А.А.САЛИЕВ,
Ж.А.УСАРОВ,
У.Т.РАЖАБОВ

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Часть I

ТАШКЕНТ

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ТАШКЕНТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.А.Салиев, Ж.А.Усаров, У.Т.Ражабов

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Часть I

(с целью развития экономической компетентности студентов)

Рекомендовано Министерством высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан в качестве учебного пособия для студентов

Ташкент - 2021

УДК: 22.1
ББК 22.1я73

А.А.Салиев, Ж.А.Усаров, У.Т.Ражабов. Прикладная математика. Часть I. Учебное пособие. – Т.: «Инновацион ривожланиш нашриёт-матбаа уйи» – 2021, 186 стр.

ISBN 978-9943-7630-4-3

В учебном пособие представлены основные разделы дисциплины «Высшая математика», необходимой для успешного усвоения дальнейших глав математики, а также общетеоретических специальных дисциплин в области экономики, статистики и бизнеса, менеджмента и информационных технологий.

УДК: 22.1
ББК 22.1я73

Рецензенты: **А.А.Адизов** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры “Высшая математика” ТУИТ.

ISBN 978-9943-7630-4-3

Введение

Экономические вопросы играют важную роль в развитии экономических компетенций. Этот учебник направлен на развитие экономических компетенций будущих экономистов в высших учебных заведениях в области экономики с упором на аспекты экономики, связанные с математическим решением экономических задач.

Часть 1 учебном пособие «Прикладная математика» включает элементы линейной алгебры и аналитической геометрии, введение в математический анализ, дифференциальное исчисление функций одной переменной, проверку функций с помощью производных, векторные и комплексные функции действительной переменной, одной переменной. исчисление функций, функции многих переменных, простые дифференциальные уравнения, ряды, преобразования Фюре, кратные интегралы, криволинейные и поверхностные интегралы, векторный анализ, уравнения математической физики, процессы практического обучения и типы управления (концепции, формулы, правила и методы необходимые для организации аудиторных заданий, самостоятельной и теоретической работы, примерных арифметических заданий, лабораторных работ и т. д.) представлены без доказательств, а их суть разъясняется в решениях на большом количестве примеров.

В руководстве могут быть некоторые недочеты или ошибки. Авторы заранее приносят извинения читателям за такие ошибки и упущения и выражают свое уважение и признательность за критические комментарии и отзывы, направленные на дальнейшее улучшение учебника.

❖ Тема-1: Матрицы и действия над ними

1.1. Понятие о матрицах.

Матрицей **А** *размерности* $m \times n$ *называется прямоугольная таблица чисел:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где m - число строк матрицы, n - число столбцов матрицы. Матрицу можно записывать в виде:

$$A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n} \text{ или } A = \left\|a_{ij}\right\|_{m\times n}$$

где a_{ij} - элементы матрицы;

первый индекс i указывает номер строки, $(i = \overline{1,m})$;

второй индекс j - номер столбца, $(j = \overline{1,n})$.

Например,

$A = \begin{pmatrix} 235 \\ 416 \end{pmatrix}$ - матрица размерности 2х3; $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ - матрица-столбец;

$C = (1 \quad 5 \quad 6 \quad 7)$ - матрица-строка.

Матрица называется ***квадратной,*** *если* $m = n$, *число* n *называют ее* ***порядком.***

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ - квадратная матрица третьего порядка.

Элементы $a_{ij}\left(i = \overline{1,m}\right)$ *составляют* ***главную диагональ*** *матрицы, а элементы* a_{1n} , a_{2n-1} , ... , a_{n1} *- вспомогательную,* ***побочную диагональ*** *матрицы.*

Если все $a_{ij} = 0$ $(i \neq j)$, за исключением элементов, стоящих на главной диагонали a_{ii}, то матрицу называют ***диагональной,*** например:

$$D=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 8\end{pmatrix}$$

Диагональная матрица называется ***единичной,*** *если все* a_{ii} = *1* , обозначают:

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\0 & 1 & \cdots & 0\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

Если все $a_{ij} = 0$, *то матрица называется* ***нулевой,*** обозначают **0.**

Нулевая и единичная матрицы выполняют в матричном исчислении такую же роль, как 0 и 1 в теории действительных чисел.

Две матрицы A и B называются ***равными,*** *если они одной и той же размерности и их соответствующие элементы равны между собой.*

$$A=B, \text{ если } a_{ij}= b_{ij} \quad \left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right).$$

1.2. Умножение матрицы на число

Определение. Произведением матрицы A на число k называется матрица $B=k\cdot A$ того же размера, полученная из исходной умножением на заданное число всех ее элементов: $b_{i,j} = k \cdot a_{i,j}$

Свойства умножения матрицы на число

- $1 \cdot A = A$
- $0 \cdot A = \Theta$, где Θ - нулевая матрица
- $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$
- $(k + n) \cdot A = k \cdot A + n \cdot A$
- $(k \cdot n) \cdot A = k \cdot (n \cdot A)$

Примеры задач на умножение матрицы на число

Для того, чтобы произвести умножение матрицы А на произвольное число α, нужно элементы матрицы A умножить на число α, т.е. произведение матрицы на число будет следующим:

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример 1. Найти матрицу $3A$ для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. В соответствии с определением умножим элементы матрицы A на 3 и получим

$$3A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 12 & -3 \\ 15 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Выполнить операцию умножения матрицы A на число α, если

$$\alpha = \frac{1}{8} \qquad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{3}{7} \\ -\frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix},$$

Решение. Умножим элементы матрицы A на α, не забывая, что при умножении дробей числитель первой дроби умножается на числитель первой дроби и произведение записывается в числитель, а знаменатель первой дроби умножается на знаменатель второй дроби и произведение записывается в знаменатель. При получении второго элемента первой строки новой матрицы полученную дробь сократили на 2, это надо делать обязательно. Получаем

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \frac{1}{32} & \frac{1}{12} & \frac{3}{56} \\ -\frac{1}{64} & 0 & \frac{3}{32} \end{pmatrix}$$

Экономический смысл умножения матрицы на число

Пусть три магазина продают пять различных видов продукции. Тогда отчёт о продажах за год может быть дан в виде матрицы

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \end{pmatrix},$$

где x_{ij} - количество продукции j-го вида, продаваемое i-м магазином в течение некоторого года. Если же в течение следующего года продажа каждого вида продукции увеличилась на 20%, то для любых i, j верно равенство $y_{ij} = 1{,}2 \bullet x_{ij}$. В этом случае отчёт за следующий год получается как $Y = 1{,}2X$, т. е. умножением исходной матрицы A на число 1,2.

1.3. Сложение и умножение матриц.

Суммой (разностью) двух mXn-матриц A и B называется матрица C, элементы которой равны суммам (разностям) соответствующих элементов матриц A и B , т.е.

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

для суммы матриц и

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

для разности матриц ($i = 1, 2,..., m$; $j = 1, 2, ..., m$), где a_{ij} – элементы матрицы A, b_{ij} – элементы матрицы B.

Из данного определения понятно, что разность матриц - результат, обратный сумме матриц.

Складывать и вычитать можно матрицы только одинакового размера.

Пример 1. Найти сумму и разность матриц

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & 2\\ 4 & 1 & 3 & 1\end{pmatrix}\text{ и}$$

$$B=\begin{pmatrix}4 & -3 & 2 & -2\\ -3 & 0 & 4 & 0\end{pmatrix}$$

В соответствии с определением находим:

$$A+B=\begin{pmatrix}1+4 & 3-3 & 0+2 & 2-2\\ 4-3 & 1+0 & 3+4 & 1+0\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}5 & 0 & 2 & 0\\ -3 & 0 & 4 & 0\end{pmatrix},$$

$$A-B=\begin{pmatrix}1-4 & 3-(-3) & 0-2 & 2-(-2)\\ 4-(-3) & 1-0 & 3-4 & 1-0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-3 & 6 & -2 & 4\\ 7 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Приведём ещё примеры сложения матриц, в которых среди элементов матриц - дроби и переменные (буквенные обозначения). Законы сложения для самых разных чисел будут попадаться один за другим при всём дальнейшем изучении высшей математики.

Пример 2. Выполнить сложение матриц

$$A=\begin{pmatrix}a & c\\ g & 2h\\ 1 & 0\end{pmatrix}\text{ и }\quad B=\begin{pmatrix}a & b\\ 3g & 2h\\ a & d\end{pmatrix}$$

В соответствии с определением находим:

$$A+B=\begin{pmatrix}2a & b+c\\ 4g & 4h\\ 1+a & d\end{pmatrix}.$$

Пример 3. Выполнить сложение матриц

$$A=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{25} & \frac{1}{4}\\ \frac{3}{7} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\text{ и }\quad B=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{4}{75} & \frac{3}{4}\\ \frac{8}{49} & \frac{2}{9} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

Приводим все пары складываемых дробей к общему знаменателю. Результат сложения первых элементов первой строки $\frac{5}{4}$ приводить к форме с целой частью не требуется.

Получаем

$$A+B=\begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{7}{75} & 1 \\ \frac{29}{49} & \frac{5}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Выполнить сложение матриц

$$A=\begin{pmatrix} x^2 & \frac{2}{7} & y \\ c^3 & 6 & 0 \\ -2m & -1 & x^3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B=\begin{pmatrix} x^3 & a & y \\ 2c^3 & 7 & \frac{1}{2} \\ 2m & 15 & -x^3 \end{pmatrix}$$

Производим действия, в основном описанные в предыдущих примерах. Особо заметим, что при сложении разных степеней переменной получается сумма переменной в этих степенях, т. е. многочлен (первый элемент первой строки новой матрицы). Получаем

$$A+B=\begin{pmatrix} x^2+x^3 & \frac{2a}{7} & 2y \\ 3c^3 & 13 & \frac{1}{2} \\ 0 & 14 & 0 \end{pmatrix}.$$

В сочетании с <u>**умножением матрицы на число**</u> операция сложения (вычитания) матриц может образовывать различные матричные выражения, например, $5A-3B$, $4A+2B$.

Пример 5. Даны матрицы А и В. Вычислить $5A-3B$.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$5A-3B=\begin{pmatrix}10 & -5\\ 20 & 25\\ 5 & -10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 9\\ -3 & 0\\ 6 & 12\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}7 & -14\\ 23 & 25\\ -1 & -22\end{pmatrix}$$

Свойства сложения матриц

1. $A + B = B + A$ (коммутативность).
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (ассоциативность).

Кроме того, сумма матриц и их произведение связаны свойством дистрибутивности:

3. $(A + B)C = AC + BC$.

Экономический смысл сложения матриц

Пусть три магазина продают пять различных видов продукции. Тогда отчёт о продажах за год может быть дан в виде матрицы

$$X=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25}\\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35}\end{pmatrix},$$

где x_{ij} - количество продукции j-го вида, продаваемое i-м магазином в течение некоторого года. Если ассортимент продукции не изменился в течение следующего года, то отчёт о продажах за второй год имеет вид матрицы того же размера $Y=(y_{ij})$. Тогда продажи за два года выражаются матрицей $X+Y=(x_{ij}+y_{ij})$, получаемой по определению сложением соответствующих элементов двух матриц.

Произведение матриц: определение, формула, способ нахождения

Определение. Произведением двух матриц A и B называется матрица C, элемент которой, находящийся на пересечении i-й строки и j-го столбца, равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие (по порядку) элементы j-го столбца матрицы B.

Из этого определения следует формула элемента матрицы C:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}$$

Произведение матрицы A на матрицу B обозначается AB.

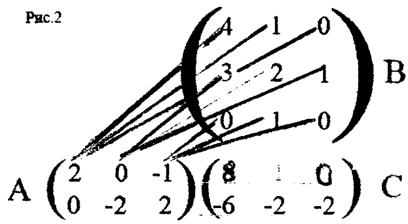
Пример 1. Найти произведение двух матриц A и B, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Удобно нахождение произведения двух матриц A и B записывать так, как на рис.2:

Рис.2



На схеме серые стрелки показывают, элементы какой строки матрицы A на элементы какого столбца матрицы B нужно перемножить для получения элементов матрицы C, а линиями цвета элемента матрицы C соединены соответствующие элементы матриц A и B, произведения которых складываются для получения элемента матрицы C.

В результате получаем элементы произведения матриц:

$$c_{11} = 2 \bullet 4 + 0 \bullet 3 + (-1) \bullet 0 = 8;$$

$$c_{12} = 2 \bullet 1 + 0 \bullet 2 + (-1) \bullet 1 = 1;$$

$$c_{13} = 2 \bullet 0 + 0 \bullet 1 + (-1) \bullet 0 = 0;$$

$$c_{21} = 0 \bullet 4 + (-2) \bullet 3 + 2 \bullet 0 - 6;$$

$$c_{22} = 0 \bullet 1 + (-2) \bullet 2 + 2 \bullet 1 = -2;$$

$$c_{23} = 0 \bullet 0 + (-2) \bullet 1 + 2 \bullet 0 = -2.$$

Теперь у нас есть всё, чтобы записать произведение двух матриц:

$$C = AB = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 \\ -6 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Найти АВ, где $A = \begin{pmatrix} 36 \\ 71 \\ 52 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$AB = \begin{pmatrix} 3\,6 \\ 7\,1 \\ 5\,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times2+6\times8 & 3\times4+6\times9 \\ 7\times2+1\times8 & 7\times4+1\times9 \\ 5\times2+2\times8 & 5\times4+2\times9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5466 \\ 2237 \\ 2638 \end{pmatrix}$$

Пример 1. Найти: С = 2А - 3(В - А), где $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$;

$B = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$

Решение. С=2А-3(В-А)=2А-3В+3А=5А-3В.

$$C = 5\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 0 \\ 20 & 35 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -18 & -3 \\ 6 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -33 & -3 \\ 26 & 50 \end{pmatrix}$$

1.4. Экономические задачи, приводящиеся к действиям над матрицами

Особенности экономических задач, решаемых математическими методами Экономическая наука, как и любая другая имеет свою специфику. Специфика ее определяется общей спецификой наук о человеке.

До того, как люди стали обмениваться продуктами своего труда, отношения между ними никак нельзя было назвать экономическими. Возникновение экономических отношений положило начало специализации труда и соответственно, всему социально-экономическому прогрессу.

На современном этапе экономические взаимоотношения между субъектами образуют экономические системы со сложной структурой, большим количеством элементов и связей между ними, которые и являются причиной почти всех особенностей экономических задач.

Здесь представлены задачи на основный операции с матрицами:

Задача №1. В три магазина завозят два раза в месяц одинаковое количество диванов, кресел, тумбочек. В первый – по 10 диванов, 6 кресел, 8 тумбочек, во второй –по 5 диванов, 7 кресел, 10 тумбочек, в третий – по 2 дивана, 3 кресла и 5 тумбочек. Во всех магазинах устанавливали одинаковые цены и меняли их в связи с завозами. Найдите суммарные месячные выручки, если в магазинах все распродали, и матрица цен выглядит так:

$$P=\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$ (цены указаны в тыс.сум.).

Решение. Найдем матрицу поступлений товаров:

$A=\begin{pmatrix} 10 & 6 & 8 \\ 5 & 7 & 10 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, а теперь найдем суммарные выручки:

$$C=\begin{pmatrix} 10 & 6 & 8 \\ 5 & 7 & 10 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (10\bullet7+6\bullet4+8\bullet3)(10\bullet8+6\bullet5+8\bullet2) \\ (5\bullet7+7\bullet4+10\bullet3)(5\bullet8+7\bullet5+10\bullet2) \\ (2\bullet7+3\bullet4+5\bullet3)(2\bullet8+3\bullet5+5\bullet2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 118 & 126 \\ 93 & 95 \\ 41 & 41 \end{pmatrix}$$

Задача №2. Поступление товаров на первый склад описывается матрицей

$$A_1=\begin{pmatrix} 16 & 20 & 100 \\ 30 & 19 & 50 \\ 26 & 34 & 82 \end{pmatrix}$$

а поступление товаров на второй склад описывается матрицей

$$A_2=\begin{pmatrix}110 & 32 & 49\\ 28 & 25 & 75\\ 37 & 16 & 86\end{pmatrix}$$

Найдите суммарный завоз товаров на склады; годовой завоз на склады, если по договору, производится ежемесячный завоз одинаковых партий товаров.

Найдем суммарный завоз:

$$A_1+A_2=\begin{pmatrix}16 & 20 & 100\\ 30 & 19 & 50\\ 26 & 34 & 82\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}110 & 32 & 49\\ 28 & 25 & 75\\ 37 & 16 & 86\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}126 & 52 & 149\\ 58 & 44 & 125\\ 63 & 50 & 168\end{pmatrix},$$

Найдем годовой завоз:

$$12(A_1+A_2)=12\begin{pmatrix}126 & 52 & 149\\ 58 & 44 & 125\\ 63 & 50 & 168\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1512 & 624 & 1788\\ 696 & 528 & 1500\\ 756 & 600 & 2016\end{pmatrix}.$$

❖ Тема-2: Детерминанты квадратных матриц.

2.1. Определители 2-го и 3-го порядка.

Под определителем (детерминантом) понимают число, соответствующее квадратной матрице любого порядка и вычисленное по определенным правилам.

Обозначают определитель матрицы **А:** Δ; Δ(А); |А|;***det A*.**

Определителем первого порядка называют число, соответствующее матрице 1-го порядка и равное ***Δ*=|*a*|=*a***

Определителем второго порядка называют число, соответствующее матрице второго порядка и равное

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Пример 1. Вычислить:

а) $\begin{vmatrix} -5 & -6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} \sin a & \cos a \\ -\cos a & \sin a \end{vmatrix}$.

Решение.

а) $\begin{vmatrix} -5 & -6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -5\times 8 - (-6)\times 7 = -40 + 42 = 2$

б) $\begin{vmatrix} \sin a & \cos a \\ -\cos a & \sin a \end{vmatrix} = \sin^2 a + \cos^2 a = 1$

2.2. Миноры и алгебраические дополнения

Рассмотрим матрицу третьего порядка: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы А называется определитель, соответствующий матрице, полученной после вычеркивания i-ой строки и j-го столбца в матрице А.

Например: $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$; $M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} , матрицы А называется минор этого элемента, вычисленный по формуле

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

Например: $A_{11}=+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$; $A_{12}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

Пример 2. Найти алгебраические дополнения элементов первой строки матрицы $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

Решение. $A_{11}=(-1)^{1+1}\times M_{11}=+\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}=48-7=41$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}=-(40-7)=-33 \qquad A_{13}=+\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1$$

Определителем третьего порядка называется число, равное сумме произведений элементов первой строки на их алгебраические дополнения

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}. \text{ или } \Delta=\sum_{j=1}^{3}a_{1j}A_{1j}$$

Пример 3. Вычислить: $\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix}$.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix}=0\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-33-3=-36$$

Определителем n-го порядка называется число, равное сумме произведений элементов первой строки на их алгебраические дополнения:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}\,a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\,a_{22}\ldots a_{2n} \\ a_{n1}\,a_{n2}\ldots a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}$$

2.3. Свойства детерминанта

1. Определитель матрицы А равен определителю транспонированной матрицы ***det*** **A** = ***det*** $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

Таким образом, строки и столбцы определителя равноправны, все дальнейшие свойства справедливы как для строк, так и для столбцов определителя.

2. Перестановка двух соседних строк (столбцов) изменит знак определителя на противоположный.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & k \end{vmatrix}.$$

3. **Формула разложения** определителя по любой строке *(столбцу)*.

Определитель равен алгебраической сумме произведений элементов любой строки (столбца) на соответствующие алгебраические дополнения.

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

4. Если две строки (столбца) определителя одинаковы, то определитель равен нулю.

$$\begin{vmatrix} . & . & \dots & . \\ a & b & \dots & c \\ . & . & \dots & . \\ a & b & \dots & c \\ . & . & \dots & . \end{vmatrix} = 0$$

5. Если элементы некоторой строки (столбца) умножить на одно и то же число k, то определитель умножится на это число. Другими словами, общий множитель элементов строки (столбца) можно вынести за знак определителя.

$$\Delta = \begin{vmatrix} . & . & \dots & . \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & ka_{in} \\ . & . & \dots & . \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} . & . & \dots & . \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ . & . & \dots & . \end{vmatrix}.$$

6. Если элементы двух строк (столбцов) определителя пропорциональны, то он равен нулю.

$$\Delta=\begin{vmatrix} . & . & \dots & . \\ a & b & \dots & c \\ ka & kb & \dots & kc \\ . & . & \dots & . \end{vmatrix}=0$$

7. Если элементы некоторой строки (столбца) являются суммой двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, соответствующие строки которых состоят из этих слагаемых:

$$\Delta=\begin{vmatrix} . & . & \dots & . \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \dots & a_{in}+b_{in} \\ . & . & \dots & . \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} . & . & \dots & . \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ . & . & \dots & . \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} . & . & \dots & . \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ . & . & \dots & . \end{vmatrix}.$$

8. Если элементы некоторой строки (столбца) равны нулю, то определитель равен нулю.

9. Алгебраическая сумма произведений элементов некоторой строки (столбца) на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) равна нулю.

$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{sk}=0,$ если $i \neq s$

10. Определитель не изменится, если к элементам некоторой строки (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца), умноженные на число k.

2.4. Вычисление детерминантов высшего порядка

Пример 4. Вычислить $\Delta=\begin{vmatrix} 4 & 2 & 10 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение.

К первой строке прибавим третью, умноженную на (-4); ко второй строке прибавим третью, умноженную на (-2); полученный определитель разложим по первому столбцу, тогда:

$$\Delta=\begin{vmatrix}0&-6&-6&-3\\0&-1&-8&-3\\1&2&4&2\\0&2&6&1\end{vmatrix}=0A_{11}+0A_{21}+1A_{31}+0A_{41}=1(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-6&-6&-3\\-1&-8&-3\\2&6&1\end{vmatrix}=(-1)(-3)\begin{vmatrix}2&2&1\\1&8&3\\2&6&1\end{vmatrix}=$$

$$=(-3)(-1)2\begin{vmatrix}2&1&1\\1&4&3\\2&3&1\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}2&1&1\\1&4&3\\2&3&1\end{vmatrix}$$

Далее к первой и третьей строкам прибавим вторую, умноженную на (-2) и разложим по элементам первого столбца.

Получим:

$$\Delta=6\begin{vmatrix}0&-7&-5\\1&4&3\\0&-5&-5\end{vmatrix}=6(-5)(-1)\begin{vmatrix}0&7&5\\1&4&3\\0&1&1\end{vmatrix}=30(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}7&5\\1&1\end{vmatrix}=-30(7-5)=-60$$

Имеет место ***формула Лапласа,*** обобщающая формулу разложения определителя по строке (свойство 3).

Рассмотрим определитель n-го порядка Δ, вычеркнем в нем произвольно *k-строк* $i_1\ i_2\ \dots\ i_k$ и k-столбцов $j_1\ \dots\ j_k$ $(k< n)$; из элементов, стоящих в этих строках и столбцах; составим определитель *k-то* порядка, назовем его минором *k-го* порядка и обозначим $M^{i_1..i_k}_{j_1..j_k}$.

Из оставшихся *(n -k)* элементов составим еще один определитель, назовем его дополнительным минором *(n-k)-го* порядка и обозначим $\overline{M}^{i_1..i_k}_{j_1..j_k}$

Теорема Лапласа:

Для любого $k<n$ и любых фиксированных $i_1,\dots,i_k$ $j_1,\dots,j_k$, таких, что $1< i_1,\dots,i_k$ $j_1,\dots,j_k$ $<n$, справедлива следующая формула:

$$\Delta=\sum(-1)^{i_1+\dots+i_k+j_1+\dots+j_k}M^{i_1..i_k}_{j_1..j_k}\cdot\overline{M}^{i_1..i_k}_{j_1..j_k}$$

Пример 5. Вычислить $\Delta=\begin{vmatrix}7&3&1&2\\6&2&0&2\\3&6&0&0\\-7&1&0&0\end{vmatrix}$

Используем теорему Лапласа. Основные миноры образуем четвертой строк. Очевидно, что здесь только один минор второго порядка M_{12}^{34} отличен от нуля, остальные равны нулю,

дополнительный минор $M_{34}^{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$.

Получим: $\Delta = (-1)^{3+4+1+2} \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 45 \times 2 = 90$.

Пример 6. Вычислить. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & 8 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение: Преобразуем определитель так, чтобы все миноры второго порядка в первых двух строках равнялись нулю. Прибавим к третьему столбцу первый, умноженный на (-4), к четвертому - второй, умноженный на (-2).

Получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -5 & 3 \\ -1 & 2 & 12 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2+1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 12 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \times (-31).$$

Замечание

При вычислении определителя третьего порядка пользуются **правилом Саррюса:**

К определителю приписывают два первых столбца: со знаком «+» берутся произведения трех элементов, стоящих на главной диагонали и на прямых, ей параллельной;

Со знаком «-» - произведения трех элементов, стоящих на второстепенной диагонали и прямых, ей параллельной.

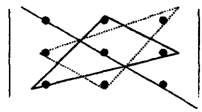
Например,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 9 & 3 \\ 7 & 8 & 5 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} + \; + \; + \quad - \; - \; - \\ \left| \begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 6 & 9 & 3 & 6 & 9 \\ 7 & 8 & 5 & 7 & 8 \end{array} \right. \end{array} =$$

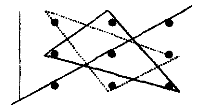
$=2\cdot 9\cdot 5+1\cdot 3\cdot 7+4\cdot 6\cdot 8-4\cdot 9\cdot 7-2\cdot 3\cdot 8-1\cdot 6\cdot 5=90+21+192-252-48-30=-27$

Этот же способ обычно называют «**методом треугольника**» и вычисления производят по следующей схеме:

Со знаком «+»:
Со знаком «-»:



главная диаг.



второстеп. диаг.

Пример 9. Вычислить $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \end{vmatrix}$

Решение:

$\Delta = 3\cdot6\cdot(-2) + 1\cdot1\cdot0 + 5\cdot5\cdot4 - 4\cdot6\cdot0 - 5\cdot1\cdot3 - 5\cdot1\cdot(-2) = -36 + 100 - 15 + 10 = 59.$

❖ Тема-3: Обратная матрица и решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы

3.1. Теорема об обратной матрице.

Пусть А - квадратная матрица порядка n; Е - единичная матрица того же порядка; Матрица В называется **обратной** для матрицы А, если

$$\mathbf{AB = BA = E.}$$

Обозначают обратную матрицу A^{-1}.

Матрица А называется **невырожденной,** если ее определитель отличен от нуля: **det A≠ 0**

Теорема существования обратной матрицы: Для каждой невырожденной матрицы А существует обратная A^{-1}.

Теорема единственности обратной матрицы: Если у некоторой матрицы существует обратная, то она только одна.

Доказательство.

Пусть A_1^{-1} и A_2^{-1}- обратные матрицы для А, тогда

$$A\cdot(A_1^{-1}-A_2^{-1})=A\cdot A_1^{-1}-A\cdot A_2^{-1}=E-E=0$$

Умножим слева на A_1^{-1} последнее выражение, получим

$$A_1^{-1}\cdot A(A_1^{-1}-A_2^{-1})=A_1^{-1}\cdot 0,$$

Так как A_1^{-1}A=E, то $A_1^{-1}-A_2^{-1}=0$ или $A_1^{-1}=A_2^{-1}$

Алгоритм построения обратной матрицы:

1. Найдем Δ - определитель матрицы A. Если Δ≠0, то A^{-1} существует, в противном случае обратная матрица не существует

2. Найдем все алгебраические дополнения элементов матрицы A, то есть: $A_{ij}=\left(i=\overline{1,m};\, j=\overline{1,n}\right)$

3. Запишем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

(Обратите внимание, что матрица из алгебраических дополнений транспонирована).

Упражнения. Покажите, что:

1. $A \cdot A^{-1} = E$ и $A^{-1} \cdot A = E$
2. $(A^{-1})^{-1} = A$
3. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Пример 10. Найти матрицу, обратную для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -4 & 6 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем определитель матрицы А:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -4 & 6 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - 0 + 2\begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 29 - 16 = 13,$$

определитель не равен нулю, следовательно, обратная матрица существует. Найдем все алгебраические дополнения:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 29; \quad A_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -12;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 26; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = -13;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -8; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 6.$$

Итак, обратная матрица имеет вид: $A^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 29 & -2 & 12 \\ 26 & 0 & -13 \\ -8 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$

3.2. Алгоритм решения системы линейных уравнений методом обратной матрицы.

Матричный метод может применяться в решении систем линейных уравнений, в которых число неизвестных равно числу уравнений, то есть систем линейных уравнений с квадратной матрицей коэффициентов при неизвестных.

Другое условие применимости матричного метода - невырожденность матрицы коэффициентов при неизвестных, то есть неравенство нулю определителя этой матрицы.

Систему линейных уравнений, при выполнении вышеназванных условий, можно представить в матричном виде, а затем решить её путём отыскания обратной матрицы к матрице системы.

Решение систем линейных уравнений матричным методом основано на следующем свойстве обратной матрицы: произведение обратной матрицы и исходной матрицы равно единичной матрице. Обратная матрица обозначается символом A^{-1}.

Пусть нужно решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Запишем эту систему уравнений в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Обозначим отдельно как A матрицу коэффициентов при неизвестных и как B матрицу неизвестных и матрицу свободных членов

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A \bullet X = B$$
$$A^{-1} \bullet A \bullet X = A^{-1} \bullet B$$
$$X = A^{-1} \bullet B$$

То есть, для нахождения решений системы нужно обе части уравнения умножить на матрицу, обратную матрице коэффициентов при неизвестных A^{-1} и приравнять соответствующие элементы полученных матриц.

Алгоритм решения системы линейных уравнений матричным методом разберём на следующем примере системы линейных уравнений второго порядка.

Пример 2. Решить матричным методом систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ -2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Шаг 1. Составляем следующие матрицы.
Матрица коэффициентов при неизвестных:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица неизвестных:

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Матрица свободных членов:

$$B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Проверим, не является ли матрица коэффициентов при неизвестных вырожденной:

$$|A| = 2\bullet(-2)\bullet 1+(-1)\bullet 2\bullet 3+0-$$
$$-3\bullet(-2)\bullet 3-0-2\bullet 1\bullet 2=18-14=4.$$

Определитель этой матрицы не равен нулю, следовательно, можем применять матричный метод.

Шаг 2. Находим матрицу, обратную матрице коэффициентов при неизвестных:

$$A^{-1}=\frac{1}{4}\bullet\begin{pmatrix}-4 & 4 & 4\\ 6 & -7 & -4\\ 6 & -5 & -4\end{pmatrix}.$$

Шаг 3. Находим матрицу неизвестных:

$$X=\frac{1}{4}\bullet\begin{pmatrix}-4 & 4 & 4\\ 6 & -7 & -4\\ 6 & -5 & -4\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ -1\end{pmatrix}.$$

Итак, получили решение:

$$x_1=1;\ x_2=-2;\ x_3=-1.$$

Сделаем проверку:

$$\begin{cases}2\bullet 1-(-2)+3\bullet(-1)=1\\ -2\bullet(-2)+2\bullet(-1)=2\\ 3\bullet 1+(-2)+(-1)=0\end{cases}$$

Следовательно, ответ правильный.

3.3. Применение в экономике

Задача 1. В цехе предприятия изготовляют две модели женской одежды. На изготовление первой модели тратят 2 м ткани, на изготовление второй – 3 м. При этом расходы рабочего времени на производство этих моделей составляют соответственно 4 и 5 часов. Известно, что недельный запас ткани – 100 м, а рабочее время ограниченно 190 часов.

Составить такой план недельного изготовления этих моделей одежды, при которой полностью используют ресурсы (ткань и рабочее время).

	1-я модель (x_1)	**2-я модель (x_2)**	**Общ расходы (ресурсы)**
Расходы материала на изготовление моделей (м)	2 м	3 м	100 м
Расходы рабочего времени (час)	4 ч	5 ч	190 ч

Обозначим через x_1 и x_2 количество единиц недельного выпуска первой и второй моделей соответственно. По условию задачи составим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 100 \\ 4x_1 + 5x_2 = 190 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 100 \\ 190 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad X = A^{-1} \cdot B$$

Для матрицы A найдем обратную матрицу A^{-1}.

Поскольку

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2, \quad A_{11} = 5, \quad A_{12} = -4, \quad A_{21} = -3, \quad A_{22} = 2$$

тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Получим решение системы

$$X = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 190 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 500 - 570 \\ -400 + 380 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -70 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = 35, \quad x_2 = 10.$$

Следовательно, для полного использования ресурсов еженедельно нужно изготовлять 35 единиц первой и 10 единиц второй моделей одежды.

Вывод. Заметим, что при решении экономических задач удобно использовать матричный способ.

Вычислив один раз обратную матрицу и изменяя ограничение на ресурсы (ежедневные, еженедельные, ежемесячные, ежегодные и тому подобное), **будем получать** каждый раз из равенства $X = A^{-1} \cdot B$ соответствующий план выпуска продукции.

Заметим, что применение матриц в этой задаче привело к наглядности, упрощению и компактности вычислений.

Задача № 2. Рассмотрим упрощенную модель финансовой математики, которую условно называют «портфельными инвестициями».

В реальной жизни одним из источников финансирования являются международные инвестиции. Страна может получать и давать международные займы, принимать и инвестировать за границу капитал. Продажа активов в любой фирме (права собственности, ценные бумаги, золото и т.п.) означает прилив капитала в страну. Среди инвестиций есть портфельные – вложение капитала в иностранные ценные бумаги, которые не дают инвестору права реального контроля над объектом инвестирования. Такие инвестиции основываются, как правило, на частном капитале.

Допустим, что инвесторы могут вкладывать деньги в активы, в облигации (которые дают точную финансовую прибыль), акции (дают прибыль, которая может меняться), в землю. Пусть после выборов в данной стране к власти может прийти одна из двух политических партий x_1 и x_2. Понятно, что доход от капиталовложения зависит от государственного правительства страны.

