Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методический комплекс
для студентов экономических специальностей

В трех частях

Часть 2

Функции нескольких переменных
Интегральное исчисление
Обыкновенные дифференциальные уравнения
Числовые и степенные ряды

Составитель А. В. Капусто

Новополоцк
ПГУ
2008

УДК 51(075.8)
ББК 22.11я73
В93

Рекомендовано к изданию методической комиссией
финансово-экономического факультета
в качестве учебно-методического комплекса (протокол № 1 от 01.09.2008)

РЕЦЕНЗЕНТЫ:
доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой алгебры и методики преподавания математики УО «ВГУ им. П. М. Машерова» Н. Т. ВОРОБЬЕВ;
канд. физ.-мат. наук, доцент Ф. Ф. ЯСКО (УО «ПГУ»)

В93 **Высшая математика** : учеб.-метод. комплекс для студентов экон. спец. В 3 ч. Ч. 2. Функции нескольких переменных. Интегральное исчисление. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Числовые и степенные ряды / сост. А. В. Капусто. – Новополоцк : ПГУ, 2008 – 240 с.
ISBN 978-985-418-763-1 (Ч. 2).
ISBN 978-985-418-548-4.

Изложен теоретический материал II семестра по разделам «Функции нескольких переменных», «Интегральное исчисление», «Обыкновенные дифференциальные уравнения», «Числовые и степенные ряды»; содержит большое число примеров с подробным решением; приведены задания для практических занятий и самостоятельного решения.

Предназначен для студентов экономических специальностей.

УДК 51(075.8)
ББК 22.11я73

ISBN 978-985-418-763-1 (Ч. 2)

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данный учебно-методический комплекс (УМК) является второй частью общей совокупности учебно-методического обеспечения дисциплины «Высшая математика» для студентов финансово-экономического факультета дневной формы обучения и соответствует программе второго семестра первого года обучения.

В данной части приведен теоретический материал по разделам «Функции нескольких переменных», «Интегральное исчисление», «Обыкновенные дифференциальные уравнения», «Числовые и степенные ряды». Сложные доказательства некоторых теорем и утверждений опущены и вместо них приведено достаточное количество иллюстрирующих теорию примеров. Отсутствие доказательства в тексте отмечено знаком «*», конец доказательства – знаком «■». Нумерация формул, теорем и утверждений, примеров и рисунков ведется по темам внутри каждого раздела. Нумерация разделов второй части продолжает общую нумерацию разделов первой части.

Для активизации самостоятельной работы студентов и выделения базового уровня теоретического материала после каждой из тем раздела приведен перечень вопросов и заданий для самоконтроля. В конце каждого раздела приведены вопросы к экзамену.

Весь теоретический материал сопровождается многочисленными примерами подробного выполнения заданий, аналогичных предлагаемым для решения на практических занятиях. Исходя из этого, материал практических занятий содержит только условия заданий для аудиторного и домашнего выполнения. Кроме того, в УМК приведены задания для 30 вариантов ИДЗ «Метод наименьших квадратов» и РГР «Дифференциальные уравнения».

В список литературы включены основные источники, использованные при составлении УМК. При самостоятельном изучении материала студенты могут использовать также и другую литературу, соответствующую стандартам образования.

Ввиду наличия в тексте большого количества типичных заданий и подробных пояснений теоретического материала УМК может быть использован и студентами заочной формы обучения финансово-экономического факультета.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

Рабочая программа составлена на основе стандартов ОСРБ 1-25 01 07-2008 (для специальности 1-25 01 07 «Экономика и управление на предприятии»), ОСРБ 1-25 01 04-2008 (для специальности 1-25 01 04 «Финансы и кредит») и ОСРБ 1-25 01 08-2008 (для специальности 1-25 01 08 «Бухгалтерский учет, анализ и аудит»).

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

1.1. Цель преподавания дисциплины

Дисциплина «Высшая математика» является одной из первых общеобразовательных дисциплин, начинающих подготовку студентов финансово-экономического факультета к изучению специальных и профилирующих дисциплин.

Целью преподавания дисциплины является формирование у студентов математической базы, необходимой для успешного усвоения специальных дисциплин, ознакомление их с основами современного математического аппарата, привлекаемого для решения теоретических и практических задач экономики.

1.2. Задачи изучения дисциплины

В результате изучения дисциплины «Высшая математика» за второй семестр обучения студенты должны знать:

– математическую терминологию, математические символы и правила их использования;

– основы анализа функций нескольких переменных;

– элементы интегрального исчисления;

– понятие о дифференциальных уравнениях, основных задачах для них и методах решения основных задач для простейших дифференциальных уравнений первого и второго порядков;

– основные свойства числовых и степенных рядов, приемы исследования их сходимости;

– экономическую интерпретацию основных математических понятий курса.

Студенты должны приобрести навыки:

– вычисления производных и дифференциалов функций нескольких переменных;

– изучения свойств функций нескольких переменных;

– нахождения первообразных и вычисления интегралов;

– решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами;

– изучения сходимости числовых и степенных рядов.

2. ВИДЫ ЗАНЯТИЙ И ФОРМЫ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

Виды занятий, формы контроля знаний	Д
	П (1-25 01 07, 1-25 01 04, 1-25 01 08)
Курс	1
Семестр	2
Лекции (в часах)	34
Практические занятия (в часах)	34
Расчетно-графические работы (кол-во)	1
Контрольные работы (кол-во)	1
Экзамен (семестр)	2

3. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

3.1. Название лекционных тем, их содержание, объем в часах

№ п/п	Название темы	Содержание	Объем в часах
1	2	3	4
Раздел 4. Функции нескольких переменных (ФНП)			
1	Понятие ФНП. Предел и непрерывность ФНП.	Понятие ФНП. График ФНП. Линии и поверхности уровня ФНП. Предел и непрерывность ФНП.	2

1	2	3	4
2	Частные производные ФНП. Частные и смешанные производные высших порядков.	Частные производные и частные приращения ФНП, их геометрический смысл и вычисление. Эластичность ФНП по переменной. Частные и смешанные производные высших порядков ФНП. Теорема о равенстве смешанных производных.	2
3	Дифференцируемость и дифференциал ФНП.	Дифференцируемость ФНП. Дифференциал ФНП, его использование в приближенных вычислениях.	1
4	Частные производные сложных и неявно заданных ФНП. Производная по направлению и градиент ФНП.	Частные производные сложных и неявно заданных ФНП. Производная ФНП по направлению. Градиент ФНП и его свойства.	2
5	Локальный экстремум функции двух переменных.	Необходимые и достаточные условия локального экстремума функции двух переменных. Явление минимакса.	1
6	Наибольшие и наименьшие значения ФНП в замкнутой области. Условный экстремум ФНП.	Нахождение наибольших и наименьших значений функции двух переменных в замкнутой области. Условный экстремум ФНП. Метод подстановки и метод множителей Лагранжа.	2
7	Метод наименьших квадратов нахождения приближенной функциональной зависимости двух переменных.	Метод наименьших квадратов нахождения приближенной функциональной зависимости двух переменных. Случаи линейной и квадратичной зависимости.	2
Раздел 5. Интегральное исчисление			
8	Первообразная и неопределенный интеграл. Основные методы интегрирования.	Первообразная и ее свойства. Неопределенный интеграл и его простейшие свойства. Таблица первообразных. Непосредственное интегрирование. Интегрирование заменой переменных и по частям.	2
9	Интегрирование некоторых классов элементарных функций	Интегрирование рациональных функций разложением на простейшие дроби. Интегрирование тригонометрических функций. Интегрирование простейших иррациональностей.	2

1	2	3	4
10	Определенный интеграл (ОИ) и его вычисление.	Определение определенного интеграла, как предела интегральных сумм. Свойства ОИ. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменных и интегрирование по частям в ОИ.	2
11	Приложения ОИ в геометрии и экономике.	Приложения определенного интеграла к вычислению площадей, длин дуг кривых и объемов тел вращения. Использование ОИ в экономике.	2
12	Несобственные интегралы.	Несобственные интегралы с бесконечными пределами и от неограниченных функций. Сходимость, признаки сравнения.	2
13	Двойные интегралы.	Определение двойного интеграла. Свойства и вычисление двойного интеграла. Приложения двойного интеграла к вычислению объемов тел и площадей.	2
Раздел 6. Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ)			
14	Общие понятия теории ОДУ. ДУ с разделенными и разделяющимися переменными.	Понятие ДУ. Общее, частное и особое решения ДУ. Задача Коши. ДУ с разделенными и разделяющимися переменными; порядок решения.	2
15	Однородные ДУ. Линейные ДУ первого порядка.	Однородные ДУ; порядок решения. Линейные ДУ первого порядка; порядок решения.	1
16	Линейные ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами.	ЛДУ второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью. Структура общего решения; порядок решения.	2
7. Числовые и степенные ряды			
17.	Числовые ряды. Ряды с положительными членами.	Числовые ряды. Ряды с положительными членами. Сходимость и сумма ряда. Необходимое условие сходимости. Действия над сходящимися рядами. Признаки сравнения знакоположительных рядов. Признаки сходимости знакоположительных рядов (Д'Аламбера, Коши, интегральный).	2

1	2	3	4
18	Знакопеременные ряды.	Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Оценка остатка знакочередующегося ряда.	1
19	Степенные ряды.	Степенные ряды (основные определения). Теорема Абеля. Радиус и интервал сходимости степенного ряда. Свойства степенных рядов. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложения в ряд Маклорена некоторых основных функций. Использование степенных рядов в приближенных вычислениях.	2
		Итого:	34

3.2. Практические занятия, их содержание и объем в часах

№ п/п	Тема занятия	Содержание	Объем в часах
1	2	3	4
1	Область определения и линии уровня ФНП. Предел непрерывность ФНП.	Исследование области определения ФНП, построение линий уровня. Вычисление предела ФНП в точке.	2
2	Частные производные ФНП.	Вычисление частных производных первого порядка ФНП, частных и смешанных производных высших порядков.	2
3	Дифференциал и его использование в приближенных вычислениях. Дифференцирование сложных и неявно заданных функций.	Вычисление дифференциала ФНП и его использование в приближенных вычислениях. Вычисление частных производных сложных и неявно заданных ФНП.	2
4	Производная ФНП по направлению. Градиент. Локальный экстремум функции двух переменных.	Вычисление производной по направлению и градиента для ФНП. Исследование функции двух переменных на локальный экстремум.	2

1	2	3	4
5	Наибольшие и наименьшие значения функции двух переменных в замкнутой области. Условный экстремум функции двух переменных.	Нахождение наибольших и наименьших значений функции двух переменных в замкнутой области. Исследование функции двух переменных на условный экстремум методом подстановки и методом множителей Лагранжа.	2
6	Контрольная работа.	Тема «Функции нескольких переменных».	2
		Выдача ИДЗ «Метод наименьших квадратов». Срок выполнения – 1 неделя.	
7	Неопределенный интеграл. Непосредственное интегрирование. Метод замены переменной.	Решение задач на непосредственное интегрирование с помощью таблицы первообразных и простейших свойств неопределенного интеграла. Интегрирование заменой переменной.	2
		Сдача ИДЗ.	
8	Интегрирование по частям. Интегрирование некоторых классов элементарных функций.	Интегрирование по частям. Интегрирование рациональных функций разложением на простейшие дроби. Интегрирование тригонометрических функций. Интегрирование простейших иррациональностей.	2
9	Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница.	Вычисление определенного интеграла с использованием формулы Ньютона-Лейбница. Использование при вычислении свойств определенного интеграла, замены переменной и интегрирования по частям.	2
10	Приложения определенного интеграла.	Решение задач с использованием понятия определенного интеграла при вычислении площадей фигур, длин дуг кривых, объемов тел вращения; в экономических задачах.	2
11	Несобственные интегралы.	Вычисление и исследование на сходимость несобственных интегралов с бесконечными пределами и от неограниченных функций; использование признаков сравнения.	2
12	Двойные интегралы.	Вычисление двойного интеграла. Решение задач на вычисление объемов тел и площадей с использованием двойных интегралов.	2

1	2	3	4
13	Дифференциальные уравнения (общие понятия). ДУ с разделенными и разделяющимися переменными.	Изучение на примерах общих понятий теории дифференциальных уравнений (понятие общего и частного решения; задача Коши). Решение ДУ с разделенными и разделяющимися переменными.	2
		Выдача РГР «Обыкновенные дифференциальные уравнения». Срок выполнения – 3 недели.	
14	Однородные ДУ. Линейные ДУ первого порядка	Решение однородных ДУ; линейных ДУ первого порядка.	1
15	Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.	Решение однородных линейных ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами; специальной правой частью.	2
		Сдача РГР.	
16	Числовые ряды.	Исследование сходимости числовых рядов с положительными членами; использование признаков сравнения знакоположительных рядов и признаков сходимости (Д'Аламбера, Коши, интегрального признака).	2
17	Знакопеременные ряды.	Исследование знакопеременных рядов на абсолютную и условную сходимость. Исследование сходимости знакочередующихся рядов с использованием признака Лейбница, выполнение оценки остатка ряда.	1
18	Степенные ряды.	Определение радиуса, интервала и области сходимости степенного ряда. Разложение функций в ряды Тейлора и Маклорена. Использование степенных рядов в приближенных вычислениях.	2
		Итого:	34

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

РАЗДЕЛ 4

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. ПОНЯТИЕ ФНП

Во многих вопросах естествознания приходится иметь дело с функциями двух, трех и более переменных.

Пример 1.1. Площадь прямоугольного треугольника с катетами x и y может быть задана в виде функции $S=\frac{xy}{2}$, где $x>0$, $y>0$.

Пример 1.2. Объем прямоугольного параллелепипеда с измерениями x, y и z представляет собой функцию $V=xyz$, где $x>0$, $y>0$, $z>0$.

Пример 1.3. Величина силы притяжения F двух материальных точек, имеющих массы m_1 и m_2 и занимающих соответственно положения $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$, согласно закону Ньютона задается формулой $F=k\cdot\frac{m_1m_2}{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$, где k – некоторая константа, так называемая «постоянная тяготения».

Определение 1.1. Если каждой упорядоченной совокупности значений переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ соответствует определенное значение переменной z, то будем называть z *функцией независимых переменных* $x_1, x_2, ..., x_n$ и записывать $z=f(x_1,x_2,...,x_n)$. В случае $n=2$: $z=f(x,y)$; $n=3$: $u=f(x,y,z)$.

Замечание 1.1. *Всякая функция от нескольких переменных становится функцией от меньшего числа переменных, если часть переменных зафиксировать, т.е. придать им постоянные значения.*

Как и в случае одной независимой переменной ФНП существует, вообще говоря, не для любых значений x_1, x_2, ..., x_n.

Определение 1.2. Совокупность наборов $(x_1, x_2, ..., x_n)$ (точек $\mathbb{R}^n$) при которых определяется функция $z=f(x_1,x_2, ...,x_n)$ называется *областью определения* или *областью существования* этой функции.

Область определения функции двух переменных представляет собой некоторое множество точек плоскости и наглядно иллюстрируется геометрически. Если каждую пару значений x и y изображать точкой $M(x,y)$ в плоскости Oxy, то область определения функции будет представлять собой некоторую совокупность точек на плоскости. В частности, областью определения может быть и вся плоскость. На практике изучаются случаи областей, представляющих часть плоскости, ограниченную линией. Линия, ограничивающая данную область, называется *границей области.* Точки области, не лежащие на границе, называются *внутренними точками области.*

Пример 1.4. Найти область определения функции $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

Решение.

Область определения функции будет задана условием $1-x^2-y^2 \geq 0$ или $x^2+y^2 \leq 1$, т.е. представляет собой единичный круг с центром в начале координат.

Определение 1.3. Геометрическим изображением или *графиком* функции двух переменных $z=f(x,y)$ называется множество точек пространства $(x,y,f(x,y))$, определяющее, вообще говоря, поверхность в системе координат $Oxyz$.

Геометрические изображения функций трех и большего числа переменных не имеют простого геометрического смысла.

Определение 1.4. *Линией уровня* функции $z=f(x,y)$ называется множество точек плоскости Oxy, для которых данная функция имеет одно и то же значение (*изокривая*).

Таким образом, уравнение линии уровня имеет вид $f(x,y)=C$, где C – некоторая постоянная.

Пример 1.5. Построить семейство линий уровня функции $z=x^2+y^2$.

Решение.

Придавая z неотрицательные значения $z=0$, 1, 2,..., получим следующие уравнения линий уровня функции:

$$x^2+y^2=0 \text{ – точка } O(0,0);$$

$$x^2 + y^2 = 1 \ \text{– окружность радиуса } r = 1;$$

$$x^2 + y^2 = 2 \ \text{– окружность радиуса } r = \sqrt{2} \ \text{и т.д.}$$

Таким образом, линии уровня данной функции представляют собой семейство концентрических окружностей с центром в точке $O(0,0)$. Построив эти линии, получим «карту поверхности» для данной функции с отмеченными высотами (рис. 1.1).

На рисунке видно, что функция z растет вдоль каждого радиального направления. Поэтому в системе координат $Oxyz$ геометрический образ функции представляет собой гигантскую «яму» с круто растущими краями. Геометрически, это – параболоид вращения (рис. 1.2).

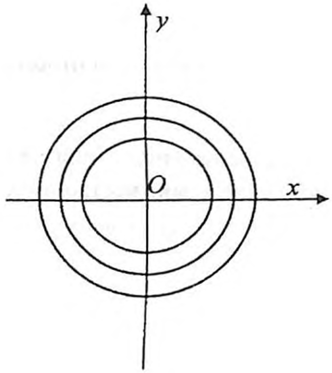

Рис. 1.1

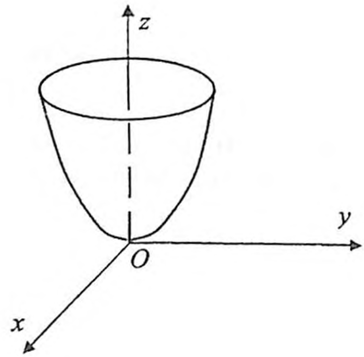

Рис. 1.2

Определение 1.5. *Поверхностью уровня* функции $u = f(x, y, z)$ называется множество точек пространства $\mathbb{R}^3$, для которых данная функция имеет одно и то же значение (*изоповерхность*).

Линии и поверхности уровня постоянно встречаются в физических вопросах. Например, соединив на карте поверхности Земли точки с одинаковой среднесуточной температурой или давлением, получим изотермы и изобары, являющиеся важными исходными данными для прогноза погоды. Параллели и меридианы на глобусе – это линии уровня функций широты и долготы.

Задания для самоконтроля

1. Пусть выручка от реализации продукции первого вида составляет 2 ден. ед., второго вида – 4 ден. ед., третьего – 7 ден. ед., объемы реализации соответственно составляют x_1, x_2 и x_3 единиц. Определите ФНП z – общую выручку от реализации.
2. Найдите область определения функции $z = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$.
3. Постройте семейство линий уровня функции $z = x^2 + 2x + y^2 - 2y + 2$.

2. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФНП

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$.

Определение 2.1. *Окрестностью радиуса* r точки $M_0(x_0, y_0)$ называется совокупность всех точек $M(x, y)$ удовлетворяющих неравенству

$$d(M_0, M) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r,$$

т.е. совокупность всех точек, лежащих внутри круга радиуса r с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$.

В дальнейшем, говоря, что функция z обладает каким-либо свойством «вблизи точки (x_0, y_0)» или «в окрестности точки», под этим будем подразумевать, что найдется такой круг с центром (x_0, y_0), во всех точках которого данная функция обладает указанным свойством.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой области D плоскости Oxy. Рассмотрим некоторую определенную точку $M_0(x_0, y_0)$, лежащую в области D или на ее границе.

Определение 2.2. Число A называется *пределом функции* $z = f(x, y)$ при стремлении точки $M(x, y)$ к точке $M_0(x_0, y_0)$ (или при $x \to x_0$, $y \to y_0$), если для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists r > 0$, такое, что для всех точек $M(x, y)$, удовлетворяющих условию $d(M, M_0) < r$, будет выполнено

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon.$$

Обозначение: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$.

Пример 2.1. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(1-x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Решение. Обозначим $\sqrt{x^2+y^2}=d$. Условие $x\to 0,\ y\to 0$ равносильно тому, что $d\to 0$. Получим

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\ln(1-x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\sqrt{x^2+y^2}=d\right|=\lim_{d\to 0}\frac{\ln(1-d^2)}{d}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{d\to 0}\frac{(\ln(1-d^2))'}{(d)'}=\lim_{d\to 0}\frac{\frac{1}{1-d^2}\cdot(-2d)}{1}=-\lim_{d\to 0}\frac{2d}{1-d^2}=0.$$

Ответ: 0.

Вычисление пределов функций двух переменных, как правило, оказывается более трудной задачей по сравнению со случаем функций одной переменной. Причина состоит в том, что на прямой существуют всего два направления, по которым аргумент может стремиться к предельной точке – а именно, справа и слева. На плоскости же таких направлений бесконечное множество и пределы функций по разным направлениям могут не совпадать.

Пример 2.2. Доказать, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ не существует.

Решение.

Будем приближаться к точке $(0;0)$ по прямым $y=kx$.

Если $y=kx$, то

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2xy}{x^2+y^2}=\left|y=kx\right|=\lim_{x\to 0}\frac{2x(kx)}{x^2+(kx)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2kx^2}{(1+k^2)x^2}=\frac{2k}{1+k^2}.$$

Таким образом, значение предела зависит от углового коэффициента прямой. Но, так как предел функции не должен зависеть от способа приближения точки (x,y) к точке $(0;0)$, то рассматриваемый предел не существует.

Ответ: предел не существует.

Замечание 2.1. *Для функции n переменных ($n>1$) можно рассматривать $n!$, так называемых, повторных пределов. В частности, в случае функции двух переменных $z=f(x,y)$ можно рассматривать два повторных предела в точке (x_0,y_0):*

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right) \text{ и } \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right).$$

Пример 2.3. Вычислить повторные пределы функции $z=\dfrac{x-y}{x+y}$ в точке $(0;0)$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1,\quad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{-y}{y}=-1.$$

Вывод. Так как повторные пределы конечны, но имеют различные значения, то при вычислении повторных пределов порядок следования предельных переходов по разным значениям влияет на результат.

Определение 2.3. Функция $z=f(x,y)$ называется *непрерывной в точке* (x_0,y_0), если она:

1) определена в точке (x_0,y_0);
2) имеет конечный предел при $x\to x_0$, $y\to y_0$;
3) предел равен значению функции в точке, т.е. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$.

Нарушение любого или нескольких из условий определения дает точку разрыва функции.

Геометрический смысл непрерывности состоит в том, что график функции в точке (x_0,y_0) представляет собой сплошную не расслаивающуюся поверхность.

Пусть переменной x дано приращение Δx, а переменная y оставлена неизменной. Тогда разность

$$\Delta_x f(x,y)=(\Delta_x z)=f(x+\Delta x,y)-f(x,y) \tag{2.1}$$

называется *частным приращением функции $z=f(x,y)$ по переменной x*.

Если неизменной остается переменная x, то разность

$$\Delta_y f(x,y)=(\Delta_y z)=f(x,y+\Delta y)-f(x,y) \tag{2.2}$$

называется *частным приращением функции* $z=f(x,y)$ *по переменной* y.

В случае, когда обе переменные x и y получают соответствующие приращения Δx и Δy, приращение функции

$$\Delta f(x,y)=(\Delta z)=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y) \tag{2.3}$$

называется *полным приращением функции* $z=f(x,y)$.

Естественно, при определении данных понятий рассматриваются лишь такие точки (x,y), $(x+\Delta x,y)$, $(x,y+\Delta y)$ и $(x+\Delta x,y+\Delta y)$, для которых функция $z=f(x,y)$ определена.

Из формул (2.1), (2.2) и (2.3) следует, что, вообще говоря,

$$\Delta f(x,y)\neq\Delta_x f(x,y)+\Delta_y f(x,y).$$

Пример 2.4. Найти полное и частные приращения функции $f(x,y)=x^2+xy-2y^2$ если x изменяется от 2 до 2,2, y изменяется от 1 до 0,9.

Решение.

Вычислим значения функции $f(x,y)=x^2+xy-2y^2$ в точках $(2;1)$, $(2,2;1)$, $(2;0,9)$ и $(2,2;0,9)$.

Получим, $f(2;1)=4$, $f(2,2;1)=5,04$, $f(2;0,9)=4,18$ и $f(2,2;0,9)=5,2$.

Тогда,

$$\Delta f(2;1)=5,2-4=1,2,$$

$$\Delta_x f(2;1)=5,04-4=1,04,$$

$$\Delta_y f(2;1)=4,18-4=0,18.$$

Так как $1,2\neq1,04+0,18$, то имеем случай

$$\Delta f(x,y)\neq\Delta_x f(x,y)+\Delta_y f(x,y).$$

Ответ: $\Delta f(2;1)=1,2$; $\Delta_x f(2;1)=1,04$; $\Delta_y f(2;1)=0,18$.

Определение 2.4. Функция $z = f(x,y)$ называется *непрерывной* в предельной точке (x_0, y_0) из области определения функции, если

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta f(x_0, y_0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} (f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)) = 0. \qquad (2.4)$$

Примечание 2.1. *Предельная точка области определения – точка, для которой функция определена как и в ней самой, так и в некоторой ее окрестности.*

Определение 2.5. Функция $z = f(x,y)$ называется *непрерывной в области D*, если функция непрерывна в каждой точке рассматриваемой области, т.е. если для каждой точки (x,y) области выполнено:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta f(x,y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} (f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y)) = 0. \qquad (2.5)$$

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Представьте в общем виде окрестность точки $M_0(3;-2)$.
2. Дайте определение предела функции $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.
3. Приведите примеры функций двух переменных, для которых повторные пределы различны; совпадают.
4. Дайте определение непрерывности функции $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.
5. В чем состоит различие в определении существования предела функции и в определении непрерывности функции в точке?
6. Найдите полное и частное приращения функции

$$f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2 + 8y,$$

если x изменяется от 3 до 4, y изменяется от 2 до 1. Выполнено ли равенство $\Delta f(x,y) = \Delta_x f(x,y) + \Delta_y f(x,y)$?

3. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ФНП

Определение 3.1. *Частной производной функции нескольких переменных по одной из этих переменных* называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению рассматриваемой независимой переменной при стремлении приращения переменной к нулю (если этот предел существует).

Обозначения: В случае $z = f(x,y)$: z'_x и z'_y, или $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, или $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, или $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$.

Таким образом, для функции $z = f(x,y)$ по определению:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}. \tag{3.2}$$

Согласно формулам (3.1) и (3.2), если для функции $z = f(x,y)$ вычисляется производная $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, то переменная y считается постоянной; если же вычисляется производная $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, то переменная x считается постоянной. Следовательно, частное дифференцирование не требует никаких новых правил, и можно пользоваться известными формулами.

В общем случае, если $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и требуется найти $\dfrac{\partial z}{\partial x_k}$, постоянными следует считать переменные $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$.

Пример 3.1. Найти частные производные функции $z = x^3 \sin y + y^4$.

Ответ: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 \sin y$, $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = x^3 \cos y + 4y^3$.

Пример 3.2. Найти частные производные функции

$$u = x^6 - y^4 + 3z^5 + xyz.$$

Ответ: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 6x^5 + yz,\quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = -4y^3 + xz,\quad \dfrac{\partial u}{\partial z} = 15z^4 + xy.$

Геометрический смысл частных производных. Геометрическим изображением функции $z = f(x,y)$ является некоторая поверхность P. Полагая $y = const$, получим некоторую плоскую кривую Γ_x (рис. 3.1). Пусть MK – касательная к кривой Γ_x в точке $M(x,y,z)$; α – угол, образованный этой касательной с положительным направлением оси Ox.

Так как $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \left.\dfrac{dz}{dx}\right|_{y=const}$, на основании геометрического смысла производной функции одной переменной, имеем $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \mathrm{tg}\alpha$.

Аналогичный смысл имеет и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

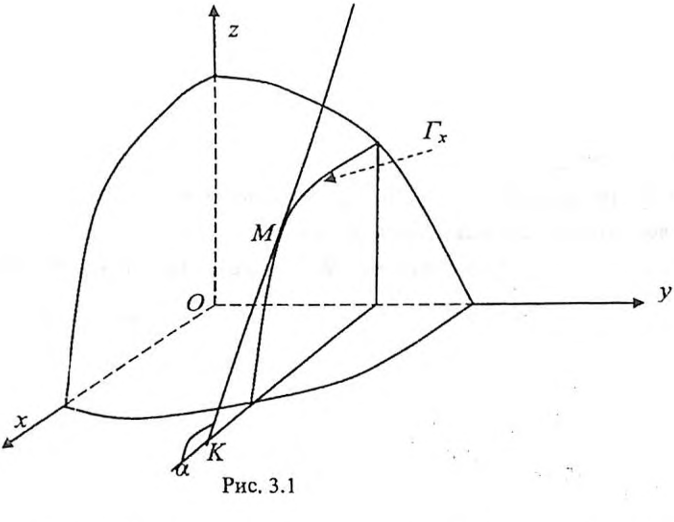

Рис. 3.1

Определение 3.2. *Эластичностью функции* $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *по переменной* x_k называется предел отношения относительного частного приращения функции z по переменной x_k к относительному приращению переменной x_k при $\Delta x_k \to 0$:

$$E_{x_k}(z) = \lim_{\Delta x_k \to 0}\left(\frac{\Delta_{x_k} z}{z} : \frac{\Delta x_k}{x_k}\right) = \frac{x_k}{z} \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_{x_k} z}{\Delta x_k} = \frac{x_k}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x_k}. \qquad (3.3)$$

Эластичность функции по переменной x_k показывает приближенно, на сколько процентов изменится значение функции $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ при изменении переменной x_k на 1 %.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение частной производной ФНП.
2. В чем состоит геометрический смысл частных производных функции двух переменных?
3. Приведите пример $z = f(x, y)$, для которой $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = 1$.
4. Какой вид имеют формулы для вычисления эластичности в случае функции $z = f(x, y)$?

4. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$. Если данная функция имеет в некоторой открытой области D частную производную по одной из переменных, то данная производная, сама являясь функцией от x и y, может в свою очередь в некоторой точке (x_0, y_0) иметь частную производную по той же или другой переменной. Для исходной функции частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ называют *частными производными первого порядка*. Тогда, если первая производная была взята, например, по x, ее производные

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y},$$

или $z''_{x^2} = f''_{x^2}(x_0, y_0)$ и $z''_{xy} = f''_{xy}(x_0, y_0)$ называются *частными производными второго порядка*.

Аналогичным образом определяются частные производные третьего, четвертого и более высоких порядков.

Частная производная высшего порядка, взятая по различным переменным, например, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, называется *смешанной частной производной.*

Пример 4.1. Найти все частные производные второго порядка функции $z = x^3 \sin y + y^4$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 \sin y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 \cos y + 4y^3,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2 \sin y\right) = 6x \sin y, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2 \sin y\right) = 3x^2 \cos y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^3 \cos y + 4y^3\right) = -x^3 \sin y + 12y^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3 \cos y + 4y^3\right) = 3x^2 \cos y.$$

Ответ: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x \sin y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 3x^2 \cos y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x^3 \sin y + 12y^2$.

Пример 4.2. Найти все частные производные второго порядка функции $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2 + y^2}\right) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Ответ: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

Заметим, что равенство смешанных производных не вытекает из самого определения смешанных производных. Существуют случаи, когда такого совпадения не наблюдается.

Теорема 4.1*. *Пусть:*

1) *функция* $z=f(x,y)$ *определена в открытой области* D;
2) *в этой области существуют первые производные* $f'_x(x,y)$ *и* $f'_y(x,y)$;
3) *в этой области существуют вторые смешанные производные* $f''_{xy}(x,y)$ *и* $f''_{yx}(x,y)$, *которые, как функции x и y, непрерывны в некоторой точке* (x_0,y_0) *области* D.

Тогда в этой точке

$$f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0). \tag{4.1}$$

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Каков порядок вычисления производной $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial z\partial y}$ функции $u=f(x,y,z)$?
2. Сколько частных производных второго порядка имеет функция $u=f(x,y,z)$?
3. Сколько частных производных третьего порядка имеет функция $z=f(x,y)$?
4. Всегда ли смешанные производные второго порядка функции $z=f(x,y)$ равны?
5. Каким условиям должна удовлетворять функция, чтобы ее смешанные производные второго порядка были равны?
6. Проверьте, что для функции $f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{при } x^2+y^2>0, \\ 0, & \text{при } x=y=0, \end{cases}$

не будет выполнено равенство смешанных производных:

$$f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0).$$

5. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФНП

Определение 5.1. Функция $z = f(x,y)$ называется *дифференцируемой в точке* $M_0(x_0,y_0)$ если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x,\Delta y)\Delta y, \qquad (5.1)$$

где $\alpha(\Delta x,\Delta y)$ и $\beta(\Delta x,\Delta y)$ – бесконечно малые функции при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ и $A^2 + B^2 \neq 0$.

Теорема 5.1. *Если функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство.

Если функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$, то из формулы (5.1) следует, что $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = 0$ или $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} (f(x,y) - f(x_0,y_0)) = 0$,

откуда $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$, что и означает непрерывность функции в точке. ■

Теорема 5.2 (*необходимые условия дифференцируемости*).

Если функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$, то она имеет в этой точке частные производные $f'_x(x_0,y_0)$ и $f'_y(x_0,y_0)$, причем $f'_x(x_0,y_0) = A$, $f'_y(x_0,y_0) = B$.

Доказательство.

Так как функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$, то ее приращение в этой точке представимо в виде (5.1). Полагая $\Delta y = 0$, получим

$$\Delta_x z = A\Delta x + \alpha(\Delta x,0)\Delta x,$$

где $\alpha(\Delta x,0)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$.

Разделив полученное выражение на Δx и перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \left(A + \alpha(\Delta x,0)\right) = A$.

С другой стороны, по определению частной производной,

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = f'_x(x_0,y_0).$$

Следовательно, в точке $M_0(x_0, y_0)$ существует $f'_x(x_0, y_0) = A$.

Аналогично доказывается, что в точке $M_0(x_0, y_0)$ существует $f'_y(x_0, y_0) = B$. ■

Замечание 5.1. *Обратные утверждения к теоремам* 5.1 *и* 5.2 *не верны, т.е. из непрерывности ФНП в точке* $M_0(x_0, y_0)$ *и существования частных производных не следует дифференцируемость.*

Пример 5.1. Функция $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, y = 0, \end{cases}$ непрерывна на всей плоскости, на всей плоскости имеет частные производные, однако формула (5.1) не имеет места для данной функции в точке (0; 0).

Теорема 5.3*. (достаточное условие дифференцируемости). *Если функция* $z = f(x, y)$ *имеет частные производные в некоторой r-окрестности точки* $M_0(x_0, y_0)$, *непрерывные в самой точке* $M_0(x_0, y_0)$, *то функция дифференцируема в этой точке.*

Понятие дифференцируемости для функции трех и более переменных вводится аналогично.

Определение 5.2. Функция нескольких переменных, дифференцируемая в каждой точке некоторого множества, называется *дифференцируемой на* этом *множестве.*

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте определение дифференцируемости функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.
2. Какие условия являются необходимыми для дифференцируемости функции в точке?
3. Какие условия являются достаточными для дифференцируемости функции в точке?
4. Сформулируйте определение дифференцируемости функции $u = f(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.
5. Как связаны непрерывность и дифференцируемость ФНП в точке?

6. ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФНП И ЕГО ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Определение 6.1. *Полным дифференциалом* dz дифференцируемой в точке $M_0(x_0,y_0)$ функции $z=f(x,y)$ называется главная, линейная относительно приращений Δx и Δy, часть полного приращения этой функции в точке $M_0(x_0,y_0)$, т.е.

$$dz\big|_{M_0}=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y. \qquad (6.1)$$

Напомним (см. раздел 3), что для независимых переменных x и y их любые приращения Δx и Δy считают дифференциалами: $\Delta x=dx$, $\Delta y=dy$.

Тогда полный дифференциал функции $z=f(x,y)$ можно записать в виде

$$dz\big|_{M_0}=df(x_0,y_0)=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}dy. \qquad (6.2)$$

Полный дифференциал имеет широкое применение в приближенных вычислениях. Если рассмотреть функцию $z=f(x,y)$, дифференцируемую в точке $M_0(x_0,y_0)$, то

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0),$$

откуда

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+\Delta z. \qquad (6.3)$$

Так как $\Delta z\approx dz$, то, используя представление dz по формуле (6.2), получим

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}dy \qquad (6.4)$$

– приближенная формула, верная с точностью до бесконечно малых более высоких порядков относительно Δx и Δy.

Пример 6.1. Вычислить приближенно $e^{(1,1)^2-(0,9)^2}$.

Решение.

Рассмотрим функцию $z=e^{x^2-y^2}$. Искомое число можно считать приращенным значением функции в точке $M_0(1;1)$ при $\Delta x=0{,}1$, $\Delta y=-0{,}1$.

Согласно формуле (6.4): $e^{(1,1)^2-(0,9)^2} \approx f(1,1)+dz|_{(1,1)}$.

Поскольку $f(1;1)=e^{1-1}=e^0=1$,

$$dz = 2x\cdot e^{x^2-y^2}dx - 2y\cdot e^{x^2-y^2}dy = 2\cdot e^{x^2-y^2}(xdx - ydy),$$

$$dz|_{(1;1)} = 2\cdot e^0(1\cdot 0,1 - 1\cdot(-0,1)) = 2\cdot(0,1+0,1) = 2\cdot 0,2 = 0,4,$$

то, окончательно, получим

$$e^{(1,1)^2-(0,9)^2} \approx 1+0,4 = 1,4.$$

Ответ: $e^{(1,1)^2-(0,9)^2} \approx 1,4$.

С помощью полного дифференциала функции можно также выяснить, как отражаются на значении функции погрешности ее аргументов.

Пример 6.2. Определить предельную абсолютную погрешность Δ_z^* функции $z=f(x,y)$, зная предельные абсолютные погрешности Δ_x^* и Δ_y^* ее аргументов x и y: $|\Delta x|\le\Delta_x^*$ и $|\Delta y|\le\Delta_y^*$.

Решение. По определению

$$|\Delta z| = |f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)|.$$

Заменяя приращение функции ее дифференциалом, получим

$$|\Delta z| \approx \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y\right|,$$

откуда можно получить оценку:

$$|\Delta z| \le \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|\cdot|\Delta x| + \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|\cdot|\Delta y|.$$

Следовательно, за предельную абсолютную погрешность функции $z=f(x,y)$ можно принять

$$\Delta_z^* = \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|\cdot\Delta_x^* + \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|\cdot\Delta_y^*. \tag{6.5}$$

Используя (6.5), можно также определить относительную погрешность функции $\delta_z = \dfrac{\Delta_z^*}{|\Delta z|}$.

Ответ: $\Delta_z^* = \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right| \cdot \Delta_x^* + \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| \cdot \Delta_y^*.$

Определение 6.2. *Полным дифференциалом второго порядка* функции $z = f(x,y)$ называется полный дифференциал от ее полного дифференциала.

По определению, получим

$$d^2z = d(dz) = d\left(f_x' dx + f_y' dy\right) = f_{xx}'' dx^2 + 2f_{xy}'' dxdy + f_{yy}'' dy^2. \qquad (6.6)$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что называют полным дифференциалом функции $z = f(x,y)$?
2. Каким образом дифференциал функции $z = f(x,y)$ может быть использован при вычислении приближенного значения функции в точке?
3. Как определяется предельная абсолютная погрешность функции двух переменных?
4. Как можно определить относительную погрешность функции двух переменных?
5. Что называют полным дифференциалом второго порядка функции $z = f(x,y)$?

7. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Предположим, что в формуле

$$z = F(u,v) \qquad (7.1)$$

переменные u и v являются непрерывными функциями независимых переменных x и y:

$$u = \varphi(x,y) \quad \text{и} \quad v = \psi(x,y). \qquad (7.2)$$

В этом случае функция $z = F(u,v)$ является сложной функцией аргументов x и y.

Предположим, что функции $F(u,v)$, $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ имеют непрерывные частные производные по всем своим аргументам. Вычислим частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, исходя из формул (7.1) и (7.2) и не используя непосредственное представление функции z через x и y.

Придадим аргументу x приращение Δx, сохраняя значение y неизменным. Тогда, в силу (7.2), u и v получат приращения $\Delta_x u$ и $\Delta_x v$, но тогда и функция $z=F(u,v)$ получит следующее приращение

$$\Delta_x z=\frac{\partial F}{\partial u}\Delta_x u+\frac{\partial F}{\partial v}\Delta_x v+\alpha(\Delta x,0)\cdot\Delta_x u+\beta(\Delta x,0)\cdot\Delta_x v,$$

где $\alpha(\Delta x,0)$ и $\beta(\Delta x,0)$ бесконечно малые функции при $\Delta x\to 0$.

Разделим обе части формулы на Δx:

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\Delta_x u}{\Delta x}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\Delta_x v}{\Delta x}+\alpha(\Delta x,0)\cdot\frac{\Delta_x u}{\Delta x}+\beta(\Delta x,0)\cdot\frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$

Если $\Delta x\to 0$, то, в силу непрерывности u и v, $\Delta_x u\to 0$ и $\Delta_x v\to 0$. Переходя к пределу при $\Delta x\to 0$, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (7.3)$$

Если придать аргументу y приращение Δy, сохраняя значение x неизменным, то с помощью аналогичных рассуждений можно получить

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}. \qquad (7.4)$$

Пример 7.1. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ для функции $z=\ln(u^2+v)$, если $u=e^{x+y^2}$ и $v=x^2+y$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2u}{u^2+v},\qquad \frac{\partial u}{\partial x}=e^{x+y^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2y\cdot e^{x+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{1}{u^2+v},\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=2x,\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=1.$$

Получим

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2u}{u^2+v}\cdot e^{x^2+y}+\frac{1}{u^2+v}\cdot 2x=\frac{2}{u^2+v}\cdot\left(ue^{x^2+y}+x\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2u}{u^2+v}\cdot 2y\cdot e^{x^2+y}+\frac{1}{u^2+v}=\frac{1}{u^2+v}\cdot\left(4uye^{x^2+y}+1\right),$$

где $u=e^{x+y^2}$ и $v=x^2+y$.

Заметим, что при записи ответа в выражения для частных производных вместо u и v можно подставить их выражения через x и y, однако это повлечет за собой громоздкие выражения.

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2}{u^2+v}\cdot\left(ue^{x^2+y}+x\right)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{u^2+v}\cdot\left(4uye^{x^2+y}+1\right)$,

где $u=e^{x+y^2}$ и $v=x^2+y$.

Для случая большего числа переменных формулы (7.3) и (7.4) естественным образом обобщаются. Например, если $z=F(u,v,w,s)$, где $u=\varphi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$, $w=\eta(x,y)$ и $s=\rho(x,y)$, то

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}.$$

Пусть исходная функция имеет вид $z=F(x,y,u,v)$, где y, u и v зависят от одной переменной x: $y=f(x)$, $u=\varphi(x)$, $v=\psi(x)$. Тогда, по сути, функция z является функцией только одной переменной x и можно ставить вопрос о нахождении производной $\frac{dz}{dx}$, которая называется *полной производной* функции z:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}. \tag{7.5}$$

Пример 7.2. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$ для функции $z=e^{2x+xy}$, если $y=\sin x$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{2x+xy}(2+y).$$

Формула (7.5) в данном случае принимает вид: $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dx}$.

Поэтому, $\quad \dfrac{dz}{dx}=e^{2x+xy}\cdot(2+y)+e^{2x+xy}\cdot x\cdot\cos x=e^{2x+xy}(2+y+x\cdot\cos x)$.

Ответ: $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{2x+xy}(2+y), \quad \dfrac{dz}{dx}=e^{2x+xy}(2+y+x\cdot\cos x)$, где $y=\sin x$.

