие уравнения директрис эллипса:

$$x = \frac{a}{\varepsilon}\,; \qquad x = -\frac{a}{\varepsilon}\,. \tag{3.42}$$

Заметим, что для эллипса $\varepsilon < 1 \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{\varepsilon} > 1$, и следовательно, $\dfrac{a}{\varepsilon} > a$. Это неравенство показывает, что директрисы не пересекаются.

3.17.2. Гипербола

Определение. ***Гиперболой*** называется геометрическое место точек плоскости, разность расстояний от которых (по абсолютной величине) до двух заданных точек (фокусов) постоянна и принимается равной $2a$ (рис.3.19).

Для получения канонического уравнения гиперболы систему координат выберем так же, как и при выводе уравнения эллипса. Обозначим расстояние между фокусами $2c$. Координаты фокусов: $F_1(c, 0)$; $F_2(-c, 0)$.

Если произвольную точку на гиперболе выбрать в правой полуплоскости, то уравнение гиперболы можно записать в виде

$$r_2 - r_1 = 2a\,. \tag{3.43}$$

Если же точка – в левой полуплоскости, то уравнение имеет вид

$$r_2 - r_1 = -2a\,.$$

В общем случае уравнение гиперболы

$$|r_2 - r_1| = 2a\,.$$

Для вывода канонического уравнения гиперболы выберем уравнение (3.43). Выразим расстояния r_1 и r_2 через координаты точек M, F_1 и F_2:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

или

$$-\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\,. \tag{3.44}$$

Уравнение (3.44) отличается от уравнения (3.32) лишь знаком в левой части равенства. Поэтому преобразования, аналогичные преобразованиям уравнения (3.32), приведут к уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1\,. \tag{3.45}$$

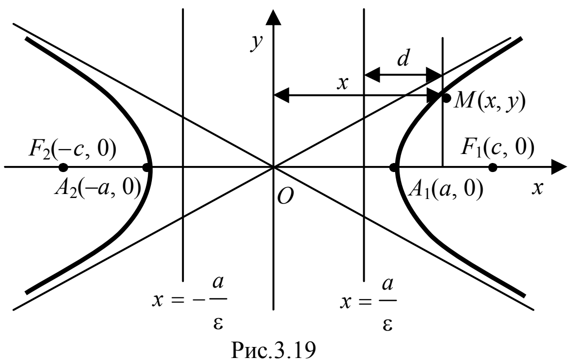

Рис.3.19

Как и раньше, рассмотрим треугольник с вершинами: F_2, M, F_1. Известно, что

$$r_2 - r_1 < |F_1 F_2| \Leftrightarrow 2a < 2c \;\; a < c.$$

Обозначим

$$c^2 - a^2 = b^2\,. \tag{3.46}$$

Уравнение (3.45) с учетом (3.46) можно записать в виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,. \qquad (3.47)$$

Уравнение (3.47) – каноническое уравнение гиперболы.

Как и в случае эллипса, гипербола симметрична относительно осей координат. Полагая $y = 0$, получим две точки пересечения гиперболы с осью Ox: $A_1(a, 0)$ и $A_2(-a, 0)$. Оси Oy гипербола не пересекает, так как при $x = 0$ получаем $y^2 = -b^2$, что невозможно.

Решим уравнение гиперболы (3.47) относительно y:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\,.$$

Учитывая симметрию, в дальнейшем будем рассматривать лишь случай $y \ge 0$; $x \ge 0$. Поэтому перед радикалом сохраним знак плюс:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\,. \qquad (3.48)$$

Отсюда следует, что функция определена, если $x^2 \ge a^2$ или для положительных значений $x \ge a$.

Из формулы (3.48) следует также, что при неограниченном возрастании x ордината y неограниченно возрастает, т.е. $y \to \infty$ при $x \to \infty$.

При больших значениях переменной x можно пренебречь константой a^2 по сравнению x^2. В этом случае можно заменить уравнение (3.48) приближенным уравнением

$$y = \frac{b}{a}x\,.$$

Эта прямая является асимптотой гиперболы. В силу симметрии существует вторая асимптота с уравнением

$$y = -\frac{b}{a}x\,.$$

Асимптоты можно построить, начертив в системе xOy симметричный, относительно осей координат, прямоугольник $A_1B_1A_2B_2$ со сторонами $2a$ и $2b$. Диагонали этого прямоугольника проходят через начало координат и имеют угловые коэффициенты b/a и $-b/a$, т.е. являются асимптотами гиперболы.

