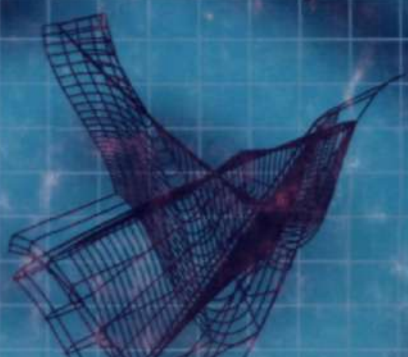
экспресс-курс

И.В. Белько, К.К. Кузьмич

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

для экономистов

I семестр



Линейная алгебра
Аналитическая геометрия
Дифференциальное исчисление
Функции многих переменных

И.В. Белько, К.К. Кузьмич

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

для экономистов

I семестр

Экспресс-курс

2-е издание, стереотипное

МОСКВА ООО «НОВОЕ ЗНАНИЕ» 2005

УДК 51(075.8):33
ББК 22.1я73
Б44

Разработка серии и методические идеи — А.А. Рывкин

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор,
зав. кафедрой дифференциальных уравнений
и оптимального управления Учреждения образования
«Гродненский государственный университет им. Я. Купалы» *С.А. Минюк*;

доктор физико-математических наук, профессор,
зав. кафедрой общей математики и информатики
Белорусского государственного университета *В.С. Федосенко*

Белько, И.В.

Б44 Высшая математика для экономистов. I семестр : экспресс-курс / И.В. Белько, К.К. Кузьмич. — 2-е изд., стер. — М. : Новое знание, 2005. — 140 с.

ISBN 5-94735-079-3.

Экспресс-курс разбит на 3 части соответственно семестрам и содержит необходимый минимум для сдачи экзамена. Наглядность в организации материала, удачно подобранные примеры позволяют эффективно и в сжатые сроки самостоятельно усвоить и повторить программу курса.

Первая часть курса включает разделы «Линейная алгебра», «Аналитическая геометрия», «Дифференциальное исчисление», «Функции многих переменных».

Для студентов экономических специальностей вузов.

УДК 51(075.8):33
ББК 22.1я73

ISBN 5-94735-079-3

Глава 1
МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.1. Основные понятия

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов.

Элементами матрицы называются числа, составляющие матрицу.

Матрицы обозначаются прописными (заглавными) буквами латинского алфавита, например, A, B, C,... а для обозначения элементов матрицы используются строчные буквы с двойной индексацией: a_{ij}, где i — номер строки, j — номер столбца. Например, для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

элементами являются: $a_{11} = 0$, $a_{12} = 1$, $a_{13} = -3$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = 2$, $a_{23} = -2$.

Равными называются матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одного размера, если они совпадают поэлементно, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$ для любых $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$.

Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

так как элементы $a_{12} = 2$ и $b_{12} = -1$ не совпадают.

Матрицей-строкой называется матрица, состоящая из одной строки.

Матрицей-столбцом называется матрица, состоящая из одного столбца.

УДК 51(075.8):33
ББК 22.1я73
Б44

Разработка серии и методические идеи — А.А. Рывкин

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор,
зав. кафедрой дифференциальных уравнений
и оптимального управления Учреждения образования
«Гродненский государственный университет им. Я. Купалы» *С.А. Минюк*;

доктор физико-математических наук, профессор,
зав. кафедрой общей математики и информатики
Белорусского государственного университета *В.С. Федосенко*

Белько, И.В.

Б44 Высшая математика для экономистов. I семестр : экспресс-курс / И.В. Белько, К.К. Кузьмич. — 2-е изд., стер. — М. : Новое знание, 2005. — 140 с.
ISBN 5-94735-079-3.

Экспресс-курс разбит на 3 части соответственно семестрам и содержит необходимый минимум для сдачи экзамена. Наглядность в организации материала, удачно подобранные примеры позволяют эффективно и в сжатые сроки самостоятельно усвоить и повторить программу курса.

Первая часть курса включает разделы «Линейная алгебра», «Аналитическая геометрия», «Дифференциальное исчисление», «Функции многих переменных».

Для студентов экономических специальностей вузов.

УДК 51(075.8):33
ББК 22.1я73

ISBN 5-94735-079-3

Глава 1
МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.1. Основные понятия

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов.

Элементами матрицы называются числа, составляющие матрицу.

Матрицы обозначаются прописными (заглавными) буквами латинского алфавита, например, A, B, C,... а для обозначения элементов матрицы используются строчные буквы с двойной индексацией: a_{ij}, где i — номер строки, j — номер столбца. Например, для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

элементами являются: $a_{11} = 0$, $a_{12} = 1$, $a_{13} = -3$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = 2$, $a_{23} = -2$.

Равными называются матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одного размера, если они совпадают поэлементно, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$ для любых $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$.

Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

так как элементы $a_{12} = 2$ и $b_{12} = -1$ не совпадают.

Матрицей-строкой называется матрица, состоящая из одной строки.

Матрицей-столбцом называется матрица, состоящая из одного столбца.

Квадратной называется матрица, у которой число строк равно числу столбцов.

Диагональными элементами квадратной матрицы называются элементы, у которых номер столбца равен номеру строки: a_{11}, a_{22} и т.д.

Диагональной называется матрица, у которой все недиагональные элементы равны 0.

Главную диагональ квадратной матрицы порядка n образуют элементы $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ — диагональная матрица третьего порядка.

Единичной называется диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны 1, например,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ — единичная матрица третьего порядка.

1.2. Операции над матрицами

1. *Умножение матрицы на число*

Произведением матрицы A на число λ называется матрица $B = \lambda A$, элементы которой $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$.

Пример:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot(-1) & 2\cdot 3 \\ 2\cdot 4 & 2\cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 8 & 14 \end{pmatrix}.$$

2. *Сложение матриц*

Суммой двух матриц A и B одинакового размера $m \times n$ называется матрица $C = A + B$, элементы которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$ (т.е. матрицы складываются поэлементно).

Пример:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+0 & 2+3 \\ 5+1 & 4+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}.$$

3. ***Умножение матриц***

Умножение матрицы A на матрицу B определено, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. ***Произведением матриц*** $A \cdot B$ называется такая матрица C, каждый элемент которой равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B.

Пример:

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$AB = \begin{pmatrix} 1\cdot(-1)+0\cdot 7 & 1\cdot 3+0\cdot 4 \\ (-1)\cdot(-1)+2\cdot 7 & -1\cdot 3+2\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 15 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} -1\cdot 1+3\cdot(-1) & -1\cdot 0+3\cdot 2 \\ 7\cdot 1+4\cdot(-1) & 7\cdot 0+4\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Как видно из этого примера, не всегда $AB = BA$.

При умножении матриц единичная матрица E играет роль единицы, т.е. $AE = EA = A$ для любой квадратной матрицы A того же порядка, что и матрица E.

Пример:

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\cdot 1+3\cdot 0 & 7\cdot 0+3\cdot 1 \\ -1\cdot 1+2\cdot 0 & -1\cdot 0+2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. ***Транспонирование матрицы***

Транспонирование матрицы — это переход от матрицы A к матрице A^{T}, в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка. Матрица A^{T} называется транспонированной для матрицы A.

Пример:

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1.3. Определители квадратных матриц

Для каждой квадратной матрицы A вводится число $|A|$, называемое ее определителем.

Для матрицы первого порядка определитель $|A|$ равен ее элементу a_{11}.

Для матрицы второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{|A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}.} \qquad (1.1)$$

Пример:

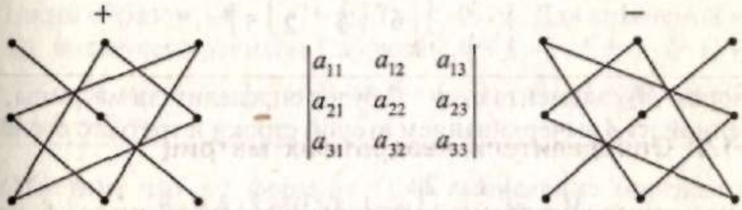
$$\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = 14 + 3 = 17.$$

Для матрицы третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} |A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ -a_{31}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}. \end{aligned}} \qquad (1.2)$$

Знаки, с которыми слагаемые входят в формулу (1.2), легко запомнить, пользуясь схемой (рис. 1.1), которая называется ***правилом треугольника***, или ***правилом Саррюса*** (для знака «плюс» основания равнобедренных треугольников параллельны главной диагонали, для знака «минус» — параллельны побочной диагонали).



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Рис. 1.1

Пример:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 6 + (-1)\cdot 1\cdot 5 + 4\cdot(-2)\cdot 0 - 5\cdot 3\cdot 0 -$$
$$-(-1)\cdot 4\cdot 6 - (-2)\cdot 1\cdot 2 = 36 - 5 + 0 - 0 + 24 + 4 = 59.$$

Определители матриц более высоких порядков вычисляются рекуррентным способом, т.е. переходом от больших порядков к меньшим. При этом используются понятия минора и алгебраического дополнения элемента матрицы.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ n-го порядка называется определитель матрицы $(n-1)$-го порядка, полученной из матрицы A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы A называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$:

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot M_{ij}.} \qquad (1.3)$$

Таким образом, алгебраическое дополнение совпадает с минором, когда сумма номеров строки и столбца $(i + j)$ — четное число, и отличается от минора знаком, когда $(i + j)$ — нечетное число. Например, $A_{23} = (-1)^{2+3}\cdot M_{23} = -M_{23}$; $A_{31} = (-1)^{3+1}\cdot M_{31} = M_{31}$.

Пример:

Для матрицы

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 6 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

минором M_{23} элемента $a_{23} = -2$ будет определитель матрицы, полученной из A вычеркиванием второй строки и третьего столбца:

$$M_{23}=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}=-1\cdot(-3)-2\cdot 6=-9.$$

Определителем матрицы A называется сумма произведений элементов первой строки матрицы A на их алгебраические дополнения, т.е.

$$\boxed{|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}.} \qquad (1.4)$$

З а м е ч а н и е. Вместо первой строки матрицы можно взять любую другую строку.

Пример:

Вычислить определитель матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

По формуле (1.4) имеем: $|A| = a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$. По определению алгебраических дополнений A_{ij}:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}=2\cdot 5-(-1)\cdot(-3)=10-3=7.$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -(-10+3) = 7.$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0.$$

Таким образом, $|A| = 1\cdot 7 + 0\cdot 7 + 4\cdot 0 = 7$. Для сравнения найдем $|A|$, пользуясь правилом Саррюса: $|A| = 1\cdot 2\cdot 5 + 0\cdot(-1)\cdot 3 + (-2)\cdot(-3)\cdot 4 - 4\cdot 2\cdot 3 - (-2)\cdot 0\cdot 5 - (-3)\cdot(-1)\cdot 1 = 10 + 0 + 24 - 24 - 0 - 3 = 7$.

Отметим, что по формуле (1.4) вычисление определителя n-го порядка сводится к вычислению определителей $(n-1)$-го порядка. В свою очередь, их вычисление последовательно сводится к вычислению определителей третьего (второго или первого) порядка.

1.4. Свойства определителей

Свойства

1. Если какая-либо строка (столбец) матрицы состоит из одних нулей, то ее определитель равен нулю.
2. Если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы умножить на число, то ее определитель умножится на это число.
3. Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы.
4. При перестановке двух строк (столбцов) матрицы ее определитель меняет знак на противоположный.
5. Если матрица содержит две одинаковые строки (столбца), то ее определитель равен нулю.
6. Если элементы двух строк (столбцов) матрицы пропорциональны, то ее определитель равен нулю.
7. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) этой матрицы равна нулю, т.е.

Свойства

$$\sum_{s=1}^{n} a_{is} A_{js} = 0 \text{ при } i \neq j.$$

8. Определитель матрицы не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.
9. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей: $|C| = |A| \cdot |B|$, где $C = AB$.

1.5. Обратная матрица

Обратной для квадратной матрицы A называется такая матрица A^{-1}, что

$$\boxed{A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E.} \qquad (1.5)$$

Пример:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

обратной будет матрица

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Невырожденной называется матрица, определитель которой не равен нулю.

Вырожденной называется матрица, имеющая нулевой определитель.

Обратная матрица A^{-1} существует (и единственна) тогда и только тогда, когда исходная матрица невырожденная $|A| \neq 0$.

Алгоритм

Алгоритм вычисления обратной матрицы:

1. Находим определитель исходной матрицы. Если $|A| = 0$, то матрица A вырожденная и A^{-1} не существует. Если $|A| \neq 0$, то матрица A невырожденная и ее обратная A^{-1} существует.
2. Находим алгебраические дополнения A_{ij} всех элементов матрицы A и строим из них новую матрицу $\widetilde{A} = (A_{ij})$.
3. Транспонируем матрицу $\widetilde{A}$ и получаем матрицу $\widetilde{A}^{\mathrm{T}} = (A'_{ij})$, где $A'_{ij} = A_{ji}$.
4. Делим все элементы матрицы $\widetilde{A}^{\mathrm{T}}$ на число $|A|$. Полученная матрица и будет обратной для A, т.е.

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A'_{ij}).} \tag{1.6}$$

Пример:

Найдем для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

обратную.

1. *Находим* $|A| = 2$, следовательно, обратная матрица существует.

2. Строим матрицу $\widetilde{A}$ из алгебраических дополнений A_{ij} [см. (1.3)]:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Транспонируем матрицу $\widetilde{A}$:

$$\widetilde{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Делим элементы матрицы $\widetilde{A}^{\mathrm{T}}$ на число $|A| = 2$ и получаем

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1.6. Ступенчатая матрица. Ранг матрицы

Ранг матрицы, наряду с определителем квадратной матрицы, является одной из ее важнейших характеристик. При нахождении ранга матрицы особую роль играют матрицы специального вида — ступенчатые. Примерами таких матриц являются матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ступенчатой называется матрица размера $m \times n$, если она имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 0\ldots0 & a_{1k_1} & & \ldots\, a_{1n} \\ 0\ldots0 & 0\ldots0 & a_{2k_2} & \ldots\, a_{2n} \\ \ldots & & & \\ 0\ldots0 & 0\ldots0 & 0\ldots0\ldots a_{mk_m} & \ldots\, a_{mn} \end{pmatrix},$$

где элементы $a_{1k_1} \neq 0$, $a_{2k_2} \neq 0$, $a_{3k_3} \neq 0 \ldots$, $a_{mk_m} \neq 0$, при этом $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots < k_m$.

Ступенчатая матрица не содержит нулевых строк, так как в каждой ее строке, например i-й, содержится ненулевой элемент $a_{ik_i} \neq 0$. Все ступеньки ступенчатой матрицы имеют в высоту одну строку, число ступенек равно числу строк матрицы.

Шириной ступеньки называется число элементов строки, стоящих на ступеньке. Например, в матрице A ширина первой (верхней) ступеньки равна 2, второй ступеньки — 1, третьей (нижней) ступеньки — 2. В общем виде ширина ступеньки, стоящей в i-й строке, равна $k_{i+1} - k_i$.

Элементарными преобразованиями строк матрицы называются следующие преобразования:

а) Отбрасывание нулевой строки.

б) Умножение всех элементов какой-либо строки на ненулевое число.

в) Перестановка строк.

г) Прибавление к каждому элементу какой-либо строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на некоторое число.

Матрица, полученная из данной элементарными преобразованиями строк, называется ***эквивалентной*** данной. Эквивалентность матриц обозначается знаком ~.

Покажем сначала способ приведения матрицы к ступенчатому виду. Пусть в матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 \ldots & b_n \end{pmatrix}$$

элемент $a_1 \neq 0$. Тогда, после умножения второй строки на a_1 и вычитания из нее первой строки, умноженной на b_1, получаем

$$A \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 a_1 - a_1 b_1 & b_2 a_1 - a_2 b_1 & \ldots & b_n a_1 - a_n b_1 \end{pmatrix}.$$

Элементы второй строки можно записать в виде определителей:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ b_1 & b_1 \end{vmatrix} = b_1a_1 - a_1b_1; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = b_2a_1 - a_2b_1; \ldots \begin{vmatrix} a_1 & a_n \\ b_1 & b_n \end{vmatrix} = b_na_1 - a_nb_1.$$

Имеем (при $a_1 \neq 0$):

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_1, & \ldots & a_n \\ b_1, & \ldots & b_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ 0 & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} & \ldots & \begin{vmatrix} a_1 & a_n \\ b_1 & b_n \end{vmatrix} \end{pmatrix}} \quad (1.7)$$

Формула (1.7) будет служить **общим правилом для приведения матриц к ступенчатому виду**.

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\substack{\text{перестановка строк} \\ \text{(второй и первой)}}} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & 2 & 9 & 14 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -7 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -7 & 14 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 11 & 49 \end{pmatrix}$$

— ступенчатая матрица.

Алгоритм

Алгоритм приведения произвольной матрицы A к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк.

(Этот алгоритм мы будем комментировать на предыдущем примере.)

1. Находим первый из столбцов, содержащих ненулевые элементы. Выбираем строку, содержащую один из этих элементов. (В матрице A первым ненулевым столбцом будет второй столбец. Выбираем вторую строку, в которой элемент $3 \neq 0$.)
2. Выбранную строку (если она не первая) меняем местами с первой строкой. (В нашем примере переставляем вторую и первую строки.)
3. Применяем правило (1.7) к парам строк, состоящим из первой и последующих строк. В первом ненулевом столбце останется только один верхний ненулевой элемент. Так мы получаем первую ступеньку. (В примере во втором столбце имеется только один ненулевой элемент.)
4. Сохраняя неизменной первую строку полученной матрицы, рассмотрим матрицу из остальных строк и применим к ней процедуру, описанную в пунктах 1–3 алгоритма.

В результате получаем ступенчатую матрицу, эквивалентную исходной матрице A.

Минором порядка k матрицы A называется определитель квадратной матрицы порядка k, получаемой из матрицы A вычеркиванием каких-либо ее строк и столбцов.

Пример:

- Матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

имеет одним из своих миноров второго порядка следующий минор:

$$5 = \begin{vmatrix} 1 & \cancel{2} & -1 \\ 0 & \cancel{4} & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

Рангом матрицы называется наибольший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.

В предыдущем примере ранг матрицы A равен 2.

Из свойств определителей, приведенных в параграфе 1.4, следует, что ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях ее строк. Поэтому ранг матрицы A равен рангу эквивалентной ей ступенчатой матрицы. Для ступенчатой же матрицы ранг равен числу ее строк (ступенек). Действительно, вычеркивая из ступенчатой матрицы соответствующие столбцы, получим треугольную матрицу с ненулевыми диагональными элементами, порядок которой равен числу строк, а определитель равен произведению диагональных элементов и не равен нулю.

Пример:

Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Приведем матрицу A к ступенчатому виду:

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 36 \end{pmatrix}.$$

Так как число ступенек равно 3, ранг матрицы A равен 3.

Вопросы

1. В каком месте матрицы $A = (a_{ij})$ расположен ее элемент a_{25}?

2. Могут ли быть равными квадратные матрицы, одна из которых второго порядка, другая – третьего?

3. Какие элементы расположены на главной диагонали единичной матрицы?

4. Какие матрицы получаются из матрицы A умножением на числа 0 и -1?

5. Можно ли найти сумму квадратной матрицы второго порядка и матрицы размера 3×2?

6. Пусть $A = (a_1 \ldots a_n)$ — матрица-строка,

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$ — матрица-столбец.

Отличаются ли произведения AB и BA?

7. Какая матрица получается при транспонировании матрицы-строки (матрицы-столбца)?

8. При каких условиях определитель матрицы второго порядка равен нулю?

9. С каким знаком входит в определитель матрицы третьего порядка слагаемое $a_{11}\, a_{23}\, a_{32}$?

10. Как можно получить из матрицы $A = (a_{ij})$ ее минор $\bar{M}_{18}$?

11. Чем отличается минор M_{74} от алгебраического дополнения A_{74}?

12. Чему равна сумма произведений элементов какой-либо строки матрицы на алгебраические дополнения элементов другой строки матрицы?

13. Как можно искать определитель произведения матриц?

14. Какой будет обратная матрица для диагональной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}?$$

15. Будет ли нулевая матрица ступенчатой? А единичная?

16. Пусть минор порядка 7 матрицы A не равен нулю. Каким может быть ранг матрицы?

17. Как найти ранг ступенчатой матрицы?

Глава 2

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Основные понятия и определения

Системой линейных уравнений с n неизвестными $x_1, ..., x_n$ называется система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n, \end{cases} \quad (2.1)$$

где a_{ij}, b_i ($i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$) — произвольные числа, называемые соответственно ***коэффициентами при неизвестных*** и ***свободными членами*** уравнений.

В более краткой записи с помощью знаков суммирования систему можно представить в виде

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \ (i = 1, 2, \ldots, m). \quad (2.2)$$

Решением системы (2.1) называется такая совокупность n чисел ($x_1, x_2, ..., x_n$), что при подстановке их в систему каждое уравнение системы обращается в тождество.

Совместной называется система уравнений, имеющая хотя бы одно решение.

Несовместной называется система уравнений, не имеющая решений.

Определенной называется совместная система уравнений, имеющая единственное решение.

Неопределенной называется совместная система уравнений, имеющая более одного решения.

Например, система уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3; \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

совместная и определенная, так как имеет единственное решение (1,1); система

$$\begin{cases} 2x_1 + \ \ x_2 = 3; \\ 4x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

несовместная; а система уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3; \\ 4x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$$

совместная и неопределенная, так как имеет более одного решения, а точнее — бесконечное множество решений ($x_1 = c$, $x_2 = 3 - 2c$, где c — любое число).

Равносильными или ***эквивалентными*** называются системы уравнений, имеющие одно и то же множество решений.

Запишем систему (2.1) в матричной форме. Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n} \\ a_{21} \ a_{22} \ \dots \ a_{2n} \\ \dots \\ a_{m1} \ a_{m2} \ \dots \ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$

где A — ***матрица коэффициентов*** при переменных или ***матрица системы***, X — ***матрица-столбец переменных***, B — ***матрица-столбец свободных членов***.

