Глава 1

Введение в анализ

§ 1. Элементы теории множеств

1.1. Логические символы.

В математике часто некоторые словесные выражения заменяют посредством символов. Так, например, символом $\forall$ заменяют выражение "для произвольного", или "для любого", или "какого бы ни было", а символом $\exists$ — выражение "существует", или "найдется". Символы $\forall$ и $\exists$ называются *кванторами*.

Запись $A \Rightarrow B$ (*импликация*) означает, что из справедливости высказывания A вытекает справедливость высказывания B. Если, кроме того, из справедливости высказывания B вытекает справедливость A, то записываем $A \Leftrightarrow B$. Если $A \Leftrightarrow B$, то высказывание B является необходимым и достаточным условием для того, чтобы выполнялось высказывание A.

Если предложения A и B справедливы одновременно, то записываем $A \wedge B$. Если же справедливо хотя бы одно из предложений A или B, то записываем $A \vee B$.

1.2. Операции над множествами.

Математическое понятие *множества* элементов принимается в качестве интуитивного. Множество задается правилом или признаком, согласно которому определяем, принадлежит ли данный элемент множеству или не принадлежит.

Множество обозначают символом $A = \{x\}$, где x — общее наименование элементов множества A. Часто множество записывают в виде $A = \{a, b, c, \dots\}$, где в фигурных скобках указаны элементы множества A.

Будем пользоваться обозначениями:

$\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел;
$\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел;
$\mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел;
$\mathbb{R}$ — множество всех действительных чисел;
$\mathbb{C}$ — множество всех комплексных чисел;
$\mathbb{Z}_0$ — множество всех неотрицательных целых чисел.

Запись $a \in A$ (или $A \ni a$) означает, что элемент a принадлежит множеству A.

Запись $a \notin A$ (или $A \not\ni a$) означает, что элемент a не принадлежит множеству A.

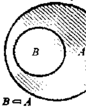


Рис. 1

Множество B, все элементы которого принадлежат множеству A, называется *подмножеством* множества A, и при этом записывают $B \subset A$ (или $A \supset B$) (рис. 1). Всегда $A \subset A$, так как каждый элемент множества, естественно, принадлежит A. Пустое множество, т. е. множество, не содержащее ни одного элемента, обозначим символом $\varnothing$. Любое множество содержит пустое множество в качестве своего подмножества.

Определение 1. *Если $A \subset B \wedge B \subset A$, то A и B называются равными множествами, при этом записывают $A = B$.*

Определение 2. *Если $A \subset \mathcal{J}$, то множество элементов множества $\mathcal{J}$, не принадлежащих A, называется дополнением множества A к множеству $\mathcal{J}$* (рис. 2).

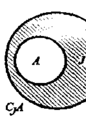


Рис. 2

Дополнение множества A к множеству $\mathcal{J}$ обозначают символом $C_{\mathcal{J}}A$ или просто CA, если известно, к какому множеству берется дополнение. Таким образом,

$$C_{\mathcal{J}}A = \{x : x \in \mathcal{J} \wedge x \notin A\}.$$

Если $A \subset \mathcal{J}$, $B \subset \mathcal{J}$, то иногда дополнение множества B к множеству A называют *разностью* множеств A и B и обозначают $A \backslash B$ (рис. 3), т. е.

$$A \backslash B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Пусть A и B подмножества множества $\mathcal{J}$.

Определение 3. *Объединением множеств A и B называется множество* (рис. 4)

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

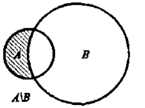


Рис. 3

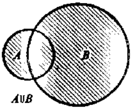


Рис. 4

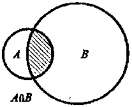


Рис. 5

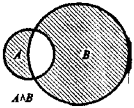


Рис. 6

Аналогично, если A_j, $j = \overline{1, n}$, подмножества множества $\mathcal{J}$, то их объединением будет множество

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \{x : x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_n\}.$$

Определение 4. *Пересечением подмножеств A и B называется множество* (рис. 5)

$$A \cap B\{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Аналогично, символом $\bigcap_{j=1}^{n} A_j$ обозначают пересечение подмножеств $A_j, j = \overline{1, n}$, множества $\mathcal{J}$, т. е. множество

$$\bigcap_{j=1}^{n} A_j = \{x : x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \wedge x \in A_n\}.$$

Если каждому $\mu \in M$ сопоставлено некоторое множество A_μ, то говорят, что задано *семейство множеств* $\{A_\mu\}$, $\mu \in M$. В этом случае множество $\bigcup_{\mu \in M} A_\mu = \{x :$ все x такие, что $x \in A_\mu$ хотя бы для одного $\mu \in M\}$ называют *объединением семейства множеств* $\{A_\mu\}$, $\mu \in M$, а множество $\bigcap_{\mu \in M} A_\mu = \{x \,.\, x \in A_\mu \; \forall \mu \in M\}$ — *пересечением* этого семейства.

Определение 5. *Симметрической разностью двух множеств A и B называется множество, определяемое объединением разностей $A \backslash B$ и $B \backslash A$* (рис. 6).

Симметрическую разность обозначают символом $A \triangle B$.

Определение 6. *Два элемента a и b называются упорядоченной парой, если указано, какой из этих элементов первый, какой второй, при этом* $((a, b) = (c, d)) \Leftrightarrow (a = c \wedge b = d)$.

Упорядоченную пару элементов a и b обозначают символом (a, b).

Аналогично определяется упорядоченная система из n элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, которую обозначают символом $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называются *координатами упорядоченной системы* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Определение 7. *Совокупность всевозможных упорядоченных пар (a, b), где $a \in A$, $b \in B$, называется произведением множеств A и B и обозначается символом $A \times B$.*

Аналогично, символом $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ обозначают произведение множеств $A_j \subset \mathcal{J}$, $j = \overline{1, n}$, т. е. совокупность всевозможных упорядоченных систем $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где $a_j \in A_j$, $j = \overline{1, n}$.

1.3. Булева алгебра.

Пусть A, B и D — произвольные подмножества множества $\mathcal{J}$. Тогда непосредственно из определений объединения, пересечения и дополнения вытекают следующие предложения:

1) $A \cup B \subset \mathcal{J}$, $A \cap B \subset \mathcal{J}$ (замкнутость операций объединения и пересечения);

2) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ (коммутативность операций объединения и пересечения);

3) $A \cup (B \cup D) = (A \cup B) \cup D$, $A \cap (B \cap D) = (A \cap B) \cap D$ (ассоциативность операции объединения и пересечения);

4) $A \cup (B \cap D) = (A \cup B) \cap (A \cup D)$ (дистрибутивность операции объединения относительно операции пересечения);

$A \cap (B \cup D) = (A \cap B) \cup (A \cap D)$ (дистрибутивность операции пересечения относительно операции объединения);

5) $A \cup A = A \cap A = A$;

6) $(A \cup B = B) \Leftrightarrow (A \cap B = A)$,

7) $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \mathcal{J} = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cup \mathcal{J} = \mathcal{J}$;

8) $A \cup CA = \mathcal{J}$, $A \cap CA = \varnothing$.

Если для элементов множества $\sigma = \{A, B, C, \dots\}$ определены объединение $\cup$ и пересечение $\cap$, для которых выполняются отношения 1)—8), то тройка $(\sigma, \cup, \cap)$ называется *булевой алгеброй*. Таким образом, если σ — семейство всех частей множества $\mathcal{J}$, то $(\sigma, \cup, \cap)$ — булева алгебра.

1.4. Принцип двойственности.

Для произвольных подмножеств A и B множества $\mathcal{J}$ справедливы равенства

$$C(A \cup B) = CA \cap CB, \quad C(A \cap B) = CA \cup CB. \tag{1}$$

Свойства, записанные равенствами (1), называются *принципом двойственности*. Их можно прочитать следующим образом: *дополнение к объединению множеств равно пересечению их дополнений, а дополнение к пересечению множеств равно объединению их дополнений*. Без труда принцип двойственности переносится на произвольное число подмножеств A_μ, при этом записывают

$$C\bigcup_\mu A_\mu = \bigcap_\mu CA_\mu, \quad C\bigcap_\mu A_\mu = \bigcup_\mu CA_\mu. \tag{2}$$

В этом случае символ дополнения C можно менять местами со знаком $\cup$ или $\cap$, при этом знаки эти переходят один в другой.

1.5. Алгебра множеств.

Пусть $\mathcal{J}$ — некоторое множество, а $P(\mathcal{J})$ — система всех подмножеств множества $\mathcal{J}$.

Определение 1. *Непустое семейство $R \subset P(\mathcal{J})$, замкнутое относительно операции объединения, пересечения и разности множеств, называется* ***кольцом множеств.***

Определение 2. *Множество E называется* ***единицей семейства множеств*** *Σ, если $E \in \Sigma$ и $\forall A \in \Sigma$ справедливо равенство $A \cap E = A$.*

Определение 3. *Кольцо множеств, содержащее в качестве своего элемента единицу, называется* ***алгеброй множеств.***

Определение 4. *Семейство множеств $S \subset P(\mathcal{J})$ называется* ***полукольцом,*** *если оно содержит пустое множество и если $\forall A \in S$ и $\forall A_1 \subset A$ существуют такие множества $A_2, A_3, \dots, A_n \in S$, что*

$$A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n,$$

где символ $\sqcup$ означает объединение непересекающихся множеств.

1. Доказать справедливость отношений 1)—8) пункта 1.3.

◄ 1) [1] По определению 3, п. 1.2,

$$A \cup B = \{x \in \mathcal{J} : x \in A \vee x \in B\},$$

следовательно, из включения $x \in A \cup B$ следует $x \in \mathcal{J}$, т. е. $A \cup B \subset \mathcal{J}$.

Аналогично, по определению 4, п. 1.2,

$$A \cap B = \{x \in \mathcal{J} : x \in A \wedge x \in B\},$$

поэтому из включения $x \in A \cap B$ следует включение $A \cap B \subset \mathcal{J}$.

2) Поскольку высказывание $x \in A \vee x \in B$ равносильно высказыванию $x \in B \vee x \in A$, то

$$A \cup B = \{x \in \mathcal{J} : x \in A \vee x \in B\} = \{x \in \mathcal{J} : x \in B \vee x \in A\} = B \cup A.$$

Второе равенство доказывается аналогично.

3) В силу свойств логического символа $\vee$, имеем

$$A \cup (B \cup D) = \{x \in \mathcal{J} : x \in A \vee x \in (B \cup D)\} = \{x \in \mathcal{J} : x \in A \vee (x \in B \vee x \in D)\} =$$
$$= \{x \in \mathcal{J} : (x \in A \vee x \in B) \vee x \in D\} = \{x \in \mathcal{J} : x \in (A \cup B) \vee x \in D\} = (A \cup B) \cup D$$

Второе равенство из 3) доказывается аналогично.

4) Имеем

$$A \cup (B \cap D) = \{x \in \mathcal{J} : x \in A \vee x \in (B \cap D)\} =$$
$$= \{x \in \mathcal{J} : x \in A \vee (x \in B \wedge x \in D)\} = \{x \in \mathcal{J} : (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in D)\} =$$
$$= \{x \in \mathcal{J} : (x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup D)\} = (A \cup B) \cap (A \cup D).$$

Второе равенство доказывается аналогично.

5) Пусть $x \in A \cup A$, тогда $x \in A \wedge x \in A$, т. е. $x \in A$ и, тем самым, справедливо включение $A \cup A \subset A$. Обратное включение $A \subset A \cup A$ непосредственно следует из определения объединения. Из двух последних включений вытекает равенство $A \cup A = A$.

Равенство $A \cap A = A$ доказывается аналогично.

6) Предположим, что справедливо равенство $A \cap B = A$. Тогда

$$(A \cap B = A) \Rightarrow (A \subset A \cap B) \Rightarrow (A \subset B).$$

Пользуясь полученным включением, находим

$$A \cup B = \{x \in \mathcal{J} : x \in A \vee x \in B\} \subset \{x \in \mathcal{J} : x \in B \vee x \in B\} = B.$$

А поскольку $A \cup B \supset B$, то $A \cup B = B$. Таким образом,

$$(A \cap B = A) \Rightarrow (A \cup B = B). \tag{1}$$

Пусть теперь $A \cup B = B$. Тогда справедливы импликации

$$(A \cup B = B) \Rightarrow (A \cup B \subset B) \Rightarrow (A \subset B).$$

Пользуясь включением $A \subset B$, находим

$$A \cap B = \{x \in \mathcal{J} : x \in A \wedge x \in B\} \supset \{x \in \mathcal{J} : x \in A \wedge x \in A\} = A.$$

А поскольку справедливо и обратное включение $A \cap B \subset A$, то $A \cap B = A$, следовательно,

$$(A \cup B = B) \Rightarrow (A \cap B = A). \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует $(A \cap B = A) \Leftrightarrow (A \cup B = B)$.

7) Если $x \in A \cup \varnothing$, то $x \in A \vee x \in \varnothing$. Поскольку множество $\varnothing$ не содержит ни одного элемента, то из $x \in A \cup \varnothing$ следует $x \in A$, т. е. $A \cup \varnothing \subset A$, что совместно с включением $A \cup \varnothing \supset A$ равносильно равенству $A \cup \varnothing = A$.

Далее, из $\varnothing \subset A \cap \varnothing \subset \varnothing$ непосредственно следует равенство $A \cap \varnothing = \varnothing$.

Поскольку $A \subset \mathcal{J}$, то $A \cap \mathcal{J} = \{x \in \mathcal{J} : x \in A \wedge x \in \mathcal{J}\} \supset \{x \in \mathcal{J} : x \in A \wedge x \in A\} = A$ что совместно с включением $A \cap \mathcal{J} \subset A$ влечет равенство $A \cap \mathcal{J} = A$.

Наконец, непосредственно из включений $\mathcal{J} \subset A \cup \mathcal{J} \subset \mathcal{J}$ следует равенство $A \cup \mathcal{J} = \mathcal{J}$.

8) Согласно свойству 1),

$$A \cup CA \subset \mathcal{J}. \tag{3}$$

Пусть $x \in \mathcal{J}$, тогда если $x \in A$, то $x \in A \cup CA$; если же $x \notin A$, то $x \in CA$ и снов $x \in A \cup CA$. Таким образом, из $x \in \mathcal{J}$ следует $x \in A \cup CA$, т. е.

$$\mathcal{J} \subset A \cup CA. \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует равенство

$$A \cup CA = \mathcal{J}. \tag{5}$$

Для доказательства равенства $A \cap CA = \varnothing$ покажем, что множество $A \cap CA$ не содержит ни одного элемента. Действительно, согласно равенству (5), любой элемент множества $\mathcal{J}$ принадлежит A или CA. Если $x \in A$, то $x \notin CA$ и, следовательно, $x \notin A \cap CA$. Если же $x \in CA$, то $x \notin A$ (так как если бы $x \in A$, то $x \notin CA$), и снова $x \notin A \cap CA$. Поскольку множество $A \cap CA$ не содержит ни одного элемента, то это множество пустое, т. е. $A \cap CA = \varnothing$. ►

2. Доказать принцип двойственности:

$$C(A \cup B) = CA \cap CB, \tag{1}$$

$$C(A \cap B) = CA \cup CB \tag{2}$$

(см. равенства (1), п. 1.4).

◀ Докажем равенство (1) (равенство (2) доказывается аналогично).

Пусть $x \in C(A \cup B)$, тогда, согласно равенству (5) предыдущей задачи, $x \notin A \cup B$, т. е. $x \notin A \wedge x \notin B$. Отсюда $x \in CA \wedge x \in CB$, а следовательно, $x \in CA \cap CB$. Таким образом,

$$C(A \cup B) \subset CA \cap CB. \tag{3}$$

Предположим теперь, что $x \in CA \cap CB$. Тогда $x \in CA \wedge x \in CB$, т. е. $x \notin A \wedge x \notin B$, а значит, $x \notin A \cup B$ и $x \in C(A \cup B)$. Отсюда

$$C(A \cup B) \subset CA \cap CB. \tag{4}$$

Из включений (3) и (4) следует равенство (1). ▶

3. Доказать равенства

$$A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A. \tag{1}$$

◀ Пользуясь свойствами 4) и 5) задачи 1, получаем первое из равенств (1):

$$A \cup (A \cap B) = (A \cup A) \cap (A \cup B) = A \cap (A \cup B).$$

Остается доказать, что $A \cap (A \cup B) = A$. Если $x \in A \cap (A \cup B)$, то $x \in A \wedge x \in A \cup B$ и, следовательно,

$$A \cap (A \cup B) \subset A. \tag{2}$$

Если же $x \in A$, то $x \in A \cup B$, а значит, $x \in A \cap (A \cup B)$, т. е.

$$A \subset A \cap (A \cup B). \tag{3}$$

Из включений (2) и (3) следует второе из равенств (1). ▶

4. Доказать равенства:

а) $CCA = A$; б) $C\mathcal{J} = \varnothing$; в) $C\varnothing = \mathcal{J}$.

◀ а) Если $x \in CCA$, то $x \notin CA$, а поэтому $x \in A$ и справедливо включение $CCA \subset A$. Наоборот, если $x \in A$, то $x \notin CA$, а поэтому $x \in CCA$ и справедливо включение $A \subset CCA$. Из доказанных включений следует равенство а).

б) Множество $C\mathcal{J}$ пустое, так как отрицание $x \notin C\mathcal{J}$ справедливо для любого $x \in \mathcal{J}$.

в) Если $x \in \mathcal{J}$, то $x \notin \varnothing$, а поэтому $x \in C\varnothing$ и, следовательно, $\mathcal{J} \subset C\varnothing$. Поскольку всегда $C\varnothing \subset \mathcal{J}$, то из последних двух включений следует равенство в). ▶

5. Доказать справедливость включения

$$(A \backslash B) \subset (A \backslash D) \cap (D \backslash B).$$

◀ Пусть $x \in (A \backslash B)$, тогда $x \in A \wedge x \notin B$. Если при этом $x \notin D$, то $x \in (A \backslash D)$ и, следовательно, $x \in (A \backslash D) \cup (D \backslash B)$. Если же $x \in D$, то поскольку $x \notin B$, находим, что $x \in (D \backslash B)$, а поэтому $x \in (A \backslash D) \cup (D \backslash B)$. Таким образом, как при $x \notin D$, так и при $x \in D$ из условия $x \in (A \backslash B)$ следует $x \in (A \backslash D) \cup (D \backslash B)$, что равносильно доказываемому включению. ▶

6. Определить множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$, $A \triangle B$, если:

а) $A = \{x : 0 < x < 2\}$, $B = \{x : 1 \leqslant x \leqslant 3\}$;

б) $A = \{x : x^2 - 3x < 0\}$, $B = \{x : x^2 - 4x + 3 \geqslant 0\}$;

в) $A = \{x : |x - 1| < 2\}$, $B = \{x : |x - 1| + |x - 2| < 3\}$.

◀ Пользуясь определениями объединения, пересечения, разности и симметрической разности множеств, находим:

а) $A \cup B = \{x : (0 < x < 2) \vee (1 \leqslant x \leqslant 3)\} = \{x : 0 < x \leqslant 3\}$;

$A \cap B = \{x : (0 < x < 2) \wedge (1 \leqslant x \leqslant 3)\} = \{x : 1 \leqslant x < 2\}$;

$A \backslash B = \{x : (0 < x < 2) \wedge x \notin [1, 3]\} = \{x : 0 < x < 1\}$;

$B \backslash A = \{x : (1 \leqslant x \leqslant 3) \wedge x \notin]0, 2[\} = \{x : 2 \leqslant x \leqslant 3\}$;

$A \triangle B = \{x : (A \backslash B) \cup (B \backslash A)\} = \{x : (0 < x < 1) \vee (2 \leqslant x \leqslant 3)\}$.

б) Поскольку $x^2-3x<0$ для $0<x<3$, то $A=\{x: 0<x<3\}$. Неравенство $x^2-4x+3\geqslant 0$ справедливо для $-\infty<x\leqslant 1$ и $3\leqslant x<+\infty$. Обозначим $D=\{x: -\infty<x\leqslant 1\}$, $E=\{x: 3\leqslant x<+\infty\}$, тогда $B=D\cup E$. Используя свойства операций над множествами, находим:

$$A\cup B=A\cup(D\cup E)=A\cup D\cup E=\{x: (0<x<3)\vee$$
$$\vee(-\infty<x\leqslant 1)\vee(3\leqslant x<+\infty)\}=\{x: -\infty<x<+\infty\};$$
$$A\cap B=A\cap(D\cup E)=(A\cap D)\cup(A\cap E)=\{x: (0<x\leqslant 1)\vee x\in\varnothing\}=\{x: 0<x\leqslant 1\};$$
$$A\backslash B=A\backslash(D\cup E)=\{x: x\in A\wedge(x\notin D\vee x\notin E)\}=$$
$$=\{x: (x\in A\wedge x\in D)\vee(x\in A\wedge x\in E)\}=(A\backslash D)\cup(A\backslash E)=\{x: 1<x<3\};$$
$$B\backslash A=(D\cup E)\backslash A=\{x: (x\in D\vee x\in E)\wedge x\notin A\}=$$
$$=\{x: (x\in D\wedge x\notin A)\vee(x\in E\wedge x\notin A)\}=(D\backslash A)\cup(E\backslash A)=$$
$$=\{x: (-\infty<x<0)\vee(3\leqslant x<+\infty)\};$$
$$A\bigtriangleup B=A\bigtriangleup(D\cup E)=(A\backslash(D\cup E))\cup((D\cup E)\backslash A)=$$
$$=\{x: (1<x<3)\vee(-\infty<x\leqslant 0)\vee(3\leqslant x<+\infty)\}=$$
$$=\{x: (-\infty<x\leqslant 0)\vee(1<x<+\infty)\}.$$

в) Запишем явное выражение для множества $A=\{x: -2<x-1<2\}=\{x: -1<x<3\}$. Затем, решая неравенство $|x-1|+|x-2|<3$, находим явное выражение для множества $B=\{x: 0<x<3\}$. Тогда

$$A\cup B=\{x: (-1<x<3)\vee(0<x<3)\}=\{x: -1<x<3\};$$
$$A\cap B=\{x: (-1<x<3)\wedge(0<x<3)\}=\{x: 0<x<3\};$$
$$A\backslash B=\{x: (-1<x<3)\wedge x\notin]0,3[\}=\{x: -1<x\leqslant 0\};$$
$$B\backslash A=\{x: (0<x<3)\wedge x\notin]-1,3[\}=\varnothing;$$
$$A\bigtriangleup B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)=A\backslash B=\{x: -1<x\leqslant 0\}. ▶$$

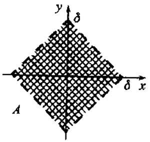


Рис. 7

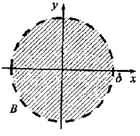


Рис. 8

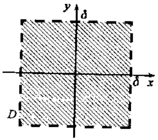


Рис. 9

7. Имеем $A=\{(x,y): |x|+|y|<\delta\}$ (рис. 7), $B=\{(x,y): \sqrt{x^2+y^2}<\delta\}$ (рис. 8), $D=\{(x,y): \max\{|x|,|y|\}<\delta\}$ (рис. 9). Показать, что $A\subset B\subset D$.

◀ Пусть $(x,y)\in A$, тогда $|x|+|y|<\delta$. Отсюда

$$\sqrt{x^2+y^2}\leqslant\sqrt{x^2+2|x||y|+y^2}=|x|+|y|<\delta$$

т.е. $(x,y)\in B$, что в свою очередь влечет выполнение неравенства

$$\max\{|x|,|y|\}\leqslant\sqrt{x^2+y^2}<\delta.$$

Следовательно, и включение $(x,y)\in D$. Таким образом, $A\subset B\subset D$ ▶

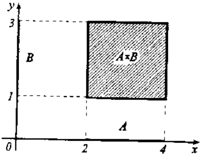


Рис. 10

8. Пусть $A=\{x: 2\leqslant x\leqslant 4\}$, $B=\{y: 1\leqslant y\leqslant 3\}$. Изобразить на плоскости xOy множество точек $A\times B$.

◀ Поскольку $A\times B=\{(x,y): (2\leqslant x\leqslant 4)\wedge(1\leqslant y\leqslant 3)\}$, то $A\times B$ есть совокупность точек прямоугольника, ограниченного прямыми $x=2$, $x=4$, $y=1$, $y=3$ (рис. 10). ▶

9. Показать, что семейство R, замкнутое относительно объединения и разности, является кольцом

◀ Пусть A и B — произвольные множества семейства R. Поскольку $A \cap B = A \backslash (A \backslash B)$, а $A \subset R$, $A \backslash B \subset R$, то $A \cap B \subset R$. Следовательно, семейство R замкнуто относительно объединения, пересечения и разности, т. е. является кольцом. ▶

10. Показать, что семейство $R = \{\alpha, \varnothing\}$, состоящее из непустого множества α и пустого множества $\varnothing$, образует кольцо. Является ли это кольцо алгеброй?

◀ Семейство R содержит своими элементами объединение $\alpha \cup \varnothing = \alpha$ и разности $\alpha \backslash \varnothing = \alpha$, $\varnothing \backslash \alpha = \varnothing$. Поэтому R замкнуто относительно объединения и разности, т. е., согласно предыдущему примеру, является кольцом. А так как элемент $\alpha \in R$ содержит все остальные множества семейства R, то α — единица семейства, а R — алгебра. ▶

11. Пусть множество $\mathcal{J} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ состоит из трех элементов, а $P(\mathcal{J})$ — семейство всех подмножеств множества $\mathcal{J}$.

а) Записать все алгебры, которые можно построить из элементов множества $P(\mathcal{J})$, и указать их единицы.

б) Описать все кольца, которые можно построить из элементов множества $P(\mathcal{J})$.

в) Описать все полукольца, которые можно построить из элементов множества $P(\mathcal{J})$ и которые не являются кольцами.

◀ а) Простейшими алгебрами являются: семейство $\{\varnothing\}$, состоящее из одного пустого множества, три алгебры

$$\{\{\alpha\}, \varnothing,\}, \ \{\{\beta\}, \varnothing\}, \ \{\{\gamma\}, \varnothing\},$$

состоящие из двух элементов с единицами, соответственно равными $\{\alpha\}$, $\{\beta\}$, $\{\gamma\}$ (см. предыдущий пример); шесть алгебр

$$\{\{\alpha, \beta\}, \{\alpha\}, \{\beta\}, \varnothing\}, \ \{\{\alpha, \gamma\}, \{\alpha\}, \{\gamma\}, \varnothing\},$$
$$\{\{\beta, \gamma\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \varnothing\}, \ \{\{\alpha, \beta\}, \varnothing\}, \ \{\{\alpha, \gamma\}, \varnothing\}, \ \{\{\beta, \gamma\}, \varnothing\},$$

единицами которых соответственно являются множества $\{\alpha, \beta\}$, $\{\alpha, \gamma\}$, $(\beta, \gamma\}$, $\{\alpha, \beta\}$, $\{\alpha, \gamma\}$, $\{\beta, \gamma\}$. Легко видеть, что любое из этих семейств замкнуто относительно объединения и разности; четыре алгебры

$$\{\mathcal{J}, \{\alpha, \beta\}, \{\gamma\}, \varnothing\}, \ \{\mathcal{J}, \{\alpha, \gamma\}, \{\beta\}, \varnothing\}, \ \{\mathcal{J}, \{\beta, \gamma\}, \{\alpha\}, \varnothing\}, \ \{\mathcal{J}, \varnothing\},$$

единицей которых является множество $\mathcal{J}$. Наконец, объединение всех перечисленных алгебр

$$\{\mathcal{J}, \{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \gamma\}, \{\beta, \gamma\}, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \varnothing\}$$

также является алгеброй с единицей $\mathcal{J}$.

б) Все приведенные в пункте а) алгебры, естественно, являются кольцами. Других колец нет.

в) Всякое кольцо является полукольцом. Действительно, из условия, что A и $A_1 \subset A$ принадлежат кольцу R, следует, что

$$A = A_1 \sqcup A_2, \quad \text{где} \quad A_2 = A \backslash A_1 \subset R.$$

Кроме того, в нашем случае можно построить примеры полуколец, которые не являются кольцами. Например, семейства

$$\{\{\alpha\}, \{\beta\}, \varnothing\}, \ \{\{\alpha\}, \{\gamma\}, \varnothing\}, \ \{\{\beta\}, \{\gamma\}, \varnothing\},$$
$$\{\{\alpha, \beta\}, \{\gamma\}, \varnothing\}, \ \{\{\alpha, \gamma\}, (\beta\}, \varnothing\}, \ \{\{\beta, \gamma\}, \{\alpha\}, \varnothing\}.$$

В самом деле, в каждом из шести семейств пересечение любых двух элементов семейства принадлежит этому семейству. Далее, каждый непустой элемент семейства имеет в качестве своего подмножества только само множество, поэтому, например, для семейства $\{\{\beta, \gamma\}, \{\alpha\}, \varnothing\}$, имеем

$$\{\beta, \gamma\} = \{\beta, \gamma\} \sqcup \varnothing = \{\beta, \gamma\}, \ \{\alpha\} = \{\alpha\} \sqcup \varnothing = \{\alpha\},$$

т. е. второе условие определения полукольца выполняется. Полукольцом является любое семейство, содержащее $\{\alpha\}$, $\{\beta\}$, $\{\gamma\}$, $\varnothing$, но не совпадающее с $P(\mathcal{J})$:

$$\{\{\alpha, \beta\}, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \varnothing\}, \ \{\{\alpha, \gamma\}, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \varnothing\} \quad \text{и т. д.}$$

Покажем, например, что семейство $S = \{\{\alpha, \beta\}, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \varnothing\}$ — полукольцо. Действительно, пересечение любых двух элементов семейства S снова является элементом S. Далее для всякого элемента S справедливо разложение: $\{\alpha, \beta\} = \{\alpha\} \cup \{\beta\}$, $\{\alpha\} = \{\alpha\}$, $\{\beta\} = \{\beta\}$, $\{\gamma\} = \{\gamma\}$ на непересекающиеся множества. Таким образом, семейство S — полукольцо. ►

12. Пусть три числа a, b и c удовлетворяют неравенствам $a < c < b$. Показать, что семейство

$$S = \{[a, b], [a, c], [c, b], [a, c[, [c, c],]c, b], \varnothing\},$$

состоящее из сегментов и полусегментов, образованных точками a, b и c, является полукольцом, но не кольцом.

◄ Пересечение любых двух элементов семейства S есть элемент этого же семейства, т. е. S замкнуто относительно операции пересечения. Далее, любой элемент семейства S допускает разложение на непересекающиеся части, принадлежащие S. Например,

$$[a, b] = [a, c] \cup]c, b] = [a, c[\cup [c, c] \cup]c, b] = [a, c[\cup [c, b], \quad [a, c] = [a, c[\cup [c, c] \quad \text{и т. д.}$$

Семейство S не является кольцом, так как оно не замкнуто относительно объединения. Например, $[a, c[\cup]c, b]$ не принадлежит S. ►

13. Доказать, что

$$(A \cap B) \times (D \cap E) = (A \times D) \cap (B \times E). \tag{1}$$

◄ Пусть $(x, y) \in (A \cap B) \times (D \cap E)$, тогда $x \in A \cap B$ и $y \in D \cap E$, что равносильно тому, что $x \in A \wedge x \in B$ и $y \in D \wedge y \in E$. А поскольку $x \in A \wedge y \in D$, то $(x, y) \in A \times D$. Аналогично, из $x \in B \wedge y \in E$ следует $(x, y) \in B \times E$. Таким образом, $(x, y) \in (A \times D) \cap (B \times E)$ и

$$(A \cap B) \times (D \cap E) \subset (A \times D) \cap (B \times E). \tag{2}$$

Предположим теперь, что $(x, y) \in ((A \times D) \cap (B \times E))$. Тогда $(x, y) \in (A \times D) \wedge (x, y) \in (B \times E)$ и, следовательно, $x \in A \wedge y \in D$ и $x \in B \wedge y \in E$. Отсюда $x \in A \cap B$ и $y \in D \cap E$, т. е. $(x, y) \in ((A \cap B) \times (D \cap E))$ и справедливо включение

$$(A \times D) \cap (B \times E) \subset (A \cap B) \times (D \cap E). \tag{3}$$

Из включений (2) и (3) следует (1). ►

Упражнения для самостоятельной работы

1. Доказать равенства:

а) $\complement \bigcup\limits_{\mu} A_\mu = \bigcap\limits_{\mu} \complement A_\mu$; б) $\complement \bigcap\limits_{\mu} A_\mu = \bigcup\limits_{\mu} \complement A_\mu$

(см. равенства (2) п. 1.4), где μ принадлежит произвольному множеству.

2. Пусть $A \subset B$ и D произвольные множества. Доказать справедливость включений:

а) $A \cap D \subset B \cap D$; б) $A \cup D \subset B \cup D$.

3. Доказать, что если $A \subset B \wedge A \subset D$, то $A \subset B \cap D$.

4. Доказать, что если $A \subset D \wedge B \subset D$, то $A \cup B \subset D$.

5. Доказать справедливость равенств:

а) $A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$; б) $A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)$; в) $A \backslash B = A \triangle (A \cap B)$.

6. Доказать, что для симметрической разности справедливо включение

$$A \triangle B \subset ((A \triangle D) \cup (B \triangle D)).$$

7. Доказать справедливость включений:

а) $(A_1 \cup A_2) \backslash (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \backslash B_1) \cup (A_2 \backslash B_2)$;

б) $(\complement A_1 \cup \complement A_2) \triangle (\complement B_1 \cup \complement B_2) \subset \complement((\complement A_1 \triangle \complement B_1) \cap (\complement A_2 \triangle \complement B_2))$,

где A_1, A_2, B_1, B_2 — подмножества множества $\mathcal{J}$.

8. Доказать что:

а) $(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$;

б) $(A_1 \cap A_2) \triangle (B_1 \cap B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cap (A_2 \triangle B_2)$;

в) $(A_1 \backslash A_2) \triangle (B_1 \backslash B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \backslash (A_2 \triangle B_2)$,

где A_1, A_2, B_1, B_2 — подмножества множества $\mathcal{J}$.

9. Определить множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$, $A \triangle B$, если:

а) $A = \{x : -4 < x < 1\}$, $B = \{x : 0 < x < 4\}$;
б) $A = \{x : x^2 - x - 2 > 0\}$, $B = \{x : 6x - x^2 \geqslant 0\}$;
в) $A = \{x : \sin \pi x = 0\}$, $B = \{x : \cos \frac{\pi x}{2} = 0\}$.

10. Определить множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$, $A \triangle B$, если:
а) $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, $B = \{(x, y) : |x| + |y| \leqslant 1\}$;
б) $A = \{(x, y) : \max(|x|, |y|) \leqslant 1\}$, $B = \{(x, y) : |x| + |y| \leqslant 1\}$;
в) $A = \{(x, y) : |x| + |y| < 2\}$, $B = \{(x, y) : \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} < 2\}$;
г) $A = \{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant 2\}$, $B = \{(x, y) : \max(|x+1|, |y+1|) \leqslant 2\}$.

11. Определить множество $A \times B$, если:
а) $A = \{x : -2 < x \leqslant 1\}$, $B = \{y : -3 \leqslant y < 1\}$;
б) $A = \{x : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, $B = D \times E$, где $D = \{y : 0 \leqslant y \leqslant 2\}$, $E = \{z : 0 \leqslant z \leqslant 3\}$;
в) $A = \{x : -\infty < x < +\infty\}$, $B = \{y : \sin \pi y = 0\}$;
г) $A = \{x : \sin \pi x = 0\}$, $B = \{y : -\infty < y < +\infty\}$.

12. Пусть множество $\mathcal{J}$ состоит из четырех элементов α, β, γ и δ, а $P(\mathcal{J})$ — семейство всех подмножеств множества $\mathcal{J}$, включая и пустое множество.

а) Построить примеры алгебр, единицами которых являются соответственно множества: $\{\alpha\}$, $\{\alpha, \beta\}$, $\{\alpha, \beta, \gamma\}$, $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$.

б) Построить пример кольца, которое содержит в качестве своих элементов множества $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, $\{\alpha\}$, $\{\beta\}$, $\{\gamma\}$, $\{\delta\}$. Будет ли это кольцо алгеброй?

в) Построить пример полукольца (но не кольца), содержащего множество $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$.

13. Показать, что множество всех сегментов, полусегментов и интервалов на числовой прямой является полукольцом, но не кольцом.

14. Показать, что семейство всех прямоугольников вида

$$\Pi = \{(x, y) : a < x \leqslant b,\ c < y \leqslant d\},$$

где a, b, c и d — действительные числа, причем $a < b$, $c < d$, является полукольцом, но не кольцом.

15. Какими множествами следует дополнить семейство, рассмотренное в задаче 14, чтобы оно превратилось в кольцо?

16. Доказать, что:
а) $(A \cup B) \times D = (A \times D) \cup (B \times D)$; б) $A \times (B \cup D) = (A \times B) \cup (A \times D)$.

17. Доказать, что:
а) $(A \backslash B) \times D = (A \times D) \backslash (B \times D)$; б) $A \times (B \backslash D) = (A \times B) \backslash (A \times D)$.

18. Доказать, что

$$(A \cup B) \times (D \cup E) = (A \times D) \cup (B \times D) \cup (A \times E) \cup (B \times E).$$

§ 2. Функция. Отображение

2.1. Функция.

Определение. *Отображением множества E в множество F, или функцией, определенной на E со значениями в F, называется правило, или закон f, который каждому элементу $x \in E$ ставит в соответствие определенный элемент $f(x) \in F$.*

Элемент $x \in E$ называют *независимым переменным*, или *аргументом* функции f, элемент $f(x) \in F$ называют *значением функции* f, или *образом*; при этом элемент $x \in E$ называется *прообразом* элемента $f(x) \in F$.

Отображение (функцию) обычно обозначают буквой f или символом $f : E \to F$, указывая тем самым, что f отображает множество E в F. Употребляется также обозначение $x \mapsto f(x)$, указывающее, что элементу x соответствует элемент $f(x)$. Иногда функцию удобно задавать посредством равенства, в котором содержится закон соответствия. Например, можно говорить, что "функция f определена равенством $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in [a, b]$". Если "y" — общее наименование элементов множества F, т. е. $F = \{y\}$, то отображение $f : E \to F$ записывают в виде равенства $y = f(x)$ и говорят, что это отображение задано явно.

2.2. Образ и прообраз множества при заданном отображении.

Пусть задано отображение $f : E \to F$ и множество $D \subset E$.

Определение 1. *Множество элементов из F, каждый из которых является образом хотя бы одного элемента из D при отображении f, называется образом множества D и обозначается $f(D)$.*

Очевидно,

$$f(D) = \{f(x) \in F : x \in D\}.$$

Пусть теперь задано множество $Y \subset F$.

Определение 2. *Множество элементов $x \in E$ таких, что $f(x) \in Y$, называется прообразом множества Y при отображении f и обозначается $f^{-1}(Y)$.*

Ясно, что

$$f^{-1}(Y) = \{x \in E : f(x) \in Y\}.$$

Если $y \in F$, то $f^{-1}(y) = \{x \in E : f(x) = y\}$. Если при каждом $y \in F$ множество $f^{-1}(y)$ состоит не более чем из одного элемента $x \in E$, то f называется *взаимно однозначным отображением* E в F. Впрочем, можно определить взаимно однозначное отображение f множества E на F.

Определение 3. *Отображение $f : E \to F$ называется*

инъективным (или инъекцией, или взаимно однозначным отображением множества E в F), если $(x \neq x') \Rightarrow (f(x) \neq f(x'))$ или если $\forall y \in F$ уравнение $f(x) = y$ имеет не более одного решения;

сюръективным (или сюръекцией, или отображением множества E на F), если $f(E) = F$ или если $\forall y \in F$ уравнение $f(x) = y$ имеет, по крайней мере, одно решение;

биективным (или биекцией, или взаимно однозначным отображением множества E на F), если оно инъективно и сюръективно или если $\forall y \in F$ уравнение $f(x) = y$ имеет одно и только одно решение.

2.3. Суперпозиция отображений. Обратное, параметрическое и неявное отображения.

Определение 1. *Пусть $f : E \to F$, а $g : F \to G$. Поскольку $f(E) \subset F$, то отображение g каждому элементу $f(x) \in f(E) \subset F$ относит определенный элемент $g(f(x)) \in G$.*

Таким образом, каждому $x \in E$ посредством правила $g \circ f$ поставлен в соответствие элемент $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $g(f(x)) \in G$. Тем самым определено новое отображение (или новая функция), которое назовем *композицией отображений*, или *суперпозицией отображений*, или *сложным отображением*.

Определение 2. *Пусть $f : E \to F$ — биективное отображение и $F = \{y\}$. В силу биективности f каждому $y \in F$ соответствует единственный образ x, который обозначим через $f^{-1}(y)$, и такой, что $f(x) = y$. Таким образом, определено отображение $f^{-1} : F \to E$, которое называется обратным отображению f, или обратной функцией функции f.*

Очевидно, отображение f обратное отображению f^{-1}. Поэтому отображения f и f^{-1} называют *взаимно обратными*. Для них справедливы соотношения

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in F; \quad f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in E.$$

Определение 3. *Пусть $\varphi : \Omega \to X$, $\psi : \Omega \to Y$, причем хотя бы одно из этих отображений, например φ, биективно. Тогда существует обратное отображение $\varphi^{-1} : X \to \Omega$, а значит, $\psi \circ \varphi^{-1} : X \to Y$.*

Определенное таким образом отображение называется заданным параметрически с помощью отображений $\varphi : \Omega \to X$, $\psi : \Omega \to Y$, причем переменное из Ω называется *параметром*.

Определение 4. *Пусть на множестве $G = X \times Y$ определено отображение $\mathcal{F} : G \to \Delta$, где множество Δ содержит нулевой элемент. Предположим, что существуют множества $E \subset X$, $B \subset Y$ такие, что при каждом фиксированном $x \in E$ уравнение $\mathcal{F}(x, y) = 0$ имеет единственное решение $y \in B$. Тогда на множестве E можно определить отображение $f : E \to B$, ставящее каждому $x \in E$ в соответствие то значение $y \in B$, которое при указанном x является решением уравнения $\mathcal{F}(x, y) = 0$.*

Относительно так определенного отображения $y = f(x)$, $x \in E$, $y \in B$, говорят, что оно **задано неявно посредством уравнения $\mathcal{F}(x, y) = 0$.**

Определение 5. *Отображение $f : E \to F$ называется продолжением отображения $g : D \to F$, а g — сужением отображения f, если $E \supset D$ и $f(x) = g(x)$ $\forall x \in D$.*

Сужение отображения $f : E \to F$ на множество $D \subset E$ иногда обозначают символом $f|_D$

Определение 6. *Графиком отображения $f : E \to F$ называется множество*

$$G = \{(x, f(x)) : x \in E,\ f(x) \in F\}.$$

Ясно, что $G \subset E \times F$.

14. Пусть отображение $f : R \to [-1, 1]$ задано равенством $f(x) = \sin x$.

Найти а) $f(0)$; б) $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$; в) $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$; г) $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$; д) $f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$; е) $f\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$; ж) $f\left(\left[0, \frac{\pi}{6}\right]\right)$; з) $f([0, 2\pi])$; и) $f^{-1}(0)$; к) $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$; л) $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; м) $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; н) $f^{-1}([-1, 1])$; о) $f^{-1}(]-1, 1[)$; п) $f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$.

◀ Пользуясь таблицей тригонометрических функций, находим:

а) $f(0) = \sin 0 = 0$; б) $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$;

в) $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

д) Имеем $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, причем, если аргумент синуса пробегает значения от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, то значения синуса изменяются от -1 до $+1$. Следовательно, $f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left\{\sin x : -\frac{\pi}{2} \leqslant \quad \leqslant \frac{\pi}{2}\right\} = [-1, 1]$. Аналогично находим:

е) $f\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \left\{\sin x : x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right\} =]-1, 1[$;

ж) $f\left(\left[0, \frac{\pi}{6}\right]\right) = \left\{\sin x : x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]\right\} = \left[0, \frac{1}{2}\right]$;

з) $f([0, 2\pi]) = \{\sin x : x \in [0, 2\pi]\} = [-1, 1]$.

и) Поскольку $\sin x = 0$, если $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, то

$$f^{-1}(0) = \{x : \sin x = 0\}.$$

к) Если $\sin x = \frac{1}{2}$, то $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + n\pi = (-1)^n\frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^n\frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Аналогично предыдущему находим:

л) $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left\{x : \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}\right\} = (-1)^n\frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$;

м) $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left\{x : \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}\right\} = (-1)^n\frac{\pi}{3} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

н) Согласно определению 2, п. 2.2,

$$f^{-1}([-1, 1]) = (x : f(x) = \sin x \in \{-1, 1]\}.$$

Покажем, что $f^{-1}([-1, 1]) = \mathbb{R}$. В самом деле, пусть $x \in f^{-1}([-1, 1])$ и $\alpha = \sin x$, тогда $f(x) = \alpha$, $\alpha \in [-1, 1]$, а поэтому $x = ((-1)^n \arcsin\alpha + n\pi)$, $x \in \mathbb{R}$, и, следовательно, $f^{-1}([-1, 1]) \subset \mathbb{R}$. Если $x \in \mathbb{R}$, то $\sin x \in [-1, 1]$ и $x \in f^{-1}([-1, 1])$, т. е. $\mathbb{R} \subset f^{-1}([-1, 1])$. Таким образом, $f^{-1}([-1, 1]) = \mathbb{R}$.

о) Из равенств $\sin x = \pm 1$ находим множество $A = \left\{x : x = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\right\}$ значений x которые не принадлежат $f^{-1}(]-1, 1[)$. Поэтому, в силу предыдущего пункта, $f^{-1}(]-1, 1[) = \mathbb{R}\backslash A$.

п) Имеем $f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \left\{x : \sin x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right\}$. Пусть $x \in f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$ и $\alpha = \sin x$, тогда $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ и $x = (-1)^n \arcsin x + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пусть $n = 2k$ — фиксировано, тогда $x = \arcsin\alpha + 2k\pi$, причем при изменении α от 0 до $\frac{1}{2}$ переменное x изменяется от $2k\pi$ до $\left(2k + \frac{1}{6}\right)\pi$, т. е. $x \in \left[2k\pi, \left(2k + \frac{1}{6}\right)\pi\right]$.

Пусть $n = 2k + 1$ — фиксировано, тогда $x = -\arcsin\alpha + (2k+1)\pi$, и если α изменяется от 0 до $\frac{1}{2}$, то переменное x изменяется от $(2k+1)\pi$ до $\left(2k + \frac{5}{6}\right)\pi$, т. е. $x \in \left[\left(2k + \frac{5}{6}\right)\pi, (2k+1)\pi\right]$. Таким образом,

$$f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) \subset \left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[2k\pi, \left(2k + \frac{1}{6}\right)\pi\right]\right) \cup \left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[\left(2k + \frac{5}{6}\right)\pi, (2k+1)\pi\right]\right).$$

Справедливо и обратное включение, поскольку при $x \in \left[2k\pi, \left(2k+\frac{1}{6}\right)\pi\right]$ или $x \in \left[\left(2k+\frac{1}{6}\right)\pi, (2k+1)\pi\right]$ значение $\sin x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Поэтому

$$f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[2k\pi, \left(2k+\frac{1}{6}\right)\pi\right]\right) \cup \left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\left(2k+\frac{5}{6}\right)\pi, (2k+1)\pi\right]\right). ▶$$

15. Доказать, что если $f : E \to F$ и $A \subset E$, $B \subset E$, то справедливо равенство

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B). \tag{1}$$

◀ Согласно определению 1, п. 2.2, имеем

$$f(A \cup B) = \{f(x) : x \in A \cup B\}.$$

Пусть $f(x) \in f(A \cup B)$, тогда $x \in (A \cup B)$, т. е. $x \in A \vee x \in B$. Но если $x \in A \vee x \in B$, то $f(x) \in f(A) \vee f(x) \in f(B)$ и $f(x) \in (f(A) \cup f(B))$. Этим доказано включение

$$f(A \cup B) \subset (f(A) \cup f(B)). \tag{2}$$

Пусть $f(x) \in (f(A) \cup f(B))$, тогда $f(x) \in f(A) \vee f(x) \in f(B)$, откуда $x \in A \vee x \in B$, т. е. $x \in (A \cup B)$, а поэтому $f(x) \in f(A \cup B)$ и

$$(f(A) \cup f(B)) \subset f(A \cup B). \tag{3}$$

Из (2) и (3) непосредственно следует (1). ▶

16. Доказать, что если $f : E \to F$ и $A \subset F$, $B \subset F$, то справедливы равенства:
а) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$; б) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$;
в) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

◀ а) Пусть $x \in f^{-1}(A \cap B)$, тогда $f(x) \in (A \cap B)$, т. е. $f(x) \in A \wedge f(x) \in B$. Но тогда $x \in f^{-1}(A) \wedge x \in f^{-1}(B)$, а следовательно, $x \in (f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B))$. Таким образом, доказано включение

$$f^{-1}(A \cap B) \subset (f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)).$$

Для доказательства обратного включения предположим, что $x \in (f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B))$. Тогда $x \in f^{-1}(A) \wedge x \in f^{-1}(B)$; отсюда $f(x) \in A \wedge f(x) \in B$, а поэтому $f(x) \in (A \cap B)$ и $x \in f^{-1}(A \cap B)$. Следовательно,

$$(f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(A \cap B).$$

Из доказанных включений следует равенство а).

б) Пусть $x \in f^{-1}(A \setminus B)$, тогда $f(x) \in (A \setminus B)$, т. е. $f(x) \in A \wedge f(x) \notin B$. Но тогда $x \in f^{-1}(A) \wedge x \notin f^{-1}(B)$, а следовательно, $x \in (f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B))$. Таким образом,

$$f^{-1}(A \setminus B) \subset (f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)).$$

Если $x \in (f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B))$, то $x \in f^{-1}(A) \wedge x \notin f^{-1}(B)$. Отсюда $f(x) \in A \wedge f(x) \notin B$, т. е. $f(x) \in (A \setminus B)$. Но тогда $x \in f^{-1}(A \setminus B)$, что доказывает справедливость включения

$$(f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(A \setminus B),$$

обратного доказанному выше. Из этих включений следует равенство б).

в) Если $x \in f^{-1}(A \cup B)$, то $f(x) \in (A \cup B)$. Отсюда $f(x) \in A \vee f(x) \in B$, а тогда $x \in f^{-1}(A) \vee x \in f^{-1}(B)$, т. е. $x \in (f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B))$. Таким образом,

$$f^{-1}(A \cup B) \subset (f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)).$$

Если же предположить, что $x \in (f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B))$, то $x \in f^{-1}(A) \vee x \in f^{-1}(B)$ и $f(x) \in A \vee f(x) \in B$ или $f(x) \in (A \cup B)$, откуда $x \in f^{-1}(A \cup B)$. Следовательно,

$$(f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(A \cup B),$$

что вместе с обратным включением равносильно в). ▶

17. Пусть $f : E \to F$, P — семейство подмножеств множества E, Q — семейство подмножеств множества F. Обозначим

$$f(P) = \{f(A) \in Q : A \in P\}, \qquad f^{-1}(Q) = \{f^{-1}(B) \in P : B \in Q\}.$$

Доказать, что: а) если Q — кольцо, то $f^{-1}(Q)$ — также кольцо; б) если P — кольцо, то $f(P)$ не обязательно является кольцом.

◀ а) Поскольку Q кольцо, то из $B_1 \in Q$, $B_2 \in Q$ следует $(B_1 \cup B_2) \in Q$, $(B_1 \backslash B_2) \in Q$. Тогда, согласно предыдущему примеру,

$$f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \cup B_2) \in f^{-1}(Q); \quad f^{-1}(B_1) \backslash f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \backslash B_2) \in f^{-1}(Q),$$

т. е. $f^{-1}(Q)$ — кольцо.

б) Пусть $E = \{a, b, c, d\}$, $F = \{a', b', d'\}$, $f(a) = a'$, $f(b) = f(c) = b'$, $f(d) = d'$. Семейство

$$P = \{\{a, b, c, d\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \varnothing\}$$

является кольцом, однако $f(\{a, b\}) \setminus f(\{c, d\}) = \{a', b'\} \setminus \{b', d'\} = \{a'\} \notin f(P) = \{\{a', b', d'\}, \{a', b'\}, \{b', c'\}, \varnothing\}$, т. е. $f(P)$ не является кольцом. ▶

18. Какая из указанных функций $f : [0, 1] \to [0, 3]$:

а) $x \mapsto 3 \sin \frac{\pi x}{2}$; б) $x \mapsto \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}$; в) $x \mapsto 3^x$;

г) $x \mapsto 12\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$; д) $x \mapsto 3 - \frac{16}{3}\left(x - \frac{1}{4}\right)^2$; е) $x \mapsto 2|x + 2| - 3$

инъективна, сюръективна или биективна? Построить графики этих функций.

◀ а) Так как для произвольного $y \in [0, 3]$ уравнение $y = 3 \sin \frac{\pi x}{2}$ имеет единственное решение $x = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{y}{3}$, принадлежащее сегменту $[0, 1]$, то функция $x \mapsto 3 \sin \frac{\pi x}{2}$ является биективной (рис. 11).

б) Пусть $y \in [0, 1]$. Тогда уравнение

$$y = \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \tag{1}$$

имеет единственное решение $x = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} y$, принадлежащее сегменту $[0, 1]$, если $y \in [0, 1]$. Если же $y \in]1, 3]$, то уравнение (1) не имеет решений, принадлежащих $[0, 1]$. Следовательно, уравнение (1) для любого $y \in [0, 3]$ имеет не более одного решения $x \in [0, 1]$, а поэтому функция $x \mapsto \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}$ инъективна (рис. 12).

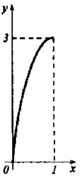


Рис. 11

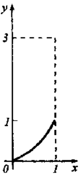


Рис. 12

Рис. 13

Рис. 14

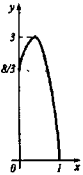


Рис. 15

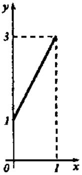


Рис. 16

в) Если $y \in [0, 3]$, то уравнение $y = 3^x$ имеет не более одного решения $x \in [0, 1]$. Именно, при $y \in [1, 3]$ решением является $x = \log_3 y$, а при $y \in [0, 1[$ — решений нет. Следовательно, $x \mapsto 3^x$ — инъекция (рис. 13).

г) Из уравнения $y = 12\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$, $y \in [0, 3]$, находим $x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{3}}$, $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{3}}$, причем, если $0 < y \leqslant 3$, то оба корня принадлежат $]0, 1]$, если $y = 0$, то корни совпадают $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$ и принадлежат $[0, 1]$. Следовательно, $\forall\, y \in [0, 3]$ уравнение $y = 12\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ на $[0, 1]$ имеет хотя бы одно решение. Поэтому рассматриваемая функция сюръективна (рис. 14).

д) Пусть $y \in [0, 3]$. Уравнение $y = 3 - \frac{16}{3}\left(x - \frac{1}{4}\right)^2$ имеет решение $x_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{9 - 3y}$, $\frac{8}{3} \leqslant y \leqslant 3$, принадлежащее $\left[0, \frac{1}{4}\right]$, и решение $x_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{9 - 3y}$, $0 \leqslant y \leqslant 3$, принадлежащее $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$. Таким образом, $\forall\, y \in [0, 3]$ существует один или два прообраза, а поэтому функция сюръективна (рис. 15).

е) Пусть $y \in [0, 3]$. Тогда уравнение $y = 2|x+2| - 3$ при $y \in [1, 3]$ имеет единственное решение $x = \frac{y-1}{2}$, если $y \in [0, 1[$, то это уравнение не имеет решений, принадлежащих сегменту $[0, 1]$. Следовательно, $x \mapsto 2|x+2| - 3$ — инъекция (рис 16). ►

19. Дана функция $f(x) = \operatorname{tg} x$, $\dfrac{3\pi}{2} < x < \dfrac{5\pi}{2}$, найти обратную ей.

◄ Покажем, что данная функция является биекцией $f : \left]\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$. С этой целью обозначим $x = 2\pi + \tau$, $-\frac{\pi}{2} < \tau < \frac{\pi}{2}$. Тогда $\forall\ y \in \mathbb{R}$ уравнение $y = \operatorname{tg} x$ принимает вид $y = \operatorname{tg} \tau$, $\tau \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Отсюда $\tau = \operatorname{arctg} y$ и, пользуясь тем, что $x = 2\pi + \tau$, находим $x = 2\pi + \operatorname{arctg} y$; причем если $y \in \mathbb{R}$, то $x \in \left]\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right[$, т. е. биективность функции установлена. А поскольку каждому $y \in \mathbb{R}$ соответствует единственное значение $x \in \left]\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right[$, то обратную функцию $f^{-1} : \mathbb{R} \to \left]\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right[$ определяет соответствие $y \mapsto 2\pi + \operatorname{arctg} x$, $x \in \left]\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right[$ ►

20. Написать явные выражения функций, заданных параметрически:

а) $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$; б) $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$ $(a > 0)$.

◄ а) Поскольку функция $t \mapsto a\cos t$, $t \in [0, \pi]$, является биекцией $[0, \pi] \to [-a, a]$, то $\forall\ x \in [-a, a]$ из равенства $x = a\cos t$ находим единственное значение $t = \arccos\frac{x}{a}$, принадлежащее сегменту $[0, \pi]$. Подставив это значение во второе равенство, получим

$$y = a\sin\left(\arccos\frac{x}{a}\right) = a\sqrt{1 - \cos^2\left(\arccos\frac{x}{a}\right)} = a\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

т. е. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in [-a, a]$.

б) Обозначим $\pi + \tau = t$. Тогда, если $\tau \in [0, \pi]$, то $t \in [\pi, 2\pi]$, при этом первое равенство приводится к виду $x = -a\cos\tau$.

Функция $\tau \mapsto -a\cos\tau$ является биекцией $[0, \pi] \to [-a, a]$, поэтому $\forall\ x \in [-a, a]$ находим $\tau = \arccos\left(-\frac{x}{a}\right) = \pi - \arccos\frac{x}{a}$ и $t = 2\pi - \arccos\frac{x}{a}$. Подставив найденное значение t во второе равенство, получим

$$y = -\sqrt{a^2 - x^2}, \quad x \in [-a, a]. ►$$

21. Написать явное выражение для функции $f : \left[\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}\right] \to [4\pi, 5\pi]$, заданной неявно посредством равенства

$$\sin x - \cos y = 0, \quad x \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right], \quad y \in [4\pi, 5\pi]. \tag{1}$$

◄ Для любого фиксированного $x \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$ имеем $\sin x = q$, $q \in [-1, 1]$. Поэтому (1) равносильно уравнению $\cos y = q$, которое на сегменте $[4\pi, 5\pi]$ имеет единственное решение. Этим доказано существование функции

$$f : \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right] \to [4\pi, 5\pi].$$

Для записи аналогичного выражения функции f преобразуем равенство (1) к виду

$$\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = 0.$$

Отсюда

$$2\sin\frac{x - \frac{\pi}{2} + y}{2}\cos\frac{x + \frac{\pi}{2} - y}{2} = 0.$$

Приравняв к нулю каждый множитель, находим два значения y:

$$y = x - \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

$$y = -x + \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

В случае (2) из условия $x \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$ следует $y \in [(2n+1)\pi, (2n+2)\pi]$ и не принадлежит $[4\pi, 5\pi]$ $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, т. е. $y = x - \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ не является значением функции f ни при каком $n \in \mathbb{Z}$

В случае (3) из условия $x \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$ следует $y \in [(2n-2)\pi, (2n-1)\pi] \subset [4\pi, 5\pi]$ при $n =$ При этом значении n из (3) находим явное выражение функции f

$$y = -x + \frac{13\pi}{2}, \quad x \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]. ▶$$

Упражнения для самостоятельной работы

19. Пусть отображение $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ задано равенством $f(x) = \cos x$. Найти: а) $f(0)$; б) $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$; в) $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$; г) $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$; д) $f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$; е) $f\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$; ж) $f\left(\left[0, \frac{\pi}{6}\right]\right)$; з) $f([0, 2\pi])$; и) $f^{-1}(0)$; к) $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$; л) $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; м) $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; н) $f^{-1}([-1, 0])$; о) $f^{-1}\left(\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]\right)$; п) $f^{-1}\left(\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]\right)$.

20. Для отображения $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, заданного равенствами

$$\text{а) } f(x) = \operatorname{tg} x; \quad \text{б) } f(x) = \operatorname{ctg} x,$$

найти: $f\left(\left[0, \frac{\pi}{6}\right]\right)$, $f\left(\left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right)$, $f\left(\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]\right)$, $f^{-1}(]0, 1])$, $f^{-1}\left(\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right]\right)$, $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, 1, \sqrt{3}\right\}\right)$

21. Доказать, что если $f : E \to F$, $A \subset E$, $B \subset E$, то:
а) $f(A \cap B) \subset (f(A) \cap f(B))$; б) $(f(A) \backslash f(B)) \subset f(A \backslash B)$.

22. Пусть $f : E \to F$, $A \subset F$, $B \subset F$. Доказать, что если $A \subset B$, то $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.

23. Доказать, что если $f : E \to F$ и $A \subset E$, $B \subset F$, то:

а) $A \subset f^{-1}(f(A))$; б) $f(f^{-1}(B)) = B$; в) $f(A) \cap B = f(A \cap f^{-1}(B))$;
г) $(f(A) \cap B = \varnothing) \Leftrightarrow (A \cap f^{-1}(B) = \varnothing)$; д) $(f(A) \subset B) \Leftrightarrow (A \subset f^{-1}(B))$.

24. Какая из функций $f : [-1, 1] \to [0, 1]$:

а) $x \mapsto \cos\frac{\pi x}{2}$; б) $x \mapsto -x^2 + 1$; в) $x \mapsto |x|$;
г) $x \mapsto \frac{x+1}{2}$; д) $x \mapsto \frac{x+1}{3}$; е) $x \mapsto 2^{x-1}$

инъективна, сюръективна или биективна? Построить графики.

25. Найти биективное сужение функций:

а) $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$; б) $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$; в) $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$;
г) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $x > 0$; д) $f(x) = 10^x$, $x \in \mathbb{R}$; е) $f(x) = x^3 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

26. Найти функции, обратные данным:

а) $f(x) = \sin x$, $x \in \left[-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}\right]$; б) $f(x) = \sin x$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$;
в) $f(x) = \cos x$, $x \in [2\pi, 3\pi]$; г) $f(x) = \cos x$, $x \in [-7\pi, -6\pi]$;
д) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \left]+\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$; е) $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $x \in]-\pi, 0[$.

27. Найти явное выражение для функций, заданных параметрически:
а) $x = \frac{2at}{1+t^2}$, $y = \frac{2at^2}{1+t^2}$, $0 \leqslant t < +\infty$; б) $x = \frac{2at}{1+t^2}$, $y = \frac{2at^2}{1+t^2}$, $-\infty < t \leqslant 0$ $(a > 0)$.

28. Найти явное выражение для функции $f : [\pi, 2\pi] \to \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$, заданной неявно

$$\cos x + \sin y = 0, \quad x \in [\pi, 2\pi], \quad y \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right].$$

29. Найти явное выражение для функции $f : [\pi, 2\pi] \to \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, заданной неявно

$$\cos x + \sin y = 0, \quad x \in [\pi, 2\pi], \quad y \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right].$$

§ 3. Действительные числа

3.1. Бинарные отношения и бинарные операции.

Определение 1. *Бинарным отношением в множестве E называется всякое подмножество B из произведения $E \times E$.*

Определение 2. *Бинарное отношение $\mathcal{R}$ называется отношением эквивалентности в множестве E, если подмножество $\mathcal{R}$:*

а) *рефлексивно*: $(a, a) \in \mathcal{R}\ \forall a \in E$;

б) *симметрично*: $((a, b) \in \mathcal{R}) \Rightarrow ((b, a) \in \mathcal{R})$;

в) *транзитивно*: $((a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, c) \in \mathcal{R}) \Rightarrow ((a, c) \in \mathcal{R})$.

Вместо $(a, b) \in \mathcal{R}$ часто пишут $a \sim b$ или $a = b$.

Определение 3. *Бинарное отношение Ω называется отношением порядка в множестве E, если оно*:

а) *рефлексивно*: $(a, a) \in \Omega\ \forall a \in E$;

б) *транзитивно*: $((a, b) \in \Omega \wedge (b, c) \in \Omega) \Rightarrow ((a, c) \in \Omega)$;

в) *антисимметрично*: $((a, b) \in \Omega \wedge (b, a) \in \Omega) \Rightarrow (a = b)$.

При этом говорят, что отношение Ω упорядочивает E. Вместо $(a, b) \in \Omega$ часто пишут $a \leqslant b$, или $a \subset b$.

Если $\forall a, b \in E$ всегда $(a, b) \in \Omega$ или $(b, a) \in \Omega$, то говорят, что множество E *вполне упорядочено.*

Определение 4. *Внутренней бинарной операцией на множестве E называется отображение $f : E \times E \to E$.*

Пусть заданы два множества E и F.

Определение 5. *Внешней бинарной операцией на множестве E называется отображение $f : E \times F \to E$.*

Определение 6. *Множество E, обладающее внутренней бинарной операцией $\top$, называется группой, если:*

1) *операция ассоциативна*: $(a \top b) \top c = a \top (b \top c)\ \forall a, b, c \in E$;

2) *имеется нейтральный элемент*: $\exists e \in E$ *такое, что* $\forall a \in E$ *справедливо равенство* $a \top e = e \top a = a$;

3) *всякий элемент имеет симметричный*: $\forall a \in E\ \exists \bar{a} \in E$ *такое, что* $a \top \bar{a} = \bar{a} \top a = e$.

Если, кроме того,

4) *операция $\top$ коммутативна, то группа называется коммутативной или абелевой.*

Если операция $\top$ есть сложение, то группа называется *аддитивной*, если $\top$ есть умножение, то группа называется *мультипликативной.*

3.2. Аксиомы поля действительных чисел.

Определение 1. *Множество $\mathbb{R} = (a, b, c, \ldots)$ называется полем действительных (или вещественных) чисел, если для его элементов установлены бинарные отношения и бинарные операции, подчиненные перечисленным ниже аксиомам.*

Аксиомы сложения

С.0. В множестве $\mathbb{R}$ определена внутренняя бинарная операция — сложение

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (a, b) \mapsto a + b,$$

которая каждой паре элементов $a, b \in \mathbb{R}$ однозначно ставит в соответствие некоторый элемент множества $\mathbb{R}$, называемый их *суммой* и обозначаемый символом $a+b$. При этом выполняются следующие аксиомы:

С.1. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативный закон).

С.2. В $\mathbb{R}$ существует элемент, называемый *нулем* и обозначаемый символом 0, такой, что $\forall a \in \mathbb{R}$

$$a + 0 = a.$$

С.3. $\forall a \in \mathbb{R}$ существует такое число $(-a) \in \mathbb{R}$, что выполняется равенство

$$a + (-a) = 0.$$

С.4. $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$$a + b = b + a.$$

Таким образом, множество $\mathbb{R}$ является *аддитивной абелевой группой.*

Аксиомы умножения

У.0. В множестве $\mathbb{R}$ определена внутренняя бинарная операция — умножение

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (a, b) \mapsto a \cdot b,$$

которая каждой паре элементов $a, b \in \mathbb{R}$ однозначно ставит в соответствие некоторый элемент множества $\mathbb{R}$, называемый их *произведением* и обозначаемый символом $a \cdot b$. При этом выполняются следующие аксиомы:

У.1. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ (ассоциативный закон).

У.2. В $\mathbb{R}$ существует элемент, называемый *единицей* и обозначаемый символом 1, такой что $\forall a \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$a \cdot 1 = a.$$

У.3. $\forall a \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ существует элемент $a^{-1} \in \mathbb{R}$, называемый *обратным* числу a, такой, что

$$a \cdot a^{-1} = 1.$$

У.4. $a \cdot b = b \cdot a$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

Следовательно, множество ненулевых элементов множества $\mathbb{R}$ является *мультипликативной абелевой группой.*

Д.1. Операция умножения дистрибутивна относительно сложения, т. е.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Множество $\{a, b, c, \dots\}$, удовлетворяющее аксиомам С, У и Д, называется *числовым полем*. Это же множество без аксиомы У.4 называется *телом*.

Аксиомы порядка

П.0. В множестве $\mathbb{R}$ задано отношение $\leqslant$, которое вполне упорядочивает $\mathbb{R}$:

П.1. $a \leqslant a$ $\forall a \in \mathbb{R}$ (рефлексивность).

П.2. $(a \leqslant b \wedge b \leqslant a) \Rightarrow (a = b)$ (антисимметричность).

П.3. $(a \leqslant b \wedge b \leqslant c) \Rightarrow (a \leqslant c)$ (транзитивность).

П.4. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ или $a \leqslant b$, или $b \leqslant a$, или то и другое.

Следующие две аксиомы связывают отношение порядка и бинарные операции:

ПП.1. Если $a, b, c \in \mathbb{R}$ и $a \leqslant b$, то $a + c \leqslant b + c$.

ПП.2. Из $0 \leqslant a$ и $0 \leqslant b$ следует $0 \leqslant ab$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

Аксиома о верхней грани

Определение 2. *Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным сверху, если существует элемент $M \subset \mathbb{R}$ такой, что $a \leqslant M$ $\forall a \in A$, при этом число M называется верхней гранью множества A.*

Определение 3. *Верхняя грань M^* множества A называется точной верхней гранью множества A, если всякая другая верхняя грань M множества A не меньше числа M^*.*

Точная верхняя грань множества A обозначается символом $\sup A$.

В.0. Всякое ограниченное сверху множество $A \subset \mathbb{R}$ имеет точную верхнюю грань.

3.3. Расширенное множество действительных чисел.

Определение. *Множество $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup (-\infty, +\infty)$, состоящее из элементов множества $\mathbb{R}$ и двух символов $-\infty$ и $+\infty$, называется расширенной системой действительных чисел, причем выполняются следующие условия:*

а) $-\infty < a < +\infty$,

$$a - \infty = -\infty, \quad a + \infty = +\infty, \quad \frac{a}{-\infty} = \frac{a}{+\infty} = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R};$$

б) *если* $a > 0$, *то* $a \cdot (-\infty) = -\infty$, $a \cdot (+\infty) = +\infty$;

в) *если* $a < 0$, *то* $a \cdot (-\infty) = +\infty$, $a \cdot (+\infty) = -\infty$.

Символ $-\infty\,(+\infty)$ называется *минус* (*плюс*) бесконечностью.

3.4. Основные характеристики действительного числа.

Будем для простоты обозначать через $\mathbb{R}$ *одновременно множество всех действительных чисел, упорядоченное пространство действительных чисел и упорядоченное поле действительных чисел, различая смысл обозначения по тексту изложения.* Например, если записано $x \in \mathbb{R}$, то здесь $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел. Если сказано, что $x \leqslant y$ в $\mathbb{R}$, то под $\mathbb{R}$ понимаем упорядоченное пространство. Наконец, если записано $x + y < z$ в $\mathbb{R}$, то $\mathbb{R}$ означает упорядоченное поле действительных чисел. В случае, если по тексту изложения не ясен смысл обозначения, то будем пользоваться более сложными обозначениями.

Для действительного числа x введем следующие характеристики: $|x|$ — модуль x, $\operatorname{sgn} x$ — знак x, x^+ — положительная часть x, x^- — отрицательная часть x. Они вводятся по правилам:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x < 0; \end{cases} \qquad \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0; \end{cases}$$

$$x^+ = \begin{cases} x, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x \leqslant 0; \end{cases} \qquad x^- = \begin{cases} 0, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Очевидны следующие соотношения между этими характеристиками $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$x = |x| \operatorname{sgn} x, \qquad |x| = x \operatorname{sgn} x, \qquad x = x^+ - x^-,$$

$$|x| = x^+ + x^-, \qquad x^+ = \frac{|x| + x}{2}, \qquad x^- = \frac{|x| - x}{2}. \tag{1}$$

При решении задач часто применяются неравенства

$$-|x| \leqslant -x^- \leqslant x \leqslant x^+ \leqslant |x|, \quad |x| \geqslant 0, \quad x^+ \geqslant 0, \quad x^- \geqslant 0. \tag{2}$$

Вместе с указанными характеристиками полезно также рассмотреть функции $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $x \mapsto |x|$, $x \mapsto \operatorname{sgn} x$, $x \mapsto x^+$, $x \to x^-$, графики которых изображены на рис. 17—20. Первая и вторая функции являются мультипликативными отображениями, поскольку из определения этих функций следуют равенства

$$|xy| = |x||y|, \qquad \operatorname{sgn}(xy) = (\operatorname{sgn} x)(\operatorname{sgn} y) \qquad \forall (x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}).$$

Каждая из указанных функций, за исключением "sgn", обладает свойством: множество точек, расположенных выше ее графика, является выпуклым, т. е. если две точки на плоскости расположены выше графика функции, то и все точки отрезка, соединяющего их, также расположены выше. Такие функции называются *выпуклыми.* Если функция f определена на числовой прямой $\mathbb{R}$ и является выпуклой, то $\forall (x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \in \mathbb{R})$ выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}. \tag{3}$$

Это неравенство очевидно: его левая часть есть ордината точки графика с абсциссой $\frac{x_1+x_2}{2}$, а правая часть — ордината точки отрезка с той же абсциссой, расположенного выше графика (рис. 21). Выпуклые функции будут подробно изучены в § 5, гл. 7.

Применив неравенство (3) к выпуклым функциям $x \mapsto |x|$, $x \mapsto x^+$, $x \mapsto x^-$, получим важные оценки

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|, \quad (x + y)^+ \leqslant x^+ + y^+, \quad (x + y)^- \leqslant x^- + y^-, \tag{4}$$

справедливые $\forall (x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R})$.

Из всех перечисленных характеристик действительного числа наиболее важной является его модуль. Под основными свойствами модуля числа понимают следующие:

1) $\forall x \in \mathbb{R}\ \ (|x| = 0) \Rightarrow (x = 0)$;

2) $\forall (\lambda \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R})\ \ |\lambda x| = |\lambda||x|$;

3) $\forall (x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R})\ \ |x + y| \leqslant |x| + |y|$.

Последнее неравенство называется *неравенством треугольника*, поскольку оно имеет геометрический смысл в случае, когда $x \in \mathbb{C}$, $y \in \mathbb{C}$ (см. § 4).

3.5. Метод математической индукции.

Пусть запись $A(k)$ означает, что высказывание A истинно при указанном $k \in \mathbb{N}$. Сут метода математической индукции в следующем:

$$(A(1) \wedge (A(k) \Rightarrow A(k+1) \ \ \forall k \in \mathbb{N})) \Rightarrow (A(n) \ \ \forall n \in \mathbb{N}).$$

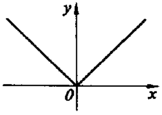


Рис. 17

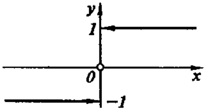


Рис. 18

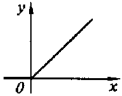


Рис. 19

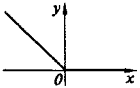


Рис. 20

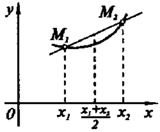


Рис. 21

22. Доказать, что в множестве $\mathbb{R}$ имеются единственные нуль и единица.

◄ Предположим, что в множестве $\mathbb{R}$ имеется два нуля 0_1 и 0_2. Тогда, согласно аксиома С.2 и С.4, имеем

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2.$$

Аналогично, если 1_1 и 1_2 единицы в $\mathbb{R}$, то, согласно У.2 и У.4,

$$1_1 = 1_1 \cdot 1_2 = 1_2 \cdot 1_1 = 1_2. \ ►$$

23. Доказать, что: а) уравнение $a + x = b$ имеет единственное решение $x = -a + b$; б) уравнение $ax = b$ имеет единственное решение $x = a^{-1}b$.

◄ а) Число $-a + b$ удовлетворяет уравнению $a + x = b$. В самом деле: $a + (-a + b) = (a + (-a)) + b = 0 + b = b$. Других решений нет. Действительно, если $x \in \mathbb{R}$ — другое решени то

$$-a + b = -a + b,$$
$$-a + (a + x) = -a + b,$$
$$(-a + a) + x = -a + b,$$
$$0 + x = x = -a + b.$$

б) Аналогично число $a^{-1}b$ удовлетворяет уравнению $ax = b$:

$$a(a^{-1}b) = (a \cdot a^{-1})b = 1 \cdot b = b \cdot 1 = b.$$

Если $x \in \mathbb{R}$ — какое-либо другое решение уравнения $ax = b$, то

$$a^{-1}b = a^{-1}b, \quad a^{-1}(ax) = a^{-1}b, \quad (a^{-1}a)x = a^{-1}b,$$
$$1 \cdot x = a^{-1}b. \quad x = a^{-1}b. \ ►$$

24. Элемент $a \in E$ называется *регулярным* относительно внутренней бинарной операци $\top$, если $\forall x, y \in E$

$$(a \top x = a \top y) \wedge (x \top a = y \top a) \Rightarrow x = y.$$

Доказать, что всякий элемент $c \in \mathbb{R}$ регулярен относительно сложения, а всякий ненул вой элемент $c \in \mathbb{R}$ регулярен относительно умножения.

◄ Докажем, что произвольный элемент $c \in \mathbb{R}$ регулярен относительно сложения. В силу ммутативности сложения $(c + a = c + b) \Leftrightarrow (a + c = b + c)$. Поэтому достаточно показать, о $(c + a = c + b) \Rightarrow (a = b)$.

На основании предыдущего примера и ассоциативности сложения имеем

$$a = -c + (c + b) = (-c + c) + b = 0 + b = b.$$

Аналогично доказывается, что $\forall c \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ регулярен относительно умножения. ►

25. Обозначим $E = \{f\}$ — множество функций $f : A \to A$, $A \subset \mathbb{R}$. Пусть на этом ножестве определена внутренняя бинарная операция

$$E \times E \to E : (f, g) \mapsto f \circ g.$$

а) Показать, что эта операция ассоциативна.

б) Определить регулярные элементы этой операции.

◄ а) Для доказательства равенства

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

остаточно показать, что образы любого элемента $x \in A$ совпадают. Пусть $x \in A$, $u = h(x)$, $v = g(u)$. Имеем

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = (f \circ g)(u) = f(g(u)) = f(v),$$
$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(u) = v,$$

ледовательно, $(f \circ (g \circ h))(x) = f((g \circ h)(x)) = f(v)$, т. е. образы элементов x совпадают и ссоциативность доказана.

б) Отображение f назовем регулярным слева, если $(f \circ g = f \circ h) \Rightarrow (g = h)$, и регулярным права, если $(g \circ f = h \circ f) \Rightarrow (g = h)$. Ясно, что отображение регулярно, если оно регулярно лева и справа.

Покажем сначала, что отображение f регулярно слева тогда и только тогда, когда оно нъективно.

В самом деле, если f инъективно и $f \circ g = f \circ h$, то для любого $x \in A$

$$(f(g(x)) = f(h(x))) \Rightarrow (g(x) = h(x)) \Rightarrow (g = h).$$

Если же f не инъективно, то на множестве A существуют различные числа x и y, образы оторых совпадают: $f(x) = f(y)$. Выберем отображения g и h такими, чтобы $g(a) = x$, $h(a) = y$ для некоторого $a \in A$. Поскольку $x \neq y$, то из $f \circ g = f \circ h$ не следует равенство $g = h$, т. е. f не будет регулярным слева.

Покажем теперь, что f регулярно справа тогда и только тогда, когда функция f сюръективна.

Если f сюръективно, то $\forall x \in A$ существует такое $u \in A$, что $f(u) = x$. Тогда

$$(g \circ f = h \circ f) \Rightarrow (g(x) = h(x)) \quad \forall x \in A.$$

Если же f не сюръективно, то $g \circ f = h \circ f$ для тех отображений g и h, сужения которых овпадают на множестве $f(A)$. Однако отображения g и h могут быть различны, поскольку огут принимать различные значения на множестве $A \backslash f(A)$.

Таким образом, для того чтобы отображение f было регулярно, необходимо и достаточно, тобы оно было биективным. ►

26. Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным снизу*, если $\exists m \in \mathbb{R}$ такое, что $\forall a \in A$ ыполняется неравенство $m \leqslant a$; при этом число m называется *нижней гранью*. Нижняя рань m^* множества A называется *точной нижней гранью* множества A, если всякая другая ижняя грань m множества A не больше m^*. Точная нижняя грань множества A обозначаетcя символом $\inf A$.

Доказать, что всякое ограниченное снизу множество A имеет точную нижнюю грань, ричем, $\inf A = -\sup\{-A\}$, где $-A = \{-x\}$, $x \in A$.

◄ Согласно условию, $\exists m \in \mathbb{R}$ такое, что $x \geqslant m$ $\forall x \in A$, откуда $-x \leqslant -m$, т. е. множество $-A$ ограничено сверху. Согласно аксиоме В.0, $\exists \sup\{-A\} = M^*$. Тогда $-x \leqslant M^*$ $\forall x \in A$, оэтому $-M^* \leqslant x$ $\forall x \in A$, следовательно, $-M^*$ — нижняя грань множества A. Если N — любая другая нижняя грань множества $+A$, то $-N$ — верхняя грань множества $-A$, а оэтому $-N \geqslant M^* = \sup\{-A\}$, откуда $N \leqslant -M$, так что $-M^* = -\sup\{-A\}$ является точной ижней гранью множества A. ►

27. Доказать теорему Архимеда: *если $a > 0$, а b — произвольное действительное число, то существует такое $n \in \mathbb{Z}$, что $(n-1)a \leqslant b$, $na > b$.*

◀ Докажем сначала, что $\exists n \in \mathbb{Z}$ такое, что $na > b$. Для доказательства предположим обратное, т. е. $ka \leqslant b$ $\forall k \in \mathbb{Z}$. Тогда множество $\{ka\}$ ограничено сверху и, согласно аксиоме В.0, имеет точную верхнюю грань $\sup\{ka\} = M^* \leqslant b$. Поскольку число $M^* - a$ не является верхней гранью множества $\{ka\}$, то $\exists pa \in \{ka\}$ такое, что $M^* - a < pa \leqslant M^*$. Отсюда $(p+1)a > M^*$, $(p+1) \in \mathbb{Z}$, что противоречит определению числа M^*. Источник противоречия в предположении, что $ka \leqslant b$ $\forall k \in \mathbb{Z}$. Следовательно, существует число $k \in \mathbb{Z}$ такое, что $ka > b$.

Аналогично доказывается, что $\exists m \in \mathbb{Z}$ такое, что $ma < b$. Сегмент $[ma, ka]$, содержащий точку b, делится точками $(m+1)a, (m+2)a, \ldots, (k-1)a$ на $k-m$ сегментов; одному из них принадлежит точка b. Следовательно, существует $n \in \mathbb{Z}$ такое, что $(n-1)a \leqslant b < na$. ▶

28. Доказать, что для произвольно заданного положительного числа ε существует такое натуральное число n, что

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

◀ Полагая в теореме Архимеда $b = \frac{1}{\varepsilon}$, $a = 1$, приходим к неравенству $n_0 \cdot 1 > \frac{1}{\varepsilon}$, $n_0 \in \mathbb{Z}$. А так как $\frac{1}{\varepsilon} > 0$, то $n_0 \in \mathbb{N}$. Тогда $\forall n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$, справедливо неравенство $n > n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ или $\frac{1}{n} < \varepsilon$. ▶

29. Пусть α и β произвольно заданные действительные числа, причем $\alpha < \beta$. Доказать, что существует рациональное число r, заключенное между числами α и β.

◀ Обозначим $h = \beta - \alpha$. Согласно предыдущему примеру, $\exists n \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\frac{1}{n} < h. \tag{1}$$

Согласно теореме Архимеда, существует $m \in \mathbb{Z}$ такое, что

$$\frac{m}{n} \leqslant \alpha < \frac{m+1}{n}.$$

Отсюда и из неравенства (1) получаем

$$\alpha < \frac{m+1}{n} = \frac{m}{n} + \frac{1}{n} < \alpha + h = \alpha + \beta - \alpha = \beta.$$

Таким образом, $\alpha = \frac{m+1}{n} < \beta$. ▶

30. Показать, что множество всех правильных рациональных дробей $\frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа и $0 < m < n$, не имеет наименьшего и наибольшего элементов. Найти точную нижнюю и точную верхнюю грани этого множества.

◀ Пусть m и n $(0 < m < n)$ — любые натуральные числа. Тогда из очевидных неравенств

$$\frac{m}{n} = \frac{2m}{2n} > \frac{2m-1}{2n} > 0, \qquad \frac{m}{n} = \frac{2m}{2n} < \frac{2m+1}{2n} < 1$$

следует, что множество правильных рациональных дробей не имеет наименьшего и наибольшего элементов.

Покажем, что $\inf\left\{\frac{m}{n}\right\} = 0$, а $\sup\left\{\frac{m}{n}\right\} = 1$.

Согласно теореме Архимеда, для произвольно заданных $\varepsilon > 0$ и $m \in \mathbb{N}$ найдется такое $n \in \mathbb{N}$, $n > m$, что $n > \frac{m}{\varepsilon}$. Тогда $\frac{m}{n} < \varepsilon$. Отсюда и из неравенства $\frac{m}{n} > 0$ следует, что $\inf\left\{\frac{m}{n}\right\} = 0$. Аналогично для произвольно заданных $\varepsilon > 0$ и $p \in \mathbb{N}$ найдется такое натуральное число m, что $m > \frac{p(1-\varepsilon)}{\varepsilon}$. Отсюда $\frac{m}{p+m} > 1 - \varepsilon$, т. е. при $n = p + m$ имеем $\frac{m}{n} > 1 - \varepsilon$, а это вместе с неравенством $\frac{m}{n} < 1$ означает, что $\sup\left\{\frac{m}{n}\right\} = 1$. ▶

31. Пусть $\{x + y\}$ есть множество всех сумм $x + y$, где $x \in \{x\}$ и $y \in \{y\}$. Доказать равенства:

а) $\inf\{x+y\} = \inf\{x\} + \inf\{y\}$, б) $\sup\{x+y\} = \sup\{x\} + \sup\{y\}$.

◀ а) Так как из $x \geqslant m$, $x \in \{x\}$, и $y \geqslant m_1$, $y \in \{y\}$, следует, что $x + y \geqslant m + m_1$, $(x+y) \in \{x+y\}$, то существование $\inf\{x\} = m^*$ и $\inf\{y\} = m_1^*$ влечет за собой существование

$\inf\{x+y\}$. Ясно, что $x+y \geqslant m^* + m_1^*$. Далее, для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такой элемент $(x'+y') \in \{x+y\}$, что

$$m^* + m_1^* \leqslant x' + y' < m^* + m_1^* + \varepsilon,$$

поскольку существуют такие $x' \in \{x\}$ и $y' \in \{y\}$, что $m^* \leqslant x' < m^* + \frac{\varepsilon}{2}$ и $m_1^* \leqslant y' < m_1^* + \frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно,

$$\inf\{x+y\} = x' + y' = \inf\{x\} + \inf\{y\}.$$

Равенство б) предлагаем доказать самостоятельно. ►

32. Пусть $\{xy\}$ есть множество всех произведений xy, где $x \in \{x\}$ и $y \in \{y\}$, причем $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Доказать равенства:
а) $\inf\{xy\} = \inf\{x\}\inf\{y\}$; б) $\sup\{xy\} = \sup\{x\}\sup\{y\}$.

◄ Докажем равенство б) (равенство а) предлагаем доказать самостоятельно). Так как из $x \leqslant M$, $x \in \{x\}$, $x \geqslant 0$, и $y \leqslant M_1$, $y \in \{y\}$, $y \geqslant 0$, следует, что $xy \leqslant MM_1$, то из существования $\sup\{x\} = M^*$ и $\sup\{y\} = M_1^*$ вытекает существование $\sup\{xy\}$. Из неравенств $M^* - \varepsilon_1 < x \leqslant M^*$, $M_1^* - \varepsilon_2 < y \leqslant M_1^*$ следует, что $M^*M_1^* - (\varepsilon_1 M_1^* + \varepsilon_2 M^* - \varepsilon_1\varepsilon_2) < xy \leqslant M^*M_1^*$. Поскольку величина $\varepsilon_1 M_1^* + \varepsilon_2 M^* - \varepsilon_1\varepsilon_2$ может быть сколь угодно малой, то $\sup\{xy\} = M^*M_1^* = \sup\{x\}\sup\{y\}$. ►

33. Пусть $X = \left\{\frac{1}{2} \pm \frac{n}{2n+1}\right\}$, $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что $\inf X = 0$, $\sup X = 1$.

◄ Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно заданное число. Тогда из неравенств

$$0 < \frac{1}{2} - \frac{n}{2n+1} < \varepsilon, \qquad 1 - \varepsilon < \frac{1}{2} + \frac{n}{2n+1} < 1,$$

справедливых при всех $n > \frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}$, вытекает, что $\inf X = 0$, $\sup X = 1$. ►

34. Доказать неравенства:
а) $|x-y| \geqslant ||x| - |y||$; б) $|x + x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \geqslant |x| - (|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|)$

◄ а) Применяя к сумме $(x-y)+y$ неравенство треугольника, приходим к неравенству

$$|x| = |(x-y)+y| \leqslant |x-y| + |y|,$$

из которого получаем

$$|x| - |y| \leqslant |x-y|. \qquad (1)$$

Меняя местами x и y, находим

$$|y| - |x| \leqslant |y-x| = |x-y|.$$

Отсюда

$$-|x-y| \leqslant |x| - |y|. \qquad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) следует а).

б) Пользуясь неравенством треугольника, получаем

$$\begin{aligned}|x| = |(x + x_1 + x_2 + \ldots + x_n) - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)| \leqslant \\ \leqslant |x + x_1 + x_2 + \ldots + x_n| + |x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \leqslant \\ \leqslant |x + x_1 + x_2 + \ldots + x_n| + |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|,\end{aligned}$$

откуда непосредственно следует неравенство б). ►

35. Решить уравнение

$$|x| + |x-1| + |x-2| - 2{,}5 = 0.$$

◄ Имеем

$$|x| + |x-1| + |x-2| - 2{,}5 = \begin{cases} -3x + 0{,}5 = 0, & \text{если } x \in]-\infty, 0[, \\ -x + 0{,}5 = 0, & \text{если } x \in [0, 1[, \\ +x - 1{,}5 = 0, & \text{если } x \in [1, 2[, \\ +3x - 5{,}5 = 0, & \text{если } x \in [2, +\infty[. \end{cases}$$

Отсюда заключаем, что на промежутках $]-\infty, 0[$, $[2, +\infty[$ решений нет, а на промежутке $[0, 1[$ имеем корень $x = 0{,}5$ и на $[1, 2[$ — корень $x = 1{,}5$. ►

36. Найти сумму

$$S_n = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} + \operatorname{arctg}\frac{1}{18} + \ldots + \operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}.$$

◀ Применим метод математической индукции. Поскольку

$$S_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}, \quad S_2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} = \operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}} = \operatorname{arctg}\frac{2}{3},$$

$$S_3 = \operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{18} = \operatorname{arctg}\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{18}}{1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{18}} = \operatorname{arctg}\frac{3}{4},$$

то можно предполагать, что

$$S_n = \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

А так как

$$S_{n+1} = \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2(n+1)^2} = \operatorname{arctg}\frac{\frac{n}{n+1}+\frac{1}{2(n+1)^2}}{1-\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{2(n+1)^2}} = \operatorname{arctg}\frac{n+1}{n+2}$$

и равенство (1) справедливо при $n = 1$, то, согласно индукции, оно справедливо при всех n. ▶

37. Применяя метод математической индукции, доказать, что для любого натурального числа n справедливы следующие равенства:

а) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, б) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$.

◀ а) При $n = 1$ равенство справедливо. Предполагая справедливость равенства при n, покажем справедливость его и при $n+1$. Действительно,

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

что и требовалось доказать.

б) При $n = 1$ справедливость равенства очевидна. Из предположения справедливости его при n следует

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2 + (n+1)^3 =$$
$$= (1 + 2 + \ldots + n)^2 + 2\,\frac{n(n+1)}{2}(n+1) + (n+1)^2.$$

Учитывая равенство $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, получаем

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = (1 + 2 + \ldots + n + (n+1))^2,$$

т. е. утверждение справедливо и при $n+1$. ▶

38. Доказать формулу бинома Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m,$$

где $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ (число сочетаний из n элементов по m), $k! = 1\cdot 2 \ldots k$, причем полагают $0! = 1$.

◀ При $n = 1$ имеем

$$(a+b) = \sum_{m=0}^{1} C_1^m a^{1-m} b^m = \frac{1!}{0!\,1!}a + \frac{1!}{1!\,0!}b = a + b.$$

Остается показать, что из предположения справедливости утверждения для n следует, что

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{m=1}^{n+1} C_{n+1}^m a^{n+1-m} b^m$$

В самом деле,

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m}b^m = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n+1-m}b^m + \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m}b^{m+1} =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n+1-m}b^m + \sum_{m=1}^{n+1} C_n^{m-1}a^{n+1-m}b^m = a^{n+1} + \sum_{m=1}^{n}(C_n^m + C_n^{m-1})a^{n+1-m}b^m + b^{n+1}$$

Используя соотношения

$$C_n^m + C_n^{m-1} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} + \frac{n!}{(m-1)!\,(n+1-m)!} = \frac{(n+1)!}{m!\,(n+1-m)!} = C_{n+1}^m \qquad C_{n+1}^0 = C_{n+1}^{n+1} = 1,$$

окончательно имеем

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{m=1}^{n} C_{n+1}^m a^{n+1-m}b^m + b^{n+1} = \sum_{m=0}^{n+1} C_{n+1}^m a^{n+1-m}b^m. ►$$

39. Доказать неравенство Бернулли

$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — числа одного и того же знака, бо́льшие -1.

◄ При $n = 1, 2$ неравенство очевидно. Пусть неравенство справедливо при n. Покажем справедливость его при $n+1$. Имеем (при $x_i > -1$)

$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n)(1+x_{n+1}) \geqslant (1+x_1+x_2+\ldots+x_n)(1+x_{n+1}) =$$
$$= 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1} + (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)x_{n+1} \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1}.$$

Здесь использовано неравенство

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)x_{n+1} \geqslant 0,$$

справедливое при любых x_i одного знака. ►

40. Доказать, что если $x > -1$, то справедливо неравенство

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx, \qquad n > 1,$$

причем знак равенства имеет место лишь при $x = 0$.

◄ Требуемое неравенство непосредственно следует из предыдущего примера, если положить там $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x$. Если $x = 0$, то $\forall n > 1$ имеем знак равенства. Покажем, что при $n > 1$ и $x > -1$ получим строгое неравенство $(1+x)^n > 1 + nx$. При $n = 2$ это очевидно: $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$. Далее, если $(1+x)^n > 1 + nx$, то

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) > (1+nx)(1+x) = 1 + nx + x + nx^2 > 1 + (n+1)x. ►$$

41. Доказать, что если $x_i > 0$ $\forall i = \overline{1, n}$ и $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$, то

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqslant n, \tag{1}$$

при этом

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n) \Leftrightarrow (x_i = 1 \ \forall i = \overline{1, n}).$$

◄ Для доказательства применим метод математической индукции. При $n = 1$ неравенство (1) справедливо и при этом имеет место только знак равенства. Если $n = 2$ и $x_1 x_2 = 1$, то обязательно один сомножитель, например $x_1 \geqslant 1$, а $x_2 \leqslant 1$. Тогда из очевидного тождества

$$x_1 + x_2 = x_1 x_2 + 1 + (x_1 - 1)(1 - x_2) \tag{2}$$

и условия $x_1 x_2 = 1$ следуют неравенство $x_1 + x_2 \geqslant 2$ и условие $(x_1 + x_2 = 2) \Leftrightarrow (x_1 = x_2 = 1)$.

Предположим теперь, что для произвольных k положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_k$, произведение которых равно единице, справедливо неравенство $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i \geqslant k$, причем

$$\left(\sum_{i=1}^{k} x_i = k\right) \Leftrightarrow (x_i = 1 \ \forall i = \overline{1, k}).$$

Рассмотрим произведение $k+1$ положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}$, для которых
$$x_1 x_2 \ldots x_{k+1} = 1.$$
Если не все x_i равны единице, то найдутся числа как бо́льшие, так и меньшие единицы. Не ограничивая общности, будем считать, что $x_1 > 1$, $x_2 < 1$. Тогда, по предположению, для k положительных чисел $(x_1 x_2)$, x_3, $\ldots$, x_{k+1}, произведение которых равно единице, справедливо неравенство
$$(x_1 x_2) + x_3 + \ldots + x_{k+1} \geqslant k, \tag{3}$$
причем
$$(x_1 x_2 + x_3 + \ldots + x_{k+1} = k) \Leftrightarrow (x_1 x_2 = x_3 = \ldots = x_{k+1} = 1). \tag{4}$$
Складывая тождество (2) с неравенством (3), получаем неравенство
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{k+1} \geqslant k + 1 + (x_1 - 1)(1 - x_2) \geqslant k + 1$$
и условие
$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_{k+1} = k + 1 + (x_1 - 1)(1 - x_2)) \Leftrightarrow ((x_1 x_2) = x_3 = \ldots = x_{k+1} = 1),$$
из которого следует, что
$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_{k+1} = k + 1) \Leftrightarrow (x_i = 1 \ \ \forall i = \overline{1, k+1}). \ \blacktriangleright$$

42. Пусть $x_i > 0$, $x_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = \overline{1, n}$, а
$$\gamma_n = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \text{ (среднее гармоническое)},$$
$$\eta_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \text{ (среднее геометрическое)},$$
$$\xi_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \text{ (среднее арифметическое)}.$$
Доказать, что $\gamma_n \leqslant \eta_n \leqslant \xi_n$ и при этом $(\gamma_n = \eta_n = \xi_n) \Leftrightarrow (x_1 = x_2 = \ldots = x_n)$.

◀ Произведение n положительных чисел
$$\frac{x_1}{\eta_n} \cdot \frac{x_2}{\eta_n} \ldots \frac{x_n}{\eta_n} = 1,$$
поэтому, согласно предыдущему примеру, их сумма
$$\frac{x_1}{\eta_n} + \frac{x_2}{\eta_n} + \ldots + \frac{x_n}{\eta_n} \geqslant n.$$
Отсюда $\eta_n \leqslant \xi_n$. При этом знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $\frac{x_1}{\eta_n} = \frac{x_2}{\eta_n} = \ldots = \frac{x_n}{\eta_n} = 1$, т. е. когда $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. По только что доказанному
$$\frac{1}{\eta_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \ldots \frac{1}{x_n}} \leqslant \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}{n} = \frac{1}{\gamma_n},$$
откуда $\gamma_n \leqslant \eta_n$ и $\gamma_n = \eta_n$, если $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} = \ldots = \frac{1}{x_n} = 1$, т. е. если $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. ▶

43. Доказать неравенство Коши—Буняковского
$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right),$$
где x_i, y_i $(i = \overline{1, n})$ — произвольные действительные числа. В каких случаях в указанном неравенстве имеет место знак равенства?

◀ Из очевидного неравенства $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i t + y_i)^2 \geqslant 0$ получаем неотрицательный при всех значениях t квадратный трехчлен $t^2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + 2t \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 \geqslant 0$, поэтому
$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \leqslant 0.$$

Знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $x_i t + y_i = 0$, $i = \overline{1, n}$, т. е. когда существует такое число $\lambda \neq 0$, что $y_i = \lambda x_i$, $i = \overline{1, n}$, или когда все x_i, $i = \overline{1, n}$, или все y_i, $i = \overline{1, n}$, равны нулю ►

Доказать неравенства:

44. а) $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$, $n > 1$; б) $(n!)^2 < \left(\frac{(n+1)(2n+1)}{6}\right)^n$ $n > 1$;

в) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \ldots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

◄ Неравенства а) и б) являются следствием неравенства $\eta_n \leqslant \xi_n$ из задачи 42 при $x_k = k$ и $x_k = k^2$ $(k = \overline{1, n})$ соответственно.

Доказательство неравенства в) проведем с помощью метода математической индукции. При $n = 1$ неравенство очевидно. Предполагая его справедливым при n, покажем, что оно справедливо и при $n + 1$. В самом деле,

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \ldots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \cdot \frac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \sqrt{\frac{4n^2+8n+3}{4n^2+8n+4}} < \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \text{ ►}$$

45. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$, $n \geqslant 2$.

◄ При $n \geqslant 2$ имеем

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}. \text{ ►}$$

46. $n^{n+1} > (n+1)^n$, $n \geqslant 3$.

◄ При $n = 3$ неравенство очевидно. Предполагая, что неравенство справедливо при n, докажем справедливость его и при $n + 1$, т. е. докажем, что $(n+1)^{n+2} > (n+2)^{n+1}$, если

$$n^{n+1} > (n+1)^n.$$

Умножив обе части последнего неравенства на $\frac{(n+1)^{n+2}}{n^{n+1}}$, имеем

$$(n+1)^{n+2} > \frac{(n+1)^{2(n+1)}}{n^{n+1}}.$$

Но так как $\frac{(n+1)^{2(n+1)}}{n^{n+1}} = \left(\frac{n^2+2n+1}{n}\right)^{n+1} > (n+2)^{n+1}$, то требуемое доказано. ►

47. $\left|\sin \sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \sin x_k$ $0 \leqslant x_k \leqslant \pi$, $k = \overline{1, n}$.

◄ При $n = 1$ неравенство справедливо. Докажем, что $\left|\sin \sum\limits_{k=1}^{n+1} x_k\right| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n+1} \sin x_k$, предположив справедливость исходного неравенства.

В самом деле, если $0 \leqslant x_k \leqslant \pi$, то

$$\left|\sin \sum_{k=1}^{n+1} x_k\right| = \left|\sin\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\cos x_{n+1} + \cos\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\sin x_{n+1}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\sin \sum_{k=1}^{n} x_k\right| \cdot |\cos x_{n+1}| + \left|\cos \sum_{k=1}^{n} x_k\right| \sin x_{n+1} \leqslant$$

$$\leqslant \left|\sin \sum_{k=1}^{n} x_k\right| + \sin x_{n+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sin x_k + \sin x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \sin x_k. \text{ ►}$$

48. $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$, $n > 1$.

◀ При $n = 2$ неравенство очевидно. Исходя из справедливости его для n, покажем справедливость его для $n+1$. В самом деле,

$$(2n+2)! = (2n)!\,(2n+1)(2n+2) < 2^{2n}(n!)^2(2n+1)(2n+2) <$$
$$< 2^{2n}(n!)^2(2n+2)^2 = 2^{2n+2}((n+1)!)^2. \ ▶$$

Упражнения для самостоятельной работы

30. Пусть $\{-x\}$ — множество чисел, противоположных числам $x \in \{x\}$. Доказать, что: а) $\inf\{-x\} = -\sup\{x\}$; б) $\sup\{-x\} = -\inf\{x\}$.

31. Применяя метод математической индукции, доказать неравенства:

а) $n! > n^{\frac{n}{2}}$, $n > 2$; б) $(2n-1)! < n^{2n-1}$, $n > 1$; в) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^p < \frac{(n+1)^{p+1}}{p+1}$, $n, p \in \mathbb{N}$.

32. а) Доказать, что для любого выпуклого n-угольника справедливо равенство $D_n = \frac{n(n-3)}{2}$, где D_n — число диагоналей.

б) Доказать, что для любого выпуклого многогранника справедливо соотношение $n + B_n - P_n = 2$, где B_n — число вершин, P_n — число ребер, n — число граней.

33. Доказать неравенства:

а) $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \leqslant \sqrt{n(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)}$;

б) $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geqslant n^2$, $x_i > 0$, $i = \overline{1, n}$;

в) $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2}$.

34. Вычислить суммы:

а) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n!$; б) $1^4 + 2^4 + \ldots + n^4$; в) $1^5 + 2^5 + \ldots + n^5$.

35. Доказать, что:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\ldots(k+m-1) = \frac{1}{m+1} n(n+1)\ldots(n+m),$$

где m — натуральное число.

Пользуясь этой формулой, вычислить суммы:

а) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1)$; б) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2)$;

в) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + n(n+1)(n+2)(n+3)$.

36. Доказать, что

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)\ldots(k+m)} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m!} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}\right),$$

где m — натуральное число.

Пользуясь этой формулой, вычислить следующие суммы:

а) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$; б) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

в) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$.

37. Решить уравнения:

а) $|x+1| + |x| + |x-1| = 6$; б) $x|x+2| - |x+1| - (x+1)|x| + 1 = 0$.

§4. Комплексные числа

4.1. Комплексные числа и действия над ними.

Определение. *Комплексным числом z называется упорядоченная пара (x, y) действительных чисел x и y. При этом равенство, сумма и произведение упорядоченных пар, а также отождествление некоторых из них с действительными числами определяются следующим образом:*

1) *два комплексных числа $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ называются **равными**, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.*

2) *суммой комплексных чисел* z_1 *и* z_2 *называется комплексное число* z *вида*

$$z = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2);$$

3) *произведением комплексных чисел* z_1 *и* z_2 *называется комплексное число*

$$z = (x_1x_2 - y_1y_2,\ x_1y_2 + x_2y_1);$$

4) *множество комплексных чисел* $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$, *отождествляется с множеством действительных чисел* $\mathbb{R}$.

Разностью комплексных чисел z_1 и z_2, называется комплексное число z такое, что $z_2+z = z_1$ откуда находим $z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2,\ y_1 - y_2)$.

Частным комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число z такое, что $z_2 \cdot z = z_1$. Отсюда находим

$$z = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2},\ \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right).$$

Комплексное число $(0, 1)$ обозначается символом $i = (0, 1)$. Тогда $(0, 1)\cdot(0, 1) = (-1, 0)$, т. е. $i^2 = -1$. Произвольное комплексное число z можно записать в виде

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + iy.$$

Эта запись называется *алгебраической формой* комплексного числа. Комплексное число $\bar{z} = (x, -y) = x - iy$ называется *сопряженным* по отношению к комплексному числу $z = (x, y) = x + iy$.

4.2. Геометрическая интерпретация комплексного числа.

Всякое комплексное число $z = (x, y)$ можно изобразить как точку на плоскости с координатами x и y. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*, при этом ось Ox называется *действительной*, а Oy — *мнимой*.

Расстояние r точки z от нулевой точки, т. е. число $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$, называем *модулем* комплексного числа z и обозначаем символом $|z|$.

Число

$$\theta = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & \text{если } x > 0, \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \pi, & \text{если } x < 0,\ y \geqslant 0, \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \pi, & \text{если } x < 0,\ y > 0, \\ \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} y, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

называем *аргументом* комплексного числа z и обозначаем символом $\theta = \arg z$. При заданном r углы, отличающиеся на $2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, соответствуют одному и тому же числу. В этом случае записываем $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, и $\arg z$ называем *главным значением* аргумента.

Числа r и θ называют *полярными координатами* комплексного числа z. В этом случае

$$z = (x, y) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

называется *тригонометрической формой* комплексного числа.

Если $z_1 = (r_1\cos\theta_1,\ r_1\sin\theta_1)$, $z_2 = (r_2\cos\theta_2,\ r_2\sin\theta_2)$, то

$$z_1z_2 = (r_1r_2\cos(\theta_1 + \theta_2),\ r_1r_2\sin(\theta_1 + \theta_2)),$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\cos(\theta_1 - \theta_2),\ \frac{r_1}{r_2}\sin(\theta_1 - \theta_2)\right).$$

Для возведения в степень комплексного числа $z = (r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ применяем так называемую *формулу Муавра*

$$z^n = (r^n\cos n\theta,\ r^n\sin n\theta).$$

Корень n-й степени комплексного числа z находим по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \left(\sqrt[n]{r}\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n},\ \sqrt[n]{r}\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \quad k = \overline{0, n-1}. \tag{1}$$

49. Доказать, что:

а) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$; б) $\overline{z_1z_2} = \bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$; в) $\overline{(z^n)} = \bar{z}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

◀ Пусть $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$.

а) По определению сопряженного числа

$$\overline{z_1+z_2} = \overline{(x_1+x_2,\ y_1+y_2)} = (x_1+x_2,\ -y_1-y_2) = (x_1,\ -y_1)+(x_2,\ -y_2) = \bar z_1 + \bar z_2.$$

б) Имеем $\overline{z_1 z_2} = \overline{(x_1x_2 - y_1y_2,\ x_1y_2 + x_2y_1)} = (x_1x_2 - y_1y_2,\ -x_1y_2 - x_2y_1) = (x_1,\ -y_1)(x_2,\ -y_2) = \bar z_1 \cdot \bar z_2$.

в) Запишем комплексное число z в тригонометрической форме $z = (r\cos\theta,\ r\sin\theta)$, тогда $\bar z = (r\cos(-\theta),\ r\sin(-\theta))$. Пользуясь формулой Муавра, имеем

$$(\bar z)^n = (r^n\cos(-n\theta),\ r^n\sin(-n\theta)) = (r^n\cos n\theta,\ -r^n\sin n\theta) = \overline{(r^n\cos n\theta,\ r^n\sin n\theta)} = \overline{(z^n)}.\ ▶$$

50. Выполнить указанные операции:

а) $(2-i)(2+i)^2 - (3-2i) + 7$; б) $(1+i)^4$; в) $\left(\dfrac{\sqrt3}{2} + \dfrac{i}{2}\right)^6$.

◀ С комплексными числами, записанными в алгебраической форме, операции сложения, вычитания и умножения можно производить так же, как и с действительными биномами. При этом пользуемся тем, что $i^2 = -1$, $i^3 = i^2\cdot i = -i$, $i^4 = i^3 i = -i^2 = 1$ и т. д.

а) Имеем

$$(2-i)(2+i)^2 - (3-2i) + 7 = (2-i)(2+i)^2 + 4 + 2i =$$
$$= (2+i)((2-i)(2+i)+2) = (2+i)(4+1+2) = 14+7i.$$

б) Согласно формуле бинома Ньютона,

$$(1+i)^4 = 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4 = 1 + 4i - 6 - 4i + 1 = -4.$$

в) $\left(\frac{\sqrt3}{2} + \frac{i}{2}\right)^6 = \frac{27}{64} + i\frac{54\sqrt3}{64} - \frac{135}{64} - i\frac{60\sqrt3}{64} + \frac{45}{64} + i\frac{6\sqrt3}{64} - \frac{1}{64} = -1.$ ▶

51. Найти частное комплексных чисел:

а) $\dfrac{1}{i}$; б) $\dfrac{1}{1+i}$; в) $\dfrac{\frac12 + i\frac{\sqrt3}{2}}{\frac12 - i\frac{\sqrt3}{2}}$.

◀ Формулу для нахождения частного комплексных чисел z_1 и z_2 запишем в виде

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\cdot\bar z_2}{z_2\cdot\bar z_2} = \frac{z_1\cdot\bar z_2}{|z_2|^2}.$$

Пользуясь этой формулой, находим

а) $\dfrac{1}{i} = \dfrac{-i}{|i|^2} = -i$; б) $\dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1-i}{|1+i|^2} = \dfrac{1-i}{2} = \dfrac12 - \dfrac{i}{2}$;

в) $\dfrac{\frac12 + i\frac{\sqrt3}{2}}{\frac12 - i\frac{\sqrt3}{2}} = \dfrac{\left(\frac12 + i\frac{\sqrt3}{2}\right)\left(\frac12 + i\frac{\sqrt3}{2}\right)}{\left|\frac12 - i\frac{\sqrt3}{2}\right|^2} = \dfrac{-\frac12 + i\frac{\sqrt3}{2}}{1} = -\dfrac12 + i\dfrac{\sqrt3}{2}.$ ▶

52. Представить следующие комплексные числа в тригонометрической форме:

а) -3; б) $-i$; в) $1+i$; г) $-1+i\sqrt3$.

◀ Имеем:

а) $|-3| = 3$, $\theta = \pi$, $-3 = 3(\cos\pi + i\sin\pi)$;

б) $|-i| = 1$, $\theta = -\frac{\pi}{2}$, $-i = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$;

в) $|1+i| = \sqrt2$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, $1+i = \sqrt2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

г) $|-1+i\sqrt3| = 2$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$, $-1+i\sqrt3 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$. ▶

53. Вычислить:

а) $(1+i\sqrt3)^{30}$; б) $(\sqrt2 - i\sqrt2)^{20}$; в) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{12}$;

г) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt3 - i3}\right)^{11}$; д) $(2+2i)^{41}$; е) $(-\sqrt3 - i)^7$.

◀ а) Представим комплексное число в тригонометрической форме

$$1 + i\sqrt3 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right),$$

затем, применив формулу Муавра, получим

$$(1+i\sqrt{3})^{30} = 2^{30}\left(\cos\frac{30\pi}{3} + i\sin\frac{30\pi}{3}\right) = 2^{30}.$$

б) Аналогично предыдущему находим

$$\sqrt{2} - i\sqrt{2} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right);$$

$$(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^{20} = 2^{20}\left(\cos\left(-\frac{20\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{20\pi}{4}\right)\right) = -2^{20}.$$

в) Представляя числитель и знаменатель дроби в тригонометрической форме, вычисляем частное

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right),$$

затем, использовав формулу Муавра, находим

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{12} = \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)^{12} = \left(\cos\left(-\frac{12\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{12\pi}{2}\right)\right) = 1.$$

г) $$\frac{1+i}{\sqrt{3}-i3} = \frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right);$$

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}-i3}\right)^{11} = \frac{1}{6^5\sqrt{6}}\left(\cos\frac{77\pi}{12} + i\sin\frac{77\pi}{12}\right) =$$

$$= \frac{1}{6^5\sqrt{6}}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1}{6^5\cdot 4}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} + i\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}\right).$$

д) $$(2+2i)^{41} = (\sqrt{8})^{41}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{41} = (\sqrt{8})^{41}\left(\cos\frac{41\pi}{4} + i\sin\frac{41\pi}{4}\right) = 8^{20}(2+2i).$$

е) $$(-3-i)^7 = 2^7\left(\cos\frac{-5\pi}{6} + i\sin\frac{-5\pi}{6}\right)^7 = 2^7\left(\cos\left(-\frac{35\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{35\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= 2^7\left(\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2^7\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2^6(\sqrt{3}+i). \blacktriangleright$$

54. **Найти все значения корней: а) $\sqrt[4]{1}$; б) $\sqrt[3]{-1-i\sqrt{3}}$.**

◀ а) Запишем комплексное число 1 в тригонометрической форме

$$1 = \cos 0^\circ + i\sin 0^\circ,$$

затем по формуле (1), п. 4.2, находим

$$\sqrt[4]{1} = \cos\frac{2k\pi}{4} + i\sin\frac{2k\pi}{4}, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Следовательно,

$\sqrt[4]{1} = \cos 0^\circ + i\sin 0^\circ = 1$ при $k=0$, $\sqrt[4]{1} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$ при $k=1$,

$\sqrt[4]{1} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$ при $k=2$, $\sqrt[4]{1} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$ при $k=3$.