Вопросы для самоконтроля

1. Как определяется частная производная функции $z=F(u,v)$ по переменной x, если u и v являются непрерывными функциями независимых переменных x и y?
2. В чем различие в формулах частных производных по переменным x и y сложной функции $z=F(u,v)$?
3. Каким образом обобщаются формулы частных производных сложной функции $z=F(u,v)$, если число переменных увеличить?
4. В каком случае для сложной функции можно вычислить полную производную по одной из переменных?

8. ПРОИЗВОДНАЯ ОТ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ НЕЯВНО

Теорема 8.1. *Пусть непрерывная функция y от x задается уравнением*

$$F(x,y)=0 \tag{8.1}$$

и $F(x,y)$, $F'_x(x,y)$, $F'_y(x,y)$ *– непрерывные функции в некоторой области D, содержащей точку $M(x,y)$, координаты которой удовлетворяют уравнению* (8.1), *причем* $F'_y(x,y)\neq 0$.

Тогда функция y от x будет иметь производную

$$y'_x=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}. \tag{8.2}$$

Доказательство.

Пусть некоторому значению x соответствует значение функции y, при этом $F(x,y)=0$.

Придадим независимой переменной x приращение Δx, тогда функция y получит приращение Δy, т.е. значению переменной $x+\Delta x$ соответствует значение функции $y+\Delta y$. В силу (8.1)

$F(x+\Delta x, y+\Delta y)=0$, поэтому $\qquad F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x,y)=0$.

Выражение слева представляет собой полное приращение функции двух переменных, которое также можно записать в виде:

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x,y)=\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\Delta y+\alpha(\Delta x,\Delta y)\Delta x+\beta(\Delta x,\Delta y)\Delta y,$$

где $\alpha(\Delta x,\Delta y)$ и $\beta(\Delta x,\Delta y)$ – бесконечно малые функции при $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$.

Откуда

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\Delta y+\alpha(\Delta x,\Delta y)\Delta x+\beta(\Delta x,\Delta y)\Delta y=0.$$

Разделим обе части равенства на Δx и выразим $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}+\alpha(\Delta x,\Delta y)+\beta(\Delta x,\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta x}=0,$$

$$\left(\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}+\beta(\Delta x,\Delta y)\right)\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}-\alpha(\Delta x,\Delta y),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}+\alpha(\Delta x,\Delta y)}{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}+\beta(\Delta x,\Delta y)}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x\to 0$, получим $y'_x=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$. ■

Следует заметить, что в данном случае производная y'_x, определяемая формулой (8.1), представляет собой производную $\frac{dy}{dx}$ функции одной переменной $y=y(x)$, заданной неявно.

Пример 8.1. Найти производную функции y, заданной уравнением $x^2+y^2-1=0$.

Решение.

Заметим, что уравнение $x^2+y^2-1=0$ задает две непрерывные функции $y=-\sqrt{1-x^2}$ и $y=\sqrt{1-x^2}$, поэтому непосредственное вычисление производной не может быть выполнено.

Воспользуемся формулой (8.2). Так как $\frac{\partial F}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial F}{\partial y}=2y$ то

$$y'_x=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y}.$$

Ответ: $y'_x=-\frac{x}{y}$.

Теорема 8.2*. *Пусть функция $F(x,y)$ непрерывна в окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ и имеет в ней непрерывные частные производные, причем $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$, а $F(x_0,y_0)=0$. Тогда существует окрестность, содержащая точку $M_0(x_0,y_0)$, в которой уравнение $F(x,y)=0$ определяет однозначную функцию $y=f(x)$.*

Пусть функция z от переменных x и y задается уравнением

$$F(x,y,z)=0. \tag{8.3}$$

Найдем частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$. Считая переменную y постоянной и используя формулу (8.2), получим $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$. Аналогично можно получить $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$. Заметим, что при получении формул использовано предположение $\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$.

Пример 8.2. Найти частные производные функции z, заданной уравнением $x^2y^2z^2 + 7y^4 - 8xz^3 + z^4 = 10$.

Решение.

Преобразуем исходное уравнение к виду $F(x,y,z) = 0$ и найдем частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$.

$$x^2y^2z^2 + 7y^4 - 8xz^3 + z^4 - 10 = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy^2z^2 - 8z^3, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2x^2yz^2 + 28y^3, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2x^2y^2z - 24xz^2 + 4z^3.$$

Воспользуемся формулами $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$. Получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xy^2z^2 - 8z^3}{2x^2y^2z - 24xz^2 + 4z^3} = -\frac{xy^2z^2 - 4z^3}{x^2y^2z - 12xz^2 + 2z^3} = -\frac{xy^2z - 4z^2}{x^2y^2 - 12xz + 2z^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2x^2yz^2 + 28y^3}{2x^2y^2z - 24xz^2 + 4z^3} = -\frac{x^2yz^2 + 14y^3}{x^2y^2z - 12xz^2 + 2z^3}.$$

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{xy^2z - 4z^2}{x^2y^2 - 12xz + 2z^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2yz^2 + 14y^3}{x^2y^2z - 12xz^2 + 2z^3}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Каким образом можно найти производную функции одной переменной, если функция задана неявно, без использования частных производных?
2. Каким образом можно найти производную функции одной переменной, если функция задана неявно, с использованием частных производных?
3. В каком случае функция одной переменной, заданная неявно, определяется однозначно?
4. Как вычисляются частные производные функции z двух переменных, если функция задается неявно уравнением $F(x,y,z) = 0$?

9. ПРОИЗВОДНАЯ ФНП ПО НАПРАВЛЕНИЮ

Рассмотрим в области D непрерывную функцию $u = f(x,y,z)$, имеющую непрерывные частные производные по всем своим переменным. Проведем из некоторой точки $M(x,y,z)$ данной области вектор $\vec{s} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. По направлению вектора $\vec{s}$ на расстоянии Δs от его начала, рассмотрим точку $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$, рис. 9.1. Таким образом, $\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$.

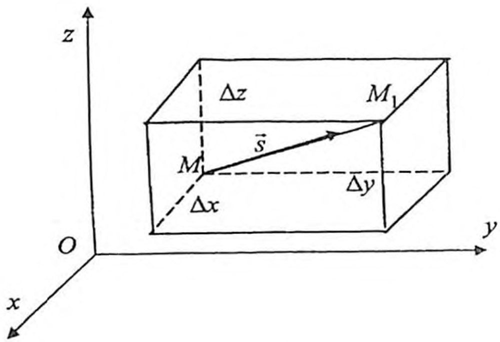

Рис. 9.1

Рассмотрим полное приращение функции u:

$$\begin{gathered}\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \\ +\alpha_1(\Delta x, \Delta y, \Delta z)\Delta x + \alpha_2(\Delta x, \Delta y, \Delta z)\Delta y + \alpha_3(\Delta x, \Delta y, \Delta z)\Delta z,\end{gathered} \tag{9.1}$$

где $\alpha_1(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, $\alpha_2(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, $\alpha_3(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ – бесконечно малые функции при $\Delta s \to 0$.

Разделим обе части равенства (9.1) на Δs:

$$\begin{gathered}\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta s} + \\ +\alpha_1(\Delta x, \Delta y, \Delta z)\frac{\Delta x}{\Delta s} + \alpha_2(\Delta x, \Delta y, \Delta z)\frac{\Delta y}{\Delta s} + \alpha_3(\Delta x, \Delta y, \Delta z)\frac{\Delta z}{\Delta s}.\end{gathered} \tag{9.2}$$

Очевидно, что

$$\frac{\Delta x}{\Delta s}=\cos\alpha,\quad \frac{\Delta y}{\Delta s}=\cos\beta,\quad \frac{\Delta z}{\Delta s}=\cos\gamma.$$

Следовательно, равенство (9.2) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta u}{\Delta s}&=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma+\\&+\alpha_1(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\cos\alpha+\alpha_2(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\cos\beta+\alpha_3(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\cos\gamma,\end{aligned}\tag{9.3}$$

где $\alpha_1(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$, $\alpha_2(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$, $\alpha_3(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$ – бесконечно малые функции при $\Delta s\to 0$.

Определение 9.1. *Производной* от функции $u=f(x,y,z)$ в точке $M(x,y,z)$ *по направлению вектора* $\vec{s}$ называется предел отношения $\frac{\Delta u}{\Delta s}$ при $\Delta s\to 0$.

Обозначение: $\frac{\partial u}{\partial\vec{s}}=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta s}$.

Производная $\frac{\partial u}{\partial\vec{s}}$ показывает скорость изменения функции $u=f(x,y,z)$ в направлении вектора $\vec{s}$.

Переходя к пределу в равенстве (9.3), получим

$$\frac{\partial u}{\partial\vec{s}}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.\tag{9.4}$$

Из (9.4) следует, что, зная частные производные функции, легко найти производную по любому направлению вектора $\vec{s}$.

Заметим, что частные производные являются, по сути, частными случаями производной по направлению.

Так, например, при $\alpha=0$, $\beta=\frac{\pi}{2}$ и $\gamma=\frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\partial u}{\partial\vec{s}}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos 0+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\frac{\pi}{2}+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\frac{\pi}{2}=\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Пример 9.1. Для функции $u = x^2 + y^2 + z^2$ найти производную $\frac{\partial u}{\partial \vec{s}}$ в точке $M(1;\ 1;\ 1)$ по направлению вектора $\vec{s} = (1;\ 2;\ 3)$.

Решение.

Найдем частные производные функции в точке $M(1;\ 1;\ 1)$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1;\ 1;\ 1)} = \left.2x\right|_{(1;\ 1;\ 1)} = 2, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1;\ 1;\ 1)} = \left.2y\right|_{(1;\ 1;\ 1)} = 2, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1;\ 1;\ 1)} = \left.2z\right|_{(1;\ 1;\ 1)} = 2.$$

Найдем направляющие косинусы вектора $\vec{s}$:

$$\cos\alpha = \frac{s_x}{|\vec{s}|}, \quad \cos\beta = \frac{s_y}{|\vec{s}|}, \quad \cos\gamma = \frac{s_z}{|\vec{s}|}.$$

Тогда, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}, \quad \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{14}}, \quad \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}$.

Следовательно,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{s}}\right|_{(1;1;1)} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{14}} + 2\cdot\frac{2}{\sqrt{14}} + 2\cdot\frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{12}{\sqrt{14}}.$$

Ответ: $\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{s}}\right|_{(1;\ 1;\ 1)} = \frac{12}{\sqrt{14}}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называют производной функции $u = f(x, y, z)$ по направлению вектора $\vec{s}$?
2. Что показывает производная $\frac{\partial u}{\partial \vec{s}}$?
3. Каким образом в формуле производной $\frac{\partial u}{\partial \vec{s}}$ «задействованы» функция $u = f(x, y, z)$ и вектор $\vec{s}$?
4. В каком случае координаты вектора $\vec{s}$ являются его направляющими косинусами?
5. При каких значениях α, β, γ производная $\frac{\partial u}{\partial \vec{s}}$ будет представлять собой: частную производную $\frac{\partial u}{\partial y}$; частную производную $\frac{\partial u}{\partial z}$?

10. ГРАДИЕНТ

Рассмотрим функцию $u = f(x, y, z)$, определенную в области D.

Определение 10.1. Говорят, что в области D определено *скалярное поле*, если для каждой точки $M(x, y, z) \in D$ задано некоторое число (скаляр), т.е.

$$u = f(x, y, z) = f(M). \tag{10.1}$$

Таким образом, функция $u = f(x, y, z)$ – числовая функция точки.

Пример 10.1. Температурное поле; распределение концентрации вещества в растворе.

Определение 10.2. Говорят, что в области D определено *векторное поле*, если для каждой точки $M(x, y, z) \in D$ задан некоторый вектор, т.е.

$$\vec{a} = \vec{F}(M). \tag{10.2}$$

Пример 10.2. Силовое поле, создаваемое некоторым притягивающим центром.

В каждой точке области D, в которой задана функция $u = f(x, y, z)$, определим вектор, проекциями которого на оси координат являются частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$ этой функции в соответствующей точке:

$$\overrightarrow{grad}\ u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}. \tag{10.3}$$

Этот вектор называется градиентом функции u.

Обозначение: $\overrightarrow{grad}\ u = \nabla u$, ($\nabla$ – *набла*).

Таким образом, скалярное поле, задаваемое функцией $u = f(x, y, z)$, порождает векторное поле – поле градиентов $\overrightarrow{grad}\ u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}\right)$.

Теорема 10.1. *Пусть дано скалярное поле $u = f(x,y,z)$ и в нем определено поле градиентов. Тогда производная $\frac{\partial u}{\partial \vec{s}}$ по направлению некоторого вектора $\vec{s}$ равна проекции вектора $\overrightarrow{grad}\ u$ на вектор $\vec{s}$.*

Доказательство.

Рассмотрим единичный вектор $\vec{s}_0$, соответствующий вектору $\vec{s}$:

$$\vec{s}_0 = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \cos\beta \cdot \vec{j} + \cos\gamma \cdot \vec{k}\ .$$

Вычислим скалярное произведение векторов $\overrightarrow{grad}\ u$ и $\vec{s}_0$:

$$(\overrightarrow{grad}\ u, \vec{s}_0) = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma . \qquad (10.4)$$

Правая часть формулы (10.4) – производная функции $u = f(x,y,z)$ по направлению вектора $\vec{s}$. Следовательно, $(\overrightarrow{grad}\ u, \vec{s}_0) = \frac{\partial u}{\partial \vec{s}}$.

Если обозначить угол между векторами $\overrightarrow{grad}\ u$ и $\vec{s}_0$ через φ, то можно записать:

$$\left|\overrightarrow{grad}\ u\right| \cdot \left|\vec{s}_0\right| \cdot \cos\varphi = \frac{\partial u}{\partial \vec{s}},$$

$$\left|\overrightarrow{grad}\ u\right| \cdot \cos\varphi = \frac{\partial u}{\partial \vec{s}}, \qquad (10.5)$$

$$np_{\vec{s}_0}\ \overrightarrow{grad}\ u = \frac{\partial u}{\partial \vec{s}}. \qquad (10.6)$$

■

Свойства градиента

1. Производная в точке по направлению вектора $\vec{s}$ имеет наибольшее значение, если направление вектора $\vec{s}$ совпадает с направлением градиента. Это наибольшее значение производной равно $\left|\overrightarrow{grad}\ u\right|$ (следует непосредственно из равенства (10.5)).
2. Производная по направлению вектора, перпендикулярного к вектору $\overrightarrow{grad}\ u$, равна нулю (следует из равенства (10.5) при $\varphi = \frac{\pi}{2}$).

Определение 10.3. Точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, в которой $\left.\overrightarrow{grad}\, u\right|_{M_0} = \bar{0}$, называется *особой* для скалярного поля; в противном случае – *обыкновенной* (*неособой*).

Теорема 10.2*. *Во всякой неособой точке плоского* $\left(D \subset \mathbb{R}^2\right)$ *скалярного поля градиент поля направлен по нормали к линии уровня, проходящей через эту точку, в сторону возрастания поля.*

Пример 10.1. Найти скорость и направление наибыстрейшего возрастания функции $u = xy^2 + yz^2$ в точке $M_0(1;-1;2)$.

Решение.

Направление наибыстрейшего возрастания функции в точке совпадает с направлением градиента, а его скорость равна значению длины градиента в этой точке.

Найдем градиент функции в общем виде $\overrightarrow{grad}\, u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}; \dfrac{\partial u}{\partial y}; \dfrac{\partial u}{\partial z}\right)$. В данном случае $\overrightarrow{grad}\, u = \left(y^2; 2xy + z^2; 2yz\right)$.

В точке $M_0(1;-1;2)$: $\left.\overrightarrow{grad}\, u\right|_{(1;-1;2)} = (1;2;-4)$.

Скорость возрастания составит:

$$\left|\left.\overrightarrow{grad}\, u\right|_{(1;-1;2)}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{21}.$$

Ответ: направление наибыстрейшего возрастания функции $u = xy^2 + yz^2$ в точке $M_0(1;-1;2)$ задается вектором $\left.\overrightarrow{grad}\, u\right|_{(1;-1;2)} = (1;2;-4)$, а его скорость составляет $\sqrt{21}$.

Вопросы для самоконтроля

1. В каком случае говорят, что в области D определено векторное поле?
2. В каком случае говорят, что в области D определено скалярное поле?
3. Какой вектор называют градиентом функции $u = f(x, y, z)$?
4. Как взаимосвязаны $\overrightarrow{grad}\, u$ и $\dfrac{\partial u}{\partial \bar{s}}$?
5. В каком случае производная $\dfrac{\partial u}{\partial \bar{s}}$ имеет наибольшее значение?

6. Чему равна производная $\frac{\partial u}{\partial \bar{s}}$, если вектор $\bar{s}$ перпендикулярен вектору $\overrightarrow{grad}\ u$?
7. Как направлен градиент $\overrightarrow{grad}\ u$ в неособой точке области $D \subset \mathbb{R}^2$ по отношению к линии уровня данной функции?

11. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЛОКАЛЬНОГО ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Определение 11.1. Функция $z = f(x,y)$ имеет *локальный максимум* (*минимум*) в точке $M_0(x_0,y_0)$, если существует r-окрестность данной точки, такая, что для всех точек этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0,y_0) > f(x,y)$ ($f(x_0,y_0) < f(x,y)$).

Пример 11.1.
Функция $z = x^2 + y^2$ достигает минимума в точке $O(0;0)$.

Теорема 11.1 (необходимые условия экстремума).
Если функция $z = f(x,y)$ имеет экстремум в точке $M_0(x_0,y_0)$, то каждая частная производная первого порядка данной функции или обращается в этой точке в нуль, или не существует.

Доказательство.

Пусть $y = const = y_c$. Тогда $z = f(x,y_c)$ представляет собой функцию одной переменной. Так как в точке $M_0(x_0,y_0)$ данная функция имеет экстремум, то либо значение частной производной $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = 0$, либо в этой точке частная производная не существует.

Таким же образом можно доказать, что $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} = 0$ или частная производная не существует. ■

Так же, как и в случае функции одной переменной, точки, в которых частные производные обращаются в нуль или не существуют, называются *критическими* (*стационарными*) *точками* функции $z = f(x,y)$.

Заметим, что теорема 11.1 позволяет находить экстремальные значения только в тех случаях, когда есть уверенность в их существовании.

Теорема 11.2* (достаточные условия экстремума).

Пусть функция $z = f(x,y)$ *определена и имеет непрерывные частные производные второго порядка в некоторой области* D. *Пусть точка* $M_0(x_0,y_0) \in D$ *– критическая точка функции* $z = f(x,y)$.

Обозначим $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0} = A$, $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_0} = B$, $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0} = C$. *Тогда, если:*

$\Delta\big|_{M_0} = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 > 0$, *то в точке* $M_0(x_0,y_0)$ *функция* $z = f(x,y)$ *имеет экстремум, причем, если* $A < 0$ *– максимум, если* $A > 0$ *– минимум;*

$\Delta\big|_{M_0} < 0$ *– функция экстремума не имеет;*

$\Delta\big|_{M_0} = 0$ *– необходимы дополнительные исследования.*

Заметим, что в случае $\Delta < 0$, т.е. когда в точке $M_0(x_0,y_0)$ функция не имеет ни минимума, ни максимума, поверхность, служащая графиком функции, может вблизи этой точки иметь форму «седла». Например, $z = x^2 - y^2$ (рис. 11.1). В этом случае говорят, что в данной точке наблюдается явление минимакса.

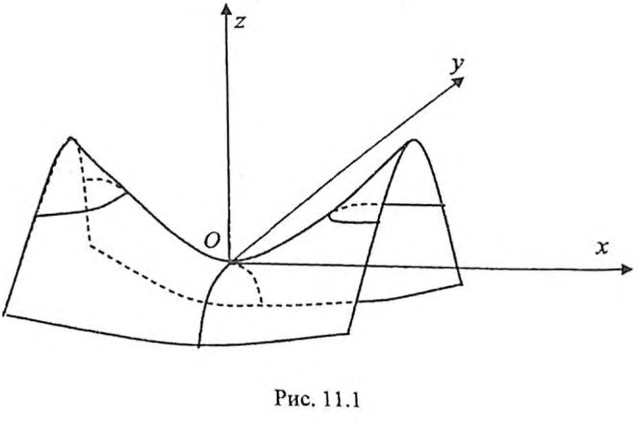

Рис. 11.1

Теорема 11.3* (достаточные условия экстремума).

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена и имеет непрерывные частные производные второго порядка в некоторой области D. Пусть точка $M_0(x_0, y_0) \in D$ – критическая точка функции $z = f(x, y)$. Тогда, если:

$d^2 f(x_0, y_0) < 0$ (при $dx^2 + dy^2 > 0$), то в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция $z = f(x, y)$ имеет максимум;

$d^2 f(x_0, y_0) > 0$ (при $dx^2 + dy^2 > 0$), то в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция $z = f(x, y)$ имеет минимум.

Пример 11.2. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Решение.

Используя необходимые условия экстремума, найдем критические точки. Для этого найдем частные производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x$$

и решим систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y = 0, \\ x = y^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^4 - y = 0, \\ x = y^2, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

Таким образом, получены две критические точки $M_1(0;0)$ и $M_2(1;1)$.

Для исследования характера критических точек найдем частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

Тогда $\Delta = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix} = 36xy - 9.$

Для точки $M_1(0;0)$: $\Delta\big|_{(0;0)} = 36 \cdot 0 \cdot 0 - 9 = -9 < 0$, т.е. в этой точке функция не имеет экстремума.

Для точки $M_2(1;1)$: $\Delta\big|_{(1;1)} = 36\cdot 1\cdot 1 - 9 = 27 > 0$, т.е. в этой точке функция имеет экстремум, причем $A = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1;1)} = 6x\big|_{(1;1)} = 6\cdot 1 = 6 > 0$, следовательно, это минимум. Вычислим $z_{\min} = z(1;1) = 1^3 + 1^3 - 3\cdot 1\cdot 1 = -1$.

Если для определения характера экстремума использовать дифференциал второго порядка, то рассуждения будут следующие. Для данной функции

$$d^2 f(x,y) = 6x dx^2 - 6dxdy + 6y dy^2.$$

Тогда

$$d^2 f(1;1) = 6dx^2 - 6dxdy + 6dy^2 = 3dx^2 + 3dy^2 + 3(dx^2 - 2dxdy + dy^2) =$$

$$= 3dx^2 + 3dy^2 + 3(dx - dy)^2 > 0,$$

т.е. еще раз получено, что в точке $M_2(1;1)$ функция имеет минимум.

Ответ: $z_{\min} = z(1;1) = -1$.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте определение локального максимума функции двух переменных.
2. Сформулируйте определение локального минимума функции двух переменных.
3. В чем заключаются необходимые условия экстремума функции двух переменных?
4. Приведите пример функции двух переменных, имеющей в точке $O(0;0)$ минимум, при условии, что частные производные в этой точке не существуют.
5. Каким образом можно найти экстремум и определить его характер, используя частные производные второго порядка?
6. При каких значениях параметров a и b функция $z = ax^2 + by^2$: имеет в точке $O(0;0)$ минимум; имеет в точке $O(0;0)$ максимум; не имеет в точке $O(0;0)$ экстремума?
7. Как по знаку дифференциала второго порядка функции двух переменных можно сделать вывод о характере экстремума?
8. Какой метод определения наличия и характера экстремума функции в точке легче в использовании?

12. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ В ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ

Рассмотрим некоторое множество D точек на плоскости.

Напомним ряд следующих определений.

Точка $M(x,y)$ называется *внутренней точкой* множества D, если она принадлежит этому множеству вместе с некоторой своей окрестностью.

Точка $N(x,y)$ называется *граничной точкой* множества D, если в любой ее окрестности имеются точки как принадлежащие D, так и не принадлежащие этому множеству.

Совокупность всех граничных точек множества D называется его *границей* Γ.

Множество D называется *областью* (*открытым множеством*), если все его точки внутренние.

Множество D с присоединенной границей Γ, т.е. $\overline{D} = D \bigcup \Gamma$, называется *замкнутой областью*.

Область называется *ограниченной,* если она целиком содержится внутри круга достаточно большого радиуса.

Определение 12.1. Наибольшее или наименьшее значение функции в данной области называется *абсолютным экстремумом* (абсолютным максимумом или абсолютным минимумом) функции в этой области.

Теорема 12.1*. *Абсолютный экстремум непрерывной функции* $z = f(x,y)$ *в области* $\overline{D}$ *достигается либо в критической точке функции, принадлежащей этой области, либо в граничной точке области.*

Пример 12.1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$ в треугольной области $\overline{D}$ с вершинами $O(0;0)$, $A(2;0)$ и $B(0;4)$.

Решение.

Изобразим область графически, рис. 12.1.

Найдем частные производные функции: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y - 2$.

Определим ее критические точки из решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x-2=0, \\ 2y-2=0. \end{cases}$$

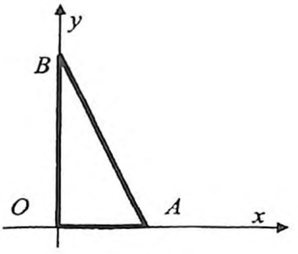

Рис. 12.1

Таким образом, критической точкой функции является точка $M_0(1;\ 1)$, принадлежащая области $\overline{D}$.

Вычислим $z(1;1)=0$.

Исследуем поведение функции на границе области.

На отрезке OA: $y=0$, $0 \le x \le 2$, следовательно, $z\big|_{y=0}=x^2-2x+2$ для всех точек отрезка. Имеем функцию одной переменной x. Найдем производную для $z\big|_{y=0}$: $\left(z\big|_{y=0}\right)'=2x-2$ и определим критические точки на данном отрезке из решения уравнения $2x-2=0$. Получаем, $x=1\in[0;2]$. Вычислим значение функции в точке $M_1(1;0)$: $z(1;0)=1$. Вычислим также значения функции на концах отрезка: $z(0;0)=2$, $z(2;0)=2$.

На отрезке OB: $x=0$, $0 \le y \le 4$, следовательно $z\big|_{x=0}=y^2-2y+2$ для всех точек отрезка. Имеем функцию одной переменной y. Найдем производную для $z\big|_{x=0}$: $\left(z\big|_{x=0}\right)'=2y-2$ и определим критические точки на данном отрезке из решения уравнения $2y-2=0$. Получаем, $y=1\in[0;4]$. Вычислим значение функции в точке $M_2(0;1)$: $z(0;1)=1$. Вычислим также значения функции на концах отрезка: $z(0;0)=2$ (получено ранее), $z(0;4)=10$.

Рассмотрим отрезок AB. Он представляет собой часть прямой проходящей через точки $A(2;0)$ и $B(0;4)$. Получим уравнение данной прямой по формуле $\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}$. Имеем,

$$\frac{x-2}{0-2}=\frac{y-0}{4-0}, \qquad \frac{x-2}{-2}=\frac{y}{4}, \qquad 2(x-2)=-y, \quad y=4-2x.$$

Таким образом, на отрезке AB: $y=4-2x$, $0 \le x \le 2$, следовательно $z\big|_{y=4-2x}=x^2+(4-2x)^2-2x-2(4-2x)+2=5x^2-14x+10$. Имеем функцию одной переменной x. Найдем производную для $z|_{y=4-2x}$: $\left(z|_{y=4-2x}\right)'=10x-14$ и определим критические точки на данном отрезке из решения уравнения $10x-14=0$. Получаем, $x=1,4\in[0;2]$. Вычислим значение функции в точке $M_3(1,4;1,2)$: $z(1,4;1,2)=0,2$. Значения функции на концах отрезка вычислены ранее.

Сравнив все полученные значения, имеем $z_{наиб}=z(0;4)=10$ и $z_{наим}=z(1;1)=0$.

Ответ: $z_{наиб}=10$ и $z_{наим}=0$.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. В каком случае корректна постановка задачи о нахождении наибольшего и наименьшего значений функции $z=f(x,y)$ в области?
2. Возможна ли ситуация, что непрерывная в замкнутой области функция не будет иметь в ней наибольшего или наименьшего значения?
3. Составьте алгоритм решения задачи нахождения наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции $z=f(x,y)$ в замкнутой области.
4. Нужно ли определять наличие экстремума и его характер в критических точках функции, принадлежащих области, при решении задачи нахождении наибольшего и наименьшего значений функции $z=f(x,y)$? Почему?
5. Нужно ли определять наличие экстремума и его характер в критических точках функции, принадлежащих границе области, при решении задачи нахождении наибольшего и наименьшего значений функции $z=f(x,y)$? Почему?

13. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ФНП

В ряде задач на разыскание наибольших и наименьших значений ФНП переменные бывают связаны друг с другом некоторыми добавочными условиями. В этом случае говорят об условном экстремуме. Заметим, что необходимым условием разрешимости является то, что число уравнений обязательно меньше числа переменных.

Рассмотрим вопрос об условном экстремуме функции двух переменных, если переменные связаны одним условием.

Пусть требуется найти экстремумы функции

$$z = f(x, y) \tag{13.1}$$

при условии, что x и y связаны уравнением

$$\varphi(x, y) = 0. \tag{13.2}$$

В определенных случаях данная задача может быть решена методом подстановки. Если удастся, например, разрешить уравнение (13.2) относительно y, то, подставляя в (13.1) вместо y найденное выражение, получим функцию одной переменной x и тогда исходная задача будет сведена к задаче исследования на экстремум функции одной независимой переменной x.

В случае, когда разрешить уравнение (13.2) не представляется возможным, используют другие методы. В частности, используется метод множителей Лагранжа.

Суть метода сводится к следующему: на основании исходной функции (13.1) и условия связи (13.2) строится вспомогательная функция Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y). \tag{13.3}$$

Функция $L(x, y, \lambda)$ – функция трех переменных. Необходимым условием существования экстремума данной функции (в предположении, что исходные функции непрерывно дифференцируемы) является равенство нулю частных производных. Система для определения критических точек функции Лагранжа имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0, \end{cases}$$

Или
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}=0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}=0, \\ \varphi(x,y)=0. \end{cases} \tag{13.4}$$

Решения системы (13.4) определяют критические точки функции Лагранжа, а также – критические точки функции (13.1) при условии (13.2).

Достаточные условия условного экстремума связаны с изучением знака дифференциала второго порядка функции Лагранжа.

Теорема 13.1*.

Пусть функции $f(x,y)$ и $\varphi(x,y)$ определены и имеют непрерывные частные производные второго порядка в некоторой области D. Пусть точка $M_0^L(x_0,y_0,\lambda_0)$ – критическая точка функции $L(x,y,\lambda)$, причем $M_0(x_0,y_0)\in D$. Тогда, если при выполнении условий

$$d\varphi(M_0)=\varphi'_x dx+\varphi'_y dy=0,\ dx^2+dy^2>0:$$

$d^2L(x_0,y_0,\lambda_0)<0$, то в точке $M_0(x_0,y_0)$ функция $z=f(x,y)$ имеет условный максимум;

$d^2L(x_0,y_0,\lambda_0)>0$, то в точке $M_0(x_0,y_0)$ функция $z=f(x,y)$ имеет условный минимум.

Теорема 13.2*.

Пусть функции $f(x,y)$ и $\varphi(x,y)$ определены и имеют непрерывные частные производные второго порядка в некоторой области D. Пусть точка $M_0^L(x_0,y_0,\lambda_0)$ – критическая точка функции $L(x,y,\lambda)$, причем $M_0(x_0,y_0)\in D$. Тогда, если

$$\Delta\big|_{M_0^L}=-\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix}<0,$$

то в точке $M_0(x_0,y_0)$ функция $z=f(x,y)$ имеет условный максимум;
если $\Delta\big|_{M_0^L}>0$, то в точке $M_0(x_0,y_0)$ функция $z=f(x,y)$ имеет условный минимум.

Заметим, что параметр λ носит вспомогательный характер и в вычислении значений условных экстремумов не используется.

Пример 13.1. Найти экстремумы функции $z = 9 - 8x - 6y$ при условии $x^2 + y^2 = 25$.

Решение.

Преобразуем условие связи к виду (13.2): $x^2 + y^2 - 25 = 0$.

Составим функцию Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = 9 - 8x - 6y + \lambda(x^2 + y^2 - 25).$$

Найдем частные производные функции Лагранжа:

$$L'_x = -8 + 2\lambda x, \quad L'_y = -6 + 2\lambda y, \quad L'_\lambda = x^2 + y^2 - 25.$$

Система для определения критических точек имеет вид:

$$\begin{cases} -8 + 2\lambda x = 0, \\ -6 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Решив систему, получим: $M_1^L(4;3;1)$ и $M_2^L(-4;-3;-1)$.

Для определения характера экстремума найдем частные производные второго порядка функции Лагранжа:

$$L''_{xx} = 2\lambda, \; L''_{xy} = 0, \; L''_{yy} = 2\lambda, \; L''_{\lambda x} = 2x, \; L''_{\lambda y} = 2y, \; L''_{\lambda\lambda} = 0.$$

Выполнение условия $d\varphi = 0$ означает: $2xdx + 2ydy = 0$, тогда

$$d^2L = 2\lambda(dx^2 + dy^2).$$

Так как $d^2L\Big|_{(4;3;1)} = 2(dx^2 + dy^2) > 0$, то в точке $M_1(4;3)$ исходная функция имеет условный минимум, причем $z_{\min, усл}(4;3) = -41$;

так как $d^2L\Big|_{(-4;-3;-1)} = -2(dx^2 + dy^2) < 0$, то в точке $M_2(-4;-3)$ исходная функция имеет условный максимум, причем $z_{\max, усл}(-4;-3) = 59$.

Для определения характера экстремума с использованием определителя, составим его в общем виде:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = -8\lambda(-x^2 - y^2) = 8\lambda(x^2 + y^2).$$

Так как $\Delta\big|_{(4;3;1)} = 8 \cdot 1 \cdot (4^2 + 3^2) = 200 > 0$, то в точке $M_1(4;3)$ исходная функция имеет условный минимум, причем $z_{\min,усл}(4;3) = -41$; так как $\Delta\big|_{(-4;-3;-1)} = 8 \cdot (-1) \cdot (4^2 + 3^2) = -200 < 0$, то в точке $M_2(-4;-3)$ исходная функция имеет условный максимум, причем $z_{\max,усл}(-4;-3) = 59$.

Ответ: $z_{\min,усл}(4;3) = -41$; $z_{\max,усл}(-4;-3) = 59$.

В случае, если требуется найти экстремумы функции n переменных $z = f(x_1, x_2, .., x_n)$, при условии, что переменные x_1, x_2, …, x_n связаны m $(m < n)$ уравнениями связи

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ \qquad \dots \\ \varphi_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \end{cases}$$

составляется функция Лагранжа с m множителями λ_1, λ_2, …, λ_m:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \lambda_1\varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n) +$$
$$+\lambda_2\varphi_2(x_1, x_2, ..., x_n) + ... + \lambda_m\varphi_m(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Для определения критических точек необходимо решить систему из $n + m$ уравнений:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0,\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0,\ \dots,\ \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0,\ \varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = 0, \dots,\ \varphi_m = 0.$$

Наличие и характер экстремума можно установить, используя дифференциал второго порядка функции Лагранжа.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. В каком случае при исследовании функции $z = f(x, y)$ на экстремум возникает задача об условном экстремуме?
2. Когда и каким образом задачу поиска условного экстремума функции $z = f(x, y)$ можно свести к задаче нахождения экстремума функции одной независимой переменной?
3. Составьте алгоритм решения задачи нахождения условного экстремума функции $z = f(x, y)$ с использованием дифференциала второго порядка функции Лагранжа.
4. Составьте алгоритм решения задачи нахождения условного экстремума функции $z = f(x, y)$ с использованием определителя.
5. Имеет ли смысл исследование функции $z = f(x, y)$ на условный экстремум, если одновременно требуется выполнение двух дополнительных условий зависимости переменных x и y?
6. Условный экстремум какого характера всегда будет иметь функция $z = x^2 + y^2$, независимо от ненулевых значений параметров a и b для условия связи $ax + by = c$?

14. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ НАХОЖДЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННОЙ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть на основании наблюдений требуется установить функциональную зависимость показателя y от фактора x:

$$y = f(x). \tag{14.1}$$

Пусть в результате наблюдений получено n значений y при соответствующих значениях фактора x, табл. 14.1.

Таблица 14.1

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

Вид функции (14.1), называемой *функцией регрессии*, устанавливается или из теоретических соображений, или на основании характера расположения на координатной плоскости точек, соответствующих результатам наблюдений (поле корреляции).

При выбранном виде функции $y = f(x,a,b,c,...)$, где $a,b,c,...$ – неизвестные параметры, остается подобрать их так, чтобы в каком-то смысле функция наилучшим образом описывала рассматриваемый процесс.

Широко распространенным методом решения данной задачи является метод наименьших квадратов (МНК).

Рассмотрим сумму квадратов разностей значений y_i, полученных в результате наблюдений, и функции $f(x_i,a,b,c,...)$ в соответствующих точках:

$$S(a,b,c,...) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - f(x_i,a,b,c,...))^2. \tag{14.2}$$

Подберем параметры $a,b,c,...$ так, чтобы эта сумма имела наименьшее значение. Таким образом, задача сводится к нахождению таких значений параметров $a,b,c,...$, при которых функция $S(a,b,c,...)$ имеет минимум.

На основании необходимых условий экстремума ФНП получаем, что значения параметров $a,b,c,...$ должны удовлетворять системе уравнений

$$\left\{ \frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial c} = 0, \quad ... \right. \tag{14.3}$$

или

$$\begin{cases} -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - f(x_i,a,b,c,...))\dfrac{\partial f(x_i,a,b,c,...)}{\partial a} = 0, \\ -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - f(x_i,a,b,c,...))\dfrac{\partial f(x_i,a,b,c,...)}{\partial b} = 0, \\ -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - f(x_i,a,b,c,...))\dfrac{\partial f(x_i,a,b,c,...)}{\partial c} = 0, \\ \qquad\qquad ... \end{cases} \tag{14.4}$$

В системе (14.4) уравнений столько, сколько неизвестных параметров имеет функция (14.2).

Заметим, что вопрос о существовании решения системы уравнений (14.4) и существовании минимума функции (14.2) исследуется в каждом конкретном случае в зависимости от вида выбранной функции $y = f(x,a,b,c,...)$.

14.1. Случай линейной зависимости

Предположим, что между значениями фактора x и признака y существует линейная зависимость вида

$$y = ax + b.$$

Функция (14.2) в этом случае принимает вид:

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - (ax_i + b))^2. \tag{14.5}$$

Это функция с двумя переменными a и b, так как x_i и y_i – заданные числа. Следовательно, система для определения критических точек функции (14.5) будет следующей

$$\begin{cases} -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - (ax_i + b))x_i = 0, \\ -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - (ax_i + b)) = 0. \end{cases}$$

Откуда,

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}x_i y_i - a\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - b\sum_{i=1}^{n}x_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{n}y_i - a\sum_{i=1}^{n}x_i - b \cdot n = 0. \end{cases}$$

Так как неизвестными в данной системе являются a и b, то удобнее привести ее к виду:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n}x_i = \sum_{i=1}^{n}x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^{n}y_i. \end{cases} \tag{14.6}$$

Заметим, что методом математической индукции можно доказать, что определитель матрицы коэффициентов системы (14.6), при $n \geq 2$, положителен, т.е. $n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 > 0$. Это позволяет сделать вывод, что (14.6) имеет единственное решение. Получаем,

$$a = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2}, \qquad b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2}. \qquad (14.7)$$

Покажем, что найденные значения параметров a и b определяют минимум функции (14.5). Для этого найдем частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = A, \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i = B, \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = 2n = C.$$

Тогда $\Delta = AC - B^2 = 4\left(n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 \right) > 0$, а это означает, что при найденных значениях параметров a и b функция (14.5) имеет экстремум. Очевидно, что $A = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$. Значит функция (14.5), при данных значениях a и b, имеет единственную точку минимума.

14.2. Случай квадратичной зависимости

Предположим, что между значениями фактора x и признака y существует квадратичная зависимость вида

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Функция (14.2) в этом случае принимает вид:

$$S(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i^2 + bx_i + c))^2. \qquad (14.8)$$

Это функция трех переменных: a, b, c. Система уравнений (14.4) принимает вид:

$$\begin{cases} -2\sum_{i=1}^{n}(y_i-(ax_i^2+bx_i+c))x_i^2=0, \\ -2\sum_{i=1}^{n}(y_i-(ax_i^2+bx_i+c))x_i=0, \\ -2\sum_{i=1}^{n}(y_i-(ax_i^2+bx_i+c))=0. \end{cases}$$

После преобразований, получаем

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n}x_i^4+b\sum_{i=1}^{n}x_i^3+c\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i^3+b\sum_{i=1}^{n}x_i^2+c\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i, \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i+c\cdot n=\sum_{i=1}^{n}y_i. \end{cases}$$

Получена система линейных уравнений для определения неизвестных a, b, c. Можно доказать, что определитель этой системы отличен от нуля, следовательно она будет иметь единственное решение. При полученных значениях параметров функция $S(a,b,c)$ будет иметь минимум.

Упражнение 14.1. *Получить выражения для параметров a, b, c.*

14.3. Случаи сведения функций к линейной. Выбор «лучшей» функции

Рассмотрим другие виды функций, используемых в экономических исследованиях и способы их сведения к линейной зависимости, табл. 14.2.

Таблица 14.2

Исходная функция	Замена	Линейная функция
$y = ax^2 + b$	$x^2 = t$	$y = at + b$
$y = \frac{a}{x} + b$	$\frac{1}{x} = t$	$y = at + b$
$y = a\ln x + b$	$\ln x = t$	$y = at + b$
$y = ax^b$	$\ln y = \ln a + b\ln x$ $\ln y = z,\ \ln x = t$	$z = \ln a + bt$
$y = ab^x$	$\ln y = \ln a + x\ln b$ $\ln y = z$	$z = \ln a + x\ln b$

Полученные функции, описывающие зависимость x и y, позволяют находить промежуточные значения y и решать задачи на прогнозирование.

Для проверки адекватности построенной зависимости реальному поведению значений x и y можно использовать коэффициент аппроксимации MAPE:

$$\overline{\varepsilon} = MAPE = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{y_i - y_i^{регр}}{y_i} \right| \cdot 100\%, \qquad (14.9)$$

где $y_i^{регр}$ – значения функции регрессии, вычисленные по соответствующим значениям x_i.

В случае, если $\overline{\varepsilon} < 10\%$, полученная функция регрессии имеет высокую точность. Если $10\% < \overline{\varepsilon} < 20\%$, точность функции регрессии хорошая (допустимая). При $20\% < \overline{\varepsilon} < 50\%$ точность полученной функции удовлетворительная, однако использование данной зависимости на практике спорно. При $\overline{\varepsilon} > 50\%$ точность неудовлетворительная и использование данной функции в анализе недопустимо.

В случае, если при исследованиях зависимость x и y определили с помощью нескольких функций, то для выбора «лучшей» рассчитывают среднюю квадратичную ошибку

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - y_i^{регр})^2}{n - m}}, \qquad (14.10)$$

где m – количество параметров полученной функции.

Для дальнейших исследований обычно используют функцию с наименьшей квадратичной ошибкой.

Пример 14.1.

В таблице 14.3 приведены данные о прибыли y (ден. ед.) некоторого предприятия в зависимости от расходов на рекламу x (ден. ед.).

Таблица 14.3

x	0,5	1,0	2	2,5	4,0	5,5	7,5	8,0	8,8
y	6	8	12	15	20	25	33	36	40

Требуется:

1) построить функцию регрессии вида $y = ax + b$, оценить ее качество, найти среднюю квадратичную ошибку уравнения регрессии;
2) построить функцию регрессии вида $y = ax^2 + b$, оценить ее качество, найти среднюю квадратичную ошибку уравнения регрессии;
3) сравнить полученные результаты и сделать вывод о возможности их использования в прогнозировании.

Решение.

Для построения функций регрессии будем использовать метод наименьших квадратов. Все расчеты будем выполнять с точностью до трех знаков после запятой.