Так как число столбцов матрицы $A_{m \times n}$ равно числу строк матрицы $X_{n \times 1}$, то их произведение

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

является матрицей-столбцом. Элементами полученной матрицы являются левые части системы (2.1). На основании определения равенства матриц систему (2.1) можно записать в матричном виде:

$$AX = B. \tag{2.3}$$

2.2. Решение систем линейных уравнений

2.2.1. Метод обратной матрицы

Если в системе (2.1) число уравнений равно числу неизвестных ($m = n$) и матрица $A = (a_{ij})$ является невырожденной, т.е. $|A| \neq 0$, то для нее существует обратная матрица A^{-1}. Умножая слева обе части матричного равенства (2.3) на матрицу A^{-1}, получим $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$. Так как $(A^{-1}AX) = EX = X$, то решением системы будет матрица-столбец

$$X = A^{-1}B. \tag{2.4}$$

Пример:

Для системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2; \\ x_2 - x_3 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

определитель $|A| = 2$. Обратная матрица вычислена в примере параграфа 1.5:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Поэтому решением системы является матрица-столбец

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.2.2. Правило Крамера

Предположим, что матрица системы A является квадратной, а ее определитель $\Delta = |A| \neq 0$. Тогда решение системы является единственным и находится по ***формулам Крамера:***

$$\boxed{x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},\ i = 1, 2, \ldots, n,} \tag{2.5}$$

где Δ_i — определитель матрицы, полученной из матрицы системы заменой i-го столбца столбцом свободных членов.

Рассмотрим пример из п. 2.2.1. Здесь $\Delta = |A| = 2$,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2.$$

По формулам (2.5) имеем

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1,\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1.$$

2.2.3. Метод Гаусса

Для системы (2.1) запишем ***расширенную матрицу***, последний столбец которой состоит из свободных членов:

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} & b_1 \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{m1}a_{m2}\ldots a_{mn} & b_m \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Метод Гаусса заключается в том, что с помощью элементарных преобразований строк расширенная матрица, как и в параграфе 1.6, приводится к ступенчатому виду. Система линейных уравнений, соответствующая этой матрице, будет эквивалентна исходной. Для системы уравнений со ступенчатой матрицей все решения могут быть найдены последовательно, начиная с последнего уравнения. Проиллюстрируем метод Гаусса на примерах с различными видами систем.

Пример (системы с единственным решением):

Для системы уравнений из п. 2.2.1 расширенная матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Пользуясь методом элементарных преобразований, изложенном в параграфе 1.6, последовательно получаем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая система имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2; \\ x_2 - x_3 = 0; \\ 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Из последнего уравнения имеем $x_3 = 1$, затем из второго уравнения $x_2 = x_3 = 1$, наконец, из первого уравнения находим $x_1 = 2 - x_3 = 1$.

Пример (несовместной системы):

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 1; \\ 2x_1 + 4x_2 + x_4 = 3; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5. \end{cases}$$

Расширенную матрицу этой системы, как и ранее, приводим к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 8 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0; \\ 2x_3 + x_4 = 1; \\ 2x_4 = 4; \\ 0 \cdot x_4 = 8. \end{cases}$$

Так как два последних уравнения системы противоречивы, то система несовместна.

Пример (системы с множеством решений):

$$\begin{cases} 2x_1 - \ x_2 + \ x_3 + 3x_4 + \ x_5 = 2; \\ 2x_1 - \ x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1; \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 6x_5 = 5. \end{cases}$$

Приводим расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 2 & 6 & 6 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 2; \\ 3x_3 - x_4 + 2x_5 = -1; \\ 8x_5 = 2. \end{cases}$$

Из последнего уравнения имеем $x_5 = 1/4$. Из предыдущего уравнения находим $x_3 = (1/3)x_4 - 1/2$, тогда из первого уравнения $x_1 = (1/2)x_2 - (5/3)x_4 + 9/8$. Окончательно имеем:

$$\begin{aligned} &x_1 = 9/8 + (1/2)x_2 - (5/3)x_4, \\ &x_3 = -1/2 + (1/3)x_4, \\ &x_5 = 1/4. \end{aligned}$$

Таким образом, система имеет бесконечное множество решений. При этом неизвестные x_2, x_4 могут принимать любые значения. Неизвестные x_1, x_3, x_5 однозначно определяются заданием неизвестных x_2, x_4.

Алгоритм

Общий алгоритм решения линейных уравнений методом Гаусса

1. Составляем расширенную матрицу системы.
2. С помощью элементарных преобразований строк приводим расширенную матрицу к ступенчатому виду.
3. Если последняя ступенька полученной матрицы имеет только один шаг в ширину, то система несовместна. Если же последняя ступенька имеет не менее двух шагов в ширину, то система совместна.
4. Если число ступенек равно числу неизвестных и последняя ступенька имеет два шага в ширину, то система имеет единственное решение. Это решение находится последовательно, начиная с последнего уравнения.
5. Совместная система имеет бесконечное множество решений, если последняя ступенька имеет более двух шагов в ширину или хотя бы одна из остальных ступенек имеет более одного шага в ширину.

Базисными называются неизвестные, соответствующие первым ненулевым элементам строк в ступенчатой матрице. Остальные неизвестные называются ***свободными***.

В предыдущем примере неизвестные x_2, x_4 являются свободными, а неизвестные x_1, x_3, x_5 — базисными. После переноса свободных неизвестных в правые части уравнений системы получается система, которая однозначно разрешается относительно базисных неизвестных. Ее решение находят, как и на шаге 4, и выражают базисные неизвестные через свободные. Придавая свободным неизвестным произвольные значения, получают бесконечное множество решений системы.

Совместность системы можно проверять с помощью следующего критерия.

Теорема Кронекера — Капелли

Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу ее расширенной матрицы.

2.3. Модель межотраслевого баланса (модель Леонтьева)

Цель балансового анализа — ответить на вопрос, возникающий в макроэкономике и связанный с эффективностью ведения многоотраслевого хозяйства: каким должен быть объем производства каждой из отраслей, чтобы удовлетворить все потребности в продукции этой отрасли? При этом каждая отрасль выступает, с одной стороны, как производитель, а с другой стороны, как потребитель и своей, и произведенной другими отраслями продукции.

Связь между отраслями, как правило, отражается в таблицах межотраслевого баланса, а математическая модель, позволяющая их анализировать, разработана в 1936 году американским экономистом русского происхождения В. Леонтьевым.

Обозначим через x_i валовой выпуск продукции i-й отрасли за планируемый период и через y_i — конечный продукт i-й отрасли, идущий на внешнее для рассматриваемой отрасли потребление (средства производства других отраслей, потребление населения, образование запасов и т.д.).

Таким образом, разность $x_i - y_i$ составляет часть продукции i-й отрасли, предназначенную для внутрипроизводственного потребления во всех отраслях. Будем в дальнейшем полагать, что баланс составляется не в натуральном, а в стоимостном разрезе.

Обозначим через x_{ij} часть продукции i-й отрасли, которая потребляется j-й отраслью для обеспечения выпуска продукции в размере x_j.

Очевидно, величины x_i, x_{ij} и y_i связаны следующими балансовыми равенствами:

$$\begin{cases} x_1 - (x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n}) = y_1; \\ x_2 - (x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n}) = y_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n - (x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nn}) = y_n. \end{cases} \tag{2.7}$$

Соотношением баланса называются формулы, вытекающие из (2.7):

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i,\ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.8}$$

Введем коэффициенты прямых затрат:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}\ (i, j = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.9}$$

показывающие объем продукции i-й отрасли, затраченный на производство единицы продукции j-й отрасли.

Как заметил В. Леонтьев, можно считать, что коэффициенты a_{ij} постоянны в некотором промежутке времени, охватывающем как предшествующий, так и планируемый период. Исходя из этого предположения имеем

$$x_{ij} = a_{ij} x_j, \tag{2.10}$$

т.е. затраты i-й отрасли для j-й отрасли пропорциональны ее валовому выпуску, или, другими словами, зависят линейно от валового выпуска x_j. Поэтому равенство (2.10) называют ***условием линейности прямых затрат.***

Матрицей затрат называют матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

составленную из коэффициентов прямых затрат a_{ij}, рассчитанных по формуле (2.9) с помощью данных об исполнении баланса за предшествующий период либо определенных другим образом.

Заметим, что все элементы такой матрицы неотрицательны. Это условие записывают сокращенно в виде матричного неравенства $A \geq 0$. Такую матрицу называют ***неотрицательной***.

Матрица A определяет все внутренние взаимосвязи между производством и потреблением.

Подставляя значения x_{ij}, a_{ij}, x_j во все уравнения системы (2.7), получим ***линейную балансовую модель:***

$$\begin{cases} x_1 - (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n) = y_1; \\ x_2 - (a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n) = y_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n - (a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n) = y_n, \end{cases} \tag{2.11}$$

характеризующую баланс затрат выпуска продукции.

Представленную модель можно рассмотреть в матричном виде.

Соотношение баланса (2.8) с учетом коэффициентов прямых затрат будет иметь вид

$$X = AX + Y. \tag{2.12}$$

Формула (2.12) представляет собой ***уравнение Леонтьева***, где X — вектор валового выпуска, Y — вектор конечного продукта, A — матрица прямых затрат:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \\ a_{n1}\, a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Для определения валового выпуска по известному конечному продукту воспользуемся уравнением Леонтьева $X - AX = Y$ и перепишем его в ином виде: $(E - A)X = Y$. Если матрица $(E - A)$ невырожденная, т.е. $|E - A| \neq 0$, то

$$X = (E - A)^{-1} Y. \qquad (2.13)$$

Матрицей полных затрат называется матрица $S = (E - A)^{-1}$, каждый элемент s_{ij} которой есть величина валового выпуска продукции *i*-й отрасли, необходимого для обеспечения выпуска единицы конечного продукта *j*-й отрасли.

В соответствии с экономическим смыслом задачи значения x_i должны быть неотрицательны при неотрицательных значениях $y_i \geq 0$ и $a_{ij} \geq 0$; $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Матрица $A \geq 0$ называется ***продуктивной***, если для любого вектора $Y \geq 0$ существует решение $X \geq 0$ уравнения Леонтьева.

> Матрица A продуктивна, если максимум сумм элементов ее столбцов не превосходит единицы, причем хотя бы для одного из столбцов сумма его элементов строго меньше единицы.

Пример:

Пусть имеются две фирмы-производителя. Предположим, что конечный продукт фирмы 1 должен составить 70 единиц, а фирмы 2 — 120.

Требуется *определить* необходимый валовой выпуск каждой фирмы, если матрица коэффициентов прямых затрат A имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Для решения задачи воспользуемся уравнением Леонтьева в виде $X = (E - A)^{-1} Y$. Найдем матрицу $(E{-}A)$.

$$(E - A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & -0{,}4 \\ -0{,}8 & 0{,}8 \end{pmatrix}.$$

Вычислим обратную матрицу $(E - A)^{-1}$:

$$(E - A)^{-1} = \frac{1}{0{,}4} \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 0{,}9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1{,}25 \end{pmatrix}.$$

Теперь, подставляя в формулу заданный вектор-столбец конечного продукта Y, находим валовой выпуск:

$$X = (E - A)^{-1} Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2{,}25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 70 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 260 \\ 410 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, валовой выпуск фирмы 1 должен составить 260 единиц, а фирмы 2 — 410.

Вопросы

1. При каких условиях система линейных уравнений имеет единственное решение?

2. *При каких условиях система линейных уравнений, определяемая ступенчатой матрицей:* а) *совместна;* б) *несовместна;* в) *имеет единственное решение;* г) имеет множество решений?

3. К какой системе применим метод обратной матрицы?

4. К какой системе линейных уравнений применимо правило Крамера?

5. Чему равно количество базисных неизвестных для системы, определяемой ступенчатой матрицей?

6. Чему равно количество свободных неизвестных для системы, определяемой ступенчатой матрицей?

7. Пусть все свободные члены системы уравнений равны 0. Будет ли нулевым решение системы, в котором все свободные неизвестные равны 0?

Глава 3

ГЕОМЕТРИЯ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

3.1. Векторы на плоскости и в пространстве

Понятия плоскости и пространства мы предполагаем известными из школьного курса геометрии.

Вектором называется направленный отрезок $\overline{AB}$ (или упорядоченная пара точек).

Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются ***равными***, если четырехугольник $ABDC$ является параллелограммом (рис. 3.1).

Свободным вектором (а иногда просто вектором) называется совокупность всех равных между собой векторов. Свободный вектор задается одним из векторов, входящих в данную совокупность равных между собой векторов. Другими словами, свободный вектор — это вектор, начало которого можно поместить в любую точку. Векторы обозначаются или парами точек с черточкой: $\overline{AB}$, или малыми латинскими буквами: $\boldsymbol{a}$.

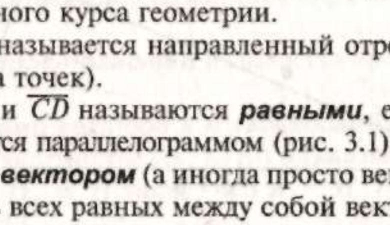


Рис. 3.1

Вектор $\overline{AA}$ называется ***нулевым*** и обозначается $\mathbf{0}$.

Длиной вектора $\overline{AB}$ называется число $|\overline{AB}|$, равное длине отрезка $[AB]$.

Произведением вектора a ***на число*** λ называется вектор, длина которого равна $|\lambda| \cdot |\boldsymbol{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\boldsymbol{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно ему, если $\lambda < 0$ (рис. 3.2).

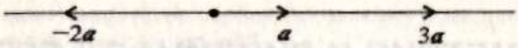


Рис. 3.2

Суммой векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ называется вектор $\overline{AC}$ (правило треугольника). Для определения суммы свободных векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ введем векторы $\overline{AB} = \boldsymbol{a}$ и $\overline{BC} = \boldsymbol{b}$. Тогда свободный вектор $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ определяется вектором $\overline{AC}$ (рис. 3.3).

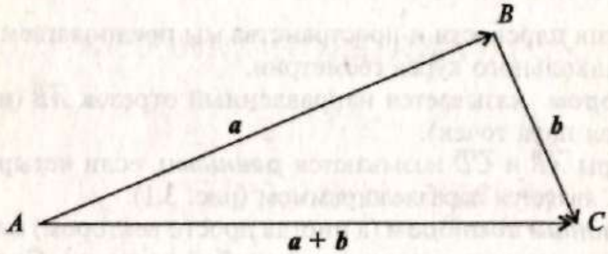


Рис. 3.3

Коллинеарными называются два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ на плоскости или в пространстве, если соответствующие им отрезки лежат на параллельных прямых. Коллинеарность векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равносильна существованию числа λ такого, что $\boldsymbol{b} = \lambda \boldsymbol{a}$ (рис. 3.4).

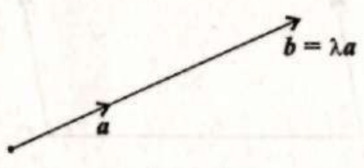


Рис. 3.4

Компланарными называются три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ (в пространстве), если соответствующие им направленные отрезки параллельны некоторой плоскости. Компланарность неколлинеарных векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ равносильна существованию чисел λ и μ таких, что $\boldsymbol{c} = \lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b}$ (рис. 3.5).

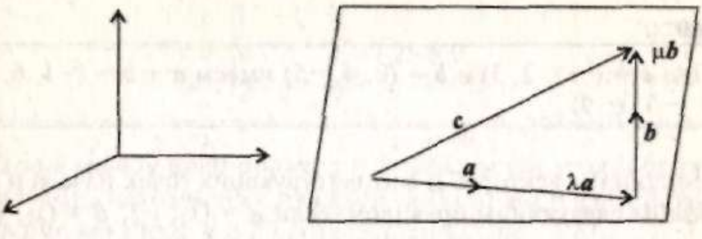


Рис. 3.5

Базисом на плоскости называется пара неколлинеарных векторов.

Базисом в пространстве называется тройка некомпланарных векторов.

Координатами вектора a в заданном базисе на плоскости ($\{l_1, l_2\}$) или в пространстве ($\{l_1, l_2, l_3\}$) называются числа (x, y) или соответственно (x, y, z) такие, что $\boldsymbol{a} = xl_1 + yl_2$ (рис. 3.6) или $\boldsymbol{a} = xl_1 + yl_2 + zl_3$.

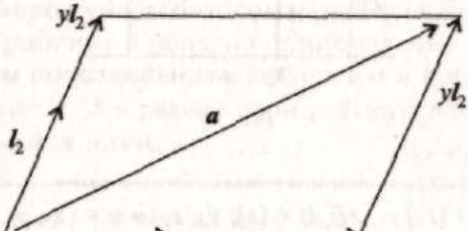


Рис. 3.6

Задание базиса на плоскости или в пространстве позволяет отождествлять каждый вектор $\boldsymbol{a}$ с парой или тройкой чисел (x, y) или (x, y, z) — его координатами в заданном базисе. При этом координаты суммы векторов $\boldsymbol{a} = (x, y)$ и $\boldsymbol{b} = (x_1, y_1)$ равны сумме координат слагаемых: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (x + x_1, y + y_1)$, а координаты произведения $\lambda\boldsymbol{a}$ равны произведениям координат вектора $\boldsymbol{a}$ на число λ: $\lambda\boldsymbol{a} = (\lambda x, \lambda y)$.

Пример:

Для $\boldsymbol{a} = (-1, 2, 3)$ и $\boldsymbol{b} = (0, 4, -5)$ имеем $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (-1, 6, -2)$, $3\boldsymbol{a} = (-3, 6, 9)$.

Координаты векторов и соответствующих точек начала и конца связаны следующим правилом: если $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ — две точки плоскости, заданные своими координатами, то свободный вектор $\boldsymbol{a} = \overline{AB}$ имеет координаты

$$\boxed{\boldsymbol{a} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1),} \tag{3.1}$$

т.е. координаты равны разности координат конца и начала (рис. 3.7). Аналогичная формула верна и для точек в пространстве.

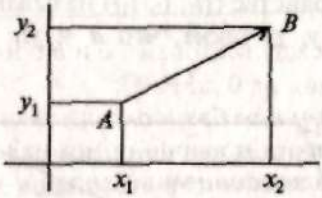


Рис. 3.7

Векторы $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\boldsymbol{b} = (x_2, y_2, z_2)$ и $\boldsymbol{c} = (x_3, y_3, z_3)$ в пространстве компланарны тогда и только тогда, когда определитель матрицы, составленной из их координат, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.2}$$

Пример:

Векторы $\boldsymbol{a} = (1, -1, 2)$, $\boldsymbol{b} = (0, 4, 3)$, $\boldsymbol{c} = (2, 1, 0)$ некомпланарны, так как

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -25 \neq 0.$$

***Углом между векторами** $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$* называется угол, образованный лучами, выходящими из какой-либо точки и имеющими направление векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ соответственно (рис. 3.8).

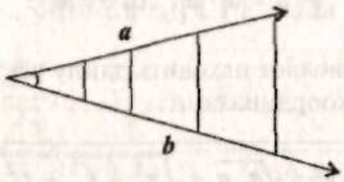


Рис. 3.8

Величина угла между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ обозначается через $\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}$ и принимает значения от 0 до π.

Ортонормированным базисом называется базис, в котором все векторы единичны и попарно ортогональны.

Скалярным произведением векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется число, обозначаемое $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ и равное произведению длин векторов на косинус угла между ними:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cos \widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}. \tag{3.3}$$

Критерий перпендикулярности векторов

Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$.

Если векторы $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1)$ и $\boldsymbol{b} = (x_2, y_2)$ заданы своими координатами в ортонормированном (!) базисе, то их скалярное произведение $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = x_1x_2 + y_1y_2. \tag{3.4}$$

Для векторов $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\boldsymbol{b} = (x_2, y_2, z_2)$ в пространстве аналогично имеем

$$\boxed{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.} \tag{3.5}$$

Из определения скалярного произведения векторов (3.3) следует, что

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{a}| \cdot \cos 0 = |\boldsymbol{a}|^2.$$

Эта фомула позволяет находить длину вектора $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1, z_1)$, заданного своими координатами:

$$\boxed{|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.} \tag{3.6}$$

На основании формулы (3.3) можно также найти величину $\varphi = \widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}$, угла между ненулевыми векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|},} \tag{3.7}$$

или в координатах

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.} \tag{3.8}$$

Пример:

Задан треугольник ABC, $A = (1, 0, 2)$, $B = (-2, 3, 4)$, $C = (-1, 3, 5)$. Найти:

а) какой-либо вектор, перпендикулярный стороне BC;

б) величину угла ABC.

Сначала найдем координаты вектора $\overline{BC}$. По формуле (3.1) имеем $\overline{BC} = (1, 0, 1)$. Пусть искомый вектор $\boldsymbol{p}$ имеет координаты (x, y, z). Тогда по критерию перпендикулярности векторов имеем

$\boldsymbol{p} \cdot \overline{BC} = x + z = 0$, или $z = -x$. Итак, всякий вектор, перпендикулярный стороне BC, имеет координаты $(x, y, -x)$, где x, y — произвольные числа.

Величина угла ABC (обозначим ее через β) равна величине угла между векторами $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$. Поскольку $\overline{BA} = (3, -3, -2)$, $\overline{BC} = (1, 0, 1)$, то по формуле (3.8) имеем

$$\cos\beta = \frac{3\cdot 1 + (-3)\cdot 0 + (-2)\cdot 1}{\sqrt{9+9+4}\cdot\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{44}} = \frac{\sqrt{11}}{22}.$$

Итак, $\beta = \arccos\dfrac{\sqrt{11}}{22}$.

3.2. Арифметическое *n*-мерное векторное пространство

В предыдущем параграфе производилось отождествление геометрических объектов — векторов плоскости или пространства, с арифметическими объектами — парами или тройками чисел. Обобщая эту идею и учитывая то, что геометрическая интерпретация в пространствах размерности большей трех затруднительна, перейдем к арифметическому заданию векторов.

Арифметическим n-вектором (или просто n-вектором) называется упорядоченный набор из n вещественных чисел. Обозначать n-векторы будем по-прежнему: $\boldsymbol{a} = (x_1, ..., x_n)$.

Перенося на n-векторы линейные операции суммы векторов и произведения вектора на число, приходим к определению:

Суммой n-векторов $\boldsymbol{a} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $\boldsymbol{b} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ называется вектор $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$.

Произведением n-вектора $\boldsymbol{a} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ***на число*** λ называется n-вектор $\lambda\boldsymbol{a} = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$.

Нулевым называется n-вектор $\mathbf{0} = (0, 0, ..., 0)$.