б) Записав комплексное число $-1-i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме

$$-1-i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right),$$

находим

$$\sqrt[3]{-1-i\sqrt{3}} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{-2\pi}{3} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{-2\pi}{3} + 2k\pi}{3}\right), \quad k = 0,\ 1,\ 2.$$

Отсюда

$$\sqrt[3]{-1-i\sqrt{3}} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(-\tfrac{2\pi}{9}\right) + i\sin\left(-\tfrac{2\pi}{9}\right)\right), \quad k=0,$$

$$\sqrt[3]{-1-i\sqrt{3}} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\tfrac{4\pi}{9}\right) + i\sin\left(\tfrac{4\pi}{9}\right)\right), \quad k=1,$$

$$\sqrt[3]{-1-i\sqrt{3}} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\tfrac{10\pi}{9}\right) + i\sin\left(\tfrac{10\pi}{9}\right)\right), \quad k=2. \blacktriangleright$$

55. Решить уравнение $z^6 + 1 = 0$.

◀ Имеем $z = \sqrt[6]{-1}$. Для вычисления всех значений $\sqrt[6]{-1}$ применим формулу (1), п. 4.2,

$$z_k = \sqrt[6]{-1} = \cos\frac{-\pi + 2k\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi + 2k\pi}{6}, \quad k = \overline{0,\,5}.$$

Отсюда $\quad z_0 = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, \quad z_1 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},$

$$z_2 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i, \quad z_3 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},$$

$$z_4 = \cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, \quad z_5 = \cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6} = -i. ▶$$

Упражнения для самостоятельной работы

38. Доказать, что а) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$; б) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ в) $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$, где $z \mapsto P(z)$ — алгебраический многочлен с действительными коэффициентами.

39. Выполнить указанные операции:
а) $(1 + i\sqrt{3})^6$; б) $\frac{2+i4}{-3+i5}$; в) $\frac{x+iy}{x-iy}$ $(x^2 + y^2 \neq 0)$.

40. Найти действительную и мнимую части следующих комплексных чисел:
а) $\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; б) $\left(\frac{i^5+2}{i^{15}+1}\right)^2$; в) $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$.

41. Показать, что множество комплексных чисел, в котором введены операции сложения и умножения, образует поле.

42. Найти модули и аргументы следующих комплексных чисел:
а) $(-4 + 3i)^3$; б) $(1 + i)^8(1 - i\sqrt{3})^{-6}$; в) $1 + \cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$.

Найти все значения следующих корней:

43. $\sqrt[3]{i}$. **44.** $\sqrt[3]{-1+i}$. **45.** $\sqrt[6]{-64}$. **46.** $\sqrt[6]{64}$.

Найти корни уравнений:

47. $z^2 + (5 - i2)z + 5(1 - i) = 0$. **48.** $z^2 + (1 - i2)z - i2 = 0$.

49. $(z + i)^n + (z - i)^n = 0$.

50. Доказать, что модуль комплексного числа является абсолютным значением, т. е. $|z|$ удовлетворяет условиям:
1) $|z| \geqslant 0 \wedge (|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0)$; 2) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ $\forall z_1,\, z_2 \in \mathbb{C}$;
3) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ $\forall z_1,\, z_2 \in \mathbb{C}$.

51. Доказать, что модуль комплексного числа удовлетворяет неравенству

$$||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 - z_2|.$$

§ 5. Векторные и метрические пространства

5.1. Векторное пространство.

Определение 1. *Векторным пространством над полем* $\mathbb{K} = \{\lambda,\, \mu,\, \nu,\, \ldots\}$ *называется множество* $E = \{x,\, y,\, z,\, \ldots\}$, *в котором определены:*

I. *Внутренняя бинарная операция* $E \times E \to E : (x,\, y) \mapsto x + y$, *относительно которой множество* E *является абелевой группой:*

$$1)\ x + (y + z) = (x + y) + z; \qquad 2)\ x + \theta = x;$$
$$3)\ x + (-x) = \theta; \qquad 4)\ x + y = y + x$$

(здесь θ — нулевой элемент группы).

II. *Внешняя бинарная операция* $\mathbb{K} \times E \to E : (\lambda,\, x) \mapsto \lambda x$, *удовлетворяющая следующим аксиомам:*

$$5)\ \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y; \qquad 6)\ (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x;$$
$$7)\ (\lambda\mu)x = \lambda(\mu x); \qquad 8)\ 1 \cdot x = x.$$

Элементы векторного пространства E называют *векторами* (или *точками*), а элементы поля $\mathbb{K}$ — *скалярами*.

Если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, то E называется *действительным векторным пространством*, а если $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, то E называется *комплексным векторным пространством*.

Определение 2. *Всякое подмножество V векторного пространства E, обладающее двумя бинарными операциями пространства E и являющееся векторным пространством над полем $\mathbb{K}$, называется* ***векторным подпространством*** *пространства E.*

В произвольном векторном пространстве выполняются следующие свойства:

1) $\lambda\theta = \theta$; 2) $0 \cdot x = \theta$; 3) $(-1)x = -x$.

5.2. Нормированные векторные пространства.

Понятие абсолютного значения распространяется на векторные пространства над нормированным полем $\mathbb{K}$.

Определение. *Нормой в векторном пространстве E называется отображение*

$$E \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \|x\|, \quad \mathbb{R}^+ = (a \in \mathbb{R} : 0 \leqslant a < +\infty),$$

удовлетворяющее следующим аксиомам:

1) $(\|x\| = 0) \Rightarrow (x = \theta)$;
2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall\, x \in E$;
3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \quad \forall\, x, y \in E$ (неравенство треугольника).

5.3. Евклидово пространство.

Определение 1. *Пусть E — векторное пространство над полем $\mathbb{R}$. Отображение $E \times E \to \mathbb{R} : \varphi(x, y) = (x, y)$, которое каждым двум элементам x и y из E ставит в соответствие действительное число, обозначаемое символом (x, y), называется* ***скалярным произведением***, *если $\forall\, x, y, z \in E$ и $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ выполняются следующие аксиомы:*

1) $(x, y) = (y, x)$;
2) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;
3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;
4) $(x, x) \geqslant 0 \wedge ((x, x) = 0) \Leftrightarrow (x = \theta)$.

Определение 2. *Векторное пространство, в котором определено скалярное произведение, называется* ***евклидовым пространством***.

5.4. Метрическое пространство.

Определение. *Множество $E = \{x, y, z, \ldots\}$ называется* ***метрическим пространством***, *если определено отображение $E \times E \to \mathbb{R}^+ : (x, y) \mapsto \rho(x, y)$, которое для любых x и y ставит в соответствие неотрицательное действительное число ρ, удовлетворяющее следующим аксиомам:*

1) $(\rho(x, y) = 0) \Rightarrow (x = y)$;
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x) \ \forall\, x, y \in E$ *(аксиома симметрии)*;
3) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y) \ \forall\, x, y, z \in E$ *(неравенство треугольника)*.

Элементы метрического пространства называются *точками*, а число $\rho(x, y)$ называется ***расстоянием*** между точками x и y или ***метрикой*** пространства E.

Всякая часть F метрического пространства E, в которой определено отображение $F \times F \to \mathbb{R}^+$, являющееся сужением отображения $E \times E \to \mathbb{R}^+ : (x, y) \mapsto \rho(x, y)$, называется ***метрическим подпространством***, а определенная в нем метрика — ***индуцированной метрикой***. Метрическое подпространство само является метрическим пространством.

5.5. Окрестности.

Определение 1. ***Открытым (замкнутым) шаром*** *с центром в точке x_0 и радиусом r в метрическом пространстве E называется множество*

$$\{x \in E : \rho(x, x_0) < r\} \quad (\{x \in E : \rho(x, x_0) \leqslant r\}).$$

Открытый (замкнутый) шар обозначается $S(x_0, r)$ $(\bar{S}(x_0, r))$.

Аналогично определяется открытый (замкнутый) шар в векторном нормированном пространстве.

Определение 2. ***Открытым (замкнутым) шаром*** *с центром в точке x_0 и радиусом r в векторном нормированном пространстве E называется множество*

$$\{\mathbf{x} \in E : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r\} \quad (\{\mathbf{x} \in E : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leqslant r\}).$$

Определение 3. *Открытый шар с центром в точке x_0 и радиусом δ называется δ-окрестностью точки x_0.*

На действительной прямой $\mathbb{R}$ открытый (соответственно замкнутый) шар радиуса δ есть интервал $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ (соответственно сегмент $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$).

56. Пусть $\mathbb{R}^m$ — множество всевозможных упорядоченных систем m действительных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Пусть в множестве $\mathbb{R}^m$ определены: внутренняя бинарная операция $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, которая для любых двух элементов $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ и $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$ множества $\mathbb{R}^m$ ставит в соответствие элемент

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_m + y_m),$$

называемый суммой $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$; внешняя бинарная операция $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, которая для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ и любого $\lambda \in \mathbb{R}$ ставит в соответствие элемент

$$\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_m),$$

называемый *произведением* λ на $\mathbf{x}$.

Показать, что $\mathbb{R}^m$ — векторное пространство над полем $\mathbb{R}$.

◀ Сначала покажем, что множество $\mathbb{R}^m$ является аддитивной абелевой группой. Действительно, для произвольных $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$ и $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_m)$ в силу ассоциативности действительных чисел, имеем

$$\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (x_1 + (y_1 + z_1), \ldots, x_m + (y_m + z_m)) =$$
$$= ((x_1 + y_1) + z_1, \ldots, (x_m + y_m) + z_m) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}.$$

Обозначим $\theta = \mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$, тогда $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ выполняется равенство $\mathbf{x} + \mathbf{0} = (x_1 + 0, \ldots, x_m + 0) = (x_1, \ldots, x_m) = \mathbf{x}$. Для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ положим $-\mathbf{x} = (-x_1, \ldots, -x_m)$, тогда $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = (x_1 - x_1, \ldots, x_m - x_m) = (0, \ldots, 0) = \mathbf{0}$. Наконец, в силу коммутативности сложения действительных чисел

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_m + y_m) = (y_1 + x_1, \ldots, y_m + x_m) = (y_1, \ldots, y_m) + (x_1, \ldots, x_m) = \mathbf{y} + \mathbf{x}.$$

Следовательно, все четыре аксиомы абелевой группы выполнены.

Далее, из определений внешней и внутренней бинарных операций и свойств действительных чисел непосредственно следуют равенства:

$$\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda(x_1 + y_1, \ldots, x_m + y_m) = (\lambda(x_1 + y_1), \ldots, \lambda(x_m + y_m)) =$$
$$= (\lambda x_1 + \lambda y_1, \ldots, \lambda x_m + \lambda y_m) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_m) + (\lambda y_1, \ldots, \lambda y_m) =$$
$$= \lambda(x_1, \ldots, x_m) + \lambda(y_1, \ldots, y_m) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y},$$

$$(\lambda + \mu)\mathbf{x} = (\lambda + \mu)(x_1, \ldots, x_m) = ((\lambda + \mu)x_1, \ldots, (\lambda + \mu)x_m) =$$
$$= (\lambda x_1 + \mu x_1, \ldots, \lambda x_m + \mu x_m) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_m) + (\mu x_1, \ldots, \mu x_m) =$$
$$= \lambda(x_1, \ldots, x_m) + \mu(x_1, \ldots, x_m) = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x},$$

$$(\lambda\mu)\mathbf{x} = ((\lambda\mu)x_1, \ldots, (\lambda\mu)x_m) = (\lambda(\mu x_1), \ldots, \lambda(\mu x_m)) = \lambda(\mu x_1, \ldots, \mu x_m) = \lambda(\mu\mathbf{x}),$$
$$1 \cdot \mathbf{x} = (1 \cdot x_1, \ldots, 1 \cdot x_m) = (x_1, \ldots, x_m) = \mathbf{x},$$

для произвольных $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из $\mathbb{R}^m$ и любых λ и μ из $\mathbb{R}$. Таким образом, аксиомы, определяющие векторное пространство, выполнены, а поэтому $\mathbb{R}^m$ является векторным пространством над полем $\mathbb{R}$. ▶

57. Пусть $\mathfrak{M}$ — множество всевозможных прямоугольных матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}),$$

где $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Суммой матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ назовем матрицу

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \ldots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \ldots & a_{2n} + b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \ldots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

а произведением матрицы A на число $\lambda \in \mathbb{R}$ — матрицу

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Показать, что $\mathfrak{M}$ — векторное пространство над полем $\mathbb{R}$.

◀ Множество $\mathfrak{M}$ матриц $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$ можно отождествить с пространством $\mathbb{R}^{mn}$ векторов $\mathbf{x} = (a_{11}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{m1}, \dots, a_{mn})$ при помощи взаимно однозначного соответствия $(a_{ij}) \leftrightarrow (a_{11}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{m1}, \dots, a_{mn})$. При этом для любых $(a_{ij}) \in \mathfrak{M}$, $(b_{ij}) \in \mathfrak{M}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) \leftrightarrow (a_{11} + b_{11}, \dots, a_{1n} + b_{1n}, \dots, a_{m1} + b_{m1}, \dots, a_{mn} + b_{mn}),$$
$$\lambda(a_{ij}) \leftrightarrow (\lambda a_{11}, \dots, \lambda a_{1n}, \dots, \lambda a_{m1}, \dots, \lambda a_{mn})$$

(т. е. пространство $\mathfrak{M}$ изоморфно пространству $\mathbb{R}^{mn}$ относительно сложения элементов из $\mathfrak{M}$ и умножения на скаляры поля $\mathbb{R}$). Таким образом, $\mathfrak{M}$ — векторное пространство над полем $\mathbb{R}$. ▶

58. Доказать, что пространство $\mathbb{R}^m$ превращается в нормированное векторное пространство, если для произвольного $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, положим

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2}. \tag{1}$$

◀ Для доказательства достаточно проверить выполнение аксиом 1)—3) пункта 5.2.

1) Очевидно, $\|\mathbf{x}\| > 0$ и $(\|\mathbf{x}\| = 0) \Leftrightarrow (\mathbf{x} = 0)$.

2) Для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ и $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ имеем

$$\|\lambda \mathbf{x}\| = \sqrt{(\lambda x_1)^2 + (\lambda x_2)^2 + \dots + (\lambda x_m)^2} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2} = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|.$$

3) Покажем, что для любых $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|. \tag{2}$$

Записывая неравенство (2) в координатной форме

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i + y_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{m} y_i^2}$$

и возводя обе части в квадрат, после упрощения получаем неравенство

$$\sum_{i=1}^{m} x_i y_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{m} y_i^2}, \tag{3}$$

эквивалентное неравенству (2). Неравенство (3) называется *неравенством Коши—Буняковского*; его справедливость уже доказана (см. пример 43). Следовательно, равенство (1) задает норму в $\mathbb{R}^m$. ▶

59. Доказать, что векторное пространство $\mathfrak{M}$, элементами которого являются матрицы размера $m \times n$, является векторным нормированным пространством, если для произвольной матрицы $A = (a_{ij})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, положить

$$\|A\| = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|. \tag{1}$$

◀ Выполнение первой аксиомы нормы очевидно. Далее $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ и $\forall A \in \mathfrak{M}$ имеем

$$\|\lambda A\| = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |\lambda a_{ij}| = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |\lambda||a_{ij}| = |\lambda| \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = |\lambda| \cdot \|A\|,$$

т. е. вторая аксиома также выполняется.

Остается проверить выполнение неравенства треугольника. Пусть $A,\ B \in \mathfrak{M}$ — произвольно заданные матрицы размера $m \times n$, тогда

$$\|A+B\| = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}+b_{ij}| \leqslant \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(|a_{ij}|+|b_{ij}|) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}| = \|A\|+\|B\|.$$

Таким образом, все аксиомы нормы выполняются, а поэтому равенство (1) задает норму в $\mathfrak{M}$, превращая его в векторное нормированное пространство над полем $\mathbb{R}$. ►

60. Пусть C множество всевозможных ограниченных функций $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$.

Показать, что множество C становится векторным нормированным пространством над полем $\mathbb{R}$, если для произвольной функции f положить

$$\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|. \tag{1}$$

◄ Легко убедиться, что C является векторным пространством над полем $\mathbb{R}$, если равенство

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x), \qquad x \in [a,\ b]$$

определяет сложение в C, а

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

— умножение на скаляр поля $\mathbb{R}$.

Остается проверить, что для числа $\|f\|$, определенного формулой (1), выполняются все аксиомы метрики.

1) Поскольку $|f(x)| \geqslant 0$, то $\|f\| = \sup|f(x)| \geqslant 0$; кроме того, $\|f\| = 0$ тогда и только тогда, когда $|f(x)| = 0$, т. е. когда $f : [a,\ b] \to 0$, а такое отображение является нулевым элементом векторного пространства C.

2) Для произвольной функции $f \in C$ и любого $\lambda \in \mathbb{R}$ имеем

$$\|\lambda f\| = \sup_{x\in[a,b]} |\lambda f(x)| = \sup_{x\in[a,b]} |\lambda||f(x)| = |\lambda| \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| = |\lambda|\|f\|.$$

3) Из неравенства треугольника для абсолютного значения и свойств точной верхней грани следует неравенство

$$|f(x)+g(x)| \leqslant |f(x)|+|g(x)| \leqslant \sup_{x\in[a,b]}|f(x)| + \sup_{x\in[a,b]}|g(x)| = \|f\|+\|g\| \quad \forall\ f,\ g \in C,\ \forall\ x \in [a,\ b].$$

Поскольку множество $\{|f(x)+g(x)|\}$, $x \in [a,\ b]$, ограничено числом $\|f\|+\|g\|$, то точная верхняя грань этого множества, которая, согласно равенству (1), равна $\|f+g\|$, также ограничена этим же числом. Следовательно,

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x)+g(x)| = \|f+g\| \leqslant \|f\|+\|g\|,$$

что и завершает проверку аксиом метрики. ►

61. Показать, что для произвольного векторного нормированного пространства $E = \{x,\ y,\ z,\ \ldots\}$ справедливо неравенство

$$|\,\|x\|-\|y\|\,| \leqslant \|x-y\|. \tag{1}$$

◄ Согласно неравенству треугольника,

$$\|x\| = \|(x-y)+y\| \leqslant \|x-y\|+\|y\|,$$

откуда

$$\|x\|-\|y\| \leqslant \|x-y\|. \tag{2}$$

Меняя местами x и y, имеем

$$\|y\|-\|x\| \leqslant \|y-x\| = \|(-1)(x-y)\| = |-1|\cdot\|x-y\| = \|x-y\|$$

или

$$-\|x-y\| \leqslant \|x\|-\|y\|. \tag{3}$$

Из (2) и (3) непосредственно следует (1). ►

62. Доказать, что векторное пространство $\mathfrak{M}$ (см. пример 59) становится евклидовым пространством, если для произвольных двух элементов $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ положить

$$(A, B) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}.$$

◀ Для доказательства достаточно проверить, что (A, B), определяемое равенством (1), удовлетворяет четырем аксиомам скалярного произведения (см. п. 5.3). Выполнение трех первых аксиом непосредственно следует из определения числа (A, B):

1) $(A, B) = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}a_{ij} = (B, A)$;

2) для произвольных матриц $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ и $C = (c_{ij})$ имеем

$$(A+B, C) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij})c_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{ij} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}c_{ij} = (A, C) + (B, C).$$

3) пусть $\forall\, A \in \mathfrak{M}$ и $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, тогда

$$(\lambda A, B) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \lambda a_{ij}b_{ij} = \lambda\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} = \lambda(A, B);$$

4) для любой матрицы $A \in \mathfrak{M}$ находим

$$(A, A) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2,$$

откуда следует, что $(A, A) \geqslant 0$ и $(A, A) = 0$ тогда и только тогда, когда все элементы матрицы A равны нулю, т. е. когда $A = \theta$, где θ — нулевой элемент векторного пространства $\mathfrak{M}$. Следовательно, выполняются все аксиомы скалярного произведения, т. е. равенство (1) задает скалярное произведение в векторном пространстве $\mathfrak{M}$, поэтому $\mathfrak{M}$ — евклидово пространство. ▶

63. Показать, что нормированное векторное пространство $E = \{x, y, z, \dots\}$ становится метрическим, если для любых элементов x и y из E положить

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

◀ Покажем, что выполняются аксиомы метрики (см. п. 5.4). Действительно, из свойств нормы вытекает, что:

1) $\rho(x, y) = \|x - y\| \geqslant 0$, причем $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x - y = \theta$, т. е. $x = y$;

2) $\rho(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1| \cdot \|y - x\| = \|y - x\| = \rho(y, x)$;

3) $\rho(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leqslant \|x - z\| + \|z - y\| = \rho(x, z) + \rho(z, y)\ \ \forall\, x, y, z \in E$.

Следовательно, все аксиомы метрики выполняются, поэтому E — метрическое пространство. ▶

Упражнения для самостоятельной работы

52. Доказать, что множество $\mathcal{C}\{f, g, h, \dots\}$ всевозможных отображений множества E в векторное пространство F над полем $\mathbb{K}$ само является векторным пространством над тем же полем $\mathbb{K}$.

53. Показать, что множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ образует векторное пространство над полем действительных чисел $\mathbb{R}$.

54. Показать, что векторное пространство $\mathbb{R}^m$ становится нормированным, если для любого элемента $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ норму $\|\mathbf{x}\|$ введем одним из следующих равенств:

а) $\|\mathbf{x}\| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_m|$ (октаэдрическая норма);

б) $\|\mathbf{x}\| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i|$ (кубическая норма).

55. Какие из равенств

а) $\|\mathbf{x}\| = \sum\limits_{k=1}^{m} k \cdot |x_k|$; б) $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i x_i^2}$, $\alpha > 0$, $i = \overline{1, m}$;

в) $\|\mathbf{x}\| = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_{m-1}|$; г) $\|\mathbf{x}\| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} \alpha_i |x_i|$, $\alpha_i > 0$; д) $\|\mathbf{x}\| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m-1} |x_i|$

задают норму в векторном пространстве $\mathbb{R}^m$?

56. Показать, что в векторном пространстве $\mathfrak{M}$, элементами которого являются матрицы $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$, норму $\|A\|$ можно ввести одним из следующих равенств:

а) $\|A\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$; б) $\|A\| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$; в) $\|A\| = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum\limits_{i=1}^{m} |a_{ij}|$; г) $\|A\| = \max\limits_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} |a_{ij}|$.

57. Пусть $\mathfrak{M}$ то же, что и в предыдущем примере. Указать, какие из равенств

а) $\|A\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij} a_{ij}^2}$, $\alpha_{ij} > 0$; б) $\|A\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m-1} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$;

в) $\|A\| = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij} |a_{ij}|$, $\alpha_{ij} > 0$; г) $\|A\| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} \alpha_{ij} |a_{ij}|$, $\alpha_{ij} > 0$;

д) $\|A\| = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \alpha_{ij} |a_{ij}|$, $\alpha_{ij} < 0$; е) $\|A\| = \max\limits_{2 \leqslant i \leqslant m} \alpha_{ij} |a_{ij}|$, $\alpha_{ij} > 0$, $m > 2$

задают норму в пространстве $\mathfrak{M}$.

58. Исходя из определения метрики, доказать, что в пространстве $\mathbb{R}^m$ расстояние между произвольными точками $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ можно определить одним из равенств:

а) $\rho(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2}$; б) $\rho(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{m} |x_i - y_i|$;

в) $\rho(x, y) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i - y_i|$; г) $\rho(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i (x_i - y_i)^2}$, $\alpha_i > 0$;

д) $\rho(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i |x_i - y_i|$, $\alpha_i > 0$; е) $\rho(x, y) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} (\alpha_i |x_i - y_i|)$, $\alpha_i > 0$.

59. Непосредственной проверкой аксиом метрики показать, что в пространстве $\mathfrak{M}$, элементами которого являются матрицы размера $m \times n$, расстояние между произвольными точками (матрицами)

$$A = (a_{ij}) \quad \text{и} \quad B = (b_{ij})$$

можно ввести одним из равенств:

а) $\rho(A, B) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} (a_{ij} - b_{ij})^2}$; б) $\rho(A, B) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij} - b_{ij}|$;

в) $\rho(A, B) = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum\limits_{i=1}^{m} |a_{ij} - b_{ij}|$; г) $\rho(A, B) = \max\limits_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} |a_{ij} - b_{ij}|$.

60. Пусть E — метрическое пространство с метрикой $\rho : E \times E \to \mathbb{R}^+$.

Показать, что если, кроме того, E и векторное пространство, то оно является нормированным пространством с нормой $\|x\| = \rho(x, \theta)$, где x — произвольный, а θ — нулевой элементы пространства E.

61. Изобразить множество точек, которое является замкнутым (открытым) шаром в метрическом пространстве $\mathbb{R}^2$, если метрика ρ определена одним из следующих равенств:

а) $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$; б) $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$;

в) $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant 2} |x_i - y_i|$; г) $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\frac{(x_1 - y_1)^2}{4} + \frac{(x_2 - y_2)^2}{9}}$;

д) $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{|x_1 - y_1|}{2} + \frac{|x_2 - y_2|}{3}$; е) $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\left\{\frac{|x_1 - y_1|}{2}, \frac{|x_2 - y_2|}{3}\right\}$.

§ 6. Предел последовательности

6.1. Понятие последовательности.

Определение. *Последовательностью элементов множества E называется отображение*

$$\mathbb{N} \to E : n \mapsto x_n,$$

т. е. функция, которая каждому натуральному числу $n \in \mathbb{N}$ ставит в соответствие элемент $x_n \in E$.

Для записи последовательности употребляем обозначения (x_n), или $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, или $x_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ называются *членами последовательности*, а x_n — *общим членом последовательности*.

Множество E может быть различным, например: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^m$, $C[a, b]$, $\mathfrak{M}$ и т. д. Если $E = \mathbb{R}$, то последовательность называется *числовой*, если $E = \mathbb{R}^m$, — *векторной*, если $E = C[a, b]$, — *функциональной*, если $E = \mathfrak{M}$, — *матричной* и т. д. В каждом из этих случаев множество всевозможных последовательностей образует векторное нормированное, а следовательно, и метрическое пространство.

6.2. Сходящиеся последовательности и их свойства.

Сначала рассмотрим числовые последовательности.

Определение. *Последовательность (x_n) действительных чисел называется сходящейся, если существует действительное число a и для произвольного $\varepsilon > 0$ существует натуральное число m такое, что для всех $n > m$ справедливо неравенство*

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

При этом число a называют *пределом последовательности* (x_n), что символически записывают

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{или} \quad x_n \to a \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

С помощью логических символов определение запишется следующим образом: *числовая последовательность (x_n) называется сходящейся, если*

$$\exists a \in \mathbb{R} \wedge \forall \varepsilon > 0 \, \exists m \in \mathbb{N} : \forall n > m \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Если последовательность не является сходящейся, то ее называют *расходящейся*.

Теорема. *Если последовательности (x_n) и (y_n) действительных чисел сходятся и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b, \quad \lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab,$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} \quad (y_n \neq 0 \;\forall\, n \in \mathbb{N},\; b \neq 0).$$

6.3. Признаки существования предела.

1. Если $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n \;\forall n > n_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.
2. Монотонная и ограниченная последовательность имеет предел.
3. Числовая последовательность (x_n) имеет конечный предел тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists m \in \mathbb{N} : \forall\, n > m \wedge \forall\, p \in \mathbb{N} \Rightarrow |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$$

(критерий Коши).

6.4. Число e.

Последовательность $n \mapsto \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, имеет конечный предел, называемый числом e:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}718\ 281\ 828\ 459\ 045\ \ldots$$

6.5. Предел в несобственном смысле.

Определение 1. *Δ-окрестностью "точки $+\infty$" ("точки $-\infty$") называется множество точек $\mathbb{R}$, удовлетворяющих неравенству*

$$\Delta < x < +\infty \quad (-\infty < x < -\Delta);$$

Δ-окрестностью "точки ∞" называется множество точек $\mathbb{R}$, не принадлежащих сегменту $[-\Delta, \Delta]$.

Определение 2. *Числовая последовательность (x_n) имеет предел $+\infty$ $(-\infty)$, или стремится к $+\infty$ $(-\infty)$, если*

$$\forall\, \Delta > 0\ \exists m \in \mathbb{N} : \forall n > m \Rightarrow x_n > \Delta$$
$$(\forall\, \Delta > 0\ \exists m \in \mathbb{N} : \forall n > m \Rightarrow x_n < -\Delta).$$

Числовая последовательность (x_n) имеет предел ∞, если $\forall\, \Delta > 0\ \exists\, m \in \mathbb{N} : \forall n > m \Rightarrow |x_n| > \Delta$.

6.6. Частичные пределы. Верхний и нижний пределы.

Определение 1. *Если частичная последовательность (x_{n_k}) сходится, то ее предел называется частичным пределом последовательности (x_n).*

Определение 2. *Число $a \in \overline{\mathbb{R}}$ называется предельной точкой числовой последовательности (x_n), если любая ее окрестность содержит бесконечное число членов последовательности.*

Частичный предел последовательности является одновременно и ее предельной точкой.

Определение 3. *Наибольший (наименьший) частичный предел числовой последовательности (x_n) называется ее верхним (нижним) пределом и обозначается символом*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \quad (\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n).$$

Теорема. Любая числовая последовательность имеет верхний и нижний пределы.

6.7. Сходящиеся последовательности в метрическом пространстве.

Определение. *Последовательность (x_n) элементов метрического пространства E называется сходящейся, если существуют элемент $a \in E$ и для любого $\varepsilon > 0$ натуральное число m такое, что $\forall\, n > m$ справедливо неравенство $\rho(x_n, a) < \varepsilon$.*

В этом определении натуральное число m можно заменить положительным действительным числом α, поскольку из неравенства $n > \alpha$ следует $n > [\alpha] = m$.

Если в $\mathbb{R}^m$ задана последовательность с членами $\mathbf{x}_n = (x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{mn})$, $n \in \mathbb{N}$, такая, что существует $\lim\limits_{x\to\infty} x_{in}$, $i = \overline{1, m}$, то эта последовательность сходится и справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = (\lim_{n\to\infty} x_{1n}, \lim_{n\to\infty} x_{2n}, \ldots, \lim_{n\to\infty} x_{mn}).$$

Аналогично, если в $\mathfrak{M}$ задана последовательность

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \ldots & a_{1n}^{(k)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}^{(k)} & a_{m2}^{(k)} & \ldots & a_{mn}^{(k)} \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N},$$

такая, что $\exists \lim\limits_{k\to\infty} a_{pq}^{(k)}$, $p = \overline{1, n}$, $q = \overline{1, m}$, то эта последовательность сходится и справедливо равенство

$$\lim_{k\to\infty} A_k = \begin{pmatrix} \lim\limits_{k\to\infty} a_{11}^{(k)} & \lim\limits_{k\to\infty} a_{12}^{(k)} & \ldots & \lim\limits_{k\to\infty} a_{1n}^{(k)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lim\limits_{k\to\infty} a_{m1}^{(k)} & \lim\limits_{k\to\infty} a_{m2}^{(k)} & \ldots & \lim\limits_{k\to\infty} a_{mn}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

64. Доказать, что последовательность $(x_n) = \left(\dfrac{2n+1}{n}\right)$ сходится к числу 2.

◀ Имеем $|x_n - 2| = \left|\frac{2n+1}{n} - 2\right| = \frac{1}{n}$. Для любого $\varepsilon > 0$ $\exists\, m \in \mathbb{N}$ такое, что $\frac{1}{m} < \varepsilon$ (см. пример 28). Тогда $\forall\, n > m$ справедливо неравенство $\frac{1}{n} < \varepsilon$ и, следовательно, $|x_n - 1| < \varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$. ▶

65. Доказать, что:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ при $|q| < 1$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$ при $|q| > 1$.

◀ а) Если $q = 0$, то равенство а) очевидно. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно и $0 < |q| < 1$. Тогда, пользуясь неравенством Бернулли, получим

$$\frac{1}{|q|^n} = \left(1 + \left(\frac{1}{|q|} - 1\right)\right)^n > 1 + n\left(\frac{1}{|q|} - 1\right) > n\left(\frac{1}{|q|} - 1\right).$$

Отсюда

$$|q|^n = |q^n| < \frac{|q|}{n(1-|q|)} < \varepsilon \quad \forall\, n > \frac{|q|}{\varepsilon(1-|q|)}.$$

б) Пусть $|q| > 1$ и $\Delta > 0$ — произвольно. Тогда из неравенства

$$|q|^n = (1 + (|q| - 1))^n > 1 + n(|q| - 1) > n(|q| - 1) > \Delta$$

находим, что

$$|q|^n > \Delta \quad \forall\, n > \frac{\Delta}{|q| - 1}. ▶$$

Найти следующие пределы:

66. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \ldots + \frac{2n-1}{2^n}\right)$.

◀ Положим $S_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \ldots + \frac{2n-1}{2^n}$. Тогда

$$S_n - \frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{2^2} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{5}{2^3} - \frac{3}{2^3}\right) + \ldots + \left(\frac{2n-1}{2^n} - \frac{2n-3}{2^n}\right) - \frac{2n-1}{2^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \frac{2n-1}{2^{n+1}},$$

$$S_n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^n}.$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + 2 - \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 3 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-2}} - 2\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 3.$$

Здесь воспользовались тем, что

$$\left|\frac{n}{2^n}\right| = \frac{n}{(1+1)^n} = \frac{n}{1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \ldots + 1} < \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{2}{n-1} < \varepsilon$$

для произвольного $\varepsilon > 0$, если $n > 1 + \frac{2}{\varepsilon}$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n} = 0$. ▶

67. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}\right)$.

◀ Заметим, что

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1. ▶$$

68. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\ldots\sqrt[2^n]{2})$.

◀ Так как $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\ldots\sqrt[2^n]{2}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}=2^{1-\frac{1}{2^n}}=\dfrac{2}{2^{\frac{1}{2^n}}}$ и при $n>2$

$$2=\left(2^{\frac{1}{2^n}}\right)^{2^n}=\left(1+\left(2^{\frac{1}{2^n}}-1\right)\right)^{2^n}>\left(1+\left(2^{\frac{1}{2^n}}-1\right)\right)^n=$$
$$=1+n\left(2^{\frac{1}{2^n}}-1\right)+\ldots+\left(2^{\frac{1}{2^n}}-1\right)^n>n\left(2^{\frac{1}{2^n}}-1\right),\quad \text{т. е. } 0<2^{\frac{1}{2^n}}-1<\frac{2}{n},$$

то $2^{\frac{1}{2^n}}\to 1$ при $n\to\infty$ и предел последовательности равен 2. ▶

Доказать следующие равенства:

69. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0.$

◀ Равенство следует из неравенства

$$0<\frac{2^n}{n!}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{3}\ldots\frac{2}{n}\leqslant 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}=\frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

и из того, что $\left(\frac{2}{3}\right)^n\to 0$ при $n\to\infty$ (см. пример 65). ▶

70. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0,\ a>1.$

◀ Пусть m — целое и $m\geqslant k$. Тогда

$$0<\frac{n^k}{a^n}\leqslant\frac{n^m}{a^n}=\left(\frac{n}{\sqrt[m]{a^n}}\right)^m=\left(\frac{n}{b^n}\right)^m,$$

где $b=\sqrt[m]{a}>1$. Но

$$0<\frac{n}{b^n}=\frac{n}{(1+(b-1))^n}=\frac{n}{1+n(b-1)+\frac{n(n-1)}{2}(b-1)^2+\ldots+(b-1)^n}<\frac{2n}{n(n-1)(b-1)^2}\to 0$$

при $n\to\infty$; тогда, применяя теорему о предельном переходе в произведении, получаем, что $\left(\frac{n}{b^n}\right)^m\to 0$ при $n\to\infty$, откуда следует требуемое. ▶

71. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0.$

◀ Равенство нулю предела следует из очевидного неравенства

$$0<\left|\frac{a^n}{n!}\right|=\frac{|a|}{1}\cdot\frac{|a|}{2}\ldots\frac{|a|}{m}\cdot\frac{|a|}{m+1}\ldots\frac{|a|}{n}<\frac{|a|^m}{m!}\left(\frac{|a|}{m+1}\right)^{n-m}<\varepsilon,$$

справедливого при любом $\varepsilon>0$ и $m+1>|a|$, если n достаточно велико. ▶

72. $\lim\limits_{n\to\infty}nq^n=0$, если $|q|<1$.

◀ Доказательство следует из того, что

$$|nq^n|=\frac{n}{\left|\frac{1}{q}\right|^n}=\frac{n}{b^n},\quad b>1\quad \text{(см. пример 70).} ▶$$

73. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1.$

◀ При $a=1$ равенство очевидно. Пусть $a>1$, тогда $\sqrt[n]{a}>1$ и (см. пример 40)

$$a=(1+(\sqrt[n]{a}-1))^n>1+n(\sqrt[n]{a}-1)>n(\sqrt[n]{a}-1),$$

откуда получаем, что $0<\sqrt[n]{a}-1<\frac{a}{n}<\varepsilon$ при $n>\frac{a}{\varepsilon}$ $(\varepsilon>0)$, т. е. $\sqrt[n]{a}\to 1$ при $n\to\infty$.

Если $0<a<1$, то $\frac{1}{a}>1$ и по доказанному $\sqrt[n]{\frac{1}{a}}\to 1$ при $n\to\infty$ Но тогда

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=1. ▶$$

74. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_a n}{n} = 0$, $a > 1$.

◄ Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{b^n} = 0$, $b > 1$ (см. решение примера 70), то $\frac{1}{b^n} < \frac{n}{b^n} < 1$ при достаточно большом n. Положим $b = a^\varepsilon$, где $a > 1$, а $\varepsilon > 0$ — произвольное. Тогда $\dfrac{1}{a^{\varepsilon n}} < \dfrac{n}{a^{\varepsilon n}} < 1$ или $1 < n < a^{\varepsilon n}$.

Логарифмируя последнее неравенство, имеем $0 < \log_a n < \varepsilon n$, откуда $0 < \dfrac{\log_a n}{n} < \varepsilon$ при достаточно большом n. Из последнего неравенства и следует утверждение. ►

75. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

◄ Из очевидного неравенства

$$n = (1 + (\sqrt[n]{n} - 1))^n = 1 + n(\sqrt[n]{n} - 1) + \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2 + \\ + \ldots + (\sqrt[n]{n} - 1)^n > \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2$$

следует, что $|\sqrt[n]{n} - 1| < \sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon$ при произвольном $\varepsilon > 0$ и при всех $n > 1 + 2\varepsilon^{-2}$. ►

76. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

◄ Покажем сначала, что

$$n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n.$$

Применим метод математической индукции. При $n = 1$ неравенство справедливо. Далее, если оно справедливо при n, то для $n+1$ имеем

$$(n+1)! = n!(n+1) > \left(\frac{n}{3}\right)^n (n+1) = \left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1} \cdot \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > \left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}.$$

Последнее неравенство справедливо, так как

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} = \\ = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) < \\ < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} < \\ < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots = 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3.$$

Существование и равенство нулю предела вытекает из неравенства

$$0 < \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3}\right)^n}} = \frac{3}{n} < \varepsilon,$$

справедливого для любого $\varepsilon > 0$ при всех $n > \frac{3}{\varepsilon}$. ►

77. Доказать, что последовательность (x_n), где

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

монотонно возрастает и ограничена сверху, а последовательность (y_n), где

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

монотонно убывает и ограничена снизу. Следовательно, они имеют общий предел:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

◀ Согласно неравенству примера 40, имеем

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\frac{n+1}{n}>\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\frac{n+1}{n}=1,$$

$$\frac{y_n}{y_{n-1}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n}\cdot\frac{n+1}{n}<\frac{1}{1+\frac{n}{n^2-1}}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{n^3+n^2-n-1}{n^3+n^2-n}<1,$$

т. е. $x_n \nearrow$, а $y_n \searrow$. Далее, $x_n<y_n$ и $0<y_n-x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{1}{n}<\frac{e}{n}\to 0$ при $n\to\infty$, откуда $(y_n-x_n)\to 0$ при $n\to\infty$.

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=e$. ▶

78. Доказать, что

$$0<e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{3}{n},\quad n\in\mathbb{N}.$$

При каких значениях показателя n выражение $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ будет отличаться от числа e меньше чем на 0,001?

◀ Согласно примеру 77, имеем $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>e$. Тогда

$$0<e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{1}{n}<\frac{e}{n}<\frac{3}{n}<\frac{1}{1000}\quad \text{при } n>3000.$$ ▶

79. Пусть (p_n) — произвольная последовательность чисел, стремящаяся к $+\infty$, и (q_n) — произвольная последовательность чисел, стремящаяся к $-\infty$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n}=e.$$

◀ Пусть (n_k) — произвольная последовательность целых чисел, стремящаяся к $+\infty$. Тогда из неравенства

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e\right|<\varepsilon\quad \text{при } n>N(\varepsilon),\ \varepsilon>0,$$

следует, что $\left|\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}-e\right|<\varepsilon$ при $n_k>N(\varepsilon)$, т. е. $\lim\limits_{n_k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}=e$.

Если произвольная числовая последовательность (p_k), $p_k>1$, стремится к $+\infty$, то существует такая последовательность целых чисел (n_k), что $n_k\leqslant p_k<n_k+1$ и $n_k\to+\infty$. Так как левая и правая части очевидного неравенства

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{1+\frac{1}{n_k+1}}<\left(1+\frac{1}{p_k}\right)^{p_k}<\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)$$

стремятся к e, то $\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_k}\right)^{p_k}=e$.

Если произвольная последовательность чисел (q_k), $-q_k>1$, стремится к $-\infty$, то, полагая $q_k=-\alpha_k$, получаем

$$\left(1+\frac{1}{q_k}\right)^{q_k}=\left(1-\frac{1}{\alpha_k}\right)^{-\alpha_k}=\left(1+\frac{1}{\alpha_k-1}\right)^{\alpha_k-1}\left(1+\frac{1}{\alpha_k-1}\right)\to e\quad \text{при } k\to\infty.$$ ▶

80. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)=e.$$

Вывести отсюда формулу

$$e=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n\cdot n!},$$

где $0 < \theta_n < 1$, и вычислить число e с точностью до 10^{-5}.

◀ Переходя к пределу в неравенстве

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \\ + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n_k} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 2\cdot 1}{n!}\frac{1}{n^n} > \\ > 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

при $n \to \infty$, получим неравенство

$$e \geqslant 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{k!} = y_k,$$

справедливое при любом k. Так как в множестве $\{y_k\}$ нет наибольшего элемента, то при $k = n$

$$y_n = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} < e,$$

т. е. знак равенства невозможен. Кроме того,

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} = y_n.$$

Таким образом, $x_n < y_n < e$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = e$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = e$.

Переходя к пределу в неравенстве

$$y_{m+n} - y_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{1}{(n+m)!} < \\ < \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots\right) = \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{n+2}{n+1} < \frac{1}{n\cdot n!}$$

при фиксированном n и $m \to \infty$, получаем

$$0 < e - y_n < \frac{1}{n\cdot n!}.$$

Обозначим $\theta_n = \frac{e-y_n}{\frac{1}{n\cdot n!}}$, $0 < \theta_n < 1$. Отсюда получаем требуемое.

Неравенство $0 < e - y_n < \frac{1}{n\cdot n!} < 10^{-5}$ справедливо при $n \geqslant 8$. Отсюда

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} \approx 2{,}71828. \ ▶$$

81. Доказать неравенство

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

◀ Левая часть неравенства справедлива при $n = 1$; далее, по индукции

$$(n+1)! = n!(n+1) > \left(\frac{n}{e}\right)^n (n+1) = \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \frac{(n+1)\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}} > \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1},$$

так как неравенство $(n+1)\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(\frac{n+1}{e}\right)^{-n-1} > 1$ эквивалентно неравенству $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$ (справедливость последнего следует из примера 77).

Правая часть неравенства следует из того, что (см. пример 42)

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n = e\left(\frac{n}{2}\right)^n \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)^n}{e\left(\frac{n}{2}\right)^n} = e\left(\frac{n}{2}\right)^n \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e} < e\left(\frac{n}{2}\right)^n. \ ▶$$

82. Доказать неравенства:

а) $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$, где n — любое натуральное число;

б) $1 + \alpha < e^{\alpha}$, где α — действительное число, отличное от нуля.

◀ а) Логарифмируя неравенство (см. пример 77)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

получаем $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \ln e = 1 < (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, откуда следует неравенство а).

б) Покажем сначала, что

$$\frac{r}{1+r} < \ln(1+r) < r, \tag{1}$$

где r — любое рациональное число, отличное от нуля и большее -1. Пусть $r=\frac{m}{n}>0$. Тогда, в силу неравенства а), получаем

$$\ln(1+r) = \ln\left(1+\frac{m}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n+1}\dots\frac{n+m}{n+m-1}\right) =$$
$$= \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) + \dots + \ln\left(1+\frac{1}{n+m-1}\right) <$$
$$< \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+m-1} < \frac{m}{n} = r,$$

$$\ln(1+r) > \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+m} > \frac{m}{n+m} = \frac{\frac{m}{n}}{1+\frac{m}{n}} = \frac{r}{1+r},$$

откуда следует неравенство (1) для $r>0$.

Если же $-1<r_1<0$, то, полагая $-r_1=r$, $0<r<1$, имеем

$$\ln(1+r_1) = \ln(1-r) = -\ln\frac{1}{1-r} = -\ln\left(1+\frac{r}{1-r}\right),$$

откуда $-\frac{r}{1-r} < \ln(1+r_1) < -r$, т. е. $\frac{r_1}{1+r_1} < \ln(1+r_1) < r_1$.

Пусть α — произвольное действительное число, большее -1, отличное от нуля. Тогда существует такое рациональное число r, что

$$\frac{r}{2} + \frac{r}{2+r} < \alpha < r$$

(например, любое рациональное число r, содержащееся между действительными числами α и $\sqrt{\alpha^2+4}+\alpha-2$). Тогда

$$\ln(1+\alpha) < \ln(1+r) = \ln\left(\frac{r+2}{2}\cdot\frac{2+2r}{2+r}\right) = \ln\left(1+\frac{r}{2+r}\right) + \ln\left(1+\frac{r}{2}\right) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2+r} < \alpha.$$

Следовательно, $\ln(1+\alpha) < \alpha$ ($\alpha>-1$, $\alpha\neq 0$) и $1+\alpha < e^\alpha$ ($\alpha>-1$, $\alpha\neq0$). Если $\alpha<-1$, то неравенство $1+\alpha<e^\alpha$ очевидно, поэтому неравенство $1+\alpha<e^\alpha$ справедливо при всех $\alpha\neq 0$ ▶

83. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right) = \ln a, \quad a>0,$$

где $\ln a$ есть логарифм числа a при основании $e = 2{,}718\dots$.

◀ Из неравенства $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$ находим, что $1 < n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right) < 1+\frac{1}{n-1}$, $n>1$, откуда

$$\lim_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right) = 1.$$

При $a>1$ имеем $y_n = n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right) = n\left(e^{\frac{\ln a}{n}}-1\right) = z_n\left(e^{\frac{1}{z_n}}-1\right)\ln a$, где $z_n=\frac{n}{\ln a}\to+\infty$ при $n\to\infty$. Обозначим $\alpha_n=[z_n]$ (целая часть), так что $\alpha_n \leqslant z_n < \alpha_n+1$ и $\frac{1}{\alpha_n+1} < \frac{1}{z_n} \leqslant \frac{1}{\alpha_n}$. Отсюда получаем неравенства

$$\ln a\cdot\alpha_n\left(e^{\frac{1}{\alpha_n+1}}-1\right) < y_n < \ln a\,(\alpha_n+1)\left(e^{\frac{1}{\alpha_n}}-1\right),$$

$$-\ln a\left(e^{\frac{1}{\alpha_n+1}}-1\right) + \ln a\,(\alpha_n+1)\left(e^{\frac{1}{\alpha_n+1}}-1\right) < y_n < \ln a\cdot\alpha_n\left(e^{\frac{1}{\alpha_n}}-1\right) + \ln a\left(e^{\frac{1}{\alpha_n}}-1\right).$$

Так как последовательность $\left(\alpha_n\left(e^{\frac{1}{\alpha_n}}-1\right)\right)$ является подпоследовательностью сходящейся последовательности $\left(n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)\right)$, то

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n\left(e^{\frac{1}{\alpha_n}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)=1.$$

Применяя утверждение 1, п. 6.3, получаем

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}\left(\ln a\cdot\alpha_n\left(e^{\frac{1}{\alpha_n}}-1\right)+\ln a\left(e^{\frac{1}{\alpha_n}}-1\right)\right)=\ln a,\quad a>1.$$

Если же $0<\alpha<1$, то

$$y_n=n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)=n\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}}-1\right)=\frac{n\left(1-b^{\frac{1}{n}}\right)}{b^{\frac{1}{n}}}=-\frac{1}{b^{\frac{1}{n}}}\cdot n\left(b^{\frac{1}{n}}-1\right),$$

где $b=\frac{1}{a}>1$. А так как $b^{\frac{1}{n}}\to 1$ и $n\left(b^{\frac{1}{n}}-1\right)\to\ln b$ при $n\to\infty$, то

$$\lim_{n\to\infty}y_n=-\ln b=-\ln\frac{1}{a}=\ln a,\quad 0<a<1. \blacktriangleright$$

84. Пользуясь теоремой о существовании предела монотонной и ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности (x_n), где

$$x_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right).$$

◄ Имеем $\frac{x_{n+1}}{x_n}=1+\frac{1}{2^{n+1}}>1$, следовательно, последовательность возрастает.

Ограниченность следует из неравенств

$$\ln x_n=\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{4}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<$$
$$<\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}<\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1,\ x_n<e.$$

Таким образом, последовательность, согласно утверждению 2, п. 6.3, сходится. ►

Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость следующих последовательностей (x_n), где:

85 $x_n=\dfrac{\sin 1}{2}+\dfrac{\sin 2}{2^2}+\ldots+\dfrac{\sin n}{2^n},\ n\in\mathbb{N}.$

◄ Пусть $\forall\,\varepsilon>0$. Тогда

$$|x_{n+p}-x_n|=\left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}+\frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}}+\ldots+\frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{|\sin(n+1)|}{2^{n+1}}+\frac{|\sin(n+2)|}{2^{n+2}}+\ldots+\frac{|\sin(n+p)|}{2^{n+p}}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\ldots+\frac{1}{2^{n+p}}+\ldots=\frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^n}<\varepsilon$$

при $n>-\log_2\varepsilon$ и всех натуральных p. ►

86. $x_n=\dfrac{\cos 1!}{1\cdot 2}+\dfrac{\cos 2!}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{\cos n!}{n(n+1)},\ n\in\mathbb{N}.$

◄ Для произвольного $\varepsilon>0$ и при всех натуральных p имеем

$$|x_{n+p}-x_n|=\left|\frac{\cos(n+1)!}{(n+1)(n+2)}+\frac{\cos(n+2)!}{(n+2)(n+3)}+\ldots+\frac{\cos(n+p)!}{(n+p)(n+p+1)}\right|\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} =$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

$$\forall\, n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 = N(\varepsilon). \ ►$$

87. Последовательность (x_n) **имеет ограниченное изменение, если существует такое число** c, что

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \ldots + |x_n - x_{n-1}| < c, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказать, что последовательность с ограниченным изменением сходится.

Построить пример сходящейся последовательности, не имеющей ограниченного изменения

◄ Из условия вытекает, что последовательность (y_n), где

$$y_n = |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \ldots + |x_n - x_{n-1}|,$$

сходится (как ограниченная и монотонно возрастающая). Далее, так как (y_n) — сходящаяся последовательность, то

$$|x_{n+p} - x_n| = |x_{n+1} - x_n + x_{n-2} - x_{n-1} + \ldots + x_{n+p} - x_{n+p-1}| \leqslant$$
$$\leqslant |x_{n+1} - x_n| + |x_{n-2} - x_{n-1}| + \ldots + |x_{n+p} - x_{n+p-1}| = |y_{n+p} - y_n| < \varepsilon$$

при $n > N(\varepsilon)\ \forall p > 0$, т. е. последовательность (x_n) сходится.

Очевидно, последовательность

$$x_n = \frac{1 - (-1)^n}{2n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

сходится, однако она не имеет ограниченного изменения, так как при любом $A > 0$ неравенство

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \ldots + |x_{2n} - x_{2n-1}| = 1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \ldots + \frac{2}{2n-1} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} >$$

$$> \ln(1+1) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \ldots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \ldots \frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) > A$$

справедливо при $n > e^A - 1$. ►

88. Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость последовательностей (x_n), где:
а) $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$, $\quad n \in \mathbb{N}$; б) $x_n = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \ldots + \frac{1}{\ln n}$, $\quad n \in \mathbb{N}$.

◄ Пусть ε — произвольное число из интервала $]0, \frac{1}{2}[$.

а) Поскольку

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p} > \frac{p}{n+p},$$

а при $p = n$

$$|x_{n+p} - x_n| > \frac{1}{2} > \varepsilon$$

для всех n, то последовательность расходится.

б) Расходимость последовательности следует из того, что

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln(n+2)} + \ldots + \frac{1}{\ln(n+p)} > \frac{p}{\ln(n+p)} > \frac{p}{n+p} = \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad n = p. \ ►$$

89. Доказать, что сходящаяся последовательность достигает либо своей точной верхней грани, либо своей точной нижней грани, либо той и другой. Привести примеры последовательностей всех трех типов.

◄ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Предположим, что $x_n < a$ $(x_n > a)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Тогда существует наименьший (наибольший) элемент последовательности, который будет точной нижней (верхней) гранью. Если последовательность содержит элементы как меньшие a, так и бóльшие a или некоторые элементы, равные a, то во всех этих случаях последовательность имеет как наименьший, так и наибольший элементы, т. е. достигает своих точной нижней и точной верхней граней.

Приведем примеры последовательностей всех трех типов:

1) $(x_n) = \left(\frac{n-1}{n}\right)$, $x_1 = 0 = \inf\{x_n\}$; 2) $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$, $x_1 = 1 = \sup(x_n)$;

3) $(x_n) = \left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$, $x_1 = -1 = \inf\{x_n\}$, $x_2 = \frac{1}{2} = \sup\{x_n\}$. ►

Найти наибольший член последовательности (x_n), если

90. $x_n = \dfrac{n^2}{2^n}$.

◄ Условимся наибольший член последовательности (x_n) обозначать символом $\max x_n$. Из неравенства

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 < 1,$$

справедливого при $n > 2$, вытекает, что последовательность (x_n) монотонно убывает. Поэтому наибольший член содержится среди элементов x_1, x_2, x_3 Находим, что

$$\max x_n = x_3 = \frac{9}{8}. \text{ ►}$$

91. $x_n = \dfrac{1000^n}{n!}$.

◄ Так как $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1000}{n+1}$, то при $n > 999$ последовательность монотонно убывает, а при $n < 999$ — возрастает. Следовательно,

$$\max x_n = x_{1000} = \frac{1000^{1000}}{1000!} \approx 2{,}49 \cdot 10^{452}. \text{ ►}$$

Для последовательности (x_n) найти $\inf\{x_n\}$, $\sup\{x_n\}$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ и $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$, если:

92. $x_n = (-1)^{n-1}\left(2+\dfrac{3}{n}\right)$.

◄ Так как все элементы последовательности (x_n) содержатся в последовательностях $x_{2n-1} = 2 + \frac{3}{2n-1}$, $x_{2n} = -2 - \frac{3}{2n}$ и $x_{2n} < x_{2n-1}$, причем последовательность (x_{2n-1}) монотонно убывает, а последовательность (x_{2n}) возрастает, то

$$x_1 = \sup\{x_n\} = 5, \quad \varlimsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = 2,$$

$$x_2 = \inf\{x_n\} = -\frac{7}{2}, \quad \varliminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{2n} = -2. \text{ ►}$$

93. $x_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$.

◄ Имеем $x_{4n-2} < x_{2n-1} < x_{4n}$, причем (x_{4n-2}) убывает, а (x_{4n}) возрастает. Поэтому

$$\inf\{x_n\} = \varliminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{4n-2} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{4n-2}{4n-1}\right) = 0,$$

$$\sup(x_n) = \varlimsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{4n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4n}{4n+1}\right) = 2. \text{ ►}$$

Найти $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ и $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$, если:

94. $x_n = \dfrac{n^2}{1+n^2}\cos\dfrac{2\pi n}{3}$.

◄ Так как $x_{3n-2} < x_{3n-1} < x_{3n}$ и в последовательности (x_{3n-2}), (x_{3n-1}) и (x_{3n}) сходятся, то

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{3n-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{-(3n-2)^2}{2(1+(3n-2)^2)} = -\frac{1}{2},$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n)^2}{1+(3n)^2} = 1. \text{ ►}$$

95. $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n (-1)^n + \sin\frac{n\pi}{4}$.

◄ Выделяя из всех членов данной последовательности восемь подпоследовательностей

$$(x_{8n-j}),$$

легко убедиться, что наименьший и наибольший частичные пределы имеют соответственно подпоследовательности

$$x_{8n-3} = -\left(1+\frac{1}{8n-3}\right)^{8n-3} - \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_{8n-6} = \left(1+\frac{1}{8n-6}\right)^{8n-6} + 1.$$

Поэтому

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{8n-3} = \lim_{n\to\infty}\left(-\left(1+\frac{1}{8n-3}\right)^{8n-3} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -e - \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{8n-6} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{8n-6}\right)^{8n-6} + 1\right) = e + 1. \ ►$$

96. $x_n = \frac{n}{n+1}\sin^2\frac{n\pi}{4}$.

◄ Имеем $x_{4n} < x_{4n-3} < x_{4n-1} < x_{4n-2}$, откуда

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{4n} = 0, \quad \varlimsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{4n-2} = \lim_{n\to\infty}\frac{4n-2}{4n-1} = 1. \ ►$$

Найти частичные пределы:

97. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n}, \ldots$.

◄ Из членов данной последовательности составим две сходящиеся подпоследовательности: $\bar{x}_n = \frac{1}{2^n}$ и $\bar{\bar{x}}_n = \frac{2^n-1}{2^n}$. Их пределы $\lim\limits_{n\to\infty}\bar{x}_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\bar{\bar{x}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n} = 1$ будут частичными пределами.

Так как все другие сходящиеся подпоследовательности входят в состав этих двух, то других частичных пределов нет. ►

98. $1, \frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1+\frac{1}{3}, \frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1+\frac{1}{4}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \frac{1}{3}+\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}, \frac{1}{2}+\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots$.

◄ Члены данной последовательности составляют сходящиеся подпоследовательности $x_n = \frac{1}{n}$ и $x_{kn} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+n}$ $(k, n \in \mathbb{N})$, которые имеют соответственно пределы 0, $\frac{1}{k}$ $(k \in \mathbb{N})$. ►

99. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \ldots$.

◄ Очевидно, все рациональные числа r $(0 < r < 1)$ являются членами данной последовательности. Пусть α — любое действительное число такое, что $0 \leqslant \alpha < 1$; тогда при достаточно большом натуральном m неравенство

$$\alpha + \frac{1}{n+m} < 1$$

справедливо при всех $n \in \mathbb{N}$.

Для каждого натурального числа n среди членов данной последовательности найдется такое рациональное число r_n, что

$$\alpha < r_n < \alpha + \frac{1}{n+m}.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \alpha$, т. е. α — частичный предел. Аналогично рассматривается случай, если $0 < \alpha \leqslant 1$. ►

100. Построить числовую последовательность, имеющую в качестве своих частичных пределов данные числа

$$a_1, a_2, \ldots, a_p.$$

◀ Обозначим $x_{kn} = a_k + \frac{1}{n}$, $k = \overline{1, p}$, $n \in \mathbb{N}$. Так как последовательности x_{kn} сходятся к числам a_k, $k \in \mathbb{N}$, то искомой последовательностью может быть, например, последовательность

$$a_1 + 1,\ a_2 + 1, \ldots, a_p + 1,\ a_1 + \frac{1}{2},\ a_2 + \frac{1}{2}, \ldots, a_p + \frac{1}{2}, \ldots, a_1 + \frac{1}{n},\ a_2 + \frac{1}{n}, \ldots, a_p + \frac{1}{n}, \ldots,$$

составленная из членов последовательностей (x_{kn}), $k \in \mathbb{N}$. ▶

101. Построить числовую последовательность, для которой все члены данной последовательности

$$a_1,\ a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

являются ее частичными пределами. Какие еще частичные пределы обязательно имеет данная последовательность?

◀ Из членов последовательностей $x_n = a_n$, $x_{kn} = a_k + \frac{1}{n+k}$ $(n,\ k \in \mathbb{N})$ составим последовательность с членами

$$a_1,\ a_1 + \frac{1}{2},\ a_2,\ a_1 + \frac{1}{3},\ a_2 + \frac{1}{3},\ a_3,\ a_1 + \frac{1}{4},\ a_2 + \frac{1}{4},\ a_3 + \frac{1}{4},\ a_4, \ldots,$$

которая имеет своими частичными пределами: 1) пределы последовательностей (x_{kn}), т. е. члены последовательности (a_n) и 2) частичные пределы последовательности (a_n). ▶

102. Построить последовательность:

а) не имеющую конечных частичных пределов;

б) имеющую единственный конечный частичный предел, но не являющуюся сходящейся;

в) имеющую бесконечное множество частичных пределов;

г) имеющую в качестве своего частичного предела каждое действительное число.

◀ а) Например, $x_n = n$.

б) Пусть (x_n) — последовательность, стремящаяся к конечному пределу a, (y_n) — бесконечно большая последовательность; тогда последовательность $x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2, \ldots, x_n,\ y_n, \ldots$ является расходящейся и имеет единственный конечный частичный предел a.

в) Примеры 99 и 100.

г) Построим последовательность, содержащую все рациональные числа $\pm\frac{p}{q}$, где p и q — натуральные числа:

$$1,\ -1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ -\frac{3}{2},\ \frac{3}{1},\ -\frac{3}{1},\ \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n},\ -\frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ -\frac{2}{n}, \ldots$$
$$\ldots, \frac{n-1}{n},\ -\frac{n-1}{n},\ \frac{n}{n-1},\ -\frac{n}{n-1}, \ldots, \frac{n}{2},\ -\frac{n}{2},\ \frac{n}{1},\ -\frac{n}{1}, \ldots.$$

Тот факт, что любое действительное число является частичным пределом, доказывается аналогично решению примера 99. ▶

103. Доказать, что последовательности (x_n) и $(y_n) = \left(x_n \sqrt[n]{n}\right)$ имеют одни и те же частичные пределы.

◀ Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (см. пример 75), то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[p_n]{p_n} = 1$, где (p_n) — произвольная подпоследовательность ряда натуральных чисел.

Пусть α — частичный предел последовательности (x_n) и $\lim\limits_{n\to\infty} x_{p_n} = \alpha$. Тогда, применяя теорему о предельном переходе в произведении, находим

$$\lim_{n\to\infty} y_{p_n} = \lim_{n\to\infty} x_{p_n} \sqrt[p_n]{p_n} = \lim_{n\to\infty} x_{p_n} \lim_{n\to\infty} \sqrt[p_n]{p_n} = \alpha,$$

т. е. α — частичный предел последовательности (y_n).

Пусть теперь β — частичный предел последовательности (y_n) и $\lim\limits_{n\to\infty} y_{q_n} = \beta$. Поскольку $\sqrt[n]{n} > 0$, то определена подпоследовательность $(x_n) = \left(y_n n^{-\frac{1}{n}}\right)$, а следовательно, и подпоследовательность $(x_{q_n}) = \left(y_{q_n} (q_n)^{-\frac{1}{q_n}}\right)$, которая имеет своим пределом число β. ▶

104. Пусть последовательность (x_n) сходится, а последовательность (y_n) расходится. Что можно утверждать о сходимости последовательностей:

а) $(x_n + y_n)$; б) $(x_n y_n)$?

Привести соответствующие примеры (для случая б)).

◀ а) Последовательность $(x_n + y_n)$ расходится. Если бы она сходилась, то сходилась бы и разность последовательностей (x_n) и $(x_n + y_n)$. Но это невозможно в силу того, что $(x_n - (x_n + y_n)) = -(y_n)$ а (y_n) — расходится.

б) Последовательность может как сходиться, так и расходиться. Например:

1) последовательность $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ сходится, а последовательность $(y_n) = ((-1)^n)$ расходится, однако их произведение $(x_n y_n) = \left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ образует сходящуюся последовательность;

2) последовательность $(x_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)$ сходится, а $(y_n) = \left(\frac{(-1)^n n}{n+1}\right)$ расходится; их произведение $(x_n y_n) = \left(\frac{(-1)^n n^2}{(n+1)^2}\right)$ тоже расходится. ▶

105. Доказать, что:

а) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$;

б) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$.

Привести пример, когда в этих соотношениях имеют место строгие неравенства.

Замечание. Если из последовательности (x_n) выделить некоторую подпоследовательность (x_{k_n}), то

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} x_{k_n}.$$

◀ а) Поскольку нижний предел последовательности является ее предельной точкой, то

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty}(x_{r_n} + y_{r_n}), \quad \varliminf_{n\to\infty} x_{r_n} = \lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}}.$$

В силу замечания, имеем

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} x_{r_n} + \varliminf_{n\to\infty} y_{r_n} = \lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}} + \varliminf_{n\to\infty} y_{r_n} \leqslant \lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}} + \varliminf_{n\to\infty} y_{m_{r_n}}.$$

Далее, поскольку $(x_{m_{r_n}} + y_{m_{r_n}})$ является подпоследовательностью сходящейся последовательности $(x_{r_n} + y_{r_n})$, то

$$\lim_{n\to\infty}(x_{r_n} + y_{r_n}) = \lim_{n\to\infty}(x_{m_{r_n}} + y_{m_{r_n}}).$$

А так как, кроме того, последовательность $(x_{m_{r_n}})$ сходится, то и последовательность $(y_{m_{r_n}})$ также сходится, так что

$$\varliminf_{n\to\infty} y_{m_{r_n}} = \lim_{n\to\infty} y_{m_{r_n}},$$

и полученное неравенство можно переписать в виде

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n \leqslant \lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}} + \lim_{n\to\infty} y_{m_{r_n}} = \lim_{n\to\infty}(x_{m_{r_n}} + y_{m_{r_n}}) = \varliminf_{n\to\infty}(x_n + y_n).$$

Левая часть неравенства а) доказана. Учитывая это и тот факт, что

$$\varliminf_{n\to\infty}(-y_n) = -\varlimsup_{n\to\infty} y_n,$$

получаем

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) - \varlimsup_{n\to\infty} y_n = \varliminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) + \varliminf_{n\to\infty}(-y_n) \leqslant \varliminf_{n\to\infty}((x_n + y_n) + (-y_n)) = \varliminf_{n\to\infty} x_n.$$

Отсюда вытекает правая часть неравенства а).

Неравенство б) доказывается аналогично.

Построим пример, когда в данных соотношениях имеют место строгие неравенства. Пусть

$$x_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \sin^2 \frac{n\pi}{2}, \quad y_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cos^2 \frac{n\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда $x_n + y_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ и

$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -1$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} y_n = -1$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n = 1$, $\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n) = -1$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n) = 1$. ▶

106. Пусть $x_n \geqslant 0$ и $y_n \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$. Доказать:

а) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$;

б) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_ny_n) \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$.

Привести пример, когда в этих соотношениях имеют место строгие неравенства.

◀ Докажем случай а) (случай б) доказывается аналогично).

Если $x_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$, или $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, то соотношение а) очевидно. Остается рассмотреть случай, когда $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n > 0$. Тогда $x_n > 0$, начиная с некоторого номера.

Пользуясь замечанием в примере 105 и обозначениями

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_ny_n) = \lim_{n\to\infty}(x_{r_n}y_{r_n}), \quad \varliminf_{n\to\infty} x_{r_n} = \lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}},$$

имеем

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \cdot \varliminf_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} x_{r_n} \cdot \varliminf_{n\to\infty} y_{r_n} = \lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}} \cdot \varliminf_{n\to\infty} y_{r_n} \leqslant \lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}} \cdot \varliminf_{n\to\infty} y_{m_{r_n}}.$$

Поскольку $(x_{m_{r_n}} y_{m_{r_n}})$ — подпоследовательность сходящейся последовательности $(x_{r_n}y_{r_n})$, то

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_ny_n) = \lim_{n\to\infty}(x_{r_n}y_{r_n}) = \lim_{n\to\infty}(x_{m_{r_n}} y_{m_{r_n}}).$$

А так как подпоследовательность $(x_{m_{r_n}})$ сходится к отличному от нуля пределу, то подпоследовательность $(y_{m_{r_n}})$ также сходится, т. е. $\varliminf\limits_{n\to\infty} y_{m_{r_n}} = \lim\limits_{n\to\infty} y_{m_{r_n}}$. Следовательно,

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \cdot \varliminf_{n\to\infty} y_n \leqslant \lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}} \cdot \varliminf_{n\to\infty} y_{m_{r_n}} = \lim_{n\to\infty}(x_{m_{r_n}} y_{m_{r_n}}) = \varliminf_{n\to\infty}(x_ny_n).$$

Таким образом, левая часть неравенства а) доказана. Если $\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, то правая часть неравенства а) очевидна, ибо в таком случае $\varliminf\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, а поэтому $\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_ny_n) = 0$. Пусть $\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n > 0$. Тогда, согласно доказанному и тому, что $\varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n}$, получаем неравенство

$$\frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n} \cdot \varliminf_{n\to\infty}(x_ny_n) = \varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{y_n} \cdot \varliminf_{n\to\infty}(x_ny_n) \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{y_n}(x_ny_n)\right) = \varliminf_{n\to\infty} x_n,$$

из которого следует правая часть неравенства а).

Приведем пример, когда в данных соотношениях имеют место строгие неравенства. Пусть

$$x_n = 2 + (-1)^n, \quad y_n = 2 - (-1)^n + \frac{1}{2}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Тогда $x_ny_n = 3 + \frac{2+(-1)^n}{2} \cdot (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$,

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = 1,\ \varlimsup_{n\to\infty} x_n = 3,\ \varliminf_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{2},\ \varlimsup_{n\to\infty} y_n = \frac{7}{2},\ \varliminf_{n\to\infty}(x_ny_n) = \frac{3}{2},\ \varlimsup_{n\to\infty}(x_ny_n) = \frac{9}{2}. ▶$$

107. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ существует, то какова бы ни была последовательность (y_n), получим

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n.$$

◀ Имеем (см. пример 105)

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) \geqslant \varliminf_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n, \quad \varlimsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n.$$

Поскольку $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, то в предыдущих соотношениях возможен только знак равенства. ▶

108. Доказать, что если для некоторой последовательности (x_n), какова бы не была последовательность (y_n), имеет место по меньшей мере одно из равенств:

а) $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$ или б) $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_ny_n) = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$, $x_n \geqslant 0$,

то последовательность (x_n) — сходящаяся.

◀ Пусть условие а) выполнено, (y_n) — любая последовательность и $y_n = -x_n$. Тогда из условия а) следует

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}(-x_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n - \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n - x_n) = 0,$$

откуда $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ существует. При выполнении условия б) полагаем $y_n = -1$. Тогда из б) вытекает, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(-x_n) = -\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, или $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ и снова убеждаемся в существовании предела последовательности (x_n). ▶

109. Доказать, что если $x_n > 0$ и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{x_n} = 1,$$

то последовательность (x_n) — сходящаяся.

◀ Из условия примера и того, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n}$, вытекает, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, т. е. (x_n) — сходящаяся последовательность. ▶

110. Доказать, что если последовательность (x_n) ограничена и

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0,$$

то частичные пределы этой последовательности расположены всюду плотно между её нижним и верхним пределами:

$$l = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \quad \text{и} \quad L = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n,$$

т. е. любое число из отрезка $[l, L]$ является частичным пределом данной последовательности.

◀ Покажем, что любая точка a, принадлежащая интервалу $]l, L[$ является частичным пределом последовательности (x_n), т. е. покажем, что любая ε-окрестность точки a содержит бесконечное число элементов последовательности (x_n).

Пусть $\varepsilon > 0$ — такое произвольное фиксированное число, что ε-окрестности точек l, a и L не имеют общих точек. Согласно условию, существует такое число $N(\varepsilon)$, что $|x_{n+1} - x_n| < 2\varepsilon$ при $n > N(\varepsilon)$.

Поскольку l — частичный предел, то в ε-окрестности точки l найдется элемент x_{p_1}, с индексом p_1 бо́льшим, чем $N(\varepsilon)$. По той же причине в ε-окрестности точки L существует элемент x_{q_1} с индексом q_1 бо́льшим, чем p_1. А так как расстояние между соседними элементами при $n > N(\varepsilon)$ меньше 2ε, то среди натуральных чисел n, для которых $p_1 < n < q_1$, существует хотя бы одно такое число r_1, что элемент x_{r_1} принадлежит ε-окрестности точки a.

Далее, существует элемент x_{p_2} с индексом p_2 бо́льшим, чем q_1, и такой, что x_{p_2} принадлежит ε-окрестности точки l. Следовательно, среди номеров n, для которых $q_1 < n < q_2$, найдется такой номер r_2, что элемент x_{r_2} принадлежит ε-окрестности точки a. Продолжая этот процесс до бесконечности, убеждаемся в существовании бесконечного числа элементов последовательности (x_{r_n}), принадлежащих ε-окрестности точки a. Следовательно, a — предельная точка, а так как a — произвольная точка интервала $]l, L[$ то требуемое утверждение доказано. ▶

111. Пусть числовая последовательность (x_n) удовлетворяет условию $0 \leqslant x_{m+n} \leqslant x_m + x_n$, $m, n \in \mathbb{N}$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n}$ существует.

◀ Имеем $\;0 \leqslant x_n \leqslant x_1 + x_1 + \ldots + x_1 = nx_1, \quad 0 \leqslant \frac{x_n}{n} \leqslant x_1, \quad n = 2, 3, \ldots,$

следовательно, последовательность $\left(\frac{x_n}{n}\right)$ ограничена и существует конечная точная нижняя грань $\alpha = \inf\left\{\frac{x_n}{n}\right\}$. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное, тогда существует такой номер m, что $\alpha \leqslant \frac{x_m}{m} < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$.

Всякое целое число n может быть представлено в виде $n = qm + r$, где r равно одному из чисел: $0, 1, 2, \ldots, m-1$. Полагая для большего единообразия $x_0 = 0$, имеем

$$x_n = x_{qm+r} \leqslant x_m + x_m + \ldots + x_m + x_r = qx_m + x_r,$$

$$\frac{x_n}{n}=\frac{x_{qm+r}}{qm+r}\leqslant\frac{qx_m+x_r}{qm+r}=\frac{x_m}{m}\cdot\frac{qm}{qm+r}+\frac{x_r}{n},$$
$$\alpha\leqslant\frac{x_n}{n}<\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{qm}{qm+r}+\frac{x_r}{n}<\alpha+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{x_r}{n}.$$

Поскольку $0\leqslant r\leqslant m+1$, то x_r ограничено и существует такое число $N(\varepsilon)$, что при $n>N(\varepsilon)$

$$0\leqslant\frac{x_r}{n}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

А тогда $\alpha\leqslant\frac{x_n}{n}<\alpha+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\alpha+\varepsilon$ при $n>N(\varepsilon)$, так что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=\alpha$. ►

112. Доказать теорему Теплица: *пусть* 1) $P_{nk}\geqslant 0$; 2) $\sum\limits_{k=1}^{n}P_{nk}=1$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}P_{nk}=0$ *при каждом фиксированном* k; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. *Тогда последовательность с членами* $t_n=\sum\limits_{k=1}^{n}P_{nk}x_k$ *сходится и* $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=a$.

◄ Из условия 4) вытекает существование такого числа $N=N(\varepsilon)$, что неравенство

$$|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$$

выполняется для всех $n>N(\varepsilon)$; далее, из этого же условия вытекает существование такого числа $M>0$, что

$$|x_n|\leqslant M,\quad |x_n-a|\leqslant 2M$$

для всех n. Наконец, из условия 3) следует существование такого числа $n_0=n_0(\varepsilon)>N$, что

$$P_{nk}<\frac{\varepsilon}{4NM},\quad k=\overline{1,\,N},$$

для всех $n>n_0$.

Пользуясь этими неравенствами и условиями 1)—2) теоремы, получаем

$$\left|\sum_{k=1}^{n}P_{nk}x_k-a\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}P_{nk}x_k-\sum_{k=1}^{n}P_{nk}a\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}P_{nk}(x_k-a)\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}P_{nk}|x_k-a|=$$
$$=P_{n1}|x_1-a|+P_{n2}|x_2-a|+\ldots+P_{nN}|x_N-a|+P_{nN+1}|x_{N+1}-a|+\ldots+P_{nn}|x_n-a|\leqslant$$
$$\leqslant N\cdot\frac{\varepsilon}{4NM}\cdot 2M+\frac{\varepsilon}{2}(P_{nN+1}+\ldots+P_{nn})<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

для всех $n>n_0$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}P_{nk}x_k=a$. ►

113. а) Доказать что если последовательность (x_n) сходится, то последовательность средних арифметических (ξ_n), где

$$\xi_n=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n),$$

также сходится и $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

б) Доказать, что если последовательность (y_n) сходится и $y_n>0\ \forall n\in\mathbb{N}$, то последовательность средних гармонических

$$\gamma_n=\frac{n}{\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\ldots+\frac{1}{y_n}}$$

также сходится и $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

в) Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$, то

$$\lim_{n\to\infty}\gamma_n=+\infty\quad\text{и}\quad\lim_{n\to\infty}\xi_n=+\infty,$$

где γ_n — среднее гармоническое, а ξ_n — среднее арифметическое из чисел $y_1,\,y_2,\,\ldots,\,y_n$.

◀ а) Если положить $P_{nk} = \frac{1}{n}$ $(k = \overline{1, n};\ n \in \mathbb{N})$, то для P_{nk} и x_n будут выполнены все условия примера 112, причем $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} P_{nk} x_k = \xi_n$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

б) Пусть

$$P_{nk} = \frac{\frac{1}{y_k}}{\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \ldots + \frac{1}{y_n}} \quad (k = \overline{1, n}), \quad x_n = y_n.$$

Тогда все условия примера 112 будут выполнены, причем $t_n = \gamma_n$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

в) Покажем, что если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\gamma_n} = 0$. А это эквивалентно тому, что $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = +\infty$. Используя пример 112 и полагая

$$P_{nk} = \frac{1}{n} \quad (k = \overline{1, n}), \quad x_n = \frac{1}{y_n},$$

получаем, что $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} P_{nk} x_k = \frac{1}{\gamma_n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\gamma_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = 0$.

Утверждение, что $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = +\infty$, следует из неравенства (см. пример 42) $\gamma_n \leqslant \xi_n$ и из того, что $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = +\infty$. ▶

114. Доказать, что если последовательность (x_n) сходится и $x_n > 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

◀ Имеем (см. пример 42)

$$\gamma_n = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \xi_n.$$

А поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ (см. пример 113), то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} = \lim_{n\to\infty} x_n. \ ▶$$

115. Доказать, что если $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n > 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}},$$

предполагая, что предел, стоящий в правой части последнего равенства, существует.

◀ Доказательство следует из того, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x_3}{x_2} \ldots \frac{x_n}{x_{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}}$$

(см. пример 114). ▶

116. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

◀ Заметим, что

$$\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \sqrt[n]{x_n},$$

где $x_n = \frac{n^n}{n!}$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = e$, то на основании примера 115 получаем требуемое утверждение. ▶

117. Доказать теорему Штольца: *если*

а) $\forall n \in \mathbb{N}\ y_{n+1} > y_n$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$; в) *существует* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}.$$

◀ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a$ (a — конечное). Тогда если считать что $y_0=0$, $x_0=0$ и

$$P_{nk}=\frac{y_k-y_{k-1}}{y_n},\quad k=\overline{1,n},\quad X_n=\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}},$$

то получим выполнение условий теоремы Теплица (пример 112) для P_{nk} и X_n, причем $t_n=\frac{x_n}{y_n}$.

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}t_n=\lim\limits_{n\to\infty}X_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=+\infty$, то повторяем приведенные выше рассуждения для последовательности $\left(\frac{y_n}{x_n}\right)$, предварительно убедившись, что $x_{n+1}>x_n$, начиная с некоторого $n_0\in\mathbb{N}$, и $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$. ▶

118. Доказать, что если p — натуральное число, то:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}=\frac{1}{p+1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^p+2^p+\ldots n^p}{n^p}-\frac{n}{p+1}\right)=\frac{1}{2}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+3^p+\ldots+(2n+1)^p}{n^{p+1}}=\frac{2^p}{p+1}$.

◀ Для доказательства применим теорему Штольца (пример 117). Докажем пункт б) (пункты а) и в) доказываются аналогично).

б) Если положить $x_n=(p+1)(1^p+2^p+\ldots+n^p)-n^{p+1}$, $y_n=(p+1)n^p$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(p+1)(n+1)^p-(n+1)^{p+1}+n^{p+1}}{(p+1)((n+1)^p-n^p)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(p+1)\left(n^p+pn^{p-1}+\frac{p(p-1)}{2}n^{p-2}+\ldots+1\right)}{(p+1)\left(n^p+pn^{p-1}+\frac{p(p-1)}{2}n^{p-2}+\ldots+1-n^p\right)}+\right.$$

$$\left.+\frac{-n^{p+1}-(p+1)n^p-\frac{(p+1)p}{2}n^{p-1}-\ldots-1+n^{p+1}}{(p+1)\left(n^p+pn^{p-1}+\ldots+\frac{p(p-1)}{2}n^{p-2}+\ldots+1-n^p\right)}\right).$$

Соберем коэффициенты при одинаковых степенях n. Затем разделим числитель и знаменатель на n^{p-1} и обозначим через $o\left(\frac{1}{n}\right)$ сумму всех членов со степенями не выше -1; получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{p(p+1)}{2}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{p(p+1)+o\left(\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{2}.$$ ▶

119. Доказать, что последовательность (x_n), где

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n,$$

сходится. Таким образом, имеет место формула

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=C+\ln n+\varepsilon_n,$$

где $C=0{,}577216\ldots$ — так называемая постоянная Эйлера и $\varepsilon_n\to0$ при $n\to\infty$.

◀ Так как $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0$ (см. пример 82, а)), то последовательность (x_n) монотонно убывающая. Кроме того, она ограничена снизу:

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n>\ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln n=$$

$$=\ln\left(2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)=\ln\frac{n+1}{n}>\frac{1}{n+1}>0.$$

Поэтому существует конечный предел C, а тогда справедливо представление

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n=C+\varepsilon_n,$$

где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. ►

120. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)$.

◄ Пусть $z_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$. Тогда

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} = z_{2n}-z_n = \ln 2n + \varepsilon_{2n} - \ln n - \varepsilon_n = \ln 2 + (\varepsilon_{2n}-\varepsilon_n)$$

(см. пример 119) и

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right) = \ln 2. \ ►$$

121. Последовательность (x_n) определяется формулами

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_n = \frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2} \quad (n = 3, 4, \ldots).$$

Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

◄ Имеем

$$x_k - x_{k-1} = \frac{x_{k-1}+x_{k-2}}{2} - x_{k-1} = -\frac{x_{k-1}-x_{k-2}}{2}.$$

Подставляя эти выражения в очевидное равенство

$$x_n = x_1 + (x_2-x_1)+(x_3-x_2)+\ldots+(x_n-x_{n-1}),$$

получим, начиная со второго слагаемого, геометрическую прогрессию, сумма которой равна

$$x_n = a+(b-a)-\frac{b-a}{2}+\frac{b-a}{4}+\ldots+(-1)^n\frac{b-a}{2^{n-2}} = a+\frac{2(b-a)}{3}+\frac{b-a}{3}\cdot\frac{(-1)^n}{2^{n-2}},$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(a+\frac{2(b-a)}{3}+\frac{b-a}{3}\,\frac{(-1)^n}{2^{n-2}}\right) = \frac{a+2b}{3}. \ ►$$

122. Пусть (x_n) — последовательность чисел, определяемая следующей формулой:

$$x_0 > 0, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right), \quad n \in \mathbb{Z}_0.$$

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

◄ Поскольку $x_0 > 0$ и $x_n + \frac{1}{x_n} \geqslant 2$, то последовательность (x_n) ограничена снизу числом 1. А из неравенства $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right) \leqslant x_n$, справедливого для $x_n \geqslant 1$, вытекает, что данная последовательность монотонно убывает. Следовательно, существует конечный предел a, причем $a \geqslant 1$. Переходя к пределу в равенстве

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right),$$

находим, что $a = \frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$. Отсюда $a^2 = 1$ или $a = \pm 1$. Но так как $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n \geqslant 1$, то $a = 1$. ►

123. Доказать, что последовательности (x_n) и (y_n), определяющиеся формулами

$$x_1 = a, \quad y_1 = b, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2},$$

имеют общий предел $\mu(a, b) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ (*арифметико-геометрическое среднее* чисел a и b).

◄ Из условия примера следует, что $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n \geqslant 0,\ y_n \geqslant 0$. Используя известное неравенство

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}, \quad a \geqslant 0, \quad b \geqslant 0,$$

получаем

$$y_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2} \geqslant \sqrt{x_n y_n} = x_{n+1}.$$

А так как $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \geqslant \sqrt{x_n^2} = x_n$, $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \leqslant y_n$, то, ввиду того что $x_n \leqslant y_n \leqslant y_1$, $y_n \geqslant x_n \geqslant x_1$, последовательности (x_n) и (y_n), в силу утверждения 2, п. 6.3, имеют конечные пределы A и B соответственно. Переходя к пределу в равенстве

$$y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2},$$

получаем, что $A = B$. Общее значение этих пределов называется *средним арифметико-геометрическим* и обозначается символом $\mu(a, b)$. ▶

Найти пределы:

124. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

◀ Поскольку

$$1 - \frac{1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}, \quad k = \overline{2,\ n},$$

то, записывая произведения в виде

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1\cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2\cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3\cdot 5}{4^2} \ldots \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n},$$

находим, что

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}. \ ▶$$

125. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\right)$.

◀ Имеем

$$1 - \frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}} = \frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}, \quad k = \overline{2,\ n}.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1\cdot 4}{2\cdot 3} \cdot \frac{2\cdot 5}{3\cdot 4} \cdot \frac{3\cdot 6}{4\cdot 5} \ldots \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{n+2}{n} = \frac{1}{3}. \ ▶$$

Найти пределы векторных последовательностей $(\mathbf{x}_n)$, где:

126. $\mathbf{x}_n = \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n, \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right)$.

◀ Поскольку каждая из последовательностей координат сходится, то, согласно п. 6.7,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \left(\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n, \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right) = (e,\ e^{-1}). \ ▶$$

127. $\mathbf{x}_n = \left(\frac{n+1}{n}, \frac{n+1}{2n}, \ldots, \frac{n+1}{mn}\right)$.

◀ Аналогично предыдущему примеру находим

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}, \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n}, \ldots, \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{mn}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{m}\right). \ ▶$$

128. $\mathbf{x}_n = \left(\sqrt[n]{2 + 2^n}, \sqrt[n]{2 + 2^{-n}}, \sqrt[n]{2 + 2^{-n^2}}\right)$.

◀ Покажем, что существуют пределы последовательностей каждой из координат. Из неравенств $2 < \sqrt[n]{2 + 2^n} < 2\sqrt[n]{2}$ и того, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$, следует $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2 + 2^n} = 2$. Далее, из неравенств

$$1 < \sqrt[n]{2 + 2^{-n}} < \sqrt[n]{3}, \quad 1 < \sqrt[n]{2 + 2^{-n^2}} < \sqrt[n]{3}$$

находим, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2 + 2^{-n}} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2 + 2^{-n^2}} = 1.$$

Поскольку пределы последовательностей координат существуют, то существует и предел векторной последовательности, а поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2+2^n},\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2+2^{-n}},\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2+2^{-n^2}}\right) = (2,\ 1,\ 1). \blacktriangleright$$

129. $\mathbf{x}_n = (x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{mn})$, где

$$x_{in} = \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+in}\right), \quad i = \overline{1, n},\ n \in \mathbb{N}.$$

◀ Обозначим $y_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$. Из примера 119 следует, что

$$y_n = C + \ln n + \gamma_n,$$

где C — постоянная Эйлера, а $\gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда

$$x_{in} = y_{(1+i)n} - y_n = C + \ln((1+i)n) + \gamma_{(1+i)n} - C - \ln n - \gamma_n = \ln(1+i) + \gamma_{(i+1)n} - \gamma_n.$$

Поскольку $\gamma_n \to 0$, $\gamma_{(1+i)n} \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} x_{in} = \ln(1+i), \quad i = \overline{1, m}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \left(\lim_{n\to\infty} x_{1n},\ \lim_{n\to\infty} x_{2n},\ \ldots,\ \lim_{n\to\infty} x_{mn}\right) = (\ln 2, \ln 3, \ldots, \ln(m+1)). \blacktriangleright$$

130. Пусть задана векторная последовательность $(\mathbf{x}_n)$, где

$$\mathbf{x}_n = (x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{mn}),$$

евклидова норма которой стремится к бесконечности.

Обязательно ли существование хотя бы одной последовательности координаты (x_{in}), стремящейся к бесконечности? Рассмотреть пример

$$\mathbf{x}_n = \left(\frac{(1-(-1)^n)n^2}{n+1},\ \frac{(1+(-1)^n)n^2}{n+1}\right).$$

◀ Нет, не обязательно. В предложенном примере евклидова норма

$$\|\mathbf{x}_n\| = \sqrt{\frac{(1-(-1)^n)^2 n^4}{(n+1)^2} + \frac{(1+(-1)^n)^2 n^4}{(n+1)^2}} = \frac{2n^2}{n+1}$$

стремится к бесконечности при $n \to \infty$. Однако ни одна из последовательностей координат

$$x_{1n} = \frac{(1-(-1)^n)n^2}{n+1}, \quad x_{2n} = \frac{(1+(-1)^n)n^2}{n+1}$$

не стремится к бесконечности. Действительно, для последовательностей координат

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_{1n} = +\infty, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_{1n} = 0; \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_{2n} = +\infty, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_{2n} = 0$$

и, следовательно, ∞ не является пределом ни для одной из этих последовательностей. ▶

131. Найти предел последовательности $(A_n) = (a_{ij}^{(n)})$, $i = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, q}$, где

$$a_{ij}^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{1}{n+in+1} + \dfrac{1}{n+in+2} + \ldots + \dfrac{1}{n+jn}, & \text{если } j > i, \\ \dfrac{1}{n}, & \text{если } i = j, \\ \dfrac{1}{n+jn+1} + \dfrac{1}{n+jn+2} + \ldots + \dfrac{1}{n+in}, & \text{если } i > j. \end{cases}$$

◀ Сначала докажем, что каждая из последовательностей $n \mapsto a_{ij}^{(n)}$, $i = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, q}$, сходится. Пусть, например, $j > i$. Тогда (см. пример 129)

$$a_{ij}^{(n)} = \frac{1}{n+in+1} + \frac{1}{n+in+2} + \ldots + \frac{1}{n+jn} =$$
$$= \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+jn}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+in}\right) = x_{jn} - x_{in},$$

где $x_{ln} \to \ln(1+l)$ при $n \to \infty$. Отсюда

$$a_{ij}^{(n)} = x_{jn} - x_{in} \to \ln(1+j) - \ln(1+i) = \ln\frac{1+j}{1+i} \quad \text{при } n \to \infty.$$

Аналогично при $i > j$ находим, что

$$a_{ij}^{(n)} = x_{in} - x_{jn} \to \ln\frac{1+i}{1+j} \quad \text{при } n \to \infty.$$

Наконец, если $i = j$, то $a_{ij}^{(n)} = \frac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$.

Таким образом, все последовательности $\left(a_{ij}^{(n)}\right)$ сходятся, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \left(\lim_{n\to\infty} a_{ij}^{(n)}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \ln\frac{3}{2} & \ln\frac{4}{2} & \ldots & \ln\frac{q}{2} \\ \ln\frac{3}{2} & 0 & \ln\frac{4}{3} & \ldots & \ln\frac{q}{3} \\ \ln\frac{4}{2} & \ln\frac{4}{3} & 0 & \ldots & \ln\frac{q}{4} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ln\frac{p}{2} & \ln\frac{p}{3} & \ln\frac{p}{4} & \ldots & 0 \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

132. Найти

$$\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} \frac{n}{n+1} & \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} & \frac{1}{(\sqrt{2})^n} \\ \frac{\lg n}{n} & \frac{n+\sin n}{2n} & 4 \end{pmatrix}.$$

◀ Все элементы матрицы являются сходящимися последовательностями, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} \frac{n}{n+1} & \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} & \frac{1}{(\sqrt{2})^n} \\ \frac{\lg n}{n} & \frac{n+\sin n}{2n} & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} & \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} & \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt{2})^n} \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lg n}{n} & \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+\sin n}{2n} & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

Упражнения для самостоятельной работы

Доказать следующие равенства:

62. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n!}{(n+1)!} = 1.$

63. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)\ldots(k+m-1)}{n(n+1)\ldots(n+m)} = \frac{1}{m+1}$, где m — натуральное число.

64. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) = 1.$

65. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{(n+1)^p} = \frac{1}{p+1}$, где p — натуральное число.

66. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)\ldots(k+m+1)} = \frac{1}{m\,m!}$, где m — натуральное число.

67. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)\ldots(k+m-1)}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^m} = 1.$ **68.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)\ln(n!) - 2\ln(2!3!\ldots n!)}{n^2+n} = \frac{1}{2}.$

69. Пусть $x_0 > 0$ — произвольно,

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{a}{x_n^2}\right), \quad n \in \mathbb{Z}_0.$$

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt[3]{a}$.

70. Последовательность (x_n) определяется соотношениями $x_{n+1} = px_n + q$, $p \neq 0$, x_1 — произвольно. При каком условии последовательность (x_n) сходится? Найти, в случае ее сходимости, предел.

71. Доказать неравенство $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} > e$.

72. Доказать неравенства

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{mn+k} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{mn+k-1}.$$

73. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^\lambda}$, $0 < \lambda < 1$.

Пользуясь теоремой о существовании предела монотонной и ограниченной последовательности, доказать сходимость следующих последовательностей (x_n), где:

74. $x_n = \frac{1}{1^2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \ldots + \frac{1}{n^2+1}$. **75.** $x_n = \left(1+\frac{1}{1^2+1}\right)\left(1+\frac{1}{2^2+1}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)$.

С помощью критерия Коши исследовать на сходимость следующие последовательности (x_n), где:

76. $x_n = \frac{1}{2\ln^2 2} + \frac{1}{3\ln^2 3} + \ldots + \frac{1}{n\ln^2 n}$, $n = 2, 3, \ldots$.

77. $x_n = \frac{1}{\ln^2 2} + \frac{1}{\ln^2 3} + \ldots + \frac{1}{\ln^2 n}$, $n = 2, 3, \ldots$.

78. Пусть $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant 0$. Доказать, что последовательности (S_n) и (σ_n), где

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \quad \sigma_n = a_1 + 2a_2 + \ldots + 2^n a_{2^n},$$

или обе сходятся, или обе расходятся.

79. Доказать, что последовательность (S_n), где

$$S_n = \frac{1}{2\ln^p 2} + \frac{1}{3\ln^p 3} + \ldots + \frac{1}{n\ln^p n}, \quad n = 2, 3, \ldots,$$

сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$.

80. Доказать, что для любой последовательности (a_n) с положительными членами справедливы неравенства:

а) $\varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$; б) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Найти пределы векторных последовательностей $(\mathbf{x}_n)$, где

81. $\mathbf{x}_n = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \left(1+\frac{2}{n}\right)^n, \ldots, \left(1+\frac{m}{n}\right)^n\right)$.

82. $\mathbf{x}_n = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n+2}, \ldots, \left(1+\frac{1}{mn}\right)^{n+m}\right)$.

83. $\mathbf{x}_n = \left(\frac{\ln(2^n+1)}{n}, \frac{\ln(3^n+1)}{n}, \ldots, \frac{\ln((m+1)^n+1)}{n}\right)$.

84. $\mathbf{x}_n = \left(\sqrt[n]{3^n+2^n}, \sqrt[n]{3^n+4^n}, \sqrt[n]{3^n+6^n}\right)$.

85. $\mathbf{x}_n = \left(\sqrt[n]{\frac{C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n}{n+1}}, \sqrt[n]{\sqrt[n+1]{C_n^0 C_n^1 \ldots C_n^n}}\right)$, где $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Найти пределы матричных последовательностей (A_n), где

86. $A_n = \left(\left(1+\frac{i}{n}\right)^{jn}\right)$, $i = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, q}$.

87. $A_n = \begin{pmatrix} \frac{(n+1)^2-n^2}{n} & \frac{(n+2)^3-n^3}{n^2} & \frac{(n+3)^4-n^4}{n^3} \\ \frac{(n-1)^2-n^2}{n} & \frac{(n-2)^3-n^3}{n^2} & \frac{(n-3)^4-n^4}{n^3} \end{pmatrix}$.

88. $A_n = \begin{pmatrix} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n & 1 \\ 1 & \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \end{pmatrix}$.

89. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} A_n B_n = \lim A_n \cdot \lim B_n,$$

если пределы матричных последовательностей существуют и все члены последовательностей являются матрицами одного размера.

90. Пусть матричные последовательности (A_n) и (B_n), где $A_n = (a_{ij}^{(n)})$, $B_n = (b_{jk}^{(n)})$, и векторная последовательность $(\mathbf{x}_n)$, где $\mathbf{x}_n = (x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{qn})$, сходятся, причем

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A, \quad \lim_{n\to\infty} B_n = B, \quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x},$$

а матрицы $C = (c_{ij})$, $G = (g_{jk})$ и вектор $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_q)$, $i = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, q}$, $k = \overline{1, r}$ — постоянные.

Доказать, что:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} A_n B_n = AB$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} CB_n = CB$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} A_n G = AG$;
г) $\lim\limits_{n\to\infty} A_n \mathbf{x}_n = A\mathbf{x}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty} A_n \mathbf{y} = A\mathbf{y}$.

§ 7. Предел функции

7.1. Предельная точка множества. Предел функции в точке.

Определение 1. *Пусть $X \subset \mathbb{R}$. Число $x_0 \in \mathbb{R}$ называется предельной точкой множества X, если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists y \in X,\ y \neq x_0 : |y - x_0| < \varepsilon.$$

Из определения следует, что любая окрестность точки x_0 содержит точку из множества X, отличную от x_0. Сама точка x_0 может принадлежать, а может и не принадлежать множеству X.

Определение 2. *Значение $+\infty$ есть предельная точка множества X, если $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists y \in X : y > M$.*

Значение $-\infty$ есть предельная точка множества X, если

$$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists y \in X : y < M.$$

Определение 3. *Точка $x \in X$, не являющаяся предельной точкой множества X, называется изолированной точкой множества X, т. е.*

$$\exists \delta > 0 : S(x, \delta) \cap X = \{x\}.$$

Определение 4. *Число $x_0 \in \mathbb{R}$ называется предельной точкой множества $X \subset \mathbb{R}$, если из этого множества можно выделить последовательность (x_n) различных точек, сходящуюся к x_0.*

Определения 1 и 4 эквивалентны.

Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ и x_0 — предельная точка множества X.

Определение 5 (Гейне). *Функция f имеет предельное значение при $x \to x_0$ (или в точке x_0), если существует такое число $A \in \mathbb{R}$, что для произвольной последовательности (x_n) значений $x \in (]a, b[\setminus\{x_0\})$, сходящейся к точке x_0, соответствующая последовательность значений функции $(f(x_n))$ сходится к точке A.*

Определение 6 (Коши). *Функция f имеет предел при $x \to x_0$, если*

$$\exists A \in \mathbb{R} \wedge \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

При этом число A называем *пределом* (или *предельным значением*) функции f в точке x_0 и записываем

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \quad \text{или} \quad f(x) \to A \quad \text{при} \quad x \to x_0.$$

Определения Гейне и Коши эквивалентны.

Введем понятие одностороннего предела.

Определение 7 (Гейне). *Функция f имеет в точке x_0 предел слева (справа), если существует такое число $A \in \mathbb{R}$, что для произвольной последовательности (x_n) значений x, $a < x_n < x_0$ $(x_0 < x_n < b)$, сходящейся к точке x_0 при $n \to \infty$, соответствующая последовательность $(f(x_n))$ значений функции f сходится к точке A.*

Определение 8 (Коши). *Функция f имеет в точке x_0 предел слева (справа), если*

$$\exists A \in \mathbb{R} \wedge \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : 0 < x_0 - x < \delta\ (0 < x - x_0 < \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Число A называем *пределом слева* (*справа*) функции f в точке x_0 и обозначаем

$$f(x_0-0) \quad (f(x_0+0)) \quad \text{или} \quad \lim_{x\to x_0-0} f(x) \quad \left(\lim_{x\to x_0+0} f(x)\right).$$

Функция f имеет предел в точке x_0 тогда и только тогда, когда в этой точке существуют и равные между собой пределы слева и справа.

Теорема (критерий Коши). *Функция f имеет конечный предел в точке x_0 тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : (0 < |x-x_0| < \delta \wedge 0 < |y-x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon.$$

Особую роль играют два замечательных предела:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1; \qquad 2)\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, то

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = A+B; \quad \lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = AB; \quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad (g(x)\neq 0,\ B\neq 0).$$

7.2. Ограниченность функции.

Функция $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, называется *ограниченной на множестве* X, если существуют числа m и M такие, что $m \leqslant f(x) \leqslant M$, $x \in X$.

Число $m_0 = \inf\limits_{x\in X}\{f(x)\}$ называется *точной нижней гранью* функции f, а число $M_0 = \sup\limits_{x\in X}\{f(x)\}$ — *точной верхней гранью* функции f на множестве M. Разность $M_0 - m_0$ называется *колебанием функции* f на множестве X.

Если функция f $X \to \mathbb{R}$ имеет конечный предел в точке $x_0 \in X$, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

7.3. Символы Ландау. Эквивалентные функции.

Пусть $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, а $B = \{X, Y, Z, \ldots\}$ — семейство всех интервалов пространства $\mathbb{R}$, которые либо все содержат точку x_0 как внутреннюю, либо все они имеют точку x_0 своим концом только левым или только правым для всех интервалов множества B. Тогда $\forall X \in B \wedge \forall Y \in B \Rightarrow X\cap Y \in B$, $X \in B \wedge Z \subset X \Rightarrow Z \in B$.

Пусть $\mathcal{F} = \{f, g, h, \ldots\}$ — семейство числовых функций, обладающих одним из следующих свойств:

1) для произвольной функции $f \in \mathcal{F}$ в множестве B существует содержащий точку x_0 интервал X, на котором функция f определена, кроме, быть может, самой точки x_0;

2) для произвольной функции $f \in \mathcal{F}$ в множестве B существует интервал, имеющий своим концом точку x_0, на котором f определена.

Определение 1. *Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, то функция f называется бесконечно малой при $x \to x_0$; если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, то функция f называется бесконечно большой при $x \to x_0$.*

Определение 2. *Если для функций $f, g \in \mathcal{F}$, $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$, существует интервал $Z \subset X\cap Y \in B$, $X \in B$, $Y \in B$, и такое конечное число $A > 0$, что $\forall x \in Z$, кроме, быть может, самой точки x_0, выполняется неравенство*

$$|g(x)| \leqslant A|f(x)|,$$

то записываем

$$g = O(f)$$

при $x \to x_0$. При этом функции f и g называем функциями одного порядка при $x \to x_0$.

Если $\forall\varepsilon > 0\ \exists Z \subset X\cap Y \in B$ такое, что $\forall x \in Z$ кроме, быть может, самой точки x_0, выполняется неравенство

$$|g(x)| < \varepsilon|f(x)|,$$

то записываем

$$g = o(f)$$

при $x \to x_0$. При этом в случае $g(x) \to 0$, $f(x) \to 0$ при $x \to x_0$ считаем, что функция g есть бесконечно малая более высокого порядка, чем f; если же $g(x) \to \infty$, $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0$, то считаем, что бесконечно большая функция g имеет порядок роста ниже, чем f.

Если существует интервал $Z \in B$ такой, что $\forall x \in Z\backslash\{x_0\}$ $f(x) \neq 0$, то запись $g = O(f)$ означает, что отношение $\frac{g(x)}{f(x)}$ ограничено при $x \in Z\backslash(x_0)$, а запись $g = o(f)$, что $\frac{g(x)}{f(x)} \to 0$ при $x \to x_0$.

Символы O и o называются *символами Ландау.*

Определение 3. *Функции g и f называются эквивалентными, если $f - g = o(g)$, т.е. если $\forall \varepsilon > 0\ \exists Z \in B$ такое, что $\forall x \in Z\backslash\{x_0\}$ выполняется неравенство*

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon |g(x)|.$$

При этом записываем $f \sim g$, а равенство $f = g + o(g)$ называем *асимптотическим равенством.*

Пусть $f,\ g \in \mathcal{F}$ и $g(x) > 0\ \forall x \in Y \in B$, тогда

$$f \sim g \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Справедливы асимптотические равенства

$$\sin x = x + o(x), \quad \operatorname{tg} x = x + o(x) \quad \text{при } x \to 0.$$

7.4. Частичные пределы.

Если для некоторой последовательности (x_n) значений аргумента функции f, сходящейся к x_0, справедливо равенство $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$, то число A называется *частичным пределом* функции f в точке x_0. Наибольший и наименьший частичные пределы обозначаем через $\overline{\lim\limits_{x \to x_0}} f(x)$ и $\underline{\lim\limits_{x \to x_0}} f(x)$ и называем соответственно *верхним* и *нижним пределами функции* f в точке x_0.

Очевидно,

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \overline{\lim_{x \to x_0}} f(x) = \underline{\lim_{x \to x_0}} f(x).$$

7.5. Предел функции комплексной переменной.

Определение 1. *Последовательность $\mathbb{N} \to \mathbb{C} : n \mapsto z_n$ называется сходящейся, если*

$$\exists z \in \mathbb{C} \wedge \forall \varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N} : \forall n > m \Rightarrow |z_n - z| < \varepsilon.$$

Аналогично последовательность комплексных чисел (z_n) сходится к ∞, если

$$\forall N\ \exists m \in \mathbb{N} : \forall n > m \Rightarrow |z_n| > N.$$

Последовательность (z_n), где $z_n = x_n + iy_n$, сходится к точке $z = a + ib$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \to \infty} y_n = b.$$

Пусть z_0 — предельная точка множества $D \subset \mathbb{C}$.

Определение 2 (Гейне). *Функция $z \mapsto f(z)$, $z \in D$, $D \subset \mathbb{C}$, имеет предел при $z \to z_0$, если*

$$\exists A \in \mathbb{C} \wedge \forall (z_n) \subset D\backslash(z_0) : \lim_{n \to \infty} z_n = z_0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(z_n) = A.$$

Определение 3 (Коши). *Функция $z \mapsto f(z)$ имеет предел при $z \to z_0$, если*

$$\exists A \in \mathbb{C} \wedge \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - A| < \varepsilon.$$

133. Показать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} n, & \text{если } x = \frac{m}{n}, \text{ где } m \text{ и } n \text{ — взаимно простые целые числа,} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррационально,} \end{cases}$$

конечна, но не ограничена в каждой точке (т. е. не ограничена в любой окрестности этой точки).

◀ Пусть $x = \frac{p}{q}$ — произвольное рациональное число. Тогда $r_k = \frac{kp+1}{kq} \to \frac{p}{q}$ при $k \to \infty$, т. е. попадает в любую окрестность точки $x = \frac{p}{q}$. А так как $f(r_k) = kq \to \infty$ при $k \to \infty$, то функция f не ограничена в любой окрестности точки x.

Пусть, далее, $x = \alpha$, где α — иррациональное. Тогда существует последовательность рациональных чисел $r_i = \frac{p_i}{q_i}$, $i \in \mathbb{N}$, такая, что $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{p_i}{q_i} = \alpha$. При этом $\lim\limits_{i\to\infty} q_i = +\infty$. Поскольку $f\left(\frac{p_i}{q_i}\right) = q_i \to +\infty$ при $i \to \infty$, а точки последовательности $\left(\frac{p_i}{q_i}\right)$ попадают в любую окрестность точки α, то функция не ограничена. ►

134. Если функция f определена и локально ограничена в каждой точке: а) интервала, б) сегмента, то является ли эта функция ограниченной на данном интервале или соответственно сегменте? Привести соответствующие примеры.

◄ а) Вообще говоря, нет. Например, функция $f(x) = \frac{1}{x}$ ограничена в окрестности любой точки интервала $]0, 1[$, но не является ограниченной на этом интервале, так как $f(x_n) \to +\infty$ при $x_n = \frac{1}{n} \to 0$, а $0 < x_n < 1$ при $n = 2, 3, \ldots$.

б) Функция ограничена. Для доказательства предположим противное: пусть функция неограниченная. Тогда для любого натурального числа n существует $x_n \in [a, b]$, где $[a, b]$ — сегмент, указанный в условии задачи, такое, что

$$f(x_n) > n.$$

А так как $a \leqslant x_n \leqslant b$ (т. е. (x_n) — ограничена), то существует подпоследовательность (x_{k_n}), $(x_{k_n}) \subset (x_n)$, такая, что

$$\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = c \in [a, b].$$

По условию, f локально ограничена в окрестности любой точки, т. е. существуют такие $\delta > 0$ и $E > 0$, что

$$|f(x)| \leqslant E, \quad x \in]c - \delta, c + \delta[.$$

Кроме того, существует такое число N, что $k_n > E$ при $n > N$ и $x_{k_n} \in]c - \delta, c + \delta[$, а тогда $f(x_{k_n}) > k_n > E$. Полученное противоречие доказывает утверждение. ►

135. Показать, что функция

$$f(x) = \frac{1 + x^2}{1 + x^4}$$

ограничена в интервале $]-\infty, +\infty[$.

◄ Ясно, что $f(x) > 0$, т. е. функция ограничена снизу. Далее, из неравенства $(1 - x^2)^2 \geqslant 0$ следует, что $\frac{x^2}{1+x^4} \leqslant \frac{1}{2}$, а поскольку $1 + x^4 \geqslant 1$, то $\frac{1+x^2}{1+x^4} = \frac{1}{1+x^4} + \frac{x^2}{1+x^4} \leqslant 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Следовательно, $0 < f(x) \leqslant \frac{3}{2}$, $-\infty < x < \infty$. ►

136. Показать, что функция

$$f(x) = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$$

не ограничена в любой окрестности точки $x = 0$, однако не является бесконечно большой при $x \to 0$.

◄ Пусть $x_n = \frac{2}{n\pi}$. Очевидно, при $n \to \infty$ значения x_n попадают в любую окрестность точки $x = 0$. Требуемое утверждение вытекает из того факта, что $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x_{2n})| = \infty$, а $f(x_{2n-1}) = 0$, $n \in \mathbb{N}$. ►

137. Исследовать на ограниченность функцию

$$f(x) = \ln x \cdot \sin^2 \frac{\pi}{x}$$

в интервале $]0, \varepsilon[$.

◄ Так как $0 \leqslant \sin^2 \frac{\pi}{x} \leqslant 1$, а функция $x \mapsto \ln x$ монотонно возрастающая, то $f(x) \leqslant \max\{0, \ln \varepsilon\}$, т. е. f ограничена сверху.

Далее, положим $x_n = \frac{2}{2n+1}$. Тогда, начиная с некоторого номера n_0, все x_n попадают в интервал $]0, \varepsilon[$. При этом $f(x_n) = \ln \frac{2}{2n+1} = -\ln\left(1 + \left(n + \frac{1}{2}\right)\right) > -\left(n + \frac{1}{2}\right) \to -\infty$ при $n \to \infty$, т. е. f не ограничена снизу. ►

138. Показать, что функция f, где

$$f(x) = \frac{x}{1 + x}$$

в области $0 \leqslant x < \infty$ имеет нижнюю грань $m = 0$ и верхнюю грань $M = 1$.

◀ Очевидно, $0 \leqslant \frac{x}{1+x}$, $0 \leqslant x < \infty$. Пусть ε — произвольное и $0 < \varepsilon < 1$. Тогда $f(x) = \frac{x}{1+x} < \varepsilon$ при $0 < x < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$. Следовательно, $\inf\limits_{0 \leqslant x < \infty} \{f(x)\} = 0$.

Далее, очевидно, $\frac{x}{1+x} < 1$, $0 \leqslant x < \infty$. С другой стороны, для указанного ранее ε

$$f(x) = \frac{x}{1+x} > 1 - \varepsilon \quad \text{при } x > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon},$$

т. е. $\sup\limits_{0 \leqslant x < \infty} \{f(x)\} = 1$. ▶

139. Функция f определена и монотонно возрастает на сегменте $[a, b]$. Чему равны ее точная нижняя и точная верхняя грани на этом сегменте?

◀ Так как f монотонно возрастает на $[a, b]$, то $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$ $\forall x \in [a, b]$.

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное и такое, что $f(a) + \varepsilon < f(b)$ Тогда существует $x' \in [a, b]$ такое, что

$$f(a) \leqslant f(x') < f(a) + \varepsilon$$

(например, $x' = a$), т. е. $\inf\limits_{a \leqslant x \leqslant b} \{f(x)\} = f(a)$.

Аналогично, если $f(b) - \varepsilon < f(b)$, то существует $x'' \in [a, b]$ такое, что $f(b) - \varepsilon < f(x'') \leqslant f(b)$ (например, $x'' = b$).

Следовательно, $\sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} \{f(x)) = f(b)$. ▶

140. Определить колебание функции $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, на интервалах: а) $]1; 3[$; б) $]1{,}9; 2{,}1[$; в) $]1{,}99; 2{,}01[$; г) $]1{,}999; 2{,}001[$.