1) В случае линейной регрессии $y = ax + b$ система для определения параметров a и b будет иметь вид (14.6):

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

Все вспомогательные вычисления по определению постоянных коэффициентов данной системы представим в таблице 14.4.

Таблица 14.4

№	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	0,5	6	0,25	3,0
2	1,0	8	1,00	8,0
3	2,0	12	4,00	24,0
4	2,5	15	6,25	37,5
5	4,0	20	16,00	80,0
6	5,5	25	30,25	137,0
7	7,5	33	56,25	247,0
8	8,0	36	64,00	288,0
9	8,8	40	77,44	352,0
$\sum$	39,8	195	255,44	1177,5

Система для определения параметров принимает вид:

$$\begin{cases} 255,44a + 39,8b = 1177,5; \\ 39,8a + 9b = 195. \end{cases}$$

Воспользуемся формулами (14.7) и получим

$$a = \frac{9 \cdot 1177,5 - 39,8 \cdot 195}{9 \cdot 255,44 - (39,8)^2} = 3,968, \quad b = \frac{255,44 \cdot 195 - 1177,5 \cdot 39,8}{9 \cdot 255,44 - (39,8)^2} = 4,121.$$

Таким образом, в случае линейной зависимости, функция регрессии принимает вид $y = 3,968x + 4,121$.

Для оценки качества полученной функции регрессии будем использовать коэффициент аппроксимации MAPE (14.9), среднюю квадратичную ошибку рассчитаем по формуле (14.10). Напомним, что значения $y_i^{регр}$ будем получать с помощью функции $y = 3,968x + 4,121$ при соответствующих значениях x_i. Все вспомогательные вычисления представим в табл. 14.5.

Согласно расчетам, коэффициент аппроксимации MAPE примет значение $MAPE = \frac{0,19}{9} \cdot 100\% = 0,021 \cdot 100\% = 2,1\%$, что соответствует высокой точности функции.

Средняя квадратичная ошибка составит

$$S = \sqrt{\frac{3,552}{9-2}} = 0,712.$$

Таблица 14.5

№	x_i	y_i	$y_i^{регр}$	$y_i - y_i^{регр}$	$\left\lvert\dfrac{y_i - y_i^{регр}}{y_i}\right\rvert$	$(y_i - y_i^{регр})^2$
1	0,5	6	6,105	0,105	0,017	0,011
2	1,0	8	8,089	0,089	0,011	0,008
3	2,0	12	12,056	0,056	0,005	0,003
4	2,5	15	14,040	-0,960	0,064	0,921
5	4,0	20	19,991	-0,009	0,000	0,000
6	5,5	25	25,943	0,943	0,038	0,889
7	7,5	33	33,878	0,878	0,027	0,771
8	8,0	36	35,862	-0,138	0,004	0,019
9	8,8	40	39,036	-0,964	0,021	0,930
$\sum$	39,8	195	–	–	0,190	3,552

2) В случае зависимости вида $y = ax^2 + b$ предварительно требуется выполнить замену $t = x^2$. Тогда система для определения параметров функции $y = at + b$ будет иметь вид:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} t_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} t_i = \sum_{i=1}^{n} t_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} t_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

Все вспомогательные вычисления по определению постоянных коэффициентов данной системы представим в таблице 14.6.

Система для определения параметров принимает вид:

$$\begin{cases} 14484{,}204a + 255{,}44b = 8485{,}35; \\ 255{,}44a + 9b = 195. \end{cases}$$

Решив ее, получим $a = 0{,}408$, $b = 10{,}090$.

Таблица 14.6

№	x_i	t_i	y_i	t_i^2	$t_i y_i$
1	0,5	0,25	6	0,063	1,50
2	1,0	1,00	8	1,000	8,00
3	2,0	4,00	12	16,000	48,00
4	2,5	6,25	15	39,063	93,75
5	4,0	16,00	20	256,00	320,00
6	5,5	30,25	25	915,063	756,25
7	7,5	56,25	33	3164,063	1856,25
8	8,0	64,00	36	4096,000	2304,00
9	8,8	77,44	40	5996,954	3097,60
$\sum$	39,8	255,44	195	14484,204	8485,35

Таким образом, в случае квадратичной зависимости, функция регрессии принимает вид $y = 0,408x^2 + 10,09$.

Рассчитаем коэффициент аппроксимации MAPE (14.9) и среднюю квадратичную ошибку (14.10). Все вспомогательные вычисления представим в таблице 14.7.

Таблица 14.7

№	x_i	y_i	$y_i^{регр}$	$y_i - y_i^{регр}$	$\left\lvert\dfrac{y_i - y_i^{регр}}{y_i}\right\rvert$	$(y_i - y_i^{регр})^2$
1	0,5	6	10,192	4,192	0,699	17,570
2	1,0	8	10,498	2,498	0,312	6,238
3	2,0	12	11,721	-0,279	0,023	0,078
4	2,5	15	12,639	-2,361	0,157	5,574
5	4,0	20	16,616	-3,384	0,169	11,451
6	5,5	25	22,429	-2,571	0,103	6,612
7	7,5	33	33,034	0,034	0,001	0,001
8	8,0	36	36,195	0,195	0,005	0,038
9	8,8	40	41,677	1,677	0,042	2,813
$\sum$	39,8	195	—	—	1,512	50,376

Получаем, $MAPE=\frac{1,512}{9}\cdot 100\%=16,8\%$, что соответствует допустимой точности функции регрессии; средняя квадратичная ошибка составит

$$S=\sqrt{\frac{50,376}{9-2}}=2,683.$$

3) Таким образом, функция регрессии $y=3,968x+4,121$ обладает высокой точностью, функция регрессии $y=0,408x^2+10,09$ – допустимой точностью, а это означает, что использование первой функции обеспечит более достоверные результаты при прогнозировании. Средняя квадратичная ошибка для функции $y=3,968x+4,121$ также меньше, чем для функции $y=0,408x^2+10,09$ (0,712<2,683).

Вывод. На основе данных о прибыли y (ден. ед.) некоторого предприятия в зависимости от расходов на рекламу x (ден. ед.) были построены две функции регрессии: $y=3,968x+4,121$ и $y=0,408x^2+10,09$. В целях прогнозирования рекомендуется использовать зависимость вида $y=3,968x+4,121$, так как она обладает высокой точностью соответствия исходным данным и меньшей средней квадратичной ошибкой функции регрессии.

Вопросы для самоконтроля

1. На основании чего устанавливается вид функциональной зависимости показателя y от фактора x?
2. К решению какой задачи сводится проблема определения неизвестных параметров функции $y=f(x,a,b,c,...)$, описывающей зависимость y от x, если использовать МНК?
3. Какой системе должны удовлетворять параметры $a,b,c,...$? Почему?
4. Какой вид имеет функция суммы квадратов разностей y_i и $f(x_i,a,b,c,...)$ в случае линейной зависимости?
5. Какой вид имеет функция суммы квадратов разностей y_i и $f(x_i,a,b,c,...)$ в случае квадратичной зависимости?
6. Какой показатель позволяет оценить точность соответствия функции регрессии исходным данным?
7. Какая характеристика функции регрессии позволяет осуществить выбор из нескольких функций лучшей?

Вопросы к экзамену

1. Функции нескольких переменных (ФНП). Область определения и график ФНП. Линии и поверхности уровня ФНП.
2. Предел и непрерывность ФНП. Частные приращения ФНП.
3. Частные производные ФНП, их геометрический смысл и вычисление. Эластичность ФНП по переменной.
4. Частные и смешанные производные высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных для функции двух переменных.
5. Дифференцируемость ФНП. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости.
6. Полный дифференциал ФНП, его использование в приближенных вычислениях.
7. Частные производные сложной ФНП.
8. Частные производные неявно заданных ФНП.
9. Производная ФНП по направлению.
10. Градиент ФНП, его свойства.
11. Локальный экстремум ФНП. Необходимые и достаточные условия экстремума.
12. Наибольшие и наименьшие значения функции двух переменных в замкнутой области.
13. Условный экстремум ФНП. Метод подстановки и метод множителей Лагранжа.
14. Метод наименьших квадратов (МНК) нахождения приближенной функциональной зависимости двух переменных. Случай линейной зависимости.

РАЗДЕЛ 5

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

1. ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. Первообразная и ее свойства

В предыдущих разделах мы рассматривали такую задачу: дана функция $F(x)$, требуется найти ее производную, т.е. функции $f(x)=F'(x)$.

В данном разделе мы будем рассматривать обратную задачу: дана функция $f(x)$, требуется найти такую функцию $F(x)$, производная которой равна $f(x)$, т. е.

$$F'(x)=f(x).$$

Определение 1.1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $y=f(x)$ на множестве X, если функция $F(x)$ – дифференцируема на множестве X и для $\forall x\in X$

$$F'(x)=f(x). \qquad (1.1)$$

Замечание 1.1. *Множество X может быть:* (a,b), $[a,b]$, $[a,b)$, $[a,+\infty)$ и т.д.

Пример 1.1. $f(x)=1$, $F(x)=x$, так как $(x)'=1$.

Пример 1.2. $f(x)=\cos x$, $F(x)=\sin x$, так как $(\sin x)'=\cos x$.

Однако можно увидеть, что если для данной функции $f(x)$ существует первообразная, то эта первообразная не является единственной. Так, в предыдущих примерах можно указать другие функции, которые также будут первообразными для исходных.

Пример 1.1*. $f(x)=1$, $F(x)=x+3$, $F(x)=x-4$.

Пример 1.2*. $f(x)=\cos x$, $F(x)=\sin x+1$, $F(x)=\sin x+\sqrt{2}$.

В более общем случае в качестве первообразной можно рассмотреть функции $F(x)=x+C$ и $F(x)=\sin x+C$ (где C – произвольная постоянная) соответственно.

Теорема 1.1. *Если* $F_1(x)$ *и* $F_2(x)$ *– две первообразные для функции* $f(x)$ *на множестве* X, *то всюду на этом множестве* $F_1(x) - F_2(x) = C$, *где* C *– некоторая постоянная.*

Доказательство.

В силу определения первообразной имеем:

$$\left.\begin{array}{l} F_1'(x) = f(x), \\ F_2'(x) = f(x), \end{array}\right\} \quad \text{при } \forall x \in X. \tag{1.2}$$

Обозначим

$$F_1(x) - F_2(x) = \varphi(x).$$

На основании равенств (1.2) получаем

$$\varphi'(x) = \left(F_1(x) - F_2(x)\right)' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0, \ \forall x \in X.$$

Следовательно, согласно следствию из теоремы Лагранжа (УМК, 1 часть, раздел 3, следствие 6.1)

$$\varphi(x) = C,$$

где C – некоторая постоянная, т.е.

$$F_1(x) - F_2(x) = C. \qquad \blacksquare$$

Следствие 1.1. *Если* $F(x)$ *– первообразная для функции* $f(x)$ *на множестве* X, *то любая другая первообразная для* $f(x)$ *имеет вид* $F(x) + C$, *где* $C = const$.

1.2. Неопределенный интеграл и его свойства

Определение 1.2. Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на множестве X называется *неопределенным интегралом* и обозначается

$$\int f(x)\,dx.$$

(читается – интеграл $f(x)dx$, $\int$ – знак интеграла, $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение).

Согласно следствию 1.1 можно утверждать:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{1.3}$$

где $C = const$.

Пример 1.1*. $\int 1 \cdot dx = x + C,$

Пример 1.2*. $\int \cos x \, dx = \sin x + C.$

Таким образом, неопределенный интеграл представляет собой семейство функций вида $y = F(x) + C$. Геометрически неопределенный интеграл задает семейство кривых, каждая из которых получается путем сдвига одной из кривых параллельно самой себе вверх или вниз, т.е. вдоль оси Oy.

Операцию нахождения неопределенного интеграла для данной функции $f(x)$ называют *интегрированием*.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и интегрируемы на множестве X.

Свойства неопределенного интеграла

1. $d\left(\int f(x) \, dx\right) = f(x) \, dx.$

   Доказательство.

   Известно, что $\int f(x) \, dx = F(x) + C$. Тогда

$$d\left(\int f(x) \, dx\right) = d\left(F(x) + C\right) = dF(x) + dC = F'(x)dx + (C)'dx = f(x) \, dx. \quad \blacksquare$$

2. $\int d(F(x)) = F(x) + C.$

   Доказательство.

$$\int d(F(x)) = \int F'(x) \, dx = \int f(x) \, dx = F(x) + C. \quad \blacksquare$$

3. $\int (f(x) \pm g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx.$

   Доказательство.

   Пусть $F'(x) = f(x), \quad G'(x) = g(x).$

   Известно:

$$(F(x) \pm G(x))' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x),$$

т.е. функции $F(x) \pm G(x)$ являются первообразными для $f(x) \pm g(x)$. Тогда

$$\int (f(x) \pm g(x)) \, dx = \left(F(x) \pm G(x)\right) + C = \left(F(x) \pm G(x)\right) + (C_1 \pm C_2) =$$

$$= (F(x) + C_1) \pm (G(x) + C_2) = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx. \quad \blacksquare$$

4. Если $k = const \neq 0$, то $\int k \cdot f(x)\, dx = k \cdot \int f(x)\, dx$.

Доказательство.

Действительно, $(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$.

Тогда

$\int k \cdot f(x)\, dx = k \cdot F(x) + C_1 = k(F(x) + C) = k \cdot \int f(x)\, dx.$ ∎

Свойства 3 и 4 называются линейными свойствами интегралов.

1.3. Таблица неопределенных интегралов. Непосредственное интегрирование

1. $\int 0 \cdot dx = C.$

2. $\int 1 \cdot dx = x + C.$

3. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1).$

4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0).$

5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1).$

6. $\int e^x dx = e^x + C.$

7. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$

8. $\int \cos x\, dx = \sin x + C.$

9. $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg} x + C \quad \left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right).$

10. $\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{ctg} x + C \quad (x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}).$

11. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin\dfrac{x}{a} + C, \\ -\arccos\dfrac{x}{a} + C. \end{cases} \quad (a > 0,\ |x| < a)$$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\begin{cases}\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}+C, \\ -\dfrac{1}{a}\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{a}+C.\end{cases} \quad (a\neq 0)$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C \quad (a\neq 0,\ |x|\neq|a|)$

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C \quad \left(a\neq 0,\ x^2-a^2>0\right).$

Интегралы 1 – 14 называются табличными. С их помощью, а так же с помощью доказанных свойств неопределенных интегралов, можно выразить интегралы от более сложных элементарных функций через приведенные выше. В этом и состоит *непосредственное интегрирование* функций.

Пример 1.3. Найти интеграл $\displaystyle\int\left(5x^2+\frac{7}{x^3}-\frac{1}{x}+\frac{2}{1+x^2}\right)dx.$

Решение.

$$\int\left(5x^2+\frac{7}{x^3}-\frac{1}{x}+\frac{2}{1+x^2}\right)dx=\int 5x^2dx+\int\frac{7}{x^3}dx-\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{2}{1+x^2}dx=$$

$$=5\int x^2dx+7\int x^{-3}dx-\int\frac{dx}{x}+2\int\frac{dx}{1+x^2}=\frac{5x^3}{3}-\frac{7}{2x^2}-\ln|x|+2\operatorname{arctg}x+C.$$

Ответ: $\dfrac{5}{3}x^3-\dfrac{7}{2x^2}-\ln|x|+2\operatorname{arctg}x+C.$

Пример 1.4. Найти интеграл $\displaystyle\int\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)dx.$

Решение.

$$\int\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)dx=\int\frac{1-\cos x}{2}dx=\int\frac{1}{2}dx-\int\frac{\cos x}{2}dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x+C.$$

Ответ: $\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}\sin x+C.$

Однако не всегда интегралы от элементарных функций будут являться элементарными функциями, например

$$\int e^{-x^2}dx, \quad \int \cos x^2 dx, \quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx$$

не выражаются через элементарные функции. Такие интегралы называются *неберущимися*. Однако на практике эти случаи уже изучены, для таких функций составлены таблицы.

1.4. Интегрирование заменой переменной

Во многих случаях введение новой переменной интегрирования позволяет свести нахождение исходного интеграла к нахождению табличного интеграла, т.е. перейти к непосредственному интегрированию. Такой метод называется методом подстановки или методом замены переменной.

Теорема 1.2. *Пусть функция* $x=\varphi(t)$ *определена и дифференцируема на некотором множестве* X^* *и пусть* X *– множество значений этой функции, на котором определена функция* $f(x)$. *Тогда, если на множестве* X *функция* $f(x)$ *имеет первообразную, то на множестве* X^* *справедлива формула*

$$\int f(x)\,dx\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \tag{1.4}$$

Доказательство.

Пусть $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на множестве X. Рассмотрим на множестве X^* сложную функцию $F(\varphi(t))$. По правилу дифференцирования сложной функции, учитывая, что $F'(x)=f(x)$, получаем

$$\left(F(\varphi(t))\right)' = F_x'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t),$$

т.е. функция $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ имеет на множестве X^* первообразную $F(\varphi(t))$ и, следовательно,

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t))+C.$$

Замечая, что $F(\varphi(t))+C = \left(F(x)+C\right)\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f(x)\,dx\Big|_{x=\varphi(t)}$,

получаем формулу (1.4). ■

Формула (1.4) называется формулой *замены переменной в неопределенном интеграле.*

Пример 1.5. Найти интеграл $\int \frac{x^3}{(x-1)^2}\,dx.$

Решение.

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2}\,dx = \begin{vmatrix} x-1=t \\ x=t+1 \end{vmatrix} = \int \frac{(t+1)^3}{t^2}\,dt = \int \left(t+3+\frac{3}{t}+\frac{1}{t^2} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{2}t^2 + 3t + 3\ln|t| - \frac{1}{t} + C = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 3(x-1) + 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C.$$

Ответ: $\frac{1}{2}(x-1)^2 + 3(x-1) + 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C.$

Пример 1.6. Найти интеграл $\int e^{x^2} 2x\,dx.$

Решение.

$$\int e^{x^2} 2x\,dx = \begin{vmatrix} x^2 = t \\ 2x\,dx = dt \end{vmatrix} = \int e^t dt = e^t + C = e^{x^2} + C.$$

Новую переменную можно не выписывать явно. В таких случаях говорят *о преобразовании функции под знаком дифференциала* или *о введении постоянных и переменной* x *под знак дифференциала.*

$$\int e^{x^2} 2x dx = \int e^{x^2} dx^2 = e^{x^2} + C.$$

Ответ: $e^{x^2} + C.$

Замечание 1.2. *Выделим два частных случая замены переменной:*

1. *Так как* $dx = d(x+a)$, *где* $a = const$, *то* $\int f(x)dx = \int f(x)\, d(x+a).$

2. *Так как* $dx = \frac{1}{k}\, d(kx)$, *то* $\int f(x)\,dx = \frac{1}{k} \int f(x)\, d(kx).$

Пример 1.7. Найти интеграл $\int \cos(3x+2)\,dx.$

Решение.

$$\int \cos(3x+2)\,dx = \frac{1}{3}\int \cos(3x+2)\,d(3x+2) = \frac{1}{3}\sin(3x+2)+C.$$

Ответ: $\frac{1}{3}\sin(3x+2)+C$.

1.5. Интегрирование по частям

Теорема 1.3. *Пусть каждая из функций $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируема на множестве X, и, кроме того, на этом множестве существует первообразная для функции $v(x)u'(x)$, тогда для функции $u(x)v'(x)$ на X также существует первообразная, причем*

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx \tag{1.5}$$

или

$$\int udv = uv - \int vdu. \tag{1.5'}$$

Доказательство.

По правилу дифференцирования произведения имеем:

$$(uv) = u'v + uv'.$$

Откуда

$$uv' = (uv)' - vu'.$$

Заметим, что:

1) $\int (uv)'\,dx = uv$,

2) согласно условию, существует $\int u'v\,dx = \int v\,du$.

Следовательно, существует интеграл от всей правой части, поэтому существует $\int uv'\,dx = \int u\,dv$.

Таким образом, формула (1.5′) верна. ■

Формулы (1.5) и (1.5′) – формулы интегрирования по частям.

Пример 1.8. Найти $\int x\cdot\sin x\,dx$.

Решение.

1) $\int x\cdot\sin x\,dx=\begin{vmatrix} u=x & v=-\cos x \\ du=dx & dv=\sin x\,dx \end{vmatrix}=-x\cos x+\int\cos x\,dx=$

$=-x\cos x+\sin x+C.$

2) $\int x\cdot\sin x\,dx=\begin{vmatrix} u=\sin x & v=\dfrac{x^2}{2} \\ du=\cos x\,dx & dv=xdx \end{vmatrix}=\dfrac{x^2}{2}\sin x-\int\dfrac{x^2}{2}\cos x\,dx=\ldots,$

т.е. интеграл усложнился.

Ответ: $-x\cos x+\sin x+C.$

Вывод. При вычислении интегралов по формуле интегрирования по частям не каждый способ выбора функций $u(x)$ и $v(x)$ приводит к интегралу более простому, чем первоначальный.

Некоторые типичные интегралы, берущиеся по частям

1. $\int x^n e^x dx,\ n\in\mathbb{N};$
2. $\int x^n \sin x\,dx,\ n\in\mathbb{N};$
3. $\int x^n \cos x\,dx,\ n\in\mathbb{N};$
4. $\int x^n \mathrm{arctg} x\,dx,\ n\in\mathbb{N};$
5. $\int x^n \ln x\,dx,\ n\in\mathbb{N};$
6. $\int x^n \arcsin x\,dx,\ n\in\mathbb{N}.$

Отметим, что в интегралах $1-3$ в качестве функции $u(x)$ надо брать x^n, а в интегралах $4-6$ в качестве $u(x)$ надо брать $\mathrm{arctg}\,x$, $\ln x$, $\arcsin x$ соответственно.

Замечание 1.3. *Более подробная классификация интегралов, берущихся по формуле* (1.5) *приведена в* [2, 246 – 247].

1.6. Интегрирование рациональных функций

1.6.1. Некоторые сведения из алгебры

Рациональной функцией от переменной x на множестве $X\subset\mathbb{R}$ называется выражение

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_0}{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0}.$$

Если $m<n$, то рациональная дробь называется *правильной*, если $m \geq n$ – *неправильной.*

В курсе алгебры доказывается:

1) если рациональная дробь неправильная, то с помощью алгоритма деления ее можно представить в виде: $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \dfrac{P_2(x)}{Q(x)}$, где $\dfrac{P_2(x)}{Q(x)}$ – правильная дробь;

2) каждый многочлен $Q(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ с действительными коэффициентами из $\mathbb{R}$ разлагается на линейные и квадратичные множители, т.е.

$$Q(x) = (x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2} \times \ldots \times (x-x_\mu)^{k_\mu}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \times \\ \times (x^2+p_2x+q_2)^{l_2} \times \ldots \times (x^2+p_\gamma x+q_\gamma)^{l_\gamma}, \tag{1.6}$$

где $k_1 + k_2 + \ldots + k_\mu + 2(l_1 + l_2 + \ldots + l_\gamma) = n.$

Определение 1.3. *Простейшими рациональными дробями* называют дроби следующих четырех типов:

I. $\dfrac{A}{x-a}$;

II. $\dfrac{A}{(x-a)^n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$;

III. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, $\dfrac{p^2}{4} - q < 0$;

IV. $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$, $\dfrac{p^2}{4} - q < 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$.

Теорема 1.4*. *Каждая правильная рациональная дробь может быть однозначно представлена в виде суммы простейших рациональных дробей.*

Другими словами, если имеется правильная рациональная дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой раскладывается по формуле (1.6), то

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{x-x_1} + \frac{A_{12}}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1k}}{(x-x_1)^k} + \ldots + \frac{A_{\mu 1}}{x-x_\mu} + \frac{A_{\mu 2}}{(x-x_\mu)^2} + \ldots$$

$$
+\frac{A_{\mu k_\mu}}{(x-x_\mu)^{k_\mu}}+\frac{M_{11}x+N_{11}}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{M_{12}x+N_{12}}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\ldots+\frac{M_{1l_1}x+N_{1l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}}+\ldots
$$

$$
+\frac{M_{\gamma 1}x+N_{\gamma 1}}{x^2+p_\gamma x+q_\gamma}+\ldots+\frac{M_{\gamma 1}x+N_{\gamma 2}}{(x^2+p_\gamma x+q_\gamma)^{l_\gamma}}.
$$

Для разложения рациональных дробей на сумму простейших дробей можно использовать один из следующих методов.

Метод неопределенных коэффициентов

1. Используя произвольные постоянные, представить правильную рациональную дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ в виде суммы простейших рациональных дробей.
2. Привести сумму дробей к одному знаменателю.
3. Приравнять числители.
4. Приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x.
5. Решить полученную систему из n уравнений, линейную относительно произвольных постоянных.
6. Используя полученное решение системы, записать разложение исходной дроби на сумму простейших рациональных дробей.

Пример 1.9. Разложить на сумму простейших дробь $\dfrac{3x^2+1}{(x+1)(x^2+1)^2}$.

Решение.

Данная дробь является правильной, представим ее в виде суммы простейших дробей:

$$
\frac{3x^2+1}{(x+1)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2+1}+\frac{Rx+S}{(x^2+1)^2}.
$$

Согласно методу, приведем сумму дробей к одному знаменателю

$$
\frac{3x^2+1}{(x+1)(x^2+1)^2}=\frac{A(x^2+1)^2+(Mx+N)(x+1)(x^2+1)+(Rx+S)(x+1)}{(x+1)(x^2+1)^2}.
$$

Приравняем числители:

$$3x^2+1=A(x^2+1)^2+(Mx+N)(x+1)(x^2+1)+(Rx+S)(x+1).$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{aligned}
&x^4:\ 0=A+M;\\
&x^3:\ 0=M+N;\\
&x^2:\ 3=2A+M+N+R;\\
&x^1:\ 0=M+N+R+S;\\
&x^0:\ 1=A+N+S.
\end{aligned}$$

Решим полученную систему линейных уравнений

$$\begin{cases}
A+M=0,\\
M+N=0,\\
2A+M+N+R=3,\\
M+N+R+S=0,\\
A+N+S=1.
\end{cases}$$

Решение системы: $A=1,\ M=-1,\ N=1,\ R=1,\ S=-1.$

Таким образом, дробь может быть представлена в виде

$$\frac{3x^2+1}{(x+1)(x^2+1)^2}=\frac{1}{x+1}+\frac{-x+1}{x^2+1}+\frac{x-1}{(x^2+1)^2}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{-x+1}{x^2+1}+\dfrac{x-1}{(x^2+1)^2}.$

Метод произвольных значений

Действия 1 – 3 такие же, как и для метода неопределенных коэффициентов.

4. Придавая переменной x некоторые фиксированные значения, получить систему линейных уравнений относительно произвольных постоянных. Заметим, что целесообразно в первую очередь полагать x рав-

ной корням знаменателей. Если же корни кратные, то основное равенство можно продифференцировать и опять придать x значения корней знаменателей.

Действия 5 – 6 аналогичны методу неопределенных коэффициентов.

Пример 1.10. Разложить на сумму простейших дробь $\dfrac{3x^2+x+2}{(x+1)(x-1)^2}$.

Решение.

Данная дробь является правильной, представим ее в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{3x^2+x+2}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}.$$

Согласно методу, приведем сумму дробей к одному знаменателю

$$\frac{3x^2+x+2}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{A(x-1)^2+B(x+1)(x-1)+C(x+1)}{(x+1)(x-1)^2}.$$

Приравняем числители:

$$3x^2+x+2=A(x-1)^2+B(x+1)(x-1)+C(x+1).$$

Придавая переменной x определенные числовые значения, получим:

$x=1$: $\quad 6=2C \Rightarrow C=3$;
$x=-1$: $\quad 4=4A \Rightarrow A=1$;
$x=0$: $\quad 2=A-B+C$.

Получена система $\begin{cases} A=1, \\ A-B+C=2, \\ C=3. \end{cases}$ Решение системы: $A=1,\ B=2,\ C=3$.

Таким образом, дробь может быть представлена в виде

$$\frac{3x^2+x+2}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{(x-1)^2}$.

1.6.2. Первообразная рациональной функции

Для вычисления первообразной от рациональной функции достаточно представить эту функцию в виде суммы простейших дробей, а затем найти первообразные для каждого из слагаемых.

Вычислим первообразные для простейших рациональных дробей I – III.

I. $$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a|+C.$$

II. $$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^n} = A\int (x-a)^{-n}d(x-a) = \frac{A}{-n+1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{n-1}}+C.$$

III. $$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Mx+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}dx = \int \frac{M\left(x+\frac{p}{2}\right)-M\frac{p}{2}+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = x+\frac{p}{2} \\ a=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}} \end{array} \right| = \int \frac{Mt+\left(N-M\frac{p}{2}\right)}{t^2+a^2}dt = M\int \frac{t}{t^2+a^2}dt + \left(N-M\frac{p}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} + \left(N-M\frac{p}{2}\right)\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} = \frac{M}{2}\ln\left|t^2+a^2\right| + \frac{2N-Mp}{2a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C =$$

$$= \frac{M}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{2N-Mp}{2\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C.$$

Замечание 1.4. *Первообразная для рациональной дроби вида* IV *вычисляется через рекуррентные соотношения.*

Вывод. Первообразная от рациональной функции всегда вычисляется в конечном виде, т.е. выражается через элементарные функции.

Пример 1.11. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)(x^2+1)}dx.$

Решение.

Разложим правильную рациональную дробь $\dfrac{x}{(x-1)(x^2+1)}$ на сумму простейших

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+1}=\frac{A(x^2+1)+(Mx+N)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)}.$$

Приравняем числители:

$$x=A(x^2+1)+(Mx+N)(x-1).$$

Придавая переменной x определенные числовые значения, получим:

$x=1$: $\quad 1=2A \Rightarrow A=\dfrac{1}{2}$;

$x=-1$: $\quad -1=2A-2(-M+N) \Rightarrow -1=2A+2M-2N$;

$x=0$: $\quad 0=A-N$.

Получена система $\begin{cases} A=1/2, \\ 2A+2M-2N=-1, \\ A-N=0. \end{cases}$

Решение системы: $A=\dfrac{1}{2}$, $M=-\dfrac{1}{2}$, $N=\dfrac{1}{2}$.

Таким образом, дробь может быть представлена в виде:

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1}=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1(x-1)}{2(x^2+1)}.$$

Получаем, $\displaystyle\int\frac{x}{(x-1)(x^2+1)}\,dx=\int\left(\frac{1}{2(x-1)}-\frac{x-1}{2(x^2+1)}\right)dx=$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{x-1}{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\int\left(\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln\left|x^2+1\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$$

Ответ: $\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x^2+1|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$.

1.7. Интегрирование тригонометрических функций

Под рациональной функцией $R(x,y)$ двух переменных x и y будем понимать функцию, представимую в виде $R(x,y)=\frac{P_m(x,y)}{Q_n(x,y)}$, где $P_m(x,y)$ и $Q_n(x,y)$ – многочлены от двух переменных степени m и n соответственно.

Рассмотрим интеграл вида $\int R(\sin x,\cos x)dx$.

С помощью замены переменной $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ $(-\pi<x<\pi)$ сведем данный интеграл к интегралу от рациональной функции. Получаем

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad x=2\operatorname{arctg}t,\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Подставляя полученные выражения в исходный интеграл, получим интеграл от рациональной функции:

$$\int R(\sin x,\cos x)\,dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}=\int R(R_1(t),R_2(t))R_3(t)\,dt.$$

Замечание 1.5. *Замена* $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ *является универсальной подстановкой для неопределенных интегралов такого вида. Однако на практике она не во всех случаях приводит к простейшему интегралу.*

Пример 1.12. Найти интеграл $\int\frac{dx}{3\sin x-2\cos x+1}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{3\sin x-2\cos x+1}=\left| \begin{array}{c} t=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2},\quad \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \\ x=2\operatorname{arctg} x,\quad dx=\dfrac{2}{1+t^2}dt \end{array} \right|=$$

$$=\int \frac{\dfrac{2}{1+t^2}}{3\dfrac{2t}{1+t^2}-2\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+1}\,dt=\int \frac{2}{6t-2+2t^2+1+t^2}\,dt=2\int \frac{dt}{3t^2+6t-1}=$$

$$=\frac{2}{3}\int \frac{dt}{t^2+2t-\dfrac{1}{3}}=\frac{2}{3}\int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2-\dfrac{4}{3}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left|\frac{(t+1)-\dfrac{2}{\sqrt{3}}}{(t+1)+\dfrac{2}{\sqrt{3}}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+1-\dfrac{2}{\sqrt{3}}}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+\sqrt{3}+2}\right|+C.$$

Ответ: $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+\sqrt{3}+2}\right|+C$.

Пример 1.13. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{(\cos x+\sin x)^2}$.

Решение.

Воспользуемся универсальной подстановкой

$$\int \frac{dx}{(\cos x+\sin x)^2}=\int \frac{\dfrac{2}{1+t^2}}{\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+\dfrac{2t}{1+t^2}\right)^2}\,dt=2\int \frac{1+t^2}{(1+2t-t^2)^2}\,dt.$$

Получен неопределенный интеграл от рациональной функции, алгоритм дальнейших действий описан в 1.6, однако в данном случае вычисления будут весьма громоздкими.

Рассмотрим другой подход к вычислению исходного интеграла:

$$\int \frac{dx}{(\cos x+\sin x)^2}=\int \frac{dx}{\cos^2 x\cdot(1+\mathrm{tg}x)^2}=\left|\begin{array}{c}\mathrm{tg}x=t,\\ \dfrac{1}{\cos^2 x}dx=dt\end{array}\right|=\int \frac{dt}{(1+t)^2}=\int \frac{d(1+t)}{(1+t)^2}=$$

$$=-\frac{1}{1+t}+C=-\frac{1}{1+\mathrm{tg}x}+C.$$

Ответ: $-\dfrac{1}{1+\mathrm{tg}x}+C.$

Частные случаи замены переменной при интегрировании тригонометрических функций:

1. $\int R(\sin x)\cos x\, dx = |\sin x = t,\ \cos x\, dx = dt| = \int R(t)\, dt.$

2. $\int R(\cos x)\sin x\, dx = |\cos x = t,\ \sin x\, dx = -dt| = -\int R(t)\, dt.$

3. $\int R(\mathrm{tg}x)\, dx = \left|\mathrm{tg}x = t,\ x=\mathrm{arctg}t,\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\right| = \int \dfrac{R(t)}{1+t^2}\, dt.$

4. $\int R(\sin^{2k} x, \cos^{2p} x)\, dx = \left|\begin{array}{c} t=\mathrm{tg}x,\quad \sin^2 x=\dfrac{t^2}{1+t^2},\quad \cos^2 x=\dfrac{1}{1+t^2},\\ x=\mathrm{arctg}x,\quad dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\end{array}\right| =$

$$=\int R\left(\frac{t^{2k}}{(1+t^2)^k},\frac{1}{(1+t^2)^p}\right)\frac{dt}{1+t^2}.$$

Замечание 1.6. *Другие частные случаи более рационального вычисления неопределенных интегралов от тригонометрических функций приведены в* [7, 364 – 368].

1.8. Интегрирование простейших иррациональностей

Рассмотрим несколько основных случаев, когда интегралы от иррациональных функций с помощью подстановок приводятся к интегралам от рациональных функций.

1. $\int R(x, x^{m/n},\ldots,x^{r/s})\,dx$, где R – рациональная функция своих аргументов.

Пусть k – общий знаменатель дробей $\frac{m}{n}$, ..., $\frac{r}{s}$. Выполним подстановку $x=t^k$, $dx = kt^{k-1}dt$. Тогда каждая дробная степень x выразится через целую степень t и, следовательно, подынтегральная функция преобразуется в рациональную функцию от t.

2. $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m/n},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r/s}\right)dx.$

Этот интеграл сводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$, где k – общий знаменатель дробей $\frac{m}{n}$, ..., $\frac{r}{s}$.

3. $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$, $a \neq 0$.

Такой интеграл приводится к интегралу от рациональной функции нового переменного с помощью следующих подстановок Эйлера.

3.1. Если $a>0$, то полагаем $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}\cdot x+t$.

Перед корнем $\sqrt{a}$ возьмем для определенности знак плюс. Тогда

$$ax^2+bx+c = ax^2+2\sqrt{a}\,xt+t^2,$$

откуда x определяется как рациональная функция от t: $x=\dfrac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\cdot t}$, (значит, dx тоже будет выражаться рационально через t), следовательно

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\cdot x+t = \sqrt{a}\cdot\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\,t}+t,$$

т.е. $\sqrt{ax^2+bx+c}$ оказывается рациональной функцией от t.

Так как $\sqrt{ax^2+bx+c}$, x, dx выражаются рационально через t, то, следовательно, данный интеграл преобразуется в интеграл от рациональной функции от t.

3.2. Если $c>0$, то полагаем $\sqrt{ax^2+bx+c}=x\cdot t\pm\sqrt{c}$. (Обоснование аналогично первой подстановке).

3.3. Пусть α и β – действительные корни трехчлена ax^2+bx+c. Полагаем $\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)\cdot t$.

Так как $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$, то $\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=(x-\alpha)t$,

$$a(x-\alpha)(x-\beta)=(x-\alpha)^2t^2, \quad a(x-\beta)=(x-\alpha)t^2.$$

Отсюда находим x как рациональную функцию от t: $x=\dfrac{a\beta-\alpha\cdot t^2}{a-t^2}$.

Так как dx и $\sqrt{ax^2+bx+c}$ тоже рационально зависят от t, то исходный интеграл преобразуется в интеграл от рациональной функции переменной t.

Пример 1.14. Найти интеграл $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}\,dx.$

Решение.

$$\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}\,dx=\left|\begin{array}{c}k=4-\text{общий знаменатель дробей } \frac{1}{2} \text{ и } \frac{3}{4}\\ x=t^4,\ \ dx=4t^3dt\end{array}\right|=\int\frac{t^2}{1+t^3}\cdot 4t^3dt=$$

$$=4\int\frac{t^3\cdot t^2}{t^3+1}dt=\frac{4}{3}\int\frac{t^3}{t^3+1}\,dt^3=\frac{4}{3}\int\frac{t^3+1-1}{t^3+1}\,dt^3=\frac{4}{3}\int\left(1-\frac{1}{t^3+1}\right)dt^3=$$

$$=\frac{4}{3}\int 1\cdot dt^3-\frac{4}{3}\int\frac{d(t^3+1)}{t^3+1}=\frac{4}{3}t^3-\frac{4}{3}\ln\left|t^3+1\right|+C=\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-\frac{4}{3}\ln\left|\sqrt[4]{x^3}+1\right|+C.$$

Ответ: $\dfrac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-\dfrac{4}{3}\ln\left|\sqrt[4]{x^3}+1\right|+C$.

Пример 1.15. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+c}}$.

Решение.

Так как коэффициент при x^2 есть $a=1>0$, то воспользуемся подстановкой Эйлера 3.1: $\sqrt{x^2+c}=-x+t$, тогда $x^2+c=x^2-2xt+t^2$,

$$x=\frac{t^2-c}{2t},\quad dx=\frac{t^2+c}{2t^2}dt,\quad \sqrt{x^2+c}=-x+t=-\frac{t^2-c}{2t}+t=\frac{t^2+c}{2t}.$$

Получим, $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+c}}=\int \frac{\frac{t^2+c}{2t^2}}{\frac{t^2+c}{2t}}dt=\int \frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|x+\sqrt{x^2+c}\right|+C.$$

Ответ: $\ln\left|x+\sqrt{x^2+c}\right|+C$.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. В каком случае функция $F(x)$ называется первообразной для функции $y=f(x)$ на множестве X?
2. Чем отличаются две первообразные для функции $y=f(x)$ на множестве X?
3. Как называется совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на множестве X?
4. С помощью какой операции можно проверить: правильно ли найден неопределенный интеграл?
5. Что задает неопределенный интеграл геометрически?
6. В чем состоят основные свойства неопределенного интеграла?
7. Повторите таблицу неопределенных интегралов. В чем состоит непосредственное интегрирование?
8. Какие интегралы называют неберущимися?
9. В чем состоит суть метода замены переменной?
10. Какие два частных случая введения постоянных под знак дифференциала позволяют избежать замены переменной при вычислении неопределенного интеграла?
11. В чем состоит суть метода интегрирования по частям?

12. Влияет ли выбор функций $u(x)$ и $v(x)$ при выполнении интегрирования по частям на ход решения?
13. Какой вид должна иметь функция $g(x)$ в неопределенном интеграле $\int x^n g(x)\,dx$ $(n\in\mathbb{N},\ n>1)$, чтобы при использовании метода интегрирования по частям в качестве $u(x)$ следовало брать: x^n; $g(x)$?
14. Какую рациональную дробь называют правильной?
15. Укажите все простейшие рациональные дроби.
16. Какие методы можно использовать при разложении рациональной дроби на простейшие?
17. В каком случаях при интегрировании простейшей рациональной дроби с квадратным трехчленом в знаменателе ее нельзя разложить на сумму простейших?
18. Получите неопределенные интегралы для простейших рациональных дробей I – III.
19. Какую функцию называют рациональной тригонометрической функцией?
20. Какую подстановку называют универсальной тригонометрической подстановкой?
21. Всегда ли универсальная тригонометрическая подстановка дает самое простое решение при вычислении неопределенного интеграла? Какие другие виды подстановок и в каких частных случаях рекомендовано использовать при вычислении неопределенного интеграла от рациональной тригонометрической функции?
22. Найдите интеграл $\int \frac{dx}{\sin x}$: с использованием универсальной тригонометрической подстановки; с помощью другой замены.
23. Каким образом определяют значение k в подстановке $x=t^k$ при вычислении неопределенного интеграла вида $\int R(x, x^{m/n},\ldots,x^{r/s})\,dx$?
24. При выполнении какой подстановки и для какого вида неопределенного интеграла значение k определяют тем же методом, что и выше?
25. Найдите интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+c}}$ (пример 1.15) с помощью подстановки Эйлера 3.1: $\sqrt{x^2+c}=x+t$. Как изменился ход решения, результат?

2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

2.1. Определение определенного интеграла

Пусть дана функция $y = f(x)$ определенная на отрезке $[a;b]$, $(a < b)$. Проделаем следующие пять операций:

1. Разобьем отрезок $[a;b]$ на n частей при помощи несовпадающих точек x_1, x_2,..., x_{n-1}, причем

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

Обозначим данное разбиение буквой T.

Отрезок $[x_k; x_{k+1}]$ $(k = \overline{0; n-1})$ будем называть k-тым частичным отрезком, а длину его будем обозначать $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$.

Обозначим через $\lambda(T) = \max\limits_k \Delta x_k$ (наибольший из этих отрезков) и будем эту величину $\lambda(T)$ называть *диаметром разбиения.*

2. На каждом из частичных отрезков произвольным образом выберем точку $\xi_k \in [x_k; x_{k+1}]$ $(k = \overline{0; n-1})$ и вычислим значение функции $f(\xi_k)$.

3. Вычислим произведение $f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$ $(k = \overline{0; n-1})$.

4. Найдем
$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \sigma(f, T, \xi_k). \tag{2.1}$$

Сумма $\sigma(f, T, \xi_k)$ называется *интегральной суммой* или *суммой Римана.*

5. Рассмотрим $\lim\limits_{\lambda(T) \to 0} \sigma(f, T, \xi_k)$.

Определение 2.1. Если существует и конечен $\lim\limits_{\lambda(T) \to 0} \sigma(f, T, \xi_k)$, то он называется *определенным интегралом функции* $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначается:

$$\int_a^b f(x)\, dx. \tag{2.2}$$

При существовании конечного предела (2.2) функция $y = f(x)$ называется *интегрируемой по Риману* и обозначается $f(x) \in R([a;b])$.

Определение 2.2. Число J называется *пределом интегральных сумм* $\sigma(f,T,\xi_k)$ при $\lambda(T)\to 0$, если для $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta_0>0$, что при любом разбиении T отрезка $[a;b]$, таком что $\lambda<\delta_0$, и при любом выборе точек $\xi_k\in[x_k;x_{k+1}]$ будет выполнено: $|\sigma-J|<\varepsilon$.