Положение фокусов гиперболы можно определить без вычислений: циркулем, установленным в начале координат, проводим дугу радиуса, равного гипотенузе треугольника со сторонами a и b ($c^2 = a^2 + b^2$), до пересечения с осью Ox в точках F_1 и F_2.

Отрезок, соединяющий точки $A_1(a, 0)$ и $A_2(-a, 0)$, называется вещественной осью гиперболы. Отрезок, соединяющий точки $B_1(0, b)$ и $B_2(0, -b)$, называется мнимой осью гиперболы, так как оси Oy гипербола не пересекает.

График гиперболы представляет собой две симметричных относительно оси Oy линии. Эти линии называются левой и правой ветвями гиперболы. Точки $A_1(a, 0)$ и $A_2(-a, 0)$ называются вершинами гиперболы.

Как и в случае эллипса, возьмем произвольную точку $M(x, y)$ на правой ветви гиперболы и найдем значения r_1 и r_2 (без радикалов). Для их нахождения имеем два уравнения

$$\begin{cases} r_2{}^2 - r_1{}^2 = 4cx, \\ r_2 - r_1 = 2a. \end{cases}$$

Решая эту систему тем же методом, что и в случае эллипса, найдем

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{c}{a}x - a\,; \\ r_2 = \dfrac{c}{a}x + a\,. \end{cases} \tag{3.49}$$

Если точку $M(x, y)$ взять в левой полуплоскости, система уравнений для определения r_1 и r_2 будет иметь вид

$$\begin{cases} r_2{}^2 - r_1{}^2 = 4cx; \\ r_1 - r_2 = 2a. \end{cases}$$

Из этой системы можно найти

$$r_1 = -\left(\frac{c}{a}x - a\right); \quad r_2 = -\left(\frac{c}{a}x + a\right). \tag{3.50}$$

Объединяя формулы (3.49) и (3.50), получим

$$\begin{cases} r_1 = \pm\left(\dfrac{c}{a}x - a\right); \\ r_2 = \pm\left(\dfrac{c}{a}x + a\right). \end{cases} \tag{3.51}$$

В уравнениях (3.51) знак плюс отвечает правой ветви гиперболы, а знак минус – левой ветви гиперболы.

Введем в рассмотрение эксцентриситет гиперболы

$$\varepsilon = c/a\,. \tag{3.52}$$

Для гиперболы $c > a \;\Rightarrow\; \varepsilon > 1$. Так как $c^2 = a^2 + b^2$, то формула для определения эксцентриситет имеет вид

$$\varepsilon = \sqrt{1 + (b/a)^2}\,. \tag{3.53}$$

Как и в случае эллипса, эксцентриситет характеризует «степень сплюснутости» гиперболы.

Из формулы (3.53) легко усмотреть, что значение ε, немного большее единицы, отвечает гиперболе с малым углом между асимптотами. С увеличением ε угол между асимптотами также увеличивается.

Подставив (3.52) в (3.51), получим

$$\begin{cases} r_1 = \pm(\varepsilon x - a); \\ r_2 = \pm(\varepsilon x + a) \end{cases} \tag{3.54}$$

(знак плюс отвечает правой ветви, а знак минус – левой ветви гиперболы).

Рассмотрим прямую линию с уравнением $x = a/\varepsilon$. Возьмем на правой ветви гиперболы произвольную точку $M(x,y)$ и обозначим d – расстояние от точки $M(x,y)$ до указанной прямой. Далее рассмотрим отношение r_1/d, где r_1 – расстояние от точки $M(x,y)$ до правого фокуса $F_1(c,0)$. Из рис.3.19 находим

$$d = x - a/\varepsilon .$$

С учетом первой из формул (3.54), для правой ветви гиперболы получим

$$\frac{r_1}{d} = \frac{\varepsilon x - a}{x - \dfrac{a}{\varepsilon}} = \varepsilon .$$

Итак,

$$\frac{r_1}{d} = \varepsilon .$$

Это соотношение выполнено и в случае, если точка $M(x,y)$ находится на левой ветви гиперболы.

В этом случае имеем

$$d = -x + \frac{a}{\varepsilon}, \quad r_1 = -(\varepsilon x - a);$$

$$\frac{r_1}{d} = \frac{-\varepsilon x + a}{\dfrac{a}{\varepsilon} - x} = \varepsilon.$$

Отношение расстояний от любой точки правой или левой ветви гиперболы до правого фокуса $F_1(c,0)$ и до прямой с уравнением $x = a/\varepsilon$ есть величина постоянная и равная эксцентриситету гиперболы.

