

Издательство
"УРСС"

И.И.Ляшко
А.К.Боярчук
Я.Г.Гай
Г.П.Головач

Справочное пособие по высшей математике

2

Математический анализ:

ряды и функции
Векторного исчисления



Москва
1998

И.И.Ляшко, А.К.Боярчук, Я.Г.Гай, Г.П.Головач.

Справочное пособие по высшей математике.

Том 2. Математический анализ: ряды, функции векторного аргумента

“Справочное пособие по высшей математике” выходит в пяти томах и представляет собой новое, исправленное и существенно дополненное издание “Справочного пособия по математическому анализу” тех же авторов. В новом издании пособие охватывает три крупных раздела курса высшей математики — математический анализ, теорию дифференциальных уравнений, теорию функций комплексной переменной.

По содержанию второй том нового издания соответствует первой половине второго тома “Справочного пособия по математическому анализу” и включает в себя теорию рядов и дифференциальное исчисление функций векторного аргумента.

Пособие предназначено для инженерно-технических работников, специалистов по прикладной математике, преподавателей вузов, студентов, а также лиц, самостоятельно изучающих высшую математику.

Группа подготовки издания:

Научный редактор
Технические редакторы

*Доминго Марин Рикой
Наталья Финогенова,
Марина Копылова*

Набор

*Ирина Макеева,
Светлана Бондаренко*

Макет
Корректура

*Виктор Романов, Василий Подобед
Леонид Иосилевич,
Лариса Кирдяшкина,
Игорь Коровин, Елена Кудряшова*

Лицензия ЛР № 063377 от 23.05.94. Подписано к печати 13.11.95.

Формат 70×100 1/16. Бумага офсет № 1. Гарнитура обыкновенная.

Усл. печ. л. 14,0. Доп. тираж 3000 экз. Заказ № 30.

Издательство “УРСС”. 111672, г. Москва, ул. Новокаси́нская, 27/74.

Отпечатано в АОТ “Политех-4” 129110, Москва, ул. Б. Переяславская, 46.

Оглавление

Глава 1. Ряды	3
§1. Числовые ряды. Признаки сходимости знакопостоянных рядов.....	3
§2. Признаки сходимости знакопеременных рядов.....	25
§3. Действия над рядами.....	38
§4. Функциональные последовательности и ряды. Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей и рядов.....	40
§5. Степенные ряды.....	58
§6. Ряды Фурье.....	79
§7. Суммирование рядов. Вычисление определенных интегралов с помощью рядов.....	96
Глава 2. Дифференциальное исчисление функций векторного аргумента	113
§1. Предел функции. Непрерывность.....	113
§2. Частные производные и дифференциалы функции векторного аргумента.....	124
§3. Неявные функции.....	147
§4. Замена переменных.....	167
§5. Формула Тейлора.....	186
§6. Экстремум функции векторного аргумента.....	196
Ответы	220

Глава 1

Ряды

§ 1. Числовые ряды. Признаки сходимости знакопостоянных рядов

1.1. Общие понятия и определения.

Определение 1. Пусть a_n — произвольные элементы линейного пространства \mathcal{L} , в котором определена сходимость, $n \in \mathbb{N}$. Рядом элементов a_n называют выражение

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (1)$$

а элементы a_n — его членами. В частности, если $a_n \in \mathbb{R}$ или $a_n \in \mathbb{C}$, то ряд (1) называют числовым.

Определение 2. Сумма n первых членов ряда (1) называется частичной суммой и часто обозначается через S_n , т.е.

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Определение 3. Если существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S, \quad S \in \mathcal{L},$$

то ряд (1) сходится в \mathcal{L} , а элемент S называют суммой ряда. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ или не существует, то ряд (1) называют расходящимся.

Определение 4. Ряд

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k, \quad a_k \in \mathcal{L}, \quad (2)$$

называется n -м остатком ряда (1) или остатком после n -го члена.

Ряд (1) сходится или расходится вместе со своим остатком, поэтому часто при исследовании вопроса о сходимости ряда вместо него рассматривают n -й остаток.

Определение 5. Пусть $a_n \in \mathbb{R}$. Если $a_n \geq 0$, то ряд (1) называют положительным; если $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, то ряд (1) называют строго положительным.

1.2. Необходимое условие сходимости ряда.

Для того чтобы ряд (1), п.1.1, сходился в \mathcal{L} , необходимо, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \theta, \quad \theta \in \mathcal{L},$$

где θ — нулевой элемент линейного пространства \mathcal{L} .

1.3. Критерий Коши.

Пусть \mathcal{L} есть \mathbb{R} или \mathbb{C} . Для того чтобы ряд (1), п. 1.1, сходился в \mathcal{L} , необходимо и достаточно, чтобы $\forall \epsilon > 0$ Эпо такое, что $\forall n > n_0 \wedge \forall p \in \mathbb{N}$ выполнялось бы неравенство

$$|S_{n+p} - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \epsilon.$$

1.4. Обобщенный гармонический ряд.

Определение. Числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

называется обобщенным гармоническим рядом, а при $p = 1$ — гармоническим. Он сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

1.5. Признаки сравнения числовых рядов.

Теорема 1. Если ряды (1), п. 1.1, и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{1}$$

положительны и $a_n \leq b_n \forall n > n_0$, то из сходимости ряда (1) настоящего пункта вытекает сходимость ряда (1), п. 1.1, а из расходимости ряда (1), п. 1.1, вытекает расходимость ряда (1).

Теорема 2. Если ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ строго положительны и $\forall n > n_0$ выполняются неравенства

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

то справедливы выводы предыдущей теоремы.

Теорема 3. Если ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ строго положительны и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c, \quad 0 < c < +\infty,$$

то они сходятся или расходятся одновременно.

Теорема 4. Если при $n \rightarrow \infty$

$$a_n = O^* \left(\frac{1}{n^p} \right),$$

то при $p > 1$ ряд (1), п. 1.1, сходится, а при $p \leq 1$ расходится.

1.6. Признаки д'Аламбера и Коши.

Если ряд (1), п.1.1, строго положителен и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L,$$

то при $L < 1$ этот ряд сходится, а при $L > 1$ расходится. При $L = +\infty$ ряд (1), п.1.1, также расходится, а если $L = 1$, то вопрос о сходимости ряда остается открытым (признак д'Аламбера в предельной форме).

Если ряд (1), п.1.1, положителен и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L,$$

то относительно сходимости ряда (1), п.1.1, делаем те же выводы, что и в признаке д'Аламбера (признак Коши в простейшей предельной форме).

1.7. Признак Раабе.

Если ряд (1), п.1.1, строго положителен и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = p,$$

то при $p > 1$ он сходится, а при $p < 1$ расходится. При $p = +\infty$ ряд (1), п. 1.1, сходится, а если $p = 1$, то для выяснения вопроса о его сходимости или расходимости следует применять другие признаки.

1.8. Признак Гаусса.

Если ряд (1), п.1.1, строго положителен и

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}, \quad \lambda, \mu = \text{const},$$

где $\varepsilon > 0$, $|\theta_n| < c$, то при $\lambda > 1$ ряд (1), п.1.1, сходится, а при $\lambda < 1$ расходится. Если же $\lambda = 1$, то ряд сходится при $\mu > 1$ и расходится при $\mu \leq 1$.

1.9. Интегральный признак Коши—Маклорена.

Если функция f неотрицательна при $x > 0$ и не возрастает, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится или расходится одновременно с несобственным интегралом

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx.$$

Доказать непосредственно сходимость следующих рядов и найти их суммы:

1. $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \dots$

◀ Покажем, что сходится последовательность частичных сумм (S_n) этого ряда:

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

Для этого с помощью очевидных преобразований приведем S_n к виду

$$S_n = \frac{1}{3} \left(\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right) \right) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1}\right).$$

Легко видеть, что последовательность (S_n) сходится, т.е. сходится, по определению, данный числовой ряд. Сумма его

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{3}. \blacktriangleright$$

2. а) $q \sin \alpha + q^2 \sin 2\alpha + \dots + q^n \sin n\alpha + \dots$;

б) $q \cos \alpha + q^2 \cos 2\alpha + \dots + q^n \cos n\alpha + \dots$; $|q| < 1$.

◀ Пусть (u_n) и (v_n) — последовательности частичных сумм рядов б) и а) соответственно, u и v — их суммы. Тогда, используя формулу Эйлера $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, можем написать

$$u_n + iv_n = qe^{i\alpha} + q^2 e^{2i\alpha} + \dots + q^n e^{in\alpha} = \frac{qe^{i\alpha} - q^{n+1} e^{i(n+1)\alpha}}{1 - qe^{i\alpha}}.$$

Принимая во внимание условие $|q| < 1$, имеем $|qe^{i\alpha}| < 1$; отсюда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (q^{n+1} e^{i(n+1)\alpha}) = 0.$$

А тогда из предыдущей формулы находим

$$u + iv = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + iv_n) = \frac{qe^{i\alpha}}{1 - qe^{i\alpha}} = q \left(\frac{\cos \alpha - q}{1 - 2q \cos \alpha + q^2} + i \frac{\sin \alpha}{1 - 2q \cos \alpha + q^2} \right).$$

Поэтому

$$u = q \frac{\cos \alpha - q}{1 - 2q \cos \alpha + q^2}, \quad v = \frac{q \sin \alpha}{1 - 2q \cos \alpha + q^2}. \blacktriangleright$$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}).$

◀ Непосредственно находим

$$\begin{aligned} S_n &= (\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1) + (\sqrt{4} - 2\sqrt{3} + \sqrt{2}) + (\sqrt{5} - 2\sqrt{4} + \sqrt{3}) + \dots + \\ &+ (\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} + \sqrt{n-2}) + (\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) + (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = \\ &= 1 - \sqrt{2} + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 - \sqrt{2}. \blacktriangleright$$

4. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$.

◀ Пусть $x \neq k\pi$ (k — целое) и ряд сходится. Тогда должно выполняться необходимое условие сходимости ряда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin nx = 0, \quad x \neq k\pi. \quad (1)$$

Отсюда следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n+1)x = 0$, или $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sin nx \cos x + \cos nx \sin x) = 0$. Принимая во внимание (1), из последнего соотношения находим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos nx = 0, \quad x \neq k\pi. \quad (2)$$

Из (1) и (2) получаем равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos^2 nx + \sin^2 nx) = 0,$$

которое противоречит известной формуле $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Источник противоречия — формула (1). Следовательно, если $x \neq k\pi$, то данный ряд расходится. Сходимость же ряда при $x = k\pi$ (k — целое) очевидна, и сумма такого ряда равна нулю. ▶

5. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$, где $A_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i$, $p_1 = 1$, $p_1 < p_2 < \dots$, полученный в результате группировки членов данного ряда без нарушения порядка следования их, также сходится и имеет ту же сумму.

◀ Из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ вытекает существование предела любой подпоследовательности последовательности его частичных сумм, равного сумме ряда S . Возьмем эту подпоследовательность в виде

$$a_1 = S_{p_1}, \quad a_1 + a_2 + \dots + a_{p_2-1} = S_{p_2},$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{p_2-1} + a_{p_2} + \dots + a_{p_3-1} = S_{p_3}, \quad \dots, \quad a_1 + a_2 + \dots + a_{p_{n+1}-1} = S_{p_{n+1}}.$$

Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{p_n} = S$ по условию. Но так как последовательность частичных сумм второго ряда $A_1 + A_2 + \dots + A_n$ равна $S_{p_{n+1}}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} (A_1 + A_2 + \dots + A_n)$ также равен S , что и требовалось доказать.

Обратное утверждение неверно, так как из сходимости подпоследовательности еще не вытекает сходимость самой последовательности. Возьмем пример. Пусть $a_n = (-1)^{n+1}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$, очевидно, расходится, хотя, например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (1-1)$, получаемый из предыдущего в результате группировки его членов по два, сходится. ▶

6. Доказать, что если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ положительны и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$, полученный в результате группировки членов этого ряда, сходится, то данный ряд также сходится.

Отсюда, учитывая очевидную монотонность S_n , заключаем, что ряд (1) сходится. А тогда, на основании примера 6, сходится данный ряд. ►

$$9. \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} + \dots$$

◀ В силу оценки

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} > \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} > \\ > \frac{1}{2} \left(\ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \dots + \ln \frac{n+1}{n} \right) = \frac{1}{2} \ln(n+1),$$

данный ряд расходится. ►

10. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ также сходится.

◀ Очевидно, последовательность частичных сумм (C_n) второго ряда монотонно не убывает. Кроме того, в силу $a_n \geq 0$ и сходимости первого ряда, справедливо неравенство

$$C_n = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 < (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 = S_n^2 \leq \text{const},$$

Поэтому, на основании теоремы о монотонной и ограниченной последовательности, существует $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n$, т.е. по определению 3, п.1.1, второй ряд сходится.

Заметим, что обратное утверждение неверно. Действительно, пусть $a_n = \frac{1}{2n-1}$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ сходится по теореме 4, п.1.5, хотя ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ расходится (см. пример 7). ►

11. Доказать, что если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ сходятся, то сходятся также ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}.$$

◀ Используя элементарное неравенство $|a_n b_n| \leq \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)$, а также условие примера, получаем

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{k=1}^n b_k^2 \right) \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \right) = c.$$

Отсюда следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ сходится. А тогда и второй ряд в силу оценки

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \leq 2(c + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|)$$

также сходится. Сходимость третьего ряда вытекает из сходимости первого, если положить в нем $b_n = \frac{1}{n}$ и воспользоваться тем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится. ►

12. Доказать, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = a \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

◀ По определению предела, $\forall \varepsilon > 0$, $0 < \varepsilon < |a|$, $\exists n_0$ такое, что $\forall n > n_0$ и $\forall p \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства $a - \varepsilon < (m+n)a_{m+n} < a + \varepsilon$, $m = \overline{1, p}$, или неравенства

$$\frac{a - \varepsilon}{m+n} < a_{m+n} < \frac{a + \varepsilon}{m+n}.$$

Суммируя эти неравенства по m от 1 до p , получаем

$$(a - \varepsilon) \sum_{m=1}^p \frac{1}{m+n} < \sum_{m=1}^p a_{m+n} < (a + \varepsilon) \sum_{m=1}^p \frac{1}{m+n}.$$

Отсюда видно, что в силу расходимости гармонического ряда $\left(\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{m=1}^p \frac{1}{m+n} = +\infty \right)$, остаток рассматриваемого ряда расходитя. Следовательно, расходитя и сам ряд. ►

Примечание. Из условия примера 12 следует, что $a_n = \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = O^*\left(\frac{1}{n}\right)$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому на основании теоремы 4, п.1.5, данный ряд расходитя. Однако мы предпочли непосредственное доказательство.

13. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, с монотонно убывающими членами сходитя, то $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$.

◀ По критерию Коши, из сходимости ряда следует, что $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0$ такое, что $\forall n > n_0$ справедливо неравенство $a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p} < \frac{\varepsilon}{2}$. Так как (a_n) — монотонная и положительная последовательность, то из последнего неравенства вытекает, что $pa_{n+p} < \frac{\varepsilon}{2}$. Полагая, далее, последовательно $p = n$ и $p = n + 1$, отсюда находим, что $2na_{2n} < \varepsilon$ и $(2n + 1)a_{2n+1} < \varepsilon$ при $n > n_0$. Следовательно, $na_n < \varepsilon$ при любом (четном и нечетном) $n > 2n_0$. ►

Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость следующих рядов:

14.
$$\frac{\cos x - \cos 2x}{1} + \frac{\cos 2x - \cos 3x}{2} + \dots + \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n} + \dots$$

◀ Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Найдем число n_0 такое, что при всех $n > n_0$ и произвольном $p > 0$ будет справедлива оценка $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$, где (S_n) последовательность частичных сумм данного ряда. Имеем

$$\begin{aligned} |S_{n+p} - S_n| &= \left| \frac{\cos(n+1)x - \cos(n+2)x}{n+1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cos(n+2)x - \cos(n+3)x}{n+2} + \dots + \frac{\cos(n+p)x - \cos(n+p+1)x}{n+p} \right| = \\ &= \left| \frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(n+2)x}{(n+1)(n+2)} - \frac{\cos(n+3)x}{(n+2)(n+3)} - \dots - \frac{\cos(n+p)x}{(n+p-1)(n+p)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\cos(n+p+1)x}{n+p} \right| \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} + \frac{1}{n+p} < \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$, если за число n_0 взять $\frac{2}{\varepsilon}$. Поэтому, согласно критерию Коши, ряд сходитя. ►

15.
$$\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos x^2}{2^2} + \dots + \frac{\cos x^n}{n^2} + \dots$$

◀ Найдем число n_0 такое, что $\forall n > n_0$ и произвольном $p > 0$ будет выполняться неравенство $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$. Имеем

$$\begin{aligned} |S_{n+p} - S_n| &= \left| \frac{\cos x^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{\cos x^{n+2}}{(n+2)^2} + \dots + \frac{\cos x^{n+p}}{(n+p)^2} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Следовательно, положив $n_0 = \frac{1}{\varepsilon}$, по критерию Коши, получим, что данный ряд сходится. ►

Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость следующих рядов:

$$16. 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

◀ Пусть $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Положим $p = n$. Тогда

$$|S_{2n} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} > \varepsilon.$$

Следовательно, по критерию Коши, данный ряд расходится. ►

$$17. 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

◀ Поскольку

$$S_{6n} - S_{3n} = \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+3} + \dots + \frac{1}{6n-2} + \frac{1}{6n-1} - \frac{1}{6n},$$

где (S_{6n}) , (S_{3n}) — подпоследовательности последовательности частичных сумм данного ряда, то

$$S_{6n} - S_{3n} > \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+4} + \dots + \frac{1}{6n-2} > \frac{n}{6n-2} > \frac{1}{6}.$$

Поэтому, согласно критерию Коши, ряд расходится. ►

$$18. \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \dots$$

◀ Пусть $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Оценим разность:

$$\begin{aligned} |S_{2n} - S_n| &= \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} + \frac{1}{\sqrt{(n+2)(n+3)}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n(2n+1)}} > \\ &> \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n+1} > \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Таким образом, по критерию Коши, ряд расходится. ►

Пользуясь различными признаками, исследовать сходимость рядов:

$$19. \frac{(1!)^2}{2} + \frac{(2!)^2}{2^4} + \frac{(3!)^2}{2^9} + \dots + \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} + \dots$$

◀ Поскольку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((n+1)!)^2 2^{n^2}}{(n!)^2 2^{(n+1)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = 0,$$

то, по признаку д'Аламбера, ряд расходится. ►

$$20. \frac{4}{2} + \frac{4 \cdot 7}{2 \cdot 6} + \frac{4 \cdot 7 \cdot 10}{2 \cdot 6 \cdot 10} + \dots$$

◀ Замечаем, что общий член ряда a_n имеет вид

$$a_n = \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \dots (3n+1)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \dots (4n-2)}.$$

Отсюда находим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+4}{4n+2} = \frac{3}{4}.$$

Таким образом, согласно признаку д'Аламбера, ряд сходится. ►

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \text{ где}$$

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } n = m^2, \\ \frac{1}{n^2}, & \text{если } n \neq m^2 \end{cases} \quad (m \text{ — натуральное число}).$$

◀ Покажем, что ряд

$$\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{8^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{((n+1)^2 - 1)^2}\right) + \dots, \quad (1)$$

полученный в результате группировки членов данного ряда, сходится. Для этого оценим сначала каждый член ряда (1). Имеем

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} < 1 + 2 \cdot \frac{1}{2^2} < 2 \cdot 1, \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{8^2} < \frac{1}{4} + \frac{4}{5^2} < 2 \cdot \frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n^2 + 1)^2} + \dots + \frac{1}{((n+1)^2 - 1)^2} < \frac{1}{n^2} + \frac{2n}{(n^2 + 1)^2} < 2 \cdot \frac{1}{n^2}, \dots$$

Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, согласно п.1.4, сходится, то, в силу теоремы 1, п.1.5, сходится и ряд

(1). А тогда, на основании утверждения, доказанного в примере 6, заключаем, что данный ряд также сходится. ▶

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} nx \prod_{k=1}^n \frac{\sin^2 k\alpha}{1 + x^2 + \cos^2 k\alpha}.$$

◀ Легко видеть, что

$$\prod_{k=1}^n \frac{\sin^2 k\alpha}{1 + x^2 + \cos^2 k\alpha} \leq \frac{1}{(1 + x^2)^n}. \quad (1)$$

Предполагая, что $x \neq 0$ (при $x = 0$ ряд, очевидно, сходится) и применяя к ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1 + x^2)^n} \quad (2)$$

признак д'Аламбера, замечаем, что ряд (2) сходится.

Используя теперь неравенство (1) и теорему 1, п.1.5, можем утверждать, что данный ряд сходится. ▶

$$23. \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}.$$

◀ Нетрудно найти, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-2 \frac{n-1}{n+1}} = \frac{1}{e^2} < 1$.

Поэтому, согласно признаку Коши, ряд сходится. ▶

$$24. \sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} + \dots$$

◀ Замечая, что общий член ряда имеет вид

$$a_n = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

и полагая здесь $\sqrt{2} = 2 \cos \frac{\pi}{4}$, получаем $a_n = \sqrt{2 - 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}} = 2 \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} < \frac{\pi}{2^n}$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^n}$ сходится, то по теореме 1, п.1.5, сходится и данный ряд. ▶

25. Доказать, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, $a_n > 0$, то $a_n = o(q_1^n)$, где $q_1 > q$.

◀ Пусть число $\varepsilon > 0$ настолько мало, что выполняется неравенство $\varepsilon < q_1 - q$. По определению предела, для данного ε можно найти такой номер N , начиная с которого выполняются неравенства

$$q - \varepsilon < \frac{a_{N+1}}{a_N} < q + \varepsilon, \quad q - \varepsilon < \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} < q + \varepsilon, \dots, q - \varepsilon < \frac{a_n}{a_{n-1}} < q + \varepsilon.$$

Перемножая почленно эти неравенства, получаем

$$a_N(q - \varepsilon)^{n-N} < a_n < (q + \varepsilon)^{n-N} a_N,$$

откуда

$$0 < \frac{a_n}{q_1^n} < a_N \left(\frac{q + \varepsilon}{q_1} \right)^n (q + \varepsilon)^{-N}, \quad \frac{q + \varepsilon}{q_1} < 1.$$

Теперь видно, что увеличением числа n можно достигнуть неравенства

$$\frac{a_n}{q_1^n} < a_N (q + \varepsilon)^{-N} \left(\frac{q + \varepsilon}{q_1} \right)^n < \varepsilon,$$

показывающего, что $a_n = o(q_1^n)$. ►

26. Доказать, что если $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$, $a_n > 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

◀ Выберем $\varepsilon > 0$ таким, чтобы выполнялось неравенство $\varepsilon < 1 - q$. В силу существования конечного верхнего предела, для выбранного ε найдется такой номер N , начиная с которого справедливы неравенства

$$0 < \frac{a_{i+1}}{a_i} < q + \varepsilon, \quad i = N, n-1.$$

Перемножая эти неравенства, находим

$$0 < a_n < \frac{a_N}{(q + \varepsilon)^N} (q + \varepsilon)^n.$$

Поскольку ряд $\sum (q + \varepsilon)^n$ сходится, то, в силу теоремы 1, заключаем, что ряд $\sum a_n$ также сходится.

Обратное утверждение неверно. Рассматривая, например, ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots,$$

замечаем, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right)^n = \infty,$$

в то время как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right),$$

очевидно, сходится. Таким образом, из того, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, не следует, вообще говоря, что $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$. ►

27. Доказать, что если $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, $a_n \geq 0$, то: а) при $q < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится; б)

при $q > 1$ этот ряд расходится (обобщенный признак Коши).

◀ Пусть $q < 1$. Для фиксированного ε , удовлетворяющего условию $0 < \varepsilon < 1 - q$, в силу условия примера, найдется номер N , начиная с которого выполняются неравенства

$$0 \leq a_{N+1} < (q + \varepsilon)^{N+1}, \dots, \quad 0 \leq a_n < (q + \varepsilon)^n, \quad q + \varepsilon < 1.$$

Но так как ряд $\sum (q + \varepsilon)^n$ сходится, то, по теореме 1, из последнего неравенства вытекает, что ряд $\sum a_n$ сходится.

Пусть $q > 1$. Тогда для ε , выбранного из условия $0 < \varepsilon < q - 1$, найдется номер M такой, что при всех $k > M$ члены последовательности (a_{n_k}) ($\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \rightarrow q$ при $n_k \rightarrow \infty$) будут удовлетворять неравенствам

$$a_{n_{M+1}} > (q - \varepsilon)^{n_{M+1}}, \quad a_{n_{M+2}} > (q - \varepsilon)^{n_{M+2}}, \dots, \quad a_{n_k} > (q - \varepsilon)^{n_k}, \quad q - \varepsilon > 1.$$

Отсюда следует, что общий член ряда к нулю не стремится, т.е. ряд $\sum a_n$ расходится. ►

Исследовать сходимость рядов:

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(\sqrt{2} + (-1)^n)^n}{3^n}$$

◀ Имея в виду обобщенный признак Коши, находим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^3(\sqrt{2} + (-1)^n)^n}{3^n}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[k]{8k^3(\sqrt{2} + 1)}}{3} = \frac{\sqrt{2} + 1}{3} < 1.$$

Следовательно, ряд сходится. ►

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + \cos n}{2 + \cos n} \right)^{2n - \ln n}$$

◀ Поскольку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \cos n}{2 + \cos n} \right)^{2 - \frac{\ln n}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \right)^{2 - \frac{\ln n}{n}} = \frac{4}{9} < 1,$$

то, по обобщенному признаку Коши, данный ряд сходится. ►

$$30. \left(\frac{1}{2} \right)^p + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^p + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^p + \dots$$

◀ Рассмотрим отношение

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right)^p \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n(2n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)(2n+1)} \right)^p = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2n+1} \right)^p = 1 + \frac{p}{2n+1} + \frac{p(p-1)}{2(2n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Согласно признаку Гаусса, отсюда находим: при $p > 2$ ряд сходится, а при $p \leq 2$ — расходится. ►

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+p}}$$

◀ Преобразовывая отношение $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ к виду

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{n!e^n(n+1)^{n+p+1}}{n^{n+p}(n+1)!e^{n+1}} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+p} = \frac{1}{e} \exp \left\{ (n+p) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right\} = \\ &= \exp \left\{ -1 + (n+p) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right\} = \exp \left\{ \frac{p-0,5}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right\} = \\ &= 1 + \frac{p-0,5}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

и используя признак Раабе, заключаем, что при $p > \frac{3}{2}$ ряд сходится. ►

$$32. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1) \dots (p+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^q}$$

◀ Исключим из рассмотрения тривиальный случай, когда p — целое отрицательное или нуль, и упростим отношение

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{n+1}{p+n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^q = \left(1 + \frac{p}{n} \right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{q+1} = \\ &= \left(1 - \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \left(1 + \frac{q+1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) = 1 + \frac{q-p+1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = q - p + 1$, то, согласно признаку Раабе, ряд сходится, если $q > p$. ►

$$33. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \right)^p \cdot \frac{1}{n^q}.$$

◀ Составляя отношение

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^p \left(1 + \frac{1}{n}\right)^q = \left(1 + \frac{p}{2n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \left(1 + \frac{q}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \\ &= 1 + \frac{p}{2n+1} + \frac{q}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \left(\frac{p}{2} + q\right) \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

получаем $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \frac{p}{2} + q$ и, на основании признака Раабе, заключаем, что данный ряд сходится при $\frac{p}{2} + q > 1$. ▶

$$34. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{p(p+1) \dots (p+n-1)}{q(q+1) \dots (q+n-1)} \right)^{\alpha}, \quad p > 0, \quad q > 0.$$

◀ Приводя отношение $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ к виду

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{q+n}{p+n} \right)^{\alpha} = \left(1 + \frac{q-p}{p+n} \right)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha(q-p)}{p+n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

при $n \rightarrow \infty$ и пользуясь признаком Раабе, устанавливаем, что ряд сходится при $\alpha(q-p) > 1$. ▶

35. Доказать, что если для строго положительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ выполняется условие

$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ при $n \rightarrow \infty$, то $a_n = o\left(\frac{1}{n^{p-\varepsilon}}\right)$, где $\varepsilon > 0$ произвольно мало, причем, если $p > 0$, то $a_n \downarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, т.е. a_n при $n \geq n_0$ монотонно убывая, стремится к нулю, когда $n \rightarrow \infty$.

◀ Начнем со случая, когда $p > 0$. Фиксируя произвольное ε_0 , $0 < \varepsilon_0 < p$, из условия существования предела $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = p$ находим

$$1 + \frac{p - \varepsilon_0}{i} < \frac{a_i}{a_{i+1}} < 1 + \frac{p + \varepsilon_0}{i}, \quad i = \overline{N, n-1},$$

где N — достаточно большой фиксированный номер. Из написанных неравенств следует, что

$$\left(1 + \frac{p - \varepsilon_0}{N}\right) \left(1 + \frac{p - \varepsilon_0}{N+1}\right) \dots \left(1 + \frac{p - \varepsilon_0}{n-1}\right) < \frac{a_N}{a_n} < \left(1 + \frac{p + \varepsilon_0}{N}\right) \left(1 + \frac{p + \varepsilon_0}{N+1}\right) \dots \left(1 + \frac{p + \varepsilon_0}{n-1}\right).$$

Отсюда, учитывая, что $a_n > 0$, а также пользуясь неравенством Бернулли, получаем

$$0 < a_n < \frac{a_N}{\left(1 + \frac{p - \varepsilon_0}{N}\right) \left(1 + \frac{p - \varepsilon_0}{N+1}\right) \dots \left(1 + \frac{p - \varepsilon_0}{n-1}\right)} < \frac{a_N}{1 + (p - \varepsilon_0) \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \dots + \frac{1}{n-1}\right)}. \quad (A)$$

Поскольку $p - \varepsilon_0 > 0$, а $\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \dots + \frac{1}{n-1} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то из неравенства (A) вытекает, что $a_n \rightarrow 0$. Принимая во внимание еще, что при $p > 0$ последовательность (a_n) монотонна (это видно из того, что при $n \geq n_0$, где n_0 — достаточно большое число, $\frac{p}{n} > o\left(\frac{1}{n}\right)$, следовательно, $\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$), убеждаемся в справедливости второй части утверждения.

Для доказательства первой части утверждения (p — любое, а $\varepsilon > 0$) покажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^{p-\varepsilon} a_n) = 0$.

Вводя обозначение $\varepsilon_n = n^{p-\varepsilon} a_n$ и составляя отношение $\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}}$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}} &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\varepsilon-p} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\varepsilon-p} \left(1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \\ &= \left(1 + \frac{\varepsilon-p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \left(1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 + \frac{\varepsilon}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Замечая, что это отношение имеет тот же вид, что и $\frac{a_n}{a_{n+1}}$, на основании доказанного выше, приходим к выводу, что $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. ►

Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, если:

$$36. a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^p \ln \frac{n-1}{n+1}, \quad n > 1.$$

◀ Преобразовывая выражение для общего члена a_n и используя при этом разложения $(1+x)^m$, $\ln(1+x)$ по формулам Маклорена с остаточным членом в форме Пеано, имеем

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^p} \ln \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) = n^{-\frac{p}{2}} \left(2 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-p} \left(-\frac{2}{n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \\ &= n^{-\frac{p}{2}} 2^{-p} \left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \left(-\frac{2}{n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = O^* \left(\frac{1}{n^{1+\frac{p}{2}}}\right), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Видим, что, по теореме 4, ряд сходится при $p > 0$. ►

$$37. a_n = \log_{b^n} \left(1 + \frac{\sqrt[n]{a}}{n}\right), \quad a > 0, b > 0.$$

◀ Пользуясь приемом предыдущего примера, имеем

$$a_n = \frac{\ln(1 + n^{-1} \sqrt[n]{a})}{n \ln b} = \frac{1}{n \ln b} \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = O^* \left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad b \neq 1.$$

Следовательно, по теореме 4, ряд сходится, если $b \neq 1$. ►

$$38. a_n = \left(\varepsilon - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^p.$$

◀ Пользуясь разложениями функции $x \mapsto \ln(1+x)$ по формуле Маклорена, находим

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\varepsilon - \exp\left\{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right\}\right)^p = \varepsilon^p \left(1 - \exp\left\{-1 + n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right\}\right)^p = \\ &= \varepsilon^p \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^p = O^* \left(\frac{1}{n^p}\right), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, если $p > 1$, то, согласно теореме 4, ряд сходится. ►

39. Доказать признак Жамэ: положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если $(1 - \sqrt[n]{a_n}) \frac{n}{\ln n} \geq p > 1$ при $n > n_0$, и расходится, если $(1 - \sqrt[n]{a_n}) \frac{n}{\ln n} \leq 1$ при $n > n_0$.

◀ Непосредственно из первого условия находим $0 \leq a_n \leq \left(1 - \frac{p \ln n}{n}\right)^n$ (заметим, что при $n > n_0$ выполняется неравенство $1 - \frac{p \ln n}{n} > 0$), откуда

$$0 \leq a_n \leq \exp\left\{n \ln\left(1 - \frac{p \ln n}{n}\right)\right\}.$$

Используя разложения функций $x \mapsto \ln(1+x)$, e^x по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано, из последнего неравенства имеем неравенство

$$0 \leq a_n \leq \frac{1}{n^p} \exp\left\{-p^2 \frac{\ln^2 n}{2n} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)\right\} = \frac{1}{n^p} - p^2 \frac{\ln^2 n}{2n^{p+1}} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^{p+1}}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

из которого следует (на основании теоремы 4), что ряд сходится при $p > 1$.

Поступая аналогично, из второго неравенства условия примера можно найти, что

$$a_n \geq \frac{1}{n} - \frac{\ln^2 n}{2n^2} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right) = O^* \left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Последнее неравенство означает, что ряд расходится. ►

40. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, сходится, если существует $\alpha > 0$ такое, что

$\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} \geq 1 + \alpha$ при $n \geq n_0$, и расходится, если $\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} \leq 1$ при $n \geq n_0$ (логарифмический признак).

◀ Из условий примера легко получаем неравенства $0 < a_n \leq \frac{1}{n^{1+\alpha}}$ при $n \geq n_0$ (первый случай), а также неравенство $a_n \geq \frac{1}{n}$ при $n \geq n_0$ (второй случай). Следовательно, по признакам сравнения, можно утверждать, что в первом случае ряд сходится, если $\alpha > 0$, а во втором расходится. ▶

Исследовать на сходимость ряды с общим членом a_n , если:

$$41. a_n = \frac{1}{(\ln(\ln n))^{\ln n}}, n > 2.$$

◀ Поскольку $\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} = \frac{\ln(\ln(\ln n))^{\ln n}}{\ln n} = \ln(\ln(\ln n)) > 1,1$ при $n > \exp(\exp(\exp 1,1))$, то, согласно логарифмическому признаку, ряд сходится (см. пример 40). ▶

$$42. a_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}}, n > 1.$$

◀ В силу оценки

$$\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} = \frac{(\ln(\ln n))^2}{\ln n} \leq 1,$$

справедливой при достаточно большом n ($\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln(\ln n))^2}{\ln n} = 0$), на основании логарифмического признака утверждаем, что данный ряд расходится. ▶

Пользуясь интегральным признаком Коши—Маклорена, исследовать сходимость рядов с общим членом a_n :

$$43. a_n = \frac{1}{n \ln^p n}, n > 1.$$

◀ Функция $f: x \mapsto \frac{1}{x \ln^p x}$ при $x > 1$ является положительной и, судя по знаку производной, убывающей (при любом p и достаточно большом x). Поэтому для исследования данного ряда на сходимость можно применять интегральный признак Коши. Имеем

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^p x} = \int_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^p x} = \frac{1}{(p-1)2^{p-1}} < \infty$$

при $p > 1$. Следовательно, ряд также сходится при $p > 1$. ▶

$$44. a_n = \frac{1}{n(\ln n)^p(\ln(\ln n))^q}, n > 2.$$

◀ Как и в предыдущем примере, нетрудно установить, что здесь применим интегральный признак. Рассмотрим интеграл

$$I = \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^p x (\ln(\ln x))^q} = \int_{\ln 3}^{+\infty} \frac{dt}{t^p \ln^q t}.$$

Если $p = 1$, то отсюда находим, что

$$I = \int_{\ln(\ln 3)}^{+\infty} \frac{dz}{z^q} = \frac{z^{-q+1}}{1-q} \Big|_{\ln(\ln 3)}^{+\infty} < \infty$$

при $q > 1$. Следовательно, ряд сходится при $p = 1$ и $q > 1$.

Если $p > 1$, то в силу того, что $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\gamma t}{t^\epsilon} = 0$ при $\epsilon > 0$ и любом γ , можем написать

$\frac{1}{t^p \ln^q t} \leq \frac{1}{t^\alpha}$ при достаточно большом $t > 0$, где $p \geq \alpha > 1$.

Аналогично, если $p < 1$, то при достаточно большом $t > 0$ справедливо неравенство $\frac{1}{t^p \ln^q t} \geq \frac{1}{t^\alpha}$, где $p \leq \alpha < 1$.

А тогда, на основании признака сравнения, можем утверждать, что рассматриваемый интеграл сходится, если $p > 1$, и расходится, если $p < 1$ (в обоих случаях q — любое). Это же, согласно интегральному признаку, относится и к данному ряду. ►

45. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(n)}{n^2}$, где $\nu(n)$ — количество цифр числа n .

◀ Легко показать, что $\nu(n) = [\lg n] + 1 \leq \ln n + 1$. Так как $\frac{\nu(n)}{n^2} \leq \frac{\ln n}{n^2} + \frac{1}{n^2}$ и ряды $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ и $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходятся, то, согласно теореме 1, п.1.5, сходится и данный ряд. ►

46. Пусть $\lambda_n, n \in \mathbb{N}$, — последовательные корни уравнения $\operatorname{tg} x = x$. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2}$.

◀ Графически можно установить, что для $\lambda_n > 0$ справедливы неравенства $n\pi < \lambda_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$\frac{1}{(n\pi + \frac{\pi}{2})^2} < \frac{1}{\lambda_n^2} < \frac{1}{n^2\pi^2},$$

и, в силу п.1.4, данный ряд сходится.

Аналогично поступаем в случае $\lambda_n < 0$. ►

47. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$.

◀ Согласно интегральному признаку Коши—Маклорена, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ расходится. Пользуясь неравенством $\ln(n!) < n \ln n$ и теоремой 1, п.1.5, заключаем, что данный ряд также расходится. ►

48. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ со строго положительными монотонно убывающими членами сходится или расходится одновременно с рядом $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

◀ Поскольку $0 < a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{2^{n+1}} \leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^n a_{2^n}$, то, в силу монотонности (S_n) , $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, а также теоремы о монотонной ограниченной последовательности, из сходимости второго ряда вытекает сходимость первого.

Кроме того, в силу оценки

$$\frac{1}{2}(4a_2 + 4a_4 + \dots + 2^{n+1}a_{2^{n+1}}) \leq a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2^{n+1}},$$

из сходимости первого ряда вытекает сходимость второго. ►

49. Пусть $f(x) > 0$ при $x \geq 1$, f — монотонно невозрастающая функция. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится, то для остатка его $R^n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k)$ справедлива оценка

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx < R_n < f(n+1) + \int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx.$$

Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ с точностью до 0,01.

◀ В силу монотонного невозрастания функции f , имеем неравенства $0 < f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$ при $k \leq x \leq k+1$, $k \in \mathbb{N}$, используя которые, находим

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx = \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_k^{k+1} f(x) dx < \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) = R_n,$$

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx = \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_k^{k+1} f(x) dx > \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k+1) = R_n - f(n+1).$$

Теперь легко видеть, что из полученных неравенств следует требуемая оценка.

Для вычисления суммы ряда с указанной точностью воспользуемся доказанной выше оценкой. В данном случае $R_n = 0,01$; $f(x) = \frac{1}{x^3}$. Тогда

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{dx}{x^3} < 0,01 < \frac{1}{(n+1)^3} + \int_{n+1}^{+\infty} \frac{dx}{x^3},$$

откуда получаем число первых членов ряда, которое нужно взять для вычисления суммы ряда с точностью до 0,01: $n = 7$. Следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} \approx 1 + 0,1250 + 0,0370 + 0,0156 + 0,0080 + 0,0046 + 0,0029 \approx 1,1931 \approx 1,19$ (с недостатком). ▶

Исследовать сходимость следующих рядов.

$$50. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi n}{4n-2} - \sin \frac{\pi n}{2n+1} \right).$$

◀ Применяя формулу Маклорена с остаточным членом в форме Пеано, а также пользуясь элементарными преобразованиями тригонометрических функций, получаем

$$a_n = \operatorname{ctg} \frac{\pi n}{4n-2} - \sin \frac{\pi n}{2n+1} = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{2(4n-2)}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{2(4n-2)}} - \cos \frac{\pi}{2(2n+1)} =$$

$$= \frac{1 - \frac{\pi}{2(4n-2)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{1 + \frac{\pi}{2(4n-2)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} - 1 + \frac{\pi^2}{8(2n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{\pi}{4n-2} + o\left(\frac{1}{n}\right) = O^*\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Следовательно, по теореме 4, п.1.5, ряд расходится. ▶

$$51. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^\alpha}.$$

◀ При $n \geq 3$ справедливы неравенства

$$\frac{n-2}{n^\alpha} < \frac{\ln(n!)}{n^\alpha} < \frac{\ln n}{n^{\alpha-1}}.$$

Поскольку ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{n^\alpha}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\alpha-1}}$, согласно интегральному признаку, сходятся при $\alpha > 2$, то исследуемый ряд, в силу теоремы 1, п.1.5, также сходится при $\alpha > 2$. ▶

$$52. \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1 \right).$$

◀ Пользуясь формулой Маклорена, получаем

$$a_n = n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1 = \exp\left(\frac{\ln n}{n^2+1}\right) - 1 = \frac{\ln n}{n^2+1} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) = O^*\left(\frac{\ln n}{n^2}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Отсюда, на основании интегрального признака и теоремы 3, п.1.5, заключаем, что данный ряд сходится. ▶

$$53. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 \left(\sin \frac{1}{n} \right)}.$$

◀ Поскольку $\sin \frac{1}{n} > \frac{2}{\pi n}$, $n \in \mathbb{N}$, то $\ln^2 \left(\sin \frac{1}{n} \right) < \ln^2 \left(\frac{\pi n}{2} \right)$. Следовательно,

$$\frac{1}{\ln^2 \left(\sin \frac{1}{n} \right)} > \frac{1}{\ln^2 \left(\frac{\pi n}{2} \right)} > \frac{2}{\pi n \ln \frac{\pi n}{2}} = O^* \left(\frac{1}{n \ln n} \right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, на основании интегрального признака и теоремы 3, п.1.5, из последнего соотношения следует, что данный ряд расходится. ▶

$$54. \sum_{n=1}^{\infty} (n^{n^\alpha} - 1).$$

◀ При $\alpha \geq 0$ ряд расходится, так как общий член ряда не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Поэтому будем считать, что $\alpha < 0$, и при установлении порядка стремления общего члена ряда при $n \rightarrow \infty$ будем пользоваться формулой Маклорена. Имеем

$$n^{n^\alpha} - 1 = \exp(n^\alpha \ln n) - 1 = \frac{\ln n}{n^{-\alpha}} + o \left(\frac{\ln n}{n^{-\alpha}} \right) = O^* \left(\frac{\ln n}{n^{-\alpha}} \right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Отсюда, на основании интегрального признака и теоремы 3, п.1.5, видим, что ряд сходится при $\alpha < -1$. ▶

$$55. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}, \quad a > 0, b > 0.$$

◀ Имеем

$$a_n = \frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}} = \frac{1}{n^{a+b} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n+b} \left(1 + \frac{b}{n}\right)^{n+a}}.$$

Так как последовательности $\left(\left(1 + \frac{a}{n}\right)^{b+n} \right)$ и $\left(\left(1 + \frac{b}{n}\right)^{a+n} \right)$ при $n \rightarrow \infty$ стремятся к постоянным e^a и e^b соответственно, то $a_n \sim \frac{e^{-a-b}}{n^{a+b}}$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, по теоремам 3 и 4, п.1.5, данный ряд сходится при $a+b > 1$. ▶

$$56. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln \frac{1}{n^\alpha} - \ln \left(\sin \frac{1}{n^\alpha} \right) \right).$$

◀ Очевидно, если $\alpha \leq 0$, то ряд расходится, ибо общий член ряда не стремится к нулю. Далее, при $\alpha > 0$, используя формулу Маклорена, получаем

$$\begin{aligned} a_n &= \ln \frac{1}{n^\alpha} - \ln \left(\sin \frac{1}{n^\alpha} \right) = -\ln \left(n^\alpha \sin \frac{1}{n^\alpha} \right) = \\ &= -\ln \left(n^\alpha \left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{6n^{3\alpha}} + o \left(\frac{1}{n^{3\alpha}} \right) \right) \right) = O^* \left(\frac{1}{n^{2\alpha}} \right), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, по теореме 4, п.1.5, ряд сходится при $\alpha > \frac{1}{2}$. ▶

Исследовать сходимость рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ со следующими общими членами:

$$57. u_n = \left(\int_0^n \sqrt[4]{1+x^4} dx \right)^{-1}$$

◀ Поскольку

$$\int_0^n \sqrt[4]{1+x^4} dx > \int_0^n x dx = \frac{n^2}{2},$$

то $0 < u_n < \frac{2}{n^2}$, т.е. по теоремам 1 и 4, п.1.5, ряд сходится. ►

58. Доказать, что сходимость векторного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ в E^k , $A_n = (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nk})$,

$A_n \in E^k$, эквивалентна сходимости всех рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_{ni}$, $i = \overline{1, k}$.

◄ 1. Пусть все ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_{ni}$, $i = \overline{1, k}$, сходятся. Тогда $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_{ni} = S_i$, где S_{ni} и S_i — соответственно частичные суммы и суммы рядов. По определению предела последовательности $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0$ такое, что $\forall n > n_0$ выполняются неравенства

$$|S_{ni} - S_i| < \varepsilon, \quad i = \overline{1, k}.$$

Отсюда

$$\sqrt{\sum_{i=1}^k |S_{ni} - S_i|^2} < \varepsilon \sqrt{k},$$

или $\|S_n - S\| < \varepsilon \sqrt{k}$, где $\|\cdot\|$ — норма элемента в E^k , $S_n = (S_{n1}, S_{n2}, \dots, S_{nk})$, $S = (S_1, S_2, \dots, S_k) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$. Следовательно, $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ в E^k , т.е. по определению 3, п. 1.1, векторный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ сходится к S .

2. Пусть сходится векторный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ к сумме S , $S \in E^k$. Тогда по определению 3, п.1.1, $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0$ такое, что $\forall n > n_0$ выполняется неравенство

$$\|S_n - S\| < \varepsilon \quad \text{или} \quad \sqrt{\sum_{i=1}^k |S_{ni} - S_i|^2} < \varepsilon.$$

Отсюда

$$|S_{ni} - S_i| < \varepsilon \quad \forall i = \overline{1, k},$$

т.е. сходятся все ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_{ni}$. ►

59. Исследовать на сходимость векторные ряды:

а) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n \ln n}, e^{-n} \right);$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-\sqrt{n}}, \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}, \frac{n!}{(2n+1)!(|\sin n| + |\cos n|)} \right).$

◄ а) Поскольку ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ в силу интегрального признака Коши—Маклорена расходится, то данный векторный ряд, по доказанному выше, также расходится.

б) Для сходимости данного векторного ряда необходимо и достаточно, чтобы сошлись все три ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!(|\sin n| + |\cos n|)}.$$

К первому ряду применим признак Раабе:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\exp \{ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\exp \left\{ \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right\} - 1 \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^{-1} = +\infty.$$

Следовательно, ряд сходится. Ко второму ряду применяем интегральный признак Коши—Маклорена, т.е. исследуем на сходимость несобственный интеграл:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x \, dx}{x\sqrt{x}} = -2x^{-\frac{1}{2}} \ln x \Big|_1^{+\infty} + 2 \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}} = 2 \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}.$$

Поскольку интеграл сходится, то сходится и ряд. Что же касается третьего ряда, то сначала используем признак сравнения

$$\frac{n!}{(2n+1)!! (|\sin n| + |\cos n|)} \leq \frac{n!}{(2n+1)!!},$$

а затем к ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!!}$ применим признак д'Аламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!(2n+1)!!}{(2n+3)!! n!} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, третий ряд является сходящимся. Таким образом, поскольку все три ряда сходятся, то данный векторный ряд также сходится. ►

60. Доказать, что сходимость ряда комплексных чисел $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ эквивалентна сходимости

двух действительных рядов $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, где $z_n = x_n + iy_n$.