◀ На каждом из указанных интервалов сужения заданной функции монотонно возрастают и имеют на концах этих интервалов конечные предельные значения, в силу чего являются ограниченными. Следовательно,

а) $M_0 - m_0 = f(3 - 0) - f(1 + 0) = 9 - 1 = 8$;

б) $M_0 - m_0 = f(2{,}1 - 0) - f(1{,}9 + 0) = 4{,}41 - 3{,}61 = 0{,}8$;

в) $M_0 - m_0 = f(2{,}01 - 0) - f(1{,}99 + 0) = 4{,}0401 - 3{,}9601 = 0{,}08$;

г) $M_0 - m_0 = f(2{,}001 - 0) - f(1{,}999 + 0) = 4{,}004001 - 3{,}996001 = 0{,}008$ ▶

141. Пусть $m[f]$ и $M[f]$ — соответственно нижняя и верхняя грани функции f на промежутке $]a, b[$.

Доказать, что если f_1 и f_2 — функции, определенные на $]a, b[$, то

а) $m[f_1 + f_2] \geqslant m[f_1] + m[f_2]$; б) $M[f_1 + f_2] \leqslant [f_1] + M[f_2]$.

◀ Докажем неравенство а) (неравенство б) доказывается аналогично). Обозначим $m_1 = \inf\limits_{a<x<b} \{f_1(x)\}$; $m_2 = \inf\limits_{a<x<b} \{f_2(x)\}$. Тогда $f_1(x) \geqslant m_1$ и $f_2(x) \geqslant m_2$, $x \in]a, b[$. Складывая последние неравенства, получаем $f_1(x) + f_2(x) \geqslant m_1 + m_2$, $x \in]a, b[$, откуда $m[f_1 + f_2] \geqslant$ $\geqslant m_1 + m_2 = m[f_1] + m[f_2]$. ▶

142. Показать, что функция $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, не имеет предела при $x \to 0$.

◀ Требуемое утверждение следует из того, что последовательность $x_n = \frac{2}{\pi(1+2\pi)}$, $n \in \mathbb{N}$, при $n \to \infty$ стремится к нулю, а $f(x_n) = (-1)^n$ вовсе не имеет предела. ▶

143. С помощью "ε—δ"-рассуждений доказать, что $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$. Заполнить следующую таблицу:

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001	...
δ					

◀ Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно. Тогда

$$|x^2 - 4| = |(x-2)^2 + 4(x-2)| \leqslant |x-2|^2 + 4|x-2| \leqslant \varepsilon,$$

как только $0 < |x - 2| < \sqrt{4+\varepsilon} - 2 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{4+\varepsilon}+2}$. Последнее неравенство тем более будет выполняться, если

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{4+\varepsilon}+2} > \frac{\varepsilon}{2\sqrt{4+\varepsilon}} > \frac{\varepsilon}{2\sqrt{4+4\varepsilon+\varepsilon^2}} = \frac{\varepsilon}{2(2+\varepsilon)} = \delta(\varepsilon) > |x-2|.$$

Пусть $\varepsilon = \frac{1}{10^n}$. Тогда $\delta\left(\frac{1}{10^n}\right) = \frac{1}{4\,10^n+2}$ и

$$\delta(10^{-1}) = \frac{1}{42};\ \delta(10^{-2}) = \frac{1}{402};\ \delta(10^{-3}) = \frac{1}{4002};\ \delta(10^{-4}) = \frac{1}{40002}. \blacktriangleright$$

144. На языке "E—δ" доказать, что

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty.$$

Заполнить следующую таблицу;

E	10	100	1000	10 000	...
δ					

◀ Пусть $E > 0$ — произвольно. Тогда

$$\frac{1}{(x-1)^2} > E,$$

как только $(x-1)^2 < \frac{1}{E}$ или $0 < |x-1| < \frac{1}{\sqrt{E}} = \delta(E)$. Отсюда находим, что

$$\delta(10) = \frac{1}{\sqrt{10}};\quad \delta(100) = \frac{1}{10};\quad \delta(1000) = \frac{1}{10\sqrt{10}};\quad \delta(10000) = \frac{1}{100}. \blacktriangleright$$

145. Пусть $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, где a_i $(i = \overline{0,\ n})$ — действительные числа. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty} |P(x)| = +\infty$.

◀ Не ограничивая общности, будем считать, что $a_0 \neq 0$. При достаточно больших $|x|$ имеем

$$|P(x)| = |x^n| \left|a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\right| \geqslant |x|^n \cdot \frac{|a_0|}{2}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to\infty} |x|^n \cdot \frac{|a_0|}{2} = +\infty$, то $\lim\limits_{x\to\infty} |P(x)| = +\infty$. ▶

146. Пусть

$$R(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m},\quad x \in \mathbb{R},$$

где $a_0 \neq 0$ и $b_0 \neq 0$. Доказать, что

$$\lim_{x\to\infty} R(x) = \begin{cases} \infty, & \text{если } n > m, \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{если } n = m, \\ 0, & \text{если } n < m. \end{cases}$$

◀ Пусть $n > m$. Тогда

$$|R(x)| = |x|^{n-m} \left| \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_m}{x^m}} \right| > |x|^{n-m} \left|\frac{a_0}{2b_0}\right|$$

при достаточно больших $|x|$ В силу того что $\lim\limits_{x\to\infty} |x|^{n-m} \left|\frac{a_0}{2b_0}\right| = \infty$, имеем $\lim\limits_{x\to\infty} R(x) = \infty$. Если $n = m$, то

$$R(x) = \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_n}{x^n}} \to \frac{a_0}{b_0} \quad \text{при } x \to \infty.$$

Наконец, если $n < m$, то при достаточно больших $|x|$ имеем

$$|R(x)| < \frac{1}{|x|^{m-n}} \left|\frac{2a_0}{b_0}\right|,$$

Откуда следует, что $\lim\limits_{x\to\infty} R(x) = 0$. ▶

147. Пусть $x \to 0$ Доказать следующие равенства:

$$\text{а) } x\sin\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}} + o\left(x^{\frac{3}{2}}\right), \qquad \text{б) } \ln x = o\left(x^{-\varepsilon}\right),\ \varepsilon > 0;$$

$$\text{в) } (1+x)^n = 1 + nx + o(x); \qquad \text{г) } \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = O(1).$$

◀ Записанные равенства следуют из того, что

а) $\lim\limits_{x\to+0} \frac{x\sin\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}} = 1$; б) $\lim\limits_{x\to+0} x^{-\varepsilon}\ln x = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{-\ln t}{t^{\varepsilon}} = 0$, $t = \frac{1}{x}$,

в) $(1+x)^n = 1 + nx + C_n^2x^2 + \ldots + x^n = 1 + nx + (C_n^2x + \ldots + x^{n-1})x = 1 + nx + \alpha(x)x$, где $\alpha(x) = C_n^2x + \ldots + x^{n-1} \to 0$ при $x \to 0$;

г) $\left|\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right| < \frac{\pi}{2}$. ▶

148. Пусть $x \to 0$. Выделить главный член вида Cx^n (C — постоянная) и определить порядки малости относительно переменной x следующих функций:

$$\text{а) } x \mapsto (2x - 3x^2 + x^5); \qquad \text{б) } x \mapsto (\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x});$$

$$\text{в) } x \mapsto (\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}); \qquad \text{г) } x \mapsto (\operatorname{tg} x - \sin x).$$

◀ а) Из того что $2x - 3x^2 + x^5 = 2x + (-3x + x^4)x = 2x + \alpha(x)x$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to 0$ следует, что $2x - 3x^2 + x^5 = 2x + o(x)$, т. е. $Cx^n = 2x$, $n = 1$.

б) Из равенства $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = 1$ следует, что $Cx = x$, $n = 1$, т. е. $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \sim x$

в) Поскольку

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1-2x} - (1-x)}{x^2} + \frac{1 - x - \sqrt[3]{1-3x}}{x^2}\right) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2},$$

то $Cx^n = \frac{1}{2}x^2$, $n = 2$.

г) Имеем $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}$, поэтому $Cx^3 = \frac{1}{2}x^3$, $n = 3$. ▶

149. Пусть $x \to +\infty$. Выделить главный член вида Cx^n и определить порядок роста относительно бесконечно большой x следующих функций:

а) $x \mapsto \sqrt[3]{x^2 - x} + \sqrt{x}$; б) $x \mapsto \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}$.

◀ а) Поскольку

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 - x} + \sqrt{x}}{x^{\frac{2}{3}}} = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{1 - x^{-1}} + x^{-\frac{1}{6}}\right) = 1,$$

то $Cx^n = x^{\frac{2}{3}}$, $n = \frac{2}{3}$.

б) Имеем $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}} = x^{\frac{1}{8}}\sqrt{x^{-\frac{1}{4}} + \sqrt{x^{-1} + 1}} \sim x^{\frac{1}{8}}$, поэтому $Cx^n = x^{\frac{1}{8}}$ $\left(n = \frac{1}{8}\right)$. ▶

Решить примеры (при решении некоторых из них заменить бесконечно малые функции эквивалентными им):

150. а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n}\right)$ (m, n — натуральные числа).

◀ а) Разлагая по формуле бинома Ньютона, получаем

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(C_n^2m^2 - C_m^2n^2)x^2 + o(x^2)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(C_n^2m^2 - C_m^2n^2 + \frac{o(x^2)}{x^2}\right) = C_n^2m^2 - C_m^2n^2 = \frac{mn(n-m)}{2}.$$

б) Полагая $x = 1 + t$ ($t \to 0$ при $x \to 1$) и пользуясь принципом отбрасывания бесконечно малых, находим

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^m - 1}{(1+t)^n - 1} = \lim_{t\to 0} \frac{mt + o(t)}{nt + o(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{mt}{nt} = \frac{m}{n}.$$

в) Пусть $x = 1 + t$. Тогда $t \to 0$ при $x \to 1$. Имеем

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n}\right) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{n}{(1+t)^n - 1} - \frac{m}{(1+t)^m - 1}\right) =$$

$$= \lim_{t\to 0}\left(\frac{n}{nt + C_n^2 t^2 + o(t^2)} - \frac{m}{mt + C_m^2 t^2 + o(t^2)}\right) =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{(nC_m^2 - mC_n^2)t^2 + o(t^2)}{mnt^2 + o(t^2)} = \frac{nC_m^2 - mC_n^2}{mn} = \frac{m-n}{2}. \blacktriangleright$$

151. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\left(x+\frac{a}{n}\right)^2 + \left(x+\frac{2a}{n}\right)^2 + \ldots + \left(x + \frac{(n-1)a}{n}\right)^2\right)$.

◀ Используя результаты примера 37, а), получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(nx^2 + \frac{2ax}{n}(1+2+\ldots+(n-1)) + \frac{a^2}{n^2}\left(1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2\right)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(nx^2 + \frac{2ax}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2} + \frac{a^2}{n^2}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right) = x^2 + ax + \frac{a^2}{3}. \blacktriangleright$$

152. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2}{2^2+4^2+\ldots+(2n)^2}$.

◀ Имеем

$$2^2+4^2+\ldots+(2n)^2 = 4(1^2+2^2+\ldots+n^2) = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3},$$

$$1^2+2^2+\ldots+(2n)^2 = \frac{n(2n+1)(4n+1)}{3}$$

(см. пример 37, а)) Вычитая из второго равенства первое, получаем

$$1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2 = \frac{n(2n+1)(4n+1)}{3} - \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3} = \frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2}{2^2+4^2+\ldots+(2n)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(4n^2-1)}{2n(n+1)(2n+1)} = 1. \blacktriangleright$$

153. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^3+4^3+7^3+\ldots+(3n-2)^3}{(1+4+7+\ldots+(3n-2))^2}$.

◀ Имеем (см. пример 37, б))

$$1^3+4^3+7^3+\ldots+(3n-2)^3 = (3\cdot 1-2)^3 + (3\cdot 2-2)^3 + (3\cdot 3-2)^3 + \ldots + (3n-2)^3 =$$

$$= 27(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3) - 54(1^2+2^2+\ldots+n^2) + 36(1+2+\ldots+n) - 8n =$$

$$= 27\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - 54\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 36\,\frac{n(n+1)}{2} - 8n;$$

$$(1+4+7+\ldots+(3n-2))^2 = \frac{n^2(3n-1)^2}{4}.$$

Поскольку в числителе и знаменателе высшая степень n равна 4, то предел дроби равен отношению коэффициентов при n^4, т. е. 3. ▶

154. $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{x}$.

◀ Предполагая что $x_0 > 0$, положим $x = x_0 + t$. Ясно, что $t \to 0$ при $x \to x_0$. Считая $|t| < x_0$, имеем

$$\sqrt[n]{x_0}\left(1 - \frac{|t|}{x_0}\right) < \sqrt[n]{x_0 + t} = \sqrt[n]{x_0}\sqrt[n]{1 + \frac{t}{x_0}} < \sqrt[n]{x_0}\left(1 + \frac{|t|}{x_0}\right).$$

Откуда $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{x} = \lim\limits_{t\to 0}\sqrt[n]{x_0+t} = \sqrt[n]{x_0}$. ▶

155. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.

◀ Разделив числитель и знаменатель на $\sqrt{x}$, получим

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = 1. ▶$$

156. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

◀ Имеем

$$\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} = \lim_{x\to a}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}} + \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to a}\left(\frac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}\,(\sqrt{x}+\sqrt{a})} + \frac{1}{\sqrt{x+a}}\right) = \lim_{x\to a}\left(\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} + \frac{1}{\sqrt{x+a}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

157. $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

◀ Очевидно,

$$\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2} = \lim_{x\to 8} \frac{(9+2x-25)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(x-8)(\sqrt{9+2x}+5)} = 2\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt{9+2x}+5} = \frac{12}{5}. ▶$$

Замечание. При решении примеров 155—157 использованы результаты примера 154.

158. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$ (n — целое число).

◀ Положим $\sqrt[n]{1+x}-1=t$. Тогда $x=(1+t)^n-1$. Считая, что $|x|<1$, имеем $1-|x|$ $\sqrt[n]{1+x} < 1+|x|$, откуда $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[n]{1+x}=1$, т. е. $t\to 0$ при $x\to 0$. А тогда

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{(1+t)^n-1} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{nt+o(t)} = \frac{1}{n}.$$

Следовательно, $\sqrt[n]{1+x} = 1+\frac{x}{n}+o(x)$, $x\to 0$. ▶

159. $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$.

◀ Имеем при $x\to 7$

$$\sqrt{x+2} = 3\sqrt{1+\frac{x-7}{9}} = 3\left(1+\frac{x-7}{18}\right)+o(x-7),$$

$$\sqrt[3]{x+20} = 3\sqrt[3]{1+\frac{x-7}{27}} = 3\left(1+\frac{x-7}{81}\right)+o(x-7),$$

$$\sqrt[4]{x+9} = 2\sqrt[4]{1+\frac{x-7}{16}} = 2\left(1+\frac{x-7}{64}\right)+o(x-7).$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2} = \lim_{x\to 7} \frac{3\left(1+\frac{x-7}{18}\right)-3\left(1+\frac{x-7}{81}\right)+o(x-7)}{2\left(1+\frac{x-7}{64}\right)+o(x-7)-2} = \frac{112}{27}. ▶$$

160. $\lim\limits_{x\to 0} = \dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}$.

◀ Положим $\sqrt[5]{1+5x} = t$. Ясно, что $t \to 0$, если $x \to 0$. Тогда $x = \frac{1}{5}((1+t)^5 - 1)$ и

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x} - (1+x)} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{25}((1+t)^5-1)^2}{t - \frac{1}{5}((1+t)^5-1)} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{25}(5t+o(t))^2}{t - \frac{1}{5}(5t+10t^2+o(t^2))} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2+o(t^2)}{-2t^2+o(t^2)} = -\frac{1}{2}. \ ▶$$

161. $\lim\limits_{x\to 0} = \dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x}$ (m и n — целые числа).

◀ Пользуясь результатом примера 158, имеем

$$\lim_{x\to 0} = \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+\beta x}(\sqrt[n]{1+\alpha x} - 1) + \sqrt[m]{1+\beta x} - 1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \sqrt[m]{1+\beta x} \cdot \alpha \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+\alpha x} - 1}{\alpha x} + \beta \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+\beta x} - 1}{\beta x} = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{m}. \ ▶$$

162. Пусть $P(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ и m — целое число. Доказать, что

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+P(x)} - 1}{x} = \frac{a_1}{m}.$$

◀ Так как $P(x) \to 0$ при $x \to 0$, то

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+P(x)} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+P(x)} - 1}{P(x)} \cdot \frac{P(x)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+P(x)} - 1}{P(x)} \cdot \lim_{x\to 0}(a_1 + a_2 x + \ldots + a_n x^{n-1}) = \frac{a_1}{m}$$

(см. пример 158). ▶

Найти пределы:

163. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1}$ (m и n — целые числа).

◀ Положим $x = (1+t)^{mn}$. Тогда $t \to 0$ при $x \to 1$ и

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1} = \lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^n - 1}{(1+t)^m - 1} = \frac{n}{m}$$

(см. пример 150, б)) ▶

164. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\ldots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$.

◀ *Полагая* $1 - x = t$ ($t \to 0$ при $x \to 1$), получаем

$$\lim_{x\to 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\ldots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \left(\frac{1-\sqrt{1-t}}{t} \cdot \frac{1-\sqrt[3]{1-t}}{t} \ldots \frac{1-\sqrt[n]{1-t}}{t}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \ldots \frac{1}{n} = \frac{1}{n!}$$

(воспользовались решением примера 158). ▶

Решить примеры (в примерах 165—168 избавляемся от радикалов в числителе и переходим к выражениям с очевидными предельными значениями):

165. $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+2x} - 2\sqrt{x^2+x} + x)$.

◀ Имеем

$$\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+2x} - 2\sqrt{x^2+x} + x) = \lim_{x\to+\infty} x\frac{2x(\sqrt{x^2+2x} - x - 1)}{\sqrt{x^2+2x} + x + 2\sqrt{x^2+x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2}{(\sqrt{x^2+2x} + x + 2\sqrt{x^2+x})(\sqrt{x^2+2x} + x + 1)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1+2\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1+\frac{1}{x}\right)} = -\frac{1}{4}. ►$$

166. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x})$.

◄ Прибавляя и вычитая x, получим

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}) = \lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3-3x^2}-x)+\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2-2x}) = 1+1 = 2. ►$$

167. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_n)}-x)$.

◄ Положим $\frac{1}{x}=t$, тогда $t\to+0$ при $x\to+\infty$ и

$$\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_n)}-x = \frac{\sqrt[n]{1+P(t)}-1}{t},$$

где $P(t)=(a_1+a_2+\ldots+a_n)t+(a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_{n-1}a_n)t^2+\ldots+a_1a_2\ldots a_nt^n$.
Используя результат примера 162, находим, что искомый предел равен

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}. ►$$

168. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n}{x^n}$.

◄ Имеем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2-1})^n+(x+\sqrt{x^2-1})^n}{x^n} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x(x+\sqrt{x^2-1})}\right)^n+\lim_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)^n = 0+2^n = 2^n. ►$$

169. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^n-\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^n}{x}$ (n — натуральное число).

◄ Возводя в n-ю степень и приводя подобные члены, получаем

$$\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n-(\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x} = \lim_{x\to0}\frac{2}{x}\left(nx\left(\sqrt{1+x^2}\right)^{n-1}+o(x)\right) =$$

$$= \lim_{x\to0}2\left(n\left(\sqrt{1+x^2}\right)^{n-1}+\frac{o(x)}{x}\right) = 2n. ►$$

Найти пределы:

170. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$.

◄ Положим $x=\pi+t$, $t\to0$. Тогда

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx} = \lim_{t\to0}\frac{\sin(m\pi+mt)}{\sin(n\pi+nt)} = \lim_{t\to0}\frac{(-1)^m\sin mt}{(-1)^n\sin nt} =$$

$$= (-1)^{m-n}\frac{m}{n}\lim_{t\to0}\frac{\sin mt}{mt}\cdot\frac{nt}{\sin nt} = (-1)^{m-n}\cdot\frac{m}{n}. ►$$

171. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

◄ Пользуясь первым замечательным пределом, находим

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, $1-\cos x = \frac{x^2}{2}+o(x^2)$ при $x\to0$. ►

172. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$.

◀ Из неравенства $|1-\cos x| = 2\sin^2\frac{x}{2} < |x|$ вытекает, что

$$\lim_{x\to 0}\cos x = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x} = 1.$$

Таким образом, $\operatorname{tg} x = x + o(x)$ при $x \to 0$. ▶

173. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$.

◀ Пользуясь асимптотическим разложением, находим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{5x - 3x + o(x)}{x + o(x)} = 2. \ ▶$$

174. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\sin x - \cos x}{1+\sin px - \cos px}$.

◀ Поскольку при $x \to 0$ имеем $1-\cos x = o(x)$, $1-\cos px = o(x)$, $\sin x = x + o(x)$, $\sin px = px + o(x)$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x - \cos x}{1+\sin px - \cos px} = \lim_{x\to 0}\frac{x+o(x)}{px+o(x)} = \frac{1}{p}. \ ▶$$

175. Доказать равенства:

а) $\lim\limits_{x\to a}\sin x = \sin a$; б) $\lim\limits_{x\to a}\cos x = \cos a$; в) $\lim\limits_{x\to a}\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$, $a \neq \dfrac{2n-1}{2}\pi$; $n \in \mathbb{Z}$.

◀ а) Имеем

$$0 \leqslant |\sin x - \sin a| = \left|2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right| \leqslant |x-a|, \quad \lim_{x\to a}\sin x = \sin a.$$

б) Аналогично

$$0 \leqslant |\cos x - \cos a| = \left|2\sin\frac{x-a}{2}\sin\frac{x+a}{2}\right| \leqslant |x-a| \quad \text{и} \quad \lim_{x\to a}\cos x = \cos a.$$

в) $\lim\limits_{x\to a}\operatorname{tg} x = \dfrac{\lim\limits_{x\to a}\sin x}{\lim\limits_{x\to a}\cos x} = \dfrac{\sin a}{\cos a} = \operatorname{tg} a$, если $\cos a \neq 0$, т. е. если $a \neq \frac{2n-1}{2}\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. ▶

Найти пределы:

176. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x-a}$

◀ Очевидно,

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x - \sin a}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cdot\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2} = 1\cdot\cos a = \cos a$$

(здесь воспользовались тем, что $\cos x \to \cos b$ при $x \to b$). ▶

177. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} a}{x-a}$.

◀ Пользуясь формулой разности котангенсов, находим

$$\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} a}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\sin(a-x)}{\sin x\cdot\sin a}\cdot\frac{1}{x-a} = \lim_{x\to a}\left(-\frac{\sin(a-x)}{a-x}\right)\cdot\frac{1}{\sin a}\cdot\lim_{x\to a}\frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{\sin^2 a},$$

$$a \neq k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}. \ ▶$$

178. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(a+2x) - 2\cos(a+x) + \cos a}{x^2}$.

◀ Выражение в числителе преобразуем в произведение, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(a+2x) - 2\cos(a+x) + \cos a}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(-2\sin\frac{x}{2}\sin\left(a+\frac{3x}{2}\right) + 2\sin\frac{x}{2}\sin\left(a+\frac{x}{2}\right)\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cos(a+x)\right) = -\cos a. \ ▶$$

179. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ctg}(a+2x)-2\operatorname{ctg}(a+x)+\operatorname{ctg}a}{x^2}$.

◀ Аналогично предыдущему

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ctg}(a+2x)-2\operatorname{ctg}(a+x)+\operatorname{ctg}a}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left((\operatorname{ctg}(a+2x)-\operatorname{ctg}(a+x))-(\operatorname{ctg}(a+x)-\operatorname{ctg}a)\right)=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{-\sin x}{\sin(a+2x)\sin(a+x)}+\frac{\sin x}{\sin(a+x)\sin a}\right)=$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(a+x)}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{2\cos(a+x)}{\sin a\sin(a+2x)}\right)=\frac{2\cos a}{\sin^3 a},$$
$$a\neq k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$$ ▶

180. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$.

◀ Разлагая числитель и знаменатель на множители, получаем

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{(\sin x+1)(2\sin x-1)}{(\sin x-1)(2\sin x-1)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x+1}{\sin x-1}=-3.$$ ▶

181. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\operatorname{tg}^3 x-3\operatorname{tg}x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$.

◀ Разлагая числитель на множители, имеем

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\operatorname{tg}^3 x-3\operatorname{tg}x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\operatorname{tg}x\left(\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\operatorname{tg}x\left(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos x\cos\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\operatorname{tg}x\left(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)\frac{-1}{\cos x\cos\frac{\pi}{3}}=-24.$$ ▶

182. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(a+x)\operatorname{tg}(a-x)-\operatorname{tg}^2 a}{x^2}$.

◀ После очевидных преобразований находим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(a+x)\operatorname{tg}(a-x)-\operatorname{tg}^2 a}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\operatorname{tg}^2 a-\operatorname{tg}^2 x}{1-\operatorname{tg}^2 a\operatorname{tg}^2 x}-\operatorname{tg}^2 a\right)=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 x}{x^2}(\operatorname{tg}^4 a-1)=\operatorname{tg}^4 a-1=-\frac{\cos 2a}{\cos^4 a}.$$ ▶

183. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.

◀ Уничтожая иррациональность в знаменателе, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{1+x\sin x-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\sin x}{x}}.$$

Если $x\to 0$, то $1+x\sin x\to 1$, а тогда (см. пример 144) $\sqrt{1+x\sin x}\to\sqrt{1}=1$. Аналогично $\sqrt{\cos x}\to 1$ при $x\to 0$. Далее, $\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin x/2}{x/2}\right)\to\frac{1}{2}$ при $x\to 0$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\sin x}{x}}=\frac{4}{3}.$$ ▶

184. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

◀ Вычтем и прибавим в числителе единицу, тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 x}+\frac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x-1}{\sin^2 x(\sqrt{\cos x}+1)}+\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{1+\sqrt[3]{\cos x}+\sqrt[3]{\cos^2 x}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\left(-\frac{1}{\sqrt{\cos x}+1}+\frac{1}{1+\sqrt[3]{\cos x}+\sqrt[3]{\cos^2 x}}\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{12}.$$

Здесь воспользовались тем, что $\sqrt[n]{\cos x}\to 1$ при $x\to 0$, а это следует из примеров 175 и 154. ▶

185. Доказать, что

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=0.$$

◀ Действительно,

$$|\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}|=\left|2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2\left|\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\right|<\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}<\frac{1}{2\sqrt{x}}<\varepsilon\quad\text{при}\quad x>\frac{1}{4\varepsilon^2}=E(\varepsilon).\ ▶$$

Докажем следующие утверждения:

А) $\lim\limits_{x\to x_0}a^x=a^{x_0}$, $a>0$; Б) $\lim\limits_{x\to x_0}\ln x=\ln x_0$;

В) $\lim\limits_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)}=a^b$ при условии, что $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: 0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow(0<|u(x)-a|<\varepsilon)\wedge(0<|v(x)-b|<\varepsilon)$.

◀ А) Достаточно рассмотреть случай $a>1$. Имеем

$$|a^x-a^{x_0}|=a^{x_0}|a^{x-x_0}-1|.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}a^{-\frac{1}{n}}=1$, то для произвольного $\varepsilon>0$ существует такое n_0, что

$$1-\frac{\varepsilon}{a^{x_0}}<a^{-\frac{1}{n_0}}<a^{\frac{1}{n_0}}<1+\frac{\varepsilon}{a^{x_0}}.$$

Тогда при $|x-x_0|<\frac{1}{n_0}$ имеем

$$1-\frac{\varepsilon}{a^{x_0}}<a^{-\frac{1}{n_0}}<a^{x-x_0}<a^{\frac{1}{n_0}}<1+\frac{\varepsilon}{a^{x_0}},$$

т. е. $|a^x-a^{x_0}|=a^{x_0}|a^{x-x_0}-1|<\varepsilon$ при $|x-x_0|<\frac{1}{n_0}$.

Б) Имеем

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n},\quad -\frac{1}{n-1}<\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)<-\frac{1}{n}$$

при $n>1$. Таким образом, при $n>1$

$$-\frac{1}{n-1}<\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}.$$

Пусть $\varepsilon>0$ — произвольное число, не превосходящее $\frac{1}{2}$. Тогда существует такое n_0, что

$$-\varepsilon<\ln\left(1-\frac{1}{n_0}\right)<\ln\left(1+\frac{1}{n_0}\right)<\varepsilon.$$

Если взять

$$-\frac{1}{n_0}<\frac{x-x_0}{x_0}<\frac{1}{n_0},$$

го для разности $\ln x - \ln x_0 = \ln\left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right)$ получим следующую оценку:

$$-\varepsilon < \ln\left(1-\frac{1}{n_0}\right) < \ln\left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right) < \ln\left(1+\frac{1}{n_0}\right) < \varepsilon$$

или $|\ln x - \ln x_0| < \varepsilon$, если только $|x-x_0| < x_0\varepsilon$.

В) Согласно условию и пункту Б),

$$v(x)\ln u(x) \to b\ln a \quad \text{при } x \to x_0.$$

Тогда, на основании А), имеем

$$\lim_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{v(x)\ln u(x)} = e^{b\ln a} = a^b = \left(\lim_{x\to x_0} u(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)} \quad ►$$

Найти пределы:

186. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{2x+1}\right)^{x^2}$.

◄ Согласно утверждениям А)—В), имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^{x^2} = \lim_{x\to\infty}\exp\left\{x^2\ln\frac{x+2}{2x+1}\right\}.$$

Поскольку $\ln\frac{x+2}{2x+1} < 0$ при достаточно больших x, а $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = +\infty$, то искомый предел равен 0. ►

Замечание. Решение примеров 187—192, 200, 201, 208, 209, 210 основано на простом примере раскрытия неопределенности 1^∞.

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) = \infty$. Тогда, на основании утверждения В), получаем

$$\lim_{x\to x_0} u^v = \lim_{x\to x_0}\left((1+(u-1))^{\frac{1}{u-1}}\right)^{(u-1)v} = \exp\left\{\lim_{x\to x_0}(u-1)v\right\}.$$

187. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$.

◄ В нашем случае $u = \frac{x^2+1}{x^2-2}$; $v = x^2$; $(u-1)v = \frac{3x^2}{x^2-2}$. Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2} = \exp\left\{\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^2-2}\right\} = e^3. \quad ►$$

188. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

◄ Аналогично предыдущему

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x} = \exp\left\{\lim_{x\to 0} x^2\operatorname{ctg}^2 x\right\} = \exp\left\{\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\operatorname{tg} x}\right)^2\right\} = e. \quad ►$$

189. $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x}$.

◄ Очевидно,

$$\lim_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x} = \exp\left\{\lim_{x\to 1}\sin\pi x\operatorname{ctg}\pi x\right\} = \exp\left\{\lim_{x\to 1}\cos\pi x\right\} = e^{-1}. \quad ►$$

190. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

◄ Имеем

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}} = \exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{1+\sin x}\cdot\frac{1}{\sin x}\right\} = \exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x\,(1+\sin x)}\right\} = e^0 = 1. \ ►$$

191. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$.

◄ На основании примечания о раскрытии неопределенности вида 1^∞, при вычислении предела показательно-степенного выражения u^v имеем

$$(u-1)v = \frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{1+\sin x}\cdot\frac{1}{\sin^3 x}.$$

Поскольку при $x\to 0$ $\operatorname{tg} x-\sin x = \operatorname{tg} x\,(1-\cos x)\sim\frac{x^3}{3}$, $1+\sin x\sim 1$, $\sin^3 x\sim x^3$, то

$$\lim_{x\to 0}(u-1)v = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2}}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}. \ ►$$

192. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$.

◄ Поскольку $\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x} = \frac{1}{x}+1+o\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x\to\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right) = 1$, то

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x = \exp\left\{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)x\right\} = e. \ ►$$

193. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

◄ На основании утверждения В), имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \ln e = 1.$$

Таким образом, $\ln(1+x) = x+o(x)$ при $x\to 0$. ►

194. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}$.

◄ Вынося за скобки в числителе и знаменателе старшие степени x и пользуясь утверждением Б), находим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x+\ln\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{10\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}}\right)} = \frac{1}{5}. \ ►$$

195. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\lg(x+h)+\lg(x-h)-2\lg x}{h^2}$, $x>0$.

◄ На основании свойств логарифмов и утверждения Б), получим

$$\lim_{h\to 0}\frac{\lg(x+h)+\lg(x-h)-2\lg x}{h^2} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\lg\left(1-\frac{h^2}{x^2}\right) =$$

$$= -\frac{\lg e}{x^2}\cdot\lim_{h\to 0}\ln\left(\left(1-\frac{h^2}{x^2}\right)^{-\frac{x^2}{h^2}}\right) = -\frac{\lg e}{x^2}. \ ►$$

196. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$

◀ Пользуясь асимптотическими равенствами (см. примеры 178 и 193), получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-\frac{a^2x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)}{\ln\left(1-\frac{b^2x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{a^2x^2}{2}+o\left(x^2\right)}{-\frac{b^2x^2}{2}+o\left(x^2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{a^2x^2}{b^2x^2}=\frac{a^2}{b^2}. \ \blacktriangleright$$

197. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$, $a>0$. б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\mu-1}{x}$ (μ — действительное).

◀ а) Пусть $a^x-1=t$. Тогда $t\to 0$ при $x\to 0$, поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t\ln a}{\ln(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln a}{\ln(1+t)^{1/t}}=\ln a$$

Таким образом, $a^x=1+x\ln a+o(x)$ при $x\to 0$ ($e^x=1+x+o(x)$).

б) Очевидно, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\mu\ln(1+x)}-1}{\mu\ln(1+x)}\,\frac{\mu\ln(1+x)}{x}=\mu$, так как $\mu\ln(1+x)\to 0$ при $x\to 0$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\mu\ln(1+x)}}{\mu\ln(1+x)}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ (на основании утверждения Б); примеров 197, а) и 193). Таким образом, $(1+x)^\mu=1+\mu x+o(x)$ при $x\to 0$. ▶

198. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^\mu x}{x^2}$ (μ — действительное).

◀ Используя результат предыдущего примера, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^\mu x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+(\cos x-1))^\mu-1}{\cos x-1}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{\mu}{2} \ \blacktriangleright$$

199. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-(\cos x)^{\sqrt{2}}}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}$, $a>0$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x^2}\cos^{2\alpha}x-1}{x^2}$, $\alpha\neq 0$

◀ а) Имеем

$$\frac{e^{x^2}-(\cos x)^{\sqrt{2}}}{x^2}=\frac{e^{x^2}-1}{x^2}+\frac{1-(\cos x)^{\sqrt{2}}}{x^2}$$

На основании примеров 197, а) и 198 находим, что искомый предел равен $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

б) После очевидных преобразований получим

$$\frac{a^x-x^a}{x-a}=a^a\,\frac{a^{x-a}-1}{x-a}-a^{a-1}\,\frac{\left(1+\frac{x-a}{a}\right)^a-1}{\frac{x-a}{a}}.$$

Предел первого слагаемого (см. пример 197, а)) равен $a^a\ln a$. Предел второго слагаемого (см. пример 197, б)) равен a^a. Следовательно,

$$\lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}=a^a\ln a-a^a=a^a\ln\frac{a}{e}.$$

в) Имеем

$$\frac{e^{\alpha x^2}\cos^{2\alpha}x-1}{x^2}=\frac{\left(e^{\alpha x^2}-1\right)\cos^{2\alpha}x+\cos^{2\alpha}x-1}{x^2}=\frac{e^{\alpha x^2}-1}{\alpha x^2}\,\alpha\cos^{2\alpha}x-\frac{1-\cos^{2\alpha}x}{x^2}$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x^2}-1}{\alpha x^2}\,\alpha\cos^{2\alpha}x=\alpha$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^{2\alpha}x}{x^2}=\alpha$, то предел всего выражения равен нулю. ▶

200. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x-a^a}{x-a}$, $a>0$.

◀ Представим функцию $\frac{x^x-a^a}{x-a}=\varphi(x)$ в виде суммы двух слагаемых: $\varphi(x)=\frac{x^x-x^a}{x-a}+\frac{x^a-a^a}{x-a}=\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$. Очевидно,

$$\varphi_1(x)=\frac{e^{a\ln x}\left(e^{(x-a)\ln x}-1\right)}{(x-a)\ln x}\cdot\ln x.$$

Так как при $x \to a$ $e^{a \ln x} \to a^a$, $\frac{e^{(x-a)\ln x}-1}{(x-a)\ln x} \to 1$, $\ln x \to \ln a$, то $\lim\limits_{x\to a} \varphi_1(x) = a^a \ln a$. Далее,

$$\lim_{x\to a} \varphi_2(x) = \lim_{x\to a} \frac{a^a\left(\left(1+\frac{x-a}{a}\right)^a - 1\right)}{\frac{x-a}{a}\cdot a} = a^a \lim_{x\to a} \frac{\left(1+\frac{x-a}{a}\right)^a - 1}{\frac{x-a}{a}} \cdot \frac{1}{a} = a^a.$$

Окончательно получаем $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^x - a^a}{x-a} = a^a \ln a + a^a = a^a \ln(ae)$. ►

201. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1+\sin x\cos\alpha x}{1+\sin x\cos\beta x}\right)^{\operatorname{ctg}^3 x}$.

◄ Ищем предел показательно–степенного выражения u^v; имеем (при $x \to 0$)

$$(u-1)v = \frac{\cos\alpha x - \cos\beta x}{1+\sin x\cos\beta x}\cdot\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{\left(\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}x^2 + o\left(x^2\right)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)^3}{\left(1+(x+o(x))\left(1-\frac{\beta^2x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)\right)\left(x^2+o\left(x^2\right)\right)} = \frac{\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}x^2+o\left(x^2\right)}{x^2+o\left(x^2\right)}.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\sin x\cos\alpha x}{1+\sin x\cos\beta x}\right)^{\operatorname{ctg}^3 x} = \exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}x^2}{x^2}\right\} = \exp\left\{\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}\right\}. \ ►$$

202. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(\pi x^\alpha)}{\sin(\pi x^\beta)}$.

◄ $$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x^\alpha)}{\sin(\pi x^\beta)} = \lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi((x^\alpha-1)+1)}{\sin\pi((x^\beta-1)+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi(x^\alpha-1)}{\sin\pi(x^\beta-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{\pi(x^\alpha-1)}{\pi(x^\beta-1)} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^\alpha-1}{(1+t)^\beta-1} = \lim_{t\to 0}\frac{\alpha t+o(t)}{\beta t+o(t)} = \frac{\alpha}{\beta}$$

(здесь воспользовались результатом решения примера 197, б)). ►

203. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin^2(\pi 2^x)}{\ln(\cos(\pi 2^x))}$.

◄ Полагая $\sin^2(\pi 2^x) = t$, получаем

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2(\pi 2^x)}{\ln(\cos(\pi 2^x))} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{1}{2}\ln(1-t)} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{-\frac{t}{2}+o(t)} = -2$$

(здесь воспользовались формулой $\ln(1-t) = -t + o(t)$). ►

204. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta}$, $a > 0$.

◄ Полагая $x - a = t$ и пользуясь результатом примера 197, б), получаем

$$\lim_{x\to a}\frac{x^\alpha-a^\alpha}{x^\beta-a^\beta} = \lim_{t\to 0} a^{\alpha-\beta}\frac{\left(1+\frac{t}{a}\right)^\alpha-1}{\left(1+\frac{t}{a}\right)^\beta-1} = a^{\alpha-\beta}\lim_{t\to 0}\frac{\alpha\cdot\frac{t}{a}+o(t)}{\beta\cdot\frac{t}{a}+o(t)} = \frac{\alpha}{\beta}a^{\alpha-\beta}. \ ►$$

205. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2}$, $a > 0$.

◄ Используя результат примера 197, а), находим

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2} = \lim_{h\to 0} a^{x-h}\left(\frac{a^h-1}{h}\right)^2 = a^x\ln^2 a. \ ►$$

206. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$.

◀ Используя второй замечательный предел, после очевидных преобразований находим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{b}{x+a}\right)^{\frac{x+a}{b}}\right)^{-b}\left(\left(1+\frac{a}{x+b}\right)^{\frac{x+b}{a}}\right)^{-a}=e^{-a-b}.\ ▶$$

207. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x})$, $x>0$.

◀ Имеем (см. 197, а))

$$\lim_{n\to\infty} n^2(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x})=\lim_{n\to\infty} x^{\frac{1}{n+x}}\,\frac{x^{\frac{1}{n^2+n}}-1}{\frac{1}{n^2+n}}\cdot\frac{n^2}{n^2+n}=\ln x.\ ▶$$

208. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$, $a>0,\ b>0$.

◀ Аналогично предыдущему примеру имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n=\exp\left\{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)n\right\}=$$

$$=\exp\left\{\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}-1}{\frac{1}{n}}+\frac{\sqrt[n]{b}-1}{\frac{1}{n}}\right)\right\}=e^{\frac{1}{2}\ln(ab)}=\sqrt{ab}.\ ▶$$

209. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}$, $a>0,\ b>0,\ c>0$.

◀ Обозначим $f(x)=\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}$. Очевидно, $f(x)\to1$ при $x\to0$. Тогда

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}=\exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x}\right\}.$$

Поскольку

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x}=\frac{1}{a+b+c}\lim_{x\to0}\left(a\,\frac{a^x-1}{x}+b\,\frac{b^x-1}{x}+c\,\frac{c^x-1}{x}\right)=$$

$$=\frac{a\ln a+b\ln b+c\ln c}{a+b+c}=\ln\left((a^ab^bc^c)^{\frac{1}{a+b+c}}\right),$$

то искомый предел равен $(a^ab^bc^c)^{\frac{1}{a+b+c}}$. ▶

210. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{1}{x}}$, $a>0,\ b>0$.

◀ Имеем

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{1}{x}}=\exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x}\right\},$$

где $f(x)=\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\to1$, так как $\lim\limits_{x\to0}a^{x^2}=1$, $\lim\limits_{x\to0}b^{x^2}=1$, $\lim\limits_{x\to0}a^x=1$, $\lim\limits_{x\to0}b^x=1$ (см. утверждение А)). Поскольку

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{a^{x^2}+b^{x^2}-a^x-b^x}{x(a^x+b^x)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{a^x+b^x}\left(\frac{a^{x^2}-1}{x^2}x+\frac{b^{x^2}-1}{x^2}x-\frac{a^x-1}{x}-\frac{b^x-1}{x}\right)=-\frac{1}{2}(\ln a+\ln b),$$

то искомый предел равен $e^{-\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)}=\frac{1}{\sqrt{ab}}$. ▶

211. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^{x^2}-b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2}$, $a>0$, $b>0$.

◀ Поскольку (см. пример 197, а)) $a^{x^2}-b^{x^2}=x^2\ln\frac{a}{b}+o(x^2)$, $(a^x-b^x)^2=\left(x\ln\frac{a}{b}+o(x)\right)^2=x^2\ln^2\frac{a}{b}+o(x^2)$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{x^2}-b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\ln\frac{a}{b}+o(x^2)}{x^2\ln^2\frac{a}{b}+o(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\ln\frac{a}{b}}{x^2\ln^2\frac{a}{b}}=\left(\ln\frac{a}{b}\right)^{-1}. \ ▶$$

212. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$.

◀ Воспользовавшись асимптотическим равенством примера 193, находим

$$\lim_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}(x\ln 2+\ln(1+2^{-x}))\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(x\ln 2+2^{-x}+o(2^{-x}))\left(\frac{3}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=3\ln 2=\ln 8. \ ▶$$

213. Доказать, что

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{a^x}=0,\quad a>1,\ k>0.$$

◀ Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$, $a>1$ (см. пример 70), то одновременно будет и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^k}{a^n}=0.$$

Следовательно, по заданному $\varepsilon>0$ найдется такое натуральное число N, что при $n>N$ выполняется неравенство

$$\frac{(n+1)^k}{a^n}<\varepsilon.$$

Пусть $x>N+1$, положим $n=[x]$ (целая часть x). Тогда $n>N$ и $n\leqslant x<n+1$, так что

$$0<\frac{x^k}{a^x}<\frac{(n+1)^k}{a^n}<\varepsilon.$$

Это и доказывает наше утверждение. ▶

214. Доказать, что

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^\varepsilon}=0,\quad a>1,\ \varepsilon>0.$$

◀ Положим $x^\varepsilon=t$. Тогда

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon}\lim_{t\to+\infty}\frac{\log_a t}{t}.$$

В силу равенства (см. пример 74) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0$, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a(n+1)}{n}=0.$$

Пусть $\varepsilon_1>0$ — произвольное. Тогда существует такое натуральное число N, что при $n>N$

$$0<\frac{\log_a(n+1)}{n}<\varepsilon_1.$$

Для $t>N+1$ положим $n=[t]$. Тогда $n>N$ и $n\leqslant t<n+1$, так что

$$0<\frac{\log_a t}{t}<\frac{\log_a(n+1)}{n}<\varepsilon_1,$$

т. е. $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\log_a t}{t}=0$, а тем самым и $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^\varepsilon}=0$. ▶

Решить примеры (при решении примеров 215, 216 используются формулы

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x},$$

а также формулы гиперболической тригонометрии):

215. а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{th} x}{x}$.

◄ а) На основании примера 197, а), имеем

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim_{x\to 0} e^{-x} \cdot \frac{e^{2x} - 1}{2x} = 1.$$

Отсюда $\operatorname{sh} x = x + o(x)$ при $x \to 0$.

б) На основании а), находим

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ при $x \to 0$.

в) Используя результат решения а) и утверждение А), получаем

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{th} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} x} = 1. \ ►$$

216. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\ln(\operatorname{ch} 3x)}$.

◄ Используя результаты решения примера 215, имеем

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\ln(\operatorname{ch} 3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(x + o(x))^2}{\ln\left(1 + \frac{9}{2}x^2 + o(x^2)\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{(x + o(x))^2}{\frac{9}{2}x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\frac{9}{2}x^2} = \frac{2}{9}. \ ►$$

Доказать следующие равенства:

217. $\lim\limits_{x\to x_0} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x_0$.

◄ Пусть $x_0 > 0$ и $x > 0$. Положим $\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} x_0 = t$. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ имеем

$$|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} x_0| = |t| \leqslant |\operatorname{tg} t| = \left|\frac{x - x_0}{1 + xx_0}\right| < |x - x_0| < \varepsilon,$$

как только $|x - x_0| < \delta(\varepsilon) = \varepsilon$. Таким образом, соотношение доказано для $x_0 > 0$. Если $x_0 < 0$ то доказательство сводится к уже рассмотренному случаю, поскольку $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$ Справедливость требуемого соотношения при $x_0 = 0$ вытекает из очевидного неравенства

$$0 \leqslant |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 0| = |\operatorname{arctg} x| < |x|. \ ►$$

218. $\lim\limits_{x\to x_0} \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg} x_0$.

◄ Пользуясь тождеством $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$, справедливым при всех значениях x, получаем

$$\lim_{x\to x_0} \operatorname{arcctg} x = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x_0 = \operatorname{arcctg} x_0. \ ►$$

219. $\lim\limits_{x\to x_0} \arcsin x = \arcsin x_0$, $-1 \leqslant x_0 \leqslant 1$.

◄ Заметим, что если $0 \leqslant x < 1$, то $\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, а если $0 < x \leqslant 1$, то $\arcsin x = \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. Поэтому для $x_0 \in]0, 1[$ имеем

$$\lim_{x\to x_0} \arcsin x = \lim_{x\to x_0} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arctg} \frac{x_0}{\sqrt{1-x_0^2}} = \arcsin x_0.$$

В точке $x_0 = 1$ имеем (см. пример 218)

$$\lim_{x\to 1-0} \arcsin x = \lim_{x\to 1-0} \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2} = \arcsin 1.$$

Случай $-1 \leqslant x_0 < 0$ сводится к уже рассмотренному, так как $\arcsin(-x) = -\arcsin x$. А поскольку для точки $x_0 = 0$ левое и правое предельные значения равны нулю, то доказательство завершено. ►

220. $\lim\limits_{x \to x_0} \arccos x = \arccos x_0, \ -1 \leqslant x_0 \leqslant 1$.

◄ Поступая аналогично предыдущему примеру и используя тождество

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},$$

получаем требуемое соотношение. ►

221. а) $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$; б) $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$;
в) $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arcctg} x = 0$; г) $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi$.

◄ а) Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное. Тогда из неравенства $x > \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) = E(\varepsilon)$ вытекает, что $\operatorname{arctg} x > \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, т. е.

$$0 < \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x < \varepsilon \quad \forall x > E(\varepsilon).$$

б) Имеем $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$.

в) Используя то, что $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$, получаем

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arcctg} x = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0.$$

г) Аналогично

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arcctg} x = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi. \ ►$$

Найти пределы:

222. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin ax}{x}, \ a \neq 0$.

◄ Поскольку $\lim\limits_{x \to 0} \arcsin x = 0$ и $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{\sin(\arcsin x)} = 1$, то

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin ax}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\arcsin ax}{ax} \cdot a = a. \ ►$$

223. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} ax}{x}, \ a \neq 0$.

◄ Из того, что $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{arctg} x = 0$, следует, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} ax}{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} ax)} \cdot a = a. \ ►$$

224. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\operatorname{arctg}(x+h) - \operatorname{arctg} x}{h}$.

◄ Поскольку $\lim\limits_{h \to 0}(\operatorname{arctg}(x+h) - \operatorname{arctg} x) = 0$, то

$$\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{arctg}(x+h) - \operatorname{arctg} x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x+h) - \operatorname{arctg} x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h(1 + x^2 + hx)} = \frac{1}{1 + x^2}. \ ►$$

225. а) $\lim\limits_{x \to -0} \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$; б) $\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$.

◄ а) Если $x \to -0$, то $\frac{1}{x} \to -\infty$, а $e^{\frac{1}{x}} \to 0$, поэтому $\lim\limits_{x \to -0} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = 1$.

б) Если же $x \to +0$, то $\frac{1}{x} \to +\infty$ и $\frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \to 0$, т. е. искомый предел равен 0. ►

226. $\lim\limits_{n \to \infty} \sin(\pi\sqrt{n^2 + 1})$.

◀ Записав последовательность $y_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ в виде $y_n = \sin(\pi(\sqrt{n^2+1} - n + n))$, получим

$$\lim_{n\to\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = \lim_{n\to\infty} \sin\left((\pi\sqrt{n^2+1} - \pi n) + \pi n\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} (-1)^n \sin\left(\pi(\sqrt{n^2+1} - n)\right) = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n} = 0. \ ▶$$

227. $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$.

◀ Аналогично примеру 226 имеем

$$\lim_{n\to\infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) = \lim_{n\to\infty} \sin^2\left((\pi\sqrt{n^2+n} - n\pi) + n\pi\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sin^2\left(\pi(\sqrt{n^2+n} - n)\right) = \lim_{n\to\infty} \sin^2\frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = 1. \ ▶$$

228. Если $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to A} \psi(x) = B$, то следует ли отсюда, что $\lim\limits_{x\to a} \psi(\varphi(x)) = B$?

Рассмотреть пример: $\varphi(x) = \dfrac{1}{q}$ при $x = \dfrac{p}{q}$, где p и q — взаимно простые числа и $\varphi(x) = 0$ при x иррациональном; $\psi(x) = 1$ при $x \neq 0$ и $\psi(x) = 0$ при $x = 0$, причем $x \to 0$.

◀ Из условия примера следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$, что

$$|\psi(u) - B| < \varepsilon, \tag{1}$$

как только

$$0 < |u - A| < \sigma, \tag{2}$$

т. е. неравенство (1) выполняется для всех значений u из σ-окрестности точки A, исключая саму точку A.

Далее, согласно условию задачи, для произвольного $\sigma > 0$, в том числе и для σ из неравенства (2), существует такое $\delta_1(\sigma(\varepsilon)) = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию

$$0 < |x - a| < \delta(\varepsilon), \tag{3}$$

функция $u = \varphi(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|\varphi(x) - A| < \sigma, \tag{4}$$

причем, не исключается случай, когда $\varphi(x) = A$.

Но при $u = \varphi(x) = A$ функция $\psi(u) = \psi(\varphi(x))$ может быть вовсе не определена или же определена, но ее значение $\psi(A) \neq \lim\limits_{u\to A} \psi(u)$. В обоих случаях неравенство (3) не обеспечивает выполнение неравенства (1). Для того чтобы из условий $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = A$, $\lim\limits_{x\to A} \psi(x) = B$ вытекало равенство $\lim\limits_{x\to a} \psi(\varphi(x)) = B$, достаточно, чтобы $\varphi(x) \neq A$ при $x \neq a$. В предложенном примере это условие не выполняется. ▶

229. Пусть для всех $x \in \,]x_0, x_0+1]$, где x_0 — фиксировано, выполнены условия:

1) $P_{nk}(x) \geqslant 0$, $k = \overline{1, n}$; 2) $\sum\limits_{k=1}^{n} P_{nk}(x) \equiv 1$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} P_{nk}(x) = 0$ при каждом фиксированном k; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = l$.

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = l$, где $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} P_{nk}(x)\, u_k(x)$.

◀ Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное. Из условия 4) следует существование такого числа $N = N(\varepsilon, x) > 0$, что $|u_n(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $n > N$. Из этого же условия следует существование такого числа $M > 0$, что

$$|u_n(x)| \leqslant M, \quad |u_n(x) - l| \leqslant 2M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Из условия 3) вытекает существование такого числа $n_0 = n_0(\varepsilon, x) > N$, что

$$P_{nk}(x) < \frac{\varepsilon}{4MN}, \quad k = \overline{1, N}, \quad \forall n > n_0.$$

Из этих неравенств и условий 1), 2) следует неравенство

$$|t_n - l| = \left|\sum_{k=1}^{n} P_{nk}(x)u_k(x) - l\sum_{k=1}^{n} P_{nk}(x)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} P_{nk}(x)|u_k(x) - l| =$$

$$= P_{n1}(x)|u_1(x) - l| + P_{n2}(x)|u_2(x) - l| + \ldots + P_{nN}(x)|u_N(x) - l| +$$

$$+ P_{nN+1}|u_{N+1}(x) - l| + \ldots + P_{nn}(x)|u_n(x) - l| < \frac{\varepsilon}{4NM}N2M +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2}(P_{nN+1}(x) + \ldots + P_{nn}(x)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n > n_0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = l$. ►

230. Доказать теоремы Коши: *если функция* $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *ограничена в каждом конечном интервале* $]a, b[$, *то*

а) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1) - f(x))$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x))^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x+1)}{f(x)}$, $f(x) \geqslant c > 0$,

предполагая, что пределы в правых частях равенств существуют.

в) *Доказать, что если* $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1) - f(x)) = +\infty$ *и* f *ограничена снизу на каждом конечном интервале* $]a, b[$, *то*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

◄ а) Для доказательства воспользуемся примером 229, полагая при этом, что

$$P_{n1}(x) = \frac{x+1}{x+n}, \quad P_{nk}(x) = \frac{1}{x+n}, \quad k = \overline{2, n}, \quad 0 < x_0 < x \leqslant x_0 + 1, \quad x_0 > a;$$

$$u_1(x) = \frac{f(x+1)}{x+1}, \quad u_n(x) = f(x+n) - f(x+n-1), \quad n = 2, 3, \ldots .$$

Тогда $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} P_{nk}(x)u_k(x) = \frac{f(x+n)}{x+n}$. Все условия теоремы выполнены, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x+n)}{x+n} = \lim_{n\to\infty}(f(x+n) - f(x+n-1)) = l.$$

Поскольку l не зависит от x, то из последнего равенства следует, что

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}(f(x+1) - f(x)) = l.$$

б) Поскольку $f(x) \geqslant c > 0$, то определена функция $F(x) = \ln f(x)$. Пусть $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = l$. Тогда, пользуясь теоремой пункта а) и возможностью предельного перехода в показателе степени, получаем требуемое

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x))^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \exp\left\{\frac{\ln f(x)}{x}\right\} = \exp\left\{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln f(x)}{x}\right\} =$$

$$= \exp\left\{\lim_{x\to+\infty}(\ln f(x+1) - \ln f(x))\right\} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = l.$$

в) Для произвольного $E > 0$ существует такое число $x_0 > 0$, что при $x > x_0$

$$f(x+1) - f(x) > 2E.$$

Отсюда следует, что $f(x+n) - f(x) > 2nE$ и

$$\frac{f(x+n)}{x+n} > \frac{f(x) + 2nE}{x+n}.$$

Поскольку $f(x) \geqslant c > 0$ при $x_0 < x \leqslant x_0 + 1$, то существует такое число n_0, что

$$\frac{f(x+n)}{x+n} > E$$

при $\forall n > n_0$, т. е. если $t = x + n$, $x_0 < x \leqslant x_0 + 1$, $n > n_0$, то

$$\frac{f(t)}{t} > E,$$

что эквивалентно требуемому утверждению. ►

231. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

◄ а) Воспользуемся результатом примера 230, б), находим

$$\lim_{x\to+\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right) = 1.$$

б) Аналогично а) получаем

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x}} = 1. \ ►$$

232. Доказать, что если: 1) функция f определена в области $x > a$; 2) ограничена в каждой области $a < x < b$; 3) существует предел

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{x^m} = l$$

конечный или бесконечный, то

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^{m+1}} = \frac{l}{m+1}.$$

◄ Пусть l — конечное. Тогда из условия следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x+n) - f(x+n-1)}{(x+n)^{m+1} - (x+n-1)^{m+1}} = \frac{l}{m+1}.$$

Воспользуемся примером 229, полагая

$$P_{n1}(x) = \frac{(x+1)^{m+1}}{(x+n)^{m+1}}, \quad P_{nk}(x) = \frac{(x+k)^{m+1} - (x+k-1)^{m+1}}{(x+n)^{m+1}},$$

$$k = \overline{2, n}, \quad 0 < x_0 < x \leqslant x_0 + 1, \quad x_0 > a,$$

$$u_1(x) = \frac{f(x+1)}{(x+1)^{m+1}}, \quad u_n(x) = \frac{f(x+n) - f(x+n-1)}{(x+n)^{m+1} - (x+n-1)^{m+1}}, \quad n = 2, 3, \ldots,$$

получим $t_n = \frac{f(x+n)}{(x+n)^{m+1}}$. Все условия примера 229 выполняются, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x+n)}{(x+n)^{m+1}} = \lim_{n\to\infty} u_n(x) = \frac{l}{m+1},$$

а поскольку предел $\frac{l}{m+1}$ не зависит от x, то последнее равенство эквивалентно тому, что

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t^{m+1}} = \frac{l}{m+1}.$$

Пусть $l = +\infty$. Тогда из условия 3) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(x+n)^{m+1} - (x+n-1)^{m+1}}{f(x+n) - f(x+n-1)} = 0,$$

а поскольку последовательность

$$\left((x+n)^{m+1} - (x+n-1)^{m+1}\right)_{n=1}^{\infty},$$

монотонно возрастая, стремится к $+\infty$, то таким свойством обладает и последовательность

$$(f(x+n) - f(x+n-1))_{n=1}^{\infty}.$$

Положив

$$P_{n1}(x)=\frac{f(x+1)}{f(x+n)},\qquad P_{nk}(x)=\frac{f(x+k)-f(x+k-1)}{f(x+n)},$$

$$k=\overline{2,\,n},\quad 0<x_0<x\leqslant x_0+1,\quad x_0>a,$$

$$u_1(x)=\frac{(x+1)^{m+1}}{f(x+1)},\quad u_n(x)=\frac{(x+n)^{m+1}-(x+n-1)^{m+1}}{f(x+n)-f(x+n-1)},\quad n=2,\,3,\,\ldots,$$

и воспользовавшись примером 229, получим

$$t_n=\sum_{k=1}^{n}P_{nk}(x)\,u_k(x)=\frac{(x+n)^{m+1}}{f(x+n)}\to 0\quad\text{при}\quad n\to\infty,$$

откуда и следует требуемое утверждение. ►

233. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(2\pi e n!)=2\pi$.

◄ Имеем (см. пример 80) $e=1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n\,n!}$, $0<\theta_n<1$, причем

$$\theta_n=\frac{e-y_n}{\frac{1}{n\cdot n!}}=n\cdot n!(e-y_n)=n\cdot n!\left(1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{\theta_{n+1}}{(n+1)(n+1)!}-y_n\right)=$$

$$=n\cdot n!\left(\frac{1}{(n+1)!}+\frac{\theta_{n+1}}{(n+1)(n+1)!}\right)=\frac{n}{n+1}+\frac{n\theta_{n+1}}{(n+1)^2}\to 1\quad\text{при}\quad n\to\infty.$$

Пользуясь этим, получаем

$$\lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi e n!)=\lim_{n\to\infty} n\sin\left(2\pi n!\,y_n+\frac{2\pi\theta_n}{n}\right)=\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{2\pi\theta_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{2\pi\theta_n}{n}}{\frac{2\pi\theta_n}{n}}\cdot 2\pi\theta_n=2\pi.\ ►$$

Построить графики функций:

234. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n}$, $x>0$

◄ Если $0<x\leqslant 1$, то $0<\sqrt[n]{1+x^n}\leqslant\sqrt[n]{2}$, и так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n}=1$. Если же $1<x<+\infty$, то $\sqrt[n]{1+x^n}=x\sqrt[n]{\frac{1}{x^n}+1}$ и $\sqrt[n]{\frac{1}{x^n}+1}\to 1$ при $n\to\infty$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n}=x.$$

Следовательно $y=\begin{cases}1, & \text{если } 0<x\leqslant 1,\\ x, & \text{если } 1<x<+\infty\end{cases}$

Построить график предлагаем читателю ►

235. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$, $x\geqslant 0$.

◄ Имеем

$$1\leqslant\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}<\sqrt[n]{3},\quad\text{если}\quad 0\leqslant x\leqslant 1;$$

$$x<\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}=x\sqrt[n]{\left(\frac{1}{x}\right)^n+\left(\frac{x}{2}\right)^n+1}<x\sqrt[n]{3},\quad\text{если}\quad 1<x<2;$$

$$\frac{x^2}{2}<\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}=\frac{x^2}{2}\sqrt[n]{\left(\frac{2}{x^2}\right)^n+\left(\frac{2}{x}\right)^n+1}<\frac{x^2}{2}\sqrt[n]{3},\quad\text{если}\quad 2\leqslant x<+\infty.$$

А так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1$, то окончательно имеем

$$y=\begin{cases}1, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x, & \text{если } 1<x<2,\\ \frac{x^2}{2}, & \text{если } 2\leqslant x<+\infty.\end{cases}$$

Построить график предлагаем читателю. ►

236. Построить кривую

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x|^n + |y|^n} = 1$$

◄ Поскольку $0 < \frac{|x|^n+|y|^n}{\max(|x|^n,\ |y|^n)} \leqslant 2$, если $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$, $|x|+|y| \neq 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n + |y|^n}{\max(|x|^n,\ |y|^n)}} = 1$$

(см. пример 73), и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x|^n + |y|^n} = \lim_{n\to\infty} \max(|x|,\ |y|) \sqrt[n]{\frac{|x|^n + |y|^n}{\max(|x|^n,\ |y|^n)}} = \max(|x|,\ |y|),$$

т. е. $\max(|x|,\ |y|) = 1$ и графиком служит контур квадрата с вершинами в точках $(\pm 1,\ \pm 1)$. Это следует из того, что точки $A(\pm 1,\ |y|)$, $|y| \leqslant 1$, $B(|x|,\ \pm 1)$, $|x| < 1$, принадлежат графику. ►

Найти следующие пределы:

237. $\lim\limits_{n\to\infty}((1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2^n}))$, если $|x| < 1$.

◄ Умножив и разделив выражение, находящееся под знаком предела, на $1-x$, получим

$\lim\limits_{n\to\infty}((1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2^n})) =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2^n})}{1-x} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} = \frac{1}{1-x}. \ ►$$

238. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^n}\right)$, $x \neq 0$.

◄ Умножив и разделив на $2^n \sin\frac{x}{2^n}$ выражение, предел которого ищем, найдем

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdot 2^{n-1}\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2^n \sin\frac{x}{2^n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x}. \ ►$$

239. Пусть $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1$, где $\psi(x) > 0$ и $\alpha_{mn} \rightrightarrows 0$, $m \in \mathbb{N}$, при $n\to\infty$, т. е. $|\alpha_{mn}| < \varepsilon$ при $m \in \mathbb{N}$ и $n > N(\varepsilon)$.

Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}(\varphi(\alpha_{1n}) + \varphi(\alpha_{2n}) + \ldots + \varphi(\alpha_{nn})) = \lim_{n\to\infty}(\psi(\alpha_{1n}) + \psi(\alpha_{2n}) + \ldots + \psi(\alpha_{nn})), \quad (1)$$

предполагая, что предел в правой части равенства (1) существует.

◄ Поскольку $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1$ и $\alpha_{mn} \rightrightarrows 0$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)$ такое, что $\forall n > N$

$$1 - \varepsilon < \frac{\varphi(\alpha_{mn})}{\psi(\alpha_{mn})} < 1 + \varepsilon,\ m = \overline{1, n},$$

откуда, в силу условия $\psi(x) > 0$, имеем

$$1 - \varepsilon < \frac{\varphi(\alpha_{1n}) + \varphi(\alpha_{2n}) + \ldots + \varphi(\alpha_{nn})}{\psi(\alpha_{1n}) + \psi(\alpha_{2n}) + \ldots + \psi(\alpha_{nn})} < 1 + \varepsilon.$$

Исходя из этого неравенства, а также из условия существования предела в правой части равенства (1), заключаем, что предел числителя существует и равен пределу знаменателя. ►

Используя равенство (1) предыдущего примера, найти следующие пределы:

240. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{k}{n^2}} - 1\right)$.

◀ Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{1+\frac{k}{n^2}}-1}{\frac{k}{3n^2}} = 1$ (см. пример 158), а $\frac{k}{n^2} \rightrightarrows 0$ при $n \to \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt[3]{1+\frac{k}{n^2}} - 1 \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3n^2} = \frac{1}{6} \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{n^2} = \frac{1}{6}. \ \blacktriangleright$$

241. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \sin \dfrac{ka}{n^2}$.

◀ Здесь $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin \frac{ka}{n^2}}{\frac{ka}{n^2}} = 1$ и $\frac{ka}{n^2} \rightrightarrows 0$ при $n \to \infty$, поэтому имеем

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{ka}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{ka}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{an(n+1)}{2n^2} = \frac{a}{2}. \ \blacktriangleright$$

242. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(a^{\frac{k}{n^2}} - 1 \right)$, $a > 1$.

◀ Имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^{\frac{k}{n^2}} - 1}{\frac{k}{n^2} \ln a} = 1$ (см. пример 197, а)) и $\frac{k}{n^2} \rightrightarrows 0$ при $n \to \infty$. Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(a^{\frac{k}{n^2}} - 1 \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k \ln a}{n^2} = \ln a \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2} \ln a. \ \blacktriangleright$$

243. $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{k}{n^2}\right)$.

◀ Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) = \exp\left\{ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \right\}.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)}{\frac{k}{n^2}} = 1$ и $\frac{k}{n^2} \rightrightarrows 0$ при $n \to \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) = \exp\left\{ \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} \right\} = e^{\frac{1}{2}} \ \blacktriangleright$$

244. $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \cos \dfrac{ka}{n\sqrt{n}}$.

◀ Легко убедиться, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\cos \frac{ka}{n\sqrt{n}}\right)}{-\frac{k^2a^2}{2n^3}} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{k^2a^2}{2n^3} \rightrightarrows 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \cos \frac{ka}{n\sqrt{n}} = \exp\left\{ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln \cos \frac{ka}{n\sqrt{n}} \right\} =$$

$$= \exp\left\{ -\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2a^2}{2n^3} \right\} = \exp\left\{ -\lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)a^2}{2 \cdot 6 \cdot n^3} \right\} = e^{-\frac{a^2}{6}}. \ \blacktriangleright$$

В примерах 245 и 246 перейти к пределу в показателе степени на основании утверждения А).

245. Последовательность (x_n) задана равенствами $x_1 = \sqrt{a}$, $x_2 = \sqrt{a+\sqrt{a}}$, $x_3 = \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}$, ..., где $a > 0$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

◀ Заметим, что $x_n = \sqrt{a + x_{n-1}}$, $n = 2, 3, \ldots$. Применяя метод математической индукции, убеждаемся, что последовательность $x_n = \sqrt{a+x_{n-1}}$ монотонно возрастает и ограничена сверху, например, числом $A > \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$. Следовательно, по известной теореме, имеем

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l \geqslant 0,$$

причем $l = \sqrt{a+l}$, откуда находим, что

$$l = \frac{\sqrt{4a+1}+1}{2}. \ ▶$$

246. Если $\omega_h[f]$ есть колебание функции f на сегменте $|x-\xi| \leqslant h$, $h > 0$, то число

$$\omega_0[f] = \lim_{h\to 0} \omega_h[f]$$

называется *колебанием функции f в точке ξ*.

Определить колебание функции f в точке $x = 0$, если:

а) $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$; б) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\cos^2\dfrac{1}{x}$; в) $f(x) = x\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right)$; г) $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$

◀ Согласно определению колебания функции в точке, имеем:

а) $\omega_h[f] = \sup\limits_{|x|\leqslant h}\left\{\sin\frac{1}{x}\right\} - \inf\limits_{|x|\leqslant h}\left\{\sin\frac{1}{x}\right\} = 1-(-1) = 2$,

$$\omega_0[f] = \lim_{h\to 0}\omega_h[f] = \lim_{h\to 0} 2 = 2;$$

б) $\omega_h[f] = \sup\limits_{|x|\leqslant h}\left\{\frac{1}{x^2}\cos^2\frac{1}{x}\right\} - \inf\limits_{|x|\leqslant h}\left\{\frac{1}{x^2}\cos^2\frac{1}{x}\right\} \geqslant \sup\limits_{\frac{1}{|k|\pi}\leqslant|x|\leqslant h}\left\{\frac{1}{x^2}\cos^2\frac{1}{x}\right\} = k^2\pi^2$, где k — целые числа такие, что $|k|\pi \geqslant \frac{1}{h}$. Поэтому

$$\omega_h[f] = +\infty, \qquad \omega_0[f] = +\infty;$$

в) $0 \leqslant \omega_h[f] = \sup\limits_{|x|\leqslant h}\left\{x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)\right\} - \inf\limits_{|x|\leqslant h}\left\{x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)\right\} \leqslant 3h-(-3h) = 6h$,

$$\omega_h[f] = 0, \qquad \omega_0[f] = 0;$$

г) $\omega_h[f] = \sup\limits_{|x|\leqslant h}\left\{\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right\} - \inf\limits_{|x|\leqslant h}\left\{\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right\} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$;

$$\omega_0[f] = \lim_{h\to 0}\omega_h[f] = \lim_{h\to 0} 1 = 1. \ ▶$$

247. Определить $l = \varliminf\limits_{x\to 0} f(x)$ и $L = \varlimsup\limits_{x\to 0} f(x)$, если

$$f(x) = \sin^2\frac{1}{x} + \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}.$$

◀ Поскольку $\inf\left\{\sin^2\frac{1}{x}\right\} = 0$ при $x = x_n = -\frac{1}{n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$, а

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x_n} = \inf\left\{\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right\} = -1,$$

то

$$l = \varliminf_{x\to 0}\left(\sin^2\frac{1}{x} + \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sin^2 n\pi + \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(-n\pi)\right) = -1.$$

Аналогично, поскольку $\sup\left\{\sin^2\frac{1}{x}\right\} = 1$ при $x = x_n = \frac{2}{\pi(1+2n)}$, $n \in \mathbb{N}$, а $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x_n} = \sup\left\{\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right\} = 1$, то

$$L = \overline{\lim_{x\to 0}}\left(\sin^2\frac{1}{x} + \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sin^2\frac{\pi(1+2n)}{2} + \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\pi(1+2n)}{2}\right) = 1. \ ▶$$

248. Пусть функция $z \mapsto e^z$, где $z = x + iy$, определена посредством равенства

$$e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n. \tag{1}$$

Показать, что

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y). \tag{2}$$

Вывести отсюда формулу Эйлера:

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \qquad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}.$$

◀ Представим последовательность $n \mapsto \left(1 + \frac{x+iy}{n}\right)^n$ в тригонометрической форме

$$n \mapsto \left(\left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^n,$$

где $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{n+x}$, а затем применим формулу Муавра. В результате приходим к последовательности

$$n \mapsto \left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Поскольку $\left(1 + \frac{2x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{2x/n + o(1/n)}} \to e$, $\frac{n}{2}\left(\frac{2x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \to x$ при $n \to \infty$, то

$$\left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2x/n+o(1/n)}}\right)^{\frac{n}{2}\left(\frac{2x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \to e^x$$

при $n \to \infty$.

Далее, согласно примеру 223,

$$n\varphi = n\operatorname{arctg}\frac{y}{n+x} = n\left(\frac{y}{n+x} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = y + o(1)$$

при $n \to \infty$. Поэтому (см. пример 175, а), б)) $\cos n\varphi \to \cos y$, $\sin n\varphi \to \sin y$ при $n \to \infty$.

Таким образом

$$\left(1 + \frac{x+iy}{n}\right)^n \to e^x(\cos y + i\sin y)$$

при $n \to \infty$, что доказывает равенство (2).

Полагая в равенстве (2) $x = 0$, получаем

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y. \tag{3}$$

Заменив в последнем равенстве y на $-y$, имеем

$$e^{-iy} = \cos y - i\sin y. \tag{4}$$

Из равенств (3) и (4) находим

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \qquad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}. \ ▶$$

Упражнения для самостоятельной работы

Найти точную верхнюю и точную нижнюю грани функции $f : E \to F$. Указать точки $x, y \in E$ (если они существуют) такие, что $f(x) = \sup\limits_E\{f(x)\}$, $f(y) = \inf\limits_E\{f(x)\}$.

91. $f(x) = \frac{1}{x-2}$, $|x| \leqslant 1$. **92.** $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in]-1, 1[\setminus\{0\}$.

93. $f(x) = x^2$, $1 < x < 2$. **94.** $f(x) = x^2$, $-1 \leqslant x \leqslant 2$.

95. $f(x) = \begin{cases} x^3, \ 0 \leqslant x < 1, \\ -(x-1)^2, \ 1 \leqslant x < 2. \end{cases}$ **96.** $f(x) = \arcsin(\sin x)$ $x \in \mathbb{R}$.

97. $f(x) = \arccos(\cos x)$, $x \in \mathbb{R}$. **98.** $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

99. Определить колебание функции $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, на интервалах: а) $]10^{-7}, 10^{-6}[$; б) $]10^{-n-1}, 10^{-n}[$; в) $]10^{-n}, 10^{n}[$; г) $]10^{6}, 10^{7}[$; д) $]10^{n}, 10^{n+1}[$.

100. Определить колебание функции $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ на интервалах: а) $\left]\frac{1}{40\pi}, \frac{1}{20\pi}\right[$; б) $\left]\frac{1}{40\pi}, \frac{1}{39\pi}\right[$; в) $\left]\frac{2}{2n\pi+\pi}, \frac{1}{n\pi}\right[$; г) $\left]\frac{4}{4n\pi+\pi}, \frac{1}{n\pi}\right[$.

Показать, что:

101. $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + o(x^2)$ при $x \to 0$.

102. $x + \cos x = O(1)$ при $x \to 0$.

103. $e^{-1}(1+x^{-1})^x = 1 - \frac{1}{2}x^{-1} + O(x^{-2})$, $x \geqslant 2$.

104. $(1 + x + O(x^{-1}))^x = ex^x + O(x^{x-1})$ при $x \to \infty$.

105. $(xe^{2x-n})^n = O(e^{x^2+x})$, $x > 0$.

106. а) $e^{o(x)} = 1 + o(x)$, $x \to 0$; б) $o(f(x) \cdot g(x)) = o(f(x)) \cdot O(g(x))$, $x \to x_0$.

107. $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0} + \frac{1}{n}\sqrt[n]{x_0^{1-n}}(x - x_0) + o(x - x_0)$, $x \to x_0$.

Найти пределы:

108. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} + \sqrt[5]{1+5x} - 2}{\sqrt[6]{1+6x} - 1}$. **109.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+3x} + \sqrt[3]{1+x} - \sqrt[5]{1+x} - \sqrt[7]{1+x}}{\sqrt[4]{1+2x} + x - \sqrt[6]{1+x}}$.

110. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{a^2+ax+x^2} - \sqrt[3]{a^2-ax+x^2}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}$. **111.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x - x}{\arcsin x + x}$. **112.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{\cos \alpha x} - \sqrt[m]{\cos \beta x}}{\sin^2 x}$.

113. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \ldots + a_m^x}{m}\right)^{\frac{1}{x}}$, $a_i > 0$. **114.** $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sqrt[m]{1 + \frac{k^2}{n^4}} - 1\right)$.

115. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sqrt[m]{1 + \frac{k^p}{n^{p+1}}} - 1\right)$, $p \in \mathbb{N}$. **116.** $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \sin\frac{k^p x}{n^{p+1}}$, $p \in \mathbb{N}$.

117. $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^p}{n^{p+1}}\right)$, $p \in \mathbb{N}$.

118. Доказать неравенства

$$\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{x_k}} \leqslant \prod_{k=1}^{n} x_k^{\lambda_k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k,$$

где $x_k > 0$, $0 \leqslant \lambda_k \leqslant 1$ $(k = \overline{1, n})$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

119. Пусть: 1) $0 \leqslant \lambda_{kn} \leqslant 1$; 2) $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_{kn} = 1$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_{nk} = 0$ при каждом фиксированном k; 4) $x_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} x_k^{\lambda_{kn}} = l$.

Найти пределы:

120. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin x)(\cos^2 x + 1) - \frac{1}{2}\sin 2x}{\cos^2 x}$.

121. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{x^2}}{x^2}$. **122.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^2}\cos x - 1}{x^2}$. **123.** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1+x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

124. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^x$. **125.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{\ln(1+x^3)}$. **126.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{\sqrt[3]{1+2x}} - 1}{x}$.

Найти $l = \underline{\lim}_{n\to\infty} f(x)$ и $L = \overline{\lim}_{n\to\infty} f(x)$, если:

127. $f(x) = \sin x + \cos(x\sqrt{2})$. **128.** $f(x) = \sin^2(x\sqrt{2}) + b^2\cos^2(x\sqrt{2})$.

129. $f(x) = \sin^2(x\sqrt{2}) - (1+\sin^2 x)^2$. **130.** $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \sin^2 x$.

131. $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x + \sin^2 x$. **132.** $f(x) = \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{2+\sin^2 x}$.

§ 8. Непрерывность функций

8.1. Определение непрерывности функции.

Определение 1. *Функция $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, называется непрерывной в точке $x_0 \in X$, если выполняется одно из эквивалентных условий:*

1) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : (\forall x \in X)\,(|x - x_0| < \delta) \Rightarrow$

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon; \tag{1}$$

2) *для произвольной последовательности (x_n) значений $x_n \in X$, сходящейся при $n \to \infty$ к точке x_0, соответствующая последовательность $(f(x_n))$ значений функции сходится при $n \to \infty$ к $f(x_0)$;*

3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ *или* $f(x) - f(x_0) \to 0$ *при* $x - x_0 \to 0$;

4) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ *такое, что*

$$f(]x_0 - \delta,\ x_0 + \delta[) \subset]f(x_0) - \varepsilon,\ f(x_0) + \varepsilon[$$

или, что то же самое,

$$f :]x_0 - \delta,\ x_0 + \delta[\to]f(x_0) - \varepsilon,\ f(x_0) + \varepsilon[.$$

Из определения непрерывности функции f в точке x_0 следует, что

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right).$$

Определение 2. *Если функция f непрерывна в каждой точке интервала $]a, b[$, то функция f называется непрерывной на этом интервале.*

Определение 3. *Функция $f :]a, x_0] \to \mathbb{R}$ ($f : [x_0, b[\to \mathbb{R}$) называется непрерывной в точке x_0 слева (справа), если выполняется одно из эквивалентных условий:*

1) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ *такое, что неравенство* (1) *выполняется, как только* $x_0 - \delta < x \leqslant x_0$ ($x_0 \leqslant x < x_0 + \delta$);

2) *для произвольной последовательности (x_n) значений $x_n \in]a, x_0]$ ($x_n \in [x_0, b[$), сходящейся к точке x_0, соответствующая последовательность $(f(x_n))$ значений функции f сходится к $f(x_0)$;*

3) $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0)$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)\right)$ *или, короче, если* $f(x_0 - 0) = f(x_0)$ ($f(x_0 + 0) = f(x_0)$);

4) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ *такое, что*

$$f(]x_0 - \delta,\ x_0]) \subset]f(x_0) - \varepsilon,\ f(x_0) + \varepsilon[\quad (f([x_0,\ x_0 + \delta[) \subset]f(x_0) - \varepsilon,\ f(x_0) + \varepsilon[).$$

Функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна во внутренней точке $x_0 \in X$ тогда и только тогда, когда она в этой точке непрерывна слева и справа.

Теорема 1. Если функция $g : T \to X$, $T \subset \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, непрерывна в точке $t_0 \in T$, а функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $x_0 \in X$, где $x_0 = g(t_0)$, то композиция $f \circ g : T \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке t_0.

Теорема 2. Пусть функции $f : X \to \mathbb{R}$ и $g : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, непрерывны в точке $x_0 \in X$. Тогда функции

$$f + g,\ fg \text{ и } \frac{f}{g} \quad (g(x_0) \neq 0)$$

непрерывны в точке x_0.

Все элементарные функции непрерывны в области существования.

8.2. Непрерывность вектор–функций и функциональных матриц.

Определение. *Вектор–функция* $x \mapsto \mathbf{f}(x)$, $\mathbf{f}(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, $x \in X$, *называется непрерывной в точке* $x_0 \in X$, *если*

$$\lim_{x \to x_0} \mathbf{f}(x) = \mathbf{f}(x_0).$$

Функциональная матрица $x \mapsto A(x)$, *где* $A(x) = (a_{ij}(x))$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, *называется непрерывной в точке* $x_0 \in X$, *если*

$$\lim_{x \to x_0} A(x) = A(x_0).$$

Вектор–функция $\mathbf{f}$ *непрерывна в точке* $x_0 \in X$ *только и только тогда, когда в этой точке непрерывна каждая из функций* $x \mapsto f_i(x)$.

Функциональная матрица $x \mapsto A(x) = (a_{ij}(x))$ *непрерывна в точке* $x_0 \in X$ *тогда и только тогда, когда в этой точке непрерывны все элементы матрицы* $x \mapsto a_{ij}(x)$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

8.3. Точки разрыва функции и их классификация. Особые точки функции.

Определение. *Если функция* $f : X \to \mathbb{R}$ *не является непрерывной в точке* $x_0 \in X$, *то говорят, что она терпит разрыв в этой точке. При этом точка* x_0, *называется точкой разрыва функции* f.

Точки разрыва функции f классифицируем следующим образом:

1. Пусть $x_0 \in X$ — точка разрыва функции f и существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, конечный или бесконечный. При этом:

а) если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ конечный, то x_0 называем *точкой устранимого разрыва* функции f;

б) если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, то x_0 называем *точкой разрыва типа полюса*.

2. Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ не существует, то точку $x_0 \in X$ называем *точкой существенного разрыва* функции f. При этом:

а) если существуют конечные пределы $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ $(f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0))$, то точку x_0 называем *точкой разрыва первого рода* функции f;

б) все остальные точки существенного разрыва называем *точками разрыва второго рода* функции f.

Поскольку в изолированной точке $x_0 \in X$ функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна, то ее точками разрыва могут быть лишь предельные точки $x \in X$.

8.4. Основные свойства непрерывных функций.

Определение 1. *Функция* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *называется непрерывной на сегменте* $[a, b]$ *если она непрерывна на интервале* $]a, b[$ *и в точке* a *непрерывна справа, а в точке* b — *слева.*

Пусть функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, тогда: 1) она ограничена на этом сегменте; 2) если $m = \inf\limits_{x \in [a,b]} \{f(x)\}$, $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} \{f(x)\}$, то на сегменте $[a, b]$ существуют точки x_1 и x_2 такие, что $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$ (*теорема Вейерштрасса*); 3) принимает на каждом сегменте $[\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, все промежуточные значения между $f(\alpha)$ и $f(\beta)$ (*теорема Коши*). В частности, если $f(\alpha)f(\beta) < 0$, то найдется такое значение γ $(\alpha < \gamma < \beta)$, что $f(\gamma) = 0$.

Определение 2. *Функция* $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ *называется кусочно–непрерывной на интервале* $]a, b[$, *если она непрерывна во всех точках этого интервала, кроме конечного числа точек разрыва первого рода и конечного числа точек устранимого разрыва.*

249. С помощью "ε—δ"–рассуждений доказать непрерывность следующих функций:
а) $x \mapsto ax + b$, $a \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$; б) $x \mapsto x^2$, $x \in \mathbb{R}$; в) $x \mapsto x^3$, $x \in \mathbb{R}$; г) $x \mapsto \sqrt{x}$, $x > 0$, д) $x \mapsto \sqrt[3]{x}$, $x \in \mathbb{R}$; е) $x \mapsto \sin x$, $x \in \mathbb{R}$; ж) $x \mapsto \cos x$, $x \in \mathbb{R}$; з) $x \mapsto \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$.

◄ а) Выберем $\varepsilon > 0$ произвольно. Для любого фиксированного $x_0 \in \mathbb{R}$ имеем

$$|ax + b - ax_0 - b| = |a||x - x_0| < \varepsilon, \quad \text{если } |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{|a|} = \delta.$$

б) Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное и $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда

$$|x^2 - x_0^2| = |(x - x_0)^2 + 2x_0(x - x_0)| \leqslant |x - x_0|^2 + 2|x_0||x - x_0| < \varepsilon,$$

как только $|x - x_0| < \sqrt{|x_0|^2 + \varepsilon} - |x_0| = \delta$.

в) Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное, но такое, что $0 < \varepsilon < 1$. Имеем $|x^3 - x_0^3| = |x^2 + xx_0 + x_0^2||x - x_0|$. Пусть $|x - x_0| < 1$. Тогда $|x| < |x_0| + 1$, поэтому

$$|x^3 - x_0^3| < (3|x_0|^2 + 3|x_0| + 1)|x - x_0| < \varepsilon,$$

как только

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{3|x_0|^2 + 3|x_0| + 1} = \delta.$$

г) Для произвольного $\varepsilon > 0$ и $x_0 > 0$ имеем

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} < \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \varepsilon,$$

если $|x - x_0| < \varepsilon\sqrt{x_0} = \delta$.

д) Для любого $\varepsilon > 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ имеем

$$|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt[3]{x_0^2} + \sqrt[3]{xx_0} + \sqrt[3]{x_0^2}} = \frac{|x - x_0|}{\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{x_0}\right)^2 + \frac{3}{4}\sqrt[3]{x_0^2}} \leqslant \frac{|x - x_0|}{\frac{3}{4}\sqrt[3]{x_0^2}} < \varepsilon,$$

$$\text{если} \quad |x - x_0| < \frac{3}{4}\sqrt[3]{x_0^2}\,\varepsilon = \delta.$$

Непрерывность функции в точке $x_0 = 0$ следует из неравенства $|\sqrt[3]{x}| = \sqrt[3]{|x|} < \varepsilon$, справедливого при $|x| < \varepsilon^3 = \delta$.

е) Для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2\sin\frac{x - x_0}{2}\cos\frac{x + x_0}{2}\right| \leqslant 2\frac{|x - x_0|}{2} = |x - x_0| < \varepsilon$$

при $|x - x_0| < \delta = \varepsilon$

ж) Аналогично предыдущему

$$|\cos x - \cos x_0| = \left|-2\sin\frac{x - x_0}{2}\sin\frac{x + x_0}{2}\right| < |x - x_0| < \varepsilon$$

при $|x - x_0| < \delta = \varepsilon$

з) Пусть $|x_0| > 0$ и $|h| = |x - x_0| < |x_0|$. Если $\operatorname{arctg}(x_0 + h) - \operatorname{arctg} x_0 = t$, то $\operatorname{tg} t = \frac{h}{1 + x_0^2 + x_0 h}$, а так как $|t| \leqslant |\operatorname{tg} t|$ при $|t| < \frac{\pi}{2}$, то

$$|\operatorname{arctg}(x_0 + h) - \operatorname{arctg} x_0| = |t| < |\operatorname{tg} t| = \left|\frac{h}{1 + x_0^2 + hx_0}\right| < \frac{|h|}{1 + x_0^2 - |h|\,|x_0|} < \varepsilon,$$

$$\text{если} \quad |h| = |x - x_0| < \frac{(1 + x_0^2)\,\varepsilon}{1 + |x_0|\,\varepsilon} = \delta.$$

Непрерывность функции $x \mapsto \operatorname{arctg} x$ в точке $x = 0$ следует из неравенства

$$|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 0| = |\operatorname{arctg} x| < |x|. \ ►$$

Исследовать на непрерывность следующие функции:

250. $f(x) = (-1)^{\left[\frac{x - \pi/4 + \pi}{\pi}\right]}(\cos x + \sin x) + 2\sqrt{2}\left[\frac{x - \pi/4 + \pi}{\pi}\right]$, $x \in \mathbb{R}$.

◄ Пусть $\left[\dfrac{x - \frac{\pi}{4} + \pi}{\pi}\right] = n$, тогда x принадлежит полуинтервалу $\left[(n - 1)\pi + \frac{\pi}{4}, n\pi + \frac{\pi}{4}\right[$. Сужение функции f на каждый из полуинтервалов $\left[(n - 1)\pi + \frac{\pi}{4},\ n\pi + \frac{\pi}{4}\right[$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$x \mapsto (-1)^n(\cos x + \sin x) + 2\sqrt{2}\,n \qquad (1)$$

непрерывно. Остается проверить непрерывность функции f в точках $n\pi + \frac{\pi}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$. Из (1) находим

$$f\left(n\pi + \frac{\pi}{4} - 0\right) = \lim_{x \to n\pi + \frac{\pi}{4} - 0} (-1)^n(\cos x + \sin x) + 2\sqrt{2}\,n = \sqrt{2}\,(2n+1),$$

$$f\left((n-1)\pi + \frac{\pi}{4}\right) = (-1)^n\left(\cos\left((n-1)\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left((n-1)\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right) + 2\sqrt{2}\,(n-1). \qquad (2)$$

Далее, полагая в (2) вместо n число $n+1$, получаем

$$f\left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right) = (-1)^{n+1}\left(\cos\left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right) + 2\sqrt{2}\,(n+1) = \sqrt{2}\,(2n+1)$$

Итак, значения функции f в точках $n\pi + \frac{\pi}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$, равны ее соответствующим предельным значениям слева в этих точках. Поэтому функция f непрерывна в каждой из точек $n\pi + \frac{\pi}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$. А так как ранее установлена непрерывность во всех промежуточных точках, то она непрерывна на всей числовой прямой. ►

251. $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + \pi\left[\dfrac{2x+\pi}{2\pi}\right]$, $x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$, $f\left(n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$.

◄ Если $\left[\frac{2x+\pi}{2\pi}\right] = n$ и $x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, то $x \in \left]n\pi - \frac{\pi}{2},\ n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$. Сужение функции f на каждый из интервалов $\left]n\pi - \frac{\pi}{2},\ n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$, $n \in \mathbb{Z}$, есть непрерывная функция

$$x \mapsto \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + n\pi.$$

Остается проверить непрерывность функции f в точках $n\pi + \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. Имеем

$$f\left(n\pi + \frac{\pi}{2} - 0\right) = \lim_{x \to n\pi + \frac{\pi}{2} - 0}\left(\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + n\pi\right) = n\pi + \frac{\pi}{2},$$

$$f\left(n\pi + \frac{\pi}{2} + 0\right) = \lim_{x \to n\pi + \frac{\pi}{2} + 0}\left(\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + (n+1)\pi\right) = n\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, $f\left(n\pi + \frac{\pi}{2} - 0\right) = f\left(n\pi + \frac{\pi}{2} + 0\right)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$, и, следовательно, функция f непрерывна на $\mathbb{R}$. ►

252. $f(x) = [x]([x] - (-1)^{[x]}\cos\pi x)$, $x \in \mathbb{R}$.

◄ Пусть $[x] = n$, тогда $n \leqslant x < n+1$, $n \in \mathbb{Z}$. Сужение функции f на полуинтервалы $[n,\ n+1[$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$x \mapsto n(n - (-1)^n\cos\pi x)$$

непрерывно. А так как значение $f(n) = n(n-1)$ равно предельному значению слева $f(n-0) = \lim\limits_{x \to n-0}(n-1)(n-1-(-1)^{n-1}\cos\pi x) = n(n-1)$, то функция f непрерывна на множестве $\mathbb{R}$. ►

253. $f(x) = [x]$, $x \in \mathbb{R}$.

◄ Если $k \leqslant x < k+1$, $k \in \mathbb{Z}$, то $[x] = k$, и, следовательно, f — непрерывна. Если же $x_0 = k$, то $f(k) = k$, $f(k-0) = \lim\limits_{x \to k-0}[x] = k-1$, т. е. функция f терпит разрыв при $x_0 = k$, $k \in \mathbb{Z}$. ►

Определить точки разрыва и исследовать характер этих точек, если:

254. $f(x) = \dfrac{x}{(1+x)^2}$, $x \neq -1$, $f(-1) = 0$.

◄ Имеем

$$\lim_{x \to -1-0} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to -1+0} f(x) = -\infty,$$

следовательно, $x = -1$ есть точка разрыва типа полюса. ►

255. $f(x) = \dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}$, $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,\ 0,\ 1\}$, $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$.

◄ Функция f непрерывна при $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,\ 0,\ 1\}$ как элементарная. Поскольку

$$\lim_{x \to -1\pm 0} f(x) = \lim_{x \to -1\pm 0}\frac{x-1}{x+1} = \mp\infty; \quad \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0}\frac{x-1}{x+1} = -1; \quad \lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1}\frac{x-1}{x+1} = 0,$$

то $x=-1$ есть точка разрыва типа полюса, $x=0$ — точка разрыва первого рода, а в точке $x=1$ функция f непрерывна. ▶

256. $f(x)=\cos^2\frac{1}{x}$, $x\neq 0$, $f(0)=1$.

◀ Пусть $x_n=\frac{1}{n\pi}$, $y_n=\frac{2}{(2n+1)\pi}$, $n\in\mathbb{N}$. Тогда $x_n\to 0$, $y_n\to 0$ при $n\to\infty$, однако $f(x_n)\to 1$, а $f(y_n)\to 0$ при $n\to\infty$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ не существует и $x=0$ — точка разрыва второго рода ▶

257. $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, $x\neq 0$, $f(0)=0$.

◀ Пусть $\varepsilon>0$ — произвольное. Тогда существует $x_0>0$ такое, что $\frac{1}{x_0}>\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)$, откуда $\operatorname{tg}\frac{1}{x_0}>\frac{\pi}{2}-\varepsilon$. В силу возрастания арктангенса для $0<x<x_0$ и подавно $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}>\frac{\pi}{2}-\varepsilon$ т. е. $\lim\limits_{x\to+0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$

Аналогично показывается, что $\lim\limits_{x\to-0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}$. Следовательно, $x=0$ — точка разрыва первого рода. ▶

258. $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$, $x\neq 0$, $x\neq 1$, $f(0)=f(1)=0$.

◀ Имеем

$$\lim_{x\to\pm 0}\frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}=\lim_{x\to\pm 0}\frac{\frac{x}{1-x}}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}\cdot\frac{1-x}{x}=\mp\infty.$$

т. е. $x=0$ — точка разрыва типа полюса. Далее,

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}=0,\qquad \lim_{x\to 1+0}\frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}=1,$$

поэтому $x=1$ — точка разрыва первого рода. ▶

259. $f(x)=x[x]$, $x\in\mathbb{R}$.

◀ Если $[x]=n$, то $x\in[n,\,n+1[$ и сужения функции f на полуинтервалы $[n,\,n+1[$

$$x\mapsto nx,\qquad x\in[n,\,n+1[,$$

непрерывны при любом $n\in\mathbb{Z}$. А так как $f(n)=n^2$, $f(n-0)=\lim\limits_{x\to n-0}(n-1)x=(n-1)n$, то точки $x=n$ являются точками разрыва первого рода. ▶

260. $f(x)=[x]\sin\pi x$, $x\in\mathbb{R}$

◀ Пусть $[x]=n$, тогда $n\leqslant x<n+1$ и сужения функции f на $[n,\,n+1[$

$$x\mapsto n\sin\pi x,\quad x\in[n,\,n+1[,\quad n\in\mathbb{Z},$$

непрерывны. Остается исследовать непрерывность в точках $x=n$, $n\in\mathbb{Z}$. Имеем

$$f(n)=n\sin\pi n=0,\quad f(n-0)=\lim_{x\to n-0}(n-1)\sin\pi x=(n-1)\sin\pi n=0,$$

т. е. $f(n)=f(n-0)$ и функция f непрерывна на $\mathbb{R}$. ▶

261 $f(x)=x\left[\frac{1}{x}\right]$, $x\neq 0$, $f(0)=1$.

◀ Функция f непрерывна на каждом из полуинтервалов $\frac{1}{n+1}<x\leqslant\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, поскольку ее сужения $x\mapsto nx$ на эти полуинтервалы непрерывны. Далее, $f\left(\frac{1}{n}\right)=1$, $f\left(\frac{1}{n}+0\right)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{n}+0}x\left[\frac{1}{x}\right]=\frac{n-1}{n}$, поэтому в точках $x=\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, функция f терпит разрыв первого рода.

Рассмотрим неравенство

$$\frac{n}{n+1}<x\left[\frac{1}{x}\right]<\frac{n+1}{n},\tag{1}$$

справедливое для $x\in\left]\frac{1}{n+1},\,\frac{1}{n}\right[$, $n\in\mathbb{N}$. Если $n\to\infty$, то $x\to+0$, и из (1) следует, что $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=\lim\limits_{x\to+0}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$.

Если $\left[\frac{1}{x}\right] = -n$, то $-n \leqslant \frac{1}{x} < -n+1$, $-\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{-n}$, и

$$\frac{-n}{-n+1} < x\left[\frac{1}{x}\right] < \frac{-n+1}{-n}. \tag{2}$$

Если $n \to \infty$, то $x \to -0$, и из (2) находим, что $\lim\limits_{x\to -0} f(x) = \lim\limits_{x\to -0} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1$. Таким образом, $f(0) = f(+0) = f(-0) = 1$, т. е. при $x = 0$ функция непрерывна. ►

262. $f(x) = \begin{cases} \sin \pi x & \text{для рационального, } x \\ 0 & \text{для иррационального } x. \end{cases}$

◄ Пусть $x_0 \neq n$, $n \in \mathbb{Z}$, — произвольно, (x_n) — последовательность рациональных чисел, сходящаяся к x_0, а (t_n) — последовательность иррациональных чисел, сходящаяся к x_0. Из равенств $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin \pi x_n = \sin \pi x_0 \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(t_n) = 0$ вытекает, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не существует, т. е. x_0 — точка разрыва второго рода.

Если же $x_0 = n$, $n \in \mathbb{Z}$, то

$$|f(x_0) - f(x)| \leqslant |\sin \pi x| = |\sin(\pi n + \pi(x-n))| =$$
$$= |\cos \pi n \sin \pi(x-n)| = |\sin \pi(x - x_0)| < \pi|x - x_0| < \varepsilon,$$

если $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{\pi} = \delta$. Следовательно, $x_0 = n$ — точки непрерывности функции f. ►

263. Доказать, что функция Римана

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } x = \frac{m}{n}, \text{ где } m \text{ и } n \text{ — взаимно простые числа}, \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррационально}, \end{cases}$$

разрывна при каждом рациональном значении x и непрерывна при каждом иррациональном значении x.

◄ Пусть $x_0 = \frac{p}{q}$ — рациональное, так что $f(x_0) = \frac{1}{q}$. Очевидно, последовательность $\left(\frac{np+1}{nq}\right)$ рациональных чисел сходится к $\frac{p}{q} = x_0$ при $n \to \infty$. А так как $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{np+1}{nq}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{nq} = 0$, то каждая рациональная точка $\frac{p}{q}$ является точкой разрыва.

Пусть α — произвольное иррациональное число, а $(x_n) = \left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ — произвольная последовательность рациональных чисел, сходящаяся к α. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \infty$ и

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{q_n} = 0 = f(\alpha).$$

А так как $f(x) = 0$ при x иррациональном, то равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\alpha) = 0$ справедливо для любой последовательности (x_n) с произвольными членами, сходящейся к иррациональному числу α. Таким образом, функция f непрерывна при каждом иррациональном значении x. ►

264. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} \frac{nx}{n+1}, & \text{если } x \text{ — несократимая дробь } \frac{m}{n},\ n \geqslant 1, \\ |x|, & \text{если } x \text{ — иррациональное число}. \end{cases}$$

◄ Пусть x_0 — рационально, т. е. $x_0 = \frac{m}{n}$, $n \geqslant 1$. Согласно условию, $f(x_0) = \frac{m}{n+1}$. Поскольку $x_k = \frac{km+1}{kn} \to \frac{m}{n} = x_0$ при $k \to \infty$, а $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{km+1}{kn+1} = \frac{m}{n} \neq \frac{m}{n+1} = f(x_0)$, то функция f терпит разрыв при всех рациональных значениях аргумента.

Пусть теперь x_0 — иррационально, а $(x_k) = \left(\frac{m_k}{n_k}\right)$ — произвольная последовательность рациональных чисел, сходящаяся к x_0. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} |m_k| = \infty$, $\lim\limits_{k\to\infty} |n_k| = \infty$ и

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{m_k}{n_k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{m_k}{n_k}}{1+\frac{1}{n_k}} = x_0 = \begin{cases} |x| = f(x_0), & \text{если } x_0 \geqslant 0, \\ -|x_0|, & \text{если } x_0 < 0. \end{cases} \tag{1}$$

Отсюда вытекает, что функция разрывна при отрицательных иррациональных значениях аргумента.

Если $x_k \to x_0$ при $k \to \infty$, причем $x_k \geqslant 0$ — иррациональные числа, то

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty} |x_k| = |x_0| = f(x_0).$$

Таким образом, функция f непрерывна только при положительных иррациональных значениях аргумента. ►

265. Пусть функция f непрерывна и ограничена в интервале $]x_0, +\infty[$. Доказать, что какое бы ни было число T, найдется последовательность $x_n \to +\infty$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} (f(x_n + T) - f(x_n)) = 0.$$

◄ Пусть $T > 0$ — произвольное. Рассмотрим разность $f(x+T) - f(x)$. Возможны два случая:

1) существует конечное число $x' \geqslant x_0$ такое, что разность $f(x+T) - f(x)$ сохраняет постоянный знак для всех $x \geqslant x'$;

2) для произвольного $E \geqslant x_0$ существует $x^* > E$ такое, что $f(x^* + T) - f(x^*) = 0$.

В первом случае последовательность $(f(x' + nT))$ монотонна, а поскольку она и ограничена, то существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} f(x' + nT) = l$, так что

$$\lim_{n\to\infty} (f(x' + (n+1)T) - f(x' + nT)) = l - l = 0,$$

причем $x_n = x' + nT \to +\infty$ при $n \to \infty$.

Во втором случае существует такая бесконечная последовательность (x_n) значений x, $x > x_0$, что $x_n \to +\infty$ при $n \to \infty$ и $f(x_n + T) - f(x_n) = 0$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} (f(x_n + T) - f(x_n)) = 0.$$

Случай, когда $T < 0$, заменой $x + T = t$ приводится к уже рассмотренному. ►

266. Пусть φ и ψ — непрерывные периодические функции, определенные при $x \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x\to\infty} (\varphi(x) - \psi(x)) = 0$. Доказать, что $\varphi(x) \equiv \psi(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

◄ Пусть T_1 — период функции φ, а T_2 — период функции ψ. Предположим, что $\varphi(x) \not\equiv \psi(x)$, т. е. существует такая точка $x = t$, что

$$|\varphi(t) - \psi(t)| = M > 0. \tag{1}$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ произвольное, но меньшее, чем $\frac{M}{2}$. В силу непрерывности функции φ в точке $x = t$ для указанного $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$|\varphi(t) - \varphi(t+h)| < \varepsilon, \tag{2}$$

как только $|h| < \delta$. Согласно условию, существует такое натуральное число k, что $|\varphi(t + kT_2) - \psi(t + kT_2)| < \varepsilon$, а тогда $\forall m \in \mathbb{N}$ имеем

$$|\varphi(t + mkT_2) - \psi(t + mkT_2)| < \varepsilon. \tag{3}$$

Из неравенств (2), (3) и периодичности функций φ и ψ следует неравенство

$$\begin{aligned} |\varphi(t) - \psi(t)| &= |\varphi(t) - \varphi(t + mkT_2) + \varphi(t + mkT_2) - \psi(t + mkT_2)| \leqslant \\ &\leqslant |\varphi(t) - \varphi(t + mkT_2)| + |\varphi(t + mkT_2) - \psi(t + mkT_2)| = \\ &= |\varphi(t) - \varphi(t + mkT_2 - nT_1)| + |\varphi(t + mkT_2) - \psi(t + mkT_2)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon, \end{aligned} \tag{4}$$

если только

$$|mkT_2 - nT_1| < \delta. \tag{5}$$

Но мы выбрали такое число ε, что $2\varepsilon < M$. Таким образом, неравенство (4) противоречит равенству (1). Источник противоречия — в предположении существования точки $x = t$, в которой $|\varphi(t) - \psi(t)| = M > 0$. Следовательно, такой точки не существует, т. е. $\varphi(x) \equiv \psi(x)$, $-\infty < x < +\infty$.

Остается показать, что при произвольных заданных числах T_1, kT_2 и δ существуют целые числа $m > 0$ и n, удовлетворяющие неравенству (5).

Если T_2 и T_1 — рациональные, то это очевидно.

Пусть T_2 и T_1 — иррациональные. Если обозначим $\frac{kT_2}{T_1} = l$, $\frac{\delta}{T_1} = \alpha$, то неравенство (5) запишем в виде

$$|ml - n| < \alpha. \tag{6}$$

Для доказательства последнего неравенства разобьем интервал $[0, 1]$ на $\left[\frac{1}{\alpha}\right] + 1$ равных частей ($[a]$ — целая часть числа a) длиной $\frac{1}{\left[\frac{1}{\alpha}\right]+1}$, причем, к каждому из частичных интервалов условимся приписывать его левый конец и не приписывать правый.

Рассмотрим множество чисел

$$0,\ l - [l],\ 2l - [2l],\ 3l - [3l],\ \ldots,\ \left(\left[\frac{1}{\alpha}\right] + 1\right) l - \left[\left(\left[\frac{1}{\alpha}\right] + 1\right) l\right], \tag{7}$$

каждое из которых принадлежит одному из построенных нами частичных интервалов. Поскольку частичных интервалов $\left[\frac{1}{\alpha}\right] + 1$, а чисел (7) имеется $\left[\frac{1}{\alpha}\right] + 2$, то существует хотя бы один интервал, содержащий два числа

$$pl - [pl] \quad \text{и} \quad ql - [ql],\ p < q, \tag{8}$$

множества (7). Но так как длина интервала равна $\frac{1}{\left[\frac{1}{\alpha}\right]+1}$, то разность между числами (8) меньше этой длины, т. е.

$$|ql - [ql] - pl + [pl]| = |(q-p)l - ([ql] - [pl])| < \frac{1}{\left[\frac{1}{\alpha}\right] + 1} < \frac{1}{\frac{1}{\alpha}} = \alpha.$$

Обозначая $q - p = m$ ($m > 0$), $[ql] - [pl] = n$ и подставляя вместо l и α их значения, получаем

$$\left| m\frac{kT_2}{T_1} - n \right| < \frac{\delta}{T_1}, \quad \text{или} \quad |mkT_2 - nT_1| < \delta. \ ▶$$

267. Доказать равенство $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

◀ Имеем

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x + \arccos x \leqslant \frac{3\pi}{2}.$$

Поскольку $\sin(\arcsin x + \arccos x) = 1$, то $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Отсюда и из предыдущего неравенства заключаем, что $k = 0$. ▶

268. Доказать формулу сложения арктангенсов:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon\pi,$$

где ε принимает одно из трех значений $0,\ 1,\ -1$.

◀ Имеем

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y) = \frac{x+y}{1-xy}, \quad \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}\right) = \frac{x+y}{1-xy},$$

поэтому

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon\pi, \tag{1}$$

где $\varepsilon \in \mathbb{Z}$. Поскольку $|\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y| = \left|\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon\pi\right| < \pi$, а $\left|\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}\right| < \frac{\pi}{2}$, то ε может принимать только три значения: $0,\ 1,\ -1$. Вычисляя косинусы от левой и правой частей равенства (1), получаем

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2}} \cos\varepsilon\pi,$$

так что

$$\cos\varepsilon\pi = \frac{1-xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}} \cdot \frac{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}{|1-xy|} = \frac{1-xy}{|1-xy|} = \begin{cases} \ \ 1, & \text{если } xy < 1, \\ -1, & \text{если } xy > 1. \end{cases}$$

Следовательно, функция $(x, y) \mapsto \varepsilon(x, y)$ терпит разрыв, если $y = \frac{1}{x}$, где x — любое фиксированное число. Заметим, что если $xy < 1$, то $\varepsilon = 0$, а при $xy > 1$ $\varepsilon = \pm 1$ (так как ε может принимать только три значения $0, 1, -1$).

Пусть $xy > 1$ и $x > 0$. Тогда $y > 0$ и

$$\operatorname{arctg} x > 0, \quad \operatorname{arctg} y > 0, \quad \text{а} \quad \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} < 0.$$

В равенстве (1) слева стоит непрерывная положительная функция, следовательно, и справа должна стоять положительная функция, а поэтому $\varepsilon\pi > 0$, т. е. $\varepsilon = +1$.

Аналогично, если $xy > 0$ и $x < 0$ ($y < 0$), то $\varepsilon = -1$. ►

269. Исследовать на непрерывность вектор-функцию

$$\mathbf{f}(x) = \left(\frac{\sin x}{x}, \frac{e^x - 1}{x}, \frac{1 - \cos x}{x}\right), \quad x \neq 0,$$
$$\mathbf{f}(0) = (1, 1, 0).$$

◄ Функция $\mathbf{f}$ при $x \neq 0$ непрерывна, поскольку ее координаты непрерывны при этих значениях аргумента. Далее,

$$\lim_{x \to 0} \mathbf{f}(x) = \left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}, \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}, \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x}\right) = (1, 1, 0),$$

поэтому функция $x \mapsto \mathbf{f}(x)$ непрерывна и при $x = 0$. ►

270. Исследовать на непрерывность функциональную матрицу

$$A(x) = \begin{pmatrix} [x]\sin \pi x & x \\ -x & 1 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

◄ Функциональная матрица непрерывна на $\mathbb{R}$, так как все ее элементы непрерывные на $\mathbb{R}$ функции. ►

Упражнения для самостоятельной работы

Исследовать на непрерывность следующие функции:

133. $f(x) = \arcsin x$, $|x| \leqslant 1$. **134.** $f(x) = \arccos x$, $|x| \leqslant 1$.

135. $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$. **136.** $f(x) = \operatorname{arcctg} x$, $x \in \mathbb{R}$.

137. $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$, $x \neq 0$, $f(0) = 1$. **138.** $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, $x > -1$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

139. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{2}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $f\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$, $k \in \mathbb{Z}$.

140. $f(x) = \sin x \arcsin \frac{\operatorname{tg} x}{2}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $f\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$, $k \in \mathbb{Z}$.

141. $f(x) = \begin{cases} |x|, & |x| > 1; \\ x^2, & |x| \leqslant 1. \end{cases}$ **142.** $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$

143. $f(x) = (-1)^{\left[\frac{4x+3\pi}{4\pi}\right]}(\sin x + \cos x) + 2\sqrt{2}\left[\frac{4x+3\pi}{4\pi}\right]$, $x \in \mathbb{R}$.

144. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{x\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

145. $f(x) = -\frac{[x]}{x^\lambda} + 1 + \frac{1}{2^\lambda} + \ldots + \frac{1}{[x]^\lambda}$, $x \geqslant 1$. **146.** $f(x) = [x]\ln x - \ln([x]!)$, $x \geqslant 1$.

147. $f(x) = -x\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right] + 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]^2}$, $x \in]0, 1]$.

148. $f(x) = \begin{cases} x - [x], & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$ **149.** $f(x) = [x]\sin \pi x$, $x \in \mathbb{R}$.

150. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x < 0, \\ x + 1, & x \geqslant 0. \end{cases}$ **151.** $f(x) = \begin{cases} \frac{(1+x)^{\sqrt{2}} - 1}{x}, & x > 0, \\ \sqrt{2} + x, & x \leqslant 0. \end{cases}$

Определить точки разрыва и исследовать их характер:

152. $f(x) = \sin \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

153. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + \pi\left[\frac{2x+\pi}{2\pi}\right]$, $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, $f\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = 0$, $n \in \mathbb{Z}$.

154. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{3\operatorname{tg}(x/2) + 1}{\sqrt{5}} + \pi\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right]$, $x \neq (2n+1)\pi$, $f((2n+1)\pi) = 0$, $n \in \mathbb{Z}$.

155. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2-1}$ $x \neq \pm 1$, $f(\pm 1) = \frac{\pi}{2}$.

156. $f(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + 2}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $f\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$.

157. $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $f\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$, $k \in \mathbb{Z}$.

158. $f(x) = \arcsin(\sin x) \operatorname{arctg} \frac{1}{\sin x}$, $x \neq n\pi$, $f(n\pi) = 1$, $n \in \mathbb{Z}$.

159. $f(x) = \ln \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$. **160.** $f(x) = \operatorname{tg} \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

Исследовать на непрерывность вектор-функции:

161. $\mathbf{f}(x) = (\cos x, \sin x, 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

162. $\mathbf{f}(x) = \begin{cases} \left(\sin \frac{1}{x}, x \sin \frac{1}{x}, \dots, x^{m-1} \sin \frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ (1, 0, \dots, 0), & x = 0. \end{cases}$

163. $\mathbf{f}(x) = \begin{cases} \left(\frac{\sin x}{x}, |x|, \cos x\right), & x \neq 0, \\ (1, 0, 1) & x = 0. \end{cases}$

164. $\mathbf{f}(x) = \left(\frac{(1+x)^{\sqrt{2}}-1}{x}, \frac{(1+2x)^{\sqrt{2}}-1}{x}, \dots, \frac{(1+mx)^{\sqrt{2}}-1}{x}\right)$, если $x \in]-1, +\infty[\setminus (0)$ и $\mathbf{f}(0) = (\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, \dots, m\sqrt{2})$.