Легко проверить, что введенные операции над векторами обладают следующими свойствами:

Свойства

1. $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$ (ассоциативность суммы);
2. $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}$ (наличие нейтрального элемента для суммы);
3. $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ (наличие противоположного элемента для суммы);
4. $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$ (коммутативность суммы);
5. $\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$ (дистрибутивность умножения числа на сумму векторов);
6. $(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$ (дистрибутивность умножения суммы чисел на вектор);
7. $(\lambda\mu)\boldsymbol{a} = \lambda(\mu\boldsymbol{a})$ (ассоциативность умножения произведения чисел на вектор).
8. $1 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ (нейтральность единицы при умножении числа на вектор).

Арифметическим n-мерным векторным пространством называется множество $\overline{R^n}$ всех n-векторов вместе с заданными операциями суммы n-векторов и произведения n-вектора на число.

Свойства 1—8 называются ***аксиомами n-векторного пространства.***

Примеры:

1. Пространство $\overline{R^2}$ можно отождествить с векторами плоскости, на которой выбран базис.

2. Для заданной матрицы A размера $m \times n$ (m — количество строк, n — количество столбцов) строки матрицы можно рассматривать как n-векторы.

По аналогии с выражением скалярного произведения векторов в координатах (3.4) можно определить скалярное произведение n-векторов.

Скалярным произведением n-векторов $\boldsymbol{a} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\boldsymbol{b} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ называется число

$$\boxed{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.} \quad (3.9)$$

На основе скалярного произведения определяется ***длина n-вектора:***

$$\boxed{|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.} \tag{3.10}$$

Введенная таким образом длина n-вектора обладает свойствами длины векторов плоскости и пространства. А именно имеют место формулы

$$|\lambda \boldsymbol{a}| = |\lambda| \cdot |\boldsymbol{a}|,$$

$$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| \le |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| \text{ (неравенство треугольника).} \tag{3.11}$$

Величина угла φ между ненулевыми n-векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ определяется равенством [см. (3.7)]

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|}.} \tag{3.12}$$

Перпендикулярными называются два n-вектора, если их скалярное произведение равно нулю (или величина угла между ними равна $\pi/2$).

3.3. Линейная зависимость *n*-векторов. Базис, координаты

Пусть задана система из k n-векторов пространства $\overline{R^n}$:

$$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k\}. \tag{3.13}$$

Линейной комбинацией векторов системы (3.13) с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ называется n-вектор

$$\boldsymbol{a} = \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_k \boldsymbol{a}_k.$$

Например, сумма $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_k$ является линейной комбинацией с коэффициентами 1, 1, 1, ..., 1. Нулевой n-вектор $\boldsymbol{0} = 0 \times \times \boldsymbol{a}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{a}_2 + \ldots + 0 \cdot \boldsymbol{a}_k$ является нулевой линейной комбинацией — с коэффициентами 0, 0, 0, ..., 0.

Пример:

Нулевой вектор можно получить не только с помощью нулевой комбинации векторов. Так, если для системы из трех векторов $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ в качестве коэффициентов взять числа 1, −1, 0, то получим нулевой вектор: $1 \cdot \boldsymbol{a} - 1 \cdot \boldsymbol{a} + 0 \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

Система n-векторов (3.13) называется ***линейно зависимой***, если существует некоторая ее линейная комбинация, в которой не все коэффициенты равны нулю, равная нулевому n-вектору. Другими словами, если существует ненулевой набор коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ такой, что

$$\boxed{\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + ... + \alpha_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0}.} \tag{3.14}$$

Линейно независимой называется система n-векторов (3.13), если только нулевая линейная комбинация n-векторов системы равна нулевому вектору. Другими словами, если из равенства (3.14) следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = 0$.

Примеры:

1. Система, содержащая нулевой n-вектор, линейно зависима. Действительно, для системы $\{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_k\}$ имеем

$$\alpha_1 \cdot \boldsymbol{0} + 0 \cdot \boldsymbol{a}_2 + ... + 0 \cdot \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0},$$

где $\alpha_1 \neq 0$.

2. Система, содержащая два одинаковых n-вектора, линейно зависима. Действительно, для системы $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, ..., \boldsymbol{a}_k\}$ имеем

$$\alpha_1 \cdot \boldsymbol{a} - \alpha_1 \cdot \boldsymbol{a} + 0 \cdot \boldsymbol{a}_3 + ... + 0 \cdot \boldsymbol{a}_k = 0,$$

где $\alpha_1 \neq 0$.

3. Система векторов $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\}$ линейно зависима, так как ее комбинация с коэффициентами 1, 1, −1 дает нулевой вектор: $1 \cdot \boldsymbol{a} + 1 \cdot \boldsymbol{b} - 1\,(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}$.

4. Система из двух векторов на плоскости линейно зависима тогда и только тогда, когда эти векторы коллинеарны.

5. Система из трех векторов в пространстве зависима тогда и только тогда, когда ее векторы компланарны.

6. Система n-векторов

$$\boldsymbol{l}_1 = (1, 0, 0, ..., 0), \boldsymbol{l}_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ..., \boldsymbol{l}_n = (0, 0, ..., 1) \quad (3.15)$$

линейно независима.

Линейную зависимость системы n-векторов можно описать следующими критериями.

> Система n-векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из ее векторов является линейной комбинацией остальных векторов системы.

> Система n-векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда ранг матрицы, строки которой являются векторами системы, меньше количества векторов системы (количества строк матрицы). Если ранг указанной матрицы равен количеству ее строк, то система линейно независима.

Пример:

1. Система векторов $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 + 3\boldsymbol{a}_3\}$ линейно зависима, так как последний ее вектор является линейной комбинацией предыдущих.

2. Система 4-векторов $\boldsymbol{a}_1 = (2, 1, 3, -1)$; $\boldsymbol{a}_2 = (0, 1, -1, 2)$; $\boldsymbol{a}_3 = (-1, 1, 1, -1)$ линейно независима, поскольку матрица из координат этих векторов равна

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & -9 \end{pmatrix},$$

а ранг этой матрицы равен 3 (числу строк ступенчатой матрицы).

Рангом системы n-векторов называется максимальное число n-векторов из системы, составляющих линейно независимую подсистему.

Пример:

Ранг системы векторов $\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, 2)$; $\boldsymbol{a}_2 = (-1, 1, 4)$; $\boldsymbol{a}_3 = (0, 1, 6)$ равен 2, поскольку подсистема из двух ее векторов $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ линейно независима. Сама же система линейно зависима, так как $\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$.

> Ранг системы n-векторов равен рангу матрицы, строки которой являются n-векторами системы.

Пример:

Найти ранг системы 4-векторов $\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, 1, 3)$, $\boldsymbol{a}_2 = (-1, 2, 4, 0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (0, 2, 5, 3)$.

Составим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

и приведем ее к ступенчатому виду элементарными преобразованиями строк. Имеем:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ранг заданной системы 4-векторов равен 2, т.е. рангу матрицы A.

Базисом векторного пространства $\overline{R^n}$ называется любая линейно независимая система n-векторов этого пространства, количество которых равно n. Например, система n-векторов (3.15) является базисом в $\overline{R^n}$. Этот базис называется ***каноническим***.

> В пространстве $\overline{R^n}$ любая система, содержащая более чем n векторов, является линейно зависимой.

Если в пространстве $\overline{R^n}$ выбран базис

$$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}, \tag{3.16}$$

то всякий n-вектор $\boldsymbol{b} \in \overline{R^n}$ однозначно представляется в виде линейной комбинации

$$\boldsymbol{b} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{a}_n.$$

Числа $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называются ***координатами*** n-вектора $\boldsymbol{b}$ в базисе (3.16). Этот факт обозначается формулой

$$\boldsymbol{b} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_{\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}}.$$

Пример:

Показать, что 3-векторы

$$\boldsymbol{a}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \boldsymbol{a}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \boldsymbol{a}_3 = (0, 1, 0) \tag{3.17}$$

образуют ортонормированный базис пространства $\overline{R^3}$ и найти координаты 3-вектора $\boldsymbol{b} = (2, 1, 0)$ в этом базисе.

Легко проверить, что $\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_1 = 1$, $\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 = 0$, $\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_3 = 0$, $\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_2 = 1$, $\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_3 = 0$, $\boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{a}_3 = 1$, значит, векторы $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ имеют единичную длину и попарно перпендикулярны, т.е. эта система векторов является ортонормированной.

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

имеет ранг 3. Поэтому 3-векторы (3.17) линейно независимы и образуют базис.

Для нахождения координат 3-вектора $\boldsymbol{b} = (2,\ 1,\ 0)$ в базисе (3.17) запишем равенство $\boldsymbol{b} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3$. Перепишем это равенство в координатах:

$$\begin{cases} 2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}x_2 + 0 \cdot x_3, \\ 1 = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3, \\ 0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}x_2 + 0 \cdot x_3. \end{cases}$$

Для полученной системы запишем расширенную матрицу

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица эквивалентна ступенчатой матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда имеем $x_3 = 1$, $x_2 = \sqrt{2}$, $x_1 = \sqrt{2}$.

Таким образом,

$$\boldsymbol{b} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)_{\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}}.$$

3.4. Линейные преобразования (операторы), их собственные векторы

В арифметическом векторном пространстве $\overline{R^n}$ определяются преобразования, которые сохраняют линейные операции над векторами.

Для задания таких преобразований запишем всякий арифметический n-вектор $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ в виде матрицы-столбца

$$(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Линейным преобразованием арифметического n-векторного пространства $\overline{R^n}$, заданным квадратной матрицей $A = (a_{ij})$, называется преобразование, которое n-вектору

$$(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ставит в соответствие n-вектор

$$A(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}.$$

При этом соответствии преобразованный n-вектор $A(\boldsymbol{x})$ является матрицей-столбцом, полученным матричным умножением матрицы A на матрицу-столбец $(\boldsymbol{x})$.

Примеры:

1. Единичная 2×2-матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

задает тождественное преобразование арифметического 2-пространства $\overline{R^2}$. Действительно, для любого 2-вектора

$$(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

преобразованный 2-вектор

$$E(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{x}),$$

т.е. $E(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ для любого $\boldsymbol{x}$.

2. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

задает на плоскости $\overline{R^2}$ проекцию на первую ось (рис. 3.9). Действительно,

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

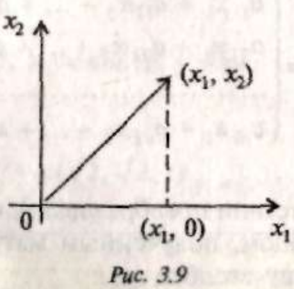


Рис. 3.9

3. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

задает в пространстве $\overline{R^3}$ умножение 3-вектора (x) на число λ: $A\,(x) = \lambda\,(x)$.

Основные свойства линейных преобразований пространства $\overline{R^n}$, заданных матрицами, выражаются через линейные операции над n-векторами:

Свойства

$$\boxed{A((x) + (y)) = A(x) + A(y),} \tag{3.18}$$

$$\boxed{A(\lambda x) = \lambda A(x).} \tag{3.19}$$

Эти свойства легко проверяются на основе свойств операций над матрицами. Формулы (3.18), (3.19) можно положить в основу определения линейных преобразований.

Линейным преобразованием n-векторного пространства $\overline{R^n}$ называется такое преобразование $y = f(x)$, которое сохраняет линейные операции над n-векторами, т.е.

$$f(x + z) = f(x) + f(z),\ \forall\,(x),\,(z) \in \overline{R^n},$$

$$f(\lambda x) = \lambda f(x),\ \forall \lambda \in R,\ \forall (x) \in \overline{R^n}.$$

Всякое линейное преобразование $(y) = f(x)$ n-векторного пространства $\overline{R^n}$ является преобразованием, заданным квадратной матрицей A, столбцами которой служат n-векторы-столбцы

$$f(l_1),\ f(l_2),\ \dots,\ f(l_n),$$

где $\{l_1, l_2, \dots, l_n\}$ — канонический базис в $\overline{R^n}$.

Пример:

Пусть в пространстве $\overline{R^3}$ задано преобразование

$$(y) = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что это преобразование является линейным. Запишем соответствующую матрицу A. Она имеет своими столбцами векторы-столбцы

$$f(l_1) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f(l_2) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, f(l_3) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для проверки умножим матрицу A на вектор-столбец

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

получим

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $f(x) = A(x)$.

При описании линейных преобразований и изучении их свойств особую роль играют собственные векторы.

Собственным вектором линейного преобразования A называется ненулевой n-вектор $\boldsymbol{a} \in R^n$, который после преобразования остается коллинеарным самому себе, т.е. умножается на некоторое число λ: $A(\boldsymbol{a}) = \lambda \boldsymbol{a}$.

Число λ называется ***собственным значением*** для вектора $\boldsymbol{a}$.

Пример:

Для линейного преобразования $A(\boldsymbol{x}) = 2(\boldsymbol{x})$ все ненулевые векторы будут собственными, а их собственные значения равны 2.

Характеристическим уравнением матрицы A (или линейного преобразования A) называется уравнение

$$\boxed{|\lambda E - A| = 0,} \tag{3.20}$$

где λ — неизвестное, E — единичная матрица порядка n.

Пример:

Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

характеристическое уравнение имеет вид

$$|\lambda E - A| = \left(\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda = 0.$$

Собственные значения линейного преобразования с матрицей A являются корнями характеристического уравнения

$$|\lambda E - A| = 0.$$

Пользуясь этим свойством, можно находить собственные значения линейного преобразования. Однако поскольку характеристическое уравнение является уравнением порядка n относительно неизвестного λ, то формулы для его корней имеются при $n = 2$ и только иногда при $n > 2$.

Для собственного значения λ_0 линейного преобразования с матрицей A соответствующий собственный вектор находится из условия $A(x) = \lambda_0 \cdot (x)$. Переписывая это равенство в виде

$$(A - \lambda_0 E)(x) = (0), \tag{3.21}$$

имеем систему линейных однородных уравнений. Ненулевые решения этой системы и будут собственными векторами линейного преобразования A.

Пример:

Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение $|\lambda E - A| = \lambda^2 - \lambda = 0$. Его корни — числа $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, которые и будут собственными значениями. Для собственного значения $\lambda_1 = 0$ система (3.21) имеет вид

$$(A - 0 \cdot E)(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ -x_1 = 0. \end{cases}$$

Решениями будут 2-векторы $(0, x_2)$, где $x_2 \neq 0$.

Для собственного значения $\lambda_2 = 1$ система (3.21) имеет вид

$$(A - E)(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

или $-x_1 - x_2 = 0$. Решениями будут 2-векторы $(x_1, -x_1)$, где $x_1 \neq 0$.

Таким образом,

$$A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},$$

и векторы $\boldsymbol{a}_1 = (0,\ 1)$; $\boldsymbol{a}_2 = (1,\ -1)$ будут собственными.

3.5. Модель международной торговли

Понятие собственных векторов линейного преобразования используется в модели международной торговли.

Пусть имеется n стран с национальными доходами $x_1, ..., x_n$. Допустим, каждая из стран тратит весь национальный доход либо на закупку товаров внутри страны, либо на импорт из остальных стран. Пусть x_{ij} $(i, j = 1, 2, ..., n)$ — часть национального дохода j-й страны, которую она тратит на закупку товаров в i-й стране. Например, x_{22} — часть дохода 2-й страны, которая тратится на закупку внутри страны.

Имеют место равенства

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{n1} = x_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{nn} = x_n. \end{cases} \tag{3.22}$$

Введем величины $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$, которые отражают долю (относительную часть) национального дохода j-й страны, которая тратится в i-й стране.

Структурной матрицей торговли называется матрица, составленная из a_{ij}:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Разделив каждое i-е уравнение системы (3.22) на x_i, получим

$$\begin{cases} a_{11} + a_{21} + \ldots + a_{1n} = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} + a_{n2} + \ldots + a_{nn} = 1, \end{cases} \tag{3.23}$$

т.е. сумма элементов каждого столбца структурной матрицы торговли равна единице.

Для каждой из стран выручка от торговли равна

$$P_i = x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in}.$$

С учетом равенств $x_{ij} = a_{ij}x_j$ выражение для выручки P_i запишется в виде

$$P_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n.$$

Торговля между странами будет бездефицитной для каждой из стран, если ее выручка будет не меньше национального дохода, т.е.

$$P_i \geq x_i \quad \text{для всех } i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.24}$$

Легко видеть, что при условиях (3.24) неравенства $P_i > x_i$ невозможны, т.к. если какая-либо страна получит прибыль от торговли, то хотя бы одна из других стран понесет убытки: $P_i < x_i$. Таким образом, если торговля является бездефицитной для всех стран, то $P_i = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, или

$$a_{i1}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = x_i,\ i = 1, \ldots, n. \tag{3.25}$$

Запишем систему (3.25) в матричном виде:

$$AX = X \text{ (или } (A - E)X = 0), \tag{3.26}$$

где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ — вектор-столбец национальных доходов.

Равенство (3.26) означает, что вектор X является собственным вектором линейного преобразования с матрицей A, при этом собственное значение для X равно 1. Таким образом, при заданной структурной матрице торговли можно находить вектор национальных доходов как собственный вектор матрицы A с собственным значением 1.

Пример:

Пусть задана структурная матрица торговли трех стран

$$A = \begin{pmatrix} 1/7 & 2/14 & 4/21 \\ 3/7 & 5/14 & 6/21 \\ 3/7 & 7/14 & 11/21 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти национальный доход каждой из этих стран, обеспечивающий бездефицитную торговлю между ними.

Уравнения (3.26) запишутся в виде

$$\begin{cases} -\dfrac{6}{7}x_1 + \dfrac{2}{14}x_2 + \dfrac{4}{21}x_3 = 0, \\ \dfrac{3}{7}x_1 - \dfrac{9}{14}x_2 + \dfrac{6}{21}x_3 = 0, \\ \dfrac{3}{7}x_1 + \dfrac{7}{14}x_2 - \dfrac{10}{21}x_3 = 0. \end{cases}$$

Умножим все уравнения системы на 42, запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} -36 & 6 & 8 & 0 \\ 18 & -27 & 12 & 0 \\ 18 & 21 & -20 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -36 & 6 & 8 & 0 \\ 0 & 864 & -576 & 0 \\ 0 & -864 & 576 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -18 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получим систему

$$\begin{cases} -18x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Из этой системы находим

$$x_2 = \frac{2}{3}x_3,\ x_1 = \frac{1}{3}x_3.$$

Придавая значение $x_3 = 300$, имеем $x_1 = 100$, $x_2 = 200$.

Таким образом, в качестве вектора национальных доходов для бездефицитной торговли можно взять вектор (100, 200, 300) или любой вектор, ему пропорциональный.

3.6. Аналитическая геометрия на плоскости

Продолжим изучение свойств фигур на евклидовой плоскости. В отличие от школьной геометрии, методы которой можно назвать синтетическими, будем пользоваться аналитическим методом. Основу этого метода составляет переход от геометрических объектов — точек к их координатам — парам чисел.

Пусть E^2 — евклидова плоскость, на которой выбрана система координат. Тогда каждая точка A плоскости отождествляется с парой чисел (x_0, y_0) — ее абсциссой и ординатой (рис. 3.10).

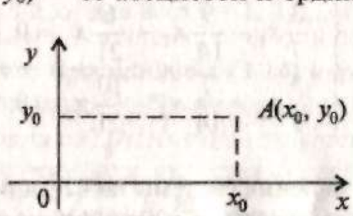


Рис. 3.10

3.6.1. Виды уравнений прямой на плоскости. Отрезок прямой

Уравнение прямой с угловым коэффициентом имеет вид

$$\boxed{y = kx + b.} \tag{3.27}$$

В этом уравнении угловой коэффициент k равен тангенсу угла наклона прямой к оси Ox, а число b — ординате точки пересечения прямой с осью Oy (рис. 3.11).

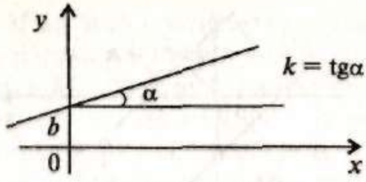


Рис. 3.11

Пример:

Уравнение прямой, проходящей через точку (0, −2) и образующей угол 135° с осью Ox, имеет вид $y = -x - 2$, так как $\operatorname{tg} 135° = -1$, а точка (0, −2) является пересечением прямой с осью Oy.

Общее уравнение прямой имеет вид

$$\boxed{Ax + By + C = 0,} \tag{3.28}$$

где A и B одновременно не обращаются в нуль: $A^2 + B^2 \neq 0$.

Геометрический смысл коэффициентов A, B, C следующий: вектор $\boldsymbol{n} = (A, B)$ перпендикулярен прямой, а число $\dfrac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ равно расстоянию от начала координат до прямой.

Вектор $\boldsymbol{n} = (A, B)$ называется ***нормальным вектором прямой***.

Пример:

Составим общее уравнение прямой, перпендикулярной вектору $\boldsymbol{n} = (4, 3)$ и отстоящей от начала координат на расстояние 10.

В качестве нормального вектора возьмем $\boldsymbol{n} = (4, 3) = (A, B)$. Тогда $|C|/\sqrt{16 + 9} = 10$, $C = \pm 50$. Искомое уравнение имеет вид $4x + 3y \pm 50 = 0$. Прямых будет две (рис. 3.12).

Если в общем уравнении прямой (3.28) коэффициент $B = 0$, то оно имеет вид $Ax + C = 0$ или $x = -C/A$. Значит, прямая

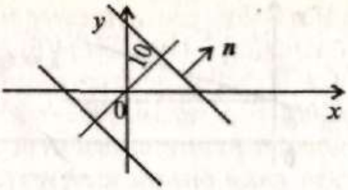


Рис. 3.12

вертикальна. Если же $B \neq 0$, то уравнение (3.28) записывается в виде уравнения с угловым коэффициентом:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Параметрические и канонические уравнения прямой используются, когда известны одна из точек прямой $M_0\,(x_0, y_0)$ ***(начальная точка)*** и вектор $\boldsymbol{a} = (l, m)$, коллинеарный прямой ***(направляющий вектор)***. В этом случае произвольная точка плоскости $M\,(x, y)$ принадлежит прямой тогда и только тогда, когда векторы $\overline{M_0M}$ и $\boldsymbol{a}$ коллинеарны. Условие коллинеарности векторов $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$ и $\boldsymbol{a} = (l, m)$ имеет вид $\overline{M_0M} = t\boldsymbol{a}$, где t — число, или в координатах

$$\begin{cases} x - x_0 = tl, \\ y - y_0 = tm. \end{cases}$$

Полученные уравнения

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + tl, \\ y = y_0 + tm \end{cases}} \qquad (3.29)$$

называются ***параметрическими уравнениями прямой***. Их смысл следующий: точка плоскости $M(x, y)$ принадлежит прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ и коллинеарной вектору $\boldsymbol{a} = (l, m)$, тогда и только тогда, когда найдется число t такое, что выполняются условия (3.29). Число t называется ***параметром точки M***.