◀ 1. Пусть ряды $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ сходятся соответственно к суммам X и Y . Тогда, по определению 1, п.1.1, $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0$ такое, что $\forall n > n_0$ выполняются неравенства

$$|X_n - X| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |Y_n - Y| < \varepsilon, \quad (1)$$

где X_n, Y_n — частичные суммы этих рядов. Учитывая неравенства (1), получаем

$$|X_n + iY_n - (X + iY)| = |X_n - X + i(Y_n - Y)| \leq |X_n - X| + |Y_n - Y| < 2\varepsilon.$$

Следовательно, частичные суммы комплексного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + iy_n)$ сходятся к числу $X + iY =$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

2. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится к сумме $X + iY$. Тогда, по определению 1, п.1.1, $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0$ такое, что выполняется неравенство

$$|X_n + iY_n - (X + iY)| < \varepsilon \quad \text{или} \quad \sqrt{(X_n - X)^2 + (Y_n - Y)^2} < \varepsilon, \quad (2)$$

где $X_n + iY_n = z_1 + iz_1 + z_2 + iz_2 + \dots + z_n + iz_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n$ — частичные суммы рассматриваемого ряда. Из (2) следует

$$|X_n - X| < \varepsilon, \quad |Y_n - Y| < \varepsilon,$$

т.е. $X_n \rightarrow X, Y_n \rightarrow Y$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится к сумме X , а ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ — к сумме Y . ►

61. Исследовать на сходимость комплексные ряды:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+i}{n^3+1}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(i+2)(i+4)\dots(i+2n)}.$$

◀ а) Поскольку ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1}$ сходятся, то по доказанному выше сходится данный комплексный ряд.

б) Используя формулу $x + iy = \sqrt{x^2 + y^2}(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, преобразуем выражение $\frac{1}{(i+2)(i+4)\dots(i+2n)}$ к виду $\frac{\cos \varphi_n - i \sin \varphi_n}{\sqrt{5}\sqrt{17}\dots\sqrt{4n^2+1}}$, где $\varphi_n = \sum_{k=1}^n \arctg \frac{1}{2k}$. Поскольку

$$\frac{n! |\cos \varphi_n|}{\sqrt{5}\sqrt{17}\dots\sqrt{4n^2+1}} \leq \frac{n!}{\sqrt{5}\sqrt{17}\dots\sqrt{4n^2+1}}, \quad \frac{n! |\sin \varphi_n|}{\sqrt{5}\sqrt{17}\dots\sqrt{4n^2+1}} \leq \frac{n!}{\sqrt{5}\sqrt{17}\dots\sqrt{4n^2+1}}$$

и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\sqrt{5}\sqrt{17}\dots\sqrt{4n^2+1}}$ по признаку д'Аламбера сходится, то на основании доказанной выше теоремы (пример 60) сходится и данный комплексный ряд. ▶

Заменив последовательности (x_n) , $n \in \mathbb{N}$, соответствующими рядами, исследовать их сходимость:

$$62. x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}.$$

◀ Поскольку $x_n = \sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) + x_1$, то

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} = -1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})^2}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})^2}.$$

Полученный ряд сходится по теореме 4, п.1.5, ибо

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})^2} \sim \frac{1}{2k^{\frac{3}{2}}} \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

поэтому сходится также данная последовательность. ▶

$$63. x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} - \frac{\ln^2 n}{2}.$$

◀ Поступая аналогично проделанному в предыдущем примере, получаем

$$x_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\ln(k+1)}{k+1} + \frac{1}{2} (\ln^2 k - \ln^2(k+1)) \right),$$

откуда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\ln(k+1)}{k+1} + \frac{1}{2} (\ln^2 k - \ln^2(k+1)) \right).$$

Пользуясь формулой Маклорена с остаточным членом в форме Пеано, имеем

$$\begin{aligned} 2a_n &= \frac{2 \ln(n+1)}{n+1} + \ln \frac{n}{n+1} \cdot \ln n(n+1) = \\ &= \frac{2 \ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln(n+1) + \ln n}{n} + O^* \left(\frac{\ln n}{n^2} \right) = -\frac{2 \ln n}{n(n+1)} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \cdot \frac{-n+1}{n(n+1)} + O^* \left(\frac{\ln n}{n^2} \right) = \\ &= -\frac{2 \ln n}{n(n+1)} + \frac{n-1}{n^2(n+1)} + O^* \left(\frac{\ln n}{n^2} \right) = O^* \left(\frac{\ln n}{n^2} \right), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, сходимость последовательности (x_n) эквивалентна сходимости ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$. Последний, по интегральному признаку, сходится, поэтому сходится и данная последовательность. ►

64. Сколько примерно надо взять членов ряда, чтобы найти его сумму с точностью до 10^{-5} , если

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(n+1)!}?$$

◀ Нужное число членов ряда найдем из неравенства

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots| < 10^{-5}, \quad (1)$$

где a_n — общий член рассматриваемого ряда.

а) Пусть $a_n = \frac{1}{n^2}$. Поскольку

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

то

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots < \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^2}.$$

Следовательно, если

$$\int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \leq 10^{-5}, \quad (2)$$

то неравенство (1) будет выполняться. Из (2) находим $n \geq 10^5$.

б) Пусть $a_n = \frac{2n}{(n+1)!}$. Тогда

$$\begin{aligned} |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots| &= \frac{2^{n+1}}{(n+2)!} \left(1 + \frac{2}{n+3} + \frac{2^2}{(n+3)(n+4)} + \dots \right) < \\ &< \frac{2^{n+1}}{(n+2)!} \left(1 + \frac{2}{n+3} + \left(\frac{2}{n+3} \right)^2 + \dots \right) = \frac{(n+3)2^{n+1}}{(n+2)!(n+1)}. \end{aligned}$$

Таким образом, если $\frac{(n+3)2^{n+1}}{(n+2)!(n+1)} \leq 10^{-5}$, то неравенство (1) будет выполняться. Решая последнее неравенство, находим $n \geq 10$. ►

Упражнения для самостоятельной работы

Исследовать сходимость рядов:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(2n)!^2}, \quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+5)(n+10)}{2^n}, \quad 3. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{n^2}, \quad 4. \sum_{n=1}^{\infty} \left(n \sin \frac{1}{n} \right)^{n^3}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \left| \ln \left(\cos \frac{1}{n} \right) \right|^{\frac{3}{5}}, \quad 6. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\ln \left(n \operatorname{tg} \frac{1}{n} \right)}, \quad 7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} e^{-\sqrt{n}}.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+3)(n+6) \dots (4n-3)}{(n+1)(n+4) \dots (4n-2)(n+2)^2}, \quad 9. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)!}{\left(n + \sqrt{n-1} \operatorname{tg} \frac{1}{n-1} \right) \left(n-1 + \sqrt{n-2} \operatorname{tg} \frac{1}{n-2} \right) \dots (2 + \operatorname{tg} 1)}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^3 n}{n^2}, \quad 11. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(\ln n)}{(\ln n)^{\alpha}}, \quad 12. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n \ln^2 n}, \quad 13. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n \left(\sqrt{4 + \frac{1}{n^2}} - \sqrt[3]{8 + \frac{3}{n^2}} \right)}.$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sin \left(e^{\frac{1}{n}} - \frac{2}{n} - \cos \sqrt{\frac{2}{n}} \right) \right|^{\alpha}. \quad 15. \sum_{n=2}^{\infty} \sin^{\alpha} \frac{1}{n^2 + n^2 n}.$$

16. Доказать признак Бертраана: если существует хотя бы в несобственном смысле предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) \ln n \right) = q,$$

то числовой строго положительный ряд $\sum a_n$ при $q > 1$ сходится, а при $q < 1$ — расходится.

Пользуясь признаком Бертраана, исследовать сходимость следующих рядов:

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=2}^n \gamma_k \quad \text{где} \quad \gamma_k = \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{\alpha}{k \ln k} + \frac{1}{k \ln^2 k} \right)^{-1}. \quad 18. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2n+1)! \sqrt{n \ln^{\alpha} n}}.$$

Установив поведение общего члена при $n \rightarrow \infty$, исследовать сходимость следующих рядов:

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) n^{\alpha}. \quad 20. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\{-n^2 x^2 + x\}}{n x^4 + x^2 + 1} dx \right).$$

$$21. \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} \frac{t \cos nt}{\sqrt{1+t^4}} dt. \quad 22. \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt} \ln t}{\sqrt{1+t^2}} dt.$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} f(x) |\sin nx| dx, \quad \text{где функция } f \text{ абсолютно интегрируема на }]0, +\infty[\text{ и}$$

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx \neq 0.$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx - 1 \right|. \quad 25. \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_n^{+\infty} \sin t^2 dt - \frac{\cos n^2}{2n} \right|.$$

26. Матричный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$, где A_n матрицы размера $k \times l$, называется сходящимся, если

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^n A_p = A,$$

где A — матрица размера $k \times l$.

Показать, что сходимость матричного ряда эквивалентна сходимости всех рядов вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{pq}, \quad 1 \leq p \leq k, \quad 1 \leq q \leq l,$$

где a_n^{pq} — элементы матрицы A_n , $n \in \mathbb{N}$.

27. Доказать, что матричный ряд

$$I + \frac{x A}{1!} + \frac{x^2 A^2}{2!} + \dots + \frac{x^n A^n}{n!} + \dots, \quad (1)$$

где A — квадратная матрица, I — единичная матрица, x — число, сходится. Матричный ряд (1) определяет матричную экспоненту e^{xA} , т.е.

$$e^{xA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n A^n}{n!}.$$

28. Пусть квадратная матрица A приводится к диагональному виду, т.е. существует матрица T такая, что

$$T^{-1} A T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$e^A = T \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} T^{-1}$$

Доказать это.

29. Пусть квадратная матрица размера $n \times n$ имеет вид

$$I = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Тогда

$$e^I = \begin{pmatrix} e^\lambda & \frac{e^\lambda}{1!} & \frac{e^\lambda}{2!} & \dots & \frac{e^\lambda}{(n-1)!} \\ & e^\lambda & \frac{e^\lambda}{1!} & \dots & \frac{e^\lambda}{(n-2)!} \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \frac{e^\lambda}{1!} \\ 0 & & & & e^\lambda \end{pmatrix}$$

Доказать это.

30. Доказать, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ сходится, если

$$\sum_{p, q=1}^m (a^{pq})^2 < 1,$$

где $a^{pq} \in \mathbb{R}$ — элементы матрицы A .

§ 2. Признаки сходимости знакпеременных рядов

2.1. Абсолютная и условная сходимости ряда.

Определение 1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|, \text{ где } a_n \in \mathbb{R} \text{ или } \mathbb{C}.$$

Определение 2. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется условно сходящимся.

Теорема 1. Из абсолютной сходимости ряда следует его сходимость.

Теорема 2. Если ряд сходится абсолютно к сумме S , то члены ряда можно переставлять в любом порядке и сумма переставленного ряда также будет равна S .

Теорема 3 (Римана). Если ряд сходится условно, то путем соответствующей перестановки его членов можно получить ряд с наперед заданным значением суммы (при этом не исключается $\pm\infty$).

2.2. Признак Лейбница.

Если $a_n = (-1)^n b_n$, $b_n \geq 0$, и последовательность (b_n) , начиная с некоторого номера n_0 , монотонно стремится к нулю, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Для остатка такого ряда справедлива оценка:

$$R_n = (-1)^n \theta_n b_{n+1}, \quad 0 \leq \theta_n \leq 1, \quad n > n_0.$$

2.3. Признак Абеля.

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \quad (1)$$

сходится, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и последовательность (b_n) есть монотонная и ограниченная.

2.4. Признак Дирихле.

Ряд (1) сходится, если последовательность (b_n) , начиная с некоторого номера n_0 , монотонно стремится к нулю, а последовательность частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ограничена.

2.5. Ассоциативное свойство ряда.

Члены сходящегося ряда можно группировать произвольно; при этом сумма ряда не изменяется.

65. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ является сходящимся, если выполнены условия: а) общий член этого ряда $a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$; б) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$, полученный в результате группировки членов данного ряда без нарушения их порядка, сходится; в) число слагаемых a_i , входящих в член $A_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i$, $1 = p_1 < p_2 < \dots$, ограничено.

◀ Пусть (S_{nk}^A) — последовательность частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$. Тогда

$$\begin{aligned} S_{nk}^A &= a_1 + a_2 + \dots + a_{p_2-1} + a_{p_2} + a_{p_2+1} + \dots + a_{p_3-1} + \dots + \\ &\quad + a_{p_n} + a_{p_n+1} + \dots + a_k + a_{k+1} + \dots + a_{p_{n+1}-1} = \\ &= S_k + a_{k+1} + \dots + a_{p_{n+1}-1}, \quad p_n \leq k \leq p_{n+1} - 1, \end{aligned}$$

где (S_k) — последовательность частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Поскольку $a_n \rightarrow 0$ и число членов последовательности $(a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{p_{n+1}-1}) = (C_k)$, по условию, ограничено, то $C_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{nk}^A = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, что и требовалось доказать. ▶

66. Доказать, что ряд

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{p_2-1} - a_{p_2} - \dots - a_{p_3-1} + a_{p_3} + \dots$$

сходится или расходится одновременно с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i \right), \quad a_i > 0; \quad 1 = p_1 < p_2 < \dots$$

◀ Пусть сходится первый ряд. Тогда сходится любая подпоследовательность его частичных сумм, в том числе и такая:

$$\left(\sum_{k=1}^n (-1)^k \left(\sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i \right) \right),$$

т.е. последовательность частичных сумм второго ряда. Следовательно, второй ряд также сходится.

Пусть теперь сходится второй ряд. Тогда $\sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Это означает, что, в силу положительности a_i , сумма $a_{k+1} + \dots + a_{p_{k+1}-1}$ (см. предыдущий пример) также стремится к нулю и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n_k}^A = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k,$$

т.е. сходится первый ряд. ▶

67. Доказать, что сумма сходящегося ряда не изменится, если члены этого ряда переставить так, что ни один из них не удаляется от своего прежнего положения больше чем на m мест, где m — некоторое заранее заданное число.

◀ Пусть S — сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ такое, что $\forall n > N$ для последовательности частичных сумм (S_n) этого ряда выполняются неравенства $S - \varepsilon < S_n < S + \varepsilon$. В силу условия примера, при $n > N + m$ можем написать $S - \varepsilon < S'_n < S + \varepsilon$, где (S'_n) — последовательность частичных сумм ряда, полученного в результате указанной перестановки. Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = S$. ▶

Доказать сходимость следующих рядов и найти их суммы:

68. $1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \dots$

◀ Общий член ряда $a_n = (-1)^n b_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, donde $b_n = \frac{2n+1}{2^n}$. Так как b_n , начиная с некоторого номера, монотонно стремится к нулю, то, согласно признаку Лейбница, ряд сходится. Доказать сходимость этого ряда можно и непосредственно. Замечая, что последовательность (S_n) частичных сумм этого ряда представляется в виде

$$\begin{aligned} S_n &= S_n^{(1)} + S_n^{(2)} + \dots + S_n^{(n+1)}, \\ S_n^{(1)} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} \right), \\ S_n^{(2)} &= 2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^n}{2^n} \right) = \frac{4}{3} \left(-\frac{1}{2} - \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} \right), \\ &\dots \\ S_n^{(k+1)} &= 2 \left(\frac{(-1)^k}{2^k} - \frac{(-1)^k}{2^{k+1}} + \dots + \frac{(-1)^n}{2^n} \right) = \frac{4}{3} \left(\frac{(-1)^k}{2^k} - \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} \right), \\ &\dots \\ S_n^{(n)} &= \frac{4}{3} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} - \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} \right), \quad S_n^{(n+1)} = 2 \frac{(-1)^n}{2^n}, \end{aligned}$$

получаем

$$S_n = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} \right) - \frac{2}{3} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{4}{3} \cdot \frac{(n-1)(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} + 2 \frac{(-1)^n}{2^n}.$$

Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ существует (т.е. ряд сходится) и равен $\frac{2}{9}$. ▶

69. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$

◀ Поскольку общий член ряда имеет вид $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, а последовательность $\left(\frac{1}{n}\right)$ монотонно стремится к нулю, то, по признаку Лейбница, ряд сходится. Найдем S_{2n} . Имеем

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \\ = C + \ln 2n + \varepsilon_{2n} - (C + \ln n + \varepsilon_n) = \ln 2 + \varepsilon_{2n} - \varepsilon_n,$$

где C — постоянная Эйлера, а $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Учитывая еще, что $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ где (S_n) — последовательность частичных сумм данного ряда, окончательно получаем

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2. \blacktriangleright$$

70. Зная, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$, доказать следующее утверждение: если члены ряда

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$ переставить так, чтобы группу p последовательных положительных членов сменяла группа q последовательных отрицательных членов, то сумма нового ряда будет равна $\ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}$.

◀ В результате указанной перестановки получим ряд

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{2q} + \frac{1}{2p+1} + \frac{1}{2p+3} + \dots + \frac{1}{4p-1} - \dots,$$

сумма которого, в силу примера 66, равна сумме ряда

$$\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2p-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2q}\right) + \\ + \left(\frac{1}{2p+1} + \frac{1}{2p+3} + \dots + \frac{1}{4p-1}\right) - \dots \quad (1)$$

в случае сходимости последнего.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2(n-1)p+1} + \frac{1}{2(n-1)p+3} + \dots + \frac{1}{2np-1} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2(n-1)q+2} - \frac{1}{2(n-1)q+4} - \dots - \frac{1}{2nq} \right). \quad (2)$$

Ряд (2) получается из ряда (1) в результате группировки членов ряда (1) по два. Поэтому если мы покажем, что ряд (2) сходится, и найдем его сумму, то, на основании результата, полученного в примере 65, можем утверждать, что ряд (1) имеет ту же сумму.

Пусть $p > q$. Тогда нетрудно получить, что

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2nq} + \frac{1}{2nq+1} + \frac{1}{2nq+3} + \dots + \frac{1}{2np-1}, \quad (3)$$

где (S_n) — последовательность частичных сумм ряда (2). Прибавляя и вычитая в выражении (3) слагаемое

$$\frac{1}{2nq+2} + \frac{1}{2nq+4} + \dots + \frac{1}{2np} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{nq+1} + \frac{1}{nq+2} + \dots + \frac{1}{np} \right)$$

и пользуясь асимптотической формулой

$$\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{n} = \ln \frac{n}{m} + \varepsilon_{mn}, \quad \varepsilon_{mn} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty,$$

из (3) получаем

$$S_n = C_{2np} + \ln \frac{2np}{2nq} - \frac{1}{2} \ln \frac{np}{nq} + \varepsilon'_n, \quad \varepsilon'_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (4)$$

где (C_{2np}) — четная подпоследовательность частичных сумм сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Таким образом, из (4) находим

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}.$$

Заметим, что при $p \leq q$ аналогичным образом получается этот же результат. В частности, если $p = 2$ и $q = 1$, то

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots = \frac{3}{2} \ln 2;$$

если $p = 1$, $q = 2$, то

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2} \ln 2. \blacktriangleright$$

71. Члены сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ переставить так, чтобы он стал расходящимся.

◀ Рассмотрим, например, ряд

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \\ & + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{6n-5}} + \frac{1}{\sqrt{6n-3}} + \frac{1}{\sqrt{6n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) + \dots = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{6n-5}} + \frac{1}{\sqrt{6n-3}} + \frac{1}{\sqrt{6n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \end{aligned}$$

Очевидно, этот ряд получается из данного ряда в результате такой перестановки: за тремя положительными членами следует один отрицательный. Покажем, что ряд расходится.

В силу неравенства $\frac{1}{\sqrt{6n-3}} + \frac{1}{\sqrt{6n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} > \frac{2}{\sqrt{6n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} > 0$, имеем оценку общего члена второго ряда: $a_n > \frac{1}{\sqrt{6n-3}}$. Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{6n-3}}$ по теореме 4, п.1.5, расходится, то по

теореме 1, п.1.5, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ также расходится, что и требовалось. Заметим, что исходный ряд сходится по признаку Лейбница. ▶

Исследовать сходимость знакопеременных рядов:

$$72. 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \dots$$

◀ Поскольку сгруппированный ряд, согласно признаку Лейбница, сходится, то, на основании доказательства, приведенного в примере 65, приходим к выводу, что данный ряд также сходится. ▶

$$73. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \sin \frac{n\pi}{4}.$$

◀ Поскольку

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{4} \right| = \left(\sin \frac{\pi}{8} \right)^{-1} \left| \sin \frac{n\pi}{8} \sin \frac{n+1}{8} \pi \right| < \frac{1}{\sin \frac{\pi}{8}},$$

а последовательность $(n^{-1} \ln^{100} n)$, начиная с достаточно большого n , монотонно стремится к нулю (это вытекает из того, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-1} \ln^{100} x = 100 \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-1} \ln^{99} x = 0, \quad (x^{-1} \ln^{100} x)' < 0 \quad \forall x > e^{100},$$

то, согласно признаку Дирихле, данный ряд сходится. ►

$$74. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}.$$

◀ Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos 2n}{n}$ сходятся: первый — по признаку Лейбница, второй (в силу ограниченности последовательности $\left(\sum_{k=1}^n (-1)^k \cos 2k\right)$,

$$\left| \sum_{k=1}^n (-1)^k \cos 2k \right| = \left| -\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{2 \cos 1} \cos(2n+1) \right| < \frac{1 + (\cos 1)^{-1}}{2},$$

и монотонного стремления $\frac{1}{n}$ к нулю при $n \rightarrow \infty$) — по признаку Дирихле. Следовательно, их полуразность

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (1 - \cos 2n) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$$

является также сходящимся рядом. ►

$$75. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}.$$

◀ Представляя общий член ряда в виде

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = (-1)^n \frac{\sqrt{n} - (-1)^n}{n-1} = (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n-1} - \frac{1}{n-1}$$

и замечая, что ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n-1}$, по признаку Лейбница, сходится, а ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}$ расходится ($n \rightarrow \infty$), заключаем, что данный ряд также расходится ($n \rightarrow \infty$). ►

$$76. \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + k^2}).$$

◀ Поскольку

$$\sin(\pi \sqrt{n^2 + k^2}) = (-1)^n \sin \pi (\sqrt{n^2 + k^2} - n) \equiv (-1)^n b_n,$$

где $b_n = \sin \frac{\pi k^2}{\sqrt{n^2 + k^2} + n}$ — последовательность, монотонно (при $n > n_0$) стремящаяся к нулю при $n \rightarrow \infty$, то, по признаку Лейбница, ряд сходится. ►

$$77. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n}.$$

◀ Рассмотрим ряд, полученный в результате группировки членов данного ряда. Имеем

$$\begin{aligned} & -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{15}\right) + \dots \\ & \dots + (-1)^k \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} + \dots + \frac{1}{(k+1)^2-1}\right) + \dots \end{aligned}$$

Поскольку

$$A_k = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} + \dots + \frac{1}{(k+1)^2-1} < \frac{2k+1}{k^2} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

$$A_k - A_{k+1} = (2k+1) \sum_{m=0}^{2k} \frac{1}{(k^2+m)((k+1)^2+m)} - \frac{1}{k^2+4k+2} - \frac{1}{k^2+4k+3} >$$

$$> \frac{(2k+1)^2}{(k^2+2k)(k^2+4k+1)} - \frac{1}{k^2+4k+2} - \frac{1}{k^2+4k+3} > 0$$

при $k \geq k_0$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k A_k$, согласно признаку Лейбница, сходится. А тогда на основании выводов, полученных в примере 66, данный ряд также сходится. ►

78. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi n^2}{n+1}}{\ln^2 n}$

◀ Имеем

$$\cos \frac{\pi n^2}{n+1} = (-1)^n \cos \left(\pi \frac{n^2}{n+1} - \pi n \right) = (-1)^{n+1} \cos \frac{\pi}{n+1}.$$

Так как ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln^2 n}$, по признаку Лейбница, сходится, а последовательность $(\cos \frac{\pi}{n+1})$ монотонна и ограничена, то исследуемый ряд, по признаку Абеля, также сходится. ►

79. Доказать, что знакопередающийся ряд

$$b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots + (-1)^{n-1} b_n + \dots, \quad b_n > 0,$$

сходится, если $\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ при $n \rightarrow \infty$, где $p > 0$.

◀ Как следует из примера 35, при $p > 0$ последовательность $(b_n) \downarrow 0$ при $n > n_0$. Поэтому, по признаку Лейбница, данный ряд сходится. ►

Исследовать на абсолютную сходимость следующие ряды:

80. $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p} \right)$

◀ Пусть $p \leq 0$. Тогда общий член ряда к нулю не стремится и, следовательно, ряд расходится. Полагая, далее, $p > 0$ и пользуясь формулой Маклорена с остаточным членом в форме Пеано, находим

$$\ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p} \right) = \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{1}{2n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$, согласно признаку Лейбница, сходится при $p > 0$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^*$, где $a_n^* = \frac{1}{2n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)$, по теореме 4, п.1.5, сходится при $p > \frac{1}{2}$ (при $p \leq \frac{1}{2}$ ряд расходится к $+\infty$), то данный ряд сходится только при $p > \frac{1}{2}$.

В силу неравенства

$$\frac{1}{2n^p} < \left| \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p} \right) \right| < \frac{2}{n^p}, \quad p > 0,$$

и теорем 1, 4, п.1.5, данный ряд сходится абсолютно при $p > 1$. Следовательно, при значениях p , удовлетворяющих неравенству $\frac{1}{2} < p \leq 1$, исследуемый ряд сходится условно. ►

81. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n + (-1)^n)^p}$

◀ При $p \leq 0$ общий член ряда не стремится к нулю, т.е. ряд расходится. Поэтому, считая, что $p > 0$, и применяя формулу Маклорена с остаточным членом в форме Пеано, преобразовываем общий член ряда к виду

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n}{(n + (-1)^n)^p} &= (-1)^n n^{-p} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{-p} = \\ &= (-1)^n n^{-p} \left(1 + p \frac{(-1)^{n+1}}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{p}{n^{p+1}} + o\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right) \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$. Ряды $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$, $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{p}{n^{p+1}} + o\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)\right)$ сходятся при $p > 0$ (первый — в силу признака Лейбница, а второй — по теореме 4, п.1.5). Поэтому исходный ряд сходится при этом же условии.

Поскольку, далее,

$$\frac{1}{(n+1)^p} \leq \frac{1}{(n+(-1)^n)^p} \leq \frac{1}{(n-1)^p}, \quad n = \overline{2, \infty},$$

и ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$, то, в силу последнего неравенства и теоремы 1, п.1.5, данный ряд сходится абсолютно при $p > 1$. Следовательно, при $0 < p \leq 1$ исследуемый ряд сходится условно. ▶

$$82. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin \frac{n\pi}{4}}.$$

◀ Очевидно, при $p \leq 0$ ряд расходится, поскольку при этом не выполняется необходимое условие сходимости. При $p > 0$, как и в предыдущем примере, представим общий член ряда в виде

$$\begin{aligned} \sin \frac{n\pi}{4} \left(n^p + \sin \frac{n\pi}{4}\right)^{-1} &= n^{-p} \sin \frac{n\pi}{4} \left(1 + \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p}\right)^{-1} = \\ &= \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p} \left(1 - \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p} + o\left(\frac{1}{n^p}\right)\right) = \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p} - \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p}$ сходится, по признаку Дирихле, при $p > 0$, поскольку

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{4} \right| < \frac{1}{\sin \frac{\pi}{8}}, \quad \frac{1}{n^p} \downarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Далее, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n^{2p}}$ при $p > 0$ сходится также по признаку Дирихле, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)\right)$$

сходится по теореме 4, п.1.5, только при $p > \frac{1}{2}$. Поэтому полуразность этих рядов

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)\right) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)\right)$$

является сходящимся при $p > \frac{1}{2}$ рядом (при $0 < p \leq \frac{1}{2}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$ расходится к $+\infty$, поэтому и последний ряд расходится к $+\infty$). Следовательно, исходный ряд сходится лишь при $p > \frac{1}{2}$.

Для установления области абсолютной сходимости воспользуемся оценками

$$\frac{|\sin \frac{n\pi}{4}|}{2n^p} \leq \frac{|\sin \frac{n\pi}{4}|}{n^p} \cdot \frac{1}{|1 + \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p}|} \leq \frac{2|\sin \frac{n\pi}{4}|}{n^p}, \quad \frac{1}{2n^p} - \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{2n^p} = \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n^p} \leq \frac{|\sin \frac{n\pi}{4}|}{n^p} \leq \frac{1}{n^p}$$

и теоремам 1, 4, п.1.5. Из этих неравенств следует, что данный ряд сходится абсолютно лишь при $p > 1$. Поэтому при $\frac{1}{2} < p \leq 1$ ряд сходится условно. ►

83.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(\sqrt{n})}}{n^p} \quad (1)$$

◀ Очевидно, при $p > 1$ ряд сходится абсолютно. Для выяснения области сходимости рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_n, \quad (2)$$

где $A_n = \frac{1}{(n^2)^p} + \frac{1}{(n^2+1)^p} + \dots + \frac{1}{(n^2+2n)^p}$, полученный в результате группировки членов данного ряда. Поскольку $0 < A_n < \frac{2n+1}{n^{2p}} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и $p > \frac{1}{2}$, а также

$$\begin{aligned} A_n - A_{n+1} &= \sum_{i=0}^{2n} \frac{((n+1)^2+i)^p - (n^2+i)^p}{(n^2+i)^p(n^2+2n+i+1)^p} - (n^2+4n+2)^{-p} - (n^2+4n+3)^{-p} > \\ &> \frac{(2n+1)((n^2+4n+1)^p - (n^2+2n)^p)}{(n^2+2n)^p(n^2+4n+1)^p} - \frac{1}{(n^2+4n+2)^p} - \frac{1}{(n^2+4n+3)^p} > 0 \end{aligned}$$

при достаточно большом n , то, в силу признака Лейбница, ряд (2) сходится. Кроме того, $A_n > \frac{2n+1}{(n^2+2n)^p}$ не стремится к 0 при $p \leq \frac{1}{2}$; поэтому ряд (2) расходится, если $p \leq \frac{1}{2}$. Следовательно, согласно примеру 66, ряд (1) сходится лишь при $p > \frac{1}{2}$. Таким образом, область условной сходимости ряда (1) определяется неравенствами $\frac{1}{2} < p \leq 1$. ►

84.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[n \pi]}}{n}$$

◀ Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \left(\frac{1}{[e^{k-1}] + 1} + \dots + \frac{1}{[e^k]} \right),$$

полученный в результате группировки членов данного ряда, в силу оценки $\frac{1}{[e^{k-1}] + 1} + \dots + \frac{1}{[e^k]} > \frac{[e^k] - [e^{k-1}]}{[e^k]} = 1 - \frac{[e^{k-1}]}{[e^k]} \rightarrow 1 - \frac{1}{e}, k \rightarrow \infty$, расходится. Следовательно, согласно примеру 66, исследуемый ряд также расходится. ►

85.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \right)^p$$

◀ Рассмотрим отношение

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \right)^p &: \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)(2n+2)} \right)^p = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2n+1} \right)^p = 1 + \frac{p}{2n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{p}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отсюда видим, что, согласно примеру 79, ряд сходится, если $p > 0$. Так как при $p \leq 0$ общий член ряда не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, то это условие ($p > 0$) является необходимым для сходимости ряда.

Далее, по признаку Гаусса, ряд сходится абсолютно лишь при $p > 2$. Следовательно, при значениях p , удовлетворяющих неравенству $0 < p \leq 2$, данный ряд сходится только условно. ▶

$$86. \frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^q} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^q} + \frac{1}{5^p} - \frac{1}{6^q} + \dots$$

◀ Сразу заметим, что если $p \leq 0$ или $q \leq 0$, то ряд расходится в силу необходимого признака. Поэтому далее, считаем, что $p > 0$ и $q > 0$.

Имея в виду пример 65, сгруппируем члены данного ряда следующим образом:

$$\left(\frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^q}\right) + \left(\frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^q}\right) + \left(\frac{1}{5^p} - \frac{1}{6^q}\right) + \dots = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(\frac{1}{n^p} - \frac{1}{(n+1)^q}\right).$$

Так как

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^p} - \frac{1}{(n+1)^q} &= \frac{1}{n^p} - \frac{1}{n^q} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-q} = \frac{1}{n^p} - \frac{1}{n^q} \left(1 - \frac{q}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \\ &= \frac{1}{n^p} - \frac{1}{n^q} + \frac{q}{n^{q+1}} + o\left(\frac{1}{n^{q+1}}\right), \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

то, по теореме 4, п.1.5, сгруппированный ряд сходится при $p = q > 0$. Если же $p \neq q$, то отсюда следует, что ряд сходится при $p > 1$ и $q > 1$ одновременно. А тогда, согласно упомянутому примеру, при этих же условиях сходится и данный ряд.

Очевидно, абсолютно ряд сходится лишь при $p > 1$ и $q > 1$. ▶

$$87. 1 + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{1}{4^p} + \dots$$

◀ Ряд $1 + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{7^p} + \frac{1}{4^p} + \dots$, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, сходится лишь при $p > 1$, так как при этом условии сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ и члены абсолютно сходящегося ряда можно переставить в любом порядке.

При $p = 1$ получаем ряд, сходимость которого исследована в примере 70. Там мы установили, что ряд сходится.

Рассмотрим случай, когда $0 < p < 1$. Образует подпоследовательность частичных сумм данного ряда (S_{3n}) , где

$$\begin{aligned} S_{3n} &= 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^p} - \frac{1}{(2n)^p} + \frac{1}{(2n+1)^p} + \frac{1}{(2n+3)^p} + \dots + \frac{1}{(4n-1)^p} = \\ &= C_{2n} + \frac{1}{(2n+1)^p} + \frac{1}{(2n+3)^p} + \dots + \frac{1}{(4n-1)^p}; \end{aligned}$$

(C_{2n}) — подпоследовательность последовательности частичных сумм сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$. Поскольку

$$\frac{1}{(2n+1)^p} + \frac{1}{(2n+3)^p} + \dots + \frac{1}{(4n-1)^p} > \frac{n}{(4n-1)^p} \rightarrow +\infty \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \text{ то}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} C_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(2n+1)^p} + \frac{1}{(2n+3)^p} + \dots + \frac{1}{(4n-1)^p} \right) = +\infty.$$

Следовательно, данный ряд при $0 < p < 1$ расходится. Заметив, что расходимость его при $p \leq 0$ следует из необходимого условия, окончательно устанавливаем, что исследуемый ряд абсолютно сходится, если $p > 1$, и условно, если $p = 1$. ▶

$$88. 1 + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{1^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{1}{3^p} + \frac{1}{9^p} + \frac{1}{11^p} - \frac{1}{5^p} + \dots$$

◀ Очевидно, при $p > 1$ данный ряд сходится абсолютно, ибо при этом условии сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, и члены абсолютно сходящегося ряда можно переставить в любом порядке.

Пусть $0 < p < 1$. Рассмотрим подпоследовательность (S_{3n}) последовательности частичных сумм данного ряда. Имеем

$$S_{3n} = \frac{1}{(2n+1)^p} + \frac{1}{(2n+3)^p} + \dots + \frac{1}{(4n-1)^p}.$$

Поскольку $S_{3n} > \frac{n}{(4n-1)^p} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то данный ряд расходится.

Пусть $p = 1$. Тогда $0 < S_{3n} < \frac{1}{2}$ и, по теореме о монотонной ограниченной последовательности, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n}$ конечен. Следовательно, сходится ряд

$$\left(1 + \frac{1}{3} - 1\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{5}\right) + \dots$$

А так как все условия примера 65 здесь выполнены, то данный ряд также сходится.

Учитывая еще, что при $p \leq 0$ исследуемый ряд расходится, окончательно устанавливаем, что он сходится абсолютно при $p > 1$, а при $p = 1$ — условно. ►

89.

$$1 - \frac{2}{2^q} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} - \frac{2}{5^q} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{2}{8^q} + \dots \quad (1)$$

◀ Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1, 4, 7, \dots} \left(\frac{1}{n^p} - \frac{2}{(n+1)^q} + \frac{1}{(n+2)^p} \right), \quad (2)$$

полученный из данного в результате группировки его членов по три. (Считая, что $p > 0$ и $q > 0$, имеем

$$a_n = \frac{1}{n^p} - \frac{2}{(n+1)^q} + \frac{1}{(n+2)^p} = 2 \left(\frac{1}{n^p} - \frac{1}{n^q} \right) + 2 \left(\frac{q}{n^{q+1}} - \frac{p}{n^{p+1}} \right) + o \left(\frac{1}{n^{q+1}} \right) + o \left(\frac{1}{n^{p+1}} \right),$$

$n \rightarrow \infty$.

Отсюда, в силу признаков сравнения, п.1.5, следует, что при $p = q$ ряд (2) сходится. Пусть $p \neq q$. Тогда $a_n \sim \frac{1}{n^{\min(p, q)}}$ при $n \rightarrow \infty$, и, следовательно, по признакам сравнения, ряд (2) расходится, если $\min(p, q) \leq 1$. Так как все условия примера 65 здесь выполнены, то выводы, относящиеся к ряду (2), остаются в силе для ряда (1).

Замечая еще, что при $p \leq 0$ или $q \leq 0$ исследуемый ряд (1) расходится (общий член ряда не стремится к нулю), а при $p > 1$ и $q > 1$ он сходится абсолютно, заключаем, что при $0 < p = q \leq 1$ ряд сходится условно. ►

90. $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{m}{n}$, где $\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}$.

◀ Для удобства представим общий член ряда в виде

$$\binom{m}{n} = (-1)^{n-1} b_n, \quad b_n = \frac{(n-m-1)(n-m-2)\dots(1-m)m}{n!}.$$

Очевидно, при $m \in \mathbb{Z}_0$ ряд сходится абсолютно. Поэтому, исключая этот случай, можно образовать отношение

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \frac{m+1}{n} + \frac{m}{n(n-m)}.$$

Так как начиная с некоторого номера n_0 , последовательность (b_n) имеет определенный знак, то будем считать, что $b_n > 0$, $n \geq n_0$. В таком случае из отношения (1), учитывая пример 79, находим, что ряд сходится, если $m+1 > 0$. Поскольку при $m+1 \leq 0$ последовательность монотонно возрастает, то условие $m+1 > 0$ является также и необходимым для сходимости ряда. Далее, по признаку Гаусса, из (1) следует, что ряд сходится абсолютно, если $m > 0$, а при $m < 0$ — расходится (абсолютно).

Таким образом, все сказанное позволяет сделать вывод, что при $m \geq 0$ ряд сходится абсолютно, а если $-1 < m < 0$, то ряд сходится условно. ►

91. Доказать, что сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ для каждого $p > 0$ лежит между $\frac{1}{2}$ и 1.

◀ Поскольку ряд, в силу признака Лейбница, сходится, то подпоследовательности частичных сумм его имеют один и тот же предел S ; причем подпоследовательность (S_{2n}) ,

$$S_{2n} = \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) + \left(\frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p}\right) + \dots + \left(\frac{1}{(2n-1)^p} - \frac{1}{(2n)^p}\right),$$

возрастает, а подпоследовательность (S_{2n-1}) ,

$$S_{2n-1} = 1 - \left(\frac{1}{2^p} - \frac{1}{3^p}\right) - \dots - \left(\frac{1}{(2n-2)^p} - \frac{1}{(2n-1)^p}\right),$$

убывает. Следовательно, $S_{2n} < S < S_{2n-1}$, откуда находим, что $S < S_1 < 1$. Для доказательства оценки снизу рассмотрим подпоследовательность (S_{4n-1}) . Поскольку график функции $x \mapsto \frac{1}{x^p}$, $p > 0$, $x > 0$, является выпуклым вниз, то выполняются неравенства

$$\frac{1}{3^p} + \frac{1}{5^p} > \frac{2}{4^p}, \quad \frac{1}{7^p} + \frac{1}{9^p} > \frac{2}{8^p}, \quad \dots, \quad \frac{1}{(4n-1)^p} + \frac{1}{(4n+1)^p} > \frac{2}{(4n)^p}.$$

Отсюда для S_{4n-1} имеем оценку

$$\begin{aligned} S_{4n-1} &= 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \dots + \frac{1}{(4n-1)^p} - \frac{1}{(4n)^p} + \frac{1}{(4n+1)^p} > \\ &> 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{4^p} - \dots - \frac{1}{(4n-2)^p} + \frac{1}{(4n)^p} = 1 - \frac{1}{2^p} S_{2n}, \end{aligned}$$

из которой предельным переходом получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{4n-1} = S \geq 1 - \frac{1}{2^p} \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = 1 - \frac{S}{2^p}.$$

Итак, $S \geq \frac{2^p}{2^p+1} > \frac{1}{2}$, что и требовалось доказать. ▶

92. Сколько членов ряда следует взять, чтобы получить его сумму с точностью до $\varepsilon = 10^{-6}$, если:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^\circ}{\sqrt{n}}$?

◀ а) Согласно оценке остатка, вытекающей из признака Лейбница, нужное число N находим из неравенства $\frac{1}{\sqrt{(N+1)^2+1}} < 10^{-6}$, откуда $N \geq 10^6$ (см. п.2.2).

б) В силу признака Дирихле, ряд сходится, а по п.2.5 сумма ряда равна сумме сгруппированного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n, \quad b_n = (-1)^{n+1} \sum_{k=180(n-1)+1}^{180n-1} \frac{\sin k^\circ}{\sqrt{k}},$$

который, очевидно, является рядом лейбница типа, т.е. сходящимся по признаку Лейбница. Следовательно, для остатка этого ряда справедлива оценка

$$\left| \sum_{k=180n+1}^{180n+179} \frac{\sin k^\circ}{\sqrt{k}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{180n+1}} \sum_{k=180n+1}^{180n+179} \sin k^\circ < \frac{1}{\sqrt{N+1} \sin \frac{\pi}{360}} < 10^{-6},$$

откуда $N \geq 1,32 \cdot 10^6$. ▶

93. Доказать, что гармонический ряд останется расходящимся, если, не переставляя его членов, изменить знаки их так, чтобы за p положительными членами следовало бы q отрицательных членов ($p \neq q$). Сходимость будет иметь место лишь при $p = q$.

◀ Указанный в условии ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2} - \dots - \frac{1}{p+q} + \frac{1}{p+q+1} + \dots + \frac{1}{2p+q} - \dots$$

в силу примера 66, сходится или расходится одновременно с рядом

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p}\right) - \left(\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \dots + \frac{1}{p+q}\right) + \left(\frac{1}{p+q+1} + \dots + \frac{1}{2p+q}\right) - \dots \quad (1)$$

Пусть $p > q$. Поскольку справедливы оценки

$$S_2 = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p}\right) - \left(\frac{1}{p+1} + \dots + \frac{1}{p+q}\right) > 1 - \frac{q}{p} = (p-q)\frac{1}{p},$$

$$S_4 = S_2 + \left(\frac{1}{p+q+1} + \dots + \frac{1}{2p+q}\right) - \left(\frac{1}{2p+q+1} + \dots + \frac{1}{2p+2q}\right) >$$

$$> S_2 + \frac{p}{2p+q} - \frac{q}{2p+q} > (p-q) \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{2p+q}\right),$$

$$\dots$$

$$S_{2n} > (p-q) \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{2p+q} + \dots + \frac{1}{np+(n-1)q}\right) \equiv x_n > 0$$

и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, то ряд (1) расходится.

Пусть $p < q$. Тогда, оценивая частичные суммы ряда следующим образом:

$$S_1 < p, \quad S_2 < p - \frac{q}{p+q}, \quad S_3 < p - \frac{q-p}{p+q}, \quad S_4 < p - \frac{q-p}{p+q} - \frac{q}{2(p+q)}, \quad S_5 < p - \frac{q-p}{p+q} \left(1 + \frac{1}{2}\right),$$

$$\dots, \quad S_{2n} < p - \frac{q-p}{p+q} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}\right) - \frac{q}{n(p+q)}, \quad S_{2n+1} < p - \frac{q-p}{p+q} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right).$$

находим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = -\infty$, т.е. ряд (1) расходится.

Наконец, пусть $p = q$. Тогда ряд (1) есть ряд лейбница типа, следовательно, он сходится. ▶

Упражнения для самостоятельной работы

Исследовать сходимость следующих рядов:

31. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{100\sqrt{n}} \sin\left(\frac{100}{\sqrt{n}}\right)$. 32. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{(-1)^n}{n}} - 1\right) q^n$. 33. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^3 n \ln\left(1 + \frac{n^2 + 0,1 \cos n}{n^3 + 1}\right)$.
34. $\sum_{n=2}^{\infty} \exp\left\{\frac{\ln^2 n}{n}\right\} \frac{\cos^5 n}{n \ln n}$. 35. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} n \operatorname{tg}\left(\sin \sqrt{\frac{n}{n^2+1}}\right) \sin\left(n + \frac{1}{n}\right)$.
36. $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{\sqrt{n}} \cos \frac{1}{n^2} \cdot (-1)^n$. 37. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(\pi \sqrt[3]{n^3+n})}{\ln^n n}$. 38. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 \sqrt{n}}{\ln^n n} \sin(\pi \sqrt[3]{n^3+n^2})$.
39. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2(-1)^n n}{\pi}\right)^{1+\frac{1}{n}} - 1\right)$. 40. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} \sum_{k=1}^n k^p \cos^3 2n$, $p \in \mathbb{N}$. 41. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{n}\right)}{n^\alpha}$.
42. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n^3+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^3+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^3+n}}\right)$. 43. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\frac{1+x^n}{1+x^{2n}}} dx$.
44. $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 (1-x^2)^{n^2} dx \cdot \sin n$. 45. $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{\sin n}{x}} \frac{\sin x}{x} dx$.

46. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где a_n есть решение задачи

$$(n+2)a_{n+2} + 2(n+1)a_{n+1} + na_n = 0, \quad a_1 = -1, \quad a_2 = \frac{1}{2}.$$

Исследовать сходимость матричных рядов $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$, если:

$$47. A_n = \begin{pmatrix} \cos 1 & \sin 1 \\ \sin 1 & -\cos 1 \end{pmatrix}^n \frac{\sin \frac{\pi n}{18}}{n}, \quad 48. A_n = \begin{pmatrix} 2^{\frac{1}{n}} - 1 & \operatorname{arctg} \frac{n^2}{n^3+2} \\ \frac{\sin n}{n} & \frac{\cos n}{n} \end{pmatrix} (-1)^n.$$

§ 3. Действия над рядами

3.1. Сложение рядов.

Если ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad a_n, b_n \in \mathcal{L}, \quad (1)$$

сходятся в \mathcal{L} , то справедливы равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

где λ, μ — произвольные действительные или комплексные числа.

3.2. Правило Коши.

Под произведением двух рядов (1), где a_n, b_n — числа, понимается третий ряд, общий член которого имеет вид

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1.$$

Вообще говоря, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \neq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Однако, если один из рядов сходится, а второй сходится абсолютно, то всегда

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Эта формула справедлива и в том случае, когда все три ряда сходятся.

Найти суммы рядов:

$$94. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n}.$$

◀ Поскольку

$$\cos \frac{2n\pi}{3} = 1 - 2 \sin^2 \frac{n\pi}{3} = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & \text{если } n \neq 3k, \quad k \in \mathbb{N}, \\ 1, & \text{если } n = 3k, \end{cases}$$

и ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ сходятся, то, на основании утверждения п.3.1, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \right) + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} \right) + \frac{1}{2^6} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^8} \right) + \frac{1}{2^9} - \dots = \\ &= \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3n}} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = -\frac{2}{7}. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

$$95. \sum_{n=0}^{\infty} x \left[\frac{n}{2} \right] y \left[\frac{n+1}{2} \right], \quad |xy| < 1.$$

◀ В силу сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n$, на основании утверждения п.3.1, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} x \left[\frac{n}{2} \right] y \left[\frac{n+1}{2} \right] &= 1 + y + xy + xy^2 + x^2y^2 + x^2y^3 + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n + y \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n = (1+y) \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n = \frac{1+y}{1-xy}. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

96. Показать, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1.$$

◀ Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ сходится, поэтому, согласно п.3.2, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n,$$

где

$$c_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1} = (-1)^n \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{(k-1)!(n-k)!}, \quad a_k = \frac{1}{(k-1)!}, \quad b_k = \frac{(-1)^k}{(k-1)!}.$$

Поскольку $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!}(1-1)^n = 0$, $n \in \mathbb{N}$, то

$$c_{n+1} = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

что и требовалось показать. ▶

97. Показать, что квадрат сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ является рядом расходящимся.

◀ Прежде всего заметим, что данный ряд сходится (условно) по признаку Лейбница. По правилу п.3.2, имеем

$$c_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} \cdot \frac{(-1)^{n-k+2}}{\sqrt{n-k+1}} \right) = (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}}.$$

Поскольку $\frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}} \geq \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $k = \overline{1, n}$, то

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}} \geq \frac{n}{n} = 1.$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, в силу необходимого признака, расходится. ▶

98. Проверить, что произведение двух расходящихся рядов

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2} \right)^n \quad \text{и} \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}} \right)$$

есть абсолютно сходящийся ряд.