165. $\mathbf{f}(x) = \left((1+x)^{\frac{1}{x}}, (1+2x)^{\frac{1}{x}}, \dots (1+mx)^{\frac{1}{x}}\right)$, если $x \in]-1, +\infty[\setminus \{0\}$ и $\mathbf{f}(0) = (e, e^2, \dots, e^m)$.

Исследовать на непрерывность функциональные матрицы:

166. $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & \sin x & x \\ \cos x & 1 & 1-x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$.

167. $A(x) = \left(\left[\frac{ix+1}{j}\right]\right)$, $x \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

168. $A(x) = (a_{ij}(x))$, где $a_{ij}(x) = (1+ix)^{\frac{j}{x}}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, $x \in]-1, \infty[\setminus (0)$ и $A(0) = E$.

169. $A(x) = (a_{ij}(x))$, где $a_{ij}(x) = \left(1 + \frac{x^2}{i}\right)^{\frac{(-1)^j}{x^2}}$, $x \neq 0$ и $A(0) = E$.

170.

$$A(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{x^2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{x^n} \end{pmatrix}, \quad x \neq 0, \quad A(0) = E.$$

§ 9. Равномерная непрерывность функций

9.1. Определение равномерной непрерывности.

Определение. *Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется равномерно-непрерывной на множестве X, если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x, y \in X \wedge |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Если функция f не является равномерно-непрерывной, то это означает следующее:

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0 : \exists x, y \in X \wedge |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon.$$

9.2. Теорема Кантора.

Теорема. *Если функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то она равномерно-непрерывна на этом сегменте.*

271. Показать, что функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in]0, 1[$, непрерывна на интервале $]0, 1[$, но не является равномерно-непрерывной на этом интервале.

◄ Функция f непрерывна, как всякая элементарная функция. Покажем, что она не является равномерно-непрерывной на интервале $]0, 1[$.

Пусть $x_n = \frac{1}{n+1}$, $y_n = \frac{1}{n+1+\varepsilon}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$|x_n - y_n| = \frac{\varepsilon}{(n+1)(n+1+\varepsilon)} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty,$$

т. е. разность $|x_n - y_n|$ может быть меньше любого наперед заданного положительного числа. Однако $|f(x_n) - f(y_n)| = |n+1-n-1-\varepsilon| = \varepsilon\ \forall \varepsilon > 0$. Следовательно, функция f не является равномерно–непрерывной на интервале $]0, 1[$. ►

272. Показать, что функция $f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$ непрерывна и ограничена на интервале $]0, 1[$, но не является равномерно–непрерывной на этом интервале.

◄ Ограниченность функции f очевидна, а непрерывность следует из того, что функции $y \mapsto \sin y$, $y \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\pi}{x}$, $x \in]0, 1[$, непрерывны, а поэтому их композиция также непрерывна.

Пусть $x_n = \frac{1}{n+1}$, $y_n = \frac{2}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $|x_n - y_n| = \frac{1}{(n+1)(2n+1)} \to 0$ при $n \to \infty$, в то время как $|f(x_n) - f(y_n)| = 1 \geqslant \varepsilon\ \forall \varepsilon \in]0, 1]$. Следовательно, функция f не является равномерно–непрерывной на $]0, 1[$. ►

273. Показать, что функция $f(x) = \sin x^2$ непрерывна и ограничена на числовой прямой $\mathbb{R}$, но не является равномерно–непрерывной на этой прямой.

◄ Ограниченность и непрерывность очевидны, а равномерная непрерывность отсутствует, так как

$$|f(x_n) - f(y_n)| = 1 \geqslant \varepsilon \quad \forall \varepsilon \in]0, 1], \ \ \forall x_n = \sqrt{n\pi} \ \ \text{и} \ \ y_n = \sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}}, \ \ n \in \mathbb{N},$$

несмотря на то, что

$$|x_n - y_n| = \left|\sqrt{n\pi} - \sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}}\right| = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{n\pi} + \sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}}} \to 0$$

при $n \to \infty$. ►

274. Доказать, что если функция f определена и непрерывна в области $a \leqslant x < +\infty$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, то f равномерно–непрерывна в этой области.

◄ Из существования предела следует, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists E > a : \forall x,\ y \in]E, +\infty[\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{1}$$

Фиксируем такое $E > 0$ и рассмотрим сегмент $[a, 2E]$. Согласно теореме Кантора, функция f равномерно–непрерывна на $[a, 2E]$, т. е. $\forall \varepsilon > 0$, в частности, для ε, указанного ранее, $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall x,\ y \in [a, 2E] \wedge |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Не ограничивая общности, считаем, что $\delta < E$. Тогда из условия $|x - y| < \delta$ следует, что оба числа x и y бóльшие E или оба меньшие $2E$. В том и другом случае для любых x и y, бóльших a, из условия $|x - y| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, что устанавливает равномерную непрерывность функции f на $[a, +\infty[$. ►

275. Показать, что неограниченная функция $f(x) = x + \sin x$ равномерно–непрерывна на всей числовой прямой $\mathbb{R}$.

◄ Для произвольного $\varepsilon > 0$ имеем

$$|f(x) - f(y)| = |x - y - (\sin x - \sin y)| \leqslant |x - y| + |\sin x - \sin y| =$$
$$= |x - y| + 2\left|\sin\frac{x - y}{2}\cos\frac{x + y}{2}\right| \leqslant |x - y| + 2\left|\frac{x - y}{2}\right| = 2|x - y| < \varepsilon$$

для всех x и y, удовлетворяющих неравенству $|x - y| < \frac{\varepsilon}{2} \doteq \delta$. ►

276. Являются ли равномерно–непрерывными функции:
а) $f(x) = x^2$, $x \in]-l, l[$, б) $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$?

◄ а) Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно задано. Тогда

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x + y|\,|x - y| \leqslant (|x| + |y|)|x - y| < 2l|x - y| < \varepsilon$$

при $\forall x,\ y \in]-l, l[\wedge |x - y| < \frac{\varepsilon}{2l} = \delta$, т. е. f — равномерно–непрерывна на $]-l, l[$.

б) Функция f не является равномерно–непрерывной, так как при $x_n = n + \frac{1}{n}$, $y_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, имеем $|x_n - y_n| = \frac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$, а $|f(x_n) - f(y_n)| = 2 + \frac{1}{n^2} > 2 \geqslant \varepsilon\ \forall \varepsilon \in]0, 2]$. ►

Исследовать на равномерную непрерывность следующие функции:

277. $f(x) = \dfrac{x}{4-x^2}$, $x \in [-1, 1]$.

◄ Функция непрерывна на $[-1, 1]$, а поэтому по теореме Кантора и равномерно-непрерывна. ►

278. $f(x) = \ln x$, $x \in]0, 1[$.

◄ Равномерная непрерывность отсутствует, так как если $x_n = e^{-n}$, $y_n = e^{-n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, то $|x_n - y_n| = \frac{e-1}{e^{n+1}} \to 0$ при $n \to \infty$, а $|f(x_n) - f(y_n)| = 1 \geqslant \varepsilon\ \forall \varepsilon \in]0, 1]$. ►

279. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $x \in]0, \pi[$.

◄ Рассмотрим функцию $F(x) = f(x)$ при $x \in]0, \pi[$, $F(0) = 1$, $F(\pi) = 0$. Поскольку функция F непрерывна на сегменте $[0, 1]$, то, по теореме Кантора, она и равномерно-непрерывна на этом сегменте, а следовательно, и на интервале $]0, \pi[$. ►

280. $f(x) = e^x \cos \dfrac{1}{x}$, $x \in]0, 1[$.

◄ Положим $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, $y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $|x_n - y_n| = \frac{1}{2n(2n+1)\pi} \to 0$ при $n \to \infty$, однако

$$|f(x_n) - f(y_n)| = e^{\frac{1}{2n\pi}} + e^{\frac{1}{(2n+1)\pi}} > 2 \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, функция не является равномерно-непрерывной. ►

281. $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$.

◄ Равномерная непрерывность следует из того, что (см. пример 268)

$$|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| = \left|\operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}\right| \leqslant \left|\frac{x-y}{1+xy}\right| < |x-y| < \varepsilon$$

при $|x - y| < \delta = \varepsilon$. ►

282. $f(x) = x \sin x$, $0 \leqslant x < +\infty$.

◄ Пусть $x_n = n\pi$, $y_n = n\pi + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, тогда $|x_n - y_n| = \frac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$, а $|f(x_n) - f(y_n)| = \left(n\pi + \frac{1}{n}\right)\left|\sin\left(n\pi + \frac{1}{n}\right)\right| = \left(n\pi + \frac{1}{n}\right)\sin\frac{1}{n} = \left(\pi + \frac{1}{n^2}\right)\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \to \pi$ при $n \to \infty$. Следовательно, $|f(x_n) - f(y_n)| > \frac{\pi}{2}\ \forall n > m$, и функция не является равномерно-непрерывной. ►

283. **Для $\varepsilon > 0$ найти $\delta > 0$ (какое-нибудь!), удовлетворяющее условиям равномерной непрерывности для функции f, если:**

а) $f(x) = x^2 - 2x - 1$, $-2 \leqslant x \leqslant 5$; **б)** $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $0 < x < +\infty$.

◄ а) Имеем

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - 2x - 1 - y^2 + 2y + 1| = |x^2 - y^2 - 2(x-y)| \leqslant$$
$$\leqslant |x+y|\,|x-y| + 2|x-y| \leqslant (|x| + |y| + 2)|x-y| \leqslant 12|x-y| < \varepsilon,$$

если $|x - y| < \frac{\varepsilon}{12} = \delta$.

б) Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное. Если числа x и y такие, что

$$0 \leqslant x < \varepsilon^n,\ 0 \leqslant y < \varepsilon^n, \tag{1}$$

то $0 \leqslant \sqrt[n]{x} < \varepsilon$, $0 \leqslant \sqrt[n]{y} < \varepsilon$ и $|x - y| < \varepsilon^n = \delta$. Отсюда следует, что $|f(x) - f(y)| = |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y}| < \varepsilon$ при $|x - y| < \varepsilon^n = \delta$. Если же (1) не выполняется, т. е. хотя бы одно из чисел x или y не меньше ε^n, то

$$\sqrt[n]{x^{n-1}} + \sqrt[n]{x^{n-2}y} + \sqrt[n]{x^{n-3}y^2} + \ldots + \sqrt[n]{y^{n-1}} > \varepsilon^{n-1}.$$

Тогда

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y}| = \frac{|x-y|}{\sqrt[n]{x^{n-1}} + \sqrt[n]{x^{n-2}y} + \sqrt[n]{x^{n-3}y^2} + \ldots + \sqrt[n]{y^{n-1}}} < \frac{|x-y|}{\varepsilon^{n-1}} < \varepsilon$$

при $|x - y| < \varepsilon^n = \delta$. ►

284. Доказать, что сумма и произведение конечного числа равномерно-непрерывных на интервале $]a, b[$ функций равномерно-непрерывны на этом интервале.

◀ Достаточно рассмотреть случай двух равномерно-непрерывных на $]a, b[$ функций f и g. Согласно условию,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1 > 0 : \forall x, y \in]a, b[\wedge |x - y| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{1}$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_2 > 0 : \forall x, y \in]a, b[\wedge |x - y| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Если $|x - y| < \delta$, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, то будут выполняться оба неравенства (1) и (2). Тогда непрерывность суммы следует из неравенства

$$|f(x) + g(x) - f(y) - g(y)| \leqslant |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

справедливого $\forall x, y \in]a, b[$, если $|x - y| < \delta$.

Равномерная непрерывность произведения вытекает из того, что

$$|f(x)\,g(x) - f(y)\,g(y)| = |f(x)\,g(x) - f(x)\,g(y) + f(x)\,g(y) - f(y)\,g(y)| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x)|\,|g(x) - g(y)| + |g(y)|\,|f(x) - f(y)| < L\frac{\varepsilon}{2} + M\frac{\varepsilon}{2},$$

если $|x - y| < \delta$, $x \in]a, b[$ $y \in]a, b[$, где $L = \sup\limits_{x \in]a, b[} |f(x)|$, $M = \sup\limits_{x \in]a, b[} |g(x)|$. ▶

285. Доказать, что если ограниченная монотонная функция $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ непрерывна на конечном или бесконечном интервале $]a, b[$, то эта функция равномерно-непрерывна на интервале $]a, b[$

◀ Из условия следует, что существуют конечные пределы

$$f(a + 0) = \lim_{x \to a+0} f(x), \quad f(b - 0) = \lim_{x \to b-0} f(x).$$

Если a и b — конечны, то, полагая $f(a) = f(a + 0)$, $f(b) = f(b - 0)$, получаем непрерывную функцию f на сегменте $[a, b]$ которая, в силу теоремы Кантора, равномерно-непрерывна на $[a, b]$.

Если одно из чисел a, b или оба эти числа равны $-\infty$, соответственно $+\infty$, то рассуждая, как и при решении примера 274, снова убеждаемся, что функция f равномерно-непрерывна. ▶

286. Модулем непрерывности функции $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ называется функция

$$\delta \mapsto \omega_f(\delta),$$

где $\omega_f(\delta) = \sup |f(x) - f(y)|$, x и y — любые точки из $]a, b[$, связанные условием $|x - y| \leqslant \delta$.

Доказать, что для равномерной непрерывности функции f на $]a, b[$ необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{\delta \to +0} \omega_f(\delta) = 0$.

◀ *Необходимость*. Пусть $\lim\limits_{\delta \to +0} \omega_f(\delta) = 0$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1 > 0\ \ \forall x, y \in]a, b[\wedge\ \forall \delta < \delta_1 \Rightarrow \omega_f(\delta) < \varepsilon.$$

Так как $\omega_f(\delta) = \sup\limits_{\substack{x, y \in]a, b[\\ |x - y| < \delta}} |f(x) - f(y)|$, то

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon\ \ \forall x, y \in]a, b[\wedge |x - y| < \delta,$$

т. е. функция f равномерно-непрерывна на $]a, b[$.

Достаточность. Пусть f — равномерно-непрерывна на $]a, b[$, тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x, y \in]a, b[\wedge |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Но тогда при тех же условиях относительно x и y имеем

$$\omega_f(\delta) = \sup_{\substack{x, y \in]a, b[\\ |x - y| < \delta}} |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

т. е. $\lim\limits_{\delta \to +0} \omega_f(\delta) = 0$. ▶

Упражнения для самостоятельной работы

Исследовать на равномерную непрерывность следующие функции:

171. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$. **172.** $f(x) = \sqrt{x^2}\ln x, 1 \leqslant x < +\infty$.

173. $f(x) = \sqrt{x^2}\ln x$, $0 < x < 1$. **174.** $f(x) = \sqrt{x}$, $0 < x < +\infty$.

175. $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$, $0 < x < +\infty$. **176.** $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$, $-1 < x < 0$

177. $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$. **178.** $f(x) = x + \ln x$, $1 \leqslant x < +\infty$.

179. $f(x) = x \ln x$, $x \in]0, 1[$. **180.** $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

181. $f(x) = \frac{x^4}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$. **182.** $f(x) = x^2 \ln x$, $x \geqslant 1$.

183. $f(x) = x \cos x$, $x \in \mathbb{R}$. **184.** $f(x) = x^2 \cos x$, $x \in [0, \pi]$.

185. $f(x) = x^3 + x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Глава 2

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

§ 1. Производная явной функции

1.1. Основные определения.

Определение 1. *Пусть дана функция $f :]a, b[\to \mathbb{R}$. Разность $\Delta x = x - x_0$ ($x, x_0 \in]a, b[$) называется приращением аргумента в точке x_0.*

Определение 2. *Разность $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называется приращением значений функции f в точке x_0.*

Определение 3. *Если существует предел (конечный или бесконечный)*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0),$$

то он называется производной (конечной или бесконечной) функции f в точке x_0.

Определение 4. *Пределы (конечные или бесконечные)*

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}, \quad f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

называются соответственно левой и правой производными функции f (конечной или бесконечной) в точке x_0.

Во всех этих определениях бесконечный предел понимается как один из символов $+\infty$ или $-\infty$.

Определение 5. *Если функция f терпит разрыв первого рода в точке x_0, то выражения*

$$f'_-(x_0 - 0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - 0)}{\Delta x}, \quad f'_+(x_0 + 0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 + 0)}{\Delta x}$$

называются соответственно левой и правой в расширенном смысле производными функции f в точке x_0.

Необходимо помнить, что во всех этих определениях приращение Δx стремится к нулю произвольно.

Приращения Δx и $\Delta f(x_0)$ могут быть как сколько угодно большими, так и сколько угодно малыми.

1.2. Правила вычисления производных.

Если функции f и g имеют конечные производные при $x \in]a, b[$, то

1) $(\alpha_1 f + \alpha_2 g)' = \alpha_1 f' + \alpha_2 g'$, α_1, α_2 — постоянные;

2) $(fg)' = fg' + f'g$. 3) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$, $g(x) \neq 0$.

1.3. Производная сложной функции.

Если функции $f : u \mapsto f(u)$, $\varphi : x \mapsto u = \varphi(x)$ имеют конечные производные f'_u и φ'_x, то $(f(\varphi(x)))'_x = f'_u(\varphi(x))\varphi'_x$. Значком внизу обозначена переменная, по которой вычисляется производная.

1.4. Таблица производных.

Если x — независимая переменная, то справедливы формулы:

1) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;
2) $(a^x)' = a^x \ln a$, $a > 0$, $(e^x)' = e^x$,
3) $(\sin x)' = \cos x$;
4) $(\cos x)' = -\sin x$;
5) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;
6) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;
7) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$;
8) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$;
9) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
10) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
11) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;
12) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$;
13) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;
14) $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;
15) $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$;
16) $(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;
17) $(\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}$, $|x| < 1$;
18) $(|x|)' = \operatorname{sgn} x$, $x \neq 0$;
19) $([x])' = 0$, $x \neq k$, $k \in \mathbb{Z}$.

1.5. Производная степенно-показательной функции.

Если функции $u : x \mapsto u(x)$ и $v : x \mapsto v(x)$ имеют конечные производные, то

$$\left((u(x))^{v(x)}\right)' = (u(x))^{v(x)} \left(v'(x) \ln u(x) + \frac{u'(x)v(x)}{u(x)}\right), \quad u(x) > 0.$$

1.6. Производная от вектор-функции и матричной функции.

Если компоненты вектор-функции $\mathbf{f} : x \mapsto (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$ имеют конечные производные, то

$$\mathbf{f}' : x \mapsto (f_1'(x),\ f_2'(x),\ \ldots,\ f_n'(x)).$$

Аналогично, если элементы матричной функции $A : x \mapsto (a_{ij}(x))$, где $(a_{ij}(x))$ — функциональная матрица порядка $m \times n$, имеют конечные производные $a'_{ij}(x)$, то производная матричной функции вычисляется по формуле

$$A' = (a'_{ij}(x)) = \begin{pmatrix} a'_{11}(x) & a'_{12}(x) & \ldots & a'_{1n}(x) \\ a'_{21}(x) & a'_{22}(x) & \ldots & a'_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_{m1}(x) & a'_{m2}(x) & \ldots & a'_{mn}(x) \end{pmatrix}.$$

1.7. Производная от комплексной функции скалярного аргумента.

Если $w : x \mapsto u(x) + iv(x)$ и функции $u : x \mapsto u(x)$, $v : x \mapsto v(x)$ имеют конечные производные, то производная функции w вычисляется по формуле

$$w' = u' + iv'.$$

1. Определить максимальное приращение Δx аргумента x и соответствующее приращение $\Delta f(x_0)$ функции $f : x \mapsto \lg x$ в точке $x_0 = 1$, если x изменяется от 1 до 1000.

◄ Используя определения 1 и 2, п. 1.1, имеем

$$\Delta x = 1000 - 1 = 999, \qquad \Delta f(x_0) = \lg 1000 - \lg 1 = 3. ►$$

2. Определить максимальное по абсолютной величине приращение Δx аргумента x и соответствующее приращение $\Delta f(x_0)$ функции $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ в точке $x_0 = 0{,}1$, если x изменяется от 0,01 до 0,001.

◄ Аналогично предыдущему находим

$$\Delta x = 0{,}001 - 0{,}01 = -0{,}009, \qquad \Delta f(x_0) = \frac{1}{(0{,}001)^2} - \frac{1}{(0{,}01)^2} = 99 \cdot 10^4. ►$$

Примеры 1 и 2 показывают, что приращения Δx и $\Delta f(x_0)$ могут принимать какие угодно значения.

3. Переменная x получает приращение Δx в точке x_0, т. е. $\Delta x = x - x_0$. Определить приращение $\Delta f(x_0)$, если:

а) $\mathbf{f}(x) = (x, \sin x, e^x)$; б) $f(x) = \frac{3}{2+x} + i\frac{x}{4-x}$; в) $f(x) = \begin{pmatrix} x^n & \ln x \\ \operatorname{sh} x & 1 \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$.

◀ Согласно определению 2, п. 1.1, имеем:

а) $$\Delta \mathbf{f}(x_0) = \mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(x_0) = (x - x_0, \ \sin x - \sin x_0, \ e^x - e^{x_0}) =$$
$$= \left(\Delta x, \ 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right), \ e^{x_0}(e^{\Delta x} - 1)\right);$$

б) $$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = \frac{3}{2+x} - \frac{3}{2+x_0} + i\left(\frac{x}{4-x} - \frac{x_0}{4-x_0}\right) =$$
$$= \frac{-3\,\Delta x}{(2+x_0)(2+x_0+\Delta x)} + i\frac{4\,\Delta x}{(4-x_0)(4-x_0-\Delta x)}, \quad x_0 \neq 4, \quad \Delta x \neq 4 - x_0;$$

в) $$\Delta f(x_0) = \begin{pmatrix} x^n & \ln x \\ \operatorname{sh} x & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0^n & \ln x_0 \\ \operatorname{sh} x_0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^n - x_0^n & \ln\frac{x}{x_0} \\ \operatorname{sh} x - \operatorname{sh} x_0 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} (x_0 + \Delta x)^n - x_0^n & \ln\left(1 + \frac{\Delta x_0}{x_0}\right) \\ 2\operatorname{sh}\frac{\Delta x}{2}\operatorname{ch}\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) & 0 \end{pmatrix}. \ ▶$$

4. Найти $f'(1)$, если:

а) $f(x) = (x-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}$; б) $\mathbf{f}(x) = (\operatorname{arctg} x, \ 2^x, \ \ln x)$;

в) $f(x) = \cos x + i\sin(x-1)$; г) $f(x) = \begin{pmatrix} \frac{x}{1+x} & x^2 \\ \operatorname{tg} x & \arcsin(x-1) \end{pmatrix}$.

◀ Используя определение 3, п. 1.1, получаем:

а) $$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta x \arcsin\sqrt{\frac{1+\Delta x}{2+\Delta x}}}{\Delta x} = \frac{\pi}{4};$$

б) $$\mathbf{f}'(1) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\operatorname{arctg}(1+\Delta x) - \operatorname{arctg} 1}{\Delta x}, \ \frac{2}{\Delta x}(2^{\Delta x} - 1), \ \frac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x}\right) = \left(\frac{1}{2}, \ 2\ln 2, \ 1\right);$$

в) $$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\cos(1+\Delta x) - \cos 1}{\Delta x} + i\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\right) = -\sin 1 + i;$$

г) $$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{1}{\Delta x}\begin{pmatrix} \frac{1+\Delta x}{2+\Delta x} - \frac{1}{2} & (1+\Delta x)^2 - 1 \\ \operatorname{tg}(1+\Delta x) - \operatorname{tg} 1 & \arcsin\Delta x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 2 \\ \frac{1}{\cos^2 1} & 1 \end{pmatrix}. \ ▶$$

Следующий пример показывает, насколько важно произвольное стремление Δx к нулю в определении производной.

5. Доказать, что вектор-функция

$$\mathbf{f} : x \mapsto \left(x\sin x, \ \psi(x), \ e^{-x^2}\right),$$

где $\psi(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ не имеет производной в точке $x = 0$.

◀ Для того чтобы вектор-функция имела конечную производную, необходимо и достаточно, чтобы каждая компонента ее имела конечную производную. Покажем, что функция ψ не имеет производной в точке $x = 0$.

По определению 3, п. 1.1, имеем

$$\psi'(0) = \lim_{\Delta x \to 0}\sin\frac{1}{\Delta x}.$$

Если взять $\Delta x = \frac{1}{2k\pi} \to 0$, $k \to \infty$, $k \in \mathbb{N}$, то $\sin\frac{1}{\Delta x} = \sin 2k\pi = 0$. Если же $\Delta x = \frac{1}{2k\pi + \pi/2}$, то при $k \to \infty$ $\sin\frac{1}{\Delta x} \to 1$. Таким образом, производная $\psi'(0)$ не существует. ▶

Найти производные следующих функций:

6. $\mathbf{f}(x) = \left(\sqrt{2+x^2}\,\sqrt[3]{3+x^3},\ \sin(\cos^2(\sin^3 4x^5)),\ e^{-4x^3}\right)$.

◄ Каждая компонента вектор-функции имеет конечную производную, поэтому, согласно пункту 1.6, находим

$$\mathbf{f}'(x) = \left(\left(\sqrt{2+x^2}\,\sqrt[3]{3+x^3}\right)',\ \left(\sin\left(\cos^2(\sin^3 4x^5)\right)\right)',\ \left(e^{-4x^3}\right)'\right) =$$

$$= \left(\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\sqrt[3]{3+x^3} + \sqrt{2+x^2}\,\frac{x^2}{(\sqrt[3]{3+x^3})^2},\ -\cos\left(\cos^2(\sin^3 4x^5)\right) \times\right.$$

$$\left.\times \sin(2\sin^3 4x^5)\cdot 60\sin^2 4x^5\cdot\cos 4x^5\cdot x^4,\ -12x^2e^{-4x^3}\right). \blacktriangleright$$

7. $f(x) = \sin(\cos x) + i\cos(\sin x)$.

◄ Согласно пункту 1.7, имеем

$$f'(x) = (\sin(\cos x))' + i(\cos(\sin x))' = -\sin x\cos(\cos x) - i\cos x\sin(\sin x). \blacktriangleright$$

8. $f(x) = \begin{pmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ \operatorname{sh} 3x & \operatorname{ch} 3x \end{pmatrix}$.

◄ Пользуясь пунктом 1.6, находим

$$f'(x) = \begin{pmatrix} (\sin 2x)' & (\cos 2x)' \\ (\operatorname{sh} 3x)' & (\operatorname{ch} 3x)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos 2x & -2\sin 2x \\ 3\operatorname{ch} 3x & 3\operatorname{sh} 3x \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

9. Найти производную от вектор-функции

$$\mathbf{f} : x \mapsto \left(\arcsin\frac{1}{|x|},\ [x]\sin^2\pi x\right).$$

◄ При $|x| > 1$ и $x \neq k,\ k \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbf{f}'(x) = \left(\left(\arcsin\frac{1}{|x|}\right)',\ ([x]\sin^2\pi x)'\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\left(\frac{1}{|x|}\right)',\ ([x])'\sin^2\pi x + \pi[x]\sin 2\pi x\right) = \left(\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}},\ \pi[x]\sin 2\pi x\right).$$

При $|x| > 1$ и $x = k$, $k \in \mathbb{Z}$, рассматриваем левую и правую производные функции $y : x \mapsto [x]\sin^2\pi x$. Имеем, по определению 4, п. 1.1,

$$y'_{\pm}(k) = \lim_{x\to k\pm 0}\frac{[x]\sin^2\pi x}{x-k} = \lim_{h\to\pm 0}\frac{[k+h]\pi^2h^2}{h} = 0.$$

Поскольку $y'(k) = \pi[k]\sin 2\pi k = 0$, то $y'(x) = \pi[x]\sin 2\pi x$ при всех x. Следовательно,

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},\ \pi[x]\sin 2\pi x\right),\quad |x| > 1. \blacktriangleright$$

10. Найти производную от матричной функции

$$f : x \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{pmatrix},$$

где

$$a_{11}(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x & \text{при } |x| \leqslant 1, \\ \frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} x + \frac{x-1}{2} & \text{при } |x| > 1, \end{cases}$$

$$a_{12}(x) = a_{21}(x) = \begin{cases} x^2e^{-x^2} & \text{при } |x| \leqslant 1, \\ \frac{1}{e} & \text{при } |x| > 1, \end{cases}$$

$$a_{22}(x) = |x|.$$

◀ Сначала вычисляем производные от элементов данной матрицы. При $|x| \neq 1$ и $x \neq 0$ имеем

$$a'_{11}(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & \text{при } |x| < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{при } |x| > 1, \end{cases}$$

$$a'_{12}(x) = a'_{21}(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2}(1-x^2) & \text{при } |x| < 1, \\ 0 & \text{при } |x| > 1, \end{cases}$$

$$a'_{22}(x) = \operatorname{sgn} x.$$

Далее ищем односторонние производные функций $a_{ij}(x)$ в точках $x = 1$, $x = -1$ и $x = 0$:

$$a'_{11+}(-1) = \lim_{h\to+0} \frac{\operatorname{arctg}(-1+h) + \frac{\pi}{4}}{h} = \frac{1}{2};$$

$$a'_{11-}(-1) = \lim_{h\to-0} \frac{\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}(-1+h) + \frac{1}{2}(-1+h-1) + \frac{\pi}{4}}{h} = +\infty;$$

$$a'_{11+}(1) = \lim_{h\to+0} \frac{\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}(1+h) + \frac{1}{2}(1+h-1) - \frac{\pi}{4}}{h} = \frac{1}{2};$$

$$a'_{11-}(1) = \lim_{h\to-0} \frac{\operatorname{arctg}(1+h) - \frac{\pi}{4}}{h} = \frac{1}{2}; \qquad a'_{12-}(-1) = \lim_{h\to-0} \frac{\frac{1}{e} - \frac{1}{e}}{h} = 0;$$

$$a'_{12+}(-1) = \lim_{h\to+0} \frac{(-1+h)^2 e^{-(-1+h)^2} - \frac{1}{e}}{h} = \frac{1}{e}\lim_{h\to+0} \frac{1}{h}\left((1-2h+h^2)(1+2h-h^2+o(h^2)) - 1\right) = 0.$$

Аналогично находим $a'_{12\pm}(1) = 0$, $a'_{22\pm}(0) = \pm 1$. Таким образом, окончательно получаем

$$f'(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{1}{1+x^2} & 2xe^{-x^2}(1-x^2) \\ 2xe^{-x^2}(1-x^2) & \operatorname{sgn} x \end{pmatrix} & \text{при } 0 < |x| < 1, \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \operatorname{sgn} x \end{pmatrix} & \text{при } |x| > 1; \end{cases}$$

$$f'_{\pm}(1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f'_{\pm}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad f'_{+}(-1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $a'_{11-}(-1) = +\infty$, то конечной производной матричная функция в точке $x = -1$ не имеет. В точке $x = 1$ выполняется равенство $f'_{+}(1) = f'_{-}(1)$, поэтому $f'(1) = f'_{+}(1) = f'_{-}(1)$. В точке $x = 0$ односторонние производные, хотя и существуют, но не равны между собой, поэтому $f'(0)$ не существует. ▶

11. Доказать, что если функции $a_{ij} = a_{ij}(x)$, $i, j = \overline{1, n}$, имеют конечные производные, то производную от определителя $D(x) = \det(a_{ij}(x))$ можно найти по одной из формул:

$$D'(x) = \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}' = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{k1}(x) & a'_{k2}(x) & \dots & a'_{kn}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}, \tag{1}$$

$$D'(x) = \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}' = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11}(x) & \dots & a'_{1k}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & \dots & a'_{2k}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & \dots & a'_{nk}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}. \tag{2}$$

◀ Поскольку по определению определителя

$$D(x) = \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} = \sum_{s} (-1)^s a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n},$$

где s — число инверсий в перестановке $[i_1, i_2, \ldots, i_n]$, то

$$D'(x) = \left(\sum_s (-1)^s a_{i_1 1} a_{i_2 2} \ldots a_{i_n n}\right)' =$$

$$= \sum_s (-1)^s a'_{i_1 1} a_{i_2 2} \ldots a_{i_n n} + \sum_s (-1)^s a_{i_1 1} a'_{i_2 2} \ldots a_{i_n n} + \ldots + \sum_s (-1)^s a_{i_1 1} a_{i_2 2} \ldots a'_{i_n n} =$$

$$= \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a'_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a'_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a'_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a'_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a'_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a'_{nn} \end{vmatrix},$$

т. е. получаем формулу (2).

Аналогично, исходя из представления

$$D(x) = \sum_s (-1)^s a_{1 i_1} a_{2 i_2} \ldots a_{n i_n},$$

получаем формулу (1). ►

Приведем примеры вычисления производной функции в точке и ее окрестности.

12. Показать, что функция

$$f : x \mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \\ 0 & e^{x^2} \end{pmatrix}, & x \neq 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & x = 0, \end{cases}$$

имеет разрывную производную.

◄ При $x \neq 0$ элементы данной матрицы имеют конечные производные, которые вычисляются по правилам пунктов 1.2 и 1.3. Поэтому по правилам пункта 1.6 при $x \neq 0$

$$f' : x \mapsto \begin{pmatrix} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & 1 \\ 0 & 2xe^{x^2} \end{pmatrix}.$$

В точке $x = 0$ по определению 3, п. 1.1, имеем

$$a_{11}(0) = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} = 0, \quad a'_{12}(0) = 1, \quad a'_{21}(0) = 0, \quad a'_{22}(0) = 0,$$

где

$$a_{11}(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

$$a_{12}(x) = x, \quad a_{21}(x) = 0, \quad a_{22}(x) = e^{x^2}.$$

Таким образом,

$$f' : x \mapsto \varphi(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & 1 \\ 0 & 2xe^{x^2} \end{pmatrix}, & x \neq 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & x = 0. \end{cases}$$

Исследуем теперь на непрерывность матричную функцию φ. При $x \neq 0$ элементы ее — элементарные функции, поэтому по известной теореме функция φ непрерывна при $x \neq 0$. Далее, рассматриваем

$$\lim_{x \to 0} \varphi(x) = \lim_{x \to 0} \begin{pmatrix} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & 1 \\ 0 & 2xe^{x^2} \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$\lim_{x \to 0} \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\right)$$

не существует, то $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)$ также не существует. Следовательно, функция φ разрывна в точке $x=0$. ►

13. При каком условии функция

$$f: x\mapsto |x|^n \sin\frac{1}{|x|^m}, \quad x\neq 0, \quad \text{и} \quad f(0)=0, \quad m>0,$$

имеет: а) ограниченную производную в окрестности начала координат; б) неограниченную производную в этой окрестности?

◄ а) При $x\neq 0$ производная находится по правилу 2), п. 1.2:

$$f': x\mapsto n|x|^{n-1}\operatorname{sgn} x\cdot\sin\frac{1}{|x|^m} - m|x|^{n-m-1}\operatorname{sgn} x\cdot\cos\frac{1}{|x|^m}. \tag{a}$$

При $x=0$ функция $x\mapsto \sin\frac{1}{|x|^m}$ производной не имеет, поэтому указанное выше правило применить нельзя. Использовав определение 3, п. 1.1, находим, что

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{|h|^n\sin\frac{1}{|h|^m}}{h}=\lim_{h\to 0}\left(|h|^{n-1}\sin\frac{1}{|h|^m}\cdot\operatorname{sgn} h\right)$$

существует только при $n>1$ и равна нулю. Следовательно, производная существует в окрестности начала координат при $n>1$. Очевидно, она ограничена при $n-m-1\geqslant 0$, т. е. при $n\geqslant 1+m$.

б) Как видим по (а), производная будет неограниченной, если $n-1<0$ или $n-m-1<0$, откуда $n<1$ или $n<1+m$, т. е. достаточно, чтобы выполнялось неравенство $n<1+m$. С другой стороны, для существования $f'(0)$ необходимо иметь $n>1$. Таким образом, если $1<n<m$, то f' является неограниченной в рассматриваемой окрестности. ►

14. Показать, что функция

$$f: x\mapsto \begin{cases} x^2\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

в любой окрестности начала координат имеет точки, в которых конечная производная не существует, но имеет конечную производную в точке $x=0$.

◄ Функция $x\mapsto x^2$ имеет производную всюду. Функция $x\mapsto\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|$ имеет производную всюду, за исключением точек $x=0$ и $x=x_k=\frac{2}{2k+1}$, $k\in\mathbb{Z}$. Поэтому производную функции f при $x\neq 0$ и $x\neq x_k$ можно найти как производную от произведения $x^2\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|$. В точках же $x=0$ и $x=x_k$ производную f вычисляем, используя определения 3 и 4, п. 1.1. Поскольку $\frac{\Delta f(0)}{h}=h\left|\cos\frac{\pi}{h}\right|$, то

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}h\left|\cos\frac{\pi}{h}\right|=0,$$

т. е. f имеет производную в точке $x=0$. Далее,

$$f'_{\pm}\left(\frac{2}{2k+1}\right)=\lim_{h\to\pm 0}\frac{1}{h}\left(\frac{2}{2k+1}+h\right)^2\left|\cos\frac{\pi(2k+1)}{2+(2k+1)h}\right|=$$

$$=\frac{4}{(2k+1)^2}\lim_{h\to\pm 0}\frac{1}{h}\left|\cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{2}+\left(\frac{\pi(2k+1)}{2+(2k+1)h}-\frac{\pi}{2}(2k+1)\right)\right)\right|=$$

$$=\frac{4}{(2k+1)^2}\lim_{h\to\pm 0}\frac{1}{h}\left|\sin\left(\frac{\pi(2k+1)}{2+(2k+1)h}-\frac{\pi(2k+1)}{2}\right)\right|=\pm\pi,$$

т. е. производная $f'(x_k)$ не существует. Поскольку $\forall\varepsilon>0\ \exists k\in\mathbb{Z}: |x_k|<\varepsilon$, то в любой ε-окрестности начала координат имеются точки, в которых производная не существует. ►

15. Показать, что функция

$$f: x\mapsto\begin{cases}\sin^2 x, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\end{cases}$$

имеет производную лишь в точках $x_k=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

◄ В точках $x \neq x_k$ функция f разрывна, поэтому не может иметь производной при $x \neq x_k$. Далее, в точках $x = x_k$ по определению 3, п. 1.1, имеем

$$f'(x_k) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_k+h) - f(x_k)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_k+h)}{h}.$$

Если $x_k + h \in \mathbb{Q}$, то $f(x_k+h) = \sin^2(x_k+h) = \sin^2 h$ и $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_k+h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin^2 h}{h} = 0$. Если же $x_k + h \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, то $f(x_k+h) = 0$ и $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_k+h)}{h} = 0$. Таким образом, $f'(x_k) = 0$. ►

Для функции f найти левую f'_- и правую f'_+ производные, если:

16. $\mathbf{f} : x \mapsto \left([x]\sin \pi x,\ \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right)$, $x \neq 0$, и $\mathbf{f}(0) = (0, 0)$.

◄ По определению 4, п. 1.1, $\mathbf{f}'_{\pm} : x \mapsto (f'_{1\pm}(x),\ f'_{2\pm}(x))$. Поскольку при $x \neq k$, $k \in \mathbb{Z}$, существует $f'_1(x) = \pi[x]\cos \pi x$, то $f'_{1+}(x) = f'_{1-}(x) = \pi[x]\cos \pi x$ при $x \neq k$. Аналогично при $x \neq 0$ $f'_2(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} + \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$, поэтому $f'_{2+}(x) = f'_{2-}(x) = f'_2(x)$ при $x \neq 0$.

Далее вычисляем $f'_{1\pm}(k)$ и $f'_{2\pm}(0)$. Имеем

$$f'_{1\pm}(k) = \lim_{h\to \pm 0} \frac{f_1(k+h) - f_1(k)}{h} = \lim_{h\to \pm 0} \frac{(-1)^k[k+h]}{h} \sin \pi h,$$

откуда

$$f'_{1\pm}(k) = (-1)^k k\pi, \qquad f'_{1-}(k) = (-1)^k(k-1)\pi;$$

$$f'_{2\pm}(0) = \lim_{h\to \pm 0} \frac{f_2(h) - f_2(0)}{h} = \lim_{h\to \pm 0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{h}}},$$

откуда

$$f'_{2+}(0) = 0, \qquad f'_{2-}(0) = 1.$$

Таким образом,

$$\mathbf{f}'_-(x) = \mathbf{f}'_+(x) = \left(\pi[x]\cos \pi x,\ \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} + \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}\right),$$

если $x \neq k$, $k \in \mathbb{Z}$, и

$$\mathbf{f}'_+(k) = \left((-1)^k k\pi,\ \frac{1}{1+e^{\frac{1}{k}}} + \frac{e^{\frac{1}{k}}}{\left(1+e^{\frac{1}{k}}\right)^2}\right),$$

$$\mathbf{f}'_-(k) = \left((-1)^k(k-1)\pi,\ \frac{1}{1+e^{\frac{1}{k}}} + \frac{e^{\frac{1}{k}}}{\left(1+e^{\frac{1}{k}}\right)^2}\right),$$

если $k \neq 0$. Если $k = 0$, то

$$\mathbf{f}'_+(0) = (0, 0), \qquad \mathbf{f}'_-(0) = (-\pi, 1). \ ►$$

17. $f : x \mapsto \sqrt{1 - e^{-x^2}}$.

◄ Функция $\varphi : u \mapsto \sqrt{u}$ имеет конечную производную при $u > 0$. Функция $\psi : x \mapsto u = 1 - e^{-x^2}$ имеет производную при всех x. Поэтому, если $x \neq 0$, то функция f имеет производную и ее можно найти как производную от сложной функции. Итак, при $x \neq 0$ имеем

$$f'_+(x) = f'_-(x) = f'(x) = \frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}.$$

В точке $x = 0$ находим $f'_+(0)$ и $f'_-(0)$:

$$f'_\pm(0) = \lim_{h\to\pm0} \frac{1}{h}\sqrt{1-e^{-h^2}} = \lim_{h\to\pm0} \frac{|h|}{h}\sqrt{\frac{1-e^{-h^2}}{h^2}} = \pm \lim_{h\to\pm0} \sqrt{\frac{1-e^{-h^2}}{h^2}} = \pm1. ▶$$

18. Показать, что функция

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\arcsin x^2}{x} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

непрерывна в точке $x = 0$, но не имеет в этой точке ни левой, ни правой производной.

◀ Поскольку $\lim\limits_{h\to0}\left(\frac{\arcsin h^2}{h}\sin\frac{1}{h}\right) = 0$, $f(0) = 0$, то по определению непрерывности в точке функция f непрерывна в нуле. Далее,

$$f'_\pm(0) = \lim_{h\to\pm0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to\pm0} \frac{\arcsin h^2}{h^2}\sin\frac{1}{h}.$$

Если $h = h_k = \frac{1}{2k\pi}$ и $k \to \pm\infty$, то $\lim\limits_{k\to\pm\infty} \frac{\arcsin h_k^2}{h_k^2}\sin\frac{1}{h_k} = 0$; если же $h = h_k = \frac{1}{2k\pi+\pi/2}$ и $k \to \pm\infty$, то $\lim\limits_{k\to\pm\infty} \frac{\arcsin h_k^2}{h_k^2}\sin\frac{1}{h_k} = 1$.

Следовательно, односторонние производные не существуют. ▶

19. Найти в расширенном смысле производные $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$ в точках разрыва x_0 функции f, если:

а) $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x^2+x^3}}{x}$; б) $f : x \mapsto \operatorname{sgn}(x - x^3)$.

◀ а) $x_0 = 0$ — точка разрыва первого рода. Сначала найдем $f(\pm0)$. Имеем

$$f(\pm0) = \lim_{h\to\pm0} \frac{\sqrt{h^2+h^3}}{h} = \lim_{h\to\pm0} \frac{|h|}{h} = \pm1.$$

Далее, согласно определению 4, п. 1.1,

$$f'_\pm(0) = \lim_{h\to\pm0} \frac{\sqrt{h^2+h^3} \mp h}{h^2} = \lim_{h\to\pm0} \frac{\sqrt{h^2+h^3}-|h|}{h^2} =$$

$$= \lim_{h\to\pm0} \frac{\sqrt{1+h}-1}{|h|} = \lim_{h\to\pm0} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h} \cdot \lim_{h\to\pm0} \frac{h}{|h|} = \pm\frac{1}{2}.$$

б) $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm1$ — точки разрыва. Находим:

$$f(\pm0) = \lim_{h\to\pm0} \operatorname{sgn} h(1-h^2) = \pm1,$$

$$f(1\pm0) = \lim_{h\to\pm0} \operatorname{sgn}\left((1+h)(1-(1+h)^2)\right) = \mp1,$$

$$f(-1\pm0) = \lim_{h\to\pm0} \operatorname{sgn}\left((-1+h)(1-(-1+h)^2)\right) = \mp1.$$

Согласно определению 4, п. 1.1, получаем

$$f'_\pm(0) = \lim_{h\to\pm0} \frac{\operatorname{sgn} h(1-h^2) \mp 1}{h} = \lim_{h\to\pm0} \frac{\pm1\mp1}{h} = 0,$$

$$f'_\pm(1) = \lim_{h\to\pm0} \frac{\operatorname{sgn}\left((1+h)(1-(1+h)^2)\right) \pm 1}{h} = \lim_{h\to\pm0} \frac{\operatorname{sgn}(-2h-3h^2-h^3) \pm 1}{h} = \lim_{h\to\pm0} \frac{\mp1\pm1}{h} = 0,$$

$$f'_\pm(-1) = \lim_{h\to\pm0} \frac{\operatorname{sgn}\left((-1+h)(1-(-1+h)^2)\right) \pm 1}{h} =$$

$$= \lim_{h\to\pm0} \frac{\operatorname{sgn}(-2h+3h^2-h^3) \pm 1}{h} = \lim_{h\to\pm0} \frac{\mp1\pm1}{h} = 0. ▶$$

20. Может ли функция f в точке ее разрыва иметь конечную производную, бесконечную производную?

◀ Известно, что функция, имеющая конечную производную в некоторой точке, обязательно непрерывна в ней. Следовательно, в точке разрыва конечной производной функция иметь не может.

Что же касается бесконечной производной, то, как показывают примеры ответ положителен.

Действительно, взяв $f(x) = \operatorname{sgn} x$ при $x = 0$, имеем

$$f'_-(0) = \lim_{h\to-0} \frac{\operatorname{sgn} h}{h} = -\lim_{h\to-0} \frac{1}{h} = +\infty, \quad f'_+(0) = \lim_{h\to+0} \frac{\operatorname{sgn} h}{h} = \lim_{h\to+0} \frac{1}{h} = +\infty. ▶$$

21. Можно ли утверждать, что сумма $F(x) = f(x) + g(x)$ не имеет производной в точке $x = x_0$, если: а) функция f имеет производную в точке x_0, а функция g не имеет производной в точке x_0; б) обе функции f и g не имеют производной в точке x_0?

◀ а) Исходя из определения 3, п. 1.1, имеем

$$F'(x_0) = \lim_{h\to0} \frac{\Delta F(x_0)}{h} = \lim_{h\to0} \left(\frac{\Delta f(x_0)}{h} + \frac{\Delta g(x_0)}{h}\right). \tag{1}$$

Пусть производная функции f в точке x_0 существует, а производная функции g не существует. Тогда $\lim\limits_{h\to0} \frac{\Delta f(x_0)}{h} = f'(x_0)$, $\lim\limits_{h\to0} \frac{\Delta g(x_0)}{h}$ не существует. Следовательно, предел в (1), как легко установить от противного, не существует, т. е. производная $F'(x_0)$ не существует.

б) В некоторых случаях производная $F'(x_0)$ может существовать несмотря на то, что обе функции f и g ее не имеют. Например, если $F(x) = \psi(x) + (\varphi(x) - \psi(x))$, где φ имеет производную в точке x_0, а ψ не имеет. ▶

22. Можно ли утверждать, что произведение $F(x) = f(x)\,g(x)$ не имеет производной в точке $x = x_0$, если: а) функция f имеет производную в точке x_0, а функция g не имеет; б) обе функции f и g не имеют производной в точке x_0?

◀ а) Вообще говоря, нет. По определению 3, п. 1.1, имеем

$$F'(x_0) = \lim_{h\to0} \left(\frac{\Delta f(x_0)}{h} g(x_0) + f(x_0 + h)\frac{\Delta g(x_0)}{h}\right). \tag{1}$$

Анализируя (1), приходим, в частности, к такому выводу. Если функция g определена при $|x - x_0| < \delta$ $(\delta > 0)$, $f(x_0) = 0$, $\left|\frac{\Delta g(x_0)}{h}\right| \leqslant M$ $(M = \text{const})$, то $F'(x_0)$ существует. Например, если $f(x) = x$, $g(x) = |x|$, $x_0 = 0$, то $F'(0) = 0$.

б) Если пределы $\lim\limits_{h\to0} \frac{\Delta f(x_0)}{h}$ и $\lim\limits_{h\to0} \frac{\Delta g(x_0)}{h}$ не существуют, но выполняются, например, условия

$$g(x_0) = 0, \quad f(x_0) = 0, \quad \left|\frac{\Delta g(x_0)}{h}\right| \leqslant M,$$

функции f и g непрерывны в точке $x = x_0$,

то предел (1) существует. Это видно на примере функций $f : x \mapsto |x|$, $g : x \mapsto |x|$. Обе функции не имеют производных в точке $x = 0$, однако их произведение $f(x)\,g(x) = x^2$, очевидно, имеет производную, равную нулю. ▶

23. Пусть $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где множество E имеет предельную точку $x_0 \in E$. Конечный предел

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\in E)}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_E(x_0) \tag{1}$$

назовем *производной функции* f в точке x_0 по множеству E.

Найти производную по множеству E в точке x_0 для функции f, если:

а) $f(x) = 1$ на $E = \left\{x \,\middle|\, x = 0,\ x = 1,\ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$; б) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \end{cases}$ на $E = \mathbb{Q}$.

◀ а) Множество E имеет единственную предельную точку $x_0 = 0$. Используя формулу (1), получаем

$$f'_E(x_0) = \lim_{\substack{x\to0\\(x\in E)}} \frac{1-1}{x} = 0.$$

б) Любая точка из множества $\mathbb{R}$ является предельной для множества $\mathbb{Q}$. Согласно (1), рассматриваем только те предельные точки, которые принадлежат $\mathbb{Q}$. Пусть $x_0 \in \mathbb{Q}$. Тогда

$$f'_E(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \in \mathbb{Q})}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \in \mathbb{Q})}} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = 2x_0. \blacktriangleright$$

24. Пусть $\mathbf{a}, \mathbf{b} : \mathbb{R} \to E^n$, $\mathbf{a} = (a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x))$, $\mathbf{b} = (b_1(x), b_2(x), \ldots, b_n(x))$, $x \in]c, d[$. Компоненты a_i, b_i имеют конечные производные на $]c, d[$. Показать, что скалярное произведение $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ также имеет производную и ее можно найти по формуле

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})' = (\mathbf{a}', \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{b}').$$

◀ По определению 3, п. 1.1, имеем

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})' = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}((\mathbf{a}(x_0 + h), \mathbf{b}(x_0 + h)) - (\mathbf{a}(x_0), \mathbf{b}(x_0))) =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} ((\mathbf{a}(x_0 + h) - \mathbf{a}(x_0), \mathbf{b}(x_0 + h)) + (\mathbf{a}(x_0), \mathbf{b}(x_0 + h) - \mathbf{b}(x_0))) =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\left(\frac{\Delta \mathbf{a}(x_0)}{h}, \mathbf{b}(x_0 + h) \right) + \left(\mathbf{a}(x_0), \frac{\Delta \mathbf{b}(x_0)}{h} \right) \right) = (\mathbf{a}'(x_0), \mathbf{b}(x_0)) + (\mathbf{a}(x_0), \mathbf{b}'(x_0)).$$

При установлении этого результата мы воспользовались следующими утверждениями:

а) Производные $\mathbf{a}'$ и $\mathbf{b}'$ существуют, поскольку, по условию, существуют производные от их компонент.

б) Скалярное произведение обладает свойством непрерывности, поэтому можно совершить предельный переход под знаком скалярного произведения.

в) Скалярное произведение обладает однородностью, поэтому множитель h^{-1} можно внести под знак скалярного произведения.

г) Вектор-функция $\mathbf{y}$ непрерывна в точке x_0. ▶

25. Пусть $\mathbf{f} :]a, b[\to E$, где E — евклидово пространство. Примем, по определению, в качестве производной функции $\mathbf{f}$ в точке $x_0 \in]a, b[$ предел

$$\mathbf{f}'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} (\mathbf{f}(x_0 + \Delta x) - \mathbf{f}(x_0)). \tag{1}$$

Показать, что если $A(x)$, $\mathbf{y}(x)$ — соответственно функциональная матрица и вектор-функция, имеющие конечные производные на $]a, b[$, то производная $A(x)\mathbf{y}(x)$ вычисляется по формуле

$$(A(x)\mathbf{y}(x))' = A'(x)\mathbf{y}(x) + A(x)\mathbf{y}'(x).$$

◀ Используя определение (1), имеем

$$(A(x)\mathbf{y}(x))'\big|_{x=x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} (A(x_0 + h)\mathbf{y}(x_0 + h) - A(x_0)\mathbf{y}(x_0)), \quad x_0 \in]a, b[. \tag{2}$$

Поскольку существуют производные $A'(x_0)$, $\mathbf{y}'(x_0)$, то существуют пределы $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\Delta A(x_0)}{h} = A'(x_0)$, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\Delta \mathbf{y}(x_0)}{h} = \mathbf{y}'(x_0)$, и из (2) предельным переходом находим

$$(A(x)\mathbf{y}(x))'\big|_{x=x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta A(x_0)}{h} \mathbf{y}(x_0 + h) + \lim_{h \to 0} A(x_0) \frac{\Delta \mathbf{y}(x_0)}{h} = A'(x_0)\mathbf{y}(x_0) + A(x_0)\mathbf{y}'(x_0). \blacktriangleright$$

26. Пусть $A(x)$ — квадратная матрица, имеющая конечную производную и обратную матрицу $A^{-1}(x)$. Показать, что

$$\left(A^{-1}(x)\right)' = -A^{-1}(x)A'(x)A^{-1}(x).$$

◀ Пользуясь определением (1) из примера 25, сначала устанавливаем, что для произведения матриц A, B, имеющих конечные производные, справедлива формула

$$(A(x)B(x))' = A'(x)B(x) + A(x)B'(x),$$

на основании которой

$$\left(A(x)A^{-1}(x)\right)' = A'(x)A^{-1}(x) + A(x)\left(A^{-1}(x)\right)'.$$

Отсюда, в силу тождества $A(x)A^{-1}(x) = I$ (единичная матрица), следует

$$A'(x)A^{-1}(x) + A(x)\left(A^{-1}(x)\right)' = 0 \text{ (нуль-матрица)}.$$

Наконец, умножив слева обе части этого равенства на $A^{-1}(x)$, приходим к требуемой формуле. ►

27. Пусть $A(x)$ — матрица, имеющая конечную производную. Всегда ли справедлива формула

$$(A^n(x))' = nA^{n-1}(x)A'(x), \quad n \in \mathbb{N}? \tag{1}$$

◄ Уже при $n = 2$ замечаем, что приведенная формула, вообще говоря, не выполняется. В самом деле,

$$\left(A^2(x)\right)' = (A(x)A(x))' = A'(x)A(x) + A(x)A'(x).$$

Отсюда также видим, что формула (1) будет справедливой, если матрицы $A(x)$ и $A'(x)$ перестановочны. Оказывается, что и в общем случае перестановочность матриц $A(x)$, $A'(x)$ является достаточным условием правильности формулы (1). В самом деле, поскольку в силу (1)

$$\left(A^{n+1}(x)\right)' = (A^n(x)A(x))' = (A^n(x))' A(x) + A^n(x)A'(x) = nA^{n-1}(x)A'(x)A(x) + A^n(x)A'(x) =$$
$$= nA^{n-1}(x)A(x)A'(x) + A^n(x)A'(x) = (n+1)A^n(x)A'(x),$$

то, в соответствии с методом математической индукции, заключаем, что формула (1) справедлива $\forall n \in \mathbb{N}$. ►

28. Найти сумму $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$.

◄ Поскольку $1^3 + 2^3x + 3^3x^2 + \ldots + n^3x^{n-1} = (xQ_n(x))'$, где

$$Q_n(x) = \frac{n^2x^{n+2} - (2n^2+2n-1)x^{n+1} + (n+1)^2x^n - x - 1}{(x-1)^3}, \quad x \neq 1$$

(см.: Ляшко И. И. и др. Справочное пособие по математическому анализу. К., 1978. Ч. 1, с. 220), то

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots n^3 = \lim_{x\to1} (xQ_n(x))' = \lim_{x\to1} Q_n(x) + \lim_{x\to1} Q_n'(x) =$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. ►$$

29. Пусть

$$A(x) = \begin{pmatrix} \sin\omega x & \cos\omega x \\ -\cos\omega x & \sin\omega x \end{pmatrix}, \quad \omega = \text{const}.$$

Показать, что матрица $A(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$A''(x) + \omega^2A(x) = 0, \quad A''(x) = \left(A'(x)\right)'.$$

◄ Имеем

$$A'(x) = \omega\begin{pmatrix} \cos\omega x & -\sin\omega x \\ \sin\omega x & \cos\omega x \end{pmatrix}, \quad A''(x) = -\omega^2\begin{pmatrix} \sin\omega x & \cos\omega x \\ -\cos\omega x & \sin\omega x \end{pmatrix},$$

откуда и следует указанное уравнение. ►

30. Пусть $S_n(x) = I + xA + \frac{x^2A^2}{2!} + \ldots + \frac{x^nA^n}{n!}$, где A — постоянная матрица. Установить дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет $S_n(x)$.

◄ Вычисляя производную, находим

$$S_n'(x) = A + \frac{x}{1!}A^2 + \frac{x^2}{2!}A^3 + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}A^n.$$

Далее, умножая выражение для $S_n(x)$ на A и вычитая полученное из $S_n'(x)$, имеем

$$S_n' - AS_n + \frac{x^n}{n!}A^{n+1} = 0.$$

Это и есть требуемое уравнение. ►

Упражнения для самостоятельной работы

Найти производные следующих функций:

1. $f : x \mapsto \frac{5}{128} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{5}{64} \operatorname{arctg} x - \frac{x^6}{8(x^4-1)^2} - \frac{5x}{32(x^4-1)}$.

2. $f : x \mapsto 4\sqrt{\sqrt{x+2}-1} - 2\sqrt{2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\sqrt{x+2}-1}{2}} + 1$.

3. $f : x \mapsto \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| - \frac{-1}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x} + 4$.

4. $f : x \mapsto \dfrac{1}{8\sqrt{2}} \ln \dfrac{e^{\frac{x^2}{2}} + \sqrt{2}e^{\frac{x^2}{4}} + 1}{e^{\frac{x^2}{2}} - \sqrt{2}e^{\frac{x^2}{4}} + 1} + \dfrac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \dfrac{e^{\frac{x^2}{2}} - 1}{\sqrt{2}\, e^{\frac{x^2}{2}}} - e^{\frac{x^2}{4}} \left(2\left(e^{x^2}+1\right)\right)^{-1} + 3$.

5. $f : x \mapsto \operatorname{arctg} \sqrt{\cos 2x} - \sqrt{\cos 2x}$. **6.** $f : x \mapsto \sin^2(\omega \cos \alpha x) + \cos^2(\omega \sin \alpha x)$.

7. $f : x \mapsto \frac{e^{-\alpha x^2}}{1+\beta x^2}$. **8.** $f : x \mapsto \frac{\operatorname{sh} \alpha x + \sin \alpha x}{\operatorname{ch} \alpha x + \cos \alpha x}$. **9.** $f : x \mapsto \arcsin(\cos nx + \sin nx)$.

10. $f : x \mapsto \sin(\arcsin \alpha x + \arccos \alpha x)$. **11.** $f : x \mapsto A \sin^\alpha(\beta x + \gamma)$.

12. $f : x \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2+1}$. **13.** $f : x \mapsto \frac{xt^2}{t+x^2}$. **14.** $f : x \mapsto \operatorname{ctg}(a \operatorname{tg}(b \operatorname{arctg}(cx)))$.

15. $f : x \mapsto \left(\log_a \sqrt{\frac{x+1}{x+b}}\right)^c$. **16.** $f : x \mapsto e^{-t^2 \sin(xy)}$. **17.** $f : x \mapsto \ln^a(\ln^b(\ln^c x))$.

18. $f : x \mapsto x^{\sin x} + (\sin x)^x$. **19.** $f : x \mapsto x^{x^{x^x}}$. **20.** $f : x \mapsto x^{(\ln x)^x}$.

Найти производные следующих вектор-функций:

21. $\mathbf{f} : x \mapsto \left(\arccos \frac{1}{x}, \arcsin(\sin x), \sin u(x), \cos v(x)\right)$.

22. $\mathbf{f} : x \mapsto \left(e^{-u^2(x)}, \operatorname{th} u^3(x), \operatorname{ch} u^4(x), \operatorname{sh} u^5(x)\right)$.

23. $\mathbf{f} : x \mapsto (2tx, 3t - x^3, \sin \omega t, \cos \omega x)$. **24.** $\mathbf{f} : t \mapsto \left(e^{\alpha t}\cos t, e^{\alpha t}\sin t, u\left(\frac{1}{t}\right), u(\sin t)\right)$.

25. $\mathbf{f} : \varphi \mapsto \left(\rho(\varphi)\sin\varphi, \rho(\varphi)\cos\varphi, \varphi^2 - x\varphi, \varphi^3 - x^2\varphi\right)$.

26. $\mathbf{f} : \rho \mapsto \left(\rho\sin\varphi(\rho), \rho\cos\varphi(\rho), \varphi^2(\rho) - x\varphi(\rho), \varphi^3(\rho^2) - x^2\varphi(\rho^2)\right)$.

27. $\mathbf{f} : x \mapsto \left(\sin(e^{2x}), e^{\sin^2 x}, \psi(\sin^2 x), \varphi(\cos^2 x)\right)$.

28. $\mathbf{f} : x \mapsto \left(\sqrt{u(x)+v(x)}, \operatorname{arctg} \frac{u(x)}{v(\sin x)}, e^{-u(x)v(x)}\right)$.

29. $\mathbf{f} : x \mapsto \left(f_1\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right), f_2(u(x)v(x)), f_3(\sin u(v(x)))\right)$.

30. а) $\mathbf{f} : x \mapsto \left(\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} f_k^2(x)}, x\right)$; б) $\mathbf{f} : x \mapsto \left(\frac{1}{2}|f(x)|, x^2\sin x, x^2\cos x\right)$.

31. На кривой найти точки, в которых касательная к ней коллинеарна указанному вектору, а кривая описывается следующим радиусом-вектором (в евклидовом конечномерном пространстве E):

а) $\mathbf{f} : t \mapsto (3\cos t, 4\sin t, 5t)$, $0 \leqslant t < 2\pi$, $\mathbf{a} = (0, 4, 5)$;

б) $\mathbf{f} : t \mapsto (t, t^2, t^3)$, $0 \leqslant t \leqslant 4$, $\mathbf{a} = (2, 4, 6)$;

в) $\mathbf{f} : t \mapsto (e^t, e^{-t}, \operatorname{sh} t)$, $-\infty < t < +\infty$, $\mathbf{a} = (1, -1, 0)$.

32. Найти величину скорости движения материальной точки по кривой, если радиус-вектор ее имеет вид:

а) $\mathbf{f}(t) = (\sin t, 3\cos t)$ в момент $t = \pi$; б) $\mathbf{f}(t) = (\sin t^2, 3\cos t^2)$ в момент $t = \sqrt{\pi}$;

в) $\mathbf{f}(t) = \left(\sin\frac{1}{t}, \cos\frac{1}{t}, \frac{1}{t}\right)$ в момент $t = \frac{1}{\pi}$.

33. На данных траекториях найти точки покоя, если траектории описываются следующими вектор-функциями

а) $\mathbf{f} : t \mapsto \left(\sin(t^2x), \cos(tx), \operatorname{ch} t\right)$; б) $\mathbf{f} : t \mapsto \left(\frac{3}{2}t^2 + (1-x)t, 2t^2 - xt + 1, \frac{t^3}{3} + x^2t - 17t\right)$;

в) $\mathbf{f} : t \mapsto \left(xt + 2t^2 + 3t, 2xt + \frac{5}{2}t^2 - 4t + 3\right)$.

34. Показать, что траектории, которые описываются следующими вектор-функциями, ортогональны:

а) $\mathbf{f}_1 : t \mapsto (t\sin t, t\cos t, 1)$ и $\mathbf{f}_2 : t \mapsto (t\cos t, -t\sin t, 2)$;

б) $\mathbf{f}_1 : t \mapsto \left(\frac{1}{2}|f_1(t)|,\ u^2(t),\ u^2(t)\right)$ и $\mathbf{f}_2 : t \mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{4}{3},\ 1\right)t$.

35. Найти кинетическую энергию системы материальных точек с массами m_k, движущихся по следующим траекториям:

а) $\mathbf{f}_k : t \mapsto \left(\frac{t^k}{k},\ \sin\omega t,\ \cos\omega t\right)$ $(k = \overline{1, n};\ m_k = 1)$;

б) $\mathbf{f}_k : t \mapsto (\arcsin(\sin kt),\ \arccos(\cos kt))$ $(k = \overline{1, n};\ m_k = k\rho)$.

36. Найти производные следующих комплекснозначных функций:

$$\text{а) } f : x \mapsto x\ln x + ie^{-x^3}; \qquad \text{б) } f : x \mapsto e^{i\omega x}(\cos\alpha x + i\sin\alpha x);$$
$$\text{в) } f : x \mapsto \cos^2(x + ix^3); \qquad \text{г) } f : x \mapsto \ln^3(2x + ix^2).$$

Найти производные следующих матричных функций:

37. $f : x \mapsto \begin{pmatrix} \operatorname{sh} x^2 & \operatorname{ch} x^2 \\ \operatorname{th} x^2 & \operatorname{cth} x^2 \end{pmatrix}$. **38.** $f : x \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x}{\ln x} & \frac{\sin x}{x} \\ e^{u(x)} & u(e^x) \end{pmatrix}$.

39. $f : x \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x^2+y}{x^2-y} & \sin^x(xy) \\ (xy)^{\sin y} & y^{\sin(xy)} \end{pmatrix}$. **40.** $f : x \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2}|f(x)| & \sin\omega x \\ \cos\omega x & x \end{pmatrix}$.

41. $f : x \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{x + \sqrt[3]{x^2 + \sqrt[4]{x^3+1}}} & \sin^x(\sin^x x) & \ln^x(\ln^x x) \\ \arccos(\operatorname{arctg}(\operatorname{arsh} x^x)) & 1 & |x - |x|| \end{pmatrix}$.

42. $f : x \mapsto \begin{pmatrix} u(u\ \dots\ u(x)) & \frac{u(x)}{1+u^2(x)} & \ln(u(x)\ln u(x)) \\ 0 & \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left|\cos\frac{x}{2^k}\right| & \sum\limits_{k=1}^{n} u^k(x) \end{pmatrix}$

Вычислить производные функций f по множеству, если:

43. $f(x) = e^{x^2}$ при $x = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

44. $f(x) = \sin 2x$ при $x \in E$, $E = \left\{1,\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{5}{4},\ \dots\right\}$.

45. $f(x) = x\ln(1 + x^3)$ при $x \in E$, $E = \left\{1,\ \sqrt{2},\ \frac{4}{3},\ \sqrt[3]{3},\ \frac{7}{6},\ \sqrt[4]{4},\ \dots\right\}$.

46. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ при $x \in E$, $E = \mathbb{Q}$.

47. Пусть $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x)$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}(x)$, $\mathbf{c} = \mathbf{c}(x)$ — вектор-функции ($\mathbf{a}(x)$, $\mathbf{b}(x)$, $\mathbf{c}(x) \in E^3$), имеющие конечные производные. Доказать, что:

а) $[\mathbf{a}(x), \mathbf{b}(x)]' = [\mathbf{a}'(x), \mathbf{b}(x)] + [\mathbf{a}(x), \mathbf{b}'(x)]$;

б) $(\mathbf{a}(x)\mathbf{b}(x)\mathbf{c}(x))' = (\mathbf{a}'(x)\mathbf{b}(x)\mathbf{c}(x)) + (\mathbf{a}(x)\mathbf{b}'(x)\mathbf{c}(x)) + (\mathbf{a}(x)\mathbf{b}(x)\mathbf{c}'(x))$.

48. Найти производные от следующих определителей:

а) $\begin{vmatrix} \sin x^2 & \cos x^2 \\ -\cos x^2 & \sin x^2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ x^2 & x^3 & x^4 \\ x^3 & x^4 & x^5 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^{2x} & e^{3x} & e^{4x} \\ e^{3x} & e^{4x} & e^{5x} \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} \sin x & \sin 2x & \sin 3x & \sin 4x \\ \sin 2x & \sin 3x & \sin 4x & \sin 5x \\ \sin 3x & \sin 4x & \sin 5x & \sin 6x \\ \sin 4x & \sin 5x & \sin 6x & \sin 7x \end{vmatrix}$.

49. Пусть $A(x)$, $B(x)$ — функциональные матрицы, имеющие конечные производные. Показать, что

$$(\det(A(x)B(x)))' = (\det A(x))' \det B(x) + \det A(x)\,(\det B(x))'.$$

Найти производные функций f, если:

50. $f(x) = \begin{cases} \sin^2\pi x, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$

51. а) $f(x) = \inf\limits_{0 \leqslant \xi \leqslant x}\{\cos\xi\}$; б) $f(x) = \sup\limits_{\frac{\pi}{2} \leqslant \xi \leqslant x}\{\cos\xi\}$. **52.** $f(x) = \cos\frac{\pi x}{2} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x^{2n^{|x|}}$.

53. а) $f(x) = \varphi(\varphi(x))$; б) $f(x) = \varphi(\psi(x))$; в) $f(x) = \psi(\varphi(x))$; г) $f(x) = \psi(\psi(x))$, где

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{если } |x| \leqslant 1, \\ x^2, & \text{если } |x| > 1, \end{cases} \qquad \psi(x) = \begin{cases} e^x, & \text{если } 0 \leqslant x < +\infty, \\ 1, & \text{если } -\infty < x < 0. \end{cases}$$

54. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \operatorname{ch} \frac{x}{2^k}$. **55.** а) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln \operatorname{arctg} \frac{\pi n^2 + 4kx^2}{4n^2 - \pi k x^2}$;

б) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \sin \frac{k^2 x}{n^3}\right)$; в) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k}{n} + x^2\right)$.

Вычислить правую и левую производные следующих функций:

56. а) $f : x \mapsto \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$, где $\varphi(t)$ — расстояние до ближайшего целого числа;

б) $f : x \mapsto \min(\operatorname{tg} x,\ 2 - \sin 2x)$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$; в) $f : x \mapsto \max(4^{|x|-1},\ x^2)$.

57. $f : x \mapsto [x^2]|\sin \pi x^2|$. **58.** а) $f : x \mapsto \dfrac{1}{1 - 2^{\frac{x}{1-x}}}$, $x \neq 1$, $f(1) = 1$;

б) $f : x \mapsto \left(1 - 2^{\frac{x}{1-x}}\right)^{-1}$, $x \neq 1$, $f(1) = 0$.

59. а) $f : x \mapsto \varlimsup\limits_{t\to\infty} e^{x \sin t^2}$; б) $f : x \mapsto \varliminf\limits_{t\to\infty} e^{x \sin t^2}$.

60. $f : x \mapsto [x]^{[x]}$, $x \geqslant 1$. **61.** $f : x \mapsto \begin{cases} |\sin \pi x|^{\frac{3}{2}}, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$

62. Найти $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$ **в точках разрыва x_0 функции f, если:**
а) $f(x) = |x|^{[x]}$; б) $f(x) = \frac{1}{1 - \ln|\sin x|}$.

63. При каком условии функция

$$f : x \mapsto |x|^{2\alpha}\left[|x|^{2\beta}\right], \quad x \neq 0, \quad \text{и} \quad f(0) = 0$$

имеет конечную производную при $x = 0$?

64. Пусть

$$f_k(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^k C_n^i x^i (1-x)^{n-i}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Вывести рекуррентное соотношение для функций f_k.

65. Найти числа Дини

$$\mathcal{D}^{\pm} f(x) = \varlimsup_{h\to\pm 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad \mathcal{D}_{\pm} f(x) = \varliminf_{h\to\pm 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

для функций:

а) $f : x \mapsto \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0; \end{cases}$ б) $f : x \mapsto \begin{cases} ax \sin^2 \frac{1}{x} + bx \cos^2 \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

66. Найти $D'_{20}(x)$, если

$$D_{k+1}(x) = \frac{D_k^2(x)}{(1 - x^2 D_k^2(x)) D_{k-1}(x)}, \qquad k = \overline{1,\ 19}, \quad D_0 = 1, \qquad D_1 = \frac{1}{2}.$$

Указание. Функцию D_k искать в виде

$$D_k(x) = \frac{Aa^k}{1 - ba^{2k}},$$

где A, a, b — функции, подлежащие определению.

Вычислить производные функций f, если:

67. $f : x \mapsto \begin{cases} x, & \text{если } |x| \leqslant 1, \\ \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} \operatorname{sgn} x, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$ **68.** $f : x \mapsto \frac{[x]}{\pi}\left([x] - (-1)^{[x]} \cos \pi x\right)$, $x \geqslant 0$.

69. $f : x \mapsto \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\left(x - [x] - \frac{1}{2}\right)\left(1 - 2\left|x - [x] - \frac{1}{2}\right|\right)$.

70. Доказать, что множество точек, где функция f имеет неравные правую и левую производные, не более чем счетно.

71. Показать на примерах, что в общем случае

$$f'_+(x_0) \neq f'(x_0 + 0) \ \text{ и } \ f'_-(x_0) \neq f'(x_0 - 0).$$

72. Можно ли утверждать, что если $f'(x_0+0) = f'(x_0-0)$, то функция f непрерывна в точке x_0?

73. Производная для последовательности (x_n) определяется по формуле

$$x'_n \stackrel{\text{def}}{=} x_{n+1} - x_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Найти:

а) $(x_n y_n)'$; б) $(\ln x_n)'$; в) $(e^{x_n})'$; г) $(x_n + y_n)'$; д) $(\varphi(x_n))'$; е) $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)'$; ж) $(2^n)'$;

з) $(\sin n^2)'$; и) $(\operatorname{arctg} n)'$.

74. Написать уравнение касательной к кривой, радиус-вектор которой

а) $\mathbf{f}(t) = (\sin t, \cos t, 4t)$, в точке $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \pi\right)$;

б) $\mathbf{f}(t) = (\operatorname{arctg} t^2, \arcsin t, \operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t)$, в точке $M(0, 0, 0, 1)$.

75. Написать уравнение нормальной плоскости к кривой, радиус-вектор которой

а) $\mathbf{f}(t) = (t, t^2, t^3)$, в точке $M(1, 1, 1)$;

б) $\mathbf{f}(t) = \left(\frac{e^{-t^2}}{\sqrt{2}}, \ln|f(t)|, \alpha t^2, t \operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t\right)$ при $t = 1$, где $\alpha = \sqrt{\frac{e^2}{2} - e^{-2} - 1}$.

76. Найти угол между кривыми в точке их пересечения, если радиусы-векторы кривых $\mathbf{f}_1(t)$ и $\mathbf{f}_2(t)$ описываются формулами:

а) $\mathbf{f}_1(t) = \left(e^{-2t}, \frac{t}{t+1}, \operatorname{th} t\right)$, $\mathbf{f}_2(t) = (t+1, \sin 3t, te^{\operatorname{sh} t})$;

б) $\mathbf{f}_1(t) = (t, t^2, t^3, t^4, t^5)$, $\mathbf{f}_2(t) = (\sin t, \sin 2t, \sin 3t, \sin 4t, \sin 5t)$.

77. Показать, что вектор-функция $\mathbf{X} : t \mapsto (\sin t, -\cos t, e^{-t})^T$ удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{X}'(t) = A(t)\,\mathbf{X}(t) + \mathbf{f}(t),$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 1 & -\sin t \\ \cos t & \sin t & t^4 \\ \ln|t| & \operatorname{tg} t \ln|t| & t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ \sin t - t^4 e^{-t} \\ -e^{-t}(1+t) \end{pmatrix}.$$

78. Подобрать вектор-функцию $\mathbf{f}$ так, чтобы вектор-функция $\mathbf{X} : t \mapsto (t, t^2, t^3)$ удовлетворяла уравнению

$$\mathbf{X}'(t) = A(t)\,\mathbf{X}(t) + \mathbf{f}(t), \text{ где } A(t) = \begin{pmatrix} -2t & 2 & t^{-3} \\ 0 & -t & 1 \\ t^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

79. Показать, что вектор-функция $\mathbf{X} : t \mapsto \operatorname{diag} A(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{X}'(t) = A(t)\,\mathbf{X}(t) + \mathbf{f}(t),$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} \cos t + \cos 2t \\ \sin t - 1 \end{pmatrix}.$$

80. Убедиться, что комплекснозначные функции

$$f : x \mapsto \cos \lambda x + i \sin \lambda x \quad \text{и} \quad f : x \mapsto \frac{x^2 + 3i}{x^2 - 3i}$$

соответственно удовлетворяют уравнениям:

а) $f'(x) - i\lambda f(x) = 0$; б) $(x^2 + 3i)f'(x) + 12xi f^2(x) = 0$.

81. Найти производные от собственных чисел матрицы $A(t)$, если:

а) $A(t) = \begin{pmatrix} t & t^2 \\ t^3 & t^4 \end{pmatrix}$; б) $A(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \\ -\operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \end{pmatrix}$;

в) $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ t & t^2 & t^3 \\ t^2 & t^3 & t^4 \end{pmatrix}$; г) $A(t) = \begin{pmatrix} \sin t & \cos t & 0 \\ -\cos t & \sin t & -1 \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix}$.

82. Найти угол между предельными положениями касательных в точке перелома непрерывной кривой, описываемой вектор-функцией:

а) $\mathbf{f}: t \mapsto \left(\sin\frac{\pi t}{2},\ \cos\frac{\pi t}{2},\ |t-1|\right)$; б) $\mathbf{f}: t \mapsto \begin{pmatrix} (t,\ t^2+1,\ t^3+1,\ t^4+1) & \text{при } -\infty < t \leqslant 0, \\ (2t,\ e^{2t},\ e^{3t},\ e^{4t}) & \text{при } 0 < t < +\infty. \end{pmatrix}$

§ 2. Дифференциал функции

2.1. Основные определения.

Определение 1. *Функция $f: E \to \mathbb{R}$ называется дифференцируемой в точке $x_0 \in E$, предельной для множества E, если ее приращение $\Delta f(x_0)$, соответствующее приращению аргумента x, может быть представлено в виде*

$$\Delta f(x_0) = A(x_0)(x - x_0) + \omega(x - x_0), \tag{1}$$

где $\omega(x-x_0) = o\,(x - x_0)$ при $x \to x_0$.

Определение 2. *Отображение $d: h \mapsto A(x_0)h$, $h \in \mathbb{R}$, называется дифференциалом функции f в точке x_0, а величина $A(x_0)h$ — значением дифференциала в этой точке.*

Для значения дифференциала функции f принято обозначение df или $df(x_0)$, если требуется знать, в какой именно точке он вычислен. Таким образом,

$$df(x_0) = A(x_0)h.$$

Разделив в (1) на $x - x_0$ и устремив x к x_0, получим $A(x_0) = f'(x_0)$. Поэтому $\forall h \in \mathbb{R}$ имеем

$$df(x_0) = f'(x_0)h. \tag{2}$$

Сопоставив (1) и (2), видим, что значение дифференциала $df(x_0)$ (при $f'(x_0) \neq 0$) есть главная часть приращения функции f в точке x_0, линейная и однородная в то же время относительно приращения $h = x - x_0$.

2.2. Критерий дифференцируемости функции.

Для того чтобы функция f являлась дифференцируемой в данной точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке конечную производную.

2.3. Инвариантность формы первого дифференциала.

Если x — независимая переменная, то $dx = x - x_0$ (фиксированное приращение). В этом случае имеем

$$df(x_0) = f'(x_0)\,dx. \tag{3}$$

Если $x = \varphi(t)$ — дифференцируемая функция, то $dx = \varphi'(t_0)\,dt$. Следовательно,

$$df(\varphi(t_0)) = (f(\varphi(t_0)))'_t\,dt = f'_x(\varphi(t_0))\varphi'_t(t_0)\,dt = f'(x_0)\,dx,$$

т. е. первый дифференциал обладает свойством инвариантности относительно замены аргумента.

2.4. Формула малых приращений.

Подставив (2) в (1) и отбросив $\omega(x - x_0)$, получаем формулу малых приращений:

$$\Delta f(x_0) \approx df(x_0)$$

или

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \tag{4}$$

позволяющую при малых значениях $x - x_0$ приближенно вычислять значения функции f в точках x, близких к точке x_0, где значения функции f и ее производной известны.

2.5. Правила дифференцирования функций.

Если скалярные функции u и v дифференцируемы, то:
а) $d(u \pm v) = du \pm dv$; б) $d(uv) = u\,dv + v\,du$;
в) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$, $v \neq 0$; г) $d(f(u)) = f'(u)\,du$.
Если вектор–функции $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ дифференцируемы, то:
а) $d(\mathbf{u} \pm \mathbf{v}) = d\mathbf{u} \pm d\mathbf{v}$; б) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (d\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}, d\mathbf{v})$;
в) $d(\lambda\mathbf{u}) = \mathbf{u}\,d\lambda + \lambda\,d\mathbf{u}$ (λ — скалярная функция).
Если u и v — скалярные дифференцируемые функции, то

$$d(u \pm iv) = du \pm i\,dv, \qquad i^2 = -1.$$

Если A, B — дифференцируемые матричные функции, $\mathbf{u}$ — дифференцируемая вектор–функция, то:
а) $d(A \pm B) = dA \pm dB$; б) $d(A\mathbf{u}) = (dA)\mathbf{u} + A\,d\mathbf{u}$; в) $d(AB) = (dA)B + A dB$.
Дифференцируемы ли функции f, если:

31. $\Delta f(x_0) = 2\sin(x - x_0) + (\sqrt[3]{1 + (x - x_0)^2} - 1)\,\psi(x - x_0)$, где
$\psi(x - x_0) = \begin{cases} \ln|x - x_0|, & x \neq x_0, \\ 0, & x = x_0. \end{cases}$

◀ Так как существует конечный предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{2\sin(x - x_0)}{x - x_0} + \frac{\sqrt[3]{1 + (x - x_0)^2} - 1}{x - x_0} \ln|x - x_0| \right) =$$

$$= 2 + \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{1 + h^2} - 1}{h} \ln|h| = 2,$$

то функция f дифференцируема в точке x_0 и $df(x_0) = 2\,dx$. ▶

32. $\Delta f(1) = (x - 1)^{\frac{5}{3}} + (x - 1)^{\frac{2}{3}}$.

◀ Поскольку

$$\lim_{x \to 1} \frac{\Delta f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \left((x - 1)^{\frac{2}{3}} + (x - 1)^{-\frac{1}{3}} \right) = \infty,$$

то функция f не дифференцируема в точке $x = 1$. ▶

33. $\Delta\mathbf{f}(x_0) = \left(\sin\frac{1}{x - x_0} \cdot \ln(1 + (x - x_0)^2),\ e^{x - x_0} - 1 \right)$.

◀ Рассмотрим предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\Delta\mathbf{f}(x_0)}{x - x_0} = \left(\lim_{x \to x_0} \frac{\ln(1 + (x - x_0)^2)}{x - x_0} \sin\frac{1}{x - x_0},\ \lim_{x \to x_0} \frac{e^{x - x_0} - 1}{x - x_0} \right).$$

Поскольку

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\ln(1 + (x - x_0)^2)}{x - x_0} = 0, \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{e^{x - x_0} - 1}{x - x_0} = 1,$$

то существует конечная производная вектор–функция $\mathbf{f}$:

$$\mathbf{f}'(x_0) = (0,\ 1).$$

Следовательно, вектор–функция $\mathbf{f}$ дифференцируема и

$$d\mathbf{f}(x_0) = (0,\ 1)\,dx = (0,\ dx). \ ▶$$

$$\textbf{34.}\ \Delta f(x_0) = \begin{pmatrix} \arcsin\left(e^{-\frac{1}{(x - x_0)^2}} \right) & |x - x_0|^3 + x - x_0 \\ (x - x_0)^2 \operatorname{sgn}\left(\operatorname{tg}\frac{1}{x - x_0} \right) & \left(\frac{\sin(x - x_0)^2}{|x - x_0|} \right)^{\frac{1}{(x - x_0)^2}} \end{pmatrix}.$$

◀ Вычислив пределы

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\arcsin e^{-\frac{1}{h^2}}=\lim_{h\to 0}e^{-\frac{1}{h^2}}h^{-1}=0,\quad \lim_{h\to 0}\left(\frac{|h|^3}{h}+1\right)=1,\quad \lim_{h\to 0}h\,\mathrm{sgn}\left(\mathrm{tg}\,\frac{1}{h}\right)=0,$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\sin h^2}{|h|}\right)^{\frac{1}{h^2}}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin h^2}{h^2}\right)^{\frac{1}{h^2}}\lim_{h\to 0}\left(|h|^{\frac{1}{h^2}-1}\,\mathrm{sgn}\,h\right)=0,$$

получим

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\Delta f(x_0)}{x-x_0}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},$$

т. е. матричная функция f дифференцируема в точке x_0, и

$$df(x_0)=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}dx=\begin{pmatrix}0&dx\\0&0\end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

Найти:

35. а) $d(xe^{x^2})$; б) $d\left(\arcsin\frac{1}{|x|}\right)$.

◀ 1-й способ. Согласно определению 2, п. 2.1, находим

а) $d(xe^{x^2})=(xe^{x^2})'\,dx=e^{x^2}(2x^2+1)\,dx$;

б) $d\left(\arcsin\frac{1}{|x|}\right)=\left(\arcsin\frac{1}{|x|}\right)'dx=-\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

2-й способ. а) Согласно формул б), п. 2.5, имеем

$$d(xe^{x^2})=e^{x^2}\,dx+x\,d(e^{x^2}).$$

По формуле г), п. 2.5, $d(e^{x^2})=e^{x^2}\,d(x^2)=e^{x^2}2x\,dx$. Таким образом,

$$d(xe^{x^2})=e^{x^2}\,dx+2x^2e^{x^2}\,dx=e^{x^2}(2x^2+1)\,dx.$$

б) Пользуясь формулой г), п. 2.5, имеем

$$d\left(\arcsin\frac{1}{|x|}\right)=(\arcsin u)'\,du,\qquad u=\frac{1}{|x|},\quad du=d\left(\frac{1}{|x|}\right)=-\frac{1}{x^2}\,d(|x|)=-\frac{\mathrm{sgn}\,x}{x^2}\,dx,$$

поэтому окончательно

$$d\left(\arcsin\frac{1}{|x|}\right)=\frac{-1}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\cdot\frac{\mathrm{sgn}\,x}{|x|}\,dx=-\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}. \blacktriangleright$$

36. $d(uv^{-2})$.

◀ По правилу дифференцирования дроби (см. в), п. 2.5), находим

$$d\left(\frac{u}{v^2}\right)=\frac{v^2\,du-u\,d(v^2)}{v^4}=\frac{du}{v^2}-\frac{2u\,dv}{v^3},\qquad v\neq 0. \blacktriangleright$$

37. $d\left(\mathrm{arctg}\,\frac{u}{v}\right)$.

◀ Используя формулы в) и г), п. 2.5, имеем

$$d\left(\mathrm{arctg}\,\frac{u}{v}\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{u}{v}\right)^2}\,d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\,du-u\,dv}{u^2+v^2}. \blacktriangleright$$

38. а) $\frac{d}{d(x^3)}(x^3-2x^6-x^9)$; б) $\frac{d}{d(x^2)}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$.

◀ Поскольку

$$f'(u)=\frac{d}{du}f(u)=\frac{df(u)}{du}, \tag{1}$$

где u — дифференцируемая функция некоторой переменной, то данные примеры можно решить двумя способами.

а) Обозначая $u = x^3$ и пользуясь первым равенством (1), имеем

$$\frac{d}{d(x^3)}(x^3 - 2x^6 - x^9) = \frac{d}{du}(u - 2u^2 - u^3) = (u - 2u^2 - u^3)' = 1 - 4u - 3u^2 = 1 - 4x^3 - 3x^6, \; x \neq 0.$$

Такой же результат можно получить, пользуясь вторым равенством (1):

$$\frac{d}{d(x^3)}(x^3 - 2x^6 - x^9) = \frac{d(x^3 - 2x^6 - x^9)}{d(x^3)} = \frac{(3x^2 - 12x^5 - 9x^8)\,dx}{3x^2\,dx} = 1 - 4x^3 - 3x^6, \quad x \neq 0.$$

б) Вводя обозначение $u = x^2$ и используя первое равенство (1), имеем

$$\frac{d}{d(x^2)}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{d}{du}\left(\frac{\sin\sqrt{u}}{\sqrt{u}}\right) = \left(\frac{\sin\sqrt{u}}{\sqrt{u}}\right)' = \frac{\sqrt{u}\cos\sqrt{u} - \sin\sqrt{u}}{2u\sqrt{u}} = \frac{x\cos x - \sin x}{2x^3}, \quad x \neq 0.$$

Если же воспользуемся вторым равенством (1), то получим

$$\frac{d}{d(x^2)}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{d\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{d(x^2)} = \frac{\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,dx}{2x\,dx} = \frac{x\cos x - \sin x}{2x^3} ▶$$

39. Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенно $\sin 29°$.

◀ Значение $\sin 29°$ относительно мало отличается от $\sin 30°$, так как и $\alpha = 29°$ относительно мало отличается от $\alpha_0 = 30°$. Поэтому для приближенного вычисления $\sin 29°$ воспользуемся формулой (4), п. 2.4, взяв $f(x) = \sin x$. Тогда получим

$$\sin 29° \approx \sin\frac{\pi}{6} - (\sin x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{6}} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{360} = 0{,}484\ldots ▶$$

40. Доказать формулу $\sqrt{a^2 + x} = a + \frac{x}{2a} - r$, $a > 0$, $x > 0$, где $0 < r < \frac{x^2}{8a^3}$.

◀ Если считать x малым ($x \ll a^2$), то по формуле малых приращений получим

$$\sqrt{a^2 + x} \approx a + \frac{1}{2\sqrt{t}}\Big|_{t=a^2} \cdot x = a + \frac{x}{2a}.$$

Погрешность этой приближенной формулы

$$r = a + \frac{x}{2a} - \sqrt{a^2 + x} = x\left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + x} + a}\right) = x\,\frac{\sqrt{a^2 + x} - a}{2a(\sqrt{a^2 + x} + a)} = \frac{x^2}{2a(\sqrt{a^2 + x} + a)^2} \qquad (1)$$

тем меньше, чем меньше $x > 0$. Однако для любых $x > 0$ она меньше $\frac{x^2}{8a^3}$ и, как следует из (1), $\sqrt{a^2 + x} = a + \frac{x}{2a} - r$, что и требовалось доказать. ▶

41. Доказать приближенную формулу $\sqrt[n]{a^n + x} \approx a + \frac{x}{na^{n-1}}$, $a > 0$, где $|x| \ll a^n$.

◀ Поскольку $|x| \ll a^n$, то к функции $f : y \mapsto \sqrt[n]{1 + y}$, где $y = \frac{x}{a^n}$, эффективно применима формула малых приращений:

$$f(y) \approx f(0) + f'(0)y,$$

откуда

$$\sqrt[n]{1 + y} \approx 1 + \frac{y}{n},$$

на основании чего

$$\sqrt[n]{a^n + x} = a\sqrt[n]{1 + \frac{x}{a^n}} \approx a\left(1 + \frac{x}{na^n}\right) = a + \frac{x}{na^{n-1}}. ▶$$

42. Найти $df(x)$, если:

а) $\mathbf{f}(x) = \left(e^{-kx^3}, \sin(\alpha x^2), \cos(\alpha x^4), \operatorname{sh}\left(\frac{x}{T}\right)\right)$; б) $f(x) = e^{i\alpha x^2}$;

в) $f(x) = \dfrac{x^2 + i}{x^3 + 3ix + 4i + 5}$; г) $f(x) = \begin{pmatrix} \arcsin(tx^4) & \operatorname{arctg} x^2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2}|f'(0)|2^x & \sin\omega x \end{pmatrix}$.

◀ Используя формулу $df(x) = f'(x)\,dx$, имеем:

а) $d\mathbf{f}(x) = \left(-3kx^2e^{-kx^3}, 2\alpha x\cos(\alpha x^2), -4\alpha x^3\sin(\alpha x^4), \frac{1}{T}\operatorname{ch}\left(\frac{x}{T}\right)\right)dx$;

б) $df(x) = (\cos(\alpha x^2) + i\sin(\alpha x^2))'\,dx = 2\alpha x\,(-\sin(\alpha x^2) + i\cos(\alpha x^2))\,dx$;

в) $df(x) = \left(\frac{x^2+i}{x^3+3ix+4i+5}\right)'dx = \frac{-x^4+2x(5+4i)+3}{(x^3+3ix+4i+5)^2}\,dx$;

г) $df(x) = \begin{pmatrix} \frac{4tx^3}{\sqrt{1-t^8x^8}} & \frac{2x}{1+x^4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}|f'(0)|2^x\ln 2 & \omega\cos\omega x \end{pmatrix}dx.$

Под $|A|$, $A = (a_{ij})$, понимаем величину

$$|A| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}.$$

Поскольку

$$f'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\ln 2}{2}|f'(0)| & \omega \end{pmatrix}, \text{ то } |f'(0)| = \sqrt{\frac{\ln^2 2}{4}|f'(0)|^2 + \omega^2},$$

откуда $|f'(0)| = \frac{\omega}{\sqrt{1-\frac{\ln^2 2}{4}}}$. Таким образом,

$$df(x) = \begin{pmatrix} \frac{4tx^3}{\sqrt{1-t^8x^8}} & \frac{2x}{1+x^4} & 0 \\ 0 & \omega\frac{\ln 2}{2}\,2^x\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\ln^2 2}{4}}} & \omega\cos\omega x \end{pmatrix}dx. ►$$

43. Пусть при вычислении функциональной матрицы $A(t)$ была допущена погрешность $dA(t)$. Предполагая, что существует $A^{-1}(t)$, найти приближенно погрешность вычисления $A^{-1}(t)$, которая будет соответствовать $dA(t)$.

◄ Поскольку $A(t)A^{-1}(t) = I$, то

$$((dA)A^{-1} + A(d(A^{-1})) = 0) \Rightarrow (d(A^{-1}) = -A^{-1}(dA)A^{-1}). ►$$

44. Пусть $A(t)$ — квадратная функциональная матрица с модулем $|A| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2(t)}$, где a_{ij} — ее элементы, дифференцируемые на некотором интервале. Оценить модуль дифференциала ее собственных чисел как функций t.

◄ Собственные вектор-функции $\mathbf{X}$ и соответствующие им собственные числа λ, как скалярные функции переменной t, удовлетворяют спектральному уравнению:

$$A(t)\,\mathbf{X}(t) = \lambda(t)\,\mathbf{X}(t). \tag{1}$$

Считая для определенности, что $|\mathbf{X}(t)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i(t)|^2} = 1$, и умножая равенство (1) скалярно на $\mathbf{X}(t)$, получаем

$$(A(t)\,\mathbf{X}(t),\ \mathbf{X}(t)) = \lambda(t). \tag{2}$$

Дифференцируя (2), находим

$$d\lambda = (d(A\mathbf{X}),\ \mathbf{X}) + (A\mathbf{X},\ d\mathbf{X}) = ((dA)\mathbf{X},\ \mathbf{X}) + (Ad\mathbf{X},\ \mathbf{X}) + (A\mathbf{X},\ d\mathbf{X}),$$

откуда

$$|d\lambda| \leqslant |(dA)\,\mathbf{X}||\mathbf{X}| + |A\,d\mathbf{X}||\mathbf{X}| + |A\mathbf{X}||d\mathbf{X}| \leqslant$$
$$\leqslant |dA||\mathbf{X}|^2 + |A||d\mathbf{X}||\mathbf{X}| + |A||\mathbf{X}||d\mathbf{X}| = |dA| + 2|A||d\mathbf{X}|. ►$$

45. Пусть дифференцируемая функция φ такова, что $f(\varphi(t)) = t$ на $[t_0, t_1]$, где f — дифференцируемая функция и f'_φ не равна нулю. Найти $d\varphi$

◀ Поскольку функции f и φ дифференцируемы, то сложная функция $f \circ \varphi$ также дифференцируема и

$$(d(f(\varphi(t)) = dt) \Rightarrow (f'_\varphi(\varphi(t))\, d\varphi = dt) \Rightarrow \left(d\varphi = \frac{dt}{f'_\varphi(\varphi(t))}\right). \blacktriangleright$$

Упражнения для самостоятельной работы

Найти дифференциалы следующих функций:

83. а) $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{2}(1-x)} - \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \frac{\sqrt{3(1+x+x^2)}-(x+1)\sqrt{2}}{\sqrt{1-x-x^2}} + \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} + 3$;

б) $f : x \mapsto \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{\frac{3}{2}} + 1$; в) $f : x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}$.

84. а) $f : x \mapsto \frac{u(x)+\operatorname{arctg} u(x)}{v(x)+\operatorname{arctg} v(x)}$; б) $f : x \mapsto \psi\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)$;

в) $f : x \mapsto \ln(u^2(x) + v^2(x))$; г) $f : x \mapsto u^2(\ln x) + v^2(\ln x)$.

85. а) $f : \varphi \mapsto \rho(\varphi) \cos \varphi$; б) $f : \varphi \mapsto \rho(\varphi) \sin(\omega(\varphi)\varphi)$.

86. а) $f : t \mapsto \frac{\sqrt{t}}{e^{xt}+x^4}$; б) $f : t \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\cos(ktx)}{k}$;

в) $f : t \mapsto t^2 + ty^2 + y^4$; г) $f : x \mapsto \frac{x+e^{xy}}{y^2+x^2+1}$.

87. а) $f : x \mapsto \frac{x}{1+x} + i(x^2+3)$; б) $f : x \mapsto \frac{4x+3x^2 i+1}{x+2-i}$;

в) $f : x \mapsto \cos x^3 + i \sin 3x^2$; г) $f : x \mapsto e^{i \sin \omega x}$.

88. а) $\mathbf{f} : x \mapsto (1, x, x^2, \ldots, x^n)$; б) $f : x \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u(x) & v(x) & w(x) \\ \sin x & \cos x & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\mathbf{f} : x \mapsto (\sin \omega_1 x, \sin \omega_2 x, \ldots, \sin \omega_n x)$; г) $\mathbf{f} : x \mapsto u(x)(e^{u(x)}, \operatorname{tg} u(x), u(x))$;

д) $\mathbf{f} : x \mapsto \left(\frac{1}{4}|f(x)|, u^2(x)\right)$.

89. $f : x \mapsto \begin{pmatrix} \ln \frac{x+1}{x^2+1} & 1 \\ u(x) & \sin u(x) \end{pmatrix}$. **90.** $f : x \mapsto \begin{pmatrix} \operatorname{sgn} x & e^{-\frac{1}{|x|}} \\ [x] & \sin[x] \end{pmatrix}$.

91. $f : x \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x-y}{x+y} & \frac{x^2+t}{x^2-t} \\ \sin(tx) & \cos(ty) \end{pmatrix}$. **92.** $f : x \mapsto \begin{pmatrix} e^{(\psi, \varphi)} & \operatorname{tg}(\psi, \varphi) \\ \operatorname{sh}(\psi, \varphi) & \operatorname{ch}(\psi, \varphi) \end{pmatrix}$.

93. $\mathbf{f} : t \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \ldots & a_{2n}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}(t) & a_{m2}(t) & \ldots & a_{mn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$.

94. Пусть $\mathbf{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$, где f_i, $i = \overline{1, n}$, — дифференцируемые функции. Найти $d(|\mathbf{f}(x)|)$.

95. Пусть $f(x) = (a_{ij}(x))$, $i, j = \overline{1, n}$, — дифференцируемая функциональная матрица. Найти $d(|f(x)|)$.

96. Приближенно вычислить:

а) $\sin 16^\circ$; б) $\operatorname{arctg} 100$; в) $\arcsin 0{,}99$.

97. Показать, что при $x \gg x_0 > 0$

$$\operatorname{arctg} x \approx \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}.$$

98. Пользуясь приближенными формулами

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}, \quad \sin x \approx x + \alpha x^3, \quad |x| \ll 1,$$

найти коэффициент α.

Указание. Ввести в рассмотрение тождество $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$.

Найти $df(0)$, если:

99. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

100. $f(x) = (u(x))^{v(x)}$, $du(0) = 5\,dx$, $dv(0) = -\frac{2}{e}\,dx$, $u(0) = e$, $v(0) = 1$.

101. $f(x) = \arcsin \frac{u(x)}{v(x)}$, $du(0) = 3\,dx$, $dv(0) = \sqrt{2}\,dx$; $u(0) = 1$, $v(0) = \sqrt{2}$.

102. $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{\operatorname{arctg} x}x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ **103.** $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[5]{1+\sin^4 x} + \sqrt[10]{1+3x^4} - 2}{e^{x^3}-1}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

104. $\mathbf{f}(x) = \left(\frac{\arcsin x^2}{x},\ \frac{2^{x^2}+3^{x^2}}{2x}\right)$, $x \neq 0$, и $\mathbf{f}(0) = (0,\ 1)$.

105. $\mathbf{f}(x) = \left(x\frac{e^{\sin x}-1}{\operatorname{sh} x},\ \frac{\ln^2(2^x+x)}{\sqrt{\operatorname{ch} x - 1}},\ |x|x\right)$, $x \neq 0$, и $\mathbf{f}(0) = (0,\ 0,\ 0)$.

106. $f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\cos(xe^{2x})-\cos(xe^{-2x})}{x^2} & \frac{\ln(1+x^2e^x)}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})} \\ 0 & x^2 \ln x \end{pmatrix}$, $x \neq 0$, и $f(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

107. Пусть $\mathbf{a}_k = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn})$, $\mathbf{a}_k \in E^n$, $k = \overline{1, n}$, — векторы, имеющие общее начало. Абсолютное значение определителя

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

назовем *объемом фигуры* $P = \{x | x \in E^n,\ x = \theta_1 a_1 + \theta_2 a_2 + \dots + \theta_n a_n,\ 0 \leqslant \theta_i < 1,\ i = \overline{1, n}\}$, которую принято называть *параллелотопом*.

Найти объемы бесконечно малых параллелотопов, построенных на касательных векторах, проведенных в точках пересечения следующих кривых:

а) $\mathbf{f}_1(t) = (t,\ t^2)$, $\mathbf{f}_2(t) = (t^3,\ t)$; б) $\mathbf{f}_1(t) = (t,\ t^2,\ t^3)$, $\mathbf{f}_2(t) = (t^3,\ t^2,\ t)$, $\mathbf{f}_3(t) = (\sin \pi t,\ t,\ t^4)$;
в) $\mathbf{f}_1(t) = (t,\ t^2,\ t^3,\ t^4)$, $\mathbf{f}_2(t) = (t^2,\ t^3,\ t^4,\ t)$, $\mathbf{f}_3(t) = (t^3,\ t^4,\ t,\ t^2)$, $\mathbf{f}_4(t) = (t^4,\ t^3,\ t^2,\ t)$.

§ 3. Производная обратной функции. Производная функции, заданной параметрически. Производная функции, заданной в неявном виде

3.1. Производная обратной функции.

Дифференцируемая монотонная функция $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ с необращающейся в нуль производной имеет обратную дифференцируемую функцию f^{-1}, производная которой вычисляется по формуле

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(x)}.$$

3.2. Производная параметрически заданной функции.

Если функция f задана параметрически

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha < t < \beta,$$

где $y = f(x)$ и функции φ и ψ дифференцируемы, причем $\varphi'(t) \neq 0$, то

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

3.3. Производная неявно заданной функции.

Если $y = f(x)$ — дифференцируемая функция, заданная уравнением $F(x, y) = 0$, т. е. $F(x, f(x)) \equiv 0$ на некотором интервале $]a, b[$, то во многих случаях ее производную можно найти из уравнения

$$\frac{d}{dx}(F(x, f(x))) = 0.$$

46. Показать, что существует функция $y = f(x)$, определяемая уравнением

$$y - \varepsilon \sin y = x, \quad 0 \leqslant \varepsilon < 1,$$

и найти производную $f'(x)$.

◄ Функция $\varphi : y \mapsto x = y - \varepsilon \sin y$ — дифференцируемая на $]-\infty, +\infty[$, и ее производная

$$\varphi' : y \mapsto 1 - \varepsilon \cos y$$

положительна. Следовательно, функция φ, будучи строго монотонно возрастающей, имеет обратную, также монотонно возрастающую и дифференцируемую функцию f. Ее производная

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} = \frac{1}{1 - \varepsilon \cos y}. \ ►$$

47. Определить область существования обратной функции $x = \varphi(y)$ и найти ее производную, если

$$y = x + \ln x, \quad x > 0.$$

◄ Поскольку $(x + \ln x)' = 1 + \frac{1}{x} > 0$, то функция $f : x \mapsto x + \ln x$ строго монотонно возрастает при $x > 0$. Следовательно, она имеет обратную и

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{x}{x+1}.$$

При $0 < x < +\infty$ имеем $-\infty < y < +\infty$, т. е. обратная функция существует на всей числовой прямой. ►

48. Выделить непрерывные ветви обратных функций $x = \varphi(y)$ и найти их производные, если $y = 2x^2 - x^4$.

◄ Функция $f : x \mapsto 2x^2 - x^4$ — дифференцируемая, и ее производная $f' : x \mapsto 4x(1-x^2)$ сохраняет знак на интервалах $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$, $]0, 1[$, $]1, +\infty[$. Следовательно, на каждом из соответствующих интервалов $]-\infty, 1[$, $]0, 1[$, $]0, 1[$, $]-\infty, 1[$ существует дифференцируемая обратная функция. Обозначив через φ_i, $i = \overline{1, 4}$, эти функции ($x = \varphi_i(y)$), имеем

$$\varphi_1 :]-\infty, 1[\to]-\infty, -1[, \quad \varphi_2 :]0, 1[\to]-1, 0[,$$
$$\varphi_3 :]0, 1[\to]0, 1[, \quad \varphi_4 :]-\infty, 1[\to]1, +\infty[,$$

причем, судя по знаку производной

$$\varphi_i' : y \mapsto \frac{1}{4x(1-x^2)},$$

функции φ_1 и φ_3 монотонно возрастают, а функции φ_2 и φ_4 монотонно убывают. Решив уравнение $x^4 - 2x^2 + y = 0$ относительно x, можно получить функции φ_i в явном виде:

$$x = \varphi_1(y) = -\sqrt{1 + \sqrt{1-y}}, \quad x = \varphi_2(y) = -\sqrt{1 - \sqrt{1-y}},$$

$$x = \varphi_3(y) = \sqrt{1 - \sqrt{1-y}}, \quad x = \varphi_4(y)\sqrt{1 + \sqrt{1-y}}. \ ►$$

Найти производные $f'(x)$, если:

49. $x = \sqrt[3]{1-\sqrt{t}}$, $y = \sqrt{1 - \sqrt[3]{t}}$ $(y = f(x))$.

◄ Найдем сначала

$$x_t' = \frac{1}{3}(1-\sqrt{t})^{-\frac{2}{3}}(1-\sqrt{t})' = -\frac{1}{6\sqrt{t}}(1-\sqrt{t})^{-\frac{2}{3}},$$

$$y_t' = \frac{1}{2\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}}(1-\sqrt[3]{t})' = -\frac{1}{6\sqrt[3]{t^2}\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}}, \quad 0 < t < 1.$$

Далее, пользуясь формулой пункта 3.2, имеем

$$f'(x) = \frac{y'_t}{x'_t} = t^{-\frac{1}{6}} \left(\frac{(1-\sqrt{t})^4}{(1-\sqrt[3]{t})^3} \right)^{\frac{1}{6}}. \blacktriangleright$$

50. $\mathbf{y} = (e^t \sin t,\ e^t \cos t,\ e^t)$, $x = t + t^5$ $(\mathbf{y} = \mathbf{f}(x))$.

◄ Поскольку $d\mathbf{y} = (d(e^t \sin t),\ d(e^t \cos t),\ d(e^t)) = (\sin t + \cos t, \cos t - \sin t,\ 1)\, e^t\, dt$, $dx = (1+5t^4)\, dt$, то

$$\mathbf{f}'(x) = \frac{d\mathbf{y}}{dx} = \left(\frac{e^t(\sin t + \cos t)}{1+5t^4},\ \frac{e^t(\cos t - \sin t)}{1+5t^4},\ \frac{e^t}{1+5t^4} \right). \blacktriangleright$$

51. $y = \cos^3 t + i \sin^3 t$, $x = 2t - \cos t$ $\quad (i^2 = -1;\ y = f(x))$.

◄ Поскольку

$$dy = (-3\cos^2 t \sin t + 3i \sin^2 t \cos t)\, dt, \quad dx = (2 + \sin t)\, dt,$$

то

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{3 \sin 2t}{2\,(2+\sin t)} e^{-it}. \blacktriangleright$$

52. $y = \begin{pmatrix} t - \sin t & 1 - \cos t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}$, $x = 3t + t^3$ $(y = f(x))$.

◄ Имеем

$$dy = \begin{pmatrix} 1-\cos t & \sin t \\ \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \end{pmatrix} dt, \quad dx = 3\,(1+t^2)\, dt,$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \frac{1-\cos t}{1+t^2} & \frac{\sin t}{1+t^2} \\ \frac{\operatorname{ch} t}{1+t^2} & \frac{\operatorname{sh} t}{1+t^2} \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

Найти производные f' функций $f : x \mapsto y$, заданных уравнениями:

53. $x^2 + 2xy - y^2 = 4x$.

◄ Пусть $y = f(x)$ — дифференцируемое решение данного уравнения. Тогда

$$x^2 + 2x f(x) - (f(x))^2 \equiv 4x \tag{1}$$

на некотором интервале. Поскольку все члены в тождестве (1) дифференцируемы, то из (1) после дифференцирования получаем

$$2x + 2f(x) + 2x f'(x) - 2f(x) f'(x) \equiv 4,$$

откуда

$$f'(x) = \frac{f(x) + x - 2}{f(x) - x}, \quad f(x) \neq x. \blacktriangleright$$

54. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$.

◄ Подставив в данное уравнение дифференцируемое решение $y = f(x)$, получим тождество

$$x^{\frac{2}{3}} + (f(x))^{\frac{2}{3}} \equiv 1,$$

дифференцируя которое, имеем

$$x^{-\frac{1}{3}} + (f(x))^{-\frac{1}{3}} f'(x) \equiv 0.$$

Отсюда находим

$$f'(x) = -\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad x \neq 0. \blacktriangleright$$

55. Найти $f'(x)$, если $y = f(x)$ и $\rho = a\varphi$ (ρ, φ — полярные координаты).

◀ Поскольку $y = \rho\cos\varphi$, $x = \rho\sin\varphi$, то $y = a\varphi\sin\varphi$, $x = a\varphi\cos\varphi$. Далее, $dy = a(\sin\varphi + \varphi\cos\varphi)\,d\varphi$, $dx = a(\cos\varphi - \varphi\sin\varphi)\,d\varphi$. Отсюда, если $a(\cos\varphi - \varphi\sin\varphi) \neq 0$, находим

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin\varphi + \varphi\cos\varphi}{\cos\varphi - \varphi\sin\varphi}. \blacktriangleright$$

56. Найти $f_1'(x)$ и $f_2'(x)$, если функции f_1 и f_2 заданы неявно системой уравнений

$$\begin{cases} y_1^3 - y_2^3 + 3x = 2, \\ y_1^2 + y_2^2 + 2x = 1. \end{cases}$$

◀ Подставляя значения $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ в данную систему уравнений, приходим к тождествам

$$f_1^3(x) - f_2^3(x) + 3x \equiv 2,$$
$$f_1^2(x) + f_2^2(x) + 2x \equiv 1,$$

дифференцируя которые, получаем

$$f_1^2(x)f_1'(x) - f_2^2(x)f_2'(x) + 1 \equiv 0,$$
$$f_1(x)f_1'(x) + f_2(x)f_2'(x) + 1 \equiv 0.$$

Отсюда, если определитель

$$\begin{vmatrix} f_1^2(x) & -f_2^2(x) \\ f_1(x) & f_2(x) \end{vmatrix} \neq 0,$$

находим

$$f_1'(x) = -\frac{1 + f_2(x)}{f_1(x)(f_1(x) + f_2(x))}, \quad f_2'(x) = \frac{1 - f_1(x)}{f_2(x)(f_1(x) + f_2(x))}. \blacktriangleright$$

Упражнения для самостоятельной работы

108. Показать, что следующие уравнения имеют единственные действительные решения $y = f(x)$:

а) $x = 3y + \sin y^2 + \cos y - 1 + \frac{1}{3}y^3$; б) $x = 12y^5 - 30y^4 + 40y^3 - 30y^2 + 15y + 1$.

Найти одностороннюю производную функции $y = f(x)$, заданной параметрически, если:

109. $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$, в точке $t = 1$.

110. $x = t + 3\sqrt[3]{1+t}$, $y = 2t - 10\sqrt[5]{t+1}$, в точке $t = 0$.

111. $x = \sin^2 t$, $y = \cos^2 t$, в точках $t = 0$ и $t = \frac{\pi}{2}$.

Найти $f'(x)$, если $y = f(x)$ и:

112. $\operatorname{arctg}(x^2 + y^2) - \ln(xy) - 1 = 0$. **113.** $\sin\frac{x^2}{y} + \frac{x^2}{y} + \sqrt{x^2 + y^2} = 0$.

114. $\frac{x+y}{x^2+y^2+1} + \psi(x + y + y^2) = 1$ (ψ — дифференцируемая функция).

115. $\psi\left(\frac{x-y}{x+y}\right) + \psi\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = 2$. **116.** $\psi(\psi(\sin y) + 2y - 3) - 8x + 4 = 0$.

117. $\arcsin\psi(2y + x^2 + 1) = \operatorname{arctg}(y^3)$. **118.** $e^{-\psi^2(y)+x^2} = 4 - y^2$.