Каждой точке M прямой соответствует ровно одно значение параметра t. Когда параметр t пробегает числовую прямую R, соответствующая точка M_t пробегает данную прямую (рис. 3.13).

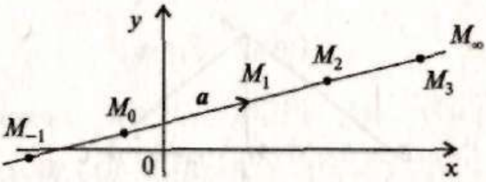


Рис. 3.13

Параметрические уравнения прямой удобны тем, что ими можно задавать не только всю прямую, но и некоторую ее часть. Например, *луч* (M_1, M_∞) на прямой (3.29) можно выделить условиями $t \geq 1$, *отрезок* $[M_2, M_3]$ — условиями $2 \leq t \leq 3$.

Перепишем уравнения (3.29) в виде

$$\boxed{\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \; (= t).} \tag{3.30}$$

Это уравнение называется ***каноническим уравнением прямой***. В нем (x_0, y_0) — начальная точка прямой, (l, m) — направляющий вектор прямой.

Примеры:

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$.

Возьмем точку $A(x_1, y_1)$ в качестве начальной точки, а в качестве направляющего вектора — вектор $\overline{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Тогда уравнение (3.30) запишется в виде

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \tag{3.31}$$

где $l = x_2 - x_1$, $m = y_2 - y_1$.

Это и есть уравнение искомой прямой.

2. Для треугольника с вершинами $A(1, -1)$, $B(2, 3)$, $C(0, 4)$ составить уравнения высоты, медианы, биссектрисы, проведенных из точки A.

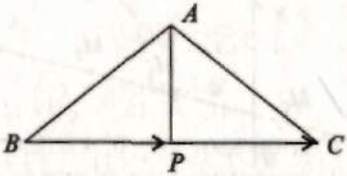


Рис. 3.14

Начиная с построения высоты, учтем, что вектор $\overline{BC} = (-2, 1)$ можно взять в качестве нормального вектора высоты (рис. 3.14). Тогда, согласно (3.28), общее уравнение высоты имеет вид $-2x + y + c_1 = 0$. Коэффициент c_1 находится из того, что высота проходит через точку A:

$$-2 \cdot 1 + (-1) + c_1 = 0, \text{ т.е. } c_1 = 3.$$

Итак, $-2x + y + 3 = 0$ — уравнение высоты.

Для нахождения медианы найдем точку $M(x_1, y_1)$ — середину отрезка BC. Для точки $M(x_1, y_1)$ вектор

$$\overline{BM} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} = (-1, 1/2) = (x_1 - 2, y_1 - 3).$$

Поэтому $x_1 - 2 = -1$, $y_1 - 3 = \dfrac{1}{2}$ и $M = (1, 7/2)$. Тогда медиана AM задается уравнением

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y+1}{7/2+1}. \tag{3.32}$$

В полученном уравнении имеется деление на нуль. Это не является противоречием, а лишь означает, что числитель $x - 1 = 0$. Таким образом, уравнение медианы: $x = 1$.

Обозначим через $P(x_2, y_2)$ точку, в которой биссектриса пересекает сторону BC (рис. 3.14).

По свойству биссектрисы имеем

$$\frac{|BP|}{|CP|} = \frac{|AB|}{|AC|}$$

и

$$|AC|\overline{BP} = |AB|\overline{PC}. \tag{3.33}$$

Длина стороны AC: $|AC| = |\overline{AC}| = \sqrt{(0-1)^2 + (4+1)^2} = \sqrt{26}$, длина стороны AB: $|AB| = |\overline{AB}| = \sqrt{(2-1)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{17}$.

С учетом того, что $\overline{BP} = (x_2 - 2,\ y_2 - 3)$, $\overline{PC} = (0 - x_2,\ 4 - y_2)$, равенство (3.33) имеет вид

$$\sqrt{26}(x_2 - 2, y_2 - 3) = \sqrt{17}(-x_2, 4 - y_2).$$

Отсюда $x_2 = \dfrac{2\sqrt{26}}{\sqrt{26}+\sqrt{17}}$, $y_2 = \dfrac{3\sqrt{26}+4\sqrt{17}}{\sqrt{26}+\sqrt{17}}$ и уравнение биссектрисы AP по формуле (3.31) имеет вид

$$\frac{x-1}{\dfrac{2\sqrt{26}}{\sqrt{26}+\sqrt{17}} - 1} = \frac{y+1}{\dfrac{3\sqrt{26}+4\sqrt{27}}{\sqrt{26}+\sqrt{17}} + 1},$$

или

$$\frac{x-1}{\sqrt{26}-\sqrt{17}} = \frac{y+1}{4\sqrt{26}+5\sqrt{17}}.$$

3. Проверить, что точка $A = (3, -3)$ не принадлежит отрезку $[B, C]$, где $B = (1, 3)$, $C = (2, 0)$.

Зная начальную точку $B = (1, 3)$ и направляющий вектор $\overline{BC} = (1, -3)$, составим параметрические уравнения (3.29) прямой BC:

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 3 - 3t. \end{cases}$$

Точка $A = (3, -3)$ принадлежит прямой BC, она соответствует значению параметра $t = 2$. Точки отрезка $[B, C]$ соответствуют значениям параметра $0 \le t \le 1$, поэтому точка A не принадлежит отрезку.

3.6.2. Углы и расстояния на плоскости

1. ***Угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности***

Если прямая на плоскости задана общим уравнением (3.28), то ее нормальным вектором будет вектор $\boldsymbol{n} = (A, B)$. Для прямой, заданной каноническим (3.30) или параметрическими (3.29) уравнениями, направляющим вектором будет вектор $\boldsymbol{a} = (l, m)$. Наличие этих векторов позволяет находить углы между прямыми и определять взаимное расположение прямых.

Примеры:

1. Найти угол α между прямыми $3x - 4y + 15 = 0$ и $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{5}$ (рис. 3.15).

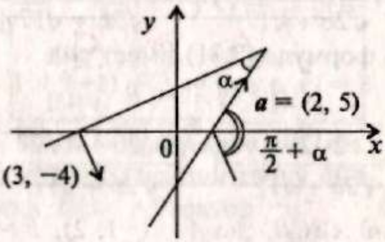


Рис. 3.15

Из рисунка видно, что если α — угол между прямыми, то $\dfrac{\pi}{2} + \alpha$ — угол между векторами $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{a}$. Поэтому

$$\sin\alpha = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{a}|} = -\frac{3\cdot 2 - 4\cdot 5}{\sqrt{9+16}\cdot\sqrt{4+25}} = \frac{14}{5\sqrt{29}}.$$

Следовательно, $\alpha = \arcsin\dfrac{14}{5\sqrt{29}}$.

2. Угол α между прямыми $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ равен углу между их нормальными векторами $\boldsymbol{n}_1 = (A_1, B_1)$ и $\boldsymbol{n}_2 = (A_2, B_2)$ и находится по формуле

$$\cos\alpha = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \qquad (3.34)$$

3. Из точки $M_0 = (3, -2)$ опустить перпендикуляр на прямую $4x - 3y + 6 = 0$.

По условию задачи, нормальный вектор прямой $\boldsymbol{n} = (4, -3)$ можно взять за направляющий вектор перпендикуляра. Поэтому согласно формуле (3.30) перпендикуляр задается уравнением

$$\frac{x-3}{4} = \frac{y+2}{-3}.$$

---

2. ***Расстояние от точки до прямой***

Расстояние d от точки $M_0\ (x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (3.35)$$

Пример:

Дана трапеция $ABCD$, где $A = (-1, 2)$, $B = (0, 3)$, $C = (1, 5)$, $D = (1, 6)$. Найти ее высоту.

Поскольку вектор $\overline{BC} = (1, 2)$ коллинеарен вектору $\overline{AD} = (2, 4)$, основаниями трапеции будут отрезки $[BC]$ и $[AD]$.

Составим уравнение прямой AD:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4}, \text{ или } 2x - y + 4 = 0.$$

Высота трапеции равна расстоянию d от точки B до прямой AD. По формуле (3.35) высота трапеции равна

$$d = \frac{|2 \cdot 0 - 3 + 4|}{\sqrt{4+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

3.6.3. Фигуры второго порядка на плоскости

1. ***Окружность***

Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ является центром окружности с радиусом R. Произвольная точка плоскости $M(x, y)$ лежит на окружности тогда и только тогда, когда расстояние между точками M_0 и M равно R, или $|\overline{M_0 M}| = R$. По формуле (3.6) это условие имеет вид

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.} \qquad (3.36)$$

Это и есть ***уравнение окружности***.

Примеры:

1. Составить уравнение окружности с центром в точке $M_0 = (1, 3)$, касающейся прямой $x - 2y + 4 = 0$.

Очевидно, радиус окружности R равен расстоянию от центра окружности до данной прямой, т.е.

$$R = \frac{|1 - 2 \cdot 3 + 4|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Поэтому уравнение окружности имеет вид

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = \frac{1}{5}.$$

2. Найти центр и радиус окружности, заданной уравнением $4x^2 + 4y^2 - 8x + 16y - 16 = 0$.

Приведем заданное уравнение к виду (3.36):

$$4(x^2 - 2x + 1) + 4(y^2 + 4y + 4) - 4 - 16 - 16 = 0,$$

или

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9.$$

Таким образом, центром окружности будет точка $M_0 = (1, -2)$, а ее радиус равен 3.

2. ***Эллипс***

Если поверхность кругового цилиндра пересечь плоскостью, перпендикулярной оси цилиндра, в сечении получится окружность. Если же эта плоскость не перпендикулярна оси цилиндра и не параллельна ей, то в сечении получится фигура, называемая ***эллипсом***.

Эллипс можно получить также, пересекая плоскостью поверхность бесконечного кругового конуса в пространстве (рис. 3.16).

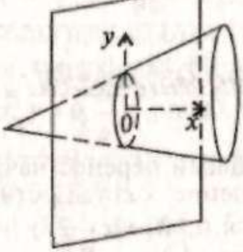


Рис. 3.16

В системе координат, которая в плоскости эллипса специальным образом расположена относительно эллипса, ***уравнение эллипса*** имеет вид

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.} \qquad (3.37)$$

Полуосями эллипса называются числа a и b ($a \neq b$). Они определяют форму и размеры эллипса (рис. 3.17).

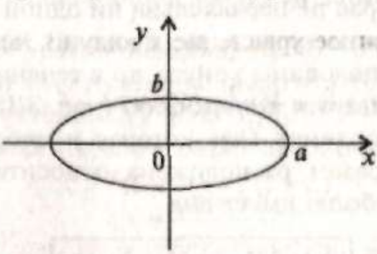


Рис. 3.17

При $a = b$ уравнение (3.37) является уравнением окружности.

Пример:

Найти полуоси эллипса, заданного уравнением

$$\frac{1}{4}x^2 - x + \frac{1}{9}y^2 + \frac{2}{3}y + 1 = 0.$$

Приведем уравнение к виду (3.37):

$$\frac{1}{4}(x^2 - 4x + 4) - 1 + \frac{1}{9}(y^2 + 6y + 9) - 1 + 1 = 0,$$

или

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1.$$

Совершая параллельный перенос начала координат по формулам

$$\begin{cases} X = x - 2, \\ Y = y + 3, \end{cases}$$

получим уравнение эллипса

$$\frac{X^2}{2^2} + \frac{Y^2}{3^2} = 1.$$

Его полуосями будут $a = 2$, $b = 3$.

3. ***Гипербола***

Если пересечь поверхность бесконечного кругового конуса плоскостью, которая не параллельна ни одной из прямых, лежащих на поверхности конуса, не проходит через центр конуса и пересекает обе половины конуса, то в сечении получится кривая, которая называется ***гиперболой*** (рис. 3.18).

В системе координат Oxy, которая в плоскости гиперболы специальным образом расположена относительно гиперболы, ***уравнение гиперболы*** имеет вид

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.} \qquad (3.38)$$

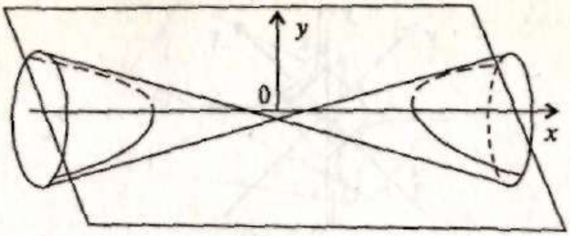


Рис. 3.18

Полуосями гиперболы называются числа a и b. Они определяют форму и размеры гиперболы. Гипербола характеризуется наличием двух асимптот $y = \pm\frac{b}{a}x$ (рис. 3.19). Их уравнения получаются из равенства $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$.

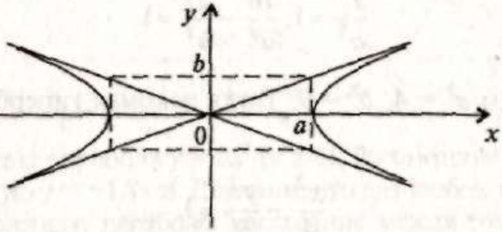


Рис. 3.19

Гипербола, известная из школьного курса математики как график обратной пропорциональной зависимости $y = \frac{k}{x}$, также может быть задана уравнением вида (3.38), только для этого новые оси координат OXY нужно направить по биссектрисам координатных углов системы Oxy (рис. 3.20).

Гиперболой также является график дробно-линейной функции

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

при $ad \neq bc$.

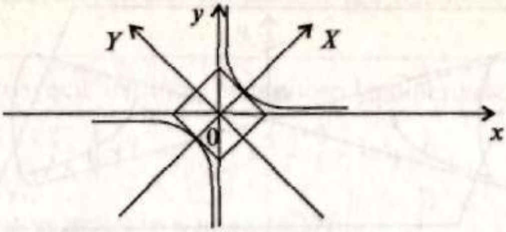


Рис. 3.20

Пример:

Составить уравнение гиперболы, проходящей через точки (2, 0) и $(4, 3\sqrt{3})$.

Подставим координаты заданных точек в уравнение (3.38), получим систему

$$\frac{2^2}{a^2}=1, \frac{16}{a^2}-\frac{27}{b^2}=1.$$

Отсюда имеем $a^2 = 4$, $b^2 = 9$. Тогда искомая гипербола задается уравнением

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1.$$

4. ***Парабола***

Пересечем поверхность бесконечного кругового конуса плоскостью, не проходящей через центр конуса и параллельной одной из прямых, лежащих на конусе. В сечении получится кривая, которая называется ***параболой*** (рис. 3.21).

В системе координат Oxy, которая в плоскости параболы специальным образом расположена относительно этой кривой (рис. 3.22), ***уравнение параболы*** имеет вид

$$y=ax^2. \qquad (3.39)$$

В таком виде парабола известна из школьной математики.

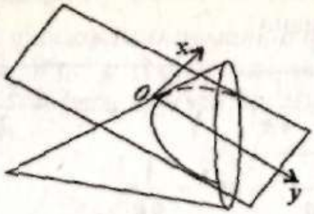


Рис. 3.21

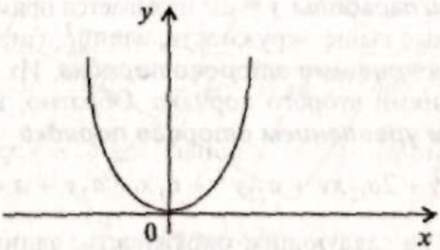


Рис. 3.22

Пример:

Пусть задана парабола $y = ax^2$ $(a > 0)$. Рассмотрим точку $F = (0, 1/(4a))$ и прямую $y = -1/(4a)$. Докажем, что для любой точки $M = (x, ax^2)$, принадлежащей параболе, расстояние между точками M и F равно расстоянию от точки M до прямой $y = -1/(4a)$.

Действительно, расстояние от точки M (x, ax^2) до прямой $y = -1/(4a)$ равно $ax^2 + 1/(4a)$ (рис. 3.23).

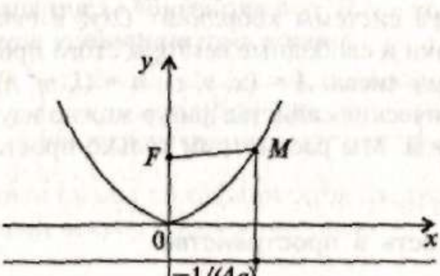


Рис. 3.23

Расстояние MF равно

$$\sqrt{x^2 + (ax^2 - \frac{1}{4a})^2} = \sqrt{x^2 + a^2x^4 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16a^2}} =$$
$$= \sqrt{(ax^2 + \frac{1}{4a})^2} = ax^2 + \frac{1}{4a}.$$

Фокусом параболы называется точка $F = (0, 1/(4a))$.

Директрисой параболы $y = ax^2$ называется прямая $y = -1/(4a)$.

Рассмотренные выше окружность, эллипс, гипербола и парабола называются ***кривыми второго порядка***. Их уравнения являются уравнениями второго порядка. Обратно, всякая кривая, заданная ***общим уравнением второго порядка***

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a = 0,$$

является одной из следующих: окружность, эллипс, гипербола, парабола, пара пересекающихся прямых, пара параллельных прямых, прямая.

Например, уравнение второго порядка $x^2 = 0$ задает прямую — ось Oy, уравнение $x^2 - y^2 = 0$ задает пару пересекающихся прямых $y = \pm x$, уравнение $x^2 - 4 = 0$ задает пару параллельных прямых $x = \pm 2$.

3.7. Геометрия в пространстве

После выбора системы координат $Oxyz$ в евклидовом пространстве E^3 точки и свободные векторы этого пространства становятся тройками чисел: $A = (x, y, z)$, $\boldsymbol{a} = (l, m, n)$. После такой замены геометрические свойства фигур можно изучать методами алгебры и анализа. Мы рассмотрим только простейшие фигуры и их свойства.

3.7.1. Плоскость в пространстве

Пусть для плоскости в пространстве известны некоторая ее точка $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ (***начальная точка***) и вектор $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$, перпендикулярный плоскости (***нормальный вектор***). Тогда для произвольной точки $M\ (x,\ y,\ z)$ пространства принадлежность ее данной плоскости означает, что вектор $\overline{M_0M}$ перпендикулярен вектору $\boldsymbol{n}$ (рис. 3.24).

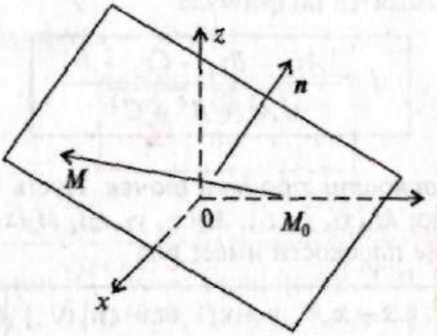


Рис. 3.24

Записывая в координатах [см. (3.5)] условие перпендикулярности векторов $\boldsymbol{n} = (A,\ B,\ C)$ и $\overline{M_0M} = (x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0)$, получим уравнение плоскости в виде

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.} \tag{3.40}$$

Это уравнение является ***уравнением плоскости, проходящей через точку*** $M_0 = (x_0,\ y_0,\ z_0)$ ***перпендикулярно вектору*** $\boldsymbol{n} = (A,\ B,\ C)$.

Если в уравнении (3.40) обозначить $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, то получится ***общее уравнение плоскости***:

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0.} \tag{3.41}$$

При такой записи смысл коэффициентов следующий: $\boldsymbol{n} = (A,\ B,\ C)$ — нормальный вектор плоскости; число

$$\frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

равно расстоянию от начала координат до плоскости. Например, плоскость $3x - y + \sqrt{15}z + 5 = 0$ перпендикулярна вектору $(3, -1, \sqrt{15})$ и отстоит от начала координат на расстоянии $5/\sqrt{25} = 1$.

Расстояние от точки $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ***до плоскости*** $Ax + Bx + Cz + D = 0$ находится по формуле

$$\boxed{d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.} \tag{3.42}$$

Задание плоскости тройкой точек. Пусть плоскость проходит через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, x_3)$. В этом случае уравнение плоскости имеет вид

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.} \tag{3.43}$$

Например, плоскость, проходящая через точки $M_1(1, 1, 1)$, $M_2(2, -1, 3)$, $M_3(5, 1, 0)$, задается уравнением

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 1 & z - 1 \\ 2 - 1 & -1 - 1 & 3 - 1 \\ 5 - 1 & 1 - 1 & 0 - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - 1 & y - 1 & z - 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(x - 1) + 8(y - 1) + 8(z - 1) + y - 1 = 2x + 9y + 8z - 19 = 0.$$

Угол между плоскостями, заданными общими уравнениями

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0,$$
$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0,$$

находится как угол φ между их нормальными векторами $\boldsymbol{n}_1 = (A, B, C)$ и $\boldsymbol{n}_2 = (A, B, C)$ по формуле

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.} \tag{3.44}$$

В частности, ***перпендикулярность*** указанных ***плоскостей*** равносильна условию

$$\boxed{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0,} \tag{3.45}$$

а их ***параллельность*** — условию

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.} \tag{3.46}$$

Пример:

Через вершину C_1 куба с вершинами $A\,(0, 0, 0)$, $B\,(1, 0, 0)$, $C\,(1, 1, 0)$, $D\,(0, 1, 0)$, $A_1\,(0, 0, 1)$, $B_1\,(1, 0, 1)$, $C_1\,(1, 1, 1)$, $D_1\,(0, 1, 1)$ провести плоскость, перпендикулярную диагонали куба AC_1, и найти расстояние от центра $M_1\,(1/2, 1/2, 0)$ грани $ABCD$ до этой плоскости.