◀ Легко установить (хотя бы с помощью признака Коши), что эти ряды расходятся. По правилу перемножения рядов имеем

$$c_n = a_1 b_n + b_1 a_n + \sum_{k=2}^{n-1} a_k b_{n-k+1},$$

где

$$a_1 = 1, a_n = -\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}, b_1 = 1, b_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \left(2^{n-1} + \frac{1}{2^n}\right), n = 2, 3, \dots$$

Следовательно,

$$c_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \left(2^{n-1} + \frac{1}{2^n}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 4 \cdot 3^{n-2} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{2^k} - \frac{3^{n-2}}{2^{2n-1}} \sum_{k=2}^{n-1} 2^k = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}.$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = 4. \blacktriangleright$$

Упражнения для самостоятельной работы

Используя правило Коши, перемножить следующие ряды и найти суммы произведений:

$$49. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}}. \quad 50. \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{n=1}^{\infty} y^n. \quad 51. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}. \quad 52. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

$$53. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{4}\right)^n \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}. \quad 54. \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

55. Доказать следующие свойства матричной экспоненты:

$$a) e^{x_1 A} e^{x_2 A} = e^{(x_1+x_2)A}; \quad b) (e^{xA})^{-1} = e^{-xA},$$

где A — любая числовая квадратная матрица, $x_1, x_2, x \in \mathbb{R}$.

56. Показать, что в общем случае

$$e^A e^B \neq e^{A+B},$$

где A, B — квадратные матрицы.

57. Показать:

а) $(e^A)^* = e^{A^*}$, где A^* — эрмитово сопряженная матрица;

б) если $A^T = -A$, то матрица e^A — ортогональная;

в) если $A^* = -A$, то матрица e^A — унитарная.

§ 4. Функциональные последовательности и ряды. Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей и рядов

4.1. Понятие равномерной сходимости последовательностей рядов.

Определение 1. Последовательность функций (f_n) , $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$, называется сходящейся поточечно к функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$, если при каждом фиксированном $x_0 \in X$ числовая последовательность $(f_n(x_0))$ сходится к числу $f(x_0)$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon, x_0)$ такое, что $\forall n > N$ справедливо неравенство

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Функция f называется предельной для последовательности (f_n) .

Определение 2. Последовательность функций (f_n) , $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$, называется равномерно сходящейся к функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ на множестве X , если $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$ такое, что $\forall n > N \wedge \forall x \in X$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

В этом случае пишут $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ на X .

Определение 3. Функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_k(x) + \dots \quad (1)$$

где $u_k : X_1 \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $X_1 \supset X$, называется сходящимся поточечно на множестве X к своей сумме $S(x)$, $x \in X$, если сходится поточечно последовательность его частичных сумм $(S_n(x))$, т.е. $\forall x_0 \in X \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = S(x_0)$.

Определение 4. Функциональный ряд (1) называется равномерно сходящимся к своей сумме $S(x)$ на множестве X , если последовательность частичных сумм $(S_n(x))$ этого ряда равномерно сходится на X к $S(x)$.

4.2. Критерий Коши.

Для равномерной сходимости ряда (1), п.4.1, на множестве X необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$ такое, что $\forall n > N \wedge \forall p \in \mathbb{N} \wedge \forall x \in X$ выполнялось неравенство

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon.$$

4.3. Важнейшие достаточные признаки равномерной сходимости рядов.

Мажорантный признак Вейерштрасса. Если $\exists a_k \in \mathbb{R}$ такие, что $\forall x \in X$ справедливы неравенства $|u_k(x)| \leq a_k$, $k \in \mathbb{N}$, и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то ряд (1), п.4.1, сходится равномерно на X .

Признак Дирихле. Если частичные суммы ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ равномерно ограничены на X , т.е. $\exists M > 0$ такое, что $\forall x \in X \wedge \forall n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|S_n(x)| = \left| \sum_{k=1}^n a_k(x) \right| \leq M$, а функциональная последовательность $(b_n(x))$ удовлетворяет двум условиям:

- $\forall x \in X : b_{n+1}(x) \leq b_n(x) \forall n > n_0$;
- $b_n(x) \Rightarrow 0$ на X при $n \rightarrow \infty$, то функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x) \quad (1)$$

сходится равномерно на X .

Признак Абеля. Ряд (1) сходится равномерно на X , если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ сходится равномерно на X , а функции b_k удовлетворяют двум условиям:

- $\exists M > 0$ такое, что $\forall x \in X \wedge \forall k \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|b_k(x)| \leq M$;
- $\forall x_0 \in X$ последовательность $(b_k(x_0))$ монотонна при $k > k_0$.

4.4. Непрерывность предельной функции и суммы ряда.

Если последовательность непрерывных функций (f_n) , $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$, сходится равномерно на X к функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$, то f непрерывна на X . Если все члены ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ непрерывны на X и ряд сходится равномерно на X к сумме $S(x)$, то функция S непрерывна на X .

4.5. Почленный предельный переход в рядах и функциональных последовательностях.

Если функциональный ряд (1), п.4.1, сходится равномерно в некоторой окрестности точки x_0 и если $\lim_{x \rightarrow x_0} u_k(x) = c_k, k \in \mathbb{N}$, то числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ сходится, причем

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k.$$

Если последовательность функций $(f_n), n \in \mathbb{N}$, равномерно сходится в окрестности точки x_0 и $\forall n \in \mathbb{N} \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = A_n$, то последовательность чисел $(A_n), n \in \mathbb{N}$, также сходится и

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right).$$

4.6. Предельный переход под знаком интеграла и почленное интегрирование ряда.

Если последовательность интегрируемых функций $(f_n), f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, сходится равномерно на $[a, b]$ к функции $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, то $\forall x_0 \in [a, b]$:

$$\int_{x_0}^x f_n(t) dt \Rightarrow \int_{x_0}^x f(t) dt \quad \forall x \in [a, b], n \rightarrow \infty.$$

Если ряд (1), п.4.1, члены которого интегрируемы на $[a, b]$, сходится равномерно на $[a, b]$, то справедливо равенство

$$\int_{x_0}^x S(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_0}^x u_k(t) dt,$$

т.е. ряд (1), п.4.1, можно почленно интегрировать на отрезке $[x_0, x] \subset [a, b]$.

4.7. Предельный переход под знаком производной и почленное дифференцирование ряда.

Если последовательность непрерывно дифференцируемых функций $(f_n), f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, сходится к функции $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, а последовательность $(f'_n), n \in \mathbb{N}$, сходится равномерно к функции $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, то функция f также дифференцируема на $[a, b]$ и $f'(x) = \varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$, т.е. допустим предельный переход под знаком производной.

Если ряд (1), п.4.1, с непрерывно дифференцируемыми членами сходится на $[a, b]$, а ряд производных

$$\sigma(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$$

сходится равномерно на $[a, b]$, то сумма ряда (1), п.4.1, дифференцируема на $[a, b]$, причем на этом отрезке выполняется равенство

$$S'(x) = \sigma(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x),$$

т.е. ряд (1), п.4.1, можно почленно дифференцировать.

Определить промежутки сходимости (абсолютной и условной) следующих функциональных рядов:

$$99. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p \sin nx}{1+n^q}, q > 0, 0 < x < \pi.$$

◀ Для сходимости ряда необходимо, чтобы $\frac{n^p}{1+n^q} = \frac{1}{n^{q-p}} \frac{1}{1+n^{-q}} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, т.е. чтобы $q > p$.

Абсолютная сходимость. Поскольку $|\sin nx| \geq \sin^2 nx = \frac{1 - \cos 2nx}{2}$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{1+n^q} |\sin nx| \geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{1+n^q} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{1+n^q} n^p$$

расходится при $0 < q - p \leq 1$. Действительно, первый ряд справа, в силу теоремы 4, п.1.5, расходится к $+\infty$, поскольку $\frac{n^p}{1+n^q} \sim \frac{1}{n^{q-p}}$ при $n \rightarrow \infty$, а второй ряд справа при $0 < q - p \leq 1$, по признаку Дирихле, сходится, ибо

$$\left| \sum_{n=1}^n \cos 2kx \right| = \left| \frac{\sin nx \cos(n+1)x}{\sin x} \right| \leq \frac{1}{|\sin x|}$$

и $\frac{n^p}{1+n^q} \downarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Кроме того, поскольку $|\sin nx| \leq 1$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{1+n^q} |\sin nx| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{1+n^q},$$

в силу теорем 1, 4, п.1.5, сходится, если $q - p > 1$ ($\frac{n^p}{1+n^q} \sim \frac{1}{n^{q-p}}$ при $n \rightarrow \infty$).

Таким образом, исследуемый ряд сходится абсолютно только при $q - p > 1$.

Условная сходимость. Представляя данный ряд в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{q-p}} \cdot \frac{1}{1+n^{-q}}$$

и пользуясь признаком Абеля, находим, что при $q - p > 0$ ряд сходится. Действительно, в этом случае последовательность $(\frac{1}{1+n^{-q}}) \uparrow 1$ при $n \rightarrow \infty$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{q-p}}$, в силу признака Дирихле, сходится. Следовательно, при $0 < q - p \leq 1$ исследуемый ряд сходится условно. ▶

$$100. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+y^n}, y \geq 0.$$

◀ Пусть $0 \leq y \leq 1$. Тогда ряд, по признаку Коши, сходится при $|x| < 1$.

Действительно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n+y^n}} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+y^n}} = |x| < 1.$$

Если $0 \leq y \leq 1$ и $x \geq 1$, то $\frac{x^n}{n+y^n} \geq \frac{x^n}{n+1} \geq \frac{1}{n+1}$. Следовательно, в силу теоремы 1, п.1.5, данный ряд расходится, ибо расходится гармонический ряд.

Если $0 \leq y \leq 1$ и $x < -1$, то общий член ряда к нулю не стремится, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^n}{n+y^n} = +\infty$.

Если $0 \leq y \leq 1$, $x = -1$, то получим ряд лейбница типа:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+y^n}.$$

Пусть $y > 1$. Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{y}\right)^n \cdot \frac{1}{1+ny^{-n}},$$

в силу признака Коши, абсолютно сходится, если $|x| < y$.

При $x = \pm y$ общий член исследуемого ряда к нулю не стремится, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y^n}{n+y^n} = 1$.

Итак, если $0 \leq y \leq 1$ и $|x| < 1$ или $|x| < y$ и $y > 1$, то ряд сходится абсолютно. Если же $x = -1$ и $0 \leq y \leq 1$, то данный ряд сходится лишь условно. ►

$$101. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+x^n)}{n^y}, \quad x \geq 0.$$

◀ Рассмотрим три случая: а) $0 \leq x < 1$; б) $x = 1$; в) $x > 1$. В случае а) имеем $\ln(1+x^n) \sim x^n$ при $n \rightarrow \infty$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^y}$, согласно признаку Коши, сходится при любом y , то, в силу теоремы 3, п.1.5, при таких же условиях сходится и исследуемый ряд.

В случае б) получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2}{n^y}$, который при $y > 1$ сходится по п.1.4.

Наконец, в случае в) имеем

$$\ln(1+x^n) = n \ln x + \ln \left(1 + \frac{1}{x^n}\right) \sim n \ln x + \frac{1}{x^n}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Поскольку ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln x}{n^{y-1}}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^y x^n}$ сходятся при $y > 2$, то данный ряд, по теореме 3, п.1.5 также сходится при $y > 2$. ►

102. Доказать, что если ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ сходится при $x = x_0$, то этот ряд сходится также при $x > x_0$.

◀ К ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}} \cdot \frac{1}{n^{x-x_0}}$$

применим признак Абеля. Здесь ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$ сходится по условию, $\left(\frac{1}{n^{x-x_0}}\right)$ — монотонная и ограниченная единицей последовательность $\forall x > x_0$.

Следовательно, по признаку Абеля, ряд сходится также при $x > x_0$. ►

103. Доказать, что для равномерной сходимости на множестве X последовательности (f_n) , $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$, к предельной функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_X r_n(x) \right) = 0,$$

где

$$r_n(x) = |f(x) - f_n(x)|.$$

◀ *Необходимость.* Пусть $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ на X , $n \rightarrow \infty$. По определению 2, п.4.1, это означает, что $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$ такое, что $\forall n > N \wedge \forall x \in X$ выполняется неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Отсюда следует, что $\sup_X r_n(x) \leq \varepsilon$.

Достаточность. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_X r_n(x) \right) = 0$. Тогда по определению предела числовой последовательности $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$ такое, что $\forall n > N$ будет $\sup_X r_n(x) < \varepsilon$. Но поскольку $r_n(x) \leq \sup_X r_n(x)$, то $r_n(x) < \varepsilon \forall x \in X$. Последнее, по определению 2, п.4.1, означает, что $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ на X при $n \rightarrow \infty$. ►

Исследовать на равномерную сходимость следующие функции:

$$104. f_n(x) = x^n - x^{n+1}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

◀ Очевидно, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ при $0 \leq x \leq 1$. Поскольку

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}\right) = \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

то по критерию, доказанному в примере 103, $f_n(x) \Rightarrow 0$. ▶

105. $f_n(x) = x^n - x^{2n}$, $0 \leq x \leq 1$.

◀ Имеем $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, $x \in [0, 1]$. Функция f_n достигает абсолютного максимума во внутренней точке сегмента: $x_n = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $x_n \in]0, 1[$. Таким образом, имеем

$$\sup_{x \in [0, 1]} r_n(x) = f_n(x_n) = \frac{1}{4}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in [0, 1]} r_n(x)\right) = \frac{1}{4} \neq 0.$$

Отсюда следует, что последовательность $(f_n(x))$ стремится к нулю неравномерно. ▶

106. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}$, $0 \leq x \leq 1$.

◀ Нетрудно видеть, что $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1+n+x} = x$ и справедлива оценка $\sup_{x \in [0, 1]} \left| \frac{nx}{1+n+x} - x \right| \leq$

$\frac{2}{n+1}$. Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)|\right) = 0, \quad f_n(x) \Rightarrow x. \quad \blacktriangleright$$

107. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$, $-\infty < x < +\infty$.

◀ При $n \rightarrow \infty$ $f_n(x) \rightarrow |x|$ на интервале $] -\infty, +\infty[$, причем

$$\sup_{x \in]-\infty, +\infty[} \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x| \right| = \sup_{x \in]-\infty, +\infty[} \frac{1}{n^2 \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x| \right)} = \frac{1}{n},$$

поэтому $f_n(x) \Rightarrow |x|$ на всей числовой прямой. ▶

108. $f_n(x) = n \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right)$, $0 < x < +\infty$.

◀ Очевидно

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad 0 < x < +\infty.$$

Поскольку

$$\sup_{0 < x < +\infty} \left| \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} \right| = \sup_{0 < x < +\infty} \frac{1}{2n\sqrt{x} \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x} \right)^2} = +\infty,$$

то, по утверждению примера 103, последовательность сходится неравномерно. ▶

109. а) $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$, $-\infty < x < +\infty$;

б) $f_n(x) = \sin \frac{x}{n}$, $-\infty < x < +\infty$.

◀ Имеем:

а) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin nx}{n} = 0$;

б) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{x}{n} = 0$.

Поскольку в случае а)

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} f_n(x) = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

а в случае б)

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} \left| \sin \frac{x}{n} \right| = 1$$

(достигается при $x = \frac{\pi n}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$), то, в силу примера 103, заключаем, что в случае а) $f_n(x) \rightarrow 0$, а в случае б) последовательность сходится неравномерно. ►

110. а) $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$, $0 < x < +\infty$; б) $f_n(x) = x \operatorname{arctg} nx$, $0 < x < +\infty$.

◀ а) Имеем $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} nx = \frac{\pi}{2}$. Поскольку

$$\sup_{0 < x < +\infty} \left| \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} nx \right| = \lim_{x \rightarrow +0} \left| \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} nx \right| = \frac{\pi}{2},$$

то последовательность, согласно примеру 103, сходится неравномерно.

б) Здесь $f(x) = \frac{\pi x}{2}$, $r_n(x) = x \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} nx \right)$. Используя равенство $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} nx = \operatorname{arctg} \frac{1}{nx}$, $x > 0$ и неравенство $\operatorname{arctg} \alpha < \alpha$, $\alpha > 0$, имеем оценку

$$\left| x \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} nx \right) \right| = \left| x \operatorname{arctg} \frac{1}{nx} \right| < x \frac{1}{nx} = \frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

независимо от $x \in]0, +\infty[$. Следовательно, по определению 2, п.4.1 $f_n(x) \rightarrow \frac{\pi x}{2}$. ►

111. $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$: а) на конечном интервале $]a, b[$; б) на интервале $] -\infty, +\infty[$.

◀ В обоих случаях легко находим предельную функцию $f: x \mapsto e^x$. Далее, в случае а) представляем последовательность в виде

$$f_n(x) = \exp \left(n \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \right). \quad (1)$$

Здесь $n > N$, где N выбирается из очевидного условия $1 + \frac{x}{N} > 0$ при $x \in]a, b[$. Применяя к функции $x \mapsto \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right)$, формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, из (1) получаем

$$f_n(x) = \exp \left(x - \frac{x^2 \xi_n^2}{2n} \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку

$$e^x \left(1 - \exp \left\{ -\frac{x^2 \xi_n^2}{2n} \right\} \right) < e^b \left(1 - \exp \left\{ -\frac{M^2}{2n} \left(1 - \frac{M}{n} \right)^{-2} \right\} \right),$$

где $M = \max(|a|, |b|)$, стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ независимо от $x \in]a, b[$, то по определению 2, п.4.1, $f_n(x) \rightarrow e^x$ на $]a, b[$.

В случае б) получаем

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| e^x - \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \right| = +\infty,$$

поэтому $\sup_{-\infty < x < +\infty} r_n(x) = +\infty$. Таким образом, последовательность $(f_n(x))$ на всей числовой прямой сходится неравномерно. ►

112. $f_n(x) = n \left(x^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$, $1 \leq x \leq a$.

◀ Легко найти, что $f_n(x) \rightarrow \ln x$ на $[1, a]$ при $n \rightarrow \infty$. Далее, применяя формулу Тейлора, находим

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \left| n \left(x^{\frac{1}{n}} - 1 \right) - \ln x \right| = \left| n \left(e^{\frac{1}{n} \ln x} - 1 \right) - \ln x \right| = \\ &= \left| n \left(1 + \frac{1}{n} \ln x - \frac{\ln^2 x}{2n^2} e^{\xi_n} - 1 \right) - \ln x \right| = \frac{\ln^2 x}{2n} e^{\xi_n} < \frac{\ln^2 a}{2n} e^{\xi_n} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$, $0 < \xi_n < \frac{\ln a}{n}$. Следовательно, $f_n(x) \Rightarrow \ln x$ на $[1, a]$. ►

113.

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ n^2 \left(\frac{2}{n} - x\right), & \text{если } \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n}, \\ 0, & \text{если } x \geq \frac{2}{n}, \end{cases}$$

на $[0, 1]$.

◀ Поскольку $f_n(0) = 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 0$. Далее, $\forall x \in]0, 1[\exists N : \forall n > N$ будет $x > \frac{2}{n}$. Следовательно, $f_n(x) = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ при $x \in [0, 1]$. Таким образом, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ при $x \in [0, 1]$.

Поскольку $\sup_{x \in [0, 1]} f_n(x) = n$ (и достигается при $x = \frac{1}{n}$), то $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sup f_n(x)) = +\infty$, в силу чего последовательность сходится неравномерно. ►

114. Пусть f — произвольная функция, определенная на отрезке $[a, b]$ и $f_n(x) = \frac{[nf(x)]}{n}$. Доказать, что $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ при $a \leq x \leq b$, $n \rightarrow \infty$.

◀ Из определения целой части следует, что $[nf(x)] = nf(x) - p_n(x)$, $0 \leq p_n(x) < 1$. Поэтому $f_n(x)$ можно представить в виде $f_n(x) = f(x) - \frac{p_n(x)}{n}$. Отсюда находим $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, а также $|f_n(x) - f(x)| = \frac{p_n(x)}{n} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$, т.е. $f_n(x) \Rightarrow f(x)$. ►

Исследовать на равномерную сходимость следующие ряды:

115. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ на отрезке $[-1, 1]$.

◀ Оценивая остаток ряда следующим образом:

$$|S(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

где $S(x)$, $(S_n(x))$ — соответственно сумма и последовательность частичных сумм данного ряда, сходящегося в силу признака сравнения $\left(\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty \right)$, заключаем, что рассматриваемый ряд сходится равномерно. ►

116. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ на интервале $]0, +\infty[$.

◀ Поскольку сумма этого ряда $S(x) = e^x$, то остаток ряда $r_n(x) = e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$. Но $\sup_{0 < x < +\infty} |r_n(x)| = +\infty$ (функция $x \mapsto e^x$ стремится к $+\infty$ при $x \rightarrow +\infty$ быстрее любой степенной функции $x \mapsto x^n$), поэтому ряд сходится неравномерно. ►

117. $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n$ на отрезке $[0, 1]$.

◀ Частичная сумма ряда $S_n(x) = \sum_{k=0}^n (1-x)x^k = 1 - x^{n+1}$, $0 \leq x \leq 1$; отсюда находим сумму ряда:

$$S(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{если } x = 1. \end{cases}$$

Следовательно, $\sup_{0 \leq x \leq 1} |S_n(x) - S(x)| = 1$, т.е. данный ряд сходится неравномерно. ►

Замечание. Если функциональный ряд непрерывных на отрезке функций сходится на этом отрезке к разрывной функции, то ряд сходится неравномерно.

$$118. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)}, \quad 0 < x < +\infty.$$

◀ Находим частичную сумму ряда:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x}{((k-1)x+1)(kx+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{(k-1)x+1} - \frac{1}{kx+1} \right) = 1 - \frac{1}{nx+1},$$

откуда получаем, что $S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 1$, $0 < x < +\infty$. Далее, поскольку $\sup_{0 < x < +\infty} \frac{1}{nx+1} = 1$, то ряд сходится неравномерно. ▶

$$119. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x) \dots (1+nx)}: \text{ а) } 0 \leq x \leq \epsilon, \text{ где } \epsilon > 0; \text{ б) } \epsilon \leq x < +\infty.$$

◀ Представляя общий член ряда $a_n(x)$ в виде

$$a_n(x) = \frac{1}{(1+x)(1+2x) \dots (1+(n-1)x)} - \frac{1}{(1+x)(1+2x) \dots (1+(n-1)x)(1+nx)},$$

находим частичную сумму ряда:

$$S_n(x) = 1 - \frac{1}{(1+x)(1+2x) \dots (1+nx)}.$$

Отсюда следует, что

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Далее, в случае а) имеем $\sup_{0 \leq x < +\infty} |S(x) - S_n(x)| = |S(+0) - S_n(+0)| = 1$, поэтому ряд сходится неравномерно. В случае б) находим

$$\sup_{\epsilon \leq x < +\infty} |S(x) - S_n(x)| = \frac{1}{(1+\epsilon)(1+2\epsilon) \dots (1+n\epsilon)} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, в силу чего ряд сходится равномерно. ▶

Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость в указанных промежутках следующих функциональных рядов:

$$120. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^3x^2}, \quad |x| < +\infty.$$

◀ Найдем $\sup_{|x| < +\infty} |a_n(x)|$, где $a_n(x)$ — общий член ряда. Имеем

$$\sup_{|x| < +\infty} |a_n(x)| = \sup_{|x| < +\infty} \left| \frac{nx}{1+n^3x^2} \right| = \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$$

и достигается при $x_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ является мажорантным для данного ряда. Так как мажорантный ряд сходится, то исходный ряд, согласно признаку Вейерштрасса, сходится равномерно. ▶

$$121. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}} (x^n + x^{-n}), \quad \frac{1}{2} \leq |x| \leq 2.$$

◀ Легко найти, что

$$\sup_{\frac{1}{2} \leq |x| \leq 2} (x^n + x^{-n}) = 2^n + \frac{1}{2^n} < 2^{n+1}.$$

Поскольку, к тому же, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}} 2^{n+1}$, в силу признака д'Аламбера, сходится, то исследуемый ряд сходится равномерно. ▶

$$122. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!}, \quad |x| < a, \text{ где } a > 0.$$

◀ Мажорантным для данного ряда является ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!}$, сходимость которого при $a < 1$ очевидна, так как в этом случае

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!} < \sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{a}{1-a}.$$

Пусть $a \geq 1$. Тогда, обозначая через S_n последовательность частичных сумм мажорантного ряда, в силу оценки

$$S_n < S_{2n+1} = \frac{a}{0!} + \frac{a^2}{1!} + \frac{a^3}{1!} + \dots + \frac{a^{2n}}{n!} + \frac{a^{2n+1}}{n!} \leq a + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{2k+1}}{k!} = S;$$

получим $S_n \leq S$. Следовательно, последовательность (S_n) , будучи монотонной возрастающей, ограничена сверху. А тогда, по известной теореме, она сходится, т.е. сходится мажорантный ряд. ▶

$$123. \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n} \right), \quad |x| < a.$$

◀ Исходя из неравенства

$$0 \leq \ln \left(1 + \frac{x^2}{n \ln n} \right) \leq \frac{x^2}{n \ln^2 n} < \frac{a^2}{n \ln^2 n}$$

и сходимости числового ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a^2}{n \ln^2 n}$, мажорантного для данного функционального, приходим к выводу о равномерной сходимости предложенного ряда. ▶

Исследовать на равномерную сходимость в указанных промежутках следующие функциональные ряды:

$$124. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}: \text{ а) на отрезке } \varepsilon \leq x \leq 2\pi - \varepsilon, \text{ где } \varepsilon > 0; \text{ б) на отрезке } 0 \leq x \leq 2\pi.$$

◀ а) Поскольку частичные суммы $\sum_{k=1}^n \sin kx$ ограничены:

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin kx \right| = \left| \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \leq \frac{1}{\sin \frac{\varepsilon}{2}},$$

а последовательность $\left(\frac{1}{n}\right) \downarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то, по признаку Дирихле, ряд сходится равномерно.

б) В этом случае указанная сумма не является ограниченной по совокупности переменных x и n , поскольку при $x = \frac{\pi}{n}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n} = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n} \rightarrow +\infty \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Следовательно, признак Дирихле неприменим.

Вспользуемся критерием Коши. Взяв $\varepsilon = 0,1$, оценим разность

$$\begin{aligned} |S_{2n}(x) - S_n(x)| \Big|_{x=\frac{1}{n}} &= \left| \frac{\sin(n+1)x}{n+1} + \frac{\sin(n+2)x}{n+2} + \dots + \frac{\sin 2nx}{2n} \right| \Big|_{x=\frac{1}{n}} = \\ &= \frac{\sin \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n+1} + \frac{\sin \left(1 + \frac{2}{n}\right)}{n+2} + \dots + \frac{\sin 2}{2n} \geq \frac{\sin 1}{2} > \varepsilon \end{aligned}$$

при любом n . Следовательно, по критерию Коши, последовательность сходится неравномерно, т.е. неравномерно сходится исследуемый ряд (сходимость ряда при каждом фиксированном $x \in]0, 2\pi[$ следует из того же признака Дирихле, а при $x = 0$ и $x = 2\pi$ сходимость ряда очевидна).

$$125. \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x}, \quad 0 < x < +\infty.$$

◀ При каждом фиксированном $x > 0$ имеем $2^n \sin \frac{1}{3^n x} \sim \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{x}$ при $n \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что по теореме 3, п.1.5, данный ряд сходится. Для исследования на равномерную сходимость ряда применим критерий Коши. Пусть $\varepsilon = 1$, $p = n$, $x = \frac{1}{3^n}$. Тогда

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = \left| 2^{n+1} \sin \frac{1}{3} + 2^{n+2} \sin \frac{1}{3^2} + \dots + 2^{2n} \sin \frac{1}{3^n} \right| > 2^{n+1} \sin \frac{1}{3} > \varepsilon, \quad n > 1,$$

т.е. ряд сходится неравномерно. ▶

$$126. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}}, \quad 0 \leq x < +\infty.$$

◀ Поскольку частичные суммы, в силу оценки

$$\left| \sum_{n=1}^n \sin x \sin kx \right| = 2 \left| \cos \frac{x}{2} \right| \left| \sin \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2} x \right| \leq 2,$$

ограничены, а функциональная последовательность $\left((n+x)^{-\frac{1}{2}} \right)$ равномерно по x $\left(\frac{1}{\sqrt{n+x}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0 \right)$ и монотонно по n

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n+x}} - \frac{1}{\sqrt{n+1+x}} = \frac{1}{\sqrt{(n+x)(n+1+x)(\sqrt{n+1+x} + \sqrt{n+x})}} > 0 \right)$$

стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, то, согласно признаку Дирихле, ряд сходится равномерно. ▶

$$127. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}}, \quad 0 \leq x < +\infty.$$

◀ Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ сходится (см. пример 77), а функции $x \mapsto \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}$ ограничены числом 1 и при каждом фиксированном $x \geq 0$ образуют монотонную последовательность. Следовательно, по признаку Абеля, данный ряд сходится равномерно. ▶

128. Доказать, что абсолютно и равномерно сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $0 \leq x \leq 1$, где

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x \leq 2^{-(n+1)}, \\ \frac{1}{n} \sin^2(2^{n+1} \pi x), & \text{если } 2^{-(n+1)} < x < 2^{-n}, \\ 0, & \text{если } 2^{-n} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

нельзя мажорировать сходящимся числовым рядом с неотрицательными членами.

◀ Нетрудно найти, что

$$S_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{k} \sin^2(2^{k+1} \pi x), & \text{если } 2^{-(k+1)} \leq x \leq 2^{-k}, \quad k = \overline{1, n}, \\ 0, & \text{если } 0 \leq x \leq 2^{-(n+1)}, \end{cases}$$

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{k} \sin^2(2^{k+1} \pi x), & \text{если } 2^{-(k+1)} \leq x \leq 2^{-k}, \quad k = \overline{1, \infty}, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

где $(S_n(x))$ и $S(x)$ — последовательность частичных сумм и сумма данного ряда соответственно. Далее,

$$S(x) - S_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{k} \sin^2(2^{k+1}\pi x), & \text{если } 2^{-(k+1)} \leq x \leq 2^{-k}, k = \overline{n+1, \infty}, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Поскольку $\sup_{0 \leq x \leq 1} |S(x) - S_n(x)| = \frac{1}{n+1}$ (достигается при $x_n = \frac{3}{2^{n+3}}$) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, то ряд сходится равномерно.

Абсолютная сходимость ряда следует из того, что при фиксированном $x \in [0, 1]$ он содержит не более одного отличного от нуля члена.

Пусть c_n — члены числового мажорирующего ряда. По условию, $c_n \geq \sup_{0 \leq x \leq 1} |f_n(x)|$.

Поскольку $\sup_{0 \leq x \leq 1} |f_n(x)| = \frac{1}{n}$ и достигается при $x = \frac{3}{2^{n+2}}$, то $c_n \geq \frac{1}{n}$. Однако ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, поэтому исходный ряд нельзя мажорировать сходящимся числовым рядом с неотрицательными членами. \blacktriangle

129. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$, члены которого — монотонные функции на сегменте $[a, b]$, сходится абсолютно в конечных точках этого сегмента, то данный ряд сходится абсолютно и равномерно на сегменте $[a, b]$.

◀ Принимая во внимание монотонность функций φ_n , оценим остаток ряда $r_n(x)$. При $x \in [a, b]$ имеем

$$|r_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |\varphi_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \max(|\varphi_k(a)|, |\varphi_k(b)|). \quad (1)$$

Поскольку ряд с членами $\varphi_n(x)$ сходится абсолютно при $x = a$ и $x = b$, то $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$ такое, что $\forall n > N$ выполняются неравенства

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |\varphi_k(a)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} |\varphi_k(b)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2)$$

Так как $\max(|\varphi_k(a)|, |\varphi_k(b)|) \leq |\varphi_k(a)| + |\varphi_k(b)|$, то на основании неравенств (2), неравенство (1) принимает вид

$$|r_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} (|\varphi_k(a)| + |\varphi_k(b)|) < \varepsilon,$$

откуда следует, что $r_n(x) \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$, т.е. исследуемый ряд сходится равномерно.

Абсолютная сходимость ряда вытекает из оценки (1). \blacktriangleright

130. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ сходится равномерно при $x \geq 0$.

◀ Функции $x \mapsto \frac{1}{n^x}$ ограничены единицей и при каждом $x \geq 0$ образуют монотонную последовательность $\left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \geq 0\right)$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится по условию; поэтому, по признаку

Абеля, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ сходится равномерно при $x \geq 0$. \blacktriangleright

131. Показать, что функция $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ непрерывна и имеет непрерывную производную в области $-\infty < x < +\infty$.

◀ Функции $x \mapsto \sin nx$, $x \mapsto \cos nx$ непрерывны в указанной области. Кроме того, ряды

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2},$$

в силу признака Вейерштрасса, сходятся равномерно. Поэтому, во-первых, почленное дифференцирование данного ряда, согласно п.4.7, возможно; во-вторых, согласно п.4.4, функции f и f' непрерывны. ▶

132. Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (nxe^{-nx} - (n-1)xe^{-(n-1)x})$ сходится неравномерно на $[0, 1]$,

однако его сумма есть значение функции, непрерывной на этом отрезке.

◀ Имеем

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n (kxe^{-kx} - (k-1)xe^{-(k-1)x}) = nxe^{-nx}, \quad S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 0, \quad x \in [0, 1].$$

Таким образом, S — непрерывная на $[0, 1]$ функция. Однако, $\sup_{x \in [0, 1]} |S_n(x) - S(x)| = \frac{1}{e}$, поэтому ряд сходится к своей сумме неравномерно. ▶

133. Определить области существования функции f и исследовать ее на непрерывность, если: а) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^n$; б) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x + n(-1)^n}{x^2 + n^2}$.

◀ а) По признаку Коши, ряд сходится, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \left|x + \frac{1}{n}\right| < 1$, т.е. при $|x| < 1$ (и расходится при $x \geq 1$, так как в этом случае общий член ряда не стремится к нулю). Функция f , таким образом, определена при $|x| < 1$. При $|x| \leq r < 1$ функциональный ряд сходится равномерно, поскольку сходится мажорантный для него ряд с членами $\left(r + \frac{1}{n}\right)^n$. Поэтому, на основании п.4.4, можно утверждать, что функция f непрерывна при $|x| \leq r < 1$, т.е. непрерывна на интервале $] -1, 1[$.

б) Функция $f_n : x \mapsto \frac{x + n(-1)^n}{x^2 + n^2}$ непрерывна при $-\infty < x < +\infty$, а ряд с членами $f_n(x)$ равномерно сходится на всей числовой прямой. В самом деле, представив функции f_n в виде

$$f_n : x \mapsto \frac{n^2}{x^2 + n^2} \left(\frac{x}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n} \right),$$

замечаем, что функции $\varphi_n : x \mapsto \frac{n^2}{x^2 + n^2}$ ограничены в совокупности ($\varphi_n(x) \leq 1$) и при каждом x образуют монотонную последовательность по n , а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n} \right)$ сходится равномерно на каждом интервале $] -L, L[$, в силу чего ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, по признаку Абеля, сходится равномерно на $] -L, L[$. Поэтому сумма ряда является непрерывной функцией на $] -L, L[$. В силу произвольности числа L , утверждаем, что сумма ряда непрерывна на всей числовой прямой. ▶

134. Доказать, что дзета-функция Римана

$$\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

непрерывна в области $x > 1$ и имеет в этой области непрерывные производные всех порядков.

◀ Пусть $x \geq x_0 > 1$. Тогда, в силу сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^p n}{n^{x_0}}, \quad p \in \mathbb{Z}_0, \quad (1)$$

и признака Вейерштрасса, заключаем, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^p n}{n^x} \ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^p n}{n^{x_0}}$$

сходится равномерно при $x \geq x_0 > 1$. Так как, кроме того, функции $x \mapsto n^{-x}$ непрерывны в указанной области, то, согласно п.4.4, функции

$$x \mapsto \zeta^{(p)}(x) = (-1)^p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^p n}{n^x}$$

также непрерывны при $x \geq x_0 > 1$, т.е. при $x > 1$.

Сходимость ряда (1) вытекает из признаков сравнения п.1.5 и оценки $\ln^p n \ll n^{\frac{x_0-1}{2}}$, $x_0 > 1$, справедливой при достаточно большом n . ►

135. Доказать, что зэта-функция

$$\theta : x \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$$

определена и бесконечно дифференцируема при $x > 0$.

◀ Сходимость данного ряда вытекает из сходимости ряда с общим членом $e^{-\pi|n|^2 x}$ и признака сравнения п.1.5 ($e^{-\pi n^2 x} \ll e^{-\pi|n|^2 x}$), т.е. функция θ определена при $x > 0$.

Далее, рассмотрим ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^{2p} e^{-\pi n^2 x_0}, \quad p \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

где $x \geq x_0 > 0$, являющийся мажорирующим по отношению к ряду

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^{2p} e^{-\pi n^2 x}. \quad (2)$$

Поскольку ряд (1), по признаку Коши, сходится, то, по признаку Вейерштрасса, ряд (2) сходится равномерно. Следовательно, согласно п.4.7, функция θ любое число раз дифференцируема при $x \geq x_0 > 0$. В силу произвольности числа x_0 , сделанное заключение пригодно при $x > 0$. ►

136. Определить область существования функции f и исследовать ее на дифференцируемость, если:

$$а) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}; \quad б) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2+x^2}.$$

◀ Функциональная последовательность $\left(\frac{x}{n+x}\right)$ при $x \neq -n$ монотонно по n стремится к нулю. Следовательно, по признаку Лейбница, ряд сходится, т.е. функция f существует при всех $x \neq -n$.

Поскольку функции $x \mapsto \left(\frac{x}{n+x}\right)'_x = \frac{n}{(n+x)^2}$ непрерывны при $x \neq -n$ и ряд

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{(n+x)^2},$$

в силу признака Дирихле, сходится равномерно на каждом замкнутом множестве числовой прямой, не содержащем точек $x = -1, -2, \dots$, то почленное дифференцирование ряда а) при $x \neq -n$, $n \in \mathbb{N}$, возможно.

б) Ряд сходится равномерно, по признаку Вейерштрасса, при всех конечных x . Действительно, здесь $\frac{|x|}{n^2+x^2} \leq \frac{A}{n^2}$, $A = \text{const}$, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится. Следовательно, функция f существует при всех $x \in]-\infty, +\infty[$.

Далее, выполняя формальное дифференцирование ряда, получаем

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \operatorname{sgn} x - x|x|}{(n^2+x^2)^2}, \quad x \neq 0. \quad (1)$$

Поскольку $\varphi_n(x) = \frac{n^2 \operatorname{sgn} x - x|x|}{(n^2+x^2)^2} \leq \frac{n^2+A^2}{n^4} \leq \frac{2n^2}{n^4} = \frac{2}{n^2}$ при $n \geq n_0$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ сходится, то, по признаку Вейерштрасса, ряд (1) сходится равномерно при $|x| < A$. А тогда, принимая во внимание непрерывность функций φ_n при $x \neq 0$ и учитывая п.4.7, заключаем, что почленное дифференцирование ряда б) справедливо.

Для исследования на дифференцируемость ряда б) в точке $x = 0$ рассмотрим

$$\lim_{\Delta x \rightarrow \pm 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow \pm 0} \left(\frac{|\Delta x|}{\Delta x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + (\Delta x)^2} \right). \quad (2)$$

Здесь ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + (\Delta x)^2}$ сходится равномерно по признаку Вейерштрасса. Поэтому, согласно п.4.5,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + (\Delta x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty. \quad (3)$$

Тогда, как следует из (2), с учетом (3) можно написать $f'_+(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $f'_-(0) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Таким образом, функция f в точке $x = 0$ не дифференцируема. ►

137. При каких значениях параметра α : а) последовательность

$$(f_n(x)), \quad f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}, \quad x \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

сходится на отрезке $[0, 1]$; б) последовательность (1) сходится равномерно на $[0, 1]$; в) возможен предельный переход под знаком интеграла:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx?$$

◀ а) Если $x > 0$, то, используя правило Лопиталля, легко проверить, что $\lim_{y \rightarrow +\infty} y^\alpha x e^{-xy} = 0$ при любом α . При $x = 0$ имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 0$. Поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ при всех $x \in [0, 1]$.

б) Поскольку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in [0, 1]} n^\alpha x e^{-nx} \right) = \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha-1} = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha < 1, \\ \frac{1}{e}, & \text{если } \alpha = 1, \\ +\infty, & \text{если } \alpha > 1, \end{cases}$$

то, на основании утверждения примера 103, данная последовательность сходится равномерно только при $\alpha < 1$.

в) Поскольку $\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = 0$, а $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{n^2} - e^{-n} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \right) \right) n^\alpha \right)$ равен нулю лишь при $\alpha < 2$, то предельный переход под знаком интеграла возможен только при $\alpha < 2$. ►

138. Показать, что последовательность $(f_n(x))$, $f_n(x) = nx(1-x)^n$, $n \in \mathbb{N}$, сходится неравномерно на сегменте $[0, 1]$, однако

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

◀ Очевидно, предельная функция равна нулю на $[0, 1]$. Далее,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in [0, 1]} (nx(1-x)^n) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} = \frac{1}{e} \neq 0,$$

поэтому последовательность $(f_n(x))$ сходится неравномерно. В то же время

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 x(1-x)^n dx = \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 (1-u)u^n du = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)} = 0. \blacktriangleright$$

Найти:

$$139. \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{x^n}{x^n + 1}.$$

◀ Данный ряд, согласно признаку Абеля, сходится равномерно в области $x \geq 0$. Кроме того, $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{x^n}{x^n + 1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$, поэтому, согласно п.4.5, возможен предельный переход под знаком суммы:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{x^n}{x^n + 1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{1}{2} \ln 2. \blacktriangleright$$

$$140. \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1}).$$

◀ Поскольку данный ряд сходится неравномерно на $[0, 1]$, то мы не имеем права перейти к пределу под знаком суммы. Поэтому найдем этот предел, предварительно вычислив сумму данного ряда. Имеем

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} (1-x)x^n = \lim_{x \rightarrow 1-0} (\lim_{n \rightarrow \infty} (1-x^n)) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ если } 0 \leq x < 1, \\ 0, \text{ если } x = 1 \end{array} \right\} = 1. \blacktriangleright$$

$$141. \lim_{x \rightarrow +0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}.$$

◀ Данный ряд, в силу признака Вейерштрасса, сходится равномерно при $x \geq 0$. Поэтому, согласно п.4.5, имеем

$$\lim_{x \rightarrow +0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{2^n n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1. \blacktriangleright$$

$$142. \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^2 x^2}.$$

◀ Поскольку $\sup_{-\infty < x < +\infty} \frac{x^2}{1+n^2 x^2} = \frac{1}{n^2}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, то, по признаку Вейерштрасса,

данный ряд сходится равномерно. Замечая еще, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1+n^2 x^2} = \frac{1}{n^2}$, на основании п.4.5 переходим к пределу под знаком суммы:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^2 x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \blacktriangleright$$

143. Возможно ли почленное дифференцирование ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}$?

◀ Функции $x \mapsto \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$, непрерывно дифференцируемы при $|x| < \infty$. На этом же интервале функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}$, как следует из теоремы 3, п.1.5 ($\operatorname{arctg} \frac{x}{n^2} \sim \frac{x}{n^2}$ при $n \rightarrow \infty$), сходится. Кроме того, ряд производных $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+x^2}$, в силу признака Вейерштрасса, сходится равномерно при $|x| < \infty$. Следовательно, согласно п.4.7, почленное дифференцирование ряда возможно. ▶

144. Возможно ли почленное интегрирование ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}} \right)$ на сегменте $[0, 1]$?

◀ Данный функциональный ряд сходится на $[0, 1]$ неравномерно. Действительно, для частичной суммы $S_n(x)$ и суммы $S(x)$ ряда имеем

$$S_n(x) = -x + x^{\frac{1}{2n+1}}, \quad S(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ 1 - x, & \text{если } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Видим, что сумма ряда — разрывная функция, поэтому ряд не может сходиться равномерно. Следовательно, воспользоваться утверждением п.4.6 мы не имеем права. Тем не менее, поскольку

$$\int_0^1 S(x) dx = \frac{1}{2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}} \right) dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2},$$

то почленное интегрирование ряда возможно. ▶

Упражнения для самостоятельной работы

Исследовать на равномерную сходимость следующие функциональные семейства:

58. а) $f_y(x) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ при $y \rightarrow +\infty$, $x \in]0, +\infty[$;

б) $f_y(x) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ при $y \rightarrow +0$, $x \in]0, +\infty[$;

в) $f_y(x) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ при $y \rightarrow +0$, $x \in]1, +A[$;

г) $f_y(x) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ при $y \rightarrow +0$, $x \in]1, +\infty[$.

59. $f_y(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2y}$, $x \in]0, 1[$: а) при $y \rightarrow 1$; б) при $y \rightarrow 2$.

60. $f_y(x) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}}$, $x \in]1, +\infty[$: а) при $y \rightarrow +\infty$; б) при $y \rightarrow +0$.

61. $f_y(x) = \frac{1}{x}(e^{xy} - 1)$, $x \in]0, +\infty[$: а) при $y \rightarrow +0$; б) при $y \rightarrow -0$; в) при $y \rightarrow -\infty$; г) при $y \rightarrow 1$.

62. $f_y(x) = \frac{y \operatorname{arctg}(xy)}{y+1}$, $x \in]1, +\infty[$: а) при $y \rightarrow +0$; б) при $y \rightarrow +\infty$.

63. $f_y(x) = y \ln(x^2 + y^2)$, $x \in]0, 1[$: а) при $y \rightarrow 0$; б) при $y \rightarrow 1$.

Исследовать на равномерную сходимость функциональные последовательности:

64. $f_n(x) = e^{-nx}$: а) $x \in]0, 1[$; б) $x \in]1, +\infty[$. 65. $f_n(x) = \frac{n^2 x^2}{1+n^2 x^2}$: а) $x \in]0, 1[$; б) $x \in]1, +\infty[$.

66. $f_n(x) = \frac{\ln(nx)}{\sqrt{nx}}$: а) $x \in]0, 1[$; б) $x \in]1, +\infty[$. 67. $f_n(x) = \left(1 + \frac{1}{nx}\right)^{nx}$, $0 < x < 1$.

68. $f_n(x) = \int_0^1 \sin\left(\frac{xy^2}{n}\right) dy$: а) $x \in]0, 1[$; б) $x \in]0, +\infty[$.

69. $f_n(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 \cos(xy)}{y^2+n^2} dy$: а) $x \in]0, 1[$; б) $x \in]1, +\infty[$.

70. $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \operatorname{arctg} \frac{k^2 x}{n^3}$, $x \in]0, +\infty[$. 71. $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k^2}{x n^2} \right)$, $x \in]0, 1[$.

Предварительно определив область сходимости функционального ряда, исследовать его на равномерную сходимость:

72. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$. 73. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$. 74. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{\sqrt{n+x^2}}$.

75. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(2n+1)x}{2n+1}$. 76. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$. 77. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{nx} e^{-\sqrt{nx}}$.

78. Может ли функциональный ряд разрывных функций, сходящийся неравномерно на интервале $]a, b[$, представлять на этом интервале непрерывную функцию? Привести примеры.

79. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. Доказать, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-n^2 x}$ равномерно сходится при $x \geq \varepsilon > 0$.

Обосновать возможность почленного дифференцирования рядов в указанных областях:

80. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n(n+1)}$, $0 < x < 2\pi$. 81. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1+nx^{2n}}$, $|x| \neq 1$. 82. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$, $|x| < 1$.

83. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\sqrt{nx})}{n^2 + \cos(\sqrt{nx})}$, $0 < x < 2\pi$. 84. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\varepsilon/2}}$, $x > \frac{1}{\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$.

85. Можно ли утверждать, что:

а) если функция f непрерывна на каждом отрезке $[\alpha, \beta] \subset]a, b[$, то она непрерывна на интервале $]a, b[$;

б) если последовательность $(f_n(x))$ равномерно сходится на каждом отрезке $[\alpha, \beta] \subset]a, b[$, то она равномерно сходится на интервале $]a, b[$;

в) если последовательность (f_n) , $f_n \in C[\alpha, \beta]$, $n \in \mathbb{N}$, равномерно сходится на каждом отрезке $[\alpha, \beta] \subset]a, b[$ к функции f , то на интервале $]a, b[$ предельная функция непременно непрерывна?

Найти:

86. $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-e^{-nx})}{x^2+n^3} \cos nx$. 87. $\lim_{x \rightarrow +0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n \ln(1-e^{-x})}$. 88. $\lim_{y \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{\arcsin \left(\frac{ny}{ny+1} \right)}{1+n^4 x^2 + y} dx$.

89. $\lim_{y \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n \cos ny}{y+n} \frac{\sin y}{y} \right)$. 90. $\lim_{y \rightarrow 1+0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \left(\frac{\sqrt{x}(y-1)}{n} \right)}{\cos \frac{\pi y}{2} \ln \left(1 + \frac{x(y-1)}{n} \right)} dx$.

91. Последовательность функций (f_n) , $f_n \in R[a, b]$, $n \in \mathbb{N}$, называется сходящейся в среднем к функции $f \in R[a, b]$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx = 0.$$

Показать, что из равномерной сходимости последовательности интегрируемых функций вытекает сходимость в среднем.

92. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, $a_n \in R[a, b]$, называется сходящимся в среднем к функции S на $[a, b]$, если последовательность его частичных сумм $(S_n(x))$, $n \in \mathbb{N}$, сходится в среднем к S на $[a, b]$. Доказать, что если функциональный ряд с интегрируемыми членами сходится в среднем к интегрируемой функции S на $[a, b]$, то $\forall x_0, x \in [a, b]$ справедливо равенство

$$\int_{x_0}^x S(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^x a_n(t) dt.$$

93. Доказать, что если функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ с непрерывно дифференцируемыми членами сходится поточечно на $[a, b]$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ сходится в среднем к непрерывной функции σ , то функция $S: x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ дифференцируема на $[a, b]$ и $S'(x) = \sigma(x)$.

94. Вытекает ли из поточечной сходимости на $[a, b]$ функциональной последовательности $(f_n(x))$ сходимости ее в среднем на этом отрезке?

Убедиться, что следующие функциональные последовательности сходятся в среднем, но не сходятся равномерно к функциям, получаемым поточечным предельным переходом:

95. $f_n(x) = \sqrt{n}e^{-nx}$, $x \in [0, 1]$. 96. $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$, $x \in [0, 1]$.

97. $f_n(x) = \left| \frac{\ln(1+nx^2)}{\ln n} - 1 \right|$, $x \in [0, 1]$. 98. $f_n(x) = \frac{\sin nx}{nx}$, $x \in]0, +\infty[$.

Показать, что почленное дифференцирование следующих рядов возможно:

99. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \left(\frac{e^{-x}}{n+1} - \frac{1}{n} \right)$, $x \in]0, 1[$. 100. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$, $x \in]0, 1[$.

Показать, что почленное интегрирование следующих рядов на указанном отрезке возможно:

101. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n$, $x \in [0, 1]$. 102. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(nx+1)((n-1)x+1)}$, $x \in [0, 2]$.

§ 5. Степенные ряды

5.1. Круг и радиус сходимости степенного ряда.

Определение. Ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n, \text{ где } a_n, z, a \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

называется *степенным рядом*; a_n — коэффициенты степенного ряда (они не зависят от z), a — фиксированная точка на комплексной плоскости.

Теорема. Каждый степенной ряд сходится абсолютно внутри некоторого круга $|z-a| \leq R$, где радиус круга $R \geq 0$ определяется по формуле Коши—Адамара

$$R = \begin{cases} \frac{1}{l}, & \text{если } 0 < l = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < +\infty, \\ 0, & \text{если } l = +\infty, \\ +\infty, & \text{если } l = 0, \end{cases}$$

или по формуле

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \quad (2)$$

если этот предел существует хотя бы в несобственном смысле.

Вне круга $|z-a| \leq R$ ряд (1) не сходится ни в одной точке $z \in \mathbb{C}$. Вопрос сходимости ряда (1) в точках окружности $|z-a| = R$, $R > 0$, остается открытым и решается отдельно для каждого ряда.

В случае, когда $a_n, z, a \in \mathbb{R}$, внутренность круга сходимости вырождается в интервал $]a-R, a+R[$, $R > 0$, на действительной прямой.

При $R = 0$ круг вырождается в точку $z = a$, а при $R = +\infty$ представляет комплексную плоскость (или числовую прямую, если ряд (1) действителен).

5.2. Основные свойства степенных рядов.

Сумма степенного ряда внутри круга сходимости представляет собой непрерывную функцию. Если ряд (1), п.5.1, действительный и на конце его интервала сходимости $z = R + a$, $R > 0$, расходится, то сходимость ряда на интервале $[a, R + a[$ не может быть равномерной.

Если действительный степенной ряд сходится при $z = R + a$, $R > 0$, то сходимость ряда будет равномерной на отрезке $[a, R + a]$.

Сумма действительного степенного ряда внутри интервала сходимости имеет производные любого порядка.

Теорема (Абеля). Если действительный степенной ряд сходится в точке $z = R + a$, $R > 0$, то его сумма $S(z)$ представляет собой значение непрерывной слева функции в этой точке, т.е.

$$S(R + a) = \lim_{z \rightarrow R+a-0} S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

Аналогичные утверждения справедливы и для левого конца интервала сходимости.

5.3. Разложение функций в ряд Тейлора.

Определение. Пусть $f :]a - R_1, a + R_2[\rightarrow \mathbb{R}$, $R_i > 0$, $i = 1, 2$. Говорят, что функция f раскладывается в степенной ряд на интервале $]a - R, a + R[$, где $0 < R \leq \min(R_1, R_2)$, если $\exists a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}_0$, такие, что $\forall x \in]a - R, a + R[$ справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n.$$

Теорема (Тейлора). Для того чтобы функция f могла быть разложена в ряд Тейлора на интервале $]a - R, a + R[$, $R > 0$, необходимо и достаточно, чтобы она была бесконечно дифференцируема и остаточный член в формуле Тейлора для этой функции стремился к нулю при $n \rightarrow \infty$ на указанном интервале.

Разложение имеет вид

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k. \quad (1)$$

Функция f , разлагающаяся в ряд Тейлора, называется аналитической и ее разложение (1) единственно.

Практически важными являются случаи представления остаточного члена разложения (1) в форме Лагранжа

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x - a))}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}$$

и в форме Коши

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta_1(x - a))}{n!} (1 - \theta_1)^n (x - a)^{n+1},$$

где $0 < \theta < 1$, $0 < \theta_1 < 1$.

5.4. Разложения основных элементарных функций.

Полагая в формуле (1), п.5.3, $a = 0$, получаем пять основных разложений:

$$I. \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad |x| < \infty.$$

$$II. \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad |x| < \infty.$$

$$III. \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad |x| < \infty.$$

$$IV. \quad (1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n, \quad -1 < x < 1.$$

$$V. \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \quad -1 < x \leq 1.$$

Разложения I—III справедливы для всех комплексных значений x , разложение IV выполняется при $|x| < 1$, $m \in \mathbb{R}$, а равенство V — при $|x| \leq 1$, $x \neq -1$.

5.5. Операции над степенными рядами.

Ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$$

всегда имеют общее множество сходимости и внутри этого множества справедливы следующие операции сложения и умножения:

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)(z-a)^n;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

где $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$; λ, μ — числа.

Если степенной ряд (1), п.5.1, действителен, то внутри интервала сходимости его можно почленно дифференцировать и почленно интегрировать; при этом интервал сходимости полученного таким образом ряда совпадает с интервалом сходимости исходного ряда. Соответствующие формулы имеют вид:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(x-a)^n,$$

$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1} + C.$$

Определить радиус и интервал сходимости и исследовать поведение в граничных точках интервала сходимости следующих степенных рядов:

$$146. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n.$$

◀ По формуле Коши—Адамара имеем

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^n + (-2)^n}{n}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[2k]{\frac{9^k + 4^k}{2k}} = 3,$$

поэтому при $-\frac{4}{3} < x < -\frac{2}{3}$ ряд сходится абсолютно.

Исследуем поведение степенного ряда на концах интервала сходимости. Пусть $x = -\frac{4}{3}$. Нетрудно видеть, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \cdot \frac{(-1)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

сходится, так как равен сумме двух сходящихся рядов.

Пусть $x = -\frac{2}{3}$. Тогда числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n3^n},$$

в силу признака сравнения, расходится $\left(\frac{3^n + (-2)^n}{n3^n} = \frac{1 + (-\frac{2}{3})^n}{n} > \frac{1}{4n}\right)$. Следовательно, в точке $x = -\frac{4}{3}$ степенной ряд сходится лишь условно, в точке $x = -\frac{2}{3}$ — расходится. ►

$$147. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$$

◀ По формуле (2), п.5.1, находим

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2 (2n+2)!}{(2n)! ((n+1)!)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = 4,$$

поэтому при $|x| < 4$ ряд сходится абсолютно.

При $x = 4$ получаем числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}$. Поскольку $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n(n+1)}$ то $a_n < a_{n+1}$. Это означает, что последовательность (a_n) монотонно возрастает. Следовательно, общий член ряда к нулю не стремится, т.е. ряд расходится. По этой же причине он расходится и в точке $x = -4$. ►

$$148. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n.$$

◀ По формуле Коши—Адамара находим радиус сходимости ряда:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Следовательно, при $|x| < \frac{1}{e}$ ряд сходится абсолютно. При $x = \frac{1}{e}$ получаем числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{e^n}$. Покажем, что общий член этого ряда к нулю не стремится. Действительно, имеем

$$a_n = \exp \left\{ -n + n^2 \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right\} = \exp \left\{ -n + n^2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right\} \rightarrow e^{-\frac{1}{2}}, n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, в точке $x = \frac{1}{e}$ степенной ряд расходится. По той же причине он расходится и в точке $x = -\frac{1}{e}$. ►

$$149. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n, a > 1.$$

◀ Находим радиус сходимости ряда по формуле (2), п.5.1. Имеем

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! a^{(n+1)^2}}{a^{n^2} (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{2n+1}}{n+1} = +\infty,$$

следовательно, данный степенной ряд сходится по всей числовой прямой. ►

$$150. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right)^p \left(\frac{x-1}{2} \right)^n.$$

◀ По формуле (2), п.5.1, находим

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(\frac{(2n-1)!!(2n+2)!!}{(2n)!!(2n+1)!!} \right)^n = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n+1} \right)^p = 2.$$

Следовательно, при $-1 < x < 3$ ряд сходится абсолютно.

При исследовании характера сходимости ряда в точках $x = -1$ и $x = 3$ пользуемся соответственно примером 79 и признаком Гаусса. Имеем

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{2n+1} \right)^p = 1 + \frac{p}{2n+1} + \frac{p(p-1)}{2(2n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

где $a_n = \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^p$. Отсюда, учитывая упомянутые признаки, заключаем, что в точке $x = -1$ ряд сходится при $p > 0$, а при $p > 2$ он сходится абсолютно. Следовательно, в точке $x = -1$ он сходится условно при $0 < p \leq 2$. В точке $x = 3$ ряд сходится абсолютно при $p > 2$ и расходится при $p \leq 2$. ▶

$$151. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right)^p x^n.$$

◀ По формуле (2), п.5.1, получаем

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \frac{(2n+3)!}{2^{n+1} ((n+1)!)^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{n+1} \right)^p = 2^p.$$

Поэтому ряд сходится абсолютно при $|x| < 2^p$.

Рассмотрим поведение степенного ряда в граничных точках интервала сходимости. Для этого образуем отношение

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{2n+2} \right)^p = 1 + \frac{p}{2n} + o\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right), \quad \varepsilon > 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

где $a_n = \left(\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right)^p 2^{pn}$. Пользуясь признаком Гаусса, из этого отношения находим, что в точке $x = -2^p$ ряд сходится абсолютно при $p > 2$, а при $p \leq 2$ ряд расходится. На основании же примера 79 устанавливаем, что в точке $x = 2^p$ ряд сходится при $p > 0$; абсолютно сходится при $p > 2$ (по признаку Гаусса). Следовательно, в этой точке он сходится условно, если $0 < p \leq 2$. ▶

$$152. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1) \cdots (m-n+1)}{n!} x^n.$$

◀ Для удобства исследования представим ряд в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(n-1-m)(n-2-m) \cdots (1-m)m}{n!} x^n.$$

Очевидно, ряд сходится абсолютно, если $m \in \mathbb{Z}_0$, а x — любое; поэтому далее будем считать, что $m \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_0$.

Для нахождения радиуса сходимости применяем формулу (2), п.1.5. Имеем

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n-m} \right| = 1,$$

где

$$a_n = \frac{(n-1-m)(n-2-m) \cdots (1-m)m}{n!}.$$

Пусть $x = -1$. Тогда, составляя для числового ряда отношение

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{m+1}{n} + \frac{m(m+1)}{n(n-m)} \quad (1)$$

и пользуясь признаком Гаусса, находим, что в этой точке степенной ряд сходится абсолютно, если $m > 0$, и расходится, если $m < 0$.

Пусть $x = 1$. Тогда из (1), на основании примера 79, заключаем, что степенной ряд сходится, если $m > -1$. Следовательно, при $-1 < m < 0$ ряд сходится условно. ►

$$153. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n x^n.$$

◀ Применяя формулу (2), п.1.5, получаем

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} e \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = 1.$$

Следовательно, при $|x| < 1$ степенной ряд сходится абсолютно.

Пусть $x = 1$. Тогда, имея в виду утверждение примера 79 для ряда $\sum (-1)^n b_n$, где $b_n = \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!}$, составим отношение

$$\begin{aligned} \frac{b_n}{b_{n+1}} &= e \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \exp \left\{ 1 + n \ln \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \right\} = \\ &= \exp \left\{ 1 + n \left(-\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right\} = 1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1)$$

Теперь видим, что по указанному утверждению ряд сходится.

Пусть $x = -1$. Тогда, воспользовавшись признаком Гаусса, из соотношения (1) получим, что степенной ряд расходится (здесь $\mu = 1$). Отсюда следует, что в точке $x = 1$ имеет место условная сходимость. ►

$$154. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) x^n.$$

◀ Поскольку $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + C + \varepsilon_n$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\ln n + C + \varepsilon_n} = 1.$$

Таким образом, по формуле Коши—Адамара, ряд сходится при $|x| < 1$. В точках $x = 1$ и $x = -1$ ряд расходится, так как общий член ряда, на основании указанного выше примера, не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. ►

$$155. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3 + (-1)^n)^n}{n} x^n.$$

◀ Применяя формулу Коши—Адамара, получаем

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + (-1)^n}{\sqrt[n]{n}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt[2k]{2k}} = 4.$$

Отсюда следует, что при $|x| < \frac{1}{4}$ ряд сходится абсолютно.

Поскольку для подпоследовательности (S_{2n}) последовательности частичных сумм числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+(-1)^n)^n}{n 4^n}$ выполняется неравенство $S_{2n} \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, то в точке $x = +\frac{1}{4}$ ряд расходится. Аналогично в точке $x = -\frac{1}{4}$ имеем

$$S_{2n} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{2^{2n-1}(2n-1)} + \frac{1}{2n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{2k-1}(2k-1)}.$$

Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = +\infty$, поэтому и в этой точке ряд расходится. ►

$$156. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} x^n \quad (\text{ряд Прингсхейма}).$$

◀ Согласно формуле Коши—Адамара, находим

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1.$$

Таким образом, степенной ряд сходится абсолютно при $|x| < 1$.

В точке $x = 1$ получаем числовой ряд, сходимость которого доказана в примере 77.

В точке $x = -1$ получаем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+[\sqrt{n}]}}{n} = \sum_{\substack{n=1 \\ (n \neq 4, 9, 16, \dots)}}^{\infty} \frac{(-1)^{n+[\sqrt{n}]}}{n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \quad (1)$$

Поскольку первый ряд, находящийся справа в равенстве (1), лейбница типа, то он сходится. Второй ряд также сходится. Так как, кроме этого, ряд, находящийся слева в равенстве (1), абсолютно расходится (как гармонический), то мы приходим к выводу, что в точке $x = -1$ данный степенной ряд сходится условно. ►

$$157. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^{\nu(n)}}{n} (1-x)^n, \quad \text{где } \nu(n) \text{ — количество цифр числа } n.$$

◀ По формуле Коши—Адамара получаем

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{10^{0,8n+1}}{n}} = 1$$

(см. пример 45), т.е. при $0 < x < 2$ степенной ряд сходится абсолютно.

В силу неравенства $n = 10^{0,8n} < 10^{0,8n+1} \leq 10^{0,8n+1} = 10n$, заключаем, что в точках $x = 0$ и $x = 2$ ряд расходится, так как при этом общий член ряда не стремится к нулю. ►

158. Определить интервал сходимости разложения в степенной ряд функции $f: x \mapsto \frac{x}{x^2 - 5x + 6}$: а) по степеням x ; б) по степеням бинома $(x-5)$, не производя самого разложения.

◀ Преобразовывая функцию f для случаев а) и б) к виду

$$\text{а) } f(x) = \frac{x}{(x-2)(x-3)}; \quad \text{б) } f(t+5) = \varphi(t) = \frac{t+5}{(t+3)(t+2)}, \quad t = x-5,$$

и принимая во внимание то, что радиус сходимости степенного ряда определяется расстоянием от центра разложения до первой особой точки аналитической функции или какой-нибудь ее производной, находим:

а) $x = 2$ — точка бесконечного разрыва функции f ; $x = 0$ — центр разложения ее в степенной ряд (по условию), а поэтому $R = 2$ и интервал сходимости определяется неравенством $|x| < 2$.

б) $t = -2$ — точка бесконечного разрыва функции φ , а $t = 0$ — центр разложения ее в степенной ряд (по условию функция φ разлагается по степеням $t = x - 5$). Следовательно, $R = 2$, интервал сходимости ряда $] - 2, 2[$ или $3 < x < 7$. ►

159. Можно ли утверждать, что $\varphi_N(x) = \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \Rightarrow \sin x$ на $] - \infty, +\infty[$ при $N \rightarrow \infty$?

◀ Поскольку $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sin x$, $x \in] - \infty, +\infty[$, а

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} \left| \sin x - \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \right| = +\infty,$$

то, согласно примеру 103, последовательность $(\varphi_N(x))$ сходится неравномерно на $]-\infty, +\infty[$. ▶

Пользуясь разложениями п.5.4, написать разложения в степенной ряд относительно x следующих функций:

$$160. x \mapsto \sin^3 x$$

◀ Преобразовав $\sin^3 x$ к виду $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$ и воспользовавшись разложением функции синус, найдем

$$\sin^3 x = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(3x)^{2n-1}}{(2n-1)!} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3 - 3^{2n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}.$$

По формуле (2), п.1.5, легко найти, что этот ряд сходится абсолютно при всех x . ▶

$$161. x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}.$$

◀ Поскольку $\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$, то, дифференцируя почленно разложение для $(1-x)^{-1}$, получаем $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, $|x| < 1$. ▶

$$162. x \mapsto \frac{x}{(1-x)(1-x^2)}.$$

◀ Разлагая данную дробь на простейшие $\frac{x}{(1-x)(1-x^2)} = -\frac{1}{4(1+x)} - \frac{1}{4(1-x)} + \frac{1}{2(1-x)^2}$ и используя разложение IV, п.5.4, а также результат предыдущего примера, можем написать

$$\frac{x}{(1-x)(1-x^2)} = -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1 + (-1)^{n+1}) x^n.$$

По формуле Коши—Адамара находим интервал абсолютной сходимости полученного степенного ряда: $|x| < 1$. ▶

$$163. x \mapsto \frac{1}{1+x+x^2}.$$

◀ Представляя данную дробь в виде

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1}{1-(t+\bar{t})x+x^2} = \frac{1}{(x-t)(x-\bar{t})} = \\ &= \frac{1}{t-\bar{t}} \left(\frac{1}{x-t} - \frac{1}{x-\bar{t}} \right) = \frac{1}{t-\bar{t}} \left(\frac{t}{1-xt} - \frac{\bar{t}}{1-x\bar{t}} \right), \end{aligned}$$

где $t = e^{i\varphi}$, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, и используя разложение IV, п.5.4, а также формулу Эйлера $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$, получаем

$$f(x) = \frac{1}{t-\bar{t}} \left(t \sum_{n=0}^{\infty} (xt)^n - \bar{t} \sum_{n=0}^{\infty} (x\bar{t})^n \right) = \frac{1}{t-\bar{t}} \sum_{n=0}^{\infty} x^n (t^{n+1} - \bar{t}^{n+1}) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin(n+1)\varphi.$$

По формуле Коши—Адамара находим радиус и интервал сходимости этого ряда:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\sin(n+1)\varphi|} = 1, R = 1, |x| < 1. \blacktriangleright$$

$$164. x \mapsto \frac{x \sin \alpha}{1 - 2x \cos \alpha + x^2}.$$

◀ Полагая $\sin \alpha = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, $\cos \alpha = \frac{z+\bar{z}}{2}$, где $z = e^{i\alpha}$, и разлагая данную дробь на простейшие, получаем

$$\frac{x \sin \alpha}{1 - 2x \cos \alpha + x^2} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{1-xz} - \frac{1}{1-x\bar{z}} \right).$$

Применяя к правой части этого соотношения разложение IV, п.5.4, можем написать

$$\frac{x \sin \alpha}{1 - 2x \cos \alpha + x^2} = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} x^n (z^n - \bar{z}^n) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin n\alpha.$$

Очевидно, полученный ряд сходится абсолютно при $|x| < 1$. ►

$$165. x \mapsto \ln(1+x+x^2+x^3).$$

◀ Преобразовывая данную функцию к виду

$$\ln(1+x+x^2+x^3) = \ln(1+x) + \ln(1+x^2), \quad x > -1,$$

и используя разложение V, п.5.4, получаем

$$\ln(1+x+x^2+x^3) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n}, \quad -1 < x \leq 1.$$

Складывая полученные ряды в общей области их сходимости, окончательно имеем

$$\ln(1+x+x^2+x^3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left((-1)^{n-1} + 2 \sin(n-1) \frac{\pi}{2} \right) x^n, \quad -1 < x \leq 1.$$

Нетрудно видеть, что при $|x| < 1$ этот ряд сходится абсолютно, а в точке $x = 1$ сходится лишь условно (по признаку Дирихле). ►

$$166. x \mapsto e^{x \cos \alpha} \cos(x \sin \alpha)$$

◀ Рассматривая данную функцию как

$$\operatorname{Re}(e^{x \cos \alpha + ix \sin \alpha}) = \operatorname{Re}(e^{x e^{i\alpha}})$$

и применяя разложение I, п.5.4, можем написать

$$e^{x \cos \alpha} \cos(x \sin \alpha) = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n e^{in\alpha}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n \cos n\alpha}{n!}.$$

Поскольку $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x^n \cos n\alpha|}{n!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$ и второй степенной ряд в этом неравенстве сходится при всех $x \in]-\infty, +\infty[$, то полученное разложение справедливо при $|x| < \infty$. ►

Разложить в степенной ряд следующие функции:

$$167. f: x \mapsto \arcsin x.$$

◀ С помощью формулы IV, п.5.4, имеем

$$f'(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \dots \left(-\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!} x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} x^{2n}, \quad |x| < 1.$$

Интегрируя этот ряд почленно (что возможно внутри интервала сходимости), находим

$$f(x) = C + x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n! (2n+1)} x^{2n+1}.$$

Так как $f(0) = 0$, то $C = 0$. Следовательно,

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n! (2n+1)} x^{2n+1}, \quad |x| < 1.$$

Для исследования сходимости ряда в концевых точках применяем признак Раабе. Имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{4n^2 + 10n + 6}{4n^2 + 4n + 1} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + 5n}{4n^2 + 4n + 1} = \frac{3}{2} > 1,$$

поэтому при $x = \pm 1$ ряд сходится абсолютно.

Таким образом, полученное разложение, в силу теоремы Абеля, справедливо при $|x| \leq 1$, т.е. во всей области существования $\arcsin x$. ►

$$168. f: x \mapsto \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

◀ Разлагая производную данной функции $f'(x) = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ при $|x| < 1$ в степенной ряд

$$f'(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n},$$

интегрированием последнего получаем

$$f(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!! x^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)} + C, \quad |x| < 1.$$

Поскольку $f(0) = 0$, то $C = 0$

Как и в предыдущем примере, находим, что полученное разложение сходится абсолютно при $|x| \leq 1$, и в конечных точках сумма ряда равна, по теореме Абеля, значению функции f в этих точках. Таким образом, написанное разложение справедливо при $|x| \leq 1$. ▶

169. $f: x \mapsto \operatorname{arctg} \frac{2-2x}{1+4x}$.

◀ Представляя функцию f в виде

$$f: x \mapsto \operatorname{arctg} \frac{2-2x}{1+4x} = \operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} 2x - \pi \varepsilon(x),$$

где

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x > -\frac{1}{4}, \\ 1, & \text{если } x < -\frac{1}{4}, \end{cases}$$

и разлагая в ряд функцию $x \mapsto \operatorname{arctg} 2x$ с помощью почленного интегрирования ряда для ее производной, находим

$$\operatorname{arctg} \frac{2-2x}{1+4x} = \operatorname{arctg} 2 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{2n+1} x^{2n+1} - \pi \varepsilon(x).$$

Поскольку полученный ряд сходится при $|x| \leq \frac{1}{2}$ (абсолютная сходимость его при $|x| < \frac{1}{2}$ устанавливается с помощью признака д'Аламбера, а в конечных точках — с помощью признака Лейбница), то в данном случае

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{если } -\frac{1}{2} \leq x < -\frac{1}{4}. \end{cases} \blacktriangleright$$

170. $f: x \mapsto \operatorname{arctg} \frac{2x}{2-x^2}, |x| < \sqrt{2}$.

◀ Представляя производную функции f в виде

$$f'(x) = \frac{1}{1+t^4} + \frac{t^2}{1+t^4},$$

где $t = \frac{x}{\sqrt{2}}$, и пользуясь формулой IV, п.5.4, находим

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{4n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{4n+2}.$$

Очевидно, при $|t| < 1$ оба ряда справа абсолютно сходятся, поэтому при $|t| < 1$ их можно сложить. Имеем

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{n}{\frac{n}{2}} t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{n}{\frac{n}{2}} \frac{x^{2n}}{2^n}, \quad |x| < \sqrt{2},$$

откуда интегрированием получаем

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{x^{2n+1}}{2^n(2n+1)}, \quad |x| < \sqrt{2}.$$

Поскольку интервал абсолютной сходимости ряда после интегрирования не меняется, то полученный ряд сходится абсолютно при $|x| < \sqrt{2}$. В точках $|x| = \pm\sqrt{2}$ ряд сходится, но только условно. Действительно, последовательность $\left(\frac{1}{2n+1}\right) \downarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, а

$\left|\sum_{k=0}^n (-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}\right| \leq 2$; поэтому, согласно признаку Дирихле, ряд сходится. Абсолютная расходимость ряда в этих точках следует из расходимости гармонического ряда. Но так как функция f в точках $x = \pm\sqrt{2}$ не определена, то полученное разложение справедливо только при $|x| < \sqrt{2}$. Этот пример показывает, что сумма ряда может существовать на множестве большем, чем то, на котором задана функция. ►

171. $f: x \mapsto \arccos(1 - 2x^2)$.

◀ Дифференцируя функцию f , получаем

$$f'(x) = \frac{2 \operatorname{sgn} x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad 0 < |x| < 1.$$

Пользуясь разложением IV, п.5.4, находим

$$f'(x) = 2 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} \right) \operatorname{sgn} x, \quad 0 < |x| < 1.$$

Интегрируя почленно полученный ряд, имеем

$$f(x) = 2 \left(|x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1} \right).$$

Этот ряд, согласно признаку Раабе, сходится абсолютно при $|x| \leq 1$, т.е. во всей области существования функции f . ►

172. Функцию $f: x \mapsto \ln x$ разложить в степенной ряд по целым положительным степеням дроби $\frac{x-1}{x+1}$.

◀ Положив $\frac{x-1}{x+1} = t$, получим $f\left(\frac{t+1}{1-t}\right) \equiv F(t) = \ln \frac{t+1}{1-t}$. Поскольку $x > 0$, то $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = |t| < 1$ (заметим, что справедливо и обратное утверждение). Следовательно, используя формулу V, п.5.4, можем написать

$$\ln \frac{t+1}{1-t} = \ln(1+t) - \ln(1-t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n-1}}{2n-1} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n-1} \cdot \frac{1}{2n-1}. \quad \blacktriangleright$$

173. Пусть $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Доказать непосредственно, что $f(x)f(y) = f(x+y)$.

◀ Перемножая ряды $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ и $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}$, получаем

$$f(x)f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n \frac{x^{n-j} y^j}{(n-j)! j!} \right).$$

Но так как $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} y^k$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{x^{n-k} y^k}{(n-k)! k!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = f(x+y).$$

что и требовалось доказать. ►

174. Пусть, по определению,

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{и} \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

Доказать, что $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$.

◀ Записывая данные разложения в виде

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n!} x^n, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n!} x^n \quad (1)$$

и пользуясь правилом умножения рядов Коши, имеем

$$\sin x \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad c_n = \sum_{k=0}^n \frac{\sin \frac{k\pi}{2} \cos \frac{(n-k)\pi}{2}}{k!(n-k)!}. \quad (2)$$

Так как $\sin \frac{k\pi}{2} \cos \frac{(n-k)\pi}{2} = \frac{1}{2} \sin \frac{n\pi}{2} + (-1)^{k+1} \frac{1}{2} \sin \frac{n\pi}{2}$ и $\frac{2n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(n-k)!}$, $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} = 0$, что вытекает из элементарной формулы

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n! x^{n-k} y^k}{k!(n-k)!}$$

при $x=y=1$ и $x=-y=1$ соответственно, то

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{\sin \frac{k\pi}{2} \cos \frac{(n-k)\pi}{2}}{k!(n-k)!} = \frac{2^{n-1}}{n!} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

А тогда, согласно (1) и (2),

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \sin \frac{n\pi}{2}}{n!} x^n = \frac{1}{2} \sin 2x,$$

что и требовалось доказать. ►

175. Написать несколько членов разложения в степенной ряд функции

$$f: x \mapsto \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \right)^{-1}.$$

◀ Следует подобрать коэффициенты α_n так, чтобы выполнялось тождество по x :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \equiv 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n = f(x).$$

Это дает бесконечную систему уравнений относительно α_n :

$$\alpha_0 = 1, \quad \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{n-i+1} = -\frac{1}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

из которой последовательно находим $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$, $\alpha_2 = -\frac{1}{12}$, $\alpha_3 = -\frac{1}{24}$, ... ►

Производя соответствующие действия со степенными рядами, получить разложения в степенные ряды следующих функций:

176. $f: x \mapsto (1-x)^2 \operatorname{ch} \sqrt{x}$.

◀ Разлагая функцию $x \mapsto \operatorname{ch} \sqrt{x}$ в ряд по степеням \sqrt{x} , получаем

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 - 2x + x^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(2n)!} = \\ &= 1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!} - 2x - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(2n)!} = \\ &= 1 - \frac{3}{2}x - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n)!} - \frac{2}{(2n-2)!} + \frac{1}{(2n-4)!} \right) x^n. \end{aligned}$$

Очевидно, это разложение справедливо при всех x . ▶

177. $f: x \mapsto \ln^2(1-x)$.

◀ Возводя в квадрат ряд $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \ln(1-x)$, получаем $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n+1}$, где

$$c_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+1-k)k} = \frac{2}{n+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right).$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n} = 1$, то разложение справедливо при $|x| < 1$. ▶

178. $f: x \mapsto e^x \cos x$.

◀ Разлагая функцию $\tilde{f}: x \mapsto e^{x(1+i)}$ в степенной ряд

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n (\sqrt{2})^n e^{i n \frac{\pi}{4}}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x\sqrt{2})^n}{n!} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right)$$

и замечая, что $f(x) = \operatorname{Re} \tilde{f}(x)$, получаем

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x\sqrt{2})^n}{n!} \cos \frac{n\pi}{4}.$$

Поскольку $\left| \frac{(x\sqrt{2})^n}{n!} \cos \frac{n\pi}{4} \right| \leq \frac{(\sqrt{2}|x|)^n}{n!}$ и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2}|x|)^n}{n!}$ сходится при $|x| < \infty$, то полученное разложение возможно также при $|x| < \infty$. ▶

179.

$$f: x \mapsto \begin{cases} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^2 & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

◀ Принимая во внимание результат примера 167, находим

$$f(x) = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!! x^{2n}}{(2n)!!(2n+1)} \right)^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!! x^{2n}}{(2n)!!(2n+1)} \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{2n},$$

где

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{(2n-2k-1)!!}{(2n-2k)!!} \frac{(2k-1)!!((2k)!!)^{-1}}{(2n-2k+1)(2k+1)}, \quad (-1)!! = 1.$$

По индукции доказываем, что

$$\sum_{i=0}^n \frac{(2n-2i-1)!!(2i-1)!!}{(2n-2i)!!(2i)!!(2n-2i+1)(2i+1)} = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+2)!}.$$

Поэтому

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+2)!} x^{2n}. \quad (1)$$

Легко установить, что этот ряд сходится при $|x| < 1$. Для выяснения вопроса о сходимости ряда (1) в концевых точках $x = \pm 1$ воспользуемся признаком Раабе:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{3}{2n} - \frac{2n+3}{2n(n+1)^2} \right) = \frac{3}{2} > 1.$$

Видим, что ряд (1) сходится абсолютно также и в концевых точках интервала сходимости $|x| < 1$. Следовательно, разложение (1), в силу непрерывности функции f на отрезке $[-1, 1]$ и теоремы Абеля, справедливо на указанном отрезке. ►

180. Пусть $S = (I - A)^{-1}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = 0$, где A — квадратная матрица, I — единичная матрица. Разложить матрицу S в матричный ряд по степеням A .

◀ По условию имеем

$$(I - A)S = I,$$

откуда

$$S = I + AS, \quad S = I + A(I + AS) = I + A + A^2S, \quad \dots \quad S = I + A + A^2 + \dots + A^nS.$$

Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} A^nS = 0$. Следовательно,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} A^n. \quad \blacktriangleright$$

181. Пусть $S = (2I - 3A + A^2)^{-1}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = 0$, где A — квадратная матрица. Разложить матрицу S в матричный ряд по степеням A .

◀ Представим матрицу S в виде

$$S = ((2I - A)(I - A))^{-1} = (I - A)^{-1}(2I - A)^{-1} = \alpha(I - A)^{-1} + \beta(2I - A)^{-1},$$

где α, β — некоторые числовые коэффициенты. Для их определения умножим S слева на $I - A$, а справа — на $2I - A$. В результате получим тождество

$$I = \alpha(2I - A) + \beta(I - A),$$

из которого находим $\alpha = 1, \beta = -1$.

Таким образом,

$$S = (I - A)^{-1} - \frac{1}{2} \left(I - \frac{A}{2} \right)^{-1}.$$

Используя разложения из предыдущего примера, окончательно получаем

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} A^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) A^n. \quad \blacktriangleright$$

182. Доказать, что если: 1) $a_n \geq 0$; 2) существует $\lim_{x \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S$, то $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = S$.

◀ В силу условия 2), имеем

$$\lim_{x \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^N a_n R^n + \lim_{x \rightarrow R-0} \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n = S,$$

откуда

$$S - \sum_{n=0}^N a_n R^n = \alpha_N, \quad (1)$$

где

$$\alpha_N = \lim_{x \rightarrow R-0} \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n.$$

Поскольку далее $a_n \geq 0$, то $\alpha_N \geq 0$. Поэтому из (1) следует, что $0 \leq \sum_{n=0}^N a_n R^n \leq S$.

Последнее означает, что последовательность $\left(\sum_{n=0}^N a_n R^n\right)$ ограничена. Но так как она еще и монотонна, то, в силу известной теоремы, сходится, т.е. сходится числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$. А тогда, по теореме Абеля, будем иметь

$$\lim_{x \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

Отсюда, приняв во внимание условие 2), найдем

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = S. \blacktriangleright$$

Разложить в степенной ряд функции;

$$183. f: x \mapsto \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

◀ Разлагая функцию $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$, $t \neq 0$, в степенной ряд $\frac{\sin t}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!}$, $|t| > 0$, и интегрируя последний, получаем

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}, \quad |x| < \infty. \blacktriangleright$$

$$184. f: x \mapsto \int_0^x \frac{t dt}{\ln(1+t)}.$$

◀ Коэффициенты a_n степенного ряда подынтегральной функции найдем из тождества $1 \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, которое дает систему алгебраических уравнений относительно a_k :

$$a_0 = 1, \quad \sum_{k=1}^n \frac{a_k (-1)^{k+1}}{n-k+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Из этой системы уравнений последовательно получаем $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{12}$, $a_3 = \frac{1}{24}$, и т. д. Таким образом, имеем

$$f(x) = \int_0^x \frac{t dt}{\ln(1+t)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{36} + \frac{x^4}{96} + \dots$$

Поскольку функция $\varphi: t \mapsto \frac{t}{\ln(1+t)}$, $\varphi(0) = 1$, аналитична всюду, за исключением точки $t = -1$, то радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ равен единице. Следовательно, такой же радиус сходимости имеет и полученное после интегрирования разложение. \blacktriangleright

Применяя почленное дифференцирование, вычислить суммы следующих рядов:

$$185. x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

◀ Данный ряд, согласно формуле Коши—Адамара, имеет радиус сходимости, равный единице. Согласно п. 5.5, степенной ряд можно почленно дифференцировать внутри интервала сходимости. Имеем $1 - x^2 + x^4 - \dots = \frac{1}{1+x^2}$, $|x| < 1$. Отсюда интегрированием получаем

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots = \operatorname{arctg} x + C. \text{ Полагая здесь } x = 0, \text{ находим, что постоянная } C = 0.$$

Окончательно имеем

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots = \operatorname{arctg} x.$$

Заметим, что в конечных точках интервала сходимости этот ряд сходится. Поэтому, согласно теореме Абеля, сумма ряда есть непрерывная функция на отрезке $[-1, 1]$. Поскольку функция $x \mapsto \operatorname{arctg} x$ также непрерывна на этом отрезке, то последнее равенство справедливо при всех $x \in [-1, 1]$. ▶

$$186. 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

◀ Очевидно, этот ряд сходится на всей числовой прямой. Обозначая через $S(x)$ сумму данного ряда, почленным дифференцированием его получаем уравнения

$$S(x) + S'(x) = e^x, \quad S(x) - S'(x) = e^{-x}.$$

Отсюда

$$S(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x, \quad |x| < \infty. \blacktriangleright$$

$$187. \frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \dots$$

◀ Дифференцируя почленно ряд внутри интервала сходимости, получаем $\frac{1}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} + \dots = S(x)$, $|x| < 1$. Умножая обе части этого равенства на x^2 , $x \neq 0$, и пользуясь формулой V, п. 5.4, находим

$$S(x) = -\frac{1}{x} - \frac{\ln(1-x)}{x^2}. \quad (1)$$

При $x = 0$ полагаем $S(0) = \frac{1}{2}$ ($x = 0$ — устраняемая точка разрыва функции S). Интегрируя (1), имеем

$$\int S(x) dx = \frac{1-x}{x} \ln(1-x) + C. \quad (2)$$

Так как $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \dots \right) = 0$, то из (2) находим $C = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x}{x} \ln(1-x) = 1$. Следовательно,

$$\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \dots = \begin{cases} 1 + \frac{1-x}{x} \ln(1-x), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases} \quad (3)$$

При $|x| < 1$ это равенство гарантировано теоремами о возможности почленного дифференцирования и интегрирования степенного ряда внутри интервала сходимости. Покажем, что и в конечных точках интервала $x = \pm 1$ это равенство при некотором условии справедливо. Действительно, поскольку рассматриваемый степенной ряд в точках $x = \pm 1$ сходится, то, на основании теоремы Абеля, его сумма является непрерывной функцией на отрезке $[-1, 1]$. Если значение функции в равенстве (3) справа в точке $x = 1$ положить равным единице, то, как легко видеть, эта функция на сегменте $[-1, 1]$ также будет непрерывной. Поэтому окончательно можем записать

$$\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \dots = \begin{cases} 1 + \frac{1-x}{x} \ln(1-x), & \text{если } -1 \leq x < 0, 0 < x < 1, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ 1, & \text{если } x = 1. \blacktriangleright \end{cases}$$

$$188. 1 + \frac{x}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + \dots$$

◀ Нетрудно проверить, что радиус сходимости ряда $R = 1$. Умножая производную $S'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} 2x + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} 3x^2 + \dots$, $|x| < 1$, суммы данного ряда на $1 - x$, $x \neq 1$, получаем уравнение $(1 - x)S'(x) = \frac{1}{2}S(x)$. Общее решение этого уравнения есть $S(x) = \frac{C}{\sqrt{1-x}}$, $C = \text{const}$. Полагая здесь $x = 0$ и учитывая, что $S(0) = 1$, находим $C = 1$. Следовательно, $S(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, $|x| < 1$.

Сходимость рассматриваемого ряда в концевой точке $x = -1$ легко установить, если воспользоваться примером 79; расходимость ряда в точке $x = 1$ следует из признака Гаусса. Таким образом, сумма ряда, по теореме Абеля, есть непрерывная функция на $[-1, 1[$. Поскольку функция $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ также непрерывна на $[-1, 1]$, то окончательно имеем

$$1 + \frac{x}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + \dots = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad \text{при} \quad -1 \leq x < 1. \blacktriangleright$$

Применяя почленное интегрирование, вычислить суммы рядов:

$$189. x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \dots$$

◀ Общий член этого ряда имеет вид $a_n(x) = (-1)^{n-1} n^2 x^n$. Поэтому легко можно найти, что радиус сходимости ряда $R = 1$. Разделив на x , $x \neq 0$, сумму $S(x)$ данного ряда, а затем почленно его интегрируя в интервале $] -1, 1[$, получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{S(x)}{x} dx &= x - 2x^2 + 3x^3 - 4x^4 + \dots + C = \\ &= (x^2 - x^3 + x^4 - \dots)' - x + x^2 - x^3 + \dots + C = \frac{x}{(1+x)^2} + C. \end{aligned}$$

Дифференцируя полученное равенство, находим $S(x) = \frac{x(1-x)}{(1+x)^3}$, $|x| < 1$, $x \neq 0$. Нетрудно видеть, что ограничение $x \neq 0$ здесь можно снять. ▶

$$190. 1 \cdot 2x + 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 4x^3 + \dots$$

◀ Общий член ряда имеет вид $a_n(x) = n(n+1)x^n$, поэтому

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n(n+1)}} = 1.$$

Таким образом, степенной ряд сходится к своей сумме при $|x| < 1$.

Почленно интегрируя рассматриваемый ряд в интервале $] -1, 1[$ дважды, получаем

$$\int \frac{dx}{x^2} \left(\int S(x) dx \right) = x + x^2 + x^3 + \dots - \frac{C_1}{x} + C_2 = \frac{x}{1-x} - \frac{C_1}{x} + C_2, \quad (1)$$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования, $x \neq 0$.

Дифференцируя равенство (1) дважды и учитывая, что $S(0) = 0$, окончательно находим $S(x) = \frac{2x}{(1-x)^3}$, $|x| < 1$. ▶

Пользуясь соответствующими разложениями, вычислить с указанной степенью точности следующие значения функций:

$$191. \sin 18^\circ \text{ с точностью до } 10^{-5}.$$

◀ Пользуясь разложением функции синус в степенной ряд, можем написать

$$\sin 18^\circ = \sin \frac{\pi}{10} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \frac{\pi^{2n-1}}{10^{2n-1}}.$$

Так как этот ряд лейбница типа, то остаток ряда не превышает по абсолютной величине первого из отброшенных членов. Поэтому, как следует из неравенств $\frac{\pi^7}{7!10^7} < 10^{-5} < \frac{\pi^5}{5!10^5}$,

для получения результата с требуемой точностью достаточно взять три члена разложения. Имеем

$$\sin \frac{\pi}{10} \approx \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{3!10^3} + \frac{\pi^5}{5!10^5} = \frac{\pi}{10} \left(1 - \frac{\pi^2}{600} + \frac{\pi^4}{12 \cdot 10^5} \right) = 0,309017 \dots \blacktriangleright$$

192. $\operatorname{tg} 9^\circ$ с точностью до 10^{-3} .

◀ В силу оценки $R_3 = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \left(\frac{\pi}{20} \right)^4 < 0,0005$ ($f(x) = \operatorname{tg} x$), для получения приближенного значения $\operatorname{tg} \frac{\pi}{20}$ с указанной точностью достаточно взять два члена разложения функции тангенса в степенной ряд. Имеем

$$\operatorname{tg} 9^\circ = \operatorname{tg} \frac{\pi}{20} \approx \frac{\pi}{20} + \frac{\pi^3}{3 \cdot 20^3} = \frac{\pi}{20} \left(1 + \frac{\pi^2}{1200} \right) = 0,158 \dots \blacktriangleright$$

193. Исходя из равенства $\frac{\pi}{6} = \arcsin \frac{1}{2}$, найти число π с точностью до 10^{-4} .

◀ Пользуемся разложением функции $x \mapsto \arcsin x$ в степенной ряд (см. пример 167). Имеем

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^{2n+1} n! (2n+1)}.$$

Поскольку для остатка данного ряда справедлива оценка

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{2^{2k+1} k! (2k+1)} \leq \frac{(2n+1)!!}{3 \cdot 2^{2n+2} (n+1)! (2n+3)}$$

и неравенство $6 \frac{(2n+1)!!}{3 \cdot 2^{2n+2} (n+1)! (2n+3)} < 10^{-4}$ выполняется при $n \geq 4$, то для получения приближенного значения числа $\frac{\pi}{6}$ с требуемой точностью достаточно взять пять членов указанного разложения:

$$\frac{\pi}{6} \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{48} + \frac{3}{1280} + \frac{5}{14336} + \frac{35}{72 \cdot 8192} = 0,52359 \dots,$$

откуда $\pi = 3,1415 \dots \blacktriangleright$

194. Пользуясь формулой $\ln(n+1) = \ln n + 2 \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \dots \right)$, найти $\ln 2$ и

$\ln 3$ с точностью до 10^{-5} .

◀ Покажем сначала, как получена эта формула. Разлагая функции $x \mapsto \ln(1+x)$ и $x \mapsto \ln \frac{1}{1-x}$ в степенные ряды по степеням x , затем складывая их в общей области сходимости $|x| < 1$, находим

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right). \quad (1)$$

Полагая здесь $x = \frac{1}{2n+1}$, получаем указанную формулу.

Найдем теперь соответствующие числа k членов ряда (1) для вычисления приближенных значений $\ln 2$ и $\ln 3$. С этой целью оценим остаток R_k этого ряда. Имеем

$$R_k = 2 \left(\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \frac{x^{2k+3}}{2k+3} + \dots \right) \leq \frac{2x^{2k+1}}{(2k+1)(1-x^2)}.$$

Отсюда следует, что если $x = \frac{1}{3}$ ($n=1$), то $R_k \leq 10^{-5}$, начиная с $k=5$, а если $x = \frac{1}{5}$ ($n=2$), то $R_k \leq 10^{-5}$, начиная с $k=3$. Таким образом,

$$\ln 2 \approx 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{81} + \frac{1}{1215} + \frac{1}{15309} + \frac{1}{177147} \right) = 0,69314 \dots,$$

$$\ln 3 \approx 0,69314 + 2 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{375} + \frac{1}{15625} \right) = 1,09860 \dots \blacktriangleright$$

195. С помощью разложений подынтегральных функций в ряды вычислить с точностью до 0,001 следующие интегралы:

$$\text{а) } \int_0^1 e^{-x^2} dx; \quad \text{б) } \int_2^4 e^{\frac{1}{x}} dx; \quad \text{в) } \int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}; \quad \text{г) } \int_0^1 x^x dx.$$

◀ а) Пользуясь разложением I, п.5.4, находим

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}, \quad |x| < \infty,$$

откуда

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}.$$

Полученный ряд лейбница типа, поэтому если для нахождения приближенного значения данного интеграла взять k членов ряда, то погрешность не превзойдет $(k+1)$ -го члена ряда. Из этого условия находим нужное число k . Имеем $\frac{1}{(k+1)!(2k+3)} \leq 0,001$, откуда $k \geq 4$. Следовательно,

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} = 0,747 \dots$$

б) Пользуясь формулой I, п.5.4, и разлагая подынтегральную функцию по степеням $\frac{1}{x}$, получаем $e^{\frac{1}{x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!x^n}$, $|x| > 0$. Интегрируя этот ряд почленно, имеем

$$\int_2^4 e^{\frac{1}{x}} dx = 2 + \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \frac{1}{n(n+1)!2^n}.$$

Ограничиваясь k членами ряда, находим

$$\int_2^4 e^{\frac{1}{x}} dx \approx 2 + \ln 2 + \sum_{n=1}^k \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \frac{1}{n(n+1)!2^n}.$$

Из оценки остатка ряда

$$\begin{aligned} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)!2^n} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) &< \frac{1}{(n+1)!2^{n+1}(n+1)} \left(1 + \frac{1}{2(n+2)} + \frac{1}{2^2(n+2)(n+3)} + \dots\right) < \\ &< \frac{1}{(n+1)!2^{n+1}(n+1)} \left(1 + \frac{1}{2n+4} + \frac{1}{(2n+4)^2} + \dots\right) \leq 0,001 \end{aligned}$$

следует, что для получения результата с указанной точностью нужно взять $k \geq 3$. Таким образом,

$$\int_2^4 e^{\frac{1}{x}} dx \approx 2 + 0,6931 + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \frac{7}{6608} = 2,834 \dots$$

(или 2,835 с избытком).

в) Здесь $x \geq 2$, поэтому подынтегральную функцию разлагаем по степеням $\frac{1}{x}$. Имеем

$$(1+x^3)^{-1} = \frac{1}{x^3} \left(1 + \frac{1}{x^3}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^{3(n+1)}}, \quad |x| > 1,$$

откуда

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+2)2^{3n+2}}.$$

Поскольку ряд лейбница типа, то для получения результата с указанной точностью достаточно взять число k членов ряда, удовлетворяющее неравенству $\frac{1}{(3k+5)2^{3k+5}} \leq 0,001$; решая его, находим $k \geq 1$. Следовательно,

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{8} - \frac{1}{160} + \dots = 0,118 \dots$$

(или 0,119 с избытком).