Итак, правительство x_1 партии может увеличивать цену на землю и уменьшать цену акций, а правительство партии x_2 наоборот. Например, имеем таблицу:

Активы	Партия	Партия	Вложения инвесторов
Земля	1,25	0,95	$ 50 000
Облигации	1,05	1,05	$ 100 000
Акции	0,90	1,15	$ 40 000

Данную таблицу можно записать как матрицу $R=(r_{ij}),\quad i=1,2,3;\quad j=1,2$ размера 3×2, что означает **доход от каждого актива:**

$$R=\begin{pmatrix}1,25 & 0,95\\ 1,05 & 1,05\\ 0,90 & 1,15\end{pmatrix}$$

Пусть инвесторы решили вложить $ 50 000 в землю, $ 100 000 –в облигации и $ 40 000 – в акции. Тогда получим матрицу – строку P размера 1×3: $P=(50\,000\quad 100\,000\quad 40\,000)$ которая **характеризует портфельные инвестиции.**

Произведение матриц PR будет матрица размера 1×2, которая характеризует возможные стоимости портфельных инвестиций, если на выборах победит партия x_1 и x_2.

$$PQ=(50\,000\quad 100\,000\quad 40\,000)\cdot\begin{pmatrix}1,25 & 0,95\\ 1,05 & 1,05\\ 0,90 & 1,15\end{pmatrix}=$$

$$=(50\,000\cdot 1,25+100\,000\cdot 1,05+40\,000\cdot 0,90\quad 50\,000\cdot 0,95+100\,000\cdot 1,05+40\,000\cdot 1,15)=$$

$$=(203\,500\quad 198\,500)$$

Можно сделать вывод, если на выборах победит партия x_1, то стоимость портфеля составит $ 203 500, а если партия x_2 -то $ 198 500.

Тема-4: Решение систем линейных уравнений методами Крамера и Гаусса.

4.1. Метод Крамера

Метод Крамера основан на использовании определителей в решении систем линейных уравнений. Это значительно ускоряет процесс решения.

Метод Крамера может быть использован в решении системы стольких линейных уравнений, сколько в каждом уравнении неизвестных. Если определитель системы не равен нулю, то метод Крамера может быть использован в решении, если же равен нулю, то не может. Кроме того, метод Крамера может быть использован в решении систем линейных уравнений, имеющих единственное решение.

Определение. Определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, называется определителем системы и обозначается Δ (дельта).

Определители $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}$ получаются путём замены коэффициентов при соответствующих неизвестных свободными членами:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2;$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

Формулы Крамера для нахождения неизвестных:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}.$$

Найти значения x_1 и x_2 возможно только при условии, если $\Delta \neq 0$.

Этот вывод следует из следующей теоремы.

Теорема Крамера. Если определитель системы отличен от нуля, то система линейных уравнений имеет одно единственное решение, причём неизвестное равно отношению определителей. В знаменателе – определитель системы, а в числителе – определитель, полученный из определителя системы путём замены коэффициентов при этом неизвестном свободными членами. Эта теорема имеет место для системы линейных уравнений любого порядка.

Пример 1. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + 4x_2 = -3 \end{cases}. \qquad (2)$$

Согласно теореме Крамера имеем:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{1 \bullet 4 - 2 \bullet (-3)}{3 \bullet 4 - 1 \bullet 2} = \frac{4+6}{12-2} = \frac{10}{10} = 1,$$

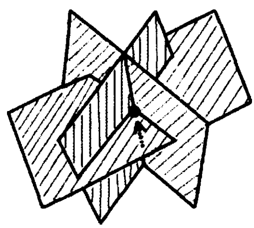
$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{3 \bullet (-3) - 1 \bullet 1}{3 \bullet 4 - 1 \bullet 2} = \frac{-9-1}{12-2} = \frac{-10}{10} = -1.$$

Итак, решение системы $x_1 = 1, x_2 = -1$ (2):

Три случая при решении систем линейных уравнений

Как явствует из *теоремы Крамера*, при решении системы линейных уравнений могут встретиться три случая:

Первый случай: система линейных уравнений имеет единственное решение (система $\Delta \neq 0$, совместна и определённа) Условия: *



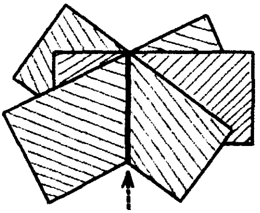
Второй случай: система линейных уравнений имеет бесчисленное множество решений (система совместна и неопределённа)

Условия:

* $\Delta = 0$,

** $\Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \ldots = \Delta_{x_n} = 0$,

т.е. коэффициенты при неизвестных и свободные члены пропорциональны.

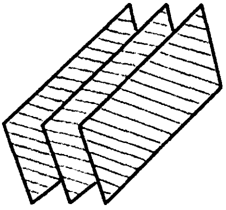


Третий случай: система линейных уравнений решений не имеет (система несовместна)

Условия:

* $\Delta = 0$,

** $\Delta_{x_1} \neq 0,\ \Delta_{x_2} \neq 0, \ldots, \Delta_{x_n} \neq 0$.



Итак, система m линейных уравнений с n переменными называется *несовместной*, если у неё нет ни одного решения, и *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение. Совместная система уравнений, имеющая только одно решение, называется *определённой*, а более одного – *неопределённой*.

Пример 2. Решить систему линейных уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}.$$

Решение. Находим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \bullet \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + 0 - 2 - 1 - 0 + 1 = -2.$$

В первоначальном определителе из элементов второй строки были вычтены элементы четвёртой строки, из элементов третьей строки - элементы четвёртой строки, умноженной на 2, из элементов четвёртой строки - элементы первой строки, умноженной на 2. Преобразования первоначальных определителей при трёх первых неизвестных произведены по такой же схеме. Находим определители при неизвестных

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & -1 & 2 \\ 12 & 5 & -3 & 4 \\ 6 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \bullet \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \bullet 1 \bullet \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2.$$

$$\Delta_{x_2}=\begin{vmatrix}2&4&-1&1\\4&6&-1&2\\8&12&-3&4\\3&6&-2&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&4&-1&1\\1&0&1&0\\2&0&1&0\\-1&-2&0&0\end{vmatrix}=$$

$$=1\bullet\begin{vmatrix}1&0&1\\2&0&1\\-1&-2&0\end{vmatrix}=$$

$$=1\bullet\begin{vmatrix}1&0&1\\1&0&0\\-1&-2&0\end{vmatrix}=1\bullet1\bullet\begin{vmatrix}1&0\\-1&-2\end{vmatrix}=-2.$$

$$\Delta_{x_3}=\begin{vmatrix}2&2&4&1\\4&3&6&2\\8&5&12&4\\3&3&6&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&2&4&1\\1&0&0&0\\2&-1&0&0\\-1&-1&-2&0\end{vmatrix}=$$

$$=1\bullet\begin{vmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-1&-1&-2\end{vmatrix}=$$

$$=1\bullet1\bullet\begin{vmatrix}-1&0\\-1&-2\end{vmatrix}=2.$$

$$\Delta_{x_4}=\begin{vmatrix}2&2&-1&4\\4&3&-1&6\\8&5&-3&12\\3&3&-2&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&2&-1&4\\1&0&1&0\\8&5&-3&12\\3&3&-2&6\end{vmatrix}=$$

$$=1\bullet\begin{vmatrix}2&-1&4\\5&-3&12\\3&-2&6\end{vmatrix}+1\bullet\begin{vmatrix}2&2&4\\8&5&12\\3&3&6\end{vmatrix}=$$

$$=1\bullet(-36-36-40+36+30+48)+$$

$$+1\bullet(60+72+96-60-96-72)=$$

$$=78-76=2.$$

Для преобразований определителя при четвёртом неизвестном из элементов первой строки были вычтены элементы четвёртой строки.

По формулам Крамера находим:

$$x_1 = \frac{-2}{-2} = 1, \quad x_2 = \frac{-2}{-2} = 1, \quad x_3 = \frac{2}{-2} = -1, \quad x_4 = \frac{2}{-2} = -1.$$

Итак, решение системы - (1; 1; -1; -1).

4.2. Метод Гаусса.

Метод Гаусса, называемый также методом последовательного исключения неизвестных, состоит в следующем. При помощи элементарных преобразований систему линейных уравнений приводят к такому виду, чтобы её матрица из коэффициентов оказалась трапециевидной (то же самое, что треугольной или ступенчатой) или близкой к трапециевидной (прямой ход метода Гаусса, далее - просто прямой ход).

Преимущества метода:

1. При решении систем линейных уравнений с числом уравнений и неизвестных более трёх метод Гаусса не такой громоздкий, как метод Крамера, поскольку при решении методом Гаусса необходимо меньше вычислений;
2. Методом Гаусса можно решать неопределённые системы линейных уравнений, то есть, имеющие общее решение (и мы разберём их на этом уроке), а, используя метод Крамера, можно лишь констатировать, что система неопределённа;
3. Можно решать системы линейных уравнений, в которых число неизвестных не равно числу уравнений (также разберём их на этом уроке);

Пример 4. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11 \end{cases}$$

Решение. Составляем расширенную матрицу системы. С помощью первого уравнения исключаем из последующих уравнений переменную x_1. Для этого ко второй строке прибавляем первую, умноженную на $-\frac{2}{1}$, к третьей строке - первую, умноженную на $-\frac{3}{1}$, к четвёртой - первую, умноженную на $-\frac{2}{1}$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -5 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & 11 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -8 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & 9 \end{array}\right)$$

Теперь нужно с помощью второго уравнения исключить переменную x_2 из последующих уравнений. Проведём подготовительные работы. Чтобы было удобнее с отношением коэффициентов, нужно получить единицу в во втором столбце второй строки. Для этого из второй строки вычтем третью, а полученную в результате вторую строку умножим на -1.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -8 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & 9 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & -8 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -8 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & 9 \end{array}\right)$$

Проведём теперь собственно исключение переменной x_2 из третьего и четвёртого уравнений. Для этого к третьей строке прибавим вторую, умноженную на $\frac{4}{1}$, а к четвёртой - вторую, умноженную на $\frac{7}{1}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & \vert & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & \vert & -8 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & \vert & -8 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & \vert & 9 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & \vert & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & \vert & -8 \\ 0 & 0 & -18 & 36 & \vert & -40 \\ 0 & 0 & -18 & 54 & \vert & -47 \end{pmatrix}.$$

Теперь с помощью третьего уравнения исключим переменную x_3 из четвёртого уравнения. Для этого к четвёртой строке прибавим третью, умноженную на $-\frac{18}{18} = -1$. Получаем расширенную матрицу трапециевидной формы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & \vert & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & \vert & -8 \\ 0 & 0 & -18 & 36 & \vert & -40 \\ 0 & 0 & -18 & 54 & \vert & -47 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & \vert & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & \vert & -8 \\ 0 & 0 & -18 & 36 & \vert & -40 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & \vert & -7 \end{pmatrix}.$$

Получили систему уравнений, которой эквивалентна заданная система:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_2 - 2x_3 + 7x_4 = -8 \\ -18x_3 + 36x_4 = -40 \\ 18x_4 = -7 \end{cases}$$

Следовательно, полученная и данная системы являются совместными и определёнными. Окончательное решение находим «с конца». Из четвёртого уравнения непосредственно можем выразить значение переменной "икс четвёртое":

$$x_4 = -\frac{7}{18}.$$

Это значение подставляем в третье уравнение системы и получаем

$-18x_3+36\bullet\left(-\frac{7}{18}\right)=-40$, откуда находим "икс третье": $x_3=\frac{13}{9}$.

Далее, подставляем значения x_3 и x_4 во второе уравнение системы:
$x_2=2\bullet\frac{13}{9}+7\bullet\left(-\frac{7}{18}\right)-8$, т.е. $x_2=-\frac{43}{18}$.

Наконец, подстановка значений x_2,x_3,x_4 в первое уравнение даёт
$x_1+2\bullet\left(-\frac{43}{18}\right)+3\bullet\left(\frac{13}{9}\right)-2\bullet\left(-\frac{7}{18}\right)=1$, откуда находим "икс первое": $x_1=\frac{2}{3}$.

Ответ: данная система уравнений имеет единственное решение .
$\left(x_1=\frac{2}{3},\ x_2=-\frac{43}{18},\ x_3=\frac{13}{9},\ x_4=-\frac{7}{18}\right)$

4.3. Применение системы линейных уравнений в экономике

Системы линейных уравнений применяются для моделирования реальных объектов физического мира. Решим одну из таких задач - на сплавы. Аналогичные задачи - задачи на смеси, стоимость или удельный вес отдельных товаров в группе товаров и тому подобные.

Пример 5. Три куска сплава имеют общую массу 150 кг. Первый сплав содержит 60% меди, второй - 30%, третий - 10%. При этом во втором и третьем сплавах вместе взятых меди на 28,4 кг меньше, чем в первом сплаве, а в третьем сплаве меди на 6,2 кг меньше, чем во втором. Найти массу каждого куска сплава.

Решение. Составляем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x+y+z=150 \\ 0,6x-0,3y-0,1z=28,4 \\ 0,3y-0,1z=6,2 \end{cases}$$

Умножаем второе и третье уравнения на 10, получаем эквивалентную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x \quad +y \quad +z=150 \\ 6x \ -3y \ -z=284 \\ \quad\ 3y \quad -z=62 \end{cases}$$

Составляем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 150 \\ 6 & -3 & -1 & 284 \\ 0 & 3 & -1 & 62 \end{array}\right)$$

Внимание, прямой ход. Путём сложения (в нашем случае - вычитания) одной строки, умноженной на число (применяем два раза) с расширенной матрицей системы происходят следующие преобразования:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 150 \\ 6 & -3 & -1 & 284 \\ 0 & 3 & -1 & 62 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 150 \\ 0 & -9 & -7 & -616 \\ 0 & 3 & -1 & 62 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 150 \\ 0 & 9 & 7 & 616 \\ 0 & 3 & -1 & 62 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 150 \\ 0 & 9 & 7 & 616 \\ 0 & & -10 & -430 \end{array}\right)$$

Прямой ход завершился. Получили расширенную матрицу трапециевидной формы. Применяем обратный ход. Находим решение с конца. Видим, что $z=43$. Из второго уравнения находим $y=35$, Из третьего уравнения - $x=72$.

❖ Тема-5: Комплексные числа.

5.1. Происхождение и определение комплексных чисел.

Комплексные числа вводятся в связи с тем, что действительных чисел недостаточно, чтобы решить любое квадратное уравнение с действительными коэффициентами. Простейшее из **квадратных уравнений**, не имеющих корней среди действительных чисел, есть

$$x^2 + 1 = 0.$$

Задача такова: нужно расширить систему действительных чисел до такой системы чисел, в которой это уравнение обладало бы корнем.

Решение: $x^2 = -1$, $x = \sqrt{-1}$, где $\sqrt{-1}$ - квадратный корень из минус единицы - мнимая единица, обозначаемая буквой i.

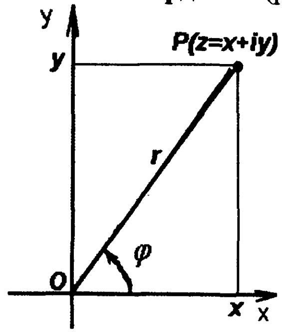
Продвинемся ещё на шаг к алгебрической форме записи комплексных чисел. Квадратное уравнение
$x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) = 0$
имеет корни $x_1 = a + ib$ и $x_2 = a - ib$, где $i = \sqrt{-1}$ - квадратный корень из минус единицы.

Таким образом, у комплексных чисел есть действительная и мнимая части. В алгебраической записи комплексного числа $z=x+iy$ есть действительная часть x и мнимая часть iy.

В литературе часто встречается обобщённая алгебраическая форма комплексного числа с другими буквами: $z=a+bi$. Здесь же дана запись $z = x + iy$ только для того, чтобы было более понятно отображение комплексного числа в привычной системе координат с осями x и y.

5.2. Способы задания комплексных чисел

Отображая на плоскости горизонтальную ось x как ось действительных чисел, а вертикальную ось y как ось мнимых чисел, можно любое комплексное число $z = x + iy$ отобразить как точку P в **декартовой системе координат** (рисунок ниже).



Поэтому возможна и запись комплексного числа в тригонометрической форме:

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ - модуль комплексного числа, φ (аргумент комплексного числа) - угол, который радиус-вектор $\overrightarrow{OP}$ образует с осью Ox. Теперь мы видим, что более подходящим является сравнение записи комплексного числа в тригонометрической форме с отображением точки в полярной системе координат.

Обобщим ещё раз понятие модуля и аргумента комплексного числа. Модуль комплексного числа - это расстояние от начала координат до точки, в виде которой отображается комплексного числа или, что то же самое - длина радиус-вектора $\overrightarrow{OP}$. Аргумент комплексного числа - это угол, который радиус-вектор $\overrightarrow{OP}$ образует с осью Ox.

Теперь о том, как перейти от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической. Доказано, что

$x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$.

Поэтому можем легко найти косинус и синус аргумента комплексного числа:

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r}.$$

Пример 1. Найти тригонометрическую форму числа $1+i$.

Решение. Сначала найдём модуль комплексного числа. Для этого в соответствии с обобщенной записью числа $z = a + bi$ запишем данное число как $z = 1 + 1i$, где a = 1 и b = 1. Из этого получаем модуль данного числа - квадратный корень из 1 + 1 = 2, что равно $\sqrt{2}$. Чтобы определить аргумент числа, учтём, что $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. То есть, значение угла φ равно $\frac{\pi}{4}$. Поэтому получаем тригонометрическую форму данного комплексного числа:

$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Пример 2. Найти тригонометрическую форму комплексного числа 1.

Возможны возражения: 1 - это же обычное, точнее, действительное число. Это так. Но это число можно представить и как комплексное число $1+i0$, то есть, комплексное число, в котором a = 1 и b = 0.

Решение. Модуль данного числа $r = |z| = \sqrt{1+0} = \sqrt{1} = 1$. Чтобы определить аргумент числа, найдём $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$ и $\sin\varphi = \frac{0}{\sqrt{1}} = 0$. Следовательно, аргумент комплексного числа $\varphi = 0$. Получили тригонометрическую форму данного комплексного числа:

$$1 = \cos 0 + i\sin 0.$$

Пример 3. Найти тригонометрическую форму комплексного числа $-1-i$.

Решение. Модуль данного числа $r = |z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Чтобы определить аргумент числа, найдём $\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Для нахождения угла с таким косинусом и таким синусом повернём воображаемый циркуль от угла 0 до π и ещё на $\frac{\pi}{4}$. Получаем $\varphi=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{4\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$.

Следовательно, аргумент комплексного числа $\varphi=\frac{5\pi}{4}$. Получили тригонометрическую форму данного комплексного числа:

$$-1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right).$$

Пример 4. Найти тригонометрическую форму комплексного числа $2i$.

Решение. Модуль данного числа $r=|z|=\sqrt{0+4}=2$. Чтобы определить аргумент числа, найдём $\cos\varphi=\frac{0}{2}=0$ и $\sin\varphi=\frac{2}{2}=1$. Аргумент, то есть угол, у которого найденный косинус и найденный синус, определяется однозначно: $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Получили тригонометрическую форму данного комплексного числа:

$$2i=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

Пример 5. Найти тригонометрическую форму комплексного числа •3.

Решение. Модуль данного числа $r=|z|=\sqrt{9+0}=3$. Чтобы определить аргумент числа, найдём $\cos\varphi=-\frac{3}{3}=-1$ и $\sin\varphi=\frac{0}{3}=0$. Аргумент, то есть угол, у которого найденный косинус и найденный синус, определяется однозначно: $\varphi=\pi$. Получили тригонометрическую форму данного комплексного числа:

$$-3=3(\cos\pi+i\sin\pi).$$

Пример 6. Найти тригонометрическую форму комплексного числа $1-i$.

Решение. Модуль данного числа $r=|z|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$. Чтобы определить аргумент числа, найдём $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\sin\varphi=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Чтобы найти угол, у которого найденный косинус и найденный синус, отвыкшим от школьных лет и тригонометрии, возможно, придётся чуть побольше попыхтеть, вращая воображаемый циркуль по координатной плоскости. Вот они, шаги вычисления угла: поворачиваем циркуль на π, затем на $\frac{\pi}{2}$ и на $\frac{\pi}{4}$ Получаем $\varphi=\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{4\pi}{4}+\frac{2\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$. Получили тригонометрическую форму данного комплексного числа:

$$1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

Пример 7. Найти тригонометрическую форму комплексного числа $\sqrt{3}-i$.

Решение. Модуль данного числа $r=|z|=\sqrt{3+1}=2$. Чтобы определить аргумент числа, найдём $\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\sin\varphi=-\frac{1}{2}$. Шаги вычисления угла, то есть аргумента: поворачиваем циркуль на π, затем на $\frac{\pi}{2}$ и на $\frac{\pi}{3}$ Получаем $\varphi=\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{6\pi}{6}+\frac{3\pi}{6}+\frac{2\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}$. Получили тригонометрическую форму данного комплексного числа:

$$\sqrt{3}-i=2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right).$$

5.3. Действия над комплексными числами.

Сложение и умножение комплексных чисел.

Комплексное число а можно задать парой действительных чисел (его координатами) $(a_1;\ a_2)$. Два комплексных числа а и $b=(b_1;\ b_2)$ равны тогда и только тогда, когда $a_1=b_1$ и $a_2=b_2$.

В чём геометрический смысл сложения комплексных чисел?

На плоскости, где каждое комплексное число $z=(z_1;\ z_2)$ отображено как вектор, идущий от начала коодинат 0 до точки $(z_1;\ z_2)$, сложение комплексных чисел сводится к сложению соответствующих векторов по правилу параллелограмма (рисунок перед примером).

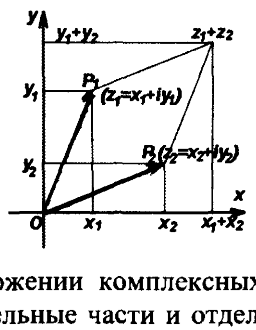
Поэтому сложение двух комплексных чисел a и b в координатной форме может быть представлено следующей формулой: $(a_1;\ a_2)+(b_1;\ b_2)=(a_1+b_1;\ a_2+b_2)$.

Вычитание же комплексного числа из комплексного числа может быть представлено формулой $(a_1;\ a_2)-(b_1;\ b_2)=(a_1-b_1;\ a_2-b_2)$.

А для того, чтобы произвести алгебраические операции сложения и вычитания комплексных чисел, следует использовать следующие формулы:

$$(a_1+a_2i)+(b_1+b_2i)=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)i.$$

$$(a_1+a_2i)-(b_1+b_2i)=(a_1-b_1)+(a_2-b_2)i.$$

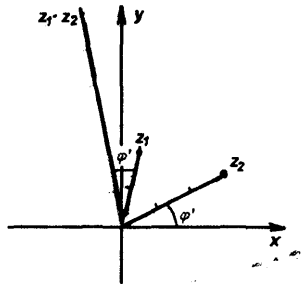


То есть, при сложении комплексных чисел складываются отдельно их действительные части и отдельно их мнимые части. Аналогичное правило действует и для вычитания.

При умножении комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, получено следующее правило: модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей сомножителей, то есть аргумент произведения комплексных чисел равен сумме аргументов сомножителей. В свою очередь модуль частного двух комплексных чисел равен модулю делимого, делённому на модуль делителя, то есть аргумент частного двух комплексных чисел получается вычитанием аргумента делителя из аргумента делимого.

Из этого легко понять геометрический смысл умножения и деления комплексных чисел. При умножении получается точка, изображающая произведение числа z_1 на число z_2, если вектор, идущий от 0 к z_1, повернём против часовой стрелки на угол φ, являющийся аргументом числа z_2, а затем растянем этот вектор в z_2 раз. При делении это будет сжатием, а не растяжением.

Всё описанное выше проиллюстрировано на рисунке ниже.



При умножении двух комплексных чисел получается выражение

$$(a_1;\ a_2)\cdot(b_1;\ b_2)=(a_1+ia_2)(b_1+ib_2)=$$
$$=a_1b_1-a_2b_2+i(a_1b_2+a_2b_1).$$

Пример 1. Сложить и умножить комплексные числа $2+i$ и $3+4i$.

Решение. Для сложения чисел производим следующие вычисления:

$$(2+i)+(3+4i)=(2+3)+i(1+4)=$$
$$=5+5i.$$

Теперь умножаем:

$$(2+i)\cdot(3+4i)=(2\cdot3-1\cdot4)+(2\cdot4+1\cdot3)i=$$
$$=2+11i.$$

Пример 2. Сложить и умножить комплексные числа $2+i$ и $3+4i$.

Решение. Для сложения чисел производим следующие вычисления:

$$(2+i)+(3+4i)=(2+3)+i(1+4)=$$
$$=5+5i.$$

Теперь умножаем:

$$(2+i)\cdot(3+4i)=(2\cdot 3-1\cdot 4)+(2\cdot 4+1\cdot 3)i=$$
$$=2+11i.$$

Пример 3. Выполнить операцию сложения комплексных чисел $2+5i$ и $1-7i$.

Решение. Применяем формулу сложения, не путаем знаки перед мнимой частью второго числа и получаем:

$$(2+5i)+(1-7i)=(2+1)+(5-7)i=$$
$$=3-2i.$$

Пример 4. Выполнить операцию вычитания из комплексного числа $3-9i$ комплексного числа $7+i$.

Решение. Применяем формулу вычитания и, опять же, не путаясь в знаках, получаем:

$$(3-9i)-(7+i)=(3-7)+(-9-1)i=$$
$$=-4-10i.$$

Пример 5. Выполнить операцию умножения комплексных чисел $1+2i$ и $3-i$.

Решение. Применяем формулу для умножения и получаем:

$$(1+2i)(3-i)=$$
$$=\left[1\bullet 3-2\bullet(-1)\right]+\left[1\bullet(-1)+2\bullet 3\right]i=$$
$$=5+5i.$$

Пример 6. Найти x и y, считая их вещественными, в уравнении

$$(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i.$$

Решение. Подвоха нет: умножение на икс и игрек - это именно умножение по всем правилам алгебры. Раскрываем скобки:

$$(x+2xi)+(3y-5yi)=1-3i.$$

Теперь нужно привести левую часть полученного выражения к алгебраической форме комплексного числа, записываем отдельно действительную и мнимую части:

$$(x+3y)+(2x-5y)i=1-3i.$$

Решаем отдельно уравнение для действительной части и для мнимой части. То есть записываем систему уравнений:

$$\begin{cases} x+3y=1 \\ (2x-5y)i=-3i \end{cases}$$

Второе уравнение сокращаем на i - мнимую единицу, система приобретает вид

$$\begin{cases} x+3y=1 \\ 2x-5y=-3 \end{cases}$$

Из первого уравнения выражаем икс и подставляем во второго уравнение:

$$x=1-3y$$
$$2(1-3y)-5y=-3$$

Находим икс и игрек - получаем решение задачи:

$$y=\frac{5}{11};$$
$$x=-\frac{4}{11}.$$

Пример 7. Проверить тождество:

$$x^4+4=(x-1-i)(x-1+i)(x+1+i)(x+1-i).$$

Решение. Обозначим, какие умножения в какой очерёдности выполняем:

$$x^4+4=\underbrace{\underbrace{\underbrace{(x-1-i)(x-1+i)}_{I}(x+1+i)}_{II}(x+1-i)}_{III}.$$

Находим произведение I. По всем правилам умножения комплексных чисел. Помним, что икс - это составная действительной части комплексного числа:

$$
\begin{aligned}
&(x-1-i)(x-1+i)= \\
&=\left[(x-1)(x-1)-(-1)\bullet 1\right]+ \\
&+\left[(x-1)\bullet 1+(-1)\bullet(x-1)i\right]= \\
&=\left(x^2-2x+1+1\right)+0i= \\
&=\left(x^2-2x+2\right)+0i.
\end{aligned}
$$

По тем же правилам находим произведение II:

$$
\begin{aligned}
&\left(x^2-2x+2+0i\right)(x+1+i)= \\
&=\left[\left(x^2-2x+2\right)(x+1)-0\bullet 1\right]+ \\
&+\left[\left(x^2-2x+2\right)\bullet 1+0\bullet 1\right]i= \\
&=\left(x^3-2x^2+2x+x^2-2x+2\right)+\left(x^2-2x+2\right)= \\
&=\left(x^3-x^2+2\right)+\left(x^2-2x+2\right)i.
\end{aligned}
$$

Так же, не открывая никаких новых правил, а просто последовательно применяя правила умножения комплексных чисел, находим произведение:

$$
\begin{aligned}
&\left[\left(x^3-x^2+2\right)+\left(x^2-2x+2\right)i\right]\bullet(x+1-i)= \\
&=\left[\left(x^3-x^2+2\right)(x+1)-\left(x^2-2x+2\right)\bullet(-1)\right]+ \\
&+\left[\left(x^3-x^2+2\right)(-1)+\left(x^2-2x+2\right)(x+1)\right]i= \\
&=\left[\left(x^4-x^3+2x+x^3-x^2+2\right)-\left(-x^2+2x-2\right)\right]+ \\
&+\left[-x^3+x^2-2+x^3-2x^2+2x+x^2-2x+2\right]i= \\
&=x^4+4+0i=x^4+4.
\end{aligned}
$$

Как видим, тождество доказано.

Для комплексных чисел понятия "больше" и "меньше" не могут быть разумно определены, так как эти числа, в отличие от действительных чисел, располагаются не на прямой линии, точки которой естественным образом упорядочены, а на плоскости. Поэтому сами комплексные числа (но не их модули!) никогда нельзя соединять знаком неравенства.

Сопряженные числа и их свойства

Пусть $a=a_1+a_2i$ - комплексное число. Число $\bar{a}=a_1-a_2i$, отличающееся от числа а лишь знаком при мнимой части, называется числом, сопряжённым с а.

Свойства сопряжённых чисел

1) $\bar{\bar{a}}=a$ (число, сопряжённое сопряжённому числу, равно данному числу);

2) если a и b - комплексные числа, то $\overline{(a+b)}=\bar{a}+\bar{b}$ и $\overline{(a\cdot b)}=\bar{a}\cdot\bar{b}$ (число, сопряжённое с суммой двух чисел, равно сумме чисел, сопряжённых со слагаемыми и число, сопряжённое с произведением, равно произведению чисел, сопряжённых с сомножителями).

3) если $c=a+bi$, то $c+\bar{c}=2a$ и $c\cdot\bar{c}=a^2+b^2$ - положительное действительное число, равное нулю тогда и только тогда, когда $c=0$, т. е. когда $a=0$ и $b=0$.

Пример 8. Даны комплексные числа $z=2-3i$ и $w=-5+4i$. Убедиться в справедливости свойств сопряжённых чисел.

Решение. Сопряжёнными данным комплексным числам являются числа $\bar{z}=2+3i$ и $\bar{w}=-5-4i$. Сумма данных комплексных чисел:

$$z+w=-3+i,$$

а произведение:

$$z\cdot w=2(-5)+3\cdot4+(15+8)i=2+23i.$$

В свою очередь

$$\bar{z}+\bar{w}=-3-i=\overline{z+w},$$

$$\bar{z}\cdot\bar{w}=2(-5)+3\cdot4-(15+8)i=$$
$$=2-23i=\overline{z\cdot w}.$$

Таким образом, справедливость свойств сопряжённых чисел доказана.

Деление комплексных чисел

Как и при любом делении в алгебре, комплексное число нельзя делить на нуль и на комплексное число $0 + i0$.

При делении комплексного числа на действительное число на это число нужно разделить и действительную, и мнимую компоненты. При делении комплексного числа на комплексное число нужно делимое и делитель умножить на число, сопряжённое делителю.

Пример 9. Разделить комплексное число $3+4i$ на комплексное число $2+i$.

Решение. Умножив числитель и знаменатель дроби $\frac{3+4i}{2+i}$ на $2-i$, получаем:

$$\frac{(3+4i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{10+5i}{4-i^2} =$$
$$= \frac{10+5i}{5} = 2+i.$$

$$4 - i^2 = 4 - (-1) = 5.$$

Пример 10. Разделить комплексное число $23+i$ на комплексное число $3+i$.

Решение. Умножив числитель и знаменатель дроби $\frac{23+i}{3+i}$ на $3-i$, получаем:

$$\frac{(23+i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{70-20i}{10} =$$
$$= 7-2i.$$

5.4. Формула Муавра.

Если комплексное число задано в алгебраической форме, то для возведения числа $z = a+bi$ в степень n достаточно применить к к выражению $(a+bi)^n$ формулу бинома Ньютона:

$$(a+bi)^n = a^n + n(bi)a^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\bullet 2}(bi)^2 a^{n-2} +$$
$$+ \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\bullet 2\bullet 3}(bi)^3 a^{n-3} + \ldots + (bi)^n.$$

Пример 1. Возвести комплексное число $2+5i$ в степень 3.

Решение. Применяя формулу бинома Ньютона, получаем:

$$(2+5i)^3 =$$
$$= 2^3 + 3\bullet 2^2 \bullet 5i + 3\bullet 2\bullet 5^2 i^2 + 5^3 i^3 =$$
$$= 8 + 60i - 150 - 125i = -142 - 65i.$$

Если комплексное число задано в тригонометрической форме, то для возведения его в степень используется **формула Муавра**:

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

т. е. при возведении комплексного числа в степень модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени.

Пример 2. Возвести комплексное число $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ в степень 4.

Решение. По формуле Муавра получаем:

$$\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^4 =$$
$$= \left(\sqrt{2}\right)^4(\cos\pi + i\sin\pi) = -4.$$

Извлечение корня из комплексного числа

Извлечение корня из комплексного числа - не однозначное действие. У корня n-й степени из комплексного числа, отличной от нуля, существуют n различных значений, которые вычисляются по формуле

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} =$$
$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

где k=0, 1, 2, ..., n-1.

Пример 3. Извлечь корень 3-й степени из комплексного числа $2\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$.

получим число.