В качестве нормального вектора плоскости возьмем вектор $\boldsymbol{n} = \overline{AC_1} = (1, 1, 1)$, а в качестве начальной точки — точку $C_1\,(1, 1, 1)$. Тогда уравнение (3.40) принимает вид

$$1 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-1) + 1 \cdot (z-1), \text{ или } x + y + z - 3 = 0.$$

Расстояние от точки $M_1 = (1/2, 1/2, 0)$ до найденной плоскости по формуле (3.42) равно

$$d = \frac{\left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 3\right|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

3.7.2. Прямая в пространстве

Пусть ***прямая*** в пространстве задана ***как пересечение двух плоскостей***. Тогда координаты точек прямой являются решениями системы уравнений

$$\boxed{\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}} \qquad (3.47)$$

Эти уравнения представляют собой один из способов задания прямой в пространстве. Для того чтобы система (3.47) задавала прямую, нужно, чтобы выполнялось условие неколлинеарности векторов $\boldsymbol{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\boldsymbol{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$: $\boldsymbol{n}_2 \neq \lambda \boldsymbol{n}_1$.

Перейдем к другому способу задания прямой — параметрическому. Для этого решим систему (3.47) по методу Гаусса приведением ее расширенной матрицы к ступенчатому виду. При этом одна из неизвестных становится свободной, а остальные две неизвестные линейно выражаются через свободную. Проиллюстрируем это на примере системы

$$\begin{cases} 2x - y + z - 5 = 0, \\ x + y - 2z + 1 = 0. \end{cases}$$

Перенесем свободные члены в правые части уравнений и преобразуем матрицу:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

В результате получим систему уравнений

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1, \\ -3y + 5z = 7. \end{cases}$$

В этой системе свободная неизвестная z. Находим

$$y = -\frac{7}{3} + \frac{5}{3}z,$$
$$x = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}z.$$

Обозначим свободную неизвестную z через t:

$$\begin{cases} x = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}t, \\ y = -\frac{7}{3} + \frac{5}{3}t, \\ z = t. \end{cases}$$

Таким образом, мы приходим к заданию точек прямой параметром t. Из такого задания легко видеть, что прямая проходит через точку M_0 (4/3, −7/3, 0) и коллинеарна вектору $\boldsymbol{a} = (1/3, 5/3, 1)$.

Параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ и коллинеарной вектору $\boldsymbol{a} = (l, m, n) \neq \mathbf{0}$, имеют вид

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases}} \tag{3.48}$$

При таком задании прямой каждой ее точке соответствует определенное значение параметра t.

Пример:

Записать параметрические уравнения прямой, проходящей через точки M_0 (x_0, y_0, z_0) и M_1 (x_1, y_1, z_1).

Возьмем точку M_0 начальной, а вектор $\boldsymbol{a}$ равным вектору $\overline{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$. Тогда уравнения (3.48) примут вид

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t, \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t, \\ z = z_0 + (z_1 - z_0)t. \end{cases}} \tag{3.49}$$

Канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и коллинеарной вектору $\boldsymbol{a} = (l, m, n)$, имеют вид

$$\boxed{\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},} \tag{3.50}$$

Вопросы

1. Пусть $\boldsymbol{a} = \overline{AB}$, $\boldsymbol{b} = \overline{BC}$. Каким вектором задается сумма $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$?

2. Пусть $\boldsymbol{a} = \overline{AB}$, $4\boldsymbol{a} = \overline{AC}$. В каком отношении точка B делит отрезок AC?

3. Будут ли коллинеарными векторы $\boldsymbol{a}$ и $-2\boldsymbol{a}$?

4. Будут ли компланарными векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $-\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$?

5. Пусть свободный вектор $\boldsymbol{a} = (2, 0, 1)$ имеет своим началом точку $A = (0; 0; 1)$. Какими будут координаты конца вектора $\overline{AB} = \boldsymbol{a}$?

6. При каком значении y векторы $\boldsymbol{a} = (1, 1, 2)$ и $\boldsymbol{b} = (0, y, -1)$ перпендикулярны?

7. Каким будет угол между векторами $\boldsymbol{a} = (1, 1, 1)$ и $\boldsymbol{b} = (1, 1, 3)$ (острым, прямым или тупым)?

8. Сколько векторов входит в базис пространства $\overline{R^5}$?

9. Будет ли система векторов $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\}$ линейно независимой?

10. При каких z система векторов $\{\boldsymbol{a} = (1, 2, 3); \boldsymbol{b} = (1, 2, z)\}$ будет линейно независимой?

11. Будет ли линейно независимой система векторов $\{\boldsymbol{a}_1 = (1, 7); \boldsymbol{a}_2 = (1, 8); \boldsymbol{a}_3 = (1, 9)\}$?

12. Будут ли векторы $\boldsymbol{a}_1 = (1, 7)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2, -8)$ ортогональными?

13. Образуют ли базис следующие векторы: $\boldsymbol{a}_1 = (1, 7)$; $\boldsymbol{a}_2 = (2, -8)$; $\boldsymbol{a}_3 = (7, -1)$?

14. Образуют ли векторы

$$\boldsymbol{a}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right); \ \boldsymbol{a}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

ортонормированный базис?

15. Линейное преобразование f плоскости $\overline{R^2}$ задано матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

В какие векторы преобразуются векторы (1, 0) и (0, 1)? Сравните полученные векторы с векторами-столбцами матрицы A.

16. Пусть линейное преобразование плоскости переводит вектор (1, 0) в вектор (2, 2), а вектор (0, 1) в вектор (5, 5). Запишите матрицу этого преобразования.

17. Пусть f — линейное преобразование пространства $\overline{R^n}$. Является ли вектор **0** собственным вектором этого преобразования?

18. Пусть f — линейное преобразование и $f(\boldsymbol{a}) = 4\boldsymbol{a}$. Каким будет собственное значение для вектора $\boldsymbol{a}$?

19. Написать характеристическое уравнение для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

20. Сколько различных собственных значений может иметь матрица 2-го порядка?

21. Является ли число $\lambda = 1$ собственным значением матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}?$$

22. Является ли вектор (2, 3) собственным для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}?$$

23. Будет ли бездифицитной торговля для трех стран с национальными доходами 3 000, 4 000, 2 000, если структурная матрица торговли равна

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}?$$

24. Будет ли вектор $\boldsymbol{n} = (4, 3)$ нормальным вектором для прямой $2x + 5y - 7 = 0$?

25. Какой угол с осью Ox образует прямая $y = \sqrt{3}x + 10$?

26. Проходит ли прямая $2x + y - 3 = 0$ через точки $A = (1, 1)$ и $B = (2, 2)$?

27. Какое расстояние выражает для прямой $4x + 3y - 25 = 0$ число

$$\frac{25}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 5?$$

28. Какие координаты имеет точка прямой

$$\begin{cases} x = 2 + t, \\ y = 2 - t, \end{cases}$$

соответствующая значению параметра $t = 2$?

29. Принадлежит ли точка $A = (2, 3)$ прямой

$$\begin{cases} x = 2 + 2t, \\ y = 3 - t? \end{cases}$$

Если да, то чему равно соответствующее значение параметра t?

30. Какими значениями параметра t определяется на прямой

$$\begin{cases} x = -1 - t, \\ y = 1 + t, \end{cases}$$

отрезок $[M_{-1}, M_1]$, где $M_{-1} = (0; 0)$, $M_1 = (-2; 2)$?

31. Будет ли вектор $\boldsymbol{a} = (2, 1)$ параллельным прямой

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{2}?$$

32. Чему равно расстояние от начала координат до прямой $6x + 8y - 15 = 0$?

33. Каким будет нормальный вектор плоскости $5x + y - z = 0$?

34. Чему равно расстояние от начала координат до плоскости $5x + y - z = 0$?

35. Будет ли прямым угол между плоскостями $5x + y - z = 0$ и $y + z - 5 = 0$?

36. Будут ли параллельны плоскости $5x + y - z = 0$ и $10x + 2y - 2z + 17 = 0$?

37. Почему точка $(1, 1, 1)$ не принадлежит плоскости $5x + y - z = 0$?

38. Почему точка $(1, 1, 1)$ не принадлежит прямой, определяемой уравнениями

$$\begin{cases} 5x + y - z = 0, \\ y + z - 5 = 0? \end{cases}$$

39. Будет ли вектор $(1, 1, 1)$ коллинеарным (параллельным) прямой

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 1 - t, \\ z = 1 + t? \end{cases}$$

40. Какая точка прямой

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 1 - t, \\ z = 1 + t \end{cases}$$

соответствует значению параметра $t = 5$?

Глава 4

ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

4.1. Основные понятия и примеры

Числовая последовательность $\{a_n\}$ задана, если по некоторому закону каждому натуральному числу n поставлено в соответствие вполне определенное число a_n:

$$a_1, a_2, ..., a_n, ...$$

Числа $a_1, a_2, ..., a_n$ называются ***членами последовательности***, а число a_n — ***общим*** или ***n-м членом*** данной последовательности.

Примеры числовых последовательностей:

— арифметическая прогрессия

$$1, 3, 5, 7, 9, ..., 2n-1, ...;$$

— геометрическая прогрессия

$$4, 2, 1, 1/2, 1/4, ..., 1/2^n, ...;$$

— гармоническая последовательность

$$1, 1/2, 1/3, 1/4, ..., 1/n, ...$$

Последовательность $\{a_n\}$ называется ***возрастающей (убывающей)***, если для каждого $n \in N$ $a_n < a_{n+1}(a_n > a_{n+1})$.

Если для каждого $n \in N$ $a_n \le a_{n+1}(a_n \ge a_{n+1})$, то последовательность называется ***неубывающей (невозрастающей)***.

Все такие последовательности называются ***монотонными***.

В приведенных выше примерах арифметическая прогрессия является возрастающей, а геометрическая прогрессия и гармоническая последовательность — убывающими.

4.2. Предел последовательности

Пределом последовательности $\{a_n\}$ называеся число a такое, что для любого положительного числа ε существует номер n_0 (зависящий от ε), начиная с которого все члены последовательности отличаются от a по модулю меньше, чем на ε, т.е. при всех $n > n_0$ $|a_n - a| < \varepsilon$.

Неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$ можно переписать в виде $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$. Геометрически последние неравенства означают, что на числовой прямой числа a_n принадлежат интервалу $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ (рис. 4.1). Поэтому понятие предела имеет следующую **геометрическую интерпретацию**: число a является пределом последовательности $\{a_n\}$, если для любого интервала $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ соответствующие члены последовательности a_n принадлежат данному интервалу.

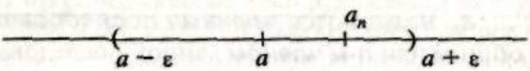


Рис. 4.1

Предел последовательности обозначается

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n.$$

Сходящейся называется последовательность, если она имеет предел. Если последовательность не имеет предела, то она называется ***расходящейся***.

Пример:

Гармоническая последовательность $\{1/n\}$ имеет пределом число 0. Действительно, для любого интервала $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ в качестве номера n_0 можно взять какое-либо целое число, больше $1/\varepsilon$. Тогда для всех $n > n_0 > 1/\varepsilon$ имеем

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Примером расходящейся последовательности является последовательность 2, 5, 2, 5, ... Действительно, никакой интервал длины меньшей, например, единицы не может содержать всех членов последовательности начиная с некоторого номера.

Последовательность $\{a_n\}$ называется ***ограниченной***, если существует такое число M, что для всех $n \in N$ $|a_n| < M$.

Всякая сходящаяся последовательность ограниченна.

Обратно, справедливо следующее утверждение:

Всякая монотонная и ограниченная последовательность имеет предел.

Пример:

Можно показать, что последовательность

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

является возрастающей и ограниченной. Тогда она имеет предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Число e называется ***числом Эйлера*** и приблизительно равно 2,71828.

Всякая сходящаяся последовательность имеет единственный предел.

Для нахождения пределов последовательностей существует несколько полезных правил.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, то:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (\lambda a_n) = \lambda a$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$;
4. $\lim\limits_{n\to\infty} (1/b_n) = 1/b$ (если все $b_n \neq 0$ и $b \neq 0$);
5. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n/b_n) = a/b$ (если все $b_n \neq 0$ и $b \neq 0$).

4.3. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Бесконечно малой последовательностью называется последовательность, имеющая своим пределом число нуль.

Пример:

Гармоническая последовательность $\{1/n\}$ — бесконечно малая.

Сумма бесконечно малых последовательностей, их произведение и произведение бесконечно малой последовательности на число являются также бесконечно малыми последовательностями.

Последовательность $\{a_n\}$ ***имеет пределом*** $+\infty(-\infty)$, если для любого положительного (отрицательного) числа A существует такой номер n_0, что для всех номеров $n > n_0$ выполняется неравенство $a_n > A$ $(a_n < A)$. Бесконечные пределы обозначаются как и обычные:

$$\lim_{n\to\infty} = +\infty(-\infty).$$

Последовательность с бесконечным пределом называется ***бесконечно большой.***

Пример:

Последовательность 1, 4, 9, ..., n^2, ... является бесконечно большой. Так, для числа $A = 10^5$ в качестве номера n_0 можно взять число 10^3.

Если последовательность $\{a_n\}$, в которой все $a_n \neq 0$, является бесконечно малой, то последовательность $\{1/|a_n|\}$ является бесконечно большой. Для бесконечно большой последовательности $\{a_n\}$, где $a_n \neq 0$, последовательность $\{1/a_n\}$ является бесконечно малой.

Вопросы

1. Могут ли в числовой последовательности различным номерам отвечать одинаковые числа?

2. Будет ли монотонной последовательность с одинаковыми членами?

3. Останется ли монотонной последовательность после умножения ее членов на -1?

4. Пусть число 5 является пределом числовой последовательности. Будет ли конечным число членов этой последовательности, содержащихся в интервале (3,5; 4,5)?

5. Будут ли числа 0 и 1 пределами последовательности 0, 1, 0, 1, 0, 1, ... ?

6. Можно ли из последовательности 0, 1, 0, 1, 0, 1, ... выбрать сходящуюся последовательность?

7. Будет ли ограниченной последовательность членов геометрической прогрессии?

8. Будет ли ограниченной последовательность членов арифметической прогрессии?

9. Привести пример бесконечно малой последовательности.

10. Привести пример бесконечно большой последовательности.

11. Можно ли из ограниченной последовательности $x_n = 1/n$ извлечь бесконечно большую последовательность?

12. Предел последовательности равен 2. Обязательно ли все ее члены положительны?

Глава 5
ФУНКЦИИ

5.1. Понятие функции

Функция — это соответствие (закон), согласно которому каждому элементу x из некоторого множества X отвечает вполне определенное число y. Функция записывается в виде $y = f(x)$, число x называется ***аргументом***, а y — ***значением*** функции. Множество X называется ***областью определения*** функции.

Примерами функций, используемых в экономике, являются: функция спроса, которая выражает зависимость спроса на некоторый товар от его цены; функция предложения — выражает зависимость предложения некоторого товара от его цены; производственная функция — выражает зависимость объема выпускаемой продукции от объема перерабатываемого ресурса; налоговая ставка — выражает зависимость налога в процентах от величины годового дохода. Эти функции трудно выразить формулами, однако их вид можно найти путем соответствующего экономического анализа.

Функции можно задавать:

а) аналитически с помощью формул;

б) таблицами;

в) графически.

Примеры:

а) Зависимость между величиной дохода x и величиной спроса y на товары первой необходимости задается функцией Торнквиста

$$y = \frac{ax}{x + b}.$$

б) Налоговая ставка для конкретно выбранных доходов может быть задана таблицей:

Доход x, усл.ед.	1 000	2 000	4 000	6 000	8 000
Налоговая ставка y, %	9	12	16	20	25

в) Функция Торнквиста, приведенная в примере а), может быть задана графиком – рис. 5.1.

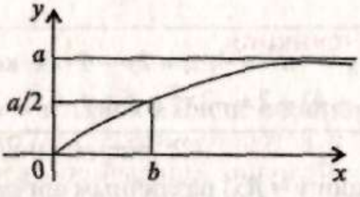


Рис. 5.1

Для заданных функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ на их общей области определения с помощью алгебраических операций можно определить следующие новые функции:

сумму и разность функций

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x); \tag{5.1}$$

произведение функции на число

$$(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x); \tag{5.2}$$

произведение функций

$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x); \tag{5.3}$$

частное функций

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ если } g(x) \neq 0. \tag{5.4}$$

Пусть имеются две функции $y = f(x)$ и $z = \varphi(y)$. Тогда для тех x, для которых значения $y = f(x)$ принадлежат области определения функции $\varphi(y)$, можно определить функцию $z = \varphi(f(x))$. Эта функция называется ***сложной функцией*** или ***композицией функций*** f и φ и обозначается

$$\boxed{z = (\varphi \circ f)(x).} \tag{5.5}$$

Пример:

Для функций $y = -x^2 + 4$, $z = 2y - 2$ их композицией будет функция $z = 2(-x^2 + 4) - 2 = -2x^2 + 6$.

Если для функции $y = f(x)$ различным аргументам $x_1 \neq x_2$ соответствуют различные значения функции $y_1 \neq y_2$, то можно определить функцию $x = \varphi(y)$, которая каждому числу $y = f(x)$ ставит в соответствие число x. Эта функция называется ***обратной*** для f и обозначается $x = f^{-1}(y)$.

Пример:

Для функции $y = x^2$ различным аргументам $x_1 \neq x_2$, для которых $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$, соответствуют различные значения $x_1^2 \neq x_2^2$. Поэтому существует обратная функция $x = \sqrt{y}$.

Рассмотрим построение обратной функции для функции $y = f(x)$, заданной графически (рис. 5.2, *а*). Соответствие, определяемое обратной функцией $x = f^{-1}(y)$, изображено на рис. 5.2, *б* стрелочками. Здесь аргументы оказались на вертикальной оси. Следуя принятому правилу расположения аргументов на горизонтальной оси, поменяем местами координатные оси. При этом график обратной функции преобразуется в симметричный относительно биссектрисы первой и третьей координатных четвертей (рис. 5.2, *в*).

Приведенное построение показывает, что график обратной функции симметричен исходной функции относительно биссектрисы координатных четвертей.

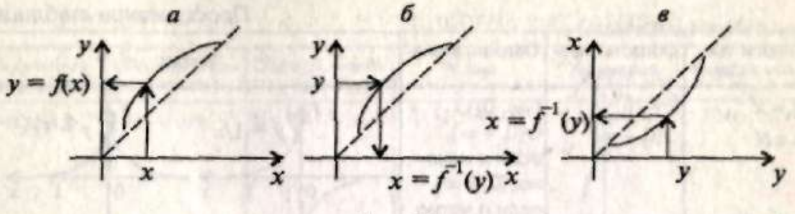


Рис. 5.2

Пример:

Для функции $y = x^2$ при $x \geq 0$ и ее обратной функции $x = \sqrt{y}$ графики представлены на рис. 5.3.

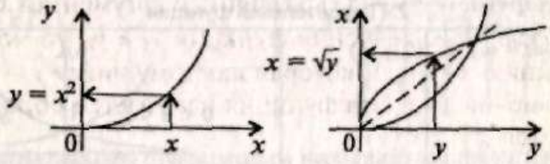
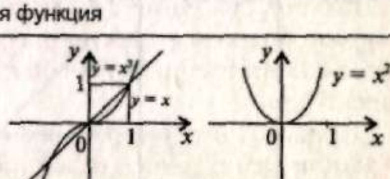


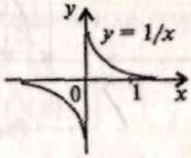
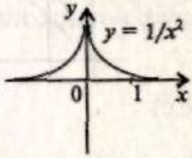
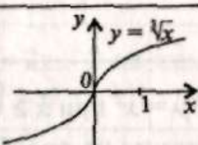
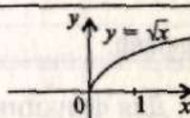
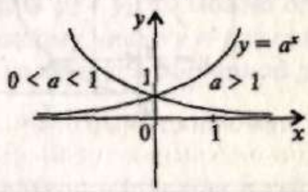
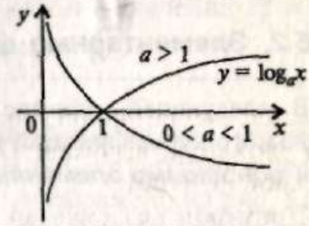
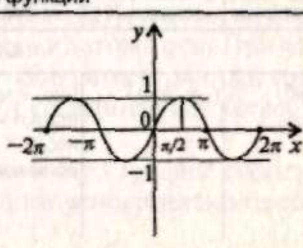
Рис. 5.3

5.2. Элементарные функции

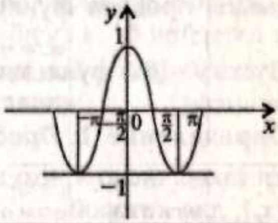
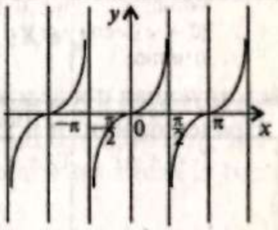
В следующей таблице приведен перечень известных из школьного курса функций и их графиков. Эти функции называются ***основными элементарными функциями***.

Аналитическое задание	Область определения X	Область значений Y	График
1. Степенная функция			
$y = x^n$, $n \in N$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$, если n нечетно; $[0, +\infty)$, если n четно	

Продолжение таблицы

Аналитическое задание	Область определения X	Область значений Y	График
$y = x^{-n}$, $n \in N$	$(-\infty, 0) \cup$ $\cup (0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup$ $\cup (0, +\infty)$, если n нечетно; $[0, +\infty)$, если n четно	 
$y = \sqrt[n]{x}$, $n \in N$, $n > 1$	$(-\infty, +\infty)$, если n нечетно; $[0, +\infty)$, если n четно	$(-\infty, +\infty)$, если n нечетно; $[0, +\infty)$, если n четно	 
2. Показательная функция			
$y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$	$(-\infty, +\infty)$	$(0, +\infty)$	
3. Логарифмическая функция			
$y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	
4. Тригонометрические функции			
$y = \sin x$	$(-\infty, +\infty)$	$[-1, 1]$	

Окончание таблицы

Аналитическое задание	Область определения X	Область значений Y	График
$y = \cos x$	$(-\infty, +\infty)$	$[-1; 1]$	
$y = \operatorname{tg} x$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$	$(-\infty, +\infty)$	

Элементарными функциями называются функции, которые можно получить из основных элементарных функций (перечисленных в таблице) с помощью алгебраических операций и композиций функций. Например, функция

$$y = \frac{\sqrt{x}\sin^2 x}{\sqrt[3]{x} + 5^{2x^3}} + \sqrt{\lg^3 x - 1}$$

является элементарной, так как она получена с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и образования сложной функции.