Вычислить $f'(0)$, если $y = f(x)$ и:

119. $x^2\sin\frac{1}{y} + \frac{y}{x}\sin x = 0$, $x \neq 0$, и $f(0) = 0$.

120. $x^2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \operatorname{tg}(x + y) - 1 = 0$, $x \neq 0$, и $f(0) = \frac{\pi}{4}$.

Найти $f_1'(x)$ и $f_2'(x)$, если $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$ удовлетворяют уравнениям:

121. $e^{y_1 x + y_2\sin x} = 1 - x$, $y_1^2 + xy_2^2 = x^2$. **122.** $y_1y_2 + \frac{xy_1}{y_1+y_2+1} - x^3 = 0$, $y_1^2 + y_2^2 = x^2$.

123. $y_1 + \psi(y_1 + y_2) + y_2 + \sin x = 0$, $\psi(y_1^2 + y_2^2 + x^2) = x$.

Вычислить $\Delta f(0)$ и $df(0)$, если $y = f(x)$ и:

124. $x = t^2 + |t|$, $y = t^3 + t$, $\Delta t = dt = 1$. **125.** $x = t^4 - 4t^2$, $y = t^5 - 5t$, $\Delta t = dt = 1$.

126. $x = y^5 + 5y$.

Найти $f'(x)$, если $y = f(x)$ и:

127. $\mathbf{y} = (\sin t, \cos t, t)$, $x = 3t + t^3$. **128.** $\mathbf{y} = (\operatorname{sh}^2 t, \operatorname{ch}^2 t, \operatorname{th} t)$, $x = \operatorname{sh} t$.

129 $y = \frac{t^2+2it+3}{t^2+t+i+1}$, $x = t + it^2$. **138.** $y = e^{2it} + e^{-t^2}$, $x = \frac{t+i}{t^2+1}$.

131. $y = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t^2 & t^3 \end{pmatrix}$, $x = \frac{t}{t^2+1}$. **132.** $y = \begin{pmatrix} \sin 2t & \cos 2t \\ -\cos 2t & \sin 2t \end{pmatrix}$, $x = 2t + \cos t$.

133. $\mathbf{y} = (\sin(y^2 + t^2),\ \cos(y^2 + t^2),\ t)$, $x = 5t + t^5$.

134. $\mathbf{y} = (\psi(|y|),\ t,\ t^3)$, $x = 2t\varphi(t^2)$. **135.** $\mathbf{y} = (\psi(t),\ \psi(t^2),\ \psi(t^3))$, $x = \psi(t^4)$.

§ 4. Производные и дифференциалы высших порядков

4.1. Основные определения.

Определение 1. *Пусть производная некоторой функции f дифференцируема. Тогда производная от производной этой функции называется второй производной функции f и обозначается f''. Таким образом,*

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

Определение 2. *Если дифференцируема $(n-1)$-я производная функции f, то ее n-й производной называется производная от $(n-1)$-й производной функции f и обозначается $f^{(n)}$. Итак,*

$$f^{(n)}(x) = (f^{n-1}(x))', \quad n \in \mathbb{N}, \quad f^{(0)}(x) = f(x).$$

Число n называется *порядком производной.*

Определение 3. *Дифференциалом n-го порядка функции f называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка этой же функции. Таким образом,*

$$d^n f(x) = d(d^{n-1} f(x)), \quad d^0 f(x) = f(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Если x — независимая переменная, то $dx = \text{const}$ и $d^2x = d^3x = \ldots = d^n x = 0$. В этом случае справедлива формула

$$d^n f(x) = f^n(x)(dx)^n.$$

4.2. Производные n-го порядка от основных элементарных функций.

Справедливы формулы

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a, \qquad a > 0;$$
$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right);$$
$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right);$$
$$(x^m)^{(n)} = m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n};$$
$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{x^n}.$$

4.3. Формула Лейбница.

Если u и v — n-кратно дифференцируемые функции, то

$$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(i)} v^{(n-i)}.$$

4.4. Производные n-го порядка вектор-функции, комплекснозначной и матричной функций.

Если компоненты вектор-функции $\mathbf{f} : x \mapsto (f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_k(x))$ n-кратно дифференцируемы, то

$$\mathbf{f}^{(n)}(x) = \left(f_1^{(n)}(x),\ f_2^{(n)}(x),\ \ldots,\ f_k^{(n)}(x)\right), \quad d^n\mathbf{f}(x) = (d^n f_1(x),\ d^n f_2(x),\ \ldots,\ d^n f_k(x)).$$

Аналогично для комплекснозначной функции f и матричной функции A имеем формулы.

$$f^{(n)}(x) = u^{(n)}(x) + iv^{(n)}(x); \qquad d^n f(x) = d^n u(x) + i\,d^n v(x);$$

$$A^{(n)}(x) = \begin{pmatrix} a_{11}^{(n)}(x) & \dots & a_{1k}^{(n)}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{l1}^{(n)}(x) & \dots & a_{lk}^{(n)}(x) \end{pmatrix}; \quad d^n A(x) = \begin{pmatrix} d^n a_{11}(x) & \dots & d^n a_{1k}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ d^n a_{l1}(x) & \dots & d^n a_{lk}(x) \end{pmatrix}.$$

Найти $f''(x)$, если:

57. $f(x) = \sin(x^2)$.

◀ По определению 1, п. 4.1, имеем

$$f'(x) = \left(\sin(x^2)\right)' = 2x\cos(x^2);$$
$$f''(x) = (f'(x))' = (2x\cos(x^2))' = 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2). \ ▶$$

58. $f(x) = (x+i)\,e^{ix}$.

◀ Поскольку $(u(x) + iv(x))' = u'(x) + iv'(x)$, то при дифференцировании комплекснозначной функции число i играет роль обыкновенной постоянной, поэтому

$$f'(x) = e^{ix} + i(x+i)\,e^{ix} = ie^{ix}x;$$
$$f''(x) = ie^{ix} - xe^{ix} = e^{ix}(i - x). \ ▶$$

59. $\mathbf{f}(x) = (\sin x^2, \cos x^2, x^2)$.

◀ Для нахождения производной от вектор-функции следует продифференцировать каждую ее компоненту, поэтому имеем

$$\mathbf{f}'(x) = (2x\cos x^2, \ -2x\sin x^2, \ 2x);$$
$$\mathbf{f}''(x) = (2\cos x^2 - 4x^2\sin x^2, \ -2\sin x^2 - 4x^2\cos x^2, \ 2). \ ▶$$

60. $f(x) = \begin{pmatrix} \operatorname{tg} x & \operatorname{th} x \\ \operatorname{sh} x^2 & \operatorname{ch} x^2 \end{pmatrix}$.

◀ Для нахождения производной от матричной функции следует продифференцировать ее матрицу поэлементно:

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos^2 x} & \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \\ 2x\operatorname{ch} x^2 & 2x\operatorname{sh} x^2 \end{pmatrix}, \quad f''(x) = 2\begin{pmatrix} \frac{\sin x}{\cos^3 x} & -\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x} \\ \operatorname{ch} x^2 + 2x^2\operatorname{sh} x^2 & \operatorname{sh} x^2 + 2x^2\operatorname{ch} x^2 \end{pmatrix}. \ ▶$$

61. $\mathbf{f}(x) = \left(\ln\varphi(x), \ u(x), \ \dfrac{u(x)}{v(x)}\right)$.

◀ Поскольку

$$\mathbf{f}'(x) = \left((\ln\varphi(x))', \ u'(x), \ \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'\right) \ \text{и}$$

$$(\ln\varphi(x))' = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}, \qquad \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)},$$

то $\mathbf{f}'(x) = \left(\frac{\varphi'}{\varphi}, \ u, \ \frac{u'v - uv'}{v^2}\right)$. Далее,

$$\mathbf{f}''(x) = \left(\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)', \ (u')', \left(\frac{u'v - uv'}{v^2}\right)'\right) = \left(\frac{\varphi''\varphi - (\varphi')^2}{\varphi^2}, \ u'', \ \frac{(u''v - uv'')v - 2v'(u'v - uv')}{v^3}\right). \ ▶$$

62. Найти y''', если $y = f(e^x)$.

◀ По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$y' = f'(e^x)\,e^x$$

(в этом примере штрих у f означает производную по аргументу e^x).

Для вычисления второй производной пользуемся определением 1, п. 4.1, указанным выше правилом, а также правилом дифференцирования произведения.

В результате получим

$$y'' = (f'(e^x)\,e^x)' = f''(e^x)\,e^{2x} + f'(e^x)\,e^x.$$

Аналогично находим третью производную

$$y''' = f'''(e^x)\,e^{3x} + 3f''(e^x)\,e^{2x} + f'(e^x)\,e^x. ►$$

63. Найти d^2y для функции $y = e^x$, если:
x — независимая переменная; x — промежуточный аргумент (зависимая переменная).

◄ Первый дифференциал обладает свойством инвариантности, поэтому в обоих случаях

$$dy = d(e^x) = e^x\,dx.$$

Далее, по определению 3, п. 4.1,

$$d^2y = d(dy) = d(e^x\,dx).$$

Дифференцируя последнее произведение, получаем

$$d(e^x\,dx) = d(e^x)\,dx + e^x\,d(dx). \tag{1}$$

Если x — независимая, то $dx = \text{const} = h$. Следовательно, $d(dx) = d^2x = 0$ и из (1) находим

$$d^2y = d(e^x)\,dx = e^x\,dx\,dx = e^x(dx)^2.$$

Если же x — промежуточный аргумент, то dx, вообще говоря, не является постоянной и поэтому $d(dx) = d^2x \neq 0$. Тогда из (1) получим

$$d^2y = e^x(dx)^2 + e^x\,d^2x = e^x\left((dx)^2 + d^2x\right). ►$$

64. Найти d^2y, если $y = \operatorname{arctg}\dfrac{u}{v}$, где u, v — дважды дифференцируемые функции некоторой переменной.

◄ Используя инвариантность формы первого дифференциала, имеем

$$dy = d\left(\operatorname{arctg}\frac{u}{v}\right) = \left(\operatorname{arctg}\frac{u}{v}\right)' d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{u}{v}\right)^2}\cdot\frac{v\,du - u\,dv}{v^2} = \frac{v\,du - u\,dv}{u^2+v^2},$$

где штрихом обозначена производная по $\left(\frac{u}{v}\right)$.

Далее, по определению 3, п. 4.1,

$$d^2y = d\left(\frac{v\,du - u\,dv}{u^2+v^2}\right),$$

откуда, по правилу дифференцирования частного, имеем

$$d^2y = \frac{d(v\,du - u\,dv)(u^2+v^2) - (v\,du - u\,dv)\bigl(d(u^2+v^2)\bigr)}{(u^2+v^2)^2}. \tag{1}$$

Поскольку $d(v\,du - u\,dv) = dv\,du + v\,d^2u - du\,dv - u\,d^2v = v\,d^2u - u\,d^2v$, $d(u^2+v^2) = d(u^2) + d(v^2) = 2u\,du + 2v\,dv$, из (1) окончательно находим

$$d^2y = \frac{v\,d^2u - u\,d^2v}{u^2+v^2} - \frac{2(uv((du)^2-(dv)^2) + (v^2-u^2)\,du\,dv)}{(u^2+v^2)^2}. ►$$

65. Найти производные y'_x, y''_{x^2}, y'''_{x^3} от функции $y = f(x)$, заданной параметрически, если $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$.

◄ Поскольку $y'_x = \frac{d}{dx}(f(x)) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}$, то

$$y'_x = \frac{d(3t-t^3)}{d(2t-t^2)} = \frac{(3-3t^2)\,dt}{(2-2t)\,dt} = \frac{3}{2}(1+t), \qquad t \neq 1.$$

Далее, $y''_{x^2} = \frac{d}{dx}(y'_x) = \frac{d(y'_x)}{dx}$, поэтому

$$y''_{x^2} = \frac{d\left(\frac{3}{2}(1+t)\right)}{d(2t-t^2)} = \frac{\frac{3}{2}\,dt}{2\,(1-t)\,dt} = \frac{3}{4\,(1-t)}.$$

Аналогично $y'''_{x^3} = \frac{d}{dx}(y''_{x^2}) = \frac{d\left(y''_{x^2}\right)}{dx}$, поэтому

$$y'''_{x^3} = \frac{d\left(\frac{3}{4(1-t)}\right)}{d(2t-t^2)} = \frac{\frac{3\,dt}{4\,(1-t)^2}}{2\,(1-t)\,dt} = \frac{3}{8\,(1-t)^3}. ►$$

66. Найти y'_x, y''_{x^2} от функции $y = f(x)$, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 = 5xy^3.$$

◀ Пусть $y = f(x)$ — дважды дифференцируемое решение данного уравнения. Тогда дифференцируя тождество $x^2 + (f(x))^2 \equiv 5x(f(x))^3$ по x, получаем $2x + 2f(x)f'(x) = 5(f(x))^3 + 15xf^2(x)f'(x)$, откуда

$$f'(x) = \frac{2x - 5f^3(x)}{15xf^2(x) - 2f(x)}, \quad \text{если } 15xf^2(x) - 2f(x) \neq 0.$$

Далее, по определению второй производной и правилу дифференцирования частного, имеем

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(\frac{2x - 5f^3(x)}{15xf^2(x) - 2f(x)}\right)' =$$

$$= \frac{(2x - 5f^3(x))'(15xf^2(x) - 2f(x)) - (2x - 5f^3(x))(15xf^2(x) - 2f(x))'}{(15xf^2(x) - 2f(x))^2} =$$

$$= \frac{(20f^3(x) - 75xf^4(x) - 60x^2f(x) + 4x)f'(x) - 4f(x) + 75f^5(x)}{(15xf^2(x) - 2f(x))^2}.$$

Подставляя значение $f'(x)$, окончательно получаем

$$f''(x) = \frac{1500xf^6(x) - 120x^3 + 150x^2f^3(x) - 250f^5(x)}{(15xf(x) - 2)^3\, f^2(x)}. \blacktriangleright$$

Найти производные и дифференциал указанного порядка:

67. $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$. Найти $y^{(100)}$.

◀ Преобразуем данную функцию к виду, удобному для дифференцирования, и применим одну из формул пункта 4.2:

$$y = 2(1-x)^{-\frac{1}{2}} - (1-x)^{\frac{1}{2}},$$

$$y^{(100)} = 2\left((1-x)^{-\frac{1}{2}}\right)^{(100)} - \left((1-x)^{\frac{1}{2}}\right)^{(100)} =$$

$$= \frac{(199)!!}{2^{99}}(1-x)^{-\frac{201}{2}} + \frac{(197)!!}{2^{100}}(1-x)^{-\frac{199}{2}} = \frac{(197)!!}{2^{100}} \cdot \frac{399 - x}{(1-x)^{100,5}}, \quad x < 1. \blacktriangleright$$

68. $y = x \operatorname{sh} x$. Найти $y^{(100)}$.

◀ Применяем формулу Лейбница, положив $u = x$, $v = \operatorname{sh} x$, и получаем

$$y^{(100)} = (x \operatorname{sh} x)^{(100)} = \sum_{k=0}^{100} C_{100}^k (x)^{(k)} (\operatorname{sh} x)^{(100-k)} = C_{100}^0\, x \operatorname{sh} x + C_{100}^1 \operatorname{ch} x = x \operatorname{sh} x + 100 \operatorname{ch} x. \blacktriangleright$$

69. $y = u^2$. Найти $d^{10}y$.

◀ Применяя формулу Лейбница к произведению $y = uu$, получаем

$$d^{10}y = \sum_{i=0}^{10} C_{10}^i\, d^i u\, d^{10-i} u = 2\sum_{i=0}^{4} C_{10}^i\, d^i u\, d^{10-i} u + C_{10}^5 (d^5 u)^2 =$$

$$= 2u\, d^{10}u + 20\, du\, d^9 u + 90\, d^2 u\, d^8 u + 240\, d^3 u\, d^7 u + 420\, d^4 u\, d^6 u + 252\,(d^5 u)^2. \blacktriangleright$$

70. Выразить производные y'' и y''' от функции $y = f(x)$ через последовательные дифференциалы переменных x и y, не предполагая x независимой переменной.

◀ Используя определение 3, п. 4.1, а также правило дифференцирования произведения, получаем

$$dy = f'(x)\, dx, \tag{1}$$

$$d^2y = f''(x)(dx)^2 + f'(x)\, d^2x, \tag{2}$$

$$d^3y = f'''(x)(dx)^3 + 3f''(x)\,d^2x\,dx + f'(x)\,d^3x. \tag{3}$$

Из формул (1) — (3) имеем последовательно

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2y - y'd^2x}{(dx)^2} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{(dx)^3},$$

$$y''' = f'''(x) = \frac{1}{(dx)^5}\left((dx)^2\,d^3y - 3\,d^2x\,dx\,d^2y + 3(d^2x)^2\,dy - dx\,dy\,d^3x\right). \blacktriangleright$$

Найти $y^{(n)}$, если:

71. $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$.

◀ Представляя данную дробь в виде

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} = (x-2)^{-1} - (x-1)^{-1}$$

и применяя одну из формул пункта 4.2, получаем

$$y^{(n)} = (-1)^n n!\left(\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right). \blacktriangleright$$

72. $y = \sin^3 x$.

◀ Представляя y в виде

$$y = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$$

и пользуясь одной из формул пункта 4.2, находим

$$y^{(n)} = \frac{3}{4}\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - \frac{3^n}{4}\sin\left(3x + \frac{n\pi}{3}\right). \blacktriangleright$$

73. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

◀ Преобразовав y к виду

$$y = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x,$$

получаем

$$y^{(n)} = 4^{n-1}\cos\left(4x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad n \geqslant 1. \blacktriangleright$$

74. $y = \ln\dfrac{a + bx}{a - bx}$.

◀ Первую производную этой функции запишем в виде

$$y' = \left(\frac{a}{b} + x\right)^{-1} + \left(\frac{a}{b} - x\right)^{-1}.$$

Далее, по одной из формул пункта 4.2, после $(n-1)$-кратного дифференцирования получаем

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\left(\frac{a}{b} + x\right)^{-n} + (n-1)!\left(\frac{a}{b} - x\right)^{-n} =$$

$$= \frac{(n-1)!\,b^n}{(a^2 - b^2x^2)^n}\left((a+bx)^n + (-1)^n(a-bx)^n\right). \blacktriangleright$$

75. Доказать равенства:

$$1)\ \left(e^{ax}\sin(bx + c)\right)^{(n)} = e^{ax}(a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}}\sin(bx + c + n\varphi);$$

$$2)\ \left(e^{ax}\cos(bx + c)\right)^{(n)} = e^{ax}(a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}}\cos(bx + c + n\varphi),$$

где

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

◀ Умножив левую часть первого равенства на i и сложив с левой частью второго равенства, получим

$$(e^{ax}\cos(bx+c))^{(n)}+(ie^{ax}\sin(bx+c))^{(n)}=e^{ic}(e^{(a+bi)x})^{(n)}=e^{ic}(a+bi)^n e^{(a+bi)x}=$$
$$=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{(a+bi)x+ic+in\varphi}=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}(\cos(bx+c+n\varphi)+i\sin(bx+c+n\varphi)).$$

Отсюда по аксиоме равенства комплексных чисел и следуют доказываемые формулы. ▶

76. Преобразовав функцию $f: x\mapsto \sin^{2p}x$, где p — натуральное число, в тригонометрический многочлен

$$f(x)=\sum_{k=0}^{p}A_k\cos 2kx,$$

найти $f^{(n)}(x)$.

◀ Сначала с помощью формул Эйлера и бинома Ньютона преобразуем функцию f в тригонометрический многочлен. Имеем

$$\sin^{2p}x=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^{2p}=\frac{(-1)^p}{2^{2p}}\sum_{k=0}^{2p}(-1)^kC_{2p}^k e^{ikx}e^{-i(2p-k)x}=$$
$$=\frac{(-1)^p}{2^{2p}}\left(\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^kC_{2p}^k e^{2i(k-p)x}+\sum_{k=p+1}^{2p}(-1)^kC_{2p}^k e^{2i(k-p)x}\right)+\frac{C_{2p}^p}{2^{2p}}.$$

Во второй сумме, стоящей в скобках, введем новый индекс суммирования k', полагая $k=2p-k'$. При этом, использовав известную формулу $C_{2p}^k=C_{2p}^{2p-k}$, получим

$$\sin^{2p}x=\frac{(-1)^p}{2^{2p}}\left(\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^kC_{2p}^k e^{2i(k-p)x}+\sum_{k'=0}^{p-1}(-1)^{k'}C_{2p}^{2p-k'}e^{2i(p-k')x}\right)+\frac{C_{2p}^p}{2^{2p}}=$$
$$=\frac{(-1)^p}{2^{2p}}\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^kC_{2p}^k(e^{2i(k-p)x}+e^{-2i(k-p)x})+\frac{C_{2p}^p}{2^{2p}}=\frac{(-1)^p}{2^{2p-1}}\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^kC_{2p}^k\cos 2(k-p)x+\frac{C_{2p}^p}{2^{2p}}.$$

Далее, по одной из формул пункта 4.2,

$$(\sin^{2p}x)^{(n)}=\frac{(-1)^p}{2^{2p-1}}\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^kC_{2p}^k\,2^n(k-p)^n\cos\left(2(k-p)x+\frac{n\pi}{2}\right)=$$
$$=\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{k+p}C_{2p}^k\,2^{n-2p+1}(k-p)^n\cos\left(2(k-p)x+\frac{n\pi}{2}\right).\ ▶$$

77. Используя тождество $\dfrac{1}{x^2+1}=\dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{1}{x-i}-\dfrac{1}{x+i}\right)$, доказать, что

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}}\sin((n+1)\operatorname{arcctg}x).$$

◀ Сначала n раз продифференцируем указанное тождество:

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n)}=\frac{1}{2i}\left(\frac{(-1)^n n!}{(x-i)^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!}{(x+i)^{n+1}}\right).$$

Далее, применяя к комплексным числам $(x-i)^{-n-1}$ и $(x+i)^{-n-1}$ формулу Муавра, имеем

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{2i}((1+x^2)^{-\frac{n+1}{2}}(\cos(n+1)\varphi+i\sin(n+1)\varphi)-$$
$$-(1+x^2)^{-\frac{n+1}{2}}(\cos(n+1)\varphi-i\sin(n+1)\varphi)=\frac{(-1)^n n!}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}}\sin(n+1)\varphi,$$

где $\varphi = \arg(x+i) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg} x$. ►

78. Найти $f^{(n)}(0)$, если $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

◄ Дифференцируя f два раза, получаем

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-2xf'}{1+x^2},$$

откуда $(1+x^2)f''(x) + 2xf'(x) \equiv 0$.

Применяя к полученному тождеству формулу Лейбница, находим

$$(1+x^2)f^{(n)}(x) + 2(n-2)xf^{(n-1)}(x) + (n-2)(n-3)f^{(n-2)}(x) + \\ + 2xf^{(n-1)}(x) + 2(n-2)f^{(n-2)}(x) \equiv 0.$$

Подставив $x = 0$, имеем рекуррентное соотношение

$$f^{(n)}(0) = -(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0),$$

из которого при n четном находим $f^{(2k)}(0) = 0$, а при $n = 2k+1$, последовательно полагая $k = 0, 1, 2 \dots,$ — формулу

$$f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k(2k)!, \quad k \in \mathbb{Z}_0. ►$$

79. Вычислить $f^{(n)}(0)$, если $f(x) = \cos(m \arcsin x)$.

◄ Дифференцируем f и возводим найденное выражение в квадрат, а затем дифференцируем полученное еще раз и приходим к тождеству

$$(1-x^2)f''(x) - xf'(x) + m^2 f(x) \equiv 0.$$

Дифференцируя это тождество $n-2$ раза с помощью формулы Лейбница, получаем

$$(1-x^2)f^{(n)}(x) - 2x(n-2)f^{(n-1)}(x) - (n-2)(n-3)f^{(n-2)}(x) - \\ - xf^{(n-1)}(x) - (n-2)f^{(n-2)}(x) + m^2 f^{(n-2)}(x) \equiv 0.$$

Отсюда при $x = 0$ следует рекуррентная формула

$$f^{(n)}(0) = ((n-2)^2 - m^2)f^{(n-2)}(0), \tag{1}$$

из которой при $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, с учетом начального значения $f(0) = 1$ находим

$$f^{(2k)}(0) = (-1)^k m^2(m^2-2^2)\dots(m^2-(2k-2)^2).$$

Аналогично, полагая в (1) $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, и учитывая значение $f'(0) = 0$, приходим к равенству

$$f^{(2k+1)}(0) = 0. ►$$

80. Доказать, что функция

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^{2n} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

$n \in \mathbb{N}$, в точке $x = 0$ имеет производные до n-го порядка включительно и не имеет производной $(n+1)$-го порядка.

◄ Поскольку $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, то $f'(0) = 0$. Предположим, что для некоторого натурального $k \leqslant n-1$ $(n = 2, 3, \dots)$ $f^{(k)}(0) = 0$. Покажем, что тогда и $f^{(k+1)}(0) = 0$. Действительно, поскольку

$$f^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i\, 2n(2n-1)\dots(2n-k+i+1)\, x^{2n-k+i} \left(\sin\frac{1}{x}\right)^{(i)}, \\ x \neq 0, \tag{1}$$

то по определению производной

$$f^{(k+1)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \sum_{i=0}^{k} C_k^i\, 2n(2n-1)\dots(2n-k+i+1)\, x^{2n-k+i-1} \left(\sin\frac{1}{x}\right)^{(i)} = 0.$$

Здесь учитываем то, что функция $\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{(k)}$ содержит член вида $\frac{1}{x^{2k}}\sin\frac{1}{x}$ или $\frac{1}{x^{2k}}\cos\frac{1}{x}$ (в зависимости от того, четное или нечетное k).

Итак, с помощью метода математической индукции мы показали, что $f^{(k)}(0) = 0\ \forall k = \overline{1, n}$.

Наконец, полагая в (1) $k = n$, замечаем, что $\lim\limits_{x\to 0} f^{(n)}(x)$ не существует, т. е. функция $f^{(n)}$ разрывна в нуле. Следовательно, она не может иметь производной в этой точке. ▶

Упражнения для самостоятельной работы

Найти n-ю производную функции f:

136. $f(x) = e^{x^2}$ **137.** $f(x) = \frac{6-4x}{x^3-6x^2+11x-6}$. **138.** $f(x) = x^2\varphi''(x)$. **139.** $f(x) = x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$.

140. Найти $f'(x)$, если

$$f(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) & \varphi(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) & \varphi'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n)}(x) & f_2^{(n)}(x) & \dots & f_n^{(n)}(x) & \varphi^{(n)}(x) \end{vmatrix}.$$

Найти n-ю производную:

141. $f(x) = (\sin 2x,\ \sin^2 x,\ x^k)$, $k \in \mathbb{N}$. **142.** $f(x) = \begin{pmatrix} x\varphi(x) & \frac{x}{x^2+1} & \cos^4 x \\ 1 & \operatorname{sh} 2x & \frac{\varphi(x)}{x} \end{pmatrix}$.

143. $f(x) = \frac{x+i}{x^2+2i}$. **144.** $f(x) = x^2 e^{ix}$.

145. $f(x) = x\sin(3x + 2i)$. **146.** $f(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & \dots & x^n \\ x & x^2 & \dots & x^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^n & x^{n+1} & \dots & x^{2n} \end{pmatrix}$.

147. Пусть $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x)$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x)$ есть n-кратно дифференцируемые вектор-функции. Тогда

$$(\mathbf{u}(x), \mathbf{v}(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\mathbf{u}^{(k)}(x), \mathbf{v}^{(n-k)}(x)\right).$$

Доказать это.

148. Доказать, что формула Лейбница (n-кратного дифференцирования произведения) справедлива также для матричных функций $A = A(x)$ и $B = B(x)$, т. е.

$$(A(x)B(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^{(k)}(x)B^{(n-k)}(x),$$

если A и B есть n-кратно дифференцируемые функции.

Найти n-ю производную, используя примеры 147, 148:

149. $\mathbf{f}(x) = (\mathbf{u}(x), \mathbf{v}(x))$, если:

а) $\mathbf{u}(x) = (\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx)$, $\mathbf{v}(x) = (e^x, e^{2x}, \dots, e^{nx})$;

б) $\mathbf{u}(x) = (\cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx)$, $\mathbf{v}(x) = (x, x^2, \dots, x^n)$.

150. $f(x) = A(x)B(x)$, если:

а) $A(x) = \begin{pmatrix} \sin nx & \cos nx \\ -\cos nx & \sin nx \end{pmatrix}$, $B(x) = \begin{pmatrix} \operatorname{sh} nx & \operatorname{ch} nx \\ -\operatorname{ch} nx & \operatorname{sh} nx \end{pmatrix}$;

б) $A(x) = \begin{pmatrix} xe^x & x^2e^{2x} & x^3e^{3x} \\ 1 & x^n & x^{2n} \end{pmatrix}$, $B(x) = \begin{pmatrix} \frac{x}{1+x} & \frac{x^2}{(1+x)^2} \\ 4 & 1 \\ \ln x & \ln^2 x \end{pmatrix}$.

151. Показать, что функция

$$y = f(x) = C_1 e^{i\omega x} + C_2 e^{-i\omega x} \quad (\omega,\ C_1,\ C_2 \text{ — постоянные})$$

удовлетворяет уравнению $y'' + \omega^2 y = 0$.

152. Показать, что функция

$$s = s(t) = \frac{1}{k^2}\ln \operatorname{ch}(k\sqrt{g}t),$$

где k, g — постоянные, является решением уравнения

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = mg - k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2, \quad m = \text{const}.$$

153. Показать, что вектор-функция

$$\mathbf{x} : t \mapsto C_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2\begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\cos t \\ 3\cos t + \sin t \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} 2\sin t \\ 2\sin t \\ 3\sin t + \cos t \end{pmatrix}, \ C_i = \text{const},$$

удовлетворяет уравнению $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$, где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

154. Показать, что вектор-функция

$$\mathbf{x} : t \mapsto C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_4\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + \\ + C_5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_6\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

удовлетворяет уравнению $\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = A\mathbf{x}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

155. Показать, что если некоторая вектор-функция $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ удовлетворяет уравнению $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$, где A — постоянная матрица, то она является решением уравнения

$$\frac{d^n\mathbf{x}}{dt^n} = A^n\mathbf{x} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

156. Найти $\frac{d^2}{dx^2}(A^{-1}(x))$, где $A^{-1}(x)$ — обратная к $A(x)$ матрица.

157. Показать, что решения системы уравнений $\frac{dx}{dt} = x^3 - y$, $\frac{dy}{dt} = x + y^3$ являются также решениями системы

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3x^5 - 3x^2y - x - y^3, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = x^3 - y + 3xy^2 + 3y^5.$$

158. Найти $f''(0)$, если $f(x) = x^3(\sin(\ln^m|x|) + \cos(\ln^m|x|))$, $x \neq 0$, и $f(0) = 0$, где $m = \frac{p}{2q+1}$; $p, q \in \mathbb{Z}$.

Является ли непрерывной вторая производная в нуле? Можно ли подобрать значение параметра m таким образом, чтобы существовала $f'''(0)$?

159. При каких значениях α функция $f : x \mapsto |x|^\alpha \sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, и $f(0) = 0$ имеет непрерывную вторую производную?

160. Найти $f''(x)$, если $f(x) = \varphi(\psi(x))$ и

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & |x| < 2, \\ \sin x, & |x| > 2, \end{cases} \qquad \psi(x) = \begin{cases} e^x, & |x| < 2, \\ \cos x, & |x| > 2. \end{cases}$$

161. Вычислить вторую в обобщенном смысле производную функции f в точке ее разрыва, если $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

162. Вычислить вторую производную функции $f^{-1} : x \mapsto y$, обратной для функции $f : y \mapsto x$, если а) $x = y + y^3$; б) $x = y + \sin y$.

163. Вычислить $d^2 f(0)$ функции $f : x \mapsto |x|^\alpha \operatorname{arctg} \frac{1}{|x|}$, $x \neq 0$, и $f(0) = 0$.

164. Найти $f''(0)$, если $y = f(x)$ и $x = 2t - t^2$, $y = (t-1)^4$.

165. Найти $f''(x)$ функции $y = f(x)$, заданной параметрически:

$$x(t) = \begin{cases} 2t, & t < 1, \\ t^2, & t \geqslant 1, \end{cases} \qquad y(t) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \arcsin t, & |t| \leqslant 1, \\ 1 + t - t^2, & |t| > 1. \end{cases}$$

166. Вычислить вторую производную функции $y = f(x)$, заданной неявно уравнением $\sin(xy) = x + y - \frac{\pi}{2}$, $y > 0$, в точке $x = \frac{\pi}{2}$.

167. Найти $f_{500}(x)$, если:

$$f_{n+1}(x) = x f_n'(x), \qquad f_1(x) = \frac{x(1 - 11x^{10} + 10x^{11})}{(1-x)^2}.$$

168. Вычислить $f'(0)$, если функция $f : x \mapsto y$ задана уравнением $y^5 + x^3 + x^2 - y^2 = 0$ и дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки $x = 0$.

Вычислить $f^{(50)}(0)$, если:

169. $f(x) = \sin(x^2)$. **170.** $f(x) = \frac{1}{1 - x + x^2}$.

171. $f(x) = \frac{1}{x^4 + 1}$. **172.** $y = f(x)$, $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$.

Найти $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$, если:

173. $f(x) = \sin(u(x)v(x))$. **174.** $f(x) = \arcsin \frac{u(x)}{v(x)}$. **175.** $f(x) = u(x)\, e^{-v^2(x)}$.

176. $f(x) = \ln(u(v(x)))$. **177.** $\mathbf{f}(x) = \left(u(x) + v(x);\ \frac{u(x)}{v(x)}\right)$. **178.** $f(x) = \begin{pmatrix} u(x) & v(x) \\ u^2(x) & v^2(x) \end{pmatrix}$.

179. $y = f(x)$; а) $y(t) = t \sin t$, $x(t) = t \cos t$; б) $y(\varphi) = \rho(\varphi) \sin \varphi$, $x(\varphi) = \rho(\varphi) \cos \varphi$.

180. $y = f(x)$; $\mathbf{y}(t) = (\sin t, \cos t, \operatorname{tg} t)$, $x(t) = 3t + t^3$.

181. $y = f(x)$; $y(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-2t} & e^{-3t} \\ t & t^2 & t^3 \end{pmatrix}$, $x(t) = 5t + t^5$.

182. $y = f(x)$; $\mathbf{y}(t) = \left(\frac{t}{t+1},\ \frac{1}{t},\ |y(t)|\right)$, $x(t) = 4t + \sin t + \cos t$.

Вычислить $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$ в указанной точке:

183. $y = f(x)$, $x^3 + y^3 = 3x^2y^2 + 1$ в точке $M(0, 1)$.

184. $y = f(x)$, $3x^5 - 2y^5 = x^2 + y^2 + 1$ в точке $M(0, 1)$.

185. $y = f(x)$, $y = x \ln(x^2 + y^2)$ в точке $M(1, 0)$.

186. Пусть компоненты $f_i(x)$ вектор-функции $\mathbf{f} : x \mapsto (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$ удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^2(x)(1 + x^{i+j}) = \sin(jx) f_j(x), \qquad j = \overline{1, n}.$$

Найти $\mathbf{f}''(x)$.

187. Пусть функциональная матрица $A(x)$ удовлетворяет уравнению

$$A^2(x)B(x) + A(x)C(x) = E,$$

где $B(x)$, $C(x)$ — дважды дифференцируемые матрицы, E — единичная матрица.

Найти $A''(x)$, если $A(x)$ коммутирует со своей производной.

188. Найти $d^4 f(x)$, если $f(x) = u^2(x)v^3(x)$.

189. Найти $d^2 f(x)$, если $f(x) = A(u(x))B(v(x))$, где A, B — матричные функции.

190. Найти $d^2 f(x)$, если $f(x) = |\varphi(u(x))|$, где φ — вектор-функция,

§5. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши

5.1. Теорема Ролля.

Пусть функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и имеет конечную или бесконечную производную внутри этого сегмента. Пусть, кроме того, $f(a) = f(b)$. Тогда внутри сегмента $[a, b]$ найдется точка ξ такая, что

$$f'(\xi) = 0.$$

5.2. Теорема Лагранжа.

Если функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и имеет конечную или бесконечную производную во внутренних точках этого сегмента, то $\exists \xi \in]a, b[$ такое, что

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

5.3. Теорема Коши.

Если каждая из функций f и g непрерывна на $[a, b]$ и имеет конечную или бесконечную производную на $]a, b[$ и если, кроме того, производная $g'(x) \neq 0$ на $]a, b[$, то $\exists \xi \in]a, b[$ такое, что справедлива формула

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Если дополнительно потребовать, чтобы $g(a) \neq g(b)$, то условие $g'(x) \neq 0$ можно заменить менее жестким:

$$(f'(x))^2 + (g'(x))^2 \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[.$$

81. Пусть функция f имеет конечную производную f' в каждой точке конечного или бесконечного интервала $]a, b[$ и

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to b-0} f(x).$$

Доказать, что $f'(c) = 0$, где c — некоторая точка интервала $]a, b[$.

◀ Пусть интервал $]a, b[$ конечен и $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to b-0} f(x) = C$, $C = \text{const}$. Рассмотрим функцию

$$F : x \mapsto \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in]a, b[, \\ C & \text{при } x = a \text{ и } x = b. \end{cases}$$

Она непрерывна на сегменте $[a, b]$ и имеет конечную производную на интервале $]a, b[$, причем $F(a) = F(b)$. По теореме Ролля на интервале $]a, b[$ найдется такая точка c, что $F'(c) = f'(c) = 0$.

Если интервал $]a, b[$ бесконечный, то, в силу существования конечной производной функции f, непрерывности функции f и существования конечных, равных между собой, ее предельных значений при $x \to a + 0$ и $x \to b - 0$, при достаточно малом $\varepsilon > 0$ прямая $y = C + \varepsilon$ или прямая $y = C - \varepsilon$ пересечет кривую $y = f(x)$, по меньшей мере, в двух точках, которые обозначим c_1 и c_2. Для функции f на сегменте $[c_1, c_2]$ выполнены все условия теоремы Ролля, поэтому на интервале $]c_1, c_2[$ (а значит, и на интервале $]a, b[$) найдется такая точка c, что $f'(c) = 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to b-0} f(x) = \infty$. Тогда как в случае конечного, так и бесконечного интервала $]a, b[$ уравнение $f(x) = A$ (где $A > 0$ — любое число, фиксированное, когда $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to b-0} f(x) = +\infty$) или уравнение $f(x) = -A$ (в случае, когда $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to b-0} f(x) = -\infty$) всегда имеет два различных корня, которые обозначим α_1 и α_2. Применяя теорему Ролля к функции f на сегменте $[\alpha_1, \alpha_2]$, приходим к выводу, что на интервале $]\alpha_1, \alpha_2[$ (а значит, и на $]a, b[$) существует, по меньшей мере, одна такая точка c, что $f'(c) = 0$. ▶

82. Пусть: 1) функция f определена и имеет непрерывную производную $(n - 1)$-го порядка на сегменте $[x_0, x_n]$; 2) f имеет производную n-го порядка в интервале $]x_0, x_n[$; 3) выполнены равенства $f(x_0) = f(x_1) = \ldots = f(x_n)$, $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Доказать, что в интервале $]x_0, x_n[$ существует, по меньшей мере, одна точка ξ такая, что $f^{(n)}(\xi) = 0$.

◀ На каждом из сегментов $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$, выполнены все условия теоремы Ролля для функции f, следовательно, существует не меньше n точек $\xi_j \in]x_0, x_n[$ таких, что $f'(\xi_j) = 0$. Для функции f' на каждом из сегментов $[\xi_j, \xi_{j+1}]$, $j = \overline{1, n-1}$, выполнены все условия теоремы Ролля, поэтому существует, по меньшей мере, $n-1$ точка $\eta_k \in]x_0, x_n[$ такая, что $f''(\eta_k) = 0$, $k = \overline{1, n-1}$. Продолжая рассуждать таким же образом, приходим к выводу, что в $n-(n-2) = 2$ точках интервала $]x_0, x_n[$ $f^{(n-1)}(\zeta_i) = 0$, $i = 1, 2$. Применяя теорему Ролля к функции $f^{(n-1)}$ на сегменте $[\zeta_1, \zeta_2]$, получаем, что существует хотя бы одна точка $\xi \in]x_0, x_n[$ такая, что $f^{(n)}(\xi) = 0$. ▶

83. Доказать, что если все нули многочлена

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n, \quad a_0 \neq 0,$$

с действительными коэффициентами a_k, $k = \overline{0, n}$, действительны, то его последовательные производные $P_n', P_n'', \ldots, P_n^{(n-1)}$ также имеют лишь действительные нули.

◀ Предполагая, что все нули различные, по теореме Ролля получаем, что $P_n'(x)$ имеет $n-1$ действительный нуль; $P_n''(x)$ будет иметь уже $n-2$ действительных нуля и т. д. Но так как при дифференцировании многочлена степень многочлена уменьшается на единицу, то получается, что все нули производных будут действительны. Если какой-то нуль многочлена кратный, то он же будет нулем и для производной от многочлена, т. е. также действительным. ▶

84. Доказать, что у многочлена Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n)$$

все нули действительны и заключены в интервале $]-1, 1[$.

◀ Многочлен $U_n(x) = (x^2-1)^n$ имеет на сегменте $[-1, 1]$ $2n$ действительных нулей: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = -1$; $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_{2n} = 1$. Согласно предыдущей теореме, многочлен $P_n(x)$ имеет n действительных нулей, расположенных, по теореме Ролля, в интервале $]-1, 1[$, что и требовалось доказать. ▶

85. Доказать, что у многочлена Чебышева—Лагерра

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

все нули положительны.

◀ Рассмотрим функцию $\varphi : x \mapsto x^n e^{-x}$. Поскольку $\varphi(0) = \lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$, то существует такая точка $\xi_1 \in]0, +\infty[$, что $\varphi'(\xi_1) = 0$ (см. пример 81). Очевидно, $\varphi'(0) = \lim\limits_{x \to +\infty} \varphi'(x) = 0$, поэтому, в силу теоремы Ролля и на основании решения примера 81, найдутся точки $\xi_2 \in]0, \xi_1[$ и $\xi_3 \in]\xi_1, +\infty[$ такие, что $\varphi''(\xi_i) = 0$, $i = 2, 3$. Кроме того, $\varphi''(0) = 0$. Таким образом, φ'' обращается в нуль в трех точках полуоси $x \geqslant 0$. Поскольку $\varphi^{(j)}(0) = \lim\limits_{x \to +\infty} \varphi^{(j)}(x) = 0$ при $j = \overline{0, n-1}$, то, применяя теорему Ролля и пользуясь $n-3$ раза результатом решения примера 81, получаем, что функция $\varphi^{(n-1)}$ обращается в нуль в $n+1$ точках, лежащих на полуоси $x \geqslant 0$, причем одна из этих точек $x = 0$. Эти точки являются концами n отрезков, на каждом из которых к функции $\varphi^{(n-1)}$ применима теорема Ролля, поэтому существует, по меньшей мере, n таких точек $\eta_k > 0$, что $\varphi^{(n)}(\eta_k) = 0$. Очевидно, $\varphi^{(n)}(0) \neq 0$. Поскольку $L_n(x) = e^x\varphi^{(n)}(x)$ есть многочлен n-й степени, имеющий n нулей, то его нули — точки η_k, причем $\eta_k > 0$, $k = \overline{1, n}$. ▶

86. Доказать, что у многочлена Чебышева—Эрмита

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

все нули действительны.

◀ Рассмотрим функцию $u : x \mapsto e^{-x^2}$. Очевидно, $\lim\limits_{x \to \infty} u^{(j)}(x) = 0$, поэтому функции $u^{(j)}$, $j = \overline{0, n}$, удовлетворяют условиям примера 81 на интервале $]-\infty, +\infty[$. Повторяя рассуждения, проводившиеся при решении предыдущего примера, приходим к выводу, что u' обращается в нуль, по крайней мере, в одной точке этого интервала; u'' — в двух точках; $\ldots$; $u^{(n)}$ —

в n точках. Поскольку $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} u^{(n)}(x)$ есть многочлен n-й степени, имеющий ровно n нулей, то его нули совпадают с нулями функции $u^{(n)}$ и все эти нули действительны. ►

87. Найти функцию $\theta = \theta(x_0, \Delta x)$ такую, что $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta x f'(x_0 + \theta\Delta x)$, если:

а) $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a \neq 0$; б) $f(x) = x^3$; в) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; г) $f(x) = e^x$.

◄ Применяя формулу конечных приращений Лагранжа к каждой из функций а) – г), имеем:

а) $a(x_0 + \Delta x)^2 + b(x_0 + \Delta x) + c - (ax_0^2 + bx_0 + c) = \Delta x(2a(x_0 + \theta\Delta x) + b)$, откуда $\theta = \frac{1}{2}$;

б) $(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = 3\,\Delta x(x_0 + \theta\,\Delta x)^2$, откуда $\theta(x_0, \Delta x) = \frac{-x_0 + \sqrt{x_0\,\Delta x + \frac{1}{3}(\Delta x)^2 + x_0^2}}{\Delta x}$, $x_0 > 0$, $\Delta x > 0$;

в) $\frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} = -\frac{\Delta x}{(x_0 + \theta\,\Delta x)^2}$, откуда $\theta(x_0, \Delta x) = \frac{x_0}{\Delta x}\left(\sqrt{1 + \frac{\Delta x}{x}} - 1\right)$, $x_0(x_0 + \Delta x) > 0$;

г) $e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0} = \Delta x e^{x_0 + \theta\,\Delta x}$, откуда $\theta(x_0, \Delta x) = \frac{1}{\Delta x} \ln \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$. ►

88. Пусть

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{3 - x^2}{2} & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \frac{1}{x} & \text{при } 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

Определить промежуточное значение c формулы конечных приращений для функции f на сегменте $[0, 2]$.

◄ Исследуем функцию f на дифференцируемость в точке $x = 1$. По определению односторонних производных, имеем

$$f'_-(1) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{3 - (1 + \Delta x)^2}{2} - 1\right) = -1, \quad f'_+(1) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{1}{1 + \Delta x} - 1\right) = -1.$$

Функция f дифференцируема на сегменте $[0, 2]$. Применяя формулу конечных приращений к функции f на сегменте $[0, 2]$, находим

$$f(2) - f(0) = 2f'(c), \quad 0 < c < 2.$$

Поскольку $f(2) = \frac{1}{2}$, $f(0) = \frac{3}{2}$,

$$f' : x \mapsto \begin{cases} -x & \text{при } 0 < x \leqslant 1, \\ -\frac{1}{x^2} & \text{при } 1 < x < 2, \end{cases}$$

то

$$-1 = \begin{cases} -2c & \text{при } 0 < c \leqslant 1, \\ -\frac{2}{c^2} & \text{при } 1 < c < 2, \end{cases}$$

откуда $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \sqrt{2}$ — два промежуточных значения. ►

89. Пусть функция f имеет непрерывную производную f' в интервале $]a, b[$. Можно ли для всякой точки ξ из $]a, b[$ указать две другие точки x_1 и x_2 из этого интервала, если

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi), \quad x_1 < \xi < x_2?$$

◄ Если на интервале $]a, b[$ $f'(x) \geqslant 0$ и f отлична от постоянной на любом отрезке, являющимся частью $]a, b[$, то f возрастает на $]a, b[$. Тогда для любых $x_1, x_2 \in]a, b[$, $x_2 > x_1$, имеем

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0,$$

и для тех точек интервала, в которых $f'(x) = 0$, равенство

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) = 0$$

невозможно. Например, для функции $f : x \mapsto x^3$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, при любых $x_1, x_2 \in]-1, 1[$ выполняется неравенство

$$\frac{x_2^3 - x_1^3}{x_2 - x_1} = x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2 > 0,$$

следовательно, для точки $\xi = 0$ значений аргумента x_1 и x_2, о которых говорилось в условии задачи, не существует. Приведенные рассуждения не исключают, однако, положительного ответа на поставленный вопрос для некоторых классов функций, удовлетворяющих всем условиям теоремы Лагранжа. ►

90. Доказать неравенства:

а) $|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$; б) $py^{p-1}(x-y) \leqslant x^p - y^p \leqslant px^{p-1}(x-y)$, если $0 < y < x$ и $p > 1$;

в) $|\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b| \leqslant |a-b|$; г) $\dfrac{a-b}{a} < \ln\dfrac{a}{b} < \dfrac{a-b}{b}$, если $0 < b < a$.

◄ По формуле Лагранжа, имеем:

а) $\sin x - \sin y = (x-y)\cos\xi$, откуда $|\sin x - \sin y| = |\cos\xi||x-y| \leqslant |x-y|$;

б) $x^p - y^p = p\xi^{p-1}(x-y)$, $y < \xi < x$, откуда $(x-y)py^{p-1} \leqslant x^p - y^p \leqslant (x-y)px^{p-1}$;

в) $\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b = \frac{1}{1+\xi^2}(a-b)$, откуда $|\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b| \leqslant |a-b|$;

г) $\ln a - \ln b = \frac{1}{\xi}(a-b)$, $a < \xi < b$, откуда $\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$ ►.

91. Доказать, что если функция f дифференцируема, но не ограничена на конечном интервале $]a, b[$, то ее производная f' также не ограничена на интервале $]a, b[$.

◄ Пусть функция f дифференцируема на $]a, b[$ и не ограничена при $x \to b - 0$. Возьмем произвольную последовательность (x_n), сходящуюся к b слева. Тогда существует такой номер N, что при $\forall n > N$ выполняется неравенство $|f(x_n)| > A$, каким бы $A > 0$ ни было. Фиксируем любое число $m > N$ и рассмотрим при $n > m$ разность $f(x_n) - f(x_m)$. Применяя теорему Лагранжа к функции f на сегменте $[x_m, x_n]$, находим

$$\left|\frac{f(x_n) - f(x_m)}{x_n - x_m}\right| = |f'(\xi_{mn})|,$$

где $x_m < \xi_{mn} < x_n$. При достаточно больших n левая часть, в силу условия задачи, больше любого наперед заданного положительного числа, откуда следует неограниченность производной f' при $x \to b - 0$.

Обратное утверждение неправильно: из неограниченности производной в интервале не следует неограниченность функции на этом интервале, например: $f : x \mapsto \sqrt{x}$, $0 < x < a$. ►

92. Доказать, что если функция f дифференцируема в бесконечном интервале $]x_0, +\infty[$ и

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0,$$

то

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

т. е. $f(x) = o(x)$ при $x \to +\infty$.

◄ Пусть (x_n) — произвольная последовательность значений аргумента такая, что $x_n \to +\infty$. Тогда $\forall\varepsilon > 0$ $\exists N : \forall n > N$ справедливо неравенство

$$|f'(x_n)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

Фиксируем $n_0 > N$ и, взяв $n > n_0$, применим теорему Лагранжа к функции f на отрезке $[x_{n_0}, x_n]$:

$$\left|\frac{f(x_n) - f(x_{n_0})}{x_n - x_{n_0}}\right| = |f'(\xi_{nn_0})|, \tag{2}$$

где $x_{n_0} < \xi_{nn_0} < x_n$.

В силу неравенства (1), из (2) имеем

$$\left|\frac{f(x_n) - f(x_{n_0})}{x_n - x_{n_0}}\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

Из (3) получаем неравенства

$$\frac{f(x_{n_0})}{x_n} - \left(1 - \frac{x_{n_0}}{x_n}\right)\frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x_n)}{x_n} < \frac{f(x_{n_0})}{x_n} + \left(1 - \frac{x_{n_0}}{x_n}\right)\frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

При больших n, очевидно, справедливо неравенство

$$-\frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x_{n_0})}{x_n} < \frac{\varepsilon}{2},$$

а $\left(1 - \frac{x_{n_0}}{x_n}\right) \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}$ всегда при $n > n_0$, тогда, используя неравенство (4), при $n_0 > N$ и при достаточно больших $n > n_0$ получим неравенство

$$-\varepsilon < \frac{f(x_n)}{x_n} < \varepsilon, \tag{5}$$

или $\left|\frac{f(x_n)}{x_n}\right| < \varepsilon$.

Поскольку (x_n) — произвольная бесконечно большая последовательность, все члены которой положительны, то имеем

$$\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0\right) \Rightarrow (f(x) = o(x)) \text{ при } x \to +\infty. ►$$

93. Доказать, что если функция f дифференцируема в бесконечном интервале $]x_0, +\infty[$ и $f(x) = o(x)$ при $x \to +\infty$, то

$$\varliminf_{x\to+\infty} |f'(x)| = 0.$$

В частности, если существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = k$, то $k = 0$.

◄ Допустим, что

$$\varliminf_{x\to+\infty} |f'(x)| = A, \quad A \neq 0,$$

тогда $\forall \varepsilon$ $(0 < \varepsilon < A)$ $\exists B$ такое, что при $x > B$ выполняется неравенство

$$|f'(x)| \geqslant A - \varepsilon. \tag{1}$$

Фиксируем $x_1 > B$ и возьмем $x > x_1$. Применяя теорему Лагранжа к функции f на сегменте $[x_1, x]$, получим, принимая во внимание неравенство (1),

$$\left|\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}\right| = |f'(\xi)| \geqslant A - \varepsilon, \quad x_1 < \xi < x. \tag{2}$$

Переходя в неравенстве (2) к пределу при $x \to +\infty$, получим

$$\varliminf_{x\to+\infty} \left|\frac{f(x)}{x}\right| \geqslant A - \varepsilon,$$

а это противоречит условию $f(x) = o(x)$. Таким образом, $A = 0$, т. е. $\varliminf\limits_{x\to+\infty} |f'(x)| = 0$.

Допустим теперь, что существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = k$. Тогда для произвольной последовательности (x_m), $x_m > 0$, $x_m \to +\infty$, имеем

$$\lim_{m\to\infty} f'(x_m) = k,$$

т. е. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists M$ такое, что при $m > M$ выполняется неравенство

$$k - \varepsilon < f'(x_m) < k + \varepsilon. \tag{3}$$

Взяв $m_0 > M$ и $m > m_0$, получим, применив теорему Лагранжа к функции f на сегменте $[x_{m_0}, x_m]$,

$$\frac{f(x_m) - f(x_{m_0})}{x_m - x_{m_0}} = f'(\xi_m), \quad x_{m_0} < \xi_m < x_m.$$

Из неравенства (3) следует неравенство

$$k - \varepsilon < \frac{f(x_m) - f(x_{m_0})}{x_m - x_{m_0}} < k + \varepsilon. \tag{4}$$

Переходя к пределу в неравенстве (4) при $m \to +\infty$, получим

$$k - \varepsilon \leqslant \lim_{m \to +\infty} \frac{f(x_m)}{x_m} \leqslant k + \varepsilon.$$

Поскольку $\lim\limits_{m \to \infty} \frac{f(x_m)}{x_m} = 0$, то получаем $k - \varepsilon \leqslant 0$, $k + \varepsilon \geqslant 0$, откуда, в силу произвольности ε, следует, что $k = 0$. ►

94. Доказать, что если функция f непрерывна на сегменте $[a, b]$, имеет конечную производную внутри него и не является линейной, то в интервале $]a, b[$ найдется, по меньшей мере, одна такая точка c, что

$$|f'(c)| > \left|\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right|.$$

◄ Разбивая произвольным образом сегмент $[a, b]$ на n частей точками $a_0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, получаем

$$|f(b) - f(a)| = \left|\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) - f(x_i)\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|.$$

По формуле Лагранжа имеем

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = f'(\xi_i)\,\Delta x_i, \quad x_i < \xi_i < x_{i+1}, \quad i = \overline{0, n-1},$$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

Таким образом, приходим к неравенству

$$|f(b) - f(a)| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} |f'(\xi_i)|\,\Delta x_i. \tag{1}$$

Функция f отлична от линейной, поэтому существует такое разбиение сегмента $[a, b]$, что среди чисел $|f'(\xi_i)|$ найдется наибольшее, отличное от нуля, которое обозначим $|f'(\xi)|$. Тогда из (1) получим строгое неравенство

$$|f(b) - f(a)| < |f'(\xi)| \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = (b - a)|f'(\xi)|,$$

откуда $|f'(\xi)| > \frac{|f(b) - f(a)|}{b - a}$, $a < \xi < b$. ►

95. Доказать, что если функция f имеет вторую производную на сегменте $[a, b]$ и $f'(a) = f'(b) = 0$, то в интервале $]a, b[$ существует, по меньшей мере, одна точка c такая, что

$$f''(c) \geqslant \frac{4}{(b - a)^2}|f(b) - f(a)|.$$

◄ Если $f(x) = \text{const}$, то утверждение очевидно. Предположим, что функция f отлична от постоянной. Из условия $f'(a) = f'(b) = 0$ следует, что f отлична от линейной функции. Применяя формулу Коши конечных приращений к функциям f и $\varphi : x \mapsto \frac{(x-a)^2}{2}$ на сегменте $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ и к функциям f и $\psi : x \mapsto \frac{(b-x)^2}{2}$ на сегменте $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, получаем

$$\frac{8\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a)\right)}{(b - a)^2} = \frac{f'(\xi_1)}{\xi_1 - a}, \quad a < \xi_1 < \frac{a + b}{2};$$

$$\frac{8\left(f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)}{(b - a)^2} = \frac{f'(\xi_2)}{b - \xi_2}, \quad \frac{a + b}{2} < \xi_2 < b.$$

Складывая полученные равенства, находим

$$\frac{8(f(b) - f(a))}{(b - a)^2} = \frac{f'(\xi_1)}{\xi_1 - a} + \frac{f'(\xi_2)}{b - \xi_2}. \tag{1}$$

Поскольку $f'(a) = f'(b) = 0$, то правую часть последнего равенства можно записать в виде

$$\frac{f'(\xi_1)}{\xi_1 - a} + \frac{f'(\xi_2)}{b - \xi_2} = \frac{f'(\xi_1) - f'(a)}{\xi_1 - a} - \frac{f'(b) - f'(\xi_2)}{b - \xi_2} = f''(\eta_1) - f''(\eta_2), \tag{2}$$

где $a < \eta_1 < \xi_1$, $\xi_1 < \eta_2 < b$. Оценивая по абсолютной величине (1), с учетом (2), имеем

$$\frac{8|f(b) - f(a)|}{(b-a)^2} \leqslant |f''(\eta_1)| + |f''(\eta_2)|.$$

Предположим, что $f(b) \neq f(a)$ (в противном случае доказательство тривиально: точкой c может служить любая точка интервала $]a, b[$). В силу нашего предположения, хотя бы одно из чисел $|f''(\eta_1)|$ или $|f''(\eta_2)|$ отлично от нуля. Обозначим

$$|f''(c)| = \max\{|f''(\eta_1)|, |f''(\eta_2)|\}.$$

Тогда имеем

$$\frac{8|f(b) - f(a)|}{(b-a)^2} \leqslant 2|f''(c)|,$$

откуда

$$|f''(c)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}|f(b) - f(a)|$$

(знак равенства не исключаем, так как возможен случай, когда $|f''(\eta_1)| = |f''(\eta_2)|$). ►

96. Доказать, что если вектор-функция $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to E^n$ имеет непрерывную производную на сегменте $[a, b]$, то справедливо неравенство

$$|\mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a)| \leqslant (b-a) \max_{a \leqslant x \leqslant b} |\mathbf{f}'(x)|.$$

◄ Функция $F : x \mapsto (\mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a))(x - a) - \mathbf{f}(x)(b - a)$ дифференцируема на сегменте $[a, b]$, на концах сегмента принимает одно и то же значение, поэтому по теореме Ролля $\exists \xi \in]a, b[$ такое, что

$$F'(\xi) = 0, \text{ или } (\mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a))^2 = (\mathbf{f}'(\xi), (\mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a)))(b - a).$$

Оценивая обе части полученного равенства по модулю, приходим к неравенству

$$|\mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a)| \leqslant |\mathbf{f}'(\xi)|(b - a). \tag{1}$$

Поскольку функция $|\mathbf{f}'|$ непрерывна на $[a, b]$, то по теореме Вейерштрасса она принимает максимальное значение $\max |\mathbf{f}'(x)|$ в некоторой точке $x \in [a, b]$. Следовательно, $|\mathbf{f}'(\xi)| = \max |\mathbf{f}'(x)|$, и на основании (1) получаем доказываемое неравенство. ►

97. Доказать, что если вектор-функция $\mathbf{F} : \mathbb{R} \to E^2$ а) непрерывна на $[a, b]$; б) дифференцируема в интервале $]a, b[$; в) производная $\mathbf{F}'(x) \neq 0$ в $]a, b[$, то $\exists \xi \in]a, b[$ такое, что

$$\mathbf{F}(b) - \mathbf{F}(a) = \lambda \mathbf{F}'(\xi),$$

где λ — некоторая постоянная.

◄ Пусть $\mathbf{F} : x \mapsto (f(x), g(x))$, $(f(x), g(x)) \in E^2$. Тогда функции f и g, в силу условий а) и б), непрерывны на сегменте $[a, b]$ и дифференцируемы в интервале $]a, b[$. Кроме того, $(f'(x))^2 + (g'(x))^2 \neq 0$ по условию в). Следовательно, по теореме Коши, $\exists \xi \in]a, b[$ такое, что

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = f'(\xi)(g(b) - g(a)).$$

Если, например, $f'(\xi) \neq 0$, то

$$\mathbf{F}(b) - \mathbf{F}(a) = (f(b) - f(a),\ g(b) - g(a)) = \frac{f(b) - f(a)}{f'(\xi)}(f'(\xi),\ g'(\xi)) = \lambda \mathbf{F}'(\xi),$$

где

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{f'(\xi)}. \ ►$$

Упражнения для самостоятельной работы

191. Убедиться на примере функций f, g, φ, что ни одно из трех условий теоремы Ролля не является излишним, если:

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{a-x} + \frac{1}{b-x}, & \text{если } a < x < b, \\ 0, & \text{если } x = a,\ x = b; \end{cases}$$

$$g : x \mapsto |x|, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1; \qquad \varphi : x \mapsto \sin x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

192. Для вектор-функции $\mathbf{f} : x \mapsto (x \sin x,\, x \cos x)$, $x \in \left[0,\, \frac{\pi}{2}\right]$, найти такое $\xi \in \left]0,\, \frac{\pi}{2}\right[$, что

$$\mathbf{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \mathbf{f}(0) = \lambda \frac{\pi}{2} \mathbf{f}'(\xi), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

193. Доказать, что если $f \in C^{(m+1)}([a,\, b])$, то $\exists \xi \in]a,\, b[$ такое, что

$$f(x) - L_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} \omega_{m+1}(x),$$

где

$$\omega_{m+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_m), \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b,$$
$$L_m(x) = \sum_{j=0}^{m} f(x_j) \frac{\omega_{m+1}(x)}{\omega'_{m+1}(x_j)(x - x_j)}.$$

Указание. Ввести в рассмотрение функцию $z : x \mapsto f(x) - L_m(x) - k(\bar{x}) \omega_{m+1}(x)$, где $k(\bar{x})$ выбирается из условия $z(\bar{x}) = 0$.

194. Пусть вектор-функция $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to E^n$, $n \geqslant 3$, непрерывно дифференцируема на сегменте $[a,\, b]$, $a < b$. Всегда ли можно найти такое $\xi \in]a,\, b[$, чтобы вектор $\mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a)$ был коллинеарен $\mathbf{f}'(\xi)$?

Рассмотреть пример

$$\mathbf{f}(x) = (\cos x,\, \sin x,\, x), \quad x \in [0,\, \pi].$$

195. Справедлива ли теорема Лагранжа для дифференцируемой на сегменте $[a,\, b]$ функции $f : x \mapsto f_1(x) + i f_2(x)$, где $i = \sqrt{-1}$?

Рассмотреть пример

$$f : x \mapsto \cos x + i \sin x, \quad x \in \left[0,\, \frac{\pi}{2}\right].$$

196. Пусть $\mathbf{f}$ — дифференцируемая на интервале $]a,\, b[$ вектор-функция такая, что $\mathbf{f}'(x) = 0$ на $]a,\, b[$. Что можно сказать о функции $\mathbf{f}$?

197. Пусть A — дифференцируемая на интервале $]a,\, b[$ матричная функция такая, что $A'(x) = 0$, $x \in]a,\, b[$. Что можно сказать о функции A?

198. Пусть $\varphi : x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, где f — дважды дифференцируемая на $[a,\, b]$ функция, причем $f'(x) \neq 0$. Для данного θ и функции f найти то множество $X \subset [a,\, b]$, для которого выполняется неравенство

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant \theta |x - y|, \qquad x,\, y \in X,$$

если:

а) $f : x \mapsto x - \cos x$, $\theta = \frac{1}{2}$, $x \in \left[0,\, \frac{\pi}{2}\right]$; б) $f : x \mapsto x \operatorname{tg} x - 1$, $\theta = \frac{1}{4}$, $x \in \left[0,\, \frac{\pi}{3}\right]$.

199. Пусть $\varphi : t \mapsto f(x) - f(t) - f'(t)(x - t) - \ldots - f^{(n)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} - \lambda (x - t)^p$, $t \in [a,\, x]$, $p > 0$, $\lambda = \mathrm{const}$; функция f имеет $(n+1)$-ю производную на $[a,\, x]$. Доказать, что $\forall p > 0$ $\exists \xi \in]a,\, x[$ и такое λ, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \left(\frac{x - a}{x - \xi}\right)^p \frac{(x - \xi)^{n+1}}{pn!} f^{(n+1)}(\xi)$$

(формула Тейлора с остаточным членом в общей форме).

200. Пусть матричная функция $A : x \mapsto A(x)$ непрерывно дифференцируема на сегменте $[a,\, b]$ и $|A(x)| = \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n} |a_{ij}(x)|^2}$, где $a_{ij}(x)$ — элементы матрицы $A(x)$. Тогда справедлива оценка

$$|A(b) - A(a)| \leqslant \max_{a \leqslant x \leqslant b} |A'(x)| (b - a).$$

Доказать это.

201. Доказать, что если вектор-функции $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ непрерывны на сегменте $[a, b]$ и дифференцируемы в интервале $]a, b[$, то $\exists \xi \in]a, b[$ такое, что

$$(\mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a), \ \mathbf{g}'(\xi)) = (\mathbf{g}(b) - \mathbf{g}(a), \ \mathbf{f}'(\xi)).$$

202. Пусть функции f и g вместе со своими производными до n-го порядка включительно непрерывны на сегменте $[a, b]$ и имеют производную $(n+1)$-го порядка в интервале $]a, b[$. Тогда $\exists \xi \in]a, b[$ такое, что

$$\left(g(b) - \sum_{k=1}^{n} \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right) f^{(n+1)}(\xi) = \left(f(b) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right) g^{(n+1)}(\xi).$$

Доказать это.

Указание. Рассмотреть функцию $\varphi : x \mapsto \varphi(x)$, где

$$\varphi(x) = R_n(b)r_n(x) - r_n(b)R_n(x),$$

$$R_n(x) = g(b) - \sum_{k=1}^{n} \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

$$r_n(x) = f(b) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

203. Пусть: 1) $f \in C^{(2)}(]-\infty, +\infty[)$; 2) $\forall x, h \in \mathbb{R}$ выполняется тождество

$$f(x+h) - f(x) \equiv hf'(x+\theta h);$$

3) $f''(x) \neq 0$. Доказать, что: а) если $\theta = \theta(x)$, то $\theta(x) \equiv \frac{1}{2}$; б) если $|\theta'(x)| < +\infty$ и $\theta = \theta(h)$, то $\lim\limits_{h \to 0} \theta(h) = \frac{1}{2}$.

204. Пусть

$$(x+1)^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}(x + \theta(x))^{-1+\frac{1}{n}}, \quad x \geqslant 0, \ n > 1.$$

Найти предельные значения $\theta(x)$ при $x \to +0$ и $x \to +\infty$.

205. Пусть функции f и g дифференцируемы на сегменте $[a, b]$, причем $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$. Тогда $\exists \xi \in]a, b[$ такое, что

$$\frac{1}{g(b)-g(a)} \begin{vmatrix} \varphi(a) & \varphi(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} = \frac{1}{g'(\xi)} \begin{vmatrix} \varphi(\xi) & g(\xi) \\ \varphi'(\xi) & g'(\xi) \end{vmatrix}.$$

Показать это.

206. Показать, что производная функции

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{3}{2} \ln x\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

непрерывна при $x \geqslant 0$, однако функция ξ, удовлетворяющая соотношению $f(x) = f'(\xi(x))x$, $0 < \xi(x) < x$, является разрывной.

207. Доказать, что если f' непрерывна и монотонна на сегменте $[0, h]$, причем $f(0) = 0$, то функция ξ непрерывна на этом сегменте (см. пример 206).

208. Доказать неравенства:

а) $|x - y| \leqslant |x^2 \ln x - y^2 \ln y| \leqslant 3e|x - y| \ \ \forall x, y \in [1, e]$;

б) $|x^2 \operatorname{arctg} x - y^2 \operatorname{arctg} y| \leqslant \frac{1+\pi}{2}|x - y| \ \ \forall x, y \in [0, 1]$.

209. Доказать неравенства:

а) $\left|\frac{\sin x - \sin y}{x-y} - \cos y\right| \leqslant \frac{1}{2}|x - y| \ \ \forall x, y \in]-\infty, +\infty[$;

б) $\left|\frac{\ln \frac{x}{y}}{x-y} - \frac{1}{y}\right| \leqslant \frac{1}{2}|x - y| \ \ \forall x, y \in [1, +\infty[$.

210. Доказать, что последовательные приближения, определяемые формулой

$$x_{n+1} = \varepsilon e^{x_n}, \quad x_0 = 1,$$

сходятся к корню уравнения $x = \varepsilon e^x$, если $0 < \varepsilon e < 1$.

211. Доказать, что последовательные приближения, определяемые формулой

$$\mathbf{X}_{n+1} = A\mathbf{X}_n + \mathbf{I}, \quad \mathbf{X}_0 = (1, 1)^T, \quad \mathbf{I} = (1, 0)^T,$$

где $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \varepsilon & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, сходятся в E^2 к решению уравнения $\mathbf{X} = A\mathbf{X} + \mathbf{I}$, если $\varepsilon^2 < \frac{5}{8}$.

§ 6. Возрастание и убывание функции. Неравенства

6.1. Возрастание и убывание функции.

Определение. *Функция f называется возрастающей (убывающей) на сегменте* $[a, b]$, *если* $f(x_2) > f(x_1)$ *(или соответственно* $f(x_2) < f(x_1)$) $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ *и* $x_1 < x_2$.

6.2. Критерий возрастания (убывания) функции.

Для того чтобы имеющая конечную или бесконечную на промежутке X производную функция f возрастала (убывала) на нем, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия: а) $f'(x) \geqslant 0$ ($f'(x) \leqslant 0$); б) $f'(x)$ не обращается в нуль ни на каком сегменте $[\alpha, \beta]$, составляющем часть промежутка X ($[\alpha, \beta] \subset X$).

Определить промежутки возрастания и убывания следующих функций:

98. $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{2^x}$.

◀ Поскольку $f'(x) = x2^{-x}(2 - x\ln 2)$ при $x \in \left]0, \frac{2}{\ln 2}\right[$, то на интервале $\left]0, \frac{2}{\ln 2}\right[$ функция f возрастает. В интервалах $]-\infty, 0[$ и $\left]\frac{2}{\ln 2}, +\infty\right[$ производная функции f отрицательна, следовательно, f убывает на каждом из этих интервалов. ▶

99. $f : x \mapsto x\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}} + \sin(\ln x)\right)$, если $x > 0$ и $f(0) = 0$.

◀ Дифференцируя f, получаем

$$f'(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{2}\sin\left(\ln x + \frac{\pi}{4}\right), \quad x > 0,$$

откуда $f'(x) > 0$, если $\sin\left(\ln x + \frac{\pi}{4}\right) > -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Решая последнее неравенство, находим интервалы возрастания функции f:

$$\left]e^{-\frac{7}{12}\pi + 2k\pi}, e^{\frac{13}{12}\pi + 2k\pi}\right[.$$

В интервалах $\left]e^{\frac{13}{12}\pi + 2k\pi}, e^{\frac{17}{12}\pi + 2k\pi}\right[$ функция f убывает, поскольку на них $f'(x) < 0$, $k \in \mathbb{Z}$. ▶

100. Доказать, что функция $f : x \mapsto \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ возрастает на интервалах $]-\infty, -1[$ и $]0, +\infty[$.

◀ Покажем, что в указанных интервалах производная функции положительна. При $x > 0$

$$f'(x) = f(x)\left(\ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1}\right).$$

Применив формулу конечных приращений к функции $x \mapsto \ln x$ на сегменте $[x, x+1]$, получим

$$\ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{\xi}, \text{ где } x < \xi < x+1,$$

в силу чего $f'(x) = f(x)\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{x+1}\right) > 0$ при $x > 0$.

Далее, пусть $-\infty < x < -1$. Тогда

$$f'(x) = f(x)\left(\ln(t-1) - \ln t - \frac{1}{1-t}\right),$$

где $t = -x$, $1 < t < +\infty$. По формуле Лагранжа

$$\ln(t-1) - \ln t = -\frac{1}{\xi_1},$$

где $t - 1 < \xi_1 < t$, поэтому $f'(x) = f(-t)\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{\xi_1}\right) > 0$ при $1 < t < +\infty$, или $f'(x) > 0$ при $-\infty < x < -1$. ►

101. Обязательно ли производная монотонной функции является монотонной?

◄ Не обязательно. Функция $f : x \mapsto 2x + \sin x$ монотонно возрастает на всей числовой прямой, поскольку ее производная $f' : x \mapsto 2+\cos x$ положительна $\forall x \in \mathbb{R}$. В то же время сама производная, рассматриваемая на интервале $]-\infty, +\infty[$, очевидно, не является монотонной. ►

102. Доказать, что если φ — монотонно возрастающая дифференцируемая функция и $|f'(x)| \leqslant \varphi'(x)$ при $x \geqslant x_0$, то

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varphi(x) - \varphi(x_0) \text{ при } x \geqslant x_0.$$

Дать геометрическую интерпретацию этого факта.

◄ Поскольку функции f и φ удовлетворяют всем условиям теоремы Коши о среднем значении, то справедливо равенство

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)}\right| = \left|\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}\right| \leqslant 1, \quad x_0 < c < x,$$

откуда $|f(x) - f(x_0)| \leqslant |\varphi(x) - \varphi(x_0)| = \varphi(x) - \varphi(x_0)$.

Геометрически это неравенство означает, что приращение монотонно возрастающей дифференцируемой функции будет не меньше приращения всякой другой дифференцируемой функции с меньшим или равным абсолютным значением производной. ►

103. Пусть функция f непрерывна в промежутке $a \leqslant x < +\infty$ и, сверх того, $f'(x) > k > 0$ при $x > a$, где k — постоянная. Доказать, что если $f(a) < 0$, то уравнение $f(x) = 0$ имеет один и только один действительный корень в интервале $\left]a,\ a - \frac{f(a)}{k}\right[$.

◄ Применяя теорему Лагранжа к функции f на сегменте $\left[a,\ a + \frac{|f(a)|}{k}\right]$, имеем

$$f\left(a + \frac{|f(a)|}{k}\right) - f(a) = \frac{|f(a)|}{k} f'\left(a + \theta\frac{|f(a)|}{k}\right), \quad 0 < \theta < 1.$$

Из условия $f'(x) > k > 0$ находим

$$f\left(a + \frac{|f(a)|}{k}\right) - f(a) > |f(a)|,$$

откуда

$$f\left(a + \frac{|f(a)|}{k}\right) > 0.$$

Функция f на концах сегмента $\left[a,\ a + \frac{|f(a)|}{k}\right]$ принимает значения разных знаков, поэтому, по теореме Коши о промежуточных значениях, существует такая точка $\xi \in \left]a,\ a + \frac{|f(a)|}{k}\right[$, что $f(\xi) = 0$. Докажем, что она единственная на этом интервале. Если допустить, что на нем найдется такая точка ξ_1, что $f(\xi_1) = 0$, то по теореме Ролля на интервале $]\xi, \xi_1[$ (если $\xi_1 > \xi$) или на интервале $]\xi_1, \xi[$ (если $\xi_1 < \xi$) найдется такая точка ξ_2, что $f'(\xi_2) = 0$, а это противоречит условию $f'(x) > k > 0$ при $x > a$. ►

104. Доказать, что если: 1) функции φ и ψ n–кратно дифференцируемы; 2) $\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0)$. $k = \overline{0, n-1}$; 3) $\varphi^{(n)}(x) > \psi^{(n)}(x)$ при $x > x_0$, то справедливо неравенство $\varphi(x) > \psi(x)$ при $x > x_0$.

◀ Применим к функции $u^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)} - \psi^{(n-1)}$ теорему Лагранжа о среднем на сегменте $[x_0, x]$. Имеем

$$u^{(n-1)}(x) - u^{(n-1)}(x_0) = u^{(n)}(\xi)(x - x_0),$$

откуда, в силу условий 2) – 3), находим $u^{(n-1)}(x) > 0$, $x > x_0$. Аналогично доказываем, что $u^{(n-2)}(x) > 0$ и т. д., $u(x) > 0$, т. е. $\varphi(x) > \psi(x)$ при $x > x_0$. ▶

105. Доказать следующие неравенства:

а) $e^x > 1 + x$ при $x \neq 0$; б) $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$ при $x > 0$;

в) $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x < x$ при $x > 0$; г) $\operatorname{tg} x > x + \dfrac{x^3}{3}$ при $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$;

д) $(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > (x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$ при $x > 0$, $y > 0$ и $0 < \alpha < \beta$.

◀ а) Обозначив $\varphi(x) = e^x$, $\psi(x) = 1 + x$ и замечая, что $\varphi(0) = \psi(0)$, $\varphi'(x) > \psi'(x)$ при $x > 0$, на основании предыдущего примера заключаем, что $\varphi(x) > \psi(x)$ при $x > 0$.

Полагая $x = -t$ при $x \leqslant 0$, получаем

$$\varphi(t) = e^{-t}, \quad \psi(t) = 1 - t, \quad t \geqslant 0.$$

Поскольку $\varphi(0) = \psi(0)$, $\varphi'(t) > \psi'(t)$ при $t > 0$, то $\varphi(t) > \psi(t)$ при $t > 0$, т. е. $e^x > 1 + x$ при $x < 0$.

б) Обозначим

$$\varphi(x) = x - \frac{x^2}{2}, \quad \psi(x) = \ln(1+x), \quad \eta(x) = x, \quad x \geqslant 0.$$

Очевидно, $\varphi(0) = \psi(0) = \eta(0)$, $\varphi'(x) < \psi'(x) < \eta'(x)$ при $x > 0$, поэтому, на основании предыдущего примера, имеем

$$\varphi(x) < \psi(x) < \eta(x) \text{ при } x > 0.$$

в) Пользуясь обозначениями

$$\varphi(x) = x - \frac{x^3}{6}, \quad \psi(x) = \sin x, \quad \eta(x) = x,$$

имеем $\varphi(0) = \psi(0) = \eta(0)$, $\varphi'(x) < \psi'(x) < \eta'(x)$ при $x > 0$ и $x \neq 2k\pi$. На основании предыдущего примера справедливы неравенства

$$\varphi(x) < \psi(x) < \eta(x), \quad x > 0, \quad x \neq 2k\pi, \quad k \in \mathbb{N}.$$

При $x = 2k\pi$ имеем неравенства

$$2k\pi\left(1 - \frac{4k^2\pi^2}{6}\right) < 0 < 2k\pi,$$

т. е. $\varphi(2k\pi) < \psi(2k\pi) < \eta(2k\pi)$, $k \in \mathbb{N}$. Таким образом, при $x > 0$ выполняются неравенства

$$\varphi(x) < \psi(x) < \eta(x).$$

г) Обозначим

$$\varphi(x) = \operatorname{tg} x, \quad \psi(x) = x + \frac{x^3}{3}, \quad 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}.$$

Очевидно, $\varphi(0) = \psi(0)$, $\varphi'(x) > \psi'(x)$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (так как $\varphi'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, $\psi'(x) = 1 + x^2$, $\operatorname{tg}^2 x > x^2$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$). Пользуясь предыдущим примером, можем утверждать, что $\varphi(x) > \psi(x)$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

д) Неравенство $(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > (x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$ при любых фиксированных $x > 0$, $y > 0$ и всех α, $0 < \alpha < \beta$, эквивалентно неравенству

$$\left(\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha + 1\right)^{\frac{1}{\alpha}} > \left(\left(\frac{x}{y}\right)^\beta + 1\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Для доказательства последнего обозначим $\frac{x}{y} = t$ и рассмотрим функцию

$$\varphi : z \mapsto (t^z + 1)^{\frac{1}{z}}, \qquad 0 < z < +\infty.$$

Ее производная

$$\varphi' : z \mapsto \varphi(z)\left(\frac{t^z \ln t}{z(1+t^z)} - \frac{\ln(1+t^z)}{z^2}\right) = \frac{\varphi(z)}{z^2(1+t^z)} \ln \frac{(t^z)^{t^z}}{(1+t^z)^{1+t^z}}$$

отрицательна при $0 < z < +\infty$, поэтому функция φ убывает; следовательно, $\varphi(\alpha) > \varphi(\beta)$ при $0 < \alpha < \beta < +\infty$, т. е. справедливо неравенство

$$(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > (x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$$

при $x > 0$, $y > 0$, $0 < \alpha < \beta$, что и требовалось доказать. ►

106. Доказать, что при $x > 0$ справедливо неравенство

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

◄ Если неравенство выполняется, то, логарифмируя его, придем к неравенству

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x},$$

которое требуется доказать. Обозначая $\frac{1}{x} = t$, $t > 0$, получаем неравенство

$$\frac{t}{1+t} < \ln(1+t) < t.$$

Правая его часть доказана при решении примера 105; докажем теперь левую часть неравенства. Обозначим $\varphi(t) = \frac{t}{t+1}$, $\psi(t) = \ln(1+t)$ и рассмотрим функции φ и ψ при $t \geqslant 0$. Очевидно, $\varphi(0) = \psi(0)$, $\varphi'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} < \psi'(t) = \frac{1}{1+t}$ при $t > 0$. Следовательно, на основании неравенства, доказанного в примере 104, можно утверждать, что $\varphi(t) < \psi(t)$ при $t > 0$, т. е. $\frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ при $x > 0$, что и требовалось доказать. ►

107. Доказать неравенства:

а) $x^\alpha - 1 > \alpha(x-1)$ при $\alpha \geqslant 2$, $x > 1$;

б) $\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{x-a}$ при $n > 1$, $x > a > 0$;

в) $1 + 2\ln x \leqslant x^2$ при $x > 0$.

◄ а) Обозначив $\varphi(x) = x^\alpha - 1$, $\psi(x) = \alpha(x-1)$, имеем: $\varphi(1) = \psi(1) = 0$, $\varphi'(x) > \psi'(x)$ при $\alpha \geqslant 2$, $x > 1$. На основании неравенства, доказанного в примере 104,

$$\varphi(x) > \psi(x) \quad \text{при} \quad \alpha \geqslant 2, \quad x > 1.$$

б) Аналогично доказательству а) имеем при $n > 1$, $x > a > 0$:

$$\varphi(x) = \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}, \quad \psi(x) = \sqrt[n]{x-a}, \quad \varphi(a) = \psi(a) = 0,$$
$$\varphi'(x) < \psi'(x), \quad \text{поэтому} \quad \varphi(x) < \psi(x).$$

в) Обозначив $\varphi(x) = 1 + 2\ln x$, $\psi(x) = x^2$, замечаем, что при $x = 1$ значения функций φ и ψ совпадают, а при $x > 1$ выполнено неравенство $\varphi'(x) < \psi'(x)$, поэтому на основании примера 104 справедливо неравенство $\varphi(x) < \psi(x)$ при $x > 1$. Пусть $0 < x < 1$. Тогда, полагая $t = \frac{1}{x}$, $1 < t < +\infty$, имеем

$$\varphi(x) = 1 - 2\ln t \equiv \varphi_1(t), \quad \psi(x) = \frac{1}{t^2} \equiv \psi_1(t), \quad \varphi_1(1) = \psi_1(1) = 1, \quad \varphi_1'(t) < \psi_1'(t),$$

откуда $\varphi_1(t) < \psi_1(t)$ при $1 < t < +\infty$, т. е. $\varphi(x) < \psi(x)$ при $0 < x < 1$. Приняв еще во внимание очевидное равенство $\varphi(1) = \psi(1)$, приходим к выводу о том, что $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$ $\forall x > 0$, что и требовалось доказать. ►

Упражнения для самостоятельной работы

Найти интервалы возрастания следующих функций:

212. $f : x \mapsto \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$. **213.** $f : x \mapsto |x|^\alpha e^{-x^2}$, $\alpha > 0$. **214.** $f : x \mapsto x\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

215. $f : x \mapsto \operatorname{arth} \frac{\sin x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$. **216.** $f : X \to Y$, $x = t \ln t$, $y = \frac{\ln t}{t}$.

217. $f : X \to Y$, $x = t^3 + 1$, $y = \exp(\sqrt{2\pi}t - \sin t^2 + \cos t^2)$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$.

218. $f : X \to Y$, $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

219. $f : X \to Y$, $x = a\sin^3 t$, $y = b\cos^3 t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

220. $f : \varphi \mapsto \frac{\varphi}{\varphi^2+1}$. **221.** $f : \varphi \mapsto \varphi e^{-\varphi^2}$. **222.** $f : \varphi \mapsto \sin\varphi$.

223. $f : X \to Y$, $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $\rho = \frac{\varphi}{1+\varphi}$, $\varphi \geqslant 0$.

224. $f : X \to Y$, $x = \rho\cos(4\rho - \rho^3)$, $y = \rho\sin(4\rho - \rho^3)$.

225. $f : X \to Y$, $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ ($y > 0$, f — дифференцируемая функция).

226. $f : X \to Y$, $x^2y^2 - x^3 + y^3 = 0$. **227.** $f : X \to Y$, $x + y = xe^{xy}$.

228. $f : X \to Y$, $x + y - \cos(x + 2y) = 0$.

Исследовать на монотонность следующие функции:

229. $f : x \mapsto (2 + x)\ln(1 + x) - 2x$. **230.** $f : x \mapsto \frac{e^x}{x^x[x]!}$, $x \geqslant 1$.

231. $f : X \to Y$, $x = \sin t - t + \frac{t^3}{6}$, $y = 4t^5 - 5t^4 + 1$.

232. $\rho = \varphi \operatorname{tg}\varphi$, $\varphi > 0$ (ρ, φ — полярные координаты).

233. Являются ли возрастающими на отрезке $[1, 2]$ функции: а) $f : x \mapsto [x]$; б) $f : x \mapsto (x-1)[x]$; в) $f : x \mapsto x$, если $x \in \mathbb{Q}$?

234. Доказать, что сумма и произведение положительных функций, одна из которых монотонно возрастает, а другая не убывает, есть функция монотонно возрастающая.

Доказать следующие неравенства:

235. $\frac{2\ln(1+x)}{x} - \frac{3x+2}{(1+x)^2} > 0$ при $x > 0$.

236. $\frac{2}{x(x+1)}\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \ln^2\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{x+3}{x(x+1)^2} > 0$ при $x > 0$.

237. $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots - \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!} < \sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{x^{4n-3}}{(4n-3)!}$, $x > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

238. $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots - \frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!} \leqslant \cos x \leqslant 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{4n}}{(4n)!}$, $n \in \mathbb{N}$.

239. $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$, $x > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

240. $\sin x \leqslant \frac{4x}{\pi^2}(\pi - x)$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$. **241.** $\cos x \leqslant 1 - \frac{4x^2}{\pi^2}$, $|x| \leqslant \frac{\pi}{2}$.

242. а) $\operatorname{tg} x \geqslant \frac{x}{\frac{\pi}{2} - x}$ при $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$; б) $\operatorname{tg} x \leqslant \frac{x}{\frac{\pi}{2} - x}$ при $\frac{\pi}{4} \leqslant x < \frac{\pi}{2}$.

243. $\frac{x^\alpha - 1}{x-1} \leqslant \alpha + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(x-1)x^{\alpha-2}$, $x > 1$, $\alpha \geqslant 2$. **244.** $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

245. $x^{\frac{1}{x}} < 1 + \frac{3}{2\sqrt{x}}$ при $1 < x < e$. **246.** $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} > 0$, $|x| < \pi$.

247. Пусть $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, $\mathbf{c}$ — векторы из E^n. Доказать, что тогда

$$\det\begin{pmatrix} A & F & E \\ F & B & G \\ E & G & C \end{pmatrix} \geqslant 0,$$

где $A = \mathbf{a}^2$, $B = \mathbf{b}^2$, $C = \mathbf{c}^2$, $E = (\mathbf{a}, \mathbf{c})$, $F = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $G = (\mathbf{b}, \mathbf{c})$.

248. Пусть f дифференцируема на $[a, b]$, $f(a) = 0$ и $\exists A \in \mathbb{R}$ такое, что $|f'(x)| \leqslant A|f(x)|$ на $[a, b]$. Доказать, что $f(x) = 0$ $\forall x \in [a, b]$.

249. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Будем считать $\mathbf{x} > \mathbf{y}$ ($\mathbf{x} < \mathbf{y}$), если $x_k > y_k$ ($x_k < y_k$) $\forall k = \overline{1, n}$ (такое отношение между некоторыми векторами называется их частичным упорядочиванием). В связи с данным отношением будем называть вектор-функцию $\mathbf{x} : t \mapsto (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$, $t \in [a, b]$, монотонно возрастающей (убывающей) на интервале $T \subset [a, b]$, если $\forall t_1, t_2 \in T$ из $(t_1 > t_2) \Rightarrow (\mathbf{x}(t_1) > \mathbf{x}(t_2))$ $(\mathbf{x}(t_1) < \mathbf{x}(t_2))$.

Показать, что вектор-функция $\mathbf{x} : t \mapsto (\sin t, \cos t, te^{-t^2})$ возрастает на $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$.

Для вектор-функции $\mathbf{f}$ найти интервалы монотонного возрастания (убывания), если:

250. $\mathbf{f}: t \mapsto \left(2|\cos t| + |\cos 2t| + 4t,\ \frac{3}{4}t + \frac{1}{16}\sin 4t + 1\right)$.

251. $\mathbf{f}: t \mapsto \left(\frac{t^2}{t-1},\ \frac{t}{t^2-1},\ 2 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right)$.

252. $\mathbf{f}: t \mapsto \left(\frac{|1+t|^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{t}},\ \frac{2t}{\sqrt{(t^2+1)^3}},\ 4(\sqrt[3]{t^2} - \sqrt[3]{t^2+1})\right)$.

253. Матричную функцию $A : t \mapsto (a_{ij}(t))$ $(i,\ j = \overline{1,\ n})$ будем называть монотонно возрастающей (убывающей) на интервале $]a,\ b[$, если $\forall t_1,\ t_2 \in]a,\ b[$ из $(t_1 > t_2) \Rightarrow (A(t_1) > A(t_2))$ $(A(t_1) < A(t_2))$.

Для матриц A и B считаем $A > B$ $(A < B)$, если $a_{ij} > b_{ij}$ $(a_{ij} < b_{ij})$, $i,\ j = \overline{1,\ n}$.

Найти интервалы монотонности для следующих матричных функций:

а) $A : t \mapsto \begin{pmatrix} \sin^2 t & t^2 \\ |t| & t^3 + 3t^2 + 15t \end{pmatrix}$; б) $A : t \mapsto \begin{pmatrix} e^{-t^2} & \frac{\sin t}{t} & \sqrt{t}\ln t \\ \operatorname{sh}^2 t & \operatorname{ch}^2 t & [t] + t \end{pmatrix}$;

в) $A : t \mapsto \begin{pmatrix} \sin t + |\sin t| & \cos t + |\cos t| \\ t + \arcsin t^2 & t \sin t \end{pmatrix}$.

§ 7. Направление выпуклости графика функции. Точки перегиба

7.1. Выпуклость графика функции.

Определение. *Говорят, что график дифференцируемой в интервале $]a,\ b[$ функции $f :]a,\ b[\to \mathbb{R}$ имеет на нем выпуклость, направленную вниз (вверх), если он лежит в пределах указанного интервала не ниже (не выше) любой своей касательной.*

Теорема. *Достаточным условием выпуклости графика функции вниз (вверх), если функция всюду на интервале $]a,\ b[$ имеет конечную вторую производную, является выполнение неравенства $f''(x) \geqslant 0$ $(f''(x) \leqslant 0)$ при $a < x < b$.*

7.2. Точки перегиба.

Определение. *Точка $M_0(x_0,\ y_0)$ графика функции f, имеющего касательную, называется точкой перегиба этого графика, если существует такая окрестность точки x_0 оси абсцисс, в пределах которой график функции f слева и справа от x_0 имеет разные направления выпуклости.*

Теорема. *Точка $M_0(x_0,\ f(x_0))$, для которой либо $f''(x_0) = 0$, либо $f''(x_0)$ не существует, есть точка перегиба, если $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0.*

Найти промежутки выпуклости определенного знака и точки перегиба графиков следующих функций:

108. $f : x \mapsto 3x^2 - x^3$, $x \in \mathbb{R}$.

◄ Вторая производная $f''(x) = 6(1 - x)$ положительна при $x < 1$ и отрицательна при $x > 1$. Следовательно, согласно теореме пункта 7.1, на интервале $]-\infty,\ 1[$ график функции f имеет выпуклость, направленную вниз, а на интервале $]1,\ +\infty[$ — выпуклость, направленную вверх. Согласно определению пункта 7.2, точка $M_0(1,\ 2)$ есть точка перегиба графика. ►

109. $f : x \mapsto x^x$ $(x > 0)$.

◄ Поскольку вторая производная $f''(x) = x^x\left((\ln x + 1)^2 + \frac{1}{x}\right) > 0$ при $x > 0$, то, согласно теореме п. 7.1, график данной функции имеет выпуклость, направленную вниз. ►

110. При каком выборе параметра h "кривая вероятности"

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}, \quad h > 0,$$

имеет точки перегиба $\left(\pm\sigma,\ \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\sigma^2}\right)$?

◄ Судя по знаку второй производной $f''(x) = \frac{2h^3}{\sqrt{\pi}}(2h^2x^2 - 1)e^{-h^2x^2}$, заключаем, что при $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}h}$ имеются перегибы (при переходе через эти точки вторая производная меняет знак). Поэтому требуемое значение h получим из равенства $\left(\frac{1}{\sqrt{2}h} = \sigma\right) \Rightarrow \left(h = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)$, $\sigma > 0$. ►

111. Пусть функция f дважды дифференцируема в промежутке $a \leqslant x < +\infty$, причем: 1) $f(a) = A > 0$; 2) $f'(a) < 0$; 3) $f''(x) \leqslant 0$ при $x > a$. Доказать, что уравнение $f(x) = 0$ имеет один и только один действительный корень в интервале $]a, +\infty[$.

◀ По формуле конечных приращений Лагранжа при $x > a$ получаем

$$f(x) = A + (x-a)f'(\xi_1(x)), \quad a < \xi_1 < x, \tag{1}$$

$$f'(x) = f'(a) + (x-a)f''(\xi_2(x)), \quad a < \xi_2 < x. \tag{2}$$

Из условия $f''(\xi_2) \leqslant 0$ следует, что $f'(x) < 0$ при $x > a$, поэтому функция f убывает на интервале $]a, +\infty[$. Из формул (1) и (2) находим

$$f(x) = A + (x-a)f'(a) + (x-a)(\xi_1 - a)f''(\xi_2(\xi_1)). \tag{3}$$

В силу условий $f'(a) < 0$, $f''(\xi_2(\xi_1)) \leqslant 0$, из формулы (3) следует, что при достаточно большом $x_0 > a$ значение функции отрицательно. Поскольку функция f непрерывна на сегменте $[a, x_0]$, то по теореме Коши о промежуточных значениях существует такое $x_1 \in]a, x_0[$, что $f(x_1) = 0$. Функция f не может обратиться в нуль ни в какой иной точке, отличной от x_1, так как убывает на интервале $]a, +\infty[$. ▶

112. Функция f называется выпуклой снизу (сверху) на интервале $]a, b[$, если для любых точек x_1 и x_2 из этого интервала и произвольных чисел λ_1 и λ_2, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, имеет место неравенство

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

(или соответственно противоположное неравенство

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) > \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)).$$

Доказать, что функция f выпукла снизу на $]a, b[$, если $f''(x) > 0$ при $a < x < b$, и f выпукла сверху на $]a, b[$, если $f''(x) < 0$ при $a < x < b$.

◀ Пусть $f''(x) > 0$, $x \in]a, b[$, и пусть $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$ — произвольные числа, удовлетворяющие условию $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Если x_1 и x_2 — любые точки интервала $]a, b[$ и $x_1 < x_2$, то точка $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, очевидно, лежит между ними. По формуле Лагранжа имеем

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - f(x_1) = \lambda_2(x_2 - x_1)f'(\xi_1), \tag{1}$$

где $x_1 < \xi_1 < \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, и

$$f(x_2) - f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1(x_2 - x_1)f'(\xi_2), \tag{2}$$

где $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 < \xi_2 < x_2$. Умножая левую и правую части равенств (2) и (1) на λ_2 и λ_1 соответственно и вычитая из первого полученного равенства второе, находим

$$\lambda_2 f(x_2) + \lambda_1 f(x_1) = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + \lambda_1\lambda_2(x_2 - x_1)f''(\xi_3), \tag{3}$$

где $\xi_1 < \xi_3 < \xi_2$. В силу условий $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ и $f''(\xi_3) > 0$, имеем

$$\lambda_2 f(x_2) + \lambda_1 f(x_1) > f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2),$$

т. е. f выпукла снизу на $]a, b[$.

Если же $f''(x) < 0$ на $]a, b[$, то функция $\varphi : x \mapsto -f(x)$ по доказанному выше выпукла снизу на $]a, b[$, в силу чего имеем

$$\lambda_1\varphi(x_1) + \lambda_2\varphi(x_2) > \varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2),$$

откуда $\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) < f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$. Полученное неравенство показывает, что f выпукла сверху на $]a, b[$. ▶

113. Показать, что функции $\varphi_1 : x \mapsto x^n$ $(n > 1)$, $\varphi_2 : x \mapsto e^x$, $\varphi_3 : x \mapsto x\ln x$, $x > 0$, выпуклы снизу на интервале $]0, +\infty[$, а функции $\psi_1 : x \mapsto x^n$ $(0 < n < 1)$, $\psi_2 : x \mapsto \ln x$ выпуклы сверху на интервале $]0, +\infty[$.

◀ Дифференцируя дважды данные функции, находим

$$\varphi_1''(x) = n(n-1)x^{n-2}, \quad \varphi_2''(x) = e^x, \quad \varphi_3''(x) = \frac{1}{x}, \quad \psi_1''(x) = n(n-1)x^{n-2}, \quad \psi_2''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

При $x \in]0, +\infty[$ имеем $\varphi_j''(x) > 0$ $(j = \overline{1, 3})$, $\psi_k''(x) < 0$ $(k = 1, 2)$, поэтому, на основании результата, полученного при решении предыдущего примера, можем утверждать, что функции φ_j выпуклы снизу, а функции ψ_k выпуклы сверху на интервале $]0, +\infty[$. ▶

114. Доказать, что ограниченная выпуклая функция всюду непрерывна и имеет односторонние левую и правую производные.

◀ Предположим для определенности, что функция f выпукла снизу на интервале $]a, b[$. В силу ограниченности f на $]a, b[$, $\exists c > 0$ такое, что $|f(x)| \leqslant c$. Пусть $x_0 \in]a, b[$ и приращение аргумента $h > 0$ в этой точке взято такое, что точки $x_0 - h$ и $x_0 + h$ также принадлежат $]a, b[$. Поскольку f выпукла снизу, то справедливо неравенство $f(x_0+h)+f(x_0-h) > 2f(x_0)$, которое перепишем в виде

$$f(x) - f(x_0 - h) < f(x_0 + h) - f(x_0). \tag{1}$$

Из неравенства (1) получим систему неравенств

$$f(x_0 - kh) - f(x_0 - (k+1)h) < f(x_0 + h) - f(x_0) <$$
$$< f(x_0 + (k+1)h) - f(x_0 + kh), \quad k = \overline{0, n-1}, \tag{2}$$

при условии, что точки $x_0 - (k+1)h$, $x_0 + (k+1)h$ $(k = \overline{1, n-1})$ принадлежат интервалу $]a, b[$. Суммируя неравенства (2) по k от 0 до $n-1$, приходим к неравенству

$$\frac{f(x_0) - f(x_0 - nh)}{n} < f(x_0 + h) - f(x_0) < \frac{f(x_0 + nh) - f(x_0)}{n}, \tag{3}$$

из которого, принимая во внимание ограниченность функции f, получаем

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \frac{2c}{n}. \tag{4}$$

Каким бы ни было $\varepsilon > 0$, при всех $n > \left[\frac{2c}{\varepsilon}\right]$ имеем

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon, \tag{5}$$

если h удовлетворяет условию

$$0 < h < \min\left\{\frac{b - x_0}{n}, \frac{x_0 - a}{n}\right\}.$$

Непрерывность функции f в любой точке интервала $]a, b[$ доказана. Докажем существование односторонних производных функции. Пусть $h > h_1 > 0$. Тогда справедливы неравенства

$$\text{а)}\ \frac{f(x_0 + h_1) - f(x_0)}{h_1} < \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}; \quad \text{б)}\ \frac{f(x_0 - h_1) - f(x_0)}{-h_1} > \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h}.$$

В самом деле, записав $h_1 = \theta h$, $0 < \theta < 1$, видим, что неравенство а) эквивалентно неравенству

$$\theta f(x_0 + h) + (1 - \theta) f(x_0) > f(x_0 - h_1),$$

а неравенство б) эквивалентно неравенству

$$\theta f(x_0 - h) + (1 - \theta) f(x_0) > f(x_0 - h_1),$$

каждое из которых справедливо в силу выпуклости снизу функции f.

Таким образом, функция $\varphi \quad h \mapsto \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ убывает при $h \mapsto +0$ и ограничена снизу числом $-\frac{2c}{h_1}$, а функция $\psi : h \to \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}$ возрастает при $h \to +0$ и ограничена сверху числом $\frac{2c}{h_1}$. Поэтому существуют пределы

$$\lim_{h \to +0} \varphi(h) = f'_+(x_0), \qquad \lim_{h \to +0} \psi(h) = f'_-(x_0). \ ▶$$

115. Доказать, что если функция f дважды дифференцируема в бесконечном интервале $]x_0, +\infty[$ и $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, то в интервале $]x_0, +\infty[$ имеется, по меньшей мере, одна такая точка ξ, что $f''(\xi) = 0$.

◀ В силу выполнения условий задачи 81, в интервале $]x_0, +\infty[$ $\exists \xi_1$ такая, что $f'(\xi_1) = 0$. Поскольку $f(x) = o(x)$ при $x \to +\infty$, то на основании решения примера 93 заключаем, что $\varliminf\limits_{x \to +\infty} |f'(x)| = 0$

Тогда, в силу примера 81, в интервале $]\xi_1, +\infty[$ $\exists \xi$ такая, что $f''(\xi) = 0$. ▶

Упражнения для самостоятельной работы

Найти интервалы выпуклости следующих функций:

254. $f : x \mapsto (1+x^2)e^{-x^2} + x$. **255.** $f : x \mapsto \arccos\frac{1-x}{1-2x} + 3x - 8$.

256. $f : x \mapsto \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2-1}} - 5x$. **257.** $f : x \mapsto \frac{e^x}{1+x} - 1 + 3x$.

258. $f : X \to Y$, $x = (t+1)^2$, $y = (t-1)^2$. **259.** $f : X \to Y$, $x = \operatorname{sh} t - t$, $y = \operatorname{ch} t - 1$

260. $f : X \to Y$, $x = t\ln t$, $y = -6et - 3t^2$.

261. $f : X \to Y$, $x = (1+t)^{\frac{1}{t}}$, $y = (1+t)^{1+\frac{1}{t}}$. **262.** $f : \varphi \mapsto \frac{1}{\varphi}$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

263. $f : \varphi \mapsto \rho = \varphi - \varphi^2$, $\varphi \geqslant 0$ (ρ, φ — полярные координаты).

264. Исследовать направление выпуклости графика функции $f : X \to Y$, заданной неявно уравнением $x^3 - y^3 - 3x^2y - 3y + 1 = 0$ в окрестности точки $M(-1, 0)$.

265. Исследовать на перегиб в нуле графики следующих функций:

а) $f : x \mapsto \begin{cases} x^3\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$ б) $f : x \mapsto \begin{cases} x^5\cos\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

266. Пусть f — выпуклая снизу на интервале $]a, b[$ функция. Доказать, что

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right) < \frac{1}{n}(f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)),$$

где $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, $n \geqslant 2$.

Используя неравенство предыдущего примера, доказать неравенства:

267. $\frac{1\cdot 3\cdot 7\ldots(2^n-1)}{2\cdot 4\ldots 2^n} < \left(2 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n2^{n-1}}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

268. $\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} \leqslant \frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n)$, $x_i > 0$, $i = \overline{1, n}$.

269. а) $1^\alpha + 2^\alpha + \ldots + n^\alpha \geqslant n\left(\frac{n+1}{2}\right)^\alpha$, $\alpha \geqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$;

б) $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \leqslant n^{1-\frac{1}{\alpha}}\left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, $\alpha \geqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$.

270. $\frac{x^n+y^n+z^n}{3} > \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^n$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $x \neq y$, $x \neq z$, $y \neq z$, $n > 1$.

Доказать неравенства:

271. $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt[3]{k}} > \frac{1}{2}$ при $n > n_0 > 1$.

Указание. Использовать выпуклость вниз графика функции

$$f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, \quad x > 0.$$

272. $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k^3} \geqslant 0$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

Указание. Рассмотреть функцию $f : x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}$ при $0 < x < \pi$.

273. Доказать, что сумма конечного числа функций, выпуклых вниз, есть функция, выпуклая вниз.

274. Доказать, что функция $f : x \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in]a, b[$, где $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ — выпуклые вниз на $]a, b[$ функции, является выпуклой вниз функцией.

275. Доказать, что если: 1) $p_i \geqslant 0$ и $p_1 + p_2 + \ldots + p_n > 0$; 2) функция f непрерывна и выпукла снизу, то

$$f\left(\frac{p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_nx_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n}\right) \leqslant \frac{p_1f(x_1)+\ldots+p_nf(x_n)}{p_1+p_2+\ldots+p_n}$$

(неравенство Иенсена).

276. Доказать, что если функция $f :]-\infty, +\infty[\to \mathbb{R}$ непрерывна и выпукла снизу, то $\exists\varphi : x \mapsto ax + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ такая, что $\forall x \in]-\infty, +\infty[$ справедливо неравенство

$$f(x) > ax + b.$$

277. Число $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ называется *вторым производным числом Шварца* функции f в точке x, если $\exists (\varepsilon_n)$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, $\varepsilon_n > 0$, и

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\varepsilon_n^2}\big(f(x+\varepsilon_n) - 2f(x) + f(x-\varepsilon_n)\big).$$

Доказать, что если все вторые производные числа Шварца непрерывной функции f неотрицательны, то эта функция выпукла вниз.

278. Доказать, что если f — выпуклая вниз функция такая, что $a \leqslant f(x) \leqslant b$ $\forall x \in [\alpha, \beta]$, и h — возрастающая выпуклая вниз функция, определенная на $[\alpha, \beta]$, то сложная функция $g : x \mapsto h(f(x))$ также является выпуклой вниз.

279. Доказать, что если $f_1, f_2, \ldots, f_n$ — выпуклые вниз функции на $]a, b[$, то функция $f : x \mapsto \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} f_i(x)$ также выпукла вниз на $]a, b[$.

280. Если: 1) функция $f :]-\infty, +\infty[\to \mathbb{R}$ выпукла вниз; 2) $f(x) > 0$ $\forall x \neq 0$; 3) $\exists p > 1$ такое, что $f(\theta x) = \theta^p f(x)$, $x \in]-\infty, +\infty[$, и $\forall \theta \geqslant 0$, то функция $h : x \mapsto (f(x))^{\frac{1}{p}}$ является выпуклой вниз на $]-\infty, +\infty[$.

281. Пусть $\theta_i \geqslant 0$, $a_i > 0$ $(i = \overline{1, k})$, $\sum\limits_{i=1}^{k} \theta_i = 1$. Доказать, что

$$\prod_{i=1}^{k} a_i^{\theta_i} \leqslant \sum_{i=1}^{k} a_i \theta_i.$$

Отсюда, в частности, вывести, что

$$a^\theta b^{1-\theta} \leqslant \theta a + (1-\theta) b \quad \forall a, b > 0 \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 1).$$

282. Положив в предыдущем примере

$$a = \frac{x_j^{\frac{1}{\theta}}}{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^{\frac{1}{\theta}}}, \qquad b = \frac{y_j^{\frac{1}{1-\theta}}}{\sum\limits_{j=1}^{n} y_j^{\frac{1}{1-\theta}}},$$

получить неравенство Гёльдера для сумм

$$\sum_{j=1}^{n} x_j y_j \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^{\frac{1}{\theta}}\right)^{\theta} \left(\sum_{j=1}^{n} y_j^{\frac{1}{1-\theta}}\right)^{1-\theta},$$

где $x_j \geqslant 0$, $y_j \geqslant 0$.

283. *Числовой областью* постоянной матрицы $A = (a_{ij})$, где $a_{ij} \in \mathbb{C}$, $i, j = \overline{1, n}$, называется множество всех комплексных чисел вида

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bar{x}_i x_j, \qquad \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = 1,$$

где $x_j = \alpha_j + i\beta_j$, $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$ $(i^2 = -1)$.

Показать, что для любой матрицы A граница числовой области G на комплексной плоскости z является выпуклой замкнутой кривой, т. е. отрезок, соединяющей любые две точки кривой, погружен в G.

284. Матрица $A = (a_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$, называется *эрмитовой*, если $A^* = A$ (т. е. $\bar{a}_{ji} = a_{ij}$) Показать, что матрица A является эрмитовой тогда и только тогда, когда ее числовая область представляет собой отрезок действительной оси.

285. Пусть $1 \leqslant p \leqslant 2$ и $a_i, b_i > 0$ $(i = \overline{1, n})$. Тогда

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^p}{\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^{p-1}} \leqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{p-1}} + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^p}{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^{p-1}}.$$

Доказать это.

286. Множество $M \subset E^n$ векторов $\mathbf{f}$ называется выпуклым в E^n, если $\forall \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \in M \wedge \forall \theta \in [0, 1]$ $\exists \mathbf{f} \in M : \theta \mathbf{f}_1 + (1-\theta)\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}$. При этом множество векторов $\{\theta \mathbf{f}_1 + (1-\theta)\mathbf{f}_2,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 1\}$ называется *отрезком*, соединяющим векторы $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$.

Показать, что множество векторов

$$M = \{\mathbf{f} \,|\, \mathbf{f} = (x, y),\ \mathbf{f} \in E^2,\ x \geqslant 0 \wedge y \geqslant 0,\ |\mathbf{f}| \leqslant 1\}$$

является выпуклым в E^2.

287. Показать, что множество $M = \left\{\mathbf{f} \,|\, \mathbf{f} = (\sin x, \cos x),\ \mathbf{f} \in E^2,\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$ не является выпуклым в E^2.

288. Показать, что множество

$$M = \{\mathbf{f} \,|\, \mathbf{f} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \mathbf{f} \in E^n,\ |\mathbf{f}| \leqslant 1\}$$

(единичный шар в E^n) является выпуклым множеством в E^n.

289. Пусть задана функция $f : U \subset E^n \mapsto \mathbb{R}$, где U — выпуклое подмножество. Функцию f будем называть выпуклой на U, если $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in U \wedge \forall \theta \in [0, 1]$ справедливо неравенство

$$f(\theta \mathbf{x} + (1-\theta)\mathbf{y}) \leqslant \theta f(\mathbf{x}) + (1-\theta) f(\mathbf{y}).^{1)}$$

Показать, что функция $f : \mathbf{x} \mapsto |\mathbf{x}|$, $\mathbf{x} \in E^n$, выпукла на E^n.

290. Доказать, что если f — выпуклая на $U \subset E^n$ функция, то $\forall \mathbf{x}_i \in U$ ($\mathbf{x}_i = (x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni})$, $\mathbf{x}_i \in E^n$ $\forall i = \overline{1, n}$) выполняется неравенство

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i \mathbf{x}_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sigma_i f(\mathbf{x}_i),$$

где $\sigma_i \geqslant 0$, $i = \overline{1, n}$, и $\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i = 1$.

291. Доказать, что если f — выпуклая на U функция и $r \in \mathbb{R}$, то подмножество $S \subset U$ всех векторов $\mathbf{x}$, для которых $f(\mathbf{x}) \leqslant r$, является выпуклым.

292. Показать, что если компоненты $f_i(x)$ вектор-функции $\mathbf{f}$ являются значениями выпуклых функций f_i, $i = \overline{1, n}$, на некотором отрезке $[a, b]$, то функция $F : x \mapsto (\mathbf{f}(x), \mathbf{A})$, где $\mathbf{A}$ — любой постоянный вектор, $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$, $A_i \geqslant 0$, из E^n, также выпукла на $[a, b]$.

293. Показать, что если элементы $a_{ij}(x)$ матричной функции $A : x \mapsto (a_{ij}(x))$, $x \in [a, b]$, являются значениями выпуклых на $[a, b]$ функций $a_{ij} : x \mapsto a_{ij}(x)$, то для любой постоянной матрицы B с неотрицательными элементами функция $F : x \mapsto (A(x), B)$, $x \in [a, b]$, также выпукла. Под скалярным произведением матриц A и B понимаем величину $(A, B) = \sum\limits_{i,j} a_{ij}(x) b_{ij}$, где b_{ij} — элементы матрицы B (проверить выполнимость аксиом скалярного произведения в E^n).

294. Пусть функции $a_i : x \mapsto a_i(x)$, $b_i : x \mapsto b_i(x)$ неотрицательны, выпуклы и возрастают на $[a, b]$ $\forall i = \overline{1, n}$. Показать, что в этом случае функция $F : x \mapsto (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{a} = (a_1(x), \ldots, a_n(x))$, $\mathbf{b} = (b_1(x), \ldots, b_n(x))$ — выпукла на $[a, b]$.