***Смешанным произведением** трех векторов называется их векторно-скалярное произведение, обозначают:*

$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = (\bar{a}\times\bar{b},\bar{c})$

Найдем выражение смешанного произведения через координаты.

Пусть $\bar{a}=(x_1,y_1,z_1)$; $\bar{b}=(x_2y_2z_2)$ и $\bar{c}=(x_3y_3z_3)$, тогда векторное произведение $\bar{a}\times\bar{b}$ в координатах записывается в виде:

$$\bar{a}\times\bar{b} = \bar{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix},$$

тогда скалярное произведение $(\bar{a}\times\bar{b},\bar{c})$ в координатах имеет вид:

$$(\bar{a}\times\bar{b},\bar{c}) = x_3\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_3\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_3\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix},$$

Правую часть последнего выражения можно записать с помощью определителя третьего порядка. Итак, ***смешанное произведение в координатах*** имеет следующий вид:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = (\bar{a}\times\bar{b},\bar{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

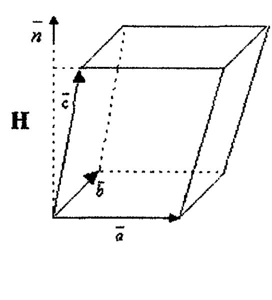
Свойства смешанного произведения векторов (проверьте самостоятельно):

1) $(\bar{a}\times\bar{b},\bar{c}) = (\bar{a},\bar{b}\times\bar{c})$;

2) $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \bar{c}\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{c}\bar{a}$;

3) Пусть $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ - некомпланарные векторы.

Построим на этих векторах параллелепипед.



Смешанное произведение *трех векторов численно равно* ***объему параллелепипеда,*** *построенного на этих векторах.*

$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = V$

Действительно, $\bar{a}\times\bar{b}=\bar{n}$, *где* $|\bar{n}|=|\bar{a}\times\bar{b}|=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin(\bar{a},\bar{b})$, то есть $|\bar{n}|=S_{ABCD}$, где S_{ABCD} - площадь основания.

Скалярное произведение $(\bar{n},\bar{c})=|\bar{n}|\cdot|\bar{c}|\cdot\cos(\bar{n},\bar{c})=|\bar{n}|\cdot|\bar{c}|\cdot\cos a$. Очевидно, что $|\bar{c}|\cdot\cos a=H$, где H высота параллелепипеда.

Итак, $(\bar{n},\bar{c})=|\bar{n}|\cdot H=S_{ABCD}\cdot H=V$

или, так как $\bar{n}=\bar{a}\times\bar{b}$, *то* $(\bar{a}\times\bar{b},\bar{c})=V$.

В частности, **объем пирамиды,** построенной на векторах $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ равен $V_{пир}=\frac{1}{6}\overline{a}\overline{b}\overline{c}$

4) Для того, чтобы три вектора были ***компланарны,*** необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение было равно нулю.

$\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ - компланарные $\Leftrightarrow \bar{a},\bar{b},\bar{c}=0$.

Пример 1. Показать, что заданные четыре точки лежат в одной

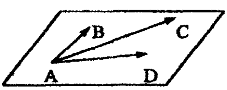
плоскости: A(2, 0, 1); B(-3, 1, 0); C(0,1, 3); D(-4, 3, 7).

Решение.

Заданные точки лежат в одной плоскости, если три вектора также лежат в этой плоскости, то есть, если эти векторы компланарны.

Векторы компланарны, если их смешанное произведение равно нулю.

Найдем координаты векторов:



$\overline{AB}=(-3-2;1-0;0-1)=(-5,1,-1)$;

$\overline{AC}=(-2,1,2)$;

$\overline{AD}=(-6,3,6)$,

тогда смешанное произведение равно

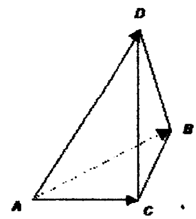
$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}=\begin{vmatrix}-5 & 1 & -1\\ -2 & 1 & 2\\ -6 & 3 & 6\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}-5 & 1 & -1\\ -2 & 1 & 2\\ -2 & 1 & 2\end{vmatrix}=3\cdot 0=0,$$

то есть заданные точки лежат в одной плоскости.

Пример 2. Найти объем пирамиды ABCD, где A(2, 0, 1); B(3, -1, 4);

C(0,-5,1); D(0,0,4).

Решение



Объем пирамиды равен $V_{пир}=\frac{1}{6}|\overline{abc}|$

Найдем координаты векторов

$\bar{a}=\overline{AB}=(1,-1,3);$

$\bar{b}=\overline{AC}=(-2,-5,0);$

$\bar{c}=\overline{AD}=(-2,0,3)$

тогда смешанное произведение:

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ -2 & -5 & 0\\ -2 & 0 & 3\end{vmatrix}=-15-30-6=-51$$

Следовательно, объем пирамиды

$$V_{пир}=\frac{1}{6}|\overline{abc}|=\frac{1}{6}|-51|=\frac{51}{6}8{,}5(ed^2)$$

❖ Тема-8: Уравнения прямой на плоскости.

8.1. Различные уравнения прямой на плоскости.

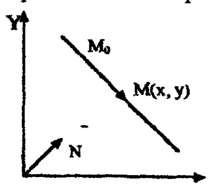
Основной метод аналитической геометрии - ***метод координат.*** Его сущность: каждой точке M поставлены в соответствие пара или тройка чисел, называемых ее координатами. Каждой фигуре поставлено в соответствие уравнение $F(x,y)=0$ или $F(x,y,z)=0$. Отсюда возникают две основные задачи аналитической геометрии:

1) по геометрическому свойству фигуры составить ее уравнение;

2) по уравнению исследовать свойства и форму геометрической фигуры.

ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

Постановка задачи Даны точка M_o $(x_0\ ,\ y_0)$ и вектор $\overline{N}(A,\ B)$ Написать уравнение прямой l, перпендикулярной вектору $\overline{N}$ и проходящей через точку M_0.



Точка $M(x,y)$ - текущая точка прямой l. $M \in l$ тогда и только тогда, когда $\overline{M_0M}=(x-x_0, y-y_0)$ и $\overline{N}$ $(A,\ B)$ - ортогональны, следовательно скалярное произведение $(\overline{M_0M},\overline{N})=0$ или $\mathbf{A(x-x_0)+B(y-y_0)=0}$

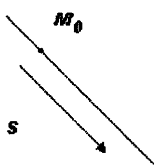
Итак, получили ***уравнение прямой, проходящей через точку M_0 и перпендикулярной*** $\overline{N}$.

Вектор $\overline{N}$ называется ***нормальным вектором прямой.***

Последнее уравнение запишем в виде

$Ax+By+D=0$ - оно называется ***общим уравнением прямой.***

Другие виды уравнений прямой на плоскости:



$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$ - ***уравнение прямой, проходящей через точку M_0 $(x_0\ ,\ y_0)$ и параллельной вектору*** $\overline{S}$ ***(m, n).***

Для трёх векторов пространства эквивалентны следующие утверждения:

1) векторы линейно независимы;

2) векторы образуют базис;

3) векторы не компланарны;

4) векторы нельзя линейно выразить друг через друга;

5) определитель, составленный из координат данных векторов, отличен от нуля.

Противоположные высказывания, думаю, понятны.

Линейная зависимость/независимость векторов пространства традиционно проверяется с помощью определителя. Оставшиеся практические задания будут носить ярко выраженный алгебраический характер.

Три $\overline{v}(v_1;v_2;v_3),\ \overline{w}(w_1;w_2;w_3),\ \overline{s}(s_1;s_2;s_3)$ вектора пространства компланарны тогда и только тогда, когда определитель, составленный из координат данных векторов, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} v_1 & w_1 & s_1 \\ v_2 & w_2 & s_2 \\ v_3 & w_3 & s_3 \end{vmatrix}=0$$

6.2. Базисные векторы.

Всякий элемент n-мерного линейного пространства можно представить, притом единственным образом, как линейную комбинацию векторов базиса.

Доказательство. Пусть $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ - базис линейного пространства L. Рассмотрим любой вектор $\bar{a} \in L$. Тогда система векторов $\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n, \bar{a}$ - линейно зависимая, то есть $\lambda_1\bar{e}_1+\ldots+\lambda_n\bar{e}_n+\lambda_{n+1}\bar{a}=0$, причем $\lambda_{n+1}\neq 0$.

Если $\lambda_{n+1}=0$, тогда $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\overline{e_i}=0$ и какое-то из $\lambda_i\neq 0$ $(i=\overline{1,n})$

Это означает: $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ - линейно зависимы, что противоречит условию: $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ - базис, то есть линейно независимая система векторов.

Итак, $\lambda_{n+1}\neq 0$, тогда $\bar{a}=-\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}}\bar{e}_1-\frac{\lambda_2}{\lambda_{n+1}}\bar{e}_2-...-\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\bar{e}_n$, то есть

$\bar{a}=\mu_1\bar{e}_1+\mu_2\bar{e}_2+...+\mu_n\bar{e}_n$, где $\mu_1=\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}}$.

Таким образом, показали, что любой вектор можно представить как линейную комбинацию векторов базиса.

Покажем, что такое разложение ***единственно.*** Предположим, что наряду с полученным разложением $\bar{a}$ по базису $\bar{a}=\mu_1\bar{e}_1+\mu_2\bar{e}_2+...+\mu_n\bar{e}_n$, существует другое $\bar{a}=\gamma_1\bar{e}_1+...+\gamma_n\bar{e}_n$.

Вычитая, находим $\bar{0}=(\mu_1-\gamma_1)\bar{e}_1+...+(\mu_n-\gamma_n)\bar{e}_n$.

Так как векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, ..., $\bar{e}_n$ - линейно независимы, то последнее равенство имеет место только тогда, когда $\mu_1-\gamma_1=0,...,\mu_n-\gamma_n=0$.

Таким образом, $\mu_i=\gamma_i$ для $i=\overline{1,n}$, а следовательно, разложение вектора по базису единственно.

Всякий базис линейного пространства, векторы которого берутся в определенной последовательности, называют ***системой координат,*** *а числа - коэффициенты в разложении любого вектора $\bar{a}$ по базису - называют* ***координатами вектора $\bar{a}$.***

$\bar{a}=x_1\bar{e}_1+...+x_n\bar{e}_n$,

где $x_1,....,x_n$ - координаты вектора $\bar{a}$.

Последнее выражение называют ***формулой разложения вектора по базису.***

В общем случае при изменении базиса, координаты вектора изменяются.

Вектор можно задавать с помощью координат $\bar{a}=(x_1,x_2,...,x_n)$.

Рассмотрим два вектора:

$\bar{a}=(x_1,x_2,...,x_n)$ и $\vec{b}=(y_1, y_2, ..., y_n)$.

Используя определение линейного пространства, покажите что:

1) при сложении векторов их соответствующие координаты складываются:

$\bar{a}+\vec{b}=(x_1+y_1, x_2+y_2, ..., x_n+y_n)$;

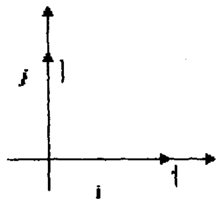
2) при умножении вектора на скаляр λ, каждая координата умножается на это число:

$\lambda \bar{a}=(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$.

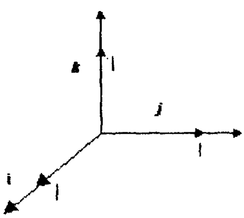
Базис $\bar{e}1, \bar{e}2, \ldots, \bar{e}n$ в пространстве En называется ортонормированным, если имеет место:

$$(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}.$$

В частности, в пространстве E^2 ортонормированным базисом является система двух векторов, их обозначают ***i, j***: $\begin{matrix} i \perp j \\ |i| = |j| = 1 \end{matrix}$



в пространстве E^3 ортонормированный базис обозначают ***i, j, k:***

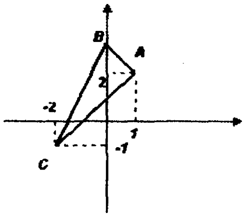


$i \perp j, i \perp k, j \perp k,$
$|i| = |j| = |k| = 1;$
очевидно, что $(i, j) = (i, k) = (j, k) = 0;$
$(i, i) = (j, j) = (k, k) = 1$

Пример 1. Дан треугольник ABC. где A(1, 2); B(0, 3); C(-2, -1). Найти

периметр его и угол A.

Решение



Обозначим векторы $\overline{AC}=\bar{a}; \overline{AB}=\bar{b}$. Используя скалярное произведение, найдем $\cos(\bar{a},\bar{b})=\dfrac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}||\bar{b}|}$. Координаты вектора $\bar{a}$ находим, вычитая из координат его конца - точки С, соответствующие координаты начала его точки А.

$\bar{a}=\overline{AC}=(x_c-x_A, y_C-y_A)=(-2-1,-1-2)=(-3,-3)$.

Аналогично, $\bar{b}=\overline{AB}=(0-1,3-2)=(-1,1)$

Найдем $\cos(\bar{a},\bar{b})=\dfrac{-3(-1)+(-3)\cdot 1}{\sqrt{9+9}\cdot\sqrt{1+1}}=\dfrac{0}{\sqrt{18\cdot 2}}=0$

Таким образом, $\cos\angle A=0, \quad \angle A=90^0$.

Чтобы найти периметр ΔАВС, надо найти длины всех его сторон:

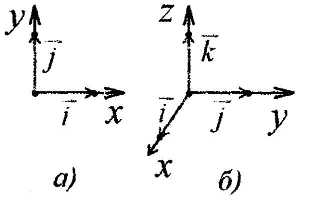
$$|\bar{a}|=|\overline{AC}|=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}=3\sqrt{2};$$
$$|\bar{b}|=|\overline{AB}|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2};$$
$$|\overline{BC}|=\sqrt{(-2-0)^2+(-1-3)}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}.$$

Итак, периметр ΔАВС равен

$P=|\overline{AC}|+|\overline{AB}|+|\overline{BC}|=3\sqrt{2}+\sqrt{2}+2\sqrt{5}=4\sqrt{2}+2\sqrt{5}$

❖ Тема-7. Векторы на плоскости и в пространстве и операции над ними.
7.1. Орт векторы.

Определение: Ортом или **единичным вектором** называется вектор, модуль которого равен единице.



№ 1. Найти орт вектора $a=(4;-2;-4)$

Решение

$$a^0=\frac{a}{|a|}=\left(\frac{a_1}{|a|};\frac{a_2}{|a|};\frac{a_3}{|a|}\right);\ |a|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}=\sqrt{4^2+(-2)^2+(-4)^2}=\sqrt{16+4+16}=\sqrt{36}=6$$

$$a^0=\left(\frac{4}{6};\frac{-2}{6};\frac{-4}{6}\right)=\left(\frac{2}{3};-\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$$

№ 2. Вектор составляет с координатными осями Ох и Оу углы $\alpha=60^0$ и $\beta=45^0$. Какой угол он составляет с осью Oz ?

Решение Т.к. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, то подставляя данные, получим:

$$\cos^2 60^0+\cos^2 45^0+\cos^2\gamma=1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\cos^2\gamma=1$$

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\cos^2\gamma=1$$

$$\cos^2\gamma=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

$$\cos\gamma=\pm\frac{1}{2}$$

Получаем острый и тупой углы:

$$\gamma = 60^0$$
$$\gamma = 180^0 - 60^0 = 120^0$$

7.2. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов

Рассмотрим трехмерное евклидово пространство E^3;

(i, j, k) - ортонормированный базис в этом пространстве.

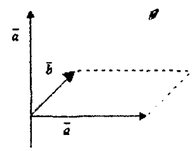
Векторным произведением векторов $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$ *называют такой вектор* $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ *, что*

1) $|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin(\bar{a}, \bar{b})$

то есть длина вектора равна площади параллелограмма, построенного на этих векторах;

2) вектор $\bar{c}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$;

3) векторы $\bar{a}$ $\bar{c}$ $\bar{b}$ образуют правую - тройку, то есть вектор $\bar{c}$ направлен так, что, если смотреть с конца вектора $\bar{c}$, то кратчайший поворот от $\bar{a}$ *к* $\bar{b}$ совершается против часовой стрелки.



Векторное произведение обозначается $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ или $\bar{c} = [\bar{a}, \bar{b}]$.

Свойства векторного произведения:

1. $\bar{a} \times \bar{b} = -[\bar{b} \times \bar{a}]$

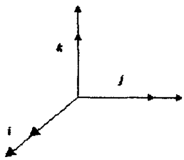
2. $\lambda \bar{a} \times \bar{b} = \lambda [\bar{a} \times \bar{b}]$, λ - скаляр;

3. $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$, $\bar{c} \in E^3$

Пример 1. Найти векторное произведение ортов (базисных векторов) i, *j*, *k*.

Решение: $i \times i = \bar{0}$, так как $\sin(i, i) = 0^0 = 0$, аналогично $j \times j = 0$; $\bar{k} \times \bar{k} = 0$.

Согласно определению:



$$i\times j=k;\quad j\times i=-k;$$
$$j\times k=i;\quad k\times j=-i;$$
$$k\times i=j;\quad i\times k=-j.$$

Векторное произведение в координатной форме.

Пусть известны координаты векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, то есть

$$\bar{a}=x_1 i+y_1 j+z_1 k;$$
$$\bar{b}=x_2 i+y_2 j+z_2 k.$$

Используя свойства векторного произведения, найдем:

$$\bar{a}\times\bar{b}=(x_1 i+y_1 j+z_1 k)\times(x_2 i+y_2 j+z_2 k)=x_1x_2 i\times i+x_1y_2 i\times j+x_1z_2 i\times k+y_1x_2 j\times i+$$
$$+y_1y_2 j\times j+y_1z_2 j\times k+z_1x_2 k\times i+z_1y_2 k\times j+z_1z_2 k\times k=(y_1z_2-z_1y_2)\bar{i}-(x_1z_2-x_2z_1)\bar{j}+$$
$$+(x_1y_2-x_2y_2).$$

Выражения в скобках можно записать с помощью определителей второго порядка (проверьте), то есть:

$$\bar{a}\times\bar{b}=i\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}-j\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}+k\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix},$$

правую часть последнего выражения можно записать с помощью определителя третьего порядка:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}.$$

Эта формула является удобной записью ***векторного произведения в координатах.***

Необходимым и достаточным условием коллинеарности двух векторов является равенство нулю их векторного произведения.

$$\bar{a}\parallel\bar{b}\Leftrightarrow\bar{a}\times\bar{b}=0$$

Из определения векторного произведения следует, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, равна модулю векторного произведения:

$$S = |\bar{a} \times \bar{b}|,$$

в частности, площадь **треугольника** $S_\Delta = \frac{1}{2}|\bar{a} \times \bar{b}|$.

Одним из физических приложений векторного произведения является нахождение **момента силы,** возникающего при вращении твердого тела, закрепленного в некоторой точке А, под действием силы $\bar{F}$, приложенной в точке В:

$$\overline{M} = \overline{AB} \times \overline{F}$$

Пример 1. Найти площадь треугольника АВС, где А (-2, 1, 0); В (3,4, 8); С (-1,3,6).

Решение: Площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, равна $S_\Delta = \frac{1}{2}|\overline{AB} \times \overline{AC}|$.

Найдем координаты векторов:

$\overline{AC}$=(-1+2; 3-1; 6-0)=(1,2,6)

$\overline{AB}$=(3-(-2); 4-1; 8-0)=(5, 3, 8)

их векторное произведение равно:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2i - 22j + 7k.$$

Итак, $S_\Delta = \frac{1}{2}|\overline{AB} \times \overline{AC}|$ или $S_\Delta = \frac{1}{2}\sqrt{4+484+49} = \frac{\sqrt{537}}{2}(ed.^2)$

Смешанное произведение векторов

При последовательном умножении трех векторов $\bar{a}$ $\bar{c}$ $\bar{b}$ возможны следующие случаи:

1) $(\bar{a},\bar{b})\bar{c} = \lambda\bar{c}$, где λ - скаляр, $\lambda = (\bar{a},\bar{b})$

2) $\bar{a} \times \bar{b} \times \bar{c}$ - двойное векторное произведение, в результате получим вектор;

3) $(\bar{a} \times \bar{b},\bar{c})$- векторно-скалярное произведение, в результате

Решение. По приведённой в теоретической части формуле получаем:

$$\beta=\sqrt[3]{2\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)}=$$

$$=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{3}{4}\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3}{4}\pi+2k\pi}{3}\right).$$

Все 3 значения корней будут следующими:

$$k=0:\qquad \beta_0=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right);$$

$$k=1:\qquad \beta_1=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{11}{12}\pi+i\sin\frac{11}{12}\pi\right);$$

$$k=2:\qquad \beta_2=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{19}{12}\pi+i\sin\frac{19}{12}\pi\right).$$

Пример 4. Извлечь квадратный корень из комплексного числа i.

Решение. По приведённой в теоретической части формуле получаем:

$$\beta=\sqrt{i}=\sqrt{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}.$$

Все 2 значения корней будут следующими:

$$k=0:\qquad \beta_0=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4};$$

$$k=1:\qquad \beta_1=\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi;$$

❖ Тема-6: Понятие векторного пространства.

6.1. Линейная зависимость и линейная независимость векторов.

Обычно в естественных науках рассматривают величины двух видов:

скалярные, они определены числовым значением - площадь, объем, температура, масса.

и *векторные,* которые определяются не только численным значением, но и направлением - это сила, скорость, ускорение и другие.

Вектором *называется отрезок, имеющий направление.*

Обозначают $\vec{a}$.

или $\overline{AB}$, где A - начало, B - конец вектора. B

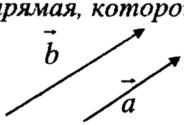
A

Длиной *вектора называют расстояние между A и B, обозначают*

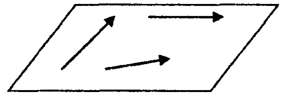
$\left|\overline{AB}\right|$ *или* $\left|\vec{a}\right|$.

Нулевым вектором *называют вектор, у которого начало и конец совпали* $\left(\left|\vec{a}\right| = 0\right)$.

Коллинеарными *называют два вектора, если существует прямая, которой они параллельны, обозначают* $\vec{a}\|\vec{b}$



Компланарными *называют три вектора, которые лежат в одной плоскости (параллельны одной плоскости).*



Два вектора $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *называются* ***равными,*** если;

1) *длины их равны,* $|\vec{a}|=|\vec{b}|$;

2) *они коллинеарны,* $\vec{a} \parallel \vec{b}$,

3) *сонаправлены (направлены в одну сторону).*

Определение: векторы называются **компланарными**, если существует плоскость, которой они параллельны. Здесь логично добавить, что если такой плоскости не существует, то и векторы будут не компланарны.

Три компланарных вектора всегда линейно зависимы, то есть линейно выражаются друг через друга. Для простоты снова представим, что они лежат в одной плоскости. Во-первых, векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ мало того, что компланарны, могут быть вдобавок ещё и коллинеарны, тогда любой вектор можно выразить через любой вектор. Во втором случае, если, например, векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ не коллинеарны, то третий вектор выражается через них единственным образом: $\bar{e}_3 = \alpha \cdot \bar{e}_1 + \beta \cdot \bar{e}_2$ (а почему – легко догадаться по материалам предыдущего раздела).

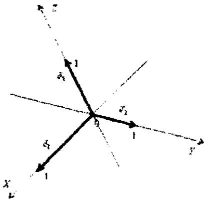
Справедливо и противоположное утверждение: **три некомпланарных вектора всегда линейно независимы**, то есть никоим образом не выражаются друг через друга. И, очевидно, только такие векторы могут образовать базис трёхмерного пространства.

Определение: **Базисом трёхмерного пространства** называется тройка линейно независимых (некомпланарных) векторов $(\bar{e}_1; \bar{e}_2; \bar{e}_3)$, взятых_в определённом порядке, при этом любой вектор пространства единственным образом раскладывается по данному базису $\bar{v} = \alpha \cdot \bar{e}_1 + \beta \cdot \bar{e}_2 + \gamma \cdot \bar{e}_3$, где α, β, γ – координаты вектора $\bar{v}$ в данном базисе

Напоминаю, также можно сказать, что вектор $\bar{v}$ представлен в виде **линейной комбинации** базисных векторов.

Понятие системы координат вводится точно так же, как и для плоского случая, достаточно одной точки и любых трёх линейно независимых векторов:

Точка O пространства, которая называется **начапом координат**, и **некомпланарные** векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, взятые в определённом порядке, задают ***аффинную систему координат трёхмерного пространства***:

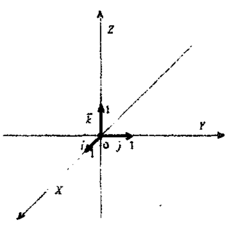


Конечно, координатная сетка «косая» и малоудобная, но, тем не менее, построенная система координат позволяет нам *однозначно* определить координаты любого вектора и координаты любой точки пространства. Аналогично плоскости, в аффинной системе координат пространства не будут работать некоторые формулы, о которых я уже упоминал.

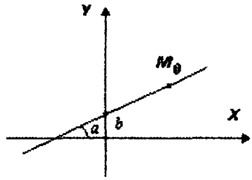
Наиболее привычным и удобным частным случаем аффинной системы координат, как все догадываются, является *прямоугольная система координат пространства*:

Точка O пространства, которая называется **началом координат**,

и **ортонормированный** базис $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ задают ***декартову прямоугольную систему координат пространства***. Знакомая картинка:

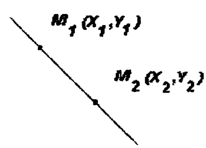


Перед тем, как перейти к практическим заданиям, вновь систематизируем информацию:

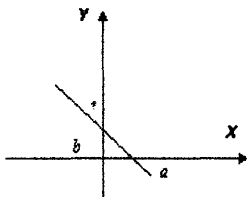


y =kx + b - уравнение прямой с угловым коэффициентом к,
где $k = tg\alpha$,
b - отрезок, отсекаемый прямой на оси OY.

$y - y_0 = k(x - x_0)$ - уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$



$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_2}{y_2-y_1}$$
- уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.



$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$
-уравнение прямой в отрезках.

Между всеми этими уравнениями существует связь, то есть, если задана прямая одним из уравнений, то можно перейти к любому из перечисленных видов.

Пример 3. Написать различные виды уравнений прямой, проходящей через две точки $M_1(2, 0)$; $M_2(0, 3)$.

Решение: Используя уравнение прямой, проходящей через две точки, находим $\frac{x-2}{0-2}=\frac{y-0}{3-0}$ или $\frac{x-2}{-2}=\frac{y}{3}$; $\frac{x}{-2}+1=\frac{y}{3}$.

Из последнего уравнения с помощью преобразований можно перейти к другим видам уравнений этой же прямой.

Уравнение прямой в отрезках: $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y = -\frac{3}{2}x + 3; \qquad k = -\frac{3}{2}.$$

Общее уравнение прямой: $3x + 2y - 6 = 0$, где вектор $\overline{N}(3,\ 2)$ перпендикулярен данной прямой.

Пример 4. Найти уравнение стороны АВ и высоты, опущенной из вершины А в треугольнике АВС, где А(0, 1); В(-2. 3); С(0, 6).

Решение: Уравнение стороны АВ - это уравнение прямой, проходящей через точки А и В:

$$\frac{x-0}{-2-0} = \frac{y-1}{3-1} \quad \text{или} \quad \frac{x}{-2} = \frac{y-1}{2}; \qquad x + y - 1 - 0.$$

Чтобы написать уравнение высоты из вершины А, найдем координаты вектора $\overline{BC}$, который ей перпендикулярен: $\overline{BC}(2,3)$.

Используя уравнения прямой, проходящей через точку А и перпендикулярной вектору $\overline{BC}$, находим уравнение высоты:

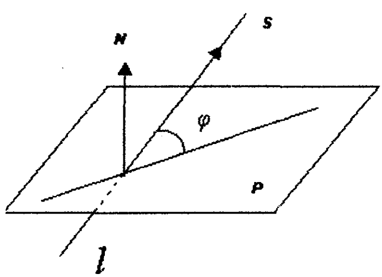
2(x-0)+3(y-1)=0 или 2x+3y-3=0.

8.2. Взаимное расположение прямых на плоскости и угол между ними.

Углом φ между прямой и плоскостью *будем называть любой из двух смежных углов, образованных прямой и ее проекцией на плоскость.*

Рассмотрим плоскость p: $Ax + By + Cz + D = 0$, где $\overline{N}(A, B, C)$ - нормальный вектор плоскости;

$\overline{S}$ $(m,$ и, $p)$ - направляющий вектор прямой l.



Пусть a - угол между векторами $\overline{N}$ и $\overline{S}$, тогда $a = 90 - \varphi$, следовательно: $\cos a = \cos(90 - \varphi) = \sin a$.

Из определения скалярного произведения: $\cos a = \dfrac{(\overline{N}, \overline{S})}{|\overline{N}| \cdot |\overline{S}|}$

или $\sin\varphi = \dfrac{(\overline{N},\overline{S})}{|\overline{N}|\cdot|\overline{S}|}$

или $\sin\varphi = \dfrac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+p^2}}$.

В частности,

если $l \| p$, то $\overline{S} \perp \overline{N}$ тогда $Am+Bn+Cp=0$,

если $l \perp p$, то $\overline{S} \| \overline{N}$, тогда $\dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}$

Пример 1. Найти угол между прямыми l: $y- 2x + 5 = 0$ и l_2: $2y+x+3=0$

Решение:

$\overline{N_1}(1,-2) \perp l_1$,

$\overline{N_2}(2,1) \perp l_2$, *тогда*

$$\cos(\widehat{\overline{N_1},\overline{N_2}}) = \frac{(\overline{N_1},\overline{N_2})}{|\overline{N_1}|\cdot|\overline{N_2}|} = \frac{1\cdot 2 - 2\cdot 1}{\sqrt{1+(-2)^2}\sqrt{2^2+1}} = \frac{0}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = 0$$

Следовательно, $\overline{N_1} \perp \overline{N_2}$, то есть прямые перпендикулярны.

Пример 2. Найти точку пересечения прямой

$l: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+5}{1} = \dfrac{z-3}{1}$

с плоскостью р: x+2y+z - 4=0.

Решение:

Запишем уравнение прямой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 5t+1 \\ z = 5t \end{cases}$$

Подставим в уравнение плоскости *P*, получим

2t+1+2(t-5)+t+3-4=0, 5t=10 или t=2, тогда x =5, y=-3, z=5.

Точка М (5, -3, 5) является точкой пересечения прямой *l* с плоскостью *P*.

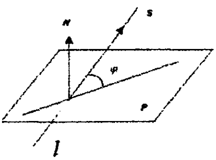
Пример 3. Лежит ли прямая $l: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+5}{1} = \dfrac{z-3}{1}$

в плоскости *P*: *x-y-z-3=0*.

Решение: Поступаем так же, как в предыдущей задаче, получим *2t+* 1 --(t-5)-(t+3)-3=0, 2t-t-t+1+5-3-3=0; *0t* = 0, получили тождество, то есть при любом *t* мы получим все точки прямой *l*, следовательно, прямая *l* принадлежит плоскости.

Пример 4. Найти угол между прямой $l: \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{1} = \frac{z-3}{1}$

и плоскостью $P: x + 2y + z - 4 = 0$.



Решение:

Вектор $\bar{S}(2,1,1) \parallel l$.

Вектор $\bar{N}(1,2,1) \perp P$, тогда

$$\sin\varphi = \cos(\bar{N}, \bar{S}) = \frac{(\bar{N}, \bar{S})}{|\bar{N}| \cdot |\bar{S}|} = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1}{\sqrt{4+1+1}\sqrt{1+4+1}} =$$

$$= \frac{5}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{5}{6};$$

тогда $a = \arcsin\frac{5}{6}$

8.3. Использование прямой в экономике.

При производстве x единиц любой продукции *совокупные издержки* (затраты) $C(x)$ состоят из двух слагаемых – постоянных (фиксированных) издержек F и переменных издержек V: $C = F + V$.

Постоянные издержки F – это издержки, не зависящие от числа единиц произведенной продукции. Они включают в себя амортизацию, аренду помещения, проценты по займам и т.п.

Переменные издержки V – это издержки, напрямую зависящие от количества произведенной продукции. Они включают в себя стоимость сырья, рабочей силы и т.п.

В простейшем случае переменные издержки прямо пропорциональны x – количеству произведенной продукции. Коэффициент пропорциональности a – это переменные затраты по производству одной единицы продукции ($V = ax$).

Если обозначить через b фиксированные затраты, то получится уравнение, которое называют *линейной моделью издержек*:

$$C(x) = b + ax.$$

Совокупный доход, или *выручка*, $R(x)$, получаемый предприятием от продажи x единиц продукции, определяется формулой

$$R(x) = px,$$

где p — цена единицы товара.

Очевидно, что область определения этой функции $\{x : x \geq 0\}$ и $R(0) = 0$.

Если произведено и продано x единиц продукции, то *прибыль* $P(x)$ определяется формулой

$$P(x) = R(x) - C(x).$$

Точка, в которой прибыль обращается в нуль, называется *точкой безубыточности*.

Пример 6.3. Известно, что фиксированные издержки производства составляют 10 тыс. руб. в месяц, переменные издержки – 30 руб. за единицу продукции, выручка – 50 руб. за единицу продукции. Требуется составить функцию прибыли и построить ее график.

Решение. По условию задачи фиксированные или постоянные издержки $F = 10000$. Так как переменные издержки по производству одной единицы продукции по условию задачи равны 30 руб. ($a = 30$), то переменные издержки, зависящие от количества произведенной продукции, $V = 30x$, где x – количество произведенной продукции. Таким образом, совокупные издержки составляют $C(x) = 10000 + 30x$. Совокупный доход, получаемый от продажи x единиц продукции, определяется следующим образом $R(x) = 50x$. Построим графики функций дохода и издержек (см. рис 18):

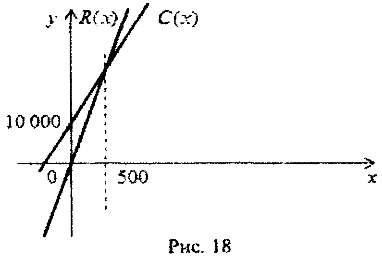


Рис. 18

Точку пересечения прямых $C(x) = 10000 + 30x$ и $R(x) = 50x$ найдем следующим образом: $C(x) = R(x)$, тогда $10000 + 30x = 50x$, следовательно, $x = 500$, $C(x) = R(x) = 25000$.