Примером неэлементарной функции является функция $y = |x|$ (рис. 5.4).

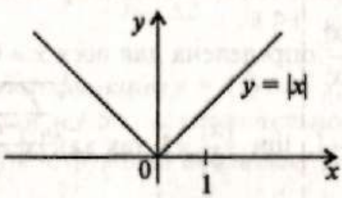


Рис. 5.4

5.3. Предел функции

5.3.1. Определения и геометрический смысл предела функции

Пусть $y = f(x)$ функция с областью определения X, x_0 — некоторое число.

Определение 1. ***Пределом функции*** $f(x)$ при $x \to x_0$ называется такое число A, что для всякой числовой последовательности $\{x_n\}$, для которой

$$x_n \in X,\ x_n \neq x_0,\ \lim_{n\to\infty} x_n = x_0,$$

соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ имеет пределом число A. Предел функции в точке x_0 обозначается

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

Пример:

Предел функции $y = x^2$ в точке $x_0 = 2$ равен 4.

Если в определении предела функции в точке x_0 для членов последовательности $\{x_n\}$ выполняются также неравенства $x_n < x_0$ $(x_n > x_0)$, то число A называется ***пределом функции слева (справа)*** и обозначается

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A\left(\lim_{x\to x_0+0} f(x) = A\right).$$

Пример:

Функция $y = \dfrac{|x|}{x}$ определена для всех $x \neq 0$. Для нее имеем

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{|x|}{x} = -1,\ \lim_{x\to 0+0} \frac{|x|}{x} = 1, \text{ так как } |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Предел функции в точке определяется также другим способом.

Определение 2. Число A называется ***пределом функции*** $f(x)$ при x, стремящемся к x_0 (или в точке x_0), если для любого, даже сколь угодно малого, положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число $\delta > 0$ (зависящее от ε, $\delta = \delta(\varepsilon)$), что для всех x, не равных x_0 и удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \delta,$$

выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Смысл определения предела функции $f(x)$ в точке x_0 состоит в том, что для всех значений x, достаточно близких к x_0, значения функции $f(x)$ как угодно мало отличаются от числа A (по абсолютной величине).

Рассмотрим **геометрический смысл** предела функции в точке. Неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ равносильно двойному неравенству $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$, соответствующему расположению части графика в полосе шириной 2ε (рис. 5.5). Аналогично неравенство $|x - x_0| < \delta$ равносильно двойному неравенству $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, соответствующему попаданию точки x в интервал $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$.

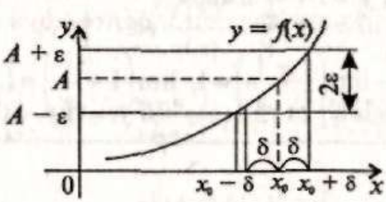


Рис. 5.5

Говорят, что ***предел функции*** $y = f(x)$ при x, стремящемся к x_0, ***равен*** $+\infty$ $(-\infty)$, если для любой последовательности $\{x_n\}$, $x_n \in X$, $x_n \neq x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ имеет своим пределом $+\infty$ $(-\infty)$.

Пример:

Для функции $y = \dfrac{1}{|x|}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{|x|} = +\infty.$$

Аналогично определяются пределы

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = +\infty\ (-\infty),\ \lim_{x\to x_0+0} f(x) = +\infty\ (-\infty).$$

Пример:

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{1}{x} = -\infty,\ \lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x} = +\infty.$$

Число A называется ***пределом функции** $y = f(x)$ **при** x**, стремящемся к*** $+\infty$ $(-\infty)$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty\ (-\infty)$, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ имеет пределом число A.

Пример:

Для функции $y = 1 + \dfrac{1}{x}$ имеем

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1,\ \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1.$$

5.3.2. Основные свойства пределов

Пусть $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — функции, для которых существуют пределы при $x \to x_0$ (или при $x \to \infty$):

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A,\ \lim_{x\to x_0} g(x) = B.$$

Тогда выполняются следующие свойства.

Свойства

1. Если предел функции $f(x)$ в точке x_0 существует, то он будет единственным.
2. Предел алгебраической суммы функций равен сумме пределов этих функций, т.е.

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B.} \qquad (5.6)$$

3. Предел произведения функций равен произведению пределов этих функций, т.е.

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B.} \qquad (5.7)$$

В частности, постоянный множитель можно выносить за знак предела, т.е.

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}(cf(x))=cA.} \qquad (5.8)$$

4. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций (при условии, что предел знаменателя не равен нулю), т.е.

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}\quad (B\neq 0).} \qquad (5.9)$$

5. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{u\to A}\varphi(u)=B$, то предел сложной функции

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(f(x))=B.$$

6. Если в некоторой окрестности точки x_0, $f(x)<g(x)$, то

$$\lim_{x\to x_0}f(x)\le\lim_{x\to x_0}g(x).$$

7. Если $f(x)\le h(x)\le g(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$, то $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)$ существует и равен A.

5.3.3. Замечательные пределы и их применение

1.

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.} \qquad (5.10)$$

2. В параграфе 4.2 было введено число Эйлера

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Обобщением этого предела являются следующие пределы:

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e;\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.} \qquad (5.11)$$

Примеры (применения первого замечательного предела):

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{4x}=\dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{6x}=\dfrac{3}{2}\cdot 1=\dfrac{3}{2};$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}\cdot 1^2=\dfrac{1}{2}.$

Примеры (применения второго замечательного предела):

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}3x}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}}\right]^{15}=e^{15};$

б) $\lim\limits_{y\to\infty}(1-3y)^{\frac{2}{y}}=\lim\limits_{y\to\infty}\left[(1-3y)^{-\frac{1}{3y}}\right]^{-3y\frac{2}{y}}=\lim\limits_{y\to\infty}\left[(1-3y)^{-\frac{1}{3y}}\right]^{-6}=e^{-6}.$

5.4. Непрерывность функции

5.4.1. Определения непрерывности функции

Определение 1. Функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если она удовлетворяет следующим трем условиям: 1) определена в некоторой окрестности точки x_0; 2) имеет конечный предел при $x \to x_0$; 3) этот предел равен значению функции в точке x_0, т.е.

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).} \qquad (5.12)$$

Примеры:

Исследовать непрерывность в точке $x = 0$ следующих функций:

а) $y = \dfrac{1}{x}$; б) $y = \begin{cases} x+1 & \text{при } x \geq 0; \\ x-1 & \text{при } x < 0; \end{cases}$ в) $y = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \neq 0; \\ 1 & \text{при } x = 0; \end{cases}$ г) $y = x^2$.

а) В точке $x = 0$ функция $y = f(x)$ (рис. 5.6, *а*) не является непрерывной, так как нарушено первое условие непрерывности: $f(x)$ не определена в точке $x = 0$.

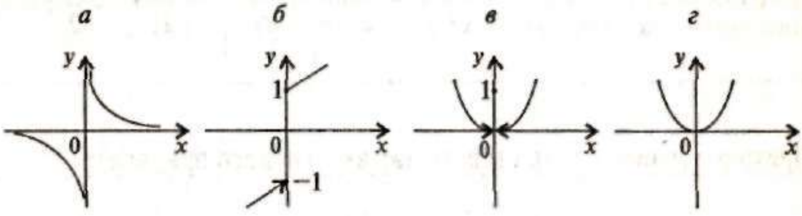


Рис. 5.6

б) В точке $x = 0$ функция $y = f(x)$ (рис. 5.6, *б*) не является непрерывной — первое условие непрерывности выполнено, $f(0)$ существует ($f(0) = 1$), но нарушено второе условие — отсутствует $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ (точнее говоря, здесь существуют односторонние пределы функции слева $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = -1$ и справа $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = 1$, но предела при $x \to 0$ не существует, т.е. левый и правый пределы не совпадают).

в) В точке $x = 0$ функция $y = f(x)$ (рис. 5.6, *в*) не является непрерывной — первые два условия непрерывности выполнены — существуют $f(0)$ ($f(0) = 1$) и конечный предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, но нарушено третье основное условие $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$.

г) В точке $x = 0$ функция $y = f(x)$ (рис. 5.6, *г*) непрерывна, так как выполнены все три условия непрерывности.

Определение непрерывности функции в точке x_0 может быть записано и так:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x),} \tag{5.13}$$

т.е. для непрерывной функции возможна перестановка символов предела и функции.

Сформулируем еще одно определение непрерывности. Дадим аргументу x_0 приращений Δx. Тогда функция $y = f(x)$ получит приращение Δy, определяемое как разность наращенного и исходного значения функции: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ (рис. 5.7).

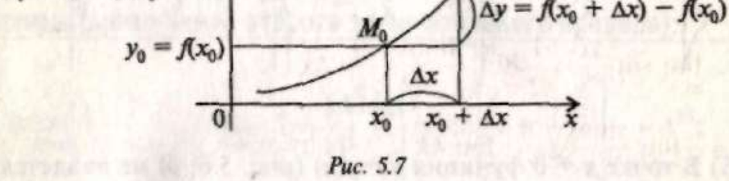


Рис. 5.7

Определение 2. Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если она определена в некоторой окрестности этой точки и $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

5.4.2. Свойства функций, непрерывных в точке

Свойства

1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то их алгебраическая сумма $f(x) \pm g(x)$, произведение $f(x) \cdot g(x)$ и частное $f(x)/g(x)$ (при условии $g(x) \neq 0$) являются функциями, непрерывными в точке x_0.
2. Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) > 0$, то существует такая окрестность точки x_0, в которой $f(x) > 0$.
3. Если функция $y = f(u)$ непрерывна в точке u_0, а функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, $\varphi(x_0) = u_0$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.

Свойство 3 может быть записано в виде

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = f[\lim_{x \to x_0} \varphi(x)],} \tag{5.14}$$

т.е. под знаком непрерывной функции можно переходить к пределу.

Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной на промежутке X***, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

Все элементарные функции непрерывны в области их определения. Для примера установим непрерывность функции $y = \cos x$.

Найдем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (\cos(x + \Delta x) - \cos x) =$

$= -2 \lim\limits_{\Delta x \to 0} \sin\left(\dfrac{2x + \Delta x}{2}\right) \sin\left(\dfrac{\Delta x}{2}\right) = 0$, так как $\left|\sin \dfrac{2x + \Delta x}{2}\right| \leq 1$,

а $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \sin \dfrac{\Delta x}{2} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\dfrac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} \cdot \Delta x\right) =$

$= \dfrac{1}{2} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x = \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0 = 0,$

т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, и по второму определению непрерывности функция $y = \cos x$ является непрерывной на всей числовой оси.

5.4.3. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Функция $y = f(x)$, заданная на отрезке $[a, b]$, называется ***непрерывной на этом отрезке***, если она непрерывна в каждой внутренней точке отрезка ($a < x < b$) и $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = f(b)$.

Свойства

1. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке, то она ограниченна на этом отрезке (рис. 5.8, *а*).

2. **Теорема Вейерштрасса**

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке наименьшего значения m и наибольшего значения M, (рис. 5.8, *б*).

3. **Теорема Больцано — Коши**

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на его концах значения противоположных знаков, то для некоторого $x_0 \in (a, b)$ $f(x_0) = 0$ (рис. 5.8, *в*).

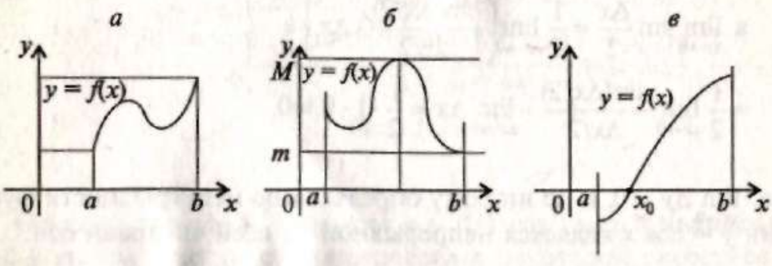


Рис. 5.8

Вопросы

1. Какие функции можно задавать таблицей?

2. Как называется функция, у которой для каждых значений аргументов $x_1 < x_2$ выполняется условие $f(x_1) < f(x_2)$?

3. Какая функция является обратной для функции $y = 1/x$?

4. Как можно получить график обратной функции из графика самой функции?

5. Будет ли элементарной функцией сумма элементарных функций? А произведение?

6. Как можно получать элементарные функции из основных элементарных?

7. Пусть предел функции $\lim\limits_{x\to5} f(x) = 2$. Может ли при этом быть $f(5) = 3$?

8. Пусть предел функции $\lim\limits_{x\to2} f(x) = +\infty$. Может ли при этом $f(2) = 5$?

9. Как изменится предел функции $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, если все ее значения умножаются на 5?

10. Пусть $\lim\limits_{x\to2} f(x) = 5$, $\lim\limits_{x\to2} g(x) = 7$. Существует ли предел $\lim\limits_{x\to2}(f + g)x$?

11. Пусть $\lim\limits_{x\to7} f(x) = 1$, $\lim\limits_{y\to1} g(y) = 3$
Чему равен $\lim\limits_{x\to7}(g \circ f)(x)$?

12. Пусть $f(2) = 3$. Может ли быть $\lim\limits_{x\to2} f(x) = 5$?

13. Пусть для всех x $f(x) \geq 3{,}006$. Может ли быть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 3$?

14. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = 5$. Будет ли непрерывной в этой точке функция $y = 1/f(x)$?

15. Существует ли предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = 5$?

16. Пусть $\lim\limits_{x\to2} \varphi(x) = 5$. Чему равен $\lim\limits_{x\to2}(\varphi(x))^2$?

17. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$. Может ли быть $\lim\limits_{x\to1/2} f(x) = +\infty$?

Глава 6

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

6.1. Определение и смысл производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности точки x. Тогда приращению Δx независимой переменной x соответствует приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Однако более важным для исследования свойств функции является не само приращение Δy, а *относительное приращение* $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется предел относительного приращения $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$. Этот предел обозначается

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.} \qquad (6.1)$$

Дифференцируемой называется функция, которая имеет производную.

Дифференцированием называется операция нахождения производной.

6.1.1. Геометрический смысл производной

Рассмотрим график некоторой функции (рис. 6.1). Касательная прямая к графику в точке $(x, f(x))$ образует с осью Ox угол α, для которого

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = f'(x).} \qquad (6.2)$$

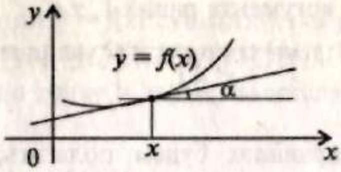


Рис. 6.1

6.1.2. Экономический смысл производной

Пусть $\mu = \mu(t)$ — объем продукции, произведенной за время t. Тогда относительное приращение $\frac{\Delta\mu}{\Delta t}$ является средней производительностью за время Δt.

Производная $\mu'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mu}{\Delta t}$ называется ***производительностью*** в момент времени t.

В экономических моделях наряду с отношением приращений $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ рассматривается отношение относительных приращений $\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x}$.

Эластичностью функции $y = f(x)$ в точке x называется предел

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y/y}{\Delta x/x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} = f'(x) \cdot \frac{x}{y}. \qquad (6.3)$$

Смысл эластичности $E_x(y)$ заключается в следующем. Если переменная x получает приращение на 1 %, то зависимая переменная получает приращение на $E_x(y)$ %.

6.2. Правила дифференцирования

1. Производная постоянной равна нулю, т.е.

$$\boxed{c' = 0.} \qquad (6.4)$$

2. Производная аргумента равна 1, т.е.

$$\boxed{x' = 1.} \tag{6.5}$$

В следующих правилах будем полагать, что $u = u(x)$ и $\upsilon = \upsilon(x)$ — дифференцируемые функции.

3. Производная алгебраической суммы функций равна сумме производных этих функций, т.е.

$$\boxed{(u \pm \upsilon)' = u' \pm \upsilon'.} \tag{6.6}$$

4. Производная произведения двух функций равна

$$\boxed{(u\upsilon)' = u'\upsilon + \upsilon' u.} \tag{6.7}$$

5. Постоянный множитель можно выносить за знак производной:

$$\boxed{(cu)' = cu'.} \tag{6.8}$$

6. Производная частного двух функций вычисляется по формуле

$$\boxed{\left(\frac{u}{\upsilon}\right)' = \frac{u'\upsilon - \upsilon' u}{\upsilon^2}} \tag{6.9}$$

(при условии, что $\upsilon \neq 0$).

7. Производная сложной и обратной функций.

Пусть заданы функции $y = f(x)$ и $z = g(y)$, для которых определена сложная функция $z = g(f(x))$. Тогда, если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $z = g(y)$ дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$, то производная сложной функции $z = (g \circ f)(x)$ в точке x_0 вычисляется по формуле

$$\boxed{(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0).} \tag{6.10}$$

Если для функции $y = f(x)$ существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$ и производная $f'(x_0)$ существует, то производная обратной функции в точке $y_0 = f(x_0)$ вычисляется по формуле

$$\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.} \tag{6.11}$$

6.3. Таблица производных

Все основные элементарные функции являются дифференцируемыми и имеют производные, приведенные в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Функция y	Производная y'	Функция y	Производная y'
c	0	a^x	$a^x \ln a$
x	1	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$u+\upsilon$	$u'+\upsilon'$	$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}$
$u\upsilon$	$u'\upsilon+\upsilon' u$	$\sin x$	$\cos x$
cu	cu'	$\cos x$	$-\sin x$
$\frac{u}{\upsilon}$	$\frac{u'\upsilon-\upsilon' u}{\upsilon^2}$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
x^n	nx^{n-1}	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
e^x	e^x	$g(f(x))$	$g'(f(x))\cdot f'(x)$

6.4. Производные высших порядков

Пусть $y = f(x)$ — дифференцируемая функция. Рассмотрим новую функцию $y = f'(x)$, для которой можно определить производную

$$\boxed{f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}.} \qquad (6.12)$$

Эта производная называется ***второй производной*** функции $y = f(x)$. По аналогии определяются производные более высоких порядков. Производная n-го порядка функции $y = f(x)$ обозначается $f^{(n)}(x)$.

Пример:

Для функции $y = x^3$ имеем $y' = 3x^2$, $y'' = 6x$, $y''' = 6$, $y^{(IV)} = 0$.

6.5. Решение задач

1. Уравнение касательной к графику функции.

Как было отмечено в параграфе 6.1, угловой коэффициент прямой, касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$, равен $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$ (рис. 6.2).

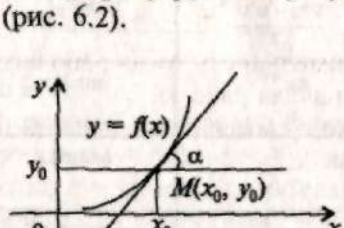


Рис. 6.2

Составим уравнение касательной прямой по заданной точке $M(x_0, y_0 = f(x_0))$ и угловому коэффициенту $k = f'(x_0)$ (см. п. 3.6.1):

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).} \qquad (6.13)$$

Пример:

Через точку (5,19) провести прямую, касательную к параболе $y = 4x^2$.

Возьмем произвольную точку $(x_0, 4x_0^2)$ на параболе. Уравнение касательной к параболе в этой точке имеет вид

$$y - 4x_0^2 = 8x_0(5 - x_0).$$

Потребуем, чтобы эта прямая проходила через точку (5,19):

$$19 - 4x_0^2 = 8x_0(5 - x_0).$$

Из этого уравнения находим, что $x_0 = 1/2$. Тогда получим уравнение касательной

$$y - 1 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

или

$$y = 4x - 1.$$

---

2. Зависимость объема произведенной рабочим продукции от времени t задается формулой

$$\mu(t) = 10 - \frac{20}{t+2}.$$

Найти производительность труда рабочего через 2 часа и через 10 часов после начала работы.

Из экономического смысла производной (см. п. 6.1.2) производительность равна

$$\mu'(2) = \left.\frac{20}{(t+2)^2}\right|_{t=2} = \frac{20}{16} = 1{,}25;$$

$$\mu'(10) = \left.\frac{20}{(t+2)^2}\right|_{t=10} = \frac{20}{144} = \frac{5}{36} \cong 0{,}139.$$

3. Для функции спроса $D(p) = 40 - 2p$ найти $E_p(D)$ — эластичность спроса по цене — при $p = 4$.

По формуле (6.3) имеем $E_p(D) = \frac{D'}{D}p$.

Так как $D(4) = 32$, $D'(4) = -2$, то

$$E_p(D)\big|_{p=4} = -\frac{2}{32} \cdot 4 = -0{,}25.$$

Это означает, что если цена возрастет на 1 %, то спрос на товар упадет на 0,25 %.

6.6. Свойства дифференцируемых функций

1. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, то она непрерывна в этой точке.

2. **Теорема Ферма**

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале X и достигает наибольшего или наименьшего значения в точке $x_0 \in X$, то производная функции в этой точке равна нулю, т.е. $f'(x_0) = 0$.

Геометрический смысл теоремы Ферма состоит в том, что в точках максимума и минимума функции касательная к ее графику горизонтальна (рис. 6.3).

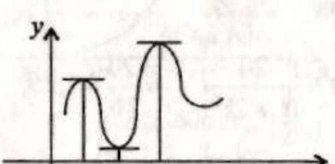


Рис. 6.3

3. **Теорема Ролля**

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и $f(a) = f(b)$, то существует хотя бы одна точка $\zeta \in (a, b)$ такая, что $f'(\zeta) = 0$ (рис. 6.4).

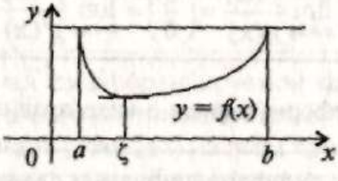


Рис. 6.4

4. **Теорема Лагранжа**

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b), то найдется такая точка $\zeta \in (a, b)$, в которой выполняется соотношение

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(\zeta)(b - a).} \tag{6.14}$$

Геометрический смысл теоремы Лагранжа следующий. Так как $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \operatorname{tg}\varphi$ — тангенс угла наклона секущей, а $f'(\zeta)$ — тангенс угла наклона касательной, то согласно теореме Лагранжа найдется такая точка $\zeta \in (a, b)$, в которой они равны (рис. 6.5).

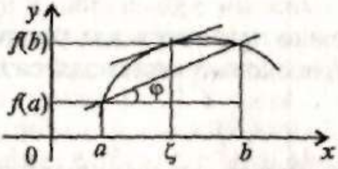


Рис. 6.5

6.7. Правило Лопиталя

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x_0, причем

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0.$$

Тогда

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.} \qquad (6.15)$$

Формулу (6.15) сформулируем в виде правила Лопиталя:

Предел частного дифференцируемых функций в случае неопределенности вида (0/0) равен пределу частного производных функций, если этот предел существует.