§ 8. Раскрытие неопределенностей

8.1. Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$. Первое правило Лопиталя.

Если функции f и g определены в некоторой окрестности точки a $(x \neq a)$, где a — число или символ ∞, и при $x \to a$ обе стремятся к нулю, а производные f' и g' существуют

1) В случае, когда U — отрезок действительной оси, это определение выпуклости совпадает с определением выпуклости вниз.

в упомянутой окрестности, за исключением, быть может, самой точки $x = a$, причем одновременно не обращаются в нуль при $x \neq a$, и существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

8.2. Раскрытие неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$. Второе правило Лопиталя.

Если функции f и g при $x \to a$ обе стремятся к бесконечности, а производные f' и g' существуют для всех x, принадлежащих некоторой окрестности точки a и отличных от a, причем $(f'(x))^2 + (g'(x))^2 \neq 0$ в упомянутой окрестности и $x \neq a$, существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

то

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Найти пределы:

116. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{x+1}(\ln x + 1) - x}{1 - x}$.

◀ Функции $f : x \mapsto x^{x+1}(\ln x + 1) - x$ и $g : x \mapsto 1 - x$, $x > 0$, $x \neq 1$, удовлетворяют следующим условиям:

1) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} g(x) = 0$;

2) их производные $f' : x \mapsto x^{x+1}(\ln x + 1)\left(1 + \frac{1}{x} + \ln x\right) + x^x - 1$, $g' : x \mapsto -1$ существуют при $x > 0$;

3) существует $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -2$; 4) $(f'(x))^2 + (g'(x))^2 \neq 0$ при $x > 0$.

Следовательно, применимо первое правило Лопиталя, согласно которому имеем

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{x+1}(\ln x + 1) - x}{1 - x} = \lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -2. \ ▶$$

117. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x - x}{\ln x - x + 1}$.

◀ Функции $f : x \mapsto x^x - x$ и $g : x \mapsto \ln x - x + 1$, $x > 0$, $x \neq 1$, удовлетворяют следующим условиям:

1) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} g(x) = 0$;

2) производные $f' : x \mapsto x^x(\ln x + 1) - 1$ и $g' : x \mapsto \frac{1}{x} - 1$ существуют в достаточно малой окрестности точки $x = 1$;

3) $(f'(x))^2 + (g'(x))^2 \neq 0$, $x \neq 1$, в указанной окрестности;

4) согласно предыдущему примеру, существует конечный предел

$$\lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^{x+1}(\ln x + 1) - x}{1 - x} = -2.$$

Следовательно, применимо первое правило Лопиталя, и мы имеем

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^{x+1}(\ln x + 1) - x}{1 - x} = -2. \ ▶$$

118. $w = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\operatorname{th} x} - \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$.

◀ Преобразуя функцию $u : x \mapsto \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\operatorname{th} x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$, $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, к виду $u : x \mapsto \frac{\operatorname{ch} x \sin x - \operatorname{sh} x \cos x}{x \operatorname{sh} x \sin x}$, замечаем, что функции $f : x \mapsto \operatorname{ch} x \sin x - \operatorname{sh} x \cos x$, $g : x \mapsto x \operatorname{sh} x \sin x$ удовлетворяют условиям первого правила Лопиталя. Поскольку существует

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2 \operatorname{sh} x \sin x}{\operatorname{sh} x \sin x + x(\operatorname{ch} x \sin x + \operatorname{sh} x \cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2 \frac{\operatorname{sh} x}{x} \frac{\sin x}{x}}{\frac{\operatorname{sh} x}{x} \frac{\sin x}{x} + \operatorname{ch} x \frac{\sin x}{x} + \frac{\operatorname{sh} x}{x} \cos x} = \frac{2}{3},$$

то, согласно указанному правилу, $w = \frac{2}{3}$. ▶

Замечание. Для нахождения $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ можно было бы применить правило Лопиталя (дважды), однако здесь, как и в других подобных примерах, удобнее (с вычислительной точки зрения) пользоваться замечательными пределами.

119. $\mathbf{w}=\lim\limits_{x\to+0}\left(e^{-\frac{1}{x^2}}x^{-100},\ x^{x^x-1}\right).$

◄ Поскольку для вектор-функции

$$\mathbf{w}=\lim_{x\to+0}\left(e^{-\frac{1}{x^2}}x^{-100},\ x^{x^x-1}\right)=\left(\lim_{x\to+0}e^{-\frac{1}{x^2}}x^{-100},\ \lim_{x\to+0}x^{x^x-1}\right),$$

то находим пределы каждой из компонент в отдельности. Имеем

$$\lim_{x\to 0}e^{-\frac{1}{x^2}}x^{-100}=\lim_{x\to+\infty}\frac{y^{50}}{e^y}=50!\lim_{y\to+\infty}e^{-y}=0$$

(здесь второе правило Лопиталя применено 50 раз).

Для второй компоненты предварительно применяем представление $u^v=e^{v\ln u}$, $u>0$, и проводим некоторое преобразование с тем, чтобы можно было воспользоваться правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to+0}x^{x^x-1}=\lim_{x\to+0}e^{x\ln^2 x\left(\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}\right)}=e^{ab}.$$

(Здесь мы воспользовались непрерывностью функции $x\mapsto e^x$ и теоремой о пределе произведения). Для нахождения $a=\lim\limits_{x\to+0}x\ln^2 x=\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln^2 x}{x^{-1}}$ применяем второе, а для нахождения $b=\lim\limits_{x\to+0}\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}$ — первое правило Лопиталя. Имеем

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln^2 x}{x^{-1}}=\lim_{x\to+0}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{-x^{-2}}=\lim_{x\to+0}\frac{-2\ln x}{x^{-1}}=\lim_{x\to+0}\frac{-\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0,$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}=\lim_{t\to-0}\frac{e^t-1}{t}=1.$$

Поэтому окончательно $\mathbf{w}=(0,1)$. ►

120. $\mathbf{w}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}},\ \left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^x,\ (\operatorname{th}x)^x\right).$

◄ Для нахождения предела вектор-функции вычисляем пределы каждой из ее компонент. Поскольку компоненты представляют собой степенно-показательные выражения, то применяем представление $u^v=e^{v\ln u}$, $u>0$, и, приведя соответствующие неопределенности к виду $\frac{0}{0}$, пользуемся правилом Лопиталя. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{-1}\cos^{-2}\frac{\pi x}{2x+1}\cdot\frac{\pi}{(2x+1)^2}}=$$

$$=e^{2\pi\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(\sin\frac{2\pi x}{2x+1}\right)^{-1}(2x+1)^{-2}\right)}=e^{2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2x+1}}{\sin\frac{\pi}{2x+1}}\alpha}=1,\quad \alpha=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x+1}=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)}=e^z,$$

где $z=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1}{\operatorname{arctg}x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\frac{2}{\pi}$,

$$\lim_{x\to+\infty}(\operatorname{th}x)^x=\lim_{x\to+\infty}e^{x\ln(\operatorname{th}x)}=e^z,$$

где

$$z = \lim_{x\to+\infty} x\ln(\operatorname{th} x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\operatorname{th} x}\cdot\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}}{-\frac{1}{x^2}} = -2\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\operatorname{sh} 2x} = -2\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\operatorname{ch} 2x} = 0.$$

Следовательно, $\mathbf{w} = \left(1, e^{-\frac{2}{\pi}}, 1\right)$. ►

121. Найти предел матричной функции

$$A : x \mapsto \begin{pmatrix} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} & \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \\ \left(\frac{\operatorname{Arsh} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} & \left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}} \end{pmatrix}, \quad x \in]-1, 1[\setminus\{0\},$$

при $x \to 0$.

◄ Поскольку $\lim\limits_{x\to a} A(x) = \left(\lim\limits_{x\to a} a_{ij}(x)\right)$, где $a_{ij}(x)$ — элементы функциональной матрицы $A(x)$, то вычисляем предел данной матрицы поэлементно. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^z, \quad \text{где } z = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}.$$

Применяем правило Лопиталя

$$z = \lim_{x\to 0}\frac{x}{2x\sin x}\cdot\frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{2x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{6x^2} = -\frac{1}{6}.$$

Аналогично получаем для всех других элементов:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^z, \quad z = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\operatorname{arctg} x}{x}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{arctg} x}\cdot\frac{\frac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x}{2x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x - (1+x^2)\operatorname{arctg} x}{2x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{-2x\operatorname{arctg} x}{6x^2} = -\frac{1}{3};$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{Arsh} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^z, \quad z = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\operatorname{Arsh} x}{x}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{Arsh} x}\cdot\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}x - \operatorname{Arsh} x}{2x^3} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x - u(x)}{x^3} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-x\operatorname{Arsh} x}{3x^2} = -\frac{1}{6}$$

(здесь введено обозначение $u(x) = \sqrt{1+x^2}\operatorname{Arsh} x$);

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}} = e^z, \quad z = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x) - x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{(1+x)^2}}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Итак, окончательно имеем

$$\lim_{x\to 0} A(x) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{6}} & e^{-\frac{1}{3}} \\ e^{-\frac{1}{6}} & e^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}. \ ►$$

122. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$.

◄ Неопределенность $\infty - \infty$ приводим к виду $\frac{0}{0}$, получим

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)}$$

и, дважды применив правило Лопиталя, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x(2+x)} = \frac{1}{2}. \ ►$$

123. $w = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1+e^x}{2} \right)^{\operatorname{cth} x}$.

◀ Неопределенность 1^∞ приводим к виду $e^{\frac{0}{0}}$, получаем

$$\left(\frac{1+e^x}{2} \right)^{\operatorname{cth} x} = e^{\left(\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)\right)(\operatorname{th} x)^{-1}}$$

и, применяя правило Лопитаяя, имеем:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)}{\operatorname{th} x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2}{1+e^x} e^x \frac{1}{2}}{\operatorname{ch}^{-2} x} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, $w = e^{\frac{1}{2}}$. ▶

124. Исследовать на дифференцируемость в точке $x = 0$ функцию

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}, & \text{если } x \neq 0; \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

◀ Исследовать на дифференцируемость функции в точке $x = 0$ означает установить существование конечного предела

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{2}}{x}. \tag{1}$$

Предел (1) будем искать по правилу Лопиталя, для чего мы должны убедиться, что числитель в (1) стремится к нулю при $x \to 0$. Проверка с применением правила Лопиталя показывает, что

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{2} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{2e^x - 2 - x - xe^x}{2x(e^x - 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - xe^x}{2(e^x(1+x) - 1)} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{-xe^x}{2e^x + xe^x} = 0.$$

Итак, в формуле (1) имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применяя к (1) правило Лопиталя трижды, получаем

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2e^x - 2 - x - xe^x}{2x^2(e^x - 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{2e^x - 1 - e^x - xe^x}{4x(e^x - 1) + 2x^2 e^x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-xe^x}{4(e^x - 1) + e^x(8x + 2x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{-e^x(x+1)}{(12 + 12x + 2x^2)e^x} = -\frac{1}{12}; \quad f'(0) = -\frac{1}{12}. ▶$$

125. Найти асимптоту кривой

$$y = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}, \quad x > 0.$$

◀ Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y = kx + b$. Использовав уравнение кривой, находим k и b:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^x}{(1+x)^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} = \frac{1}{e},$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x} - \frac{x}{e} \right) = \lim_{x \to +\infty} x \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} - \frac{1}{e} \right) = \frac{1}{e^2} \lim_{x \to +\infty} x \left(e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right) =$$

$$= \frac{1}{e^2} \lim_{t \to +0} \left(\frac{e - (1+t)^{\frac{1}{t}}}{t} \right) = \frac{1}{e^2} \lim_{t \to +0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \left(\frac{1}{t(t+1)} - \frac{1}{t^2} \ln(1+t) \right) =$$

$$= -\frac{1}{e^2} \lim_{t \to +0} \frac{t - (1+t)\ln(1+t)}{t^2(1+t)} = -\frac{1}{e^2} \lim_{t \to +0} \frac{-\ln(1+t)}{2t + 3t^2} = \frac{1}{2e}.$$

Таким образом, получаем уравнение асимптоты $y = \frac{x}{e} + \frac{1}{2e}$. Обоснование законности многократного использования правила Лопиталя мы предоставляем читателю. ▶

126. Возможно ли применение правила Лопиталя к пределу

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}?$$

◀ Функции $f : x \mapsto x^2\sin\frac{1}{x}$ и $g : x \mapsto \sin x$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, определены и непрерывны в окрестности точки $x = 0$ (исключая точку $x = 0$); их производные $f' : x \mapsto 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ и $g' : x \mapsto \cos x$ одновременно существуют при $x \neq 0$; выражение $(f'(x))^2 + (g'(x))^2 = \cos^2 x + \cos^2\frac{1}{x} - 2x\sin\frac{2}{x} + 4x^2\sin^2\frac{1}{x} \neq 0$ при $x \neq 0$ и

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{\cos x}. \tag{1}$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x}\right)(\cos x)^{-1} = 0$, а $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\frac{1}{x}\right)(\cos x)^{-1}$ не существует, то предел (1) также не существует. Следовательно, применение правила Лопиталя в данном примере невозможно. ▶

Отметим, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right) = 0.$$

127. Найти

$$z = \lim_{x\to 0}\frac{\det\begin{pmatrix} x & \sin x \\ e^x - 1 & 1 + x^2\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} x\cos x & \operatorname{tg} x \\ \operatorname{sh} x & e^x\end{pmatrix}}.$$

◀ Данные определители как функции переменной x удовлетворяют всем условиям правила Лопиталя в некоторой окрестности точки $x = 0$. Поэтому, применяя правило, получаем

$$z = \lim_{x\to 0}\frac{\det\begin{pmatrix} 1 & \cos x \\ e^x - 1 & 1 + x^2\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} x & \sin x \\ e^x & 2x\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} \cos x - x\sin x & \cos^{-2} x \\ \operatorname{sh} x & e^x\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} x\cos x & \operatorname{tg} x \\ \operatorname{ch} x & e^x\end{pmatrix}} =$$

$$= \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1\end{pmatrix}} = 1. \ ▶$$

Упражнения для самостоятельной работы

Найти следующие пределы:

295. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin x - \operatorname{tg} x)^3}{\sin(\sin x) - \operatorname{tg}(\operatorname{tg} x)}$. **296.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x^6} - 1 + x^6}{\operatorname{arctg}(x^{12})}$. **297.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin(1 - x^8) - \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}x^4}{\operatorname{arsh} x^4 - e^{x^4} + 1}$.

298. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh}(e^{x^2} - \cos x) - x^2}{\ln(1 + x^2)}$. **299.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh}(\operatorname{tg} x) - \operatorname{arctg} x}{\sin^3 x + x^3}$.

300. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2 + x + 2}}{\sqrt[n]{x^2 + 8x - 3}}\left(\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{x^2} - \frac{\pi^2}{4\operatorname{ctg}^2\frac{\pi x}{2}}\right)$.

301. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)^2 + 4}{\sin\frac{\pi x}{4}}\left(\frac{a}{\sin(x-2)} - \frac{b}{x-2} + \frac{c}{(x-2)^2}\right)$. **302.** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\operatorname{sh}(3x)}{\sqrt[3]{x-3} + 1}\left(1 + \frac{ax}{3^x - 27} + \frac{b}{3 - x}\right)$.

303. $\lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{a}{\operatorname{sh}(x-4)} + \frac{b}{x-4} + \frac{c}{(x-4)^3}\right)$.

304. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[4]{x^4 + x^3 + 2x + 1} - \sqrt{4x^2 + x + 1} + \sqrt[5]{x^5 + ax^4 + 1}\right)$.

305. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^{2\ln x} - x}{(\ln x)^x + x}$. **306.** $\lim\limits_{x\to +0}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}}{(\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{ctg} x}}$. **307.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{(\ln x)^{x^{\ln x}}}{x^{\ln^x x}}$.

308. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\left(x^2 \operatorname{arctg} \frac{\ln(\ln(\ln x))}{x^2 \ln x}\right)$. **309.** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{tg}(\sin x)}{\sin(\operatorname{tg} x)}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

310. $\lim\limits_{x\to+0} \left(\frac{\ln(1+x)}{3\left((1+x)^{\frac{1}{3}}-1\right)}\right)^{\frac{x}{\sin x^2}}$. **311.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} - \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{-\frac{1}{2x^2}}}{x^n}$.

312. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\left(\frac{\operatorname{sh} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} - \left(\frac{\operatorname{th} x}{x}\right)^{-\frac{1}{2x^2}}}{x^n}$. **313.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} - \left(\frac{e^x-1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}}{x^n}$

314. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} - \left(\frac{\operatorname{arsh} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}}{x^n}$. **315.** $\lim\limits_{x\to+0} \sin^x(1-x^x)$. **316.** $\lim\limits_{x\to+0} \operatorname{tg}^x(1-x^x)$

317. $\lim\limits_{x\to+0} \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}} - (1-3x^2)^{-\frac{1}{3x^2}}}{x^x - 1}$. **318.** $\lim\limits_{x\to+0} \frac{e^{-x^2}(\operatorname{sh} x)^x - (\operatorname{arsh} x)^x}{\arcsin(e^x-1)}$. **319.** $\lim\limits_{x\to+0} \frac{x^x - (2x)^{x^2}}{(\ln(1+x))^x - 1}$.

320. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\ln\sqrt{1+x}} - \frac{2}{x}\right)^{\frac{\operatorname{ch} x}{2x}}$. **321.** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin^{100} x}{x^{99}\sin x}\right)^{\frac{2}{3x^2}}$. **322.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln^{100} x}{x^{\varepsilon - x^{-1}}}$, $\varepsilon > 0$.

323. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt[18]{1+3x+4x^2} - \sqrt[16]{1+8x}}{x},\ x\ln(e^x-1),\ \frac{\arcsin(e^{x^2}-1)}{x^2}\right)$.

324. $\lim\limits_{x\to 1} \begin{pmatrix} \frac{\sin \pi x - \cos\frac{\pi x}{2}}{x^n - 1} & \frac{1}{(x-1)^2} - \operatorname{ctg}(x-1)^2 \\ \arcsin x - \frac{\pi}{2} & \frac{\ln(x+e^x-1)}{x^2} \end{pmatrix}$. **325.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ x^2 & \operatorname{tg} x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x - 1 & \sin^2 x \\ 1 & \ln(1+x) \end{vmatrix}}$.

326. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\begin{vmatrix} \operatorname{sh} x & x \\ x & x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & \ln^2(1+x) \\ 1 & \arcsin x \end{vmatrix}}$. **327.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^5} \left(\begin{vmatrix} x & x^2 & \dots & x^n \\ x^2 & x^3 & \dots & x^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^n & x^{n+1} & \dots & x^{2n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x\sin x & x^2 \\ x & \operatorname{tg} x \end{vmatrix} \right)$.

328. Пусть функции f и g в некоторой окрестности U точки a, за исключением самой точки a, имеют производные до $(n+1)$–го порядка включительно. Пусть, далее, выполняются условия:

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f'(x) = \ldots = \lim\limits_{x\to a} f^{(n)}(x) = 0$;

2) $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} g'(x) = \ldots = \lim\limits_{x\to a} g^{(n)}(x) = 0$; 3) $\exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f^{(n+1)}(x)}{g^{(n+1)}(x)} = l$, $l \in \mathbb{R}$;

4) производная $g^{(n+1)}(x) \neq 0$ в окрестности U. Тогда

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n+1)}(x)}{g^{(n+1)}(x)}.$$

Доказать это.

329. Пусть функции f и g в некоторой окрестности U точки a, за исключением самой точки a, имеют производные до $(n+1)$–го порядка включительно. Пусть, далее, выполняются условия:

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f'(x) = \ldots = \lim\limits_{x\to a} f^{(n)}(x) = +\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} g'(x) = \ldots = \lim\limits_{x\to a} g^{(n)}(x) = +\infty$; 3) $\exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f^{(n+1)}(x)}{g^{(n+1)}(x)} = l$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$;

4) производная $g^{(n+1)}(x) \neq 0$ в окрестности U. Тогда

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n+1)}(x)}{g^{(n+1)}(x)}.$$

Доказать это.

§ 9. Формула Тейлора

9.1. Формула Тейлора на промежутке.

Пусть $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ и $\exists f^{(n+1)}$ на $]a, b[$. Тогда $\forall x, x_0 \in]a, b[\wedge \forall p > 0\ \exists \theta$ такое, что справедлива следующая формула:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_{n+1}(x),$$

где

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{n!p} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)), \quad 0 < \theta < 1, \tag{1}$$

(остаточный член в форме Шлемильха—Роша). Из (1) при $p = n + 1$ получаем остаточный член в форме Лагранжа

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta_1(x - x_0)), \quad 0 < \theta_1 < 1,$$

а при $p = 1$ — остаточный член в форме Коши

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n!}(1 - \theta_2)^n f^{(n+1)}(x_0 + \theta_2(x - x_0)), \quad 0 < \theta_2 < 1.$$

9.2. Локальная формула Тейлора (или формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано).

Если функция f, определенная в некоторой окрестности точки x_0, имеет конечную производную $f^{(n)}(x_0)$, то справедливо представление

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!} + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0.$$

9.3. Пять основных разложений.

Положив во всех формулах Тейлора пунктов 9.1 и 9.2 $x_0 = 0$, получим соответствующие формулы Маклорена. Из локальной формулы Маклорена вытекает пять основных разложений:

I. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \to 0;$

II. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}), \quad x \to 0;$

III. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \to 0;$

IV. $(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n), \quad x \to 0;$

V. $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad x \to 0.$

9.4. Формула Тейлора для вектор-функции.

Пусть вектор-функция $\mathbf{f} :]a, b[\to E^k$ имеет производную $(n + 1)$-го порядка на $]a, b[$. Тогда $\forall x, x_0 \in]a, b[\wedge \forall p_j > 0\ \exists \theta_j$, $j = \overline{1, k}$, такие, что справедлива формула

$$\mathbf{f}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\mathbf{f}^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i + \mathbf{R}_{n+1}(x),$$

где $\mathbf{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x))$,

$$\mathbf{R}_{n+1}(x) = (R^1_{n+1}, R^2_{n+1}, \ldots, R^k_{n+1})\frac{(x - x_0)^{n+1}}{n!},$$

$$\mathrm{R}^j_{n+1} = \frac{f_j^{(n+1)}(x_0 + \theta_k(x - x_0))}{p_j}(1 - \theta_j)^{n-p_j+1}, \quad 0 < \theta_j < 1.$$

Для вектор-функции справедлива локальная формула Тейлора.

Написать разложения следующих функций по целым положительным степеням переменной x до членов указанного порядка включительно:

128. $f : x \mapsto \dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ до члена с x^4. Чему равно $f^{(4)}(0)$?

◀ Представляя значение функции f в виде

$$f(x) = 1 + (2x + 2x^2)(1 + x^3)^{-1}$$

и пользуясь разложением IV

$$(1 + x^3)^{-1} = 1 - x^3 + o(x^5), \quad x \to 0,$$

получаем

$$f(x) = 1 + (2x + 2x^2)(1 - x^3 + o(x^5)) = 1 + 2x + 2x^2 - 2x^4 + o(x^4), \quad x \to 0$$

Сравнивая полученное выражение с разложением в общем виде (см. пункт 9.2), находим

$$\frac{f^{(4)}(0)}{4!} = -2, \quad \text{откуда } f^{(4)}(0) = -48. ▶$$

129. e^{2x-x^2} до члена с x^5.

◀ Полагая $t = 2x - x^2$ и используя разложение I, имеем

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} + o(t^5) =$$
$$= 1 + (2x - x^2) + \frac{1}{2!}(2x - x^2)^2 + \ldots + \frac{1}{5!}(2x - x^2)^5 + o(x^5), \quad x \to 0,$$

(мы учли, что $o(t^5) = o(2x - x^2)^5 = o(x^5)$ при $x \to 0$). Выполняя далее соответствующие действия и записывая в разложении члены до x^5 (x^6, x^7, ... вносим в $o(x^5)$), окончательно получаем

$$e^{2x-x^2} = 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + o(x^5), \quad x \to 0. ▶$$

130. $\sqrt[3]{\sin x^3}$ до члена с x^{13}.

◀ Положим $x^3 = t$ и воспользуемся разложением функции $\sin t$ по формуле Маклорена.

$$\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 + o(t^6),$$

а также разложением IV. Тогда получим

$$\sqrt[3]{\sin t} = t^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{120} + o(t^5)\right)^{\frac{1}{3}} \equiv t^{\frac{1}{3}}(1 + \alpha(t))^{\frac{1}{3}} =$$
$$= t^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{9}\alpha^2 + o(\alpha^2)\right) = t^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{1}{3}\left(-\frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{120}\right) - \frac{1}{9}\left(-\frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{120}\right)^2 + o(t^5)\right) =$$
$$= t^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{t^2}{18} - \frac{t^4}{3240} + o(t^5)\right) = x\left(1 - \frac{x^6}{18} - \frac{x^{12}}{3240} + o(x^{15})\right) = x - \frac{x^7}{18} - \frac{x^{13}}{3240} + o(x^{16}). ▶$$

131. $\ln\cos x$ до члена с x^6.

◀ Применяя разложения V и II, получаем

$$\ln\cos x = \ln\sqrt{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{2}\ln(1 - \sin^2 x) = \frac{1}{2}\left(-\sin^2 x - \frac{\sin^4 x}{2} - \frac{\sin^6 x}{3} + o(x^7)\right) =$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^4 + \frac{x^6}{3} + o(x^7)\right) =$$
$$= -\frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{x^6}{36} - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{60} + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} + \frac{x^6}{3} + o(x^7)\right) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^7), \quad x \to 0. ▶$$

132. $\sin(\sin x)$ до члена с x^3.

◀ Пользуясь разложением II, имеем

$$\sin(\sin x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{6} + o(\sin^4 x) =$$
$$= \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right) - \frac{1}{6}(x^3 + o(x^4)) + o(\sin^4 x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4). \ ▶$$

133. $\operatorname{tg} x$ до члена с x^5.

◀ Поскольку функция $\operatorname{tg} x$ нечетная, то ее разложение в окрестности точки $x = 0$ имеет вид

$$\operatorname{tg} x = Ax + Bx^3 + Cx^5 + o(x^6), \quad x \to 0, \tag{1}$$

где A, B, C — коэффициенты. Записывая (1) в виде

$$\sin x = (Ax + Bx^3 + Cx^5 + o(x^6))\cos x$$

и используя разложения II и III, получим

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) = Ax + \left(B - \frac{A}{2}\right)x^3 + \left(C + \frac{A}{4!} - \frac{B}{2}\right)x^5 + o(x^6), \quad x \to 0.$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, находим

$$A = 1, \quad B = \frac{1}{3}, \quad C = \frac{2}{15}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6), \quad x \to 0. \ ▶$$

134. Найти три члена разложения функции $f : x \mapsto \sqrt{x}$ по целым положительным степеням разности $x - 1$.

◀ Воспользовавшись формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, получим

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + o((x-1)^2), \quad x \to 1.$$

Затем находим

$$f(1) = 1. \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f'(1) = \frac{1}{2}; \quad f''(x) = -\frac{1}{4x^{3/2}}, \quad f''(1) = -\frac{1}{4}$$

и, подставив эти значения в полученную формулу, окончательно имеем

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + o((x-1)^2), \quad x \to 1. \ ▶$$

135. Функцию $f : x \mapsto a \operatorname{ch}\frac{x}{a}$, $a > 0$, в окрестности точки $x = 0$ приближенно заменить параболой второго порядка.

◀ Поскольку

$$\operatorname{ch}\frac{x}{a} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = 1 + \frac{x^2}{2a^2} + o(x^2), \quad x \to 0,$$

то $f(x) = a + \frac{x^2}{2a} + o(x^2)$, $x \to 0$. ▶

136. Функцию $f : x \mapsto \sqrt{1+x^2} - x$, $x > 0$, разложить по целым положительным степеням дроби $\frac{1}{x}$ до члена с $\frac{1}{x^3}$.

◀ Преобразовывая выражение $\sqrt{1+x^2} - x$ и пользуясь разложением IV, получаем

$$f(x) = x\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1\right) = x\left(\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right) =$$
$$= x\left(1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4} + o\left(\frac{1}{x^5}\right) - 1\right) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3} + o\left(\frac{1}{x^4}\right), \quad x \to +\infty. \ ▶$$

137. Функцию $f : x \mapsto \frac{x+3}{3+x^2}$, $x \in]-\infty, +\infty[$, разложить по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Разложение вести в окрестности точки $x_0 = 1$ и найти первые три члена разложения.

◀ Искомое разложение имеет вид

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1+\theta(x-1))}{3!}(x-1)^3, \quad 0 < \theta < 1.$$

Найдем значение функции и ее производных в точке $x = 1$. Имеем

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = -\frac{3}{16}, \quad f''(1) = -\frac{1}{4}.$$

Таким образом,

$$f(x) = 1 - \frac{3}{16}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{f'''(1+\theta(x-1))}{3!}(x-1)^3. \ ▶$$

138. Пусть

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h), \tag{1}$$

где $0 < \theta < 1$, причем $f^{(n+1)}(x) \neq 0$. Доказать, что $\lim\limits_{h \to 0} \theta = \frac{1}{n+1}$.

◀ Поскольку $f^{(n+1)}(x)$ существует, то по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано запишем

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x) + o(h^{n+1}), \quad h \to 0. \tag{2}$$

Вычитая из равенства (1) равенство (2) и сокращая на $\frac{h^n}{n!}$, имеем

$$\frac{f^{(n)}(x+\theta h) - f^{(n)}(x)}{h} = \frac{f^{(n+1)}(x)}{n+1} + \frac{o(h)}{h},$$

откуда

$$\theta = \left(\frac{f^{(n+1)}(x)}{n+1} + \frac{o(h)}{h}\right)\left(\frac{f^{(n)}(x+\theta h) - f^{(n)}(x)}{\theta h}\right)^{-1}.$$

Переходя к пределу при $h \to 0$ в этом выражении и принимая во внимание, что $f^{(n+1)}(x) \neq 0$, находим $\lim\limits_{h \to 0} \theta = \frac{1}{n+1}$. ▶

139. Пусть $f \in C^{(2)}([0, 1])$ и $f(0) = f(1) = 0$, причем $\exists A > 0 : |f''(x)| \leqslant A \ \forall x \in]0, 1[$. Доказать, что $|f'(x)| \leqslant \frac{A}{2} \ \forall x \in [0, 1]$.

◀ По формуле Тейлора имеем

$$f(0) = f(x) - xf'(x) + f''(\xi_1)\frac{x^2}{2}, \quad 0 < \xi_1 < x \leqslant 1;$$

$$f(1) = f(x) + f'(x)(1-x) + f''(\xi_2)\frac{(1-x)^2}{2}, \quad 0 \leqslant x < \xi_2 < 1,$$

откуда

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(f''(\xi_1)x^2 - f''(\xi_2)\frac{(1-x)^2}{2}\right), \quad 0 < x < 1.$$

Оценивая это равенство по абсолютной величине, получаем

$$|f'(x)| \leqslant \frac{A}{2}(2x^2 - 2x + 1), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Но так как $0 \leqslant 2x^2 - 2x + 1 \leqslant 1$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$, то $|f'(x)| \leqslant \frac{A}{2}$, что и требовалось доказать. ▶

140. Пусть f — дважды дифференцируемая на $]-\infty, +\infty[$ функция и

$$M_k = \sup_{-\infty < x < +\infty} |f^{(k)}(x)| < +\infty, \quad k = \overline{0, 2}.$$

Доказать неравенство $M_1^2 \leqslant 2M_0M_2$.

◀ По формуле Тейлора имеем

$$f(x_0) = f(x) + f'(x)(x_0 - x) + f''(\xi)\frac{(x_0 - x)^2}{2},$$

откуда

$$|f(x_0)| \leqslant |f(x)| + |f'(x)||x_0 - x| + |f''(\xi)|\frac{|x_0 - x|^2}{2} \leqslant M_0 + M_1y + M_2\frac{y^2}{2}, \qquad y = |x_0 - x|.$$

Поскольку $M_0 + M_1y + \frac{1}{2}M_2y^2 \geqslant 0$ при всех y, то $M_1^2 \leqslant 2M_0M_2$. ▶

141. С помощью формулы Тейлора приближенно вычислить:
а) $\sin 18^\circ$; б) $\operatorname{arctg} 0{,}8$.

◀ а) Согласно формуле Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа,

$$\sin 18^\circ = \sin\frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10} - \frac{1}{6}\cdot\frac{\pi^3}{10^3} + \frac{1}{120}\cdot\frac{\pi^5}{10^5} + R_7,$$

где $|R_7| < \frac{1}{7!}\cdot\frac{\pi^7}{10^7}$. Итак,

$$\sin 18^\circ \approx \frac{\pi}{10}\left(1 - \frac{\pi^2}{600} + \frac{\pi^4}{12\cdot 10^5}\right) \approx 0{,}314159\left(1 - \frac{9{,}869604}{600} + \frac{(9{,}869604)^2}{12\cdot 10^5}\right) \approx$$

$$\approx 0{,}314159\,(1 - 0{,}016449 + 0{,}000079) \approx 0{,}309017.$$

б) Применяя формулу Тейлора, имеем при $x_0 = 1$

$$\operatorname{arctg} 0{,}8 = \operatorname{arctg}(x_0 - 0{,}2) \approx \operatorname{arctg} x_0 - (\operatorname{arctg} x)'|_{x=x_0}\cdot 0{,}2 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}04\,(\operatorname{arctg} x)''|_{x=x_0} -$$

$$- \frac{1}{6}\cdot 0{,}008\,(\operatorname{arctg} x)'''|_{x=x_0} \approx \frac{\pi}{4} - 0{,}1 - 0{,}01 - 0{,}00066 \approx 0{,}67474.$$

Поскольку $(\operatorname{arctg} x)^{(4)}|_{x=x_0} = 0$, $(\operatorname{arctg} x)^{(5)}|_{x=\xi} = 24\,\frac{1-10\xi^2+5\xi^4}{(1+\xi^2)^5} < 12$ при $0{,}8 < \xi < 1$, то по формуле остаточного члена в форме Лагранжа получаем оценку погрешности

$$|R| < \frac{12}{5!}(0{,}2)^5 < 3{,}2\cdot 10^{-5}. \ ▶$$

142. Вычислить:
а) $\cos 9^\circ$ с точностью до 10^{-5}; б) $\sqrt{5}$ с точностью до 10^{-4}.

◀ а) Определим число членов разложения функции косинуса по формуле Маклорена для достижения заданной точности. Его можно получить из оценки остаточного члена в форме Лагранжа. Так как $0 < \xi = \theta\frac{\pi}{20} < \frac{\pi}{20}$, $x = \frac{\pi}{20}$, то

$$|R_{2n+2}| = \left|\frac{(\cos x)^{(2n+2)}|_{x=\xi}}{(2n+2)!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^{2n+2}\right| < \frac{\pi^{2n+2}}{20^{2n+2}(2n+2)!} < 10^{-5},$$

откуда $n \geqslant 2$. Таким образом,

$$\cos 9^\circ \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{20}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^4 \approx 0{,}98769.$$

б) Функцию $f : x \mapsto \sqrt{x}$, $x \geqslant 0$, разложим по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0 = 4$:

$$\sqrt{x} = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{n!\,2^{3n-1}}(x-4)^n + R_{n+1}(x), \quad n = 2, 3, \ldots,$$

где

$$R_{n+1}(x) = \frac{(2n-1)!!\,(-1)^n(x-4)^{n+1}}{(n+1)!\,2^{n+1}(4+\theta(x-4))^{n+0,5}}, \qquad 0 < \theta < 1.$$

Полагая в разложении $x = 5$, получаем

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{64} + \frac{1}{512} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{n!\,2^{3n-1}} + R_{n+1}(5). \qquad (1)$$

Из условия

$$|R_{n+1}(5)| \leqslant \frac{(2-1)!!}{(n+1)!\,2^{3n+2}} < 10^{-4}$$

находим, что $n \geqslant 4$. Тогда из (1) следует

$$\sqrt{5} \approx 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{64} + \frac{1}{512} - \frac{5}{2^{14}} = 2{,}236022\ \ldots . \blacktriangleright$$

Используя разложения I—V, **найти следующие пределы:**

143. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{x^4}$.

◀ Применяя разложения I и III, получаем

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4}\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^5)\right)\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{12} + \frac{o(x^5)}{x^4}\right) = -\frac{1}{12}. \blacktriangleright$$

144. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5} - \sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$.

◀ Преобразовав выражение, находящееся под знаком предела, и применив разложение IV, имеем

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5} - \sqrt[6]{x^6-x^5}\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{6}} - \left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{6}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(1 + \frac{1}{6x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - \left(1 - \frac{1}{6x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right) = \frac{1}{3}. \blacktriangleright$$

145. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$.

◀ Пользуясь представлением $u^v = e^{v\ln u}$, $u > 0$, и разложениями I, V, находим

$$\lim_{x\to 0} x^{-3}(1 - e^{\sin x \ln\cos x}) = \lim_{x\to 0}\frac{1 - (1 + \sin x\ln\cos x + o(x^3))}{x^3} =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2} = -\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin^2 x)}{2x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}. \blacktriangleright$$

146. $w = \lim\limits_{x\to 0} x^{-3}(\operatorname{sh}(\operatorname{tg} x) - x)$.

◀ Здесь применяем разложение I, а также используем разложение $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$. Имеем

$$w = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x + \frac{1}{6}\operatorname{tg}^3 x + o(x^3) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x}{x^3} = \frac{1}{2}. \blacktriangleright$$

Для бесконечно малой при $x \to 0$ величины y определить главный член вида Cx^n (C — постоянная):

147. $y = \operatorname{tg}(\sin x) - \sin(\operatorname{tg} x)$.

◀ Прежде всего установим разложение

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8), \qquad x \to 0.$$

Действительно, представляя $\operatorname{tg} x$ в виде $\sin x(\cos x)^{-1}$ и используя разложения II—IV, получаем

$$\operatorname{tg} x = \sin x(1-\sin^2 x)^{-\frac{1}{2}} = \sin x + \frac{1}{2}\sin^3 x + \frac{3}{8}\sin^5 x + \frac{5}{16}\sin^7 x + o(x^8) =$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)^3 + \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^5 + \frac{5}{16}x^7 + o(x^8) =$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8), \quad x \to 0,$$

что и требовалось доказать. Используя эту формулу, а также упомянутые разложения, получаем

$$y = \operatorname{tg}(\sin x) - \sin(\operatorname{tg} x) = \sin x + \frac{\sin^3 x}{3} + \frac{2}{15}\sin^5 x + \frac{17}{315}\sin^7 x - \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{6} -$$

$$- \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5!} + \frac{\operatorname{tg}^7 x}{7!} + o(x^8) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right) + \frac{2}{15}\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^5 +$$

$$+ \frac{17}{315}x^7 - x - \frac{x^2}{3} - \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \frac{1}{6}\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5\right)^3 -$$

$$- \frac{1}{120}\left(x + \frac{x^3}{3}\right)^5 + \frac{x^7}{7!} + o(x^8) = \frac{x^7}{30} + o(x^8), \quad x \to 0,$$

откуда $Cx^n \equiv \frac{x^7}{30}$. Следовательно, $C = \frac{1}{30}$, $n = 7$. ►

148. $y = (1+x)^x - 1$.

◄ Применяя разложения I и V, получаем

$$y = e^{x\ln(1+x)} - 1 = x\ln(1+x) + o(x^2) = x\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) + o(x^2) = x^2 + o(x^2), \quad x \to 0.$$

Итак, $Cx^n \equiv x^2$. Следовательно, $C = 1$, $n = 2$. ►

149. $y = 1 - \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}$.

◄ Используя формулу $u^v = e^{v\ln u}$, $u > 0$, а также разложения V и I, находим

$$y = 1 - \exp\left\{\frac{1}{x}\ln(1+x) - 1\right\} = 1 - \exp\left\{\frac{1}{x}\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^{-1}\right\} =$$

$$= 1 - \exp\left\{-\frac{x}{2} + o(x)\right\} = 1 - \left(1 - \frac{x}{2} + o(x)\right) + o(x) = \frac{x}{2} + o(x), \quad x \to 0;$$

$$Cx^n \equiv \frac{x}{2}, \quad C = \frac{1}{2}, \quad n = 1. ►$$

150. Подобрать коэффициенты A и B так, чтобы при $x \to 0$ было справедливо равенство

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1 + Ax^2}{x + Bx^3} + O(x^5).$$

◄ Имеем

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1 + Ax^2}{x + Bx^3} + O(x^5),$$

откуда $(x + Bx^3)\cos x = (1 + Ax^2)\sin x + O(x^7)$. Используя разложения II и III, получаем

$$(x + Bx^3)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6)\right) = (1 + Ax^2)\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + O(x^7)\right) + O(x^7),$$

откуда

$$x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} + O(x^7) + Bx^3 - B\frac{x^5}{2} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7) + Ax^3 - \frac{A}{6}x^5 + O(x^7).$$

Следовательно, $-\frac{1}{2}+B = A-\frac{1}{6}$, $\frac{1}{24}-\frac{B}{2}=\frac{1}{120}-\frac{A}{6}$, откуда $A=-\frac{2}{5}$, $B=-\frac{1}{15}$ ►

151. При каких коэффициентах A, B, C и D справедлива при $x\to 0$ асимптотическая формула

$$e^x = \frac{1+Ax+Bx^2}{1+Cx+Dx^2} + O(x^5)?$$

◄ Имеем

$$e^x(1+Cx+Dx^2) = 1+Ax+Bx^2+O(x^5). \tag{1}$$

Поскольку $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+O(x^5)$, то из (1) получаем

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+O(x^5)\right)(1+Cx+Dx^2) = 1+Ax+Bx^2+O(x^5),$$

откуда, записывая в разложении члены до x^4 включительно, находим

$$1+Cx+Dx^2+x+Cx^2+Dx^3+\frac{x^2}{2}+\frac{C}{2}x^3+\frac{D}{2}x^4+\frac{x^3}{6}+\frac{C}{6}x^4+\frac{x^4}{24} = 1+Ax+Bx^2+O(x^5).$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, приходим к системе уравнений:

$$C+1=A,\quad D+\frac{C}{2}+\frac{1}{6}=0,\quad D+C+\frac{1}{2}=B,\quad \frac{D}{2}+\frac{C}{6}+\frac{1}{24}=0,$$

решив которую, получаем

$$A=\frac{1}{2},\quad B=\frac{1}{12},\quad C=-\frac{1}{2},\quad D=-\frac{1}{12}. ►$$

152. Считая $|x|$ малой величиной, вывести простые приближенные формулы для следующих выражений:

а) $\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}-\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$; б) $\frac{\ln 2}{\ln\left(1+\frac{x}{100}\right)}$.

◄ а) Пользуясь разложением IV, получаем

$$\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}-\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} = (1+x)^{\frac{1}{3}}(1-x)^{-\frac{1}{3}}-(1-x)^{\frac{1}{3}}(1+x)^{-\frac{1}{3}} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+o(x^2)\right)\left(1+\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2+o(x^2)\right) -$$

$$- \left(1-\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+o(x^2)\right)\left(1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2+o(x^2)\right) = \frac{4}{3}x+o(x^2)\approx\frac{4}{3}x.$$

б) Применяя разложение V, приходим к приближенной формуле

$$\frac{\ln 2}{\ln\left(1+\frac{x}{100}\right)} = \frac{\ln 2}{\frac{x}{100}-\frac{x^2}{2\cdot 10^4}+o(x^2)} \approx \frac{100\ln 2}{x}\approx\frac{70}{x}. ►$$

153. Вектор-функцию $\mathbf{f}: x\mapsto\left(\frac{1}{x},\ \frac{x}{x+2},\ \operatorname{arctg} x\right)$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,\ -2\}$, разложить по целым положительным степеням бинома $x-1$ до члена с $(x-1)^2$ включительно.

◄ Искомое разложение может быть получено в результате применения формулы Тейлора для вектор-функции (см. пункт 9.4):

$$\mathbf{f}(x) = \mathbf{f}(1)+\mathbf{f}'(1)(x-1)+\frac{1}{2}\mathbf{f}''(1)(x-1)^2+\mathbf{R}_3.$$

Поскольку $\mathbf{f}(1)=\left(1,\ \frac{1}{3},\ \frac{\pi}{4}\right)$; $\mathbf{f}'(1)=\left(-1,\ \frac{2}{9},\ \frac{1}{2}\right)$; $\mathbf{f}''(1)=\left(2,\ -\frac{4}{27},\ -\frac{1}{2}\right)$, то

$$\mathbf{f}(x) = \left(1,\ \frac{1}{3},\ \frac{\pi}{4}\right)+\left(-1,\ \frac{2}{9},\ \frac{1}{2}\right)(x-1)+\left(1,\ -\frac{2}{27},\ -\frac{1}{4}\right)(x-1)^2+\mathbf{R}_3,$$

где $\mathbf{R}_3$ — остаточный член в какой-либо форме. ►

Упражнения для самостоятельной работы

Разложить по формуле Тейлора следующие функции:

330. $f : x \mapsto (\sin x)^{\sin x}$, $x > 0$, в точке $x_0 = 1$ до члена с $(x-1)^2$ включительно. Остаточный член взять в форме Пеано.

331. $f : x \mapsto \operatorname{tg}(x + x^2)$ в точке $x_0 = 1$ до члена с $(x-1)^2$ включительно. Остаточный член взять в форме Пеано.

332. $f : x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $x > 0$, в точке $x_0 = 1$ до члена с $(x-1)^3$ включительно. Остаточный член взять в форме Пеано.

333. $f : x \mapsto xe^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, в точке $x_0 = 2$ до члена с $(x-2)^2$ включительно. Остаточный член взять в форме Лагранжа.

334. $f : x \mapsto x \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$, в точке $x_0 = 1$ до члена с $(x-1)^2$ включительно. Остаточный член взять в форме Коши.

335. $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2} \arcsin x$, $|x| < 1$, в точке $x_0 = 0$ до члена с x^5 включительно. Остаточный член взять в форме Пеано.

336. $\mathbf{f} : x \mapsto (\cos(\sin x),\ \sin(\cos x),\ e^{\sin x})$, $x \in \mathbb{R}$, в точке $x_0 = 0$ до члена с x^4.

337. $\mathbf{f} : x \mapsto (f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x))$ в точке $x_0 = 0$ до члена с x^5, где

$$f_1(x) = \frac{x^2}{e^x - x - 1}, \quad x \neq 0, \quad f_1(0) = 2;$$

$$f_2(x) = \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x^2}, \quad x \neq 0, \quad f_2(0) = -\frac{1}{4}; \quad f_3(x) = \operatorname{arsh} x.$$

Пользуясь локальной формулой Маклорена, получить разложения по целым положительным степеням x до членов наибольшего или указанного порядка включительно следующих функций:

338. $f : x \mapsto \begin{cases} x^6 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

339. $f : x \mapsto e^{x^3|x|}$. Справедливо ли разложение

$$e^{x^3|x|} = 1 + x^3|x| + \frac{x^8}{2!} + \ldots + \frac{x^{3n}|x|^n}{n!} + o(x^{4n})?$$

340. $f : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ (до члена с x^{10}).

Справедливо ли разложение

$$e^{-\frac{1}{x^2}} = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x^4} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!\, x^{2n}} + o\left(\frac{1}{x^{2n}}\right)?$$

341. $f : X \to Y$, $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$ (до члена с x^3).

342. $f : X \to Y$, $x = 2t + \sin t$, $y = te^t$ (до члена с x^3).

343. $f : X \to Y$, $x = t - t^2$, $y = 4t - t^4$ (до члена с x^3).

344. $f : X \to Y$, $y^7 + y - x = 0$ (до члена с x^6).

Пользуясь формулой Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа, получить разложения по целым положительным степеням x до членов указанного порядка включительно следующих функций:

345. $f : x \mapsto \begin{cases} x^{x^3}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ (до члена с x^2).

346. $f : X \to Y$, $x^4 + y^4 + \sin xy = 1$ (до члена с x^3 на отрезке $[-1, 1]$).

347. $f : x \mapsto e^{x\sqrt{x}}$, $x > 0$. Справедливо ли разложение

$$e^{x\sqrt{x}} = 1 + x\sqrt{x} + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^3\sqrt{x}}{3!} + \ldots + \frac{(x\sqrt{x})^n}{n!} + \frac{e^{\xi}(x\sqrt{x})^{n+1}}{(n+1)!}, \quad 0 < \xi < x\sqrt{x}?$$

348. Пусть $f : x \mapsto \cos(D(x))$, где D — функция Дирихле. Справедливо ли разложение

$$\cos(D(x)) = 1 - \frac{D^2(x)}{2!} + \frac{D^4(x)}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{D^{2n}(x)}{(2n)!} + R_{2n+2}(x)?$$

Найти выражение для $R_{2n+2}(x)$.

Подобрать коэффициенты A, B, C таким образом, чтобы при $x \to 0$ справедливы были следующие асимптотические равенства с наиболее возможным их порядком точности (установить этот порядок относительно x):

349. $\operatorname{arctg} x = \frac{x+Ax^3}{1+Bx^2} + O^*(x^n)$. **350.** $\arcsin x = \frac{x+Ax^3}{1+Bx^2} + O^*(x^n)$.

351. $\ln(1+x) = \frac{x+Ax^2}{1+Bx} + O^*(x^n)$. **352.** $\sqrt[k]{1+x} = \frac{1+Ax}{1+Bx} + O^*(x^n)$.

353. $(1+x)^x = \frac{1+Ax+Bx^2}{1+Cx} + O^*(x^n)$. **354.** $\operatorname{arsh} x = \frac{x+Ax^3}{1+Bx^2} + O^*(x^n)$.

Оценить абсолютную погрешность приближенных формул:

355. $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ при $|x| \leqslant 1$. **356.** $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \approx 1 + \frac{2}{3x}$ при $|x| > 10^3$.

357. $\operatorname{arctg} x \approx \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}$ при $|x| > 10^2$.

358. $\sin(a\sin(\omega x)) \approx a\omega x - \frac{a^3\omega^3x^3}{3}$ при $|a\omega x| < 0{,}1$.

359. $f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ при $|h| \leqslant 0{,}1$. **360.** $f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ при $|h| \leqslant 0{,}1$.

361. $f''(x) \approx \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{2h^2}$ при $|h| \leqslant 0{,}1$.

362. Пусть f удовлетворяет уравнению $f'(x) = F(f(x))$, где F — известная, достаточное число раз дифференцируемая функция. Пусть

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Тогда $f(x+h) - f(x) \approx hF(f(x))$. Оценить $|f(x) - f^*(x)|$, где f^* — удовлетворяет уравнению $f^*(x+h) - f^*(x) = hF(f^*(x))$.

363. Пусть f удовлетворяет уравнению $f'(x) = F(f(x))$, где F — известная, достаточное число раз дифференцируемая функция. Оценить $|f(x) - f^*(x)|$, где f^* удовлетворяет уравнению

$$f^*(x+h) + 4f^*(x) - 5f^*(x-h) = 2h(2F(f^*(x)) + F(f^*(x-h))).$$

Используя разложения I – V, найти следующие пределы:

364. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^3 x^3 - e^{x^9} - 1}{(\cos x - \operatorname{ch} x)^2}$. **365.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{8}} - 1 - \frac{x}{8} + \frac{x^2}{16}}{\ln^2(e+x) - \frac{x^2}{e^2}}$.

366. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2 e^{-\frac{1}{x}} - \sqrt[4]{x^2+\alpha x+1}\right)$.

367. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+\operatorname{sh} x) - x\sqrt{1-x} - \frac{5}{8}x^3}{\operatorname{tg} x - x - \frac{x^3}{3}}$. **368.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh}(\ln \operatorname{ch} x) - \ln(\operatorname{ch} \operatorname{sh} x)}{x^m}$.

§ 10. Экстремум функции. Наибольшее и наименьшее значения функции

10.1. Экстремум функции.

Определение. *Пусть функция f определена всюду в некоторой окрестности точки c. Будем говорить, что функция f имеет в точке c локальный максимум (минимум), если найдется такая окрестность точки c, в пределах которой значение $f(c)$ является наибольшим (наименьшим) среди всех других значений этой функции.*

Локальный максимум и локальный минимум объединяются общим названием *экстремум*.

10.2. Необходимое условие экстремума.

Если функция дифференцируема в точке c и имеет в этой точке экстремум, то $f'(c) = 0$.

Определение 1. *Корни уравнения $f'(x) = 0$ называются стационарными точками функции f.*

К точкам, подозрительным на экстремум, следует отнести и такие, в которых производная функции f не существует.

Определение 2. *Стационарные точки и точки, в которых производная функции не существует, называются критическими точками этой функции.*

10.3. Достаточные условия экстремума.

Первое правило. Пусть функция f дифференцируема всюду в некоторой окрестности точки c, за исключением, быть может, самой точки c, и непрерывна в точке c. Тогда, если в пределах указанной окрестности производная f' положительна (отрицательна) слева от точки c и отрицательна (положительна) справа от точки c, то функция f имеет в точке c локальный максимум (минимум). Если же производная f' имеет один и тот же знак слева и справа от точки c, то экстремума в точке нет.

Второе правило. Пусть функция f имеет в данной точке возможного экстремума конечную вторую производную. Тогда функция f имеет в точке c максимум, если $f''(c) < 0$, и минимум, если $f''(c) > 0$.

Третье правило. Пусть n — некоторое целое положительное число и пусть функция $y = f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки $x = c$ производную порядка $n-1$, а в самой точке c — производную n-го порядка. Пусть в точке $x = c$ выполняются следующие соотношения:

$$f'(c) = f''(c) = \ldots = f^{(n-1)}(c) = 0, \quad f^{(n)}(c) \neq 0.$$

Тогда, если n — четное число, то функция $y = f(x)$ имеет локальный экстремум в точке c, а именно: максимум, если $f^{(n)}(c) < 0$, и минимум, если $f^{(n)}(c) > 0$.

10.4. Абсолютный экстремум.

Наибольшее (наименьшее) значение непрерывной на сегменте $[a, b]$ функции f достигается либо в критической точке этой функции, либо в граничных точках a и b этого сегмента.

Исследовать на экстремум следующие функции:

154. $f : x \mapsto x^m(1-x)^n$, $x \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}$.

◀ Находим производную функции f и приравниваем ее к нулю

$$f'(x) = (m+n)x^{m-1}(1-x)^{n-1}\left(\frac{m}{m+n} - x\right) = 0.$$

Корни этого уравнения $x_1 = 0$ $(m > 1)$, $x_2 = 1$ $(n > 1)$, $x_3 = \frac{m}{m+n}$ будут стационарными точками. Проверим достаточные условия.

Пусть $0 < \varepsilon < \frac{m}{m+n}$. При m четном $f'(-\varepsilon) < 0$, $f'(\varepsilon) > 0$, следовательно, в точке $x_1 = 0$ функция f имеет минимум, равный нулю.

Аналогично для точки $x_2 = 1$: при n четном $f'(1-\varepsilon) < 0$, $f'(1+\varepsilon) > 0$, поэтому функция f в этой точке имеет минимум, равный нулю; при n нечетном $f'(1-\varepsilon) > 0$, $f'(1+\varepsilon) > 0$, т. е. экстремума нет

Наконец, для точки $x_3 = \frac{m}{m+n}$ имеем

$$f'\left(\frac{m}{m+n} - \varepsilon\right) > 0, \qquad f'\left(\frac{m}{m+n} + \varepsilon\right) < 0.$$

Таким образом, в точке x_3 функция f имеет максимум

$$f\left(\frac{m}{m+n}\right) = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}.$$

Случай, когда $m = 1$ $(n = 1)$, предлагаем читателю рассмотреть самостоятельно. ▶

155. $f : x \mapsto x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$, $x \in \mathbb{R}$.

◀ Приравнивая к нулю производную данной функции, находим стационарную точку $x_1 = \frac{1}{3}$. В точках $x_2 = 0$ и $x_3 = 1$ конечная производная не существует. Пусть $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$, тогда

$$f'\left(\frac{1}{3} - \varepsilon\right) > 0, \quad f'\left(\frac{1}{3} + \varepsilon\right) < 0; \qquad f'(-\varepsilon) > 0, \quad f'(\varepsilon) > 0;$$
$$f'(1-\varepsilon) < 0, \qquad f'(1+\varepsilon) > 0.$$

Следовательно, при $x_1 = \frac{1}{3}$ функция имеет максимум, равный $\frac{1}{3}\sqrt[3]{4}$. При $x_2 = 0$ экстремума нет, а при $x_3 = 1$ функция имеет минимум, равный нулю. ▶

156. $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{|x|}}\left(\sqrt{2} + \sin\frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$, и $f(0) = 0$.

◀ Исследуем знак приращения функции f в точке $x = 0$. Имеем

$$\Delta f(0) = e^{-\frac{1}{|x|}}\left(\sqrt{2} + \sin\frac{1}{x}\right) > 0$$

при всех $x \neq 0$. Следовательно, функция имеет при $x = 0$ минимум, равный $f(0) = 0$. При $x \neq 0$ рассмотрим уравнение $f'(x) = 0$. Очевидно,

$$f' : x \mapsto x^{-2}e^{-\frac{1}{|x|}}\left(\left(\sqrt{2} + \sin\frac{1}{x}\right)\operatorname{sgn} x - \cos\frac{1}{x}\right), \quad x \neq 0.$$

Поскольку $\left|\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right| \leqslant \sqrt{2}$, то производная при переходе через точки, в которых она обращается в нуль, знака не меняет, поэтому других экстремальных значений, кроме $f_{\min} = f(0) = 0$, функция не имеет. ▶

Найти экстремумы следующих функций:

157. $f : x \mapsto \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$, $x \in \mathbb{R}$.

◀ Производная $f' : x \mapsto \frac{1+x}{1+x^2} = 0$ при $x = 1$. Поскольку $f'(1-\varepsilon) > 0$, а $f'(1+\varepsilon) < 0$, $0 < \varepsilon < 1$, то в точке $x = 1$ функция имеет максимум, равный $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$. ▶

158. $f : x \mapsto |x|e^{-|x-1|}$, $x \in \mathbb{R}$.

◀ Из выражения для производной $f' : x \mapsto e^{-|x-1|}\operatorname{sgn} x - |x|e^{-|x-1|}\operatorname{sgn}(x-1)$, $x \neq 0$, $x \neq 1$, видим, что точки $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ и $x_3 = 1$ подозрительны на экстремум.

О наличии экстремума и его характере судим по знаку производной при переходе через точки x_i $(i = 1, 2, 3)$. Имеем

$f'(-1+\varepsilon) < 0$, $f'(-1-\varepsilon) > 0$ (максимум, равный e^{-2});
$f'(-\varepsilon) < 0$, $f'(\varepsilon) > 0$ (минимум, равный 0);
$f'(1-\varepsilon) > 0$, $f'(1+\varepsilon) < 0$ (максимум, равный 1)
(ε — достаточно малое положительное число). ▶

159. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f : x \mapsto |x^2 - 3x + 2|$ на сегменте $[-10, 10]$.

◀ Находим производную

$$f' : x \mapsto (2x-3)\operatorname{sgn}(x^2 - 3x + 2), \quad x \neq 1, \quad x \neq 2;$$

отсюда получаем точки, подозрительные на экстремум:
$x_1 = \frac{3}{2}$ $\left(f'\left(\frac{3}{2}\right) = 0\right)$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$ (производная не существует). Сравнивая между собой числа

$$f(x_1) = \frac{1}{4}, \; f(x_2) = 0, \; f(x_3) = 0, \; f(-10) = 132, \; f(10) = 72,$$

приходим к выводу, что наибольшее значение функции равно 132, а наименьшее равно 0. ▶

160. Найти точную нижнюю (inf) и точную верхнюю (sup) грани функции $f : x \mapsto e^{-x^2}\cos x^2$ на интервале $]-\infty, +\infty[$.

◀ Принимая во внимание четность функции f, рассматриваем ее на полуинтервале $x \geqslant 0$. Из выражения $f' : x \mapsto -2\sqrt{2}xe^{-x^2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x^2\right)$ видим, что точки $x_1 = 0$ и $x_k = \sqrt{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}_0$, подозрительны на экстремум. Сравнивая числа

$$f(0) = 1, \quad f(x_k) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3\pi}{4} - 2k\pi}, \; k \in \mathbb{Z}_0, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0,$$

заключаем, что

$$\inf_{-\infty<x<+\infty} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3\pi}{4}}, \qquad \sup_{-\infty<x<+\infty} f(x) = 1. \; ▶$$

161. Определить $\inf f(\xi)$ и $\sup f(\xi)$ функции $f : \xi \mapsto \dfrac{1+\xi}{3+\xi^2}$ на интервале $]x, +\infty[$.

◀ По производной $f' : \xi \mapsto \frac{3-2\xi-\xi^2}{(3+\xi^2)^2}$ находим точки, подозрительные на экстремум: $\xi_1 = -3$, $\xi_2 = 1$. Затем из чисел $f(-3) = -\frac{1}{6}$, $f(1) = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{\xi\to x+0} f(\xi) = \frac{1+x}{3+x^2}$, $\lim\limits_{\xi\to+\infty} f(\xi) = 0$ выбираем наибольшее и наименьшее.

Пусть $x \leqslant 1$. Тогда $\frac{1+x}{3+x^2} \leqslant \frac{1}{2}$ и $\sup\limits_{x<\xi<+\infty} f(\xi) = f(1) = \frac{1}{2}$. Если $x > 1$, то $\sup\limits_{1<x<\xi<+\infty} f(\xi) = \frac{1+x}{3+x^2}$. Следовательно,

$$\sup_{x<\xi<+\infty} f(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \leqslant 1, \\ \frac{1+x}{3+x^2}, & x > 1. \end{cases}$$

Пусть $x \leqslant -3$. Тогда $\frac{1+x}{3+x^2} \geqslant -\frac{1}{6}$ и $\inf\limits_{x<\xi<+\infty} f(\xi) = -\frac{1}{6}$.

Пусть $-3 < x < -1$. Тогда $-\frac{1}{6} < \frac{1+x}{3+x^2} < 0$ и $\inf\limits_{x<\xi<+\infty} f(\xi) = \frac{1+x}{3+x^2}$.

Наконец, если $x \geqslant -1$, то $\frac{1+x}{3+x^2} \geqslant f(+\infty) = 0$ и $\inf\limits_{x<\xi<+\infty} f(\xi) = 0$.

Следовательно,

$$\inf_{x<\xi<+\infty} f(\xi) = \begin{cases} -\frac{1}{6}, & x \leqslant -3, \\ \frac{1+x}{3+x^2}, & -3 < x \leqslant -1, \\ 0, & x > -1. \end{cases} \blacktriangleright$$

162. Определить наибольший член последовательности (a_n), если $a_n = \sqrt[n]{n}$.

◀ Полагая $n = x$, элементы последовательности (a_n) можно считать значениями дифференцируемой функции $f : x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$, $x > 0$, т. е. $a_n = f(n)$. Пусть стационарная точка x_0 функции f удовлетворяет неравенствам $k \leqslant x_0 < k+1$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда, если последовательность (a_n) имеет наибольший член ($\max a_n$), то он равен большему из чисел: a_1, a_k, a_{k+1}.

По производной f' $x \mapsto x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \ln x)$ находим стационарную точку $x_0 = e$, в которой, очевидно, достигается максимум f. Следовательно, $k = 2$. Сравнивая числа $a_1 = 1$, $a_2 = \sqrt{2}$ и $a_3 = \sqrt[3]{3}$, получаем: $\max a_n = \sqrt[3]{3} \approx 1{,}44$. ▶

163. Доказать неравенство

$$\frac{1}{2^{p-1}} \leqslant x^p + (1-x)^p \leqslant 1, \quad \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \ \text{ и } \ p > 1.$$

◀ Рассмотрим функцию $f : x \mapsto x^p + (1-x)^p$. Ее производная $f' : x \mapsto p(x^{p-1} - (1-x)^{p-1})$ обращается в нуль в точке $x = \frac{1}{2}$. Сравнивая числа $f(0) = 1$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{p-1}}$, $f(1) = 1$, находим, что $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x) = 1$, $\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x) = \frac{1}{2^{p-1}}$. Отсюда следует доказываемое неравенство. ▶

164. Доказать неравенство $\frac{2}{3} \leqslant \frac{x^2+1}{x^2+x+1} \leqslant 2$ при $-\infty < x < +\infty$.

◀ Доказательство основано на сравнении четырех чисел:

$$f_{\max}(x), \quad f_{\min}(x), \quad \lim_{x\to-\infty} f(x), \quad \lim_{x\to+\infty} f(x),$$

где $f(x) = (x^2+1)(x^2+x+1)^{-1}$.

Следовательно, при $x = 1$ достигается минимальное значение функции f, равное $\frac{2}{3}$, а при $x = -1$ — максимальное, равное 2. ▶

165. Определить "отклонение от нуля" многочлена

$$P(x) = x(x-1)^2(x+2)$$

на сегменте $[-2, 1]$, т. е. найти $E_P = \sup\limits_{-2\leqslant x\leqslant 1} |P(x)|$.

◀ Находим

$$P'(x) = (x-1)^2(x+2) + 2(x-1)x(x+2) + x(x-1)^2.$$

Из уравнения $P'(x) = 0$ находим

$$x_1 = 1, \quad x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

Сравнивая значения $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$ и $f(-2)$, получаем, что

$$E_P = \frac{9 + 6\sqrt{3}}{4}. \blacktriangleright$$

166. При каком выборе коэффициента q многочлен $P(x) = x^2 + q$ наименее "отклоняется от нуля" на сегменте $[-1, 1]$, т. е. $E_P = \sup\limits_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |P(x)|$ принимает минимальное значение?

◀ Сравнивая числа $P(0) = q$, $P(\pm 1) = q + 1$, находим, что

$$\sup_{|x| \leqslant 1} |P(x)| = \max(|q|, |q+1|) = \begin{cases} |q|, & \text{если } |q| \geqslant |q+1|, \\ |q+1|, & \text{если } |q+1| \geqslant |q|, \end{cases}$$

т. е. $\sup\limits_{|x| \leqslant 1} |P(x)| = \left|q + \frac{1}{2}\right| + \frac{1}{2}$. Далее, имеем

$$\min E_P = \min_q \max\{|q|, |q+1|\} = \min_q \left\{\left|q + \frac{1}{2}\right| + \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}$$

при $q = -\frac{1}{2}$. ▶

167. Абсолютным отклонением двух функций f и g на сегменте $[0, 1]$ называется число

$$\Delta = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - g(x)|.$$

Определить абсолютное отклонение функций $f : x \mapsto x^2$ и $g : x \mapsto x^3$ на сегменте $[0, 1]$.

◀ Дифференцируемая на $[0, 1]$ функция $\varphi : x \mapsto f(x) - g(x)$ на концах этого отрезка принимает равные значения $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ и на интервале $]0, 1[$ имеет единственную стационарную точку $x = \frac{2}{3}$.

Следовательно,

$$\Delta = \max\left\{|\varphi(0)|, \left|\varphi\left(\frac{2}{3}\right)\right|\right\} = \left|\varphi\left(\frac{2}{3}\right)\right| = \frac{4}{27}. \text{ ▶}$$

168. Определить минимум функции

$$f : x \mapsto \max(2|x|, |1+x|).$$

◀ Если $2|x| \geqslant |1+x|$, то $\max\{2|x|, |1+x|\} = 2|x|$. Значит, $f : x \mapsto 2|x|$, если $-\infty < x \leqslant -\frac{1}{3}$ или $x \geqslant 1$. Далее, если $2|x| < |1+x|$, то $\max\{2|x|, |1+x|\} = |1+x|$. Следовательно, $f : x \mapsto |x+1|$ при $-\frac{1}{3} < x < 1$. Таким образом,

$$f : x \mapsto \begin{cases} |x+1|, & \text{если } -\frac{1}{3} < x < 1, \\ 2|x|, & \text{если } x \notin \left]-\frac{1}{3}, 1\right[. \end{cases}$$

По производной

$$f' : x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{если } -\frac{1}{3} < x < 1, \\ 2 \operatorname{sgn} x, & \text{если } x \notin \left[-\frac{1}{3}, 1\right], \end{cases}$$

видим, что точки $x_1 = -\frac{1}{3}$ и $x_2 = 1$ подозрительны на экстремум. Сравнивая числа $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$ и $f(1) = 2$, находим $f_{\min} = \frac{2}{3}$. ▶

Упражнения для самостоятельной работы

Исследовать на экстремум следующие функции:

369. $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{\left|1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right|}, & \text{где } x \neq \xi, \ 1 + \xi + \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{3} = 0, \\ -1, & x = \xi. \end{cases}$

370. $f : x \mapsto \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x^2 - 1}\right), & x \neq \pm 1, \\ 0, & x = 1 \vee x = -1. \end{cases}$

371. $f : x \mapsto \frac{x}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$. **372.** $f : x \mapsto |x|^{\frac{1}{5}}(1-x)^{\frac{1}{7}}(2-x)^{\frac{1}{9}}$, $x \in \mathbb{R}$.

373. $f : x \mapsto \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\sin x}$, $0 < x < \pi$. **374.** $f : x \mapsto |x|^{\frac{1}{\sqrt{2}}}|1-x|^{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}$.

375. $f : x \mapsto \cos^{100} x + \operatorname{ch}^{100} x$. **376.** $f : x \mapsto \frac{1}{2}(\cos x + |\cos x|)$.

377. $f : X \to Y$, $x = 3t - t^3$, $y = 4t - t^4$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

378. $f : \varphi \mapsto 1 + \cos\varphi,\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. **379.** $f : X \to Y,\ x^3 + y^3 + x^2 y + 1 = 0$.

Найти минимумы следующих функций:

380. $f : x \mapsto \max\left\{\operatorname{ch} x + \frac{1}{2},\ 4 - \operatorname{ch} x\right\}$. **381.** $f : x \mapsto \max\{1 - |x+3|,\ 1 - |x|,\ 1 - (x-2)^2\}$.

Найти максимумы следующих функций:

382. $f : x \mapsto \min(x+5,\ \ln x,\ 1 - x)$. **383.** $f : x \mapsto \min\left\{-x,\ (x+2)^2 - \frac{1}{10},\ -\frac{\ln x - \ln(x+1)}{x}\right\}$.

Найти наибольшие значения следующих функций:

384. $f : x \mapsto (x-1)^2(x-2)^2,\ -3 \leqslant x \leqslant 4$. **385.** $f : x \mapsto \frac{1}{1 + \sqrt[3]{e^x - x}},\ -1 \leqslant x \leqslant 1$.

386. $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2 + \frac{\sin x}{x}}, & 0 < |x| \leqslant \pi, \\ 4, & x = 0. \end{cases}$ **387.** $f : x \mapsto \frac{\cos x \cos \frac{x}{2} \ldots \cos \frac{x}{n}}{2 - \cos x \cos \frac{x}{2} \ldots \cos \frac{x}{n}}$.

Найти наименьшие значения следующих функций:

388. $f : x \mapsto \frac{x^4}{4} + \frac{4}{3}x^3 - \frac{11}{8}x^2 - \frac{9}{4}x + 1,\ -3 \leqslant x \leqslant 2$. **389.** $f : x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{[x]} \sin k\pi x,\ 1 \leqslant x \leqslant 4$.

390. $f : X \to Y,\ x^3 + y^3 - 4{,}5xy = 0\ \ (0{,}5 \leqslant x \leqslant 1{,}5;\ 0 < y < x)$, f — непрерывная функция.

391. $f : x \mapsto -\sin(a \sin x),\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2},\ a > 0$.

В следующих задачах для данных функций f определить их приближения f^* так, чтобы $\sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - f^*(x)|$ был минимальным (функция f^* называется чебышевским приближением):

392. $f : x \mapsto x^2;\ f^* : x \mapsto a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4,\ 0 \leqslant x \leqslant 1$.

393. $f : x \mapsto e^x;\ f^* : x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2,\ 0 \leqslant x \leqslant 1$.

394. $f : x \mapsto e^x;\ f^* : x \mapsto \frac{a + bx}{c + dx},\ 0 \leqslant x \leqslant 1$.

395. $f : x \mapsto x^3 - 6x^2 + 6x + 1;\ f^* : x \mapsto a_0 x,\ 1 \leqslant x \leqslant 5$.

Найти наименьшие и наибольшие значения следующих функций:

396. $f : x \mapsto e^{-\frac{\pi^2}{x^2}}\left(\sqrt{2} + \sin\frac{\pi^3}{x^2}\right),\ x \neq 0,\ x \in [-\pi,\ \pi]$.

397. $f : x \mapsto \begin{cases} -\ln|\sin x|, & x \neq k\pi, \\ 0, & x = k\pi, \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$, на отрезке $[-4\pi,\ 4\pi]$.

Найти $\inf f(x)$, $\sup f(x)$ следующих функций:

398. $f : x \mapsto e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin x\right),\ x \neq \frac{\pi}{4},\ f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$ на интервале $]0,\ +\infty[$.

399. $f : x \mapsto |\sin x - |x - a||$ на $]-1,\ 1[$.

В следующих задачах для данных функций f найти приближения $f^* \in \{\bar{f}^*\}$ так, чтобы

$$\sup_{0 < x < +\infty} |f(x) - f^*(x)| = \inf_{\{\bar{f}^*\}} \sup_{x > 0} |f(x) - \bar{f}^*(x)|,$$

где

$$\bar{f}^* : x \mapsto \begin{cases} a_0 + a_1 x + a_2 x^2, & 0 \leqslant x \leqslant x_0, \\ (b_0 + b_1 x + b_2 x^2)^{-1}, & x_0 < x < +\infty. \end{cases}$$

400. $f : x \mapsto \frac{x}{1 + x^4}$. **401.** $f : x \mapsto (1 + x^2)\, e^{-x}$.

402. $f : x \mapsto (1 - x^2)\, e^{-x}$. **403.** $f : x \mapsto \sqrt{1 + x + x^2}\, e^{-x}$.

§ 11. Построение графиков функций по характерным точкам

Исследование и построение графика функции $y = f(x)$ целесообразно проводить по следующей схеме

1. *Определить область существования функции, периодичность, точки пересечения с осью Ox и интервалы знакопостоянства, симметрию графика функции, найти точки разрыва и интервалы непрерывности.*

2. *Выяснить вопрос о существовании асимптот.*

3. *Найти интервалы монотонности функции и точки экстремума.*

4. *Указать интервалы сохранения направления выпуклости и точки перегиба графика функции.*

5. *Построить график функции.*

Построить графики следующих функций:

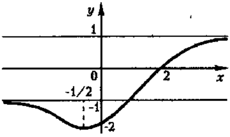


Рис. 22

169. $y = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$.

◀ 1. Функция определена и непрерывна при всех x, положительна при $x > 2$ и отрицательна при $x < 2$; $y(2) = 0$.

2. Из $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \pm 1$ следует, что $y = 1$ — асимптота графика функции при $x \to +\infty$, а $y = -1$ — при $x \to -\infty$.

3. Поскольку производная

$$y' = \frac{2x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} \quad \begin{cases} < 0 & \text{при } x < -\frac{1}{2}; \\ > 0 & \text{при } x > -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

то функция убывает при $x < -\frac{1}{2}$ и возрастает при $x > -\frac{1}{2}$, а при $x = -\frac{1}{2}$ имеет минимум, равный $-\sqrt{5} \approx -2{,}24$.

4. Судя по знакам второй производной:

$$y'' = -\frac{4\left(x + \frac{3+\sqrt{41}}{8}\right)\left(x - \frac{\sqrt{41}-3}{8}\right)}{\sqrt{(x^2+1)^5}} \quad \begin{cases} < 0 & \text{при } x < -\frac{3+\sqrt{41}}{8}; \\ > 0 & \text{при } -\frac{3+\sqrt{41}}{8} < x < \frac{3-\sqrt{41}}{8}; \\ < 0 & \text{при } \frac{3-\sqrt{41}}{8} < x, \end{cases}$$

заключаем, что при $x < -\frac{3+\sqrt{41}}{8} \approx -1{,}18$ и $x > \frac{-3+\sqrt{41}}{8} \approx 0{,}42$ график функции выпуклый вверх, при $-\frac{3+\sqrt{41}}{8} < x < \frac{3-\sqrt{41}}{8}$ график выпуклый вниз; точки перегиба $x_1 \approx -1{,}18$; $y_1 \approx -2{,}06$ и $x_2 \approx 0{,}42$; $y_2 \approx -1{,}46$.

5. График функции изображен на рис. 22. ▶

170. $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2+1}$.

◀ 1. Функция определена, непрерывна и отрицательна при всех x; ее график симметричен относительно оси Oy, поскольку $y(x) = y(-x)$.

2. Поскольку предел $\lim\limits_{x\to\infty} y$ равен нулю, то $y = 0$ — асимптота; других асимптот нет.

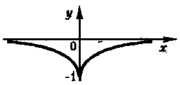


Рис. 23

3. По знакам производной

$$y' = \frac{2\left((x^2+1)^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{4}{3}}\right)}{3x^{\frac{1}{3}}(x^2+1)^{\frac{2}{3}}} \quad \begin{cases} < 0 & \text{при } x < 0; \\ > 0 & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

заключаем, что функция убывает при $x < 0$ и возрастает при $x > 0$, а при $x = 0$ имеет минимум, равный -1.

4. Поскольку

$$y'' = -\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}\left(x^2+1\right)^{-\frac{5}{3}}\left(\left(x^2+1\right)^{\frac{5}{3}} + 3x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{10}{3}}\right) < 0$$

$$(0 < |x| < +\infty),$$

то график функции выпуклый вверх и точек перегиба нет.

5. По полученным данным строим график функции (рис. 23). ▶

171. $y = \dfrac{|1+x|^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$.

◀ 1. Функция определена, непрерывна и положительна при всех $x > 0$.

2. Из очевидного равенства $\lim\limits_{x\to+0} y = +\infty$ следует, что $x = 0$ — вертикальная асимптота при $x \to +0$. Имеется наклонная асимптота $y = kx + b$, где $k = \lim\limits_{x\to+0} \frac{y}{x} = 1$, $b = \lim\limits_{x\to+\infty} (y - x) = \frac{3}{2}$, т. е. $y = x + \frac{3}{2}$.

3. Первая производная y' удовлетворяет неравенствам

$$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}}(2x-1) \quad \begin{cases} < 0, & \text{если } x < \frac{1}{2}; \\ > 0, & \text{если } x > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

следовательно, функция убывает при $0 < x < \frac{1}{2}$ и возрастает при $x > \frac{1}{2}$, а при $x = \frac{1}{2}$ имеет минимум, равный $\frac{3}{2}\sqrt{3} \approx 2{,}60$.

4. Поскольку

$$y'' = \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}(1+x)^{-\frac{1}{2}} > 0 \quad (0 < x < +\infty),$$

то график функции выпуклый вниз.

5. График представлен на рис. 24. ►

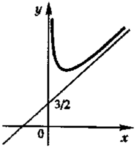


Рис. 24

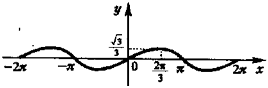


Рис. 25

172. $y = \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$.

◄ 1. Функция определена и непрерывна при всех x; периодична с периодом 2π; имеет центр симметрии — начало координат; $y = 0$ при $x = k\pi$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$. Очевидно, что $\operatorname{sgn} y = \operatorname{sgn} \sin x$.

2. Асимптот нет. Принимая во внимание периодичность, дальнейшее исследование проводим на сегменте $[0, 2\pi]$.

3. По знакам первой производной

$$y' = \frac{1 + 2\cos x}{(2 + \cos x)^2} \quad \begin{cases} > 0, & \text{если } 0 \leqslant x < \frac{2\pi}{3}; \\ < 0, & \text{если } \frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3}; \\ > 0, & \text{если } \frac{4\pi}{3} < x \leqslant 2\pi, \end{cases}$$

заключаем, что при $0 \leqslant x < \frac{2\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3} < x \leqslant 2\pi$ функция возрастает, при $\frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3}$ - убывает, а при $x_1 = \frac{2\pi}{3}$ и $x_2 = \frac{4\pi}{3}$ имеет соответственно максимум и минимум, равные $\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}58$ и $-\frac{1}{\sqrt{3}} \approx -0{,}58$.

4. Поскольку

$$y'' = \frac{2\sin x(\cos x - 1)}{(2 + \cos x)^2} \quad \begin{cases} < 0, & \text{если } 0 < x < \pi; \\ > 0, & \text{если } \pi < x < 2\pi, \end{cases}$$

то при $0 < x < \pi$ график выпуклый вверх, при $\pi < x < 2\pi$ — вниз; причем $x_1 = \pi$, $y_1 = 0$ — точка перегиба.

5. График изображен на рис. 25 ►

173. $y = 2^{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}$.

◀ 1. Функция существует, непрерывна и положительна при всех $x > 1$ и при $x < -1$; причем $y > 1$ при этих значениях x; график симметричен относительно оси Oy; $y(-1-0) = y(1+0) = 2^{\sqrt{2}}$.

2. Поскольку $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = 1$, то $y = 1$ — асимптота при $x \to \infty$.

3. Имеем

$$y' = xy\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)\ln 2 \quad \begin{cases} > 0, & \text{если } x < -1; \\ < 0, & \text{если } x > 1, \end{cases}$$

следовательно, функция при $x < -1$ возрастает, при $x > 1$ — убывает, а в точках $x = \pm 1$ имеет краевой максимум, равный $2^{\sqrt{2}}$ (функция $f(x)$, $a \leqslant x < \alpha$ ($\beta < x \leqslant b$) имеет в точке a (b) краевой максимум, если существует полуокрестность $]a, \delta[\subset [a, \alpha[$ ($]\delta, \beta[\subset]\beta, b]$) такая, что $f(a) > f(x)$ ($f(b) > f(x)$) для всех x из этой полуокрестности. Аналогично определяется краевой минимум).

4. Из очевидного неравенства

$$y'' = y\ln 2\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + x^2\ln 2\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)^2 + x^2\left(\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^3}} - \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\right)\right) >$$

$$> y\ln 2\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{x^2}{\sqrt{(x^2-1)^3}} - \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\right) =$$

$$= y\left(\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} + \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^3}}\right)\ln 2 > 0$$

следует, что график выпуклый вниз.

5. График изображен на рис. 26. ▶

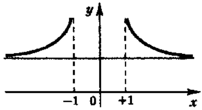


Рис. 26

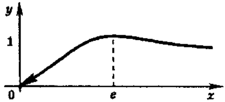


Рис. 27

174. $y = x^{\frac{1}{x}}$.

◀ 1. Функция определена, непрерывна (как суперпозиция элементарных функций $y = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln x}$) и положительна при $x > 0$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = 1$, поэтому $y = 1$ — асимптота при $x \to +\infty$.

3. Из неравенств

$$y' = \frac{y}{x^2}(1 - \ln x) \quad \begin{cases} > 0, & \text{если } 0 < x < e; \\ < 0, & \text{если } e < x < +\infty, \end{cases}$$

вытекает, что при $0 < x < e$ функция возрастает, при $e < x < +\infty$ — убывает, а при $x = e$ имеет максимум, равный $e^{\frac{1}{e}}$; кроме того, $y(+0) = 0$.

4. Исследование точек перегиба и направления выпуклости опускаем.

5. График изображен на рис. 27. ▶

175. $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

◀ 1. Функция определена при $x > -1$; $x \neq 0$; положительна и непрерывна в этой области. Поскольку $\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, то $x = 0$ — точка устранимого разрыва.

2. Из соотношений $\lim\limits_{x \to -1+0} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = 1$ вытекает, что $x = -1$ — асимптота графика функции при $x \to -1+0$, а $y = 1$ — при $x \to +\infty$.

3. Производная

$$y' = y\left(\frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}\right); \quad -1 < x < 0, \quad 0 < x < +\infty$$

отрицательна. Действительно, полагая в неравенстве примера 90, г) $\frac{a-b}{b} = x$, имеем неравенство

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \quad (x > 0),$$

которое справедливо и при $-1 < x < 0$. Пользуясь этим неравенством, получаем

$$y' = y\left(\frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}\right) < y\left(\frac{1}{x(1+x)} - \frac{x}{x^2+x^3}\right) = 0.$$

Таким образом, функция убывает при всех x из области определения.

4. Покажем, что вторая производная

$$y'' = y\left(\left(\frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}\right)^2 + \frac{1}{x^3}\left(2\ln(1+x) - \frac{2x+3x^2}{(1+x)^2}\right)\right)$$

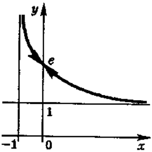


Рис. 28

положительна. С этой целью рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = 2\ln(1+x) - \frac{2x+3x^2}{(1+x)^2}.$$

Поскольку $\varphi'(x) = \frac{2x^2}{(1+x)^3} > 0$; $-1 < x < +\infty$ и $\varphi(0) = 0$, то $\varphi(x) < 0$, если $-1 < x < 0$ и $\varphi(x) > 0$, если $0 < x < +\infty$. Тогда $\frac{1}{x^3}\varphi(x) > 0$ при $-1 < x < 0$, $0 < x < +\infty$; при этих же значениях x производная $y'' > 0$. Поэтому график функции выпуклый вниз.

5. Исходя из этих данных, строим график (рис. 28). ▶

176. $y = x\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad (x > 0).$

◀ 1. Функция определена, непрерывна и положительна при всех $x > 0$; $y(+0) = \lim\limits_{x \to +0} x \exp\left\{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right\} = 0$.

2. Имеется наклонная асимптота $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e;$$

$$b = \lim_{x \to +\infty}(y - ex) = \lim_{x \to +\infty} x\left(\exp\left\{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right\} - e\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x\left(\exp\left\{x\left(\frac{1}{x} - tfrac12x^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right\} - e\right) = \lim_{x \to +\infty} e\left(-\frac{1}{2} + o(1)\right) = -\frac{e}{2}.$$

3. Имеем

$$y' = y\left(\frac{1}{x(1+x)} + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) > 0.$$

Отсюда следует, что функция возрастает при $x > 0$.

4. Вторая производная

$$y'' = y\left(\frac{2}{x(1+x)}\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \ln^2\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{x+3}{x(1+x)^2}\right)$$

положительна. Чтобы в этом убедиться, введем новую переменную $t = \frac{1}{x}$ и применим теорему примера 104, полагая там

$$\varphi(t) = \left((1+t)\ln(1+t) + t^2\right)^2; \quad \psi(t) = t^4 + 3t^3 + t^2; \quad t_0 = 0, \quad k = 4.$$

Тогда все условия теоремы 104 будут выполнены. Следовательно, $y'' > 0$ при $x > 0$ и график функции при этих значениях выпуклый вниз.

5. График функции изображен на рис. 29. ▶

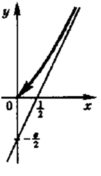


Рис. 29

177. $y = \dfrac{e^{\frac{1}{1-x^2}}}{1+x^2}$.

◀ 1. Функция определена, непрерывна и положительна при всех значениях x, за исключением точек $x = \pm 1$, в которых функция терпит разрыв, причем

$$y(-1-0) = 0; \quad y(-1+0) = +\infty;$$

$$y(1-0) = +\infty; \quad y(1+0) = 0.$$

График функции симметричен относительно оси Oy.

2. Имеются асимптоты $x = -1$ при $x \to -1+0$ и $x = 1$ при $x \to 1-0$; $y = 0$ при $x \to \infty$.

3. Находим производную

$$y' = 2x^3 e^{\frac{1}{1-x^2}} \frac{3-x^2}{(1+x^2)^2 (1-x^2)^2}.$$

Поскольку $y' > 0$ при $-\infty < x < -\sqrt{3}$; $0 < x < 1$; $1 < x < \sqrt{3}$, то функция при этих значениях x возрастает; далее, $y' < 0$ при $-\sqrt{3} < x < -1$; $-1 < x < 0$; $\sqrt{3} < x < +\infty$, следовательно, в этих интервалах функция убывает; в точке $x = 0$ имеется минимум, равный e, а в точках $x = \sqrt{3}$, $x = -\sqrt{3}$ достигается максимум, равный $\frac{1}{4\sqrt{e}} \approx 0{,}15$.

4. Вычисляя вторую производную

$$y'' = 2y \frac{2x^6 (3-x^2)^2 + x^2 (1-x^2)(9+x^2+7x^4-x^6)}{(1-x^2)^4 (1+x^2)^2},$$

убеждаемся, что $y'' > 0$ при $|x| < 1$. Далее, $y''(\sqrt{1{,}1}) > 0$; $y''(\sqrt{3}) < 0$ и $y''(x) \to +0$ при $x \to +\infty$. Следовательно, в каждом из интервалов $]1, \sqrt{3}[$, $]\sqrt{3}, +\infty[$, а в силу четности функции и в каждом из интервалов $]-\infty, -\sqrt{3}[$, $]-\sqrt{3}, -1[$ имеется по меньшей мере по одной точке перегиба.

5. График изображен на рис. 30. ▶

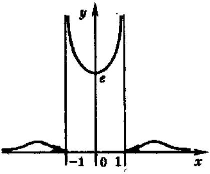


Рис. 30

Построить кривые, заданные в параметрической форме:

178. $x = 2t - t^2, \quad y = 3t - t^3$.

◀ 1. Функции $x(t)$ и $y(t)$ определены и непрерывны при $-\infty < t < +\infty$; причем при этих значениях t : $-\infty < x \leqslant 1$; $-\infty < y < +\infty$.

Следовательно, функция $y = y(x)$ (как функция переменного x) определена при $-\infty < x \leqslant 1$.

2. Поскольку $x(t) \to -\infty$, $y(t) \to \mp\infty$, $\frac{y(t)}{x(t)} \to \pm\infty$ при $t \to \pm\infty$, то график функции асимптот не имеет.

3. Производная

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}\frac{1-t^2}{1-t}$$

при $t_1 = -1$ ($x_1 = -3$) обращается в нуль, а при $t_2 = 1$ ($x_2 = 1$) имеет устранимый разрыв, причем

$$\lim_{t \to 1} \frac{dy}{dx} = 3.$$

4. Вторая производная

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{4}\frac{(1-t^2)^2}{(1-t)^3}$$

имеет разрыв в точке $t = 1$. Заполним таблицу:

t	$-\infty < t < -1$	$-1 < t < 1$	$1 < t < +\infty$
x	$-\infty < x < -3$	$-3 < x < 1$	$-\infty < x < 1$
y	$-2 < y < +\infty$	$-2 < y < 2$	$-\infty < y < 2$
$\frac{dy}{dx}$	$\frac{dy}{dx} < 0$	$\frac{dy}{dx} > 0$	$\frac{dy}{dx} > 0$
$\frac{d^2y}{dx^2}$	$\frac{d^2y}{dx^2} > 0$		$\frac{d^2y}{dx^2} < 0$

Из таблицы следует, что при $-\infty < x < -3$ функция $y(x)$ убывает; при $-3 < x < 1$ — возрастает; при $x = -3$ имеет минимум, равный -2, а при $x = 1$ — максимум, равный 2.

Если x возрастает от $-\infty$ до 1, то график функции $y = y(x)$ сохраняет выпуклость, направленную вниз; если x убывает от 1 до $-\infty$, то выпуклость направлена вверх; $(1, 2)$ — точка перегиба.

5. Пользуясь полученными данными, строим график (рис. 31). ►

179. $x = \dfrac{t^2}{t-1}, \quad y = \dfrac{t}{t^2-1}.$

◄ Функция $x(t)$ определена и непрерывна при $-\infty < t < 1$; $1 < t < +\infty$, причем $x = 1$ — вертикальная асимптота при $t \to 1$. Из равенства $x(t) = t + 1 + \frac{1}{t-1}$ следует, что $x = t + 1$ — наклонная асимптота. Находим производную $x'(t) = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2}$. Очевидно, что на интервалах $]-\infty, 0[$, $]2, +\infty[$ функция $x(t)$ возрастает, а на интервалах $]0, 1[$, $]1, 2[$ — убывает; $x_{\max} = 0$ при $t = 0$; $x_{\min} = 4$ при $t = 2$.

График функции $x(t)$ изображен на рис. 32.

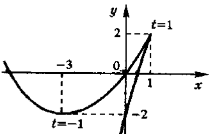


Рис. 31

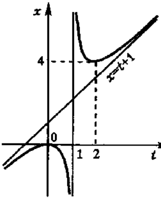


Рис. 32

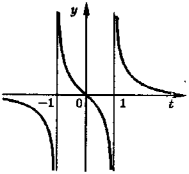


Рис. 33

Функция $y(t)$ определена и непрерывна при всех значениях t, кроме $t = \pm 1$; причем $t = -1$ и $t = 1$ — асимптоты. Поскольку $y'(t) = -\frac{t^2+1}{(t^2-1)^2} < 0$, то функция $y(t)$ убывает при всех t из области определения (рис. 33).

Из этих исследований вытекает, что функция $y = y(x)$ определена при $-\infty < x \leqslant 0$; $4 \leqslant x < +\infty$. Поскольку $x(t) \to \pm\infty$, $y(t) \to +0$ при $t \to \pm\infty$; $x(t) \to -\frac{1}{2}$, $y(t) \to \pm\infty$ при $t \to -1 \pm 0$, то $y = 0$ и $x = -\frac{1}{2}$ — асимптоты графика функции $y = y(x)$. Кроме того, $\frac{y}{x} \to \frac{1}{2}$, $y - \frac{x}{2} \to -\frac{3}{4}$ при $t \to 1$, следовательно, $y = \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$ — наклонная асимптота.

Находим производные

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{t^2+1}{t(t-2)(t+1)^2}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2(t-1)^3\left(t^3+3t+1\right)}{t^3(t-2)^3(t+1)^3};$$

откуда получаем, что $y''_{x^2} = 0$ при $t_0 \approx -0{,}32$; $t_1 = 1$; причем $x(t_0) \approx -0{,}07$; $y(t_0) \approx 0{,}37$. Сначала построим графики функции на отдельных интервалах.

Если $-\infty < t < -1$, то $-\infty < x < -\frac{1}{2}$; $-\infty < y < 0$; $y'_x < 0$; $y''_{x^2} < 0$ (рис. 34). Если $-1 < t \leqslant 0$, то $-\frac{1}{2} < x \leqslant 0$; $0 \leqslant y < +\infty$. Вторая производная $y''_{x^2} > 0$ при $-1 < t < t_0$

и $y''_{x^2} < 0$ при $t_0 < t < 0$; следовательно, при $t = t_0$ получаем точку перегиба (x_0, y_0), где $x_0 \approx -0{,}07$; $y_0 \approx 0{,}37$ (рис. 35).

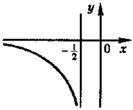


Рис. 34

Рис. 35

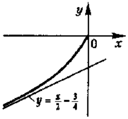


Рис. 36

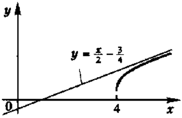


Рис. 37

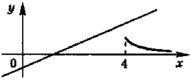


Рис. 38

Пусть $0 \leqslant t < 1$. Тогда $-\infty < x \leqslant 0$, $-\infty < y \leqslant 0$, $y'_x > 0$, $y''_{x^2} > 0$ (рис. 36). Если $1 < t \leqslant 2$, то $4 \leqslant x < +\infty$, $\frac{2}{3} \leqslant y < +\infty$, $y'_x > 0$, $y''_{x^2} < 0$ (рис. 37). Наконец, если $2 \leqslant t < +\infty$, то $x \geqslant 4$; $0 < y \leqslant \frac{2}{3}$; $y'_x < 0$; $y''_{x^2} > 0$ (рис. 38).

Окончательный график изображен на рис. 39. ▶

180. $x = t + e^{-t}, \quad y = 2t + e^{-2t}$.

◀ Функции $x(t)$ и $y(t)$ определены и непрерывны при всех t. Из определения асимптоты следует, что $x = t$, $y = 2t$ — асимптоты при $t \to +\infty$ соответственно графиков функций $x(t)$ и $y(t)$. Имеем $x'(t) = 1 - e^{-t}$; $x'(0) = 0$; $x''(t) = e^{-t} > 0$ при всех t; $y'(t) = 2\left(1 - e^{-2t}\right)$, $y'(0) = 0$; $y''(t) = 4e^{-2t} > 0$ при всех t. Таким образом, $x_{\min} = 1$ при $t = 0$; $y_{\min} = 1$ при $t = 0$. Графики функций $x(t)$ и $y(t)$ выпуклы вниз (рис. 40, *а*, *б*).

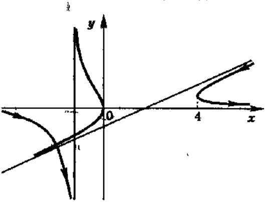
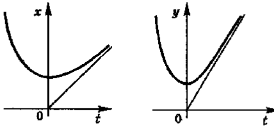


Рис. 39



а *б*

Рис. 40

Если $-\infty < t < 0$, то $1 < x < +\infty$, $1 < y < +\infty$, $y'_x = 2\left(1 + e^{-t}\right) > 0$; $y''_{x^2} = -2\left(e^t - 1\right) > 0$. Если же $0 < t < +\infty$, то $1 < x < +\infty$; $1 < y < +\infty$; $y'_x > 0$; $y''_{x^2} < 0$.

Следовательно, функция $y = y(x)$ возрастает, ее график выпуклый вниз при $t < 0$ и вверх — при $t > 0$.

В точке $x = 1$ функция $y(x)$ имеет минимум, равный 1.

Далее, $\frac{y}{x} \to 2$; $y - 2x \to 0$ при $t \to +\infty$, поэтому прямая $y = 2x$ является асимптотой графика функции при $t \to +\infty$ (рис. 41). ►

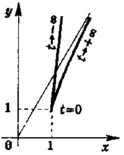


Рис. 41

181. $x = \dfrac{a}{\cos^3 t}, \quad y = a \operatorname{tg}^3 t \quad (a > 0).$

◄ Так как функции $x(t)$ и $y(t)$ известны, то относительно функции $y(x)$ выясним следующие вопросы: симметрию, экстремум, участки и характер выпуклости графика функции и существование асимптот.

Поскольку $x(t) = x(-t)$; $y(t) = -y(-t)$, то график функции $y = y(x)$ симметричен относительно оси Ox, а так как $x(t) = -x(\pi + t)$; $y(t) = y(\pi + t)$ и $x\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -x\left(\frac{3\pi}{2} + t\right)$; $y\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = y\left(\frac{3\pi}{2} + t\right)$ $\left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$, то график функции $y(x)$ симметричен относительно оси Oy.

Следовательно, для построения всего графика достаточно знать график функции $y(x)$ при $x > 0$ и $y \geqslant 0$, т. е. при $0 \leqslant t < \frac{\pi}{2}$.

Производная $y'_x = \sin t > 0$ при $0 < t < \frac{\pi}{2}$, следовательно, функция $y = y(x)$ возрастает на этом промежутке, причем $x \to +\infty$; $y \to +\infty$ при $t \to \frac{\pi}{2} - 0$.

Вторая производная $y''_{x^2} = \frac{1}{3a} \cos^5 t \sin^{-1} t > 0 \quad \left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$, откуда следует, что при $0 < t < \frac{\pi}{2}$ график функции $y(x)$ выпуклый вниз.

Так как $x \to +\infty$ только при $t \to \frac{\pi}{2} - 0$ и $y \to +\infty$ только при $t \to \frac{\pi}{2} - 0$, то вертикальных асимптот нет.

Для выяснения вопроса о существовании наклонной асимптоты $y = kx + b$ рассмотрим пределы

$$k = \lim_{t \to \frac{\pi}{2} - 0} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \to \frac{\pi}{2} - 0} \frac{\operatorname{tg}^3 t}{\cos^{-3} t} = 1,$$

$$b = \lim_{t \to \frac{\pi}{2} - 0} [y(t) - x(t)] = a \lim_{t \to \frac{\pi}{2} - 0} \left(\operatorname{tg}^3 t - \frac{1}{\cos^3 t}\right) = -\infty.$$

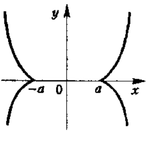


Рис. 42

Следовательно, асимптот нет.

График кривой при всех t $(\cos t \neq 0)$ изображен на рис. 42. ►

Представив уравнения кривых в параметрической форме, построить эти кривые, если:

182. $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$.

◄ Очевидно, что график функции симметричен относительно осей координат. Представим кривую при $x > 0$ и $y \geqslant 0$ в параметрическом виде, положив $y = tx$ $(t \geqslant 0)$:

$$x = \sqrt{\frac{1 + t^2}{1 + t^4}}, \quad y = t\sqrt{\frac{1 + t^2}{1 + t^4}}.$$

Вычисляя производные x' и y', выясняем вопрос об экстремумах функций $x(t)$ и $y(t)$.

$$x'(t) = \frac{\left(1 - 2t^2 - t^4\right) t}{x(t)\left(1 + t^4\right)^2}, \quad y'(t) = \frac{1 + 2t^2 - t^4}{x(t)\left(1 + t^4\right)^2}.$$

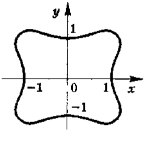


Рис. 43

Отсюда следует, что при $t = 0$ достигается минимум функции $x(t)$, равный 1 $(y = 0)$; при $t = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$ достигается максимум функции $x(t)$, равный $\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$ $\left(y = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, при $t = \sqrt{\sqrt{2} + 1}$ достигается максимум функции $y(t)$, равный $\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$ $\left(x = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Нетрудно проверить, что в точках пересечения кривой с координатными осями существует касательная к кривой (рис. 43). ►

183. $x^2 y^2 = x^3 - y^3$.

◄ Полагая $y = tx$, получим

$$x = \frac{1}{t^2} - t, \quad y = \frac{1}{t} - t^2 \quad (t \neq 0).$$

Если параметр t изменяется в интервалах $]-\infty, 0[$ и $]0, +\infty[$, то переменная x может принимать все значения от $-\infty$ до $+\infty$; следовательно, функция $y = y(x)$ определена при всех значениях x.

Из параметрического представления кривой получаем равенства

$$y = -x^2 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^4}, \quad y^2 = x - t + t^2,$$

из которых непосредственно вытекают асимптотические соотношения: $y^2 \sim x$ при $t \to \pm 0$ (при этом $x \to +\infty$, $y \to \pm\infty$); $y \sim x$ при $t \to \pm\infty$ (при этом $x \to \pm\infty$, $y \to -\infty$).

Полагая в исходном равенстве $x - y = u$, $x + y = v$, получим равенство $\left(v^2 - u^2\right)^2 = 12v^2u + 4u^3$, которое указывает на симметрию графика кривой относительно оси $v = 0$, т. е. относительно прямой $x + y = 0$.

Вычисляя производные

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t\left(1 + 2t^3\right)}{2 + t^3}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2t^3\left(t^6 + 7t^3 + 1\right)}{\left(2 + t^3\right)^3} \quad (t \neq 0),$$

находим, что при $t_0 = -\sqrt[3]{2} \approx -1{,}26$ $\left(x_0 = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2} \approx 1{,}89;\ y_0 = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{4} \approx -2{,}38\right)$ обе производные y'_x и y''_{x^2} не существуют, а $y'_x = 0$ при $t_2 = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \approx -0{,}79$ $\left(x_2 = \frac{3}{2}\sqrt[3]{4} \approx 2{,}38;\ y_2 = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{2} \approx -1{,}89\right)$.

Далее, $y''_{x^2} = 0$ при $t_1 = -\sqrt[3]{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}} \approx -1{,}90$ $(x_1 \approx 2{,}18;\ y_1 \approx -4{,}14)$ и при $t_3 = -\sqrt[3]{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}} \approx -0{,}53$ $(x_3 \approx 4{,}14;\ y_3 \approx -2{,}18)$.

Пользуясь этими данными и таблицей

t	$-\infty < t < t_1$	$t_1 < t < t_0$	$t_0 < t < t_2$	$t_2 < t < t_3$	$t_3 < t < 0$	$0 < t < +\infty$
x	$x_1 < x < +\infty$	$x_0 < x < x_1$	$x_0 < x < x_2$	$x_2 < x < x_3$	$x_3 < x < +\infty$	$-\infty < x < +\infty$
y	$-\infty < y < y_1$	$y_1 < y < y_0$	$y_0 < y < y_2$	$y_3 < y < y_2$	$-\infty < y < y_3$	$-\infty < y < +\infty$
y'_x	$y'_x < 0$	$y'_x < 0$	$y'_x > 0$	$y'_x < 0$	$y'_x < 0$	$y'_x > 0$
y''_{x^2}	$y''_{x^2} < 0$	$y''_{x^2} > 0$	$y''_{x^2} < 0$	$y''_{x^2} < 0$	$y''_{x^2} > 0$	$y''_{x^2} < 0$

строим график функции $y = y(x)$ (рис. 44). ►

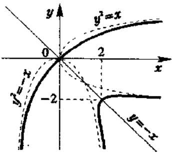


Рис. 44

184. Построить график кривой $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{ch}^2 y = 1$.

◄ График кривой симметричен относительно координатных осей, так как при замене x на $-x$ и y на $-y$ уравнение кривой вида не меняет.

Если $x > 0$; $y > 0$, то уравнение ветви кривой примет вид $\operatorname{sh} x = \operatorname{ch} y$, откуда $x = \ln\left(\operatorname{ch} y + \sqrt{1 + \operatorname{ch}^2 y}\right)$.

Имеется асимптота $x = ky + b$, где

$$k = \lim_{y \to +\infty} \frac{x(y)}{y} = 1; \quad b = \lim_{y \to +\infty} (x(y) - y) = 0.$$

Найдем производную

$$x'_y = \frac{\operatorname{sh} y}{\sqrt{1 + \operatorname{ch}^2 y}},$$

откуда следует, что функция $x = x(y)$ возрастает при $y > 0$, а в точке $y = 0$ достигается минимум, равный $\ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$.

Далее,

$$x''_{y^2} = \frac{2 \operatorname{ch} y}{\left(1 + \operatorname{ch}^2 y\right)^{\frac{3}{2}}} > 0,$$

откуда вытекает, что кривая выпукла вниз при $y > 0$. Принимая во внимание симметрию кривой относительно осей координат, строим график функции (рис. 45). ►

Построить графики функций, заданных в полярной системе координат (φ, ρ) $(\rho \geqslant 0)$:

185. $\rho = a\dfrac{\operatorname{th}\varphi}{\varphi - 1}$, где $\varphi > 1$ $(a > 0)$.

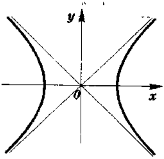


Рис. 45

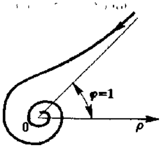


Рис. 46

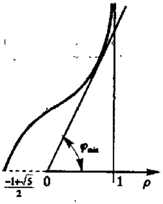


Рис. 47

◀ Функция $\rho(\varphi)$ непрерывна как элементарная; $\lim\limits_{\varphi\to 1+0} \rho(\varphi) = +\infty$, т. е. имеется асимптота $\varphi = 1$; $\lim\limits_{\varphi\to+\infty} \rho(\varphi) = 0$, т. е. кривая асимптотически входит в полюс по спирали.

Возьмем производную

$$\rho'_\varphi = a\left(\frac{1}{\operatorname{ch}^2\varphi\cdot(\varphi-1)} - \frac{\operatorname{th}\varphi}{(\varphi-1)^2}\right);$$

так как $\varphi - 1 < \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2\varphi$ при $\varphi > 1$, то $\rho'_\varphi < 0$; следовательно, функция $\rho(\varphi)$ убывает (рис. 46). ▶

186. $\varphi = \arccos\dfrac{\rho - 1}{\rho^2}$.

◀ Область существования функции определяется неравенством

$$|\rho - 1| \leqslant \rho^2,$$

откуда следует, что

$$\rho_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \leqslant \rho < +\infty.$$

Предельные значения φ в граничных точках:

$$\lim_{\rho\to\rho_1+0} \varphi(\rho) = \pi; \quad \lim_{\rho\to+\infty} \varphi(\rho) = \frac{\pi}{2}.$$

Так как $\rho - 1 \neq \rho^2$, то функция $\varphi(\rho)$ нулей не имеет и положительна.

Производная этой функции

$$\varphi'_\rho = \frac{\rho - 2}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho^2}\right)^2}}$$

показывает, что в точке $\rho = 2$ достигается минимум функции, равный $\arccos\frac{1}{4}$. В точке $\rho = \rho_1$ производная не существует; функция в этой точке принимает краевой максимум, равный π. При $\rho_1 < \rho < 2$ функция убывает, а при $\rho > 2$ — возрастает.

Как уже было отмечено (см. предельные значения φ в граничных точках), имеется вертикальная асимптота.

Найдем ее расстояние a от полюса. Имеем

$$a = \lim_{\rho\to\infty} \rho\cos\varphi(\rho) = \lim_{\rho\to\infty} \rho\,\frac{\rho - 1}{\rho^2} = 1.$$

График изображен на рис 47. ▶

Построить графики семейства кривых (a — переменный параметр):

187. $y = x \pm \sqrt{a(1-x^2)}$.

◀ Рассмотрим два случая: а) $a > 0$ и б) $a < 0$.

а) $a > 0$. Область существования функции: $1 - x^2 \geqslant 0$, т. е. $|x| \leqslant 1$. Нули функции: $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{a}{1+a}}$; при $-\sqrt{\frac{a}{1+a}} < x < 1$ функция $y = x + \sqrt{a(1-x^2)}$ положительна, а при $-1 < x < \sqrt{\frac{a}{1+a}}$ отрицательна; при $-1 < x < \sqrt{\frac{a}{1+a}}$ функция $y = x - \sqrt{a(1-x^2)}$ отрицательна, а при $\sqrt{\frac{a}{1+a}} < x < 1$ — положительна

Находим производную

$$y' = 1 \pm \frac{ax}{\sqrt{a(1-x^2)}}.$$

Отсюда следует, что функция $y = x + \sqrt{a(1-x^2)}$ достигает при $x = \sqrt{\frac{1}{a+1}}$ максимума, равного $\sqrt{a+1}$, а функция $y = x - \sqrt{a(1-x^2)}$ достигает при $x = -\sqrt{\frac{1}{a+1}}$ минимума, равного $-\sqrt{a+1}$.

Точки $x = \pm 1$ являются точками "стыка" этих ветвей.

Из выражения для второй производной

$$y'' = \pm\frac{a}{(1-x^2)\sqrt{a(1-x^2)}}$$

вытекает, что график первой ветви функции выпуклый вверх, а второй — вниз (рис. 48)

При изменении a от 0 до $+\infty$ получим семейство эллипсов, проходящих через точки $(-1, 1)$ и $(1, 1)$ (рис. 49);

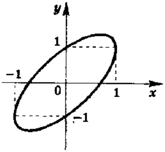


Рис. 48

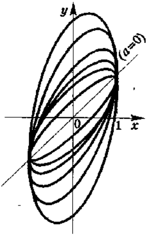


Рис. 49

б) $a < 0$. Область определения функции $-|x| > 1$. Асимптоты $y = k_1 x + b$; $y = k_2 x + b$, где $k_{1,2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x \pm \sqrt{-a(x^2-1)}}{x} = 1 \pm \sqrt{-a}$; $b = 0$.

График изображен на рис. 50. ▶

188. $y = xe^{-\frac{x}{a}}$.

◀ Рассмотрим два случая: $a > 0$ и $a < 0$.

1. $a > 0$. Функция положительна при $x > 0$ и отрицательна при $x < 0$. Находим производную

$$y' = e^{-\frac{x}{a}}\left(1 - \frac{x}{a}\right).$$

Отсюда следует, что при $x = a$ достигается максимум, равный $\frac{a}{e}$. Далее,

$$y'' = e^{-\frac{x}{a}} \left(\frac{x}{a^2} - \frac{2}{a} \right),$$

откуда следует, что в точке $x = 2a$ имеется перегиб функции y, причем при $x < 2a$ график функции выпуклый вверх, а при $x > 2a$ — вниз. Так как $xe^{-\frac{x}{a}} \to 0$ при $x \to +\infty$, то прямая $y = 0$ является асимптотой графика функции при $x \to +\infty$.

2. Если $a < 0$, то, как легко видеть, этот случай сводится к предыдущему, если в нем заменить y на $-y$, а x на $-x$.

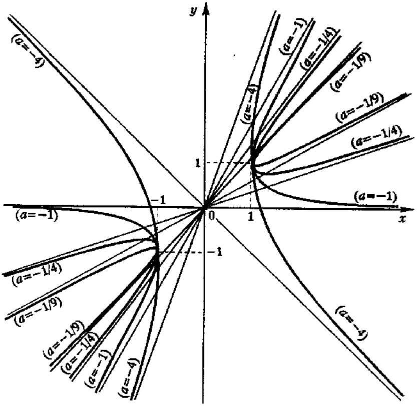


Рис. 50

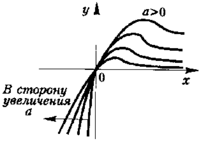


Рис. 51

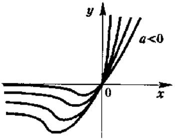


Рис. 52

График семейства изображен на рис. 51, 52. ►

Упражнения для самостоятельной работы

Построить графики следующих функций:

404. а) $f(x) = \sup\{\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x\}$; б) $f(x) = \inf\{\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x\}$.

405. $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$. **406.** $x = a\cos t$, $y = a\cos 2t$, $z = \cos 3t$.

Найти геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют следующим уравнениям:

407. $\left(1 - x^2 - |1 - x^2|\right)^2 + y^2 = 0.$

408. $\left(2 - x^2 - |1 - x^2| - |1 - y| - |y|\right)\left(2 - y^2 - |1 - y^2| - |1 - x| - |x|\right) = 0.$

409. $x^2 + y^2 + 9 - |x^2 + y^2 - 1| - |2 - y| - |y + 3| - |x| - |5 - x| = 0$

410. $2 - y - |1 - x - y| - |1 + x - y| - |y| = 0.$

§ 12. Задачи на максимум и минимум функции

189. Доказать, что если функция $f(x)$ неотрицательна, то функция $F(x) = cf^2(x)$ $(c > 0)$ имеет в точности те же точки экстремума, что и функция $f(x)$.