В силу симметрии существует прямая с уравнением $x = -a/\varepsilon$, обладающая аналогичным свойством по отношению к левому фокусу $F_2(-c,0)$ гиперболы.

Указанные прямые называются директрисами гиперболы. Их уравнения имеют вид

$$x = a/\varepsilon; \quad x = -a/\varepsilon .$$

Можно доказать, что отрезки, отсекаемые директрисами гиперболы на асимптотах, равны вещественной полуоси a. Поэтому для построения директрис гиперболы достаточно сделать на асимптотах гиперболы засечки из начала координат радиусом a и провести через полученные точки директрисы.

Отметим также, что отношение $a/\varepsilon < a$, так как $\varepsilon > 1$. Поэтому директрисы не пересекают гиперболу.

3.17.3. Парабола

Определение. ***Параболой*** называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от заданной точки (фокуса) и заданной прямой, которая называется директрисой.

Замечание. Расстояние между фокусом и директрисой равно p – параметру параболы (рис.3.20). Точка O расстояние от директрисы до фокуса делит пополам. Тогда координаты фокуса $F(p/2;0)$, а уравнение директрисы $x=-p/2$.

Возьмем произвольную точку $M(x,y)$ на параболе. Ее расстояние до директрисы $d = x + p/2$, расстояние до фокуса $r=\sqrt{(x-p/2)^2+y^2}$.

Уравнение параболы можно записать в виде

$$r = d$$

или

$$x + p/2 = \sqrt{(x-p/2)^2+y^2}.$$

После возведения в квадрат получим

$$x^2 + xp + \frac{p^2}{4} = x^2 - xp + \frac{p^2}{4} + y^2$$

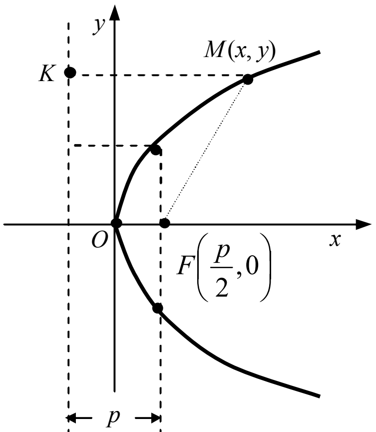

Рис.3.20

или

$$y^2 = 2px. \tag{3.55}$$

Уравнение (3.55) – каноническое уравнение параболы.

Отношение $\dfrac{MF}{KM} = \dfrac{r}{d} = 1$. Отсюда видно, что парабола обладает тем же свойством, что эллипс и гипербола, причем эксцентриситет параболы следует принять равным единице.

Таким образом, кривые второго порядка обладают следующим свойством: ***отношение расстояния от любой точки кривой до ее фокуса к расстоянию от этой точки до***

соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету кривой ε. При этом для эллипса $\varepsilon < 1$, для гиперболы $\varepsilon > 1$, а для параболы $\varepsilon = 1$.

Это свойство обычно называют ***фокальным*** свойством кривых второго порядка.

Пример 3.13. Привести уравнение $9x^2 + 4y^2 - 36x + 8y + 4 = 0$ к каноническому виду, определить вид линии, описываемой этим уравнением, сделать схематический рисунок.

Решение. Преобразуем исходное уравнение, дополнив до полных квадратов выражения, содержащие x и y соответственно.

$$9\left(x^2 - 4x + 4\right) + 4\left(y^2 + 2y + 1\right) + 4 - 36 - 4 = 0$$

или

$$9(x-2)^2 + 4(y+1)^2 = 36.$$

Разделив обе части последнего уравнения на 36, получим

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1.$$

Перейдем к новым координатам по формулам

$$\begin{cases} x' = x - 2; \\ y' = y + 1, \end{cases}$$

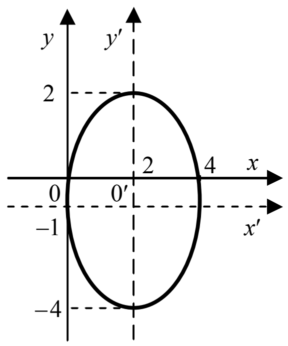

Рис.3.21

т.е. совершим параллельный перенос осей, причем новое начало координат поместим в точку $O'(2;-1)$. В новой системе координат $x'O'y'$ уравнение примет вид

$$\frac{x'^2}{2^2} + \frac{y'^2}{3^2} = 1.$$

Получено каноническое уравнение эллипса. Его центр находится в точке $O'(2;-1)$, величины полуосей $a = 2$, $b = 3$ (рис.3.21).