г) Представляя подынтегральную функцию в виде $x^x = e^{x \ln x}$ и разлагая ее в степенной ряд по степеням $x \ln x$, $x > 0$, можем написать $x^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n \ln^n x}{n!}$. Интегрируя этот ряд почленно, получаем

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 x^n \ln^n x dx.$$

Интегрируя по частям, имеем

$$I_{mn} = \int_0^1 x^m \ln^n x dx = -\frac{m}{n+1} \int_0^1 x^m \ln^{n-1} x dx = -\frac{n}{m+1} I_{m, n-1}.$$

Полагая в полученной рекуррентной формуле последовательно $n = 1, 2, \dots$, находим

$$I_{m1} = -\frac{1}{m+1} I_{m0}, \quad I_{m2} = \frac{2!}{(m+1)^2} I_{m0}, \quad \dots, \quad I_{mn} = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^n} I_{m0}.$$

Так как $I_{m0} = \int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}$, то $I_{mn} = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$, откуда $I_{nn} = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$.

$$\text{Таким образом, } \int_0^1 x^x dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

Как следует из оценки остатка ряда

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}} \right| \leq \frac{1}{(n+2)^{n+2}} \leq 0,001,$$

для вычисления данного интеграла с точностью до 0,001 достаточно взять четыре первых члена этого ряда. Тогда получим

$$\int_0^1 x^x dx \approx 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{27} - \frac{1}{256} = 0,783 \dots \blacktriangleright$$

196. Найти с точностью до 0,01 длину дуги одной полуволны синусоиды $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$.

◀ Длина s указанной дуги выражается интегралом

$$s = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x} dx. \quad (1)$$

Преобразовывая подынтегральную функцию к виду

$$\sqrt{1 + \cos^2 x} = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{1}{3} \cos 2x\right)^{\frac{1}{2}}$$

и замечая, что $\frac{1}{3} |\cos 2x| \leq \frac{1}{3}$, разлагаем ее в степенной ряд по степеням $\frac{1}{3} \cos 2x$, используя формулу IV, п.5.4:

$$\sqrt{1 + \cos^2 x} = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!! 3^n} \cos^n 2x\right). \quad (2)$$

Интегрируя этот ряд почленно, получаем

$$\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x} dx = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\pi + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!! 3^n} I_n\right), \quad (3)$$

где

$$I_n = \int_0^{\pi} \cos^n 2x dx. \quad (4)$$

Почленное интегрирование ряда здесь возможно, так как ряд (2), по признаку Вейерштрасса, сходится равномерно по x , а функции $x \mapsto \cos^n 2x$ непрерывны. Интегрируя в (4) по частям, находим

$$I_n = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos^{n-1} 2x d(\sin 2x) = (n-1)(I_{n-2} - I_n),$$

откуда $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Поскольку $I_0 = \pi$, а $I_1 = 0$, то из полученной рекуррентной формулы находим

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \pi, \quad I_{2n-1} = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Используя этот результат, из (3) и (1) окончательно имеем

$$s = \pi \sqrt{\frac{3}{2}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n-1)!! (2n-1)!!}{(4n)!! 3^{2n} (2n)!!}\right).$$

Оценивая остаток последнего ряда:

$$\begin{aligned} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(4n-1)!! (2n-1)!!}{(4n)!! 3^{2n} (2n)!!} &< \frac{(4k+3)!! (2k+1)!!}{3^{2k+2} (2k+2)!! (4k+4)!!} \left(1 + \frac{(4k+7)(2k+3)}{9(4k+8)(2k+4)} + \dots\right) < \\ &< \frac{1}{6 \cdot 3^{2k+2}} \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \dots\right) = \frac{5}{3 \cdot 9^{k+2}} \end{aligned}$$

и учитывая, что абсолютная погрешность при вычислении данного интеграла не должна превышать 0,01, число первых членов ряда находим из неравенства $\pi \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{5}{3 \cdot 9^{k+2}} \leq 10^{-2}$. Его решения $k \geq 1$.

Следовательно, $s \approx \pi \sqrt{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{1}{48}\right) = 3,92 \dots \blacktriangleright$

Упражнения для самостоятельной работы

Найти радиусы сходимости следующих степенных рядов:

$$103. \sum_{n=1}^{\infty} \left(n \operatorname{tg} \frac{1}{n}\right)^{n^2} (z-i)^n. \quad 104. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{in} \operatorname{arcsin} \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n. \quad 105. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+3)(n+6) \dots 4n}{3^n} z^n.$$

$$106. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \sin \frac{2}{n} \dots \sin 1 \cdot (z-1)^n. \quad 107. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \frac{(2n-1)!}{(2n)!} (z-3+i)^n.$$

$$108. \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^{2k+1} ((2k-1)!!)^2 ((2n-2k+3)!!)^2 \frac{z^n}{(n!)^2}.$$

$$109. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\operatorname{tg} x)^{(n)} \Big|_{x=0}}{n!} z^n. \quad 110. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\operatorname{arctg}(2 \sin x))^{(n)} \Big|_{x=0}}{n!} z^n.$$

Разложить в степенные ряды по степеням x функции:

$$111. x \mapsto \sin^4 x. \quad 112. x \mapsto \frac{x}{x^4+x^2+1}. \quad 113. x \mapsto e^{-x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{4^n}.$$

$$114. x \mapsto \int_0^1 \ln(1+xt) dt. \quad 115. x \mapsto \int_0^1 \operatorname{arctg}(xt) dt. \quad 116. x \mapsto \int_0^1 e^{-x^2 t^2} dt.$$

117. Показать справедливость формулы

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{tA},$$

где A — постоянная квадратная матрица.

118. Пусть A — квадратная матрица. Положим, по определению,

$$\sin A = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{A^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad \cos A = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{A^{2n}}{(2n)!}$$

Показать, что матричные ряды сходятся для произвольных A .

119. Пусть A — квадратная матрица. Положим, по определению,

$$\ln(I+A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} A^n. \quad (1)$$

Показать, что если $\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{nk}^2 < 1$, где a_{nk} — элементы матрицы A , то ряд (1) сходится.

§ 6. Ряды Фурье

6.1. Основные определения.

Определение 1. Система функций

$$\frac{1}{2}, \cos \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{\pi x}{l}, \dots, \cos \frac{k\pi x}{l}, \sin \frac{k\pi x}{l}, \dots, \quad x \in [-l, l],$$

называется *основной тригонометрической системой*. Эта система ортогональна на отрезке $[-l, l]$.

Определение 2. Пусть $f \in R[-l, l]$. Числа

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx, \quad b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx, \quad k \in \mathbb{N},$$

называются *коэффициентами Фурье функции f по основной тригонометрической системе*.

Определение 3. Тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right)$$

называется рядом Фурье функции f . В частности, если функция f четная, то ее ряд Фурье имеет вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l};$$

ряд Фурье нечетной функции имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Определение 4. Функция $f: [-l, l] \rightarrow \mathbb{R}$ называется кусочно-непрерывной на $[-l, l]$, если она непрерывна в каждой точке $x \in [-l, l]$, за исключением, быть может, конечного числа точек, где она имеет разрывы первого рода.

Определение 5. Функция $f: [-l, l] \rightarrow \mathbb{R}$ называется кусочно-гладкой на $[-l, l]$, если эта функция кусочно-непрерывна и имеет непрерывную производную на этом отрезке, за исключением, быть может, конечного числа точек, в каждой из которых производная имеет конечные односторонние предельные значения.

6.2. Теоремы о разложении в ряд Фурье.

Теорема 1 (основная). Пусть кусочно-гладкая на отрезке $[-l, l]$ функция f периодически с периодом $2l$ продолжена на всю числовую прямую. Тогда тригонометрический ряд Фурье функции f сходится в каждой точке $x \in]-\infty, +\infty[$ к значению $\frac{1}{2}(f(x-0) + f(x+0))$.

Теорема 2. Если для непрерывной и кусочно-гладкой на отрезке $[-l, l]$ функции f выполняется равенство $f(-l) = f(l)$, то ее тригонометрический ряд Фурье сходится равномерно на этом отрезке и сумма его равна значению функции $f \forall x \in [-l, l]$.

6.3. О дифференцировании и интегрировании рядов Фурье.

Пусть $f \in C^m[-l, l]$ и $f(-l) = f(l)$, $f'(-l) = f'(l)$, ..., $f^{(m)}(-l) = f^{(m)}(l)$. Пусть, кроме того, функция f имеет на отрезке $[-l, l]$ кусочно-непрерывную производную порядка $m+1$. Тогда: 1) сходится числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{l} \right)^m (|a_k| + |b_k|);$$

2) ряд Фурье такой функции можно m раз почленно дифференцировать на указанном отрезке.

Ряд Фурье интегрируемой по Риману на отрезке $[-l, l]$ функции f можно интегрировать почленно на этом отрезке.

6.4. Разложение в ряд Фурье по другим ортогональным системам. Ортогональные полиномы.

1) Полиномы Чебышева $T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x)$ ортогональны на интервале $] -1, 1[$ с весовой функцией $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, т.е.

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2^{2n-1}} \delta_{mn},$$

где

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

2) Полиномы Лежандра $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}$ ортогональны на отрезке $[-1, 1]$, т.е.

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn}.$$

3) Полиномы Абеля—Лагерра $L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n (x^n e^{-x})}{dx^n}$ обладают свойством ортогональности на интервале $]0, +\infty[$ с весовой функцией $x \mapsto e^x$. Таким образом, имеем

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx = \delta_{mn}.$$

4) Полиномы Чебышева—Эрмита $H_n(x) = \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{n!} \frac{d^n e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^n}$ определены на всей числовой прямой и для них справедлива формула

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} H_m(x) H_n(x) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{n!} \delta_{mn}.$$

Разложить в ряд Фурье в указанных интервалах следующие функции:

197. $f : x \mapsto \begin{cases} A, & \text{если } 0 < x < l, \\ 0, & \text{если } l < x < 2l, \end{cases}$ где A — постоянная, в интервале $]0, 2l[$.

◀ Как видим, данная функция кусочно-гладкая, причем точка $x = l$ — точка разрыва первого рода. Поэтому, согласно теореме 1 о разложении, функция f может быть представлена рядом Фурье.

Периодически (с периодом $2l$) продолжая функцию f на всю числовую прямую, построим функцию

$$f^* : x \mapsto \begin{cases} A, & \text{если } 2kl < x < (2k+1)l, \\ \frac{1}{2}A, & \text{если } x = kl, \\ 0, & \text{если } (2k-1)l < x < 2kl, \end{cases}$$

где $k \in \mathbb{Z}$.

Согласно указанной теореме, функция f^* совпадает в каждой точке x числовой прямой с ее сходящимся рядом Фурье:

$$f^*(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

где

$$a_0 = A, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f^*(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{A}{l} \int_0^l \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f^*(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{A}{l} \int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{A}{n\pi} ((-1)^{n+1} + 1).$$

Следовательно, $f^*(x) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin \frac{2n-1}{l} \pi x$ при всех $x \in]-\infty, +\infty[$, а

$$f(x) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin \frac{2n-1}{l} \pi x$$

только при $0 < x < l$ и $l < x < 2l$. ▶

198. $f: x \mapsto |x|$ в интервале $]-\pi, \pi[$.

« Эта функция непрерывна на $]-\pi, \pi[$ и имеет кусочно-непрерывную производную всюду, за исключением точки $x = 0$. Периодически (с периодом 2π) продолжив функцию f на всю числовую прямую, построим функцию $f^*: x \mapsto |x - 2k\pi|$, если $|x - 2k\pi| \leq \pi$, где $k \in \mathbb{Z}$. Построенная функция удовлетворяет требованиям теоремы о разложимости в сходящийся к ней ряд Фурье.

Поскольку функция f^* четная, то $b_n = 0$;

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1), \quad a_0 = \pi.$$

Следовательно,

$$f^*(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}, \quad -\pi < x < \pi. \blacktriangleright$$

199. $f: x \mapsto \sin ax$ в интервале $]-\pi, \pi[$, $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

« По данной функции построим функцию $f^*: x \mapsto \sin(a(x - 2k\pi))$, если $|x - 2k\pi| < \pi$, $f^*((2k+1)\pi) = 0$, $k \in \mathbb{Z}$. Эта функция является кусочно-гладкой при $|x - 2k\pi| < \pi$. Кроме того, $\frac{1}{2}(f^*(x_k - 0) + f^*(x_k + 0)) = f^*(x_k)$, где $x_k = (2k+1)\pi$ — точки разрыва первого рода функции f^* . Поэтому функцию f^* можно разложить в ряд Фурье, сходящийся к ней в каждой точке числовой прямой.

В силу нечетности функции f^* коэффициенты $a_n = 0$;

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin ax \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2 - a^2} \sin a\pi, \quad |a| \neq n.$$

Таким образом, имеем

$$f^*(x) = \frac{2 \sin \pi a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n \sin nx}{n^2 - a^2}, \quad |x| < \infty,$$

$$f(x) = \frac{2 \sin \pi a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n \sin nx}{n^2 - a^2}, \quad |x| < \pi. \blacktriangleright$$

200. $f: x \mapsto x$ в интервале $]a, a + 2l[$.

« Функция

$$f^*: x \mapsto \begin{cases} x - 2lk, & \text{если } 2lk + a < x < a + 2l(k+l), \\ a + l, & \text{если } x = 2lk, \end{cases}$$

$k \in \mathbb{Z}$, построенная на основании данной функции и совпадающая с ней на интервале $]a, a + 2l[$, является $2l$ -периодической, кусочно-гладкой. Кроме того, в точках разрыва $x = 2lk$ выполняется равенство

$$f^*(x_k) = \frac{1}{2} (f^*(x_k - 0) + f^*(x_k + 0)) = a + l.$$

Поэтому функция f^* разложима в сходящийся к ней в каждой точке $x \in]-\infty, +\infty[$ ряд Фурье.

Далее, имеем

$$a_0 = 2(a + l),$$

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-1}^1 f^*(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} x \cos \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{2l}{k\pi} \sin \frac{k\pi a}{l},$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-1}^1 f^*(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx = -\frac{2l}{k\pi} \cos \frac{k\pi a}{l}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Таким образом,

$$f^*(x) = a + l + \frac{2l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{l} (a - x), \quad |x| < \infty,$$

$$f(x) = a + l + \frac{2l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{l} (a - x), \quad a < x < a + 2l. \blacktriangleright$$

Разложить в ряд следующие периодические функции:

201. $f: x \mapsto \operatorname{sgn}(\cos x)$.

« Данная функция кусочно-непрерывна (точки разрыва x_k первого рода удовлетворяют уравнению $\cos x_k = 0$) и имеет кусочно-непрерывную производную $f'(x) = 0$ при $x \neq x_k$. Кроме того, функция f периодическая с периодом 2π и $f(x_k) = \frac{1}{2}(f(x_k - 0) + f(x_k + 0))$. Следовательно, она может быть разложена в ряд Фурье, сходящийся в каждой точке x числовой прямой.

Учитывая четность рассматриваемой функции, получаем

$$b_n = 0, \quad a_0 = 0,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sgn}(\cos x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx \, dx - \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos nx \, dx = \frac{4}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, имеем

$$\operatorname{sgn}(\cos x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n}{2} \cos nx = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos(2k+1)x, \quad -\infty < x < +\infty. \blacktriangleright$$

202. $f: x \mapsto \arcsin(\cos x)$.

« Нетрудно проверить, что эта функция непрерывна на всей числовой прямой и имеет кусочно-непрерывную производную (она не дифференцируема только в точках $x = k\pi$, где $k \in \mathbb{Z}$). Кроме того, она 2π -периодическая. Следовательно, ее ряд Фурье сходится к ней в каждой точке $x \in]-\infty, +\infty[$.

Принимая во внимание четность данной функции, находим

$$b_n = 0, \quad a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = 0, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos nx \, dx = -\frac{2}{\pi} \frac{((-1)^n - 1)}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Итак,

$$\arcsin(\cos x) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((-1)^n - 1)}{n^2} \cos nx = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}, \quad -\infty < x < +\infty. \blacktriangleright$$

203. $f: x \mapsto (x) -$ расстояние x до ближайшего целого числа.

◀ Функция f — четная, имеющая период $T = 1$; в остальном ее свойства аналогичны свойствам функции $x \mapsto \arcsin(\cos x)$, рассмотренной в предыдущем примере. Поэтому

$$b_n = 0, \quad a_0 = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} x \, dx = \frac{1}{2}, \quad a_n = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} x \cos 2\pi n x \, dx = \frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, имеем

$$(x) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(4n-2)\pi x}{(2n-1)^2}, \quad |x| < \infty. \blacktriangleright$$

204. $f: x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x}, \quad |\alpha| < 1.$

◀ Поскольку

$$\left| \alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x} \right| \leq \frac{n|\alpha|^n |x|}{|\sin x|}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n|\alpha|^n |x|}{|\sin x|} < \infty,$$

то, согласно признаку Вейерштрасса, данный ряд сходится равномерно на каждом отрезке, не содержащем точек $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Так как, кроме того, функция $x \mapsto \frac{\sin nx}{\sin x}$ непрерывна при $x \neq k\pi$, то, согласно п.4.4, функция f непрерывна при $x \neq k\pi$.

Аналогично можно показать, что функция

$$f': x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{n \cos nx \sin x - \cos x \sin nx}{\sin^2 x}$$

также непрерывна при $x \neq k\pi$. Как следует из равенств

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow k\pi} f(x) &= \lim_{x \rightarrow k\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow k\pi} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \sin nx}{\sin x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow k\pi} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n \alpha^n \cos nx}{\cos x} = \sum_{n=1}^{\infty} n \alpha^n (-1)^{(n+1)k} \equiv \beta_k, \end{aligned}$$

$x = k\pi$ — точки устранимого разрыва функции f .

Таким образом, периодическая функция

$$f^*: x \mapsto \begin{cases} f(x), & \text{если } x \neq k\pi, \\ \beta_k, & \text{если } x = k\pi, \end{cases}$$

разлагается в сходящийся к ней всюду ряд Фурье. Имеем

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sin x} (\sin(n-2)x \cos 2x + \cos(n-2)x \sin 2x) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{\sin(n-2)x}{\sin x} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \cos(n-1)x = -\alpha + \alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \cos(n-1)x. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$f^*(x) = \frac{\alpha}{\alpha^2 - 1} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{1 - \alpha^2} \cos(n-1)x = \frac{\alpha}{1 - \alpha^2} + 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{1 - \alpha^2} \cos nx. \blacktriangleright$$

205. Функцию $f: x \mapsto x^2$ разложить в ряд Фурье: а) по косинусам кратных дуг; б) по синусам кратных дуг; в) в интервале $]0, 2\pi[$. Пользуясь этими разложениями, найти суммы рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

◀ В случае а) функцию f , рассматриваемую в силу условия примера только на отрезке $[-\pi, \pi]$, периодически (с периодом 2π) продолжим на всю числовую прямую. Тогда получим непрерывную и кусочно-гладкую функцию f^* , совпадающую с функцией f при $|x| \leq \pi$ и разлагающуюся в ряд Фурье только по косинусам. Для коэффициентов a_n, b_n имеем

$$b_n = 0, \quad a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = (-1)^n \frac{4}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поэтому

$$f^*(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2} \text{ при всех } x \in]-\infty, +\infty[;$$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2} \text{ только при } |x| \leq \pi.$$

Для получения разложения в случае б) функцию $x \mapsto x^2$, рассматриваемую на интервале $]0, \pi[$, продолжим на $] -\pi, 0[$ нечетным образом, а затем так построенную функцию периодически (с периодом 2π) продолжим на всю числовую прямую. В результате получим функцию

$$f^*: x \mapsto \begin{cases} |x - 2k\pi|(x - 2k\pi), & \text{если } |x - 2k\pi| < \pi, \\ 0, & \text{если } x = (2l+1)\pi, \end{cases}$$

$k, l \in \mathbb{Z}$, определенную всюду на числовой прямой и удовлетворяющую всем условиям теоремы 1, п.6.2. Вычислив коэффициенты

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin nx dx = \frac{2\pi}{n} (-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^3} ((-1)^n - 1),$$

можем написать

$$f^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi}{n} (-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^3} ((-1)^n - 1) \right) \sin nx, \quad |x| < \infty,$$

$$x^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi}{n} (-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^3} ((-1)^n - 1) \right) \sin nx, \quad 0 \leq x < \pi.$$

Наконец, в случае в) по функции $f: x \mapsto x^2, 0 < x < 2\pi$, строим 2π -периодическую функцию f^* , совпадающую с функцией $f: x \mapsto x^2$ только на интервале $]0, 2\pi[$ и в точках разрыва $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, равную $2\pi^2$. Тогда для коэффициентов a_n и b_n функции f^* имеем

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^*(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{8\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^*(x) \cos nx dx = \frac{4}{n^2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin nx \, dx = -\frac{4\pi}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно,

$$f^*(x) = \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad |x| < \infty,$$

$$x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad 0 < x < 2\pi.$$

Полагая в случае а) $x = \pi$ и $x = 0$, получаем соответственно $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$. Складывая почленно эти два сходящихся ряда, находим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \quad \blacktriangleright$$

Пользуясь формулами $\cos x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\sin x = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$, где $z = e^{ix}$, $\bar{z} = e^{-ix}$, получить разложения в ряд Фурье следующих функций:

206. $x \mapsto \cos^{2m} x$, $n \in \mathbb{N}$.

◀ Пользуясь указанными формулами, а также формулой бинома Ньютона, можем написать

$$\begin{aligned} \cos^{2m} x &= \frac{1}{4^m} (z + \bar{z})^{2m} = \frac{1}{4^m} \sum_{k=0}^{2m} C_{2m}^k z^{2(m-k)} = \frac{1}{4^m} \sum_{k=0}^{2m} (\cos 2(m-k)x + i \sin 2(m-k)x) = \\ &= \frac{1}{4^m} \sum_{k=0}^{2m} C_{2m}^k \cos 2(m-k)x = \frac{C_{2m}^m}{4^m} + \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{k=0}^m C_{2m}^{m-k} \cos 2kx. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тождеством $C_{2m}^k = C_{2m}^{2m-k}$, а также четностью функции $x \mapsto \cos 2kx$ и нечетностью функции $x \mapsto \sin 2(m-k)x$. ▶

207. $x \mapsto \frac{q \sin x}{1 - 2q \cos x + q^2}$, $|q| < 1$.

◀ Применяя указанные в предыдущем примере формулы и разлагая данную дробь на простейшие, получаем

$$\frac{q \sin x}{1 - 2q \cos x + q^2} = \frac{1}{2i(1 - qz)} - \frac{1}{2i(1 - q\bar{z})}.$$

Поскольку $|qz| = |q\bar{z}| = |q| < 1$, то справедливы разложения в степенные ряды функций $qz \mapsto (1 - qz)^{-1}$ и $q\bar{z} \mapsto (1 - q\bar{z})^{-1}$ по степеням qz и $q\bar{z}$ соответственно. Имеем

$$\frac{q \sin x}{1 - 2q \cos x + q^2} = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} q^n (z^n - \bar{z}^n) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} = \sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx. \quad \blacktriangleright$$

208. $x \mapsto \ln(1 - 2q \cos x + q^2)$, $|q| < 1$.

◀ Дифференцируя данную функцию по x и пользуясь предыдущим разложением, получаем

$$(\ln(1 - 2q \cos x + q^2))'_x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx,$$

откуда

$$\ln(1 - 2q \cos x + q^2) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \cos nx + C.$$

Полагая здесь $x = \pi$, находим

$$\ln(1 + q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} (-1)^{n+1} + C.$$

Отсюда, в силу формулы V, § 5, следует, что $C = 0$. Итак, окончательно получаем

$$\ln(1 - 2q \cos x + q^2) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \cos nx. \blacktriangleright$$

209. Разложить в ряд Фурье неограниченную периодическую функцию $f: x \mapsto \ln \left| \sin \frac{x}{2} \right|$.

◀ Пусть $0 < \varepsilon \leq x - 2k\pi \leq 2\pi - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ и $k \in \mathbb{Z}$. Тогда степенной ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad (1)$$

где $z = e^{ix}$, сходится при всех указанных x .

Далее, покажем, что

$$\ln \left| \sin \frac{x}{2} \right| = \operatorname{Re} \left(\ln \frac{1-z}{2} \right), \quad \ln 1 = 0. \quad (2)$$

Действительно, пользуясь известным равенством

$$\left| \sin \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

и представлением $w = |w|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, где w — некоторое комплексное число, φ — его аргумент, $\operatorname{Re} \ln w = \ln |w|$, получаем (положив $w = \frac{1-z}{2}$)

$$\operatorname{Re} \left(\ln \frac{1-z}{2} \right) = \ln \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} = \ln \left| \sin \frac{x}{2} \right|,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, используя формулу (2) и разложение функции $z \mapsto -\ln(1-z)$ в ряд (1), имеем

$$\ln \left| \sin \frac{x}{2} \right| = -\ln 2 - \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = -\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}.$$

Так как число ε можно взять как угодно малым, то отсюда следует, что полученное разложение справедливо при всех $x \neq 2k\pi$. ▶

210. Разложить в ряд Фурье функцию $f: x \mapsto \int_0^x \ln \sqrt{\left| \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \right|} dt$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

◀ Производная функции f , равная

$$f': x \mapsto \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right| = \frac{1}{2} \left(\ln \left| \cos \frac{x}{2} \right| - \ln \left| \sin \frac{x}{2} \right| \right),$$

является 2π -периодической функцией и на интервалах $0 < |x| < 2\pi$ может быть представлена рядом Фурье. Действительно, на основании предыдущего примера имеем

$$\ln \left| \sin \frac{x}{2} \right| = -\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}, \quad x \neq 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\ln \left| \cos \frac{x}{2} \right| = -\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n}, \quad x \neq (2k+1)\pi.$$

Поэтому, если $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, то

$$f'(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \cos nx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}.$$

Интегрируя полученный ряд почленно, находим

$$f(x) = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)t}{2n-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}. \blacktriangleright$$

211. Как следует продолжить заданную в интервале $]0, \frac{\pi}{2}[$ непрерывную функцию f в интервал $] -\pi, \pi[$, чтобы ее разложение в ряд Фурье имело вид $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n-1)x$, $-\pi < x < \pi$?

◀ Поскольку $b_n = 0$, то функция f — четная, т.е. ее следует продолжить в интервал $] -\pi, 0[$ четным образом. Далее, замечая, что в данном разложении отсутствуют члены $a_{2n} \cos 2nx$, заключаем, что

$$a_{2n} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos 2nx dx = 0, \quad n \in \mathbb{Z}_0.$$

Разбивая этот интеграл на два интеграла:

$$\int_0^{\pi} f(x) \cos 2nx dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos 2nx dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x) \cos 2nx dx$$

и производя замену: в первом интеграле $x = \frac{1}{2}(\pi - y)$, а во втором $x = \frac{1}{2}(\pi + y)$, получаем

$$\int_0^{\pi} f(x) \cos 2nx dx = \frac{(-1)^n}{2} \int_0^{\pi} \left(f\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2} + \frac{y}{2}\right) \right) \cos ny dy = 0,$$

или

$$\int_0^{\pi} f(x) \cos 2nx dx = \frac{(-1)^n}{2} \int_{-\pi}^0 \left(f\left(\frac{\pi}{2} + \frac{y}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{2}\right) \right) \cos ny dy = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(f\left(\frac{\pi}{2} + \frac{y}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{2}\right) \right) \cos ny dy = 0,$$

т.е. функция $\Phi: y \mapsto f\left(\frac{\pi}{2} + \frac{y}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{2}\right)$ является нечетной. Однако функция Φ очевидно, четная, поэтому $\Phi(y) = 0$.

Итак, должно быть $f\left(\frac{\pi+y}{2}\right) = -f\left(\frac{\pi-y}{2}\right)$, $|y| < \pi$ или, если вернуться к переменной x по формуле $x = \frac{\pi-y}{2}$, $f(\pi-x) = -f(x)$. Следовательно, график так построенной функции должен быть симметричным относительно прямой $x = 0$, а точки $x = \pm \frac{\pi}{2}$ должны быть центрами симметрии его на интервалах $]0, \pi[$ и $]-\pi, 0[$ соответственно. ►

212. Функцию $f : x \mapsto x \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ разложить в интервале $]0, \frac{\pi}{2}[$: а) по косинусам нечетных дуг; б) по синусам нечетных дуг.

◀ а) Рассмотрим 2π -периодическую функцию f^* , которая в интервале $]-\pi, \pi[$ определяется следующим образом:

$$f^* : x \mapsto \begin{cases} f(x), & \text{если } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ f(-x), & \text{если } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0, \\ (x-\pi)\left(x-\frac{\pi}{2}\right), & \text{если } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \\ (x+\pi)\left(x+\frac{\pi}{2}\right), & \text{если } -\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Очевидно, построенная функция непрерывна в каждой точке x числовой прямой и имеет кусочно-непрерывную производную. Кроме того, она четна и ее коэффициенты Фурье a_{2n} , $n \in \mathbb{Z}_0$, равны нулю, так как

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(x) \cos 2nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^*(x) \cos 2nx \, dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos 2nx \, dx + \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (x-\pi) \left(x-\frac{\pi}{2}\right) \cos 2nx \, dx = \\ &= \frac{2}{\pi} (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \left(\frac{\pi}{2} - y\right) \cos 2ny \, dy + \frac{2}{\pi} (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(y - \frac{\pi}{2}\right) y \cos 2ny \, dy = 0 \end{aligned}$$

(здесь использовались подстановки: $x = \frac{\pi}{2} - y$ и $x = \frac{\pi}{2} + y$).

Таким образом, функция f^* , совпадающая в интервале $]0, \frac{\pi}{2}[$ с функцией f , может быть разложена в ряд Фурье только по косинусам нечетных дуг. Имеем

$$\begin{aligned} b_n &= 0, \quad a_{2n-1} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^*(x) \cos(2n-1)x \, dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos(2n-1)x \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (x-\pi) \left(x-\frac{\pi}{2}\right) \cos(2n-1)x \, dx \right) = \\ &= -\frac{2}{(2n-1)^2} \left(1 + \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^n}{(2n-1)} \right), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Разложения функций f^* и f имеют вид

$$\begin{aligned} f^*(x) &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \left(1 + \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^n}{(2n-1)} \right) \cos(2n-1)x, \quad |x| < \infty, \\ f(x) &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \left(1 + \frac{4(-1)^n}{\pi(2n-1)} \right) \cos(2n-1)x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

б) Поскольку в разложении Фурье должны отсутствовать косинусы, то функция f^* , совпадающая в интервале $]0, \frac{\pi}{2}[$ с функцией f , нечетна. Кроме того, по условию, должно быть

$$b_{2n} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^*(x) \sin 2nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^*(x) \sin 2nx \, dx + \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f^*(x) \sin 2nx \, dx = 0.$$

Произведя во втором интеграле замену $x = \frac{1}{2}(\pi - y)$, а в третьем $x = \frac{1}{2}(\pi + y)$, получим

$$b_{2n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi} \int_0^{\pi} \left(f^* \left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{2} \right) - f^* \left(\frac{\pi}{2} + \frac{y}{2} \right) \right) \sin ny \, dy = 0,$$

или

$$b_{2n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi} \int_{-\pi}^0 \left(f^* \left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{2} \right) - f^* \left(\frac{\pi}{2} + \frac{y}{2} \right) \right) \sin ny \, dy = 0.$$

Из двух последних равенств находим

$$b_{2n} = \frac{4}{\pi} (-1)^{n+1} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f^* \left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{2} \right) - f^* \left(\frac{\pi}{2} + \frac{y}{2} \right) \right) \sin ny \, dy = 0,$$

откуда следует, что функция $y \mapsto f^* \left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{2} \right) - f^* \left(\frac{\pi}{2} + \frac{y}{2} \right)$ четна. Но так как она еще и нечетна (что очевидно), то $f^* \left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{2} \right) = f^* \left(\frac{\pi}{2} + \frac{y}{2} \right)$, или, возвращаясь к переменной x , можем записать $f^*(x) = f^*(\pi - x)$. Геометрически это равенство означает, что график функции f^* в интервале $]0, \pi[$ симметричен относительно прямой $x = \frac{\pi}{2}$.

Таким образом, для построения графика функции f^* с указанными свойствами следует, во-первых, график функции f зеркально отобразить относительно прямой $x = \frac{\pi}{2}$ в интервал $]0, \pi[$; во-вторых, так полученный в интервале $]0, \pi[$ график функции f^* отобразить нечетным образом относительно точки $x = 0$ как центра симметрии всего графика в интервал $] - \pi, 0[$. Тогда для коэффициентов Фурье получим

$$a_0 = a_n = 0, \quad b_{2n} = 0,$$

$$\begin{aligned} b_{2n-1} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^*(x) \sin(2n-1)x \, dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \sin(2n-1)x \, dx + \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) (x - \pi) \sin(2n-1)x \, dx = \\ &= \frac{2(-1)^n}{(2n-1)^2} \left(1 + \frac{4(-1)^n}{\pi(2n-1)} \right), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Следовательно, разложение функции f^* имеет вид

$$f^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2(-1)^n}{(2n-1)^2} + \frac{8}{\pi(2n-1)^3} \right) \sin(2n-1)x. \blacktriangleright$$

213. Функция f антипериодическая с периодом π , т.е. $f(x + \pi) = -f(x)$. Какой особенностью обладает ряд Фурье этой функции в интервале $] - \pi, \pi[$?

◀ Предполагая, что данная функция разложима в ряд Фурье, с учетом ее антипериодичности, получаем

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + \pi) dx = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = -a_0,$$

откуда следует, что $a_0 = 0$.

Далее, находим

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + \pi) \cos nx dx = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = (-1)^{n+1} a_n$$

(здесь мы использовали равенство $f(x + 2\pi) = f(x)$). Следовательно, $a_{2n} = 0$. Аналогично устанавливаем, что $b_{2n} = 0$, $n \in \mathbb{N}$. ▶

214. Зная коэффициенты Фурье a_n, b_n интегрируемой функции f , имеющей период 2π , вычислить коэффициенты Фурье \bar{a}_n, \bar{b}_n , $n \in \mathbb{Z}_0$, "смещенной" функции $x \mapsto f(x + h)$, $h = \text{const}$.

◀ Учитывая 2π -периодичность и интегрируемость функции $x \mapsto f(x + h)$, имеем

$$\bar{a}_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + h) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t) (\cos nt \cos nh + \sin nt \sin nh) dt = a_n \cos nh + b_n \sin nh,$$

$$\bar{b}_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + h) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t) (\sin nt \cos nh - \cos nt \sin nh) dt = b_n \cos nh - a_n \sin nh,$$

$n \in \mathbb{N}$, $\bar{a}_0 = a_0$. ▶

215. Зная коэффициенты Фурье a_n, b_n , $n \in \mathbb{Z}_0$, интегрируемой функции f с периодом 2π , вычислить коэффициенты Фурье A_n, B_n , $n \in \mathbb{Z}_0$, функции Стеклова

$$f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(\xi) d\xi.$$

◀ Ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \sim f(x)$$

2π -периодической интегрируемой функции f , согласно п. 6.3, можно почленно интегрировать. Поэтому, интегрируя его почленно по ξ в пределах от $x - h$ до $x + h$, получаем

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{nh} \sin nh \cos nx + \frac{b_n}{nh} \sin nh \sin nx \right) = f_h(x).$$

Отсюда находим $A_0 = a_0$, $A_n = \frac{a_n}{nh} \sin nh$, $B_n = \frac{b_n}{nh} \sin nh$. ▶

Разложить в ряд Фурье по полиномам Чебышева:

216. $f: x \mapsto x^3, x \in]-1, 1[$.

◀ Исходим из общего представления функции рядом Фурье:

$$x^3 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x), \quad (1)$$

где a_n — коэффициенты Фурье, подлежащие определению. Для их вычисления воспользуемся свойствами ортогональности полиномов Чебышева в интервале $]-1, 1[$ с весом $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Умножив обе части равенства (1) на весовую функцию и проинтегрировав по $x \in]-1, 1[$, в силу указанного свойства и нечетности функции $x \mapsto x^3$, получим $a_0 = 0$. Далее, умножив обе части равенства (1) на $\frac{T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}$, $m \in \mathbb{N}$, и проинтегрировав по $x \in]-1, 1[$, найдем

$$\int_{-1}^1 \frac{x^3 T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi a_m}{2^{2m-1}}.$$

Для вычисления интеграла воспользуемся явным выражением полиномов Чебышева и произведем подстановку $\arccos x = t$. Тогда получим

$$a_m = \frac{2^m}{\pi} \int_0^\pi \cos^3 t \cos(mt) dt = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq 1, m \neq 3, \\ \frac{3}{4}, & \text{если } m = 1, \\ 1, & \text{если } m = 3. \end{cases}$$

Таким образом, $x^3 = \frac{3}{4}T_1(x) + T_3(x) \forall x \in]-1, 1[$. ▶

217. $f: x \mapsto |x|$, $x \in]-1, 1[$.

◀ Как и в предыдущем примере, представляем данную функцию в виде $f: x \mapsto a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n T_n(x)$. Последовательно умножая обе части этого равенства на $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ и интегрируя по $x \in]-1, 1[$, а также умножая на $\frac{T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ и интегрируя по $x \in]-1, 1[$, получаем (пользуясь при этом свойством ортогональности полиномов):

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{|x| dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\pi}.$$

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{2^m}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{|x| \cos(m \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{2^m}{\pi} \int_0^\pi |\cos t| \cos(mt) dt = \\ &= \frac{2^m}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos(mt) dt - \frac{2^m}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos t \cos(mt) dt = \begin{cases} 0, & m = 1, \\ \frac{2^{m+1}}{\pi} \frac{\cos \frac{m\pi}{2}}{1-m^2}, & m \neq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Итак, при $|x| < 1$ имеем

$$|x| = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k (-1)^{k+1}}{4k^2 - 1} T_{2k}(x). \blacktriangleright$$

Разложить в ряд Фурье по полиномам Лежандра функции:

218.

$$f: x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{если } -1 < x < 0, \\ 1, & \text{если } 0 < x < 1. \end{cases}$$

◀ Имеем $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x)$. Поэтому

$$a_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_k(x) dx = \frac{2k+1}{2} \int_0^1 P_k(x) dx =$$

$$= \frac{2k+1}{2} \int_0^1 \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k(x^2-1)^k}{dx^k} dx = \frac{2k+1}{2^{k+1} k!} \frac{d^{k-1}(x^2-1)^k}{dx^{k-1}} \Big|_0^1.$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_0(x) dx = \frac{1}{2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Остается вычислить $\frac{d^{k-1}(x^2-1)^k}{dx^{k-1}} \Big|_0^1$. Очевидно, при любом $k \geq 1$ в точке $x=1$ это выражение равно нулю. Для вычисления значения его в точке $x=0$ воспользуемся формулой бинома Ньютона:

$$\begin{aligned} ((x^2-1)^k)^{(k-1)} &= \left(\sum_{l=0}^k C_k^l (-1)^l x^{2(k-l)} \right)^{(k-1)} = \\ &= \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} C_k^l (-1)^l (2k-2l)(2k-2l-1) \dots (-2l+k+2) x^{k-2l+1}. \end{aligned} \quad (1)$$

Из этого соотношения следует, что если k — число четное, то при $x=0$ сумма (1) равна нулю; если $k=2m+1$ — число нечетное, то в точке $x=0$ сумма (1) равна

$$C_{2m+1}^{m+1} (-1)^{m+1} 2m(2m-1) \dots 3 \cdot 2.$$

Таким образом

$$a_{2m} = 0, \quad a_{2m+1} = \frac{(4m+3)(-1)^m (2m)!}{2^{2m+2} m! (m+1)!}, \quad m \in \mathbb{Z}_0.$$

Следовательно,

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (4m+3)(2m)!}{2^{2m+2} m! (m+1)!} P_{2m+1}(x). \quad \blacktriangleright$$

219. $f: x \mapsto |x|$ при $|x| < 1$.

◀ Как и в предыдущем примере, запишем

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x), \quad a_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 |x| P_k(x) dx.$$

При $k=2m+1$ имеем $a_{2m+1} = 0$, так как в этом случае подынтегральная функция нечетная. При $k=2m$ подынтегральная функция четна, поэтому

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2}, \quad a_{2m} = \frac{4m+1}{2^{2m}(2m)!} \int_0^1 x \frac{d^{2m}(x^2-1)^{2m}}{dx^{2m}} dx = \\ &= \frac{4m+1}{2^{2m}(2m)!} \left(x \frac{d^{2m-1}(x^2-1)^{2m}}{dx^{2m-1}} \Big|_0^1 - \frac{d^{2m-2}(x^2-1)^{2m}}{dx^{2m-2}} \Big|_0^1 \right) = \\ &= \frac{4m+1}{2^{2m}(2m)!} ((x^2-1)^{2m})^{(2m-2)} \Big|_{x=0}, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Аналогично проделанному в примере 218 можем записать

$$((x^2-1)^{2m})^{(2m-2)} \Big|_{x=0} = (-1)^{m+1} C_{2m}^{m+1} (2m-2)!.$$

Итак, окончательно имеем

$$f(x) = \frac{1}{2} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (4m+1)(2m-2)!}{2^{2m} (m-1)! (m+1)!} P_{2m}(x). \blacktriangleright$$

Разложить в ряд Фурье по полиномам Лагерра $L_n(x)$ при $x > 0$ следующие функции:

220. $f: x \mapsto e^{-ax}$.

◀ Представим функцию f в виде $f: x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n(x)$ и используем ортогональность полиномов Лагерра на $x > 0$ с весом e^{-x} . При $n \geq 1$ получим

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^{+\infty} e^{-x(1+a)} L_n(x) dx = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n} dx = \\ &= \frac{1}{n!} \left(e^{-ax} \frac{d^{n-1}(x^n e^{-x})}{dx^{n-1}} \Big|_0^{+\infty} + a \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{d^{n-1}(x^n e^{-x})}{dx^{n-1}} dx \right). \end{aligned}$$

Продолжая интегрирование по частям, находим

$$a_n = \frac{a^n}{n!} \int_0^{+\infty} x^n e^{-(1+a)x} dx.$$

Применяя к последнему интегралу также метод интегрирования по частям, после n -го шага получаем

$$a_n = \frac{a^n}{(1+a)^n} \int_0^{+\infty} e^{-(1+a)x} dx = \frac{a^n}{(1+a)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Принимая во внимание еще, что $a_0 = \frac{1}{1+a}$, окончательно имеем

$$f(x) = \frac{1}{1+a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{(1+a)^n} L_n(x). \blacktriangleright$$

221. $f: x \mapsto x^n$, $n \geq 1$.

◀ Имеем

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!, \\ a_k &= \frac{1}{k!} \int_0^{+\infty} x^n \frac{d^k(x^k e^{-x})}{dx^k} dx = \frac{1}{k!} \left(x^n \frac{d^{k-1}(x^k e^{-x})}{dx^{k-1}} \Big|_0^{+\infty} - n \int_0^{+\infty} x^{n-1} \frac{d^{k-1}(x^k e^{-x})}{dx^{k-1}} dx \right) = \\ &= \frac{(-1)^k}{k!} n(n-1) \dots (n-k+1) \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = \frac{n!}{k!} (-1)^k n(n-1) \dots (n-k+1), \quad 1 \leq k \leq n. \end{aligned}$$

Если же $k > n$, то $a_k = 0$. Таким образом,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(n!)^2}{k!(n-k)!} L_k(x). \blacktriangleright$$

Разложить в ряд Фурье по полиномам Чебышева—Эрмита следующие функции:

$$222. f: x \mapsto \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

◀ Напишем искомое разложение в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k H_k(x),$$

где

$$a_k = \frac{k!}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} f(x) H_k(x) dx = \frac{-k!}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x) dx + \frac{k!}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x) dx,$$

$$a_0 = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Пользуясь явным выражением полиномов $H_k(x)$ и производя в первом интеграле замену x на $-x$, получаем

$$a_k = \frac{1 + (-1)^{k+1}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{d^k \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)}{dx^k} dx = - \frac{(1 + (-1)^{k+1})}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(k-1)} \Big|_{x=0}$$

Для вычисления выражения $\left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(k-1)} \Big|_{x=0}$ рассмотрим функцию $u: x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$. Взяв про-

изводную, замечаем, что эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению $u'(x) + xu(x) = 0$. Применяя к этому равенству формулу Лейбница, получаем

$$u^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^{(k)} (u(x))^{(n-1-k)} = 0.$$

Полагая здесь $x = 0$, имеем рекуррентную формулу $u^{(n)}(0) = -(n-1)u^{(n-2)}(0)$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Поскольку $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$, то отсюда нетрудно получить $u^{(2l)}(0) = (-1)^l (2l-1)!!$, $l \in \mathbb{N}$, $u^{(2l+1)}(0) = 0$.

Таким образом, если $k = 2l + 1$, то $a_{2l+1} = (-1)^{l+1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (2l-1)!!$, $l \in \mathbb{N}$, $a_1 = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}$; если же $k = 2l$, то $a_{2l} = 0$.

Следовательно, окончательно можем написать

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1} (2l)!}{2^{l-1} \sqrt{2\pi} l!} H_{2l+1}(x). \blacktriangleright$$

$$223. f: x \mapsto |x|.$$

◀ Как и в предыдущем примере, имеем

$$a_k = \frac{1 + (-1)^k}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(k)} dx = \frac{1 + (-1)^k}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(k-2)} \Big|_{x=0}, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

$$a_{2l-1} = 0, \quad a_{2l} = \frac{(-1)^{l-1} (2l-2)!}{2^{l-2} (l-1)! \sqrt{2\pi}}, \quad l \in \mathbb{N},$$

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x| e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}.$$

Поэтому разложение представляется в виде

$$|x| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1} (2l-2)!}{2^{l-2} (l-1)! \sqrt{2\pi}} H_{2l}(x). \blacktriangleright$$

224. $f: x \mapsto e^{-ax}$.

◀ Вычислим коэффициенты разложения

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(k)} dx, \quad k \in \mathbb{Z}_0.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-ax} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(k-1)} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + a \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^{(k-1)} dx \right),$$

или $a_k = a a_{k-1}$. Полагая в этой рекуррентной формуле $k = 1, 2, \dots$ и принимая во внимание, что

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax - \frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+a)^2 + \frac{a^2}{2}} dx = \frac{e^{\frac{a^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = e^{\frac{a^2}{2}},$$

получаем

$$a_k = e^{\frac{a^2}{2}} a^k, \quad k \in \mathbb{Z}_0.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$e^{-ax} = e^{\frac{a^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} a^k H_k(x). \blacktriangleright$$

Упражнения для самостоятельной работы

Разложить в тригонометрический ряд Фурье следующие функции:

120. $f: x \mapsto 2x + 5, x \in]-1, 5[$. **121.** $f: x \mapsto \sin \pi^2 x, x \in]-1, 1[$.

122. $f: x \mapsto \operatorname{sgn} \sin 2x, x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. **123.** $f: x \mapsto \cos x, x \in]0, 1[$.

124. $f: x \mapsto \cos x, x \in [2, 3]$. **125.** $f: x \mapsto \arcsin(\sin 2x), x \in \mathbb{R}$.

126. $f: x \mapsto e^{-\cos x} (\cos(2x - \sin x) + 2 \cos x \cos(\sin x)) - \cos x$.

127. $f: x \mapsto e^{-\cos x} (\sin(2x - \sin x) - 2 \cos x \sin(\sin x)) + \sin x$.

128. $f: x \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi a(n+x)^2}, a > 0, x \in \mathbb{R}$. **129.** $f: x \mapsto \sin x \ln \left(2 \cos \frac{x}{2} \right)$.

130. $f: x \mapsto \cos x \ln \left(2 \cos \frac{x}{2} \right)$. **131.** $f: x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt, x \in]-\pi, \pi[$.

132. $f: x \mapsto \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt, x \in]-1, 1[$.

§ 7. Суммирование рядов. Вычисление определенных интегралов с помощью рядов

7.1. Непосредственное суммирование.

Пусть требуется просуммировать сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n \in \mathcal{L}. \quad (1)$$

Представляем u_n в виде $u_n = v_{n+1} - v_n$, где $v_{n+1} = S_n + v_1$, (S_n) — последовательность частичных сумм данного ряда. Тогда, если $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v_\infty$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = v_\infty - v_1.$$

В том случае, когда общий член ряда имеет вид

$$u_n = \frac{1}{a_n a_{n+1} \dots a_{n+m}}, \quad u_n \in \mathbb{R}(\mathbb{C}),$$

где $a_{n+k} = a_n + kd$, $k = \overline{0, m}$, $d = \text{const.}$ то

$$v_n = -\frac{1}{md} \cdot \frac{1}{a_n a_{n+1} \dots a_{n+m-1}}.$$

7.2. Метод суммирования рядов, основанный на теореме Абеля.

Пусть ряд (1), п.7.1, сходится. Тогда его сумму можно найти по формуле

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n.$$

7.3. Суммирование тригонометрических рядов.