◀ Для определенности предположим, что в точке x_0 функция $f(x)$ достигает максимума. Тогда существует такое $\delta > 0$, что для всех x из окрестности $0 < |x - x_0| < \delta$ справедливо неравенство $f(x) < f(x_0)$

Так как $f(x) \geqslant 0$ и $c > 0$, то из последнего неравенства следует:

$$cf^2(x) < cf^2(x_0), \text{ т. е. } F(x) < F(x_0).$$

Последнее означает, что в точке x_0 функция $F(x)$ достигает максимума. В случае минимума поступаем аналогично. ▶

190. Доказать, что если функция $\varphi(x)$ монотонно возрастает в строгом смысле при $-\infty < x < +\infty$, то функции $f(x)$ и $\varphi(f(x))$ имеют одни и те же точки экстремума.

◀ Пусть в точке x_0 достигается максимум функции $f(x)$. Тогда при всех x из окрестности $0 < |x - x_0| < \delta$ справедливо неравенство

$$f(x) < f(x_0) \equiv f_0.$$

Так как функция $\varphi(x)$ монотонно возрастает в строгом смысле, то из неравенства $f < f_0$ следует неравенство

$$\varphi(f) < \varphi(f_0),$$

что и требовалось доказать. Аналогично, предположив, что в точке x_0 функция $\varphi(f(x))$ достигает максимума, придем к выводу, что функция $f(x)$ также достигает максимума. ▶

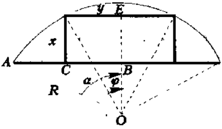


Рис. 53

191. В каких системах логарифмов существуют числа, равные своему логарифму?

◀ Пусть y — основание искомой системы логарифмов. Тогда согласно условию имеем

$$\log_y x = x \quad (x > 0,\ y > 0,\ y \neq 1).$$

откуда $y = x^{\frac{1}{x}}$.

Функция y уже исследована нами в примере 174 Из него следует, в частности, что y не превышает $y_{\max} = e^{\frac{1}{e}}$, т. е. во всех системах с основанием y $(0 < y < e^{\frac{1}{e}},\ y \neq 1)$ такие числа существуют. ▶

192. В данный круговой сегмент, не превышающий полукруга, вписать прямоугольник с наибольшей площадью.

◀ Пусть высота прямоугольника x, ширина $2y$.

Если обозначить через 2α дугу сегмента, а через 2φ — дугу, стягиваемую стороной прямоугольника, то получаем, что $y = R\sin\varphi$; $x = OE - OB = R(\cos\varphi - \cos\alpha)$ (рис. 53). Следовательно, площадь прямоугольника равна

$$S = 2xy = 2R^2 \sin\varphi(\cos\varphi - \cos\alpha).$$

Приравнивая нулю производную

$$S'(\varphi) = 2R^2\left(2\cos^2\varphi - \cos\varphi\cos\alpha - 1\right) = 0,$$

находим, что

$$\cos\varphi_1 = \frac{\cos\alpha + \sqrt{\cos^2\alpha + 8}}{4}, \quad \cos\varphi_2 = \frac{\cos\alpha - \sqrt{\cos^2\alpha + 8}}{4}.$$

Дуга φ_2 не подходит по смыслу задачи.

Так как $S'(\varphi_1 - \varepsilon) > 0$; $S'(\varphi_1 + \varepsilon) < 0$ ($\varepsilon > 0$ — достаточно малое), то при

$$\cos\varphi_1 = \frac{\cos\alpha + \sqrt{\cos^2\alpha + 8}}{4}$$

функция $S(\varphi)$ имеет максимум. ▶

193. В эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вписать прямоугольник со сторонами, параллельными осям эллипса, площадь которого наибольшая.

◀ Пусть x и y — длины полусторон прямоугольника. Тогда $S = 4xy$, причем x и y — кординаты точки, лежащей на эллипсе. Для упрощения следует записать параметрические уравнения эллипса:

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t.$$

Тогда $S = 2ab\sin 2t$, откуда $S_{\max} = 2ab$, при $t = \frac{\pi}{4}$, а $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{b}{\sqrt{2}}$. ▶

194. Через точку $M(x, y)$ эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ провести касательную, образующую с осями координат треугольник, площадь которого наименьшая.

◀ Уравнение касательной к эллипсу в точке с координатами (x_0, y_0) имеет вид:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1,$$

откуда следует, что касательная отсекает от координатных осей отрезки длиной $\frac{a^2}{x_0}$ и $\frac{b^2}{y_0}$.

Следовательно, площадь треугольника $S = \frac{a^2b^2}{2x_0y_0}$.

Если уравнение эллипса параметризовать, то $S = \frac{ab}{\sin 2t}$, откуда $S_{\min} = ab$ при $t = \frac{\pi}{4}$; $x_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $y_0 = \frac{b}{\sqrt{2}}$. ▶

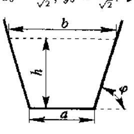


Рис. 54

195. Поперечное сечение открытого канала имеет форму равнобедренной трапеции. При каком наклоне φ боков "мокрый периметр" сечения будет наименьшим, если площадь "живого сечения" воды в канале равна S, а уровень воды равен h?

◀ "Мокрый периметр" P определяется по формуле (рис. 54):

$$P = a + \frac{2h}{\sin\varphi}. \tag{1}$$

Площадь "живого сечения" воды:

$$S = h(a + h\operatorname{ctg}\varphi). \tag{2}$$

Из формул (1) и (2) находим

$$P = \frac{S}{h} - h\operatorname{ctg}\varphi + \frac{2h}{\sin\varphi}.$$

Производная функции P, равная

$$h\left(\frac{1}{\sin^2\varphi} - \frac{2\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\right),$$

показывает, что при $\varphi = \frac{\pi}{3}$ достигается минимум функции P ▶

196. "Извилистостью" замкнутого контура, ограничивающего площадь S, называется отношение периметра этого контура к длине окружности, ограничивающей круг той же площади S.

Какова форма равнобедренной трапеции $ABCD$ ($AD \| BC$), обладающей наименьшей "извилистостью", если основание $AD = 2a$ и острый угол $BAD = \alpha$?

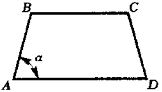


Рис. 55

◀ Пусть П — "извилистость" трапеции. Тогда, согласно определению, имеем (рис. 55):

$$\Pi = \frac{L}{2\sqrt{\pi S}},$$

где $S = \frac{BC+2a}{2} AB \sin\alpha$; $L = 2AB + BC + 2a$.

Так как

$$2a - BC = 2AB\cos\alpha, \qquad (1)$$

то, обозначая $AB = x$, получим

$$\Pi(x) = \frac{2a + x(1-\cos\alpha)}{\sqrt{\pi}\sqrt{(2a - x\cos\alpha)x\sin\alpha}}.$$

Исследуя функцию $\Pi(x)$ на экстремум, находим, что она имеет минимум при

$$x = a\sec^2\frac{\alpha}{2}.$$

Из (1) получаем $BC = 2a\,\mathrm{tg}^2\,\frac{\alpha}{2}$; так как половина высоты трапеции $r = \frac{x}{2}\sin\alpha$ равна расстоянию от точки $O(a, r)$ до стороны AB, то в найденную трапецию можно вписать окружность радиуса r. ▶

197. Какой сектор следует вырезать из круга радиуса R, чтобы из оставшейся части можно было свернуть воронку наибольшей вместимости?

◀ Если под α понимать центральный угол оставшегося сектора, то объем конуса V равен

$$\frac{R^3}{24\pi^2}\alpha^2\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}.$$

Исследование этой функции от α на экстремум показывает, что максимум ее достигается при

$$\alpha = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}. \ ▶$$

198. Два корабля плывут с постоянными скоростями u и v по прямым линиям, составляющим угол θ между собой.

Определить наименьшее расстояние между кораблями, если в некоторый момент расстояния их от точки пересечения путей были соответственно равны a и b.

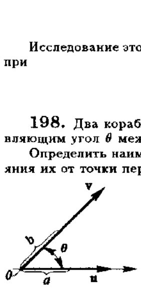


Рис. 56

◀ По теореме косинусов имеем

$$r^2 = (a+ut)^2 + (b+vt)^2 - 2(a+ut)(b+vt)$$

(рис. 56), где r — расстояние между кораблями в произвольный момент времени t.

Исследуя функцию $r^2(t)$ на экстремум, находим, что

$$r'(t_0) = 0; \quad t_0 = \frac{(bu+av)\cos\theta - au - bv}{u^2 - 2uv\cos\theta + v^2}.$$

Подставляя t_0 в $r^2(t)$, получим

$$r_{\min} = \frac{|ub - va|\sin\theta}{\sqrt{u^2 - 2uv\cos\theta + v^2}}.$$

Если u поменять на $-u$, то в силу тождеств

$$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta \text{ и } \cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$$

получим $r_{\min} = \frac{|ub+va|\sin\theta}{\sqrt{u^2-2uv\cos\theta+v^2}}$. ▶

199. Светящаяся точка находится на линии центров двух непересекающихся шаров радиусов R и r $(R > r)$ и расположена вне этих шаров.

При каком положении точки сумма площадей освещенных частей поверхностей шаров будет наибольшей?

◀ Найдем сумму площадей освещенных частей поверхностей как функцию расстояния x. Имеем (рис. 57)

$$S = 2\pi R(R - x_0) = 2\pi R^2\left(1 - \frac{R}{x}\right);$$

$$S_1 = 2\pi r^2\left(1 - \frac{r}{a - x}\right) \quad (a \geqslant r + x),$$

где a — расстояние между центрами шаров.

Исследовав функцию $S + S_1 = f$ на экстремум, находим значение x, при котором достигается максимум этой функции; при этом

$$a \geqslant r + x = r + \frac{a}{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

откуда $a \geqslant r + R\sqrt{\frac{R}{r}}$.

Если же производная $f'(x) < 0$, то максимальное значение функции $f(x)$ достигается при $x_1 = a - r$; при этом выполняется неравенство

$$a < r + R\sqrt{\frac{R}{r}}. \ ▶$$

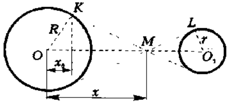


Рис. 57

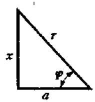


Рис. 58

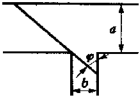


Рис. 59

200. На какой высоте над центром круглого стола радиуса a следует поместить электрическую лампочку, чтобы освещенность края стола была наибольшей?

◀ Под освещенностью I понимается величина

$$I = k\frac{\sin\varphi}{r^2},$$

где r — расстояние от источника света до точки наблюдения, $k = \text{const}$, φ — угол, изображенный на рис. 58. Имеем

$$I(x) = \frac{kx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

откуда находим высоту x_0, при которой достигается максимум функции $I(x)$: $x_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}$. ▶

201. К реке шириной a *м* построен под прямым углом канал шириной b *м*. Какой максимальной длины суда могут входить в этот канал?

◀ Длина корабля l, как следует из рис. 59, равна

$$\frac{b}{\sin\varphi} + \frac{a}{\cos\varphi}.$$

Исследовав на экстремум функцию l, получаем, что минимальное значение она принимает при

$$\varphi = \operatorname{arctg}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}.$$

Таким образом, максимально возможная длина корабля равна

$$\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \text{ м.} \ ▶$$

202. Суточные расходы при плавании судна состоят из двух частей: постоянной, равной a руб., и переменной, возрастающей пропорционально кубу скорости. При какой скорости v плавание судна будет наиболее экономичным?

◀ Предположим, что судно прошло S *км* за T суток. Тогда расходы R будут равны

$$Ta + kTv^3,$$

где k — коэффициент пропорциональности. Но так как $T = \frac{S}{v}$, то

$$R = \frac{Sa}{v} + kSv^2,$$

откуда находим скорость, при которой расходы минимальны:

$$v = \sqrt[3]{\frac{a}{2k}}. \ ▶$$

203. Груз весом P, лежащий на горизонтальной шероховатой плоскости, требуется сдвинуть с места приложенной силой. При каком наклоне этой силы к горизонту величина ее будет наименьшей, если коэффициент трения груза равен k?

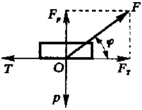


Рис. 60

◀ Проектируя приложенные к грузу силы на горизонтальное направление, из условия равновесия их получаем (рис. 60):

$$T = F_P k = (P - F\sin\varphi)k = F_T = F\cos\varphi,$$

откуда $F = \frac{kP}{k\sin\varphi + \cos\varphi}$.

Исследовав функцию $F(\varphi)$ на экстремум, находим, что при $\varphi = \operatorname{arctg} k$ величина силы F будет наименьшей. ▶

204. В чашку, имеющую форму полушара радиуса a, опущен стержень длины $l > 2a$. Найти положение равновесия стержня.

◀ Найдем потенциальную энергию П стержня относительно дна чашки. Имеем $\Pi = mgh$, где $h = \frac{l}{2}\sin\varphi + y$ — высота центра тяжести стержня относительно дна чашки (рис. 61).

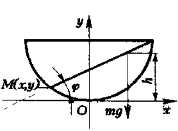


Рис. 61

Далее, так как $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a-y}{a-x} = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$, то получаем $x = -a\cos 2\varphi$.

Использовав уравнение полуокружности, находим, что

$$y = a(1 - \sin 2\varphi).$$

Итак, $\Pi = mg\left(\frac{l}{2}\sin\varphi + a(1 - \sin 2\varphi)\right)$. Поскольку стержень стремится занять положение с минимумом потенциальной энергии, то необходимо найти φ_0, при котором достигается $\Pi_{\min}$. Имеем

$$\cos\varphi_0 = \frac{l + \sqrt{l^2 + 128a^2}}{16a}.$$

Так как $\cos\varphi \leqslant 1$, то равновесие возможно только для $l \leqslant 4a$; при $l > 4a$ равновесие невозможно. ▶

Глава 3

Неопределенный интеграл

§ 1. Простейшие неопределенные интегралы

1.1. Определение неопределенного интеграла.

Определение. *Функция $F : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, называется первообразной или примитивной функции $f : X \to \mathbb{R}$, если функция F непрерывна на X и имеет производную, равную $f(x)$ во всех точках интервала X, за исключением счетной его части.*

Если функция F имеет производную, равную $f(x)$ в каждой точке интервала X, то функция F называется *точной первообразной или точной примитивной* функции f.

Совокупность всех первообразных функции f на интервале X называется *неопределенным интегралом* от функции f и обозначается символом $\int f(x)\,dx$. Если F — любая первообразная функции f на интервале X, то

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где C — произвольная постоянная.

1.2. Основные свойства неопределенного интеграла:

а) $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$; б) $\int dF(x) = F(x) + C$;

в) $\int \lambda f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx$, $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$; г) $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$.

1.3. Таблица простейших интегралов:

I. $\int dx = x + C$.

II. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$.

III. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

IV. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arcctg} x + C. \end{cases}$

V. $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$.

VI. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C. \end{cases}$

VII. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C$.

VIII. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$, $a \neq 1$; $\int e^x dx = e^x + C$.

IX. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$.

X. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.

XI. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

XII. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

XIII. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$.

XIV. $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$.

XV. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$.

XVI. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$.

1.4. Основные методы интегрирования.

а) Метод введения нового аргумента. Если $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, то $\int f(u)\,du = F(u) + C$.

б) Метод подстановки. Если $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, $x \in X$, то, полагая

$$x = \varphi(t), \quad \varphi : Y \to X,$$

где φ — непрерывная функция вместе со своей производной φ', получим

$$\int f \circ \varphi(t) \cdot \varphi'(t)\,dt = F \circ \varphi(t) + C.$$

в) Метод интегрирования по частям. Если u и v — дифференцируемые функции и для функции uv' существует первообразная, то

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

1. Доказать, что если $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, то

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, \quad a \neq 0.$$

◀ Имеем

$$f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}f(ax+b)\,d(ax+b),$$

поэтому, применяя метод введения нового аргумента, получаем

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\,d(ax+b) = \frac{1}{a}\int f(u)\,du = \frac{1}{a}F(u) + C,$$

где $u = ax+b$.

Например, пользуясь таблицей интегралов, находим:

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm 1}} = \ln\left|\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm 1}\right| + C_0 = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C, \quad C = C_0 - \ln|a|;$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C. ►$$

Применяя таблицу простейших интегралов, найти следующие интегралы:

2. $\int \frac{dx}{1+\sin x}$.

◀ Имеем

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} = -\int \frac{d\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = -\int \frac{d\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)} = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) + C,$$

$$x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. ►$$

3. $\int \frac{x^3\,dx}{x^8-2}$.

◀ Поскольку

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,$$

то, согласно примеру 1,

$$\int \frac{x^3\,dx}{x^8-2} = \frac{1}{4}\int \frac{d(x^4)}{(x^4)^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-2}{x^4+2}\right| + C. ►$$

4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

◀ Имеем при $x \neq 0$

$$\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \frac{dx}{x|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{\operatorname{sgn} x\, dx}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -\frac{d\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{|x|}\right)^2}},$$

поэтому

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = -\int \frac{d\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{|x|}\right)^2}} = -\ln\left|\frac{1}{|x|}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right| + C = -\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right| + C. \ ▶$$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

◀ Поскольку

$$\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{\operatorname{sgn} x\, dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = -\frac{d\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{|x|}\right)^2}}, \quad |x| > 1,$$

то

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\int \frac{d\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{|x|}\right)^2}} = -\arcsin\frac{1}{|x|} + C. \ ▶$$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$.

◀ Пользуясь тем, что $|x| = x\operatorname{sgn} x$, имеем

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dx}{|x|^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\operatorname{sgn} x}{2}\int\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{3}{2}} d\left(1+\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{\operatorname{sgn} x}{2}\cdot 2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

При решении на x было наложено ограничение $x \neq 0$. Однако непосредственной проверкой устанавливаем, что $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ есть первообразная функции $\frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}$ для всех $x \in \mathbb{R}$. ▶

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$.

◀ Из неравенства $x(1+x) > 0$ находим область определения $X = \{x : x > 0 \vee x < -1\}$ подынтегральной функции. Имеем при $x > 0$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+x}} = 2\int \frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{1+(\sqrt{x})^2}} = 2\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}) + C.$$

Аналогично при $1 + x < 0$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-x-1}\sqrt{-x}} = -2\int \frac{d(\sqrt{-x-1})}{\sqrt{1+(\sqrt{-x-1})^2}} = -2\ln(\sqrt{-x-1}+\sqrt{-x}) + C$$

Или, объединив оба решения, получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} = 2\operatorname{sgn} x \ln\left(\sqrt{|x|}+\sqrt{|x+1|}\right) + C, \quad x \notin [-1, 0]. \ ▶$$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

◀ Подынтегральная функция определена при $0 < x < 1$, поэтому

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = 2\int \frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = \arcsin\sqrt{x} + C. \blacktriangleright$$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

◀ Имеем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} = \int \frac{dx}{e^x\sqrt{e^{-2x}+1}} = -\int \frac{d(e^{-x})}{\sqrt{e^{-2x}+1}} =$$
$$= -\ln(e^{-x} + \sqrt{e^{-2x}+1}) + C = x - \ln(1+\sqrt{1+e^{2x}}) + C. \blacktriangleright$$

10. $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x\,dx}{\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}}$.

◀ Поскольку $\sin x\cos x\,dx = \frac{d(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)}{2(a^2-b^2)}$, то

$$\int \frac{\sin x\cos x\,dx}{\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}} = \frac{1}{a^2-b^2}\int \frac{d(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)}{\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}} =$$
$$= \frac{1}{a^2-b^2}\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} + C, \quad a^2 \neq b^2. \blacktriangleright$$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$.

◀ Имеем

$$\frac{dx}{\sin x} = \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{dx}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{d\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}},$$

поэтому

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{d\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \blacktriangleright$$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$.

◀ Аналогично предыдущему примеру находим

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \blacktriangleright$$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}$.

◀ Преобразовав подынтегральное выражение, при $x \neq 0$ получим

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = \int \frac{dx}{2\operatorname{sh}\frac{x}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{2\operatorname{th}\frac{x}{2}\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\operatorname{th}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{th}\frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right| + C. \blacktriangleright$$

14. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{ch} 2x}}\,dx$.

◀ Очевидно,

$$\int \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{ch} 2x}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(\sqrt{2}\operatorname{ch} x)}{\sqrt{(\sqrt{2}\operatorname{ch} x)^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}\operatorname{ch} x + \sqrt{\operatorname{ch} 2x}) + C. \blacktriangleright$$

15. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x\,dx}{\sqrt{\operatorname{sh}^4 x + \operatorname{ch}^4 x}}$.

◀ Имеем
$$\frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x\, dx}{\sqrt{\operatorname{sh}^4 x + \operatorname{ch}^4 x}} = \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x\, dx}{\sqrt{\frac{(\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x)^2 + (\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x)^2}{2}}} = \frac{\operatorname{sh} 2x\, dx}{2\sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{ch}^2 2x + \frac{1}{2}}} = \frac{d(\operatorname{ch} 2x)}{2\sqrt{2}\sqrt{\operatorname{ch}^2 2x + 1}}.$$
Тогда
$$\int \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x\, dx}{\sqrt{\operatorname{sh}^4 x + \operatorname{ch}^4 x}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{d(\operatorname{ch} 2x)}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 2x + 1}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left(\operatorname{ch} 2x + \sqrt{\operatorname{ch}^2 2x + 1}\right) + C =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left(\frac{\operatorname{ch} 2x}{\sqrt{2}} + \sqrt{\operatorname{ch}^4 x + \operatorname{sh}^4 x}\right) + C. ▶$$

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x \sqrt[3]{\operatorname{th}^2 x}}$.

◀ Очевидно,
$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x \sqrt[3]{\operatorname{th}^2 x}} = \int \operatorname{th}^{-\frac{2}{3}} x\, d(\operatorname{th} x) = 3\sqrt[3]{\operatorname{th} x} + C. ▶$$

Вычислить следующие интегралы:

17. $\displaystyle\int \sqrt{1 - \sin 2x}\, dx$

◀ Поскольку
$$\sqrt{1 - \sin 2x} = \sqrt{(\cos x - \sin x)^2} = |\cos x - \sin x| = (\cos x - \sin x) \operatorname{sgn}(\cos x - \sin x),$$
то, обозначив $I(x) = \int \sqrt{1 - \sin 2x}\, dx$, находим
$$I(x) = \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -(\sin x + \cos x) + C_{-1}, \quad \frac{\pi}{4} - 2\pi \leqslant x < \frac{\pi}{4} - \pi, \\ \sin x + \cos x + C_0, \quad \frac{\pi}{4} - \pi \leqslant x < \frac{\pi}{4}, \\ -(\sin x + \cos x) + C_1, \quad \frac{\pi}{4} \leqslant x < \frac{\pi}{4} + \pi, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (-1)^n(\sin x + \cos x) + C_n, \quad \frac{\pi}{4} + (n-1)\pi \leqslant x < \frac{\pi}{4} + n\pi, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Поскольку первообразная непрерывна, то должно выполняться равенство
$$I\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = I\left(\frac{\pi}{4} + k\pi - 0\right), \quad k \in \mathbb{Z},$$
т. е. $(-1)^{k+1}(\sin x_k + \cos x_k) + C_{k+1} = \lim\limits_{x \to x_k - 0} (-1)^k(\sin x + \cos x) + C_k$, где $x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Отсюда приходим к равенству $-\sqrt{2} + C_{k+1} = \sqrt{2} + C_k$. При $k = 0$ находим $C_1 = 2\sqrt{2} + C_0$; далее, при $k = 1$ получаем $C_2 = 2\sqrt{2} + C_1 = 2 \cdot 2\sqrt{2} + C_0$. С помощью метода математической индукции устанавливаем, что $C_n = 2\sqrt{2}n + C$, где $C = C_0$ — произвольная постоянная.

Наконец, преобразуя неравенство $\frac{\pi}{4} + (n-1)\pi \leqslant x < \frac{\pi}{4} + n\pi$ к виду
$$n \leqslant \frac{x - \frac{\pi}{4} + \pi}{\pi} < n + 1,$$
находим, что
$$n = \left[\frac{x - \frac{\pi}{4} + \pi}{\pi}\right].$$

Таким образом,
$$\int \sqrt{1 - \sin 2x}\, dx = (-1)^{\left[\frac{x - \frac{\pi}{4} + \pi}{\pi}\right]}(\sin x + \cos x) + 2\sqrt{2}\left[\frac{x - \frac{\pi}{4} + \pi}{\pi}\right] + C. ▶$$

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$

◀ Преобразуя подынтегральное выражение, находим

$$I(x) = \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} = \int \frac{dx}{(\operatorname{tg}^2 x + 2)\cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C_n,$$

где $n\pi - \frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Из непрерывности первообразной следует

$$I\left(\frac{\pi}{2} + n\pi - 0\right) = I\left(\frac{\pi}{2} + n\pi + 0\right), \quad n \in \mathbb{Z},$$

т. е.

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C_n = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C_{n+1}.$$

Отсюда находим $C_{n+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} + C_n$ или $C_n = \frac{n\pi}{\sqrt{2}} + C$, где $C = C_0$. Поскольку $n < \frac{2x+\pi}{2\pi} < n+1$, $n \in \mathbb{Z}$, то $n = \left[\frac{2x+\pi}{2\pi}\right]$. Следовательно,

$$I(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left[\frac{2x+\pi}{2\pi}\right] + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi; \quad I\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2} + n\pi} I(x)$$

является точной первообразной на $\mathbb{R}$. ▶

19. $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^4+1} dx$.

◀ Из равенства

$$\frac{x^2-1}{x^4+1}\, dx = \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}}\, dx = \frac{d\left(x + \frac{1}{x}\right)}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2}$$

следует, что

$$\int \frac{x^2-1}{x^4+1}\, dx = \int \frac{d\left(x + \frac{1}{x}\right)}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}}{x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 - x\sqrt{2} + 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} + C. \ ▶$$

20. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\, dx$.

◀ Имеем при $x \neq 0$

$$\frac{x^2+1}{x^4+1}\, dx = \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}}\, dx = \frac{d\left(x - \frac{1}{x}\right)}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2}.$$

Поэтому

$$I(x) = \int \frac{x^2+1}{x^4+1}\, dx = \int \frac{d\left(x - \frac{1}{x}\right)}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{2}} + \begin{cases} C_{-1}, & \text{если } x < 0, \\ C_1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Согласно определению, первообразная должна быть непрерывной, следовательно, $I(-0) = I(+0)$, т. е. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C_{-1} = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C_1$. Если найдем $C_{-1} = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C$, $C_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C$, где C — произвольная постоянная, и положим $I(0) = C$, то условие $I(-0) = I(+0) = I(0)$ будет выполненным, а определяемый интеграл запишется в виде

$$I(x) = \int \frac{x^2+1}{x^4+1}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \operatorname{sgn} x + C, \quad x \neq 0, \quad I(0) = \lim_{x \to 0} I(x). \ ▶$$

21. $\displaystyle\int \frac{[x]}{x^{\lambda+1}} dx, \ \lambda \in \mathbb{R}, \ x \geqslant 1.$ (1)

◀ Рассмотрим случай, когда $\lambda \neq 0$. Пусть $[x] = n$, тогда $n \leqslant x < n+1$, и для сужения первообразной $x \mapsto I(x)$ на полуинтервалы $[n, n+1[$, $n \in \mathbb{N}$, получаем

$$I(x) = \int \frac{n\, dx}{x^{\lambda+1}} = -\frac{n}{\lambda x^{\lambda}} + C_n. \quad (2)$$

В силу непрерывности первообразной $I(n) = I(n-0)$, т. е. $-\frac{n}{\lambda n^{\lambda}} + C_n = -\frac{n-1}{\lambda n^{\lambda}} + C_{n-1}$ или $C_n = \frac{1}{\lambda n^{\lambda}} + C_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Отсюда последовательно находим

$$\begin{aligned} C_1 &= \tfrac{1}{\lambda} + C_0 = \tfrac{1}{\lambda} + C, \quad \text{где } C_0 = C, \\ C_2 &= \tfrac{1}{\lambda 2^{\lambda}} + C_1 = \tfrac{1}{\lambda} + \tfrac{1}{\lambda 2^{\lambda}} + C, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_n &= \tfrac{1}{\lambda} + \tfrac{1}{\lambda 2^{\lambda}} + \ldots + \tfrac{1}{\lambda n^{\lambda}} + C. \end{aligned} \tag{3}$$

Поскольку $n = [x]$, то из (2) и (3) окончательно находим

$$\int \frac{[x]}{x^{\lambda+1}}\,dx = -\frac{[x]}{\lambda x^{\lambda}} + \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{1}{2^{\lambda}} + \frac{1}{3^{\lambda}} + \ldots + \frac{1}{[x]^{\lambda}}\right) + C.$$

Предположим теперь, что $\lambda = 0$. Тогда для $x \in [n,\ n+1[$, $n \in \mathbb{N}$, получим

$$I(x) = \int \frac{n}{x}\,dx = n \ln x + C_n.$$

Поскольку первообразная непрерывна, то справедливо равенство $I(n) = I(n-0)$. Отсюда, аналогично рассмотренному выше случаю, находим

$$C_n = -\ln 2 - \ln 3 - \ldots - \ln n + C.$$

А так как $n = [x]$, то

$$\int \frac{[x]}{x}\,dx = [x]\ln x - \ln 2 - \ln 3 - \ldots - \ln[x] + C = [x]\ln x - \ln([x]!) + C.$$

Таким образом,

$$\int \frac{[x]}{x^{\lambda+1}}\,dx = \begin{cases} -\frac{[x]}{\lambda x^{\lambda}} + \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{1}{2^{\lambda}} + \frac{1}{3^{\lambda}} + \ldots + \frac{1}{[x]^{\lambda}}\right) + C, & \text{если } \lambda \neq 0, \\ [x]\ln x - \ln([x]!) + C, & \text{если } \lambda = 0. \end{cases}$$

Найденная первообразная не является точной первообразной. Действительно, точная первообразная имеет в каждой точке области существования производную, равную подынтегральной функции. Однако подынтегральная функция имеет счетное множество точек разрыва первого рода, поэтому не может быть значением производной. ►

22. $\displaystyle\int \left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right] dx$, $x \in\,]0,\ 1]$.

◄ Положим $\frac{1}{\sqrt{x}} = t$, тогда $x = \frac{1}{t^2}$ и $dx = -\frac{2\,dt}{t^3}$. При этом, если $x \in\,]0,\ 1]$, то $t \in [1, +\infty[$. В результате замены приходим к интегралу

$$2\int \frac{[t]\,dt}{t^3}.$$

Согласно предыдущему примеру, получаем (полагая $\lambda = 2$)

$$2\int \frac{[t]}{t^3}\,dt = -\frac{[t]}{t^2} + 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{[t]^2} + C.$$

Возвращаясь к старой переменной, окончательно имеем

$$\int \left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right] dx = -\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right] x + 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]^2} + C,$$

где $x \in\,]0,\ 1]$. ►

Применяя различные методы, вычислить интегралы:

23. $\displaystyle\int x(1-x)^{10}\,dx$.

◀ Пользуясь очевидным тождеством $x = 1-(1-x)$, получаем

$$\int x(1-x)^{10}\,dx = \int (1-x)^{10}\,dx - \int (1-x)^{11}\,dx =$$

$$= -\int (1-x)^{10}\,d(1-x) + \int (1-x)^{11}\,d(1-x) = -\frac{1}{11}(1-x)^{11} + \frac{1}{12}(1-x)^{12} + C. \ ▶$$

24. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}\,dx.$

◀ Разлагая функцию $x \mapsto x^2$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x=1$, получаем

$$x^2 = (1-x)^2 - 2(1-x) + 1.$$

Поэтому

$$\int \frac{x^2\,dx}{(1-x)^{100}} = \int \frac{(1-x)^2 - 2(1-x) + 1}{(1-x)^{100}}\,dx = \int \frac{dx}{(1-x)^{98}} - 2\int \frac{dx}{(1-x)^{99}} +$$

$$+ \int \frac{dx}{(1-x)^{100}} = \frac{1}{97(1-x)^{97}} - \frac{1}{49(1-x)^{98}} + \frac{1}{99(1-x)^{99}} + C, \quad x \neq 1 \ ▶$$

25. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}.$

◀ Уничтожая иррациональность в знаменателе, получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2}\int (\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sqrt{x+1}\,d(x+1) - \frac{1}{2}\int \sqrt{x-1}\,d(x-1) = \frac{1}{3}\left(\sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{(x-1)^3}\right) + C, \quad x \geqslant 1. \ ▶$$

26. $\displaystyle\int x^3\sqrt[3]{1+x^2}\,dx.$

◀ Поскольку $x^3 dx = \frac{1}{2}((1+x^2)-1)\,d(1+x^2)$, то

$$\int x^3\sqrt[3]{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \left((1+x^2)^{\frac{4}{3}} - (1+x^2)^{\frac{1}{3}}\right) d(1+x^2) = \frac{3}{14}(1+x^2)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{8}(1+x^2)^{\frac{4}{3}} + C. \ ▶$$

27. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+x-2}.$

◀ Имеем

$$\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{(x+2)-(x-1)}{3(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right),$$

следовательно,

$$\int \frac{dx}{x^2+x-2} = \frac{1}{3}\left(\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+2}\right) = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|x+2| + C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C. \ ▶$$

28. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^4+3x^2+2}.$

◀ Поскольку $x\,dx = \frac{1}{2}\,d(x^2)$ и

$$\frac{1}{x^4+3x^2+2} = \frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{(x^2+2)-(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+2},$$

то

$$\int \frac{x\,dx}{x^4+3x^2+2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{x^2+2} = \frac{1}{2}\ln\frac{x^2+1}{x^2+2} + C. \ ▶$$

29. $\displaystyle\int \sin^4 x\,dx.$

◀ Интегрируя тождество

$$\sin^4 x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x = \\ = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{8} = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x,$$

получаем

$$\int \sin^4 x\,dx = \frac{3x}{8} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C. ▶$$

30. $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx.$

◀ Имеем

$$\int \operatorname{tg}^3 x\,dx = \int \operatorname{tg} x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \int \operatorname{tg} x\,d(\operatorname{tg} x) - \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln|\cos x| + C, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi. ▶$$

31. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x}.$

◀ Пользуясь тем, что $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$ (см. пример 11), находим

$$\int \frac{dx}{\sin x\cos^2 x} = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cos^2 x}\,dx = \int \frac{dx}{\sin x} + \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{\cos x} + C, \quad x \neq \frac{k\pi}{2}. ▶$$

32. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}.$

◀ Пользуясь равенством $\frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\operatorname{ctg} x)$, находим

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x} = -\int \frac{1}{\sin^2 x}\,d(\operatorname{ctg} x) = -\int (\operatorname{ctg}^2 x + 1)\,d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x - \operatorname{ctg} x + C. ▶$$

33. $\int \operatorname{ch} x \operatorname{ch} 3x\,dx.$

◀ Имеем

$$\int \operatorname{ch} x \operatorname{ch} 3x\,dx = \frac{1}{2}\int (\operatorname{ch} 2x + \operatorname{ch} 4x)\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2x + \frac{1}{8}\operatorname{sh} 4x + C. ▶$$

Применяя метод подстановки, найти следующие интегралы:

34. $\int x^3(1-5x^2)^{10}\,dx.$

◀ Полагая $1 - 5x^2 = t$, находим $x\,dx = -\frac{1}{10}\,dt$; $x^3(1-5x^2)^{10}\,dx = \frac{1}{50}(t^{11} - t^{10})\,dt$, следовательно,

$$\int x^3(1-5x^2)^{10}\,dx = \frac{1}{50}\int (t^{11} - t^{10})\,dt = \frac{1}{50}\left(\frac{t^{12}}{12} - \frac{t^{11}}{11}\right) + C = -\frac{1+55x^2}{6600}(1-5x^2)^{11} + C. ▶$$

35. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

◀ Пусть $\sqrt{1-x^2} = t$, тогда $\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -dt$ и

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\int (1 - 2t^2 + t^4)\,dt = -\left(t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5\right) + C = \\ = -\frac{1}{15}(8 + 4x^2 + 3x^4)\sqrt{1-x^2} + C, \quad |x| < 1. ▶$$

36. $\int \frac{\sin x \cos^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx$

◀ Полагая $1+\cos^2 x = t$, получим $\sin x\cos x\,dx = -\frac{dt}{2}$. Тогда

$$\int \frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1-t}{t}\,dt = \frac{1}{2}\ln|t| - \frac{1}{2}t + C = \frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 x) - \frac{1}{2}\cos^2 x + C. ▶$$

37. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

◀ Положив $t = e^{-\frac{x}{2}}$, находим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = -2\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = -2\ln(t+\sqrt{t^2+1}) + C = x - 2\ln(1+\sqrt{e^x+1}) + C. ▶$$

38. $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$.

◀ Если положить $x = \sin t$, то $dx = \cos t\,dt$ и при $|x|<1$

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + C = \operatorname{tg}(\arcsin x) + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C \quad ▶$$

39. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-2}}$.

◀ Положим $x = \frac{\sqrt{2}}{\sin 2t}$. Если $x \in\,]-\infty,\ -\sqrt{2}[$, то $t \in \left]-\frac{\pi}{4},\ 0\right[$, если же $x \in]\sqrt{2},\ +\infty[$, то $t \in \left]0,\ \frac{\pi}{4}\right[$. Заметив, что для этих значений x и t $\operatorname{sgn}\operatorname{ctg} 2t = \operatorname{sgn} t = \operatorname{sgn} x$, будем иметь

$$I = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-2}} = -4\operatorname{sgn}\operatorname{ctg} 2t\int \frac{dt}{\sin^3 2t} = -\frac{\operatorname{sgn} t}{2}\int \frac{(\sin^2 t+\cos^2 t)^2}{\sin^3 t\cos^3 t}\,dt =$$
$$= \operatorname{sgn} t\left(\frac{\cos 2t}{\sin^2 2t} - \ln|\operatorname{tg} t|\right) + C.$$

Из равенства $\sin 2t = \frac{\sqrt{2}}{x} = \frac{2\operatorname{tg} t}{1+\operatorname{tg}^2 t}$, учитывая, что $|\operatorname{tg} t|<1$ при $|t|<\frac{\pi}{4}$, находим

$$\operatorname{tg} t = \frac{x \pm \sqrt{x^2-2}}{\sqrt{2}} = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{x+\sqrt{x^2-2}}, & \text{если } x>\sqrt{2}, \\ \frac{x+\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{2}}, & \text{если } x<-\sqrt{2}. \end{cases}$$

Таким образом,

$$I = \operatorname{sgn} x\left(\frac{x^2}{2}\sqrt{1-\frac{2}{x^2}} + \operatorname{sgn} x\ln\left|x+\sqrt{x^2-2}\right|\right) + C = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-2} + \ln\left|x+\sqrt{x^2-2}\right| + C. ▶$$

40. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

◀ Полагая $x = a\sin t$, получаем

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^2\int \cos^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}\int (1+\cos 2t)\,dt =$$
$$= \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right) + C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C, \quad |x| \leqslant a. ▶$$

41. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$.

◀ Положив $x = a\operatorname{tg} t$, имеем при $a \neq 0$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} = \frac{1}{a^2}\int \cos t\,dt = \frac{1}{a^2}\sin t + C = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C. ▶$$

42. $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx$.

◀ Пусть $x = a\cos 2t$. Тогда $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = \operatorname{ctg} t$, $dx = -2a\sin 2t\,dt$ и

$$\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx = -4a\int \cos^2 t\,dt = -4a\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t\right) + C = a\arcsin\frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} + C,$$

$-a \leqslant x < a$. ▶

43. $\displaystyle\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\,dx.$

◀ Полагая $x = 2a\sin^2 t$, получаем (см. пример 29)

$$\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\,dx = 8a^2\int \sin^4 t\,dt = a^2\left(3t - 2\sin 2t + \frac{1}{4}\sin 4t\right) + C =$$

$$= 3a^2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}} - \frac{3a+x}{2}\sqrt{x(2a-x)} + C, \quad 0 \leqslant x < 2a. \text{ ▶}$$

44. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}.$

◀ Положив $x - a = (b-a)\sin^2 t$, после простых преобразований получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2\int dt = 2t + C = 2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C, \quad a < x < b. \text{ ▶}$$

45. $\displaystyle\int \sqrt{a^2 + x^2}\,dx.$

◀ Пусть $x = a\operatorname{sh} t$, тогда $dx = a\operatorname{ch} t\,dt$. Следовательно, $\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2(1+\operatorname{sh}^2 t)} = a\operatorname{ch} t$ и

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = a^2\int \operatorname{ch}^2 t\,dt = \frac{a^2}{4}\operatorname{sh} 2t + \frac{a^2 t}{2} + C.$$

Из равенства $\operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \frac{x}{a}$ находим, что $e^t = \frac{x \pm \sqrt{a^2+x^2}}{a}$. Поскольку $e^t > 0$, то $t = \ln|x + \sqrt{a^2+x^2}| - \ln a$. Очевидно, $\operatorname{sh} 2t = 2\operatorname{sh} t\operatorname{ch} t = 2\operatorname{sh} t\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} = 2\,\frac{x}{a}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}} = \frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2+x^2}$. поэтому окончательно получаем

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{a^2+x^2}| + C. \text{ ▶}$$

46. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\,dx.$

◀ Подынтегральная функция определена при $x < -a$ и при $x \geqslant a$. Пусть $x \geqslant a$. Тогда, полагая $x - a = 2a\operatorname{sh}^2 t$, получаем

$$\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\,dx = 4a\int \operatorname{sh}^2 t\,dt = a\operatorname{sh} 2t - 2at + C.$$

Учитывая, что $a\operatorname{sh} 2t = \sqrt{x^2 - a^2}$, $\operatorname{sh} t = \sqrt{\frac{x-a}{2a}} = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$, $t = \ln(\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}) - \ln\sqrt{2a}$, окончательно получаем

$$\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\,dx = \sqrt{x^2-a^2} - 2a\ln(\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}) + C.$$

Если $x < -a$, то, полагая $x + a = -2a\operatorname{sh}^2 t$, имеем

$$\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\,dx = -4a\int \operatorname{sh}^2 t\,dt = -a\operatorname{sh} 2t + 2at + C =$$

$$= -\sqrt{x^2+a^2} + 2a\ln(\sqrt{-x-a} + \sqrt{-x+a}) + C. \text{ ▶}$$

47. $\int \sqrt{(x+a)(x+b)}\,dx$.

◀ Предполагая, что $b > a$ и $x+a > 0$, $x+b > 0$, положим $x + a = (b-a)\operatorname{sh}^2 t$. Тогда $\sqrt{(x+a)(x+b)}\,dx = \frac{(b-a)^2}{4}(\operatorname{ch} 4t - 1)\,dt$ и

$$\int \sqrt{(x+a)(x+b)}\,dx = \frac{(b-a)^2}{4}\left(\frac{\operatorname{sh} 4t}{4} - t\right) + C.$$

Поскольку $t = \ln(\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}) - \ln\sqrt{b-a}$, $\operatorname{sh} 4t = \frac{4(2x+a+b)}{(b-a)^2}\sqrt{(x+a)(x+b)}$, то окончательно имеем

$$\int \sqrt{(x+a)(x+b)}\,dx = \frac{2x+a+b}{4}\sqrt{(x+a)(x+b)} - \frac{(b-a)^2}{4}\ln(\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}) + C.$$

Если же $x+a<0$, $x+b<0$, $b>a$, то, полагая $x+b = -(b-a)\operatorname{sh}^2 t$, получим

$$\int \sqrt{(x+a)(x+b)}\,dx = -\frac{(b-a)^2}{4}\int(\operatorname{ch} 4t - 1)\,dt = -\frac{(b-a)^2}{16}\operatorname{sh} 4t + \frac{(b-a)^2}{4}t + C =$$

$$= \frac{2x+a+b}{4}\sqrt{(x+a)(x+b)} + \frac{(b-a)^2}{4}\ln(\sqrt{-x-a} + \sqrt{-x-b}) + C. \ ▶$$

Применяя метод интегрирования по частям, найти следующие интегралы:

48. $\int x^2 \arccos x\,dx$.

◀ Интегрируя по частям, находим

$$\int x^2 \arccos x\,dx = \int \arccos x\,d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3}{3}\arccos x + \frac{1}{3}\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{1}{3}\int x^2\,d\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{x^2}{3}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3}\int \sqrt{1-x^2}\,d(x^2) =$$

$$= \frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{x^2}{3}\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{9}\sqrt{(1-x^2)^3} + C, \quad |x| \leqslant 1. \ ▶$$

49. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx$.

◀ Имеем

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx = \int \arcsin x\,d\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x}\arcsin x + \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}, \quad x \neq 0, \quad |x| < 1.$$

Последний интеграл вычисляется следующим образом:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dx}{x|x|\sqrt{\left(\frac{1}{|x|}\right)^2 - 1}} = \int \frac{\operatorname{sgn} x\,d(|x|)}{\operatorname{sgn} x \cdot |x|^2\sqrt{\left(\frac{1}{|x|}\right)^2 - 1}} =$$

$$= -\int \frac{d\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{|x|}\right)^2 - 1}} = -\ln\left|\frac{1}{|x|} + \sqrt{\left(\frac{1}{|x|}\right)^2 - 1}\right| + C = \ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right| + C.$$

Окончательно имеем

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx = -\frac{\arcsin x}{x} + \ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right| + C. \ ▶$$

50. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$.

◀ Методом интегрирования по частям находим

$$\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx = x\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \int \frac{x\,dx}{2\sqrt{x}(1+x)} = x\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \int\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}\right)dx =$$
$$= x\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + \int \frac{d\sqrt{x}}{1+x} = x\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg}\sqrt{x} + C, \quad x \geqslant 0. \ ▶$$

51. $\int \arcsin^2 x\,dx$.

◀ Имеем

$$\int \arcsin^2 x\,dx = x\arcsin^2 x - \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\,dx = x\arcsin^2 x + 2\int \arcsin x\,d(\sqrt{1-x^2}) =$$
$$= x\arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C, \quad |x| \leqslant 1. \ ▶$$

52. $\int x\arcsin^2 x\,dx$.

◀ Интегрируя по частям и используя предыдущий пример, находим

$$\int x\arcsin^2 x\,dx = x\int \arcsin^2 x\,dx - \int \arcsin^2 x\,dx = (x-1)\int \arcsin^2 x\,dx =$$
$$= (x-1)\left(x\arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x\right) + C, \quad |x| \leqslant 1. \ ▶$$

53. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$.

◀ После очевидных преобразований, интегрируя по частям, получаем

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(a^2+x^2)-x^2}{(a^2+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{1}{a^2}\int \frac{x}{2}\,d\left(\frac{1}{a^2+x^2}\right) =$$
$$= \frac{1}{a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C. \ ▶$$

54. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$, $|x| \leqslant a$.

◀ Интегрируя по частям, находим

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{(x^2-a^2)+a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx =$$
$$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx + a^2\arcsin\frac{x}{a} + C.$$

Решая это равенство относительно $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$, получаем

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0. \ ▶$$

55. $\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,dx$.

◀ Имеем

$$\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,dx = \int x\,d\left(\frac{1}{3}(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{x}{3}(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\int (a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}\,dx + C =$$
$$= \frac{x}{4}(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{a^2}{4}\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx + C$$

Вычисляем последний интеграл:

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = x\sqrt{a^2+x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = x\sqrt{a^2+x^2} - \int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{a^2+x^2} - \int \sqrt{a^2+x^2}\,dx + a^2 \ln|x+\sqrt{a^2+x^2}| + C;$$

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}| + C.$$

Окончательно получаем

$$\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x(2x^2+a^2)}{8}\sqrt{a^2+x^2} - \frac{a^4}{8}\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}| + C. \blacktriangleright$$

56 $\int x\sin\sqrt{x}\,dx$.

◀ Замечая, что $x\,dx = 2(\sqrt{x})^3\,d(\sqrt{x})$, и интегрируя по частям, получаем

$$\int x\sin\sqrt{x}\,dx = 2\int (\sqrt{x})^3 \sin\sqrt{x}\,d(\sqrt{x}) = -2\int (\sqrt{x})^3\,d(\cos\sqrt{x}) =$$

$$= -2\sqrt{x^3}\cos\sqrt{x} + 6\int x\cos\sqrt{x}\,d(\sqrt{x}) = -2\sqrt{x^3}\cos\sqrt{x} + 6\int x\,d(\sin\sqrt{x}) =$$

$$= -2\sqrt{x^3}\cos\sqrt{x} + 6x\sin\sqrt{x} - 12\int \sqrt{x}\sin\sqrt{x}\,d(\sqrt{x}) =$$

$$= -2\sqrt{x^3}\cos\sqrt{x} + 6x\sin\sqrt{x} + 12\int \sqrt{x}\,d(\cos\sqrt{x}) =$$

$$= -2\sqrt{x^3}\cos\sqrt{x} + 6x\sin\sqrt{x} + 12\sqrt{x}\cos\sqrt{x} - 12\sin\sqrt{x} + C =$$

$$= 2\sqrt{x}\,(6-x)\cos\sqrt{x} + 6\,(x-2)\sin\sqrt{x} + C, \quad x \geqslant 0. \blacktriangleright$$

57. $I = \int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$.

◀ Интегрируя по частям, имеем

$$\int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,d(e^{\operatorname{arctg} x}) = \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\,dx =$$

$$= \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{d(e^{\operatorname{arctg} x})}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx,$$

откуда $I = \frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}}e^{\operatorname{arctg} x} + C.$ ▶

58. $I_1 = \int e^{ax}\cos bx\,dx$, $I_2 = \int e^{ax}\sin bx\,dx$.

◀ Очевидно,

$$I_1 = \frac{1}{a}\int \cos bx\,d(e^{ax}) = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}I_2;$$

$$I_2 = \frac{1}{a}\int \sin bx\,d(e^{ax}) = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}I_1;$$

$$I_1 = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2} + C; \quad I_2 = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + C. \blacktriangleright$$

59. $\int e^{2x}\sin^2 x\,dx$.

◀ Используя предыдущий пример, получаем

$$\int e^{2x}\sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx - \frac{1}{2}\int e^{2x}\cos 2x\,dx = \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{8}e^{2x}(\sin 2x + \cos 2x) + C. \blacktriangleright$$

Нахождение следующих интегралов основано на приведении квадратного трехчлена к каноническому виду и применении формул:

I. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C,\quad a \neq 0.$ II. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C.$

III. $\int \frac{x\,dx}{a^2\pm x^2} = \pm\frac{1}{2}\ln|a^2 \pm x^2| + C.$ IV. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

V. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C,\quad a > 0.$ VI. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2\pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm x^2} + C.$

VII. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C,\quad a > 0.$

VIII. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$

Найти интегралы:

60. $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2 - 2x - 1}.$

◀ Имеем

$$\int \frac{dx}{3x^2 - 2x - 1} = \frac{1}{3}\int \frac{d\left(x - \frac{1}{3}\right)}{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{3x+1}\right| + C,\quad x \neq -\frac{1}{3},\quad x \neq 1. \blacktriangleright$$

61. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^4 - 2x^2 - 1}.$

◀ Очевидно,

$$\int \frac{x\,dx}{x^4 - 2x^2 - 1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2 - 1)}{(x^2-1)^2 - 2} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2 - 1 - \sqrt{2}}{x^2 - 1 + \sqrt{2}}\right| + C,\quad x \neq \pm\sqrt{1 + \sqrt{2}}. \blacktriangleright$$

62. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2 + x + 1}\,dx.$

◀ Пользуясь свойством г), п. 1.2, получаем

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,d\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \blacktriangleright$$

63. $\displaystyle I = \int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x + 3}.$

◀ Имеем

$$I(x) = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 1 + 4\cos^2\frac{x}{2}} = 2\int \frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1\right)^2 + 4} = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{2} + C_n,$$

$$2n\pi - \pi < x < \pi + 2n\pi.$$

Из непрерывности первообразной следует

$$I(\pi + 2n\pi - 0) = I(\pi + 2n\pi + 0).\quad n \in \mathbb{Z},\quad \frac{\pi}{2} + C_n = -\frac{\pi}{2} + C_{n+1},\quad C_{n+1} = \pi + C_n.$$

Отсюда находим $C_n = n\pi + C$, где $C = C_0$ — произвольная постоянная. Поскольку $2n\pi - \pi < x < \pi + 2n\pi$, т. е

$$n < \frac{x+\pi}{2\pi} < n + 1,\quad \text{то}\ \ n = \left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right].$$

Таким образом,

$$I(x) = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{2} + \pi\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right] + C\quad x \neq \pi + 2n\pi,\quad I(\pi + 2n\pi) = \lim_{x\to\pi+2n\pi} I(x),\quad n \in \mathbb{Z}. \blacktriangleright$$

64. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5+x-x^2}}$.

◀ Очевидно,

$$\frac{x\,dx}{\sqrt{5+x-x^2}} = \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)\,dx}{\sqrt{5+x-x^2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{dx}{\sqrt{\frac{21}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}},$$

откуда

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5+x-x^2}} = -\sqrt{5+x-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{21}} + C, \quad \frac{1-\sqrt{21}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{21}}{2}. \ ▶$$

65. $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^4-2x^2-1}}$.

◀ Имеем при $|x| > \sqrt{1+\sqrt{2}}$

$$\frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^4-2x^2-1}} = \frac{x^2\,d(x^2)}{2\sqrt{(x^2-1)^2-4}} = \frac{(x^2-1)\,d(x^2-1)}{2\sqrt{(x^2-1)^2-4}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{d(x^2-1)}{\sqrt{(x^2-1)^2-4}},$$

откуда

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^4-2x^2-1}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^4-2x^2-1} + \frac{1}{2}\ln\left|x^2-1+\sqrt{x^4-2x^2-1}\right| + C. \ ▶$$

66. $\displaystyle\int \sqrt{2+x-x^2}\,dx$.

◀ Имеем при $-1 \leqslant x \leqslant 2$

$$\int \sqrt{2+x-x^2}\,dx = \int \sqrt{\frac{9}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,d\left(x-\frac{1}{2}\right) = \frac{2x-1}{4}\sqrt{2+x-x^2} + \frac{9}{8}\arcsin\frac{2x-1}{3} + C. \ ▶$$

67. $\displaystyle\int \frac{(1-x+x^2)\,dx}{x\sqrt{1+x-x^2}}$.

◀ При $\left|x-\frac{1}{2}\right| < \frac{\sqrt{5}}{2}$, $x \neq 0$, имеем

$$I = \int \frac{1-x+x^2}{x\sqrt{1+x-x^2}}\,dx = \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}} + \int \frac{x-1}{\sqrt{1+x-x^2}}\,dx.$$

В первом интеграле положим $\frac{1}{|x|} = t$. Получим

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+t\,\mathrm{sgn}\,x-1}} =$$

$$= -\ln\left|t + \frac{\mathrm{sgn}\,x}{2} + \sqrt{t^2+t\,\mathrm{sgn}\,x-1}\right| = -\ln\left|\frac{2+x+2\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right|.$$

Второй интеграл вычисляется непосредственно:

$$\int \frac{(x-1)\,dx}{\sqrt{1+x-x^2}} = -\int \frac{(-2x+1)\,dx}{2\sqrt{1+x-x^2}} - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} = -\sqrt{1+x-x^2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}.$$

Окончательно имеем

$$I = -\ln\left|\frac{2+x+2\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right| - \sqrt{1+x-x^2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}} + C. \ ▶$$

68. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}\,dx$.

◄ При $x \neq 0$ имеем

$$\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}\,dx = \operatorname{sgn} x \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}\,dx = \operatorname{sgn} x \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}} =$$

$$= \operatorname{sgn} x \cdot \ln\left|x - \frac{1}{x} + \sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}\right| + C = \operatorname{sgn} x \cdot \ln\left|\frac{x^2-1+\sqrt{x^4+1}}{x}\right| + C. \ ►$$

Упражнения для самостоятельной работы

Найти интегралы:

1. $\int \sqrt[4]{1-4x}\,dx$. **2.** $\int \frac{dx}{x^2+4x+4}$. **3.** $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$. **4.** $\int \frac{\sin 2x\,dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$. **5.** $\int \frac{x+2}{x^2+4x+9}\,dx$.
6. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$. **7.** $\int \frac{x^{2n-1}\,dx}{x^{4n}+1}$, $n \in \mathbb{N}$. **8.** $\int \frac{x^{2n-1}\,dx}{x^{4n}-1}$, $n \in \mathbb{N}$. **9.** $\int \frac{dx}{x^4\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{3/2}}$.
10. $\int \frac{dx}{\cos x \sin^2 x}$. **11.** $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$. **12.** $\int \cos^3 x\,dx$. **13.** $\int e^{-x^2-1}x\,dx$. **14.** $\int e^x 2^x\,dx$.
15. $\int \cos\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$. **16.** $\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$. **17.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$. **18.** $\int \operatorname{tg}^4 x\,dx$. **19.** $\int \cos^2 x\,dx$.
20. $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$. **21.** $\int \left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2+x+1}\,dx$. **22.** $\int \frac{(x^2+x+1)\,dx}{x^3+\frac{3}{2}x^2+3x+1}$. **23.** $\int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{2+2x+x^2}}$.
24. $\int \frac{dx}{[x]^2}$, $x \geqslant 1$. **25.** $\int \frac{[x]^\lambda}{x^{\lambda+1}}\,dx$, $x \geqslant 1$. **26.** $\int \ln[x]\,dx$, $x \geqslant 2$. **27.** $\int \frac{dx}{[\sqrt[m]{x}]^\lambda}$, $x > 1$.
28. $\int \frac{\ln(1+x)-\ln x}{x(1+x)}\,dx$. **29.** $\int \frac{x(\ln(1+x)+\ln(1-x))^2}{x^2-1}\,dx$. **30.** $\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^{3/2}}$. **31.** $\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+1)^3\sqrt{x^2+1}}$.
32. $\int \frac{x^8-1}{x(x^8-x^4+1)}\,dx$. **33.** $\int \frac{x^5-x}{x^8+3x^4+1}\,dx$. **34.** $\int \frac{x^8-x^2}{x^{12}+3x^6+1}\,dx$.
35. $\int \sqrt{1-2x^2+x^4}\,dx$. **36.** $\int \arcsin(\sin x)\,dx$, $x \in \mathbb{R}$. **37.** $\arccos(\cos x)\,dx$, $x \in \mathbb{R}$.
38. $\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$. **39.** $\int x^2(1+x)^{20}\,dx$. **40.** $\int \frac{x\,dx}{(x+9)^{10}}$.

Методом подстановки найти следующие интегралы:

41. $\int \frac{dx}{\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^5}$. **42.** $\int \frac{x\,dx}{\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^3}$. **43.** $\int \frac{dx}{x^2\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^3}$. **44.** $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-a^2}}$.
45. $\int \frac{dx}{\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^5}$. **46.** $\int \frac{\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^3}{x}\,dx$. **47.** $\int \frac{x^3\,dx}{\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^6}$. **48.** $\int \frac{x\exp\left\{-(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\right\}}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\,dx$.
49. $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$. **50.** $\int \frac{x+1}{x(1+xe^x)}\,dx$. **51.** $\int \frac{(2x^2+1)\,dx}{\sqrt{x^6+2x^4+2x^2+1}}$. **52.** $\int \frac{(x^3+x)\,dx}{x^6+4x^4+4x^2+1}$.
53. $\int \frac{2x^6+1}{x^6(1+x^2)}\,dx$.

Применяя метод интегрирования по частям, найти следующие интегралы:

54. $\int x^3\ln x\,dx$. **55.** $\int x^3\sin x\,dx$. **56.** $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$. **57.** $\int x^2\cos x\,dx$. **58.** $\int x\sin^2 x\,dx$.
59. $\int \frac{dx}{\sin^5 x}$. **60.** $\int \frac{dx}{\cos^5 x}$. **61.** $\int \operatorname{tg}^7 x\,dx$. **62.** $\int \arcsin\frac{x}{2}\,dx$. **63.** $\int \frac{1}{x^3}\arcsin x\,dx$.
64. $\int x^2\operatorname{arctg} x\,dx$. **65.** $\int \frac{1}{x^2}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,dx$. **66.** $\int x\operatorname{arcctg} x\,dx$. **67.** $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^3}\,dx$. **68.** $\int x^3e^{ax}\,dx$.
69. $\int e^{ax}\cos^2 x\,dx$. **70.** $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$. **71.** $\int \ln^2 x\,dx$. **72.** $\int x^2\ln^2 x\,dx$. **73.** $\int \frac{\ln^2 x}{x^2}\,dx$.
74. $\int \ln(x+\sqrt{a^2+x^2})\,dx$. **75.** $\int x^2\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})\,dx$. **76.** $\int x\operatorname{sh} x\,dx$. **77.** $\int x\operatorname{sh}^2 x\,dx$.
78. $\int x^3\operatorname{ch} x\,dx$. **79.** $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. **80.** $\int \arcsin x\arccos x\,dx$. **81.** $\int \frac{x^2e^x}{(x+2)^2}\,dx$.
82. $\int x^2e^x\sin x\,dx$. **83.** $\int \frac{x^2\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$. **84.** $\int \frac{x^7\,dx}{(1+x^4)^2}$. **85.** $\int \frac{x^8\,dx}{(x^3-1)^3}$. **86.** $\int \frac{x^8\,dx}{(x^4-1)^3}$.

§ 2. Интегрирование рациональных функций

Известно, что правильная дробь

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{\prod\limits_{i=1}^{k}(x-x_i)^{n_i}\prod\limits_{j=1}^{s}(a_jx^2+b_jx+q_j)^{m_j}},$$

где нули квадратных трехчленов $a_j x^2 + b_j x + q_j$ комплексные, допускает разложение

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{A_{n_i}^{(i)}}{(x-x_i)^{n_i}} + \frac{A_{n_i-1}^{(i)}}{(x-x_i)^{n_i-1}} + \ldots + \frac{A_1^{(i)}}{x-x_i} \right) + \\ + \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{B_{m_j}^{(j)} x + C_{m_j}^{(j)}}{(a_j x^2 + b_j x + c_j)^{m_j}} + \frac{B_{m_j-1}^{(j)} x + C_{m_j-1}^{(j)}}{(a_j x^2 + b_j x + c_j)^{m_j-1}} + \ldots + \frac{B_1^{(j)} x + C_1^{(j)}}{a_j x^2 + b_j x + c_j} \right). \quad (1)$$

Постоянные $A_\nu^{(i)}$, $B_\mu^{(j)}$ и $C_\mu^{(j)}$ находятся методом неопределенных коэффициентов.

В некоторых случаях постоянные A_n, A_{n-1}, ..., A_1 в разложении

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-x_1)^n r(x)} = \frac{A_n}{(x-x_1)^n} + \frac{A_{n-1}}{(x-x_1)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{R(x)}{r(x)}, \quad (2)$$

соответствующие множителю $(x - x_1)^n$, удобно находить следующим образом.

Умножив равенство (2) на $(x - x_1)^n$, получим

$$\frac{P(x)}{r(x)} = A_n + (x-x_1)A_{n-1} + \ldots + (x-x_1)^{n-1}A_1 + (x-x_1)^n \frac{R(x)}{r(x)}. \quad (3)$$

Заметив, что все слагаемые правой части равенства (3) при $x = x_1$ равны нулю, находим

$$A_n = \left. \frac{P(x)}{r(x)} \right|_{x=x_1}. \quad (4)$$

Далее, продифференцировав равенство (3), получим

$$\left(\frac{P(x)}{r(x)} \right)' = A_{n-1} + 2(x-x_1)A_{n-2} + \ldots + (n-1)(x-x_1)^{n-2}A_1 + (x-x_1) + (x-x_1)^{n-1} \frac{P_1(x)}{r_1(x)},$$

откуда находим

$$A_{n-1} = \left. \left(\frac{P(x)}{r(x)} \right)' \right|_{x=x_1}. \quad (5)$$

Продолжая описанный процесс, получим формулу

$$A_{n-k} = \frac{1}{k!} \left. \left(\frac{P(x)}{r(x)} \right)^{(k)} \right|_{x=x_1}, \qquad k = \overline{0, n-1}, \quad (6)$$

используемую для определения постоянных A_n, A_{n-1}, ..., A_1, соответствующих множителю $(x - x_1)^n$.

Аналогично вычисляются постоянные разложения (1), соответствующие другим действительным нулям многочлена $x \mapsto Q(x)$.

Применяя метод разложения рациональной дроби на простейшие множители, вычислить следующие интегралы:

69. $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx.$

◄ Выделив целую часть

$$\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} = 1 + \frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x},$$

а затем разложив знаменатель правильной дроби на множители, получим

$$\frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x} = \frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Согласно формуле (4), имеем

$$A = \left. \frac{5x^2-6x+1}{(x-2)(x-3)} \right|_{x=0} = \frac{1}{6}, \quad B = \left. \frac{5x^2-6x+1}{x(x-3)} \right|_{x=2} = -\frac{9}{2}, \quad C = \left. \frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)} \right|_{x=3} = \frac{28}{3}.$$

Интегрируя тождество

$$\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} = 1 + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x} - \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{x-2} + \frac{28}{3}\cdot\frac{1}{x-3},$$

окончательно получаем

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx = x + \frac{1}{6}\ln|x| - \frac{9}{2}\ln|x-2| + \frac{28}{3}\ln|x-3| + C, \quad x \neq 0,\ 2,\ 3. \ ▶$$

70. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^3-3x+2}$.

◀ Аналогично предыдущему имеем

$$\frac{x}{x^3-3x+2} = \frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{x+2}.$$

Пользуясь формулой (6), находим

$$A = \left.\frac{x}{x+2}\right|_{x=1} = \frac{1}{3}, \quad B = \left.\left(\frac{x}{x+2}\right)'\right|_{x=1} = \left.\frac{2}{(x+2)^2}\right|_{x=1} = \frac{2}{9}, \quad C = \left.\frac{x}{(x-1)^2}\right|_{x=-2} = -\frac{2}{9}.$$

Таким образом,

$$\int \frac{x\,dx}{x^3-3x+2} = \frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{2}{9}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{2}{9}\int\frac{dx}{x+2} =$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{2}{9}\ln|x-1| - \frac{2}{9}\ln|x+2| + C = -\frac{1}{3(x-1)} + \frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C,$$

$$x \neq 1, \ x \neq -2. \ ▶$$

71. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$.

◀ Имеем

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x+2)} + \frac{D}{(x+3)^3} + \frac{E}{(x+3)^2} + \frac{F}{x+3}. \qquad (1)$$

Пользуясь формулой (6), последовательно находим

$$A = \left.\frac{1}{(x+2)^2(x+3)^3}\right|_{x=-1} = \frac{1}{8}, \quad B = \left.\frac{1}{(x+1)(x+3)^3}\right|_{x=-2} = -1,$$

$$C = \left.\left(\frac{1}{(x+1)(x+3)^3}\right)'\right|_{x=-2} = \left.\frac{-(x+3)^3 - 3(x+1)(x+3)^2}{(x+1)^2(x+3)^6}\right|_{x=-2} = 2,$$

$$D = \left.\frac{1}{(x+1)(x+2)^2}\right|_{x=-3} = -\frac{1}{2},$$

$$E = \left.\left(\frac{1}{(x+1)(x+2)^2}\right)'\right|_{x=-3} = \left.\frac{-(x+2)^2 - 2(x+1)(x+2)}{(x+1)^2(x+2)^4}\right|_{x=-3} = -\frac{5}{4},$$

$$F = \frac{1}{2}\left.\left(\frac{1}{(x+1)(x+2)^2}\right)''\right|_{x=-3} =$$

$$= \left.\left(\frac{1}{(x+1)^3(x+2)^2} + \frac{2}{(x+1)^2(x+2)^3} + \frac{3}{(x+1)(x+2)^4}\right)\right|_{x=-3} = -\frac{17}{8}.$$

Подставив найденные коэффициенты в разложение (1) и проинтегрировав, получим

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3} = \frac{1}{8}\ln|x+1| + \frac{1}{x+2} + 2\ln|x+2| + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x+3)^2} +$$

$$+ \frac{5}{4(x+3)} - \frac{17}{8}\ln|x+3| + C = \frac{9x^2+50x+68}{4(x+2)(x+3)^2} + \frac{1}{8}\ln\left|\frac{(x+1)(x+2)^{16}}{(x+3)^{17}}\right| + C,$$

$$x \neq -3; -2; -1. \ ▶$$

72. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x+1)(x^2+x+1)}$.

◀ Имеем
$$\frac{1}{x(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}. \qquad (1)$$
По формуле (4) находим первые два коэффициента:
$$A = \left.\frac{1}{(x+1)(x^2+x+1)}\right|_{x=0} = 1. \qquad B = \left.\frac{1}{x(x^2+x+1)}\right|_{x=-1} = -1.$$
Далее приводим разложение (1) к общему знаменателю
$$1 = A(x+1)(x^2+x+1) + Bx(x^2+x+1) + (Cx+D)(x^2+x);$$
затем сравниваем коэффициенты при x^3 и x^2, получим систему
$$\begin{array}{c|l} x^3 & 0 = A+B+C, \\ x^2 & 0 = 2A+B+D+C, \end{array}$$
из которой находим $C=0,\ D=-1$. Проинтегрировав (1), получим
$$\int \frac{dx}{x(x+1)(x^2+x+1)} = \ln|x| - \ln|x+1| + \int \frac{dx}{x^2+x+1} =$$
$$= \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + \int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C, \qquad x \neq -1,\ 0. \ ▶$$

73. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}$.

◀ Поскольку $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$, то
$$\int \frac{dx}{x^3+1} = A\int\frac{dx}{x+1} + \int \frac{Bx+C}{x^2-x+1}\,dx.$$
Обычным методом получаем систему
$$\begin{array}{c|l} x^2 & 0 = A+B, \\ x & 0 = -A+B+C, \\ x^0 & 1 = A+C. \end{array}$$
Отсюда $A=\frac{1}{3},\ B=-\frac{1}{3},\ C=\frac{2}{3}$. Таким образом, при $x \neq -1$
$$\int\frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\int\frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\int\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)dx}{x^2-x+1} +$$
$$+ \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C. \ ▶$$

74. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^3-1}$.

◀ Имеем
$$\int\frac{x\,dx}{x^3-1} = A\int\frac{dx}{x-1} + \int\frac{Bx+C}{x^2+x+1}\,dx,$$
откуда получаем $x \equiv A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)$;
$$\begin{array}{c|l} x^2 & 0 = A+B, \\ x & 1 = A-B+C, \\ x^0 & 0 = A-C. \end{array}$$

Решая полученную систему, находим

$$A=\frac{1}{3},\qquad B=-\frac{1}{3},\qquad C=\frac{1}{3}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{x\,dx}{x^3-1}=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\int\frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln|x^2+x+1|+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C=\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C\quad(x\neq 1).\ ►$$

75. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^4+1}$.

◄ Поскольку

$$x^4+1=(x^2+1)^2-2x^2=(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1),$$

то разложение подынтегральной функции на простые дроби ищем в виде

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x\sqrt{2}+1}.$$

Из тождества

$$1\equiv(Ax+B)(x^2-x\sqrt{2}+1)+(Cx+D)(x^2+x\sqrt{2}+1)$$

получаем систему уравнений

$$\begin{array}{c|l} x^3 & 0=A+C,\\ x^2 & 0=-\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D,\\ x & 0=A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D,\\ x^0 & 1=B+D. \end{array}$$

Отсюда $A=-C=\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $B=D=\frac{1}{2}$. Следовательно,

$$\int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}\,dx-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}\,dx=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x+\frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}\,dx+$$

$$+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}\,dx+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}(\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1)+\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}-1))+C.$$

Учитывая формулы сложения арктангенсов (см. пример 268, гл. I), окончательно получаем

$$I(x)=\int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\varepsilon(x)+C,$$

где

$$\varepsilon(x)=\begin{cases}+1, & \text{если } x>1,\\ 0, & \text{если } |x|=1,\\ -1, & \text{если } x<-1,\end{cases}$$

$$I(1)=\lim_{x\to1}I(x);\qquad I(-1)=\lim_{x\to-1}I(x).\ ►$$

76. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}$.

◄ Поскольку $x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2=(x^2-x+1)(x^2+x+1)$, то разложение ищем в виде

$$\frac{1}{x^4+x^2+1}=\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}.$$

Из тождества $1 \equiv (Ax+B)(x^2-x+1)+(Cx+D)(x^2+x+1)$ получаем систему

$$\begin{array}{c|l} x^3 & 0 = A + C, \\ x^2 & 0 = -A + B + C + D, \\ x & 0 = A - B + C + D, \\ x^0 & 1 = B + D. \end{array}$$

Отсюда $A = B = -C = D = \frac{1}{2}$. Таким образом,

$$\int \frac{dx}{x^4+x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2-x+1}\,dx =$$
$$= \frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

Заметим, что (см. пример 268, гл. 1)

$$\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2} + \pi\varepsilon(x),$$

где функция $\varepsilon(x)$ определена в предыдущем примере, а значения арктангенса в правой части в точках $x = \pm 1$ равны предельным значениям в этих точках.

Окончательно имеем

$$\int \frac{dx}{x^4+x^2+1} = \frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\varepsilon(x) + C. \blacktriangleright$$

77. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^6+1}$.

◀ Сначала преобразуем подынтегральную функцию

$$\frac{1}{x^6+1} = \frac{(x^4+1)+(1-x^4)}{2(x^6+1)} = \frac{x^4+1}{2(x^6+1)} + \frac{1-x^4}{2(x^6+1)} =$$
$$= \frac{(x^4-x^2+1)+x^2}{2(x^2+1)(x^4-x^2+1)} + \frac{(1-x^2)(1+x^2)}{2(x^4-x^2+1)(1+x^2)} = \frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{x^2}{2(x^6+1)} - \frac{x^2-1}{2(x^4-x^2+1)}.$$

Первые два слагаемых легко интегрируются, поэтому найдем разложение на простые дроби только последнего слагаемого. Имеем

$$\frac{-x^2+1}{2(x^4-x^2+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{3}\,x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{3}\,x+1};$$
$$-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2} \equiv (Ax+B)(x^2-\sqrt{2}\,x+1)+(Cx+D)(x^2+\sqrt{3}\,x+1);$$
$$\begin{array}{c|l} x^3 & 0 = A + C, \\ x^2 & -\frac{1}{2} = -\sqrt{3}A + B + \sqrt{3}C + D, \\ x & 0 = A - \sqrt{3}B + C + \sqrt{3}D, \\ x^0 & \frac{1}{2} = B + D. \end{array}$$

Отсюда $A = -C = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, $B = D = \frac{1}{4}$, поэтому

$$\frac{1}{x^6+1} = \frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{x^2}{2(x^6+1)} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{x+\frac{\sqrt{3}}{2}}{x^2+\sqrt{3}\,x+1} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{x-\frac{\sqrt{3}}{2}}{x^2-\sqrt{3}\,x+1}.$$

Интегрируя это равенство, получаем

$$\int \frac{dx}{x^6+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{6}\operatorname{arctg} x^3 + \frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+\sqrt{3}\,x+1}{x^2-\sqrt{3}\,x+1} + C. \blacktriangleright$$

78. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}$.

◄ Поскольку $x^5-x^4+x^3-x^2+x-1=x^4(x-1)+x^2(x-1)+(x-1)=(x-1)(x^4+x^2+1)=(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$, то разложение подынтегральной функции на простые дроби имеет вид
$$\frac{1}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}+\frac{Dx+E}{x^2-x+1}.$$
Из тождества $1\equiv A(x^4+x^2+1)+(Bx+C)(x-1)(x^2-x+1)+(Dx+E)(x^3-1)$ получаем систему
$$\begin{array}{c|l} x^4 & 0=A+B+D, \\ x^3 & 0=-2B+C+E, \\ x^2 & 0=A+2B-2C, \\ x & 0=-B+2C-D, \\ x^0 & 1=A-C-E, \end{array}$$
решая которую, находим
$$A=-B=\frac{1}{3},\quad C=-\frac{1}{6},\quad D=0,\quad E=-\frac{1}{2}.$$
Таким образом,
$$\int\frac{dx}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln|x^2+x+1|-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C=$$
$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C,\quad x\neq 1. ►$$

79. При каком условии интеграл $\int\frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}\,dx$ представляет собой рациональную функцию?

◄ Интеграл представляет собой рациональную функцию, если в разложении
$$\frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}=\frac{A}{x^3}+\frac{B}{x^2}+\frac{D}{x}+\frac{E}{(x-1)^2}+\frac{F}{x-1}$$
коэффициенты D и F равны нулю. Предполагая последнее, имеем
$$ax^2+bx+c\equiv A(x^2-2x+1)+B(x^3-2x^2+x)+Ex^3.$$
Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему
$$\begin{array}{c|l} x^3 & 0=B+E, \\ x^2 & a=A-2B, \\ x & b=-2A+B, \\ x^0 & c=A. \end{array}$$
Исключая из этой системы неизвестные A, B и E, находим требуемое условие:
$$a+2b+3c=0. ►$$

Применяя метод Остроградского (см.: Л я ш к о И. И. и др. Математический анализ. К., 1983. Ч. 1, с. 381) найти интегралы:

80. $\int\frac{x\,dx}{(x-1)^2(x+1)^3}$.

◄ Имеем
$$\int\frac{x\,dx}{(x-1)^2(x+1)^3}=\frac{Ax^2+Bx+C}{(x-1)(x+1)^2}+D\int\frac{dx}{x-1}+E\int\frac{dx}{x+1}.$$
Дифференцируя обе части равенства, находим
$$\frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3}=\frac{(x^2-1)(2Ax+B)-(3x-1)(Ax^2+Bx+C)}{(x-1)^2(x+1)^3}+\frac{D}{x-1}+\frac{E}{x+1}.$$
Приводя к общему знаменателю и приравнивая числители, получаем
$$x\equiv-Ax^3+(A-2B)x^2+(-2A+B-3C)x+C-B+$$
$$+D(x-1)(x^3+3x^2+3x+1)+E(x^4-2x^2+1).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях этого тождества, получаем систему

$$\begin{array}{l|l} x^4 & 0 = D + E, \\ x^3 & 0 = -A + 2D, \\ x^2 & 0 = A - 2B - 2E, \\ x & 1 = -2A + B - 3C - 2D, \\ x^0 & 0 = C - B - D + E, \end{array}$$

решая которую, находим

$$A = B = -\frac{1}{8}, \quad C = -\frac{1}{4}, \quad D = -E = -\frac{1}{16}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2(x+1)^3} = -\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2} + \frac{1}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C, \quad x \neq \pm 1. ►$$

81. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^3+1)^2}$.

◄ Имеем

$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2} = \frac{Ax^2+Bx+C}{x^3+1} + D\int\frac{dx}{x+1} + \int\frac{Ex+F}{x^2-x+1}\,dx.$$

Дифференцируя и приводя к общему знаменателю, получаем тождество $1 \equiv -Ax^4 - 2Bx^3 - 3Cx^2 + 2Ax + B + D(x^5 - x^4 + x^3 + x^2 - x + 1) + (Ex+F)(x^4 + x^3 + x + 1)$, откуда

$$\begin{array}{l|l} x^5 & 0 = D + E, \\ x^4 & 0 = -A - D + E + F, \\ x^3 & 0 = -2B + D + F, \\ x^2 & 0 = -3C + D + E, \\ x & 0 = 2A - D + E + F, \\ x^0 & 1 = B + D + F; \end{array}$$

$$A = C = 0, \quad B = \frac{1}{3}, \quad D = -E = \frac{2}{9}, \quad F = \frac{4}{9}.$$

Таким образом,

$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2} = \frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{2}{9}\ln|x+1| - \frac{2}{9}\int\frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx =$$
$$= \frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{1}{9}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C, \quad x \neq -1. ►$$

82. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+2x+2)^2}$.

◄ Имеем

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \int\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}\,dx,$$

откуда, дифференцируя и приводя к общему знаменателю, получаем тождество

$$x^2 \equiv A(x^2+2x+2) - (Ax+B)(2x+2) + (Cx+D)(x^2+2x+2).$$

Для определения неизвестных получаем систему

$$\begin{array}{l|l} x^3 & 0 = C, \\ x^2 & 1 = -A + 2C + D, \\ x & 0 = -2B + 2C + 2D, \\ x^0 & 0 = 2A - 2B + 2D, \end{array}$$

решая которую, находим

$$A = 0, \quad B = 1, \quad C = 0, \quad D = 1.$$

Тогда

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{1}{x^2+2x+2} + \operatorname{arctg}(x+1) + C. \blacktriangleright$$

83. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^4+1)^2}$.

◀ Имеем

$$\int \frac{dx}{(x^4+1)^2} = \frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^4+1} + \int \frac{Ex^3+Fx^2+Gx+H}{x^4+1}\,dx,$$

откуда

$$1 \equiv (3Ax^2+2Bx+C)(x^4+1) - 4x^3(Ax^3+Bx^2+Cx+D) + (x^4+1)(Ex^3+Fx^2+Gx+H);$$

$$\begin{array}{c|l} x^7 & 0 = E, \\ x^6 & 0 = -A+F, \\ x^5 & 0 = -2B+G, \\ x^4 & 0 = -3C+H, \end{array} \qquad \begin{array}{c|l} x^3 & 0 = -4D+E, \\ x^2 & 0 = 3A+F, \\ x & 0 = 2B+G, \\ x^0 & 1 = C+H. \end{array}$$

Решая систему, получаем

$$A = B = D = E = F = G = 0, \quad C = \frac{1}{4}, \quad H = \frac{3}{4}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{(x^4+1)^2} = \frac{x}{4(x^4+1)} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x^4+1}.$$

Пользуясь результатами примера 75, окончательно находим

$$\int \frac{dx}{(x^4+1)^2} = \frac{x}{4(x^4+1)} + \frac{3}{16\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{3}{8\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + \frac{3\pi\varepsilon(x)}{8\sqrt{2}} + C,$$

где $\varepsilon(x)$ — то же, что и в примере 75. ▶

84. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^4-1)^3}$.

◀ Применяя метод Остроградского, интеграл представим в виде

$$\int \frac{dx}{(x^4-1)^2} = \frac{Ax^7+Bx^6+Cx^5+Dx^4+Ex^3+Fx^2+Gx+H}{(x^4-1)^2} + \int \frac{Kx^3+Lx^2+Mx+N}{x^4-1}\,dx$$

Дифференцируя и приводя к общему знаменателю, получаем тождество

$$\begin{aligned} 1 \equiv (x^4-1)(7Ax^6+6Bx^5+5Cx^4+4Dx^3+3Ex^2+2Fx+G) - \\ - 8x^3(Ax^7+Bx^6+Cx^5+Dx^4+Ex^3+Fx^2+Gx+H) + \\ + (x^8-2x+1)(Kx^3+Lx^2+Mx+N). \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства, имеем

$$\begin{array}{c|l} x^{11} & 0 = K, \\ x^{10} & 0 = -A+L, \\ x^9 & 0 = -2B+M, \\ x^8 & 0 = -3C+N, \\ x^7 & 0 = -4D-2K, \\ x^6 & 0 = -7A-5E-2L, \end{array} \qquad \begin{array}{c|l} x^5 & 0 = -6B-6F-2M, \\ x^4 & 0 = -5C-7G-2N, \\ x^3 & 0 = -4D-8H+K, \\ x^2 & 0 = -3E+L, \\ x & 0 = -2F+M, \\ x^0 & 1 = -G+N. \end{array}$$

Решая систему, получаем

$$A = B = D = E = F = H = K = L = M = 0, \quad C = \frac{7}{32}, \quad G = -\frac{11}{32}, \quad N = \frac{21}{32}.$$

Таким образом,

$$\int \frac{dx}{(x^4-1)^3} = \frac{7x^5-11x}{32(x^4-1)^2} + \frac{21}{32}\int \frac{dx}{x^4-1}.$$

Вычисляя последний интеграл, окончательно получаем

$$\int \frac{dx}{(x^4-1)^3} = \frac{7x^5-11x}{32\,(x^4-1)^2} + \frac{21}{128}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{21}{64}\operatorname{arctg} x + C. \blacktriangleright$$

Выделить рациональную часть следующих интегралов:

85. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}\,dx.$

◀ Имеем

$$\int \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}\,dx = \frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^4+x^2+1} + \int \frac{Ex^3+Fx^2+Gx+H}{x^4+x^2+1}\,dx,$$

откуда получаем тождество

$$x^2+1 \equiv (x^4+x^2+1)(3Ax^2+2Bx+C) - (4x^3+2x)(Ax^3+ \\ + Bx^2+Cx+D) + (x^4+x^2+1)(Ex^3+Fx^2+Gx+H).$$

Из системы уравнений

$$\begin{array}{l|l} x^7 & 0 = E, \\ x^6 & 0 = -A+F, \\ x^5 & 0 = -2B+G+E, \\ x^4 & 0 = A-3C+F+H, \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} x^3 & 0 = -4D+G+E, \\ x^2 & 1 = 3A-C+H+F, \\ x & 0 = 2B-2D+G, \\ x^0 & 1 = C+H \end{array}$$

находим $A=\frac{1}{6}$, $C=\frac{1}{3}$, $B=D=G=0$, $F=\frac{1}{6}$, $H=\frac{2}{3}$.

Таким образом, рациональная часть равна выражению

$$\frac{x^3+2x}{6\,(x^4+x^2+1)}. \blacktriangleright$$

86. $\displaystyle\int \frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2}\,dx.$

◀ Разложение ищем в виде

$$\int \frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2}\,dx = \frac{Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E}{x^5+x+1} + \int \frac{Fx^4+Gx^3+Hx^2+Kx+L}{x^5+x+1}\,dx,$$

отсюда получаем тождество

$$4x^5-1 \equiv (x^5+x+1)(4Ax^3+3Bx^2+2Cx+D) - \\ - (5x^4+1)(Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E) + \\ + (x^5+x+1)(Fx^4+Gx^3+Hx^2+Kx+L);$$

решая систему уравнений

$$\begin{array}{l|l} x^9 & 0 = F, \\ x^8 & 0 = -A+G, \\ x^7 & 0 = -2B+H, \\ x^6 & 0 = -3C+K, \\ x^5 & 4 = -4D+L+F, \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} x^4 & 0 = 3A-5E+G+F, \\ x^3 & 0 = 4A+2B+G+H, \\ x^2 & 0 = 3B+C+K+H, \\ x & 0 = 2C+L+K, \\ x^0 & -1 = D-E+L, \end{array}$$

находим $A=B=C=E=F=G=H=K=L=0$, $D=-1$. Таким образом, интеграл сводится к своей рациональной части:

$$\frac{-x}{x^5+x+1}. \blacktriangleright$$

Применяя различные методы, найти следующие интегралы:

87. $\displaystyle\int \frac{x^2+x}{x^6+1}\,dx.$

◀ Имеем

$$\int \frac{x^2+x}{x^6+1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3)}{x^6+1} + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{x^6+1}.$$

Используя пример 73, окончательно имеем

$$\int \frac{x^2+x}{x^6+1}\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x^3 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{12}\ln\frac{(x^2+1)^2}{x^4-x^2+1} + C. \blacktriangleright$$

88. $\displaystyle\int \frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}\,dx.$

◀ Полагая $x^4 = t$, находим

$$\int \frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{(t-3)\,dt}{t(t+1)(t+2)}.$$

Разложение функции на простые дроби ищем в виде

$$\frac{t-3}{t(t+1)(t+2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{t+2},$$

откуда $t-3 \equiv A(t+1)(t+2) + Bt(t+2) + Ct(t+1)$.

Полагая последовательно $t = 0, -1, -2$, находим

$$A = -\frac{3}{2}, \quad B = 4, \quad C = -\frac{5}{2}.$$

Таким образом,

$$\int \frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}\,dx = -\frac{3}{8}\ln|t| + \ln|t+1| - \frac{5}{8}\ln|t+2| + C =$$

$$= -\frac{3}{8}\ln x^4 + \ln(x^4+1) - \frac{5}{8}\ln(x^4+2) + C, \quad x \neq 0. \blacktriangleright$$

89. $\displaystyle\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}\,dx.$

◀ Имеем

$$\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}\,dx = \frac{1}{n}\int \frac{x^n\,d(x^n)}{x^n+1} = \frac{1}{n}\int \frac{(x^n+1)-1}{x^n+1}\,d(x^n) =$$

$$= \frac{1}{n}\int\left(1 - \frac{1}{x^n+1}\right)d(x^n) = \frac{1}{n}(x^n - \ln|x^n+1|) + C,$$

где $-\infty < x < +\infty$ при четном n и $x \neq -1$ при нечетном $n \neq 0$. ▶

90. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)^2}.$

◀ Умножая числитель и знаменатель на x^4, получаем

$$\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)^2} = \frac{1}{5}\int \frac{d(x^5)}{x^5(x^{10}+1)^2} = \frac{1}{5}\int \frac{(x^{10}+1)-x^{10}}{x^5(x^{10}+1)^2}\,d(x^5) =$$

$$= \frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{x^5(x^{10}+1)} - \frac{x^5}{(x^{10}+1)^2}\right)d(x^5) = \frac{1}{5}\int\left(\frac{(x^{10}+1)-x^{10}}{x^5(x^{10}+1)} - \frac{x^5}{(x^{10}+1)^2}\right)d(x^5) =$$

$$= \frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{x^5} - \frac{x^5}{x^{10}+1} - \frac{x^5}{(x^{10}+1)^2}\right)d(x^5) = \frac{1}{5}\ln|x^5| - \frac{1}{10}\ln(x^{10}+1) + \frac{1}{10(x^{10}+1)} + C =$$

$$= \frac{1}{10}\left(\ln\frac{x^{10}}{x^{10}+1} + \frac{1}{x^{10}+1}\right) + C, \quad x \neq 0. \blacktriangleright$$

91. $\displaystyle\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)}\,dx$

◀ Полагая $x^7 = t$, получаем

$$\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)}\,dx = \frac{1}{7}\int \frac{1-t}{t(1+t)}\,dt = \frac{1}{7}\int \frac{(1+t)-2t}{t(1+t)}\,dt = \frac{1}{7}\int\left(\frac{1}{t} - \frac{2}{1+t}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{7}(\ln|t| - 2\ln|1+t|) + C = \frac{1}{7}\ln\frac{|x^7|}{(1+x^7)^2} + C, \quad x \neq 0; -1 \quad \blacktriangleright$$

92. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\,dx.$

◀ Имеем при $x \neq 0$

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\,dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+1+\frac{1}{x^2}}\,dx = \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}} + \begin{cases} C_1, & \text{если } x>0, \\ C_2, & \text{если } x<0. \end{cases}$$

Вследствие непрерывности первообразной имеем

$$\Phi(-0) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + C_2 = -\frac{\pi}{2\sqrt{3}} + C_1 = \Phi(+0),$$

где $\Phi(x)$ — первообразная подынтегральной функции

Таким образом,

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\operatorname{sgn} x + C, & x \neq 0, \\ C, & x = 0. \end{cases}$$ ▶

93. $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^4+x^3+x^2+x+1}\,dx.$

◀ После очевидных преобразований имеем

$$\int \frac{x^2-1}{x^4+x^3+x^2+x+1}\,dx = \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\,dx = \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)-1} =$$

$$= \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{2x^2+(1-\sqrt{5})x+2}{2x^2+(1+\sqrt{5})x+2} + C.$$ ▶

94. $\displaystyle\int \frac{x^5-x}{x^8+1}\,dx.$

◀ Аналогично предыдущему примеру имеем

$$\int \frac{x^5-x}{x^8+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{x^4-1}{x^8+1}\,d(x^2) = \frac{1}{2}\int \frac{1-\frac{1}{x^4}}{x^4+\frac{1}{x^4}}\,d(x^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^4-x^2\sqrt{2}+1}{x^4+x^2\sqrt{2}+1} + C.$$ ▶

95. $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx.$

◀ Производя надлежащие преобразования, получаем

$$\int \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx = \int \frac{(x^4-x^2+1)+x^2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}\,dx = \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{x^2\,dx}{x^6+1} =$$

$$= \int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3)}{x^6+1} = \operatorname{arctg} x + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}(x^3) + C.$$ ▶

96. Вывести рекуррентную формулу для вычисления интеграла $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$, $a \neq 0$. Пользуясь этой формулой, вычислить $I_3 = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^3}$.

◀ Используя тождество

$$ax^2+bx+c = \frac{1}{4a}\left((2ax+b)^2+(4ac-b^2)\right)$$

и производя замену $2ax+b=t$, получаем

$$I_n = \frac{(4a)^n}{2a}\int \frac{dt}{(t^2+\Delta)^n}, \quad \text{где } \Delta = 4ac-b^2.$$

Интегрируя по частям I_{n-1}, получаем

$$I_{n-1} = \frac{(4a)^{n-1}}{2a}\left(\frac{t}{(t^2+\Delta)^{n-1}} - 2(1-n)\int \frac{t^2+\Delta-\Delta}{(t^2+\Delta)^n}\,dt\right) =$$

$$= \frac{(4a)^{n-1}t}{2a(t^2+\Delta)^{n-1}} - \frac{(4a)^{n-1}(1-n)}{a}\int \frac{dt}{(t^2+\Delta)^{n-1}} + (1-n)\frac{(4a)^{n-1}}{a}\int \frac{dt}{(t^2+\Delta)^n},$$

т. е. $I_{n-1} = \frac{(4a)^{n-1}t}{2a(t^2+\Delta)^{n-1}} - 2(1-n)I_{n-1} + \frac{2(1-n)\Delta}{4a}I_n$.

Решая это равенство относительно I_n, находим

$$I_n = -\frac{(4a)^{n-1}t}{\Delta(1-n)(t^2+\Delta)^{n-1}} + \frac{(3-2n)\,2a}{(1-n)\Delta}\,I_{n-1}.$$

Подставляя вместо t его значение, окончательно имеем

$$I_n = \frac{2ax+b}{(n-1)\Delta(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{2n-3}{n-1}\cdot\frac{2a}{\Delta}\,I_{n-1}.$$

В предложенном примере $a = b = c = 1$, $n = 3$, $\Delta = 4$. Таким образом,

$$I_3 = \frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2} + \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2} + \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2} + \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \blacktriangleright$$

Упражнения для самостоятельной работы

Методом неопределенных коэффициентов найти интегралы:

87. $\int \frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+6}\,dx$. **88.** $\int \left(\frac{x}{x^2+6x+3}\right)^2 dx$. **89.** $\int \frac{3x^2+x+3}{(x-1)^3(x^2+1)}\,dx$.

90. $\int \frac{dx}{x(4+x^2)^2(1+x^2)}$. **91.** $\int \frac{dx}{x^7-4x^5+6x^3-4x}$. **92.** $\int \frac{x^5-x^2-1}{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}\,dx$.

Найти рациональную часть в следующих интегралах:

93. $\int \frac{3x^5+4x^3+x}{(x^3+x+1)^2}\,dx$. **94.** $\int \frac{(2-3x+x^2)\,dx}{(x+1)^2(x^2+x+1)^2}$. **95.** $\int \frac{2-5x^4}{(x^6+1)^2}\,dx$. **96.** $\int \frac{1-64x^7-7x^8}{(1+x^8)^2}\,dx$.

§ 3. Интегрирование иррациональных функций

С помощью приведения подынтегральных выражений к рациональным функциям найти следующие интегралы:

97. $\displaystyle\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}\,dx, \quad x \neq -1.$

◄ Полагая $x+2 = t^3$, имеем

$$\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}\,dx = 3\int \frac{t^6-2t^3}{t^3+t-2}\,dt = 3\int\left(t^3 - t + \frac{t^2-2t}{(t-1)(t^2+t+2)}\right)dt =$$

$$= \frac{3}{4}t^4 - \frac{3}{2}t^2 + \int \frac{3t^2-6t}{(t-1)(t^2+t+2)}\,dt.$$

К последнему интегралу применим метод неопределенных коэффициентов:

$$\frac{3t^2-6t}{(t-1)(t^2+t+2)} = \frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2+t+2}.$$

Отсюда находим

$$A = -\frac{3}{4}, \quad B = \frac{15}{4}, \quad C = -\frac{3}{2}$$

и вычисляем интеграл

$$\int \frac{3t^2-6t}{(t-1)(t^2+t+2)}\,dt = -\frac{3}{4}\int\frac{dt}{t-1} + \frac{15}{4}\int \frac{t-\frac{2}{5}}{t^2+t+2}\,dt =$$

$$= -\frac{3}{4}\ln|t-1| + \frac{15}{8}\ln|t^2+t+2| - \frac{27}{4\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{7}} + C.$$

Окончательно имеем

$$\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}\,dx = \frac{3}{4}t^4 - \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{4}\ln|t-1| + \frac{15}{8}\ln(t^2+t+2) - \frac{27}{4\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{7}} + C. \blacktriangleright$$

98. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}$, $a > 0$.

◀ Заметим, что

$$I = \int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}} = \int \sqrt[4]{\frac{x}{a-x}}\,dx, \quad 0 < x < a.$$

Подстановка $\frac{x}{a-x} = t^4$ приводит к интегралу рациональной функции

$$I = 4a\int \frac{t^4\,dt}{(t^4+1)^2} = a\int t\,d\left(\frac{t^4}{1+t^4}\right), \qquad 0 < t < +\infty.$$

Интегрируя по частям, находим

$$I = a\frac{t^5}{1+t^4} - a\int \frac{t^4}{1+t^4}\,dt = \frac{at^5}{1+t^4} - at + a\int \frac{dt}{1+t^4} = -\frac{at}{1+t^4} + a\int \frac{dt}{1+t^4}.$$

Последний интеграл вычислим путем преобразования подынтегрального выражения:

$$\int \frac{dt}{1+t^4} = \frac{1}{2}\int \frac{(1+t^2)+(1-t^2)}{1+t^4}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1+t^2}{1+t^4}\,dt - \frac{1}{2}\int \frac{t^2-1}{1+t^4}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1+\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}}\,dt - \frac{1}{2}\int \frac{1-\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t-\frac{1}{t}\right)}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2} + \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t+\frac{1}{t}\right)}{2-\left(t+\frac{1}{t}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t^2-1}{t\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}.$$

Таким образом, окончательно получим

$$I = -\frac{at}{1+t^4} + \frac{a}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1} + \frac{a}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t^2-1}{t\sqrt{2}} + C. \blacktriangleright$$

99. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}$ (n — натуральное число).

◀ Заметим, что

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}} = \int \frac{dx}{\sqrt[n]{\left(\frac{x-b}{x-a}\right)^{n-1}(x-a)^{2n}}}.$$

Положим $\frac{x-b}{x-a} = t^n$. Тогда $\frac{dx}{(x-a)^2} = \frac{n}{b-a}t^{n-1}\,dt$ и

$$I = \frac{n}{b-a}\int \frac{t^{n-1}}{t^{n-1}}\,dt = \frac{n}{b-a}\int dt = \frac{n}{b-a}t + C = \frac{n}{b-a}\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}} + C. \blacktriangleright$$

Применяя формулу

$$\int \frac{P_n(x)}{y}\,dx = Q_{n-1}(x)\,y + \lambda\int \frac{dx}{y},$$

где $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$, $P_n(x)$ — многочлен степени n, $Q_{n-1}(x)$ — многочлен степени $n-1$, λ — число, найти следующие интегралы:

100. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx$.

◀ Имеем

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+2x-x^2}} = (Ax^2+Bx+C)\sqrt{1+2x-x^2} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{2-(x-1)^2}}.$$

Дифференцируя это тождество и приводя к общему знаменателю, получаем $x^3 \equiv (2Ax+B)(1+2x-x^2)+(Ax^2+Bx+C)(1-x)+\lambda$, откуда

$$\begin{array}{c|l} x^3 & 1=-3A, \\ x^2 & 0=5A-2B, \\ x & 0=2A+3B-C, \\ x^0 & 0=B+C+\lambda, \end{array}$$

$$A=-\frac{1}{3}, \quad B=-\frac{5}{6}, \quad C=-\frac{19}{3}, \quad \lambda=4.$$

Таким образом, окончательно имеем при $|x-1|<\sqrt{2}$

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+2x-x^2}} = -\frac{2x^2+5x+19}{6}\sqrt{1+2x-x^2}+4\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}}+C. ▶$$

101. $\int x^4\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$

◀ Имеем

$$\int x^4\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int \frac{a^2x^4-x^6}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx =$$
$$= (Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F)\sqrt{a^2-x^2}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

откуда

$$a^2x^4-x^6 \equiv (5Ax^4+4Bx^3+3Cx^2+2Dx+E)(a^2-x^2)-x(Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F)+\lambda.$$

Для определения коэффициентов разложения сравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{array}{c|l} x^6 & -1=-6A, \\ x^5 & 0=-5B, \\ x^4 & a^2=5a^2A-4C, \\ x^3 & 0=4Ba^2-3D, \end{array} \qquad \begin{array}{c|l} x^2 & 0=3Ca^2-2E, \\ x & 0=2Da^2-F, \\ x^0 & 0=Ea^2+\lambda. \\ & \end{array}$$

Из этой системы находим

$$A=\frac{1}{6}, \quad B=0, \quad C=-\frac{a^2}{24}, \quad D=0, \quad E=-\frac{a^4}{16}, \quad F=0, \quad \lambda=\frac{a^6}{16}.$$

Следовательно,

$$\int x^4\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \left(\frac{x^5}{6}-\frac{a^2x^3}{24}-\frac{a^4x}{16}\right)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^6}{16}\arcsin\frac{x}{|a|}+C, \qquad |x|\leqslant|a|. ▶$$

102. $\int \frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}.$

◀ Применяя подстановку $x+1=\frac{1}{t}$, получаем

$$I=\int\frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}} = -\int\frac{t^4\,d|t|}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Имеем

$$-\int\frac{t^4\,d|t|}{\sqrt{1-t^2}} = (A|t|^3+B|t|^2+C|t|+D)\sqrt{1-t^2}+\lambda\int\frac{d|t|}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Дифференцируя по $|t|$ и приводя к общему знаменателю, получаем тождество $-|t|^4 \equiv (3A|t|^2+2B|t|+C)(1-|t|^2)-|t|(A|t|^3+B|t|^2+C|t|+D)+\lambda$, откуда

$$\begin{array}{c|l} |t|^4 & -1=-4A, \\ |t|^3 & 0=-3B, \\ |t|^2 & 0=3A-2C, \end{array} \qquad \begin{array}{c|l} |t| & 0=2B-D, \\ |t|^0 & 0=C+\lambda, \\ & \end{array}$$

$$A=\frac{1}{4}, \quad B=0, \quad C=\frac{3}{8}, \quad D=0, \quad \lambda=-\frac{3}{8}$$

Таким образом,

$$I = \left(\frac{1}{4|x+1|^3} + \frac{3}{8|x+1|}\right)\sqrt{1 - \frac{1}{(x+1)^2}} - \frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{|x+1|} + C =$$
$$= \frac{3x^2+6x+5}{8(x+1)^4}\sqrt{x^2+2x} - \frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{|x+1|} + C, \quad x < -2, \quad x > 0. ▶$$

103. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}\,dx.$

◀ Имеем

$$\frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1} = \frac{x^2+2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} + \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+2}).$$

Для вычисления интеграла $\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$ применим подстановку $\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} = t$. Тогда

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} = \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}\,dx = \ln(x+\sqrt{x^2+2}) + \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} + C. ▶$$

Приводя квадратные трехчлены к каноническому виду, вычислить следующие интегралы:

104. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}.$

◀ Имеем

$$I = \int \frac{x^2\,dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2+2x-x^2}} + \int \frac{(2x-4)\,dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}.$$

Первый из этих интегралов вычисляется непосредственно:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2+2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3-(x-1)^2}} = \arcsin\frac{x-1}{\sqrt{3}}.$$

Ко второму интегралу применим подстановку $x-1=z$. Тогда он преобразуется к интегралу

$$\int \frac{2z-2}{(3+z^2)\sqrt{3-z^2}}\,dz,$$

который раскладывается на два интеграла

$$I_1 + I_2 = \int \frac{2z\,dz}{(3+z^2)\sqrt{3-z^2}} - 2\int \frac{dz}{(3+z^2)\sqrt{3-z^2}}.$$

Первый из них вычисляется с помощью подстановки $\sqrt{3-z^2} = t$:

$$I_1 = -2\int \frac{dt}{6-t^2} = -\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}+t}{\sqrt{6}-t}\right|.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$I_1 = -\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2+2x-x^2}}.$$

Для вычисления интеграла $I_1 = -2\int \frac{dz}{(3+z^2)\sqrt{3-z^2}}$ полагаем $\frac{z}{\sqrt{3-z^2}} = t$; тогда

$$I_2 = -\frac{2}{3}\int \frac{dt}{2t^2+1} = -\frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{2}t = -\frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}(x-1)}{\sqrt{2+2x-x^2}}.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$I = \arcsin\frac{x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2+2x-x^2}} - \frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}(x-1)}{\sqrt{2+2x-x^2}} + C. \blacktriangleright$$

105. С помощью дробно-линейной подстановки $x = \dfrac{\alpha+\beta t}{1+t}$ вычислить интеграл

$$I = \int \frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

◀ Применяя предложенную подстановку, получаем

$$x^2-x+1 = \frac{(\alpha+\beta t)^2-(1+t)(\alpha+\beta t)+(1+t)^2}{(1+t)^2};$$

$$x^2+x+1 = \frac{(\alpha+\beta t)^2+(1+t)(\alpha+\beta t)+(1+t)^2}{(1+t)^2}.$$

Числа α и β определяем так, чтобы коэффициенты при t были равны нулю. Следовательно,

$$2\alpha\beta-\alpha-\beta+2=0, \quad 2\alpha\beta+\alpha+\beta+2=0.$$

Решая систему, находим $\alpha=1$, $\beta=-1$. Тогда

$$x=\frac{1-t}{1+t}, \quad dx=\frac{-2\,dt}{(1+t)^2}, \quad x^2-x+1=\frac{3t^2+1}{(1+t)^2};$$

$\sqrt{x^2+x+1}=\frac{\sqrt{t^2+3}}{1+t}$ (для случая, когда $1+t>0$, т. е. если $x>-1$).

Таким образом,

$$I=-2\int\frac{(t+1)\,dt}{(3t^2+1)\sqrt{t^2+3}} = -2\int\frac{t\,dt}{(3t^2+1)\sqrt{t^2+3}} - 2\int\frac{dt}{(3t^2+1)\sqrt{t^2+3}}.$$

Для вычисления первого из этих интегралов применим подстановку $\sqrt{t^2+3}=u$. Тогда

$$-2\int\frac{t\,dt}{(3t^2+1)\sqrt{t^2+3}} = 2\int\frac{du}{8-3u^2} = \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}u}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}u}\right| = \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3(t^2+3)}}{2\sqrt{2}-\sqrt{3(t^2+3)}}\right|.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$-2\int\frac{t\,dt}{(3t^2+1)\sqrt{t^2+3}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{(1+x)\sqrt{2}+\sqrt{3(x^2+x+1)}}{\sqrt{x^2-x+1}}\right|.$$

Второй интеграл вычисляется с помощью подстановки $\frac{t}{\sqrt{t^2+3}}=z$:

$$-2\int\frac{dt}{(3t^2+1)\sqrt{t^2+3}} = -2\int\frac{dz}{8z^2+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{2}z}{1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}(1-x)}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Окончательно имеем

$$I=\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{(1+x)\sqrt{2}+\sqrt{3(x^2+x+1)}}{\sqrt{x^2-x+1}}\right| - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}(1-x)}{\sqrt{x^2+x+1}}+C. \blacktriangleright$$

Применяя подстановки Эйлера:

1) $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x+z$, если $a>0$;

2) $\sqrt{ax^2+bx+c}=xz\pm\sqrt{c}$, если $c>0$;

3) $\sqrt{ax^2+bx+c}\equiv\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=z(x-x_1)$, найти следующие интегралы:

106 $I=\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

◀ Здесь $a = 1 > 0$, поэтому применим первую подстановку

$$\sqrt{x^2+x+1} = -x+z.$$

Отсюда $x = \frac{z^2-1}{1+2z}$, $dx = \frac{2z^2+2z+2}{(1+2z)^2}\,dz$. Подставив эти значения в интеграл, получим

$$I = \int \frac{2z^2+2z+2}{z(1+2z)^2}\,dz.$$

Разложение подынтегральной функции ищем в виде

$$\frac{2z^2+2z+2}{z(1+2z)^2} = \frac{A}{(1+2z)^2} + \frac{B}{1+2z} + \frac{C}{z}.$$

Для определения неизвестных A, B и C получаем систему $2 = 2B+4C$; $2 = A+B+4C$, $2 = C$, откуда $A = -3$; $B = -3$; $C = 2$.

Таким образом,

$$I = -3\int \frac{dz}{(1+2z)^2} - 3\int \frac{dz}{1+2z} + 2\int \frac{dz}{z} = \frac{3}{2(1+2z)} + \frac{1}{2}\ln\frac{z^4}{|1+2z|^3} + C,$$

где $z = x + \sqrt{x^2+x+1}$, $x \neq -1$. ▶

107. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

◀ Поскольку $C = 1 > 0$, то, применяя вторую подстановку Эйлера $xt - 1 = \sqrt{1-2x-x^2}$, получаем

$$I = \int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}} = \int \frac{-t^2+2t+1}{t(t-1)(t^2+1)}\,dt.$$

Разлагаем подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{-t^2+2t+1}{t(t-1)(t^2+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{Ct+D}{t^2+1}.$$

Приводим последнее равенство к общему знаменателю

$$-t^2+2t+1 \equiv A(t^3-t^2+t-1) + B(t^3+t) + (Ct+D)(t^2-t)$$

и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях t:

$$\begin{array}{l|l} t^3 & 0 = A+B+C, \\ t^2 & -1 = -A-C+D, \\ t & 2 = A+B-D, \\ t^0 & 1 = -A. \end{array}$$

Отсюда находим $A = -1$, $B = 1$, $C = 0$ и $D = 2$.

Следовательно,

$$I = -\int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{t-1} - 2\int \frac{dt}{t^2+1} = \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| - 2\operatorname{arctg} t + C,$$

где $xt = 1 + \sqrt{1-2x-x^2}$. ▶

108. $\displaystyle\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx$.

◀ Здесь $x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$, поэтому можно положить: $\sqrt{x^2+3x+2} = t(x+1)$ (третья подстановка Эйлера). Имеем

$$x = \frac{2-t^2}{t^2-1}, \quad dx = -\frac{2t\,dt}{(t^2-1)^2}; \quad I = \int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx = \int \frac{-2t^2-4t}{(t-2)(t-1)(t+1)^3}\,dt$$

Разложение подынтегральной функции ищем в виде

$$\frac{-2t^2-4t}{(t-2)(t-1)(t+1)^3} = \frac{A}{(t+1)^3} + \frac{B}{(t+1)^2} + \frac{C}{t+1} + \frac{D}{t-1} + \frac{E}{t-2},$$

откуда

$$-2t^2-4t \equiv A(t-2)(t-1) + B(t-2)(t^2-1) + C(t^2-3t+2)(t^2+2t+1) + \\ + D(t-2)(t^3+3t^2+3t+1) + E(t-1)(t^3+3t^2+3t+1).$$

Полагая последовательно $t = -1, 1, 2$, находим $A = \frac{1}{3}$, $D = \frac{3}{4}$ и $E = -\frac{16}{27}$. Далее, приравнивая в тождестве коэффициенты при t^4 и t^3, получаем систему $0 = C + D + E$; $0 = B - C + D + 2E$, откуда находим остальные неизвестные:

$$C = -\frac{17}{108}, \quad B = \frac{5}{18}.$$

Таким образом,

$$I = -\frac{1}{6(t+1)^2} - \frac{5}{18(t+1)} - \frac{17}{108}\ln|t+1| + \frac{3}{4}\ln|t-1| - \frac{16}{27}\ln|t-2| + C. ▶$$

Интеграл от дифференциального бинома

$$\int x^m (a + bx^n)^p \, dx,$$

где m, n и p — рациональные числа, может быть приведен к интегрированию рациональных функций лишь в следующих трех случаях:

1. Пусть p — целое. Полагаем $x = t^N$, где N — общий знаменатель дробей m и n.
2. Пусть $\frac{m+1}{n}$ — целое. Полагаем $a + bx^n = t^N$, где N — знаменатель дроби p.
3. Пусть $\frac{m+1}{n} + p$ — целое. Применим подстановку $ax^{-n} + b = t^N$, где N — знаменатель дроби p.