Пример 3.14. Составить уравнение параболы, фокус которой находится в точке пересечения прямой $4x - 3y - 4 = 0$ с осью Ox.

Решение. Найдем точку пересечения прямой $4x - 3y - 4 = 0$ с осью Ox. Для этого положим $y = 0$ и определим соответствующее значение: $x = 1$. Значит, фокус параболы находится в точке $F(1; 0)$, которая лежит на оси симметрии кривой. Каноническое уравнение параболы в этом случае имеет вид

$$y^2 = 2px.$$

По координатам фокуса определим $p/2 = 1 \Rightarrow p = 2$.

Тогда уравнение параболы $y^2 = 4x$.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое радиус-вектор точки?
2. Какие различные формы записи плоскости вы знаете?
3. Каковы условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей?
4. Как находится угол между плоскостями?
5. Какие различные формы записи прямой в пространстве вы знаете?
6. Каковы условия параллельности и перпендикулярности прямых линий в пространстве?
7. Как находится угол между прямыми линиями в пространстве?
8. Каковы условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости в пространстве?
9. Как находят угол между прямой и плоскостью?
10. При каком условии точка принадлежит плоскости?
11. Приведите уравнения прямой линии на плоскости.
12. Каковы условия параллельности и перпендикулярности прямых линий на плоскости?
13. Как находят угол между прямыми линиями на плоскости?
14. Что называется эллипсом и каково его каноническое уравнение?
15. Что называется гиперболой и каково ее каноническое уравнение?
16. Что называется параболой и каково ее каноническое уравнение?
17. Как определяется фокальное свойство кривых второго порядка?
18. У какой из кривых второго порядка существуют асимптоты?
19. Каково уравнение директрисы параболы?
20. Какой частный случай эллипса вы знаете?

Тесты

№ п/п	Вопрос	Варианты ответа
1	Плоскость с уравнением $7y + 6z = 0$	1. Проходит через ось Ox 2. Проходит через ось Oy 3. Параллельна оси Ox 4. Параллельна оси Oz
2	Указать уравнение плоскости, которая проходит через точку $(2; -3{,}1)$ и перпендикулярна вектору $\overline{N} = 2\overline{i} + 4\overline{j} - 3\overline{k}$	1. $2(x-2)-3(y-4)+(z+3)=0$ 2. $2(x-2)+4(y+3)-3(z-1)=0$ 3. $2(x-2)-3(y+3)-(z-1)=0$ 4. $2(x-2)-4(y-4)+3(z+3)=0$

№ п/п	Вопрос	Варианты ответа
3	Найти уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно к плоскостям $2x - y + 3z - 1 = 0$ и $x + 2y + z = 0$.	1. $7x - y - 5z = 0$ 2. $7x + y - 5z = 0$ 3. $x - 7y - 5z = 0$ 4. $5x - 7y + z = 0$
4	Расстояние d от точки $A(1; -2; 3)$ до плоскости $6x - 7y + 6z - 5 = 0$	1. $d = 0$ 2. $d = -3$ 3. $d = 1/3$ 4. $d = 3$
5	Указать взаимное расположение плоскостей $3x + y - z - 1 = 0$ и $2x + 2y + 8z - 7 = 0$	1. Перпендикулярны 2. Параллельны 3. Пересекаются под углом $\pi/6$ 4. Пересекаются под углом $\pi/3$
6	Если φ – угол между прямой $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z}{4}$ и плоскостью $6x - 3y - 3z + 6 = 0$, то	1. $\cos\varphi = -1/2$; $\varphi = 2\pi/3$ 2. $\sin\varphi = 1/2$; $\varphi = \pi/6$ 3. $\sin\varphi = -1/2$; $\varphi = 7\pi/6$ 4. $\cos\varphi = 1/2$; $\varphi = \pi/3$
7	Указать, какая из заданных прямых параллельна прямой $\frac{x}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{7}$.	1. $x = 2t,\quad y = 6t + 1,\quad z = -14t - 3$ 2. $x = 2t + 1,\quad y = -5t - 3,\quad z = 3t + 7$ 3. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+7}{3}$ 4. $x = -3t,\quad y = 9t - 3,\quad z = -21t + 7$
8	Указать взаимное расположение прямой $\frac{x}{2} = \frac{y-13}{-1} = \frac{z}{3}$ и плоскости $6x - 3y + 9z - 7 = 0$	1. Перпендикулярны 2. Параллельны 3. Пересекаются под углом $\pi/6$ 4. Пересекаются под углом $\pi/3$
9	Одной из директрис для эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ является прямая	1. $x = a/\varepsilon$ 2. $x = c/a$ 3. $y = a/b$ 4. $y = \varepsilon/a$
10	Уравнение $6x - 3y^2 + 8 = 0$ задает на плоскости	1. Эллипс 2. Прямую 3. Цилиндр 4. Параболу