Геометрический смысл определенного интеграла

Пусть функция $y=f(x)$ неотрицательна на отрезке $[a;\ b]$.

Определение 2.3. Фигура, ограниченная графиком функции $y=f(x)$, заданной на отрезке $[a;b]$, двумя прямыми $x=a$ и $x=b$, а также отрезком $[a;b]$ оси абсцисс, называется *криволинейной трапецией*.

Рассмотрим некоторое разбиение T отрезка $[a;b]$. Отдельное слагаемое $f(\xi_k)\Delta x_k$ интегральной суммы в этом случае равно площади прямоугольника S_k со сторонами $f(\xi_k)$ и Δx_k, где $k=\overline{0;n-1}$. Другими словами, S_k – это площадь под прямой $y=f(\xi_k)$ на отрезке $[x_k;x_{k+1}]$.

Поэтому, при $\lambda(T)\to 0$, вся интегральная сумма (2.1) равна площади

$$S=S_0+S_1+\ldots+S_{n-1}$$

ступенчатой фигуры, образованной на каждом из отрезков $[x_k;x_{k+1}]$ прямой $y=f(\xi_k)$, параллельной оси абсцисс, рис. 2.1.

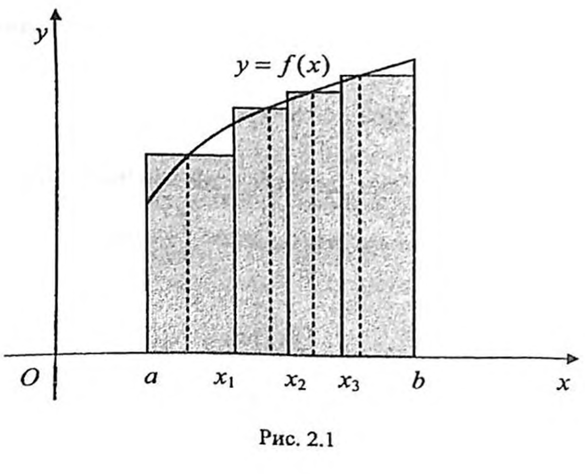

Рис. 2.1

Таким образом, в данном случае $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ – площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Случаи интегрируемости функций

Теорема 2.1*. *Если* $f(x)\in C([a;b])$, *то* $f(x)\in R([a;b])$.

Теорема 2.2*. *Если функция* $y=f(x)$ *определена и монотонна на отрезке* $[a;b]$, *то она интегрируема на этом отрезке.*

Теорема 2.3*. *Если функция* $y=f(x)$ *ограничена на отрезке* $[a;b]$ *и непрерывна во всех точках этого отрезка, кроме конечного числа точек* c_k $(k=\overline{1;m})$, *в которых функция имеет разрыв* I *рода, то эта функция интегрируема на* $[a;b]$.

Теорема 2.4*. *Если* $f(x)\in R([a;b])$, *то функция* $y=f(x)$ *ограничена на* $[a;b]$.

2.2. Свойства определенного интеграла

Непосредственно из определения определенного интеграла следует:

1. Определенный интеграл не зависит от выбора обозначения аргумента подынтегральной функции:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_a^b f(t)\,dt=\int\limits_a^b f(r)\,dr.$$

2. $$\int\limits_a^a f(x)\,dx=0. \tag{2.3}$$

3. $$\int\limits_a^b f(x)\,dx=-\int\limits_b^a f(x)\,dx. \tag{2.4}$$

Теорема 2.5. Если $f(x)\in R([a;b])$ и $g(x)\in R([a;b])$, то для любых $\alpha\in\mathbb{R}$ и $\beta\in\mathbb{R}$ функция $(\alpha f(x)+\beta g(x))\in R([a;b])$, причем

$$\int\limits_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx=\alpha\int\limits_a^b f(x)\,dx+\beta\int\limits_a^b g(x)\,dx. \tag{2.5}$$

Доказательство.

При любом разбиении T отрезка $[a;b]$ и выборе точек ξ_k справедливо равенство

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\alpha f(\xi_k)+\beta g(\xi_k))\Delta x_k = \alpha \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k + \beta \sum_{k=0}^{n-1} g(\xi_k)\Delta x_k .$$

Если $\lambda(T) \to 0$, то правая часть этого равенства в силу интегрируемости функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ на отрезке $[a;b]$ имеет предел, поэтому существует предел и левой части, при этом выполнено (2.5). ■

Теорема 2.6*. *Если* $f(x) \in R([a;c])$ *и* $f(x) \in R([c;b])$, *то* $f(x) \in R([a;b])$, *причем выполнено равенство*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{2.6}$$

Теорема 2.7 (о среднем). *Если* $f(x) \in C([a;b])$, *то существует точка* $\xi \in [a;b]$ *такая, что*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a). \tag{2.7}$$

Доказательство.

Так как $f(x) \in C([a;b])$, то функция $y = f(x)$ ограничена на отрезке $[a;b]$, т.е. $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x) = m \le f(x) \le M = \max\limits_{x\in[a;b]} f(x)$.

При любом разбиении T отрезка $[a;b]$ и выборе точек ξ_k

$$\sum_{k=0}^{n-1} m\Delta x_k \le \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \le \sum_{k=0}^{n-1} M\Delta x_k .$$

Пусть $\lambda(T) \to 0$. Тогда, так как $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = b-a$, получим

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a),$$

откуда

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M.$$

Обозначим $\dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx=\mu$, тогда $m\le\mu\le M$.

Так как $f(x)\in C([a;b])$, то она принимает все промежуточные значения, заключенные между m и M. Следовательно, при некотором значении $\xi\in[a;b]$, будет верно равенство $f(\xi)=\mu$, т.е

$$\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx=f(\xi),\qquad \text{откуда}\quad \int\limits_a^b f(x)\,dx=f(\xi)(b-a).\qquad\blacksquare$$

Замечание 2.1. *Теорема справедлива и в случае* $a>b$:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=-\int\limits_b^a f(x)\,dx=-f(E)(a-b)=f(\xi)(b-a).$$

Замечание 2.2 (экономический смысл определенного интеграла).

Число $f(\xi)=\dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *называется средним значением функции* $y=f(x)$ *на отрезке* $[a;b]$, *используется на практике при вычислении средней производительности труда, среднего значения издержек производства и т.д.*

2.3. Формула Ньютона – Лейбница

Пусть функция $f(x)\in R([a;b])$, тогда для $\forall x\in[a;b]$ существует $\int\limits_a^x f(t)\,dt$, который будет представлять функцию, зависящую от x.

$$F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt \tag{2.8}$$

называется *интегралом с переменным верхним пределом.*

Теорема 2.8 (Барроу). *Если* $f(x)\in C([a;b])$, *то производная функции* (2.8) *существует в любой точке* $x\in[a;b]$, *причем* $F'(x)=f(x)$.

Доказательство.

По определению, $F'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta F(x)}{\Delta x}$.

Рассмотрим

$$\Delta F(x)=F(x+\Delta x)-F(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt=$$

$$=\int_a^x f(t)\,dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt,$$

где $x\in[a;b]$, $x+\Delta x\in[a;b]$.

Согласно теореме о среднем значении 2.7: $\Delta F(x)=f(\xi)\Delta x$, где $\xi\in[x;x+\Delta x]$. Откуда

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}=f(\xi),\quad \xi\in[x;x+\Delta x].$$

Если в последнем равенстве перейти к пределу при $\Delta x\to 0$, то $\xi\to x$ и $f(\xi)\to f(x)$, так как по условию функция $y=f(x)$ непрерывна. Значит,

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(\xi)=f(x),\quad x\in[a;b].\qquad\blacksquare$$

Следствие 2.1. *Всякая функция* $f(x)\in C([a;b])$, *имеет первообразную, определяемую формулой* (2.8).

Теорема 2.9. *Если* $f(x)\in C([a;b])$ *и* $F(x)$ *– какая-нибудь первообразная для* $y=f(x)$ *на этом отрезке, то справедлива формула Ньютона-Лейбница*

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a).\tag{2.9}$$

Доказательство.

Согласно теореме 1.1 две первообразные для функции $y=f(x)$ отличаются на константу:

$$\Phi(x)=F(x)+C=\left|\text{по теореме 2.8}\right|=\int_a^x f(t)\,dt+C,\quad \text{где}\quad C=const.$$

При $x=a$: $\Phi(a)=\int_a^a f(t)\,dt+C=0+C=C;$

при $x=b$: $\Phi(b)=\int_a^b f(t)\,dt+C=\int_a^b f(t)\,dt+\Phi(a).$

Следовательно,

$$\int_a^b f(t)\,dt = \Phi(b) - \Phi(a) = (F(b)+C) - (F(a)+C) = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b. \quad ■$$

(Выражение $\Big|_a^b$ называется знаком двойной подстановки, a – нижним пределом интегрирования, b – верхним пределом интегрирования.)

Пример 2.1. Найти интеграл $\int_0^1 x\,dx$.

Решение.

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: 0,5.

Пример 2.2. Найти интеграл $\int_0^\pi \sin x\,dx$.

Решение.

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = (-\cos x)\Big|_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2.$$

Ответ: 2.

2.4. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле

Теорема 2.10. *Пусть дан интеграл* $\int_a^b f(x)\,dx$, *где* $f(x) \in C([a;b])$. *Введем новую переменную* t *по формуле* $x = \varphi(t)$. *Если*

1) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$;

2) $\varphi(t) \in C([\alpha;\beta])$, $\varphi'(t) \in C([\alpha;\beta])$;

3) $f(\varphi(t))$ *определена и непрерывна на отрезке* $[\alpha;\beta]$, *то*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \qquad (2.10)$$

Доказательство.

Если $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$, то

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{2.11}$$

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C. \tag{2.12}$$

Из равенства (2.11), по формуле Ньютона-Лейбница, получаем:

$$\int\limits_a^b f(t)\,dt = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Из равенства (2.12) получаем:

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a).$$

Правые части последних выражений равны, следовательно, равны и левые. ■

Пример 2.3.

Найти интеграл $\int\limits_0^1 \sqrt{\pi^2 - x^2}\,dx$ с помощью замены $x = \pi \sin t$.

Решение.

$$\int\limits_0^1 \sqrt{\pi^2 - x^2}\,dx = \begin{vmatrix} x = \pi\sin t, & dx = \pi\cos t\,dt \\ \sin 0 = 0, & \sin\dfrac{\pi}{2} = 1 \end{vmatrix} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\pi^2 - \pi^2\sin^2 t}\cdot \pi\cos t\,dt =$$

$$= \pi^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t}\cdot\cos t\,dt = \pi^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \pi^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right) dt =$$

$$= \frac{\pi^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\,dt = \frac{\pi^2}{2}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 1\cdot dt + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\,dt\right) = \frac{\pi^2}{2}\left(t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\,d2t\right) =$$

$$= \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0 - \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left(\sin 2\frac{\pi}{2} - \sin 0\right)\right) = \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cdot 0\right) = \frac{\pi^3}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi^3}{4}$.

Теорема 2.11. *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ определены и непрерывны вместе со своими производными на отрезке $[a;b]$, то*

$$\int_a^b u\,dv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \qquad (2.13)$$

Доказательство.

По правилу дифференцирования произведения:

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

По условию, функции $u(x)$, $v(x)$, $u(x)v(x)$, $u'(x)v(x)$, $u(x)v'(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, и, следовательно, интегрируемы на этом отрезке. Интегрируя обе части тождества в пределах от a до b, получим:

$$\int_a^b (u(x)\cdot v(x))'\,dx = \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

или

$$(uv)\Big|_a^b = \int_a^b v\,du + \int_a^b u\,dv,$$

что и доказывает (2.13). ■

Пример 2.4. Найти интеграл $\int_1^{16}\sqrt{x}\cdot\ln x\,dx$.

Решение.

$$\int_1^{16}\sqrt{x}\cdot\ln x\,dx = \left|\begin{matrix} u=\ln x & v=\frac{2}{3}\sqrt{x^3} \\ du=\frac{1}{x}dx & dv=\sqrt{x}\cdot dx\end{matrix}\right| = \left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\cdot\ln x\right)\Big|_1^{16} - \frac{2}{3}\int_1^{16}\sqrt{x^3}\cdot\frac{1}{x}\cdot dx =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{16^3}\cdot\ln 16 - \sqrt{1^3}\cdot\ln 1\right) - \frac{2}{3}\int_1^{16}\sqrt{x}\cdot dx = \frac{2}{3}\cdot 4^3\ln 16 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\sqrt{x}\Big|_1^{16} =$$

$$= \frac{128}{3}\ln 16 - \frac{4}{9}\left(\sqrt{16^3} - \sqrt{1^3}\right) = \frac{128}{3}\ln 16 - \frac{4}{9}\cdot 63 = \frac{128}{3}\ln 16 - 28.$$

Ответ: $\dfrac{128}{3}\ln 16 - 28$.

2.5. Приложения определенного интеграла

2.5.1. Площадь плоской фигуры

Согласно геометрическому смыслу определенного интеграла (п. 2.1) площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, заданной на отрезке $[a;b]$ $(f(x) \geq 0)$, двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ и отрезком $[a;b]$ оси абсцисс, определяется формулой:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{2.14}$$

Если $f(x) \leq 0$, то $\int_a^b f(x)dx \leq 0$. Следовательно, площадь фигуры в данном случае определяется формулой:

$$S = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = -\int_a^b f(x)\,dx. \tag{2.15}$$

Если график функции $y = f(x)$ конечное число раз изменяет знак на отрезке $[a;b]$, то интеграл по всему отрезку $[a;b]$ следует разбить на сумму интегралов по частичным отрезкам. Интеграл будет положителен для тех отрезков, где $f(x) \geq 0$; отрицателен – где $f(x) \leq 0$. Интеграл по всему отрезку даст разность площадей, лежащих выше и ниже оси Ox. Поэтому площадь фигуры в данном случае определяется формулой:

$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{2.16}$$

Пример 2.5. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \sin x$ и осью Ox, если $0 \leq x \leq 2\pi$.

Решение.

Изобразим фигуру, площадь которой следует найти, рис. 2.2.

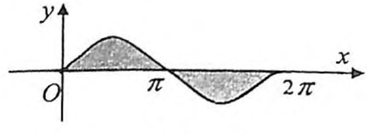

Рис. 2.2

При непосредственном интегрировании получим:

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = -\cos x\Big|_0^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos 0) = -(1-1) = 0.$$

При вычислении площади получим:

$$S = \int_0^{\pi} \sin x \, dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} + \cos x\Big|_{\pi}^{2\pi} =$$

$$= -(\cos \pi - \cos 0) + (\cos 2\pi - \cos \pi) = -(-1-1) + (1-(-1)) = 4.$$

Ответ: 4.

В случае, если требуется вычислить площадь плоской фигуры (рис.2.3), ограниченной непрерывными кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$, при условии $f_1(x) \le f_2(x)$ при $x \in [a;b]$, будем использовать формулу:

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\, dx. \qquad (2.17)$$

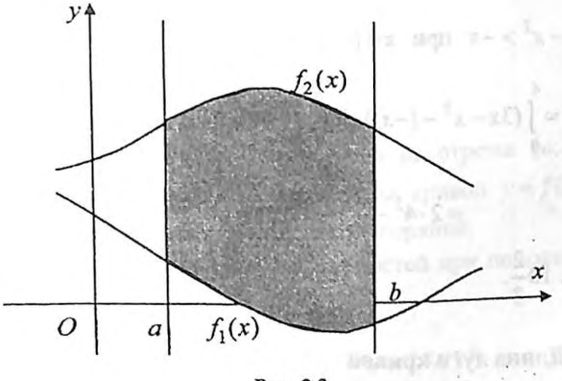

Рис. 2.3

Пример 2.6. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3x - x^2$ и $y = -x$.

Решение.

Изобразим фигуру, рис. 2.4.

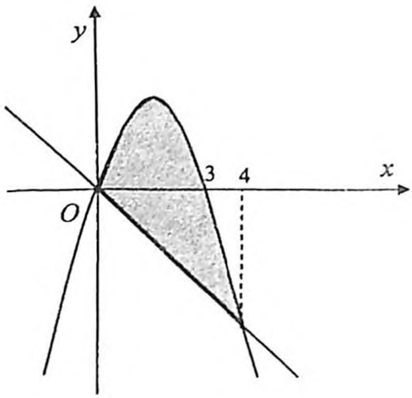

Рис 2.4

Найдем точки пересечения данных кривых:

$$\begin{cases} y = 3x - x^2, \\ y = -x, \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -x, \\ -x = 3x - x^2. \end{cases}$$

Решая последнюю систему, получаем $\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0, \end{cases}$ и $\begin{cases} x_2 = 4, \\ y_2 = -4. \end{cases}$ Заметим, что $3x - x^2 > -x$ при $x \in [0;4]$. Поэтому,

$$S = \int_0^4 (3x - x^2 - (-x))\,dx = \int_0^4 (4x - x^2)\,dx = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4 =$$

$$= 2 \cdot 4^2 - \frac{4^3}{3} = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}.$$

Ответ: $10\frac{2}{3}$.

2.5.2. Длина дуги кривой

Определение 2.4. Под *длиной дуги* понимается предел, к которому стремится длина ломаной линии, вписанной в эту дугу, когда число звеньев ломаной возрастает неограниченно, а длина наибольшего звена стремится к нулю.

В случае существования такого предела кривая называется *спрямляемой*.

Пусть на отрезке $[a;b]$ кривая задана непрерывной функцией $y = f(x)$, и, кроме того, существует производная $f'(x)$. Тогда длина кривой будет определяться формулой

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \qquad (2.18)$$

Пример 2.7. Вычислить длину дуги кривой $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$, абсциссы концов которой $x_1 = 3$ и $x_2 = 8$.

Решение.

Воспользуемся формулой (2.18):

$$l = \int_3^8 \sqrt{1 + \left(\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)'\right)^2}\, dx = \int_3^8 \sqrt{1 + \left(\sqrt{x}\right)^2}\, dx = \int_3^8 \sqrt{1+x}\, dx = \frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3}\Big|_3^8 =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{(1+8)^3} - \sqrt{(1+3)^3}\right) = \frac{2}{3}(27-8) = \frac{38}{3} = 12\frac{2}{3}.$$

Ответ: $12\frac{2}{3}$.

2.5.3. Объем тела вращения

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Вычислим объем тела, полученного вращением отрезка кривой $y = f(x)$ вокруг оси Ox. Для этого проделаем следующие пять операций:

1. Разобьем отрезок $[a;b]$ на n частей при помощи несовпадающих точек $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$, причем

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

Обозначим разбиение буквой T, $\lambda(T) = \max\limits_k \Delta x_k$ – диаметр данного разбиения.

2. На каждом из частичных отрезков произвольным образом выберем точку $\xi_k \in [x_k; x_{k+1}]$ $(k = \overline{0; n-1})$ и вычислим значение функции $f(\xi_k)$.

Выберем также $\underline{\xi}_k = \min\limits_{x \in [x_k; x_{k+1}]} f(x)$ и $\overline{\xi}_k = \max\limits_{x \in [x_k; x_{k+1}]} f(x)$, и вычислим значения функции в этих точках: $f(\underline{\xi}_k)$ и $f(\overline{\xi}_k)$.

3. Вычислим произведения: $f^2(\underline{\xi}_k) \cdot \Delta x_k$, $f^2(\xi_k) \cdot \Delta x_k$, $f^2(\overline{\xi}_k) \cdot \Delta x_k$ $(k = \overline{0; n-1})$.

4. Найдем интегральные суммы:

$$\underline{\sigma}(f, T, \xi_k) = \pi \sum_{k=0}^{n-1} f^2(\underline{\xi}_k) \cdot \Delta x_k, \tag{2.19}$$

$$\sigma(f, T, \xi_k) = \pi \sum_{k=0}^{n-1} f^2(\xi_k) \cdot \Delta x_k, \tag{2.20}$$

$$\overline{\sigma}(f, T, \xi_k) = \pi \sum_{k=0}^{n-1} f^2(\overline{\xi}_k) \cdot \Delta x_k\,. \tag{2.21}$$

Суммы (2.19) и (2.21) дают объемы тел вращения двух ступенчатых фигур, одна из которых вписана в тело, а вторая – описана около тела, объем которого необходимо вычислить, рис. 2.5.

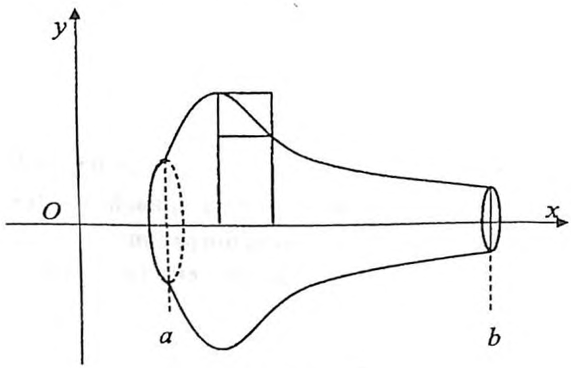

Рис. 2.5

Таким образом, справедливы неравенства:

$$\pi \sum_{k=0}^{n-1} f^2(\underline{\xi}_k) \cdot \Delta x_k \le \pi \sum_{k=0}^{n-1} f^2(\xi_k) \cdot \Delta x_k \le \pi \sum_{k=0}^{n-1} f^2(\overline{\xi}_k) \cdot \Delta x_k\,. \tag{2.22}$$

5. Так как функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то и функция $f^2(x)$ является интегрируемой на этом отрезке. Следовательно, на основании теоремы 2.1, интегральные суммы (2.19) и (2.21), при $\lambda(T) \to 0$, имеют общий предел, к которому также будет сходиться и интегральная сумма (2.20). Таким образом, объем тела, полученного вращением отрезка кривой $y = f(x)$ вокруг оси Ox на отрезке $[a;b]$, определяется формулой

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx. \qquad (2.23)$$

Замечание 2.3. *Если вращение кривой происходит вокруг оси Oy, то можно применить формулу* (2.23), *переобозначив переменные и оси координат.*

Пример 2.8. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью, полученной при вращении окружности $x^2 + y^2 = 9$.

Решение.

Заметим, что результатом вращения является шар радиуса $r = 3$ (рис. 2.6), объем которого равен $V = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3 = 36\pi$.

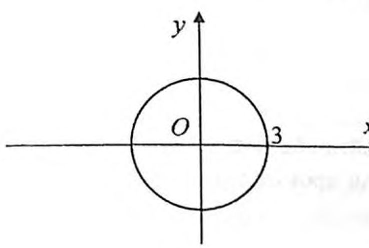

Рис. 2.6

Согласно формуле (2.23), и, учитывая симметричность окружности относительно оси Oy, имеем

$$V = 2\pi \int_0^3 f^2(x)\,dx = 2\pi \int_0^3 (9 - x^2)\,dx = 2\pi \left(9x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^3 =$$

$$=2\pi\left(9\cdot3-\frac{3^3}{3}\right)=2\pi(27-9)=36\pi.$$

Ответ: 36π.

2.5.4. Приложения определенного интеграла в экономике

Если функция $y=f(t)$ описывает изменение производительности некоторого производства, то объем продукции, произведенной за время $[0;T]$, вычисляется по формуле:

$$Q=\int_0^T f(t)\,dt. \tag{2.24}$$

Если известна функция потребления $c(t)$ за определенный промежуток времени $[0;T]$, то значение суммарного фонда потребления $C(T)$ вычисляется по формуле:

$$C(T)=\int_0^T c(t)\,dt. \tag{2.25}$$

Если проценты по вкладу начисляются непрерывно и их характеризует функция $y=f(t)$, а удельная норма процента равна i, то дисконтированный доход K за время T составляет:

$$K=\int_0^T f(t)e^{-it}\,dt. \tag{2.26}$$

Пример 2.9. Найти объем произведенной продукции за восьмичасовой рабочий день, если производительность труда описывается функцией времени вида $y=-0{,}00625t^2+0{,}05t+0{,}5$.

Решение.

Воспользуемся формулой (2.24):

$$Q=\int_0^8(-0{,}006t^2+0{,}05t+0{,}5)\,dt=\left(-\frac{0{,}006}{3}\cdot t^3+\frac{0{,}05}{2}\cdot t^2+0{,}5t\right)\Bigg|_0^8=$$

$$=-0{,}002\cdot8^3+0{,}025\cdot8^2+0{,}5\cdot8=-1{,}024+1{,}6+4=4{,}576.$$

Ответ: 4,576.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие операции следует выполнить, чтобы получить интегральную сумму для функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$?
2. Что называют определенным интегралом?
3. Что называют криволинейной трапецией?
4. В чем состоит геометрический смысл определенного интеграла?
5. Будет ли функция, непрерывная на отрезке $[a;b]$, интегрируемой на этом отрезке?
6. В каком случае функция, имеющая разрывы, будет интегрируемой на отрезке $[a;b]$?
7. Какое свойство функции следует из ее интегрируемости на отрезке $[a;b]$?
8. Какие свойства определенного интеграла следуют непосредственно из определения?
9. Если $f(x) \in R([a;b])$ и $g(x) \in R([a;b])$, то будет ли интегрируема функция $\alpha f(x) + \beta g(x)$, где $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\beta \in \mathbb{R}$?
10. Если $f(x) \in R([a;c])$ *и* $f(x) \in R([c;b])$, то какой вывод можно сделать об интегрируемости функции на отрезке $[a;b]$?
11. В чем состоит суть теоремы о среднем? Где это можно использовать в экономических приложениях?
12. Как определяется интеграл с переменным верхним пределом?
13. Какую связь интеграла с переменным верхним пределом и подынтегральной функции дает теорема Барроу?
14. Каким образом на основании формулы Ньютона-Лейбница можно вычислить определенный интеграл?
15. Как выполняется замена переменной в определенном интеграле?
16. Каким образом выполняется интегрирование по частям в определенном интеграле?
17. Каким образом можно использовать определенный интеграл для вычисления площади плоской фигуры; длины дуги кривой; объема тела вращения?
18. Какие экономические приложения имеет определенный интеграл?

3. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Выше были рассмотрены определенные интегралы от ограниченных функций на конечных промежутках. Возникают следующие вопросы: как изменится понятие определенного интеграла, в случае если будем рассматривать ограниченную функцию на бесконечном промежутке; если будем рассматривать неограниченную функцию на конечном промежутке?

3.1. Интегралы с бесконечными пределами

Пусть функция $y=f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[a;+\infty)$ и интегрируема на любом отрезке $[a;b]\subset[a;+\infty)$.

Определение 3.1. Если существует конечный предел

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx,$$

то этот предел называют *несобственным интегралом* от функции $y=f(x)$ на бесконечном промежутке $[a;+\infty)$ и обозначают $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Следовательно, по определению, имеем

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{3.1}$$

Говорят, что в этом случае несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *существует, или сходится.* Если $\int_a^b f(x)\,dx$ при $b\to+\infty$ не имеет конечного предела, то говорят, что $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *не существует, или расходится.*

Геометрический смысл несобственного интеграла

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, причем $f(x)\ge 0$ для $x\in[a;+\infty)$.

В этом случае несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ выражает площадь неограниченной (бесконечной) области, заключенной между линиями $y = f(x)$, $x = a$ и осью абсцисс, рис. 3.1.

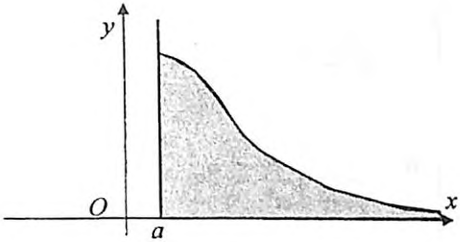

Рис. 3.1

Аналогичным образом определяются несобственные интегралы и для других бесконечных промежутков:

$$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{b\to-\infty}\int\limits_{b}^{a} f(x)dx,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx. \qquad (3.2)$$

Равенство (3.2) следует понимать так: если каждый из несобственных интегралов, стоящих справа, существует, то существует (сходится) и интеграл, стоящий слева.

Пример 3.1. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение.

По определению несобственного интеграла получаем:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{2}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

Пример 3.2. Исследовать на сходимость в зависимости от значения параметра α интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$.

Решение.

При $\alpha=1$: $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_1^{b} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty} \left(\ln x \Big|_1^b \right) = \lim\limits_{b\to+\infty} (\ln b - \ln 1) = +\infty.$

При $\alpha \neq 1$: $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_1^{b} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_1^{b} x^{-\alpha} dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \Big|_1^b \right) =$

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha}\left(b^{1-\alpha}-1\right) = \begin{cases} +\infty, & \alpha<1, \\ -\dfrac{1}{1-\alpha}, & \alpha>1. \end{cases}$$

Ответ:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} +\infty, & \alpha<1 \text{ (интеграл расходится)}; \\ +\infty, & \alpha=1 \text{ (интеграл расходится)}; \\ -\dfrac{1}{1-\alpha}, & \alpha>1 \text{ (интеграл сходится)}. \end{cases}$$

В случаях, когда достаточно установить сходимость несобственного интеграла и оценить его значение, могут быть использованы следующие теоремы.

Теорема 3.1* (признак сравнения). *Пусть* $0 \le f(x) \le g(x)$ *для* $x \in [a;+\infty)$. *Если* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *сходится, то сходится и интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, *причем*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \le \int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx. \tag{3.3}$$

Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *расходится, то расходится и интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$.

Пример 3.3. Исследовать интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$ на сходимость.

Решение.

При $x \geq 1$: $\frac{1}{x^2(1+e^x)} \leq \frac{1}{x^2}$. Так как $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$ (пример 3.2), то будет сходиться и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$, причем его значение не превышает 1.

Ответ: интеграл сходится.

Пример 3.4. Исследовать интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}\, dx$ на сходимость.

Решение.

При $x \geq 1$: $\frac{x+1}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Так как $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ – расходится (см. пример 3.2), то будет расходиться и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}\, dx$.

Ответ: интеграл расходится.

Теорема 3.2* (предельный признак сравнения). *Если* $f(x) > 0$ *и* $g(x) > 0$ *для* $x \in [a;+\infty)$, *и существует конечный предел* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$, *то интегралы* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *сходятся и расходятся одновременно.*

Пример 3.5. Исследовать интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ на сходимость.

Решение.

Рассмотрим сходящийся интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$.

Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}:\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{1+x^3}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^3}+1}}=1\neq 0,$

то исходный интеграл также сходится.

Ответ: интеграл сходится.

Теорема 3.3*. *Если интеграл* $\int\limits_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$ *сходится, то сходится и интеграл* $\int\limits_a^{+\infty}f(x)\,dx$.

Замечание 3.1. *Если интеграл* $\int\limits_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$ *сходится, то интеграл* $\int\limits_a^{+\infty}f(x)\,dx$ *называют абсолютно сходящимся.*

Пример 3.6. Исследовать интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^3}\,dx$ на сходимость.

Решение.

Подынтегральная функция $y=\frac{\sin x}{x^3}$ является знакопеременной. Так как при $x\geq 1$: $\left|\frac{\sin x}{x^3}\right|\leq\left|\frac{1}{x^3}\right|=\frac{1}{x^3}$ и $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3}=\frac{1}{2}$ (пример 3.2, $\alpha=3$), то, согласно признаку сравнения (теорема 3.1), сходится и интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^3}\right|dx$. Следовательно, на основании теоремы 3.3, сходится интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^3}\,dx$.

Ответ: интеграл сходится абсолютно.

3.2. Интегралы от неограниченных функций

Пусть функция $y=f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[a;c)$, и интегрируема на любом отрезке $[a;b]\subset[a;c)$, а при $x=c$ функция либо не определена, либо терпит разрыв.

Определение 3.2. Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to c-0}\int\limits_a^b f(x)dx$, то этот предел называют *несобственным интегралом* от функции $y=f(x)$ на промежутке $[a;c)$ и обозначают $\int\limits_a^c f(x)dx$.

Следовательно, по определению имеем:

$$\int\limits_a^c f(x)dx=\lim_{b\to c-0}\int\limits_a^b f(x)dx. \qquad (3.4)$$

В случае существования конечного предела несобственный интеграл $\int\limits_a^c f(x)dx$ называется *сходящимся,* в противном случае – *расходящимся.*

Геометрический смысл несобственного интеграла

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, причем $f(x)\geq 0$ для $x\in[a;c)$.

В этом случае несобственный интеграл $\int\limits_a^c f(x)dx$ выражает площадь неограниченной (бесконечной) области, заключенной между линиями $y=f(x)$, $x=a$, осью абсцисс и вертикальной асимптотой $x=c$, рис. 3.2.

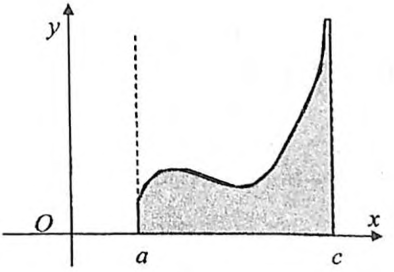

Рис. 3.2

Если функция $y=f(x)$ определена и непрерывна на $(a;c]$, т.е. при $x=a$ функция терпит разрыв, то по определению

$$\int_a^c f(x)dx=\lim_{b\to a+0}\int_b^c f(x)\,dx\,.$$

Если функция $y=f(x)$ имеет бесконечный разрыв в некоторой точке $x=x_0$ внутри отрезка $[a;c]$, то полагают

$$\int_a^c f(x)dx=\int_a^{x_0} f(x)dx+\int_{x_0}^c f(x)dx=\lim_{b_1\to x_0-0}\int_a^{b_1} f(x)\,dx+\lim_{b_2\to x_0+0}\int_{b_2}^c f(x)dx\,.$$

В этом случае несобственный интеграл $\int_a^c f(x)\,dx$ называют *сходящимся,* если оба предела в правой части последнего равенства существуют, и *расходящимся,* если не существует хотя бы один из них.

Пример 3.7. Исследовать на сходимость в зависимости от значения параметра α интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha}}$.

Решение.

При $\alpha=1$: $\int_0^1 \frac{dx}{x}=\lim_{b\to+0}\int_b^1 \frac{dx}{x}=\lim_{b\to+0}\ln x\Big|_b^1=\lim_{b\to+0}\left(\ln 1-\ln b\right)=+\infty.$

При $\alpha\neq 1$: $\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{b\to+0}\int_b^1 \frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{b\to+0}\int_b^1 x^{-\alpha}dx=\lim_{b\to+0}\frac{1}{1-У}x^{1-\alpha}\Big|_b^1=$

$$=\lim_{b\to+0}\frac{1}{1-\alpha}\left(1-b^{1-\alpha}\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\alpha}, & \alpha<1,\\ +\infty, & \alpha>1.\end{cases}$$

Ответ: $$\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha}}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\alpha}, & \alpha<1 \text{ (интеграл сходится)};\\ +\infty, & \alpha=1 \text{ (интеграл расходится)};\\ +\infty, & \alpha>1 \text{ (интеграл расходится)}.\end{cases}$$

Замечание 3.2. *Если функция* $y = f(x)$ *определена на отрезке* $[a;b]$ *и имеет внутри этого отрезка конечное число точек разрыва* a_1, $a_2, \dots,$ a_n, *то интеграл от данной функции на отрезке* $[a;b]$ *определяется следующим образом:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a_1} f(x)\,dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{a_n}^{b} f(x)\,dx.$$

Если каждый из интегралов, стоящих в правой части равенства, сходится, то интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ *называется сходящимся. Если же хотя бы один из этих интегралов расходится, то и интеграл* $\int_a^b f(x)\,dx$ *называется расходящимся.*

Пример 3.8. Вычислить интеграл $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$.

Решение.

Так как внутри отрезка интегрирования существует точка $x = 0$, где подынтегральная функция разрывна, то для вычисления исходный интеграл необходимо представить как сумму двух несобственных интегралов:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2}.$$

Рассмотрим каждый из интегралов, входящих в сумму, отдельно.

$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b \to -0} \int_{-1}^{b} \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b \to -0} \left(-\frac{1}{x} \Big|_{-1}^{b} \right) = -\lim\limits_{b \to -0} \left(\frac{1}{b} + 1 \right) = +\infty$, т.е. первый из несобственных интегралов расходится;

$\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b \to +0} \int_{b}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b \to +0} \left(-\frac{1}{x} \Big|_{b}^{1} \right) = -\lim\limits_{b \to +0} \left(1 - \frac{1}{b} \right) = +\infty$, т.е. второй из несобственных интегралов расходится.

Таким образом, исходный интеграл расходится на отрезке $[-1;1]$.

Ответ: интеграл расходится.

Признаки сходимости и расходимости несобственных интегралов от неограниченных функций аналогичны признакам сходимости несобственных интегралов с бесконечными пределами.

Теорема 3.4* (признак сравнения). *Пусть* $0 \le f(x) \le g(x)$ *для* $x \in [a;c)$. *Если* $\int_a^c g(x)\,dx$ *сходится, то сходится и интеграл* $\int_a^c f(x)\,dx$, *причем*

$$\int_a^c f(x)dx \le \int_a^c g(x)dx. \tag{3.4}$$

Если интеграл $\int_a^c f(x)dx$ *расходится, то расходится и интеграл* $\int_a^c g(x)dx$.

Теорема 3.5* (предельный признак сравнения). *Если* $f(x) > 0$ *и* $g(x) > 0$ *для* $x \in [a;c)$, *и существует конечный предел* $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} \ne 0$, *то интегралы* $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_a^c g(x)dx$ *сходятся и расходятся одновременно.*

Теорема 3.6*. *Если функция* $y = f(x)$ *– знакопеременная на* $[a;c)$ *и не ограничена в окрестности точки* $x = c$, *и несобственный интеграл* $\int_a^c |f(x)|dx$ *сходится, то сходится и интеграл* $\int_a^c f(x)\,dx$.

Вопросы для самоконтроля

1. Как определяется несобственный интеграл от функции $y = f(x)$ на промежутке $[a;+\infty)$: $\int_a^{+\infty} f(x)dx$? В чем состоит геометрический смысл данного несобственного интеграла?

2. При каких значениях параметра α интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ сходится; расходится?
3. Какие признаки сравнения можно использовать при исследовании на сходимость несобственного интеграла по неограниченному промежутку?
4. Как определяется несобственный интеграл от функции $y = f(x)$ неограниченной на промежутке $[a;c)$: $\int\limits_{a}^{c} f(x)dx$? В чем состоит геометрический смысл данного несобственного интеграла?
5. При каких значениях параметра α интеграл $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ сходится; расходится?
6. Какие признаки сравнения можно использовать при исследовании на сходимость несобственного интеграла от неограниченной функции?

4. ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

4.1. Определение двойного интеграла

Пусть на ограниченной замкнутой области $\overline{D} \subset \mathbb{R}^2$ определена функция $z = f(x, y)$. Предполагается, что для области $\overline{D}$ можно вычислить ее площадь, в этом случае область называется *квадрируемой*. Проделаем следующие пять операций:

1. Разобьем множество $\overline{D}$ какими-нибудь линиями на n частей:

$$\Delta S_1,\ \Delta S_2,\ \ldots,\ \Delta S_n,$$

которые будем называть площадками. Обозначим данное разбиение буквой T. Через Δs_k будем обозначать площадь соответствующей площадки ΔS_k. Диаметром разбиения будем считать наибольшую из площадей при данном разбиении $\lambda(T) = \max\limits_{k} \Delta s_k$.

2. На каждой из площадок ΔS_k возьмем точку P_k, рис. 4.1. Вычислим значения функции в каждой из выбранных точек: $f(P_k)$.

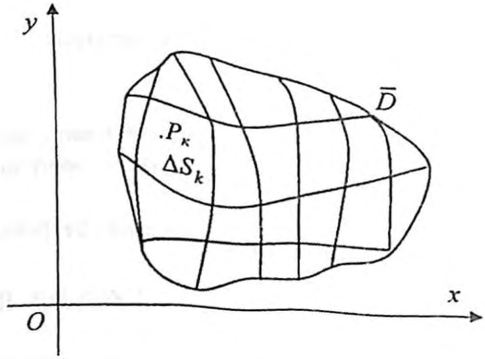

Рис. 4.1

3. Вычислим произведения $f(P_k)\Delta s_k$.

4. Найдем

$$\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta s_k = \sigma(f,T,P_k). \tag{4.1}$$

(4.1) – интегральная сумма для функции $z = f(x,y)$ по области $\overline{D}$.

5. Рассмотрим $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \sigma(f,T,P_k)$.

Определение 4.1. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \sigma(f,T,P_k)$, то он называется *двойным интегралом* от функции $z = f(x,y)$ по области $\overline{D}$ и обозначается $\iint\limits_{\overline{D}} f(x,y)\,dxdy$ или $\iint\limits_{\overline{D}} f(P)\,ds$.

Геометрический смысл двойного интеграла

Если $z = f(x,y) \ge 0$, то двойной интеграл от данной функции по области $\overline{D}$ равен объему тела Q, ограниченного поверхностью $z = f(x,y)$, плоскостью $z = 0$ и цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Oz, а направляющей служит граница Γ области $\overline{D}$.

Теорема 4.1*. *Двойной интеграл от суммы двух функций $f(x,y)+g(x,y)$ по области $\overline{D}$ равен сумме двух двойных интегралов по области $\overline{D}$ от каждой из функций в отдельности:*

$$\iint\limits_{\overline{D}} \left(f(x,y)+g(x,y)\right) dxdy = \iint\limits_{\overline{D}} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{\overline{D}} g(x,y)\,dxdy.$$

Теорема 4.2*. *Постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла*:

$$\iint\limits_{\overline{D}} k\cdot f(x,y)\,dxdy = k\cdot\iint\limits_{\overline{D}} f(x,y)\,dxdy.$$

Теорема 4.3*. *Если область $\overline{D}$ разбита на две области $\overline{D}_1$ и $\overline{D}_2$ без общих внутренних точек, и функция $z=f(x,y)$ непрерывна во всех внутренних точках области $\overline{D}$, то*

$$\iint\limits_{\overline{D}} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{\overline{D}_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{\overline{D}_2} f(x,y)\,dxdy.$$

4.2. Вычисление двойного интеграла

Пусть область $\overline{D}$ такова, что всякая прямая, параллельная одной из координатных осей, например оси Oy, и проходящая через внутреннюю точку области, пересекает границу области в двух точках N_1 и N_2. Такую область будем называть *правильной* (*спрямляемой*) *в направлении оси* Oy. Предположим, что в данном случае граница области Γ определена линиями: $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$, $x=a$, $x=b$, причем $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$, функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, $a<b$, рис. 4.2.

Аналогично определяется область, правильная в направлении оси Ox, рис. 4.3.

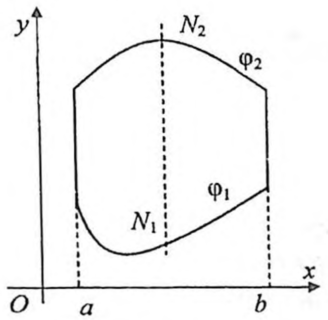

Рис. 4.2

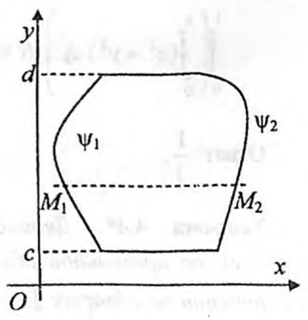

Рис. 4.3

Область, правильную как в направлении оси Ox, так и в направлении оси Oy, будем называть просто *правильной областью*.

Пусть функция $z = f(x,y)$ непрерывна в области $\overline{D}$, рис. 4.2. Выражение

$$I_{\overline{D}} = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

будем называть двукратным интегралом от функции $z = f(x,y)$ по области $\overline{D}$. В этом выражении сначала вычисляется интеграл, стоящий в скобках, интегрирование ведется по переменной y, переменная x считается постоянной. В результате будет получен интеграл $I_{\overline{D}} = \int\limits_a^b \Phi(x)dx$, т. е. определенный интеграл функции одной переменной.