Прибыль, получаемую предприятием, можно найти по формуле

$$P(x) = R(x) - C(x) = 50x - (10000 + 30x) = 20x - 10000, \quad P(x) = 20x - 10000.$$

Построим график функции прибыли. При $x = 500$ $P(x) = 0$. Следовательно, координаты первой точки $(500; 0)$. При $x = 600$ $P(x) = 2000$; получили вторую точку $(600; 2000)$. Через две точки на плоскости проведем прямую, которая является графиком функции $P(x)$ (см. рис 19):

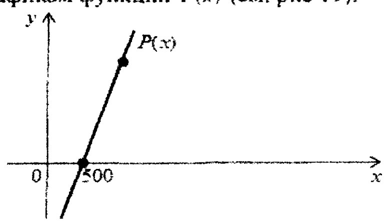


Рис. 19

Как видно из графика, при малых значениях x прибыль отрицательна (график $P(x)$ расположен ниже оси Ox), т.е. производство убыточно. При увеличении x прибыль возрастает, в точке с абсциссой $x = 500$ она обращается в нуль (точка безубыточности) и после этого становится положительной (см. рис. 19). ■

Пример 6.4. Обувная фабрика продает туфли по цене 350 руб. за пару. Издержки составляют 63 тыс. руб. за 100 пар туфель и 60,75 тыс. руб. за 85 пар.

а) Найти точку безубыточности.

б) Сколько пар туфель фабрика должна произвести и продать, чтобы получить 10% дохода на деньги, вложенные в фиксированные затраты?

Решение. а) Пусть x – количество произведенной продукции, C – совокупные издержки (или затраты). Зависимость между издержками производства и количеством произведенной продукции будем считать линейной. Найдем зависимость вида: $C(x) = b + ax$. Данное уравнение задает на плоскости прямую. По условию нам известны две точки на этой прямой: $M_1(63000;100)$ и $M_2(60750;85)$. Составим уравнение прямой, проходящей через две заданные точки. По формуле (4) найдем $\frac{C-60750}{63000-60750} = \frac{x-85}{100-85}$, где $C = C(x)$. Следовательно, $\frac{C-60750}{2250} = \frac{x-85}{15}$, $15(C-60750) = 2250(x-85)$.

Линейная модель издержек имеет вид $C(x) = 48000 + 150x$. Найдем функцию прибыли:

$$P(x) = R(x) - C(x) = 350x - 150x - 48000, \quad P(x) = 200x - 48000.$$

Найдем точку безубыточности, в которой прибыль обращается в нуль:

$$P(x) = 0, \quad 200x - 48000 = 0, \quad x = 240.$$

б) Из выражения $C(x) = 48000 + 150x$ видно, что фиксированные затраты составляют 48 тыс. руб. ($F = 48000$). Десять процентов от этой суммы составляют 4800 руб. Следовательно прибыль должна составить 4800 руб. ($P(x) = 4800$). Тогда $200x - 48000 = 4800$, $x = 264$.

Ответ: а) точка безубыточности $x = 240$;

б) фабрика должна произвести и продать 264 пары туфель, чтобы получить 10% дохода на деньги, вложенные в фиксированные затраты. ■

2. Законы спроса и предложения. Количество товара, которое покупатели приобретут на рынке, зависит от цены на этот товар. Соотношение между ценой и количеством купленного товара называется *функцией* или *законом спроса*.

Количество товара, которое производители выставят на продажу, также зависит от цены на этот товар. Соотношение между ценой и количеством товара, выставленного на продажу, называется *функцией* или *законом предложения*.

В простейшем случае эти функции являются линейными (рис. 20). Закон спроса обозначен через D, закон предложения – через S; x – количество товара, p – цена на этот товар.

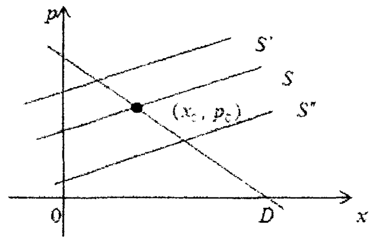


Рис. 20

Уравнение спроса можно составить, если заданы две точки, лежащие на его графике. Для этого нужно использовать уравнение прямой, проходящей через две заданные точки: $\frac{p - p_1}{p_2 - p_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

Точка пересечения кривых спроса и предложения (x_0, p_0) называется *точкой рыночного равновесия*. Соответственно, p_0 называется *равновесной ценой*, а x_0 – *равновесным количеством (равновесным объемом продаж)*.

Если известен закон спроса $p(x)$, то совокупный доход R можно выразить через x: $R = x \cdot p$.

Очень часто правительство вводит налог t на товар или предоставляет субсидию s, чтобы население могло приобрести товар по разумной цене.

При использовании линейных моделей предполагается, что спрос определяется только ценой товара на рынке p_d, а предложение – только ценой p_s, получаемой поставщиками. Эти цены связаны между собой следующими уравнениями: $\begin{matrix} p_d = p_s + t, \\ p_d = p_s - s \end{matrix}$, где t и s – соответственно налог и субсидия на единицу товара.

Таким образом, при введении налога или субсидии уравнение спроса D не изменится. График функции предложения поднимется на t единиц вверх (линия S') или опустится на s единиц вниз (линия S'') (см. рис. 20).

Некоторые налоги, например НДС (налог на добавленную стоимость), пропорциональны цене. В этом случае точка пересечения графика предложения S с осью Ox остается той же, но меняется угол наклона графика к оси Ox.

❖ Тема-9: Понятие функции.

9.1. Понятие множества и действия над ними

Под *множеством* понимают совокупность объектов любой природы, обладающих некоторым общим свойством. Множества обозначают $A,\ B,\ C,\ \ldots$

Объекты, объединенные одним общим свойством, называют элементами множества и обозначают $a,\ b,\ c,\ \ldots$. Если элемент «а» принадлежит множеству А, то это записывают таким образом $a \in A$. Множество, число элементов которого конечно, называют конечным и бесконечным в противном случае.

Множества, элементами которых являются действительные числа, называются *числовыми*. Из школьного курса алгебры известны множества:

R - действительных чисел,

Q - рациональных,

I - иррациональных,

Z - целых $\{0, \pm 1, \pm 2, \ldots,\}$,

N - натуральных чисел $\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$.

Конечные множества разделяются на *счетные* и *несчетные.* Если элементы бесконечного множества можно пронумеровать с помощью натурального ряда чисел, то оно называется *счетным* и *несчетным* в противном случае. Так, множество четных чисел $\{2, 4, \ldots, 2n, \ldots\}$. – счетное, множество действительных чисел R – несчетное.

Конечные и счетные множества называются *дискретными* множествами.

Если каждый элемент множества А является также элементом множества В, то множество А называется частью, или *подмножеством* множества В и обозначается $A \subset B$.

Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то множества А и В называются *равносильными* и обозначаются $A = B$.

Например, очевидно, что

$N \subset Z \subset Q \subset R$,

$I \subset R$,

$R = Q \cup I$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается Ø.

Операции над множествами

1) *Объединением,* или *суммой множеств* А и В называется множество С, элементы которого принадлежат хотя бы одному из множеств А или В.

$$C = A \cup B = \{c_i : c_i \in A \text{ или } c_i \in B\}.$$

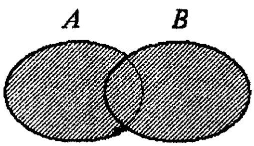
2) *Пересечением множеств* А и В называется множество С, элементы которого принадлежат как множеству А, так и множеству В.

$$C = A \cap B = \{c_i : c_i \in A \text{ и } c_i \in B\}.$$

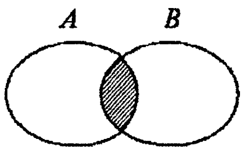
3) *Разностью множеств* А и В называется множество D, состоящее из всех элементов множества А, которые не принадлежат множеству В, обозначают $D = A \setminus B$.

$$D = A \setminus B = \{d_i : d_i \in A \text{ и } d_i \in B\}$$

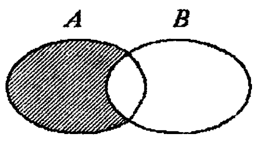
Названные операции могут быть проиллюстрированы диаграммами Эйлера-Венна.



$A \cup B$



$A \cap B$



$A \setminus B$

Геометрически множество действительных чисел R изображается точками *числовой прямой* (или *числовой оси*), то есть прямой, на которой выбрано начало отсчета, положительное направление и единица масштаба.

Между множеством действительных чисел и точками числовой прямой существуют взаимно однозначное соответствие, то есть каждому действительному числу соответствует определенная точка числовой прямой, и наоборот, каждой точке прямой – определенное действительное число. Поэтому часто вместо «число x» говорят «точка x».

Множество $D \subseteq R$, $x \in D$, называется

- *отрезком* (или *сегментом*), обозначается $[a;\ b]$,

 если элементы x удовлетворяют неравенству $a \le x \le b$;
- *интервалом* $(a;\ b)$,

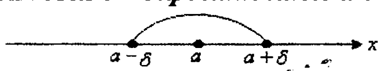
 если элементы x удовлетворяют неравенству $a < x < b$,
- *полуинтервалами,* соответственно $[a;\ b)$ и $(a;\ b]$,

 если неравенствам $a \le x < b$ или $a < x \le b$,

Всякий интервал, содержащий точку a, называется *окрестностью точки a.*

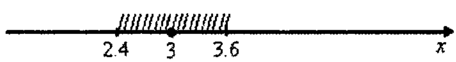
Интервал $(a-\delta,\ a+\delta)$, то есть множество точек x таких, что $|x-a| < \delta$,

где $\delta > 0$, называется δ *- **окрестностью точки** a.*



Неравенство, содержащее абсолютную величину $|x-a| < \delta$, соответствует двойному неравенству $-\delta < x-a < \delta$ или $a-\delta < x < a+\delta$.

Соответствует двойному неравенству $|x-3| < 0.6$: геометрически это неравенство определяет интервал с центром в точке $x_0 = 3$ и длиной $2\delta = 1.2$



При решении неравенств, содержащих абсолютную величину, полезно иметь ввиду следующие свойства:

1. Неравенство | x | ≤ a, где (a > 0) равносильно двойному неравенству

$$-a \le x \le a$$

2. Неравенство $|x| \le a$, где (a < 0) , противоречиво.
3. Неравенство $|x| \ge a$, где (a > 0), равносильно двум неравенствам.

$$\begin{cases} x \ge a \\ x \le -a \end{cases}$$

4. Неравенство $|x| \ge a$, где (а < 0), справедливо для любых x.

Пример 1.

Решить неравенства:

а) $|1+3x| \le 4$

б) $|2-x| > 3$

Решение:

а) данное неравенство можно записать в виде

$-4 \le 1+3x \le 4$ или

$-4-1 \le 3x \le 4-1$;

$-5 \le 3x \le 3$ или

$-\frac{5}{3} \le x \le 1$

Ответ: $x \in \left[-\frac{5}{3};\ 1\right]$

б) это неравенство равносильно совокупности двух неравенств:

$2-x > 3$ и $2-x < -3$

Решая каждое неравенство, получим

$-x > 1$ и $-x < -5$ или

$x < -1$ и $x > 5$

9.2. Определение функции.

Понятие функции одно из основных понятий в математике. С развитием математики развивалось и изменялось представление о функции. В XVIII и начале XIX вв. понятие функции отождествлялось с формулой, которой, она определялась. Однако это сужает и обедняет возможности рассмотрения различных функциональных зависимостей. В современном представлении функция – это соответствие между элементами двух множеств.

Пусть точка $M \in D$, причем $D \ne \varnothing$ (не пустое множество).

Если каждой точке $M \in D$ по некоторому правилу f ставится в соответствие единственное действительное число $u \in E \ne \varnothing$, то f называют **функцией**, причем называют

D – **область определения** функции;

Е – **область изменения** функции.

Е – это числовое множество, каждое значение которого определяет точку из одномерного пространства R.

Точка M является аргументом функции. Правило f, однако, применимо не к самой точке, а к ее координатам.

Таким образом, функция $u = f(M)$ устанавливает связь между точками $M \in D$ и точками некоторого множества одномерного пространства R.

В зависимости от числа аргументов, входящих в уравнение $u = f(M)$, различают функции одного, двух и более аргументов.

Будем исходить из того, что аргументы функции образуют линейно упорядоченные наборы. Каждый такой набор из n аргументов определяет точку M пространства R^n:

$$M \in D \subset R^n$$

1) $u = f(x)$, здесь u - *функция одной переменной* или одного аргумента x. $M(x)$ - точка числовой оси; D - некоторое подмножество множества действительных чисел R, $M \in D \subset R$,

2) $u = f(x,\ y)$,здесь u- *функция двух переменных* или двух аргументов x, y.

D - некоторое подмножество множества R^2; $M \in D \subset R^2$, $M(x,\ y)$ - точка плоскости R^2

3) $u = f(x,\ y,\ z)$, u - функция *трех переменных*, D-некоторое подмножество множества R^3, соответственно, точка $M \in D \subset R^3$; $M(x,\ y,\ z)$ - точка трехмерного пространства R^3.

4) для функции n переменных $u = f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ D-некоторое подмножество n- мерного пространства R^n и точка $M(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n) \in D \subset R^n$.

Например:

$y = e^{2x-1}$ - функции одного аргумента x;

$z = 2x^2y - 3x + y^3$ - функция двух аргументов x, y;

$u = 2Z - \sin x - y^3$ - функция трех аргументов: t, x, z.

Геометрически область определения D изображается для

- функций одной переменной - отрезком, интервалом,
- функций двух переменных – частью плоскости XOY или всей этой плоскостью,

- функций трех переменных – частью пространства R^3 или всем пространством.

Пример 2. Найти f(1); f(a); $f\left(\frac{1}{t}\right)$, если $f(x)=\frac{x^2-1}{x(x+3)}$

Решение: $f(1)=\frac{1-1}{1(1+3)}=0;\ f(a)=\frac{a^2-1}{a(a+3)}=\frac{a^2-1}{a^2+3a};$

$$f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{\left(\frac{1}{t}\right)^2-1}{\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}+3\right)}=\frac{1-t^2}{1+3t}.$$

Пример 3. Найти область определения функций одной переменной:

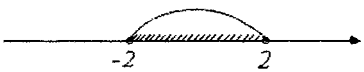
а) $y=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}};$

б) $y=\lg(4-2x).$

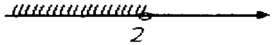
Решение:

а) область определения D определяется неравенством $4-x^2>0;\ x^2<4$ или $|x|<2,\ -2<x<2$.

Итак D_x:



б) D: $4-2x>0$ или $x<2$



Итак, D: $-\infty<x<2$

Пример 4. Найти область определения функции:

а) $y=\sqrt{4-x}+\sqrt{\frac{2x-3}{5}};$

б) $y=\sqrt{\frac{2x-4}{x+3}}+\frac{1}{2x-8};$

в) $y=\log_2(x^2-4x).$

Решение: а) Область определения D(y): $\left.\begin{matrix} 4-x\ge 0 \\ \frac{2x-3}{5}\ge 0 \end{matrix}\right\}$ или

$\left.\begin{matrix} -x\ge -4 \\ 2x-3\ge 0 \end{matrix}\right\}$; $\left.\begin{matrix} x\ge 4 \\ x\ge \frac{3}{2} \end{matrix}\right\}$.

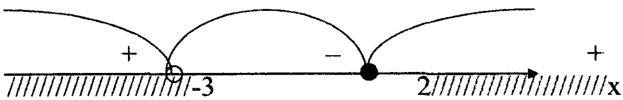
Итак, D: $1{,}5\le x\le 4$.

б) D(y): $\begin{cases} 2x-8\ne 0 \\ \frac{2x-4}{x+3}\ge 0 \end{cases}$,

Решая неравенство методом интервалов, найдем нули

$2x-4=0$ или $x=2$;

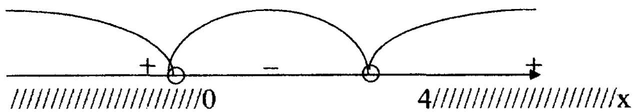
$x+3\ne 0$ или $x\ne -3$ и $x\ne 4$



Итак, D: $x\in(-\infty;-3)\cup[2;4)\cup(4;+\infty)$

в) D(y): $x^2-4x>0$

Решим неравенство: $x^2-4x=0$; $x(x-4)=0$; $x=0$ и $x=4$.



Итак, D: $x\in(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$

Пример 5. Найти область определения функций двух переменных и сделать чертеж:

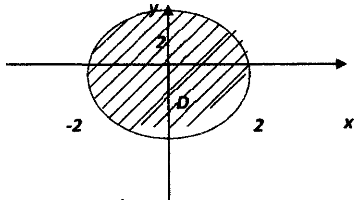
а) $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$;

б) $z=\ln(1-x^2-y)$;

в) $z=\arcsin\frac{x+y}{2}$.

Решение: а) очевидно, что область определения D определяется неравенством $4-x^2-y^2\ge 0$ или $x^2+y^2\le 0$.

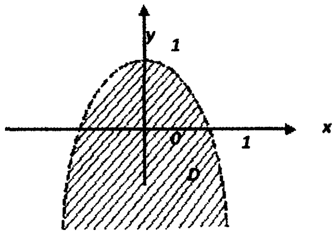
Граница области $x^2+y^2=4$, есть окружность радиуса $r=2$ с центром в начале координат, а область определения $D: x^2+y^2=4$, есть множество точек плоскости XOY, принадлежащих кругу радиуса $r=2$ с центром в начале координат



б) $D: 1-x^2-y>0$ или $y<1-x^2$

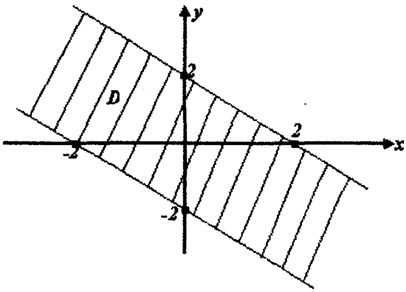
Уравнение $y=1-x^2$ определяет границу области D, ею является парабола, ветви которой направлены вниз и вершина в точке (0, 1).

Неравенство $y<1-x^2$ определяет все точки плоскости, лежащие внутри параболы и не принадлежащие самой параболе.



в) Известно, что функция $\arcsin t$ определена, если ее аргумент t удовлетворяет неравенству $|t|\le 1$, следовательно, функция $z=\arcsin\frac{x+y}{z}$ определена, если $\left|\frac{x+y}{z}\right|\le 1$. Решая неравенство, найдем $|x+y|\le 2$ или $-x-2\le y\le 2-x$. Таким образом, границей области D являются прямые $y=2-x$ и $y=-x-2$.

Изобразим на плоскости множество точек, удовлетворяющих двойному неравенству $D: -x-2\le y\le 2-x$



9.3. Способы задания функции.

Рассмотрим некоторые свойства функции одной переменной $y = f(x)$.

1) Функция $y = f(x)$ называется **четной**, если для любого $x \in D$ выполняется условие

$$f(-x) = f(x).$$

График четной функции симметричен относительно оси ОУ. Например, функции $y = x^2, y = \sqrt{x^2 - 3}, y = \cos x$ являются четными.

2) Функция называется **нечетной**, если для любого $x \in D$ выполняется

$$f(-x) = f(x).$$

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Примерами нечетной функции являются $y = x^3, y = \sin x$.

Область определения D четной и нечетной функции симметрична относительно начала координат. Если это условие не выполнено, то функция не является четной и не является нечетной.

3) Функция $y = f(x)$ называется **периодической,** если существует такое положительное число Т, что при любом значении $x \in D$ выполняется равенство

$$f(x + T) = f(x),$$

число Т называют периодом функции.

Например,

- функции $y = \sin x, y = \cos x$ являются периодическими с периодом $T = 2\pi$; функции $y = tgx$, $y = ctgx$ имеют период $T = \pi$.

4) Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей** на множестве $x \subset D$, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции, то есть для любых $x_1 \in D$, $x_2 \in D$, таких, что

$$x_1 < x_2,$$

выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

5) Функция $y = f(x)$ называется **убывающей** на множестве D, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции: если

$$x_1 < x_2, \text{ то } f(x_1) > f(x_2)$$

для любых $x_1 \in D$, $x_2 \in D$.

Например, функция $y = x^2$ является убывающей на множестве $X = (-\infty, 0)$, а на множеств $X = (0, +\infty)$ эта функция является возрастающей.

Пример 6. **Исследовать на четность функцию: y = x^3 sin x.**

Решение: Функция четная, если f(x) = f(-x). Найдем

$$f(-x) = (-x)^3 \sin(-x) = -x^3(-\sin x) = x^3 \sin x = f(x).$$

Следовательно, функция $y = x^3 \sin x$ четная.

9.4. Монотонность функции.

<u>Определение 1</u>: Функции f называется возрастающей [убывающе й] на множестве $M \subseteq D(f)$, если для любых значений аргумента $x_1; x_2$ из M выполняется условие $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$ $[x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)]$.

<u>Определение 2</u>: Промежутки области определения, на которых функция возрастает или убывает, называются промежутками монотонности функции.

<u>Определение 3</u>:

Функция f называется возрастающей [убывающей], если для любых значений аргумента $x_1; x_2$ из $D(f)$ выполняется условие $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$ $[x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)]$.

Определение 4: Возрастающие и убывающие функции называются монотонными.

- Свойство 1. Пусть функция f возрастает (убывает) на множестве M и С – любое число. Тогда функция $g(x) = f(x) + C$, также возрастает (убывает) на множестве M.
- Свойство 2. Пусть функция f возрастает (убывает) на множестве M и С > 0. Тогда функция $g(x) = Cf(x)$, также возрастает (убывает) на множестве M.
- Свойство 3. Пусть функция f возрастает (убывает) на множестве M и С < 0. Тогда функция $g(x) = Cf(x)$, убывает (возрастает) на множестве M.
- Свойство 4. Пусть функция f возрастает (убывает) и знакопостоянна на множестве M. Тогда функция $g(x) = \frac{1}{f(x)}$, убывает (возрастает) на множестве M.
- Свойство 5. Сумма возрастающих (убывающих) функций есть функция возрастающая (убывающая).
- Свойство 6. Произведение возрастающих (убывающих) неотрицательных функций есть функция возрастающая (убывающая).

Теорема 1. Если функция $y = g(x)$ возрастает на множестве M, а функция $y = f(x)$ убывает на множестве M, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет на M не более одного корня.

Теорема 2. Если функция $y = g(x)$ монотонна на множестве M, а функция $y = f(x)$ постоянна на множестве M, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет на M не более одного корня.

9.5. Использование функции в экономике.

Функции находят широкое применение в экономической теории и практике. Спектр используемых в экономике функций весьма широк: от простейших линейных до функций, получаемых по определенному алгоритму с помощью так называемых рекуррентных соотношений, связывающих состояния изучаемых объектов в разные периоды времени.

Наряду с линейными, используются нелинейные функции, такие, как дробно-рациональные, степенные (квадратичная, кубическая и т.д.), показательные (экспоненциальные), логарифмические и другие функции. Периодичность, колеблемость ряда экономических процессов позволяет также использовать тригонометрические функции.

Наиболее часто используются в экономике следующие функции:

1. *Функция полезности (функция предпочтений)* — в широком смысле зависимость полезности, т.е. результата, эффекта некоторого действия от уровня (интенсивности) этого действия.

2. *Производственная функция* — зависимость результата производственной деятельности от обусловивших его факторов.

3. *Функция выпуска* (частный вид производственной функции) — зависимость объема производства от наличия или потребления ресурсов.

4. *Функция издержек* (частный вид производственной функции) — зависимость издержек производства от объема продукции.

5. *Функции спроса, потребления и предложения* — зависимость объема спроса, потребления или предложения на отдельные товары или услуги от различных факторов (например, цены, дохода и т.п.).

Учитывая, что экономические явления и процессы обусловливаются действием различных факторов, для их исследований широко используются *функции нескольких переменных.* Среди этих функций выделяются *мультипликативные* функции, позволяющие представить зависимую переменную в виде произведения факторных переменных, обращающего его в нуль при отсутствии действия хотя бы одного фактора.

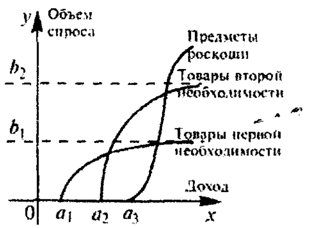
Используются также *сепарабельные* функции, которые дают возможность выделить влияние различных факторных переменных на зависимую переменную, и в частности, *аддитивные* функции, представляющие одну и ту же зависимую переменную как при суммарном, но раздельном воздействии нескольких факторов, так и при одновременном их воздействии.

Если действием побочных факторов можно пренебречь или удается зафиксировать эти факторы на определенных уровнях, то влияние одного главного фактора изучается с помощью функции одной переменной, рассматриваемой в данной и последующих главах. Приведем примеры.

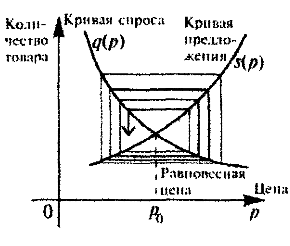
1. Исследуя зависимости спроса на различные товары от дохода

$$y=\frac{b_1(x-a_1)}{x-c_1}\ (x>a_1),\quad y=\frac{b_2(x-a_2)}{x-c_2}\ (x>a_2),\quad y=\frac{b_3x(x-a_3)}{x-c_3}\ (x>a_3)$$

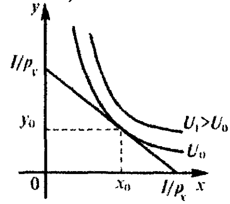
(*функции Л. Торнквиста*), мы можем установить уровни доходов a_1, a_2, a_3, при которых начинается приобретение тех или иных товаров и уровни (точки) насыщения b_1, b_2 для групп товаров первой и второй необходимости (см. рис. 5.22).



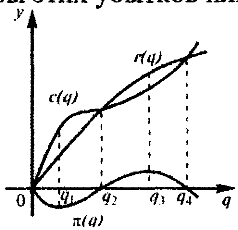
2. Рассматривая в одной системе координат кривые спроса и предложения, можно установить равновесную (рыночную) цену данного товара в процессе формирования цен в условиях конкурентного рынка (*паутинообразная модель*) (см. рис. 5.23).



3. Изучая в теории потребительского спроса *кривые безразличия* (линии, вдоль которых полезность двух благ x и y одна и та же), например, задаваемые в виде xy = U, и *линию бюджетного ограничения* $p_x x + p_y y = I$ при ценах благ p_x и p_y и доходе потребителя I, мы можем установить оптимальные количества благ хо и *уо,* имеющих максимальную полезность *Щ* (см. рис. 5.24).



4. Рассматривая *функции издержек (полных затрат)* *c(q)* и *дохода* фирмы *r(q),* мы можем установить зависимость *прибыли n(q)*= = *c(q)* — *r(q)* от объема производства q (см. рис. 5.25) и выявить уровни объема производства, при которых производство продукции убыточно (0 < q < #2) и приносит прибыль (#2 < q < q4), дает максимальный убыток *(q = q)* и максимальную прибыль *(q* = <73), и найти размеры этих убытков или прибыли.

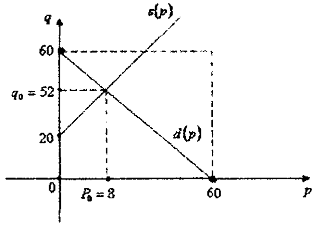


Задача № 1. Найти равновесную цену, если известны функции спроса $d(p)=60-p$ и предложения $s(p)=20+4p$. Найти выручку при равновесной цене P_0, а также при ценах $p_1=5;\ p_2=10$.

Решение: Очевидно, что $p\geq 0,\ d(p)\geq 0,\ s(p)\geq 0$,

тогда для функции $d(p)$ имеем: $\left.\begin{matrix} p\geq 0 \\ d(p)\geq 0\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix} p\geq 0 \\ 60-p\geq 0\end{matrix}\right\}\Rightarrow \begin{matrix} 0\leq p\leq 60; \\ 0\leq d(p)\leq 60\end{matrix}$, для функции $s(p)$: $\left.\begin{matrix} p \ge 0 \\ s(p) \ge 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} p \ge 0 \\ 20+4p \ge 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} p \ge 0 \\ p \ge -5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} 0 \le p < \infty; \\ 20 \le s(p) < \infty \end{matrix}$

Точку равновесия найдем из условия $d(p)=s(p)$, то есть $60-p=20+4p$ или $5p=40$; откуда $P_0=8$ - равновесная цена; при этом количество товара $q_0=d(p_0)=60-8=52$



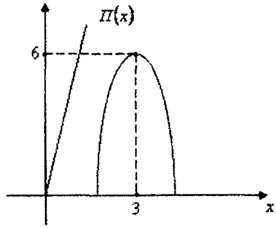
При равновесной цене выручка равна $p \cdot \min(d(p); s(p))$. При $p_1=5$ получим $5 \cdot \min(d(p_1); s(p_1)) = 5 \cdot \min(60-5; 20+4 \cdot 5) = 5 \cdot 40 = 200$. При $p_2=10$ получим $10 \cdot \min(d(p_2); s(p_2)) = 10 \cdot \min(60-10; 20+4 \cdot 10) = 10 \cdot 50 = 500$.

Задача № 2. Найти и построить функцию прибыли, если фирма реализует x единиц продукцию по цене $p=6$ за единицу, при известных постоянных затратах, равных 12 у.е. и переменных затратах на единицу продукции равных $(2x-6)$ у.е.

Решение: Функция прибыли равна $\Pi(x)=r(x)-c(x)$, где $r(x)$ функция полного дохода равна произведению цены $p=6$ на количество продукции x: $r(x)=6x$; $c(x)$ - функция затрат (издержек) равна сумма постоянных и переменных затрат, на x единиц продукции: $c(x)=12+(2x-6)\cdot x$ или $c(x)=12+2x^2-6x$.

Итак, функция прибыли: $\Pi(x)=6x-(2x^2-6x+12)=-2x^2+12x-12$
$\Pi(x)=-2(x^2-6x+6)=-2(x^2-6x+9-9+6)=-2(x-3)^2+6$.

Построим графики функций $\Pi(x)$, $r(x)$, $c(x)$



Максимальная прибыль достигается при $x=3$, $\Pi(3)=6$, при этом объеме продукта доход равен $r(3)=6\cdot 3=18$ (у.е.), и затраты $c(3)=2\cdot 9-6\cdot 3+12=12$ (у.е.).

❖ Тема-10: Числовая последовательность и ее предел.

10.1. Определение числовой последовательности.

Числовой последовательностью называется набор чисел $\{ a_n \},\_где\_n \in N$.

Замечание. Записывая последовательность $a_n = a(n), n \in N$, можно определять её как числовую функцию с областью определения **N.** Как функция она имеет график- набор точек плоскости с натуральными абсциссами n=1,2,3,…

Примеры.

1. $a_n = sin(n)$. Точки графика лежат на синусоиде y=sin(x) и имеют натуральные координаты.
2. $a_n = (-1)^n$.

Определение 2(ограниченность).

Последовательность a_n называется **ограниченной сверху (снизу)**, если множество точек $A = \{a_1, a_2, a_3, a_n ...\} \subset R$ **ограничено сверху(снизу).**

Последовательность a_n называется **ограниченной**, если множество А **ограничено.**

Примеры.

1. Обе последовательности предыдущего примера ограничены.
2. Последовательность 1,2,3,…, n,… ограничена снизу и неограничена
   сверху.
3. Последовательность $a_n = n*(-1)^n$ неограничена ни сверху, ни снизу.

Далее можно было бы дать определение монотонной последовательности
a_n через монотонность функции f(n)= a_n. Дадим более простое эквивалентное определение.

Предел функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$ называется *левосторонним* и обозначается

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x<x_0} f(x),$$

если точка x остается все время слева от x_0, что означает выполнение неравенства $x<x_0$.

Аналогично определяется и обозначается *правосторонний предел*: $f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x>x_0} f(x)$

Теорема о существовании предела.

Функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 предел, равный A, тогда и только тогда, когда существуют односторонние пределы в точке x_0, и они равны между собой и равны числу A.

Запишем кратко данную теорему:

$\exists \lim_{x\to x_0} f(x)=A$, тогда и только тогда, когда

1) $\exists\, f(x_0+0),\ f(x_0-0)$;
2) $f(x_0-0)=f(x_0+0)$;
3) $f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$.

Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ - функции, для которых существуют пределы при $x\to x_0$ (или при $x\to\infty$): $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim_{x\to x_0} \varphi(x)=B$.

Сформулируем основные теоремы о пределах.

1. *Предел алгебраической суммы конечного числа функций равен такой же сумме пределов этих функций, то есть*
$$\lim_{x\to x_0}[f(x)+\varphi(x)]=A+B.$$
2. *Предел произведения конечного числа функций равен произведению пределов этих функций, то есть*
$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\varphi(x)]=AB.$$
В частности, постоянный множитель можно выносить за знак предела, то есть $\lim_{x\to x_0}(cf(x))=c\lim_{x\to x_0} f(x)=cA$.
3. *Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций* (при условии, что предел делителя не равен нулю), то есть
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{A}{B}\quad(B\neq 0).$$

4. *Если* $\lim\limits_{u\to u_0} f(u) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = u_0$, *то предел сложной функции* $f[\varphi(x)]$ равен

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = A.$$

5. *Теорема о переходе к пределу в неравенстве.*

Если в некоторой окрестности точки x_0

$f(x) < \varphi(x)$, *то* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)$.