ОТВЕТЫ К ТЕСТАМ

Глава 1

Номер вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Номер правильного ответа	3	2	3	4	3	1	4	1	4	2

Глава 2

Номер вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Номер правильного ответа	1	2	4	4	2	3	4	2	4	4

Глава 3

Номер вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Номер правильного ответа	1	2	1	4	1	3	4	1	1	4

РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основной

1. *Бронштейн И.Н.* Справочник по математике / И.Н.Бронштейн, К.А.Семендяев. М.: Лань, 2010.

2. *Данко П.Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах. Учеб. пособие / П.Е.Данко, А.Г.Попов, Г.Н.Кожевникова. М.: Высшая школа, 1999. Ч.1, 2.

3. *Клетеник Д.В.* Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Наука, 2005.

4. Математический практикум / Под ред. А.П.Господарикова. СПб, 2012. Ч.1. 2013. Ч.2.

5. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления. М.: Интеграл-пресс, 2007. Т.1, 2.

6. *Шипачев В.С.* Высшая математика: Учебник для вузов. М.: Высшая школа, 2003.

Дополнительный

1. *Бугров С.Я.* Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / С.Я.Бугров, С.М.Никольский. М.:Дрофа,2004.

2. Высшая математика. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функции одной переменной: Учебно-метод. пособие / А.П.Господариков, Т.Р.Акчурин, В.В.Ивакин, О.Е.Карпухина, С.Е.Мансурова, Т.С.Обручева, В.А.Семенов; Под ред. А.П.Господарикова. СПб, 2013.

3. Высшая математика. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное и интегральное исчисления. Дифференциальные уравнения и ряды Учеб. пособие / А.П.Господариков, Т.Р.Акчурин, М.А.Керейчук, И.А.Лебедев, К.В.Прозоров; Под ред. А.П.Господарикова. СПб, 2009.

4. Высшая математика. Руководство к решению задач повышенной трудности / А.П.Господариков, Т.Р.Акчурин, М.А.Керейчук, Г.А.Колтон, И.А.Лебедев, С.Е.Мансурова, Т.С.Обручева, В.В.Тарабан, А.А.Яковлева; Под ред. А.П.Господарикова. СПб, 2011.

5. *Карпова Е.А.* Аналитическая геометрия: Метод. указания и задания для самостоятельной работы. СПб, 2013.

6. *Карпухина О.Е.* Основы векторной алгебры. Аналитическая геометрия: Учеб. пособие. СПб, 1996.

7. *Мансурова С.Е.* Высшая математика. Элементы линейной алгебры. Метод. указания по выполнению расчетно-графической работы. СПб, 2007.

8. *Минорский В.П.* Сборник задач по высшей математике. М.: Наука, 1977.

9. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. СПб, БХВ-Петербург, 2008. Т.1.

Учебное электронное издание

ГОСПОДАРИКОВ Александр Петрович
КАРПОВА Елена Анатольевна
КАРПУХИНА Ольга Ефремовма
МАНСУРОВА Светлана Евгеньевна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

В шести томах

Том 1

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

УЧЕБНИК

Редактор *Л.А.Левина*
Оригинал-макет выполнен авторским коллективом

Лицензия ИД № 06517 от 09.01.2002

Подписано в свет 10.05.2015.
Уч.-изд.л. 5,1. Заказ 000. С 290.

Национальный минерально-сырьевой университет «Горный»
РИЦ Национального минерально-сырьевого университета «Горный»
Адрес университета и РИЦ: 199106 Санкт-Петербург, 21-я линия, 2