Если сумма степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n, \quad z = e^{ix},$$

известна и равна $C(x) + iS(x)$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \cos nx = C(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin nx = S(x).$$

Часто бывает полезным ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \ln \frac{1}{1-z}, \quad \ln 1 = 0,$$

сходящийся при $|z| \leq 1$, за исключением точки $z = 1$.

Найти суммы рядов:

225. $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$

◀ Нетрудно видеть, что общий член этого ряда u_n равен $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$, где числа $n, n+1, n+2$ образуют арифметическую прогрессию с разностью 1. Поэтому, согласно п.7.1, получаем

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n - v_1,$$

где $v_n = -\frac{1}{2} \frac{1}{n(n+1)}$, $m = 2$, $a_n = n$. Но так как $v_1 = -\frac{1}{4}$, а $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$, то $S = \frac{1}{4}$. ▶

226. $\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots$

◀ Общий член данного ряда $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$. Следовательно, по признаку сравнения, ряд абсолютно сходится, ибо $|u_n| \sim \frac{1}{n^2}$ при $n \rightarrow \infty$.

Рассмотрим степенной ряд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}.$$

Этот ряд абсолютно сходится при $|x| \leq 1$ и, как любой степенной ряд внутри интервала сходимости, имеет производную

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \ln \frac{1}{1-x}.$$

Интегрируя обе части полученного равенства, находим

$$f(x) = (1-x) \ln(1-x) + x + C.$$

Поскольку $f(0) = 0$, то отсюда следует, что $C = 0$. Итак,

$$f(x) = (1-x) \ln(1-x) + x.$$

Как видим, здесь вполне применим метод суммирования рядов Абеля (см. п.7.2). Поэтому имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} = \lim_{x \rightarrow -1+0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \lim_{x \rightarrow -1+0} ((1-x) \ln(1-x) + x) = 2 \ln 2 - 1. \blacktriangleright$$

$$227. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

◀ Представляя данный сходящийся ряд с помощью метода неопределенных коэффициентов в виде разности двух сходящихся рядов:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)},$$

применяем метод непосредственного суммирования. Для каждого из двух последних рядов имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{(n+2)(n+3)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{N+2} - \frac{1}{N+3} \right) \right) = \frac{1}{3},$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} \right) \right) = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $S = \frac{1}{4}$. \blacktriangleright

$$228. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

◀ Преобразовывая частичную сумму S_n ряда к виду

$$S_n = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+m} \right) = \frac{1}{m} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+m} \right) = \frac{1}{m} \left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{1}{k} \right),$$

получаем

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{m} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} \right). \blacktriangleright$$

$$229. \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots$$

◀ Приводя данный ряд к виду

$$\frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right) + \left(\frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} \right) + \dots \right) = \frac{1}{2} S,$$

где S — сумма ряда, рассмотренного в примере 226, получаем

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots = \ln 2 - \frac{1}{2}. \blacktriangleright$$

$$230. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}.$$

◀ Преобразовывая ряд к виду

$$S = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$$

и используя результат примера 228, находим, что $S = \frac{3}{4}$. ▶

$$231. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2(n+1)^2}.$$

◀ Разлагая общий член ряда на простые дроби, находим

$$\frac{2n-1}{n^2(n+1)^2} = 4 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \frac{1}{n^2} - \frac{3}{(n+1)^2}.$$

Поскольку

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1,$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2(n+1)^2} = 7 - \frac{2}{3}\pi^2. \quad \blacktriangleright$$

$$232. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}.$$

◀ Представляя частичную сумму S_n ряда в виде

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{2k+1} \right) = 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \left(\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k} \right) \right) = 2 \left(1 - \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} \right)$$

и пользуясь формулой $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + C + \epsilon_n$, $\epsilon_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, находим $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2(1 - \ln 2)$. ▶

$$233. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!}.$$

◀ Дифференцируя степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{n+1}}{n!} = 2xe^{2x}$$

почленно, получаем

$$(2xe^{2x})' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)2^{n+1}x^n}{n!},$$

откуда, полагая $x = 1$, находим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!} = 3e^2. \quad \blacktriangleright$$

$$234. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}.$$

◀ Общий член ряда разлагаем на простые дроби:

$$\frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2} = -\frac{3}{4n} + \frac{3}{4(n+2)} + \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \\ + \frac{1}{4(n+2)^2} = \frac{-3}{2n(n+2)} + \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{4(n+2)^2}.$$

Суммируя ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1 - \frac{1}{4},$$

окончательно находим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{39}{16}. \blacktriangleright$$

$$235. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}.$$

◀ Замечая, что значение степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1} n}{(2n+1)!} = \frac{1}{2} x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{2} (x \cos x - \sin x), \quad |x| < \infty,$$

при $x = 1$ совпадает с данным числовым рядом, имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} = \frac{1}{2} (\cos 1 - \sin 1). \blacktriangleright$$

$$236. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + n - 2}.$$

◀ Разлагая дробь $\frac{1}{n^2+n-2}$ на простые, можем написать, что

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n-1}}{n^2 + n - 2} = \frac{1}{3} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n-1}}{n-1} - \frac{1}{3x^3} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+2}}{n+2} = \\ = \frac{1}{3} \ln(1+x) - \frac{1}{3x^3} \left(-\ln(1+x) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right), \quad 0 < |x| < 1.$$

Отсюда, применяя теорему Абеля, находим

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + n - 2} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n-1}}{n^2 + n - 2} = \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{5}{18}. \blacktriangleright$$

$$237. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n^2 + 1)}{(2n)!} x^{2n}.$$

◀ Представляя данный ряд в виде суммы двух сходящихся рядов:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n-1)!} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad |x| < \infty,$$

и замечая, что сумма второго ряда равна $\cos x$, вычисляем сумму первого ряда. Имеем

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n x^{2n}}{(2n-1)!} = x \varphi(x),$$

где

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Интегрируя почленно этот ряд, находим

$$\int_0^x \varphi(t) dt = -\frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = -\frac{x}{2} \sin x,$$

откуда $\varphi(x) = -\frac{1}{2} \sin x - \frac{x}{2} \cos x$. Следовательно, $f(x) = -\frac{x}{2}(\sin x + x \cos x)$, а

$$S(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \cos x - \frac{x}{2} \sin x, \quad |x| < \infty. \blacktriangleright$$

238.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(2n+1)!}.$$

◀ Пусть $x > 0$. Полагая $x = y^2$, имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(2n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 y^{2n}}{(2n+1)!} = y S_1(y),$$

где $S_1(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 y^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Интегрируя этот ряд почленно, получаем

$$\int_0^y S_1(t) dt = \frac{y}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n y^{2n-1}}{(2n+1)!} = \frac{y}{2} S_2(y), \quad (1)$$

где

$$S_2(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n y^{2n-1}}{(2n+1)!}.$$

Аналогично находим

$$\int_0^y S_2(t) dt = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{1}{2y} (\operatorname{sh} y - y). \quad (2)$$

Дифференцируя обе части равенства (2) по y , находим функцию S_2 . Точно так же находим функцию S_1 из уравнения (1). Окончательно имеем

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(2n+1)!} = \frac{1}{4} \left((x+1) \frac{\operatorname{sh} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \operatorname{ch} \sqrt{x} \right), \quad x > 0, \quad S(0) = 0$$

(заметим, что в точке $x = 0$ правая часть этой формулы, на основании теоремы Абеля, равна ее предельному значению при $x \rightarrow +0$).

При $x \leq 0$ выполняем аналогичные выкладки. В результате приходим к такому ответу:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(2n+1)!} = \frac{1}{4} \left((x+1) \frac{\sin \sqrt{-x}}{\sqrt{-x}} - \cos \sqrt{-x} \right), \quad x < 0, \quad S(0) = 0. \blacktriangleright$$

С помощью почленного дифференцирования найти сумму рядов:

239.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)}.$$

◀ Дифференцируя данный ряд почленно дважды (в интервале сходимости степенной ряд можно почленно дифференцировать любое число раз), находим

$$f''(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2(n-1)} = \frac{2}{1+x^2}, \quad |x| < 1.$$

Отсюда последовательным интегрированием по x дважды получаем

$$f'(x) = 2 \operatorname{arctg} x + C_1, \quad f(x) = 2x \operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2) + C_1 x + C_2.$$

Поскольку $f(0) = f'(0) = 0$, то $C_1 = C_2 = 0$. Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)} = 2x \operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2).$$

Поскольку данный степенной ряд сходится на концах интервала сходимости $x = \pm 1$, то, согласно теореме Абеля и непрерывности правой части, можем утверждать, что последнее соотношение справедливо при $|x| \leq 1$. ▶

$$240. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}.$$

◀ Обозначая сумму этого ряда через $S(x)$, $|x| < \infty$, и интегрируя ряд почленно, получаем

$$\int S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!} + C = xe^{x^2} + C.$$

Дифференцируя по x обе части этого равенства, находим

$$S(x) = (1+2x^2)e^{x^2}, \quad |x| < \infty. \quad \blacktriangleright$$

Используя метод Абеля, найти суммы следующих рядов:

$$241. 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots$$

◀ Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1} = S(x).$$

Легко найти, что он сходится абсолютно при $|x| < 1$. Далее видим, что в точке $x = 1$ степенной ряд совпадает со сходящимся (в силу признака Лейбница) данным числовым рядом. Следовательно, по теореме Абеля, будем иметь

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots = \lim_{x \rightarrow 1-0} S(x).$$

Остается найти $S(x)$. Дифференцируя ряд почленно, получаем

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n} = \frac{1}{1+x^3}, \quad |x| < 1,$$

откуда

$$S(x) = \int \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{3} \ln \frac{1+x}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Поскольку $S(0) = 0$, то $C = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$. Следовательно,

$$S(x) = \frac{1}{3} \ln \frac{1+x}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

Поэтому окончательно находим $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. ▶

$$242. 1 - \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots$$

◀ Поскольку при $|x| < 1$ справедливо разложение (см. формулу IV, § 5)

$$(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}$$

и данный числовой ряд, в силу признака Лейбница, сходится, то, по теореме Абеля, получаем

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots = \lim_{x \rightarrow 1-0} (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \blacktriangleright$$

$$243. 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \dots$$

◀ Сходимость этого ряда показана в примере 167. Там же мы получили разложение

$$x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} = \arcsin x, \quad |x| \leq 1,$$

из которого следует, что $1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \dots = \frac{\pi}{2}$. ▶

Найти суммы следующих тригонометрических рядов:

$$244. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

◀ Рассматриваем этот ряд как мнимую часть степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \ln \left(\frac{1}{1-z} \right), \quad z = e^{ix}, \quad 0 < |x| < \pi,$$

где под $\ln z$ понимаем ту его ветвь, для которой $\ln 1 = 0$. Тогда будем иметь

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \operatorname{Im} \ln \left(\frac{1}{1-z} \right) = \operatorname{arctg} \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) - \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) = \begin{cases} \frac{\pi-x}{2}, & \text{если } 0 < x < \pi, \\ \frac{-\pi-x}{2}, & \text{если } -\pi < x < 0. \end{cases}$$

Поскольку функция S 2π -периодическая и $S(k\pi) = 0$, $k \in \mathbb{Z}$, то, используя последний результат, можем написать, что

$$S(x) = \begin{cases} \frac{(2k+1)\pi-x}{2}, & \text{если } 2k\pi < x < 2(k+1)\pi, \\ 0, & \text{если } x = 2k\pi. \blacktriangleright \end{cases}$$

$$245. \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2 - 1}.$$

◀ Рассматривая ряд как действительную часть ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n^2 - 1}, \quad z = e^{ix}, \quad -\pi < x \leq \pi,$$

можем записать

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2 - 1} = \operatorname{Re} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n^2 - 1}.$$

При условии, что $z \neq -1$, последний ряд представляем в виде суммы двух сходящихся рядов:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n^2 - 1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-z)^{n+1}}{n} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-z)^{n-1}}{n} = \frac{1}{2} \left(z \ln(1+z) + 1 - \frac{z}{2} - \frac{\ln(1+z)}{z} \right).$$

Следовательно,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2 - 1} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(z \ln(1+z) + 1 - \frac{z}{2} - \frac{\ln(1+z)}{z} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \cos x - \sin x \right), \quad e^{ix} \neq -1.$$

Заметим, что ограничение $e^{ix} \neq -1$ здесь можно снять. Действительно, если $e^{ix} = -1$, то $\cos nx = (-1)^n$. При этом получаем числовой ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$, равный $\frac{3}{4}$ (см. пример 230).

Кроме того, если $\cos nx = (-1)^n$, то $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \cos x - x \sin x \right) = \frac{3}{4}$. Итак,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \cos x - x \sin x \right)$$

$\forall x \in [-\pi, \pi]$. Далее, в силу 2π -периодичности суммы этого ряда, значения повторяются. ►

$$246. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}.$$

◀ Легко находим, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!} = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \operatorname{Re} e^z = \operatorname{Re} e^{\cos x + i \sin x} = e^{\cos x} \cos(\sin x), \quad |x| < \infty. \quad \blacktriangleright$$

Найти суммы следующих рядов:

$$247. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((n-1)!)^2}{(2n)!} (2x)^{2n}.$$

◀ Дифференцируя этот ряд по x дважды (в интервале сходимости $|x| < 1$) и умножая вторую производную его на $1 - x^2$, после некоторых преобразований рядов получаем дифференциальное уравнение относительно искомой суммы $S(x)$ ряда:

$$(1 - x^2)S''(x) - xS'(x) - 4 = 0.$$

Производя в нем замену независимого переменного x по формуле $t = \arcsin x$, приходим к уравнению $S''(t) = 4$, из которого находим

$$S(t) = 2t^2 + C_1 t + C_2, \quad C_1, C_2 = \text{const.}$$

Так как $S(0) = S'(0) = 0$, то отсюда получаем

$$S(x) = 2(\arcsin x)^2, \quad |x| < 1.$$

Нетрудно найти, что числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((n-1)!)^2}{(2n)!} 4^n,$$

являющийся значением данного степенного ряда при $x = \pm 1$, в силу признака Гаусса, сходится. А тогда, по теореме Абеля и на основании непрерывности функции $x \rightarrow 2(\arcsin x)^2$ на сегменте $[-1, 1]$, можем утверждать, что $S(x) = 2(\arcsin x)^2$ при $|x| \leq 1$. ►

$$248. \frac{1!}{x+1} + \frac{2!}{(x+1)(x+2)} + \frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \dots$$

◀ Прежде всего устанавливаем область сходимости. Для этого, замечая, что общий член ряда $a_n = \frac{n!}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$, $x \neq -k$, $k \in \mathbb{N}$, начиная с некоторого достаточно большого номера имеет определенный знак, применяем признак Гаусса. Имеем $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{x}{n} - \frac{x}{n(n+1)}$. Отсюда, в силу приведенного признака, следует, что ряд сходится только при $x > 1$.

Найдем теперь сумму $S(x)$ данного ряда. С этой целью представим общий член ряда в виде

$$a_n = \frac{1}{x-1} \left(\frac{n!}{(1+x)(2+x)\dots(n-1+x)} - \frac{(n+1)!}{(1+x)(2+x)\dots(n+x)} \right), \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

и вычислим частичную сумму $S_n(x)$ рассматриваемого ряда:

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \left(\left(\frac{2!}{1+x} - \frac{3!}{(1+x)(2+x)} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{3!}{(1+x)(2+x)} - \frac{4!}{(1+x)(2+x)(3+x)} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \dots + \left(\frac{n!}{(1+x)(2+x)\dots(n-1+x)} - \frac{(n+1)!}{(1+x)(2+x)\dots(n+x)} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{x-1} - \frac{(n+1)!}{(x-1)(1+x)(2+x)\dots(n+x)} = \frac{1}{x-1} - \frac{(n+1)a_n}{x-1}. \end{aligned}$$

Поскольку ряд сходится, а члены ряда положительны и монотонно убывают, то, в силу примера 13, справедливо соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)a_n = 0$. Принимая его во внимание, получаем

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \frac{1}{x-1}, \quad x > 1. \blacktriangleright$$

249. $\frac{a_1}{a_2+x} + \frac{a_1}{a_2+x} \frac{a_2}{a_3+x} + \dots$ при условии, что $x > 0$, $a_n > 0$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ —

расходящийся.

◀ Представляя общий член $b_n(x)$ ряда в виде

$$\begin{aligned} b_n(x) &= \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{(a_2+x)(a_3+x)\dots(a_{n+1}+x)} = \\ &= \frac{1}{x} \left(\frac{a_1 a_2 \dots a_n}{(a_2+x)(a_3+x)\dots(a_n+x)} - \frac{a_1 a_2 \dots a_{n+1}}{(a_2+x)\dots(a_{n+1}+x)} \right), \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \end{aligned}$$

находим частичную сумму $S_n(x)$ данного ряда:

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{a_1}{a_2+x} + \frac{1}{x} \left(\left(\frac{a_1 a_2}{a_2+x} - \frac{a_1 a_2 a_3}{(a_2+x)(a_3+x)} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{a_1 a_2 a_3}{(a_2+x)(a_3+x)} - \frac{a_1 a_2 a_3 a_4}{(a_2+x)(a_3+x)(a_4+x)} \right) + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}{(a_2+x)(a_3+x)\dots(a_n+x)} - \frac{a_1 a_2 \dots a_{n+1}}{(a_2+x)\dots(a_{n+1}+x)} \right) \right) = \\ &= \frac{a_1}{a_2+x} + \frac{1}{x} \left(\frac{a_1 a_2}{a_2+x} - \frac{a_1 a_2 \dots a_{n+1}}{(a_2+x)(a_3+x)\dots(a_{n+1}+x)} \right), \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \end{aligned}$$

Так как

$$0 < \frac{a_2 a_3 \dots a_{n+1}}{(a_2+x)(a_3+x)\dots(a_{n+1}+x)} = \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{a_2}\right) \left(1 + \frac{x}{a_3}\right) \dots \left(1 + \frac{x}{a_{n+1}}\right)} \leq \frac{1}{1+x \sum_{q=2}^n \frac{1}{a_q}}$$

и ряд с положительными членами может расходиться только к бесконечности, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 a_2 \dots a_{n+1}}{(a_2 + x)(a_3 + x) \dots (a_{n+1} + x)} = 0.$$

Следовательно, $S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \frac{a_1}{x}$. ►

$$250. \frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} + \dots$$

◀ Представляя частичную сумму ряда в виде

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right) + \left(\frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{1-x^{2^n}} - \frac{1}{1+x^{2^n}} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} + \left(\frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{1+x} \right) + \left(\frac{1}{1-x^4} - \frac{1}{1+x^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \dots + \left(\frac{1}{1-x^{2^n}} - \frac{1}{1+x^{2^{n-1}}} \right) - \frac{1}{1+x^{2^n}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} + \dots + \frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}} - \frac{1}{1+x^{2^n}} \right), \end{aligned}$$

получаем

$$S_n(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} + S_n(x) - \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} - \frac{1}{1+x^{2^n}} \right),$$

откуда

$$S_n(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x^{2^n}} - \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}.$$

Поэтому, если $|x| < 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \frac{x}{1-x}$. Если же $|x| > 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \frac{1}{1-x}$. Следовательно, сумма ряда

$$S(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x}, & \text{если } |x| < 1, \\ \frac{1}{1-x}, & \text{если } |x| > 1. \end{cases} \blacktriangleright$$

$$251. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}.$$

◀ Рассматривая частичную сумму $S_n(x)$ ряда

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{x^2}{(1-x)^2} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{x}{(1+x)(x^2+x+1)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x^2}{(x^2+x+1)(x^3+x^2+x+1)} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(1+x+\dots+x^{n-1})(1+x+\dots+x^n)} \right) \end{aligned}$$

и замечая, что

$$\frac{x^{n-1}}{(1+x+x^2+\dots+x^{n-1})(1+x+\dots+x^n)} = \frac{1+x+\dots+x^{n-1}}{1+x+\dots+x^n} - \frac{1+x+\dots+x^{n-2}}{1+x+\dots+x^{n-1}},$$

$$n \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

получаем

$$S_n(x) = \frac{x^2}{(1-x)^2} \frac{1+x+\dots+x^{n-1}}{1+x+\dots+x^n} = \frac{x^2}{(1-x)^2} \frac{1-x^n}{1-x^{n+1}}.$$

Отсюда следует, что если $|x| < 1$, то $S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \frac{x^2}{(1-x)^2}$. Если же $|x| > 1$, то $S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$, где $S(x)$ — сумма ряда. ►

С помощью разложения подынтегральной функции в ряд вычислить следующие интегралы:

$$252. \int_0^1 \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x} dx.$$

◀ При $|x| \leq 1$ справедливо разложение

$$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!! x^{2n+1}}{(2n)!! (2n+1)}$$

(см. пример 168). Разделив почленно этот ряд на x , $x \neq 0$, и проинтегрировав его в пределах от 0 до 1, получим

$$\int_0^1 \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x} dx = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!! (2n+1)^2} \blacktriangleright$$

$$253. \int_0^1 x^{p-1} \ln(1-x^q) dx, \quad p > 0, q > 0.$$

◀ Данный интеграл, вообще говоря, является несобственным, поэтому

$$\int_0^1 x^{p-1} \ln(1-x^q) dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow +0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow +0}} \int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} x^{p-1} \ln(1-x^q) dx.$$

Поскольку при $0 < x < 1$ справедливо разложение $\ln(1-x^q) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{qn}}{n}$, то

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} x^{p-1} \ln(1-x^q) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_1^{qn+p} - (1-\varepsilon_2)^{qn+p}}{n(qn+p)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_1^{qn+p}}{n(qn+p)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\varepsilon_2)^{qn+p}}{n(qn+p)} = \\ &= \varepsilon_1^p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_1^{qn}}{n(qn+p)} - (1-\varepsilon_2)^p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((1-\varepsilon_2)^q)^n}{n(qn+p)}. \end{aligned}$$

Замечая, что оба степенных ряда сходятся при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, на основании теоремы Абеля, имеем

$$\int_0^1 x^{p-1} \ln(1-x^q) dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow +0} \varepsilon_1^p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\varepsilon_1^q)^n}{n(qn+p)} - \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} (1-\varepsilon_2)^p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((1-\varepsilon_2)^q)^n}{n(qn+p)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(qn+p)} \blacktriangleright$$

$$254. \int_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x) dx.$$

◀ С помощью однократного применения метода интегрирования по частям приводим данный интеграл к виду

$$\int_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x) dx = -\int_0^1 \ln(1-x) dx - \int_0^1 \ln x dx + \int_0^1 \frac{\ln x dx}{1-x}. \quad (1)$$

Считая, что $0 < \varepsilon_1 \leq x \leq 1 - \varepsilon_2$, записываем соответствующие разложения в степенные ряды:

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad \ln x = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{n}, \quad \frac{\ln(1-x)}{1-x} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^{n-1}}{n}.$$

Поскольку

$$\int_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x) dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow +0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow +0}} \int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} \ln x \cdot \ln(1-x) dx,$$

то из (1) почленным интегрированием степенных рядов, на основании теоремы Абеля, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x) dx &= \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow +0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow +0}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\varepsilon_2)^{n+1} - \varepsilon_1^{n+1}}{n(n+1)} + \right. \\ &\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\varepsilon_1)^{n+1} - \varepsilon_2^{n+1}}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_2^n - (1-\varepsilon_1)^n}{n^2} \right) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2 - \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

$$255. \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{e^{2\pi x} - 1}.$$

◀ Пологая $t = e^{-2\pi x}$, получаем один из интегралов, вычисленных нами в предыдущем примере:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{e^{2\pi x} - 1} = -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^1 \frac{\ln t dt}{1-t}.$$

Поэтому имеем

$$\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{e^{2\pi x} - 1} = \frac{1}{24} \blacktriangleright$$

256. Разложить по целым положительным степеням модуля k , $0 \leq k < 1$, полный эллиптический интеграл первого рода

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

◀ Поскольку $k^2 \sin^2 \varphi \leq k^2 < 1$, то возможно разложение (см. формулу IV, §5):

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \sin^{2n} \varphi. \quad (1)$$

В силу оценки $k^{2n} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sin^{2n} \varphi \leq \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \leq k^{2n}$ и сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} k^{2n}$, ряд (1) сходится равномерно (по признаку Вейерштрасса) по φ . Кроме того, члены ряда (1) являются непрерывными функциями, поэтому, по одному из свойств функциональных рядов, рассматриваемый функциональный ряд можно почленно интегрировать. Имеем

$$F(k) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi d\varphi.$$

Отсюда, пользуясь равенством $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi d\varphi = \frac{\pi}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, окончательно находим

$$F(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 k^{2n} \right). \blacktriangleright$$

Доказать равенства:

$$257. \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

◀ Поскольку

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \int_0^1 e^{-\varphi(x)} dx,$$

где

$$\varphi(x) = \begin{cases} x \ln x, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

то

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (\varphi(x))^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 \varphi^n(x) dx,$$

откуда, на основании примера 195, г), получаем нужную формулу. ▶

258.

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) \cos nx dx = \begin{cases} \frac{\pi}{n!}, & \text{если } n \in \mathbb{N}, \\ 2\pi, & \text{если } n = 0. \end{cases}$$

◀ Разлагая функцию $z \mapsto e^{\cos x} \cos(\sin x)$ в ряд, находим

$$e^{\cos x} \cos(\sin x) = \operatorname{Re}(e^z) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos kx}{k!},$$

где $z = e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

Полученный ряд, в силу признака Вейерштрасса, сходится равномерно на всей числовой прямой и функции $x \mapsto \cos kx$ непрерывны, поэтому ряд можно почленно интегрировать вместе с функцией $x \mapsto \cos nx$. Имеем

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) \cos nx dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_0^{2\pi} \cos kx \cos nx dx = \frac{\pi}{n!}, \quad \text{если } n \in \mathbb{N}, \text{ и}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_0^{2\pi} \cos kx dx = 2\pi. \blacktriangleright$$

Вычислить интегралы:

$$259. \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2} dx.$$

◀ Пусть $|\alpha| < 1$. Пользуясь примером 164, находим

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2} dx = \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1} x \sin nx dx.$$

Поскольку функции $x \mapsto x \sin nx$ непрерывны на $[0, \pi]$ и функциональный ряд справа, в силу мажорантного признака Вейерштрасса, равномерно сходится (здесь $|\alpha^{n-1} x \sin nx| \leq \pi |\alpha|^{n-1}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha|^{n-1}$ сходится), то рассматриваемый ряд можно почленно интегрировать.

Имеем

$$I = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \alpha^{n-1} = \begin{cases} \frac{\pi}{\alpha} \ln(1 + \alpha), & \text{если } \alpha \neq 0, \\ \pi, & \text{если } \alpha = 0. \end{cases}$$

Пусть $|\alpha| > 1$. Тогда, преобразовывая подынтегральную функцию к виду

$$\frac{x \sin x}{\alpha^2(\alpha^{-2} - 2\alpha^{-1} \cos x + 1)}$$

и пользуясь полученным выше результатом, можем записать

$$I = \frac{\pi}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right), \quad |\alpha| > 1.$$

Пусть $\alpha = 1$. Тогда исходный интеграл имеет вид

$$I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t dt}{\operatorname{tg} t}.$$

Функция

$$f: t \mapsto \begin{cases} 1, & \text{если } t = 0, \\ \frac{1}{\operatorname{tg} t}, & \text{если } 0 < t < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{если } t = \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

непрерывна на отрезке $[0, \frac{\pi}{2}]$. Следовательно, она интегрируема, т.е. последний интеграл имеет смысл.

Кроме того, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ в силу признака Лейбница, сходится. Поэтому по теореме Абеля

$$I|_{\alpha=1} = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \pi \ln 2.$$

Пусть $\alpha = -1$. Тогда интеграл

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x \operatorname{tg} \frac{x}{2} dx$$

расходится, так как $x \operatorname{tg} \frac{x}{2} \sim \frac{12\pi}{\pi - x}$ при $x \rightarrow \pi$.

Таким образом, окончательно получаем

$$I = \begin{cases} \frac{\pi}{\alpha} \ln(1 + \alpha), & \text{если } -1 < \alpha < 0, \text{ или } 0 < \alpha \leq 1, \\ \pi, & \text{если } \alpha = 0, \\ \frac{\pi}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right), & \text{если } |\alpha| > 1. \blacktriangleright \end{cases}$$

260. $\int_0^{\pi} \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx.$

§ 7. Суммирование рядов. Вычисление определенных интегралов с помощью рядов 111

◀ Пусть $|\alpha| < 1$. Тогда, пользуясь результатом примера 208, получаем

$$I = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n} \int_0^{\pi} \cos nx dx = 0. \quad (1)$$

Пусть $|\alpha| > 1$. В этом случае, преобразовывая значение подынтегральной функции к виду $\ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) = 2 \ln |\alpha| + \ln \left(1 - \frac{2}{\alpha} \cos x + \frac{1}{\alpha^2}\right)$ и пользуясь равенством (1), находим

$$I = 2\pi \ln |\alpha|.$$

Пусть $\alpha = 1$. Тогда, по теореме Абеля, можем написать

$$\ln(2(1 - \cos x)) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}, \quad x \neq 2k\pi.$$

Следовательно,

$$I|_{\alpha=1} = \int_0^{\pi} \ln(2(1 - \cos x)) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{\epsilon}^{\pi} \ln(2(1 - \cos x)) dx = -2 \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{\epsilon}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} dx.$$

Замечая, что, по признаку Дирихле, ряд, стоящий под знаком последнего интеграла, равномерно сходится, а функции $x \mapsto \cos nx$ непрерывны, выполняем почленно интегрирование:

$$I|_{\alpha=1} = 2 \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\epsilon}{n^2}.$$

Так как $\frac{|\sin n\epsilon|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ и ряд $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ сходится, то, по мажорантному признаку Вейерштрасса, ряд

$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n\epsilon}{n^2}$ равномерно (по параметру ϵ) сходится. Кроме того, $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \sin n\epsilon = 0$. Следовательно,

по одному из свойств равномерно сходящихся рядов, получаем

$$I|_{\alpha=1} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{\sin n\epsilon}{n^2} = 0.$$

Аналогично устанавливаем, что $I|_{\alpha=-1} = 0$.

Окончательно имеем

$$I = \begin{cases} 0, & \text{если } |\alpha| \leq 1, \\ 2\pi \ln |\alpha|, & \text{если } |\alpha| > 1. \end{cases} \blacktriangleright$$

Найти суммы следующих матричных рядов:

$$261. S = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A^n}{3^n} - \frac{A^{2n}}{8^n} \right), \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

◀ Поскольку $\sum_{n=0}^{\infty} B^n = (I - B)^{-1}$ при $\|B\| < 1$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A}{3} \right)^n = \left(I - \frac{A}{3} \right)^{-1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{2n}}{8^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A^2}{8} \right)^n = \left(I - \frac{A^2}{8} \right)^{-1}.$$

Заметим, что в случае первого ряда $B = \frac{1}{3}A$ и $\|B\| = \frac{1}{3} \|A\| = \frac{1}{3} \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{7}}{3} < 1$,

а в случае второго $-B = \frac{A^2}{8}$ и $\|B\| = \frac{1}{8} \|A^2\| = \frac{1}{8} \sqrt{1^2 + 4^2 + 2^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{2}}{8} < 1$.

Таким образом,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A^n}{3^n} - \frac{A^{2n}}{8^n} \right) = \left(I - \frac{A}{3} \right)^{-1} - \left(I - \frac{A^2}{8} \right)^{-1}. \quad (1)$$

Вычисляя обратные матрицы

$$\left(I - \frac{A}{3}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \left(I - \frac{A^2}{8}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{8} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{9}{8} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{32}{89} \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$$

и подставляя их значение в равенство (1), получаем

$$S = \frac{1}{89} \begin{pmatrix} 17 & 57 \\ -\frac{57}{2} & 17 \end{pmatrix} \blacktriangleright$$

$$262. S = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)A^n, \text{ где } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

◀ Поскольку

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)A^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} A^n\right)^2 = ((I - A)^{-1})^2,$$

то

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}^{-2} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}^2 \left(\frac{72}{35}\right)^2 = \frac{432}{245} \begin{pmatrix} \frac{13}{12} & -1 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \blacktriangleright$$

Упражнения для самостоятельной работы

Найти суммы следующих рядов:

$$133. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+2)(n+5)}. \quad 134. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3 - 3n + 2}. \quad 135. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+2}{(n^2-1)^2}.$$

$$136. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}. \quad 137. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-nx}, \quad x > 0. \quad 138. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2(n+1)}.$$

$$139. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n(n-1)}. \quad 140. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{(n-1)n(n+1)}. \quad 141. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} \sin(2n+1)x.$$

С помощью разложения подынтегральной функции в ряд вычислить следующие интегралы (в примерах 145—148 A — постоянная матрица):

$$142. \int_0^1 \operatorname{erf}(x) dx, \text{ где } \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \text{ — интеграл вероятностей.}$$

$$143. \int_0^1 \operatorname{si}(x) dx, \text{ где } \operatorname{si}(x) = - \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \text{ — интегральный синус.}$$

$$144. \int_0^{\pi} \sin(\sin x) dx. \quad 145. \int_0^1 e^{Ax^2} dx, \quad A^2 = -A.$$

$$146. \int_0^{\pi} \sin(A\sqrt{x}) dx, \quad A^2 = A. \quad 147. \int_0^{\pi} \cos(A\sqrt{x}) dx, \quad A^2 = I.$$

$$148. \int_0^1 x \ln(I + Ax) dx, \quad A = \begin{pmatrix} \sin \varphi & -\cos \varphi \\ -\cos \varphi & -\sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Дифференциальное исчисление функций векторного аргумента

§ 1. Предел функции. Непрерывность

1.1. Предел функции.

Пусть числовая функция f определена в области $E \setminus \{x_0\}$, где $E \subset \mathbb{R}^m$, а $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ — внутренняя или предельная точка области E .

Определение 1 (Гейне). Функция f имеет предел (предельное значение) при $x \rightarrow x_0$ (в точке x_0), если существует число $A \in \mathbb{R}$ такое, что для произвольной последовательности (x_n) значений $x_n \in E \setminus \{x_0\}$, сходящейся к точке x_0 , соответствующая последовательность $(f(x_n))$ значений функции f сходится к A .

При этом число A называется *пределом функции f при $x \rightarrow x_0$* , что записывается

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \quad \text{или} \quad f(x) \rightarrow A \quad \text{при} \quad x \rightarrow x_0,$$

или

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_1^0 \\ \dots \\ x_m \rightarrow x_m^0}} f(x_1, \dots, x_m) = A,$$

или

$$f(x_1, \dots, x_m) \rightarrow A \quad \text{при} \quad x_1 \rightarrow x_1^0, \dots, x_m \rightarrow x_m^0.$$

Определение 2 (Коши). Функция f имеет предел при $x \rightarrow x_0$, если существует такое число A , что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что $\forall x \in E$, удовлетворяющих условию $0 < \|x - x_0\| < \delta$, где

$$\|x - x_0\| = \rho(x, x_0) = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \dots + (x_m - x_m^0)^2},$$

выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Оба определения предела (Гейне и Коши) эквивалентны.

1.2. Непрерывность.

Пусть $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^m$, а $x_0 \in D$.

Определение. Функция f называется непрерывной в точке $x_0 \in D$, если выполняется любое из эквивалентных условий:

- 1) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, как только $\|x - x_0\| < \delta$;
- 2) для произвольной последовательности (x_n) значений $x_n \in D$, сходящейся к точке x_0 , соответствующая последовательность $(f(x_n))$ значений функции f сходится при $n \rightarrow \infty$ к $f(x_0)$;

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{или} \quad f(x) - f(x_0) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x - x_0 \rightarrow 0;$$

- 4) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что

$$f(S(x_0, \delta)) \subset]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[,$$

или, что то же самое,

$$f: S(x_0, \delta) \rightarrow]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[,$$

где $S(x_0, \delta)$ — открытый шар в пространстве \mathbb{R}^m с центром в точке x_0 и радиусом δ .

Функция f непрерывна в области D , если она непрерывна в каждой точке области D .

1.3. Равномерная непрерывность.

Определение. Функция $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \in \mathbb{R}^m$, называется равномерно-непрерывной в области D , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что $\forall x \in D \wedge \forall y \in D$, удовлетворяющих условию $\|x - y\| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Теорема (Кантора). Если функция $f: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{D} \subset \mathbb{R}^m$, непрерывна в замкнутой ограниченной области \bar{D} , то она равномерно-непрерывна в этой области.

1. Показать, что для функции $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 1, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = -1,$$

в то время как $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ не существует.

◀ Имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y}{y} = -1.$$

Поскольку последовательности $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $(x'_n, y'_n) = \left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right)$ сходятся к точке $(0, 0)$ при $n \rightarrow \infty$, а соответствующие последовательности значений функций сходятся к различным пределам

$$f(x_n, y_n) = 0 \rightarrow 0, \quad f(x'_n, y'_n) = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{3}{n}} \rightarrow \frac{1}{3}$$

при $n \rightarrow \infty$, то предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ не существует. ▶

2. Показать, что для функции $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 0,$$

тем не менее $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ не существует.

◀ Равенство повторных пределов следует из того, что $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$.

То, что двойной предел не существует, следует из того, что последовательности $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $(x'_n, y'_n) = \left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right)$ сходятся к точке $(0, 0)$, а соответствующие последовательности значений функции сходятся при $n \rightarrow \infty$ к различным предельным значениям:

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}} \rightarrow 1, \quad f(x'_n, y'_n) = \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4} + \frac{4}{n^2}} \rightarrow 0. \quad \blacktriangleright$$

3. Показать, что для функции $f(x, y) = (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$ оба повторных предела

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right)$ и $\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right)$ не существуют, но, тем не менее, существует $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$.

◀ Пусть $y \neq \frac{1}{n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$, тогда $y \sin \frac{1}{y} \neq 0$. Очевидно, последовательности $(x_n) = \left(\frac{1}{n\pi}\right)$, $(x'_n) = \left(\frac{2}{(4n+1)\pi}\right)$ сходятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. При этом соответствующие последовательности значений функции $(f(x_n, y)) = (0)$, $(f(x'_n, y)) = \left(y \sin \frac{1}{y}\right)$ при $n \rightarrow \infty$ сходятся к различным предельным значениям. Следовательно, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ не существует. Аналогично

устанавливается, что $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ также не существует. Из этого вытекает, что оба повторных предела не существуют. Однако из неравенства $0 \leq \left| (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} \right| \leq |x+y| \leq |x| + |y|$, справедливого при любых $x \neq 0, y \neq 0$, следует, что

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left((x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} \right) = 0. \blacktriangleright$$

4. Существует ли предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$?

◀ Этот предел не существует, так как последовательности $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), (x'_n, y'_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$ сходятся к точке $(0, 0)$ при $n \rightarrow \infty$, в то время как соответствующие последовательности значений функции сходятся к различным предельным значениям:

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} \rightarrow 1, \quad f(x'_n, y'_n) = \frac{\frac{2}{n^3}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. ▶

5. Чему равен предел функции $f(x, y) = x^2 e^{-(x^2 - y)}$ вдоль любого луча $x = t \cos \alpha, y = t \sin \alpha, 0 \leq t < +\infty$, при $t \rightarrow +\infty$? Можно ли эту функцию назвать бесконечно малой при $x \rightarrow \infty$ и $y \rightarrow \infty$?

◀ Обозначим $F(t, \alpha) = f(t \cos \alpha, t \sin \alpha)$, тогда

$$F(t, \alpha) = t^2 \cos^2 \alpha e^{-t^2 \cos^2 \alpha + t \sin \alpha}, \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi.$$

Если $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$, то $F(t, \pm \frac{\pi}{2}) = 0$ и, следовательно, $F(t, \pm \frac{\pi}{2}) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

Если же $\alpha \neq \pm \frac{\pi}{2}$, то $\cos^2 \alpha \neq 0$ и $t^2 \cos^2 \alpha - t \sin \alpha \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$. Тогда, по правилу Лопитала, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t, \alpha) &= \cos^2 \alpha \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2}{e^{t^2 \cos^2 \alpha - t \sin \alpha}} = \cos^2 \alpha \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2t}{(2t \cos^2 \alpha - \sin \alpha) e^{t^2 \cos^2 \alpha - t \sin \alpha}} = \\ &= \cos^2 \alpha \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\cos^2 \alpha - \frac{\sin \alpha}{2t}\right) e^{t^2 \cos^2 \alpha - t \sin \alpha}} = 0. \end{aligned}$$

Поэтому $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t, \alpha) = 0$ при любых α .

Функция f не является бесконечно малой при $x \rightarrow \infty$ и $y \rightarrow \infty$, поскольку при $x_n = n - +\infty, y_n = n^2 \rightarrow +\infty$ получаем равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 e^{-(n^2 - n^2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty$, противоречащее определению бесконечно малой величины. ▶

6. Найти $\lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{y \rightarrow b} f(x, y) \right)$ и $\lim_{y \rightarrow b} \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \right)$, если:

а) $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4}, a = \infty, b = \infty$; б) $f(x, y) = \frac{x^y}{1 + xy}, a = +\infty, b = +0$;

в) $f(x, y) = \sin \frac{\pi x}{2x + y}, a = \infty, b = \infty$; г) $f(x, y) = \frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1 + xy}, a = 0, b = \infty$;

д) $f(x, y) = \log_x(x + y), a = 1, b = 0$.

◀ а) При $x \neq 0, y \neq 0$ имеем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{y^2} + 1}{\frac{x^2}{y^2} + y^2} \right) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4} \right) = \lim_{y \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

б) Функция $y \mapsto x^y$ непрерывна при $y > 0$ (x считаем постоянным), поэтому $\lim_{y \rightarrow +0} x^y = 1$; при постоянном значении $y > 0$ функция $x \mapsto x^y$ непрерывна при всех $x > 0$, поэтому $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^y = +\infty$.

Пользуясь полученными равенствами, находим

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\lim_{y \rightarrow +0} \frac{x^y}{1+x^y} \right) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{y \rightarrow +0} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^y}{1+x^y} \right) = 1.$$

в) При каждом фиксированном x функция непрерывна по y , если $|y| > 2|x|$, а при всяком фиксированном y — непрерывна по x , как только $|x| > \frac{|y|}{2}$. Поэтому

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \sin \frac{\pi x}{2x+y} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \frac{\pi x}{2x+y} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \frac{\pi}{2 + \frac{y}{x}} = 1.$$

Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\lim_{y \rightarrow -\infty} \sin \frac{\pi x}{2x+y} \right) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \frac{\pi x}{2x+y} \right) = 1.$$

г) При фиксированном $x \neq 0$ $\lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{xy}{1+xy} = 1$, поэтому, в силу непрерывности тангенса, получаем $\lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1+xy} = 0$.

Пусть теперь y фиксированное. Тогда, пользуясь тем, что $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$, имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \frac{xy}{1+xy}}{\frac{xy}{1+xy}} (1+xy)^{-1} = 1.$$

На основании этих равенств находим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1+xy} \right) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1+xy} \right) = 1.$$

д) Имеем $f(x, y) = \log_x(x+y) = \frac{\ln(x+y)}{\ln x}$, $x > 0$, $x+y > 0$, $x \neq 1$. Из непрерывности логарифмической функции следует, что

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(x+y)}{\ln x} = \frac{\ln x}{\ln x} = 1.$$

Следовательно, $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 1$.

Поскольку

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\ln(x+y)}{\ln x} = \begin{cases} +\infty, & \text{если } -1 < y < 0, \\ -\infty, & \text{если } 0 < y < +\infty, \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\ln(x+y)}{\ln x} = \begin{cases} -\infty, & \text{если } -1 < y < 0, \\ +\infty, & \text{если } 0 < y < +\infty, \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x+y)}{\ln x} = 1, \quad \text{если } y = 0,$$

то $\lim_{x \rightarrow 1} f(x, y)$, а вместе с ним и $\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 1} f(x, y) \right)$ не существуют. ►

Найти следующие двойные пределы:

$$7. \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow -\infty}} \frac{x+y}{x^2 - xy + y^2}.$$

◀ Пользуясь очевидным неравенством $x^2 - xy + y^2 \geq xy$, получаем (при $x \neq 0, y \neq 0$)

$$0 \leq \left| \frac{x+y}{x^2 - xy + y^2} \right| \leq \left| \frac{x+y}{xy} \right| \leq \frac{1}{|y|} + \frac{1}{|x|}.$$

Отсюда следует, что

$$0 \leq \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \left| \frac{x+y}{x^2 - xy + y^2} \right| \leq \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|} \right) = 0.$$

Таким образом, $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+y}{x^2 - xy + y^2} = 0$. ▶

$$8. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}.$$

◀ Пусть $x \neq 0, y \neq 0$, тогда

$$0 < \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4} = \frac{x^2}{x^4 + y^4} + \frac{y^2}{x^4 + y^4} \leq \frac{x^2}{x^4} + \frac{y^2}{y^4} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}. \quad (1)$$

Поскольку $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) = 0$, то, пользуясь неравенством (1), заключаем, что

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4} = 0. \quad \blacktriangleright$$

$$9. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow a}} \frac{\sin xy}{x}.$$

◀ Имеем $\frac{\sin xy}{x} = \frac{\sin xy}{xy} \cdot y, y \neq 0$. Так как $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow a}} \frac{\sin xy}{xy} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ ($xy = t, a \neq \infty$), то

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow a}} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \lim_{y \rightarrow a} y = a. \quad \blacktriangleright$$

$$10. \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x^2 + y^2)e^{-(x+y)}.$$

◀ Пользуясь элементарным неравенством

$$(x^2 + y^2)e^{-(x+y)} = \frac{x^2}{e^{x+y}} + \frac{y^2}{e^{x+y}} < \frac{x^2}{e^x} + \frac{y^2}{e^y},$$

справедливым при $x > 0, y > 0$, получаем

$$0 \leq \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x^2 + y^2)e^{-(x+y)} \leq \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left(\frac{x^2}{e^x} + \frac{y^2}{e^y} \right) = 0.$$

Отсюда $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x^2 + y^2)e^{-(x+y)} = 0$. ▶

$$11. \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2}.$$

◀ Из очевидного неравенства $x^2 + y^2 \geq 2xy$ следует, что $\frac{xy}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2}$. Поэтому $0 < \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2} \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{x^2} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$. Отсюда вытекает, что $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2} = 0$. ▶

$$12. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}.$$

◀ Из неравенств $x^2 y^2 \leq \frac{1}{4}(x^2 + y^2)^2$, $1 \geq (x^2 + y^2)^2 y^2 \geq (x^2 + y^2)^{\frac{1}{4}}(x^2 + y^2)^2$, справедливых при $0 < x^2 + y^2 < 1$, и из того, что

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^{\frac{1}{4}}(x^2 + y^2)^2 = \lim_{t \rightarrow +0} t^{\frac{1}{4}} t^2 = \lim_{t \rightarrow +0} t^{\frac{9}{4}} = 1,$$

вытекает равенство $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^2 y^2 = 1$. ▶

$$13. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}.$$

◀ В силу непрерывности показательной и логарифмической функций, имеем

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} \exp \left\{ \frac{1}{1 + \frac{y}{x}} \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right\} = e. \quad \blacktriangleright$$

$$14. \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

◀ Пользуясь непрерывностью логарифмической функции и тем, что $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \neq 0$, получаем

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\ln 2}{1} = \ln 2. \quad \blacktriangleright$$

15. По каким направлениям φ существует конечный предел:

$$a) \lim_{\rho \rightarrow +0} e^{\frac{x}{x^2 + y^2}}; \quad б) \lim_{\rho \rightarrow +\infty} e^{x^2 - y^2} \sin 2xy, \text{ если } x = \rho \cos \varphi \text{ и } y = \rho \sin \varphi.$$

◀ а) Конечный предел

$$\lim_{\rho \rightarrow +0} e^{\frac{x}{x^2 + y^2}} = \lim_{\rho \rightarrow +0} e^{\frac{\cos \varphi}{\rho}}$$

существует тогда, когда $\cos \varphi \leq 0$, т. е. если $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$.

б) Имеем

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} e^{x^2 - y^2} \sin 2xy = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} e^{\rho^2 \cos 2\varphi} \sin(\rho^2 \sin 2\varphi).$$

Поскольку $\rho^2 \rightarrow +\infty$, а $\rho \mapsto \sin(\rho^2 \sin 2\varphi)$ — ограниченная функция, то предел будет конечным, если $\cos 2\varphi < 0$ или $\sin 2\varphi = 0$. В первом случае $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4} < \varphi < \frac{7\pi}{4}$, во втором $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$. ▶

Найти точки разрыва следующих функций:

$$16. u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

◀ Функция $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ непрерывна при всех x и y как многочлен от x и y . По известной теореме о непрерывности суперпозиции непрерывных функций, $(x, y) \mapsto (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}$ — также непрерывная функция при всех x и y , кроме точки $(0, 0)$, где знаменатель $(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ обращается в нуль. Следовательно, $(0, 0)$ — точка бесконечного разрыва. ▶

$$17. u = \frac{x + y}{x^3 + y^3}.$$

◀ Поскольку числитель и знаменатель — непрерывные функции, то данная функция может иметь разрыв лишь в точках, где знаменатель $x^3 + y^3$ обращается в нуль. Решая

уравнение $x^3 + y^3 = 0$ относительно y , находим $y = -x$. Следовательно, функция имеет разрывы на прямой $y = -x$.