Пример 4.1. Вычислить $\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^x (x^2 + y^2)\,dy \right) dx$.

Решение.

Выполним «внутреннее» интегрирование по переменной y:

$$\Phi(x) = \int\limits_0^x (x^2 + y^2)\,dy = \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_0^x = x^2 \cdot x + \frac{x^3}{3} - x^2 \cdot 0 - \frac{0}{3} = \frac{4}{3}x^3.$$

Тогда

$$\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^x (x^2 + y^2)\,dy \right) dx = \int\limits_0^1 \frac{4}{3}x^3 dx = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot x^4 \Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Теорема 4.4*. *Двойной интеграл от непрерывной функции $z = f(x,y)$ по правильной области $\overline{D}$ равен двукратному интегралу от этой функции по области $\overline{D}$: если $\overline{D}$ – область правильная в направлении оси Oy, то*

$$\iint\limits_{\overline{D}} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx; \qquad (4.2)$$

если $\overline{D}$ – область правильная в направлении оси Ox, то

$$\iint\limits_{\overline{D}} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy. \tag{4.3}$$

Пример 4.2.

Вычислить двойной интеграл от функции $f(x,y)=x^2+xy+2y^2$ по области, ограниченной линиями $y=1-x$, $x=0$ и $y=0$.

Решение.

Изобразим область интегрирования, рис. 4.4.

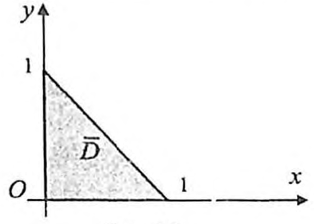

Рис. 4.4

Область $\overline{D}$ представляет собой треугольник, ограниченный осями координат и прямой $y=-x+1$.

Следовательно, $\varphi_1(x)=0$ и $\varphi_2(x)=-x+1$. Воспользуемся формулой (4.2):

$$\iint\limits_{\overline{D}} (x^2+xy+2y^2)\,dxdy = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{-x+1} (x^2+xy+2y^2)dy \right) dx =$$

$$\int\limits_0^1 \left(x^2y + x\frac{y^2}{2} + \frac{2}{3}y^3 \right)\Bigg|_0^{-x+1} dx = \int\limits_0^1 \left(x^2(1-x) + x\frac{(1-x)^2}{2} + \frac{2}{3}(1-x)^3 \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x^2 - x^3 + \frac{x}{2} - x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{2}{3} - 2x + 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right) dx = \int\limits_0^1 \left(-\frac{7}{6}x^3 + 2x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{2}{3} \right) dx =$$

$$= \left(-\frac{7}{24}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{2}{3}x \right)\Bigg|_0^1 = -\frac{7}{24} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{7}{24}.$$

Ответ: $\frac{7}{24}$.

4.3. Вычисление объемов и площадей с помощью двойных интегралов

Объем тела, ограниченного поверхностью $z = f(x, y)$, где $f(x,y) \geq 0$, плоскостью $z = 0$ и с боковых сторон цилиндрической поверхностью, у которой образующие параллельны оси Oz, а направляющей служит граница области $\overline{D}$, вычисляется по формуле

$$V = \iint\limits_{\overline{D}} f(x,y)\, dxdy. \tag{4.4}$$

Пример 4.3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x=0$, $y=0$, $z=0$ и $x+y+z=1$.

Решение.

Изобразим тело, ограниченное указанными поверхностями, рис. 4.5.

Область $\overline{D}$ представляет треугольник, ограниченный прямыми $x=0$, $y=0$, $x+y=1$. Подынтегральная функция имеет вид: $z=1-x-y$. Расставляя пределы интегрирования в двойном интеграле, получаем

$$V = \iint\limits_{\overline{D}} (1-x-y)\, dxdy = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{1-x} (1-x-y)\, dy \right) dx = \int\limits_0^1 \left((1-x)y - \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_0^{1-x} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^1 (1-x)^2\, dx = \frac{1}{6}.$$

Проверка: $V_{пир} = \frac{1}{3} \cdot S_{осн} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 6.$

Ответ: $\frac{1}{6}$.

Если $\overline{D}$ – правильная область, то ее площадь вычисляется по формуле

$$S = \iint\limits_{\overline{D}} dxdy. \tag{4.5}$$

Пример 4.4. Найти площадь области, ограниченной линиями $y^2 = x+1$ и $y = -x+1$.

Решение.

Изобразим область, рис. 4.6. Она представляет собой фигуру, ограниченную слева параболой $y^2 = x+1$, справа прямой $y = -x+1$.

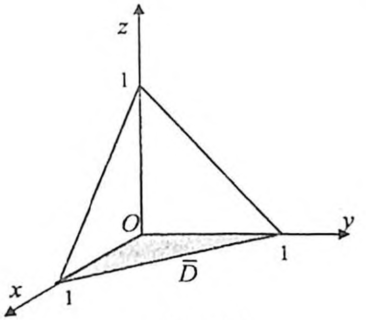

Рис. 4.5

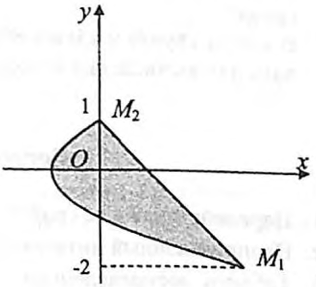

Рис. 4.6

Решая совместно уравнения параболы и прямой, найдем точки их пересечения: $M_1(3;-2)$, $M_2(0;1)$. Площадь составит

$$S=\int\limits_{-2}^{1}\left(\int\limits_{y^2-1}^{1-y}dx\right)dy=\int\limits_{-2}^{1}\left(x\Big|_{y^2-1}^{1-y}\right)dy=\int\limits_{-2}^{1}(1-y-y^2+1)\,dy=\int\limits_{-2}^{1}(2-y-y^2)\,dy=$$

$$=\left(2y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{1}=\left(2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(-4-\frac{4}{2}+\frac{8}{3}\right)=4\frac{1}{2}.$$

Ответ: 4,5.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие операции следует выполнить, чтобы получить интегральную сумму для функции $z=f(x,y)$ по области $\overline{D}$?
2. Что называют двойным интегралом?
3. В чем состоит геометрический смысл двойного интеграла?
4. Какими свойством обладает двойной интеграл в случае его вычисления от суммы двух функций; по области $\overline{D}=\overline{D}_1\bigcup\overline{D}_2$, где $\overline{D}_1$ и $\overline{D}_2$ не имеют общих внутренних точек?
5. Какую область называют правильной в направлении оси Oy; оси Ox?
6. В каком случае двойной интеграл по области $\overline{D}$ будет равен двукратному интегралу по этой области?

7. Объем какого тела может быть вычислен с помощью двойного интеграла?
8. В каком случае и каким образом двойной интеграл можно использовать для вычисления площади фигуры?

Вопросы к экзамену

1. Первообразная и ее свойства.
2. Неопределенный интеграл и его свойства.
3. Таблица неопределенных интегралов. Непосредственное интегрирование.
4. Интегрирование заменой переменных и по частям.
5. Разложение рациональных функций на простейшие дроби.
6. Интегрирование рациональных функций разложением на простейшие дроби.
7. Интегрирование тригонометрических функций.
8. Интегрирование простейших иррациональностей.
9. Определенный интеграл как предел интегральных сумм. Геометрический смысл определенного интеграла. Случаи интегрируемости функций.
10. Свойства определенного интеграла. Теорема об интегрируемости суммы двух функций. Теорема о сумме интегралов по разным промежуткам от одной функции.
11. Свойства определенного интеграла. Теорема о среднем. Экономический смысл определенного интеграла.
12. Формула Ньютона – Лейбница для определенного интеграла.
13. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.
14. Приложения определенного интеграла. Площадь плоской фигуры. Длина дуги кривой.
15. Приложения определенного интеграла в экономике. Объем тела вращения.
16. Несобственные интегралы с бесконечными пределами. Сходимость. Признаки сравнения.
17. Несобственные интегралы от неограниченных функций. Сходимость. Признаки сравнения.
18. Определение двойного интеграла, его вычисление и свойства. Приложения.

РАЗДЕЛ 6

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ (ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ)

Определение 1.1. *Дифференциальным уравнением* называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y=\varphi(x)$ и ее производные $y', y'',..., y^{(n)}$.

Символически дифференциальное уравнение можно записать так:

$$F(x, y, y', y'',..., y^{(n)})=0 \quad \text{или} \quad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ..., \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0.$$

Если искомая функция $y=\varphi(x)$ есть функция одной независимой переменной, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным.*

Определение 1.2. *Порядком дифференциального уравнения* называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение.

Пример 1.1.

$y'-2xy^2+5=0$ – дифференциальное уравнение первого порядка;
$y''+2y'-6y-\sin x=0$ – дифференциальное уравнение второго порядка.

Определение 1.3. *Решением* или *интегралом дифференциального уравнения* называется всякая функция $y=\varphi(x)$, которая, будучи подставленной в уравнение, превращает его в тождество.

Пример 1.2.

Рассмотрим дифференциальное уравнение $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=0.$

Функции $y=\sin x$, $y=2\cos x$, $y=3\sin x-\cos x$ и, вообще, функции вида $y=C_1\sin x$, $y=C_2\cos x$ и $y=C_1\sin x+C_2\cos x$ являются решением данного уравнения при любом выборе постоянных C_1 и C_2.

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$F(x,y,y')=0 \tag{1.1}$$

Если это уравнение можно разрешить относительно y', то его можно записать в виде

$$y' = f(x, y), \tag{1.2}$$

в этом случае говорят, что уравнение *разрешено относительно производной.*

Теорема 1.1* (о существовании и единственности решения дифференциального уравнения).

Если в уравнении (1.2) *функция* $f(x, y)$ *и ее частная производная* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *непрерывны в некоторой области* D *на плоскости Oxy, содержащей некоторую точку* (x_0, y_0), *то существует единственное решение этого уравнения* $y = \varphi(x)$, *удовлетворяющее условию:* $y = y_0$ *при* $x = x_0$.

Геометрический смысл теоремы 1.1. При выполнении условий теоремы существует единственная функция $y = \varphi(x)$, график которой проходит через точку (x_0, y_0).

Следствие 1.1. *Уравнение* (1.2) *имеет бесконечное множество различных решений (например, решение, график которого проходит через точку* (x_0, y_0), *другое решение, график которого проходит через точку* (x_1, y_1) *и т.д., если только эти точки лежат в области* D).

Условие, что при $x = x_0$ функция y должна равняться заданному числу y_0, называется *начальным условием*. Оно может быть записано в виде $y(x_0) = y_0$ или $y\big|_{x=x_0} = y_0$.

Определение 1.4. Получение (нахождение) решения уравнения (1.1) или (1.2) при заданных начальных условиях $(x_0, y_0) \in D$ называется *решением задачи Коши* соответствующего уравнения для начальных условий $(x_0, y_0) \in D$.

Определение 1.5. *Общим решением* дифференциального уравнения первого порядка называется функция

$$y = \varphi(x, C), \tag{1.3}$$

которая зависит от одной произвольной постоянной C и удовлетворяет следующим условиям:

1) функция (1.3) является решением дифференциального уравнения при любом конкретном значении постоянной C;

2) каково бы ни было начальное условие $y=y_0$ при $x=x_0$, т.е. $y(x_0)=y_0$, можно найти такое значение $C=C_0$, что функция $y=\varphi(x,C_0)$ удовлетворяет данному начальному условию. При этом предполагается, что значения x_0, y_0 принадлежат к той области изменения переменных x и y, в которой выполняются условия теоремы 1.1.

В процессе поиска общего решения дифференциального уравнения нередко можно получить соотношение вида

$$\Phi(x,y,C)=0, \tag{1.4}$$

неразрешенное относительно y. Если выразить y из (1.4) в элементарных функциях оказывается невозможным, то общее решение оставляют в неявном виде. Равенство (1.4), неявно задающее общее решение, называется *общим интегралом* дифференциального уравнения.

Определение 1.6. *Частным решением* дифференциального уравнения называется любая функция $y=\varphi(x,C_0)$, которая получается из общего решения $y=\varphi(x,C)$, если в последнем произвольной постоянной C придать определенное значение $C=C_0$. Соотношение $\Phi(x,y,C_0)=0$ называется в этом случае *частным интегралом* уравнения.

Пример 1.3. Для уравнения первого порядка $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$ общим решением будет семейство функций $y=\frac{C}{x}$ (можно проверить подстановкой в уравнение).

Найдем частное решение, удовлетворяющее следующему начальному условию: $y_0=1$ при $x_0=2$. Подставляя эти значения x_0 и y_0 в формулу $y=\frac{C}{x}$, получим $1=\frac{C}{2}$ или $C=2$. Следовательно, искомым частным решением будет функция $y=\frac{2}{x}$.

Геометрический смысл решения дифференциального уравнения. Общий интеграл представляет собой семейство кривых на координатной плоскости, зависящее от одной произвольной постоянной C (или, как говорят, от одного параметра C). Эти кривые называются *интеграль-*

ными кривыми данного дифференциального уравнения. Частному решению (интегралу) соответствует одна кривая этого семейства, проходящая через некоторую заданную точку плоскости.

Определение 1.7. Решение дифференциального уравнения, не получающееся из общего интеграла ни при каком значении C и имеющее своим графиком огибающую семейства интегральных кривых, входящих в общее решение, называется *особым решением* дифференциального уравнения.

Через каждую точку кривой, изображающей особое решение, проходит по крайней мере по две интегральные кривые, т.е. в каждой точке особого решения нарушается единственность решения.

Пример 1.4. Рассмотрим уравнение $y^2(1+(y')^2)=R^2$. Общий интеграл данного уравнения $(x-C)^2+y^2=R^2$ представляет собой семейство окружностей радиуса R с центрами по оси абсцисс. Огибающей данного семейства окружностей является пара прямых $y=\pm R$. Так как функции $y=\pm R$ удовлетворяют исходному уравнению и не могут быть получены из общего интеграла, то это – особый интеграл.

Дифференциальные уравнения имеют широкое применение в экономических исследованиях как в макроэкономике, так и в микроэкономике.

Пример 1.5 (задача движения фондов).

Обозначим через $K(t)$ величину фондов (станки, помещения и т.д.) в натуральном или стоимостном выражении. Скорость выбытия фондов выразим коэффициентом выбытия μ, считая, что этот процесс происходит равномерно. Тогда выбытие ведет к уменьшению фондов за год на величину $\mu K(t)$. Инвестиции ведут к увеличению фондов. Предположим, что инвестиции в размере $I(t)$ за год дадут увеличение фондов на величину $\rho I(t)$ ($\rho \neq 1$, так как часть инвестиций идет на заработную плату проектировщикам, строителям и т.д.).

Рассмотрим произвольный момент времени t и его приращение Δt. Тогда за данный промежуток времени приращение фондов составит

$$K(t+\Delta t)-K(t)=-\mu K(t)\Delta t+\rho I(t)\Delta t.$$

Разделим обе части равенства на Δt:

$$\frac{K(t+\Delta t)-K(t)}{\Delta t}=-\mu K(t)+\rho I(t).$$

Переходя к пределу и устремляя Δt к нулю получим дифференциальное уравнение $\dfrac{dK}{dt}=-\mu K+\rho I$.

Вопросы для самоконтроля

1. Какое уравнение называют дифференциальным?
2. В каком случае дифференциальное уравнение называют обыкновенным?
3. Что определяет порядок дифференциального уравнения?
4. Что называют решением или интегралом дифференциального уравнения?
5. При выполнении каких условий существует и единственное решение уравнения $y'=f(x,y)$?
6. Что называют начальным условием дифференциального уравнения?
7. В чем состоит решение задачи Коши для дифференциального уравнения?
8. Что представляет собой общий интеграл дифференциального уравнения геометрически?
9. Какое решение дифференциального уравнения называют особым?

2. УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЕННЫМИ И РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x)f_2(y), \tag{2.1}$$

где правая часть есть произведение функции, зависящей только от x, на функцию, зависящую только от y. Преобразуем его (предполагая, что $f_2(y)\neq 0$) следующим образом:

$$\frac{1}{f_2(y)}\,dy=f_1(x)\,dx. \tag{2.2}$$

Считая y известной функцией от x, равенство (2.2) можно рассматривать как равенство двух дифференциалов, а неопределенные интегралы от них будут отличаться на постоянное слагаемое. Интегрируя левую часть по y, а правую – по x, получим

$$\int \frac{1}{f_2(y)}\,dy = \int f_1(x)\,dx + C \tag{2.3}$$

Таким образом, получено соотношение, связывающее решение y, независимую переменную x и произвольную постоянную C, т.е. получен общий интеграл уравнения (2.1).

Определение 2.1. Дифференциальное уравнение вида

$$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0 \tag{2.4}$$

называют уравнением с *разделенными переменными.*

Общий интеграл уравнения (2.4), согласно доказанному, есть

$$\int M(x)\,dx + \int N(y)\,dy = C.$$

Пример 2.1. Рассмотрим уравнение с разделенными переменными

$$x\,dx + y\,dy = 0.$$

Интегрируя, получим:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1, \quad x^2 + y^2 = 2C_1,$$

так как $x^2 + y^2 \geq 0$, то можно обозначить $2C_1 = C^2$. Тогда общий интеграл исходного дифференциального уравнения представляет собой семейство концентрических окружностей с центром в начале координат и радиусом C: $x^2 + y^2 = C^2$.

Определение 2.2. Дифференциальное уравнение вида

$$M_1(x)N_1(y)\,dx + M_2(x)N_2(y)\,dy = 0 \tag{2.5}$$

называется *уравнением с разделяющимися переменными.*

Уравнение (2.5) может быть приведено (в предположении $M_2(x) \neq 0,\ N_1(y) \neq 0$) к уравнению с разделенными переменными путем деления обеих его частей на выражение $N_1(y)M_2(x)$:

$$\frac{M_1(x)N_1(y)}{N_1(y)M_2(x)}\,dx + \frac{M_2(x)N_2(y)}{N_1(y)M_2(x)}\,dy = 0,$$

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=0,$$

т.е. к уравнению вида (2.4).

После получения общего решения уравнения (2.5) следует проверить, являются ли нули функций $M_2(x)$ и $N_1(y)$ решениями заданного уравнения и заключены ли они в общем интеграле при каком-либо значении C.

Пример 2.2. Решить дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$.

Решение.

Разделим переменные: $\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}$ $(y\neq 0)$.

Проинтегрируем и получим $\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x}+C_1$, $\ln|y|=-\ln|x|+\ln|C|$

или $\ln|y|=\ln\left|\frac{C}{x}\right|$. Таким образом, общее решение есть $y=\frac{C}{x}$.

Заметим, что $y=0$ является решением исходного уравнения и может быть получено из общего решения при $C=0$.

Ответ: $y=\frac{C}{x}$.

Пример 2.3. Найти частное решение дифференциального уравнения $(1+x^2)\,dy-2xy\,dx=0$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=1$.

Решение.

Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Разделив обе части уравнения на произведение $y(1+x^2)$ $(y(1+x^2)\neq 0)$, получим уравнение с разделенными переменными:

$$\frac{dy}{y}-\frac{2x}{1+x^2}dx=0.$$

Проинтегрируем и получим, $\int\frac{dy}{y}-\int\frac{2x}{1+x^2}dx=\ln|C|$,

$$\ln|y|-\ln\left|1+x^2\right|=\ln|C|,$$

$$\ln\left|\frac{y}{1+x^2}\right|=\ln|C|.$$

Откуда, общее решение уравнения имеет вид $y=C(1+x^2)$.

Для получения частного решения определим значение C по начальным условиям:

$$1=C(1+0),\quad C=1.$$

Таким образом, частное решение имеет вид $y=1+x^2$.

Заметим, что при делении на $y(1+x^2)$ предполагалось, что $y(1+x^2)\neq 0$, т.е. $y\neq 0$. Однако $y=0$ есть решение уравнения, в чем можно убедиться подстановкой. Данное решение может быть получено из общего при $C=0$.

Ответ: $y=1+x^2$.

Уравнения с разделяющимися переменными применяются в экономических исследованиях, например, определение спроса из эластичности спроса по цене: $E_p(q)=\dfrac{p}{q}p'$; закон изменения производительности труда может быть задан уравнением $\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{dy}{dt}=f(t)$, где $f(t)$ представляет собой темп изменения производительности труда.

Пример 2.4. Темп изменения производительности труда характеризуется функцией $f(t)=\dfrac{2t}{\sqrt{t^2+1}}$. Определить функцию производительности труда $y=\varphi(t)$ при условии $y(0)=1$.

Решение.

Составим дифференциальное уравнение вида $\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{dy}{dt}=f(t)$. В данном случае, исходя из вида заданной функции $f(t)=\dfrac{2t}{\sqrt{t^2+1}}$, получим

$\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{2t}{\sqrt{t^2+1}}$ – уравнение с разделяющимися переменными.

Разделим переменные и выполним интегрирование:

$$\frac{dy}{y}=\frac{2t}{\sqrt{t^2+1}}dt,$$

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{2t}{\sqrt{t^2+1}}dt,$$

$$\ln|y|=2\sqrt{t^2+1}+C_1,$$

$$y=e^{C_1}\cdot e^{2\sqrt{t^2+1}},\ C_1=\ln C,$$

$$y=Ce^{2\sqrt{t^2+1}}.$$

После подстановки начальных условий в общее решение, получим частное решение: $1=C\cdot e^2$, $C=\frac{1}{e^2}$. Тогда $y=e^{\sqrt{t^2+1}-2}$.

Ответ: $y=e^{\sqrt{t^2+1}-2}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Какое дифференциальное уравнение называют уравнением с разделенными переменными?
2. Какой вид имеет общий интеграл дифференциального уравнения с разделенными переменными?
3. Какое дифференциальное уравнение называют уравнением с разделяющимися переменными?
4. Каким образом можно получить решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными?
5. Сколько произвольных постоянных будет содержать общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными?

3. ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Определение 3.1. Функция $f(x,y)$ называется *однородной функцией n-ного измерения* относительно переменных x и y, если при любом $\lambda > 0$ справедливо тождество

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y).$$

Пример 3.1. $f(x,y) = xy - y^2$ – однородная функция второго измерения, так как $(\lambda x)(\lambda y) - (\lambda y)^2 = \lambda^2 (xy - y^2)$.

Пример 3.2. $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ – однородная функция первого измерения, так как $\sqrt[3]{(\lambda x)^3 + (\lambda y)^3} = \sqrt[3]{\lambda^3 \left(x^3 + y^3\right)} = \lambda \sqrt[3]{x^3 + y^3}$.

Определение 3.2. Уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{3.1}$$

называется *однородным* относительно x и y, если функция $f(x,y)$ есть однородная функция нулевого измерения относительно x и y.

Порядок решения однородного уравнения

По условию, $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$. Полагая в этом тождестве $\lambda = \frac{1}{x}$, получим $f(x,y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$, т.е. однородная функция нулевого измерения зависит только от отношения аргументов.

Уравнение (3.1) в этом случае примет вид

$$\frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right) \tag{3.2}$$

Сделаем подстановку $y = ux$, иначе $u = \frac{y}{x}$. Тогда будем иметь

$$y' = u'x + u \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot x + u.$$

Подставляя это выражение в уравнение (3.2), получим $\frac{du}{dx}\cdot x+u=f(1,u)$ – уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные

$$x\frac{du}{dx}=f(1,u)-u,$$

$$\frac{du}{f(1,u)-u}=\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, найдем $\int\frac{du}{f(1,u)-u}=\int\frac{dx}{x}+C$, $\int\frac{du}{f(1,u)-u}=\ln|x|+C$.

Подставив после интегрирования вместо u отношение $\frac{y}{x}$, получим интеграл уравнения (3.2).

Особыми решениями однородного уравнения могут быть полуоси оси Oy ($x=0$, $y\neq 0$) и полупрямые $y=u_i x$ ($x\neq 0$), где u_i – корни уравнения $f(1,u)-u=0$.

Пример 3.3. Решить дифференциальное уравнение $y'=\frac{x+y}{x}$.

Решение.

Имеем $y'=1+\frac{y}{x}$. Функция, стоящая справа, есть однородная функция нулевого измерения: $f(\lambda x,\lambda y)=1+\frac{\lambda y}{\lambda x}=1+\frac{y}{x}=f(x,y)$.

Следовательно, имеем однородное уравнение. Выполним замену $y=ux$, тогда $y'=u'\cdot x+u$.

Подставляем полученные выражения в исходное уравнение

$$u'\cdot x+u=1+\frac{ux}{x},\qquad u'\cdot x+u=1+u,\qquad x\cdot u'=1,\qquad x\cdot\frac{du}{dx}=1.$$

Разделяя переменные, получим $du=\frac{dx}{x}$.

Интегрируя, находим,

$$\int du=\int\frac{dx}{x}+C,\qquad u=\ln|x|+C.$$

Подставив вместо u отношение $\frac{y}{x}$, получим $\frac{y}{x} = \ln|x| + C$. Откуда $y = x(\ln|x| + C)$.

Заметим, что в данном случае исходное уравнение не имеет особых решений.

Ответ: $y = x(\ln|x| + C)$.

Замечание 3.1. *Уравнение вида* $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ *будет однородным тогда и только тогда, когда функции* $M(x,y)$ и $N(x,y)$ – *однородные функции одного и того же измерения.*

Пример 3.4.

Решить дифференциальное уравнение $(x^2 - y^2)\,dy - 2yx\,dx = 0$.

Решение.

В данном уравнении коэффициенты при dx и dy представляют собой функции второго измерения:

$$M(\lambda x, \lambda y) = -2 \cdot \lambda y \cdot \lambda x = \lambda^2 \cdot (-2yx) = \lambda^2 M(x,y),$$

$$N(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 - (\lambda y)^2 = \lambda^2 (x^2 - y^2) = \lambda^2 N(x,y).$$

Таким образом, имеем однородное уравнение. Положим $y = ux$, тогда $dy = u\,dx + x\,du$. Подставим выражения для y и dy в исходное уравнение и выполним преобразования:

$$(x^2 - u^2x^2)(u\,dx + x\,du) - 2 \cdot ux \cdot x\,dx = 0,$$

$$x^2(1-u^2)(x\,du + u\,dx) - 2ux^2 dx = 0,$$

$$x^2((1-u^2)(x\,du + u\,dx) - 2u\,dx) = 0,$$

$$(1-u^2)x\,du - u(u^2+1)\,dx = 0, \quad (x^2 \neq 0)$$

$$\frac{1-u^2}{u(u^2+1)}du - \frac{dx}{x} = 0, \quad (u \neq 0)$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{1-u^2}{u(u^2+1)}du.$$

Таким образом, получено дифференциальное уравнение с разделенными переменными. Выполним интегрирование

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1-u^2}{u(u^2+1)} du + \ln|C|,$$

$$\ln|x| = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{2u}{u^2+1} \right) du + \ln|C|,$$

$$\ln|x| = \ln|u| - \ln|u^2+1| + \ln|C|,$$

$$\ln|x| = \ln\left|\frac{Cu}{u^2+1}\right|, \text{ откуда } x = \frac{Cu}{u^2+1}.$$

Подставив выражение для u, получим

$$x = \frac{C\frac{y}{x}}{\frac{y^2}{x^2}+1}, \quad x = \frac{Cyx}{y^2+x^2}, \quad x^2+y^2 = Cy.$$

Таким образом, общий интеграл уравнения представляет собой семейство окружностей с центрами на оси Oy, проходящих через начало координат.

При $u=0$ получаем решение $y=0$. Это решение является частным, так как общий интеграл может быть переписан в виде $C_1(x^2+y^2)=y$, откуда при $C_1=0$ получаем $y=0$.

Ответ: $x^2+y^2=Cy$.

Вопросы для самоконтроля

1. В каком случае функция $f(x,y)$ называется однородной функцией n-ного измерения?
2. Какое дифференциальное уравнение называют однородным относительно x и y?
3. При помощи какой подстановки можно решить однородное дифференциальное уравнение?

4. Какие особые решения может иметь однородное дифференциальное уравнение?
5. В каком случае уравнение вида $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ будет однородным?
6. Сколько произвольных постоянных будет содержать общее решение или общий интеграл однородного дифференциального уравнения?

4. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Определение 4.1. *Линейным дифференциальным уравнением первого порядка* называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции и ее производной:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \tag{4.1}$$

где $p(x)$ и $q(x)$ – заданные непрерывные функции от x или постоянные.

Порядок решения линейного дифференциального уравнения.

Будем искать решение в виде произведения двух функций от x, т.е. полагаем

$$y = u(x)v(x). \tag{4.2}$$

Одну из этих функций можно взять произвольной, другая определится на основании уравнения (4.1).

Дифференцируя обе части равенства (4.2), получим $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dx}$. Подставляя полученное выражение производной $\frac{dy}{dx}$ в уравнение (4.1) будем иметь $\frac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dx} + puv = q$, или

$$\frac{du}{dx} \cdot v + u\left(\frac{dv}{dx} + pv\right) = q. \tag{4.3}$$

Выберем функцию $v(x)$ такой, чтобы

$$\frac{dv}{dx} + pv = 0. \tag{4.4}$$

Разделяя переменные в этом дифференциальном уравнении относительно функции $v(x)$, находим $\frac{dv}{v} = -pdx$. Проинтегрируем обе части уравнения,

$$\ln|v| = -\int p\,dx + \ln|C_1| \text{ или } v(x) = C_1 e^{-\int p(x)\,dx}.$$

Так как достаточно одного отличного от нуля решения уравнения (4.4), то за функцию $v(x)$ возьмем

$$v(x) = e^{-\int p(x)\,dx}, \tag{4.5}$$

где $\int p(x)\,dx$ – какая-либо первообразная. Очевидно, $v(x) \neq 0$. Подставляя найденное выражение для $v(x)$ в уравнение (4.3), получим

$$v(x)\frac{du}{dx} = q(x) \quad \text{или} \quad \frac{du}{dx} = \frac{q(x)}{v(x)}, \quad \text{откуда} \quad u(x) = \int \frac{q(x)}{v(x)}dx + C.$$

Подставляя $u(x)$ и $v(x)$ в формулу (4.2), окончательно получим $y = v(x)\left(\int \frac{q(x)}{v(x)}dx + C\right)$ или

$$y = e^{-\int p(x)\,dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)\,dx}dx + C\right). \tag{4.6}$$

Формула (4.6) задает общее решение уравнения (4.1).

Пример 4.1. Решить дифференциальное уравнение $y' = x^2 - y$.

Решение.

Преобразуем исходное уравнение к виду: $y' + y = x^2$. Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Будем искать решение в виде $y = u(x)v(x)$, тогда $y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. После подстановки $y = u(x)v(x)$ и выражения для производной в уравнение получим

$$u'(x)v(x) + u(x)v'(x) + u(x)v(x) = x^2,$$

$$u'(x)v(x) + u(x)(v'(x) + v(x)) = x^2.$$

Решим уравнение $v'(x) + v(x) = 0$.

Получаем, $v'(x) = -v(x)$, $\frac{v'(x)}{v(x)} = -1$, $\int \frac{v'(x)}{v(x)}dx = -\int 1\cdot dx$,

$$\int\frac{dv}{v}=-\int dx,\quad \ln|v(x)|=-x+C\,,$$

откуда при $C=0$: $\ln|v(x)|=-x$ и искомая функция будет иметь вид $v(x)=e^{-x}$.

После подстановки функции $v(x)$ получим уравнение $u'(x)\cdot e^{-x}=x^2$. Решим последнее уравнение:

$$u'(x)=x^2e^x,\qquad \int u'(x)dx=\int x^2e^x\,dx\,,$$

$$u(x)=\int x^2e^x dx=\begin{vmatrix} u=x^2 & v=e^x \\ du=2xdx & dv=e^x dx\end{vmatrix}=x^2e^x-2\int x\cdot e^x dx=$$

$$=\begin{vmatrix} u=x & v=e^x \\ du=dx & dv=e^x dx\end{vmatrix}=e^x\cdot x^2-2(e^x\cdot x-\int e^x dx)=$$

$$=e^xx^2-2e^xx+2e^x+C=e^x(x^2-2x+2)+C.$$

Тогда $y(x)=(e^x(x^2-2x+2)+C)\cdot e^{-x}=x^2-2x+2+Ce^{-x}$.

Ответ: $y=x^2-2x+2+Ce^{-x}$.

Пример 4.2. Функция предложения промышленной продукции предприятия, являющейся функцией цены предшествующего года, имеет вид:

$$S=3p-8(t-1)+2\frac{dp}{dt}.$$

Спрос на данный товар определяется ценой на промышленную продукцию этого года, где функция спроса имеет вид:

$$q=-p+7t-\frac{dp}{dt}.$$

Определить цену равновесия на товар.

Решение.

Цена равновесия – это цена, при которой спрос равен предложению. Следовательно, необходимо приравнять функцию предложения и функцию спроса и решить полученное дифференциальное уравнение относительно функции цены $p(t)$.

$$3p-8(t-1)+2\frac{dp}{dt}=-p+7t-\frac{dp}{dt},$$

$$3\frac{dp}{dt}+4p-15t-8=0.$$

Таким образом, получено линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Выполним замену $p(t)=u(t)v(t)$. Тогда $\frac{dp}{dt}=u\frac{dv}{dt}+v\frac{du}{dt}$.

$$3u\frac{dv}{dt}+3v\frac{du}{dt}+4uv-15t-8=0,$$

$$u\left(3\frac{dv}{dt}+4v\right)+3v\frac{du}{dt}-15t-8=0,$$

Решим уравнение $3\frac{dv}{dt}+4v=0$. Получаем,

$$3\frac{dv}{dt}=-4v, \qquad \frac{dv}{v}=-\frac{4}{3}dt, \quad \ln|v|=-\frac{4}{3}t+C,$$

пусть $C=0$. Тогда последнее равенство принимает вид: $\ln|v|=-\frac{4}{3}t$, откуда $v=e^{-\frac{4}{3}t}$.

После подстановки функции $v(x)$ получим уравнение

$$3e^{-\frac{4}{3}t}\frac{du}{dt}-15t-8=0.$$

Решим последнее уравнение: $\frac{du}{dt}=\frac{1}{3}(15t+8)e^{\frac{4}{3}t}$,

$$u=\frac{1}{3}\int(15t+8)e^{\frac{4}{3}t}\,dt=\begin{vmatrix} u=15t+8 & v=\frac{3}{4}e^{\frac{4}{3}t} \\ du=15dt & dv=e^{\frac{4}{3}t}dt \end{vmatrix}=\frac{1}{4}(15t+8)e^{\frac{4}{3}t}-\frac{15}{4}\int e^{\frac{4}{3}t}\,dt=$$

$$=\frac{1}{4}(15t+8)e^{\frac{4}{3}t}-\frac{15}{4}\int e^{\frac{4}{3}t}\,dt=\frac{1}{4}(15t+8)e^{\frac{4}{3}t}-\frac{45}{16}e^{\frac{4}{3}t}+C=\frac{15}{4}te^{\frac{4}{3}t}-\frac{13}{16}e^{\frac{4}{3}t}+C.$$

Окончательно имеем:

$$p(t)=\left(\frac{15}{4}te^{\frac{4}{3}t}-\frac{13}{16}e^{\frac{4}{3}t}+C\right)e^{-\frac{4}{3}t}=\frac{15}{4}t-\frac{13}{16}+Ce^{-\frac{4}{3}t}.$$

Ответ: цена равновесия на товар определяется функцией $p(t)=\frac{15}{4}t-\frac{13}{16}+Ce^{-\frac{4}{3}t}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Какой вид имеет линейное дифференциальное уравнение первого порядка?
2. При помощи какой подстановки можно решить линейное дифференциальное уравнение первого порядка?
3. Каким образом определяются функции $u(x)$ и $v(x)$ при использовании подстановки $y=u(x)v(x)$?
4. Почему в общем интеграле функции $v(x)$ можно взять $C=0$?
5. Сколько произвольных постоянных будет содержать общее решение линейного однородного дифференциального уравнения?

5. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 2-ГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

5.1. Линейные однородные дифференциальные уравнения 2-го порядка

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$y''+py'+qy=0, \tag{5.1}$$

где p, q – действительные числа.

Теорема 5.1*. *Если* y_1, y_2 *– два решения однородного уравнения* (5.1), *то* y_1+y_2, C_1y_1, C_2y_2 *– также решения этого уравнения.*

Определение 5.1. Два решения уравнения (5.1) называются *линейно независимыми* на отрезке $[a,b]$, если $\frac{y_2}{y_1} \neq const$. В противном случае они называются *линейно зависимыми* ($y_2 = \lambda y_1$).

Теорема 5.2*. *Если* y_1, y_2 *два линейно независимых решения уравнения* (5.1), *то* $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ *– его общее решение.*

Чтобы найти общее решение уравнения (5.1) достаточно найти два линейно независимых частных решения.

Будем искать частные решения в виде

$$y = e^{kx}, \quad \text{где} \quad k = const. \tag{5.2}$$

Тогда $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$.

Подставляя полученные выражения производных в уравнение (5.1), получим $e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$. Так как $e^{kx} \neq 0$, то

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{5.3}$$

(5.3) – характеристическое уравнение по отношению к уравнению (5.1).

Возможны следующие случаи:

1. $D > 0$. Уравнение имеет два действительных различных корня

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}; \qquad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

2. $D = 0$. Уравнение имеет действительный корень $k_1 = -\frac{p}{2}$ кратности два.

3. $D < 0$. Уравнение не имеет действительных корней.

В зависимости от решения характеристического уравнения (5.3) уравнение (5.1) будет иметь следующие частные решения:

1. $D > 0$: $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$. Решения линейно независимы, так как $\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^{k_2 x}}{e^{k_1 x}} = e^{(k_2 - k_1)x} \neq const$, $(k_1 \neq k_2)$.

Общее решение уравнения (5.1) имеет вид: $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$.

2. $D=0$: $y_1=e^{k_1x}$, $y_2=xe^{k_1x}$. Решения линейно независимы, так как $\frac{y_2}{y_1}=\frac{xe^{k_1x}}{e^{k_1x}}=x\neq const.$

Общее решение уравнения (5.1) имеет вид: $y=C_1e^{k_1x}+C_2xe^{k_1x}$.

3. $D<0$: $y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$, где $\alpha=-\frac{p}{2}$, $\beta=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$.

Решения линейно независимы, так как $\frac{y_2}{y_1}=\frac{e^{\alpha x}\sin\beta x}{e^{\alpha x}\cos\beta x}=\frac{\sin\beta x}{\cos\beta x}=\operatorname{tg}\beta x\neq const.$

Общее решение уравнения (5.1) имеет вид:

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x).$$

Пример 5.1. Решить уравнение $y''-4y'+3y=0$.

Решение.

Составим и решим характеристическое уравнение $k^2-4k+3=0$. Корни: $k_1=1$, $k_2=3$. Следовательно, общее решение будет иметь вид $y=C_1e^x+C_2e^{3x}$.

Ответ: $y=C_1e^x+C_2e^{3x}$.

Пример 5.2. Решить уравнение $y''-4y'+4y=0$.

Решение.

Составим и решим характеристическое уравнение $k^2-4k+4=0$. Корни: $k_1=k_2=2$. Следовательно, общее решение будет иметь вид $y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}$.

Ответ: $y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}$.

Пример 5.3. Решить уравнение $y''-y'+4y=0$.

Решение.

Составим и решим характеристическое уравнение $k^2-k+4=0$. Так как $D=-15<0$, то общее решение будем искать в виде $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$, где $\alpha=-\frac{p}{2}$, $\beta=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$. В данном случае $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\sqrt{\frac{15}{4}}=\frac{\sqrt{15}}{2}$.

Следовательно, общее решение будет иметь вид

$$y=e^{0,5x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{15}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{15}}{2}x\right).$$

Ответ: $y=e^{0,5x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{15}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{15}}{2}x\right)$.

5.2. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью

Теорема 5.3*(о структуре общего решения уравнения). *Общее решение линейного дифференциального уравнения*

$$y''+py'+qy=f(x), \tag{5.4}$$

где p, q – действительные числа, имеет вид

$$y=\tilde{y}+y^*, \tag{5.5}$$

где $\tilde{y}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения, y^* – одно из частных решений неоднородного уравнения.

Порядок решения неоднородного дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами .

1. Получить общее решение однородного уравнения: $\tilde{y}$.
2. Получить частное решение неоднородного уравнения: y^*.
3. Получить общее решение: $y=\tilde{y}+y^*$.

В различных приложениях правая часть $f(x)$ уравнения (5.4) во многих случаях имеет специальный вид. В общем случае:

$$f(x)=e^{ax}(P_r(x)\cos bx+Q_s(x)\sin bx), \tag{5.6}$$

где $P_r(x)$, $Q_s(x)$ – многочлены степени r и s соответственно, a и b – действительные числа.

Частные случаи (5.6):

$$f(x)=P_r(x) \quad (a=0, \quad b=0),$$

$$f(x)=P_r(x)e^{ax} \quad (b=0),$$

$$f(x)=P_r(x)\cos bx+Q_s(x)\sin bx \quad (a=0),$$

$$f(x)=A\cos bx+B\sin bx \quad (a=0,\ r=s=0,\ A,\ B\in\mathbb{R}),$$

$$f(x)=e^{ax}(A\cos bx+B\sin bx), \quad (r=s=0,\ A,B\in\mathbb{R}).$$

Доказано, что во всех этих случаях частное решение y^* имеет структуру, аналогичную правой части решаемого дифференциального уравнения. Для общего случая

$$y^*=x^n e^{ax}\left(\widetilde{P}_m(x)\cos bx+\widetilde{Q}_m(x)\sin bx\right),$$

где $\widetilde{P}_m(x)$, $\widetilde{Q}_m(x)$ – многочлены степени $m=\max\{r;s\}$, показатель степени x^n число n определяется в зависимости от решения характеристического уравнения следующим образом:

1) $D\geq 0$: при $b=0$ – это число корней характеристического уравнения, совпадающего с a, т.е. $n\in\{0,\ 1,\ 2\}$; при $b\neq 0 \quad n=0$;

2) $D<0$: при $b=0$ $n=0$; при $b\neq 0 \quad n=1$, если полученные в общем решении коэффициенты $\alpha=a$, $\beta=b$, в противном случае $n=0$.

Подставляя решение y^* и его производные в уравнение (5.4) и приравнивая коэффициенты по методу неопределенных коэффициентов, получаем необходимое количество линейных алгебраических уравнений для вычисления неизвестных коэффициентов.

Пример 5.4.

Решить задачу Коши $\begin{cases} y''-3y'+2y=e^x(2x-3), \\ y(0)=1, \\ y'(0)=-2. \end{cases}$

Решение.

Получим общее решение уравнения $y''-3y'+2y=e^x(2x-3)$.

Для решения однородного уравнения $y''-3y'+2y=0$ составим характеристическое уравнение $k^2-3k+2=0$. Получаем,

$$D=9-8=1>0, \quad k_1=1, \quad k_2=2.$$

Таким образом, общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$\tilde{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Получим частное решение неоднородного уравнения. Так как $D > 0$, тригонометрические функции в правой части исходного уравнения отсутствуют ($b = 0$), $k_1 = 1 = a$ (коэффициент при x функции e^{ax}), то $n = 1$.