6. *Теорема о пределе промежуточной функции.*

Если в некоторой окрестности точки x_0 функция $f(x)$ заключена между двумя функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, имеющими одинаковый предел - число A,

то функция $f(x)$ имеет тот же предел A,

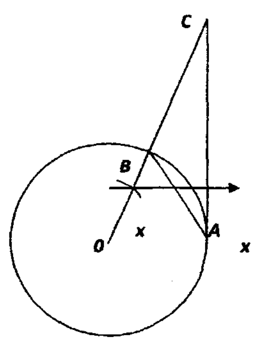
то есть, если

$\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \psi(x) = A$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$

Замечательные пределы

Можно доказать, что при $x \to 0$ функции sinx и x являются эквивалентными бесконечно малыми функциями: $\sin x \sim x$, то есть имеет место предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, который называют ***первым замечательным пределом***.

Доказательство. Рассмотрим круг радиуса R с центром в точке O. Пусть OB - подвижный радиус, образующий угол x $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ с осью Ox.



Из геометрических соображений следует, что площадь треугольника AOB меньше площади сектора AOB, которая в свою очередь меньше площади прямоугольника AOC, то есть $S_{\Delta AOB} < S_{сект.AOB} < S_{\Delta AOC}$.

Так как $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} R \cdot R \cdot \sin x = \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin x$, $S_{сект.AOB} = \frac{1}{2} R^2 x$, $S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2} AO \cdot AC = \frac{1}{2} AO \cdot (AO \cdot tgx) = \frac{1}{2} R^2 tgx$, то имеем $\frac{1}{2} R^2 \sin x < \frac{1}{2} R^2 x < \frac{1}{2} R^2 tgx$,

откуда, разделив все части двойного неравенства на $\frac{1}{2} R^2 \sin x > 0$, получим $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ или $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$.

Переходя к пределу при $x \to 0$, получим $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} 1 = 1$.

На основании теоремы о пределе промежуточной функции, получим $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Замечание 1. Так как функции $\cos x$ и $\frac{\sin x}{x}$ четные, то полученные неравенства $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ справедливы и при $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.

Замечание 2. Итак, мы показали, что sinx и x являются эквивалентными бесконечно малыми функциями:

$\sin x \sim x$.

Можно показать, что *эквивалентными бесконечно малыми* функциями также будут

$tgx \sim x$

$\arcsin x \sim x$

$arctgx \sim x$

$\ln(1+x) \sim x$

На практике, при решении задач часто используют следующее правило:

при вычислении пределов произведения функций одну бесконечно малую функцию можно заменить эквивалентной ей бесконечно малой функцией в этой же точке.

Пример 1.

Вычислить: a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 6x}{4x}$; b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$; d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x \arcsin x}{tg 7x^2}$.

Решение: а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{4x}=\dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{6x}=\dfrac{3}{2}\cdot 1=\dfrac{3}{2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}\cdot 1^2=\dfrac{1}{2}$.

d) используя бесконечно малые функции при x $\to 0$

$tg 7x^2 \sim 7x^2$

$\arcsin 5x \sim 5x$, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x\arcsin 5x}{tg 7x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3x5x}{7x^2}=\frac{15}{7}=2\frac{1}{7}.$$

Вторым замечательным пределом называют

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \text{ или } \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e,$$

где число e = 2.71828... - иррациональное число, называемое *неперовым числом,* так как найдено Непером в XVII веке. Число e находит применение в математическом анализе, является основанием натуральных логарифмов.

График функции $y=e^x$ получил название *экспоненты.* Широко используются логарифмы по основанию e, называемые *натуральными*. Натуральные логарифмы обозначаются символом ln: $\log_e x=\ln x$.

Пример 2. Найти: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{3x}$; б) $\lim\limits_{y\to 0}(1-3y)^{\frac{2}{y}}$.

Решение.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{3x}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}}\right]^{\frac{5}{x}\cdot 3x}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}}\right]^{15}=e^{15}$;

б) $\lim\limits_{y\to 0}(1-3y)^{\frac{2}{y}}=\lim\limits_{y\to 0}\left[(1+(-3y))^{-\frac{1}{3y}}\right]^{-3y\cdot\frac{2}{y}}=\lim\limits_{y\to 0}\left[(1+(-3y))^{-\frac{1}{3y}}\right]^{-6}=e^{-6}$.

Техника вычисления пределов

При вычислении $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ часто встречаются следующие неопределенности $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$, $\infty-\infty$, $1^\infty, 0^0$ и другие.

Приведем некоторые правила вычисления пределов в этих случаях

1). Если $f(x)$, $g(x)$ – многочлены и $\lim\limits_{x \to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$, то необходимо разделить числитель и знаменатель данной дроби на x в старшей степени.

Пример 3. Вычислить

$$\lim_{x \to \infty}\frac{x^3 + x^2}{1 - 4x^3}.$$

Решение: разделим числитель и знаменатель данной дроби на x ^{3}

$$\lim_{x \to \infty}\frac{x^3 + x^2}{1 - 4x^3} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to \infty}\frac{1 + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^3} - 4} = -\frac{1}{4}$$

2). Если $f(x)$, $g(x)$ – многочлены и $\lim\limits_{x \to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$,

то необходимо числитель и знаменатель данной дроби разложить на множители и сократить на $(x - x_o)$

Пример 4. Вычислить

$$\lim_{x \to 2}\frac{x^2 - 4}{2x - 4}$$

Решение: числитель и знаменатель данной дроби разложим на множители и сократим на $(x - 2)$

$$\lim_{x \to 2}\frac{x^2 - 4}{2x - 4} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{2(x-2)} = \frac{4}{2} = 2$$

3). Если $f(x)$, $g(x)$ содержит иррациональные выражения $(\sqrt{x} - \sqrt{a})$ и $\lim\limits_{x \to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$,

то необходимо умножить числитель и знаменатель данной дроби на сопряженный множитель $(\sqrt{x} + \sqrt{a})$ и воспользоваться известной формулой:

$(\sqrt{x} - \sqrt{a})\,(\sqrt{x} + \sqrt{a}) = x - a$

Пример 5. Вычислить

$$\lim_{x \to 0}\frac{\sqrt{2} - \sqrt{x+2}}{x - x^2}.$$

Решение: числитель и знаменатель данной дроби умножим на сопряженный множитель $\sqrt{2}+\sqrt{x+2}$, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{x+2}}{x-x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{x+2})(\sqrt{2}+\sqrt{x+2})}{(x-x^2)(\sqrt{2}+\sqrt{x+2})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2-(x+2)}{(x-x^2)(\sqrt{2}+\sqrt{x+2})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2-x-2}{x(1-x)(\sqrt{2}+\sqrt{x+2})}=\frac{-1}{1\cdot 2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

4). Если $f(x), g(x)$ – тригонометрические функции и $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$,

то можно использовать эквивалентные бесконечно малые функции

$tgx\sim x$

$\arcsin x\sim x$

$arctgx\sim x$

$\ln(1+x)\sim x$

Пример 6. Вычислить

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{tg4x}$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 4x}{x\arcsin 8x}$

Решение:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{tg4x}=\frac{0}{0}=\left|\begin{matrix}\sin 5x\sim 5x\\ tg4x\sim 4x\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{4x}=\frac{5}{4}$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 4x}{x\arcsin 8x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 4x}{x\arcsin 8x}=\left|\begin{matrix}\sin 4x\sim 4x\\ \arcsin 8x\sim 8x\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{(4x)^2}{x\cdot 8x}=\lim_{x\to 0}\frac{16x^2}{8x^2}=2$

10.2. Монотонные последовательности

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется неубывающей (невозрастающей), если $\forall n\in N$ справедливо неравенство $x_n\le x_{n+1}$ $(x_n\ge x_{n+1})$.

Если на самом деле выполняются строгие неравенства $x_n<x_{n+1}$ $(x_n>x_{n+1})$, то последовательность $\{x_n\}$ называется строго возрастающей (строго убывающей) или просто возрастающей (убывающей). Последовательности убывающие и возрастающие, неубывающие и невозрастающие называются монотонными.

Элементы монотонных последовательностей можно расположить в цепочки $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n \le x_{n+1} \le \ldots$ $(x_1 \ge x_2 \ge \ldots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \ldots)$, откуда видно, что неубывающая последовательность ограничена снизу, а невозрастающая сверху.

Примеры: 1) $\left\{1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ - невозрастающая последовательность.

2) $\left\{n^2\right\}$ - возрастающая последовательность.

Ниже мы доказываем важную теорему, утверждающую, что монотонная ограниченная последовательность чисел всегда имеет предел. В нашем изложении (в § 1.7) эта теорема фигурировала как одно из основных свойств – свойство V – множества действительных чисел.

Т е о р е м а 1. Если последовательность действительных чисел

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \qquad (1)$$

не убывает (не возрастает) и ограничена сверху (снизу) числом M (соответственно m), то существует действительное число a, не превышающее M (не меньшее m), к которому эта последовательность стремится как к своему пределу:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \le M \qquad (2)$$

(соответственно $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \ge m$).

Замечание. Если последовательность действительных чисел $\{a_n\}$ сходится, то их десятичные разложения не обязательно стабилизируются. Например, если

$a_{2k} = 1{,}0\ldots011\ldots$, $a_{2k+1} = 0{,}9\ldots911\ldots$ $(k = 1, 2, \ldots)$, где после запятой стоят k нулей или k девяток, то последовательность $\{a_n\}$ имеет предел, равный 1 $(a_n \to 1)$, однако, как легко видеть, эта последовательность не стабилизируется.

П р и м е р 1. Приведем новое доказательство равенства (см. пример 8 § 2.1)

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0(|q|<1), \tag{4}$$

Пусть пока $q>0$. Тогда переменная $q^n\ (n=1,2,\dots)$ не возрастает и ограничена снизу числом 0. Но тогда по теореме 1 существует число $A\ge 0$, к которому стремится q^n : $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = A$.

Имеем также $A=\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = q\lim\limits_{n\to\infty} q^n = qA$, откуда $A(1-q)=0$ и $A=0$, потому что $q<1$.

Если теперь $q<0$, то на основании уже доказанного, $|q^n| = |q^n| \to 0,\ n\to\infty$. Равенство (4) доказано полностью. Это доказательство (4), пожалуй, более элегантное, чем то, которое было приведено в примере 8 § 2.1, но оно не дает возможности судить о скорости стремления q^n к нулю – не дается эффективно число $n_0=n_0(\varepsilon)$, начиная с которого $q^n<\varepsilon$.

Пример 2. Справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0, \tag{5}$$

где a - произвольное число.

При $|a|\le 1$ оно очевидно. Пусть $a>1$. Положим

$u_n=\frac{a^n}{n!}$.

Тогда $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{a}{n+1}\to 0\ (n\to\infty)$. Отсюда следует, что $u_{n+1}<u_n\ (\forall n>n_0)$, где n_0 достаточно велико.

Таким образом, переменная u_n для $n>n_0$, убывает. Кроме того, она ограничена снизу числом 0. Но тогда существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = A\ge 0$.

Но также $A=\lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(u_n\frac{a}{n+1}\right)=A\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{n+1}=A\cdot 0=0$, и мы доказали равенство (5) для любого $a\ge 0$. Но оно верно и для любого $a<0$, потому что

$\left|\frac{a_n}{n!}\right|=\frac{|a_n|}{n!}\to 0$ при $n\to\infty$.

10.3. Применение в экономике.

На финансовом рынке кредитор получает доход от предоставления денег в долг в виде, например, помещения денег на сберегательный счет, покупки акций, выдачи ссуды и т.д. Получаемый доход называется процентами и определяется кредитной ставкой.

$$\frac{(iP)}{100}$$

Различают два вида процентных ставок: простые и сложные. Начисления при ставке простого процента предполагает применение ставки только к первоначальной сумме на протяжении всего срока долга. Пусть - наращенная сумма долга через периодов после предоставления ссуды в размере денежных единиц, а простая ставка процента за период равна i процентов. Тогда в каждом периоде процентные начисления постоянны и равны. Найдем наращенную сумму долга в каждом из периодов:

$$S_1 = \frac{P+(iP)}{100} = P\left(\frac{1+i}{100}\right)$$

Данная формула

$$S_n = \frac{S_{n-1}+(iP)}{100} = P\frac{(1+((n-1)i))}{100} + \frac{(iP)}{100} = P\left(\frac{1+(ni)}{100}\right) \quad S_n = P\left(\frac{1+(ni)}{100}\right)$$

$n = 0,1,..,$ $\left(\frac{1+(ni)}{100}\right)$

называется формулой *простых процентов*, - множителем наращения.

Рассмотрим теперь, как изменяется сумма долга при начислении сложного процента. В этом случае доход определяется применением процентной ставки к первоначальной сумме вместе с начисленными в предыдущих периодах процентами.

При первоначальной сумме P и сложной ставке за период начисления i% наращенная сумма меняется следующим образом:

$$S_2 = \frac{S_1 + (iS_1)}{100} = S_1\left(\frac{1+i}{100}\right) = P\left(\frac{1+i}{100}\right)^2 \quad S_n = S_{n-1} + S_{n-1}\left(\frac{1+(i)}{100}\right) = P\left(\frac{1+i}{100}\right)^n$$

$$S_n = P\left(\frac{1+i}{100}\right)^n$$ Формула:

$n = 0,1,2,.,$ называется формулой *сложных процентов.* (3.1)

Задача 1. Компании необходимо производить замену оборудования каждые 8 лет. Для этого выделяются определенные средства. Если компания может выделить 100000 сумов ежегодно и разместить их под 4% годовых, то какая сумма будет в ее распоряжении по окончании восьми лет?

Решение: Пусть первоначальный депозит (сумма денег, помещённая вкладчиком в банк на определённый или неопределённый срок.

Банк пускает эти деньги в оборот, а в обмен выплачивает вкладчику проценты) помещен в банк под i=100% годовых, тогда через год сумма депозита удвоится. Предположим, что через полгода счет закрыт с результатом

$$Q_1 = Q_0\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

и эта сумма снова помещается на депозит. В конце года депозит будет равен

$$Q_2 = Q_0\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25Q_0$$

Аналогично, при ежеквартальном размещении депозит в конце года будет равен

$$Q_3 = Q_0\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 \approx 2{,}37Q_0$$

Если ежемесячно повторять ту же операцию, то

$$Q_{12} = Q_0\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} \approx 2{,}61Q_0$$

$$Q_{8720} = Q_0\left(1+\frac{1}{8720}\right)^{8720} \approx 2{,}718Q_0$$

При ежечасной операции

$$\frac{Q_n}{Q_0} x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Заметим, что последовательность значений увеличения первоначального вклада совпадает с последовательностью, предел которой равен.

В общем случае, если i - процент начисления и год разбит на n частей, то через t лет сумма депозита будет равна:

$$Q_n = Q_0\left(\frac{1+i}{(100n)}\right)^{nt} Q_n = Q_0\left(\left(\frac{1+i}{100n}\right)^{\frac{100n}{i}}\right)^{\frac{it}{100}}$$

или введем новую переменную,

$$m = \frac{100n}{i} \lim_{n\to\infty} Q_n = \lim_{m\to\infty}\left(\left(\frac{1+1}{m}\right)^m\right)^{\frac{it}{100}} = \frac{Q_0 e(it)}{100}$$

Данная формула называется формулой *непрерывных процентов.*

❖ Тема-11: Предел функции.

11.1. Определения Коши и Гейне предела функции

Определение предела по Коши. Число A называется пределом функции f(x) в точке α, если эта функция определена в некоторой окрестности точки α, за исключением, быть может, самой точки α, и для каждого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x-\alpha|<\delta, x \neq \alpha$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$. В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = A$ или $f(x)\to A$ при $x\to\alpha$.

$$\{\lim_{x\to\alpha} f(x) = A\} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x : 0<|x-\alpha|<\delta \to |f(x)-A|<\varepsilon$$

или, используя понятие окрестности, в виде

$$\{\lim_{x\to\alpha} f(x) = A\} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x \in \dot{U}_\delta(\alpha) \to f(x)\in U_\varepsilon(A).$$

Таким образом, число A есть предел функции f(x) в точке α, если для любой ε-окрестности числа A можно найти такую проколотую δ-окрестность точки α, что для всех x, принадлежащих этой δ-окрестности, соответствующие значения функции содержатся в ε-окрестности числа A.

б) Определение предела по Гейне. Число A называется пределом функции f(x) в точке α, если эта функция определена в некоторой проколотой окрестности точки α, т.е. $\exists\delta_0 > 0 : \dot{U}_{\delta_0}(\alpha)\subset D(f)$, и для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к α и такой, что $x_n \in \dot{U}_{\delta_0}(\alpha)$ для всех $n\in N$, N-натуральные числа, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к числу A.

в) Эквивалентность двух определений предела.

Теорема. Определения предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны.

В определениях предела функции f(x) по Коши и по Гейне предполагается, что функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки α, т.е. существует число $\delta_0 > 0$ такое, что $\dot{U}_{\delta_0} \in D(f)$.

а) Пусть число A есть предел функции f в точке α по Коши; тогда $\exists\delta_0>0:\dot{U}_{\delta_0}\subset D(f)$ и $\forall\varepsilon>0\exists\delta\in(0;\delta_0]:\forall x\in\dot{U}_\delta(\alpha)\to f(x)\in U_\varepsilon$(A). (1)

Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к числу α и такую, что $x_n\in\dot{U}_{\delta_0}(\alpha)$ для всех $n\in N$, N-натуральные числа. Согласно определению предела последовательности для найденного в (1) числа $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ можно указать номер n_δ такой, что $\forall n\geq n_\delta\to x_n\in\dot{U}_\delta(\alpha)$, откуда в силу условия (1) следует, что $f(x_n)\in U_\varepsilon(A)$. Таким образом, $\forall\varepsilon>0\exists\delta\in(0;\delta_0]:\forall x\in\dot{U}_\delta(\alpha)\to f(x)\in U_\varepsilon$(A), (2), где $N_\varepsilon=n_{\delta(\varepsilon)}$, причем усл-е (2) выполняется для любой посл-ти {Xn} такой, что $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=\alpha$ и $x_n\in\dot{U}_{\delta_0}(\alpha)\subset D(f)$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$, т.е. число A – предел функции f(x) в точке α по Гейне.

б) Докажем, что если число A есть предел функции f(x) в точке α по Гейне, то это же число является пределом функции f по Коши, т.е. выполняется условие (1). Допустим, что это неверно. Тогда $\forall\varepsilon>0\exists\delta\in(0;\delta_0]:\exists x\in\dot{U}_\delta(\alpha)\to|f(x(\delta))-A|\geq\varepsilon_0$. (3)

Согласно (3) в качестве δ можно взять любое число из полуинтервала $(0;\delta_0]$. Возьмем $\delta=\delta_0/n$, где $n\in N$, N-натуральные числа, и обозначим $x_n=x(\delta_0/n)$. Тогда в силу (3) для любого $n\in N$, N-натуральные числа, выполняются неравенства

$0<|x_n-\alpha|<\delta_0/n$, (4)

$|f(x_n)-A|\geq\varepsilon_0$. (5)

Из (4) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\alpha$ и $x_n\in\dot{U}_{\delta_0}(\alpha)$ при всех $n\in N$, а из (5) заключаем, что число A не может быть пределом последовательности $\{f(x_n)\}$. Следовательно, число A не является пределом функции f в точке α по Гейне. Полученное противоречие доказывает, что должно выполняться утверждение (1).

11.2. Левосторонний и правосторонний пределы.

Определение: Число b называется правым пределом функции $f(x)$ в точке a, если для $\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0$ такое, что для любого $x \in D[f]$ и $a < x < a+\delta$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \epsilon$ (рис. 1). Правый предел обозначается $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} f(x) = f(a+0) = b$

Число b называется левым пределом функции $f(x)$ в точке a, если для $\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0$ такое, что для любого $x \in D[f]$ и $a-\delta < x < a$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \epsilon$ (рис. 2).

Левый предел обозначается $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a-} f(x) = f(a-0) = b$

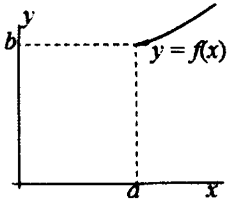


Рис. 1

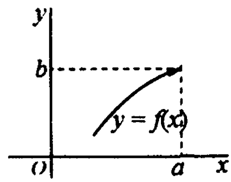


Рис. 2

Левый и правый пределы функции называются односторонними пределами.

Теорема: Если существуют $f(a-0)$ и $f(a+0)$, причем $f(a-0) = f(a+0) = b$, то существует и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Обратное утверждение также верно.

В случае, если $f(a-0) \neq f(a+0)$, то предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ не существует.

Пример: Задание. Найти односторонние пределы функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$ при $x \to 0$

Решение. Правый предел: $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{x} = f(0+0) = \dfrac{1}{0+0} = \dfrac{1}{0} = +\infty$

Левый предел: $\lim\limits_{x\to 0-0} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{1}{x} = f(0-0) = \dfrac{1}{0-0} = \dfrac{1}{-0} = -\infty$

Предел функции при x→0

Ответ - Рассмотрим функцию $y = f(x)$, заданную на R.

Определение: Число b называется пределом функции $y = f(x)$ на бесконечности или при $x \to \infty$, если для любого $\forall\epsilon > 0$ существует число$\delta = \delta(\epsilon) > 0$ такое, что для всех $x \in D(f)$ из того, что $|x| > M$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \epsilon$.

11.3. Свойства предела функции.

Свойство 1. Постоянный множитель c можно выносить за знак предела:

$$\lim_{n\to\infty} (c \cdot y_n) = cA = c \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Свойство 2. Если существуют конечные пределы последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, то

$$\lim(x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n,$$

$$\lim(x_n \cdot y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n,$$

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n} \quad (\text{при условии, что } \lim y_n \neq 0).$$

Свойство 3. Если существуют конечные пределы последовательностей $\{y_n\}$ и $\{y_n^p\}$, то

$$\lim y_n^p = (\lim y_n)^p.$$

Интуитивные соображения. Пусть $\lim y_n = A$.
Тогда $y_n = A + \alpha_n$, где α_n – некоторая бесконечно малая величина. Следовательно,

$$y_n^p = (A + \alpha_n)^p = A^p \cdot \left(1 + \frac{\alpha_n}{A}\right)^p \to$$
$$A^p \cdot (1 + 0)^p = A^p = (\lim y_n)^p.$$

11.4. Применение в экономике

В практических расчетах в основном применяют дискретные проценты, т.е. проценты, начисляемые за фиксированные одинаковые интервалы времени (год, полугодие, квартал и т. д.). Время - дискретная переменная. В некоторых случаях - в доказательствах и расчетах, связанных с непрерывными процессами, возникает необходимость в применении непрерывных процентов. Рассмотрим формулу сложных процентов:

$$\mathbf{S = P(1 + i)^n}.$$

Здесь P - первоначальная сумма, i - ставка процентов (в виде десятичной дроби), S - сумма, образовавшаяся к концу срока ссуды в конце *n*-го года. Рост по сложным процентам представляет собой процесс, развивающийся по геометрической прогрессии. Присоединение начисленных процентов к сумме, которая служила базой для их определения, часто называют *капитализацией процентов.*

В финансовой практике часто сталкиваются с задачей, обратной определению наращенной суммы: по заданной сумме S, которую следует уплатить через некоторое время *n*, необходимо определить сумму полученной ссуды P. В этом случае говорят, что сумма S *дисконтируется*, а проценты в виде разности S - P называются *дисконтом.* Величину P, найденную дисконтированием S, называют *современной,* или *приведенной,* величиной S. Имеем:

$$P = \frac{S}{(1+i)^n}; \quad \lim_{n\to\infty} P = \lim_{n\to\infty} \frac{S}{(1+i)^n} = 0.$$

Таким образом, при очень больших сроках платежа современная величина последнего будет крайне незначительна. В практических финансово-кредитных операциях непрерывные процессы наращения денежных сумм, т. е. наращения за бесконечно малые промежутки времени, применяются редко.

Существенно большее значение непрерывное наращение имеет в количественном финансово-экономическом анализе сложных производственных и хозяйственных объектов и явлений, например, при выборе и обосновании инвестиционных решений. Необходимость в применении непрерывных наращений (или непрерывных процентов) определяется прежде всего тем, что многие экономические явления по своей природе непрерывны, поэтому аналитическое описание в виде непрерывных процессов более адекватно, чем на основе дискретных. Обобщим формулу сложных процентов для случая, когда проценты начисляются *m* раз в году:

$$\mathbf{S = P\,(1 + i/m)^{mn}}.$$

Наращенная сумма при дискретных процессах находится по этой формуле, здесь *m* - число периодов начисления в году, *i* - годовая или номинальная ставка. Чем больше *m*, тем меньше промежутки времени между моментами начисления процентов. В пределе при $m \to \infty$ имеем:

$$S = \lim_{m\to\infty} P\,(1 + i/m)^{mn} = P \lim_{m\to\infty} ((1 + i/m)^{m})^{n}.$$

Поскольку $\lim_{m\to\infty}(1 + i/m)^{m} = e^{i}$, то $S = P\,e^{in}$.

При непрерывном наращении процентов применяют особый вид процентной ставки - *силу роста*, которая характеризует относительный прирост наращенной суммы в бесконечно малом промежутке времени. При непрерывной капитализации процентов наращенная сумма равна конечной величине, зависящей от первоначальной суммы, срока наращения и номинальной ставки процентов. Для того, чтобы отличить ставки непрерывных процентов от ставки дискретных процентов, обозначим первую через d, тогда $S = Pe^{dn}$.

Сила роста d представляет собой номинальную ставку процентов при $m \to \infty$. Множитель наращения рассчитывается с помощью ЭВМ или по таблицам функции.

Потоки платежей. Финансовая рента

Контракты, сделки, коммерческие и производственно-хозяйственные операции часто предусматривают не отдельные разовые платежи, а множество распределенных во времени выплат и поступлений. Отдельные элементы такого ряда, а иногда и сам ряд платежей в целом, называется *потоком платежей*.

Члены потока платежей могут быть как положительными (поступления), так и отрицательными (выплаты) величинами. Поток платежей, все члены которого положительные величины, а временные интервалы между двумя последовательными платежами постоянны, называют *финансовой рентой*. Ренты делятся на годовые и *p*-срочные, где *p* характеризует число выплат на протяжении года. Это дискретные ренты. В финансово-экономической практике встречаются и с последовательностями платежей, которые производятся так часто, что практически их можно рассматривать как непрерывные. Такие платежи описываются непрерывными рентами.

Пример 1. Пусть в конце каждого года в течение четырех лет в банк вносится по 1 млн. сумов, проценты начисляются в конце года, ставка - 5% годовых. В этом случае первый взнос обратится к концу срока ренты в величину $10^{6} \times 1{,}05^{3}$ так как соответствующая сумма была на счете в течение 3 лет, второй взнос увеличится до $10^{6} \times 1{,}05^{2}$, так как был на счете 2 года. Последний взнос процентов

не приносит. Таким образом, в конце срока ренты взносы с начисленными на них процентами представляют ряд чисел: $10^{6}{}'\ 1{,}05^3$; $10^{6}{}'\ 1{,}05^2$; $10^{6}{}'\ 1{,}05$; 10^{6}. Наращенная к концу срока ренты величина будет равна сумме членов этого ряда. Обобщим сказанное, выведем соответствующую формулу для наращенной суммы годовой ренты. Обозначим: S - наращенная сумма ренты, R - размер члена ренты,
i - ставка процентов (десятичная дробь), n - срок ренты (число лет). Члены ренты будут приносить проценты в течение n - 1, n - 2,..., 2, 1 и 0 лет, а наращенная величина членов ренты составит

$$R\,(1+i)^{n-1},\ R\,(1+i)^{n-2},\ldots,\ R\,(1+i),\ R.$$

Перепишем этот ряд в обратном порядке. Он представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем (1+i) и первым членом R. Найдем сумму членов прогрессии.

Получим: $S = R'((1+i)^n - 1)/((1+i) - 1) = R'((1+i)^n - 1)/\,i$. Обозначим $S_{n;\,i} = ((1+i)^n - 1)/\,i$ и будем называть его *коэффициентом наращения ренты*. Если же проценты начисляются *m* раз в году, то $S = R'((1 + i/m)^{mn} - 1)/((1 + i/m)^m - 1)$, где i - номинальная ставка процентов.

Величина $a_{n;\,i} = (1 - (1+i)^{-n})/\,i$ называется *коэффициентом приведения ренты*. Коэффициент приведения ренты при $n \to \infty$ показывает, во сколько раз современная величина ренты больше ее члена:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n;\,i} = \lim_{n\to\infty} (1 - (1+i)^{-n})/\,i = 1/i.$$

Пример 3.14. Под *вечной рентой* понимается последовательность платежей, число членов которой не ограничено - она выплачивается в течение бесконечного числа лет. Вечная рента не является чистой абстракцией - на практике это некоторые виды облигационных займов, оценка способности пенсионных фондов отвечать по своим обязательствам. Исходя из сущности вечной ренты можно полагать, что ее наращенная сумма равна бесконечно большой величине, что легко доказать по формуле:

$$R\times'((1+i)^n - 1)/\,i \to \infty \text{ при } n \to \infty.$$

Коэффициент приведения для вечной ренты $a_{n;\,i} \to 1/i$, откуда A = R/i, т. е. современная величина зависит только от величины члена ренты и принятой ставки процентов.

Тема-12: Непрерывность функции.

12.1. Определение непрерывности функции.

Функция $u = f(M)$ называется ***непрерывной в точке M_0,*** если она определена в этой точке и ее окрестности и

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0).$$

Функция $u = f(M)$ называется ***непрерывной в области D***, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Функция одной переменной $y = f(x)$ ***называется непрерывной на интервале (a, b) или на отрезке [a, b]***, если она непрерывна в каждой точке этого интервала или этого отрезка.

Для функция одной переменной $y = f(x)$ определение непрерывности в точке, используя теорему о существовании предела, можно сформулировать таким образом:

функция $y = f(x)$ является ***непрерывной в точке $x = x_0$***, если:

1) функция определена в этой точке $x = x_0$ и ее окрестности;
2) существуют односторонние пределы:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x), \lim_{x \to x_0 + 0} f(x);$$

3) односторонние пределы равны и равны значению функции в точке x_0:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0);$$

Данное определение часто используют на практике при исследовании функции на непрерывность.

Приведем краткую запись определения непрерывности функции в точке x_0

$$f - \text{непрерывна в т. } x_0 \text{, если} \begin{cases} 1) x_0 \in D \cdot \textit{обл.опредения} \\ 2) \exists \cdot \textit{односторонние} \cdot \textit{пределы} \\ - f(x_0 \pm 0) \\ 3) f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0) \end{cases}$$

Имеют место следующая

Теорема (об арифметических операциях над непрерывными функциями в точке) : Если функции $f_1(M)$,

$f_2(M)$ непрерывна в точке M_0, то будут непрерывными в этой точке также функции:

1) *алгебраическая сумма функций* $f_1(\mathrm{M}) \pm f_2(\mathrm{M})$;

2) *произведение функций* $f_1(\mathrm{M}) \cdot f_2(\mathrm{M})$;

3) *произведение функции на костанту* $K \cdot f_1(\mathrm{M})$;

4) *отношение функций* $\frac{f_1(\mathrm{M})}{f_2(\mathrm{M})}$, *при* $f_2(\mathrm{M}) \neq 0$.

Из определения непрерывности функции в точке x_0, следует, что символы предела и функции можно переставить, если функция непрерывна в точке x_0, то есть

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right).$$

Точки разрыва функции одной переменной, их классификация

В предыдущем разделе введено понятие функции непрерывной в точке:

Функция $y = f(x)$ является ***непрерывной в точке*** $x = x_0$, если:

1) она определена в этой точке $x = x_0$ и ее окрестности;

2) существуют односторонние пределы:

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x),$$

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x);$$

3) односторонние пределы равны и равны значению функции в точке x_0:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0);$$

Таким образом, для непрерывной функции в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 - 0) = f(x_0)$$

Функция имеет ***точку разрыва***, если хотя бы одно из условий 1 и 3 не выполнено в точке x_0

Пример 15. Исследовать на непрерывность функции: $y = \frac{1}{x^2 - 4}$

Решение: Найдем область определения $D: x^2 - 4 \neq 0$; $x \neq \pm 2$, итак $D: x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$.

В точках $x = -2$ и $x = 2$ функция не определена, нарушено условие 1) определения 1, следовательно точки $x = \pm 2$ являются точками разрыва.

Введем следующую ***классификацию точек разрыва***:

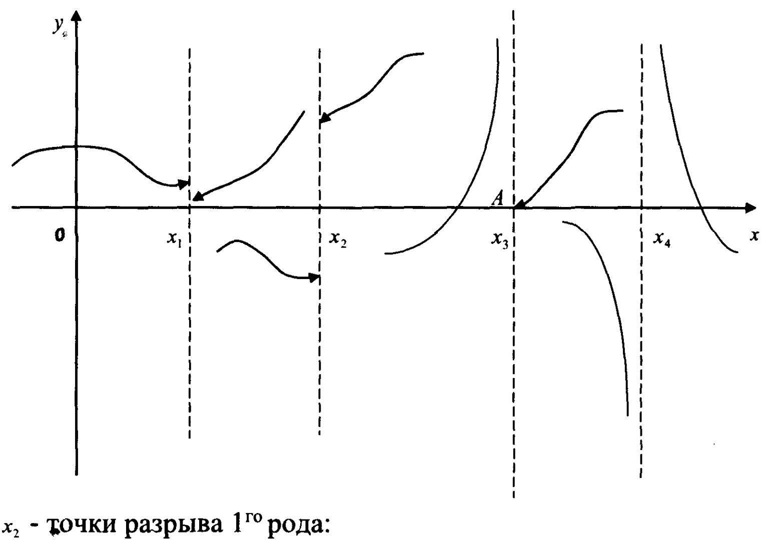
- Точка x_0 называется ***точкой разрыва $1^{го}$ рода***, если существует-односторонние пределы, они конечны, но не равны друг другу $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$ ***(разрыв конечного скачка);***

  -односторонние пределы равны, но не равны значения функции в точке x_0 $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$ **(устранимый разрыв)**.