Пусть $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$ и $x_0 + y_0 = 0$. Тогда

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{x+y}{x^3+y^3} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{1}{x^2 - xy + y^2} = \frac{1}{x_0^2 - x_0 y_0 + y_0^2}.$$

Значит, точки прямой $y = -x$ ($x \neq 0$) — точки устранимого разрыва функции u . Из соотношения

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x+y}{x^3+y^3} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{x^2 - xy + y^2} = +\infty$$

следует, что $(0, 0)$ — точка бесконечного разрыва. ►

18. Показать, что функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

непрерывна по каждой из переменных x и y в отдельности (при фиксированном значении другой переменной), но не является непрерывной по совокупности этих переменных.

◀ Пусть $y \neq 0$ и x_0 — любые фиксированные числа. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \frac{2x_0 y}{x_0^2 + y^2} = f(x_0, y).$$

Если же $y = 0$, то при любом $x_0 \neq 0$ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, 0) = 0 = f(x_0, 0)$. Наконец, если $y = 0$ и $x_0 = 0$, то $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0 = f(0, 0)$.

Таким образом, при каждом фиксированном y функция f непрерывна по переменной x . Ввиду симметрии функции относительно x и y при любом фиксированном x функция f непрерывна по переменной y .

Однако функция f не является непрерывной по совокупности переменных в точке $(0, 0)$. Действительно, обе последовательности $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ и $(\frac{2}{n}, \frac{1}{n})$ сходятся при $n \rightarrow \infty$ к точке $(0, 0)$, а соответствующие им последовательности значений функции сходятся при $n \rightarrow \infty$ к различным предельным значениям:

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} \rightarrow 1, \quad f\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{4}{n^2}}{\frac{4}{n^2} + \frac{1}{n^2}} \rightarrow \frac{4}{5}. \blacktriangleright$$

19. Показать, что функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

в точке $(0, 0)$ непрерывна вдоль каждого луча $x = t \cos \alpha$, $y = t \sin \alpha$, $0 \leq t \leq +\infty$, проходящего через эту точку, т. е. существует $\lim_{t \rightarrow 0} f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = f(0, 0)$, однако эта функция не является непрерывной в точке $(0, 0)$.

◀ Имеем

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cos^2 \alpha \sin \alpha}{t^2 \cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha}.$$

Поскольку $f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) \equiv 0$ при $\alpha = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}_0$, то при этих значениях α

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = 0 = f(0, 0).$$

Если $0 < \alpha < 2\pi$, $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{N}$, то $t^2 \cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha > 0$ и $t^2 \cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha \rightarrow \sin^2 \alpha > 0$ при $t \rightarrow 0$. Следовательно, $\lim_{t \rightarrow 0} f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = 0 = f(0, 0)$. Таким образом, вдоль любого луча, проходящего через точку $(0, 0)$, функция f непрерывна в этой точке.

То, что функция f имеет разрыв в точке $(0, 0)$, следует из того, что последовательность $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$ сходится к точке $(0, 0)$ при $n \rightarrow \infty$, а

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2} \neq f(0, 0). \blacktriangleright$$

20. Исследовать на равномерную непрерывность линейную функцию $f(x, y) = 2x - 3y + 5$ в бесконечной плоскости $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : |x| < +\infty, |y| < +\infty\}$.

◀ Для любых точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) бесконечной плоскости \mathbb{R}^2 имеем

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| = |2(x_1 - x_2) - 3(y_1 - y_2)| \leq 2|x_1 - x_2| + 3|y_1 - y_2|.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно заданное число. Тогда при условии, что $|x_1 - x_2| < \frac{\varepsilon}{6} = \delta$, $|y_1 - y_2| < \frac{\varepsilon}{6} = \delta$, справедливо неравенство $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, из которого, по определению, следует равномерная непрерывность функции f на \mathbb{R}^2 . ▶

21. Исследовать на равномерную непрерывность в плоскости $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : |x| < +\infty, |y| < +\infty\}$ функцию $u = \sqrt{x^2 + y^2}$.

◀ Для произвольного $\varepsilon > 0$ и любых $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ имеем

$$\begin{aligned} |u(x_1, y_1) - u(x_2, y_2)| &= \left| \sqrt{x_1^2 + y_1^2} - \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \right| = \\ &= \frac{|(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + (y_1 - y_2)(y_1 + y_2)|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \leq \frac{|x_1 - x_2||x_1 + x_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} + \frac{|y_1 - y_2||y_1 + y_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \leq \\ &\leq |x_1 - x_2| \frac{|x_1| + |x_2|}{\sqrt{x_1^2} + \sqrt{x_2^2}} + |y_1 - y_2| \frac{|y_1| + |y_2|}{\sqrt{y_1^2} + \sqrt{y_2^2}} = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

как только $|x_1 - x_2| < \frac{\varepsilon}{2} = \delta$, $|y_1 - y_2| < \frac{\varepsilon}{2} = \delta$.

Следовательно, по определению, функция u равномерно-непрерывна в плоскости \mathbb{R}^2 . ▶

22. Будет ли функция $f(x, y) = \sin \frac{\pi}{1 - x^2 - y^2}$ в области $x^2 + y^2 < 1$ равномерно-непрерывной?

◀ Функция $x \mapsto (1 - x^2 - y^2)$ непрерывна при всех значениях x и y как многочлен от x и y . По теореме о суперпозиции непрерывных функций, данная функция также непрерывна при всех значениях x и y , удовлетворяющих неравенству $x^2 + y^2 < 1$.

Покажем, что в этой области данная функция неравномерно-непрерывна. С этой целью возьмем две последовательности

$$M_n = (x_n, y_n) = \left(\sqrt{1 - \frac{1}{2n}} \cos \alpha, \sqrt{1 - \frac{1}{2n}} \sin \alpha \right),$$

$$M'_n = (x'_n, y'_n) = \left(\sqrt{1 - \frac{2}{1 + 4n}} \cos \alpha, \sqrt{1 - \frac{2}{1 + 4n}} \sin \alpha \right),$$

$n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \alpha < 2\pi$, принадлежащие области определения функции. Поскольку $\rho(M_n, M'_n) = \sqrt{(x_n - x'_n)^2 + (y_n - y'_n)^2} = \left| \sqrt{1 - \frac{1}{2n}} - \sqrt{1 - \frac{2}{1 + 4n}} \right| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, а $|f(M_n) - f(M'_n)| = \left| \sin 2n\pi - \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) \right| = 1$ при всех n , то для $\varepsilon \in]0, 1[$ не существует числа δ , участвующего в определении равномерной непрерывности. ▶

23. Дана функция $u(x, y) = \arcsin \frac{x}{y}$. Является ли эта функция непрерывной в своей области определения E ? Будет ли функция u равномерно-непрерывной в области E ?

◀ Область определения E определяется неравенствами $|x| \leq |y|$, $y \neq 0$. В этой области функция u непрерывна как суперпозиция непрерывных функций.

Однако данная функция не является равномерно-непрерывной, так как для последовательностей $(M_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $(M'_n) = (\frac{1}{n}, -\frac{1}{n})$ справедливо соотношение

$$\rho(M_n, M'_n) = \sqrt{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right)^2} = \frac{2}{n} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, а расстояние между значениями функции в соответствующих точках $|u(M_n) - u(M'_n)| = |\arcsin 1 - \arcsin(-1)| = 2 \arcsin 1 = \pi$ не может быть меньше числа π . ▶

24. Показать, что множество точек разрыва функции $f(x, y) = x \sin \frac{1}{y}$, если $y \neq 0$, и $f(x, 0) = 0$, не является замкнутым.

◀ Пусть $y_n = \frac{2}{\pi(1+4n)}$, $x_n = \frac{nx_0}{n+1}$, где x_0 — произвольное фиксированное число. Тогда последовательность (x_n, y_n) при $n \rightarrow \infty$ сходится к точке $(x_0, 0)$. Из соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx_0}{n+1} \sin \frac{\pi(1+4n)}{2} = x_0 \neq f(x_0, 0) = 0, \quad x_0 \neq 0,$$

следует, что $(x_0, 0)$, $x_0 \neq 0$ — точка разрыва функции f . А из неравенства $|f(x, y)| = |x \sin \frac{1}{y}| < |x|$ следует непрерывность функции f в точке $(0, 0)$.

Таким образом, множество точек разрыва функции f заполняет сплошь ось Ox , за исключением точки $(0, 0)$, которая является предельной точкой этого множества. Следовательно, множество точек разрыва функции f не содержит всех своих предельных точек, а поэтому не является замкнутым. ▶

25. Показать, что если функция f в некоторой области G непрерывна по переменной x и равномерно-непрерывна относительно x по переменной y , то эта функция непрерывна в рассматриваемой области.

◀ Для произвольных точек (x_0, y_0) и $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ из области определения функции f имеем

$$|\Delta f(x_0, y_0)| = |f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)| \leq \\ \leq |f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)| + |f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)|. \quad (1)$$

Согласно равномерной непрерывности функции f относительно x по переменной y , $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta_1 = \delta_1(\epsilon, y_0)$ такое, что, если $|\Delta x| < \delta_1$, неравенство

$$|f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)| < \frac{\epsilon}{2} \quad (2)$$

справедливо для любых $x_0 + \Delta x$ из области определения функции f .

Далее, в силу непрерывности функции f по переменной x , для указанного ранее $\epsilon > 0$ $\exists \delta_2 = \delta_2(\epsilon, x_0, y_0)$ такое, что

$$|f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \frac{\epsilon}{2}, \quad (3)$$

если $|\Delta x| < \delta_2$. Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, тогда при $|\Delta x| < \delta$, $|\Delta y| < \delta$ неравенства (2) и (3) будут выполнены. Поэтому при $|\Delta x| < \delta$, $|\Delta y| < \delta$ из неравенств (2), (3) и (1) следует, что $|\Delta f(x_0, y_0)| < \epsilon$, а это и означает непрерывность функции f в точке (x_0, y_0) . ▶

26. Доказать, что если в некоторой области G функция f непрерывна по переменной x и удовлетворяет условию Липшица по переменной y , т. е.

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|,$$

где $(x, y_1) \in G$, $(x, y_2) \in G$ и L — постоянная, то эта функция непрерывна в данной области.

◀ Поскольку функция f удовлетворяет условию Липшица по переменной y , то для произвольного $\varepsilon > 0$ и любых точек (x_0, y_0) и (x, y) из G имеем

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq |f(x, y) - f(x, y_0)| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| \leq \\ \leq L|y - y_0| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)|. \quad (1)$$

В силу непрерывности функции $x \mapsto f(x, y_0)$ в точке x_0 , можно указать такое $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon, x_0, y_0)$, что при $|x - x_0| < \delta_1$ имеет место неравенство

$$|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) при условии, что $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$, где $\delta = \min(\delta_1, \frac{\varepsilon}{2L})$, получаем неравенство

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < L\frac{\varepsilon}{2L} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

которое доказывает непрерывность функции f в любой точке $(x_0, y_0) \in G$. ▶

27. Пусть функция f непрерывна в области $G = \{(x, y) : a \leq x \leq A, b \leq y \leq B\}$, а последовательность функций $n \mapsto \varphi_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, сходится равномерно на $[a, A]$ и удовлетворяет условию $b \leq \varphi_n(x) \leq B$, $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что последовательность функций $F_n(x) = f(x, \varphi_n(x))$, $n \in \mathbb{N}$, также сходится равномерно на $[a, A]$.

◀ Поскольку функция f непрерывна в замкнутой области G , то она равномерно-непрерывна в этой области. Следовательно, $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что неравенство

$$|f(x, y') - f(x, y'')| < \varepsilon \quad (1)$$

справедливо для всех $x \in [a, A]$ и $y', y'' \in [b, B]$, которые удовлетворяют неравенству $|y' - y''| < \delta$. В силу равномерной сходимости на сегменте $[a, A]$ последовательности $\{\varphi_n(x)\}$, $\forall \delta > 0$ (в том числе и для δ , указанного выше) $\exists N = N(\delta)$ такое, что $|\varphi_{n+p}(x) - \varphi_n(x)| < \delta \forall n > N$, $\forall p > 0$ и $\forall x \in [a, A]$. Полагая в неравенстве (1) $y' = \varphi_{n+p}(x)$, $y'' = \varphi_n(x)$ ($\varphi_{n+p}(x), \varphi_n(x) \in [b, B]$), получаем неравенство

$$|f(x, \varphi_{n+p}(x)) - f(x, \varphi_n(x))| < \varepsilon,$$

справедливое $\forall n > N$, $\forall p > 0$ и $\forall x \in [a, A]$.

Таким образом, последовательность $F_n(x) = f(x, \varphi_n(x))$, $n \in \mathbb{N}$, сходится равномерно на сегменте $[a, A]$. ▶

28. Пусть: 1) функция f непрерывна в области $R = \{(x, y) : a < x < A, b < y < B\}$; 2) функция φ непрерывна в интервале $]a, A[$ и имеет значения, принадлежащие интервалу $]b, B[$. Доказать, что функция $F(x) = f(x, \varphi(x))$ непрерывна в интервале $]a, A[$.

◀ Пусть (x_0, y_0) — произвольная точка из области R . Из непрерывности функции f в области R вытекает, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon, x_0, y_0)$ такое, что

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon, \quad (1)$$

если $|x - x_0| < \delta_1$, $|y - y_0| < \delta_1$.

Обозначим $y = \varphi(x)$, $y_0 = \varphi(x_0)$. Из непрерывности функции $y = \varphi(x)$ на интервале $]a, A[$ вытекает, что для указанного выше $\delta_1 \exists \delta_2 = \delta_2(\delta_1)$ такое, что

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| = |y - y_0| < \delta_1, \quad (2)$$

если $|x - x_0| < \delta_2$. Следовательно, из неравенств (1) и (2) и из того, что $y = \varphi(x)$, $y \in]b, B[$, если $x \in]a, A[$, вытекает неравенство

$$|f(x, \varphi(x)) - f(x_0, \varphi(x_0))| < \varepsilon,$$

справедливое при $|x - x_0| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ и доказывающее непрерывность функции $F(x) = f(x, \varphi(x))$ на интервале $]a, A[$. ▶

29. Пусть: 1) функция f непрерывна в области $R = \{(x, y) : a < x < A, b < y < B\}$; 2) функции $x = \varphi(u, v)$ и $y = \psi(u, v)$ непрерывны в области $R' = \{(u, v) : a' < u < A', b' < v < B'\}$ и имеют значения, принадлежащие соответственно интервалам $]a, A[$ и $]b, B[$. Доказать, что функция $F(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ непрерывна в области R' .

◀ Пусть (u_0, v_0) — произвольная фиксированная точка из R' , а $x_0 = \varphi(u_0, v_0)$, $y_0 = \psi(u_0, v_0)$. Из условия 1) вытекает, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \sigma = \sigma(\varepsilon, x_0, y_0)$ такое, что

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon, \quad (1)$$

если $|x - x_0| < \sigma$, $|y - y_0| < \sigma$. Из условия 2) следует, что для указанного выше $\sigma \exists \delta = \delta_1(\sigma) = \delta(\varepsilon, u_0, v_0)$ такое, что при $|u - u_0| < \delta$ и $|v - v_0| < \delta$ справедливы неравенства

$$|\varphi(u, v) - \varphi(u_0, v_0)| < \sigma, \quad |\psi(u, v) - \psi(u_0, v_0)| < \sigma. \quad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) непосредственно следует, что

$$|f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) - f(\varphi(u_0, v_0), \psi(u_0, v_0))| = |F(u, v) - F(u_0, v_0)| < \varepsilon$$

при $|u - u_0| < \delta$, $|v - v_0| < \delta$, т. е. что функция F непрерывна в точке (u_0, v_0) . Поскольку (u_0, v_0) — произвольная точка из R' , заключаем, что функция F непрерывна в области R' . ▶

Упражнения для самостоятельной работы

- Доказать, что функция $(x, y) \mapsto Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, имеет в точке $(0, 0)$, по меньшей мере, тот же порядок малости, что и $\rho = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$.
- Показать, что для последовательности $a_{nm} = \frac{1}{n-m+0,5}$, $n, m \in \mathbb{N}$, имеем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nm} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} a_{nm} \right),$$

тем не менее $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} a_{nm}$ не существует.

- Доказать, что для последовательности $a_{nm} = \frac{\sin n}{m}$, $n, m \in \mathbb{N}$, двойной предел $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} a_{nm}$ существует, в то время как

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nm} \right) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} a_{nm} \right).$$

Выяснить, существуют ли следующие двойные пределы:

$$4. \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \frac{\ln^2 n - \ln^2 m}{\ln(n^2) + \ln^2 m}. \quad 5. \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \frac{\lg n + \lg m}{1 - \lg n + \lg m}. \quad 6. \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \frac{1}{m^2} \sum_{k=1}^n \cos \frac{k}{m}.$$

- Показать, что функции $f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $g(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2 - x}$ стремятся к нулю, если точка (x, y) стремится к точке $(0, 0)$ вдоль любой прямой, проходящей через точку $(0, 0)$, но эти функции не имеют предела в точке $(0, 0)$.

Найти пределы:

$$8. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1 - \cos(xy)}{x^2 y^2}. \quad 9. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x_1^2 + \dots + x_m^2)^{\frac{1}{x_1^2 + \dots + x_m^2}}, \text{ где } \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m).$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2}}{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2)^\alpha}, \text{ где } \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m), \alpha > 0. \quad 11. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} x^\alpha y^\alpha e^{\frac{1}{xy^\alpha}}.$$

С помощью " $\varepsilon - \delta$ " рассуждений доказать непрерывность следующих функций:

$$12. f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}, (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad 13. f(x, y) = \sqrt{1 + e^{xy}}, (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- Доказать, что если функция $(x, y) \mapsto f(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, непрерывна по каждой переменной x и y в отдельности и монотонна по одной из них, то она непрерывна по совокупности переменных.

- Исследовать на равномерную непрерывность в \mathbb{R}^2 функцию

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad x^2 + y^2 \neq 0, \quad f(0, 0) = 0.$$

- Доказать, что функция $f(x, y, z) = \sin(x^2 + y^2 + z^2)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, не является равномерно-непрерывной в пространстве \mathbb{R}^3 .

§ 2. Частные производные и дифференциалы функции векторного аргумента

2.1. Частные производные.

Пусть функция $x \mapsto f(x)$ определена в области D пространства \mathbb{R}^m ; (e_1, e_2, \dots, e_m) — стандартный базис этого пространства, а $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ — точка области D .

Определение 1. Разность $f(x) - f(x_0)$ называется полным приращением функции f в точке x_0 , а $f(x_0 + (x_j - x_j^0)e_j) - f(x_0)$, $j = \overline{1, m}$ — частным приращением функции f по переменной x_j в точке x_0 .

Определение 2. Если существует конечный предел

$$\lim_{x_j \rightarrow x_j^0} \frac{f(x_0 + (x_j - x_j^0)e_j) - f(x_0)}{x_j - x_j^0}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (1)$$

то он называется частной производной функции f в точке x_0 по переменной x_j и обозначается

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0), \text{ или } f'_{x_j}(x_0), \text{ или } D_j f(x_0).$$

Функция f имеет в точке x_0 частную производную f'_{x_j} , тогда и только тогда, когда в этой точке справедливо равенство

$$f(x_0 + (x_j - x_j^0)e_j) - f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) + \alpha(x_j, x_0) \right) (x_j - x_j^0),$$

где $\alpha(x_j, x_0) \rightarrow 0$ при $x_j \rightarrow x_j^0$.

2.2. Дифференцируемые функции.

Определение. Функция $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^m$, называется дифференцируемой в точке $x_0 \in D$, если полное приращение функции f в этой точке можно представить в виде

$$f(x) - f(x_0) = L(x - x_0) + \alpha(x, x_0)\|x - x_0\|, \quad (1)$$

где $L(x - x_0) = L_1(x_1 - x_1^0) + L_2(x_2 - x_2^0) + \dots + L_m(x_m - x_m^0)$ — линейное отображение пространства \mathbb{R}^m в \mathbb{R} , а $\alpha(x, x_0) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$.

При этом величина $Lh = L_1h_1 + L_2h_2 + \dots + L_mh_m$, где $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}$ — произвольный

вектор пространства \mathbb{R}^m , называется дифференциалом функции f в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$, а матрица линейного отображения $L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ называется производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

Полагая в (1) $x = x_0 + x_j^0 e_j$, получаем равенство

$$f(x_0 + (x_j - x_j^0)e_j) - f(x_0) = (L_j + \alpha(x_j, x_0))(x_j - x_j^0),$$

из которого, в силу пункта 2.1, следует, что $L_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$.

Следовательно, для дифференциала $df(x_0)$ получаем формулу ..

$$df(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_0)h_m \quad (2)$$

или, если $h_j = x_j - x_j^0 = dx_j$,

$$df(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_0) dx_m,$$

а для производной $f'(x_0)$ — равенство

$$f'(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_0) \right). \quad (3)$$

Теорема (достаточное условие дифференцируемости). Если функция f имеет в окрестности точки x_0 частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$, $j = \overline{1, m}$, непрерывные в точке x_0 , то она дифференцируема в этой точке.

Если функция f дифференцируема в каждой точке области D , то она называется дифференцируемой в области D .

2.3. Частные производные сложной функции.

Если функция $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^m$, дифференцируема в точке $x \in D$, а функции $\varphi_i : G \rightarrow D$, $G \subset \mathbb{R}^n$, $i = \overline{1, m}$, имеют частные производные в точке $t \in G$ и $x = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t))$, то

$$\frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial t_k}(t) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_k}(t), \quad k = \overline{1, n}, \quad t = (t_1, t_2, \dots, t_n). \quad (1)$$

2.4. Дифференцируемые отображения.

Определение. Отображение $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^m$, называется дифференцируемым в точке $x_0 \in D$, если приращение $f(x) - f(x_0)$ отображения f в точке x_0 представимо в виде

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \alpha(x, x_0) \|x - x_0\|,$$

где

$$A(x - x_0) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_1^0 \\ x_2 - x_2^0 \\ \dots \\ x_m - x_m^0 \end{pmatrix}$$

— линейное отображение пространства \mathbb{R}^m в пространство \mathbb{R}^n , а $\alpha(x, x_0) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$.

Если отображение f дифференцируемо в точке x_0 , то $A_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$ и

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

называется производной отображения f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

Если отображение $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^m$, дифференцируемо в точке $x \in D$, а отображение $g : G \rightarrow D$, $G \subset \mathbb{R}^k$, дифференцируемо в точке $t \in G$ и $x = g(t)$, то

$$(f \circ g)'(t) = f'(x) g'(t)$$

или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial(f_1 \circ g)}{\partial t_1} & \frac{\partial(f_1 \circ g)}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial(f_1 \circ g)}{\partial t_k} \\ \frac{\partial(f_2 \circ g)}{\partial t_1} & \frac{\partial(f_2 \circ g)}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial(f_2 \circ g)}{\partial t_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial(f_n \circ g)}{\partial t_1} & \frac{\partial(f_n \circ g)}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial(f_n \circ g)}{\partial t_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial t_1} & \frac{\partial g_1}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial t_k} \\ \frac{\partial g_2}{\partial t_1} & \frac{\partial g_2}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial t_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_m}{\partial t_1} & \frac{\partial g_m}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial t_k} \end{pmatrix}$$

2.5. Частные производные и дифференциалы высших порядков.

Пусть функция $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^m$, имеет частные производные в некоторой окрестности $S(x_0, \delta)$.

Определение 1. Если функция $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$, $x \in S(x_0, \delta)$, имеет в точке x_0 частную производную по переменной x_i , то ее называют частной производной второго порядка или второй частной производной и обозначают

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \text{ или } f''_{x_i x_j}(x_0).$$

При этом, если $i \neq j$, то частная производная называется смешанной. Аналогично определяются производные порядка выше второго.

Определение 2. Функция f называется n раз дифференцируемой в точке $x_0 \in D$, если она имеет в некоторой окрестности этой точки все частные производные $(n-1)$ -го порядка, каждая из которых является дифференцируемой функцией в точке x_0 .

Теорема. Если функция f дважды дифференцируема в точке x_0 , то в этой точке выполняются равенства

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0), \quad i, j = \overline{1, m}. \quad (1)$$

Из этой теоремы получаем следующее утверждение: смешанная производная n -го порядка

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \dots \partial x_m^{n_m}}, \quad n_1 + n_2 + \dots + n_m = n,$$

не зависит от порядка, в котором производилось дифференцирование.

Определение 3. Дифференциалом второго порядка (или вторым дифференциалом) d^2f дважды дифференцируемой функции f называется дифференциал от функции $x \mapsto df(x)$, т. е. $d^2f = d(df)$.

Аналогично определяются дифференциалы более высокого порядка. Дифференциал n -го порядка n раз дифференцируемой функции f вычисляется по формуле

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} h_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} h_m \right)^n f. \quad (2)$$

2.6. Производная по направлению. Градиент.

Пусть функция $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ дифференцируема в области $D \subset \mathbb{R}^3$ и $(x_0, y_0, z_0) \in D$. Если направление l задается направляющими косинусами $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, то производная по направлению l вычисляется по формуле

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma.$$

Определение. Градиентом функции f в точке (x_0, y_0, z_0) называется вектор, обозначаемый символом $\text{grad } f$ и имеющий координаты, соответственно равные производным $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$, вычисленным в точке (x_0, y_0, z_0) .

Таким образом,

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k,$$

причем в этом случае можем записать, что $\frac{\partial f}{\partial l} = (a, \text{grad } f)$, где $a = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$.

Градиент функции f в точке (x_0, y_0, z_0) характеризует направление и величину максимального роста этой функции в точке (x_0, y_0, z_0) . Следовательно,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial l} \right)_{\max} = \|\text{grad } f\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2}.$$

Вектор $\text{grad } f$ в данной точке (x_0, y_0, z_0) ортогонален к той поверхности уровня функции f , которая проходит через точку (x_0, y_0, z_0) .

30. Найти $f'_x(x, 1)$, если $f(x, y) = x + (y - 1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{y}}$.

◀ Согласно определению частной производной, имеем

$$f'_x(x, 1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, 1) - f(x, 1)}{h}.$$

Так как $f(x+h, 1) = x+h$, $f(x, 1) = x$, то

$$f'_x(x, 1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1. \blacktriangleright$$

31. Найти $f'_x(0, 0)$ и $f'_y(0, 0)$, если $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$. Является ли эта функция дифференцируемой в точке $(0, 0)$?

◀ Исходя из определения частных производных, имеем

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x \cdot 0} - 0}{x} = 0,$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{0 \cdot y} - 0}{y} = 0.$$

Для исследования дифференцируемости данной функции в точке $(0, 0)$ запишем ее приращение в этой точке: $f(x, y) - f(0, 0) = \sqrt[3]{xy} = \alpha(x, y)\sqrt{x^2 + y^2}$, где $\alpha(x, y) = \sqrt[3]{xy} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Поскольку $L_1 = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = 0$, $L_2 = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = 0$, то для дифференцируемости необходимо, чтобы функция $(x, y) \mapsto \alpha(x, y)$ была бесконечно малой при $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$, т. е. при $x \rightarrow 0$ и $y \rightarrow 0$. Пусть $x = \frac{1}{n}$, $y = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$; очевидно, $x \rightarrow 0$ и $y \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Так как последовательность точек $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ при $n \rightarrow \infty$ стремится к точке $(0, 0)$, а соответствующая им последовательность значений функции $(\alpha(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})) = \left(\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{2}}\right)$ стремится к $+\infty$ при $n \rightarrow \infty$, то функция α не является бесконечно малой при $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$. Поэтому функция f недифференцируема в точке $(0, 0)$. \blacktriangleright

32. Является ли дифференцируемой функция $f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}$ в точке $(0, 0)$?

◀ Находим производные

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1, \quad f'_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{y} = 1.$$

Представим приращение функции f в точке $(0, 0)$ в виде

$$f(x, y) - f(0, 0) = \sqrt{x^3 + y^3} = x + y + \left(\sqrt{x^3 + y^3} - x - y\right) = f'_x(0, 0)x + f'_y(0, 0)y + \alpha(x, y)\sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\text{где } \alpha(x, y) = \frac{\sqrt{x^3 + y^3} - x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Поскольку последовательность

$$\left(\alpha\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{\frac{2}{n^3} - \frac{2}{n}}}{\frac{\sqrt{2}}{n}}\right) = \left(\frac{\sqrt[3]{2} - 2}{\sqrt{2}}\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

не является бесконечно малой при $n \rightarrow \infty$ (т. е. при $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$), то $\alpha(x, y)\sqrt{x^2 + y^2} \neq o(\sqrt{x^2 + y^2})$ при $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$ и функция f недифференцируема в точке $(0, 0)$. \blacktriangleright

33. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0, 0)$ функцию $f(x, y) = e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}$ при $x^2 + y^2 > 0$ и $f(0, 0) = 0$.

◀ Как и в предыдущем примере, находим частные производные

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0,$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} e^{-\frac{1}{y^2}} = 0.$$

Из того, что приращение функции f в точке $(0, 0)$ представимо в виде $f(x, y) - f(0, 0) = e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} = \alpha(x, y)\sqrt{x^2+y^2}$, где $\alpha(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} = \frac{1}{\rho}e^{-\frac{1}{\rho^2}}$, а $\frac{1}{\rho}e^{-\frac{1}{\rho^2}} \rightarrow 0$ при $\rho = \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow 0$, непосредственно следует, что функция f дифференцируема в точке $(0, 0)$. ▶

34. Показать, что функция $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ непрерывна в точке $(0, 0)$, имеет в этой точке обе частные производные $f'_x(0, 0)$ и $f'_y(0, 0)$, однако не является дифференцируемой в точке $(0, 0)$. Выяснить поведение производных f'_x и f'_y в окрестности точки $(0, 0)$.

◀ Пользуясь определением частных производных, находим

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|x \cdot 0|}}{x} = 0,$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|0 \cdot y|}}{y} = 0.$$

Поскольку

$$\Delta f(0, 0) = \sqrt{|xy|} = \sqrt{x^2+y^2} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \alpha(x, y)\sqrt{x^2+y^2},$$

где

$$\alpha(x, y) = \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{ и } \alpha\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\sqrt{\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0,$$

то функция $(x, y) \mapsto \alpha(x, y)$ не является бесконечно малой при $\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow 0$. Отсюда следует, что функция f недифференцируема в точке $(0, 0)$. Из соотношения $\Delta f(0, 0) = \sqrt{|xy|} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ следует непрерывность функции f в точке $(0, 0)$.

Из равенства $f'_x(x, y) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}} \operatorname{sgn} x$ при $x \neq 0$ и того, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_x\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{2} = +\infty$, следует, что производная f'_x неограничена в окрестности точки $(0, 0)$. Это заключение справедливо и для производной f'_y . ▶

35. Доказать, что функция $f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^6 + y^6}$, если $x^2 + y^2 \neq 0$ и $f(0, 0) = 0$, терпит разрыв в точке $(0, 0)$, однако имеет частные производные в этой точке.

◀ Из соотношений $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^3}\right) \rightarrow (0, 0)$ (при $n \rightarrow \infty$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^3}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^6}}{\frac{1}{n^6} + \frac{1}{n^6}} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0, 0)$$

следует, что функция f терпит разрыв в точке $(0, 0)$.

Пользуясь определением частных производных, находим

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0, \quad f'_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = 0. \quad \blacktriangleright$$

36. Показать, что функция $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, если $x^2 + y^2 \neq 0$ и $f(0, 0) = 0$, в окрестности точки $(0, 0)$ непрерывна и имеет ограниченные частные производные f'_x и f'_y , однако недифференцируема в точке $(0, 0)$.

◀ При $x^2 + y^2 \neq 0$ функция f непрерывна как элементарная. Из очевидного неравенства $|f(x, y)| = \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{2}}$ и из того, что $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{2}} = 0$, получаем $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$.

Таким образом, функция f непрерывна в точке $(0, 0)$.

Имеем

$$f'_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x^2 y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}, \quad x^2 + y^2 \neq 0, \quad f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0,$$

$$f'_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y^2 x}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}, \quad x^2 + y^2 \neq 0, \quad f'_y(0, 0) = 0.$$

Отсюда, пользуясь неравенством $\left| \frac{xy}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{1}{2}$, убеждаемся, что

$$|f'_x(x, y)| \leq \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{|xy|}{x^2 + y^2} \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{3}{2}, \quad |f'_y(x, y)| \leq \frac{3}{2},$$

т. е. что указанные производные ограничены.

Запишем приращение функции f в точке $(0, 0)$ в виде $\Delta f(0, 0) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \alpha(x, y)\rho$, где $\alpha(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Легко убедиться, что функция α не является бесконечно малой при $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$, а поэтому функция f недифференцируема в точке $(0, 0)$. ►

37. Показать, что функция $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$, если $x^2 + y^2 \neq 0$ и $f(0, 0) = 0$, имеет в окрестности точки $(0, 0)$ производные f'_x и f'_y , которые разрывны в точке $(0, 0)$ и неограничены в любой окрестности ее; тем не менее эта функция дифференцируема в точке $(0, 0)$.

◄ Если $x^2 + y^2 \neq 0$, то частные производные f'_x и f'_y найдем, пользуясь формулами и правилами дифференцирования:

$$f'_x(x, y) = 2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2}, \quad f'_y(x, y) = 2y \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2y}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

Если же $x = 0$ и $y = 0$, то производные $f'_x(0, 0)$ и $f'_y(0, 0)$ находим, исходя из их следующего определения:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x^2}}{x} = 0,$$

аналогично находим, что $f'_y(0, 0) = 0$.

Покажем, что частные производные f'_x и f'_y разрывны в точке $(0, 0)$ и неограничены в любой ее окрестности. С этой целью выберем последовательность (x_n, y_n) , сходящуюся к точке $(0, 0)$, и такую, что $\cos \frac{1}{x_n^2 + y_n^2} = 1$, т. е. $\frac{1}{x_n^2 + y_n^2} = 2n\pi$. Пусть, например,

$$x_n = \frac{1}{2\sqrt{n\pi}}, \quad y_n = \frac{1}{2\sqrt{n\pi}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку $x_n \rightarrow 0$ и $y_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то последовательность точек (x_n, y_n) попадает в любую окрестность точки $(0, 0)$. При этом соответствующая последовательность значений функции $f'_x(x_n, y_n) = -2\sqrt{n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$, стремится к $-\infty$. Следовательно, частная производная f'_x разрывна в точке $(0, 0)$ и неограничена в любой ее окрестности. Аналогичные выводы справедливы и относительно f'_y .

Поскольку $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$, а приращение $\Delta f(0, 0)$ представимо в виде $\Delta f(0, 0) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} = \rho \alpha(\rho)$, где $\alpha(\rho) = \rho \sin \frac{1}{\rho^2} \rightarrow 0$ при $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$, то функция f дифференцируема в точке $(0, 0)$. ►

38. Проверить равенство $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, если: а) $u = x^{y^2}$; б) $u = \arccos \sqrt{\frac{x}{y}}$.

◄ а) Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 x^{y^2-1}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 2yx^{y^2-1}(1 + y^2 \ln x), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2yx^{y^2} \ln x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2yx^{y^2-1}(1 + y^2 \ln x).$$

Отсюда непосредственно следует равенство $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, справедливое для всех точек (x, y) в области определения смешанных производных: $0 < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$.

б) Аналогично предыдущему находим смешанные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2}(xy-x^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{x}{4}(xy-x^2)^{-\frac{3}{2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{2}(xy^3-x^2y^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{x}{4}(xy-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

и убеждаемся, что они равны в области их определения: $0 < \frac{x}{y} < 1$.

Эти примеры иллюстрируют утверждение о равенстве непрерывных смешанных производных, отличающихся порядком их вычисления. ►

39. Пусть $f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, если $x^2 + y^2 \neq 0$, и $f(0, 0) = 0$. Показать, что $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$.

◀ При $x^2 + y^2 \neq 0$ имеем

$$f'_x(x, y) = y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f'_y(x, y) = x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Если $x = y = 0$, то производные $f'_x(0, 0)$ и $f'_y(0, 0)$ находим непосредственно из их определения:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0, \quad f'_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = 0.$$

Пользуясь этими значениями, находим смешанные производные:

$$f''_{xy}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f'_x(0, y) - f'_x(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^3}{y^3} = -1,$$

$$f''_{yx}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'_y(x, 0) - f'_y(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^3} = 1.$$

Отсюда убеждаемся, что $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$.

Заметим, что в точке $(0, 0)$ не выполняются достаточные условия равенства смешанных производных. В самом деле, при $x^2 + y^2 \neq 0$ находим

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \left(1 + \frac{8x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right).$$

Поскольку последовательность $(M_n = (\frac{a}{n}, \frac{1}{n}))$ стремится к точке $(0, 0)$ при $n \rightarrow \infty$, и $\lim_{n \rightarrow \infty} f''_{xy}(M_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f''_{yx}(M_n) = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \left(1 + \frac{8a^2}{(a^2 + 1)^2} \right)$, то смешанные производные терпят разрыв в точке $(0, 0)$. ►

40. Существует ли $f''_{xy}(0, 0)$, если $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ при $x^2 + y^2 \neq 0$ и $f(0, 0) = 0$?

◀ При $x^2 + y^2 \neq 0$ имеем $f'_x(x, y) = \frac{2y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$. Пользуясь определением производной, находим

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0.$$

Поскольку предел

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f'_x(0, y) - f'_x(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{2y^3}{y^4}}{y}$$

не существует, то производная f''_{xy} в точке $(0, 0)$ также не существует. ►

41. Доказать, что если дифференцируемая функция $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$, $(x, y, z) \in G$, удовлетворяет уравнению

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = pf, \quad (1)$$

то она является однородной функцией степени p .

◀ Рассмотрим функцию

$$F(t) = \frac{f(tx_0, ty_0, tz_0)}{t^p}. \quad (2)$$

Она определена, непрерывна и дифференцируема для всех $t > 0$, для которых точка $(tx_0, ty_0, tz_0) \in G$. Вычисляя производную функции F , получаем выражение, числитель которого равен

$$t(x_0 f'_x(tx_0, ty_0, tz_0) + y_0 f'_y(tx_0, ty_0, tz_0) + z_0 f'_z(tx_0, ty_0, tz_0)) - pf(tx_0, ty_0, tz_0). \quad (3)$$

Заменяя в равенстве (1) x, y, z на tx_0, ty_0, tz_0 соответственно, приходим к выводу, что выражение (3) равно нулю. Следовательно, $F'(t) = 0$ и $F(t) = C = \text{const}$. Для определения константы положим в (2) $t = 1$; таким образом, $C = f(x_0, y_0, z_0)$. Отсюда, пользуясь равенством (2), получаем

$$f(tx_0, ty_0, tz_0) = t^p f(x_0, y_0, z_0), \quad (x_0, y_0, z_0) \in G. \blacktriangleright$$

42. Доказать, что если f — дифференцируемая однородная функция степени p , то ее частные производные f'_x, f'_y, f'_z — однородные функции $(p-1)$ -й степени.

◀ Поскольку f — однородная функция степени p , то справедливо равенство $f(tx, ty, tz) = t^p f(x, y, z)$, причем выражение в левой части дифференцируемо. Дифференцируя последнее равенство по x , получаем $f'_x(tx, ty, tz)t = t^p f'_x(x, y, z)$ или $f'_x(tx, ty, tz) = t^{p-1} f'_x(x, y, z)$. Из последнего равенства следует, что f'_x — однородная функция степени $p-1$. Для производных f'_y и f'_z доказательство аналогичное. ▶

43. Пусть $(x, y, z) \mapsto u(x, y, z)$ — дважды дифференцируемая однородная функция n -й степени. Доказать, что

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u = n(n-1)u. \quad (1)$$

◀ Поскольку u — однородная функция, то она удовлетворяет уравнению

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = nu. \quad (2)$$

Заменяя в этом равенстве x, y, z на tx_0, ty_0, tz_0 и дифференцируя его по t , получаем

$$x_0 u'_x + y_0 u'_y + z_0 u'_z + tx_0^2 u''_{xx} + ty_0^2 u''_{yy} + tz_0^2 u''_{zz} + t(2x_0 y_0 u''_{xy} + 2x_0 z_0 u''_{xz} + 2y_0 z_0 u''_{yz}) = \\ \phantom{tx_0^2 u''_{xx} + ty_0^2 u''_{yy} + tz_0^2 u''_{zz} +} \phantom{t(2x_0 y_0 u''_{xy} + 2x_0 z_0 u''_{xz} + 2y_0 z_0 u''_{yz})} = n(x_0 u'_x + y_0 u'_y + z_0 u'_z),$$

где производные вычислены в точке (tx_0, ty_0, tz_0) . Полагая в последнем равенстве $t = 1$, имеем

$$x_0^2 u''_{xx} + y_0^2 u''_{yy} + z_0^2 u''_{zz} + 2(x_0 y_0 u''_{xy} + x_0 z_0 u''_{xz} + y_0 z_0 u''_{yz}) = (n-1)(x_0 u'_x + y_0 u'_y + z_0 u'_z).$$

Отсюда и из равенства (2) непосредственно следует, что

$$\left(x_0 \frac{\partial}{\partial x} + y_0 \frac{\partial}{\partial y} + z_0 \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u = n(n-1)u.$$

Так как (x_0, y_0, z_0) — произвольная точка, то равенство (1) доказано. ▶

44. Доказать, что если $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, то $d^2 u \geq 0$.

◀ Обозначая $\varphi = x^2 + y^2 + z^2$ и последовательно дифференцируя выражение $u = \sqrt{\varphi}$, находим

$$du = \frac{1}{\sqrt{\varphi}}(x dx + y dy + z dz),$$

$$d^2 u = \frac{1}{\sqrt{\varphi}}(dx^2 + dy^2 + dz^2) - \frac{1}{(\sqrt{\varphi})^3}(x dx + y dy + z dz)^2 =$$

$$= \frac{(x^2 + y^2 + z^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2) - (x dx + y dy + z dz)^2}{(\sqrt{\varphi})^3} =$$

$$= \frac{(x dy - y dx)^2 + (x dz - z dx)^2 + (y dz - z dy)^2}{(\sqrt{\varphi})^3} \geq 0. \blacktriangleright$$

45. Предполагая, что x, y малы по абсолютной величине, вывести приближенные формулы для следующих выражений:

а) $(1+x)^m(1+y)^m$; б) $\ln(1+x)\ln(1+y)$; в) $\operatorname{arctg} \frac{x+y}{1+xy}$.

◀ Пусть функция $(x, y, \dots, z) \mapsto f(x, y, \dots, z)$ дифференцируема в окрестности точки $(0, 0, \dots, 0)$. Тогда

$$f(x, y, \dots, z) - f(0, 0, \dots, 0) = f'_x(0, 0, \dots, 0)x + f'_y(0, 0, \dots, 0)y + \dots + f'_z(0, 0, \dots, 0)z + o(\rho),$$

где $o(\rho)$ — бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + \dots + z^2}$. Отбрасывая величину $o(\rho)$ и перенося $f(0, 0, \dots, 0)$ в правую часть, получаем приближенное равенство

$$f(x, y, \dots, z) \approx f(0, 0, \dots, 0) + f'_x(0, 0, \dots, 0)x + f'_y(0, 0, \dots, 0)y + \dots + f'_z(0, 0, \dots, 0)z. \quad (1)$$

Поскольку предложенные функции дифференцируемы в окрестности точки $(0, 0)$, то соответствующие приближенные формулы принимают следующий вид:

а) $(1+x)^m(1+y)^m \approx 1 + mx + my$;

б) $\ln(1+x)\ln(1+y) \approx xy$;

в) $\operatorname{arctg} \frac{x+y}{1+xy} \approx x+y$. ▶

46. Заменяя приращение функции дифференциалом, приближенно вычислить:

а) $1,002 \cdot 2,003^2 \cdot 3,004^3$; б) $\frac{1,03^2}{\sqrt[3]{0,98} \sqrt[4]{1,05^3}}$;

в) $\sqrt{1,02^3 + 1,97^3}$; г) $\sin 29^\circ \operatorname{tg} 46^\circ$; д) $0,97^{1,05}$.

◀ а) Записывая равенство (1) из предыдущего примера для функции $f(x, y, z) = (1+x)(2+y)^2(3+z)^3$, имеем

$$(1+x)(2+y)^2(3+z)^3 \approx 1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 + 2^2 \cdot 3^3 x + 2^2 \cdot 3^3 y + 2^2 \cdot 3^3 z.$$

Подставляя в это равенство $x = 0,002$, $y = 0,003$, $z = 0,004$, получаем $1,002 \cdot 2,003^2 \cdot 3,004^3 \approx 108 + 0,216 + 0,324 + 0,432 = 108,972$.

б) Записав для функции $f(x, y, z) = \frac{(1+x)^2}{\sqrt[3]{(1-y)} \sqrt[4]{(1+z)^3}}$ приближенное равенство $f(x, y, z) \approx 1 + 2x + \frac{y}{3} - \frac{z}{4}$ и полагая $x = 0,03$, $y = 0,02$, $z = 0,05$, получаем

$$\frac{1,03^2}{\sqrt[3]{0,98} \sqrt[4]{1,05^3}} \approx 1 + 0,06 + 0,0066 - 0,0125 \approx 1,054.$$

в) Имеем $\sqrt{(1+x)^3 + (2-y)^3} \approx 3 + \frac{x}{2} - 2y$. Пусть $x = 0,02$, $y = 0,03$, тогда

$$\sqrt{1,02^3 + 1,97^3} \approx 3 + 0,01 - 0,06 = 2,95.$$

г) В приближенном равенстве (см. предыдущий пример)

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \approx \sin \frac{\pi}{6} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{6} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} x + \sin \frac{\pi}{6} \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} x$$

полагаем $x = 0,017$, тогда

$$\sin 29^\circ \operatorname{tg} 46^\circ \approx 0,5 - 0,866 \cdot 0,017 + 0,017 \approx 0,502.$$

д) Записывая для функции $(1-x)^{1+y}$ приближенное равенство $(1-x)^{1+y} \approx 1-x$ и полагая в нем $x = 0,03$, $y = 0,05$, получаем $0,97^{1,05} \approx 1 - 0,03 = 0,97$. ►

47. Доказать, что функция f , имеющая ограниченные частные производные f'_x и f'_y в некоторой выпуклой области E , равномерно-непрерывна в этой области.

◀ Пусть (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — две произвольные точки из области E . В силу выпуклости области E , точка $(x_2 + t(x_1 - x_2), y_2 + t(y_1 - y_2))$ принадлежит области E при $0 \leq t \leq 1$.

Функция $\varphi(t) = f(x_2 + t(x_1 - x_2), y_2 + t(y_1 - y_2))$ имеет при $t \in]0, 1[$ ограниченную производную

$$\varphi'(t) = (x_1 - x_2)f'_x(x_2 + t(x_1 - x_2), y_2 + t(y_1 - y_2)) + (y_1 - y_2)f'_y(x_2 + t(x_1 - x_2), y_2 + t(y_1 - y_2)) \quad (1)$$

и $\varphi(0) = f(x_2, y_2)$, $\varphi(1) = f(x_1, y_1)$. Используя формулу Лагранжа и равенство (1), находим $\varphi(1) - \varphi(0) = f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2) = \varphi'(\xi) =$

$$= (x_1 - x_2)f'_x(x_2 + \xi(x_1 - x_2), y_2 + \xi(y_1 - y_2)) + (y_1 - y_2)f'_y(x_2 + \xi(x_1 - x_2), y_2 + \xi(y_1 - y_2)), \quad 0 < \xi < 1. \quad (2)$$

Согласно условию, существуют такие постоянные L_1 и L_2 , что

$$|f'_x| < L_1, \quad |f'_y| < L_2 \quad \forall (x, y) \in E. \quad (3)$$

Из соотношений (2) и (3) вытекает неравенство

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq |x_1 - x_2|L_1 + |y_1 - y_2|L_2. \quad (4)$$

Пусть $\epsilon > 0$ произвольное. Тогда, выбирая $\delta = \min\left(\frac{\epsilon}{2L_1}, \frac{\epsilon}{2L_2}\right)$, для любых точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) таких, что $|x_1 - x_2| < \delta$ и $|y_1 - y_2| < \delta$, из (4) получаем неравенство $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \epsilon$, доказывающее равномерную непрерывность функции f в области E . ►

48. Доказать, что если функция $(x, y) \mapsto f(x, y)$ непрерывна по переменной x при каждом фиксированном значении y и имеет ограниченную производную по переменной y , то эта функция непрерывна по совокупности переменных x и y .

◀ Согласно условию, $\exists M > 0$ такое, что

$$|f'_y(x, y)| \leq M \quad (1)$$

для всех точек (x, y) из области G определения функции f .