Общий вид частного решения: $y^* = xe^x(Ax + B)$. Найдем производные $(y^*)'$ и $(y^*)''$ частного решения и подставим в исходное уравнение.

$$(y^*)' = (x)'e^x(Ax + B) + x(e^x)'(Ax + B) + xe^x(Ax + B)' =$$

$$= e^x(Ax + B) + xe^x(Ax + B) + xe^x A = e^x(Ax^2 + 2Ax + Bx + B),$$

$$(y^*)'' = (e^x)'(Ax^2 + 2Ax + Bx + B) + e^x(Ax^2 + 2Ax + Bx + B)' =$$

$$= e^x(Ax^2 + 2Ax + Bx + B) + e^x(2Ax + 2A + B) = e^x(Ax^2 + 4Ax + Bx + 2A + 2B).$$

$$e^x(Ax^2 + 4Ax + Bx + 2A + 2B) - 3e^x(Ax^2 + 2Ax + Bx + B) + 2xe^x(Ax + B) = e^x(2x - 3).$$

После преобразований получим

$$e^x(-2Ax + 2A - B) = e^x(2x - 3).$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x, это приведет к системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} -2A = 2, \\ 2A - B = -3, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} A = -1, \\ B = 1. \end{cases}$$

Таким образом, частное решение принимает вид

$$y^* = xe^x(-x + 1) = e^x(-x^2 + x).$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^x + e^x(-x^2 + x).$$

Решим задачу Коши. Для этого найдем y' общего решения:

$$y' = C_1(e^x)' + C_2(e^{2x})' + (e^x \cdot (-x^2 + x))' = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} + e^x(-x^2 - x + 1).$$

Воспользуемся начальными условиями и получим систему линейных уравнений для определения постоянных C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1 + 2C_2 + 1 = -2, \end{cases} \begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1 + 2C_2 = -3, \end{cases} \text{откуда} \begin{cases} C_1 = 5, \\ C_2 = -4. \end{cases}$$

Таким образом, решение задачи Коши $y = 5e^x - 4e^{2x} + e^x(-x^2 + x)$.

Ответ: $y = 5e^x - 4e^{2x} + e^x(-x^2 + x)$.

Вопросы для самоконтроля

1. В каком случае два решения линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка будут линейно независимы?
2. Как можно представить общее решение линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка, если известны его два линейно независимые решения?
3. Какой вид имеет характеристическое уравнение по отношению к линейному дифференциальному уравнению 2-го порядка?
4. Какие частные решения будет иметь линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка в зависимости от решения характеристического уравнения? Какой вид в этих случаях будет иметь общее решение?
5. Сколько произвольных постоянных будет содержать общее решение однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка дифференциального уравнения?
6. Какова структура общего решения уравнения $y'' + py' + qy = f(x)$, где $p \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$?
7. Каков порядок решения уравнения $y'' + py' + qy = f(x)$?
8. Каким образом определяется вид частного решения y^* в зависимости от правой части уравнения $f(x)$?

Вопросы к экзамену

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Общее, частное и особое решения. Теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения. Задача Коши.
2. Дифференциальные уравнения с разделенными и разделяющимися переменными.
3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.
4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.
5. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Структура решения неоднородного уравнения. Частные случаи специальной правой части уравнения.

РАЗДЕЛ 7

ЧИСЛОВЫЕ И СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

1. ЧИСЛОВОЙ РЯД И ЕГО СХОДИМОСТЬ

Рассмотрим числовую последовательность $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n, \ldots$ и формально образуем из элементов этой последовательности сумму

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \quad (1.1)$$

Определение 1.1. Выражение (1.1) называется *числовым рядом* или просто *рядом*, числа $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n, \ldots$ – *членами ряда*, a_n – *общим* (n*-ным*) *членом ряда*.

Ряд (1.1) считается заданным, если известен его общий член a_n.

Пример 1.1. Сумма бесконечной геометрической прогрессии

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1},$$

или геометрический ряд.

Определение 1.2. *n-ой частичной суммой S_n ряда* (1.1) называется сумма конечного числа n первых членов ряда.

Согласно определению,

$S_1 = a_1,$

$S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2,$

$\ldots$

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = S_{n-1} + a_n.$

Так как число членов ряда бесконечно, то частичные суммы образуют последовательность

$$S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_n,\ \ldots \quad (1.2)$$

Определение 1.3. Ряд (1.1) называется *сходящимся*, если последовательность его частичных сумм (1.2) сходится к некоторому числу S, которое называется *суммой ряда*.

Таким образом, если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд (1.1) называется *сходящимся* и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Если не существует конечного предела $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то ряд (1.1) называется *расходящимся*.

Пример 1.1 (продолжение).

Общая формула суммы геометрической прогрессии, состоящей из n членов, имеет вид $S_n = \dfrac{a(1-q^n)}{1-q}$. Рассмотрим возможные случаи существования суммы геометрического ряда в зависимости от значения знаменателя прогрессии q.

Возникают четыре случая:

1) при $|q|<1$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{a(1-q^n)}{1-q} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q}-\frac{a}{1-q}q^n\right) = \left|\begin{matrix}\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0,\\ |q|<1\end{matrix}\right| = \frac{a}{1-q};$$

2) при $|q|>1$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{a(1-q^n)}{1-q} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q}-\frac{a}{1-q}q^n\right) = \left|\begin{matrix}\lim\limits_{n\to\infty} |q|^n = \infty,\\ |q|>1\end{matrix}\right| \Rightarrow$$

не существует конечного предела $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$;

3) при $q=1$ ряд принимает вид: $a+a+\ldots+a+\ldots$, $a\neq 0$. Тогда $S_n = na$, причем не существует конечного предела $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ ($\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$);

4) $q=-1$ ряд принимает вид: $a-a+a-a+\ldots+(-1)^{n-1}a+\ldots$, $a\neq 0$. Тогда можно выделить две подпоследовательности частичных сумм ряда: подпоследовательность нечетных сумм $(S_{2k+1})=(a)$ и подпоследовательность четных сумм $(S_{2k})=(0)$. Следовательно, не существует конечного предела $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Вывод: геометрический ряд сходится, если его знаменатель $|q|<1$, т.е. только в случае, если члены ряда являются членами бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Сумма данного ряда определяется формулой $S = \dfrac{a}{1-q}$.

Свойства сходящихся рядов

Если отбросить первые n членов ряда (1.1), то получится ряд

$$a_{n+1}+a_{n+2}+...+a_{n+k}+...=\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\,, \qquad (1.3)$$

который называется *остатком ряда* (1.1), иначе – *n-ый остаток.*

Теорема 1.1. *Ряд и любой его остаток одновременно сходятся или расходятся.*

Доказательство.

Пусть $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ – частичная сумма ряда (1.1), $\sigma_m=\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k$ – частичная сумма ряда (1.3).

Очевидно, что $S_{n+m}=S_n+\sigma_m$. Следовательно, при фиксированном n, конечный предел $\lim\limits_{m\to\infty} S_{n+m}$ существует тогда и только тогда, когда существует конечный предел $\lim\limits_{m\to\infty}\sigma_m$, т.е. ряд (1.1) сходится тогда и только тогда, когда сходится его остаток (1.3). ■

Следствие 1.1. *Сходимость ряда не нарушится, если произвольным образом изменить (переставить, отбросить или добавить) конечное число членов ряда. При этом значение суммы сходящегося ряда может измениться.*

Пусть ряд (1.1) сходится к сумме S. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=S_n+\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k=S$.

Обозначим сумму остатка ряда через r_n, получаем

$$S=S_n+r_n. \qquad (1.4)$$

Теорема 1.2. *Для того, чтобы ряд* (1.1) *сходился необходимо и достаточно, чтобы* $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=0$.

Доказательство следует из определения суммы ряда и равенства (1.4).

Определение 1.4. *Произведением ряда* (1.1) *на число C* называется ряд

$$Ca_1+Ca_2+...+Ca_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}(Ca_n). \qquad (1.5)$$

Теорема 1.3. *Если ряд* (1.1) *сходится и его сумма равна* S, *то и ряд* (1.5) *также сходится и его сумма равна* CS.

Доказательство.

Так как $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, то $\sum_{k=1}^{n} (Ca_k) = C \sum_{k=1}^{\infty} a_k = CS_n$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} (CS_n) = C \lim_{n\to\infty} S_n = CS. \qquad ■$$

Рассмотрим ряд

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \tag{1.6}$$

Определение 1.5. *Алгебраической суммой ряда* (1.1) *и ряда* (1.6) называется ряд

$$(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \ldots + (a_n \pm b_n) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n). \tag{1.7}$$

Теорема 1.4. *Если ряды* (1.1) *и* (1.6) *сходятся, и их суммы равны соответственно* S^a *и* S^b, *то и ряд* (1.7) *сходится и его сумма равна* $S^a \pm S^b$.

Доказательство.

Обозначим через S_n^a и S_n^b соответственно частичные суммы рядов (1.1) и (1.6). Так как $S^a = \lim_{n\to\infty} S_n^a$, $S^b = \lim_{n\to\infty} S_n^b$, то

$$\lim_{n\to\infty} \left(S_n^a \pm S_n^b\right) = \lim_{n\to\infty} S_n^a \pm \lim_{n\to\infty} S_n^b = S^a \pm S^b. \qquad ■$$

Следствие 1.2. *Согласно теоремам* 1.3 *и* 1.4, *сходящиеся ряды можно умножать на число, почленно складывать и вычитать.*

Теорема 1.5 (необходимое условие сходимости числового ряда). *Если ряд* (1.1) *сходится, то его* n*-ый член стремится к нулю при* $n \to \infty$, *т.е.*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Доказательство.

Пусть S – сумма ряда (1.1), т.е. $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Так как $a_n = S_n - S_{n-1}$, то

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0. \qquad ■$$

Следствие 1.3 (достаточное условие расходимости числового ряда). *Если n-ный член ряда не стремится к нулю при $n \to \infty$, то ряд расходится.*

Замечание 1.1. *Условие* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *является только необходимым, но не достаточным условием сходимости ряда.*

Пример 1.2. Рассмотрим гармонический ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Хотя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, данный ряд расходится. Докажем это.

Пусть S – сумма ряда. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$, и

$$\lim_{n\to\infty}\left(S_{2n}-S_n\right)=\lim_{n\to\infty}S_{2n}-\lim_{n\to\infty}S_n=S-S=0.$$

С другой стороны,

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}=n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2},$$

т. е. $S_{2n}-S_n>\frac{1}{2}$. Следовательно, равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\left(S_{2n}-S_n\right)=0$ невозможно.

Вывод. Гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Что называют числовым рядом?
2. В каком случае числовой ряд считается заданным?
3. Что называют n-ной частичной суммой ряда?
4. В каком случае ряд называют сходящимся?
5. Приведите примеры сходящегося и расходящегося геометрических рядов.
6. Что называют n-ным остатком ряда? Можно ли рассматривать остаток ряда как ряд?
7. Существует ли связь между сходимостью ряда и сходимостью его остатка?

8. Изменится ли сходимость ряда, если произвольным образом изменить конечное число членов ряда?
9. Можно ли выполнять операции сложения, вычитания и умножения на число над сходящимися рядами? Как это отразится на сумме нового ряда?
10. В чем состоит необходимое условие сходимости числового ряда?
11. В чем состоит достаточное условие расходимости числового ряда?
12. Приведите пример ряда, для которого не выполнено необходимое условие сходимости.
13. Приведите пример ряда, иллюстрирующего тот факт, что условие $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ не является достаточным для сходимости ряда.

2. РЯДЫ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Рассмотрим два ряда с неотрицательными членами

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{2.1}$$

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \tag{2.2}$$

Теорема 2.1. *Для того чтобы ряд* (2.1) *с неотрицательными членами сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность частичных сумм этого ряда была ограничена.*

Доказательство.

Необходимость.

Пусть ряд (2.1) сходится. Это значит, что последовательность его частичных сумм имеет предел. В силу теоремы 1.5 раздела 3, всякая сходящаяся последовательность является ограниченной.

Достаточность.

Пусть последовательность частичных сумм ряда (2.1) ограничена. Так как ряд (2.1) есть ряд с неотрицательными членами, то его частичные суммы образуют неубывающую последовательность:

$$0 \le S_1 \le S_2 \le \ldots \le S_n \le S_{n+1} \le \ldots$$

В силу теоремы 1.10 раздела 3 о монотонных ограниченных последовательностях (S_n) сходится, т.е. сходится ряд (2.1). ■

2.1. Признаки сравнения рядов

Теорема 2.2 (признак сравнения). *Пусть даны два ряда* (2.1) *и* (2.2) *с неотрицательными членами и для всех* n *выполняется неравенство*

$$a_n \le b_n. \tag{2.3}$$

Тогда из сходимости ряда (2.2) *следует сходимость ряда* (2.1), *а из расходимости ряда* (2.1) *следует расходимость ряда* (2.2).

Доказательство.

Обозначим через S_n^a и S_n^b соответственно частичные суммы рядов (2.1) и (2.2). Из неравенств (2.3) следует, что

$$S_n^a \le S_n^b. \tag{2.4}$$

Если ряд (2.2) сходится, то согласно теореме 2.1 (необходимость) последовательность его частичных сумм ограничена, т.е. для любого n: $S_n^b \le M$, где M – некоторое число. Но тогда, на основании формулы (2.4), будет ограничена и последовательность частичных сумм ряда (2.1): $S_n^a \le M$. Согласно теореме 2.1 (достаточность) ряд (2.1) сходится.

Если ряд (2.1) расходится, то расходится и ряд (2.2), так как предположив сходимость ряда (2.2), на основании только что доказанной первой части теоремы, получим сходимость ряда (2.1), что противоречит условию. ■

Замечание 2.1. *Теорема справедлива и в случае, когда неравенства* (2.3) *начинают выполняться с некоторого номера* N.

Пример 2.1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)^{n+1}}$.

Решение.

Так как при $n \ge 1$: $\dfrac{1}{(n+1)^{n+1}} \le \dfrac{1}{2^{n+1}}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^{n+1}}$ представляет собой сумму геометрической прогрессии, где $q = \dfrac{1}{2} < 1$, т.е., является сходящимся, то и сходный ряд сходится.

Ответ: ряд сходится.

Пример 2.2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ при $\alpha \le 1$.

Решение.

При $\alpha = 1$ имеем расходящийся гармонический ряд, см. пример 1.2.

При $\alpha < 1$ для $n \geq 1$: $\frac{1}{n^{\alpha}} \geq \frac{1}{n}$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то будет расходящимся и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ при $\alpha < 1$.

Вывод: при $\alpha \leq 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ расходится.

Теорема 2.3* (предельный признак сравнения). *Если существует конечный, отличный от нуля предел* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, *то ряды с положительными членами* (2.1) *и* (2.2) *сходятся и расходятся одновременно.*

Пример 2.3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{3n^2-2n}$.

Решение.

Так как $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+5}{3n^2-2n} : \frac{1}{n} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+5n}{3n^2-2n} = \frac{2}{3} \neq 0$, а гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{3n^2-2n}$ расходится.

Ответ: ряд расходится.

2.2. Признаки сходимости

Теорема 2.4 (признак Д'Аламбера). *Если для членов знакоположительного ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *существует конечный предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l, \tag{2.5}$$

то при: 1) $0 \leq l < 1$ *ряд сходится;*

2) $l = 1$ *необходимы дополнительные исследования;*

3) $l > 1$ *ряд расходится.*

Доказательство.

По определению предела последовательности равенство (2.5) означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что при $n \geq N$ выполняется неравенство $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - l\right| < \varepsilon$, или

$$l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon. \tag{2.6}$$

Пусть $l < 1$. Возьмем ε таким, чтобы число $q = l + \varepsilon < 1$. Из (2.6) следует, что $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ или $a_{n+1} < qa_n$ $(n \geq N)$. Полагая $n = N$, $n = N+1$, $n = N+2$, получим:

$$a_{N+1} < qa_N,$$
$$a_{N+2} < qa_{N+1} < q^2 a_N,$$
$$\ldots\ldots$$
$$a_{N+p} < q^p a_N, \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, начиная с номера $N+1$, все члены данного ряда не превосходят членов геометрического ряда $a_N q + a_N q^2 + \ldots + a_N q^p + \ldots$, который является сходящимся, так как $q < 1$. По признаку сравнения (теорема 2.1) сходится и ряд $a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots + a_{N+p} + \ldots$ Так как конечное число членов ряда не влияет на характер сходимости ряда, то можно сделать вывод, что сходится и исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пусть $l > 1$. Возьмем ε таким, чтобы число $q = l - \varepsilon > 1$. Из (2.6) следует, что $q < \frac{a_{n+1}}{a_n}$ или $a_{n+1} > qa_n$ $(n \geq N)$. Это означает, что начиная с номера N члены ряда возрастают. В этом случае не выполняется необходимый признак сходимости и ряд расходится. ■

Пример 2.4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Решение.

Так как $a_n = \frac{1}{n!}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)!}:\frac{1}{n!}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1$, то исходный ряд сходится.

Ответ: ряд сходится.

Замечание 2.2. *Существуют как сходящиеся, так и расходящиеся ряды, для которых* $l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$. *Например, для рядов* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ $l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$, *но гармонический ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ *расходится, а ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ *сходится. Следовательно, если для некоторого ряда* $l=1$, *то в этом случае необходимо дополнительное исследование сходимости ряда с помощью других признаков.*

Теорема 2.5 (признак Коши). *Если для членов знакоположительного ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *существует конечный предел*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l, \tag{2.7}$$

то при: 1) $0\le l<1$ *ряд сходится*;

2) $l=1$ *необходимы дополнительные исследования*;

3) $l>1$ *ряд расходится.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству признака Д'Аламбера.

Пример 2.5. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

Решение.

Воспользуемся признаком Коши: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$.

Ответ: ряд сходится.

Теорема 2.6 (интегральный признак). *Пусть члены знакоположительного ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *не возрастают*:

$$a_1\ge a_2\ge\ldots\ge a_n\ge\ldots,$$

а функция $f(x)$, *определенная для* $x \geq 1$, *является непрерывной и невозрастающей, причем*

$$f(1) = a_1,\ f(2) = a_2,\ \ldots,\ f(n) = a_n, \ldots$$

Тогда для сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *необходимо и достаточно, чтобы сходился несобственный интеграл* $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\,dx.$

Доказательство.

Рассмотрим ряд

$$\int\limits_1^2 f(x)\,dx + \int\limits_2^3 f(x)\,dx + \ldots + \int\limits_n^{n+1} f(x)\,dx + \ldots \qquad (2.8)$$

Его частичными суммами будут интегралы

$$S_n = \int\limits_1^2 f(x)\,dx + \int\limits_2^3 f(x)\,dx + \ldots + \int\limits_n^{n+1} f(x)\,dx = \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx.$$

Сходимость ряда (2.8) означает существование предела последовательности его частичных сумм:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx = \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx,$$

т.е. сходимость (существование) несобственного интеграла

$$\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx. \qquad (2.9)$$

Из свойств функции $f(x)$ следует, что

$$a_n \geq f(x) \geq a_{n+1},\ \forall x \in [n,\ n+1].$$

Интегрируя неравенства (2.9) на отрезке $[n,\ n+1]$, получаем

$$\int\limits_n^{n+1} a_n dx \geq \int\limits_n^{n+1} f(x)dx \geq \int\limits_n^{n+1} a_{n+1} dx$$

или

$$a_n \geq \int\limits_n^{n+1} f(x)\,dx \geq a_{n+1}. \qquad (2.10)$$

Необходимость.

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Тогда из того, что $a_n \geq \int\limits_{n}^{n+1} f(x)\,dx$, по признаку сравнения должен сходиться составленный из интегралов ряд (2.8), а следовательно, и несобственный интеграл (2.10).

Достаточность.

Пусть интеграл (2.10) сходится. Это значит, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{1}^{n} f(x)\,dx = S$. Так как $f(x) > 0$, то последовательность $\int\limits_{1}^{n} f(x)\,dx$ возрастает с увеличением n и ограничена сверху своим пределом $\int\limits_{1}^{n} f(x)\,dx < S$. Так как $f(2) + f(3) + \ldots + f(n+1) < \int\limits_{1}^{n+1} f(x)\,dx = S_n$, то

$$f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n+1) < \int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx + f(1) = S_n + a_1 < S + a_1,$$

следовательно, последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n}^{\infty} f(n)$ ограничена. По теореме 2.1 ряд $\sum\limits_{n}^{\infty} f(n)$ сходится, т.е. сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. ■

Пример 2.6. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$.

Решение.

С помощью интегрального признака выясним поведение ряда при $\alpha > 0$. Возьмем в качестве функции $f(x)$ функцию $\frac{1}{x^{\alpha}}$ $(x \geq 1)$, которая удовлетворяет условиям теоремы 2.6. Члены ряда равны значениям этой функции при $x = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ Как известно (см. раздел 5, пример 3.2) несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$ при $\alpha > 1$ сходится, а при $\alpha \leq 1$ расходится. Следовательно, данный ряд сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

Заметим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ называется рядом Дирихле.

Ответ: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ сходится при $\alpha > 1$, расходится при $\alpha \le 1$.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Какое условие является необходимым и достаточным для сходимости числового ряда с неотрицательными членами?
2. В каком случае из выполнения соотношения $a_n \le b_n$ для членов двух числовых рядов с неотрицательными членами можно сделать вывод о сходимости этих рядов; о расходимости?
3. В каком случае можно сделать вывод о сходимости или расходимости двух рядов на основании предельного признака сравнения?
4. Исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n^2+4}$ с помощью признака сравнения и предельного признака сравнения.
5. В каком случае использование признака Д'Аламбера позволяет сделать однозначный вывод о поведении ряда?
6. Исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3n^2+4}$ с помощью признака Д'Аламбера.
7. В каком случае для проверки сходимости ряда целесообразно использовать признак Коши?
8. В чем состоит сходство в использовании признаков Д'Аламбера и Коши?
9. В каком случае исследование сходимости ряда следует выполнять с привлечением интегрального признака сходимости?
10. При каких значениях параметра α ряд Дирихле сходится; расходится?

3. ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

Определение 3.1. Ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{3.1}$$

называется *знакопеременным*, если его членами являются действительные числа произвольного знака.

3.1. Абсолютная и условная сходимость

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (3.1):

$$|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|. \tag{3.2}$$

Определение 3.2. Если сходится ряд (3.2), то ряд (3.1) называется *абсолютно сходящимся*. Если ряд (3.1) сходится, а ряд (3.2) расходится, то ряд (3.1) называется *условно сходящимся*.

Теорема 3.1*. *Если знакопеременный ряд абсолютно сходится, то он сходится.*

Замечание 3.1. *Для установления абсолютной сходимости ряда* (3.1) *к знакоположительному ряду* (3.2) *могут быть применены все известные признаки сходимости знакоположительных рядов. Однако, в случае расходимости ряда* (3.2), *ряд* (3.1) *может сходиться условно.*

Пример 3.1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n\alpha}{n^2}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Решение.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{\sin n\alpha}{n^2}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|\sin n\alpha|}{n^2}$.

Так как при $n\geq 1$: $\dfrac{|\sin n\alpha|}{n^2}\leq\dfrac{1}{n^2}$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ сходится, то будет сходиться и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|\sin n\alpha|}{n^2}$. Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

Ответ: ряд сходится абсолютно.

Пример 3.2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Решение.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left|(-1)^{n-1}\right|}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$. Это гармонический ряд, который является расходящимся. Следовательно, исходный ряд не является абсолютно сходящимся.

Вопрос условной сходимости ряда будет рассмотрен позже.

Теорема 3.2*. *Если знакопеременный ряд сходится абсолютно, то он остается абсолютно сходящимся при любой перестановке его членов. При этом сумма ряда не зависит от порядка его членов.*

3.2. Знакочередующиеся ряды

Определение 3.3. Ряд

$$a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n, \quad (a_n > 0,\ n = 1,\ 2, \ldots) \quad (3.3)$$

называется *знакочередующимся.*

Теорема 3.3 (признак Лейбница). *Если для знакочередующегося ряда* (3.3) *выполнены условия:*

1) $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \ldots;$

2) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0,$

то данный ряд сходится, а его сумма не превышает первого члена ряда.

Остаток r_n *ряда* (3.3) *в этом случае удовлетворяет неравенству*

$$|r_n| \leq a_{n+1}. \quad (3.4)$$

Доказательство.

Рассмотрим частичную сумму ряда (3.3) с четным числом членов

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}).$$

Все разности в скобках, в силу первого условия теоремы, неотрицательны поэтому последовательность частичных сумм (S_{2n}) является неубывающей. Покажем, что (S_{2n}) ограничена сверху. Для этого представим частичную сумму S_{2n} в виде

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}.$$

Отсюда следует, что $S_{2n} \leq a_1$ для любого n, т.е. последовательность (S_{2n}) ограничена.

Таким образом, последовательность (S_{2n}) неубывающая и ограниченная, следовательно, она имеет предел $\lim\limits_{n \to \infty} S_{2n} = S$.

Покажем, что последовательность частичных сумм нечетного числа членов сходится к тому же пределу S. Действительно, $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$. Переходя в этом равенстве к пределу при $n \to \infty$ и используя второе условие теоремы $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0\right)$, получаем

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n} + a_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S + 0 = S.$$

Таким образом, последовательность частичных сумм ряда (3.3) сходится к пределу S. Это означает, что ряд (3.3) сходится.

Заметим, что так как $S_{2n} \le a_1$, то и сумма ряда удовлетворяет неравенству

$$S \le a_1. \tag{3.5}$$

Рассмотрим остаток ряда $r_n = (-1)^n(a_{n+1} - a_{n+2} + \ldots)$, который также представляет собой знакочередующийся ряд, удовлетворяющий условиям теоремы. Следовательно, его сумма на основании оценки (3.5) удовлетворяет неравенству $|r_n| \le a_{n+1}$. ■

Замечание 3.2. *Ряд, удовлетворяющий условиям теоремы* 3.3, *называется рядом Лейбница. Формула* (3.5) *дает оценку остатка ряда Лейбница, т.е. при замене суммы ряда суммой его* n *первых членов ошибка меньше абсолютного значения первого из отбрасываемых членов.*

Пример 3.2 (продолжение).

Исследуем на условную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Так как

1) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots > \frac{1}{n} > \ldots$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ сходится условно.

Пример 3.3. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+2}{3n}$.

Решение.

Данный ряд является знакочередующимся. Проверим выполнение условий признака Лейбница:

1) $1 > \frac{2}{3} > \frac{5}{9} > \frac{1}{2} > \ldots > \frac{n+2}{3n} > \ldots$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{n}}{3}=\dfrac{1}{3}$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{3n}\neq 0$.

Таким образом, нарушено второе условие признака Лейбница. Следовательно, ряд расходится.

Ответ: ряд расходится.

Пример 3.4. Вычислить сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{4^n}$ с точностью до 0,01.

Решение.

Данный ряд является рядом Лейбница, так как

$$1)\ \frac{1}{4}>\frac{1}{4^2}>\frac{1}{4^3}>...>\frac{1}{4^n}>...;\ \ 2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4^n}=0.$$

Следовательно, ряд сходится.

Чтобы вычислить сумму ряда с указанной точностью, необходимо найти такой член ряда, абсолютная величина которого меньше 0,01, т.е. $\dfrac{1}{4^n}<0{,}01$ или $4^n>100$.

При $n=1$: $4<100$;

$n=2$: $16<100$;

$n=3$: $64<100$;

$n=4$: $256>100$.

Следовательно, для обеспечения заданной точности вычислений нужно взять три первых члена ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4^n}\approx\frac{1}{4}-\frac{1}{16}+\frac{1}{64}=0{,}20.$$

Ответ: 0,20.

Вопросы для самоконтроля

1. В каком случае знакопеременный ряд сходится абсолютно?
2. Каким образом выполняется исследование знакопеременного ряда на абсолютную сходимость?
3. Влияет ли на сходимость и сумму абсолютно сходящегося ряда перестановка его членов?
4. Какой ряд называется знакочередующимся?

5. В каком случае знакочередующийся ряд будет рядом Лейбница?
6. Как можно оценить сумму и остаток ряда Лейбница?
7. При решении задач какого плана используется оценка остатка ряда Лейбница первым отбрасываемым членом ряда?

4. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

4.1. Основные понятия. Радиус и интервал сходимости

Определение 4.1. *Степенным рядом* называют ряд вида

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{4.1}$$

или

$$c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots + c_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n, \tag{4.2}$$

где c_0, c_1, c_2,... – действительные числа, называемые *коэффициентами ряда.*

Ряд (4.1) называется также рядом по степеням x, а ряд (4.2) – рядом по степеням $(x - x_0)$. Заметим, что ряд (4.2) сводится к ряду вида (4.1) заменой переменной по формуле $x - x_0 = t$.

При каждом конкретном значении $x_0 \in \mathbb{R}$ степенной ряд (4.1) превращается в числовой ряд, который может оказаться сходящимся или расходящимся. Если полученный числовой ряд сходится, то говорят, что степенной ряд (4.1) сходится в точке x_0.

Степенной ряд (4.1) всегда сходится, по крайней мере, в одной точке $x_0 = 0$.

Определение 4.2. Совокупность значений $x \in \mathbb{R}$, при которых степенной ряд (4.1) сходится, называется *областью сходимости* этого *ряда.*

Определение 4.3. Ряд (4.1) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|c_n x^n\right|$.

Теорема 4.1 (Абеля). *Если степенной ряд* (4.1) *сходится при* $x = x_0$ $(x_0 \neq 0)$, *то он сходится абсолютно при всех* x, *удовлетворяющих условию*

$|x|<|x_0|$. *Если ряд расходится при $x=x_1$, то он расходится при всех x, удовлетворяющих условию $|x|>|x_1|$.*

Доказательство.

1) По условию теоремы числовой ряд

$$c_0+c_1x_0+c_2x_0^2+...+c_nx_0^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx_0^n$$

сходится, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}c_nx_0^n=0$. Следовательно, последовательность $\left(c_nx_0^n\right)$ ограничена, т.е. существует число $M>0$ такое, что для всех n выполняется неравенство

$$\left|c_nx_0^n\right|<M. \tag{4.3}$$

Запишем ряд (4.1) в виде

$$c_0+c_1x_0\frac{x}{x_0}+c_2x_0^2\left(\frac{x}{x_0}\right)^2+...+c_nx_0^n\left(\frac{x}{x_0}\right)^n+...$$

и рассмотрим ряд из абсолютных величин его членов

$$|c_0|+|c_1x_0|\cdot\left|\frac{x}{x_0}\right|+\left|c_2x_0^2\right|\cdot\left|\frac{x}{x_0}\right|^2+...+\left|c_nx_0^n\right|\cdot\left|\frac{x}{x_0}\right|^n+... \tag{4.4}$$

Члены ряда (4.4), согласно неравенству (4.3), меньше соответствующих членов ряда

$$M+M\cdot\left|\frac{x}{x_0}\right|+M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2+...+M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n+... \tag{4.5}$$

При $|x|<|x_0|$ ряд (4.5) представляет собой геометрический ряд со знаменателем $q=\left|\frac{x}{x_0}\right|<1$. Следовательно, он сходится. На основании признака сравнения (теорема 2.1) ряд (4.4) также сходится, а это означает, что при $|x|<|x_0|$ ряд (4.1) сходится абсолютно.

2) Пусть ряд (4.1) расходится в точке x_1. Покажем, что он расходится для всех x, удовлетворяющих условию $|x|>|x_1|$. Предположим обратное, т.е. допустим, что при некотором значении x, таком, что $|x|>|x_1|$, ряд (4.1) сходится. Тогда, по только что доказанному, он должен сходиться и в точке x_1, так как $|x_1|<|x|$, что противоречит условию. Таким образом, для всех x, таких, что $|x|>|x_1|$, ряд (4.1) расходится. ■

Определение 4.4. *Радиусом сходимости* степенного ряда (4.1) называется неотрицательное число R, такое, что при $|x| < R$ ряд сходится, а при $|x| > R$ – расходится. *Интервалом сходимости* называется интервал $(-R, R)$.

Для выражения радиуса сходимости степенного ряда (4.1) через его коэффициенты можно использовать признак Д'Аламбера или признак Коши.

Теорема 4.2*. *Если существует конечный предел* $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| \neq 0$, *то радиус сходимости ряда* (4.1) *равен*

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|. \tag{4.6}$$

Теорема 4.3*. *Если существует конечный предел* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} \neq 0$, *то радиус сходимости ряда* (4.1) *равен*

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}. \tag{4.7}$$

Замечание 4.1. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = 0$ *или* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = 0$, *то можно доказать, что ряд* (4.1) *сходится на всей числовой прямой, т.е.* $R = \infty$. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \infty$ *или* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = \infty$, *то ряд сходится только при* $x = 0$, *т.е.* $R = 0$.

Замечание 4.2. *Формулами* (4.6) *и* (4.7) *выражается и радиус сходимости ряда* (4.2), *интервалом сходимости этого ряда является интервал* $(x_0 - R,\ x_0 + R)$.

Таким образом, всякий степенной ряд имеет свой радиус сходимости R и свой интервал сходимости $(-R, R)$. При $x = \pm R$ ряд может либо сходиться, либо расходиться. Для каждого ряда и каждого значения $x = -R$ и $x = R$ это вопрос решается индивидуально. Следовательно, *областью сходимости* степенного ряда (4.1) является его интервал сходимости с возможно присоединенными одной или двумя точками, определяющими концы интервала.

Пример 4.1. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

Решение.

На основании формулы (4.6) имеем:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n!}:\frac{1}{(n+1)!}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

Это означает, что ряд сходится при всех значениях переменной x, т.е. в интервале $(-\infty,+\infty)$.

Ответ: $(-\infty,+\infty)$.

Пример 4.2. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(nx)^n$.

Решение.

На основании формулы (4.6) имеем:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot\frac{1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\cdot\frac{1}{n+1}=\frac{1}{e}\cdot 0=0.$$

На основании формулы (4.7) имеем: $R=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^n}}=0$.

Это означает, что ряд сходится в единственной точке $x=0$.

Ответ: $\{0\}$.

Пример 4.3. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\cdot 3^n x^n$.

Решение.

На основании формулы (4.6) имеем:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 3^n}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{1}{3},$$

т.е. ряд сходится в интервале $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости. При $x=\frac{1}{3}$ получаем расходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$ ($\lim\limits_{n\to\infty}n=\infty$); при $x=-\frac{1}{3}$ получаем расходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$.

Таким образом, область сходимости ряда есть интервал $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Ответ: $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Пример 4.4. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n(5^n+1)}$.

Решение.

На основании формулы (4.6) имеем:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n(5^n+1)}:\frac{1}{(n+1)(5^{n+1}+1)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(5^{n+1}+1)}{n(5^n+1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{5^{n+1}+1}{5^n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{5+5^{-n}}{1+5^{-n}}=1\cdot5=5.$$

Интервал сходимости определяется формулой $(x_0-R;\, x_0+R)$, т.к. $x_0=-2$, то имеем $(-7;3)$. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости в точках $x=-7$ и $x=3$.

При $x=-7$ получим числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^n}{n(5^n+1)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(1+5^{-n})}$. Данный ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница, поэтому он сходится.

При $x=3$ получим числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n(5^n+1)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(1+5^{-n})}$. Данный ряд расходится, т.к. каждый его член больше соответствующего члена расходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$.

Следовательно, область сходимости ряда представляет собой промежуток $[-7;3)$.

Ответ: $[-7;3)$.

Пример 4.5. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{3^n}$.

Решение.

На основании формулы (4.7) имеем: $R=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{3^n}\right|}}=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{3^n}}}=3.$

Следовательно, интервал сходимости данного ряда $(-3;3)$. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости в точках $x=-3$ и $x=3$.

При $x=-3$ получим числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n-1}\dfrac{3^n}{3^n}=-1\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}1$. Этот ряд расходится, так как предел общего члена ряда не равен нулю.

При $x=3$ получим числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{3^n}{3^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$. Этот ряд расходится, так как предел общего члена ряда не равен нулю.

Следовательно, область сходимости ряда представляет собой интервал $(-3;3)$.

Ответ: $(-3;3)$.

4.2. Свойства степенных рядов

Пусть функция $f(x)$ является суммой степенного ряда

$$f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n+\ldots, \tag{4.8}$$

интервал сходимости которого $(-R,R)$. Тогда функция $f(x)$ является непрерывной на любом отрезке $[\alpha,\beta]$ целиком принадлежащем интервалу сходимости.

Теорема 4.4*. *Если функция $f(x)$ на интервале $(-R,R)$ является суммой ряда (4.8), то она дифференцируема на этом интервале и ее производная $f'(x)$ находится почленным дифференцированием ряда (4.8), т.е.*

$$f'(x)=c_1+2c_2x+\ldots+nc_nx^{n-1}+\ldots,$$

при этом радиус сходимости полученного ряда равен R.

Теорема 4.5*. *Степенной ряд (4.8) можно почленно интегрировать на любом отрезке, целиком принадлежащем интервалу сходимости, при* *этом полученный степенной ряд имеет тот же радиус сходимости, что и исходный ряд.*

Следовательно, если $\alpha, \beta \in (-R, R)$, то

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta c_0\,dx + \int_\alpha^\beta c_1\,x\,dx + \int_\alpha^\beta c_2\,x^2 dx + \ldots + \int_\alpha^\beta c_n\,x^n dx + \ldots$$

Замечание 4.3. *При дифференцировании и интегрировании степенного ряда внутри интервала сходимости радиус сходимости R не меняется, однако поведение ряда на концах интервала $(-R, R)$ может измениться.*

4.3. Ряды Тейлора и Маклорена

Пусть функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 имеет производные любых порядков.

Определение 4.5. Степенной ряд

$$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots = \tag{4.9}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$ в точке x_0. Если $x_0 = 0$, то ряд

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \tag{4.10}$$

называется *рядом Маклорена.*

Ряд (4.9), составленный для функции $f(x)$, как всякий степенной ряд, будет иметь интервал сходимости и сумму, причем сумма может быть и не равной $f(x)$.

Запишем формулу Тейлора для функции $f(x)$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x), \tag{4.11}$$

которая справедлива при любом $n = 1, 2, \ldots$ В этой формуле $r_n(x)$ обозначает остаточный член формулы Тейлора.

Замечание 4.4. *Известны различные представления остаточного члена формулы Тейлора (в интегральной форме, в форме Коши, в форме Лагранжа). В частности, остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа имеет вид:*

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad (\xi = x_0 + \Theta(x-x_0), 0 < \Theta < 1).$$

Полагая $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ перепишем формулу (4.11) в виде:

$$f(x) = S_n(x) + r_n(x), \tag{4.12}$$

где $S_n(x)$ – n-ая частичная сумма ряда Тейлора, называется также многочленом Тейлора.

Таким образом, для того, чтобы функция $f(x)$ равнялась сумме своего ряда Тейлора в некоторой окрестности точки x_0, необходимо и достаточно, чтобы для всех x из этой окрестности

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0. \tag{4.13}$$

Если это имеет место, то из формулы (4.12) следует, что $r_n(x)$ является также и остатком ряда Тейлора (4.9).

Теорема 4.6 (достаточное условие разложения функции в ряд Тейлора). *Если производные любого порядка функции $f(x)$ ограничены в окрестности $U(x_0)$ точки x_0 одним и тем же числом C, т.е.*

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \le C \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{4.14}$$

то ряд Тейлора этой функции сходится к $f(x)$ для любого x из этой окрестности.

Доказательство.

Для остаточного члена $r_n(x)$ формулы Тейлора в форме Лагранжа, учитывая неравенство (4.14), имеем:

$$r_n(x) = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right| = \left|f^{(n+1)}(\xi)\right| \cdot \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \le C\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{4.15}$$

При фиксированных x выражение $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$.

Поэтому из формулы (4.15) получаем $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$, а это означает, что ряд Тейлора функции $f(x)$ сходится для $\forall x\in U(x_0)$. ■

Теорема 4.7 (единственность разложения). *Если функция $f(x)$ разложима в ряд Тейлора, то это разложение единственно.*

Доказательство.

Пусть существуют два различных разложения функции $f(x)$ в ряд Тейлора в интервале сходимости $(x_0-R,\ x_0+R)=U(x_0)$, где R – радиус сходимости рядов

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n, \quad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n(x-x_0)^n.$$

Тогда разность этих рядов представляет собой функцию, тождественно равную нулю для всех $x\in U(x_0)$, т.е.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(c_n-\tilde{c}_n)(x-x_0)^n\equiv 0, \qquad \forall x\in U(x_0). \tag{4.16}$$

При $x=x_0$, имеем $c_0-\tilde{c}_0=0$, т.е. $c_0=\tilde{c}_0$.

Дифференцируя равенство (4.16) внутри интервала сходимости $U(x_0)$, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(c_n-\tilde{c}_n)(x-x_0)^{n-1}\equiv 0.$$

При $x=x_0$, получаем $c_1=\tilde{c}_1$.

Продолжив этот процесс, получим $c_n=\tilde{c}_n$ $(n=0,1,2,\ldots)$, т.е. разложение $f(x)$ в ряд Тейлора единственно. ■

4.4. Разложение в ряд Маклорена некоторых элементарных функций

1. Получим разложение в ряд Маклорена функции $f(x)=e^x$. Имеем:

$$f(x)=f'(x)=f''(x)=\ldots=f^{(n)}(x)=e^x;$$

$$f(0)=f'(0)=\ldots=f^{(n)}(0)=1.$$

По формуле (4.10) составим ряд Маклорена:

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \tag{4.17}$$

Найдем радиус сходимости ряда (4.17):

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=+\infty.$$

Ряд (4.17) сходится к функции e^x при любом $x\in(-\infty,+\infty)$, так как в любом отрезке $[-a,a]$ функция $f(x)=e^x$ и ее производные ограничены одним и тем же числом, например e^a.

Таким образом, при любом x имеет место разложение

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad x\in(-\infty;+\infty).$$

2. $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!},\ x\in(-\infty,+\infty).$

3. $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!},\ x\in(-\infty,+\infty).$

4. $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots+$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n,\quad x\in(-1,1).$$

Заметим, что если $\alpha=n$ – целое положительное число, то имеем бином Ньютона:

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}x^m+\ldots+x^n.$$

5. $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n},\quad x\in(-1,1].$

4.5. Использование степенных рядов в приближенных вычислениях значений функций и интегралов

Степенные ряды имеют разнообразные приложения. С их помощью вычисляются с заданной степенью точности значения функций, определенных интегралов, которые или не выражаются через элементарные функции или слишком сложны для вычислений.

Пример 4.6. Вычислить $\ln 1{,}1$ с точностью до $0{,}0001$.

Решение.

Воспользуемся разложением функции $\ln(1+x)$ в ряд Маклорена, приняв $x=0{,}1$:

$$\ln 1{,}1=\ln(1+0{,}1)=0{,}1-\frac{0{,}1^2}{2}+\frac{0{,}1^3}{3}-\frac{0{,}1^4}{4}+\ldots$$

Получен числовой знакочередующийся ряд, его члены монотонно убывают и общий член стремится к нулю, поэтому по признаку Лейбница остаток ряда не превосходит первого из отброшенных членов. Чтобы вычислить сумму ряда с указанной точностью, необходимо найти такой член ряда, абсолютная величина которого меньше $0{,}0001$, т.е. $\frac{0{,}1^n}{n}<0{,}0001$.

При $n=1$: $0{,}1>0{,}0001$;

при $n=2$: $\frac{0{,}1^2}{2}=0{,}005>0{,}0001$;

при $n=3$: $\frac{0{,}1^3}{3}=0{,}000(3)>0{,}0001$;

при $n=4$: $\frac{0{,}1^4}{4}=0{,}000025<0{,}0001$.

Таким образом, для достижения заданной точности достаточно взять три первых члена ряда. Получаем

$$\ln(1+0{,}1)\approx 0{,}1-\frac{0{,}1^2}{2}+\frac{0{,}1^3}{3}=0{,}1-0{,}005+0{,}000(3)\approx 0{,}0953.$$

Ответ: 0,0953.

Пример 4.7. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2}\,dx$ с точностью до $0{,}001$.

Решение.