- Точка x_0 называется ***разрывом $2^{го}$ рода***, если хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности или не существует.

$$f(x - 0) = \infty \text{ и (или) } f(x + 0) = \infty$$

Изобразим графически точки разрывы $1^{го}$ и $2^{го}$ родов:



x_1, x_2 - точки разрыва $1^{го}$ рода:

x_1 - устранимый разрыв, так как $f(x_0-0)=f(x_0+0)$

x_2 - разрыв конечного скачка, так как $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$

x_3, x_4 - точки разрыва 2$^{\text{го}}$ рода,

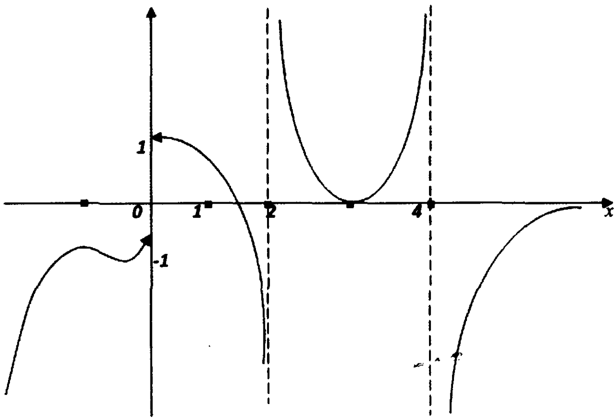
причем $f(x_3-0)=+\infty$ и $f(x_3+0)=A$;

$f(x_4-0)=-\infty$ и $f(x_4+0)=+\infty$

Упражнение.

Найти односторонние пределы функции $f(x)$, заданной графически, в соответствующих точках разрыва.

Найти: $f(-\infty)$ и $f(+\infty)$



Пример 16. Найти точки разрыва функций, определить характер разрыва, сделать чертеж, если

a) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$

b) $f(x)=arctg\dfrac{1}{x}$

c) $f(x)=e^{\frac{1}{x-2}}$

Решение: функция $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ не определена при $x=0$; $x=0\notin D$, следовательно $x=0$ - точка разрыва функции. Найдем односторонние пределы функции в точке $x_0=0$. Известно, что

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (первый замечательный предел), следовательно, односторонние пределы равны

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=1.$$

Таки образом точка $x_0=0$ является устранимым разрывом функции $f(x)=\frac{\sin x}{x}$.

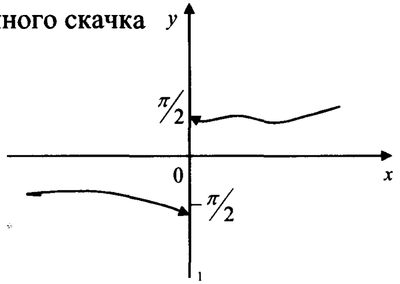
a) Функция $f(x)=arctg\frac{1}{x}$ не определена при $x_0=0$, $x=0\notin D$, найдем односторонние пределы в точке разрыва $x_0=0$:

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to -0}arctg\frac{1}{x}=arctg\left(\frac{1}{-0}\right)=arctg(-\infty)=-\frac{\pi}{2}$$

$$f(x_0+0)=\lim_{x\to +0}arctg\frac{1}{x}=arctg\left(\frac{1}{+0}\right)=arctg(+\infty)=\frac{\pi}{2}$$

$$f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$$

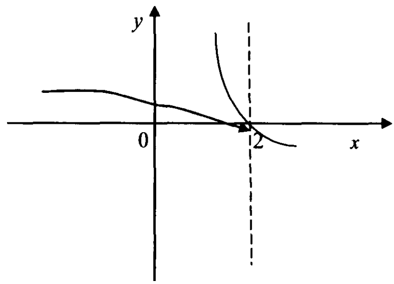
Итак, точка $x_0=0$ является точкой разрыва 1$^{\text{го}}$ рода – конечного скачка



b) Функция $f(x)=e^{\frac{1}{x-2}}$ не определена в точке $x_0=2\notin D$, следовательно $x_0=2$ - точка разрыва функции, найдем односторонние пределы в точке разрыва $x_0=2$:

$$f(x_0-0)=f(2-0)=\lim_{x\to 2-0}e^{\frac{1}{x-2}}=e^{\frac{1}{2-0-2}}=e^{\frac{1}{-0}}=e^{-\infty}=\frac{1}{e^{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0.$$

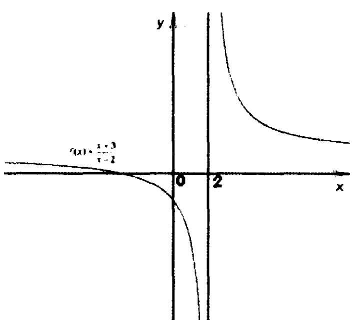
$f(x_0+0)=f(2+0)=\lim\limits_{x\to 2+0}e^{\frac{1}{x-2}}=e^{+0}=e^{+\infty}=\infty$. Согласно определению 2 точка $x=2$ является разрывом 2$^{\text{го}}$ рода (бесконечного скачка)



12.2. Типы разрывов.

Определение ***точек разрыва функции*** и их видов является продолжением темы <u>непрерывности функции</u>. Наглядное (графическое) объяснение смысла точек разрыва функции даётся так же в контрасте с понятием непрерывности. Научимся находить точки разрыва функции и определять их виды. И помогут нам - левый и правый пределы, обобщённо называемые односторонними пределами.

Точки на графике, которые не соединены между собой, называются точками разрыва функции. График такой функции, терпящей разрыв в $f(x)=\frac{x+3}{x-2}$ точке x=2 - на рисунке ниже.



Точка разрыва первого рода: у функции существуют как конечный (т. е. не равный бесконечности) левый предел, так и конечный правый предел, но функция не определена в точке или левый и правый пределы различны (не равны).

Точка устранимого разрыва первого рода. Левый и правый пределы равны. При этом существует возможность доопределить функцию в точке.

Доопределить функцию в точке, говоря просто, значит обеспечить соединение точек, между которыми находится точка, в которой найдены равные друг другу левый и правый пределы. При этом соединение должно представлять собой лишь одну точку, в которой должно быть найдено значение функции.

Пример 1. Определить точку разрыва функции $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ и вид (характер) точки разрыва.

Решение. Функция не определена в точке $x=0$. Находим левый и правый пределы функции в этой точке:

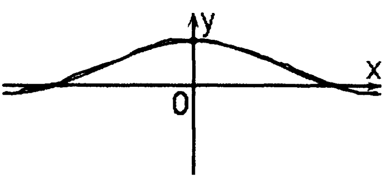
$$\lim_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Левый и правый пределы равны, следовательно точка $x=0$ - точка устранимого разрыва первого рода.

Есть возможность доопределить функцию:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & \textit{если}\quad x\neq 0\\ 1, & \textit{если}\quad x=0\end{cases}$$

График,функции с точкой разрыва - под примером.



Точка неустранимого (конечного) разрыва первого рода. Существуют левый и правый пределы, но они различны (не равны). Функцию невозможно доопределить. Разность пределов называется скачком.

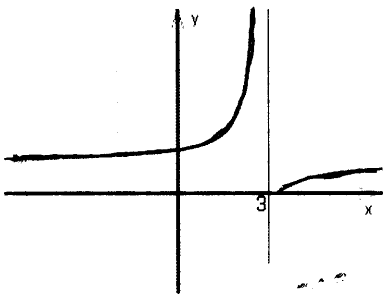
Точка разрыва второго рода: точка, в которой хотя бы один из пределов (левый или правый) - бесконечный (равен бесконечности).

Пример 3. Определить точку разрыва функции и вид (характер) точки разрыва для функции $f(x)=e^{\frac{1}{3-x}}$

Решение. Из выражения степени при e видно, что в точке $x=3$ функция не определена. Найдём левый и правый пределы функции в этой точке:

$$\lim_{x\to 3+0} e^{\frac{1}{3-x}} = e^{\frac{1}{3-(3+0)}} = e^{\frac{1}{3-3-0}} = e^{\frac{1}{-0}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0, \quad \lim_{x\to 3-0} e^{\frac{1}{3-x}} = e^{\frac{1}{3-(3-0)}} = e^{\frac{1}{3-3+0}} = e^{\frac{1}{+0}} = e^{\infty} = \infty.$$

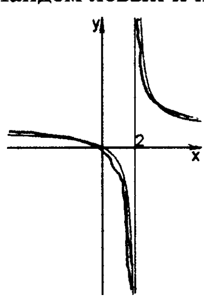
Один из пределов равен бесконечности, поэтому точка $x=3$ - точка разрыва второго рода. График функции с точкой разрыва - под примером.



Пример 4. Определить точку разрыва функции и вид (характер) точки разрыва для функции:

$$f(x)=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$$

Решение. Из выражения степени при 2 видно, что в точке $x=0$ функция не определена. Найдём левый и правый пределы функции в этой точке:



$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{-0}}} =$$

$$= \frac{1}{1+2^{-\infty}} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{+0}}} =$$

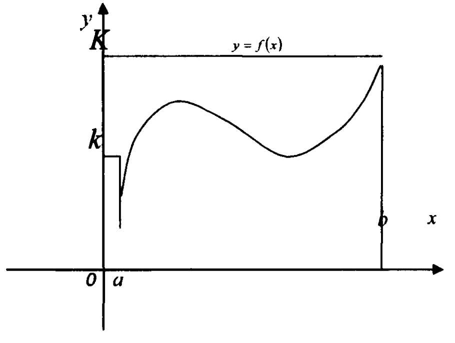
$$= \frac{1}{1+2^{+\infty}} = 0.$$

Пределы не равны и конечны, поэтому точка $x=0$ - точка неустранимого разрыва первого рода.

12.3. Свойства непрерывной функции

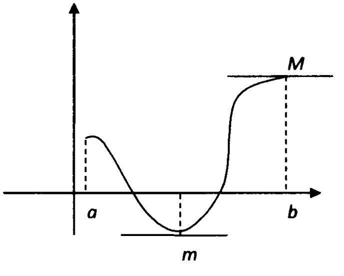
Теорема-1. (об ограниченности непрерывной функции)

Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке: $k \le f(x) \le K$



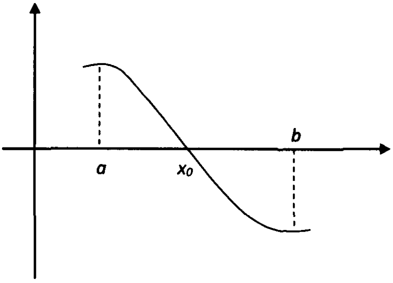
Теорема 2 (теорема Вейерштрасса).

Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает на этом отрезке наименьшего значения m и наибольшего значения M



Теорема 3 (теорема Больцано-Коши).

Если функция непрерывна на отрезке $[a,b]$ и значения ее на концах отрезка $f(a)$ и $f(b)$ имеют противоположные знаки, то есть $f(a)\,f(b) < 0$, то внутри отрезка найдется точка $x_0 \in (a,\ b)$ такая, что $f(x_0)=0$.



С помощью определения непрерывности функции в точке можно доказать непрерывность всех *основных элементарных* функций:

степенной,

показательной,

логарифмической,

тригонометрических,

обратных тригонометрических ,

Теорема 4 (о непрерывности основных элементарных функций).

Основные элементарные функции непрерывна в области определения.

Аналогичная теорема имеет место для *элементарных функций,* то есть функций, полученных из основных элементарных с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и суперпозиции (функция от функции).

Теорема 5 (о непрерывности элементарных функций).

Элементарные функции непрерывна в области определения

Пример 17. Исследовать на непрывность функцию $y=\sin x+\frac{1}{x}+\ln(x+1)$.

Решение. Найдем область определения функции: $x\neq 0$, $x+1>0$.

Следовательно, функция непрерывна в области

$$D=(-1,0)\cup(0,+\infty)$$

Теорема 6 (о промежуточных значениях непрерывной функции).

Пусть функция непрерывна на некотором отрезке (в том числе бесконечном). Если в двух каких- либо точках этого отрезка а и в функция принимает различные значения: $f(a)=A$; $f(b)=B$, то каково бы ни было C , лежащее между A и B, найдется x_0 , лежащее между a и b , что $f(x_0)=C$.

Непрерывная функция, переходя от одного значения к другому, принимает хотя бы раз и всякое промежуточное значение.

❖ Тема-13: Производная функции.

13.1. Определение производной функции.

Из школьного курса математического анализа известно, что для функции одной переменной $y=f(x)$, которая определена и непрерывна в области *D*, *приращении функции* есть разность $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$, где Δx - *приращение аргумента.*

Рассмотрим функцию нескольких переменных $u=f(M)$ или $u=f(x, y, \ldots z)$, которая определена и непрерывна в области *D*.

Для таких функций введем понятия полного и частного приращений функций. Пусть первая координата *x* точки *M* получает приращение Δx и становится равной $x+\Delta x$. Другие координаты точки *M* (аргументы данной функции), остаются без изменения. Точка $M(x, y, \ldots z)$ преобразована в точку $M_1(x+\Delta x, y, \ldots z)$, функция при этом изменила свое значение на величину

$f(M_1)-f(M)=\Delta_x u$ или $\Delta_x u=f(x+\Delta x, y, \ldots z)-f(x, y, \ldots z)$,

$\Delta_x u$ называется *частным приращением функции f по x*.

Аналогично можно определить частные приращения по другим переменным:

$\Delta_y u=f(x, y+\Delta y, \ldots, z)-f(x, y, \ldots, z)$ - *частное приращение функции f по y*,

$\Delta_z u=f(x, y, \ldots, z+\Delta z)-f(x, y, \ldots, z)$ - *частное приращение функции f по z*.

Полным приращением функции $u=f(x, y, \ldots z)$ называется $\Delta u=f(x+\Delta x, y+\Delta y, \ldots, z+\Delta z)-f(x, y, \ldots, z)$.

Пример 1.

a) Найти приращение для функции $y=\sin x$.

b) Найти частные приращения функции $z=2y+x^2$.

Решение: *a)* $\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$.

b) Найдем частное приращение по *x*: $\Delta_x z=2y+(x+\Delta x)^2-(2y+x^2)=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x-(\Delta x)^2$;

частное приращение по *y*:

$$\Delta_y z = 2(y+\Delta y)+x^2-(2y+x^2)=2\Delta y$$

Если существует конечный или бесконечный *предел* отношения частного приращения функции $u=f(M)=f(x,\ y,\ ...,\ z)$ по одной из независимых переменных к приращению этой независимой переменной при условии, что последнее приращение стремится к нулю произвольным образом, то он называется *частной производной данной функции* по соответствующей независимой переменной в точке M, обозначают:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y u}{\Delta y}$$

Если функция y зависит от одного аргумента: $y=f(x)$, то, как известно, ограничиваются термином «*производная функции*» ,обозначают

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Также встречается следующие обозначения производных:

✓ для функции одной переменной *y = f(x) производную* обозначают

$$y'=y'(x)=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

✓ в случае функции двух переменных *z = f(x, y)* обозначают

частную производную функции f (x,y) по x:

$$z'_x=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,\ y)-f(x,\ y)}{\Delta x}$$

частную производную функции f (x,y) по y:

$$z'_y=f'_y(x,y)=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)}{\Delta y}.$$

13.2. Таблица производных.

Пусть c – постоянная,

u = u(x) и ***v = v(x)*** функции.

1. *(c)' = 0*
2. *(u + v)' = u' + v'*
3. *(u · v)' = u'v + u v',* *в частности* *(cu)' = c · u'*

4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, *в частности* $\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{1}{c}\cdot u'$

5. $y = f(u)$ – сложная функция, где $u = u(x)$, *тогда*

$$y' = f'(u)\cdot u'.$$

6. $(u^\alpha)' = \alpha\cdot u^{\alpha-1}\cdot u'$, , *в частности* $(x^\alpha)' = \alpha\cdot x^{\alpha-1}$.

7. $(a^u)' = a^u \ln a\cdot u'$, *в частности* $(e^u)' = e^u\cdot u'$

$(e^x)' = e^x$

8. $(\log_a u)' = \frac{1}{u\ln a}\cdot u'$, *в частности* $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

9. $(\sin u)' = \cos u\cdot u'$

10. $(\cos u)' = -\sin u\cdot u'$

11. $(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$

12. $(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$

13. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$

14. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$

15. $(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2}\cdot u'$

16. $(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$

17. Показательно-степенная функция

$(u^v)' = vu^{v-1}u' + u^v \ln uv'$, $u = u(x)$, $v = v(x)$

Пример 1.

Найти производную функций одной переменной

a) $y = 3x^2 + \sqrt[5]{x^3} - \dfrac{2}{\sqrt[4]{x^7}} + 2;$

b) $y = (3x+4)^5 + \sin^3 7x + \cos x^3;$

c) $y = 3arctg\sqrt{x}\left(4+e^{5x}\right)^2;$

d) $y = \dfrac{2x^3 + 2^{tgx^2}}{\cos^5 x^2}.$

Решение: выполним преобразования, используя свойства степеней:

$y = 3x^2 + x^{\frac{3}{5}} - 2x^{-\frac{7}{4}} + 2$, далее, применяя табличные формулы: $(c)' = 0;\ \left(x^\alpha\right)' = \alpha x^{\alpha-1};\ (cu+\upsilon)' = c\cdot u' + \upsilon'$,

получим

$y' = 3\cdot 2x + \dfrac{3}{5}x^{\frac{3}{5}-1} - 2x^{-\frac{7}{4}-1}$; или $y' = 6x + \dfrac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} - 2x^{-\frac{11}{4}}$; или $y' = 6x + \dfrac{3}{5\sqrt[5]{x^2}} - \dfrac{2}{x^2\ \sqrt[4]{x^3}}$.

a) используем формулы:

$\left(u^\alpha\right)' = \alpha u^{\alpha-1}\cdot u';\ (\sin u)' = +\cos u\cdot u';\ (\cos u)' = -\sin u\cdot u'.$

Тогда

$y' = 5(3x-4)^4\cdot 3 + 3\sin^2 7x\cdot\cos 7x\cdot 7 - \sin x^3\cdot 3x^2$ или

$y' = 15(3x-4)^4 + 21\sin^2 7x\cdot\cos 7x - 3x^2\sin x^3.$

b) используем формулы

$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u';\ (u\cdot\upsilon)' = u'\upsilon + u\upsilon';\ (arctgu)' = \dfrac{1}{1+u^2}\cdot u';\ \left(e^u\right)' = e^u\cdot u'$,

получим

$y' = 3\cdot\dfrac{1}{1+x}\cdot\left(\sqrt{x}\right)'\cdot\left(4+e^{5x}\right)^2 + 3arctg\sqrt{x}\cdot 2\left(4+e^{5x}\right)\cdot\left(4+e^{5x}\right)'$

или $y' = 3\cdot\dfrac{1}{(1+x)}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\left(4+e^{5x}\right)^2 + 30arctg\sqrt{x}\cdot\left(4+e^{5x}\right)e^{5x}.$

c) используем формулы:

$\left(\dfrac{u}{\upsilon}\right)' = \dfrac{u'\upsilon - u\upsilon'}{\upsilon^2};\ (tgu)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u'};\ (\cos u)' = -\sin u\cdot u';\ \left(a^u\right)' = a^u\cdot\ln a\cdot u'$.

Таким образом,

$$y' = \frac{\left(6x^2 + 2^{tgx^2}\ln 2\dfrac{2x}{\cos^2 x^2}\right)\cdot\cos^5 x^2 - \left(2x^3 + 2^{tgx^2}\right)\cdot 5\cos^4 x^2\left(-\sin x^2\right)2x}{\cos^{10} x^2}$$ или

$$y' = \frac{\left(6x^2 + 2^{tgx^2}\ln 2\dfrac{2x}{\cos^2 x^2}\right)\cdot\cos^2 x^2 - \left(2x^3 + 2^{tgx^2}\right)\cdot 5\cos\ x^2\left(-\sin x^2\right)2x}{\cos^7 x^2},$$

откроем скобки, получим

$$y' = \frac{6x^2\cos^2 x^2 + 2x2^{tgx^2}\ln 2 + \left(2x^3 + 2^{tgx^2}\right)\cdot 5x\sin 2x^2}{\cos^7 x^2}.$$

Для нахождения частных производных функций нескольких переменных $u = f(x,\ y,\ ...,\ t)$ применяют следующее ***правило***, которое следует из определения п.3.1 :

при вычислении u'_x -частной производной по x, считают остальные переменные $y,...,\ t$ константами;

при вычислении u'_y - частной производной по y, считают другие переменные $x,\ t,...$ константами.

13.3. Свойства.

Теорема 1. Производная постоянной функции равна нулю.

Доказательство. f(x) = c, "x0 Dy = f(x0 + Dx) – f(x0) = c – c = 0,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$$

Теорема 2. Если функции u, v, w дифференцируемы в некоторой точке, то и их алгебраическая сумма также дифференцируема в этой точке, причем производная алгебраической суммы равна алгебраической сумме производных и выполняется равенство

$$(u + v - w)' = u' + v' - w'.$$

Теорема 3. Если функции u и v дифференцируемы в некоторой точке, то и их произведение также дифференцируемо в этой точке, причем выполняется равенство

$$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'.$$

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак производной.

$$(c\cdot u)' = c\cdot u'.$$

Теорема 4. Если функции u и v дифференцируемы в некоторой точке и функция v в этой точке отлична от нуля, то существует производная частного в этой точке, причем

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}.$$

Теорема 5. (производная сложной функции). Если функции y = f(z) и $z = \varphi(x)$ — дифференцируемые функции своих аргументов, то и их композиция является дифференцируемой функцией, причем производная сложной функции равна производной внешней функции по промежуточному аргументу, умноженной на производную промежуточного аргумента по независимой переменной.

$$\left(f(\varphi(x))\right)' = f'(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Теорема 6. (теорема Лагранжа). Конечное приращение дифференцируемой функции равно произведению соответствующего приращения аргумента на производную функции в некоторой промежуточной точке.

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Доказательство. Проведем секущую к графику функции через точки $A(x_1, f(x_1))$ и $B(x_2, f(x_2))$. Так как функция дифференцируема, то она имеет касательную в каждой точке. Будем перемещать секущую параллельно, пока она не станет касательной к графику в некоторой промежуточной точке с, $x_1 \le c \le x_2$ (рис. 1).

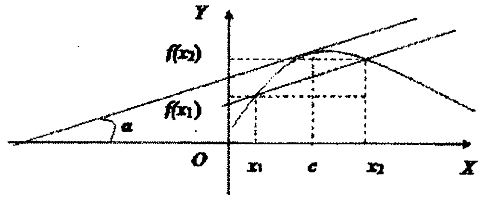


Рис. 1

Угловые коэффициенты касательной и секущей равны $k_{кас} = k_{сек}$.

$$f'(c) = \operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Отсюда $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$.

Теорема 7. (теорема Ролля). Между двумя нулями дифференцируемой функции всегда найдется хотя бы один ноль производной.

Доказательство. Пусть $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Из теоремы Лагранжа следует, что найдется точка c, $x_1 \le c \le x_2$, такая, что

$$f'(c)(x_2 - x_1) = 0 \Rightarrow f'(c) = 0.$$

Две последние теоремы носят название теорем о конечных приращениях.

13.4. Применение в экономике.

✓ Предельная производительность труда. Если $g = g(t)$ - количество производственной продукции g за время t, то период Δt количество производственной продукции составляет $\Delta g = g(t_0 + \Delta t) - g(t_0)$, тогда $g' = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta t}$, есть производительность труда в момент t_0.

✓ Предельные затраты (издержки) производства. Если $y = c(x)$ - функция затрат производства, где x - количество выпускаемой продукции, тогда

Δx - прирост продукции

Δc - приращение затрат производство, тогда производная $c'_{(x)} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta c(x)}{\Delta x}$ выражает предельные затраты производства при неограниченном уменьшении прироста объема производства $\Delta x \to 0$

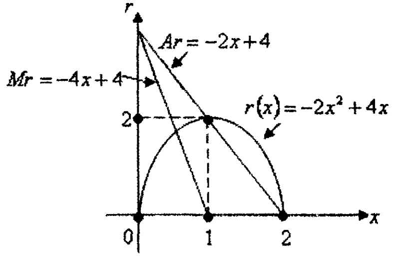
Аналогично можно определить.

✓ <u>Предельный спрос</u>: $d'_{(p)} = \lim\limits_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta d(p)}{\Delta p}$, где $d(p)$ - функция спроса;

p - цена на товар

✓ Предельное предложение: $S'_{(p)} = \lim\limits_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta S(p)}{\Delta p}$, где $S(p)$ - функция предложения.

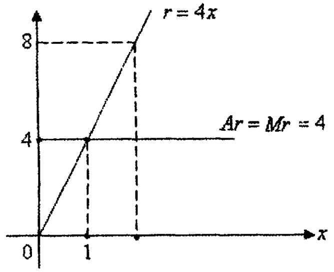
При увеличении цены p на единицу производная $S'_{(p)}$ оценивает увеличение предложения товара от производителей, а производная от функции спроса $d'_{(p)}$ позволяет оценить уменьшение спроса со стороны покупателя.



Данные показывают, что с увеличением цены спрос на продукцию падает; с ростом количества реализованной продукции предельный доход снижается, а также уменьшает средний доход; это характерно для монопольного рынка, когда одна или несколько фирм контролируют цены на определенную продукцию.

В условиях свободного конкурентного рынка, когда участников рынка достаточно много, цены не контролируются, рыночная цена $p=4$, например, суммарный доход равен $r(x)=4x$.

В этом случае средний и предельный доходы равны $Ar=\frac{r(x)}{x}=\frac{4\cdot x}{x}=4$, $Mr=r'=4$.



В экономике часто предельные величины называют маржинальными и обозначают

MC - предельные затраты,

MS - предельное предложение,

Md - предельный спрос и прочее.

В отличие от предельных при записи средних (average) величин используют обозначения

AS - среднее предложение,

Ad - средний спрос,

Ar - средний доход

Пример 1. Найти предельный и средний доход на единицу продукции x, если функция спроса равна $d(x)=-2x+4$.

Решение. Суммарный доход от реализованной продукции в количестве x равен $r(x)=d(x)\cdot x$ или $r(x)=(-2x+4)\cdot x=-2x^2+4x$. Тогда, средний доход на единицу продукции $Ar=\frac{r}{x}=\frac{-2x^2+4x}{x}=-2x+4$;

предельный доход (дополнительный доход от реализации единицы дополнительной продукции) равен $Mr = r'_{(x)} = -4x + 4$

Задача 2. Известна функция затрат производства $y = c(x) = 30x - 0.01x^3$ (у.е.) найти предельные затраты, если объем выпускаемой продукции равен 20 ед.

Решение. Предельные затраты производства равны производной: $y' = c'(x) = 30x - 0.03x^2$; при заданном объеме $x = 20$ ед., найдем $y'(20) = c'(20) = 30 - 0.03 \cdot 20^2 = 30 - 12 = 18$ (у.е.).

Предельные затраты на производство дополнительной единицы продукции при заданном объеме выпускаемой продукции 20 ед. будут равны 18 у.е.

Задача 3. Количество произведенной продукции за рабочее время t, $1 \le t \le 8$, задано функцией: $g(t) = -\frac{1}{3}t^3 + \frac{7}{2}t^2 + 20t + 10$.

Найти производительность труда, скорость и темп ее изменения через два часа после начала работы и за час до ее окончания.

Решение. Производительность труда в момент t равна производной $g'(t) = -\frac{1}{3} \cdot 3t^3 + \frac{7}{2} \cdot 2t^2 + 20 = -t^2 + 7t + 20$. Скорость изменения производительности равна второй производной $g''(t) = -2t + 7$.

Темп τ изменения производительности равен $\tau = \frac{g''(t)}{g'(t)} = \frac{-2t+7}{-t^2+7t+20} = \frac{2t-7}{t^2-7t-20}$. Найдем их значения в заданный момент времени при $t_1 = 2$ и $t_2 = 7$

$g'(2) = 30$; $g''(2) = 3$; $\tau(2) = 0.1$

$g'(7) = 20$; $g''(7) = -7$; $\tau(7) = -0.35$.

Таким образом, к концу рабочего дня производительность труда снижается, и снижается скорость и темп ее изменения $(g'' < 0;\ \tau < 0)$.

❖ Тема-14: Дифференциал функции и основные теоремы дифференциального исчисления.

14.1. Определение дифференциала функции.

Пусть дана функция $u = f(M) = f(x, y,...,z)$, D -область определения.

Если координатам точки M задать приращения, то получим новую точку $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y,..., z+\Delta z)$.

Полное приращение функции u в точке M (смотри 2.2.1.) :

$\Delta u = f(M_1) - f(M) = f(x+\Delta x, y+\Delta y,..., z+\Delta z) - f(x, y,..., z)$.

Если приращение Δu функции в точке M можно представить в виде $\Delta u = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + ... + C\cdot\Delta z + \alpha$,

где A, B, C- коэффициенты, не содержащие $\Delta x, \Delta y,..., \Delta z$; α- бесконечно малая величина более высокого порядка малости по сравнению с расстоянием $\rho = |MM_1| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + ... + \Delta z^2}$, то

главная часть приращения функции

$A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + ... + C\cdot\Delta z$

называется **полным дифференциалом** данной функции $u = f(x, y, ...,z)$ в точке $M(x, y,...,z)$ и обозначается

$du = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + ... + C\cdot\Delta z$.

В частности, для функций

$u = f(x)$, $u = f(x, y)$, $u = f(x, y, z)$

имеем соответственно:

$df(x) = A\cdot\Delta x$,

$df(x, y) = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y$,

$df(x, y, z) = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + C\cdot\Delta z$.

Можно доказать, что коэффициенты A, B, ...,C равны производным данной функции по x, y, ...,z, покажем это для функции одной переменной.

Пусть $u = f(x)$ – функция одной переменной, дифференцируема в точке $M(x)$, то есть существует

$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, или $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)\cdot\Delta x + \alpha$, или $\Delta y = f'(x)\cdot\Delta x + \alpha\Delta x$,

найдем $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\alpha\cdot\Delta x}{\rho} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\alpha\cdot\Delta x}{|\Delta x|} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha = 0$, тогда, согласно классификации бесконечно малых функций (2.1.7),

$\alpha \cdot \Delta x$ - бесконечно малая более высокого порядка, чем $\rho = |\Delta x|$.

Значит, $f'(x) \cdot \Delta x$ - главная часть приращения Δy, т.е. $A \cdot \Delta x = f'(x) \cdot \Delta x, A = f'(x)$. Тогда

$df(x) = f'(x) \cdot \Delta x.$

В частности, если $f(x) = x$, то $dx = \Delta x$, т.е. дифференциал аргумента x равен приращению этого аргумента. Таким образом,

$df(x) = f'(x) \cdot dx.$

Дифференциал функции двух переменных равен

$df(x, y) = f'_x \cdot \Delta x + f'_y \cdot \Delta y$

Дифференциал функции трех переменных равен

$df(x, y, z) = f'_x(x, y, z) \cdot dx +'_y (x, y, z) \cdot dy + f'_z(x, y, z) \cdot dz$.

Свойства дифференциалов

Используя выражение для дифференциалов, нетрудно доказать следующие свойства дифференциалов:

1) если C – постоянная величина, то $dC = 0$;
2) $dC \cdot f(M) = C \cdot df(M)$, т.е. постоянный множитель можно выносить за знак дифференциала;
3) $d(f_1(M) \pm f_2(M)) = df_1(M) \pm df_2(M)$;
4) $d[f_1(M) \cdot f_2(M)] = df_1(M) \cdot f_2(M) + f_1(M) \cdot df_2(M)$;
5) $d\dfrac{f_1(M)}{f_2(M)} = \dfrac{df_1(M) \cdot f_2(M) - f_1(M) \cdot df_2(M)}{f_2^2(M)}, f_2(M) \neq 0.$

Пример 1. Найти дифференциал функции $f(x, y) = y \sin x + x^2 e^y$.

Решение. Используя свойства и таблицу производных, найдем:

$df(x, y) = d(y \sin x + x^2 e^y) = dy \sin x + dx^2 e^y = (y \sin x)'_x \cdot dx + (x^2 e^y)'_x dx + (y \cdot \sin x)'_y \cdot dy + (x^2 e^y)'_y \cdot dy =$
$(y \cos x + 2x e^y) \cdot dx + (\sin x + x^2 e^2) \cdot dy.$

14.2. Теорема о дифференцируемой функции

Теорема. Если функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой точке a, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. По определению производной

$$f'(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Это предельное равенство означает, что выражение под знаком предела можно представить в виде

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(x)-\alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x\to a$. Тогда

$$f(x)-f(a)=\left(f'(x)-\alpha(x)\right)(x-a).$$

Следовательно, $f(x)\to f(a)$ при $x\to a$.

Заметим, что дифференцируемость функции в некоторой точке означает ее гладкость в окрестности этой точки, что влечет за собой непрерывность функции в рассматриваемой точке. Однако обратное утверждение несправедливо – функция, обладающая свойством непрерывности в некоторой точке, не обязательно дифференцируема в этой точке.

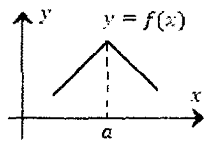


Рис. 1. Непрерывная в точке а функция $f(x)$ не является дифференцируемой в этой точке.

14.3. Приближённые вычисления при помощи дифференциала

Пример 1. Вычислить приближенно $\sqrt[3]{67}$, заменяя приращения функции ее дифференциалом.

Решение: Пожалуйста, перепишите в тетрадь рабочую формулу для приближенного вычисления с помощью **дифференциала**:

$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+d[f(x_0)]$

Начинаем разбираться, здесь всё просто!

На первом этапе необходимо составить функцию $f(x)$. По условию предложено вычислить кубический корень из числа: $\sqrt[3]{67}$, поэтому соответствующая функция имеет вид: $f(x)=\sqrt[3]{x}$. Нам нужно с помощью формулы найти приближенное значение $f(67)=\sqrt[3]{67}$.