Это правило остается верным и в случае, если $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ и $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$, т.е.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right) = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Правило Лопиталя справедливо также и в том случае, когда $x \to \pm\infty$.

Пример:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to x_0}\frac{\cos x}{1} = 1.$$

Это правило можно применять для раскрытия неопределенностей вида $(\infty - \infty)$, поскольку они сводятся к неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Правило Лопиталя после логарифмирования можно применять также для раскрытия неопределенностей вида (1^∞), (0^0), (0^∞), (∞^0).

6.8. Возрастание и убывание функции

Напомним, что функция $y = f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на промежутке X, если для любых $x_1, x_2 \in X, x_2 > x_1$, верно неравенство

$$f(x_2) > f(x_1)\ (f(x_2) < f(x_1)).$$

Сформулируем достаточные условия возрастания и убывания функции.

> Если производная дифференцируемой функции положительна (отрицательна) внутри некоторого промежутка X, то функция возрастает (убывает) на этом промежутке.

6.9. Экстремумы функции

Точкой максимума функции $y = f(x)$ называется такая точка x_0, что в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство

$$f(x) \le f(x_0).$$

Точкой минимума функции $y = f(x)$ называется такая точка x_1, что в некоторой окрестности точки x_1 выполняется неравенство

$$f(x) \ge f(x_1).$$

Максимумом и ***минимумом*** функции называются значения функции в точках x_0 (точка максимума) и x_1 (точка минимума). Максимум и минимум функции объединяются общим названием ***экстремума*** функции.

На рис. 6.6 x_1, x_2, x_3, x_4 — точки экстремумов функции, а m и M — ее наименьшее и наибольшее значения.

Следует заметить, что определенные выше максимум и минимум функции не обязательно являются ее наибольшим и наименьшим значениями на отрезке $[a, b]$, в связи с чем они называются ***локальными*** максимумами и минимумами. Локальных максимумов и минимумов может быть много, в то время как наибольшее и наименьшее значения функции равны конкретным числам M и m.

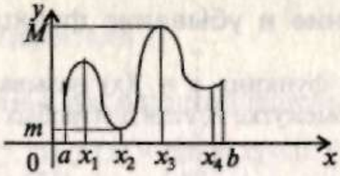


Рис. 6.6

Чтобы найти экстремум функции, требуется определить, в каких точках он возможен, а затем выяснить, действительно ли он имеет место и каков его характер.

Стационарной называется такая точка x_0, в которой производная равна нулю:

$$f'(x_0) = 0.$$

Критической называется точка x_0, в которой производная равна нулю или не существует.

6.9.1. Необходимое условие экстремума

Если в точке x_0 дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет экстремум, то производная функции в этой точке равна нулю, т.е. $f'(x_0) = 0$.

Функция может иметь экстремум и в точках, в которых она не дифференцируема. Так, например, функция $y = |x|$ имеет экстремум (минимум) в точке $x = 0$, но не дифференцируема в ней (рис. 6.7, *а*). Функция $y = \sqrt[3]{x^2}$ также имеет в точке $x = 0$ минимум (рис. 6.7, *б*), но производная ее в этой точке не существует. Поэтому необходимое условие экстремума может быть сформулировано следующим образом.

> Для того чтобы функция $y = f(x)$ имела экстремум в точке x_0, необходимо, чтобы ее производная в этой точке равнялась нулю или не существовала, т.е. чтобы точка x_0 была критической.

Это условие не является достаточным, что показывает пример, приведенный на рис. 6.7, *в*.

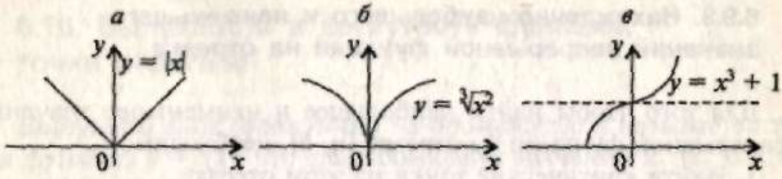


Рис. 6.7

6.9.2. Достаточные условия экстремума

> Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в δ-окрестности точки x_0. Тогда, если в этой точке производная меняет знак, имеет место локальный экстремум.

Действительно, если в левой половине δ-окрестности производная больше нуля, то в ней функция возрастает. Если при этом в правой половине δ-окрестности производная меньше нуля, то в ней функция убывает. Таким образом, если в стационарной точке x_0 производная функции меняет знак с плюса на минус, то x_0 является точкой максимума. Точно так же, если производная меняет знак с минуса на плюс, то x_0 — точка минимума (рис. 6.8).

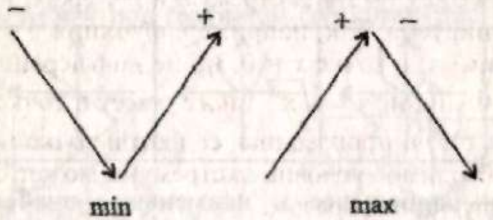


Рис. 6.8

> В случае, если функция $y = f(x)$ непрерывна в δ-окрестности точки x_0 и дифференцируема во всех точках этой окрестности, кроме x_0, то смена знака производной при переходе через точку x_0 также означает наличие локального экстремума в точке x_0.

6.9.3. Нахождение наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на отрезке

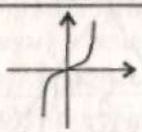
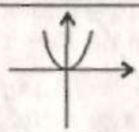
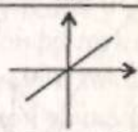
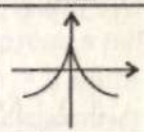
Для того чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции на отрезке $[a, b]$, необходимо:

1. Найти критические точки на этом отрезке.
2. Подсчитать значения функции в этих точках и на концах отрезка.
3. Выбрать из найденных значений наибольшее и наименьшее.

Примеры:

1. Исследуем на экстремум следующие функции: $x^3, x^2, x, 1-x^{2/3}$. Решение представим в виде таблицы (табл. 6.2).

Таблица 6.2

$f(x)$	x^3	x^2	x	$1-x^{2/3}$
$f'(x)$	$3x^2$	$2x$	1	$-\frac{2}{3}x^{-1/3}$
Критическая точка x_0	0	0	Нет	0
$f'(x_0)$	0	0	1	Не существует
Знак $f'(x_0)$ (лев., прав.)	+ + ↗ ↗	− + ↘ ↗	+ + ↗ ↗	+ − ↗ ↘
Экстремум	Нет	min	Нет	max
График				

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x + 1$ на отрезке $[-2, 2]$.

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1.$

$$f(-1) = 3,\ f(1) = -1,\ f(-2) = -1,\ f(2) = 3.$$

Итак, $f(2) = f(-1) = 3$ — наибольшее, а $f(1) = f(-2) = -1$ — наименьшее значения.

6.10. Выпуклость и вогнутость функции, точки перегиба

Выпуклой вниз (вогнутой) на промежутке X называется такая функция $y = f(x)$, что для любых двух значений $x_1, x_2 \in X$ из этого промежутка выполняется неравенство

$$\boxed{f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.} \qquad (6.16)$$

Выпуклой вверх (выпуклой) на промежутке X называется такая функция $y = f(x)$, что для любых двух значений $x_1, x_2 \in X$ из этого промежутка выполняется неравенство

$$\boxed{f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \ge \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.} \qquad (6.17)$$

Графики функций, выпуклых вниз и вверх, изображены на рис. 6.9. Очевидно, что если функция выпукла вниз, то отрезок, соединяющий любые две точки графика, целиком лежит над графиком (рис. 6.9, слева), если — выпукла вверх, то весь такой отрезок целиком лежит под графиком функции (рис. 6.9, справа).

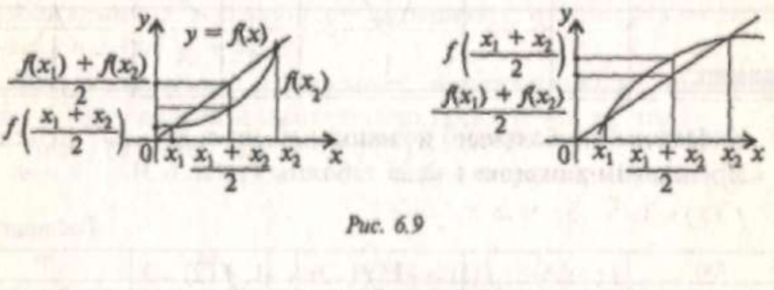


Рис. 6.9

Функция выпукла вниз (вверх) на промежутке X тогда и только тогда, когда ее первая производная на этом промежутке возрастает (убывает).

Используя производные второго порядка, можно сформулировать достаточное условие выпуклости функции вниз (вверх).

> Если вторая производная дважды дифференцируемой функции положительна (отрицательна) внутри некоторого промежутка X, то функция выпукла вниз (вверх) на этом промежутке.

Точкой перегиба графика непрерывной функции называется точка, разделяющая интервалы, в которых функция выпукла вниз и вверх.

Из вышесказанного следует, что точки перегиба — это точки экстремума первой производной. Отсюда вытекают следующие утверждения.

> (Необходимое условие перегиба). Вторая производная дважды дифференцируемой функции в точке перегиба x_0 равна нулю, т.е. $f''(x_0)=0$.

> (Достаточное условие перегиба). Если вторая производная дважды дифференцируемой функции при переходе через некоторую точку x_0 меняет свой знак, то x_0 есть точка перегиба ее графика.

Пример:

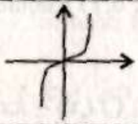
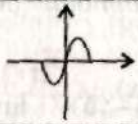
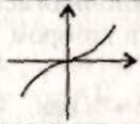
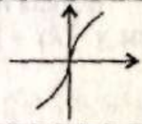
Исследовать на перегиб функции: x^3, $\sin x$, $x^{5/3}$, $x^{1/3}$.

Представим решение в виде таблицы (табл. 6.3).

Таблица 6.3

$f(x)$	x^3	$\sin x$	$x^{5/3}$	$x^{1/3}$
$f''(x)$	$6x$	$-\sin x$	$\frac{10}{9}x^{-1/3}$	$-\frac{2}{9}x^{-5/3}$
т. x_0	0	$n\pi$	0	0
$f''(x_0)$	0	0	Не существует	Не существует

Окончание табл. 6.3

Знак $f''(x_0)$ (лев., прав.)	– +	+ –	– +	+ –
Перегиб	Да	Да	Да	Да
График				

В случае, если функция $y = f(x)$ непрерывна в δ-окрестности точки x_0 и дважды дифференцируема в этой окрестности, кроме точки x_0, то смена знака второй производной при переходе через точку x_0 также означает, что x_0 — точка перегиба.

6.11. Асимптоты графика функции

Асимптотой графика функции называется прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки графика $(x, f(x))$ до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Нахождение асимптот графика начнем с вертикальных асимптот. Вертикальная прямая задается уравнением $x = x_0$. Расстояние от точки графика $(x, f(x))$ до прямой $x = x_0$ равно $|x - x_0|$. Неограниченное удаление точки графика от начала координат при приближении ее к прямой $x = x_0$ означает, что $\lim f(x) = \pm\infty$ при $x \to x_0 + 0$ или $x \to x_0 - 0$.

Таким образом, отыскание ***вертикальных асимптот*** (рис. 6.10) сводится к нахождению таких точек x_0, что

$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \pm\infty$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \pm\infty$.

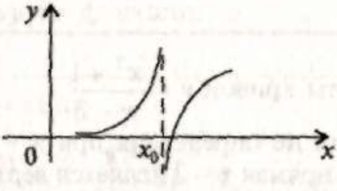


Рис. 6.10

Очевидно, что прямая $x = x_0$ не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке x_0, так как в этом случае $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Всякая ***наклонная асимптота*** (рис. 6.11) задается уравнением $y = kx + b$, в котором

$$k = \lim_{x \to +\infty(-\infty)} \frac{f(x)}{x}; b = \lim_{x \to +\infty(-\infty)} (f(x) - kx).$$

Если хотя бы один из этих пределов не существует, то наклонные асимптоты отсутствуют.

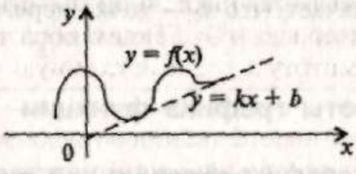


Рис. 6.11

Если $\lim\limits_{x \to +\infty(-\infty)} f(x)$ существует и равен b, то прямая $y = b$ является ***горизонтальной асимптотой*** (рис. 6.12).

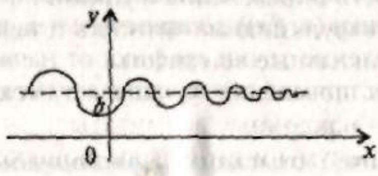


Рис. 6.12

Пример:

Найти асимптоты кривой $y = \dfrac{x^2 + 1}{x - 2}$.

Данная функция не определена при $x = 2$, поэтому можно предположить, что прямая $x = 2$ является вертикальной асимптотой. Действительно, так как

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{x^2+1}{x-2}=-\infty,\ \lim_{x\to 2+0}\frac{x^2+1}{x-2}=+\infty,$$

то прямая $x = 2$ является вертикальной асимптотой.

Найдем наклонную асимптоту графика данной кривой.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x(x-2)}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1-x^2+2x}{x-2}=2.$$

Итак, $y=x+2$ является наклонной асимптотой данной функции при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$. Таким образом, функция имеет вертикальную асимптоту $x = 2$ и наклонную $y = x + 2$.

6.12. Общая схема исследования функций и построения их графиков

Исследование функций и построение их графиков проводится по следующей схеме:

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функцию на четность и нечетность.
3. Найти вертикальные асимптоты.
4. Исследовать поведение функции в бесконечности, найти горизонтальные и наклонные асимптоты.
5. Найти экстремумы и интервалы монотонности.
6. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба.
7. Найти точки пересечения с осями координат и, возможно, некоторые дополнительные точки, уточняющие график.
8. Построить график функции.

Пример:

Исследовать функцию

$$y=\frac{x^3}{x^2-4}$$

и построить ее график.

1. Область определения $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$, т.е. $x \neq \pm 2$.

2. Функция нечетная, так как $f(-x) = -f(x)$:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 4} = -\frac{x^3}{x^2 - 4},$$

и значит график функции симметричен относительно начала координат.

3. Поскольку функция не определена при $x = \pm 2$, то вертикальными асимптотами могут быть прямые $x = 2$ и $x = -2$. Так как

$$\lim_{x \to 2 \pm 0} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \pm\infty, \quad \lim_{x \to -2 \pm 0} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \pm\infty,$$

то $x = -2$ и $x = 2$ являются вертикальными асимптотами.

4. Найдем

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x(x^2 - 4)} = 1,$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3}{(x^2 - 4)} - x \right) = 0.$$

Следовательно, $y = x$ является наклонной асимптотой.

5. Найдем производную функции

$$y' = \frac{3x^2(x^2 - 4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}.$$

Очевидно, что $y' = 0$ при $x = 0$ и $x = \pm 2\sqrt{3}$. Кроме того, y' не существует при $x = \pm 2$. Следовательно, $f(x)$ имеет следующие критические точки:

$$x = -2\sqrt{3},\ x = -2,\ x = 0,\ x = 2,\ x = 2\sqrt{3}.$$

Методом пробных точек определяем знак производной в каждом из интервалов (рис. 6.13).

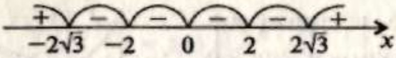


Рис. 6.13

Функция $y = f(x)$ в интервалах $(-\infty, -2\sqrt{3})$ и $(2\sqrt{3}, +\infty)$ возрастает, а в интервалах $(-2\sqrt{3}, -2)$; $(-2, 0)$; $(0, 2)$; $(2, 2\sqrt{3})$ убывает.

В точке $x = -2\sqrt{3}$ функция имеет максимум, а в точке $x = 2\sqrt{3}$ — минимум. Так как при переходе через точку $x = 0$ производная знак не меняет, то в этой точке экстремума нет. Имеем

$$y_{\max} = f(-2\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}, \ \ y_{\min} = f(2\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}.$$

6. Найдем вторую производную:

$$f''(x) = \frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}.$$

Так как $f''(x) = 0$ при $x = 0$ и $f''(x)$ не существует при $x = \pm 2$, то $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$ являются возможными точками перегиба. Определим знак второй производной в каждом из интервалов (рис. 6.14).

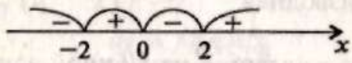


Рис. 6.14

В интервалах $(-\infty, -2)$ и $(0, 2)$ график функции обращен выпуклостью вверх, а в интервалах $(-2, 0)$ и $(2, +\infty)$ — выпуклостью вниз. Вторая производная меняет знак при переходе через точки 0, +2, −2. Однако точки $x = \pm 2$ не принадлежат области определения и поэтому лишь точка $x = 0$ является точкой перегиба.

Имеем: $f(0)=0$, следовательно, точкой перегиба является начало координат.

7. Найдем точки пересечения с осями координат:

$f(0) = 0$, и $f(x) = 0$ при $x = 0$. Таким образом, график проходит через начало координат.

8. С учетом данных исследования построим график (рис. 6.15).

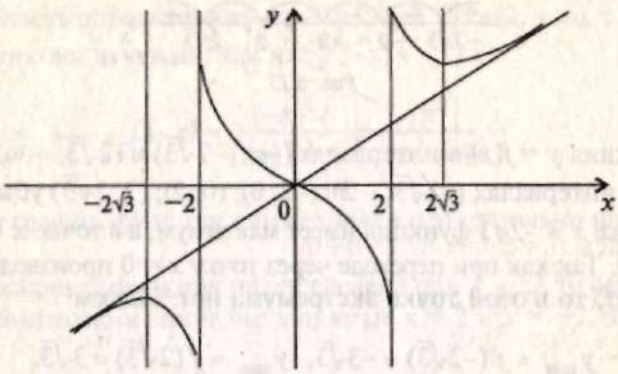


Рис. 6.15

6.13. Дифференциал функции

6.13.1. Понятие дифференциала функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке X и дифференцируема в некоторой окрестности точки $x \in X$. Тогда существует конечная производная

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Дифференциалом функции $y = f(x)$ называется величина

$$\boxed{dy = f'(x)\Delta x.} \qquad (6.18)$$

Смысл дифференциала заключается в том, что он приблизительно равен приращению функции Δy и пропорционален приращению аргумента Δx (рис. 6.16).

Пример:

Найти приращение и дифференциал функции $y = 2x^2 - 3x$ при $x = 10$ и $\Delta x = 0{,}1$.

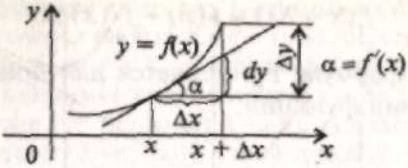


Рис. 6.16

Найдем приращение функции

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = 2(x+\Delta x)^2 - 3(x+\Delta x) - (2x^2 - 3x) = \\ = (4x + 2\Delta x - 3)\Delta x.$$

Дифференциал функции $dy = f'(x)\Delta x = (4x - 3)\Delta x$.

При $x = 10$ и $\Delta x = 0{,}1$ имеем $\Delta y = 3{,}72$ и $dy = 3{,}7$. Различие между Δy и dy составляет всего 0,02 или 0,5 %.

Для функции $y = x$ имеем $y' = 1$. Поэтому

$$dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x,$$

т.е. дифференциал независимой переменной равен приращению переменной.

Учитывая равенство $dx = \Delta x$, дифференциал функции можно записывать в виде

$$dy = f'(x)dx.$$

Пример:

Для функции $y = x^3 - 2x^2 + 1$ дифференциал равен

$$dy = (3x^2 - 4x)dx.$$

6.13.2. Применение дифференциала в приближенных вычислениях

Пусть $y = f(x)$ — дифференцируемая функция. Тогда ее приращение $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ приблизительно равно дифференциалу $dy = f'(x)dx$, т.е. $f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$. Отсюда

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \qquad (6.19)$$

Полученная формула применяется для приближенного вычисления значений функции.

Пример:

Вычислить приближенно число $\sqrt[4]{16,64}$.

Рассмотрим функцию $y = \sqrt[4]{x}$ при $x = 16$ и $\Delta x = 0,64$. Тогда $y(16) = \sqrt[4]{16} = 2$. Поскольку $y'(x) = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$, то, по формуле (6.19) $y(16,64) \approx y(16) + y'(16)\Delta x = 2 + \dfrac{1}{32} \cdot 0,64 = 2,02.$

Вопросы

1. Может ли приращение функции Δy быть больше приращения аргумента Δx?

2. Чему равен предел приращения Δy непрерывной функции, если $\Delta x \to 0$?

3. Пусть производная $f'(2) = 1$. Под каким углом к оси Ox расположена касательная к графику функции при $x = 2$.

4. Пусть относительное приращение функции $\Delta y/\Delta x = 2$ для всех Δx. Чему равна y' — производная функции?

5. Будет ли функция, дифференцируемая в точке $x = 5$, непрерывной в этой точке?

6. Будет ли прямая $y = 0$ касательной к графику параболы $y = x^2$?

7. Чему равна производная функции $y = f(x)$ в точке ее максимума?

8. Пусть $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 0$.

Можно ли применить правило Лопиталя для нахождения предела

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)}?$$

9. Пусть производная функции $y = f(x)$ равна 2 на интервале (1, 5). Будет ли функция возрастающей?

10. Чему равна производная функции в ее стационарной точке?

11. Может ли функция иметь два локальных максимума?

12. Чему равна вторая производная в точке перегиба?

13. Имеет ли функция $y = 1 - x^2$ локальный минимум?

14. Сколько экстремумов имеет функция $y = \sin x$ при $0 \leq x \leq 2\pi$?

15. Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 максимум, то будет ли иметь максимум фунция $y = (f(x))^2$ в этой точке?

16. Имеет ли функция $y = 5x - 7$ экстремумы?

17. Может ли наибольшее значение функции $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, находиться при $x = a$?

18. Может ли наибольшее значение функции совпадать с ее наименьшим значением?

19. Может ли выпуклая функция быть вогнутой?