Первообразная от функции e^{-x^2} не является элементарной функцией, поэтому применить формулу Ньютона-Лейбница для вычисления интеграла нельзя. Разложим подынтегральную функцию в ряд, заменяя в разложении функции e^x (4.17) x на $-x^2$:

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots,\ x\in(-\infty;+\infty).$$

Интегрируя обе части этого равенства в пределах от 0 до $\frac{1}{3}$, получим:

$$\int_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2}dx=\int_0^{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots\right)dx=\left(\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1!\cdot 3}+\frac{x^5}{2!\cdot 5}-\frac{x^7}{3!\cdot 7}+\ldots\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{3}}=$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{2!\cdot 5\cdot 3^5}-\frac{1}{3!\cdot 7\cdot 3^7}+\ldots$$

Таким образом, интеграл $\int_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2}dx$ равен сумме найденного знакочередующегося ряда, для которого выполняются условия признака Лейбница. Следовательно, остаток ряда, полученного в результате почленного интегрирования, не превосходит первого из отброшенных членов. Чтобы вычислить интеграл с указанной точностью, необходимо найти такой член ряда, абсолютная величина которого меньше 0,001, т.е.

$$\frac{1}{n!\cdot(2n-1)\cdot 3^{2n-1}}<0{,}001.$$

При $n=1$: $\frac{1}{3}>\frac{1}{1000}$;

при $n=2$: $\frac{1}{81}>\frac{1}{1000}$;

при $n=3$: $\frac{1}{2430}<\frac{1}{1000}$.

Таким образом, для достижения заданной точности достаточно взять два первых члена ряда. Получаем $\int_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2}dx\approx\frac{1}{3}-\frac{1}{81}=\frac{26}{81}\approx 0{,}321$.

Ответ: 0,321.

Пример 4.8. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ с точностью до 0,0001.

Решение.

Разложим подынтегральную функцию в ряд. Воспользуемся разложением функции $\sin x$ в ряд Маклорена, получаем:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots,$$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots,$$

причем последний ряд сходится при всех значениях $x \in (-\infty; +\infty)$. Интегрируя почленно, получим:

$$\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}dx = \int\limits_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots\right)dx = \left(x - \frac{x^3}{3!\cdot 3} + \frac{x^5}{5!\cdot 5} - \frac{x^7}{7!\cdot 7} + \ldots\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{3!\cdot 3} + \frac{1}{5!\cdot 5} - \frac{1}{7!\cdot 7} + \ldots$$

Таким образом, интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ равен сумме найденного знакочередующегося ряда, для которого выполняются условия признака Лейбница. Следовательно, остаток ряда, полученного в результате почленного интегрирования, не превосходит первого из отброшенных членов. Чтобы вычислить интеграл с указанной точностью, необходимо найти такой член ряда, абсолютная величина которого меньше 0,0001, т.е.

$$\frac{1}{(2n-1)!\cdot(2n-1)} < \frac{1}{10000}.$$

При $n=1$: $1 > \frac{1}{10000}$;

при $n=2$: $\frac{1}{18} > \frac{1}{10000}$;

при $n=3$: $\frac{1}{35280} < \frac{1}{10000}$.

Таким образом, для достижения заданной точности достаточно взять два первых члена ряда. Получаем

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx \approx 1-\frac{1}{3!\cdot 3}=1-\frac{1}{18}=\frac{17}{18}=0{,}9444.$$

Ответ: 0,9444.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Какой ряд называют рядом по степеням x; по степеням $(x-x_0)$?
2. В какой точке всегда сходится ряд по степеням x; по степеням $(x-x_0)$?
3. Как называют совокупность значений $x \in \mathbb{R}$, при которых степенной ряд сходится?
4. Что называют радиусом сходимости степенного ряда?
5. Как определяется радиус сходимости степенного ряда?
6. Как соотносятся интервал сходимости и область сходимости степенного ряда?
7. В каком случае можно выполнять почленное дифференцирование и интегрирование степенных рядов?
8. Каким образом отражается на области сходимости ряда его почленное дифференцирование или интегрирование?
9. Какой ряд называется рядом Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0?
10. При каком значении x_0 ряд Тейлора будет рядом Маклорена?
11. В чем состоит достаточное условие разложения функции в ряд Тейлора?
12. Единственно ли разложение функции в ряд Тейлора?
13. Какой вид имеет разложение в ряд Маклорена для функции e^x; $\sin x$; $\cos x$; $(1+x)^{\alpha}$; $\ln(1+x)$?
14. Получите разложение в ряд Маклорена функций e^{2x}, $\sin\frac{x}{3}$, $\cos x^2$; укажите области сходимости новых рядов.
15. Каким образом можно использовать степенные ряды в приближенных вычислениях значений функций и интегралов? Какой признак сходимости числовых рядов используется в решении задач такого характера для обеспечения заданной точности вычислений?

Вопросы к экзамену

1. Числовой ряд и его сходимость. Свойства сходящихся рядов.
2. Числовые ряды с положительными членами. Признаки сравнения рядов.
3. Числовые ряды с положительными членами. Признаки сходимости Д`Аламбера и Коши.
4. Числовые ряды с положительными членами. Интегральный признак сходимости.
5. Знакопеременные числовые ряды. Абсолютная и условная сходимости. Признаки сравнения и сходимости знакоположительных рядов.
6. Знакочередующиеся ряды. Признак сходимости Лейбница. Оценка остатка знакочередующегося ряда.
7. Степенные ряды. Сходимость. Теорема Абеля.
8. Радиус и интервал сходимости степенного ряда. Свойства степенных рядов.
9. Ряды Тейлора и Маклорена. Достаточные условия и единственность разложения функции в ряд Тейлора. Основные разложения.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ

1. Область определения и линии уровня ФНП. Предел и непрерывность ФНП

Задания для решения в аудитории

Найти область определения ФНП и сделать чертеж:

1.1. $z=\dfrac{1}{y-3x}$.

1.2. $z=\sqrt{y^2-2x+4}$.

1.3. $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\sqrt{x-y}$.

1.4. $z=\arccos(2-x^2-y^2)$.

1.5. $z=\dfrac{1}{x^2-y^2}$.

1.6. $z=\ln\cos x+\ln\sin y$.

1.7. $z=\arccos\dfrac{x}{x+y}$.

1.8. $z=\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin 2y}$.

Найти линии уровня функции и сделать чертеж:

1.9. $z=y-x$.

1.10. $z=\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

1.11. $z=\dfrac{\sqrt{x}}{y}$.

1.12. $z=\arcsin\dfrac{y}{x}$.

Найти а) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} z$; б) $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} z$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} z$, если:

1.13. $z=\dfrac{x^3-y}{x^3+y}$. Ответ: а) 1; б) -1; в) не существует.

1.14. $z=\dfrac{y^2-x^2}{y^2+x^2}$. Ответ: а) -1; б) 1; в) не существует.

Найти предел:

1.15. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{3-\sqrt{xy+9}}$. Ответ: -6.

1.16. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$. Ответ: e.

1.17. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} (x^3+y^3)\sin\dfrac{1}{x^3+y^3}$. Ответ: 1.

1.18. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x}{x+y}$. Ответ: не существует.

Найти точки разрыва функции двух переменных:

1.19. $z=\dfrac{1}{(x-1)^2+(y+1)^2}$.

1.20. $z=\dfrac{1}{\sin x\cdot\sin y}$.

Домашнее задание

Найти область определения ФНП и сделать чертеж:

1.21. $z=\ln(x+y)$.

1.22. $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-16}}$.

1.23. $z=\sqrt{xy}$.

1.24. $z=y\sqrt{\cos x}$.

1.25. $z=y+\sqrt{x}$.

Найти линии уровня функции и сделать чертеж:

1.26. $z=\sqrt{y-x}$.

1.27. $z=\ln(1-x^2-y^2)$.

1.28. $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

Найти предел:

1.29. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{xy}$. Ответ: 1.

1.30. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(xy)}{y}$. Ответ: 0.

Найти точки разрыва функции двух переменных:

1.31. $z=\dfrac{x^3}{x^2+y^2}$. Ответ: (0;0).

1.32. $z=\dfrac{1}{\sin^2 x+\sin^2 y}$. Ответ: $(\pi k;\pi n)$ $k,n\in\mathbb{Z}$.

2. Частные производные ФНП

Задания для решения в аудитории

Найти частные производные 1-го порядка ФНП:

2.1. $z=x^3+6xy^2-4y^3-2xy$.

Ответ: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2+6y^2-2y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=12xy-12y^2-2x$.

2.2. $z=\dfrac{y-2x}{x+2y}$. Ответ: $\dfrac{\partial z}{\partial z}=-\dfrac{5y}{(x+2y)^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{5x}{(x+2y)^2}$.

2.3. $z=\dfrac{x}{y}$. Ответ: $\dfrac{\partial z}{\partial z}=\dfrac{1}{y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x}{y^2}$.

2.4. $z=y^x$. Ответ: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y^x\ln y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy^{x-1}$.

2.5. $z=x^2\cos(x+3y)$. Ответ: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x\cos(x+3y)-x^2\sin(x+3y)$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-3x^2\sin(x+3y).$$

2.6. $z=\ln(3x^2-y^4)$. Ответ: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{6x}{3x^2-y^4}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{4y^3}{3x^2-y^4}$.

2.7. $z = \sin\sqrt{x - y^3}$.

Ответ: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\cos\sqrt{x - y^3}}{2\sqrt{x - y^3}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{3y^2\cos\sqrt{x - y^3}}{2\sqrt{x - y^3}}$.

2.8. $z = \arcsin(2x^3 y)$. Ответ: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{6x^2 y}{\sqrt{1 - 4x^6 y^2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2x^3}{\sqrt{1 - 4x^6 y^2}}$.

2.9. $z = e^{2x^2 - y^5}$. Ответ: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 4xe^{2x^2 - y^5}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -5y^4 e^{2x^2 - y^5}$.

2.10. $u = \left(\dfrac{y}{x}\right)^z$.

Ответ: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{z}{x}\left(\dfrac{y}{x}\right)^z$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{z}{y}\left(\dfrac{y}{x}\right)^z$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = \left(\dfrac{y}{x}\right)^z \ln\dfrac{y}{x}$.

Найти частные производные 2-го порядка ФНП:

2.11. $z = x^4 - 5x^2 y - 2y^3$.

Ответ: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 10y$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -10x$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -12y$.

2.12. $z = \sin y \cdot \ln x + e^x \cdot \ln y$.

Ответ: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\dfrac{\sin y}{x^2} + e^x \ln y$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\cos y}{x} + \dfrac{e^x}{y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\sin y \cdot \ln x - \dfrac{e^x}{y^2}$.

2.13. $z = \sqrt{2xy + y^2}$.

Ответ: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\dfrac{y^2}{\sqrt{(2xy + y^2)^3}}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{xy}{\sqrt{(2xy + y^2)^3}}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{x^2}{\sqrt{(2xy + y^2)^3}}$.

2.14. $z = \sin(x^2 + y^3)$.

Ответ: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\cos(x^2 + y^3) - 4x^2 \sin(x^2 + y^3)$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -6xy^2 \sin(x^2 + y^3), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y\cos(x^2 + y^3) - 9y^4 \sin(x^2 + y^3).$$

2.15. Показать, что $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial y} + x + z = 0$, если

$$z = 4e^{-2y} + (2x + 4y - 3) \cdot e^{-y} - x - 1.$$

Домашнее задание

Найти частные производные 1-го порядка ФНП:

2.16. $z = x^5 + 5x^2y + 4y^3$. Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x} = 5x^4 + 10xy$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 5x^2 + 12y^2$.

2.17. $z = xy + \frac{x}{y}$. Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x} = y + \frac{1}{y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x - \frac{x}{y^2}$.

2.18. $z = \frac{\cos y^2}{x}$. Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\cos y^2}{x^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y \cdot \sin y^2}{x}$.

2.19. $z = \ln(x^2 + y^2)$. Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$.

2.20. $z = xe^{-xy}$. Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x} = (1 - xy)e^{-xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -x^2e^{-xy}$.

Найти частные производные 2-го порядка ФНП:

2.21. $z = x^5 + y^5 - 5x^3y^3$.

Ответ: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 20x^3 - 30xy^3$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -45x^2y^2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 20y^3 - 30x^3y$.

2.22. $z = \cos(2x + y^4)$.

Ответ: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -4\cos(2x + y^4)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -8y^3 \cos(2x + y^4)$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -12y^2 \sin(2x + y^4) - 16y^6 \cos(2x + y^4).$$

2.23. $z = y \cdot \ln x + e^x \cdot \sin y^2$.

Ответ: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\dfrac{y}{x^2} + e^x \sin y^2$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{1}{x} + 2ye^x \cos y^2$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2e^x \cos y^2 - 4y^2 e^x \sin y^2$.

2.24. $z = e^{xy^3}$.

Ответ: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^6 e^{xy^3}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (3y^2 + 3xy^5) \cdot e^{xy^3}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (6xy + 9x^2 y^4) \cdot e^{xy^3}$.

2.25. Показать, что функция $z = e^{\frac{x}{y}}$ удовлетворяет уравнению

$$y \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}.$$

3. Дифференциал и его использование в приближенных вычислениях. Дифференцирование сложных и неявно заданных функций

Задания для решения в аудитории

Найти дифференциал функции:

3.1. $z = e^{xy}$. Ответ: $dz = e^{xy} y dx + e^{xy} x dy$

3.2. $z = \ln \cos \dfrac{x}{y}$. Ответ: $dz = \dfrac{1}{y^2} \operatorname{tg} \dfrac{x}{y} \cdot (-y dx + x dy)$.

3.3. Найти полный дифференциал функции $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$ при $x = 2$, $y = 3$, $dx = 0,1$, $dy = -0,2$. Ответ: $-\dfrac{7}{130}$.

Найти дифференциалы первого и второго порядка функции:

3.4. $z = x^3 + 3x^2y - y^3$. Ответ: $dz = 3x(x+2y)dx + 3(x^2 - y^2)dy$,

$$d^2z = 6((x+y)dx^2 + 2xdxdy - ydy^2).$$

3.5. $z = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$. Ответ: $dz = \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)(-ydx + xdy)$,

$$d^2z = 2\left(\frac{y}{x^3}dx^2 + \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}\right)dxdy - \frac{x}{y^3}dy^2\right).$$

3.6. $z = x\ln\frac{y}{x}$. Ответ: $dz = \left(\ln\frac{y}{x} - 1\right)dx + \frac{x}{y}dy$,

$$d^2z = -\frac{1}{x}dx^2 + \frac{2}{y}dxdy - \frac{x}{y^2}dy^2.$$

Вычислить приближенно:

3.7. $(2{,}01)^{3,03}$. Ответ: 8,29.

3.8. $\sqrt{(1{,}02)^3 + (1{,}97)^3}$. Ответ: 2,95.

3.9. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = e^{2x-3y}$, где $x = \mathrm{tg}t$, $y = t^2 - t$.

Ответ: $\frac{dz}{dz} = e^{2x-3y}\left(\frac{2}{\cos^2 t} - 3(2t-1)\right)$.

3.10. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = \mathrm{arctg}\frac{y}{x}$, где $x = e^{2t} + 1$, $y = e^{2t} - 1$.

Ответ: $\frac{dz}{dz} = 2e^{2t}\frac{x-y}{x^2+y^2}$, где $x = e^{2t} + 1$, $y = e^{2t} - 1$.

3.11. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$, если $z = \ln(e^x + e^y)$, где $y = \frac{1}{3}x^3 + x$.

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x + e^y}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{e^x + e^y(x^2+1)}{e^x + e^y}$, где $y = \frac{1}{3}x^3 + x$.

Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z=f(u,v)$, где:

3.12. $u=\frac{2y}{x+y}$, $v=x^2-3y$.

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\left(-\frac{2y}{(x+y)^2}\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot 2x$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{2x}{(x+y)^2}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot(-3)$.

3.13. $u=\sin\frac{x}{y}$, $v=\sqrt{\frac{x}{y}}$. Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\left(\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{1}{2\sqrt{xy}}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\left(-\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y^3}}\right).$$

3.14. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $(3;2;1)$ если $xy+xz^2-\frac{y}{z}=0$.

Ответ: $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(3;2;1)}=-\frac{3}{8}$, $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(3;2;1)}=-\frac{1}{4}$.

Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если:

3.15. $z\ln(x+z)-\frac{xy}{z}=0$.

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz(x+z)-z^3}{z^3+2xy(x+z)}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz(x+z)}{z^3+2xy(x+z)}$.

3.16. $yz=\operatorname{arctg}(xz)$.

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{y(1+x^2z^2)-x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{z(1+x^2z^2)}{y(1+x^2z^2)-x}$.

Домашнее задание

Найти дифференциал функции:

3.17. $z=yx^y$. Ответ: $dz=y^2x^{y-1}dx+x^y(1+y\ln x)dy$.

3.18. $z=e^{y^2-xy}$. Ответ: $dz=e^{y^2-xy}(-ydx+(2y-x)dy)$.

Найти дифференциалы первого и второго порядка функции:

3.19. $z=5xy^4+2x^2y^7$.

Ответ: $dz=(5y^4+4xy^7)dx+(20xy^3+14x^2y^6)dy$,

$$d^2z=4y^7dx^2+2(20y^3+28xy^6)dxdy+(60xy^2+84x^2y^5)dy^2.$$

3.20. $z=\dfrac{y}{x^2}-\dfrac{x^2}{y}$.

Ответ: $dz=-2\left(\dfrac{y}{x^3}+\dfrac{x}{y}\right)dx+\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{x^2}{y^2}\right)dy$,

$$d^2z=2\left(\frac{3y}{x^4}-\frac{1}{y}\right)dx^2+4\left(-\frac{1}{x^3}+\frac{x}{y^2}\right)dxdy-\frac{2x^2}{y^3}dy^2.$$

3.21. Вычислить приближенно $\sqrt{(2,03)^2+5e^{0,02}}$. Ответ: 3,037.

3.22. Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если $z=x^y$, где $x=\ln t$, $y=\sin t$.

Ответ: $\dfrac{dz}{dz}=x^y\left(\dfrac{y}{xt}+\ln x\cdot\cos t\right)$, где $x=\ln t$, $y=\sin t$.

Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z=f(u,v)$, где:

3.23. $u=\cos(xy)$, $v=x^5-7y$.

Ответ: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot(-y\sin(xy))+\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot 5x^4$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot(-x\sin(xy))+\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot(-7)$.

3.24. $u=\ln(x^2-y^2)$, $v=xy^2$.

Ответ: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{2x}{x^2-y^2}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot y^2$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\left(-\dfrac{2y}{x^2-y^2}\right)+\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot 2xy$.

Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если:

3.25. $z^3 - 4xz + y^2 - 4 = 0.$ Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{4z}{4x - 3z^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{4x - 3z^2}$.

3.26. $xz - e^{\frac{z}{y}} + x^3 + y^3 = 0.$ Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y(z + 3x^2)}{e^{z/y} - xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3y^4 + ze^{z/y}}{y\left(e^{z/y} - xy\right)}$.

4. Производная ФНП по направлению. Градиент. Локальный экстремум функции двух переменных

Задания для решения в аудитории

4.1. Найти производную функции $z = 3x^2 + 5y^2$ по направлению вектора $\bar{s} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ в точке $M(1;1)$. Ответ: $2\sqrt{2}$.

4.2. Найти производную функции $u = x^3 + 2xy^2 + 3yz^2$ по направлению вектора $\vec{s} = \left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$ в точке $M(3;3;1)$. Ответ: 62.

4.3. Найти производную функции $u = xy^2z^3$ в точке $M_0(3;2;1)$ по направлению вектора $\overrightarrow{M_0M}$, если $M(7;5;1)$. Ответ: 10,4.

Найти градиент функции в точке M, если:

4.4. $z = y \cdot x^y$, $M(2;1)$. Ответ: $(1; 2(1 + \ln 2))$.

4.5. $u = \operatorname{arctg}\frac{xy}{z^2}$, $M(0;1;2)$. Ответ: $\left(\frac{1}{4}; 0; 0\right)$.

4.6. Найти угол между градиентами функции $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ в точках $A(1;2;2)$ и $B(-3;1;0)$. Ответ: $\arccos\left(-\frac{8}{9}\right)$.

4.7. Найти скорость и направление наибыстрейшего возрастания функции $u = xyz$ в точке $M_0(1;2;2)$. Ответ: $2\sqrt{6}$, $\left(\frac{2}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

Исследовать на экстремум функцию:

4.8. $z = x^2 + xy + y^2 - 12x - 3y$. Ответ: $z_{\min}(7;-2) = -39$.

4.9. $z = 3(x^2 + y^2) - x^3 + 4y$. Ответ: $z_{\min}\left(0;-\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3}$.

4.10. $z = 81\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) - (x^2 + xy + y^2)$. Ответ: $z_{\max}(-3;-3) = -81$.

4.11. Некоторая фирма производит два вида товаров T_1 и T_2. Рыночная цена товаров соответственно составляет 800 и 600 денежных единиц. Затраты C на производство товаров описываются функцией $C = 4q_1^2 + 4q_1q_2 + 2q_2^2$, где q_1 и q_2 объемы выпуска (ед.) товаров T_1 и T_2. При каких объемах выпуска прибыль будет максимальной.

Ответ: максимальная прибыль в 50000 денежных единиц будет достигнута при выпуске 50 ед. товара T_1 и 100 ед. товара T_2.

Домашнее задание

4.12. Найти производную функции $z = x^2 + \frac{1}{2}y^2$ в точке $M_0(2;-1)$ по направлению вектора $\overline{M_0M}$, если $M(6;2)$. Ответ: 2,6.

4.13. Найти производную функции $u = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{4}$ в точке $M_0(2;1;2)$ по направлению радиус-вектора этой точки. Ответ: 2.

4.14. Найти угол между градиентами функции $u = x^2 + 2y^2 - z^2$ в точках $A(2;3-1)$ и $B(1;-1;2)$. Ответ: $\arccos\left(-\frac{4}{\sqrt{41}}\right)$.

4.15. Найти единичный вектор нормали к поверхности функции $u = x^2 + 2xy - 4yz$ в точке $M_0(1;1;-1)$, направленный в сторону возрастания функции. Ответ: $\left(\frac{2}{\sqrt{17}}; \frac{3}{\sqrt{17}}; \frac{-2}{\sqrt{17}}\right)$.

Исследовать на экстремум функцию:

4.16. $z = x^2 + y^2 + 2x + 4y - 6$. Ответ: $z_{\min}(-1;-2) = -11$.

4.17. $z = \frac{2}{x} + \frac{x^2}{y} + y$. Ответ: $z_{\min}(1;1) = 4$, $z_{\max}(-1;-1) = -4$.

4.18. $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$. Ответ: $z_{\min}(-2;0) = -\frac{2}{e}$.

5. Наибольшие и наименьшие значения функции двух переменных в замкнутой области. Условный экстремум функции двух переменных

Задания для решения в аудитории

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном множестве $\overline{D}$:

5.1. $z = xy + x + y$, $\overline{D}$: $-2 \le x \le 2$, $-2 \le y \le 4$.
Ответ: $z_{наиб} = 14$, $z_{наим} = -6$.

5.2. $z = x + 3y$, $\overline{D}$: $x + y \le 6$, $x + 4y \ge 4$, $y \le 2$.
Ответ: $z_{наиб} = 10$, $z_{наим} = 2$.

5.3. $z = x^2 - y^2$, $\overline{D}$: $x^2 + y^2 \le 2x$.
Ответ: $z_{наиб} = 4$, $z_{наим} = -0{,}5$.

Найти условный экстремум функции при заданном условии связи:

5.4. $z = xy$, $x + y - 1 = 0$. Ответ: $z_{\max, усл}(0{,}5; 0{,}5) = 0{,}25$.

5.5. $z = x^2 - y^2$, $3x + 2y - 6 = 0$. Ответ: $z_{\max, усл}\left(\frac{18}{5}; -\frac{12}{5}\right) = \frac{36}{5}$.

5.6. $z=x^2+xy+y^2,\quad x^2+y^2=1.$

Ответ: $z_{\min,усл}\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=z_{\min,усл}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2},$

$$z_{\max,усл}\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=z_{\max,усл}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{3}{2}.$$

5.7. Имеются два технологических способа производства пшеничной муки. При первом издержки (ден.ед.) описываются функцией $K_1(x)=2x^2+24x+1$, при втором – $K_2(y)=2y^2+40y+2$, где x и y – объемы производимой муки (т). Необходимо произвести 100 т муки, воспользовавшись двумя технологическими способами. Определить распределение выпускаемой продукции различными технологическими способами таким образом, чтобы минимизировать общие издержки.

Ответ: первым технологическим способом следует получить 52 т муки, вторым – 48 т. Данное распределение позволить обеспечить минимальные издержки в 13187 ден. ед.

Домашнее задание

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном множестве $\overline{D}$:

5.8. $z=x^2-xy+y,\quad \overline{D}: |x|\le 2,\ |y|\le 3.$

Ответ: $z_{наиб}=13,\ z_{наим}=-5.$

5.9. $z=1+x+2y,\quad \overline{D}: x+y\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0.$

Ответ: $z_{наиб}=3,\ z_{наим}=1.$

5.10. $z=3+2xy,\ \overline{D}: x^2+y^2\le 1.$

Ответ: $z_{наиб}=4,\ z_{наим}=2.$

Найти условный экстремум функции при заданном условии связи:

5.11 $z=x^2+y^2,\quad 3x+2y-6=0.$ Ответ: $z_{\min,усл}\left(\frac{18}{13};\frac{12}{13}\right)=\frac{36}{13}.$

5.12. $z = xy^2, \quad 6x + y - 6 = 0.$

Ответ: $z_{\max,усл}\left(\frac{1}{3};4\right) = \frac{16}{3}, \; z_{\min,усл}(1;0) = 0.$

5.13. $z = 1 - 4x - 8y, \quad x^2 - 8y^2 = 8.$

Ответ: $z_{\min,усл}(-4;1) = 9, \; z_{\max,усл}(4;-1) = -7.$

5.14. На кирпичном заводе используются два технологических процесса производства кирпичей. При первом издержки (ден.ед.) описываются функцией $K_1(x) = 0,2x^2 + 10x + 10$, при втором – $K_2(y) = 0,3y^2 + 10y + 8$, где x и y объемы производимого кирпича (шт.). Необходимо произвести 10000 кирпичей, воспользовавшись двумя технологическими способами. Распределите выпуск кирпичей таким образом, чтобы минимизировать общие издержки.

Ответ: следует выпустить 6000 шт. кирпичей по первому технологическому способу и 4000 шт. – по второму; издержки при этом составят 12100018 ден.ед.

6. Контрольная работа «Функции нескольких переменных»

Домашнее задание – решение индивидуального задания по теме «Метод наименьших квадратов».

7. Неопределенный интеграл. Непосредственное интегрирование. Метод замены переменной

Задания для решения в аудитории

Используя таблицу основных интегралов, найти интеграл:

7.1. $\int (2x + 3\cos x)\, dx.$ Ответ: $x^2 + 3\sin x + C.$

7.2. $\int \left(3x^2 + 2x + \frac{1}{x}\right) dx.$ Ответ: $x^3 + x^2 + \ln|x| + C.$

7.3. $\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{x+1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx.$ Ответ: $3\sqrt[3]{x}-\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}-4\sqrt[4]{x}+C.$

7.4. $\int 2^x e^x dx.$ Ответ: $\frac{2^x e^x}{\ln 2+1}+C.$

7.5. $\int\frac{dx}{x^2+4}.$ Ответ: $\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}+C.$

7.6. $\int\frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}.$ Ответ: $\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}+C.$

7.7. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-7}}.$ Ответ: $\ln\left|x+\sqrt{x^2-7}\right|+C.$

Вычислить интеграл с помощью замены переменной:

7.8. $\int\sqrt{3+x}\,dx.$ Ответ: $\frac{2}{3}\sqrt{(3+x)^3}+C.$

7.9. $\int 3^{4x}dx.$ Ответ: $\frac{3^{4x}}{4\ln 3}+C.$

7.10. $\int \mathrm{ctg}x\,dx.$ Ответ: $\ln|\sin x|+C.$

7.11 $\int\frac{dx}{x\ln^2 x}.$ Ответ: $-\frac{1}{\ln x}+C.$

7.12. $\int\sin\sqrt{x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}}.$ Ответ: $-2\cos\sqrt{x}+C.$

7.13. $\int\frac{dx}{1-4x^2}.$ Ответ: $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2x+1}{2x-1}\right|+C.$

7.14. $\int\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{\cos^2 x+4}}.$ Ответ: $-\ln(\cos x+\sqrt{\cos^2 x+4})+C.$

7.15. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+1}}$. Ответ: $\frac{1}{2}\ln(x^2+\sqrt{x^4+1})+C$.

7.16. $\int \frac{x^3}{9-4x^8}\,dx$. Ответ: $\frac{1}{48}\ln\left|\frac{2x^4+3}{2x^4-3}\right|+C$.

7.17. $\int e^x\sqrt[3]{4+e^x}\,dx$. Ответ: $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(4+e^x)^4}+C$.

7.18. $\int \frac{x^2}{\cos x^3}\,dx$. Ответ: $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{\sin x^3+1}{\sin x^3-1}\right|+C$.

Вычислить интеграл, используя подстановку:

7.19. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^3}}$, $x=\sqrt[3]{1-t^2}$. Ответ: $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{\sqrt{1-x^3}+1}\right|+C$.

7.20. $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx$, $x=\ln t$. Ответ: $e^x-\ln(e^x+1)+C$.

7.21. $\int \frac{x}{(3-x)^7}\,dx$. Ответ: $\frac{1}{2(3-x)^6}-\frac{1}{5(3-x)^5}+C$.

7.22. $\int \frac{dx}{\sqrt{3+e^x}}$. Ответ: $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{3+e^x}-\sqrt{3}}{\sqrt{3+e^x}+\sqrt{3}}+C$.

Домашнее задание

Используя таблицу основных интегралов, найти интеграл:

7.23. $\int \frac{2x+3}{x^4}\,dx$. Ответ: $-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}+C$.

7.24. $\int \frac{x^3+2}{x}\,dx$. Ответ: $\frac{x^3}{3}+2\ln|x|+C$.

7.25. $\int 2^x(1+3x^2\cdot 2^{-x})\,dx.$ Ответ: $\frac{1}{\ln 2}2^x + x^3 + C.$

7.26. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot \sin^2 x}\,dx.$ Ответ: $-\mathrm{ctg}x - \mathrm{tg}x + C.$

7.27. $\int \frac{dx}{5-x^2}.$ Ответ: $\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+x}{\sqrt{5}-x}\right| + C.$

7.28. $\int \frac{x^2-9}{x^2-8}\,dx.$ Ответ: $x - \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-2\sqrt{2}}{x+2\sqrt{2}}\right| + C.$

Вычислить интеграл с помощью замены переменной:

7.29. $\int (3-4\sin x)^{\frac{1}{3}}\cos x\,dx.$ Ответ: $-\frac{3}{16}(3-4\sin x)^{\frac{4}{3}} + C.$

7.30. $\int \sin(\ln x)\frac{dx}{x}.$ Ответ: $-\cos(\ln x) + C.$

7.31. $\int x\cdot 5^{-x^2}\,dx.$ Ответ: $-\frac{1}{2\ln 5}\cdot 5^{-x^2} + C.$

7.32. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-3x^2}}.$ Ответ: $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + C.$

7.33. $\int \frac{x^3}{x^8+1}\,dx.$ Ответ: $\frac{1}{4}\cdot \mathrm{arctg}\,x^4 + C.$

7.34. $\int \frac{3^{1/x}}{x^2}\,dx.$ Ответ: $-\frac{3^{1/x}}{\ln 3} + C.$

7.35. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^6+1}}\,dx.$ Ответ: $\frac{1}{3}\ln\left|x^3 + \sqrt{x^6+1}\right| + C.$

7.36. $\int x^3 \sqrt[4]{5x^4-3}\,dx.$ Ответ: $\frac{1}{25}\cdot\sqrt[4]{(5x^4-3)^5}+C.$

7.37. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{3-\cos^2 x}}\,dx.$ Ответ: $2\sqrt{3-\cos^2 x}+C.$

Вычислить интеграл, используя подстановку:

7.38. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}},\quad x=\frac{2}{t}.$ Ответ: $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{2+\sqrt{4-x^2}}\right|+C.$

7.39. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}},\quad x=t^2.$ Ответ: $2\ln(\sqrt{x}+1)+C.$

7.40. $\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}+1}\,dx.$

Ответ: $2\left(\frac{\sqrt{(x+1)^3}}{3}-\frac{x+1}{2}+2\sqrt{x+1}-2\ln(\sqrt{x+1}+1)\right)+C.$

8. Интегрирование по частям. Интегрирование некоторых классов элементарных функций

Задания для решения в аудитории

Применяя формулу интегрирования по частям, найти интеграл:

8.1. $\int x\cos x\,dx.$ Ответ: $x\sin x+\cos x+C.$

8.2. $\int x\ln x\,dx.$ Ответ: $\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C.$

8.3. $\int \arccos x\,dx.$ Ответ: $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C.$

8.4. $\int x^3 e^x dx.$ Ответ: $(x^3-3x^2+6x-6)\cdot e^x+C.$

8.5. $\int e^{ax}\cos bx\, dx.$ Ответ: $\dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\ \sin bx+a\ \cos bx)+C.$

Найти интеграл:

8.6. $\int \dfrac{dx}{x^2+4x-5}.$ Ответ: $\dfrac{1}{6}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+5}\right|+C.$

8.7. $\int \dfrac{dx}{2x^2-4x+5}.$ Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\dfrac{2(x-1)}{\sqrt{6}}+C.$

8.8. $\int \dfrac{x\, dx}{x^2-3x+3}.$ Ответ: $\dfrac{1}{2}\ln(x^2-3x+3)+\sqrt{3}\ \operatorname{arctg}\dfrac{2x-3}{\sqrt{3}}+C.$

8.9. $\int \dfrac{x^3+2}{x^3-4x}\, dx.$ Ответ: $x-\dfrac{1}{2}\ln|x|-\dfrac{3}{4}\ln|x+2|+\dfrac{5}{4}\ln|x-2|+C.$

8.10. $\int \sin^3 x\, dx.$ Ответ: $-\cos x+\dfrac{\cos^3 x}{3}+C.$

8.11. $\int \cos^4\dfrac{x}{2}\, dx.$ Ответ: $\dfrac{3x}{8}+\dfrac{\sin x}{2}+\dfrac{\sin 2x}{16}+C.$

8.12. $\int \dfrac{dx}{\sin^6 x}.$ Ответ: $-\operatorname{ctg} x-\dfrac{2}{3}\operatorname{ctg}^3 x-\dfrac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x+C.$

8.13. $\int \cos\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{3}\, dx.$ Ответ: $\dfrac{3}{5}\sin\dfrac{5x}{6}+3\sin\dfrac{x}{6}+C.$

8.14. $\int \dfrac{dx}{3-2\sin x+\cos x}.$ Ответ: $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-1\right)+C.$

8.15. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}.$ Ответ: $2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C.$

8.16. $\int \frac{dx}{(5+x)\sqrt{1+x}}$. Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+x}}{2}+C$.

Домашнее задание

Применяя формулу интегрирования по частям, найти интеграл:

8.17. $\int x^2 e^{-x} dx$. Ответ: $-(x^2+2x+2)\cdot e^{-x}+C$.

8.18. $\int x\cdot \operatorname{arctg} x\, dx$. Ответ: $\frac{1}{2}(x^2+1)\cdot \operatorname{arctg} x-\frac{x}{2}+C$.

8.19. $\int x^3 \ln x\, dx$. Ответ: $\frac{x^4}{4}\ln x-\frac{x^4}{16}+C$.

8.20. $\int (x^2-2x+3)\cos x\, dx$. Ответ: $(x^2-2x+1)\sin x+2(x-1)\cos x+C$.

8.21. $\int \cos(\ln x)\, dx$. Ответ: $\frac{x}{2}(\sin(\ln x)+\cos(\ln x))+C$.

Найти интеграл:

8.22. $\int \frac{x\, dx}{x^2-5x+4}$. Ответ: $\frac{1}{2}\ln\left|x^2-5x+4\right|+\frac{5}{6}\ln\left|\frac{x-4}{x-1}\right|+C$.

8.23. $\int \frac{dx}{x^2-6x}$. Ответ: $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-6}{x}\right|+C$.

8.24. $\int \frac{x\, dx}{x^4+6x^2+13}$. Ответ: $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^2+3}{2}+C$.

8.25. $\int \cos^7 x\, dx$. Ответ: $\sin x-\sin^3 x+\frac{3}{5}\sin^5 x-\frac{1}{7}\sin^7 x+C$.

8.26. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}\, dx$. Ответ: $-2\sqrt{\cos x}+\frac{2}{5}\sqrt{\cos^5 x}+C$.

8.27. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x - 2\cos x + 5}\, dx.$ Ответ: $-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x - 1}{2}\right) + C.$

8.28. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{2x-3}}\, dx.$ Ответ: $\frac{3}{20}\sqrt[3]{(2x-3)^5} + \frac{9}{8}\sqrt[3]{(2x-3)^2} + C.$

8.29. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt[4]{x^3}}.$ Ответ: $\ln\left|\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[4]{x}+1}\right| - 2\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x} + C.$

8.30. $\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x}+4)\sqrt{x}}.$ Ответ: $6\sqrt[6]{x} - 12\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[6]{x}}{2} + C.$

9. Определенный интеграл. Формула Ньютона – Лейбница

Задания для решения в аудитории

Используя формулу Ньютона-Лейбница, вычислить интеграл:

9.1. $\int_{-1}^{2} x^3\, dx.$ Ответ: $3,75.$

9.2. $\int_{1}^{2} (3x^2 - 2x + 1)\, dx.$ Ответ: 5.

9.3. $\int_{1}^{2} e^x\, dx.$ Ответ: $e(e-1).$

9.4. $\int_{0}^{1} \frac{x^2\, dx}{1+x^6}.$ Ответ: $\frac{\pi}{12}.$

9.5. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{4x^2+4x+5}.$ Ответ: $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{4}{7}.$

9.6. $\int\limits_3^4 \frac{x^2+3}{x-2}\,dx$. Ответ: $5{,}5+7\ln 2$.

9.7. $\int\limits_1^2 \frac{e^{1/x^2}}{x^3}\,dx$. Ответ: $0{,}5(e-\sqrt[4]{e})$.

9.8. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$. Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

Вычислить интеграл с помощью подстановки:

9.10. $\int\limits_1^6 \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}$, $3x-2=t^2$. Ответ: $2+\frac{2}{3}\ln\frac{2}{5}$.

9.11. $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 6} \frac{e^x\sqrt{e^x-2}}{e^x+2}\,dx$. Ответ: $4-\pi$.

Вычислить интеграл методом интегрирования по частям:

9.12. $\int\limits_0^1 xe^x dx$. Ответ: 1.

9.13. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$. Ответ: $\frac{1}{18}\left(5\sqrt{3}\pi-9\ln 3\right)$.

Домашнее задание

Используя формулу Ньютона – Лейбница, вычислить интеграл:

9.14. $\int\limits_2^9 \sqrt[3]{x-1}\,dx$. Ответ: 11,25.

9.15. $\int\limits_0^{\pi/4} \sin^2 \varphi \, d\varphi$. Ответ: $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$.

9.16. $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{x+1}{x^3 - x^2} dx$. Ответ: $2\ln\frac{4}{3} - \frac{1}{2}$.

9.17. $\int\limits_1^{e} \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$. Ответ: $\sin 1$.

9.18. $\int\limits_2^{3} \frac{dy}{y^2 - 2y - 8}$. Ответ: $\frac{1}{6}\ln\frac{2}{5}$.

9.19. $\int\limits_0^{2} \frac{2x-1}{2x+1} dx$. Ответ: $2 - \ln 5$.

Вычислить интеграл с помощью подстановки:

9.20. $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}$, $e^x + 1 = t^2$. Ответ: $\ln\frac{3}{2}$.

9.21. $\int\limits_1^{5} \frac{dx}{x + \sqrt{2x-1}}$. Ответ: $2\left(\ln 2 - \frac{1}{4}\right)$.

Вычислить интеграл методом интегрирования по частям:

9.22. $\int\limits_0^{1} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx$. Ответ: $\pi\sqrt{2} - 4$.

9.23. $\int\limits_0^{1} x \operatorname{arctg} x \, dx$. Ответ: $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

10. Приложения определенного интеграла

Задания для решения в аудитории

10.1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\frac{1}{x}$ и прямыми $y=0$, $x=2$, $x=6$. Ответ: $\ln 3$.

10.2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\frac{1}{2}x^2$ и прямой $y=2-\frac{3}{2}x$. Ответ: $10\frac{5}{12}$.

10.3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y^2=4x$ и $x^2=4y$.

Ответ: $5\frac{1}{3}$.

10.4. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=\frac{27}{x^2+9}$ и $y=\frac{x^2}{6}$.

Ответ: $\frac{9}{2}\pi-3$.

10.5. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2+4x+9$ и касательными к ней, проведенными в точках с абсциссами $x_1=-3$ и $x_2=0$.

Ответ: 2,25.

10.6. Найти длину дуги кривой $y=2\sqrt{x^3}$ $(0\le x\le 11)$. Ответ: 74.

10.7. Найти длину дуги кривой $y=\frac{x^2}{4}$ $(0\le x\le 2)$. Ответ: $\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)$.

10.8. Найти длину дуги кривой $y=\arcsin e^x$ $(-\ln 7\le x\le -\ln 2)$.

Ответ: $\ln(2+\sqrt{3})$.

10.9. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривой $y=\sin 2x$ и прямой $y=0$ $\left(0\le x\le \frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ: $\frac{\pi^2}{4}$.

10.10. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривой $y=\frac{1}{x}$ и прямыми $y=x$, $y=0$, $x=2$.

Ответ: $\frac{5\pi}{6}$.

10.11. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кривой $y=2x-x^2$ и прямой $y=0$. Ответ: $\frac{8\pi}{3}$.

10.12. Найти среднее значение издержек $K(x)=3x^2+4x+2$, выраженных в денежных единицах, если объем продукции x меняется от 0 до 3 единиц. Указать объем продукции, при котором издержки принимают среднее значение. Ответ: 17 ден. ед., $\frac{5}{3}$ ед.

10.13. Определить объем продукции, произведенной рабочим за пятый час рабочего дня, если производительность труда характеризуется функцией $f(t)=\frac{3}{3t+2}+5$. Ответ: $\ln\frac{17}{14}+5$.

10.14. Определить запас товаров на складе, образуемый за два дня, если поступление товаров характеризуется функцией $f(t)=3t^2+3t+4$.

Ответ: 22.

10.15. Найти полные издержки производства, если объем продукции равен 42 единицам, а зависимость издержек от объема имеет вид $K(x)=x^3-2x^2+x$. Ответ: 729414.

Домашнее задание

10.16. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y=e^{-x}$ и прямыми $y=0$, $x=0$ и $x=2$. Ответ: $1-e^{-2}$.

10.17. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\cos x$ и прямыми $y=x-\frac{\pi}{2}$, $x=0$. Ответ: $1+\frac{\pi^2}{8}$.

10.18. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\sqrt{x}$ и прямыми $y=x-2$, $x=0$. Ответ: $5\frac{1}{3}$.

10.19. Найти площадь фигуры, ограниченной гиперболой $xy=3$ и прямой, проходящей через точки $(1;4)$ и $(0,5;6)$. Ответ: $4-3\ln 3$.

10.20. Найти длину дуги кривой $y=\frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5}$ $(0\le x\le 9)$. Ответ: $15\frac{7}{15}$.

10.21. Найти длину дуги кривой $y=\ln\sin x$ $\left(\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{2\pi}{3}\right)$. Ответ: $\ln 3$.

10.22. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=0$ $\left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ: $\frac{\pi(\pi-2)}{4}$.

10.23. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y=\sin x$, $y=1$, $x=0$ $\left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ: $\frac{\pi(\pi^2-8)}{4}$.

10.24. Найти среднее значение издержек $K(x)=6x^2+4x+1$, выраженных в денежных единицах, если объем продукции x меняется от 0 до 5 единиц. Указать объем продукции, при котором издержки принимают среднее значение. Ответ: 61 ден. ед., $\frac{\sqrt{91}-1}{3}$ ед.

10.25. Определить объем продукции, произведенной рабочим за третий час рабочего дня, если производительность труда характеризуется функцией $f(t)=\frac{3}{4t+2}+4$. Ответ: $\frac{3}{4}\ln\frac{7}{5}+4$.