Смотрим на *левую часть* формулы $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+d[f(x_0)]$, и в голову приходит мысль, что число 67 необходимо представить в виде $x_0+\Delta x$. Как проще всего это сделать? Рекомендую следующий алгоритм: вычислим данное значение на калькуляторе:

$f(67)=\sqrt[3]{67}\approx 4{,}06154810045$ – получилось 4 с хвостиком, это важный ориентир для решения.

В качестве x_0 подбираем «хорошее» значение, **чтобы корень извлекался нацело**. Естественно, это значение x_0 должно быть **как можно ближе** к 67. В данном случае: $x_0=64$. Действительно: $\sqrt[3]{64}=4$.

Примечание: Когда с подбором x_0 всё равно возникает затруднение, просто посмотрите на скалькулированное значение (в данном случае $4{,}06154810045$), возьмите ближайшую целую часть (в данном случае 4) и возведите её нужную в степень (в данном случае $4^3=64$). В результате и будет выполнен нужный подбор: $x_0=64$.

Если $x_0=64$, то приращение аргумента: $\Delta x=3$.

Итак, число 67 представлено в виде суммы $x_0+\Delta x=64+3$

Далее работаем с *правой* *частью* формулы $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+d[f(x_0)]$.

Сначала вычислим значение функции в точке $x_0=64$.

Собственно, это уже сделано ранее:

$$f(x_0)=f(64)=\sqrt[3]{64}=4$$

Дифференциал в точке находится по формуле:

$d[f(x_0)]=f'(x_0)\cdot\Delta x$ – тоже можете переписать к себе в тетрадь.

Из формулы следует, что нужно взять первую производную:

$$f'(x)=(\sqrt[3]{x})'=(x^{\frac{1}{3}})'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$$

И найти её значение в точке x_0:

$$f'(x_0)=f'(64)=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{64^2}}=\frac{1}{3\cdot16}=\frac{1}{48}$$

Таким образом:

$$d[f(64)]=f'(64)\cdot\Delta x=\frac{1}{48}\cdot3=\frac{1}{16}=0{,}0625$$

Согласно формуле

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+d[f(x_0)];$$

$$f(67)=\sqrt[3]{67}\approx 4+0{,}0625=4{,}0625$$

Найденное приближенное значение достаточно близко к значению $4{,}06154810045$, вычисленному с помощью микрокалькулятора.

Ответ: $\sqrt[3]{67}\approx 4{,}0625$

14.4. Теорема Ролла.

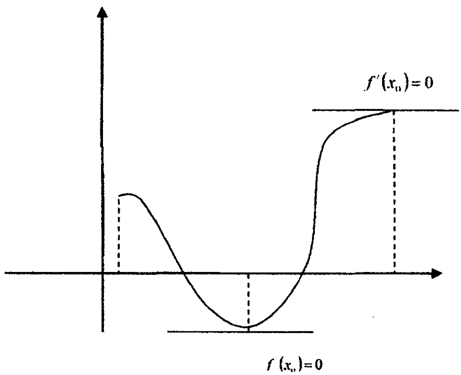
Теорема Роля. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке [a, b], дифференцируема на (a, b) и имеет на концах отрезка равные значения $f(a) = f(b)=c$, то на интервале (a, b) существует хотя бы одна точка $x = x_0$ такая, что $f'(x_0) =0$

Действительно. Так как функция непрерывна на [a, b], то, по теореме Вейерштрасса (2.1.13) она имеет на этом отрезке наименьшее и наибольшее значения: $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{M}$.

- Если $\boldsymbol{m= M}$, то $f'(x_0)$- *const* и для любого $x\in(a,b)$ имеем $f'(x_0) =0$.

- Если $m\neq M$, то хотя бы одно из этих значений соответствует внутренней точке $x=x_0\in(a,b)$, но тогда по теореме Ферма имеем $f'(x_0) =0$.

Геометрический смысл теоремы Роля состоит в том, что существует хотя бы одна точка $(x_0\ , f(x_0))$ такая, касательная в которой к графику функции $y=f(x)$ будет параллельна оси Ox.



Пример 1. Проверить условия теоремы Роля для функции $y = x^2-4x+4$, заданной на отрезке [0, 3] и [0, 4].

Решение. В первом случае значения на концах отрезка не являются равными:

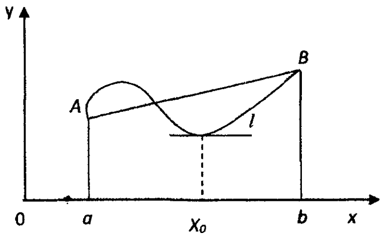
$f(0)=4$, $f(3)=1$, тем не менее, $y'=2x-4=0$ при $x=2\in(0,3)$.

Во втором случае значения на концах отрезка равны:

$f(0)=4$, $f(4)=4$, условия теоремы выполняются и $y'=0$ в той же точке $x=2\in(0,4)$.

14.4. Теорема Лагранжа.

Теорема Лагранжа. Если $y=f(x)$ непрерывна на [a, b], дифференцируема на (a, b), то существует хотя бы одна точка $x=x_0\in(a,b)$ такая, что $f'(x_0)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



Геометрический смысл теоремы состоит в том, что через точку $(x_0, f(x_0))$ можно провести касательную l к графику функции, параллельную секущей AB, так как $K_{AB}=K_l=f'(x_0)$.

Замечание. Теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши, если положить $\varphi(x)=x$.

Правило Лопиталя. Предел отношения бесконечно малых или бесконечно больших функций можно вычислить, используя элементарные приемы преобразования этих функций.

Универсальным правилом для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ является правило Лопиталя.

Теорема Лопиталя. Пусть функции $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$ в окрестности точки $x=a$ непрерывны, дифференцируемы и $\varphi'(x)\neq 0$. При этом при $x\to a$ или $x\to\infty$ одновременно $f(x)\to 0, \varphi(x)\to 0$ или $f(x)\to\infty, \varphi(x)\to\infty$.

Тогда, если существует $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ \text{или}\\ x\to\infty}}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то также существует $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ \text{или}\\ x\to\infty}}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$,

причем $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ \text{или}\\ x\to\infty}}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ \text{или}\\ x\to\infty}}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Правило Лопиталя может применяться неоднократно.

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$.

Решение. Так как имеем неопределенность вида $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$, то применяя дважды правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{9\cos 3x}{2}=\frac{9}{2}.$$

14.5. Теорема Коши.

Теорема Коши. Если функция $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$ непрерывны на [a, b], дифференцируемы на (a, b), причем $\varphi'(x)\neq 0$, то существует хотя бы одна точка $x=x_0\in(a,b)$, такая, что $\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\dfrac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)}$.

Для доказательства введем новую функцию $F(x)=(f(b)-f(a))\cdot\varphi(x)-(\varphi(b)-\varphi(a))\cdot f(x)$, которая удовлетворяет условиям теоремы Роля на [a, b]. Поэтому в некоторой точке $x=x_0\in(a,b)$ $F'(x_0)=0$, т.е. $(f(b)-f(a))\cdot\varphi'(x_0)-(\varphi(b)-\varphi(a))\cdot f'(x_0)=0$, откуда следует

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)}.$$

❖ Тема-15: Исследование функции при помощи производных.

15.1. Нахождение точек экстремума функции.

Простой алгоритм нахождения экстремумов.

Находим производную функции. Приравниваем эту производную к нулю. Находим значения переменной получившегося выражения (значения переменной, при которых производная преобразуется в ноль).

Разбиваем этими значениями координатную прямую на промежутки (при этом не нужно забывать о точках разрыва, которые также надо наносить на прямую), все эти точки называются точками «подозрительными» на экстремум. Вычисляем, на каких из этих промежутков производная будет положительной, а на каких – отрицательной. Для этого нужно подставить значение из промежутка в производную.

Из точек, подозрительных на экстремум, надо найти именно экстремумы. Для этого смотрим на наши промежутки на координатной прямой. Если при прохождении через какую-то точку знак производной меняется с плюса на минус, то эта точка будет максимумом, а если с минуса на плюс, то минимумом.

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значение функции, нужно вычислить значение функции на концах отрезка и в точках экстремума. Затем выбрать наибольшее и наименьшее значение.

Рассмотрим пример:

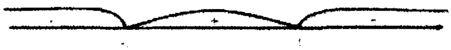
$$y = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

Находим производную и приравниваем её к нулю:

$$y' = \frac{2(x^2 + 1) - 2x2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2};$$

$$2 - 2x^2 = 0;$$
$$(1 - x)(1 - x) = 0;$$
$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1.$$

Полученные значения переменных наносим на координатную прямую и высчитываем знак производной на каждом из промежутков. Ну например, для первого возьмём -2, тогда производная будет равна -0,24, для второго возьмём 0, тогда производная будет 2, а для третьего возьмём 2, тогда производная будет -0,24. Проставляем соответствующие знаки.



Видим, что при прохождении через точку -1 производная меняет знак с минуса на плюс, то есть это будет точка минимума, а при прохождении через 1 – с плюса на минус, соответственно это точка максимума.

15.2. Нахождение интервалов возрастания и убывания функции.

Рассмотрим дифференцируемую на некотором интервале функцию $y=f(x)$. Тогда:

– если производная $f'(x)>0$ на интервале, то функция $f(x)$ возрастает на данном интервале;

– если производная $f'(x)<0$ на интервале, то функция $f(x)$ убывает на данном интервале.

Примечание: справедливы и обратные утверждения.

Пусть точка x_0 принадлежит области определения функции $y=f(x)$Данная точка называется критической, если в ней производная равна нулю: $f'(x_0)=0$ либо значения $f'(x_0)$ не существует. Критическая точка может быть точкой экстремума. А может и не быть. Очень скоро мы рассмотрим необходимые и достаточные условия существования экстремума.

Производная кубической функции $f(x)=x^3$ неотрицательна: $f'(x)=(x^3)'=3x^2\geq 0$ для любого «икс». Действительно, кубическая парабола идёт «снизу вверх». Бесконечно близко около точки $x=0$ скорость изменения функции равна нулю, о чём в рупор кричит производная: $f'(0)=3\cdot 0^2=0$. И вот вам, кстати, сразу пример, когда в критической точке нет максимума или минимума функции.

Функция $f(x)=\sqrt{x}$ обитает на промежутке $[0;+\infty)$, а её производная неравенством $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}>0$ однозначно показывает, что «корень из икс» строго растёт на интервале $(0;+\infty)$ В критической точке $x=0$ функция определена, но не дифференцируема.

С геометрических позиций тут нет общей касательной. Однако в теории рассматриваются так называемые односторонние производные, и в указанной точке существует правосторонняя производная с правосторонней касательной.

Примечание: согласно информации первого параграфа, точка $x=0$ не является точкой минимума функции $f(x)=\sqrt{x}$ (хотя «по понятиям» это вроде бы так). Дело в том, что определения точек максимума и минимума предполагают существование функции и слева и справа от данных точек. Так же не считаются точками экстремума крайние значения области определения арксинуса и арккосинуса (см. ниже).

Стандартная гипербола $f(x)=\frac{1}{x}$ идёт «сверху вниз», то есть данная функция убывает на всей области определения. Что и показывает её производная: $f'(x)=-\frac{1}{x^2}<0$ для любого «икс» кроме нуля.

Здесь, к слову, точка $x=0$ вообще не считается критической, так как функция $f(x)=\frac{1}{x}$ банально в ней не определена.

Экспоненциальная функция $f(x)=e^x$ растёт на всей числовой прямой (для любого значения «икс» справедливо строгое неравенство $f'(x)=e^x>0$). Исследуя же производную $f'(x)=(e^{-x})'=-e^{-x}<0$, легко сделать вывод, что функция $f(x)=e^{-x}$ наоборот – убывает на $\Re$.

Что делает натуральный логарифм $f(x)=\ln x$ сегодня вечером? Растёт: $f'(x)=\frac{1}{x}>0$ на интервале $(0;+\infty)$.

15.3. Нахождение интервалов выпуклости и вогнутости функции.

Пусть функция дважды дифференцируема на некотором интервале. Тогда:

– если вторая производная $f''(x)<0$ на интервале, то график функции $f(x)$ является выпуклым на данном интервале;

– если вторая производная $f''(x)>0$ на интервале, то график функции $f(x)$ является вогнутым на данном интервале.

На счёт знаков второй производной по просторам учебных заведений гуляет доисторическая ассоциация: «–» показывает, что «в график функции нельзя налить воду» (выпуклость), а «+» – «даёт такую возможность» (вогнутость).

Необходимое условие перегиба.

Если в точке x_0 есть перегиб графика функции $y=f(x)$, то:

$f''(x_0)=0$ **либо значения $f''(x_0)$ не существует** *(разберём, читайте!)*.

Данная фраза подразумевает, что функция $y=f(x)$ **непрерывна** в точке x_0 и в случае $f''(x_0)=0$ – дважды дифференцируема в некоторой её окрестности.

Необходимость условия говорит о том, что обратное справедливо не всегда. То есть из равенства $f''(x_0)=0$ (либо небытия значения $f''(x_0)$) **ещё не следует** существования перегиба графика функции $y=f(x)$ в точке x_0. Но и в той, и в другой ситуации x_0 называют **критической точкой второй производной.**

Достаточное условие перегиба

Если вторая производная $y=f''(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак, то в данной точке существует перегиб графика функции $y=f(x)$.

Логично. Точек перегиба (встретился уже пример) может не быть вовсе, и в этом смысле показательны некоторые элементарные образцы. Проанализируем вторую производную функции $f(x)=x^2$:

$$f'(x) = (x^2)' = 2x$$
$$f''(x) = (2x)' = 2$$

Получена положительная функция-константа, то есть *для любого значения «икс»* $f''(x) = 2 > 0$. Факты, лежащие на поверхности: парабола $f(x) = x^2$ вогнута на всей **области определения**, точки перегиба отсутствуют. Легко заметить, что отрицательный коэффициент при x^2 «переворачивает» параболу и делает её выпуклой (о чём нам сообщит вторая производная – отрицательная функция-константа).

Экспоненциальная функция $f(x) = e^x$ также вогнута на $\Re$:

$f'(x) = (e^x)' = e^x$

$f''(x) = (e^x)' = e^x > 0$ для любого значения «икс».

Точек перегиба у графика $f(x) = e^x$, разумеется, нет.

Исследуем на выпуклость/вогнутость график логарифмической функции $f(x) = \ln x$:

$$f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$
$$f''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0$$

Таким образом, ветка логарифма является выпуклой на интервале $(0; +\infty)$. Вторая производная $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ определена и на промежутке $(-\infty; 0)$, но рассматривать его нельзя, поскольку данный интервал не входит в область определения функции $f(x) = \ln x$. Требование очевидно – коль скоро там нет графика логарифма, то ни о какой выпуклости/вогнутости/перегибах речи, естественно, не заходит.

Как видите, всё действительно очень напоминает историю с возрастанием, убыванием и экстремумами функции. Похож и сам **алгоритм исследования графика функции** $y = f(x)$ **на выпуклость, вогнутость и наличие перегибов**:

1) На первом шаге находим область определения функции $y = f(x)$ и точки разрыва.

2) Разыскиваем критические значения. Для этого берём вторую производную $f''(x)$ и решаем уравнение $f''(x) = 0$. Точки, в

которых не существует 2-й производной, но которые входят в область определения самой функции – тоже считаются критическими!

3) Отмечаем на числовой прямой все найденные точки разрыва и критические точки (*ни тех, ни других может не оказаться – тогда чертить ничего не надо (как и в слишком простом случае), достаточно ограничиться письменным комментарием)*.

Методом интервалов определяем знаки $f''(x)$ на полученных интервалах. Как только что пояснялось, рассматривать следует **только те** промежутки, которые входят в область определения функции $y=f(x)$. Делаем выводы о выпуклости/вогнутости и точках перегиба графика функции $y=f(x)$. Даём ответ.

Попытайтесь устно применить алгоритм для функций $f(x)=x^3, f(x)=x^4$. Во втором случае, кстати, пример, когда в критической точке не существует перегиба графика. Впрочем, начнём с ненамного более сложных заданий:

Пример 1. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика

$$f(x)=\frac{(x-1)^3}{4}+2$$

Решение:

1) Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой. Очень хорошо.

2) Найдём вторую производную. Можно предварительно выполнить возведение в куб, но значительно выгоднее использовать **правило дифференцирование сложной функции**:

$$f'(x)=\left(\frac{(x-1)^3}{4}+2\right)'=\frac{1}{4}\cdot((x-1)^3)'+(2)'=\frac{1}{4}\cdot 3(x-1)^2\cdot(x-1)'+0=\frac{3}{4}(x-1)^2$$

Заметьте, что $f'(x)=\frac{3}{4}(x-1)^2\geq 0$, а значит, функция является **неубывающей**. Хоть это и не относится к заданию, но на такие факты всегда желательно обращать внимание.

$$f''(x)=\left(\frac{3}{4}(x-1)^2\right)'=\frac{3}{4}\cdot 2(x-1)\cdot(x-1)'=\frac{3}{2}(x-1)$$

Найдём критические точки второй производной:

$$f''(x)=0$$

$$\frac{3}{2}(x-1)=0$$

$x=1$ – критическая точка

3) Проверим выполнение достаточного условия перегиба. Определим знаки второй производной на полученных интервалах $(-\infty;1),(1;+\infty)$.

Используем **метод интервалов**. Повторим его ещё разок.

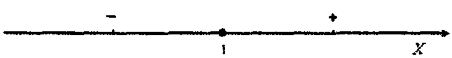
Выберем наиболее выгодную точку $x=0$ интервала $(-\infty;1)$ и вычислим в ней значение второй производной:

$f''(0)=\frac{3}{2}(0-1)=-\frac{3}{2}<0$, следовательно, $f''(x)<0$ в любой точке интервала $(-\infty;1)$

Из интервала $(1;+\infty)$ возьмём значение $x=2$ и проведём аналогичное действие:

$f''(2)=\frac{3}{2}(2-1)=\frac{3}{2}>0$, а значит, $f''(x)>0$ и на всём интервале $(1;+\infty)$.

В результате получены следующие знаки второй производной:



Таким образом, график самой функции $f(x)=\frac{(x-1)^3}{4}+2$ является выпуклым на интервале $(-\infty;1)$ и вогнутым на $(1;+\infty)$. При переходе через $x=1$ вторая производная меняет знак, поэтому в данной точке существует перегиб графика.

Найдём ординату: $f(1)=\frac{(1-1)^3}{4}+2=0+2=2$

Ответ: график функции выпукл на интервале $(-\infty;1)$ и вогнут на $(1;+\infty)$, в точке $(1;2)$ существует перегиб графика.

15.3. Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции.

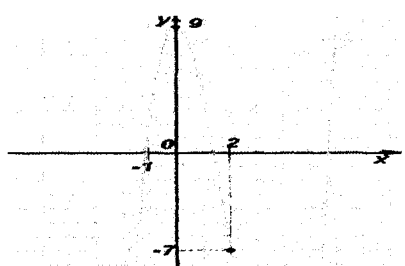
Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает на этом отрезке ***наименьшего*** и ***наибольшего значений***. Это, как уже говорилось, может произойти либо в **точках экстремума**, либо на концах отрезка. Поэтому для нахождения ***наименьшего*** и ***наибольшего значений функции***, непрерывной на отрезке [a, b], нужно вычислить её значения во всех **<u>критических точках</u>** и на концах отрезка, а затем выбрать из них наименьшее и наибольшее.

Пусть, например, требуется определить наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке [a, b]. Для этого следует найти все её критические точки, лежащие на [a, b].

Критической точкой называется точка, в которой функция определена, а её производная либо равна нулю, либо не существует. Затем следует вычислить значения функции в критических точках. И, наконец, следует сравнить между собой по величине значения функции в критических точках и на концах отрезка (f(a) и f(b)). Наибольшее из этих чисел и будет наибольшим значением функции на отрезке [a, b].

Пример 1. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^3 - 6x^2 + 9$ на отрезке [-1, 2].

Решение. Находим производную данной функции $y' = 3x^2 - 12x$. Приравняем производную нулю ($y' = 0$) и получим две критические точки: $x = 0$ и $x = 4$. Для нахождения наименьшего и наибольшего значений функции на заданном отрезке достаточно вычислить её значения на концах отрезка и в точке $x = 0$, так как точка $x = 4$ не принадлежит отрезку [-1, 2]. Эти значения функции - следующие: $f(-1) = 2$, $f(0) = 9$, $f(2) = -7$. Из этого следует, что наименьшее значение функции (на графике ниже обозначено красным), равное -7, достигается на правом конце отрезка - в точке $x = 2$, а наибольшее (тоже красное на графике), равно 9, - в критической точке $x = 0$.



Если функция непрерывна в некотором промежутке и этот промежуток не является отрезком (а является, например, интервалом; разница между интервалом и отрезком: граничные точки интервала не входят в интервал, а граничные точки отрезка входят в отрезок), то среди значений функции может и не быть наименьшего и наибольшего. Так, например, функция, изображённая на рисунке ниже, непрерывна на $(-\infty, +\infty)$ и не имеет наибольшего значения.

Однако для любого промежутка (закрытого, открытого или бесконечного) справедливо следующее свойство непрерывных функций.

Если функция непрерывна в промежутке и имеет единственный экстремум, то он является наименьшим значением ***в случае минимума и наибольшим - в случае максимума.***

❖ Тема-16: Неопределенный интеграл. Интегрирование дробно-рациональных функций

16.1. Понятие неопределенного интеграла.

Интегрирование - действие, обратное дифференцированию, а именно, восстановление функции по известной производной этой функции. Восстановленная таким образом функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$.

Определение 1. Функция F(x) называется первообразной для функции f(x) на некотором промежутке X, если для всех значений x из этого промежутка выполняется равенство $F'(x)=f(x)$, то есть данная функция $f(x)$ является производной от первообразной функции F(x).

Например, функция $F(x) = \sin x$ является первообразной для функции $f(x) = \cos x$ на всей числовой прямой, так как при любом значении икса (sin x)' = (cos x).

Определение 2. Неопределённым интегралом функции f(x) называется совокупность всех её первообразных. При этом употребляется запись $\int f(x)dx$,

где знак $\int$ называется знаком интеграла, функция $f(x)$ – подынтегральной функцией, а $f(x)dx$ – подынтегральным выражением.

Таким образом, если F(x) – какая-нибудь первообразная для $f(x)$, то

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad (1)$$

где C - произвольная постоянная (константа).

Для понимания смысла множества первообразных функции как неопределённого интеграла уместна следующая аналогия. Пусть есть дверь (традиционная деревянная дверь). Её функция - "быть дверью". А из чего сделана дверь? Из дерева. Значит, множеством первообразных подынтегральной функции "быть дверью", то есть её неопределённым интегралом, является функция "быть деревом + C", где C - константа, которая в данном контексте может обозначать, например, породу дерева. Подобно тому, как дверь сделана из дерева при помощи некоторых инструментов, производная функции "сделана" из первообразной функции при помощи формулы, которую мы узнали, изучая производную.

Тогда таблица функций распространённых предметов и соответствующих им первообразных ("быть дверью" - "быть деревом", "быть ложкой" - "быть металлом" и др.) аналогична таблице основных неопределённых интегралов, которая будет приведена чуть ниже. В таблице неопределённых интегралов перечисляются распространённые функции с указанием первообразных, из которых "сделаны" эти функции. В части задач на нахождение неопределённого интеграла даны такие подынтегральные функции, которые без особых усилий могут быть проинтегрированы непосредственно, то есть по таблице неопределённых интегралов. В задачах посложнее подынтегральную функцию нужно предварительно преобразовать так, чтобы можно было использовать табличные интегралы.

Восстанавливая функцию как первообразную, мы должны учитывать произвольную постоянную (константу) C, а чтобы не писать список первообразной с различными константами от 1 до *бесконечности, нужно записывать множество первообразных* с произвольной константой C, например, так: $5x^3+C$. Итак, произвольная постоянная (константа) входит в выражение первообразной, поскольку первообразная может быть функцией, например, $5x^3+4$ или $5x^3+3$ и при дифференцировании 4 или 3, или любая другая константа обращаются в нуль.

Поставим задачу интегрирования: для данной функции $f(x)$ найти такую функцию F(x), производная которой равна $f(x)$.

Пример 1. Найти множество первообразных функции

$$f(x)=x^4$$

Решение. Для данной функции первообразной является функция

$$F(x)=x^5/5,$$

так как $F'(x)=(x^5/5)'=(1/5)(x^5)'=x^4$.

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$, если производная $F(x)$ равна $f(x)$, или, что одно и то же, дифференциал $F(x)$ равен $f(x)\ dx$, т.е.

$F'(x)=f(x)$ или $dF(x)=f(x)dx$.

16.2. Таблица неопределенных интегралов.

1. $\int 0 \cdot dx = C$
2. $\int dx = \int 1 \cdot dx = x + C$
3. $\int x^n \cdot dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,$ $n \neq -1,\ x > 0$
4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$
5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int e^x dx = e^x + C$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$
9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$
10. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$
11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C, |x| < |a|$
12. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} \mathrm{arctg} \dfrac{x}{a} + C$
13. «Высокий» логарифм:
$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C, |x| \neq a$$
14. «Длинный» логарифм:
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

15.3. Способы интегрирования.

Метод непосредственного интегрирования связан с приведением подынтегрального выражения к табличной форме путём преобразований и применения свойств неопределённого интеграла.

Пример 1. Найти интеграл $\int (5x^4 - 3x^2 + 1)dx$

Решение: $\int (5x^4 - 3x^2 + 1)dx = 5\int x^4 dx - 3\int x^2 dx + \int dx = x^5 - x^3 + x + C$.

Пример 2. Найти интеграл $\int \dfrac{x^6 - x^5 + 1}{x^2} dx$

Решение: $\int \dfrac{x^6 - x^5 + 1}{x^2} dx = \int (x^4 - x^3 + x^{-2})dx = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{1}{x} + C.$

Замена переменной интегрирования

Если $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$- функция, имеющая непрерывную производную, тогда $dx = \varphi'(t)dt$; подставляя в интеграл, получим $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$

Пример 3. Найти интеграл $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx.$

Решение: Воспользуемся подстановкой x=t2. Тогда $dx = 2tdt$, получим

$$\int \frac{\sin t}{t} 2tdt = 2\int \sin t dt = -2\cos t + C = -2\cos\sqrt{x} + C.$$

Интегрирование по частям

Пусть u=u(x) и v=v(x) – непрерывно дифференцируемые функции. Тогда справедлива формула

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Пример 4. Найти интеграл $\int xe^x dx.$

Решение: Пусть u=x → du=dx, $dv = e^x dx \to v = e^x$; Используя формулу интегрирования по частям, получим

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

Многочленом степени n называется выражение вида $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – действительные числа $a_n \neq 0, n \geq 0$. Например, 5–7x – многочлен первой степени $P_1(x)$, $P_3(x)$ =2x3 – 3x2 +8x – 1 – многочлен третьей степени.

Рациональной дробью называется отношение двух многочленов. Например, $\frac{2x-5}{x^3+3x-4}; \frac{3x^3-x^2+6}{x-2}$ – рациональные дроби. Всякая рациональная дробь имеет вид:

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$$

где $Q_m(x), P_n(x)$ – многочлены степени m и n соответственно.

$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, если $\begin{cases} m < n, \textit{правильная рациональная дробь} \\ m \geq n, \textit{неправильная рациональная дробь} \end{cases}$

$$P_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

$$Q_m(x) = b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0$$

Простейшими рациональными дробями являются следующие четыре типа дробей:

$$\text{I)}\ \frac{A}{x-c};\quad \text{II)}\ \frac{A}{(x-c)^k}\quad \text{III)}\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q};\quad \text{IV)}\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^2}$$

Очевидно, что интегралы от простейших дробей первого и второго типов находятся легко:

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C,$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}dx = \frac{A}{(x-a)^{k-1}(1-k)} + C$$

где k – целое, $k \geq 2$.

От дробей третьего и четвёртого типов вычисляют заменой $t = x + \frac{p}{2}$, или по следующим формулам:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\ln|x^2+px+q| + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q}$$

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}dx + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}$$

- **Разложение многочленов на множители**

Для любых многочленов $P_n(z) = a_n z + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ имеет место теорема Безу:

$P_n(z) = (z - z_0)P_{n-1}(z)$, где z0 – простой корень

$P_n(z) = (z - z_0)^k P_{n-k}(z)$, где z0 – корень кратности k.

Если z – корень комплексный: $z = \alpha + i\beta$, где $i = \sqrt{-1}$

и $P_n(z) = 0$, то $P_n(\bar{z}) = 0$, где $\bar{z} = \alpha - i\beta$ – сопряженный корень.

Любой многочлен можно разложить на линейные и квадратичные множители

$$P_n(z) = a_n(z-c_1)^{k_1}\ldots(z-c_m)^{k_m}\left[(z-\alpha_1)^2+\beta_1^2\right]^{r_1}\ldots\left[(z-\alpha_s)^2+\beta_s^2\right]^{r_s}$$

$$k_1 + \ldots + k_m + 2(r_1 + \ldots + r_s) = n$$

$c_1, \ldots, c_m$ – действительные корни; $\alpha \pm i\beta$ – комплексные корни

Правильную рациональную дробь можно разложить на сумму простейших дробей, если знаменатель дроби $P_n(x)$ представлен в виде сомножителей $P_n(x) = (x-c_1)^{k_1}(x-c_m)^{k_m}(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_sx+q_s)^{r_s}$:

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{(x-c_1)^{k_1}} + \ldots + \frac{B}{(x-c_m)^{k_m}} + \frac{Mx+N}{x^2+p_1x+q_1} + \ldots + \frac{Dx+E}{(x^2+p_sx+q_s)^{r_s}}$$

Пример 5. Разложить на сумму простейших дробей следующие дроби:

а) $\dfrac{2x^3+3x}{x^6+2x^3+1}$;

б) $\dfrac{3x+5x^2}{x^3(x+2)(x^2+4)}$.

Решение:

а) $\dfrac{2x^3+3x}{x^6+2x^3+1}=\dfrac{2x^3+3x}{(x^3+1)^2}=\dfrac{2x^3+3x}{(x+1)^2(x^2-x+1)^2}=\dfrac{A}{(x+1)^2}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{Mx+N}{(x^2-x+1)^2}+\dfrac{Dx+F}{x^2-x+1}$

б) $\dfrac{3x+5x^2}{x^3(x+2)(x^2+4)}=\dfrac{A}{x^3}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{Mx+N}{x^2+4}$

Пример 6. Вычислить интеграл:

$\int\dfrac{2x+3}{x^2+3x-10}dx$

Решение: Разложим подынтегральную дробь на простейшие дроби

$$\frac{2x+3}{x^2+3x-10}=\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+5}=\frac{A(x+5)+B(x-2)}{(x-2)(x+5)}$$

приравнивая числители дробей, получаем:

$2x+3=A(x+5)+B(x-2)$

Определим коэффициенты A и B, придавая любые значения переменной x:

$$x=2,\ \textit{тогда}\ 7=A\cdot 7;\ A=1$$
$$x=-5,\ \textit{тогда}\ -7=B(-7);\ B=1$$

Получаем A=1 и B=1. Исходный интеграл найдём как сумму интегралов от полученных дробей.

$$\int\frac{2x+3}{x^2+3x-10}dx=\int\frac{dx}{x-2}+\int\frac{dx}{x+5}=\ln|x-2|+\ln|x+5|+C=\ln|(x-2)(x+5)|+C$$

• Интегрирование тригонометрических функций

Рассмотрим интегралы вида $\int R(\sin x,\cos x)dx$. Такие интегралы могут быть сведены к интегралам от рациональных функций заменой переменной $\boxed{t=tg\frac{x}{2}}$, где $-\pi<x<\pi$.

Такая замена называется универсальной тригонометрическая подстановкой.

В этом случае,
$$\sin x = \frac{2tg(x/2)}{1+tg^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2},$$
$$\cos x = \frac{1-tg^2(x/2)}{1+tg^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$x = 2arctgt, dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$.

Тогда
$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)dt$$

Пример 7. Найти $\int \dfrac{dx}{\sin x}$.

Решение:

Положим $t = tg\dfrac{x}{2}$. Тогда, используя выражения через t для dx и sinx, указанные выше, получаем, что искомый интеграл равен
$$\int \frac{(1+t^2)2dt}{(1+t^2)2t} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C.$$

При вычислении интегралов вида

$\int \sin^n x \cos^m x\, dx$

рассмотрим частные случаи: n – нечётное

$\int \sin^3 x \cos^m dx = \int \sin^2 x \cos^m x \sin x\, dx = \int (1-\cos^2 x)\cos^m x\, d(-\cos x)$

n, m – чётные, ≥ 0,

$\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx$

применяют формулы тригонометрии:

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

При вычислении интегралов вида $\int R(tgx, ctgx)dx$ **делают замену** $\boxed{tg\, x = t}$, тогда

$\sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2};$

$\cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}$.

$dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$

Если интеграл имеет вид

$\int tg^n x\, ctg^m x\, dx$, где n, m – чётные, применяют формулу:

$tg^2 x = \dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1$

Пример 8. Вычислить интегралы:

а) $\int tg^3 x dx$

б) $\int \dfrac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$

Решение:

а) $\int tg^3 x dx = \int tg\, x(\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1)dx = \int tg\, x \dfrac{dx}{\cos^2 x} - \int tg\, x dx = \dfrac{tg^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C$

б) $\int \dfrac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx = \int tg^2 x \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \int tg^2 x\, d(tg\, x) = \dfrac{tg^3 x}{3} + C$

При вычислении

$\int \sin \alpha x \sin \beta x dx$

$\int \sin \alpha x \cos \beta x dx$

$\int \cos \alpha x \cos \beta x dx$

используют формулы

$\sin \alpha x \sin \beta x = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x\right]$

$\sin \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)x\right]$

$\cos \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta)x + \cos(\alpha + \beta)x\right]$

Интегрирование иррациональных выражений

При вычислении интегралов, содержащих иррациональные выражения применяют замену переменной.