20. Если функция $y = f(x)$ вогнута, то будет ли вогнутой функция $y = \lambda f(x)$:

а) при $\lambda > 0$;

б) при $\lambda < 0$?

21. Если $y = 2x + 1$ — асимптота графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, то будет ли она асимптотой при $x \to -\infty$?

22. Как выглядит асимптота графика функции $y = 2 - x$?

23. Если $f(x) \to +\infty$ при $x \to 2$, то будет ли прямая $x = 2$ асимптотой графика функции $y = f(x)$?

24. Если $y = x$ асимптота графика функции $y = f(x)$, то как выглядит асимптота графика функции $y = -f(x)$?

25. Может ли дифференциал функции $y = 2x$ равняться $0{,}5dx$?

26. Может ли дифференциал функции в некоторой ее точке равняться 2?

Глава 7
ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

7.1. Основные понятия

Пусть X — некоторое множество арифметических точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ пространства R^n.

Функцией многих переменных (n переменных) называется соответствие (закон) f, согласно которому каждой точке множества X сопоставляется *определенное* число z. Это соответствие записывается в виде $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Множество X называется ***областью определения функции*** f.

Функцию двух переменных $z = f(x, y)$ можно изобразить графически, вычисляя для каждой точки $(x, y) \in X$ значение функции $z = f(x, y)$. Графиком такой функции называется совокупность точек 3-мерного пространства $(x, y, f(x, y))$ (рис. 7.1).

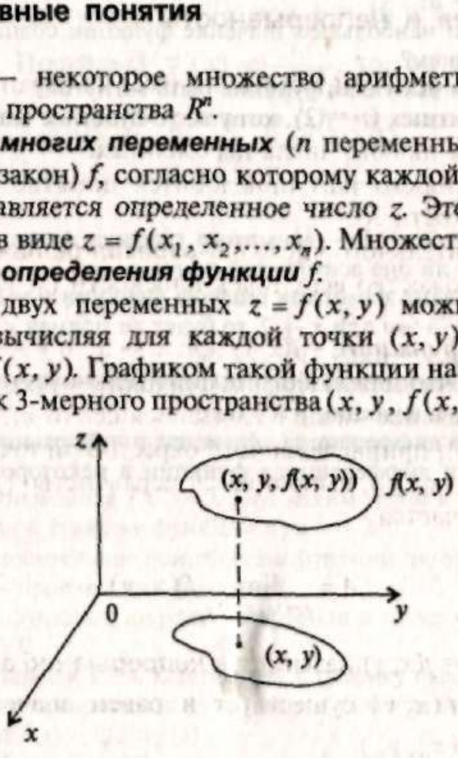


Рис. 7.1

Примеры:

1. Многомерная функция полезности $z = z(x_1, \ldots, x_n)$ есть числовая оценка данным индивидом полезности z набора приобретенных товаров.

2. Производственная функция Кобба—Дугласа $z = Ax_1^{\alpha} x_2^{\beta}$, где A, α, β — неотрицательные константы, x_1 — объем производственных фондов, x_2 — объем трудовых ресурсов, z — объем выпуска продукции.

7.2. Предел и непрерывность

Для наглядности и простоты изложения ограничимся случаем двух переменных ($n = 2$), хотя все основные понятия переносятся на случай любого числа переменных.

Для дальнейшего нам понадобится понятие δ-окрестности точки на плоскости R^2.

Для положительного числа δ ***δ-окрестностью*** точки (x_0, y_0) называется множество всех точек плоскости (x, y), для которых $|x - x_0| < \delta$ и $|y - y_0| < \delta$.

Пределом функции $z = f(x, y)$ при $x \to x_0$ и $y \to y_0$ называется такое число A, что для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется положительное число $\delta > 0$ (зависящее от ε), такое, что для всех точек (x, y), принадлежащих δ-окрестности точки (x_0, y_0), кроме самой точки (x_0, y_0), выполняется неравенство $|f(x, y) - A| < \varepsilon$. Предел обозначается

$$A = \lim_{x \to x_0,\ y \to y_0} f(x, y).$$

Функция $z = f(x, y)$ называется ***непрерывной в точке*** (x_0, y_0), если $\lim\limits_{x \to x_0,\ y \to y_0} f(x, y)$ существует и равен значению функции в этой точке $f(x_0, y_0)$.

Пример:

Линейная функция $z = z_0 + ax + by$ является непрерывной в каждой точке (x_0, y_0).

7.3. Дифференцируемость функции многих перемеменных

Пусть $z = f(x, y)$ — функция двух переменных. Если зафиксировать один из аргументов, например, взять $y = y_0$, то получим функцию одной переменной $z = f(x, y_0)$.

Частной производной функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) по переменной x называется производная функции $z = f(x, y_0)$ в точке $x = x_0$. Частная производная обозначается

$$z'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} = \left.\frac{df(x, y_0)}{dx}\right|_{x=x_0}.$$

Аналогично определяется частная производная

$$z'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y} = \left.\frac{df(x_0, y)}{dy}\right|_{y=y_0}.$$

Пример:

Для функции $z = x^2 - \ln y$

$$\frac{\partial z(1,1)}{\partial x} = \left.\frac{d(x^2 - \ln 1)}{dx}\right|_{x=1} = 2x|_{x=1} = 2;$$

$$\frac{\partial z(1,1)}{\partial y} = \left.\frac{d(1 - \ln y)}{dy}\right|_{y=1} = -\left.\frac{1}{y}\right|_{y=1} = -1.$$

Приращением функции $z = f(x, y)$ называется величина

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Функция $z = f(x, y)$ называется ***дифференцируемой*** в точке (x_0, y_0), если в этой точке существуют частные производные

$$\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y},$$

а ее приращение представляется в виде

$$\Delta z = \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y + \tag{7.1}$$
$$+\alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

где

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha(\Delta x, \Delta y) = 0, \ \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0.$$

Дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется выражение

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.} \tag{7.2}$$

Учитывая равенства $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ (см. главу 6), дифференциал dz можно записать в виде

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial y}{\partial y}dy.$$

Как и в случае функции одной переменной, дифференциал dz приближенно равен приращению функции Δz. Дифференциал dz является частью приращения Δz, которая линейно выражается через Δx и Δy.

Пример:

Рассмотрим функцию $z = x^2 + y^2$ и точку $x = 1$, $y = 1$. Приращение функции в точке (1, 1) равно

$$\Delta z = (1+\Delta x)^2 + (1+\Delta y)^2 - 2 = 2 + 2\Delta x + 2\Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2 - 2 =$$
$$= 2\Delta x + 2\Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2.$$

Частные производные функции в точке (1, 1) равны

$$\frac{\partial z(1,1)}{\partial x} = 2x\Big|_{x=1} = 2; \ \frac{\partial z(1,1)}{\partial y} = 2y\Big|_{y=1} = 2.$$

Приращение функции можно записать в виде

$$\Delta z = \frac{\partial z(1,1)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z(1,1)}{\partial y}\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

где $\alpha(\Delta x, \Delta y) = \Delta x, \beta(\Delta x, \Delta y) = \Delta y$. Отсюда следует, что функция $z = x^2 + y^2$ дифференцируема в точке (1, 1). Дифференциал функции равен $dz = 2dx + 2dy$.

Сравним значение приращения Δz и дифференциала dz при $\Delta x = dx = 0{,}01, \Delta y = dy = 0{,}02$.

$\Delta z = 2 \cdot 0{,}01 + 2 \cdot 0{,}02 + 0{,}01^2 + 0{,}02^2 = 0{,}0605;$

$dz = 2 \cdot 0{,}01 + 2 \cdot 0{,}02 = 0{,}06.$

Модуль разности $|\Delta z - dz| = 0{,}0005$, что составляет 0,83 % от Δz.

(Достаточное условие дифференцируемости функции двух переменных). Если частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ существуют в окрестности точки (x_0, y_0) и непрерывны в самой точке (x_0, y_0), то функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в этой точке.

Пример:

Для функции $z = x^2 + y^2$ частные производные существуют во всех точках и равны $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$. Так как они непрерывны во всех точках, то функция $z = x^2 + y^2$ дифференцируема для всех (x, y).

7.4. Экстремумы функций многих переменных

Точка (x_0, y_0) называется ***точкой (локального) максимума (минимума)*** функции $z = f(x, y)$, если существует окрестность точки (x_0, y_0) такая, что для всех точек (x, y) из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x, y) \le f(x_0, y_0) \quad (f(x, y) \ge f(x_0, y_0)).$$

Точки максимума и минимума называются точками ***экстремума***.

На рис. 7.2 («шляпа») точка (x_0, y_0) является точкой максимума, точка (x_1, y_1) — точкой минимума. Более того, точки минимума заполняют целую окружность C.

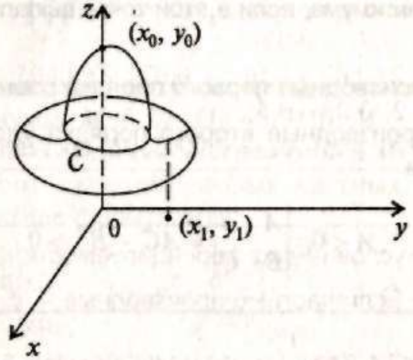


Рис. 7.2

(Необходимые условия экстремума). Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в окрестности точки ее экстремума (x_0, y_0). Тогда первые частные производные равны нулю в этой точке.

$$\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y} = 0. \qquad (7.3)$$

Для формулировки достаточных условий экстремума функции составим матрицу из вторых частных производных:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 z(x_0, y_0)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 z(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 z(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 z(x_0, y_0)}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}.$$

(Достаточные условия максимума). Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) и имеет в этой окрестности непрерывные частные производные вторых порядков $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. Тогда точка (x_0, y_0) является точкой локального максимума, если в этой точке выполняются условия:

а) частные производные первого порядка равны нулю;

б) частные производные второго порядка удовлетворяют неравенствам

$$A < 0, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 > 0. \qquad (7.4)$$

Достаточные условия минимума формулируются точно так же, только условия (7.4) заменяются условиями

$$A > 0, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 > 0. \qquad (7.5)$$

Замечание. Если в точке (x_0, y_0) $AC - B^2 < 0$, то в этой точке экстремума нет. Если $AC - B^2 = 0$, то наличие экстремума возможно, но для этого требуются дополнительные исследования.

Примеры:

1. Найти экстремумы функции $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$ и выяснить их характер.

Вычислим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 + y^2 + 10x; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + 2y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x + 10; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x + 2.$$

Для нахождения стационарных точек (в которых первые частные производные равны нулю) запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = 0, \\ 2xy + 2y = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим четыре точки, в которых возможны экстремумы: $M_1(0, 0)$; $M_2(-5/3, 0)$; $M_3(-1, 2)$; $M_4(-1, -2)$.

Для выяснения наличия экстремумов и их характеров в этих точках вычислим значения вторых частных производных (по приведенным выше формулам).

$$M_1: A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(0,\,0)} = 10;\ B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(0,\,0)} = 0;\ C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(0,\,0)} = 2.$$

Так как $AC - B^2 = 20 > 0$ и $A = 10 > 0$, то в точке M_1 экстремум существует и он является локальным минимумом.

$$M_2: A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{\left(-\frac{5}{3},\,0\right)} = -10;\ B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{\left(-\frac{5}{3},\,0\right)} = 0;\ C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{\left(-\frac{5}{3},\,0\right)} = -\frac{4}{3}.$$

Здесь $AC - B^2 > 0$ и $A < 0$, значит, в этой точке будет локальный максимум.

$$M_3: A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(-1,\,2)} = -2;\ B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(-1,\,2)} = 4;\ C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(-1,\,2)} = 0.$$

Так как $AC - B^2 = -16 < 0$, то в этой точке экстремума нет.

$$M_4: A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(-1,\,-2)} = -2;\ B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(-1,\,-2)} = -4;\ C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(-1,\,-2)} = 0.$$

$AC - B^2 < 0$, поэтому в этой точке экстремума также нет.

2. Исследовать функцию $z = xy$ на экстремум.

Вычислим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y;\ \frac{\partial z}{\partial y} = x;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1;\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Стационарные точки находятся из условий

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$

В стационарной точке (0, 0) имеем $AC - B^2 = 0 - 1 < 0$, значит в этой точке экстремума нет.

3. Исследовать функцию $z = x^4 + y^4$ на экстремум.

Вычислим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3;\ \frac{\partial z}{\partial y} = 4y;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2;\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2.$$

Найдем стационарные точки:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^3 = 0, \\ 4y^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0,\ y = 0.$$

В этой точке

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(0,\,0)} = 0;\ B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(0,\,0)} = 0;\ C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(0,\,0)} = 0,$$

значит, $AC - B^2 = 0$ и мы не можем на основании сформулированных достаточных условий сделать вывод о наличии и характере экстремума. Однако из вида функции $z = x^4 + y^4$ следует, что в точке (0, 0) функция достигает минимума, так как $x^4 + y^4 \geq 0$.

7.5. Метод наименьших квадратов

На практике при решении экономических задач зависимость между переменными x и y представляется в виде набора значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и соответствующих значений $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Эти значения изображаются точками плоскости с координатами $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. Ломаная, соединяющая эти точки, называется ***экспериментальной кривой*** (рис. 7.3).

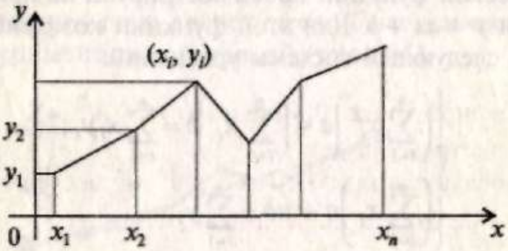


Рис. 7.3

Исследование характера и свойств зависимости между x и y лучше производить, имея аналитическое задание этой зависимости (в виде формулы) $y = f(x)$. Вид функции $y = f(x)$, аппроксимирующей (наиболее точно описывающей) экспериментальные данные, определяется экономическими или иными соображениями.

В качестве таких функций используются следующие:

а) $y = ax + b$ — линейная функция;

б) $y = ax^2 + bx + c$ — параболическая функция;

в) $y = \dfrac{a}{x} + b$ — гиперболическая функция;

г) $y = ax^b$ — показательная функция;

д) $y = ae^{bx}$ — экспоненциальная функция.

Выбранная для приближения функция называется ***теоретической***.

После выбора вида функции требуется найти значения определяющих ее параметров таким образом, чтобы отклонения значений функции от экспериментальных значений были минимальными. В указанных выше случаях параметрами будут числа a, b, c.

Минимизацию отклонений обычно проводят, находя минимум суммы квадратов отклонений

$$S = \sum_{i=1}^{n} \upsilon_i^2,$$

где $\upsilon_i = \tilde{y}_i - y_i$ — отклонение теоретических значений функции от экспериментальных.

Общий метод наименьших квадратов для нахождения параметров теоретической функции проиллюстрируем на примере линейной функции $y = ax + b$. Для этой функции коэффициенты a и b находятся из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i; \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)a + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \tag{7.6}$$

Решения этой системы дают минимум функции $S = S(a,b)$, а сама система называется ***системой нормальных уравнений***.

Система (7.6) линейна относительно неизвестных a, b, и ее определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{vmatrix} \neq 0. \tag{7.7}$$

Поэтому она имеет единственное решение, которое можно найти по правилу Крамера:

$$a^* = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \sum x_i y_i & \sum x_i \\ \sum y_i & n \end{vmatrix},\ b^* = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i y_i \\ \sum x_i & \sum y_i \end{vmatrix}. \tag{7.8}$$

Таким образом, наилучшим линейным приближением экспериментальной кривой по методу наименьших квадратов является прямая

$$y = a^* x + b^*,$$

где (a^*, b^*) — решение системы нормальных уравнений.

Пример:

1. Зависимость между прибылью предприятия Y (тыс. усл. ед.) и стоимостью основных фондов X (тыс. усл. ед.) задается табл. 7.1.

Таблица 7.1

X	50	60	70	80	90	100	110
Y	25	27	33	42	40	49	60

Для выяснения вида теоретической зависимости построим график экспериментальной кривой (рис. 7.4).

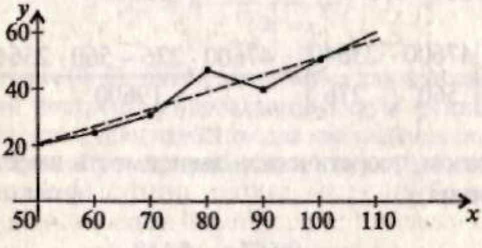


Рис. 7.4

По виду экспериментальной кривой можно предположить, что теоретическая зависимость является линейной, т.е. имеет вид

$$y = ax + b.$$

Определим параметры a и b, используя формулы (7.7), (7.8). Для удобства сведем вычисления в табл. 7.2.

Таблица 7.2

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	50	25	2500	1250
2	60	27	3600	1620
3	70	33	4900	2310
4	80	42	6400	3360
5	90	40	8100	3600
6	100	49	10000	4900
7	110	60	12100	6600
$\sum$	560	276	47600	23640

По данным табл. 7.2,

$$\sum_{i=1}^{7} x_i = 560; \sum_{i=1}^{7} y_i = 276; \sum_{i=1}^{7} x_i^2 = 47600; \sum_{i=1}^{7} x_i y_i = 23640.$$

По формулам (7.7), (7.8) находим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 47600 & 560 \\ 560 & 7 \end{vmatrix} = 7 \cdot 47600 - 560^2 = 19600;$$

$$a^* = \frac{1}{19600} \begin{vmatrix} 23640 & 560 \\ 276 & 7 \end{vmatrix} = \frac{7 \cdot 23640 - 560 \cdot 276}{19600} = 0{,}557;$$

$$b^* = \frac{1}{19600} \begin{vmatrix} 47600 & 23640 \\ 560 & 276 \end{vmatrix} = \frac{47600 \cdot 276 - 560 \cdot 23640}{19600} = -5{,}143.$$

Таким образом, теоретическая зависимость имеет вид (рис. 7.4, пунктирная линия)

$$y = 0{,}557x - 5{,}143.$$

Замечание. Если вместо прямой — графика линейной функции $y = ax + b$ в качестве приближения к экспериментальной кривой выбрать график функции другого вида, то для определения задающих ее параметров также записывается и решается соответствующая система нормальных уравнений.

Вопросы

1. Является ли функция $z = x + y$, где $y = 1/x$, функцией многих переменных?

2. Задает ли уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ функцию многих переменных?

3. Можно ли считать, что, если $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y) = 0$, то $\lim\limits_{x \to 0} f(x, 0) = 0$?

4. Является ли функция $z = 5x - 2y + 8$ непрерывной?

5. Может ли частная производная $\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}$ равняться 2 в точке экстремума?

6. Если

$$\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x} = 0,$$

то можно ли утверждать, что (x_0, y_0) — точка экстремума для $F(x, y)$?

7. Какой экстремум функции $z = f(x, y)$ наблюдается в точке (x_0, y_0), если $A > 0$, где

$$A = \frac{\partial^2 z(x_0, y_0)}{\partial x^2}?$$

8. Будет ли точка (0, 0) точкой экстремума для функции $z = x^2 + y^2$?

9. Можно ли построить аппроксимирующую функцию по методу наименьших квадратов, если известны два наблюдения (x_1, y_1), (x_2, y_2)?

10. Будет ли прямая $y = 2x$ приближать точки (0, 0), (1, 2) по методу наименьших квадратов?

Литература

1. Высшая математика. Общий курс / Под ред. С.А. Самаля. Минск: Вышэйш. шк., 2000.

2. Высшая математика для экономистов / Под ред. Н.Ш. Кремера. М.: ЮНИТИ, 1998.

3. *Жевняк Р.М.* Общий курс высшей математики / Р.М. Жевняк, А.А. Карпук, А.И. Марченко, В.Т. Унукович. Орша: АРФА, 1996.

4. *Карасев А.И.* Курс высшей математики для экономических вузов / А.И. Карасев, З.М. Аксютина, Т.И. Савельева. М.: Высш. шк., 1982.

5. Общий курс высшей математики для экономистов / Под ред. Ермакова. М.: ИНФРА, 2001.

6. *Солодовников А.С.* Математика в экономике: В 2 ч. / А.С. Солодовников, В.А. Бабайцев, А.В. Браилов. М.: Финансы и статистика, 1998–1999. Ч. 1–2

Оглавление

Учебное издание

Белько Иван Васильевич
Кузьмич Константин Константинович

Высшая математика для экономистов
I семестр

ЭКСПРЕСС-КУРС

Редактор *Т.Р. Джум*
Художник обложки *С.В. Ковалевский*
Компьютерная верстка *Д.М. Вербалович*
Корректор *К.А. Степанова*

По вопросам перевода обращаться по адресу:
E-mail: arkryvkin@tut.by; viktorbelko@yahoo.com

Подписано в печать с готовых диапозитивов 05.07.2005.
Формат 60×84 $^1/_{16}$. Бумага газетная. Гарнитура Ньютон.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 8,37. Уч.-изд. л. 5,13.
Тираж 1010 экз. Заказ № 4560.

ООО «Новое знание».
ИД №05902 от 24.09.2001. 107076, Москва, Колодезный пер., д. 2а.
Телефон (095) 234-58-53. E-mail: ru@wnk.biz

При участии ООО «Новое знание».
ЛИ № 02330/0133439 от 30.04.2004. Минск, пр. Пушкина, д. 15, ком. 16.
Почтовый адрес: 220050, Минск, а/я 79.
Телефон/факс: (10-375-17) 211-50-38. E-mail: nk@wnk.biz

http://wnk.biz

Унитарное полиграфическое предприятие
«Витебская областная типография».
210015, Витебск, ул. Щербакова-Набережная, 4.

Экспресс-курс разбит на 3 части соответственно семестрам и содержит необходимый минимум для сдачи экзамена. **Наглядность** в организации материала, удачно подобранные примеры позволяют **эффективно** и **в сжатые сроки** самостоятельно усвоить и повторить программу курса

Иван Васильевич Белько

Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой Белорусского государственного экономического университета. Автор более 60 печатных работ, среди которых ряд учебных пособий по высшей математике. Соавтор книги "Сборник задач по дифференциальной геометрии для университетов", переведенной издательством "Мир" на четыре европейских языка

Константин Константинович Кузьмич

Выпускник мехмата МГУ, специалист по теории вероятностей и математической статистике. Автор более 70 печатных работ в области прикладной математики

ISBN 5-94735-079-3

9785947350791

http://wnk.biz