11. Несобственные интегралы

Задания для решения в аудитории

Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:

11.1. $\int\limits_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}$. Ответ: $\frac{1}{2}$.

11.2. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x\,dx}{x^2+4}$. Ответ: расходится.

11.3. $\int\limits_{0}^{+\infty}xe^{-x^2}\,dx$. Ответ: $\frac{1}{2}$.

11.4. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^3}\,dx$. Ответ: расходится.

Исследовать интеграл на сходимость:

11.5. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{3+2x^2+5x^4}$. Ответ: сходится.

11.6. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x(x+1)(x+2)}}$. Ответ: сходится.

11.7. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}+\cos^2 x}$. Ответ: расходится.

Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:

11.8. $\int\limits_{1}^{e^2}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$. Ответ: $2\sqrt{2}$

11.9. $\int\limits_{0}^{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \cos\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dx}{x^3}$. Ответ: расходится.

11.10. $\int\limits_{0}^{2} \frac{x^3\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$. Ответ: $5\frac{1}{3}$.

11.11. $\int\limits_{0}^{2} \frac{x\,dx}{(x^2-1)^{4/5}}$. Ответ: $\frac{5}{2}\left(\sqrt[5]{3}+1\right)$.

Исследовать интеграл на сходимость:

11.12. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$. Ответ: сходится.

11. 13. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$. Ответ: расходится.

11.14. $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx$. Ответ: расходится.

11.15. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$. Ответ: сходится.

Домашнее задание

Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:

11.16. $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$. Ответ: расходится.

11.17. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1+2x}{x^2(1+x)}\,dx.$ Ответ: $1+\ln 2$.

11.18. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^3}}.$ Ответ: расходится.

11.19. $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\ln^3 x}.$ Ответ: расходится.

11.20. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$ Ответ: π.

Исследовать интеграл на сходимость:

11.21. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{3+\sin x}{\sqrt[3]{x}}\,dx.$ Ответ: расходится.

11.22. $\int\limits_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln\ln x}.$ Ответ: расходится.

11.23. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\cos\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx.$ Ответ: сходится.

11. 24. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{(1-x)^3}}\,dx.$ Ответ: сходится.

11.25. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx.$ Ответ: сходится.

12. Двойные интегралы

Задания для решения в аудитории

Вычислить интеграл и начертить область интегрирования:

12.1. $\int\limits_0^{\pi}\left(\int\limits_0^{1+\cos x} y^2 \sin x\, dy\right) dx.$ Ответ: $\frac{4}{3}$.

12.2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_{\cos x}^{1} y^4 dy\right) dx.$ Ответ: $\frac{15\pi-16}{150}$.

Вычислить двойной интеграл:

12.3. $\iint\limits_{\overline{D}} x\, dxdy$, где $\overline{D}$ – треугольник с вершинами $O(0;0)$, $A(1;1)$, $B(0;1)$.

Ответ: $\frac{1}{6}$.

12.4. $\iint\limits_{\overline{D}} e^{\frac{x}{y}}\, dxdy$, где $\overline{D}$ – криволинейный треугольник, ограниченный параболой $y^2 = x$ и прямыми $x = 0$, $y = 1$. Ответ: 0,5.

12.5. $\iint\limits_{\overline{D}} \frac{x}{x^2+y^2}\, dxdy$, где $\overline{D}$ – параболический сегмент, ограниченный параболой $y = \frac{x^2}{2}$ и прямой $y = x$. Ответ: $\ln 2$.

12.6. $\iint\limits_{\overline{D}} (x^2+y^2)\, dxdy$, где $\overline{D}$ – параллелограмм со сторонами $y = x$, $y = x+2$, $y = 2$, $y = 6$. Ответ: 224.

12.7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = 9 - y^2$, $3x + 4y = 12$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Ответ: 45.

12.8. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = 2x^2 + y^2 + 1$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Ответ: $0,75$.

12.9. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2x$, $y = x$.

Ответ: 4,5.

Домашнее задание

Вычислить двойной интеграл:

12.10. $\iint\limits_{\overline{D}} (x + y)\, dxdy$, где $\overline{D}$ – область, ограниченная линиями $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$. Ответ: $\frac{8}{3}$.

12.11. $\iint\limits_{\overline{D}} x\, dxdy$, где $\overline{D}$ – область, ограниченная линиями $y = x^2$, $x = 0$, $x + y = 2$. Ответ: $\frac{5}{12}$.

12.12. $\iint\limits_{\overline{D}} \frac{x^2}{y^2}\, dxdy$, где $\overline{D}$ – область, ограниченная линиями $y = x$, $x = 2$, $xy = 1$. Ответ: $\frac{9}{4}$.

12.13. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$. Ответ: $\frac{88}{105}$.

12.14. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4 + x$, $x + 3y = 0$. Ответ: $20\frac{5}{6}$.

12.15. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x - y - 1 = 0$, $x - y + 3 = 0$, $x = -2$, $y = 4$. Ответ: 20.

13. Дифференциальные уравнения (общие понятия). Дифференциальные уравнения с разделенными и разделяющимися переменными

Задания для решения в аудитории

Проверить, является ли данная функция решением данного дифференциального уравнения:

13.1. $y = Ce^{-2x}$, $y' + 2y = 0$. Ответ: является.

13.2. $y = 2(\sin x - 1) + Ce^{-\sin x}$, $y' + y\cos x = \sin 2x$. Ответ: является.

13.3. $y = e^x(C_1 + C_2 x)$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + y = 0$. Ответ: не является.

Составить дифференциальное уравнение заданного семейства кривых:

13.4. $y = \dfrac{C}{x-1}$. Ответ: $y' + \dfrac{y}{x-1} = 0$.

13.5. $x^2 + y^2 - Cx = 0$. Ответ: $2xyy' + x^2 - y^2 = 0$.

13.6. Зная общий интеграл $Cx^2 - y = 0$ некоторого дифференциального уравнения, найти и построить его интегральные кривые, проходящие через точки $A(-1;2)$, $B(3;1)$ и $D(1;-2)$.

13.7. Решить дифференциальное уравнение $y'' = x \cdot \sin x$.

Ответ: $y = -x \cdot \sin x - 2\cos x + C_1 x + C_2$.

13.8. Найти частное решение уравнения $y'' + \dfrac{1}{x^2} = 0$, при $x = 1$, $y = 3$, $y' = 1$.

Ответ: $y = \ln|x| + 3$.

Решить дифференциальное уравнение:

13.9. $(1 + x^2)\,dx + y^2 dy = 0$. Ответ: $3x + x^3 + y^3 = C$.

13.10. $(1 + y^2)\,dx + \sqrt{1 - x^2}\,dy = 0$. Ответ: $\arcsin x + \operatorname{arctg} y = C$.

13.11. $x(1+y^2)+y(1+x^2)y'=0$. Ответ: $(x^2+1)(y^2+1)=C$.

13.12. $y'=xy^2+2xy$. Ответ: $y=\frac{2Ce^{x^2}}{1-Ce^{x^2}}$.

13.13. $y'-2y\cdot \operatorname{ctg}x=\operatorname{ctg}x$. Ответ: $y=\frac{C\sin^2 x-1}{2}$.

Решить задачу Коши:

13.14. $y'x^2+y^2=0$, $y=1$ при $x=-1$. Ответ: $y=-x$.

13.15. $y'(x^2+1)+2xy^2=0$, $y=1$ при $x=0$. Ответ: $y(\ln(x^2+1)+1)=1$.

Домашнее задание

Проверить, является ли данная функция решением данного дифференциального уравнения:

13.16. $y=\frac{C}{x}$, $xy'+y=0$. Ответ: является.

13.17. $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{3x}$, $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-6y=0$. Ответ: является.

Составить дифференциальное уравнение заданного семейства кривых:

13.18. $y=Ce^{\sqrt{1-x^2}}$. Ответ: $\sqrt{1-x^2}dy+xydx=0$.

13.19. $y=\frac{C-x^2}{2x}$. Ответ: $xdy+(x+y)dx=0$.

13.20. Найти частное решение уравнения $y''=\sin 2x$, $y=1$, $y'=1{,}5$ при $x=0$. Ответ: $y=-\frac{\sin 2x}{4}+2x+1$.

Решить дифференциальное уравнение:

13.21. $x\,dx - y\,dy = 0.$ Ответ: $x^2 - y^2 = C.$

13.22. $y' + y \cdot \mathrm{tg}x = 0.$ Ответ: $y = C\cos x.$

Решить задачу Коши:

13.23. $y'x = 1,\quad y = 0$ при $x = 1.$ Ответ: $y = \ln|x|.$

13.24. $y' = y,\quad y = 1$ при $x = 0.$ Ответ: $y = e^x.$

13.25. $\dfrac{dy}{dx}\mathrm{ctg}x + (y-2) = 0,\ y = 5$ при $x = 0.$ Ответ: $y = 3\cos x + 2.$

14. Однородные дифференциальные уравнения. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Задания для решения в аудитории

Решить дифференциальное уравнение:

14.1. $y' = \dfrac{x^2 + xy + y^2}{x^2}.$ Ответ: $\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x} = \ln|Cx|.$

14.2. $y' = \dfrac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}.$ Ответ: $y + \sqrt{y^2 + x^2} = Cx^2.$

14.3. $\left(x - y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx + x\cos\dfrac{y}{x}\,dy = 0.$ Ответ: $\ln|x| + \sin\dfrac{y}{x} = C.$

14.4. $3xy' = x + 4y.$ Ответ: $(x+y)^3 = Cx^4.$

14.5. Решить задачу Коши: $y' = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y},\ y(1) = 1.$ Ответ: $y^2 = 2x^2\ln\dfrac{\sqrt{e}}{x}.$

Решить дифференциальное уравнение:

14.6. $y' + \cos x \cdot y = e^{-\sin x}$. Ответ: $y = e^{-\sin x}(x + C)$.

14.7. $y + y' = e^x$. Ответ: $y = \frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}$.

14.8. $xy' - 3y = 4x^3$. Ответ: $y = x^3(4\ln|x| + C)$.

14.9. $y' \cdot \sin 2x = 2(y + \cos x)$. Ответ: $y = C \cdot \mathrm{tg}x - \frac{1}{\cos x}$.

14.10. Решить задачу Коши: $y'\cos x - y\sin x = \cos x \cdot \sin^3 x$, $y(0) = -0,25$.

Ответ: $y = -0,25\cos x(1 + \sin^2 x)$.

Домашнее задание

Решить дифференциальное уравнение:

14.11. $y' = \frac{x + 2y}{x}$. Ответ: $y = Cx^2 - x$.

14.12. $xy' = 3y - 2x - 2\sqrt{xy - x^2}$. Ответ: $y = x + x(Cx + 1)^2$.

14.13. $y\,dx + (2\sqrt{xy} - x)\,dy = 0$. Ответ: $ye^{\sqrt{x/y}} = C$.

14.14. Решить задачу Коши: $xy' = y\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right)$, $y(1) = e^{-0,5}$.

Ответ: $y = xe^{-0,5x}$.

Решить дифференциальное уравнение:

14.15. $y' + \frac{1}{x}y = 3x$. Ответ: $y = x^2 + \frac{C}{x}$.

14.16. $y' + y = x + 1$. Ответ: $y = x + Ce^{-x}$.

Решить задачу Коши:

14.17. $y' + y \cdot \cos x = \sin x \cdot \cos x,\ \ y(0) = 1.$ Ответ: $y = 2e^{-\sin x} + \sin x - 1.$

14.18. $y' - 3x^2 y = x^2 + x^5,\quad y(0) = 1.$ Ответ: $y = \frac{5}{3}e^{x^3} - \frac{1}{3}\left(2 + x^3\right).$

15. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами

Задания для решения в аудитории

Решить дифференциальное уравнение:

15.1. $y'' + y' - 6y = 0.$ Ответ: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}.$

15.2. $y'' + 2y' + y = 0.$ Ответ: $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}.$

15.3. $y'' + 9y = 0.$ Ответ: $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$

Решить задачу Коши:

15.4. $y'' - y = 0,\quad y(0) = 2,\quad y'(0) = 0.$ Ответ: $y = e^x + e^{-x}.$

15.5. $y'' - 4y' + 4y = 0,\quad y(0) = 3,\quad y'(0) = -1.$ Ответ: $y = e^{2x}(3 - 7x).$

15.6. $y'' + 2y' + 26y = 0,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 2.$ Ответ: $y = e^{-x}(\cos 5x + 0{,}6 \sin 5x).$

Решить дифференциальное уравнение:

15.7. $y'' - 8y' = 8x.$ Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{8x} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{8}.$

15.8. $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}.$ Ответ: $y = e^{2x}(C_1 + C_2 x) + 1{,}5x^2 e^{2x}.$

15.9. $y'' + 2y' + 2y = x + 1.$ Ответ: $y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \frac{1}{2}x.$

15.10. Решить задачу Коши: $y'' - 5y' + 6y = e^{-x}(12x-7)$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Ответ: $y = e^{2x} - e^{3x} + xe^{-x}$.

Домашнее задание

Решить задачу Коши:

15.11. $y'' - y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$. Ответ: $y = 3e^{x} - e^{-x}$.

15.12. $y'' - 2y' + 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Ответ: $y = e^{x}\sin x$.

15.13. $y'' - y' - 2y = 0$, $y(0) = y'(0) = 1$. Ответ: $y = \dfrac{2}{3}e^{2x} + \dfrac{1}{3}e^{-x}$.

15.14. $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3$, $y(0) = \dfrac{4}{3}$, $y'(0) = \dfrac{1}{27}$.

Ответ: $y = (1-3x)e^{3x} + \dfrac{1}{9}x^2 + \dfrac{1}{27}x + \dfrac{1}{3}$.

15.15. $y'' + y = x$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

Ответ: $y = \cos x + \left(1 - \dfrac{\pi}{2}\right)\sin x + x$.

16. Числовые ряды

Задания для решения в аудитории

Записать формулу общего члена ряда:

16.1. $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{7} + \dfrac{4}{9} + \ldots$ Ответ: $a_n = \dfrac{n}{2n+1}$.

16.2. $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{5} + \ldots$ Ответ: $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n+1}$.

16.3. $\frac{\ln 2}{4}+\frac{\ln 3}{9}+\frac{\ln 4}{16}+\frac{\ln 5}{25}+\ldots$ Ответ: $a_n=\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}$.

16.4. $1-\frac{2}{2!}+\frac{4}{3!}-\frac{8}{4!}+\ldots$ Ответ: $a_n=(-1)^{n-1}\frac{2^{n-1}}{n!}$.

16.5. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$. Ответ: 0,75.

Исследовать сходимость ряда, используя следствие из необходимого признака сходимости:

16.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{2n+3}$. Ответ: ряд расходится.

16.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{n(n-1)}$.

Ответ: необходимый признак сходимости выполнен.

16.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{2}{n}$. Ответ: ряд расходится.

С помощью признаков сравнения исследовать сходимость ряда:

16.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{1+2^{2n}}$. Ответ: ряд сходится.

16.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)2^{n-1}}$. Ответ: ряд сходится.

16.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n\sqrt{n}+3}$. Ответ: ряд расходится.

16.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-\sqrt{n}}{n^2-n}$. Ответ: ряд расходится.

Исследовать сходимость ряда с помощью признака Д'Аламбера:

16.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n(3n-1)}$. Ответ: ряд сходится.

16.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{3^n}$. Ответ: ряд расходится.

16.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!\sqrt{2n+5}}{2^n}$. Ответ: ряд расходится.

Исследовать сходимость ряда с помощью признака Коши:

16.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n}{3n+1}\right)^n$. Ответ: ряд сходится.

16.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\ln^n(n+1)}$. Ответ: ряд сходится.

16.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \dfrac{n}{3}$. Ответ: ряд расходится.

Исследовать сходимость ряда с помощью интегрального признака:

16.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{1+n^2}$. Ответ: ряд расходится.

16.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)\cdot\ln(n+1)}$. Ответ: ряд расходится.

16.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)\sqrt{2n-1}}$. Ответ: ряд сходится.

Домашнее задание

Исследовать сходимость ряда, используя следствие из необходимого признака сходимости:

16.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$. Ответ: ряд расходится.

16.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$. Ответ: ряд расходится.

16.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2-n+2}{4}$. Ответ: ряд расходится.

С помощью признаков сравнения исследовать сходимость ряда:

16.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+3)^n}$. Ответ: ряд сходится.

16.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\ln(n+1)}$. Ответ: ряд расходится.

16.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3n+\sqrt{n}}$. Ответ: ряд расходится.

16.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+1}{n^3+2}$. Ответ: ряд расходится.

Исследовать сходимость ряда с помощью признака Д'Аламбера:

16.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{5^n}$. Ответ: ряд сходится.

16.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^n}{n \cdot 3^n}$. Ответ: ряд расходится.

16.31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)!}$. Ответ: ряд сходится.

Исследовать сходимость ряда с помощью признака Коши:

16.32. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n}{n+\sqrt{n}+5}\right)^{n}$. Ответ: ряд расходится.

16.33. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin^{n}\dfrac{3}{n}$. Ответ: ряд сходится.

16.34. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{5^{n}}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n}$. Ответ: ряд сходится.

Исследовать сходимость ряда с помощью интегрального признака:

16.35. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)\ln^{2}(n+1)}$. Ответ: ряд сходится.

16.36. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^{2}+4}$. Ответ: ряд расходится.

17. Знакопеременные ряды

Задания для решения в аудитории

Исследовать, сходится абсолютно, или условно, или расходится знакопеременный ряд:

17.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos 5n}{\sqrt{n^{3}+1}}$. Ответ: ряд сходится абсолютно.

17.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n(n+1)/2}}{n^{2}}$. Ответ: ряд сходится абсолютно.

17.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$. Ответ: ряд сходится условно.

17.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{3n-2}{2n}$. Ответ: ряд расходится.

17.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 3^n}{(5n+1)!}$. Ответ: ряд сходится абсолютно.

17.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n(n^2+1)}$. Ответ: ряд расходится.

17.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2n+2}{n(n+2)}$. Ответ: ряд сходится условно.

17.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n+2^n}$. Ответ: ряд сходится абсолютно.

17.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2n+6)}{3n^2+7n+1}$. Ответ: ряд сходится условно.

17.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{3^n\sqrt{n}}$. Ответ: ряд сходится абсолютно.

17.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{3n-1}{5n+2}\right)^n$. Ответ: ряд сходится абсолютно.

17.12. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(\ln n)^2}$. Ответ: ряд сходится абсолютно.

17.13. Сколько членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ нужно взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до: 0,01; 0,001?

Ответ: 99; 999.

С точностью до 0,01 вычислить сумму ряда:

17.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^4}$. Ответ: 0,95.

17.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2\cdot 2^n}$. Ответ: $-0,45$.

Домашнее задание

Исследовать, сходится абсолютно или условно или расходится знакопеременный ряд:

17.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+1)}{n^4}$. Ответ: ряд сходится абсолютно.

17.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{3n+5}$. Ответ: ряд расходится.

17.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+4}$. Ответ: ряд сходится абсолютно.

17.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$. Ответ: ряд сходится условно.

17.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{(2n+1)^n}$. Ответ: ряд сходится абсолютно.

17.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{8^n}$. Ответ: ряд сходится абсолютно.

17.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \ln n}{n}$. Ответ: ряд сходится условно.

17.23. Сколько членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^3}$ нужно взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,01?

Ответ: 4.

С точностью до 0,01 вычислить сумму ряда:

17.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n^2+1}$. Ответ: $-0,26$.

17.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!}$. Ответ: 0,46.

18. Степенные ряды

Задания для решения в аудитории

Найти область сходимости степенного ряда:

18.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!(x-3)^n$. Ответ: $\{3\}$.

18.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n n!}{(2n)!}$. Ответ: $(-\infty;+\infty)$.

18.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{3^n(n+1)}$. Ответ: $(-3;3)$.

18.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n(n+1)}$. Ответ: $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

18.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$. Ответ: $[-1;1]$.

18.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$. Ответ: $\left[-\frac{1}{5};\frac{1}{5}\right)$.

18.7. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1}(x-2)^n$. Ответ: $(1;3]$.

18.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$. Ответ: $[-0,1;0,1)$.

18.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}(x-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$. Ответ: $(1;3]$.

18.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2x+1)^n}{3n-2}$. Ответ: $[-1;0)$.

18.11. Разложить функцию $f(x)=x^2e^{-x}$ в ряд Маклорена.

Ответ: $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{n+2}}{n!},\ -\infty<x<+\infty.$

Используя разложение соответствующей функции в ряд вычислить с точностью до 0,0001:

18.12. $\ln 1,5$. Ответ: 0,4055.

18.13. $\sqrt[3]{30}$. Ответ: 3,1070.

Вычислить интеграл с точностью до 0,001:

18.14. $\int\limits_0^{0,1} \dfrac{\ln(1+x)}{x}dx$. Ответ: 0,098.

18.15. $\int\limits_0^{1} \sqrt[3]{x}\cdot\cos x\,dx$. Ответ: 0,608.

Домашнее задание

Найти область сходимости степенного ряда:

18.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[3]{(n+1)^n}}{n!}x^n$. Ответ: $(-\infty;+\infty)$.

18.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}x^{n}$. Ответ: $\left[-\frac{1}{e};\frac{1}{e}\right]$.

18.18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{n}}{n^{2}}$. Ответ: $[-3;-1]$.

18.19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{n}}{2^{n}}$. Ответ: $[-1;3)$.

18.20. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3n-2)(x-3)^{n}}{(n+1)^{2}2^{n+1}}$. Ответ: $[1;5)$.

18.21. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n!}{3^{n^{2}}}(x-1)^{n}$. Ответ: $(-\infty;+\infty)$.

18.22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{3^{2n}(3n+2)}$. Ответ: $(-2;4)$.

18.23. Используя разложение соответствующей функции в ряд вычислить $\ln 3$ с точностью до 0,0001.

Ответ: 1,0986.

Вычислить интеграл с точностью до 0,001:

18.24. $\int_{0}^{\frac{1}{9}}\sqrt{x}\,e^{x}\,dx$. Ответ: 0,026.

18.25. $\int_{0}^{0,25}\ln(1+\sqrt{x})\,dx$. Ответ: 0,072.

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ДОМАШЕЕ ЗАДАНИЕ «МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ»

По начальным данным об изменении объема продаж y (%) некоторой фирмы в зависимости от расходов на рекламу x (ден. ед.) требуется:

1) по виду поля корреляции выбрать вид функциональной зависимости y от x;

2) с помощью МНК определить параметры функции регрессии;

3) оценить полученный результат с помощью коэффициента аппроксимации MAPE;

4) найти среднюю квадратичную ошибку функции;

5) построить график функции регрессии на поле корреляции;

6) выполнить прогнозный расчет объема продаж, если расходы на рекламу составят $\tilde{x}$ ден. ед.;

7) сделать общий вывод по задаче.

Вариант 1. $\tilde{x} = 12$ ден. ед.

X	1,2	2,4	3,6	4,8	6,0	7,2	8,4	9,6	10,8
У	4,4	6,4	7,6	9,0	10,5	12,1	13,2	14,9	16,5

Вариант 2. $\tilde{x} = 6$ ден. ед.

X	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5
У	2,7	3,7	4,6	6,1	8,4	10,6	13,7	17,3	20,8

Вариант 3. $\tilde{x} = 13$ ден. ед.

X	1,0	2,5	4,0	5,5	7,0	8,5	10,0	11,5	13,0
У	3,0	4,4	4,7	5,2	5,5	5,7	5,9	6,2	6,3

Вариант 4. $\tilde{x} = 3$ ден. ед.

X	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3	2,5	2,7	2,9
У	3,6	4,7	6,0	6,5	8,1	10,9	13,5	16,9	20,5

Вариант 5. $\tilde{x} = 6$ ден. ед.

X	1,1	1,6	2,1	2,6	3,1	3,6	4,1	4,6	5,1
У	5,0	5,7	6,1	6,3	6,9	7,1	7,7	7,9	8,3

Вариант 6. $\tilde{x} = 4$ ден. ед.

X	0,5	0,8	1,1	1,4	1,7	2,0	2,3	2,6	2,9
У	7,8	6,2	5,7	4,7	4,6	4,4	4,1	4,0	3,9

Вариант 7. $\tilde{x} = 7$ ден. ед.

X	1,0	1,6	2,2	2,8	3,4	4,0	4,6	5,2	5,8
У	1,8	2,3	2,6	2,7	2,9	3,1	3,2	3,3	3,5

Вариант 8. $\tilde{x} = 5$ ден. ед.

X	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5
У	0,9	1,7	3,4	5,2	7,9	11,4	15,3	19,6	24,9

Вариант 9. $\tilde{x} = 5$ ден. ед.

X	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
У	19,4	14,3	12,6	11,8	11,4	10,9	10,7	10,5

Вариант 10. $\tilde{x} = 4$ ден. ед.

X	0,4	0,7	1,0	1,3	1,6	1,9	2,2	2,5	2,8
У	1,1	1,9	2,8	4,3	5,9	8,5	11,4	16,2	22,0

Вариант 11. $\tilde{x} = 6$ ден. ед.

X	1,5	1,8	2,1	2,4	2,7	3,0	3,3	3,6	3,9
У	0,2	0,7	1,1	1,4	1,8	2,0	2,4	2,6	2,8

Вариант 12. $\tilde{x} = 4$ ден. ед.

X	0,5	0,8	1,1	1,4	1,7	2,0	2,3	2,6	2,9
У	8,8	7,0	6,3	5,9	5,6	5,4	5,2	5,1	4,8

Вариант 13. $\tilde{x} = 4$ ден. ед.

X	0,5	0,8	1,1	1,4	1,7	2,0	2,3	2,6
У	8,8	8,2	7,4	6,4	5,2	3,9	2,6	1,2

Вариант 14. $\tilde{x} = 3$ ден. ед.

X	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2
У	13,5	12,5	11,4	10,0	8,6	6,9	5,1	3,0

Вариант 15. $\tilde{x}=15$ ден. ед.

Х	1,5	3,0	4,5	6,0	7,5	9,0	10,5	12,0	13,5
У	5,1	7,3	8,7	10,5	12,6	14,5	16,0	17,9	19,9

Вариант 16. $\tilde{x}=12$ ден. ед.

Х	1,3	2,5	3,7	4,9	6,1	7,3	8,5	9,7	10,9
У	3,4	5,4	6,6	8,0	9,5	11,1	12,2	13,9	15,5

Вариант 17. $\tilde{x}=4$ ден. ед.

Х	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1	2,4	2,7	3,0
У	9,0	7,4	6,9	5,9	5,8	5,6	5,3	5,2	5,1

Вариант 18. $\tilde{x}=14$ ден. ед.

Х	0,5	2,0	3,5	5,0	6,5	8,0	9,5	11,0	12,5
У	2,0	3,4	3,7	4,2	4,5	4,7	4,9	5,2	5,3

Вариант 19. $\tilde{x}=4$ ден. ед.

Х	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3	2,5	2,7	2,9	3,1
У	2,6	3,7	5,0	5,5	7,1	9,9	12,5	15,9	19,5

Вариант 20. $\tilde{x}=6$ ден. ед.

Х	1,3	1,8	2,3	2,8	3,3	3,8	4,3	4,8	5,3
У	4,0	4,7	5,1	5,3	5,9	6,1	6,7	6,9	7,3

Вариант 21. $\tilde{x}=4$ ден. ед.

Х	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1	2,4	2,7	3,0
У	8,0	6,4	5,9	4,9	4,8	4,6	4,3	4,2	4,1

Вариант 22. $\tilde{x}=6$ ден. ед.

Х	0,8	1,4	2,0	2,6	3,2	3,8	4,4	5,0	5,6
У	2,8	3,3	3,6	3,7	3,9	4,1	4,2	4,3	4,5

Вариант 23. $\tilde{x}=5$ ден. ед.

X	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5
У	3,7	4,7	5,6	7,1	9,4	11,6	14,7	18,3	21,8

Вариант 24. $\tilde{x}=6$ ден. ед.

X	1,2	1,8	2,2	2,8	3,2	3,8	4,2	4,8	5,2
У	3,1	4,3	5,2	6,4	7,2	8,5	9,3	10,4	11,4

Вариант 25. $\tilde{x}=5$ ден. ед.

X	1,5	1,8	2,1	2,4	2,7	3,0	3,3	3,6	3,9
У	1,9	2,5	2,8	3,2	3,6	3,9	4,1	4,4	4,6

Вариант 26. $\tilde{x}=4$ ден. ед.

X	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4
У	1,2	2,3	2,7	3,7	4,9	6,4	8,4	10,6	13,5

Вариант 27. $\tilde{x}=7$ ден. ед.

X	1,0	1,6	2,2	2,8	3,4	4,0	4,6	5,2	5,8
У	0,7	2,6	5,5	8,9	13,4	18,7	24,9	32,0	39,9

Вариант 28. $\tilde{x}=3$ ден. ед.

X	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4
У	11,7	9,6	8,3	7,3	6,6	6,2	5,6	5,3	4,9

Вариант 29. $\tilde{x}=12$ ден. ед.

X	1,2	2,4	3,6	4,8	6,0	7,2	8,4	9,6	10,8
У	5,4	7,4	8,6	10,0	11,5	13,1	14,2	15,9	17,5

Вариант 30. $\tilde{x}=14$ ден. ед.

X	1,5	3,0	4,5	6,0	7,5	9,0	10,5	12,0	13,5
У	6,1	8,3	9,7	11,5	13,6	15,5	17,0	18,9	20,9

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА «ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

Задание 1. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения.

1. $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y^2}{x^2}+\dfrac{y}{x}.$

2. $dy-2\sqrt{y}\cdot\ln x\,dx=0.$

3. $xy'\sin\dfrac{y}{x}=y\sin\dfrac{y}{x}-x.$

4. $xy'-y=\sqrt{x^2-y^2}.$

5. $e^y(1+x^2)\,dy-2x(1+e^y)\,dx=0.$

6. $xy\,dy=(4x^2+y^2)\,dx.$

7. $(x-y^2x)\,dx+(y-x^2y)\,dy=0.$

8. $x^2y'=1+\cos 2y.$

9. $(2\sqrt{x}\cdot y-y)\,dx+x\,dy=0.$

10. $2x\sqrt{1-y^2}\,dx+y\,dy=0.$

11. $x^2+y^2-2xyy'=0.$

12. $(x-y)\,dx+x\,dy=0.$

13. $y'+\dfrac{x\sin x}{y\cos y}=0.$

14. $x\,dy-y\cos\ln\dfrac{y}{x}\,dx=0.$

15. $y^2\cdot y'+x^2=1.$

16. $y'=\dfrac{\sin y}{1+x^2}.$

17. $y'=\dfrac{x-y}{x+y}.$

18. $y'\sqrt{1-x^2}-\cos^2 y=0.$

19. $y'=\dfrac{y}{x}+\sin\dfrac{y}{x}.$

20. $y^2dx+x^2dy=xy\,dy.$

21. $ye^{2x}dx-(1+e^{2x})\,dy=0.$

22. $xy'=y+x\cdot\mathrm{tg}\dfrac{y}{x}.$

23. $2e^x\mathrm{tg}y\,dx+(1+e^x)\dfrac{dy}{\sin^2 y}=0.$

24. $3x^2y\,dx+2\sqrt{4-x^3}\,dy=0.$

25. $(x^2+xy)y'=x\sqrt{x^2-y^2}+xy+y^2.$

26. $(2xy-x)y'=2y.$

27. $x(y'+e^{\frac{y}{x}})=y.$

28. $xy'=y\ln\dfrac{y}{x}.$

29. $(1+y)(e^x dx-e^{2y}dy)-(1+y^2)\,dy=0.$

30. $(y^2+xy^2)dx+(x^2-yx^2)dy=0.$

Задание 2. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения.

1. $xy'=y+x^2\cos x.$

2. $y'\cos x-2y\sin x=2.$

3. $xy'=e^x+xy.$

4. $\dfrac{dy}{dx}-2xy=x.$

5. $y'=\dfrac{2y}{x+1}+e^x(x+1)^2.$

6. $y'+\dfrac{y}{x}=\dfrac{2}{1+x^2}.$

7. $y'+\dfrac{y}{x}=2\ln x+1.$

8. $y'=x-\dfrac{y}{x}-2y.$

9. $y'+2y=e^{3x}.$

10. $y'\sin x-y=1-\cos x.$

11. $(1+x^2)y'=2xy+(1+x^2)^2.$

12. $xy'-3y=x^4e^x.$

13. $y'+y\cdot\mathrm{tg}x=\dfrac{1}{\cos x}.$

14. $y'-y\cdot\sin x=e^{-\cos x}.$

15. $y'=\dfrac{3y}{x}+x.$

16. $y'\cos x-2y\sin x=2.$

17. $xy'+x^2+xy=y.$

18. $y'=2x(x^2+y).$

19. $y'-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^3.$

20. $y'+y\cdot\mathrm{tg}x=\sin 2x.$

21. $y'\cos x+y\sin x=1.$

22. $y'\cdot\sin x\cdot\cos x=y+\sin^3 x.$

23. $y'-\dfrac{3}{x}y=e^x x^3.$

24. $x^2y'-y=x^2\cdot e^{x-\frac{1}{x}}.$

25. $y'+\dfrac{1-2x}{x^2}y-1=0.$

26. $y'+\dfrac{6xy}{x^2+1}=\dfrac{1}{(x^2+1)^4}.$

27. $y' - \mathrm{tg}x \cdot y = 2\cos x.$

28. $y' + \dfrac{1-4x}{x^2} y = 3.$

29. $x^2 y' + xy = 3.$

30. $y' + 2xy = xe^{-x^2}.$

Задание 3. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию.

1. $(x^2+1)y' + 4xy = 3, \quad y(0) = 0.$

2. $y' - 2\dfrac{y}{x} = x^3, \quad y(1) = 0.$

3. $(1-x)(y'+y) = e^{-x}, \quad y(0) = 0.$

4. $xy' - 2y = 2x^4, \quad y(1) = 0.$

5. $y' = 2x(x^2+y), \quad y(0) = 0.$

6. $y' - y = e^x, \quad y(0) = 1.$

7. $xy' + y + xe^{-x^2} = 0, \quad y(1) = \dfrac{1}{2e}.$

8. $\cos y \cdot dx = (x + 2\cos y)\sin y \cdot dy, \; y(0) = \dfrac{\pi}{4}.$

9. $x^2 y' + xy + 1 = 0, \quad y(1) = 0.$

10. $xy' + y = 4x^3 + 3x^2, \quad y(1) = 2.$

11. $(2x+y)dy = ydx + 4\ln y dy, \quad y(0) = 1.$

12. $y' = \dfrac{y}{3x - y^2}, \quad y(0) = 1.$

13. $(1-2xy)y' = y(y-1), \quad y(0) = 1.$

14. $x(y'-y) = e^x, \quad y(1) = 0.$

15. $y = x(y' - x\cos x), \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0.$

16. $(xy'-1)\ln x = 2y, \quad y(e)=0.$

17. $(2e^{y}-x)y'=1, \quad y(0)=0.$

18. $(\sin^2 y + x\mathrm{ctg}y)y'=1, \quad y(0)=\dfrac{\pi}{2}.$

19. $(x+1)y'+y=x^3+x^2, \quad y(0)=0.$

20. $xy'-2y+x^2=0, \quad y(1)=0.$

21. $(x^2-1)y'-xy=x^3-x, \quad y(\sqrt{2})=1.$

22. $xy'+y=\sin x, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2}{\pi}.$

23. $x^2y'+xy=3, \quad y(1)=3.$

24. $y'-2\dfrac{y}{x}-x^3=0, \quad y(1)=1{,}5.$

25. $y'-2y+x=e^{x}, \quad y(0)=0{,}25.$

26. $y'-y=\dfrac{e^{x}}{1+x^2}, \quad y(0)=2.$

27. $xy'-y-x=0, \quad y(1)=2.$

28. $y'\mathrm{ctg}x+y=2, \quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-1.$

29. $x^2y'+2xy=\ln x, \quad y(e)=1.$

30. $xy'+(x+1)y=3x^2e^{-x}, \quad y(1)=0.$

Задание 4. Найти частное решение дифференциального уравнения.

1. $y'''=\sin x, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=0, \quad y''(0)=0.$

2. $y'''=\dfrac{1}{x}, \quad y(1)=0{,}25, \quad y'(1)=y''(1)=0.$

3. $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0,6$.

4. $y'' = 4\cos 2x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

5. $y''' = \dfrac{6}{x^3}$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 5$, $y''(1) = 0$.

6. $y'' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

7. $xy''' = 2$, $y(1) = 0,5$, $y'(1) = y''(1) = 0$.

8. $y''' = e^{2x}$, $y(0) = 1,125$, $y'(0) = 0,25$, $y''(0) = -0,5$.

9. $y''' = \cos^2 x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -0,125$, $y''(0) = 0$.

10. $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.

11. $y'' = \dfrac{1}{\sin^2 2x}$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4}$, $y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$.

12. $y'' = x + \sin x$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 0$.

13. $y'' = \dfrac{1}{4+x^2}$, $y(0) = y'(0) = 0$.

14. $y'' = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$, $y(0) = -0,5$, $y'(0) = 0$.

15. $y''' = e^{\frac{x}{2}} + 1$, $y(0) = 8$, $y'(0) = 5$, $y''(0) = 2$.

16. $y'' = xe^{2x}$, $y(0) = 0,25$, $y'(0) = -0,25$.

17. $y'' = \sin^2 3x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

18. $y''' = x \cdot \sin x$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

19. $y'' = x - e^{5x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$.

20. $y'' = \cos x + e^{-x}$, $y(0) = y'(0) = -1$.

21. $y'' = \sin^3 x$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{7}{9}$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

22. $y''' = \sqrt{x} - \sin 2x$, $y(0) = -0{,}125$, $y'(0) = 0{,}125$, $y''(0) = 0{,}5$.

23. $y''' = e^{2x} + 2$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 0$.

24. $y'' = 2\sin x \cdot \cos^2 x$, $y(0) = -\dfrac{5}{9}$, $y'(0) = -\dfrac{2}{3}$.

25. $y'' = x - \ln x$, $y(1) = -\dfrac{5}{12}$, $y'(1) = \dfrac{3}{2}$.

26. $y'' = 2\sin^2 x \cdot \cos x$, $y(0) = \dfrac{1}{9}$, $y'(0) = 1$.

27. $y'' = \dfrac{1}{x^2}$, $y(1) = 3$, $y'(1) = 1$.

28. $y'' = x^2 e^x$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$.

29. $y''' = \cos 4x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0{,}125$, $y''(0) = 0$.

30. $y''' = e^{5x} + x$, $y(0) = \dfrac{1}{125}$, $y'(0) = \dfrac{1}{25}$, $y''(0) = \dfrac{1}{5}$.

Задание 5. Найти общее решение дифференциального уравнения.

1. $y'' + y' = 2x - 1$.

2. $y'' + 2y' + y = 6e^{-x}$.

3. $y'' + 2y' + 37y = 37x^2 - 33x + 74$.

4. $y'' - 12y' + 36y = 14e^{6x}$.

5. $y'' - 3y' + 2y = e^{-x}(34 - 12x)$.

6. $y'' - 6y' + 10y = 51e^{-x}$.

7. $6y'' - y' - y = 3e^{2x}$.

8. $y'' + 6y' + 10y = 74e^{3x}$.

9. $y'' - 8y' + 17y = 10e^{2x}$.

10. $y'' + 6y' + 9y = (48x + 8)e^{x}$.

11. $y'' + y' - 6y = (6x + 1)e^{3x}$.

12. $y'' + 6y' + 25y = 18e^{5x}$.

13. $y'' - 9y' + 20y = 126e^{-2x}$.

14. $y'' - 7y' + 12y = 3e^{4x}$.

15. $y'' - 4y' = 8 - 16x$.

16. $y'' - 2y' + y = 4e^{x}$.

17. $y'' + 9y = 9x^4 + 12x^2 - 27$.

18. $y'' - 2y' = (4x + 4)e^{2x}$.

19. $y'' + 4y' + 4y = 6e^{-2x}$.

20. $y'' + 3y' = 10 - 6x$.

21. $y'' + 4y' = 15e^{x}$.

22. $y'' + 2y' + y = (18x + 8)e^{-x}$.

23. $y'' + 9y = 10e^{3x}$.

24. $y'' + 4y' + 29y = 26e^{-x}$.

25. $y'' - 2y' = 6 + 12x - 24x^2$.

26. $y'' + 16y = 8\cos 4x$.

27. $y'' - 12y' + 40y = 2e^{6x}$.

28. $y'' - 2y' + 5y = 10e^{-x}\cos 2x$.

29. $y'' + y' - 12y = (16x + 22)e^{4x}$.

30. $y'' + 16y = 32e^{4x}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Булдык, Г. М. Сборник задач и упражнений по высшей математике с примерами решений / Г. М. Булдык. – Минск : ООО «Юнипрес», 2002. – 400 с.
2. Высшая математика : Общий курс : учебник / А. В. Кузнецов, Л. Ф. Янчук, С. А. Мызгаева и др.; под общ. ред. проф. А. И. Яблонского. – Минск : Выш. шк., 1993. – 349 с.
3. Индивидуальные задания по высшей математике: Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учеб. пособие. / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; под общ. ред. А. П. Рябушко. – Минск : Выш. шк., 2000. – 396 с.
4. Кудрявцев, Л. Д. Математический анализ. В 2 т. Т. 1 / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Высш. шк., 1970. – 588 с.
5. Кудрявцев, Л. Д. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Функции нескольких переменных: учеб. пособие для вузов / Л. Д. Кудрявцев [и др.]; под ред. Л. Д. Кудрявцева. – Санкт-Петербург, 1994. – 496 с.
6. Малыхин, В. И. Математика в экономике: учеб. пособие. / В. И. Малыхин. – М.: ИНФРА-М, 2001. – 356 с.
7. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учебник для втузов. В 2 т. Т. 1 / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1972. – 456 с.
8. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учебник для втузов. В 2 т. Т. 2 / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1972. – 576 с.
9. Сборник задач и упражнений по высшей математике : Общий курс : учеб. пособие / А. В. Кузнецов [и др.]. – Минск : Выш. шк., 1994. – 284 с.
10. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа : учеб. пособие для втузов / В. А. Болгов [и др.]; под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. – 2-е изд. – М. : Наука, 1986. – 464 с.
11. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 2. Специальные разделы математического анализа: учеб. пособие для втузов / В. А. Болгов [и др.]; под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. – 2-е изд. – М. : Наука, 1986. – 368 с.
12. Сухая, Т. А. Задачи по высшей математике : учеб. пособие. В 2 ч. Ч. 1 / Т. А. Сухая, В. Ф. Бубнов. – Минск : Выш. шк., 1993. – 416 с.
13. Сухая, Т. А. Задачи по высшей математике : учеб. пособие. В 2 ч. Ч. 2 / Т. А. Сухая, В. Ф. Бубнов. – Минск : Выш. шк., 1993. – 302 с.
14. Фихтемгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. 1 / Г. М. Фихтемгольц. – М. : Наука, 1970. – 608 с.
15. Щипачев, В. С. Высшая математика : учеб. для нематем. спец. вузов/ В. С. Щипачев; под ред. акад. А. Н. Тихонова. – 2-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 1990. – 479 с.

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методический комплекс
для студентов экономических специальностей

В трех частях

Часть 2

Функции нескольких переменных
Интегральное исчисление
Обыкновенные дифференциальные уравнения
Числовые и степенные ряды

Составитель
КАПУСТО Анна Владимировна

Редактор *Ю. В. Мацук*

Дизайн обложки *В. А. Виноградовой*

Подписано в печать 14.11.08. Формат 60х84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Ризография. Усл. печ. л. 13,92. Уч.-изд. л. 11,56. Тираж 170 экз. Заказ 1838.

Издатель и полиграфическое исполнение –
учреждение образования «Полоцкий государственный университет»

ЛИ № 02330/0133020 от 30.04.04 ЛП № 02330/0133128 от 27.05.04

211440, г. Новополоцк, ул. Блохина, 29