Пусть $\epsilon > 0$ произвольное, а (x_0, y_0) — любая точка из G . Тогда

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq |f(x, y) - f(x, y_0)| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| \leq |f'_y(x, y_0 + \theta(y - y_0))||y - y_0| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)|. \quad (2)$$

В силу непрерывности функции f по x , при $y = y_0$ $\exists \delta_1 = \delta_1(\epsilon, y_0)$ такое, что

$$|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \frac{\epsilon}{2}, \quad (3)$$

если $|x - x_0| < \delta_1$. Из (2), (1) и (3) получаем

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq M|y - y_0| + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

если $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$, где $\delta = \min\left\{\frac{\epsilon}{2M}, \delta_1\right\}$, что и требовалось доказать. ►

49. Пусть $(x, y, z) \mapsto P_n(x, y, z)$ — однородный многочлен степени n . Доказать, что $d^n P_n(x, y, z) = n! P_n(dx, dy, dz)$.

◀ Пусть (x, y, z) — произвольная точка из области определения функции P_n . Так как P_n — однородный многочлен степени n , то для него справедливо равенство

$$P_n(tx, ty, tz) = t^n P_n(x, y, z). \quad (1)$$

Вычислим n -ю производную от обеих частей этого равенства. Очевидно,

$$P_n^{(n)}(tx, ty, tz) = n! P_n(x, y, z). \quad (2)$$

Обозначая левую часть равенства (1) через $F(t)$ и последовательно дифференцируя, находим

$$F'(t) = \frac{\partial P_n}{\partial x} x + \frac{\partial P_n}{\partial y} y + \frac{\partial P_n}{\partial z} z = \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial y} y + \frac{\partial}{\partial z} z \right) P_n,$$

$$F''(t) = \frac{\partial^2 P_n}{\partial x^2} x^2 + \frac{\partial^2 P_n}{\partial y^2} y^2 + \frac{\partial^2 P_n}{\partial z^2} z^2 + 2 \frac{\partial^2 P_n}{\partial x \partial y} xy + 2 \frac{\partial^2 P_n}{\partial x \partial z} xz + 2 \frac{\partial^2 P_n}{\partial y \partial z} yz = \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial y} y + \frac{\partial}{\partial z} z \right)^2 P_n.$$

Далее, методом математической индукции легко доказать, что

$$F^{(n)}(t) = \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right)^n P_n(tx, ty, tz).$$

Поскольку P_n — однородный многочлен степени n , то частные производные первого порядка — однородные многочлены степени $n-1$ (см. пример 42). Отсюда следует, что частные производные n -го порядка являются однородными многочленами нулевого порядка, а следовательно, являются постоянными, т. е. не зависят от t . Поэтому можно записать

$$F^{(n)}(t) = \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right)^n P_n(x, y, z). \quad (3)$$

Сравнив (2) и (3) и заменив x, y, z на dx, dy, dz , получим доказываемое равенство. ►

50. Пусть $Au = x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}$. Найти Au и $A^2u = A(Au)$, если: а) $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$; б) $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

◀ а) Имеем $Au = x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) + y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = x \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + y \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{x}{x^2 + y^2} = -u$. В силу однородности операции A , $A^2u = A(Au) = A(-u) = -Au = -(-u) = u$.

б) Аналогично $Au = x \frac{\partial}{\partial x} (\ln \sqrt{x^2 + y^2}) + y \frac{\partial}{\partial y} (\ln \sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} = 1$, $A^2u = A(Au) = A1 = 0$. ►

51. Пусть $\Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2$, $\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. Найти $\Delta_1 u$ и $\Delta_2 u$, если $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

◀ Вводя обозначение $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, находим

$$\Delta_1 u = \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right)^2 = \left(-\frac{x}{r^3} \right)^2 + \left(-\frac{y}{r^3} \right)^2 + \left(-\frac{z}{r^3} \right)^2 = \frac{1}{r^4},$$

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \right).$$

Поскольку $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{r^3} \right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}$, $\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}$, $\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}$, то $\Delta_2 u = -\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3} = 0$, $r \neq 0$. ►

52. Доказать, что форма дифференциалов произвольного порядка функции $(\xi, \eta, \zeta) \rightarrow f(\xi, \eta, \zeta)$ сохраняется при замене аргументов ξ, η, ζ линейными функциями: $\xi = a_1x + a_2y + a_3z$, $\eta = b_1x + b_2y + b_3z$, $\zeta = c_1x + c_2y + c_3z$.

◀ Вычисляя второй дифференциал функции: $d^2f = f''_{\xi\xi} d\xi^2 + f''_{\eta\eta} d\eta^2 + f''_{\zeta\zeta} d\zeta^2 + 2f''_{\xi\eta} d\xi d\eta + 2f''_{\xi\zeta} d\xi d\zeta + 2f''_{\eta\zeta} d\eta d\zeta + f'_\xi d^2\xi + f'_\eta d^2\eta + f'_\zeta d^2\zeta$ и замечая, что, в силу линейности функций ξ, η, ζ , имеют место равенства $d^2\xi = 0$, $d^2\eta = 0$, $d^2\zeta = 0$, получаем

$$d^2f = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial}{\partial \zeta} d\zeta \right)^2 f.$$

Методом математической индукции легко доказать, что

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial}{\partial \zeta} d\zeta \right)^n f,$$

т. е. что форма дифференциалов произвольного порядка сохраняется при замене аргументов линейными функциями. ►

Найти полные дифференциалы первого и второго порядков от следующих сложных функций (x, y, z — независимые переменные):

53. $u = f(\sqrt{x^2 + y^2})$.

◀ Дифференцируя u как сложную функцию, получаем

$$du = f' d(\sqrt{x^2 + y^2}) = f' \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad d^2 u = d(f') \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + f' d\left(\frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

Так как

$$d(f') = f'' \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad d\left(\frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \frac{(y dx - x dy)^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}},$$

то окончательно находим

$$d^2 u = f'' \frac{(x dx + y dy)^2}{x^2 + y^2} + f' \frac{(y dx - x dy)^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}, \quad x^2 + y^2 \neq 0. \blacktriangleright$$

54. $u = f(\xi, \eta)$, где $\xi = x + y$, $\eta = x - y$.

◀ Поскольку аргументы ξ и η являются линейными функциями, то форма дифференциалов произвольного порядка сохраняется (см. пример 52).

Поэтому, вычисляя дифференциалы

$$du = f'_1 d\xi + f'_2 d\eta, \quad d^2 u = f''_{11} d\xi^2 + 2f''_{12} d\xi d\eta + f''_{22} d\eta^2,$$

где $f'_1 = \frac{\partial f}{\partial \xi}$, $f'_2 = \frac{\partial f}{\partial \eta}$, $f''_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}$, $f''_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}$, $f''_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}$, и вместо $d\xi$ и $d\eta$ подставляя их значения, найденные из равенств $\xi = x + y$, $\eta = x - y$, получаем

$$du = f'_1(dx + dy) + f'_2(dx - dy), \quad d^2 u = f''_{11}(dx + dy)^2 + 2f''_{12}(dx^2 - dy^2) + f''_{22}(dx - dy)^2. \blacktriangleright$$

55. $u = f(\xi, \eta)$, где $\xi = xy$, $\eta = \frac{x}{y}$.

◀ Дифференцируя u как сложную функцию, получаем

$$du = f'_1(y dx + x dy) + f'_2 \frac{y dx - x dy}{y^2},$$

$$d^2 u = f''_{11}(y dx + x dy)^2 + 2f''_{12} \frac{y^2 dx^2 - x^2 dy^2}{y^2} + f''_{22} \left(\frac{y dx - x dy}{y}\right)^2 + 2f'_1 dx dy - 2f'_2 \frac{(y dx - x dy) dy}{y^3}. \blacktriangleright$$

56. $u = f(x, y, z)$, где $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$.

◀ Аналогично предыдущему

$$du = f'_1 dt + f'_2 2t dt + f'_3 3t^2 dt = (f'_1 + 2t f'_2 + 3t^2 f'_3) dt,$$

$$d^2 u = f''_{11} dt^2 + f''_{22} 4t^2 dt^2 + f''_{33} 9t^4 dt^2 + 4f''_{12} t dt^2 + 6t^2 f''_{13} dt^2 + 12t^3 f''_{23} dt^2 + 2f'_2 dt^2 + 6t f'_3 dt^2 = \\ = (f''_{11} + 4t^2 f''_{22} + 9t^4 f''_{33} + 4t f''_{12} + 6t^2 f''_{13} + 12t^3 f''_{23} + 2f'_2 + 6t f'_3) dt^2. \blacktriangleright$$

57. $u = f(\xi, \eta, \zeta)$, где $\xi = x^2 + y^2$, $\eta = x^2 - y^2$, $\zeta = 2xy$.

◀ Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, имеем

$$\begin{aligned} du &= f'_1(2x dx + 2y dy) + f'_2(2x dx - 2y dy) + f'_3(2y dx + 2x dy), \\ d^2u &= 4f''_{11}(x dx + y dy)^2 + 4f''_{22}(x dx - y dy)^2 + 4f''_{33}(y dx + x dy)^2 + \\ &+ 8f''_{12}(x^2 dx^2 - y^2 dy^2) + 8f''_{13}(x dx + y dy)(y dx + x dy) + \\ &+ 8f''_{23}(x dx - y dy)(y dx + x dy) + 2f'_1(dx^2 + dy^2) + 2f'_2(dx^2 - dy^2) + 4f'_3 dx dy. \end{aligned}$$

Найти d^2u , если:

58. $u = f(ax + by + cz)$.

◀ Поскольку в данном случае форма дифференциалов инвариантна (см. пример 52), то

$$d^2u = f^{(n)}(d(ax + by + cz))^n = f^{(n)}(a dx + b dy + c dz)^{(n)}. \blacktriangleright$$

59. $u = f(ax, by, cz)$.

◀ В силу инвариантности формы дифференциалов n -го порядка (см. пример 52), имеем

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial s} a dx + \frac{\partial}{\partial t} b dy + \frac{\partial}{\partial r} c dz \right)^n f(s, t, r),$$

где $s = ax$, $t = by$, $r = cz$. ▶

60. $u = f(s, t, r)$, где $s = a_1x + b_1y + c_1z$, $t = a_2x + b_2y + c_2z$, $r = a_3x + b_3y + c_3z$.

◀ Используем инвариантность формы n -го дифференциала (см. пример 52). Имеем

$$\begin{aligned} d^2u &= \left(\frac{\partial}{\partial s} ds + \frac{\partial}{\partial t} dt + \frac{\partial}{\partial r} dr \right)^n f(s, t, r) = \left((a_1 dx + b_1 dy + c_1 dz) \frac{\partial}{\partial s} + \right. \\ &\left. + (a_2 dx + b_2 dy + c_2 dz) \frac{\partial}{\partial t} + (a_3 dx + b_3 dy + c_3 dz) \frac{\partial}{\partial r} \right)^n f(s, t, r). \end{aligned}$$

61. Пусть $u = f(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и f — дважды дифференцируемая функция.

Показать, что $\Delta u = F(r)$, где $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа, и найти функцию F .

◀ Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f' \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f'' \frac{x^2}{r^2} + f' \frac{1}{r} - f' \frac{x^2}{r^3}.$$

Аналогично находим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f'' \frac{y^2}{r^2} + f' \frac{1}{r} - f' \frac{y^2}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f'' \frac{z^2}{r^2} + f' \frac{1}{r} - f' \frac{z^2}{r^3}.$$

Таким образом,

$$\Delta u = f'' \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} + \frac{3}{r} f' - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^3} f' = f'' + \frac{3}{r} f' - \frac{1}{r} f' = f'' + \frac{2}{r} f' = F(r). \blacktriangleright$$

62. Доказать, что если функция $u = u(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u \equiv$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, то функция $v = u \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$ также удовлетворяет этому уравнению.

◀ Вводя для удобства обозначения $\varphi = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $\psi = \frac{y}{x^2 + y^2}$, имеем

$$\frac{\partial v}{\partial x} = u'_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + u'_2 \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = u'_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + u'_2 \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = u''_{11} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + 2u''_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + u''_{22} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + u'_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + u'_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = u''_{11} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + 2u''_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + u''_{22} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + u'_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + u'_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2},$$

где $u'_1 = \frac{\partial u}{\partial \varphi}$, $u'_2 = \frac{\partial u}{\partial \psi}$, $u''_{11} = \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$, $u''_{12} = \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial \psi}$, $u''_{22} = \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2}$.

Отсюда

$$\Delta v = u''_{11} \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right) + u''_{22} \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right) + 2u''_{12} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + u'_1 \Delta \varphi + u'_2 \Delta \psi. \quad (1)$$

Вычисляя производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, & \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \frac{2x(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3}, & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= \frac{2x(3y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^3}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} &= -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, & \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \frac{2y(3x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3}, & \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= \frac{2y(y^2 - 3x^2)}{(x^2 + y^2)^3}, \end{aligned}$$

убеждаемся, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \Delta \varphi = 0, \quad \Delta \psi = 0. \quad (2)$$

Таким образом, из (1) и (2) и из того, что $\Delta u = 0$, следует

$$\Delta v = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \Delta u = 0. \blacktriangleright$$

63. Доказать, что если функция $u = u(x, t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности

$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, то функция $v = \frac{1}{a\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} u\left(\frac{x}{a^2 t}, -\frac{1}{a^4 t}\right)$, $t > 0$, также удовлетворяет этому уравнению.

◀ Находим производные

$$\begin{aligned} v'_t &= \left(-\frac{u}{2a\sqrt{t^3}} + \frac{x^2 u}{4a^3\sqrt{t^5}} - \frac{x u'_1}{a^3\sqrt{t^5}} + \frac{u'_2}{a^5\sqrt{t^5}} \right) e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}, \\ v''_{x^2} &= \left(-\frac{u}{2a^3\sqrt{t^3}} + \frac{x^2 u}{4a^5\sqrt{t^5}} - \frac{x u'_1}{a^5\sqrt{t^5}} + \frac{u''_{11}}{a^5\sqrt{t^5}} \right) e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}, \end{aligned}$$

где через u'_1 и u''_{11} обозначены частные производные функции u по первому аргументу, а через u'_2 — по второму аргументу, и подставляем их в выражение $v'_t - a^2 v''_{x^2}$. После упрощений получаем

$$v'_t - a^2 v''_{x^2} = \frac{1}{a^5\sqrt{t^5}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} (u'_2 - a^2 u''_{11}).$$

Согласно условию, $u'_2 - a^2 u''_{11} = 0$. Поэтому $v'_t - a^2 v''_{x^2} = 0$. ▶

64. Доказать, что функция $u = \frac{1}{r}$, где $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$, при $r \neq 0$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

◀ Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \frac{x-a}{r} = -\frac{x-a}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(x-a)}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(x-a)^2}{r^5}.$$

Аналогично находим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(y-b)^2}{r^5}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(z-c)^2}{r^5}.$$

Складывая последние три равенства, получаем

$$\Delta u = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3} ((x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2) = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3} = 0. \blacktriangleright$$

65. Пусть функции $u_1 = u_1(x, y, z)$ и $u_2 = u_2(x, y, z)$ удовлетворяют уравнению Лапласа $\Delta u = 0$. Доказать, что функция $v = u_1(x, y, z) + (x^2 + y^2 + z^2)u_2(x, y, z)$ удовлетворяет бигармоническому уравнению $\Delta(\Delta v) = 0$.

◀ Последовательно дифференцируя, находим

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + 2xu_2 + (x^2 + y^2 + z^2) \frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + 2u_2 + 4x \frac{\partial u_2}{\partial x} + (x^2 + y^2 + z^2) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + 2u_2 + 4y \frac{\partial u_2}{\partial y} + (x^2 + y^2 + z^2) \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + 2u_2 + 4z \frac{\partial u_2}{\partial z} + (x^2 + y^2 + z^2) \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}.$$

Следовательно,

$$\Delta v = \Delta u_1 + 6u_2 + 4 \left(x \frac{\partial u_2}{\partial x} + y \frac{\partial u_2}{\partial y} + z \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) + (x^2 + y^2 + z^2) \Delta u_2.$$

Учитывая, что функции u_1 и u_2 удовлетворяют уравнению Лапласа, т. е. что $\Delta u_1 = 0$ и $\Delta u_2 = 0$, получаем

$$\Delta v = 6u_2 + 4 \left(x \frac{\partial u_2}{\partial x} + y \frac{\partial u_2}{\partial y} + z \frac{\partial u_2}{\partial z} \right).$$

Находя производные $\frac{\partial^2 \Delta v}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \Delta v}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 \Delta v}{\partial z^2}$ и складывая их, имеем

$$\begin{aligned} \Delta(\Delta v) = 14 \Delta u_2 + 4 \left(x \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} + y \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^2 \partial y} + z \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^2 \partial z} + x \frac{\partial^3 u_2}{\partial y^2 \partial x} + y \frac{\partial^3 u_2}{\partial y^3} + \right. \\ \left. + z \frac{\partial^3 u_2}{\partial y^2 \partial z} + x \frac{\partial^3 u_2}{\partial z^2 \partial x} + y \frac{\partial^3 u_2}{\partial z^2 \partial y} + z \frac{\partial^3 u_2}{\partial z^3} \right). \end{aligned}$$

Записывая последнее равенство в виде

$$\Delta(\Delta v) = 14 \Delta u_2 + 4x \frac{\partial}{\partial x} (\Delta u_2) + 4y \frac{\partial}{\partial y} (\Delta u_2) + 4z \frac{\partial}{\partial z} (\Delta u_2)$$

и пользуясь тем, что $\Delta u_2 = 0$, убеждаемся в справедливости равенства $\Delta(\Delta v) = 0$. ▶

66. Пусть $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ есть m раз дифференцируемая однородная функция измерения n . Доказать, что

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right)^m f(x, y, z) = n(n-1) \dots (n-m+1) f(x, y, z).$$

◀ Пусть (x, y, z) — произвольная фиксированная точка из области определения функции f , а $m \leq n$. В силу однородности, справедливо равенство $t^n f(x, y, z) = f(tx, ty, tz)$. Последовательно дифференцируя его m раз по t

$$\begin{aligned} nt^{n-1} f(x, y, z) &= x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} \equiv \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) f(tx, ty, tz), \\ n(n-1)t^{n-2} f(x, y, z) &= x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + z^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \\ &+ 2xz \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + 2yz \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \equiv \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f(tx, ty, tz), \\ &\dots \dots \dots \\ n(n-1) \dots (n-m+1)t^{n-m} f(x, y, z) &= \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right)^m f(tx, ty, tz) \end{aligned}$$

и полагая $t = 1$, получаем требуемое равенство. ►

67. Пусть $x^2 = vw$, $y^2 = uw$, $z^2 = uv$ и $f(x, y, z) = F(u, v, w)$. Доказать, что $xf'_x + yf'_y + zf'_z = uF'_u + vF'_v + wF'_w$.

◀ Согласно условию, имеем

$$F(u, v, w) = f(\sqrt{vw}, \sqrt{uw}, \sqrt{uv}).$$

Дифференцируя это равенство по u, v и w , находим

$$F'_u = f'_y \frac{w}{2\sqrt{uw}} + f'_z \frac{v}{2\sqrt{uv}}, \quad F'_v = f'_x \frac{w}{2\sqrt{vw}} + f'_z \frac{u}{2\sqrt{uv}}, \quad F'_w = f'_x \frac{v}{2\sqrt{vw}} + f'_y \frac{u}{2\sqrt{uw}}. \quad (1)$$

Умножая первое из равенств (1) на u , второе на v , а третье на w и складывая их, получаем

$$\begin{aligned} uF'_u + vF'_v + wF'_w &= f'_y \frac{uw}{2\sqrt{uw}} + f'_z \frac{uv}{2\sqrt{uv}} + f'_x \frac{vw}{2\sqrt{vw}} + f'_z \frac{uv}{2\sqrt{uv}} + \\ &+ f'_x \frac{vw}{2\sqrt{vw}} + f'_y \frac{uw}{2\sqrt{uw}} = \sqrt{vw}f'_x + \sqrt{uw}f'_y + \sqrt{uv}f'_z. \end{aligned}$$

Отсюда, используя условие задачи, окончательно находим

$$uF'_u + vF'_v + wF'_w = xf'_x + yf'_y + zf'_z. \quad \blacktriangleright$$

Путем последовательного дифференцирования исключить произвольные функции φ и ψ :

68. $z = x + \varphi(xy)$.

◀ Найдем частные производные по x и по y :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 + y\varphi', \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x\varphi'.$$

Сложим полученные равенства, умножив первое из них на x , а второе на $-y$. Тогда получим

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = x. \quad \blacktriangleright$$

69. $u = \varphi(x - y, y - z)$.

◀ Имеем $\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'_1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\varphi'_1 + \varphi'_2$, $\frac{\partial u}{\partial z} = -\varphi'_2$. Складывая эти равенства, получаем $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$. ►

70. $z = \varphi(x)\psi(y)$.

◀ Имеем $\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'\psi$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi\psi'$. Отсюда $\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi'\psi\varphi\psi' = z\varphi'\psi'$.

С другой стороны, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \varphi'\psi'$. Следовательно, из последних двух равенств непосредственно вытекает, что $\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} = z \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$. ►

71. $z = \varphi(xy) + \psi\left(\frac{x}{y}\right)$.

◀ Используя равенства

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\varphi' + \frac{1}{y}\psi', \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2\varphi'' + \frac{1}{y^2}\psi'', \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x\varphi' - \frac{x}{y^2}\psi', \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2\varphi'' + \frac{x^2}{y^4}\psi'' + \frac{2x}{y^3}\psi',$$

получаем следующие соотношения:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x}{y}\psi', \quad x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2x}{y}\psi',$$

из которых непосредственно вытекает, что

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \quad \blacktriangleright$$

72. Найти производную функции $z = x^2 - y^2$ в точке $M = (1, 1)$ в направлении l , составляющем угол $\alpha = 60^\circ$ с положительным направлением оси Ox .

◀ Имеем $\frac{\partial z(M)}{\partial l} = \frac{\partial z(M)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z(M)}{\partial y} \cos \beta = 2 \cos \alpha - 2 \cos \beta$. Таким образом, $\frac{\partial z(M)}{\partial l} = 1 - \sqrt{3}$. ▶

73. Найти производную функции $z = \ln(x^2 + y^2)$ в точке $M = (x_0, y_0)$ в направлении l , перпендикулярном к линии уровня, проходящей через эту точку.

◀ Поскольку вектор $\text{grad } u$ в точке M ортогонален к линии уровня $c = \ln(x^2 + y^2)$, проходящей через точку M , то направляющие косинусы вектора l равны направляющим косинусам $\text{grad } u$ в точке M , т. е.

$$\cos \alpha = \frac{\frac{\partial z(M)}{\partial x}}{\|\text{grad } u(M)\|}, \quad \cos \beta = \frac{\frac{\partial z(M)}{\partial y}}{\|\text{grad } u(M)\|}.$$

$$\text{Но } \frac{\partial z(M)}{\partial x} = \frac{2x_0}{x_0^2 + y_0^2}, \quad \frac{\partial z(M)}{\partial y} = \frac{2y_0}{x_0^2 + y_0^2},$$

$$\|\text{grad } u(M)\| = \sqrt{\left(\frac{\partial z(M)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z(M)}{\partial y}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}},$$

поэтому $\cos \alpha = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$, $\cos \beta = \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$. Следовательно,

$$\frac{\partial z(M)}{\partial l} = \frac{\partial z(M)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z(M)}{\partial y} \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \quad (x_0^2 + y_0^2 \neq 0). \quad \blacktriangleright$$

74. Найти производную функции $z = 1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$ в точке $M = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ по направлению внутренней нормали в этой точке к кривой $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

◀ Тангенс угла наклона нормали к данной кривой определяется формулой $\text{tg } \alpha = -\frac{1}{y' \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)}$, где $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$. Отсюда $\text{tg } \alpha = \frac{a}{b}$, а направляющие косинусы внутренней нормали выражаются формулами $\cos \alpha = -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\cos \beta = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ (мы берем знак минус, поскольку нормаль внутренняя). Воспользуемся формулой производной по направлению $n = (\cos \alpha, \cos \beta)$:

$$\frac{\partial z(M)}{\partial n} = \frac{\partial z(M)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z(M)}{\partial y} \cos \beta.$$

Вычисляя производные $\frac{\partial z(M)}{\partial x} = -\frac{\sqrt{2}}{a}$, $\frac{\partial z(M)}{\partial y} = -\frac{\sqrt{2}}{b}$, находим

$$\frac{\partial z(M)}{\partial n} = \frac{b\sqrt{2}}{a\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{a\sqrt{2}}{b\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2)}}{ab}. \quad \blacktriangleright$$

75. Найти производную функции $u = xyz$ в точке $M = (1, 1, 1)$ в направлении $l = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$. Чему равна величина градиента функции в этой точке?

◀ Очевидно, $\frac{\partial u(M)}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial u(M)}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial u(M)}{\partial z} = 1$. По формуле производной по направлению, получим

$$\frac{\partial u(M)}{\partial l} = \frac{\partial u(M)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u(M)}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u(M)}{\partial z} \cos \gamma = \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma.$$

Величину градиента определим по формуле

$$\|\text{grad } u(M)\| = \sqrt{\left(\frac{\partial u(M)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u(M)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u(M)}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{3}. \quad \blacktriangleright$$

76. Определить угол между градиентами функции $u = x^2 + y^2 + z^2$ в точках $A = (\epsilon, 0, 0)$ и $B = (0, \epsilon, 0)$.

◀ Имеем

$$\begin{aligned} \text{grad } u(A) &= \left(\frac{\partial u(A)}{\partial x}, \frac{\partial u(A)}{\partial y}, \frac{\partial u(A)}{\partial z} \right) = (2\varepsilon, 0, 0), \\ \text{grad } u(B) &= \left(\frac{\partial u(B)}{\partial x}, \frac{\partial u(B)}{\partial y}, \frac{\partial u(B)}{\partial z} \right) = (0, 2\varepsilon, 0). \end{aligned}$$

Отсюда $\|\text{grad } u(A)\| = 2|\varepsilon|$, $\|\text{grad } u(B)\| = 2|\varepsilon|$. Подставляя эти значения в равенство

$$(\text{grad } u(A), \text{grad } u(B)) = \|\text{grad } u(A)\| \|\text{grad } u(B)\| \cos \varphi,$$

получаем $\cos \varphi = 0$, т. е. $\varphi = \frac{\pi}{2}$. ▶

77. Показать, что в точке $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ угол между градиентами функций $u = ax^2 + by^2 + cz^2$, $v = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2mx + 2ny + 2pz$ (a, b, c, m, n, p — постоянные и $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$) стремится к нулю, если точка M_0 удаляется в бесконечность.

◀ Имеем $\cos \varphi = \frac{(\text{grad } u, \text{grad } v)}{\|\text{grad } u\| \|\text{grad } v\|}$, где

$$\text{grad } u = (2ax_0, 2by_0, 2cz_0), \quad \text{grad } v = (2ax_0 + 2m, 2by_0 + 2n, 2cz_0 + 2p),$$

$$\|\text{grad } u\| = 2\sqrt{(ax_0)^2 + (by_0)^2 + (cz_0)^2}, \quad \|\text{grad } v\| = 2\sqrt{(ax_0 + m)^2 + (by_0 + n)^2 + (cz_0 + p)^2}.$$

Тогда углы φ определяется из равенства

$$\cos \varphi = \frac{ax_0(ax_0 + m) + by_0(by_0 + n) + cz_0(cz_0 + p)}{\sqrt{((ax_0)^2 + (by_0)^2 + (cz_0)^2)((ax_0 + m)^2 + (by_0 + n)^2 + (cz_0 + p)^2)}}.$$

Вычислим $\sin \varphi$ и покажем, что $\sin \varphi \rightarrow 0$, если $\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} \rightarrow \infty$:

$$|\sin \varphi| = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sqrt{\frac{(ax_0n - by_0m)^2 + (ax_0p - cz_0m)^2 + (by_0p - cz_0n)^2}{((ax_0)^2 + (by_0)^2 + (cz_0)^2)((ax_0 + m)^2 + (by_0 + n)^2 + (cz_0 + p)^2)}}.$$

Пользуясь неравенствами $2|x_0y_0| \leq x_0^2 + y_0^2$, $2|x_0z_0| \leq x_0^2 + z_0^2$, $2|y_0z_0| \leq y_0^2 + z_0^2$ и обозначая наибольший по абсолютной величине из коэффициентов числителя при x_0^2 , y_0^2 и z_0^2 через A^2 , получаем оценку

$$(ax_0n - by_0m)^2 + (ax_0p - cz_0m)^2 + (by_0p - cz_0n)^2 \leq A^2(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2).$$

Не ограничивая общности, будем считать, что $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. Пусть $B = \min\{|a|, |b|, |c|\}$, тогда $a^2x_0^2 + b^2y_0^2 + c^2z_0^2 \geq B^2(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)$.

Таким образом, имеем оценку

$$\begin{aligned} 0 \leq |\sin \varphi| &\leq \frac{A\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}{B\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}\sqrt{(ax_0 + m)^2 + (by_0 + n)^2 + (cz_0 + p)^2}} = \\ &= \frac{A}{B\sqrt{(ax_0 + m)^2 + (by_0 + n)^2 + (cz_0 + p)^2}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Очевидно, если $\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} \rightarrow \infty$, то

$$\sqrt{(ax_0 + m)^2 + (by_0 + n)^2 + (cz_0 + p)^2} \rightarrow \infty;$$

поэтому из неравенства (1) следует, что $\sin \varphi$, а вместе с ним и φ стремится к нулю, если точка M_0 удаляется в бесконечность. ▶

78. Пусть $u = f(x, y, z)$ — дважды дифференцируемая функция и $l_1 = (\cos \alpha_1, \cos \beta_1, \cos \gamma_1)$, $l_2 = (\cos \alpha_2, \cos \beta_2, \cos \gamma_2)$, $l_3 = (\cos \alpha_3, \cos \beta_3, \cos \gamma_3)$ — три взаимно перпендикулярных направления. Доказать, что:

$$a) \left(\frac{\partial u}{\partial l_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial l_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial l_3} \right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2;$$

$$б) \frac{\partial^2 u}{\partial l_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial l_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial l_3^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

« а) Находим производные функции u по направлениям l_1, l_2, l_3 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial l_1} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha_1 + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta_1 + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma_1, \\ \frac{\partial u}{\partial l_2} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha_2 + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta_2 + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma_2, \\ \frac{\partial u}{\partial l_3} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha_3 + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta_3 + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma_3. \end{aligned} \quad (1)$$

Отсюда непосредственно следует:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial l_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial l_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial l_3}\right)^2 &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 (\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3) + \\ &+ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 (\cos^2 \beta_1 + \cos^2 \beta_2 + \cos^2 \beta_3) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 (\cos^2 \gamma_1 + \cos^2 \gamma_2 + \cos^2 \gamma_3) + \\ &+ 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} (\cos \alpha_1 \cos \beta_1 + \cos \alpha_2 \cos \beta_2 + \cos \alpha_3 \cos \beta_3) + \\ &+ 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} (\cos \alpha_1 \cos \gamma_1 + \cos \alpha_2 \cos \gamma_2 + \cos \alpha_3 \cos \gamma_3) + \\ &+ 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} (\cos \beta_1 \cos \gamma_1 + \cos \beta_2 \cos \gamma_2 + \cos \beta_3 \cos \gamma_3). \end{aligned} \quad (2)$$

Поскольку матрица

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \beta_1 & \cos \gamma_1 \\ \cos \alpha_2 & \cos \beta_2 & \cos \gamma_2 \\ \cos \alpha_3 & \cos \beta_3 & \cos \gamma_3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

является матрицей перехода от ортонормированного базиса (i, j, k) к ортонормированному базису (l_1, l_2, l_3) , то она обладает тем свойством, что сумма квадратов элементов любой строки (столбца) равна единице, а сумма произведений соответствующих элементов двух различных строк (столбцов) равна нулю.

Таким образом, в равенстве (2) коэффициенты при квадратах производных $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2, \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2, \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$ равны единице, а при произведениях производных $\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z}$ равны нулю. Учитывая это, из равенств (2) непосредственно получаем равенство а).

б) Находим $\frac{\partial^2 u}{\partial l_1^2} = \frac{\partial}{\partial l_1} \left(\frac{\partial u}{\partial l_1}\right)$, где $\frac{\partial u}{\partial l_1}$ определено первым из равенств (1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial l_1^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos^2 \alpha_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cos^2 \beta_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \cos^2 \gamma_1 + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cos \alpha_1 \cos \beta_1 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \cos \alpha_1 \cos \gamma_1 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \cos \beta_1 \cos \gamma_1. \end{aligned}$$

Аналогично вычисляем $\frac{\partial^2 u}{\partial l_2^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial l_3^2}$. Складывая полученные равенства, находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial l_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial l_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial l_3^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3) + \\ &+ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} (\cos^2 \beta_1 + \cos^2 \beta_2 + \cos^2 \beta_3) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} (\cos^2 \gamma_1 + \cos^2 \gamma_2 + \cos^2 \gamma_3) + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} (\cos \alpha_1 \cos \beta_1 + \cos \alpha_2 \cos \beta_2 + \cos \alpha_3 \cos \beta_3) + \end{aligned}$$

$$+ 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} (\cos \alpha_1 \cos \gamma_1 + \cos \alpha_2 \cos \gamma_2 + \cos \alpha_3 \cos \gamma_3) +$$

$$+ 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} (\cos \beta_1 \cos \gamma_1 + \cos \beta_2 \cos \gamma_2 + \cos \beta_3 \cos \gamma_3).$$

Отсюда, воспользовавшись свойством матрицы (3), получим равенство б). ►

79. Пусть $u = u(x, y)$ — дифференцируемая функция и при $y = x^2$ имеем $u(x, x^2) = 1$ и $\frac{\partial u}{\partial x} = x$. Найти $\frac{\partial u}{\partial y}$ при $y = x^2$.

◀ Поскольку, по условию, $u(x, x^2) = 1$, то отсюда, используя дифференцируемость функции u , получаем $\frac{\partial}{\partial x} u(x, x^2) = 0$, т. е.

$$\frac{\partial u(x, x^2)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, x^2)}{\partial y} 2x = 0. \quad (1)$$

Но, по условию, $\frac{\partial u(x, x^2)}{\partial x} = x$, поэтому из (1) следует, что $\frac{\partial u(x, x^2)}{\partial y} = -\frac{1}{2}$. ►

80. Пусть функция $u = u(x, y)$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ и, кроме того, следующим условиям: $u(x, 2x) = x$, $u'_x(x, 2x) = x^2$. Найти $u''_{xx}(x, 2x)$, $u''_{xy}(x, 2x)$, $u''_{yy}(x, 2x)$.

◀ Дифференцируя обе части равенства $u(x, 2x) = x$ по x :

$$u'_x(x, 2x) + 2u'_y(x, 2x) = 1$$

и пользуясь равенством $u'_x(x, 2x) = x^2$, получаем $x^2 + 2u'_y(x, 2x) = 1$. Последнее равенство снова дифференцируем по x :

$$2x + 2u''_{yx}(x, 2x) + 4u''_{yy}(x, 2x) = 0.$$

Отсюда, учитывая уравнение $u''_{xx} = u''_{yy}$ и тождество $u''_{xy} = u''_{yx}$, получаем

$$2u''_{xx}(x, 2x) + u''_{xy}(x, 2x) = -x. \quad (1)$$

Далее, дифференцируя равенство $u'_x(x, 2x) = x^2$ по x , имеем

$$u''_{xx}(x, 2x) + 2u''_{xy}(x, 2x) = 2x. \quad (2)$$

Решая систему уравнений (1) и (2) относительно u''_{xx} , u''_{xy} и учитывая, что $u''_{xx} = u''_{yy}$, находим

$$u''_{xx}(x, 2x) = u''_{yy}(x, 2x) = -\frac{4x}{3}, \quad u''_{xy}(x, 2x) = \frac{5x}{3}. \quad \blacktriangleright$$

81. Найти решение $z = z(x, y)$ уравнения $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2y$, удовлетворяющее условию $z(x, x^2) = 1$.

◀ Интегрируя уравнение по y , находим $z(x, y) = x^2 y + y^2 + \varphi(x)$, где φ — пока неопределенная функция. Для нахождения неизвестной функции φ используем условие $z(x, x^2) = 1$: $z(x, x^2) \equiv x^2 x^2 + x^4 + \varphi(x) = 1$. Отсюда $\varphi(x) = -2x^4 + 1$. Таким образом, $z(x, y) = x^2 y + y^2 - 2x^4 + 1$. ►

82. Найти решение $z = z(x, y)$ уравнения $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x + y$, удовлетворяющее условиям $z(x, 0) = x$, $z(0, y) = y^2$.

◀ Имеем

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = \int_0^x (x + y) dx + \varphi_0(y) \equiv \frac{x^2}{2} + xy + \varphi_0(y),$$

$$z(x, y) = \int_0^y \left(\frac{x^2}{2} + xy + \varphi_0(y) \right) dy \equiv \frac{x^2 y}{2} + \frac{xy^2}{2} + \varphi(y) + \psi(x),$$

где $\varphi(y) = \int_0^y \varphi_0(y) dy$.

Используя условие $z(x, 0) = x$, находим $z(x, 0) \equiv \psi(x) = x$; следовательно, $z(x, y) = \frac{x^2 y}{2} + \frac{xy^2}{2} + \varphi(y) + x$.

Далее, из условия $z(0, y) = y^2$ следует $z(0, y) \equiv \varphi(y) = y^2$. Таким образом, окончательно имеем $z(x, y) = \frac{x^2 y + xy^2}{2} + y^2 + x$. ▶

83. Найти решение $z = z(x, y)$ уравнения $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$, удовлетворяющее условиям $z(x, 0) = 1$, $z'_y(x, 0) = x$.

◀ Аналогично предыдущему $\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = 2y + \varphi(x)$, $z(x, y) = y^2 + y\varphi(x) + \psi(x)$.

Принимая во внимание, что $z(x, 0) \equiv \psi(x) = 1$, $z'_y(x, 0) \equiv \varphi(x) = x$, окончательно находим $z(x, y) = y^2 + xy + 1$. ▶

Найти производную следующих отображений $f \circ g$:

84. $f: (r, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$, $g: (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \end{pmatrix}$, если

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad (r, \varphi) \in D,$$

$$D = \{(r, \varphi) : 0 < \alpha \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi - \delta, 0 < \delta < 2\pi\}. \quad (1)$$

◀ По формуле дифференцирования сложного отображения находим

$$(f \circ g)' = f' \cdot g' = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ -\frac{y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Поскольку $x^2 + y^2 = r^2$, то из (1) и (2) получаем

$$(f \circ g)' = \begin{pmatrix} \frac{x \cos \varphi}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{ry \sin \varphi}{x^2 + y^2} & \frac{y \cos \varphi}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{rx \sin \varphi}{x^2 + y^2} \\ \frac{x \sin \varphi}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{ry \cos \varphi}{x^2 + y^2} & \frac{y \sin \varphi}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{rx \cos \varphi}{x^2 + y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangleright$$

85. $f: (r, \varphi, z) \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$, $g: (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \\ z \end{pmatrix}$, если

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z, \quad (r, \varphi, z) \in D, \quad (1)$$

$$D = \{(r, \varphi, z) : 0 < \alpha \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi - \delta, |z| \leq H, 0 < \delta < 2\pi\}.$$

◀ Имеем

$$(f \circ g)' = f' \cdot g' =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & 0 \\ -\frac{y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x \cos \varphi}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{ry \sin \varphi}{x^2 + y^2} & \frac{y \cos \varphi}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{rx \sin \varphi}{x^2 + y^2} & 0 \\ \frac{x \sin \varphi}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{ry \cos \varphi}{x^2 + y^2} & \frac{y \sin \varphi}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{rx \cos \varphi}{x^2 + y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Учитывая равенства (1), окончательно находим

$$(f \circ g)' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangleright$$

86. Пусть

$$g: (r, \varphi, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \theta \\ r \sin \varphi \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix}, \quad f: (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \\ \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{pmatrix},$$

$$(r, \varphi, \theta) \in D, \quad D = \{(r, \varphi, \theta) : 0 < \alpha \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi - \delta, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 < \delta < 2\pi\},$$

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta. \quad (1)$$

Найти $(f \circ g)'$ и $(g \circ f)'$.

◀ По формуле дифференцирования сложного отображения, находим

$$(f \circ g)' = f' \cdot g' =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} & \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ -\frac{y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} & 0 \\ \frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2}(x^2 + y^2 + z^2)} & \frac{yz}{\sqrt{x^2 + y^2}(x^2 + y^2 + z^2)} & -\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + z^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta & -r \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -r \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Умножив матрицы и подставив вместо x, y и z их значения из (1), получим

$$(f \circ g)' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично находим, что

$$(g \circ f)' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

87. Найти F' , если $F = (f \circ g \circ h)(s, t, u)$,

$$f: (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \end{pmatrix}, \quad g: (r, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad h: (s, t, u) \mapsto \begin{pmatrix} s & t & u \\ s^2 + t^2 + u^2 \end{pmatrix},$$

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad r = stu, \quad \varphi = s^2 + t^2 + u^2.$$

◀ Имеем

$$F' = f' \cdot g' \cdot h'.$$

В силу ассоциативности произведения матриц, справедливо равенство

$$F' = (f' \cdot g') \cdot h'.$$

А поскольку

$$f' \cdot g' = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ -\frac{y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad h' = \begin{pmatrix} tu & su & st \\ 2s & 2t & 2u \end{pmatrix},$$

то

$$F' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} tu & su & st \\ 2s & 2t & 2u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tu & su & st \\ 2s & 2t & 2u \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

Упражнения для самостоятельной работы

Найти частные производные следующих функций:

17. $f(x, y) = \frac{\sin xy}{y}$. 18. $f(x, y, z) = \ln(xy^2z^3)$. 19. $f(x, y) = x^4y + 2x^2y^2 + xy^3 + x - y$.

20. $f(x, y) = \frac{x+y^2}{x^2+y^2+1}$. 21. $f(x, y) = \frac{z}{y}$. 22. $f(x, y) = (2x^2y^2 - x + 1)^3$.

23. $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$. 24. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - x + 1}$. 25. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

26. $f(x, y) = 2^{x-y}$. 27. $f(x, y) = \ln(x^3 + \sin xy)$. 28. $f(x, y, z) = \ln(x^3 + 2^y + \operatorname{tg} 3z)$.
 29. $f(x, y) = \cos(2x + 3y + 1)$. 30. $f(x, y) = e^{-x^2y}$. 31. $f(x, y) = (x + 1)^{2y+1}$.
 32. $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$. 33. $f(x, y) = 2^{-\frac{x}{y}}$. 34. $f(x, y) = \ln(e^x + 2e^y)$.
 35. $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y^2}$. 36. $f(x, y) = xy - \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.
 37. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz + xyz$. 38. $f(x, y, z) = (xy)^z$.
 39. $f(x, y, z) = z^{xy}$. 40. $f(x, y, z) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} z$.

Найти дифференциалы следующих функций:

41. $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$. 42. $f(x, y) = \operatorname{arccos}(xy)$. 43. $f(x, y) = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}$.
 44. $f(x, y) = \operatorname{arctg}(x^2 + y^2)$. 45. $f(x, y, z) = \ln(x + y - z)$. 46. $f(x, y) = x^y$.
 47. $f(x, y) = \cos(xy)$. 48. $f(x, y) = x^3 + y^3 - xy$.
 49. $f(x, y) = e^{-xy}$. 50. $f(x, y, z) = x^3y + y^3x + z^3y$.

Непосредственным вычислением производных проверить теорему Эйлера об однородных функциях:

51. $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \ln \frac{x}{y}$. 52. $f(x, y, z) = \frac{y}{x} e^{\frac{x}{z}}$. 53. $f(x, y, z) = \sin \frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.
 54. $f(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. 55. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 56. $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$.

Найти частные производные первого и второго порядков в следующих примерах:

57. $f(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$. 58. $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$.
 59. $f(x, y) = x \sin(x+y) + y \cos(x+y)$. 60. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Найти производные первых двух порядков от функций:

61. $u = \varphi(\xi, \eta)$, $\xi = x + y$, $\eta = x - y$. 62. $u = \varphi(\xi, \eta)$, $\xi = x^2 + y^2 + z^2$, $\eta = xyz$.
 63. $u = \omega(\xi, \eta)$, $\xi = \frac{x}{y}$, $\eta = \frac{z}{x}$.

64. Показать, что если $x^2 = \eta\xi$, $y^2 = \zeta\xi$, $z^2 = \zeta\eta$, то $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = \xi \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial u}{\partial \eta} + \zeta \frac{\partial u}{\partial \zeta}$.

65. Полагая $x = ar \cos^{\alpha} \varphi$, $y = br \sin^{\alpha} \varphi$, найти якобиан

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}.$$

66. Полагая $x = ar \cos^{\alpha} \varphi \sin^{\alpha} \theta$, $y = br \sin^{\alpha} \varphi \sin^{\alpha} \theta$, $z = cr \cos^{\alpha} \theta$, найти якобиан

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix}.$$

67. Полагая $x = \xi\eta\zeta$, $y = \xi\eta - \xi\eta\zeta$, $z = \eta - \xi\eta$, найти якобиан $\frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)}$.

68. Доказать, что если $x = \cos \varphi$, $y = \sin \varphi \cos \theta$, $z = \sin \varphi \sin \theta \cos \psi$, то якобиан равен $-\sin^3 \varphi \sin^2 \theta \sin \psi$.

69. Доказать, что при $u_1 = \frac{x_1}{\sqrt{1-r^2}}$, $u_2 = \frac{x_2}{\sqrt{1-r^2}}$, $u_3 = \frac{x_3}{\sqrt{1-r^2}}$, где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, справедливо равенство

$$\frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} = (1 - r^2)^{-\frac{5}{2}}.$$

70. Проверить, что $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если $u = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$.

71. Проверить, что $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, если $u = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{z}{y}}$.

Вычислить выражения:

72. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, если $u = \varphi(x + y)$.

73. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2$, если $u = \varphi(xy)$.

Проверить следующие равенства:

74. $\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u = 0, u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$

75. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3}{x+y+z}, u = \ln(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz).$

76. $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}, z = y\varphi(x^2 + y^2).$ 77. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\alpha \frac{\partial u}{\partial y} = \alpha^2 u, u = e^{-\alpha x} \varphi(x - y).$

78. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2\varphi'', u = \varphi(y - z) - x\varphi'(y - z).$

79. $(x^2 - y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xyz, z = e^y \varphi\left(\frac{x^2}{2y^2}\right).$ 80. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, u = \ln(x^2 + y^2).$

81. $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$ если $u = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$

82. $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n-1)u,$ где $u = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x^{1-n} \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$

83. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$ если $u = x\varphi(x+y) + y\psi(x+y).$

84. $a^2 \left(u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right) = b^2 \left(u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right),$ где $u = \varphi(ay + bx)\psi(bx - ay).$

85. $\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$ если $u = f(x + \varphi(y)).$ 86. $\frac{\partial^2 \ln z}{\partial x \partial y} = 2z, z = \frac{\varphi'(x)\psi'(y)}{(\varphi(x) + \psi(y))^2}.$

§ 3. Неявные функции

3.1. Принцип неподвижной точки.

Пусть X — метрическое пространство.

Определение 1. Оператор (отображение) $A: X \rightarrow X$ называется сжимающим, если

$$\exists \theta \in [0, 1] \forall x, y \in X: \rho(Ax, Ay) \leq \theta \rho(x, y).$$

Из определения следует, что оператор A удовлетворяет условию Липшица и, следовательно, равномерно непрерывен.

Определение 2. Точка $x \in A$ называется неподвижной точкой оператора A , если $Ax = x$ т. е. если она является решением операторного уравнения $Ax = x$.

Теорема (Каччиополли—Пикара—Банаха). Всякий сжимающий оператор A , отображающий полное метрическое пространство X в себя, имеет в этом пространстве единственную неподвижную точку.

3.2. Определение неявной функции.

Пусть задано отображение $f: X \times Y \rightarrow Z$, где $X \subset \mathbb{R}^m, Y \subset \mathbb{R}^n, Z \subset \mathbb{R}^n$, причем множество Z содержит нулевой элемент пространства \mathbb{R}^n .

Рассмотрим уравнение

$$f(x, y) = 0. \tag{1}$$

Если существуют непустые множества $E \subset X$ и $F \subset Y$ такие, что $\forall x \in E$ уравнение (1) имеет единственное решение $y \in F$, то можно определить отображение $\varphi: E \rightarrow F$, поставив в соответствие каждому $x \in E$ то значение $y = \varphi(x), y \in F$, которое при этом x является решением уравнения (1). В этом случае уравнение (1) определяет φ как неявное отображение $E \rightarrow F: x \mapsto \varphi(x)$, которое называется неявным отображением (при $n = 1$ — функцией), определяемым уравнением (1).

3.3. Теоремы о неявной функции.

Пусть задано уравнение

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m, y) = 0, \tag{1}$$

которое запишем в виде $f(x, y) = 0$.

Здесь $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), x \in S(x_0, a), x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0), y \in S(y_0, b), S(y_0, b) =]y_0 - b, y_0 + b[.$ Обозначим $D = S(x_0, a) \times S(y_0, b).$