Если $\int R(x, \sqrt{x}, \sqrt[k]{x}, \ldots, \sqrt[r]{x})dx$,

то $\boxed{x = t^n}$, где $n = НОК(2, k, \ldots, r)$

$dx = nt^{n-1}dt$

Если $\int R\left(x, \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{l_1}}, \ldots, \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{l_k}}\right)dx$

то $\boxed{\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^n}$, где $n = НОК(l_1, \ldots, l_k)$

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$ ответ: 1;

b) $\begin{vmatrix} 1{,}5 & 2{,}25 \\ 2\frac{2}{3} & 6 \end{vmatrix}$ ответ: 2

v) $\begin{vmatrix} \sin 60^0 & \cos 45^0 \\ \sin 45^0 & tg30^0 \end{vmatrix}$ ответ: 0;

g) $\begin{vmatrix} tg\alpha & -1 \\ 4 & ctg\alpha \end{vmatrix}$ ответ: $5,\ \alpha \notin \left\{\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi n\right\}\ k,n \in z$

d) $\begin{vmatrix} 1+x & \frac{1}{x^2+y} \\ x-y & \frac{x}{x^2+y} \end{vmatrix}$ ответ: $1,\ x^2+y \neq 0$

ye) $\begin{vmatrix} \frac{a-1}{2\sqrt{a}} & \frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} \\ \frac{a\sqrt{a}-\sqrt{a}}{2a} & \frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1} \end{vmatrix}$ ответ: $-2\sqrt{a},\ a>0,\ a\neq 1$

2. Решите уравнения и неравенства:

a) $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0,(4) & x \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$ ответ: $x \in \left\{\frac{1}{2};\ 1\right\}$

b) $\begin{vmatrix} x & 1 \\ -4 & x \end{vmatrix} \le \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & x \end{vmatrix}$ ответ: $x \in [2;\ 3]$

3. Вычислить детерминант:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ ответ: 15;

b) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \\ -4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ ответ: 29;

v) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ ответ: -7;

g) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \sin\beta & \sin\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ ответ: $\begin{pmatrix} \sin(\alpha-\beta)+ \\ +\sin(\beta-\alpha)+ \\ +\sin(\lambda-\alpha) \end{pmatrix}$.

4. **Вычислить :**

a) $\begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -8 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -4 \end{vmatrix}$ ответ: 14;

b) $-0{,}125 \cdot \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ -3 & 5 & 1 \\ 26 & 26 & 26 \end{vmatrix}$ ответ: 1;

v) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 6 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -4 \end{vmatrix}$ ответ: 10;

g) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ ответ: -86.

5. Операции над матрицами

a) $\overline{\overline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\overline{\overline{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $2\overline{\overline{A}} - \overline{\overline{B}} = ?$ $\left(\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}\right)$.

b) $\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{21} \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{18} \\ 4 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = ?$ $\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\right)$

v) $\overline{\overline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\overline{\overline{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{E}} = ?$ $\overline{\overline{E}} \cdot \overline{\overline{A}} = ?$

$\left(\overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{E}} = \overline{\overline{E}} \cdot \overline{\overline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \overline{\overline{A}}\right)$

g) $\overline{\overline{C}} = (1 \quad 2 \quad 3)$, $\overline{\overline{F}} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\overline{\overline{C}} \cdot \overline{\overline{F}} = ?$ $((6 \quad 7))$

d) $\overline{\overline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{\overline{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{F}} = ?$ $\left(\begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$

ye) $\overline{\overline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{\overline{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $\overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}} = ?$ $\left(\begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 10 & 10 & 33 \\ -11 & -3 & 25 \end{pmatrix}\right)$

yo) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 & -9 & 7 \\ 1 & 5 & 8 \\ -1 & -4 & 4 \end{pmatrix} = ?$ $\left(\begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ -5 & -10 & 1 \end{pmatrix}\right)$

3. Найдите обратную матрицу двумя способами:

a) $\overline{\overline{A}}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 4 & -2\end{pmatrix}$, $\left(\overline{\overline{A}}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0.5\\ 2 & 0.5\end{pmatrix}\right)$

b) $\overline{\overline{A}}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}$

v) $\overline{\overline{A}}=\begin{pmatrix}tg\alpha & 1\\ 1 & ctg\alpha\end{pmatrix}$, $\left(\overline{\overline{A}}^{-1}=\begin{pmatrix}-ctg\alpha & 1\\ 2 & -tg\alpha\end{pmatrix}\right)$

g) $\overline{\overline{A}}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $\left(\overline{\overline{A}}^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 2\\ 4 & 1 & -3\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\right)$

d) $\overline{\overline{A}}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -38 & 41 & -34\\ 27 & -29 & 24\end{pmatrix}$, $\left(\overline{\overline{A}}^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 5 & 7\\ 6 & 3 & 4\\ 5 & -2 & -3\end{pmatrix}\right)$

Решить систему уравнений

1. $\begin{cases}x_1-x_2+3x_3=3\\ 2x_1+3x_2-4x_3=-1\\ 3x_1+2x_2-x_3=2\end{cases}$ $\left(\frac{8}{5}-x_3;\ 2x_3-\frac{7}{5};\ x_3\right),\ x_3\in R$

2. $\begin{cases}-x_1+2x_2-3x_3=4\\ 3x_1+x_2-2x_3=1\\ 4x_1-x_2+x_3=-3\end{cases}$ $\left(\frac{1}{7}x_3-\frac{2}{7};\ \frac{11}{7}x_3+\frac{13}{7};\ x_3\right),\ x_3\in R$

3. $\begin{cases}x_1+4x_2-x_3=0\\ 3x_1-5x_2+x_3=0\\ 2x_1-x_2+6x_3=0\end{cases}$ $(0;\ 0;\ 0)$

4. $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ $\qquad (-x_3;\ -x_3;\ x_3),\ x_3 \in R$

5. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ 3x_1 - x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$ $\qquad (1;\ 0;\ 2;\ -3)$

6. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 5 \end{cases}$ (не имеет решения)

7. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ $\qquad \left(\frac{12}{5} - x_3;\ -\frac{4}{5};\ x_3\right),\ x_3 \in R$

Вычислить

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^2+1}{x^3+2}$ $\qquad (\frac{1}{2})$

2. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+4x+1}{x+2}$ $\qquad (3\frac{1}{4})$

3. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x+5}{x^2+x+1}$ $\qquad (\frac{8}{13})$

4. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4}$ $\qquad (8)$

5. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-8x+12}{x^2-4}$ $\qquad (-1)$

6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+6}$ (2)

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4x-3}{x^2-4x+3}$ (∞)

8. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$ (-2)

9. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-9}$ ($-\frac{1}{6}$)

10. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^3-2x^2+x-1}{x^3-x^2+3x-3}$ ($\frac{3}{4}$)

11. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+1}-3}{x-2}$ (-2)

12. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}}{x-3}$ ($\frac{1}{4}$)

13. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}$ ($\sqrt{2}$)

14. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5}}$ ($8\sqrt{5}$)

15. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$ ($\frac{2}{\sqrt{2}}$)

16. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+x}{x^4-3x+1}$ (0)

17. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}}{x^2+1}$ (1)

18. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2+4}}$ (0)

19. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{1+x^2}$ (1)

20. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ (1)

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{+5x\sqrt{x}}{1-3x}$ $\quad(-\frac{5}{3})$

22. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{3}}{x^2-3}$ $\quad(2\sqrt{3})$

23. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}$ $\quad(\frac{1}{\sqrt{2}})$

24. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4x^2}{x^5+1}$ $\quad(0)$

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+1}{x^2-1}$ $\quad(\infty)$

50. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{2x}$ $\quad(\frac{5}{2})$

51. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 7x}$ $\quad(\frac{2}{7})$

52. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x+\sin 4x}{x}$ $\quad(7)$

53. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1-\cos x}$ $\quad(2)$

54. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x}{x}$ $\quad(2)$

55. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$ $\quad(\sqrt{2})$

56. $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot ctgx$ $\quad(1)$

57. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{tg3x}$ $\quad(\frac{4}{3})$

58. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{\sin^3 x}$ $\quad(\frac{1}{2})$

59. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x-\sin x}{2x}$ $\quad(\frac{3}{2})$

60. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}$ $\quad(\frac{1}{4})$

61. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x+4}-2}$ $\quad(8)$

62. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{\sin x}$ $\quad(\frac{1}{2\sqrt{3}})$

63. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x\sin\dfrac{1}{4}}{1-5x}$ $\quad(-\frac{1}{5})$

64. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}$ $\quad(6\sqrt{3})$

65. $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+5\alpha)^{\frac{3}{\alpha}}$ $\quad(e^{\infty})$

66. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{x}$ $\quad(\frac{1}{e^2})$

67. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x-3}{x+3}\right)^{x}$ $\quad(e^3)$

68. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{x}$ $\quad(\frac{1}{e})$

69. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^{3x}$ $\quad(e^6)$

70. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x-3}{2x+1}\right)^{x+1}$ $\quad(e)$

71. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{x^2}$ $\quad(0)$

72. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^{x}$ $\quad(-)$

73. $\lim\limits_{n\to\infty} n[\ln(n-2)-\ln n]$ $\quad(2)$

74. $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{x}}$ (e^4)

75. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x-3}{x}\right)^{\sqrt{x}}$ (1)

Найти производную функции

1. $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ найти $f'(4)$ $\left(-\frac{1}{4}\right)$

2. $y=\frac{\sqrt[3]{x^5}-x}{x^3}$ $\left(\frac{-12\sqrt[5]{x^3}+10x}{5x^4}\right)$

3. $y=\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ $\left(\frac{1}{\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)^2}\right)$

4. $y=x^2\left(\sqrt{x}-2\right)$ $\left(\frac{5}{2}x\sqrt{x}-4x\right)$

5. $y=x\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[5]{2}\right)$ $\left(\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}-\sqrt[5]{2}\right)$

6. $y=\sqrt[4]{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ $\left(\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}+\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}\right)$

7. $y=\frac{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x^3}}$ $\left(-\frac{11\sqrt[12]{x}}{12x^2}\right)$

8. $y=\sin x-\cos x$ $(\cos x+\sin x)$

9. $y=x\cos x$ $(\cos x-x\sin x)$

10. $y=tgx-ctgx$ $\left(4\operatorname{cosec}^2\cdot 2x\right)$

11. $y=\dfrac{x}{\sin x}$ $\left(\dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}\right)$

12. $y=\dfrac{\cos x}{x}$ $\left(-\dfrac{x\sin x+\cos x}{x^2}\right)$

13. $y=\dfrac{\sin t}{1+\cos t}$ $\left(\dfrac{1}{1+\cos t}\right)$

14. $y=\sqrt{x}\sin x$ $\left(\dfrac{\sin x}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}\cos x\right)$

15. $y=xtgx$ $\left(tgx+\dfrac{x}{\cos^2 x}\right)$

16. $y=\dfrac{x^2+tgx}{x^2-tgx}$

$$\left(\frac{2\left(\dfrac{x}{\cos^2 x}-2xtgx\right)}{\left(x^2-tgx^2\right)}\right)$$

17. $y=\dfrac{1}{tgx+\sin x}$

$$\left(-\frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x\left(tgx+\sin x\right)^2}\right)$$

18. $s=\arcsin t+\arccos t$ (0)

19. $y = x\arcsin x$

$$\left(\arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

20. $y = xarctgx$

$$\left(arctgx + x\frac{1}{1+x^2}\right)$$

21. $y = \sin x \cdot \arcsin x$

$$\left(\cos x \cdot \arcsin x + \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

Найти производную сложной функции

1. $y = \sin(2x-1)$ в этом $y = \sin u$ и $u = 2x-1$.

Ответ: $y' = 2\cos(2x-1)$

2. $y = \cos(1-x)$ в этом $y = \cos u$ и $u = 1-x$

Ответ: $y' = \sin(1-x)$

3. $y = \sin at$ в этом $y = \sin u$ и $u = at$

Ответ: $y' = a\cos at$

4. $y = \cos\left(\frac{\pi}{5} + x^2\right)$ в этом $y = \cos u$ и $u = \frac{\pi}{5} + x^2$

Ответ: $y' = -2x\sin\left(\frac{\pi}{5} + x^2\right)$

5. $y = (1-2x)^7$ в этом $y = u^7$ и $u = (1-2x)$

Ответ: $y' = -14(1-2x)^6$

6. $y = \lg(ax^2 + bx + c)$ в этом $y = \lg u$ и $u = ax^2 + bx + c$

Ответ: $y' = \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)\ln 10}$

7. $y = \ln(1+2x-x^2)$ в этом $y = \ln u$ и $u = 1+2x-x^2$

Ответ: $y' = \frac{2(1-x)}{1+2x-x^2}$

8. $y = \left(\frac{x^2}{2x-1}\right)^{10}$ в этом $y = u^{10}$ и $u = \frac{x^2}{2x-1}$

Ответ: $y' = \frac{20x^{19}(x-1)}{(2x-1)^{11}}$

9. $y = \sin x^2$

Ответ: $y' = 2x\cos x^2$

10. $y = tg(\sin x)$

Ответ: $y' = \frac{\cos x}{\cos^2(\sin x)}$

11. $y=\arcsin\sqrt[4]{x}$

Ответ: $y'=\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}\sqrt{1-\sqrt{x}}}$

12. $y=\cos^2 2x$

Ответ: $y'=-2\sin 4x$

13. $y=\dfrac{1}{5}tg^3x^3$

Ответ: $y'=\dfrac{3x^2tg^2x^3}{\cos^2 x^3}$

14. $y=\ln^3 x$

Ответ: $y'=\dfrac{3\ln^2 x}{x}$

15. $y=e^{-x^2}$

Ответ: $y'=-2xe^{-x^2}$

16. $y=arctg(tgx)$

Ответ: $y'=1$

17. $y=\arcsin(\sin x)$

Ответ: $y'=1$

18. $y = u^{100}$ в этом $u = 2+5x$

Ответ: $y' = 500(2+5x)^{99}$

19. $y = u^{8}$ в этом $u = \dfrac{x+1}{x-1}$

Ответ: $y' = -\dfrac{16(x+1)^7}{(x-1)^9}$

20. $y = u^{10}$ в этом $u = 2x+1$

Ответ: $y' = 2\ln 10 \cdot 10^{2x+1}$

21. $y = \log_3 u$ в этом $u = x^5 + 1$

Ответ: $\left(\dfrac{5x^4}{(x^5+1)\ln 3}\right)$

22. $y = \sin^2 x + \cos^2 x$

Ответ: 0

23. $y = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$

Ответ: $\left(\dfrac{1-2x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

24. $y = (\arcsin x)^3$

Ответ: $\left(\dfrac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

25. $y = \sin(x + \sin x)$

Ответ: $(1 + \cos x)\cos(x + \sin x)$

26. $y = \cos(3^x + 3^{-x})$

Ответ: $(\ln 3(3^{-x} - 3^x)\cdot \sin(3^x + 3^{-x}))$

27. $y = 5\sin(2 - 3x)$

Ответ: $[-15\cos(2 - 3x)]$

28. $y = \cos\left(6x - \frac{1}{x}\right)$

Ответ: $\left[-\left(6x + \frac{1}{x^2}\right)\sin\left(6x - \frac{1}{x}\right)\right]$

29. $y = \sin(x^2 - 2^x)$

Ответ: $(2x - 2^x \ln 2)\cos(x^2 - 2^x)$

30. $y = tg(3x + 1)^3$

Ответ: $\left(\frac{9(3x+1)^2}{\cos^2(3x+1)}\right)$

31. $y = ctg(x\cos x)$

Ответ: $\left(\dfrac{x\sin x-\cos x}{\sin^2(x\cos x)}\right)$

32. $y=10^{x^2+x+1}$

Ответ: $\left[10^{x^2+x+1}\ln 10(2x+1)\right]$

33. $y=6^{\arcsin x}$

Ответ: $\left(\dfrac{6^{\arcsin x}\ln 6}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

34. $y=e^{ax}\cos bx$

Ответ: $\left[e^{ax}(a\cos bx-b\sin bx)\right]$

35. $z=(2a+3bu)^4$

Ответ: $12b(2a+3bu)^3$

36. $y=7^{\frac{x\sin x}{1+x}}$

Ответ: $\left[7^{\frac{x\sin x}{1+x}}\ln 7\dfrac{\sin x+x\cos x+x^2\cos x}{(1+x)^2}\right]$

37. $y=\dfrac{\cos x}{3\sin^2 x}$

Ответ: $\left(-\dfrac{1+\cos^2 x}{3\sin^2 x}\right)$

38. $y=\dfrac{\cos x}{3\sin^2 x}$

Ответ: $\left(-\dfrac{1+\cos^2 x}{3\sin^2 x}\right)$

39. $y=\ln\dfrac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$

Ответ: $\left(\dfrac{4a^2x}{a^4-x^4}\right)$

40. $z=\ln\sqrt{\dfrac{e^{2t}}{1+e^{2t}}}$ Ответ: $\left(\dfrac{1}{1+e^{2t}}\right)$

Найти производную сложной функции

1. $y=x^{\cos x}$ $\left[x^{\cos x-1}(\cos x-x\sin x\ln x)\right]$

2. $y=(\cos x)^x$ $\left[(\cos x)^x(\ln\cos x-x tgx)\right]$

3. $y=\sqrt[x]{x}$ $\left[\dfrac{\sqrt[x]{x}}{x^2}(1-\ln x)\right]$

4. $y=x^{x^3}$ $\left[x^{x^3+2}(3\ln x+1)\right]$

5. $y=\frac{(x-1)^3\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$ $\qquad$ $\left[\frac{(17x^2+62x+21)(x-1)^2}{\sqrt[3]{(x+1)^5}\sqrt{x+2}}\right]$

6. $s=\frac{\sqrt{1-t^2}}{3t+1}$ $\qquad$ $\left[\frac{3-t-6t^2}{\sqrt{1-t^2}\,(3t+1)^2}\right]$

7. $s=(t+1)^3(t-1)^2\sqrt[3]{(t+2)^2}$

$\left[\frac{1}{3\sqrt[3]{t+2}}(t+1)^2(t-1)(17t^2+27t-8)\right]$

8. $y=(\sin x)^{\ln x}$ $\qquad$ $\left[(\sin x)^{\ln x}\left(\frac{1}{x}\ln\sin x+ctg\,x\ln x\right)\right]$

9. $y=\sqrt[4]{\frac{x(x^3+1)}{(x^3-1)^3}}$ $\qquad$ $\frac{-5x^4-12x^3-1}{4\sqrt[4]{(x^3-1)^7(x^3+1)^3}}$

Вычислить неопределенный интеграл

1. $\int(3x^4-2x^3+5x-7)dx$ $\qquad$ Ответ: $\frac{3}{5}x^5-\frac{2^4}{2}+\frac{5}{2}x^2-7x+c$

2. $\int(4x^5-6x^2+1)dx$ $\qquad$ Ответ: $\frac{2}{3}x^6-2x^3+x+c$

3. $\int(2x^6-4x+5)dx$ $\qquad$ Ответ: $\frac{2}{7}x^7-2x^2+5x+c$

4. $\int(3\sqrt{x}-2x+3)dx$ $\qquad$ Ответ: $2x\sqrt{x}-x^2+3x+c$

5. $\int(\sqrt[3]{x}-2\sqrt[4]{x}+5)dx$ $\qquad$ Ответ: $\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x}-\frac{8}{5}x\sqrt[4]{x}+5x+c$

6. $\int\left(\frac{3}{x^2}+7\right)dx$ Ответ: $7x-\frac{3}{x}+c$

7. $\int\left(\frac{1}{x}-2x+4\right)dx$ Ответ: $\ln|x|-x^2+4x+c$

8. $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$ Ответ: $\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+c$

9. $\int\frac{x+1}{x^2}dx$ Ответ: $\ln|x|-\frac{1}{x}+c$

10. $\int\frac{\sqrt{x}+5}{x}dx$ Ответ: $2\sqrt{x}-5\ln|x|+c$

11. $\int\frac{4-2x+x^2}{\sqrt{x}}dx$ Ответ: $8\sqrt{x}-\frac{4}{3}x\sqrt{x}+\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+c$

12. $\int\frac{x^2dx}{x^2+2}$ Ответ: $x-\sqrt{2}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+c$

13. $\int\frac{dx}{x^2+5}$ Ответ: $\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{x}{\sqrt{5}}+c$

14. $\int\frac{dx}{x^2-4}$ Ответ: $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c$

15. $\int\frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$ Ответ: $\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}+c$

16. $\int\frac{dx}{x^2+9}$ Ответ: $\frac{1}{3}arctg\frac{x}{3}+c$

17. $\int\frac{x^2+4}{1+x^2}dx$ Ответ: $x+3arctgx+c$

18. $\int\frac{2+3x^2}{x^4+x^2}dx$ Ответ: $arctgx-\frac{2}{x}+c$

19. $\int\frac{dx}{x^4-x^2}$ Ответ: $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+c\right)$

20. $\int(2\sin x-5\cos\alpha)dx$ Ответ: $-2\cos\alpha-5\sin x+c$

21. $\int \frac{2x\sin^2 x - 1}{\sin^2 x}$ Ответ: $x^2 + ctg + c$

22. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$ Ответ: $tgx - ctgx + c$

23. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}$ Ответ: $\frac{1}{2}tg + \frac{1}{2}x + c$

24. $\int \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3}\right)dx$ Ответ: $2\ln|x| - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + c$

25. $\int \left(\frac{2}{x^2} + 3x^3 + 6\frac{1}{x^4}\right)dx$ Ответ: $-\frac{2}{x} + \frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{x^3} + c$

Вычислить неопределенный интеграл

1. $\int e^{5x}dx$ ответ: $\left(\frac{1}{5}e^{5x} + c\right)$

2. $\int \sin(2x+1)dx$ ответ: $\left(-\frac{1}{2}\cos(2x+1) + c\right)$

3. $\int \frac{dx}{\cos^2 6x}$ ответ: $\left(\frac{1}{6}tg6x + c\right)$

4. $\int e^{-3x}dx$ ответ: $\left(-\frac{1}{3}e^{-3x} + c\right)$

5. $\int \cos(3x-2)dx$ ответ: $\left(\frac{1}{3}\sin(3x-2) + c\right)$

6. $\int (x+4)^5 dx$ ответ: $\left(\frac{1}{6}(x+4)^6 + c\right)$

7. $\int \sqrt{x+7}\,dx$ ответ: $\left[\frac{2(x+7)\sqrt{x+7}}{3} + c\right]$

8. $\int \frac{d}{\sqrt{3x-1}}$ ответ: $\left(\frac{2\sqrt{3x-1}}{3} + c\right)$

9. $\int (4x-1)^7 dx$ ответ: $\left[\frac{(4x-1)^8}{32} + c\right]$

17. $\int \frac{(2x+1)}{x^2+x+1}dx$ ответ: $\left(\ln\left|x^2+x-1\right|+c\right)$

18. $\int \frac{xdx}{x^4+1}$ ответ: $\left(\frac{1}{2}arctgx^2+c\right)$

19. $\int e^{tgx}\frac{dx}{\cos^2 x}$ ответ: $\left(e^{tgx}+c\right)$

20. $\int \frac{\sin 2xdx}{1+\sin^2 x}$ ответ: $\left(\ln\left(1+\sin^2 x\right)+c\right)$

Найти интеграл

1. $\int x\cos xdx$ ответ: $(x\sin x+\cos x+c)$
2. $\int xe^x dx$ ответ: $\left(e^x(x-1)+c\right)$
3. $\int x\ln xdx$ ответ: $\left(\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)+c\right)$
4. $\int xe^{3x}dx$ ответ: $\left(\frac{x}{3}e^{3x}-\frac{1}{9}e^{3x}+c\right)$
5. $\int arctgxdx$ ответ: $\left(xarctgx-\frac{1}{2}\ln(1+x)^2+c\right)$
6. $\int x\cdot\sin 4xdx$ ответ: $\left(\frac{1}{16}\sin 4x-\frac{x}{4}\cdot\cos 4x+c\right)$
7. $\int \arcsin xdx$ ответ: $\left(x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+c\right)$
8. $\int xarctgxdx$ ответ: $\left(\frac{x^2+1}{2}arctgx-\frac{x}{2}+c\right)$
9. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$ ответ: $\left(-xctgx+\ln|\sin x|+c\right)$
10. $\int x^6\ln xdx$ ответ: $\left[\frac{x^7}{7}\left(\ln|x|-\frac{1}{7}\right)+c\right]$

11. $\int \frac{x\cos x dx}{\sin^3 x}$ ответ: $\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sin^2 x}+ctgx+c\right)\right]$

12. $\int x^2 \cos x dx$ ответ: $(x^2 \sin x + 2x\cos x - \sin x + c)$

13. $\int x^2 e^{-x} dx$ ответ: $\left[-e^{-x}(x^2+2x+2)+c\right]$

14. $\int x^2 \sin x dx$ ответ: $(-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + c)$

15. $\int x\ln^2 x dx$ ответ: $\left(\frac{1}{2}x^2\ln^2|x| - \frac{1}{2}x^2\ln|x| + \frac{1}{4}x^2 + c\right)$

16. $\int e^x \cos x dx$ ответ: $\frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + c$

17. $\int e^x \sin x dx$ ответ: $\frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + c$

18. $\int \sqrt{1+x^2}dx$ ответ: $\left[\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}+c\right)\right)\right]$

19. $\int \cos(\ln x)dx$ ответ: $\left\{\frac{x}{2}[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)] + c\right\}$

20. $\int arctg\sqrt{x}dx$ ответ: $xarctg\sqrt{x}2\sqrt{x} + 2arctg\sqrt{x} + c$

1. $\int \frac{dx}{x^2-6x+11}$ ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}arctgx\frac{x-3}{\sqrt{2}} + c\right)$

2. $\int \frac{dx}{x^2+5x+4}$ ответ: $\left(\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+1}{x+4}\right| + c\right)$

3. $\int \frac{dx}{2x^2+x-1}$ ответ: $\left(\frac{2}{3}\ln\left|\frac{2x-1}{2(x+1)}\right| + c\right)$

4. $\int \frac{xdx}{x^2+7x+13}$ ответ: $\left(\frac{1}{2}\ln|x^2+7x+13| - \frac{7}{\sqrt{13}}arctg\frac{2x+7}{\sqrt{13}} + c\right)$

5. $\int \frac{(x+5)dx}{2x^2+2x+3}$ ответ: $\left(\frac{1}{4}\ln\left|2x^2+2x+3\right|+\frac{9}{2\sqrt{5}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{5}}+c\right)$

6. $\int \frac{dx}{4x^2+6x+5}$ ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt{11}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{11}}+c\right)$

1. $\int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)}dx$ ответ: $\left(\ln\frac{c(x-2)^2}{x-3}\right)$

2. $\int \frac{2x+7}{(x+2)(x-1)}dx$ ответ: $\left(+\ln\frac{(x-1)^3}{x+2}+c\right)$

3. $\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}dx$ ответ: $(5x+2\ln|x|+3\ln|x-2|+4\ln|x+2|+c)$

4. $\int \frac{3x+2}{x(x+1)}dx$ ответ: $2\ln|x|+\ln|x+1|+c$

5. $\int \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}dx$ ответ: $\left(\ln\left|\frac{x+1}{\sqrt{2x+1}}\right|+c\right)$

6. $\int \frac{dx}{x^4-x^3}$ ответ: $\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}+\ln|x|+\ln|x-1|+c$

7. $\int \frac{dx}{(x+3)(x-4)}$ ответ: $\ln\left|\frac{x+3}{x+4}\right|+c$

1. $\int \sin^2 2xdx$ ответ: $\left(\frac{1}{x}x-\frac{1}{8}\sin 4x+c\right)$

2. $\int (1+2\cos x)^2 dx$ ответ: $(3x+4\sin x+\sin 2x+c)$

3. $\int \cos^4 xdx$ ответ: $\left(\frac{3x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}\right)+c$

4. $\int \sin^2 x\cdot\cos^2 xdx$ ответ: $\left(\frac{x}{8}-\frac{\sin 4x}{32}+c\right)$

5. $\int \sin^2 x\cdot\cos^4 xdx$ ответ: $\left(\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}+c\right)$

6. $\int \sin^3 x dx$ ответ: $\left(\frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + c\right)$

7. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x}$ ответ: $-\frac{1}{\sin x} - \sin x + c$

8. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$ ответ: $-\frac{1}{\cos x} + \cos x + c$

9. $\int tg^5 x \cdot dx$ ответ: $\left(\frac{tg^4 x}{4} - \frac{tg^2 x}{2} - \ln|\cos x| + c\right)$

10. $\int \cos^3 x dx$ ответ: $\left(\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c\right)$

11. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx$ ответ: $\left(\frac{\cos^2 x}{2} - \ln|\cos x| + c\right)$

12. $\int tg^4 x dx$ ответ: $\left(\frac{tg^3 x}{3} - tgx + x + c\right)$

13. $\int (5\sin^2 x - 3\sin x)\cos x dx$ ответ: $\left(\frac{5\sin^3 x}{3} - \frac{3}{2}\sin^2 x + c\right)$

14. $\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx$ ответ: $\left[\frac{1}{15}\cos^3 x(3\cos^2 x - 5) + c\right]$

15. $\int \cos^5 x \sin x dx$ ответ: $\left(-\frac{\cos^6 x}{6} + c\right)$

16. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$ ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2} \ln\left|\frac{tg\frac{x}{2} + 1 + \sqrt{2}}{tg\frac{x}{2} + 1 - \sqrt{2}}\right| + c$

17. $\int \frac{dx}{5 - 3\cos x}$ ответ: $\frac{1}{2} arctg\left(2tg\frac{x}{2}\right) + c$

18. $\int \frac{dx}{5 + 4\sin x}$ ответ: $\frac{2}{3} arctg \frac{5tg\frac{x}{2} + 4}{3} + c$

19. $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$ ответ: $\left(\frac{1}{2-tg\frac{x}{2}}+c \right)$

20. $\int \frac{dx}{\cos x}$ ответ: $\left(2n\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}}{tg\frac{x}{2}}\right|+c \right)$

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x-3}}$ ответ: $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x-\frac{1}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2x^2-x\pm 3}\right|$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x-3x^2}}$ ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{3x+1}{4}+c \right)$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+3x-2}}$ ответ: $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|10x+3+2\sqrt{5}\sqrt{5x^2+3x+2}\right|+c$

4. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$ ответ: $\sqrt{x^2+4x+5}-2\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right|+c$

5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-5x+3}}$ ответ: $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{6-5x}{6x}+\sqrt{\frac{3-5x+2x^2}{3x^2}}\right|+c \right)$

6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{7x^2-2x+5}}$ ответ: $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{-x+5+\sqrt[5]{7x^2-2x+5}}{5x}\right| \right)$

7. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}}$ ответ: $x-2\sqrt{x}+2\ln\left|\sqrt{x+1}\right|+c$

8. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1-\sqrt[3]{x^2}}$ ответ: $-\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-6\sqrt[6]{x}+3arctg\sqrt[6]{x}-\frac{3}{2}\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right|+c$

9. $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$ ответ: $\left(6\sqrt[6]{x}-6arctg\sqrt[6]{x}+c\right)$

10. $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$ ответ: $2\arcsin\frac{x}{2} + x\cos\arcsin\frac{x}{2} + c$

11. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}}$ ответ: $2\arcsin\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\sqrt{16-x^2} + c$

12. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ ответ: $\left(c - \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)$

13. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$ ответ: $\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{x} + c$

14. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ ответ: $\left(\ln\frac{|x|}{1+\sqrt{x^2+1}} + c\right)$

15. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$ ответ: $\left(c - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} - \arcsin x\right)$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Е. У. Соатов. Олий математика. биринчи жилд. Ўзбекистон 1996 йил
2. Т. Жураев, А. Саъдуллаев, Г. Худойберганов, Ҳ. Мансуров, А. Ворисов. Олий математика асослари (1-қисм)
3. Акимов, П.А. Информатика и прикладная математика / П.А. Акимов. - М.: АСВ, 2016. - 588 с.
4. Акимов, П.А. Информатика и прикладная математика: Учебное пособие / П.А. Акимов, А.М. Белостоцкий, Т.Б. Кайтуков и др. - М.: АСВ, 2016. - 588 с.
5. Блехман, И.И. Прикладная математика: Предмет, логика, особенности подходов. С примерами из механики / И.И. Блехман, А.Д. Мышкис, Я.Г. Пановко. - М.: Ленанд, 2018. - 376 с.
6. Математика для экономистов: от арифметики до эконометрики : учеб.-справ. пособие для бакалавров / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман ; под ред. Н. Ш. Кремера. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Юрайт, 2012 . – 685 с.
7. Математика для экономистов: от арифметики до эконометрики : учеб.-справ. пособие для бакалавров / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман ; под ред. Н. Ш. Кремера. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Юрайт, 2012 – 685 с.

Содержание

А.А.Салиев, Ж.А.Усаров, У.Т.Ражабов

1\.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

2\.

3\. Ташкент – «ИННОВАЦИОН РИВОЖЛАНИШ
НАШРИЁТ-МАТБАА УЙИ» – 2021

4\.

Редактор: М.Алимов

5\. Тех. редактор: А.Мойдинов

Художник: А.Шушунов

Корректор: Л.Ибрагимов

6\. Компьютерная

вёрстка: М.Зойирова

7 E-mail: nashr2019@inbox.ru

Изд.лиц. 3226-275f-3128-7d30-5c28-4094-7907, 08.10.2020.

Разрешено в печать 09.09.2021.

Формат 60x84 1/16. Гарнитура «Times New Roman».

Офсетная печать. Усл. печ.л. 12,0. Изд. печ.л. 11,5 .

Тираж 50. Заказ № 191.

Отпечатано в типографии

«Инновацион ривожланиш нашриёт-матбаа уйи».

100174, г. Ташкент, ул. Университетская, 7.