Если $n = 1$, то эти случаи эквивалентны следующим: 1) p — целое; 2) m — целое; 3) $m + p$ — целое

Найти следующие интегралы:

109. $\int \sqrt{x^3 + x^4}\, dx$. 1981

◀ Имеем при $x > 0$, а также при $x < -1$

$$I = \int \sqrt{x^3 + x^4}\, dx = \int x^2 (x^{-1} + 1)^{\frac{1}{2}}\, dx.$$

Здесь $n = -1$, $m = 2$ и $\frac{m+1}{n}$ — целое. Поэтому, полагая $x^{-1} + 1 = t^2$, получим $I = -\int \frac{2t^2\,dt}{(t^2-1)^4} = -2I_3 - 2I_4$, где $I_n = \int \frac{dt}{(t^2-1)^n}$, $n = 3, 4$

Для вычисления последнего интеграла найдем рекуррентную формулу. Пусть

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2 - a^2)^n}, \quad a \neq 0.$$

Интегрируя по частям I_{n-1}, имеем

$$I_{n-1} = \int \frac{dt}{(t^2 - a^2)^{n-1}} = \frac{t}{(t^2 - a^2)^n} - 2(n-1)\int \frac{t^2\,dt}{(t^2 - a^2)^n} =$$

$$= \frac{t}{(t^2 - a^2)^{n-1}} - 2(n-1)\int \frac{(t^2 - a^2) + a^2}{(t^2 - a^2)^n}\,dt = \frac{t}{(t^2 - a^2)^{n-1}} - 2(n-1)I_{n-1} + 2(n-1)a^2 I_n,$$

откуда

$$I_n = -\frac{t}{2(n-1)a^2(t^2 - a^2)^{n-1}} - \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} I_{n-1}.$$

Последовательно применяя эту формулу (при $a = 1$), получаем

$$I = 2I_3 - 2\left(-\frac{t}{6(t^2-1)^3} - \frac{5}{6}I_3\right) = \frac{t}{3(t^2-1)^3} - \frac{1}{3}I_3 =$$

$$= \frac{t}{3(t^2-1)^3} - \frac{1}{3}\left(\frac{-t}{4(t^2-1)^2} - \frac{3}{4}I_2\right) = \frac{t}{3(t^2-1)^3} + \frac{t}{12(t^2-1)^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{-t}{2(t^2-1)} - \frac{1}{2}I_1\right) =$$

$$= \frac{t}{3(t^2-1)^3} + \frac{t}{12(t^2-1)^2} - \frac{t}{8(t^2-1)} - \frac{1}{16}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C.$$

Возвращаясь к переменной x, окончательно имеем

$$I = \sqrt{x+x^2}\,\frac{8x^2+2x-3}{24} + \frac{1}{8}\ln\frac{\sqrt{1+x^{-1}}+1}{\sqrt{|x|}} + C. \blacktriangleright$$

110. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\,dx.$ 1682

◀ Здесь $p=-2$. Применяя первую подстановку $x=t^6$, получаем

$$I = \int\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\,dx = 6\int\frac{t^8\,dt}{(1+t^2)^2} = 6\int\left(t^4-2t^2+3-\frac{4t^2+3}{(1+t^2)^2}\right)dt =$$

$$= \frac{6}{5}t^5 - 4t^3 + 18t - 18\int\frac{dt}{1+t^2} - 6\int\frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^2}.$$

Поскольку

$$\int\frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^2} = -\frac{1}{2}\int t\,d\left(\frac{1}{1+t^2}\right) = -\frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t,$$

то окончательно имеем

$$I = \frac{6}{5}t^5 - 4t^3 + 18t + \frac{3t}{1+t^2} - 21\operatorname{arctg} t + C, \quad t = x^6. \blacktriangleright$$

111. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}.$ 1683

◀ В нашем случае $m=1$, $n=\frac{2}{3}$, $p=-\frac{1}{2}$ и $\frac{m+1}{n}=3$. Положим $1+x^{\frac{2}{3}}=t^2$. Тогда

$$I = \int\frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}} = 3\int(t^2-1)^2\,dt = \frac{3}{5}t^5 - 2t^3 + 3t + C,$$

где $t=\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}$. ▶

112. $\displaystyle\int\sqrt[3]{3x-x^3}\,dx.$ 1088

◀ Здесь $m=\frac{1}{3}$, $n=2$, $p=\frac{1}{3}$ и $\frac{m+1}{n}+p=1$. Положим $3x^{-2}-1=t^3$. Тогда

$$I = \int\sqrt[3]{3x-x^3}\,dx = -\frac{9}{2}\int\frac{t^3\,dt}{(t^3+1)^2} = \frac{3}{2}\int t\,d\left(\frac{1}{t^3+1}\right) = \frac{3t}{2(t^3+1)} - \frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^3+1}.$$

Поскольку (см. пример 73)

$$\int\frac{dt}{t^3+1} = \frac{1}{6}\ln\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}},$$

то окончательно имеем

$$I = \frac{3t}{2(t^3+1)} - \frac{1}{4}\ln\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1} - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C,$$

где $t=\frac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x}$, $0<x<\sqrt{3}$, $x\leqslant-\sqrt{3}$. ▶

Уиражнения для самостоятельной работы

Найти интегралы от иррациональных функций:

97. $\int\frac{\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+1}-1)^2}\,dx$. **98.** $\int\frac{\sqrt{(x+1)(x+2)}}{2x^3+9x^2+15x+9}\,dx$. **99.** $\int\frac{dx}{(\sqrt{x+2}+1)\sqrt{\sqrt{x+2}-1}}$.

100. $\int\frac{x^2-1}{x\sqrt{x^4+3x^2+1}}\,dx$. **101.** $\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. **102.** $\int\frac{8x^4+7x^3+6x^2+2x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$.

103. $\int\frac{dx}{(x^4+4x^3+6x^2+4x)\sqrt{x^2+2x+2}}$. **104.** $\int\frac{x\,dx}{(x+2)^3\sqrt{x^2+1}}$. **105.** $\int\frac{2x^3-x^2+x+1}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$.

106. $\int\frac{x^3-1}{x\sqrt{x^4+1}}\,dx$. **107.** $\int\frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$. **108.** $\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

§ 4. Интегрирование тригонометрических функций

Интегралы вида

$$\int \sin^m x \cos^n x dx,$$

где m и n — целые числа, вычисляются с помощью искусственных преобразований или применением формул понижения степени.

Найти следующие интегралы:

113. $\displaystyle\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\, dx.$

◄ Интегрируя по частям, получаем

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\, dx = -\frac{1}{2}\int \cos^3 x\, d\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} + 3\int \frac{\cos^2 x}{\sin x}\, dx\right) =$$

$$= -\frac{3}{2}\cos x - \frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x} - \frac{3}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. ►$$

114. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x}.$

◄ Аналогично предыдущему

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\int \frac{d(\operatorname{ctg} x)}{\sin x} = -\frac{\operatorname{ctg} x}{\sin x} - \int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}\, dx = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \int \frac{dx}{\sin^3 x} + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} + C, \qquad x \neq k\pi. ►$$

115. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}.$

◄ Имеем

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)^3\, \frac{d \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^3 x} = -\frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x} + 3\ln|\operatorname{tg} x| + \frac{3}{2}\operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x + C, \qquad x \neq \frac{k\pi}{2}. ►$$

116. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^5 x\, dx.$

◄ Очевидно,

$$\int \operatorname{tg}^5 x\, dx = \frac{1}{2}\int (\sec^2 x - 1)^2\, \frac{d(\sec^2 x)}{\sec^2 x} = \frac{\sec^4 x}{4} - \sec^2 x + \frac{1}{2}\ln(\sec^2 x) + C =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \ln|\cos x| + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

или

$$\int \operatorname{tg}^5 x\, dx = \int \operatorname{tg}^3 x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \int \operatorname{tg} x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \ln|\cos x| + C. ►$$

117. $\displaystyle\int \operatorname{ctg}^6 x\, dx.$

◄ После очевидных преобразований имеем

$$\int \operatorname{ctg}^6 x\, dx = \int \operatorname{ctg}^4 x\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx = -\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5} - \int \operatorname{ctg}^2 x\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx =$$

$$= -\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} - \operatorname{ctg} x - x + C, \quad x \neq k\pi. ►$$

118. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x \sqrt[3]{\sin^2 x}}$.

◄ Полагая $t^3 = \sin x$, $x \neq \frac{k\pi}{2}$, имеем

$$\int \frac{dx}{\cos x \sqrt[3]{\sin^2 x}} = \int \frac{d(\sin x)}{(1-\sin^2 x)(\sin^2 x)^{\frac{1}{3}}} = 3\int \frac{dt}{1-t^6} = \frac{3}{2}\int \frac{dt}{1-t^3} + \frac{3}{2}\int \frac{dt}{1+t^3} =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln\frac{(1-t)^2}{t^2+t+1} + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{4}\ln\frac{(1+t)^2}{t^2-t+1} + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{(1+t)^2(t^2+t+1)}{(t^2-t+1)(t-1)^2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}\,t}{1-t^2} + C. ►$$

2011 a

119. Вывести формулы понижения для интегралов:

а) $I_n = \displaystyle\int \sin^n x\,dx$; б) $K_n = \displaystyle\int \frac{dx}{\cos^n x}$, $n > 2$

◄ Интегрируя по частям, получаем:

а) $$I_n = -\int \sin^{n-1} x\, d(\cos x) = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cos^2 x\,dx =$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,$$

откуда

$$I_n = \frac{1}{n}((n-1)I_{n-2} - \cos x \sin^{n-1} x), \quad n = 3, 4, \ldots .$$

б) $$K_n = \int \frac{d(\sin x)}{\cos^{n+1} x} = \frac{\sin x}{\cos^{n+1} x} - (n+1)\int \frac{\sin^2 x}{\cos^{n+2} x}\,dx = \frac{\sin x}{\cos^{n+1} x} - (n+1)K_{n+2} + (n+1)K_n,$$

откуда

$$K_{n+2} = \frac{\sin x}{(n+1)\cos^{n+1} x} + \frac{n}{n+1}K_n, \quad n \in \mathbb{Z}_0, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. ►$$

С помощью формул:

I. $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$;

II. $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$;

III. $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$

найти интегралы:

120. $\displaystyle\int \sin x \sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}\,dx$.

◄ Имеем

$$\int \sin x \sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}\,dx = \frac{1}{2}\int\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right)\sin\frac{x}{3}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int\left(-\sin\frac{x}{6} + \sin\frac{5x}{6} + \sin\frac{7x}{6} - \sin\frac{11x}{6}\right)dx =$$

$$= \frac{3}{2}\cos\frac{x}{6} - \frac{3}{10}\cos\frac{5x}{6} - \frac{3}{14}\cos\frac{7x}{6} + \frac{3}{32}\cos\frac{11x}{6} + C. ►$$

121. $\displaystyle\int \sin^3 2x \cos^2 3x\,dx$.

◄ Используя формулу III, имеем

$$\int \sin^3 2x\cos^2 3x\,dx = \frac{1}{8}\int(3\sin 2x - \sin 6x)(1+\cos 6x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int\left(3\sin 2x - \frac{3}{2}\sin 4x + \frac{3}{2}\sin 8x - \sin 6x - \frac{1}{2}\sin 12x\right)dx =$$

$$= -\frac{3}{16}\cos 2x + \frac{3}{64}\cos 4x - \frac{3}{128}\cos 8x + \frac{1}{48}\cos 6x + \frac{1}{192}\cos 12x + C. \blacktriangleright$$

Применяя формулы:

IV. $\sin(\alpha - \beta) \equiv \sin((x + \alpha) - (x + \beta))$;

V. $\cos(\alpha - \beta) \equiv \cos((x + \alpha) - (x + \beta))$,

найти интегралы:

122. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$.

◀ Имеем

$$\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)} = \frac{1}{\sin(a-b)} \int \frac{\sin((x+a)-(x+b))}{\sin(x+a)\sin(x+b)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)}\left(\int \frac{\cos(x+b)}{\sin(x+b)}\,dx - \int \frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)}\,dx\right) = \frac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)}\right| + C,$$

$$\sin(a-b) \neq 0. \blacktriangleright$$

123. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x - \sin a}$.

◀ Из тождества $\cos a = \cos\left(\frac{x-a}{2} - \frac{x+a}{2}\right)$ следует

$$\int \frac{dx}{\sin x - \sin a} = \frac{1}{2\cos a}\int \frac{\cos\left(\left(\frac{x-a}{2}\right) - \left(\frac{x+a}{2}\right)\right)}{\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}\,dx = \frac{1}{\cos a}\ln\left|\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right| + C,$$

$$\cos a \neq 0, \quad \sin x \neq \sin a. \blacktriangleright$$

124. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+a)\,dx$.

◀ Имеем

$$\int \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+a)\,dx = \int \left(\frac{\cos x\cos(x+a) + \sin x\sin(x+a)}{\cos x\cos(x+a)} - 1\right)dx =$$

$$= \int \frac{\cos a}{\cos x\cos(x+a)}\,dx - x = -x + \operatorname{ctg} a \ln\left|\frac{\cos x}{\cos(x+a)}\right| + C,$$

$$\sin a \neq 0, \quad \cos x \neq 0, \quad \cos(x+a) \neq 0. \blacktriangleright$$

Интегралы вида

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx,$$

где R — рациональная функция, в общем случае приводятся к интегрированию рациональных функций с помощью подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$.

а) Если выполнено равенство

$$R(-\sin x, \cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$$

или

$$R(\sin x, -\cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x),$$

то выгодно применять подстановку $\cos x = t$ или соответственно $\sin x = t$.

б) Если выполнено равенство

$$R(-\sin x, -\cos x) \equiv R(\sin x, \cos x),$$

то применяем подстановку $\operatorname{tg} x = t$.

Найти интегралы.

125. $\displaystyle I = \int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$.

◀ Полагая $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $(2n-1)\pi < x < (2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, получаем

$$I = \int \frac{dt}{3t^2+2t+2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3t+1}{\sqrt{5}} + C_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}} + C_n.$$

Из непрерывности первообразной следует

$$I(2n\pi+\pi-0) = I(2n\pi+\pi+0), \qquad \frac{\pi}{2\sqrt{5}} + C_n = \frac{-\pi}{2\sqrt{5}} + C_{n+1},$$

откуда находим $C_n = \frac{\pi n}{\sqrt{5}} + C$, где $C = C_0$ — произвольная постоянная. Из неравенств $2n\pi < x+\pi < (2n+2)\pi$; $n < \frac{x+\pi}{2\pi} < n+1$ следует, что $n = \left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right]$. Таким образом,

$$I = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}} + \frac{\pi}{\sqrt{5}}\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right] + C, \quad x \neq (2n+1)\pi;$$

$$I = \lim_{x\to(2n+1)\pi} I(x) = \frac{2n+1}{2\sqrt{5}}\pi, \quad x = (2n+1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}. ▶$$

126. $I = \displaystyle\int \frac{\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^8 x+\cos^8 x}\,dx.$

◀ Положим $t = \operatorname{tg} 2x$, $\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$I = \int \frac{t^2\,dt}{t^4+8t^2+8} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}\int \frac{dt}{t^2+4+2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{t^2+4-2\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4} \operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} + C_n =$$

$$= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}2x}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}2x}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} + C_n.$$

Из условия непрерывности первообразной следует

$$I\left(\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}-0\right) = I\left(\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}+0\right), \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}\cdot\frac{\pi}{2} + C_n = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}\cdot\frac{\pi}{2} + C_{n+1},$$

откуда (по аналогии с примером 125) находим

$$C_n = \frac{\pi}{4}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2-\sqrt{2}}\right)n + C, \quad C = C_0,$$

$$C_n = \frac{\pi}{4}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\left[\frac{4x+\pi}{2\pi}\right].$$

Следовательно,

$$I(x) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}2x}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}2x}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} +$$

$$+ \frac{\pi}{4}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\left[\frac{4x+\pi}{2\pi}\right] + C, \quad x \neq \frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2},$$

$$I\left(\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}} I(x). ▶$$

127. Доказать, что

$$\int \frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^n} = \frac{A\sin x+B\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}} + C\int\frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^{n-2}},$$

где A, B, C — неопределенные коэффициенты.

◀ Интегрируя по частям, получаем

$$I_n = \int \frac{d(-a\cos x + b\sin x)}{(a\sin x + b\cos x)^{n+1}} = \frac{-a\cos x + b\sin x}{(a\sin x + b\cos x)^{n+1}} - (n+1)\int \frac{(a\cos x - b\sin x)^2\,dx}{(a\sin x + b\cos x)^{n+2}} =$$

$$= \frac{-a\cos x + b\sin x}{(a\sin x + b\cos x)^{n+1}} - (n+1)\int \frac{(a\cos x - b\sin x)^2 + (b\cos x + a\sin x)^2}{(a\sin x + b\cos x)^{n+2}}\,dx,$$

откуда

$$I_n = \frac{1}{(n-1)(a^2+b^2)}\left((n-2)I_{n-2} + \frac{b\sin x - a\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^{n-1}}\right). ▶$$

128. Найти $\int \frac{dx}{(\sin x + 2\cos x)^3}$.

◀ Используя доказанную выше формулу, находим

$$I_3 = \frac{1}{10}\left(\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x} + \frac{2\sin x - \cos x}{(\sin x + 2\cos x)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{10}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2\right)\right| + \frac{2\sin x - \cos x}{(\sin x + 2\cos x)^2}\right) + C, \quad x \neq k\pi - \operatorname{arctg} 2. ▶$$

129. Доказать, что

$$\int \frac{dx}{(a + b\cos x)^n} = \frac{A\sin x}{(a + b\cos x)^{n-1}} + B\int \frac{dx}{(a + b\cos x)^{n-1}} + C\int \frac{dx}{(a + b\cos x)^{n-2}}, \quad |a| \neq |b|,$$

и определить коэффициенты A, B и C, если n — натуральное число, больше единицы.

◀ Интегрируя по частям, получаем

$$I_{n-2} = \int \frac{dx}{(a + b\cos x)^{n-2}} = \int \frac{a + b\cos x}{(a + b\cos x)^{n-1}}\,dx = aI_{n-1} + b\int \frac{d\sin x}{(a + b\cos x)^{n-1}} =$$

$$= aI_{n-1} + \frac{b\sin x}{(a + b\cos x)^{n-1}} - (n-1)\int \frac{b^2\sin^2 x}{(a + b\cos x)^n}\,dx,$$

откуда используя тождество $b^2\sin^2 x = -(a^2 - b^2) + 2a(a + b\cos x) - (a + b\cos x)^2$, находим

$$I_{n-2} = aI_{n-1} + \frac{b\sin x}{(a + b\cos x)^{n-1}} + (a^2 - b^2)(n-1)I_n - 2a(n-1)I_{n-1} + (n-1)I_{n-2},$$

$$I_n = -\frac{b\sin x}{(n-1)(a^2 - b^2)(a + b\cos x)^{n-1}} + \frac{(2n-3)a}{(n-1)(a^2 - b^2)}I_{n-1} - \frac{n-2}{(n-1)(a^2 - b^2)}I_{n-2}.$$

Таким образом,

$$A = -\frac{b}{(n-1)(a^2 - b^2)}, \quad B = \frac{(2n-3)a}{(n-1)(a^2 - b^2)}, \quad C = \frac{n-2}{(n-1)(a^2 - b^2)}. ▶$$

130. Найти $\int \frac{dx}{1 + \varepsilon\cos x}$ если: а) $0 < \varepsilon < 1$; б) $\varepsilon > 1$.

◀ Положим $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $(2n-1)\pi < x < (2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$I = \int \frac{dx}{1 + \varepsilon\cos x} = \frac{2}{1 - \varepsilon}\int \frac{dt}{t^2 + \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}.$$

а) $I = \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arctg}\frac{t\sqrt{1-\varepsilon}}{\sqrt{1+\varepsilon}} + C_n = \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\varepsilon}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{1+\varepsilon}} + C_n.$

Аналогично решению примера 125 находим

$$I = \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\varepsilon}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{1+\varepsilon}} + \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right] + C, \quad x \neq (2n+1)\pi,$$

$$I((2n+1)\pi) = \lim_{x\to(2n+1)\pi} I(x),$$

б) $I = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \ln \left| \frac{t - \sqrt{\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}}}{t + \sqrt{\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}}} \right| + C, \quad x \neq 2n\pi + \pi$ ►

131. Найти $\int \frac{dx}{(1 + \varepsilon \cos x)^2}$, если $0 < \varepsilon < 1$.

◄ Применим формулу, полученную в примере 129. Полагая $a = 1$, $b = \varepsilon$, $n = 2$, получаем

$$I(x) = \int \frac{dx}{(1 + \varepsilon \cos x)^2} = \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left(\frac{-\varepsilon \sin x}{1 + \varepsilon \cos x} + \int \frac{dx}{1 + \varepsilon \cos x} \right) =$$

$$= \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left(\frac{-\varepsilon \sin x}{1 + \varepsilon \cos x} + \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - \varepsilon} \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{1 + \varepsilon}} + \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \left[\frac{x + \pi}{2\pi} \right] \right) + C,$$

$$x \neq 2n\pi + \pi,$$

$$I(2n\pi + \pi) = \lim_{x \to 2n\pi + \pi} I(x). \text{ ►}$$

Упражнения для самостоятельной работы

Найти интегралы от тригонометрических функций.

109. $\int \frac{dx}{(\cos x + \sin x)^4}$. **110.** $\int \frac{dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$. **111.** $\int \frac{dx}{\cos^5 x - \sin^5 x}$. **112.** $\int \frac{dx}{(\sin x + 2 \sec x)^2}$.
113. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos x}$. **114.** $\int \frac{dx}{\sin x \cos x \sqrt{\sin^4 x + \cos^4 x}}$. **115.** $\int \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{\sin 2x}}\, dx$. **116.** $\int \frac{dx}{4 + 3 \operatorname{tg} x}$.

§ 5. Интегрирование различных трансцендентных функций

132. Доказать, что если $P(x)$ — многочлен степени n, то

$$\int P(x)\, e^{ax}\, dx = e^{ax} \left(\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} + \ldots + (-1)^n \frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}} \right) + C.$$

◄ Доказательство проводится с помощью метода интегрирования по частям. Имеем

$$\int P(x)\, e^{ax}\, dx = \frac{1}{a} e^{ax} P(x) - \frac{1}{a} \int e^{ax} P'(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} P(x) - \frac{1}{a} \left(\frac{1}{a} e^{ax} P'(x) - \frac{1}{a} \int e^{ax} P''(x)\, dx \right) =$$

$$= e^{ax} \left(\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} \right) + \frac{1}{a^2} \int e^{ax} P''(x)\, dx.$$

Применяя метод математической индукции, находим

$$\int P(x)\, e^{ax}\, dx = e^{ax} \left(\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} + \ldots + (-1)^k \frac{P^{(k)}(x)}{a^{k+1}} \right) +$$

$$+ (-1)^{k+1} \frac{1}{k+1} \int e^{ax} P^{(k+1)}(x)\, dx, \quad k \leqslant n.$$

Положив $k = n$ и приняв во внимание, что $P^{(n+1)}(x) \equiv 0$, получим требуемую формулу. ►

133. Доказать, что если $P(x)$ — многочлен степени n, то

$$\int P(x) \cos ax\, dx = \frac{\sin ax}{a} \left(P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(\mathrm{IV})}(x)}{a^4} - \ldots \right) +$$

$$+ \frac{\cos ax}{a^2} \left(P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^2} + \frac{P^{(\mathrm{V})}(x)}{a^4} - \ldots \right) + C \quad \text{и}$$

$$\int P(x)\sin ax\,dx = -\frac{\cos ax}{a}\left(P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(IV)}(x)}{a^4} - \ldots\right) + \\ + \frac{\sin ax}{a^2}\left(P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^2} + \frac{P^{(V)}(x)}{a^4} - \ldots\right) + C.$$

◀ При доказательстве используем пример 132. Заменяя там a на ia, где $i = \sqrt{-1}$, получаем

$$\int P(x)\,e^{iax}\,dx = e^{iax}\left(-i\frac{P(x)}{a} + \frac{P'(x)}{a^2} + i\frac{P''(x)}{a^3} + \ldots\right) + C.$$

Пользуясь формулой Эйлера и разделяя действительные и мнимые части, находим требуемое. ▶

134. Доказать, что интеграл $\int R(x)\,e^{ax}\,dx$, где R — рациональная функция, знаменатель которой имеет лишь действительные корни, выражается через элементарные функции и трансцендентную функцию

$$\int \frac{e^{ax}}{x}\,dx = \operatorname{li}(e^{ax}) + C,$$

где $\operatorname{li} x = \int \frac{dx}{\ln x}$.

◀ Рациональная функция представляется в виде

$$R(x) = \frac{M(x)}{N(x)},$$

где $M(x)$ и $N(x)$ — многочлены. Выделяя целую часть (если она имеется) рациональной функции, получаем

$$R(x) = P(x) + \sum_k \sum_{i=1}^{m_k} \frac{A_{ki}}{(x - x_k)^i},$$

где m_k — кратность корня x_i, A_{ij} — неопределенные коэффициенты. Наконец, интегрируя $R(x)$, получаем

$$\int R(x)\,e^{ax}\,dx = \int P(x)\,e^{ax}\,dx + \sum_k \sum_{i=1}^{m_k} A_{ki} \int \frac{e^{ax}}{(x - x_k)^i}\,dx.$$

Первый интеграл вычисляется l-кратным интегрированием по частям (l — степень многочлена $P(x)$). Вычисляя второй интеграл, находим

$$I_{ik} = \int \frac{e^{ax}\,dx}{(x - x_k)^i} = \int e^{ax}\,d\left(-\frac{1}{(i-1)(x-x_k)^i}\right) = -\frac{e^{ax}}{(i-1)(x-x_k)^i} + \\ + \frac{a}{i-1}\int \frac{e^{ax}\,dx}{(x-x_k)^{i-1}} = e^{ax}\left(-\frac{1}{(i-1)(x-x_k)^{i-1}} - \frac{a}{(i-1)(i-2)(x-x_k)^{i-2}} - \ldots - \\ - \frac{a^{i-2}}{(i-1)(i-2)\ldots 1(x-x_k)}\right) + \frac{a^{i-2}}{(i-1)(i-2)\ldots 1}\int \frac{e^{ax}\,dx}{x - x_k} = \\ = -e^{ax}\left(\frac{1}{(i-1)(x-x_k)^{i-1}} + \frac{a}{(i-1)(i-2)(x-x_k)^{i-2}} + \ldots + \frac{a^{i-2}}{(i-1)!(x-x_k)}\right) + \\ + \frac{a^{i-2}e^{ax_k}}{(i-1)!}\int \frac{e^{a(x-x_k)}}{x - x_k}\,d(x - x_k) = -e^{ax}\left(\frac{1}{(i-1)(x-x_k)^{i-1}} + \\ + \frac{a}{(i-1)(i-2)(x-x_k)^{i-2}} + \ldots + \frac{a^{i-2}}{(i-1)!(x-x_k)}\right) + \frac{a^{i-2}e^{ax_k}}{(i-1)!}\operatorname{li}\left(e^{a(x-x_k)}\right).$$

Итак,

$$\int R(x)\,e^{ax}\,dx = R_1(x) + \sum_k \sum_{i=1}^{m_k} A_{ki} I_{ik}. \ ▶$$

135. В каком случае интеграл $\int P\left(\frac{1}{x}\right) e^x\,dx$, где $P\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}$ и $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — постоянны, представляет собой элементарную функцию?

◀ Используя обозначения примера 134 и интегрируя по частям, получаем

$$\int P\left(\frac{1}{x}\right) e^x\,dx = \int \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\right) e^x\,dx =$$
$$= a_0 e^x + a_1 \operatorname{li}(e^x) - \frac{a_2}{x}e^x + a_2 \operatorname{li}(e^x) - \frac{a_3}{2x^2} - \frac{a_3}{2x} + \frac{a_3}{2}\operatorname{li}(e^x) - \ldots - \frac{a_n}{(n-1)x^{n-1}} -$$
$$- \frac{a_n}{(n-1)(n-2)x^{n-2}} - \ldots - \frac{a_n}{(n-1)!\,x} + \frac{a_n}{(n-1)!}\operatorname{li}(e^x).$$

Отсюда следует, что если

$$a_1 + \frac{a_2}{1!} + \frac{a_3}{2!} + \ldots + \frac{a_n}{(n-1)!} = 0,$$

то данный интеграл есть элементарная функция. ▶

Найти интегралы:

136. $\int \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x\,dx.$

◀ Используя обозначения примера 134 и интегрируя по частям, получаем

$$\int \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x\,dx = \int \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}\right) e^x\,dx = e^x - 4\operatorname{li}(e^x) - \frac{4}{x}e^x + 4\operatorname{li}(e^x) = e^x\left(1 - \frac{4}{x}\right) + C,$$
$$x \neq 0. \;▶$$

Упражнения для самостоятельной работы

Найти интегралы от следующих трансцендентных функций:

117. $\int \frac{xe^{ax}}{(1+ax)^2}\,dx$. **118.** $\int \frac{e^{ax}}{x}\,dx$. **119.** $\int \frac{dx}{(\operatorname{ch} x+1)^2}$. **120.** $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^3 x}$. **121.** $\int \operatorname{ch}^4 x\,dx$.
122. $\int \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 x\,dx$. **123.** $\int \frac{e^{2x}}{x^2-3x+2}\,dx$.

§ 6. Разные примеры на интегрирование функций

Найти интегралы:

137. $\int \frac{dx}{1+x^4+x^8}$. 2126

◀ Представляя знаменатель в виде $1 + x^4 + x^8 = (x^4+1)^2 - x^4 = (x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)$, разложим подынтегральную функцию на простые дроби:

$$\frac{1}{1+x^4+x^8} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1} + \frac{1-x^2}{x^4-x^2+1}\right).$$

Интегрируя последнее выражение почленно, получаем

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\,dx = \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+3} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\operatorname{sgn} x, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

$$\int \frac{1-x^2}{x^4+x^2+1}\,dx = -\int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1}\right|.$$

Итак, искомый интеграл равен

$$\begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1}\right| + \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} x\right) + C, & \text{если } x \neq 0, \\ C, & \text{если } x = 0. \;▶ \end{cases}$$

138. $I = \int \frac{dx}{(2+\sin x)^2}$. 2146

◀ Пользуясь результатом примера 131, находим

$$\int \frac{dx}{(2+\sin x)^2} = -\int \frac{d\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\left(2+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)^2} = -I = \frac{1}{3}\cdot\frac{\cos x}{2+\sin x} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{2+\sin x};$$

последний интеграл вычислим с помощью универсальной подстановки $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $2n\pi - \pi < x < \pi + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}_0$,

$$I(x) = \int \frac{dx}{2+\sin x} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}} + C_n.$$

Из условия $I(\pi+2n\pi-0) = I(\pi+2n\pi+0)$, аналогично тому как мы поступали при решении примера 125, находим

$$C_n = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}n + C, \quad C = C_0, \quad 2n\pi - \pi < x < \pi + 2n\pi.$$

Таким образом,

$$I(x) = \int \frac{dx}{(2+\sin x)^2} = \frac{1}{3}\,\frac{\cos x}{2+\sin x} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right] + C, \quad x \neq 2n\pi + \pi;$$

$$I(2n\pi+\pi) = \lim_{x\to 2n\pi+\pi} I(x). ▶$$

139. $\int |x|\,dx$.

◀ При $x > 0$ имеем

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C_1;$$

аналогично при $x < 0$

$$-\int x\,dx = -\frac{x^2}{2} + C_2.$$

В точке $x = 0$, согласно определению первообразной, должно $C_1 = C_2 = C$, где C — произвольная постоянная. Поэтому при всех x имеем

$$\int |x|\,dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{sgn} x + C = \frac{x|x|}{2} + C. ▶$$

140. $\int \varphi(x)\,dx$, где $\varphi(x)$ — расстояние числа x до ближайшего целого числа.

◀ Из условия задачи $\varphi(x) = |x-n|$, $n - \frac{1}{2} \leqslant x < n + \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{Z}_0$, поэтому

$$I(x) = \int \varphi(x)\,dx = \frac{1}{2}(x-n)|x-n| + C_n, \quad n - \frac{1}{2} \leqslant x < n + \frac{1}{2}.$$

Из непрерывности первообразной получаем

$$I\left(n + \frac{1}{2} - 0\right) = I\left(n + \frac{1}{2}\right),$$

т. е. $\frac{1}{8} + C_n = -\frac{1}{8} + C_{n+1}$, $C_{n+1} = C_n + \frac{1}{4}$, откуда $C_n = \frac{n}{4} + C$, где $C = C_0$ — произвольная постоянная.

Поскольку $n \leqslant x + \frac{1}{2} < n + 1$, то $n = \left[x + \frac{1}{2}\right]$ Окончательно находим

$$I(x) = \frac{1}{2}\left(x - \left[x+\frac{1}{2}\right]\right)\left|x - \left[x+\frac{1}{2}\right]\right| + \frac{1}{4}\left[x+\frac{1}{2}\right] + C. ▶$$

141. $\int [x]|\sin \pi x|\,dx$.

◀ По определению целой части имеем

$$[x]|\sin \pi x| = (-1)^n n \sin \pi x, \quad n \leqslant x < n+1, \quad n \in \mathbb{Z}_0.$$

Поэтому

$$\int [x]|\sin \pi x|\, dx = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi} n \cos \pi x + C_n, \quad n \leqslant x < n+1.$$

Из непрерывности первообразной в точках $x = n+1$ получаем равенства

$$\left[\frac{(-1)^{n+1}}{\pi} n \cos \pi x + C_n\right]\Bigg|_{x=n+1} = \left[\frac{(-1)^{n+2}}{\pi}(n+1)\cos \pi x + C_{n+1}\right]\Bigg|_{x=n+1},$$

откуда $C_{n+1} = C_n + \frac{2n+1}{\pi}$. Решая это уравнение, получаем $C_n = C + \frac{n^2}{\pi}$, $C = C_0$. Поэтому

$$\int [x]|\sin \pi x|\, dx = \left[\frac{(-1)^{n+1}}{\pi} \cos \pi x + n\right] \frac{n}{\pi} + C, \quad n \leqslant x < n+1.$$

Поскольку x изменяется в указанных пределах, то всегда $n = [x]$. Таким образом, окончательно имеем

$$\int [x]|\sin \pi x|\, dx = \frac{[x]}{\pi}([x] - (-1)^{[x]} \cos \pi x) + C,$$

где C — произвольная постоянная. ▶

142. Пусть $f(x)$ — монотонная непрерывная функция и $f^{-1}(x)$ — ее обратная функция. Доказать, что если $\int f(x)\, dx = F(x) + C$, то

$$\int f^{-1}(x)\, dx = x f^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)) + C.$$

◀ В силу условия теоремы, справедливо равенство

$$x = f(f^{-1}(x)) = F'(f^{-1}(x)).$$

Интегрируя его по $f^{-1}(x)$, получаем

$$\int x\, d(f^{-1}(x)) = F(f^{-1}(x)) + C,$$

откуда

$$\int x\, d(f^{-1}(x)) = x f^{-1}(x) - \int f^{-1}(x)\, dx = F(f^{-1}(x)) + C. ▶$$

Упражнения для самостоятельной работы

Пользуясь различными методами, найти следующие интегралы:

124. $\int \frac{x}{(e^{x^2}+1)^2} e^{\frac{5x^2}{4}}\, dx$. **125.** $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 2x}}\, dx$. **126.** $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\cos^3 2x}}\, dx$. **127.** $\int \frac{dx}{\sin x \sqrt[4]{\cos 2x}}$.
128. $\int \operatorname{tg} x \sqrt{\cos 2x}\, dx$. **129.** $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\, dx$. **130.** $\int \frac{x^2\, dx}{(x \sin x + \cos x)^2}$. **131.** $\int \frac{x^2\, dx}{(\sin x - x\cos x)^2}$.
132. $\int \frac{\sin x\, dx}{1+\sin x}$. **133.** $\int \frac{dx}{\cos x(1+\cos x)}$. **134.** $\int x^x(1+\ln x)\, dx$. **135.** $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}\, dx$.
136. $\int \frac{\operatorname{arctg} e^{x/2}}{e^{x/2}(1+e^x)}\, dx$. **137.** $\int (|x+1| - |1-x|)\, dx$. **138.** $\int \sqrt{x(1-x\sqrt{x})^{-1}}\, dx$.
139. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3+x^6}}$. **140.** $\int \frac{[x]\, dx}{x^2+[x]^2}$, $x \geqslant 1$. **141.** $\int \frac{dx}{1+[x]}$, $x > 0$.

§ 7. Интегрирование вектор-функций и функциональных матриц

Теорема 1. *Вектор-функция* $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_m)$ *является первообразной вектор-функции* $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ *на интервале* $X \in \mathbb{R}$ *тогда и только тогда, когда на этом интервале функции* F_i *являются первообразными функций* f_i, $i = \overline{1, m}$.

Теорема 2. *Аналогично, функциональная матрица* $B = (b_{ij})$ *является первообразной на интервале* X *функциональной матрицы* $A = (a_{ij})$ *тогда и только тогда, когда на этом интервале функции* b_{ij} *являются первообразными функций* a_{ij}, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Найти интегралы от вектор-функций:

143. $\displaystyle\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}, \ \frac{1}{1+x^2}, \ \frac{1}{4+x^2} \right) dx.$

◄ Если неопределенный интеграл указанной вектор-функции обозначим символом $\mathbf{I}$, то, согласно теореме 1,

$$\mathbf{I}(x) = \left(\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + C_1, \ \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} + C_2, \ \int \frac{dx}{1+x^2} + C_3, \ \int \frac{dx}{4+x^2} + C_4 \right) =$$

$$= \left(\arcsin x, \ \arcsin \frac{x}{2}, \ \operatorname{arctg} x, \ \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right) + \mathbf{C}, \ |x| \leqslant 1,$$

где $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^4$ — постоянный вектор. ►

144. $\displaystyle\int \left(\frac{1}{1+x}, \ \frac{x}{1+x^2}, \ldots, \frac{x^{m-1}}{1+x^m} \right) dx.$

◄ Аналогично предыдущему примеру

$$\mathbf{I}(x) = (\ln |1+x|, \ \ln \sqrt{1+x^2}, \ldots, \ln \sqrt[m]{1+x^m}) + \mathbf{C}. \ ►$$

145. $\displaystyle\int (\cos x, \ \cos 2x, \ldots \ \cos mx)\, dx.$

◄ Имеем

$$\int (\cos x, \ \cos 2x, \ldots, \cos mx)\, dx = \left(\sin x, \ \frac{\sin 2x}{2}, \ldots, \frac{\sin mx}{m} \right) + \mathbf{C}. \ ►$$

Найти интегралы от функциональных матриц:

146. $\displaystyle\int \begin{pmatrix} \sin x & \sin 2x & \sin 3x & \sin 4x \\ \cos x & \cos 2x & \cos 3x & \cos 4x \\ \operatorname{tg} x & \operatorname{tg} 2x & \operatorname{tg} 3x & \operatorname{tg} 4x \end{pmatrix} dx.$

◄ Пусть A — первообразная матрица, тогда

$$A(x) = \begin{pmatrix} -\cos x & -\frac{\cos 2x}{2} & -\frac{\cos 3x}{3} & -\frac{\cos 4x}{4} \\ \sin x & \frac{\sin 2x}{2} & \frac{\sin 3x}{3} & \frac{\sin 4x}{4} \\ -\ln |\cos x| & -\ln \sqrt{|\cos 2x|} & -\ln \sqrt[3]{|\cos 3x|} & -\ln \sqrt[4]{|\cos 4x|} \end{pmatrix},$$

и интеграл равен функциональной матрице $x \mapsto A(x) + C$, где C — постоянная матрица. ►

147. $\displaystyle\int (a_{ij})\, dx$, где $a_{ij} = x^{\frac{i}{j}}$ $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$, $x > 0$.

◄ При фиксированных i и j

$$\int x^{\frac{i}{j}}\, dx = \frac{j}{i+j} x^{\frac{i+j}{j}} + c_{ij}.$$

Следовательно, $\int (a_{ij})\, dx = (b_{ij}) + C$ где $b_{ij} = \frac{j}{i+j} x^{\frac{i+j}{j}}$, а $C = (c_{ij})$ — постоянная матрица. ►

148. Доказать, что

$$\int (E+Ax)^n\,dx = \frac{1}{n+1}A^{-1}(E+Ax)^{n+1}+C, \tag{1}$$

где E — единичная, A, C — постоянные матрицы одного порядка и матрица A — невырожденная, n — натуральное число.

◀ Для доказательства достаточно показать, что производная левой части равенства (1) равна подынтегральной матрице. По правилу дифференцирования произведения матриц имеем

$$\left(\frac{1}{n+1}A^{-1}(E+Ax)^{n+1}\right)' = \frac{A^{-1}}{n+1}\left((E+Ax)^n A + (E+Ax)^{n-1}A(E+Ax) + \ldots + A(E+Ax)^n\right).$$

А так как матрицы A и $E+Ax$ коммутативны, то

$$\left(\frac{1}{n+1}A^{-1}(E+Ax)^{n+1}\right)' = \frac{A^{-1}}{n+1}A(n+1)(E+Ax)^n = (E+Ax)^n. \ ▶$$

Упражнения для самостоятельной работы

Найти интегралы от вектор-функций:

142. $\int(\sin x,\ \cos x)\,dx$. **143.** $\int(\operatorname{tg} x,\ \operatorname{tg} 2x,\ \operatorname{tg} 3x)\,dx$, $x\in\left]0,\ \frac{\pi}{6}\right[$.

144. $\int(x\sin x,\ x\sin 2x,\ \ldots,\ x\sin mx)\,dx$. **145.** $\int(xe^{x^2},\ x^3e^{x^2},\ x^5e^{x^2})\,dx$.

146. $\int(x,\ x^2,\ \ldots,\ x^m)\,dx$. **147.** $\int(x,\ x^2,\ \ldots,\ x^m)\ln x\,dx$, $x>0$.

Найти интегралы от функциональных матриц:

148.

$$\int\begin{pmatrix} 2x+\cos 2x & x\cos x+\sin x+\frac{\sin x}{x}+\cos x\ln x \\ -x\sin x+\cos x+\frac{\cos x}{x}-\sin x\ln x & \cos 2x+2\,\frac{\ln x}{x}\end{pmatrix}dx.$$

149. $\displaystyle\int\begin{pmatrix} x & \sin x \\ \cos x & \ln x\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \cos x \\ -\sin x & \frac{1}{x}\end{pmatrix}dx$. **150.** $\displaystyle\int\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x^2\end{pmatrix}^n dx$

151. $\displaystyle\int\left(E+A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin x & 0 \\ 0 & 0 & \cos x\end{pmatrix}\right)dx.$

152. Пусть все элементы квадратной функциональной матрицы $x\mapsto A(x)$ имеют производные на интервале $]a,\ b[$. Доказать, что на этом интервале справедливы равенства:

а) $\int(A(x)A'(x)+A'(x)A(x))\,dx = A^2(x)+C$;

б) $\int(A^2(x)A'(x)+A(x)A'(x)A(x)+A'(x)A^2(x))\,dx = A^3(x)+C$.

153. Доказать, что

$$\int\left(A(x)\tfrac{d}{dx}B(x)+\left(\tfrac{d}{dx}A(x)\right)B(x)\right)dx = A(x)B(x)+C,$$

где A и B — квадратные функциональные матрицы.

154. Пусть A — постоянная квадратная матрица. Матрицу e^{Ax} определим посредством равенства

$$e^{Ax} = \lim_{n\to\infty}\left(E+\tfrac{1}{n}Ax\right)^n.$$

Доказать, что

$$\int e^{Ax}\,dx = Ae^{Ax}+C,$$

где C — произвольная постоянная квадратная матрица.

Глава 4

Определенный интеграл

§ 1. Интеграл Римана

1.1. Верхний и нижний интегралы Римана. Критерий интегрируемости функции.

Определение 1. *Разбиением* Π *сегмента* $[a, b]$ *называется конечное множество точек* $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, *где* $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ и f — ограниченная на сегменте $[a, b]$ функция, а Π — произвольное разбиение этого сегмента.

Верхней и нижней интегральными суммами, соответствующими разбиению Π, называются числа

$$\overline{S}_\Pi(f) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i, \qquad \underline{S}_\Pi(f) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i,$$

где $M_i = \sup\limits_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}} \{f(x)\}$, $m_i = \inf\limits_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}} \{f(x)\}$, $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

Определение 2. *Числа*

$$\overline{\int} f\,dx = \inf_{\{\Pi\}} \{\overline{S}_\Pi(f)\}, \qquad \underline{\int} f\,dx = \sup_{\{\Pi\}} \{\underline{S}_\Pi(f)\},$$

где точные грани берутся по всем возможным разбиениям сегмента $[a, b]$, *называются соответственно верхним и нижним интегралами Римана функции* f *на сегменте* $[a, b]$.

Определение 3. *Функция* f *называется интегрируемой по Риману на сегменте* $[a, b]$ *если* $\overline{\int} f\,dx = \underline{\int} f\,dx$, *а общее значение верхнего и нижнего интегралов называется интегралом Римана функции* f *на этом сегменте и обозначается* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Класс всех интегрируемых по Риману функций f обозначают $f \in R[a, b]$.

Критерий интегрируемости. *Для того чтобы ограниченная функция* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *была интегрируемой на сегменте* $[a, b]$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\forall \varepsilon > 0$ *существовало такое разбиение* Π *этого сегмента, что* $0 \leqslant \overline{S}_\Pi(f) - \underline{S}_\Pi(f) < \varepsilon$.

Сокращенно критерий интегрируемости записывают следующим образом:

$$f \in R[a, b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Pi : \ 0 \leqslant \overline{S}_\Pi(f) - \underline{S}_\Pi(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$$

(здесь $\omega_i = M_i - m_i$ — колебание функции f на сегменте $[x_i, x_{i+1}]$).

1.2. Интеграл Римана как предел интегральных сумм.

Пусть Π — произвольное разбиение сегмента $[a, b]$ и $d(\Pi) = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \Delta x_i$. На каждом сегменте $[x_i, x_{i+1}]$ возьмем произвольную точку ξ_i и образуем так называемую интегральную сумму

$$S_\Pi(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Полагаем $\lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(f) \overset{\text{def}}{=} I$, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$:

$$\forall\Pi \wedge d(\Pi) < \delta \Rightarrow |S_\Pi(f) - I| < \varepsilon.$$

Теорема. Если.

1) *при* $d(\Pi) \to 0\ \exists \lim S_\Pi(f) = I$, *то* $f \in R[a, b]$ *и* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = I$;

2) $f \in R[a, b]$, то $\exists \lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(f) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Эта теорема устанавливает два эквивалентных определения интеграла Римана.

1.3. Некоторые классы функций, интегрируемых по Риману.

Теорема 1. Если $f \in C[a, b]$, *то* $f \in R[a, b]$.

Теорема 2. *Если f монотонная на сегменте $[a, b]$ функция, то* $f \in R[a, b]$.

1.4. Мера 0 Лебега и мера 0 Жордана.

Определение 1. *Мерой* $\mu\overline{\mathcal{J}}$ *сегмента* $\overline{\mathcal{J}} = [a, b]$ *(мерой* $\mu\mathcal{J}$ *интервала* $\mathcal{J} =]a, b[$*) называют его длину, т. е. число* $b - a$.

Определение 2. *Множество* $X \subset \mathbb{R}$ *имеет лебегову меру* 0, *если* $\forall\varepsilon > 0$ *существует такое счетное покрытие* $\overline{W} = \{\overline{\mathcal{J}}_j;\ j \in \mathbb{N})$ *этого множества сегментами* $\overline{\mathcal{J}}_j$ *(счетное покрытие* $W = \{\mathcal{J}_j;\ j \in \mathbb{N}]$ *интервалами* $\mathcal{J}_j$*), меры которых* μ_j, *что* $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu_j < \varepsilon$, *где* $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu_j = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j$.

Примером множества лебеговой меры 0 может служить произвольное счетное множество точек $X \subset \mathbb{R}$.

Определение 3. *Множество* $X \subset \mathbb{R}$ *имеет жорданову меру* 0, *если* $\forall\varepsilon > 0$ *существует такое конечное покрытие* $\overline{W} = \{\overline{\mathcal{J}}_j;\ j = \overline{1, n}\}$ $(W = \{\mathcal{J}_j;\ j = \overline{1, n}\})$ *этого множества сегментами* $\overline{\mathcal{J}}_j$ *(интервалами* $\mathcal{J}_j$*), меры которых* μ_j, *что* $\sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j < \varepsilon$.

Примером множества жордановой меры 0 может служить любое конечное множество точек $X \subset \mathbb{R}$, а также любое счетное множество точек $Y \subset \mathbb{R}$, имеющее конечное число предельных точек.

Из определения 3 следует, что всякое множество жордановой меры 0 имеет лебегову меру 0.

Теорема (Лебега). *Пусть* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *— ограниченная функция и* $E \subset [a, b]$ *— множество ее точек разрыва. Функция f интегрируема по Риману на сегменте $[a, b]$ тогда и только тогда, когда E — множество лебеговой меры* 0.

Согласно теореме Лебега, классу интегрируемых по Риману функций принадлежат ограниченные функции, множество точек разрыва которых не более чем счетное или имеет жорданову меру 0.

1.5. Интегралы функций, заданных на произвольных ограниченных множествах. Множества, измеримые по Жордану.

Определение 1. *Пусть* $E \subset X \subset \mathbb{R}$. *Функция* $\chi_E : X \to \mathbb{R}$, *где*

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in X\backslash E, \\ 1, & \text{если } x \in E, \end{cases}$$

называется характеристической функцией множества E.

Определение 2. *Пусть* $E \subset [a, b] \subset \mathbb{R}$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *— ограниченная функция. Если* $f\chi_E \in R[a, b]$, *то*

$$\int\limits_E f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \int\limits_a^b f(x)\chi_E(x)\,dx.$$

Определение 3. *Пусть $E \subset [a, b] \subset \mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$ — ограниченная функция. Продолжим функцию f на весь сегмент $[a, b]$, образовав функцию*

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in E, \\ 0, & \text{если } x \in [a, b] \setminus E. \end{cases}$$

Если функция F интегрируема на сегменте $[a, b]$, то

$$\int\limits_E f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \int\limits_a^b F(x)\,dx.$$

Определение 4. *Ограниченное множество $E \subset \mathbb{R}$, граница которого имеет лебегову меру 0, называется* ***измеримым по Жордану***, *а интеграл*

$$\int\limits_E dx = \int\limits_a^b \chi_E(x)\,dx,$$

где $[a, b]$ — произвольный сегмент, содержащий множество E, называется ***жордановой мерой*** *множества E, или его* ***длиной***.

1.6. Свойства интеграла, выраженные равенствами.

1) Если $f \in R[a, b]$, то и $cf \in R[a, b]$, $c = \text{const}$, причем

$$\int\limits_a^b cf(x)\,dx = c\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

2) Если $f, g \in R[a, b]$, то и $(f \pm g) \in R[a, b]$ и при этом

$$\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx \pm \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

3) Если $f \in R[a, b]$ и $c \in]a, b[$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx \quad \text{(свойство аддитивности)}.$$

4) Если сужения функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ на сегменты $[a, c]$ и $[c, b]$ интегрируемы, то $f \in R[a, b]$ и при этом

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

1.7. Свойства интеграла, выраженные неравенствами.

1) Если функция f интегрируема на $[a, b]$ и $f(x) \geqslant 0$ $\forall x \in [a, b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$; если $f(x) \geqslant 0$, $f \in C[a, b]$ и $f(x) \not\equiv 0$ на $[a, b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant c > 0$, где c — некоторая постоянная.

2) Если $f(x) \leqslant g(x)$ $\forall x \in [a, b]$ и $f, g \in R[a, b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

1.8. Формулы замены переменной и интегрирования по частям.

а) Пусть выполнены условия: 1) $f \in C[a, b]$; 2) сегмент $[a, b]$ является множеством значений некоторой функции $x : t \mapsto g(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, имеющей на $]\alpha, \beta[$ непрерывную производную; 3) $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$.

Тогда справедлива формула замены переменной

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))\,g'(t)\,dt.$$

б) Формула интегрирования по частям.
Если $u, v \in C^{(1)}[a, b]$, то

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx$$

В примерах 1—5 интегралы Римана вычисляются с помощью интегральных сумм $S_\Pi(f)$. Для любой интегрируемой по Риману функции f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ имеем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(f)$$

независимо от выбора разбиения Π и точек $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, поэтому при решении указанных примеров разбиения Π и точки ξ_i выбираются определенным образом.

Вычислить следующие интегралы:

1. $\displaystyle\int_{-1}^4 (1 + x)\,dx$.

◀ Функция $f : x \mapsto 1 + x$, $-1 \leqslant x \leqslant 4$, принадлежит классу $C[-1, 4]$, следовательно, $f \in R[a, b]$. В силу линейности функции f, удобно при произвольном разбиении Π сегмента $[-1, 4]$ взять $\xi_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$. Тогда интегральная сумма $S_\Pi(f)$ равна самому интегралу. Имеем

$$S_\Pi(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\Delta x_i + \frac{x_{i+1}^2 - x_i^2}{2}\right) =$$
$$= x_n - x_0 + \frac{x_n^2 - x_0^2}{2} = (x_n - x_0)\left(1 + \frac{x_n + x_0}{2}\right) = 12{,}5,$$

так как $x_0 = -1$, $x_n = 4$. Следовательно,

$$\int_{-1}^4 (1 + x)\,dx = 12{,}5. \ ▶$$

2. $\displaystyle\int_a^b x^m\,dx$, $0 < a < b$, $m \neq -1$.

◀ Выберем такое разбиение Π, чтобы длины сегментов $[x_i, x_{i+1}]$ образовывали геометрическую прогрессию, и возьмем $\xi_i = x_i$. Тогда

$$x_i = x_0 q^i,\ \ i = \overline{1, n},\ \ x_0 = a,\ \ x_n = b,\ \ q = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}},\ \ \xi_i = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i}{n}},\ \ \Delta x_i = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i}{n}}\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right),$$

$$S_\Pi(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x_i = a^{m+1}\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right)\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i(m+1)}{n}} = (b^{m+1} - a^{m+1})\,\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}} - 1}.$$

Поскольку $d(\Pi) \to 0$ при $n \to \infty$ и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}} - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\ln\frac{b}{a} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{m+1}{n}\ln\frac{b}{a} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{m+1},$$

то $\int\limits_a^b x^m\,dx = \lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(f) = \dfrac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}$. ►

3. $\displaystyle\int\limits_a^b \frac{dx}{x^2}$, $\quad 0 < a < b$.

◄ Пусть $\Pi = \{x_0 = a,\ x_1,\ \ldots,\ x_n = b\}$ — произвольное разбиение сегмента $[a, b]$. Подынтегральная функция интегрируема на $[a, b]$, в силу чего, как говорилось выше, $\lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(f)$ существует и не зависит от выбора точек ξ_i. Полагая $\xi_i = \sqrt{x_i x_{i+1}}$, получим

$$S_\Pi(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\Delta x_i}{x_i x_{i+1}} = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_{i+1}}\right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

Следовательно, $\int\limits_a^b \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(f) = \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}$. ►

4. $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$.

◄ Взяв $\Pi = \left\{x_i = i\frac{\pi}{2n};\ i = \overline{0, n}\right\}$, $\xi_i = x_i$, имеем

$$\Delta x_i = \frac{\pi}{2n}, \quad S_\Pi(f) = \frac{\pi}{2n}\sum_{i=0}^{n-1} \sin i\frac{\pi}{2n} = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{4n} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4n}\right)}{\sin\frac{\pi}{4n}}.$$

Принимая во внимание, что $d(\Pi) \to 0$ при $n \to \infty$, находим

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}\,\pi}{4n} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4n}\right)}{\frac{\pi}{4n}} = 1. \ ►$$

5. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\,dx$ при $|\alpha| < 1$ и $|\alpha| > 1$.

◄ Возьмем $\Pi = \left\{x_k = \frac{\pi}{n}k;\ k = \overline{0, n}\right\}$, $\xi_k = x_k$. Тогда $d(\Pi) \to 0$ при $n \to \infty$. Обозначив $z = e^{ix} = \cos x + i\sin x$, $\bar{z} = e^{-ix} = \cos x - i\sin x$, получим

$$f(x) = \ln(\alpha - z)(\alpha - \bar{z}) \qquad S_\Pi(f) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\alpha - e^{i\frac{\pi}{n}k}\right)\left(\alpha - e^{-i\frac{\pi}{n}k}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{n}\ln\prod_{k=0}^{n-1}\left(\alpha - e^{i\frac{\pi}{n}k}\right)\left(\alpha - e^{-i\frac{\pi}{n}k}\right) = \frac{\pi}{n}\ln\frac{(\alpha - 1)(\alpha^{2n} - 1)}{\alpha + 1}.$$

Если $|\alpha| < 1$, то $\lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(f) = 0$, так как $\alpha^{2n} \to 0$ при $n \to \infty$.

Если $|\alpha| > 1$, то, представляя $S_\Pi(f)$ в виде

$$S_\Pi(f) = \frac{\pi}{n}\left(n\ln\alpha^2 + \ln\frac{(\alpha - 1)(1 - \alpha^{-2n})}{\alpha + 1}\right),$$

получим, что $\lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(f) = \lim\limits_{n\to\infty} S_\Pi(f) = \pi \ln \alpha^2$. Следовательно,

$$\int\limits_0^\pi \ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{если } |\alpha| < 1, \\ \pi \ln \alpha^2, & \text{если } |\alpha| > 1. \end{cases} \blacktriangleright$$

6. Пусть функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ монотонна на сегменте $[a, b]$. Доказать, что

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\,\frac{b-a}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

◀ Если $f \in R[a, b]$, то при любом разбиении Π сегмента $[a, b]$ и произвольном выборе точек $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ выполняются неравенства

$$\underline{S}_\Pi(f) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \overline{S}_\Pi(f), \qquad \underline{S}_\Pi(f) \leqslant S_\Pi(f) \leqslant \overline{S}_\Pi(f),$$

в силу которых $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx - S_\Pi(f)\right| \leqslant \overline{S}_\Pi(f) - \underline{S}_\Pi(f)$.

Для монотонной функции f при разбиении сегмента $[a, b]$ на n равных частей имеем

$$\overline{S}_\Pi(f) - \underline{S}_\Pi(f) = \frac{b-a}{n}\,|f(b) - f(a)| = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Обозначив $\dfrac{\int\limits_a^b f(x)\,dx - S_\Pi(f)}{\overline{S}_\Pi(f) - \underline{S}_\Pi(f)} = \theta$, получим, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx - S_\Pi(f) = \theta\left(\overline{S}_\Pi(f) - \underline{S}_\Pi(f)\right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$, так как $|\theta| < 1$. ▶

7. Пусть $f, \varphi \in C[a, b]$. Доказать, что

$$\lim_{d(\Pi)\to 0} \sigma_\Pi(f\varphi) = \int\limits_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

где $\sigma_\Pi(f\varphi) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\varphi(\theta_i)\,\Delta x_i$, $x_i \leqslant \xi_i$, $\theta_i \leqslant x_{i+1}$.

◀ Из оценки $|S_\Pi(f\varphi) - \sigma_\Pi(f\varphi)| \leqslant \sum\limits_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i)||\varphi(\theta_i) - \varphi(\xi_i)|\,\Delta x_i$, ограниченности функции f, условия $\varphi \in R[a, b]$ и оценки $|\varphi(\theta_i) - \varphi(\xi_i)| \leqslant \omega_i$, где ω_i — колебание функции φ на сегменте $[x_i, x_{i+1}]$, получаем, что $\lim\limits_{d(\Pi)\to 0}(S_\Pi(f\varphi) - \sigma_\Pi(f\varphi)) = 0$.

Следовательно, $\lim\limits_{d(\Pi)\to 0} \sigma_\Pi(f\varphi) = \lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(f\varphi) = \int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx$. ▶

8. Доказать, что функция Дирихле $\chi : [a, b] \to \mathbb{R}$, где

2097

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррационально}, \\ 1, & \text{если } x \text{ рационально}, \end{cases}$$

не интегрируема на сегменте $[a, b]$.

◀ Функция χ ограничена и разрывна в каждой точке сегмента $[a, b]$. Согласно теореме Лебега, χ не интегрируема на этом сегменте. ▶

2195

9. Доказать, что функция Римана $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, где

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } x = \frac{m}{n}, \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально}, \end{cases}$$

а m и n $(n \geqslant 1)$ — взаимно простые целые числа, интегрируема на $[a, b]$ и $\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0$.

◄ В примере 263, гл. 1. доказано, что функция Римана непрерывна в каждой иррациональной точке сегмента $[a, b]$ и разрывна в каждой его рациональной точке. Поскольку она ограничена и множество ее точек разрыва счетное, то, согласно теореме Лебега, $f \in R[a, b]$.

При любом разбиении Π сегмента $[a, b]$ каждый сегмент $[x_i, x_{i+1}]$ содержит иррациональные точки, поэтому $\underline{S}_\Pi(f) = 0$, в силу чего

$$\sup_{\{\Pi\}} \{\underline{S}_\Pi(f)\} = \underline{\int} f\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx = 0. ►$$

2194

10. Доказать, что разрывная функция $f : x \mapsto \operatorname{sgn}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right)$, $0 < x \leqslant 1$, интегрируема на полуинтервале $]0, 1]$.

◄ Функция f разрывна на счетном множестве точек $X = \{x_k = \frac{1}{k};\ k \in \mathbb{N}\}$ и ограничена. Множество X имеет одну предельную точку $x = 0$, поэтому имеет жорданову меру нуль. Функция $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$, где

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in X \cup \{0\}, \\ f(x), & \text{если } x \in [0, 1[\setminus (X \cup \{0\}), \end{cases}$$

ограничена на сегменте $[0, 1]$, а множество ее точек разрыва $X \cup \{0\}$ имеет жорданову меру 0, следовательно, $F \in R[0, 1]$. Согласно определению 3, п. 1.5, $f \in R]0, 1]$. ►

11. Доказать, что сужение ограниченной на сегменте $[a, b]$ функции f на множество $E = \{a\}$ интегрируемо на множестве E и

$$\int\limits_E f(x)\,dx = 0.$$

◄ Образуем функцию $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, где

$$F(x) = \begin{cases} f(a), & \text{если } x = a, \\ 0, & \text{если } a < x \leqslant b. \end{cases}$$

Функция F интегрируема на сегменте $[a, b]$ и $\int\limits_a^b F(x)\,dx = 0$, так как при $f(a) \neq 0$ она разрывна лишь в одной точке, а при любом разбиении Π сегмента $[a, b]$ имеем $\underline{S}_\Pi(F) = 0$, $\underline{\int} F\,dx = \int\limits_a^b F(x)\,dx = 0$. Обозначим $\int\limits_E f(x)\,dx = \int\limits_a^a f(x)\,dx$. Согласно определению 3, п. 1.5, получаем $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$. ►

12. Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — ограниченная на сегменте $[a, b]$ функция. Разбиением Π' сегмента $[a, b]$ в направлении от точки b к точке a назовем множество точек $\Pi' = \{x_0 = b, x_1, \ldots, x_n = a\}$, где $x_i > x_{i+1}$, $i = \overline{0, n-1}$. На каждом сегменте $[x_{i+1}, x_i]$ выберем произвольную точку ξ_i и образуем сумму

$$S_{\Pi'}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Если $\exists \lim\limits_{d(\Pi')\to 0} S_{\Pi'}(f) = I'$, то говорим, что функция f интегрируема на сегменте $[a, b]$ в направлении от точки b к точке a и записываем

$$I' = \int\limits_b^a f(x)\,dx.$$

Доказать, что если $f \in R[a, b]$, то существует $\int\limits_b^a f(x)\,dx$, и при этом $\int\limits_b^a f(x)\,dx = -\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

◀ Если точки разбиения $\Pi = \{\bar{x}_0 = a, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n = b\}$ совпадают с точками разбиения Π', а точки $\bar{\xi}_j \in [\bar{x}_j, \bar{x}_{j+1}]$ совпадают с точками $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, то $S_{\Pi'}(f) = -S_{\Pi}(f)$, где $S_{\Pi}(f) = \sum\limits_{j=0}^{n-1} f(\bar{\xi}_j)\,\Delta\bar{x}_j$. Поскольку $\exists \lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_{\Pi}(f) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$, то $\exists \lim\limits_{d(\Pi')\to 0} S_{\Pi'}(f) = -\int\limits_a^b f(x)\,dx$. ▶

13. Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in R[a, b]$, $A \leqslant f(x) \leqslant B$ и $\psi : [A, B] \to \mathbb{R}$, $\psi \in C[A, B]$, $g = \psi \circ f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Доказать, что $g \in R[a, b]$.

◀ Из условия $f \in R[a, b]$ следует, что функция f удовлетворяет критерию Лебега интегрируемости по Риману.

Композиция $g = \psi \circ f$ непрерывна в каждой точке непрерывности функции f, поэтому также удовлетворяет критерию Лебега. Следовательно, $g \in R[a, b]$. ▶

Заметим, что утверждение, содержащееся в доказанной теореме, в общем случае теряет силу, если условие непрерывности функции ψ заменить условием ее интегрируемости. Пусть, например, $\psi : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$\psi(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y = 0, \\ 1, & \text{если } y \neq 0, \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррациональное}, \\ \frac{1}{n}, & \text{если } x = \frac{m}{n}, \end{cases}$$

где m и n $(n \geqslant 1)$ — взаимно простые целые числа.

Функция f интегрируема на сегменте $[a, b]$ (см. пример 9), а функция ψ интегрируема на сегменте $[0, 1]$. Вместе с тем функция $\psi \circ f : [a, b] \to \mathbb{R}$, где

$$\psi \circ f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррациональное}, \\ 1, & \text{если } x \text{ рациональное}, \end{cases}$$

не интегрируема на сегменте $[a, b]$ (см. пример 8).

2200 **14.** Пусть $f \in R[a, b]$. Доказать, что $|f| \in R[a, b]$ и

$$\left| \int\limits_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$$

◀ Поскольку функция f удовлетворяет всем условиям теоремы Лебега, то этим же свойством обладает и функция $|f|$. Из неравенств $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$, $x \in [a, b]$, и свойства 2), п. 1.7, следует, что

$$-\int\limits_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx, \quad \text{т. е.} \quad \left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx. \ ▶$$

Заметим, что из интегрируемости $|f|$ не следует, вообще говоря, интегрируемость f; например, функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, где

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рациональное}, \\ -1, & \text{если } x \text{ иррациональное}, \end{cases}$$

не интегрируема на $[a, b]$, хотя функция $|f|$ интегрируема на этом сегменте.

15. Пусть $f \in R[a, b]$, $\varphi \in R[a, b]$. Доказать, что $f\varphi \in R[a, b]$.

◀ Если функции f и φ имеют точки разрыва, то множества этих точек являются множествами лебеговой меры 0 каждое, а объединение этих множеств будет в общем случае множеством точек разрыва функции $f\varphi$. Поскольку это объединение является множеством лебеговой меры 0, то функция $f\varphi$ удовлетворяет критерию Лебега интегрируемости по Риману. ▶

16. Доказать, что если ограниченные на сегменте $[a, b]$ функции f и φ совпадают всюду на нем, за исключением лишь множества $X \subset [a, b]$ жордановой меры 0, то либо эти функции интегрируемы на $[a, b]$ и

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx,$$

либо они не интегрируемы на $[a, b]$.

◀ Если $f \in R[a, b]$, то, согласно теореме Лебега, множество точек разрыва функции f имеет лебегову меру 0. В силу условий примера, множество точек разрыва функции φ также имеет лебегову меру 0, поэтому $\varphi \in R[a, b]$. Согласно свойству 2), п. 1.6, функция $\alpha = f - \varphi$ интегрируема на $[a, b]$, а из примера 14 следует, что $|\alpha| \in R[a, b]$. При произвольном разбиении Π сегмента $[a, b]$ каждый сегмент $[x_i, x_{i+1}]$ содержит хотя бы одну точку, в которой $|\alpha| = 0$, следовательно, $\underline{S}_\Pi(|\alpha|) = 0$, $\sup\limits_{\{\Pi\}}\{\underline{S}_\Pi(f)\} = \underline{\int} |\alpha|\,dx = 0$, $\int\limits_a^b |\alpha(x)|\,dx = \underline{\int} |\alpha|\,dx = 0$. Поскольку $\left|\int\limits_a^b \alpha(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |\alpha(x)|\,dx$, то $\int\limits_a^b \alpha(x)\,dx = \int\limits_a^b (f(x) - \varphi(x))\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx - \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx = 0$.

Таким образом, $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$.

Если предположить, что $f \notin R[a, b]$, а $\varphi \in R[a, b]$, то, согласно доказанному, должно быть $f \in R[a, b]$ и получаем противоречие.

Следовательно, $\varphi \notin R[a, b]$. ▶

Из примера 16 следует, что если $f \in R[a, b]$, то не изменяя свойства интегрируемости и величины интеграла, значение функции f на множестве жордановой меры 0 можно заменить произвольными конечными значениями.

17. Пусть $f \in R[a, b]$. Доказать, что равенство $\int\limits_a^b f^2(x)\,dx = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $f(x) = 0$ во всех точках непрерывности функции f, принадлежащих сегменту $[a, b]$.

◀ *Необходимость.* Доказательство будем проводить от противного. Пусть $\int\limits_a^b f^2(x)dx = 0$, f непрерывна в точке $x_0 \in]a, b[$ и $f(x_0) \neq 0$. Из непрерывности функции f в точке x_0 следует, что $f^2(x) > 0$ в некоторой окрестности $S(x_0, \delta)$. Используя свойство аддитивности интеграла, имеем

$$\int\limits_a^b f^2(x)\,dx = \int\limits_a^{x_0-\delta} f^2(x)\,dx + \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f^2(x)\,dx + \int\limits_{x_0+\delta}^{b} f^2(x)\,dx \geqslant \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f^2(x)\,dx = c,$$

где $c > 0$ — постоянное число. Получили противоречие, так как

$$\int\limits_a^b f^2(x)\,dx = 0.$$

Достаточность. Пусть $f(x) = 0$ в каждой точке непрерывности. Из того что $f \in R[a, b]$ следует, что $f^2 \in R[a, b]$. При любом разбиении Π сегмента $[a, b]$ каждый сегмент $[x_i, x_{i+1}]$ содержит точки непрерывности функции f (в противном случае при некотором разбиении Π

сужение функции f на какой-то сегмент $[x_i, x_{i+1}]$ было бы всюду разрывным на нем и, согласно теореме Лебега, следовало бы, что $f \notin R[a, b]$).

Таким образом, при любом разбиении Π имеем

$$\underline{S}_\Pi(f^2) = 0, \quad \underline{\int} f^2\,dx = \underline{\int_a^b} f^2(x)\,dx = \sup_{\{\Pi\}}\{\underline{S}_\Pi(f^2)\} = 0. \ ►$$

18. Пусть функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ограничена и вогнута[1] на сегменте $[a, b]$. Доказать, что

$$(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

◄ Вогнутость функции f означает, что функция $-f$ выпукла, следовательно, $f \in C[a, b]$ (согласно примеру 112, гл. 2).

Таким образом, $f \in R[a, b]$. Используя свойство вогнутости, находим

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+\xi}{2} + \frac{b-\xi}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2}(f(a+\xi)+f(b-\xi)), \quad 0 \leqslant \xi \leqslant b-a.$$

Интегрируя по ξ в пределах $[0, b-a]$ и производя замены $a+\xi = t$ и $b-\xi = z$ получаем

$$(b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2}\left(\int_0^{b-a} f(a+\xi)\,d\xi + \int_0^{b-a} f(b-\xi)\,d\xi\right) = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Выполнив разбиение $\Pi = \left\{x_i = a + i\frac{b-a}{n};\ i = \overline{0, n}\right\}$ и взяв $\xi_i = x_i$, получим, что $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ и

$$S_\Pi(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\left(1-\frac{i}{n}\right)a + \frac{i}{n}b\right).$$

В силу вогнутости функции f, имеем

$$f\left(\left(1-\frac{i}{n}\right)a + \frac{i}{n}b\right) \geqslant \left(1-\frac{i}{n}\right)f(a) + \frac{i}{n}f(b),$$

$$S_\Pi(f) \geqslant \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\left(1-\frac{i}{n}\right)f(a) + \frac{i}{n}f(b)\right) = \frac{b-a}{n}\left(\frac{n+1}{2}f(a) + \frac{n-1}{2}f(b)\right).$$

Принимая во внимание, что $d(\Pi) \to 0$ при $n \to \infty$, получим, перейдя к пределу при $n \to \infty$ в левой и правой частях последнего неравенства,

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)). \tag{2}$$

Сопоставляя неравенства (1) и (2), получим доказываемые неравенства. ►

19. Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\,dx$.

◄ Сначала дважды применим формулу интегрирования по частям, п. 1.8., а затем воспользуемся решением примера 4. Получим

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\,dx = -x^2\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = 2\left(x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx\right) = 2\left(\frac{\pi}{2}-1\right) = \pi - 2. \ ►$$

[1] Вогнутые функции иногда называют *выпуклыми вверх*.

Упражнения для самостоятельной работы

Вычислить определенные интегралы следующих функций, составляя интегральные суммы $S_\Pi(f)$ и переходя к пределу при $d(\Pi) \to 0$:

1. $x \mapsto x^3$, $-3 \leqslant x \leqslant 5$. **2.** $x \mapsto \sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. **3.** $x \mapsto 3^x$, $0 \leqslant x \leqslant 7$.

4. $x \mapsto \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$. **5.** $x \mapsto 2+5x$, $-3 \leqslant x \leqslant 6$.

Найти следующие пределы:

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^3}{n^4}+\frac{2^3}{n^4}+\ldots+\frac{(4n-1)^3}{n^4}\right)$. **7.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+(n-1)^2}\right)$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{2}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\ldots+\frac{2}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$. **9.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots 2n}}{n}$.

Доказать интегрируемость следующих функций:

10. $x \mapsto \left[\frac{2}{x}\right]-2\left[\frac{1}{x}\right]$, $0 < x \leqslant 1$. **11.** $x \mapsto [x]x^{\alpha-1}$, $1 \leqslant x \leqslant 10{,}5$, $\alpha > 0$.

12. $x \mapsto \frac{[x]}{x^{\lambda+1}}$, $1 \leqslant x \leqslant 40$, $\lambda > 0$. **13.** $x \mapsto [x^2]$, $2 \leqslant x \leqslant 17$.

14. $x \mapsto \left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]$, $0{,}5 \leqslant\ \leqslant x \leqslant 10$.

15. Пусть $f \in R[a, b]$ и $f(x) > 0$. Обозначим $f_{kn} = f(a+k\delta_n)$, $\delta_n = \frac{b-a}{n}$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_{kn} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx, \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f_{1n}f_{2n}\ldots f_{nn}} = \exp\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\,dx\right\},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{f_{kn}}} = \frac{b-a}{\int\limits_a^b\frac{dx}{f(x)}}.$$

16. Пусть $f \in C^{(2)}[1, +\infty[$ и $f(x) \geqslant 0$, $f'(x) \geqslant 0$, $f''(x) \leqslant 0$ $\forall x \in [1, +\infty[$. Доказать, что

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{f(n)}{2} + \int_1^n f(x)\,dx + O(1).$$

17. Пусть $f \in C^{(2)}[a, b]$ и

$$\Delta_n = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+(2k-1)\frac{b-a}{2n}\right).$$

Найти $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\Delta_n$.

§ 2. Основные теоремы и формулы интегрального исчисления

К важнейшим теоремам и формулам интегрального исчисления относят: основную теорему интегрального исчисления, формулу Ньютона—Лейбница, теоремы о среднем, а также формулы замены переменной и интегрирования по частям (последние две приведены в пункте 1.8).

2.1. Определенный интеграл как функция верхнего предела.

Теорема 1. *Если $f \in R[a, b]$, то функция*

$$\Phi : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt, \qquad a \leqslant x \leqslant b,$$

непрерывна на сегменте $[a, b]$.

Теорема 2. (основная теорема интегрального исчисления). *Функция*

$$\Phi : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt, \qquad a \leqslant x \leqslant b,$$

где $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in R[a, b]$, *дифференцируема в каждой точке* $x \in [a, b]$, *в которой функция* f *непрерывна, и при этом* $\Phi'(x) = f(x)$.

Теорема 3. (основная формула интегрального исчисления). *Если* $f \in R[a, b]$ *и множество точек разрыва функции* f *не более чем счетное, а* F *— произвольная первообразная функции* f *на сегменте* $[a, b]$, *то справедлива формула*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

называемая формулой Ньютона—Лейбница.

2.2. Теоремы о среднем.

Первая теорема о среднем. *Если* $f \in R[a, b]$, $g \in R[a, b]$ *и* $g(x) \geqslant 0$ $(g(x) \leqslant 0)$, $\forall x \in [a, b]$, *то справедлива формула*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx, \quad m \leqslant \mu \leqslant M, \tag{1}$$

где $m = \inf\limits_{a \leqslant x \leqslant b} \{f(x)\}$, $M = \sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} \{f(x)\}$.

Если $f \in C[a, b]$, то формула (1) принимает вид

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx, \quad \xi \in [a, b]. \tag{2}$$

Если $f \in C[a, b]$, $g(x) = 1$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b - a), \quad \xi \in [a, b]. \tag{3}$$

Вторая теорема о среднем. *Если*

1) *функция* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *не возрастает на сегменте* $[a, b]$, $f(x) \geqslant 0$ $\forall x \in [a, b]$ $g \in R[a, b]$, *то* $\exists \xi \in [a, b]$ *такое, что*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a) \int_a^\xi g(x)\,dx; \tag{4}$$

2) f *не убывает на* $[a, b]$, $f(x) \geqslant 0$ $\forall x \in [a, b]$ *и* $g \in R[a, b]$, *то* $\exists \eta \in [a, b]$ *такое, что*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(b) \int_\eta^b g(x)\,dx; \tag{5}$$

3) f *монотонна на* $[a, b]$ *и* $g \in R[a, b]$, *то* $\exists \xi \in [a, b]$ *такое, что*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a) \int_a^\xi g(x)\,dx + f(b) \int_\xi^b g(x)\,dx. \tag{6}$$

Формулы (4)—(6) называют *формулами Бонне.*

Применяя формулу Ньютона—Лейбница, вычислить следующие интегралы Римана:

20. $I = \displaystyle\int_0^{4\pi} \frac{dx}{1 + \varepsilon \cos x}$, $0 \leqslant \varepsilon < 1$.

◀ Согласно примеру 130, гл. 3, функция

$$F: x \mapsto \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right], & x \in \mathbb{R}\backslash\{\pi + 2k\pi\}, \\ \frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}(2k+1), & x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

является первообразной функции $x \mapsto \frac{1}{1+\varepsilon\cos x}$, $x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant \varepsilon < 1$. По формуле Ньютона—Лейбница имеем

$$I = F(4\pi) - F(0) = \frac{4\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}. \ ▶$$

21. $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$.

◀ Преобразуя подынтегральную функцию к виду

$$\frac{1}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \frac{2}{(a^2+b^2)(1+\varepsilon\cos 2x)},$$

где $\varepsilon = \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}$, и произведя в интеграле замену $2x = t$, получим аналогично решению предыдущего примера

$$I = \frac{1}{a^2+b^2}\int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{1+\varepsilon\cos t} =$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\left(\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-|\varepsilon|}{1+|\varepsilon|}} \operatorname{tg}\frac{t}{2}\right) + \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left[\frac{t+\pi}{2\pi}\right]\right)\Bigg|_0^{\pi-0} = \frac{\pi}{2|ab|}. \ ▶$$

Используя формулу Ньютона—Лейбница, вычислить интегралы от разрывных функций путем построения их первообразных на всем промежутке интегрирования:

22. $I = \int\limits_E \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx$, $f(x) = \frac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}$, $E = [-1, 3]\backslash\{\{0\} \cup \{2\}\}$.

◀ Функция f не определена в точках $x = 0$ и $x = 2$ сегмента $[-1, 3]$, а подынтегральную функцию можно записать в виде

$$\frac{f'(x)}{1+f^2(x)} = (\operatorname{arctg} f(x))', \quad x \in E,$$

и функция $x \mapsto \operatorname{arctg} f(x)$, $x \in E$, является первообразной ограниченной на множестве E функции $\frac{f'}{1+f^2}$. Согласно определению 3, п. 1.5, имеем

$$\int\limits_E \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx = \int\limits_{-1}^{3} F(x)\,dx,$$

где $F(x) = \begin{cases} \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}, & \text{если } x \in E, \\ 0, & \text{если } x = 0 \text{ или } x = 2. \end{cases}$

Первообразную Φ функции F на сегменте $[-1, 3]$ строим следующим образом:

$$\begin{array}{llll} \operatorname{arctg} f(x), \text{ если } -1 \leqslant x < 0, & \text{и} & \lim\limits_{x\to-0} \operatorname{arctg} f(x), & \text{если } x = 0, \\ \operatorname{arctg} f(x), \text{ если } 0 < x < 2, & \text{и} & \lim\limits_{x\to+0} \operatorname{arctg} f(x) + C_1, & \text{если } x = 0, \\ & & \lim\limits_{x\to2-0} \operatorname{arctg} f(x) + C_1, & \text{если } x = 2, \\ \operatorname{arctg} f(x), \text{ если } 2 < x \leqslant 3, & \text{и} & \lim\limits_{x\to2+0} \operatorname{arctg} f(x) + C_2, & \text{если } x = 2. \end{array}$$

Следовательно, получаем

$$\Phi(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} f(x), & \text{если } -1 \leqslant x < 0, \\ \operatorname{arctg} f(x) - \pi, & \text{если } 0 \leqslant x < 2, \\ \operatorname{arctg} f(x) - 2\pi, & \text{если } 2 \leqslant x \leqslant 3, \end{cases}$$

где $\Phi(0) = -\frac{\pi}{2}$, $\Phi(2) = -\frac{3}{2}\pi$.

Применив формулу Ньютона—Лейбница, находим

$$I = \Phi(3) - \Phi(-1) = \operatorname{arctg} f(3) - 2\pi - \operatorname{arctg} f(-1) = \operatorname{arctg} \frac{32}{27} - 2\pi. \blacktriangleright$$

23. $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

◀ Принимая во внимание равенство $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4}(1 + \varepsilon \cos 4x)$, где $\varepsilon = \frac{1}{3}$, и произведя в интеграле замену $4x = t$, получим, используя решения примеров 20 и 21,

$$I = \varepsilon \int_0^{8\pi} \frac{dt}{1 + \varepsilon \cos t} = \varepsilon \left(\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right) + \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \left[\frac{t+\pi}{2\pi} \right] \right) \Bigg|_0^{8\pi} =$$

$$= \frac{8\pi\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = 2\sqrt{2}\,\pi. \blacktriangleright$$

24. $I = \displaystyle\int_{0,5}^{31,5} [x]\, dx$.

◀ Построим первообразную функции $f : x \mapsto [x]$, $0 \leqslant x < +\infty$, имеющей разрывы первого рода в точках $x = n$, $n \in \mathbb{N}$.

Если $x \in]n-1, n[$, то $f(x) = n - 1$; если $x \in]n, n+1[$, то $f(x) = n$. Таким образом, функция $F_{n-1} : x \mapsto (n-1)x + C_{n-1}$, $C_{n-1} \in \mathbb{R}$, является первообразной сужения функции f на интервал $]n-1, n[$, а функция $F_n : x \mapsto nx + C_n$, $C_n \in \mathbb{R}$, является первообразной сужения функции f на интервал $]n, n+1[$. Из условия непрерывности первообразной в точках $x = n$ получаем $F_{n-1}(n-0) = F_n(n+0)$, т. е. $(n-1)n + C_{n-1} = n^2 + C_n$, откуда $C_n = C_{n-1} - n$, $n \in \mathbb{N}$. Полагая $n = 1, 2, \ldots$, получаем $C_1 = C_0 - 1$, $C_2 = C_1 - 2 = C_0 - 3$, $C_3 = C_2 - 3 = C_0 - 6$, $C_4 = C_3 - 4 = C_0 - 10$, $\ldots$, $C_n = C_0 - \frac{n(n+1)}{2}$, $C_0 = \text{const}$.

Поскольку $n = [x]$, $x \in [n, n+1[$, то $F(x) = x[x] - \frac{[x]([x]+1)}{2}$ является первообразной функции f.

По формуле Ньютона—Лейбница имеем

$$I = F(31{,}5) - F(0{,}5) = 31{,}5 \cdot 31 - 31 \cdot 16 = 480{,}5. \blacktriangleright$$

25. $I = \displaystyle\int_{-11\pi}^{20\pi} \operatorname{sgn}(\sin x)\, dx$.

◀ Функцию $f : x \mapsto \operatorname{sgn}(\sin x)$, $x \in \mathbb{R}$, представим в виде

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|\sin x|}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}, \\ 0, & x \in \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}. \end{cases}$$

Поскольку $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$ при $x \neq k\pi$, то непрерывная функция $F : x \mapsto \arccos(\cos x)$, $x \in \mathbb{R}$, является первообразной ограниченной разрывной функции f. Следовательно,

$$I = F(20\pi) - F(-11\pi) = \arccos 1 - \arccos(-1) = -\pi. \blacktriangleright$$

26. $I = \displaystyle\int_{-21}^{40} (-1)^{[x]}\, dx$.

◄ Поскольку $(-1)^{[x]} = \operatorname{sgn}(\sin \pi x)$, $x \in \mathbb{R}$, то, принимая во внимание решение предыдущего примера, имеем

$$I = \frac{1}{\pi} \arccos(\cos \pi x)\Big|_{-21}^{40} = \frac{1}{\pi}(\arccos 1 - \arccos(-1)) = -1. \ ►$$

27. $I = \int\limits_0^2 [e^x]\, dx$.

◄ Функция $x \mapsto [e^x]$, $0 \leqslant x < +\infty$, разрывна в точках $x_n = \ln n$, $n = 2, 3, \ldots$. Пусть $x \in]x_n, x_{n+1}[$. Тогда

$$\int [e^x]\, dx = nx + C_n, \quad C_n \in \mathbb{R}, \quad C_n = \text{const}.$$

Если $x \in]x_{n+1}, x_{n+2}[$, то

$$\int [e^x]\, dx = (n+1)x + C_{n+1}, \quad C_{n+1} = \text{const}.$$

Из условия непрерывности первообразной функции $x \mapsto [e^x]$, $0 \leqslant x < +\infty$, в точках x_n получаем зависимость между C_n и C_{n+1}:

$$C_{n+1} = C_n - \ln(n+1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Полагая последовательно в полученном равенстве $n = 1, 2, \ldots$, находим

$$C_n = C - \ln n!, \quad C = \text{const}.$$

Таким образом, функция $F : x \mapsto [e^x]x - \ln([e^x]!)$, $0 \leqslant x < +\infty$, является первообразной функции $x \mapsto [e^x]$, $0 \leqslant x < +\infty$.

Поскольку $[e^2] = 7$, то $I = F(2) - F(0) = ([e^x]x - \ln([e^x]!))\big|_0^2 = 14 - \ln 7!$. ►

28. $I = \int\limits_E \operatorname{sgn}(\sin(\ln x))\, dx$, $E =]0, 1]$.

◄ Функция $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$, где

$$F(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\sin(\ln x)), & \text{если } x \in]0, 1], \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

ограничена на сегменте $[0, 1]$, а множество $X = \{x_k = e^{-k\pi};\ k \in \mathbb{N}\}$ ее точек разрыва счетное, следовательно, $F \in R[0, 1]$, и, согласно определению 3, п. 1.5, имеем

$$\int\limits_E \operatorname{sgn}(\sin(\ln x))\, dx = \int\limits_0^1 F(x)\, dx.$$

Обозначим $F(x) = \int \operatorname{sgn}(\sin(\ln x))\, dx$, $x > 0$. Если $e^{-(k+1)\pi} < x < e^{-k\pi}$, то $F(x) = (-1)^{k-1}x + C_k$, где $k = \left[-\frac{\ln x}{\pi}\right]$, $C_k = \text{const}$. Если же $e^{-(k+2)\pi} < x < e^{-(k+1)\pi}$, то $F(x) = (-1)^k x + C_{k+1}$, $C_{k+1} = \text{const}$.

Из условия $F(e^{-(k+1)\pi} - 0) = F(e^{-(k+1)\pi} + 0)$ находим

$$C_{k+1} = C_k + (-1)^{k-1} \cdot 2e^{-(k+1)\pi},$$

откуда $C_k = C_0 - 2(e^{-\pi} - e^{-2\pi} + \ldots + (-1)^{k-1}e^{-k\pi})$, $C_0 = \text{const}$. Следовательно, $F(x) = (-1)^{\left[-\frac{\ln x}{\pi}\right]-1}x - 2(e^{-\pi} - e^{-2\pi} + \ldots + (-1)^{\left[-\frac{\ln x}{\pi}\right]} e^{\left[-\frac{\ln x}{\pi}\right]\pi}) + C_0$, причем $F(0) = \lim\limits_{k\to+\infty} C_k = C_0 - 2\frac{e^{-\pi}}{1+e^{-\pi}}$, $F(1) = -1 + C_0$.

Таким образом,

$$I = F(1) - F(0) = -1 + 2\frac{e^{-\pi}}{1+e^{-\pi}} = \frac{e^{-\pi} - 1}{e^{-\pi} + 1} = \operatorname{th}\frac{\pi}{2}. \ ►$$

29. $I = \int\limits_0^6 [x] \sin \frac{\pi x}{6}\, dx.$

◀ Рассмотрим $F(x) = \int [x] \sin \frac{\pi x}{6}\, dx$, $x \geqslant 0$. Если $x \in]n-1, n[$, то $F(x) = -(n-1)\frac{6}{\pi}\cos\frac{\pi x}{6} + C_{n-1}$, $C_{n-1} = \mathrm{const}$. Если же $x \in]n, n+1[$, то $F(x) = -n\frac{6}{\pi}\cos\frac{\pi x}{6} + C_n$, $C_n = \mathrm{const}$. Из условия $F(n-0) = F(n+0)$ получаем

$$C_n = \frac{6}{\pi}\cos\frac{n\pi}{6} + C_{n-1},$$

откуда

$$C_n = C_0 + \frac{6}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{2\pi}{6} + \ldots + \cos\frac{n\pi}{6}\right).$$

Следовательно,

$$F(x) = -\frac{6}{\pi}[x]\cos\frac{\pi x}{6} + \frac{6}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \cos 2\frac{\pi}{6} + \ldots + \cos[x]\frac{\pi}{6}\right) + C_0, \quad I = F(6-0) - F(0) = \frac{30}{\pi}. ▶$$

30. $I = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{11}{2}\pi} x \operatorname{sgn}(\cos x)\, dx.$

◀ Рассмотрим $F(x) = \int x \operatorname{sgn}(\cos x)\, dx$, $x \in \mathbb{R}$. Подынтегральная функция разрывна в точках $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, поэтому

$$F(x) = (-1)^k \frac{x^2}{2} + C_k, \text{ если } x \in \left]\frac{\pi}{2} + (k-1)\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right[,$$

$$F(x) = (-1)^{k+1} \frac{x^2}{2} + C_{k+1}, \text{ если } x \in \left]\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right[.$$

Из условия $F(x_k - 0) = F(x_k + 0)$ находим

$$C_{k+1} = (-1)^k\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2 + C_k,$$

$$C_k = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2} + \pi\right)^2 + \ldots + (-1)^{k-1}\left(\frac{\pi}{2} + (k-1)\pi\right)^2 + C_0, \quad C_0 = \mathrm{const}.$$

Поскольку $k = \left[\frac{x + \frac{\pi}{2}}{\pi}\right]$, то

$$F(x) = (-1)^{\left[\frac{x+\frac{\pi}{2}}{\pi}\right]}\frac{x^2}{2} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\pi\right)^2 + \ldots + (-1)^{\left[\frac{x+\frac{\pi}{2}}{\pi}\right]-1}\left(\frac{\pi}{2} + \left(\left[\frac{x + \frac{\pi}{2}}{\pi}\right] - 1\right)\pi\right)^2 + C_0.$$

Следовательно,

$$I = F\left(\frac{11}{2}\pi - 0\right) - F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{11}{2}\pi\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\pi\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\pi\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\pi\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\pi\right)^2 - \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{4}\right)^2 = -\frac{93}{32}\pi^2. ▶$$

Иногда пределы различных сумм вычисляются путем приведения их к интегральным суммам для интегрируемых функций. При переходе к пределу при $n \to \infty$ получаем интегралы, которые вычисляются с помощью формулы Ньютона—Лейбница.

Вычислить:

31. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}.$

◀ **Записав** S_n **в виде**

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}},$$

приходим к выводу, что это нижняя интегральная сумма для функции $x \mapsto \frac{1}{1+x}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, при разбиении $\Pi = \{x_i = \frac{i}{n};\ i = \overline{0, n}\}$ сегмента $[0, 1]$ и выборе $\xi_i = x_i$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2. \ ►$$

32. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, $S_n = \frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}} + \ldots + \sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$.

◄ Поскольку $S_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}} = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$, где $f(x) = \sqrt{1+x}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\xi_i = x_i = \frac{i}{n}$, $i = \overline{1, n}$, $\Delta x_i = \frac{1}{n}$, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1). \ ►$$

33. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, $S_n = \sin\frac{\pi}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$.

◄ Поскольку $\sin\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} O\left(\frac{1}{n^3}\right)\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}} = 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}.$$

Но $\frac{\pi}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}} = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$, где $f(x) = \frac{1}{2+\cos x}$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $\xi_k = k\frac{\pi}{n}$, $k = \overline{1, n}$, $\Delta x_k = \frac{\pi}{n}$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^\pi \frac{dx}{2+\cos x} = \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{dx}{1+0.5\cos x} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right]\right)\Big|_0^{\pi-0} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

(см. пример 20). ►

34. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{2^{\frac{i}{n}}}{n+\frac{1}{i}}$.

◄ Представим S_n в виде

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{2^{\frac{i}{n}}}{1+\frac{1}{in}} = S_n^{(1)} - S_n^{(2)},$$

где $S_n^{(1)} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} 2^{\frac{i}{n}}$, $S_n^{(2)} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{2^{\frac{i}{n}}}{1+in}$. Из оценки $0 < S_n^{(2)} < \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(2)} = 0$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_n^{(1)} = \int_0^1 2^x\,dx = \frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^1 = \frac{1}{\ln 2}. \ ►$$

Используя правила Лопиталя и теорему 2, п. 1.3, раскрыть неопределенности вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$

35. $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\int_0^x \cos t^2\,dt}{x}$.

◀ Применяя первое правило Лопиталя и теорему 2, п. 1.3, получаем

$$\lim_{x\to+0}\frac{\int\limits_0^x \cos t^2\,dt}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x \cos t^2\,dt=\lim_{t\to+0}\cos t^2=1.\ ▶$$

36. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\int\limits_0^x e^{t^2}\,dt\right)^2}{\int\limits_0^x e^{2t^2}\,dt}$.

◀ Применяя второе правило Лопиталя два раза, находим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int\limits_0^x e^{t^2}\,dt\right)^2}{\int\limits_0^x e^{2t^2}\,dt}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{d}{dx}\left(\int\limits_0^x e^{t^2}\,dt\right)^2}{\frac{d}{dx}\left(\int\limits_0^x e^{2t^2}\,dt\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{x^2}\int\limits_0^x e^{t^2}\,dt}{e^{2x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\int\limits_0^x e^{t^2}\,dt}{e^{x^2}}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{d}{dx}\int\limits_0^x e^{t^2}\,dt}{\frac{d}{dx}e^{x^2}}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{2xe^{x^2}}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0.\ ▶$$

37. Пусть $f\in C[0,+\infty[$ и $f(x)\to A$ при $x\to+\infty$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f(nx)\,dx$.

◀ Произведя в интеграле замену $nx=t$, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f(nx)\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int\limits_0^n f(t)\,dt=\lim_{n\to\infty}\varphi_n,$$

где φ_n — значения функции $\varphi: x\mapsto \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)\,dt$, $0<x<+\infty$, в точках $x_n=n$, $n\in\mathbb{N}$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)\,dt.$$

Если $A=0$, то $\forall\varepsilon>0\ \exists\Delta>0:\forall x>\Delta\Rightarrow|f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$. Поскольку в рассматриваемом случае функция f является ограниченной, то $\exists M>0: |f(x)|\leqslant M\ \ \forall x\in[0,+\infty[$.

Пусть $x>\Delta$. Тогда

$$\frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)\,dt=\frac{1}{x}\int\limits_0^\Delta f(t)\,dt+\frac{1}{x}\int\limits_\Delta^x f(t)\,dt.$$

Из оценок

$$\frac{1}{x}\left|\int\limits_0^\Delta f(t)\,dt\right|\leqslant\frac{M\Delta}{x},\quad \frac{1}{x}\left|\int\limits_\Delta^x f(t)\,dt\right|<\frac{\varepsilon(x-\Delta)}{2x}<\frac{\varepsilon}{2}$$

получаем оценку

$$\frac{1}{x}\left|\int\limits_0^x f(t)\,dt\right|<\varepsilon,$$

если $x>\frac{2M\Delta}{\varepsilon}$.

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = A = 0$.

Если $A \neq 0$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists \Delta_1 > 0 : \forall x > \Delta_1 \Rightarrow A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$. При $x > \Delta_1$ имеем

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^{\Delta_1} f(t)\,dt + \int_{\Delta_1}^x f(t)\,dt > \int_0^{\Delta_1} f(t)\,dt + (A-\varepsilon)(x-\Delta_1).$$

Поэтому $\lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_0^x f(t)\,dt = \infty$.

Применяя второе правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} f(x) = A.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = A$. ►

38. Доказать, что $\int\limits_0^x e^{t^2}\,dt \sim \frac{e^{x^2}}{2x}$ при $x \to +\infty$.

◄ Докажем, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x\int\limits_0^x e^{t^2}\,dt}{e^{x^2}} = 1$, применив второе правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x\int\limits_0^x e^{t^2}\,dt}{e^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{d}{dx}\left(2x\int\limits_0^x e^{t^2}\,dt\right)}{\frac{d}{dx}e^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\int\limits_0^x e^{t^2}\,dt + 2xe^{x^2}}{2xe^{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\int\limits_0^x e^{t^2}\,dt}{xe^{x^2}} + 1\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{d}{dx}\int\limits_0^x e^{t^2}\,dt}{\frac{d}{dx}(xe^{x^2})} + 1\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{x^2}}{e^{x^2} + 2x^2e^{x^2}} + 1\right) = 1. \ ►$$

С помощью замены переменной с последующим применением формулы Ньютона—Лейбница вычислить следующие интегралы:

39. $I = \int\limits_0^{0{,}75} \dfrac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$.

◄ Полагая $\frac{1}{x+1} = t$, получаем: $x = \frac{1}{t} - 1$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$, $x^2 + 1 = \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} + 2$; тогда

$$I = \int_{\frac{4}{7}}^1 \frac{dt}{\sqrt{2t^2 - 2t + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{4}{7}}^1 \frac{d\left(t-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\left(t-\frac{1}{2}\right) + \sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}\right|\Bigg|_{\frac{4}{7}}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{9+4\sqrt{2}}{7}. \ ►$$

40. $I = \int\limits_{-1}^1 \dfrac{1+x^2}{1+x^4}\,dx$

◄ В неопределенном интеграле $\int \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx$, $x \in \mathbb{R}$, произведем замену переменной по формуле $x - \frac{1}{x} = t$, $x \neq 0$. Тогда

$$\int \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx = \int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + C,\ x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

В примере 20, гл 3 показано, что функция

$$F : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + \varepsilon(x), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

где $\varepsilon(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \operatorname{sgn} x$, является первообразной функции $x \mapsto \frac{1+x^2}{1+x^4}$, $x \in \mathbb{R}$.

Следовательно, $I = \varepsilon(1) - \varepsilon(-1) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$. ►

41. $I = \int\limits_{0,5}^{2} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}}\, dx$.

◄ Произведем в интеграле замену $x + \frac{1}{x} = t$. Здесь каждому $2 < t \leqslant 2{,}5$ соответствует два значения x, поэтому представим интеграл на сегменте $[0{,}5;\ 2]$ в виде суммы двух интегралов на сегментах $[0{,}5;\ 1]$ и $[1,\ 2]$: $I = I_1 + I_2$, где

$$I_1 = \int\limits_{0,5}^{1} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}}\, dx, \qquad I_2 = \int\limits_{1}^{2} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}}\, dx.$$

Так как в интегралах I_1 и I_2 соответственно имеем $x = \frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2}$, $x = \frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}$, то

$$I_1 = 0{,}5\int\limits_{2,5}^{2} e^t \left(1 - \frac{t}{\sqrt{t^2-4}} + t - \sqrt{t^2-4}\right) dt, \quad I_2 = 0{,}5\int\limits_{2}^{2,5} e^t \left(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2-4}} + t + \sqrt{t^2-4}\right) dt,$$

$$I = \int\limits_{2}^{2,5} e^t \left(\frac{t}{\sqrt{t^2-4}} + \sqrt{t^2-4}\right) dt = \int\limits_{2}^{2,5} e^t\, d\sqrt{t^2-4} + \int\limits_{2}^{2,5} e^t \sqrt{t^2-4}\, dt =$$

$$= e^t \sqrt{t^2-4}\Big|_{2}^{2,5} - \int\limits_{2}^{2,5} e^t \sqrt{t^2-4}\, dt + \int\limits_{2}^{2,5} e^t \sqrt{t^2-4}\, dt = 1{,}5e^{2,5} \quad ►$$

42. В интеграле $I = \int\limits_{0}^{2\pi} f(x) \cos x\, dx$ произвести замену переменной по формуле $\sin x = t$.

◄ Представим интеграл I в виде суммы интегралов на четырех сегментах $\left[k\frac{\pi}{2},\ (k+1)\frac{\pi}{2}\right]$, $k = \overline{0,3}$, на каждом из которых функция $x \mapsto \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, монотонна. Тогда на сегментах $[-1,\ 0]$ и $[0,\ 1]$ определены функции, обратные сужениям синуса на указанные четыре сегмента. Если $x \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$, то $x = \arcsin t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Если $x \in \left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$, то $x = \pi - \arcsin t$ и t убывает от 1 до 0. Если $x \in \left[\pi,\ \frac{3}{2}\pi\right]$, то $x = \pi - \arcsin t$ и t убывает от 0 до -1. Если $x \in \left[\frac{3}{2}\pi,\ 2\pi\right]$, то $x = 2\pi + \arcsin t$, $-1 \leqslant t \leqslant 0$. Таким образом, после указанной замены получаем

$$I = \int\limits_{0}^{1} f(\arcsin t)dt + \int\limits_{1}^{0} f(\pi - \arcsin t)\, dt + \int\limits_{0}^{-1} f(\pi - \arcsin t)\, dt + \int\limits_{-1}^{0} f(2\pi + \arcsin t)\, dt =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} \left(f(2\pi + \arcsin t) - f(\pi - \arcsin t)\right) dt + \int\limits_{0}^{1} \left(f(\arcsin t) - f(\pi - \arcsin t)\right) dt. \quad ►$$

С помощью формулы интегрирования по частям и получаемых рекуррентных соотношений вычислить следующие интегралы:

43. $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$.

◀ Интегрируем по частям, полагая $\sin x\,dx = dv(x)$, $\sin^{n-1} x = u(x)$. При этом имеем

$$I_n = \cos x \sin^{n-1} x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} + (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x\,dx = (n-1)\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx\right) = (n-1)(I_{n-2} - I_n).$$

Получили рекуррентное соотношение $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$, с помощью которого находим

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \dfrac{\pi}{2}, & \text{если } n = 2k, \\ \dfrac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, & \text{если } n = 2k+1. \end{cases} \quad ▶$$

44. $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$.

◀ С помощью замены $\frac{\pi}{2} - x = t$ убеждаемся в том, что $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$. ▶

45. $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n} x\,dx$.

◀ Интегрируя в пределах от 0 до $\frac{\pi}{4}$ тождество

$$\operatorname{tg}^{2n} x\,dx = \operatorname{tg}^{2n-2} x\,d(\operatorname{tg} x) - \operatorname{tg}^{2n-2} x\,dx,$$

получаем рекуррентную формулу

$$I_n = \frac{\operatorname{tg}^{2n-1} x}{2n-1}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} - I_{n-1} = \frac{1}{2n-1} - I_{n-1},$$

с помощью которой находим

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2n-(2k-1)} + (-1)^n I_0 = (-1)^n \left(I_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-n}}{2(n-k)+1}\right),$$

где $I_0 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \frac{\pi}{4}$.

Вводя новый индекс суммирования $n - k = m$, окончательно получаем

$$I_n = (-1)^n \left(\frac{\pi}{4} - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m}{2m+1}\right). \quad ▶$$

46. $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)^{2n+1} dx$.

◄ Произведя в интеграле замену $\frac{\pi}{4} - x = t$, получим

$$I_n = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n+1} t\, dt = \left.\frac{\operatorname{tg}^{2n} t}{2n}\right|_0^{\frac{\pi}{4}} + I_{n-1} = -\frac{1}{2n} + I_{n-1}.$$

Последовательно используя полученную рекуррентную формулу $n-1$ раз, имеем

$$I_n = (-1)^n \left(-I_0 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \right),$$

где $I_0 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} t\, dt = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{d(\cos t)}{\cos t} = \ln\cos t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{0} = \ln\sqrt{2}$. ►

47. $I(2m,\, 2n) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \cos^{2n} x\, dx.$

◄ Полагая $\cos x\, dx = dv(x)$, $\sin^{2m} x \cos^{2n-1} x = u(x)$ и применяя формулу интегрирования по частям, находим рекуррентное соотношение

$$I(2m,\, 2n) = \frac{2n-1}{2m+1} I(2m+2,\, 2n-2),$$

пользуясь которым $n-1$ раз и принимая во внимание решение примера 43, получим

$$I(2m,\, 2n) = \frac{(2n-1)(2n-3)\,\ldots\,3\cdot 1}{(2m+1)(2m+3)\,\ldots\,(2m+2n-1)} I(2m+2n,\, 0) =$$

$$= \frac{(2n-1)!!(2m+2n-1)!!}{((2m+1)(2m+3)\,\ldots\,(2m+2n-1))(2m+2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2n-1)!!(2m-1)!!}{2(2m+2n)!!}\pi =$$

$$= \frac{\pi(2n)!(2m)!}{2^{m+n+1}(m+n)!2^{m+n}m!n!} = \frac{\pi(2n)!(2m)!}{2^{2m+2n+1}m!n!(m+n)!}. \ ►$$

48. $I_n = \int\limits_E x^m (\ln x)^n\, dx,\ E =]0,\, 1].$

◄ Согласно определению 3, п. 1.5, имеем

$$I_n = \int\limits_0^1 F(x)\, dx,$$

где $F(x) = \begin{cases} x^m(\ln x)^n, & x \in E, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ Функция F непрерывна справа в точке $x = 0$, так как $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$, следовательно, $F \in R[0,\, 1]$. Интегрируя по частям, получим

$$I_n = \left.\frac{x}{m+1}F(x)\right|_0^1 - \frac{n}{m+1}\int\limits_E x^m(\ln x)^{n-1}\, dx = -\frac{n}{m+1} I_{n-1}.$$

Рассуждая аналогично относительно интегралов $I_{n-1}, I_{n-2}, \ldots, I_1$, находим

$$I_n = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^n} I_0,$$

где $I_0 = \int\limits_0^1 x^m\, dx = \frac{1}{m+1}$. Окончательно имеем

$$I_n = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}. \ ►$$

Примеры 49—54 являются теоремами, которые могут быть использованы при вычислении некоторых интегралов и рассмотрении отдельных вопросов теории.

49. Доказать, что для непрерывной функции $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$ имеем:

1) $\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{l} f(x)\,dx$, если функция f четная;

2) $\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx = 0$, если функция f нечетная.

◀ В силу свойства аддитивности интеграла справедливо равенство

$$\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx = \int\limits_{-l}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{l} f(x)\,dx.$$

Полагая в первом интеграле $x = -t$, имеем

$$\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{l} (f(x) + f(-x))\,dx.$$

Если f четная функция, то $f(x) + f(-x) = 2f(x)$, $0 \leqslant x \leqslant l$, и получаем 1). Если f нечетная функция, то $f(x) + f(-x) \equiv 0$, $0 \leqslant x \leqslant l$, и получаем 2). ▶

50. Доказать, что одна из первообразных четной функции есть нечетная функция, а всякая первообразная нечетной функции является четной функцией.

◀ Пусть $f \in R[-l, l]$ и является четной функцией. Тогда любая функция

$$F : x \mapsto \int\limits_{0}^{x} f(t)\,dt + C, \qquad C = \text{const},$$

является первообразной функции f на сегменте $[-l, l]$ (множество точек разрыва функции f не более чем счетное).

Рассмотрим интеграл $\int\limits_{0}^{-x} f(t)\,dt$, произведем в нем замену $-t = z$ и воспользуемся четностью функции f. При этом получим

$$F(-x) = -\int\limits_{0}^{x} f(z)\,dz + C.$$

Следовательно, $(F(-x) = -F(x)) \Leftrightarrow (C = 0)$, т. е. лишь функция $x \mapsto \int\limits_{0}^{x} f(t)\,dt$, $-l \leqslant x \leqslant l$, является нечетной.

Пусть f — нечетная на сегменте $[-l, l]$ функция и $f \in R[-l, l]$. Тогда

$$\int f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{x} f(t)\,dt + C, \qquad C = \text{const}.$$

Рассмотрим произвольную первообразную функции f

$$F_1(x) = \int\limits_{0}^{x} f(t)\,dt + C_1,$$

принадлежащую множеству $\left\{\int\limits_0^x f(t)\,dt + C\right\}$. Имеем

$$F_j(-x) = \int\limits_0^{-x} f(t)\,dt + C_j = -\int\limits_0^x f(-z)\,dz + C_j = \int\limits_0^x f(z)\,dz + C_j = F_j(x).$$

Следовательно, F_j является четной функцией. ►

51. Доказать, что если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является непрерывной периодической функцией, имеющей период T, то

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_0^T f(x)\,dx,$$

где a — произвольное действительное число.

◄ В силу свойства аддитивности интеграла, имеем

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_a^T f(x)\,dx + \int\limits_T^{a+T} f(x)\,dx.$$

Из условия периодичности функции f следует, что

$$\int\limits_T^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_T^{a+T} f(x-T)\,dx.$$

Произведя замену $x - T = t$, получаем

$$\int\limits_T^{a+T} f(x-T)\,dx = \int\limits_0^a f(t)\,dt.$$

Следовательно,

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_0^a f(x)\,dx + \int\limits_a^T f(x)\,dx = \int\limits_0^T f(x)\,dx \quad ►$$

52. Доказать, что при нечетном n функции

$$F : x \mapsto \int\limits_0^x \sin^n t\,dt, \qquad G : x \mapsto \int\limits_0^x \cos^n t\,dt$$

— периодические с периодом 2π, а при n четном каждая из этих функций есть сумма линейной функции и периодической функции.

◄ Доказательство проведем для функции F. Пусть $n = 2m+1$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда

$$F(x+2\pi) = \int\limits_0^{x+2\pi} \sin^{2m+1} t\,dt = F(x) + \int\limits_x^{x+2\pi} \sin^{2m+1} t\,dt.$$

Аналогично решению примеров 51 и 49 имеем

$$\int\limits_x^{x+2\pi} \sin^{2m+1} t\,dt = \int\limits_0^{2\pi} \sin^{2m+1} t\,dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^{2m+1} t\,dt = 0.$$

Следовательно $F(x+2\pi) = F(x)$, т. е. F — периодическая функция с периодом 2π.

Если $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$, то

$$F(x + 2\pi) = F(x) + \int\limits_0^{2\pi} \sin^{2m} x\, dx.$$

Поскольку функция $x \mapsto \sin^{2m} x$, $x \in \mathbb{R}$, имеет период π, а ее сужение на сегмент $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ является четной функцией, то

$$\int\limits_0^{2\pi} \sin^{2m} x\, dx = 2\int\limits_0^{\pi} \sin^{2m} x\, dx = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x\, dx = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x\, dx.$$

Следовательно,

$$C_m = \int\limits_0^{2\pi} \sin^{2m} x\, dx = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x\, dx = 2\pi \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}$$

(см. решение примера 43). Таким образом, $F(x + 2\pi) - F(x) = C_m$.

Рассмотрим функцию $\psi : x \mapsto F(x) - \frac{C_m}{2\pi}x$, $x \in \mathbb{R}$. Поскольку $\psi(x + 2\pi) = F(x + 2\pi) - \frac{C_m}{2\pi}(x + 2\pi) = F(x + 2\pi) - C_m - \frac{C_m}{2\pi}x = F(x) - \frac{C_m}{2\pi}x = \psi(x)$, то ψ является 2π–периодической функцией, в силу чего

$$F(x) = \psi(x) + a_m x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a_m = \frac{C_m}{2\pi},$$

т. е. функция F представима в виде суммы 2π–периодической функции ψ и линейной (однородной) функции $x \mapsto a_m x$. ▶

53. Доказать, что функция

$$F : x \mapsto \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

где f — непрерывная периодическая функция с периодом T, в общем случае есть сумма линейной функции и периодической функции периода T.

◀ Согласно теореме 2, п. 2.1, функция F дифференцируема $\forall x \in \mathbb{R}$, и при этом $F'(x) = f(x)$. В силу периодичности f, имеем $F'(t + T) = f(t)$. Интегрируя на сегменте $[x_0, x]$, находим $F(x + T) - F(x_0 + T) = F(x)$. Поскольку

$$F(x_0 + T) = \int\limits_{x_0}^{x_0+T} f(t)\, dt = \int\limits_0^{T} f(t)\, dt = C, \quad C = \text{const},$$

то $F(x + T) - F(x) = C$. Если $C = 0$, то $F(x + T) = F(x)$ и F является периодической функцией с периодом T. Если $C \neq 0$, то введем в рассмотрение функцию

$$\Phi : x \mapsto F(x) - \frac{C}{T}x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Поскольку Φ является периодической функцией с периодом T, то

$$F(x) = \Phi(x) + ax, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a = \frac{C}{T},$$

есть сумма периодической и линейной (однородной) функций. ▶

54. Доказать, что если $f \in C[0, 1]$, то:

1) $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\, dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\, dx$; 2) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} x f(\sin x)\, dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)\, dx$.

◀ 1) Полагая $\frac{\pi}{2} - x = t$, получим

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\, dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\cos t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\, dt.$$

2) Запишем

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\, dx = \int_0^{\pi} x f(\sin(\pi - x))\, dx$$

и положим $\pi - x = t$, получим

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\, dx = \int_0^{\pi} (\pi - t)\, f(\sin\ t)\, dt = \pi \int_0^{\pi} f(\sin\ t)\, dt - \int_0^{\pi} t f(\sin\ t)\, dt,$$

откуда

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x)\, dx. \ ▶$$

В примерах 55—62 рассматриваются различные интегралы. Некоторые из них вычисляются путем использования формул Эйлера

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \qquad e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

Вычислить интегралы:

55. $I = \int\limits_0^{200\pi} \sqrt{1 - \cos 2x}\, dx.$

◀ Поскольку $I = \sqrt{2} \int\limits_0^{200\pi} |\sin x|\, dx$ и функция $x \mapsto |\sin x|$, $x \in \mathbb{R}$, периодическая с периодом $T = \pi$, то, согласно примеру 51, имеем

$$I = 200\sqrt{2} \int_0^{\pi} \sin x\, dx = 400\sqrt{2}. \ ▶$$

56. $I = \int\limits_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx.$

◀ Так как $I = \int\limits_0^{\pi} x f(\sin x)\, dx$, где $f(t) = \frac{t}{2-t^2}$, то, согласно примеру 54, получаем

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{2 - \sin^2 x}\, dx = \frac{\pi}{2} \int_{\pi}^{0} \frac{d(\cos x)}{1 + \cos^2 x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{arctg}(\cos x)\Big|_{\pi}^{0} = \frac{\pi^2}{4}. \ ▶$$

57. $I = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{1 + 2\alpha \cos x + \alpha^2}\, dx$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

◀ Если $\alpha = 1$, то $I = \int\limits_E \frac{\sin^2 x}{1 + 2\cos x + 1}\, dx = \int\limits_E \sin^2 \frac{x}{2}\, dx$, где $E = [0, \pi[$. В этом случае $I = \frac{\pi}{2}$.

При $\alpha \neq 1$ представим I в виде $I = \frac{1}{1+\alpha^2}(I_1 - I_2)$, где

$$I_1 = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}, \quad I_2 = \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+\varepsilon\cos x}\,dx = \int_0^{\pi}\left(\frac{\cos x}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon^2(1+\cos x)}\right)dx = -\frac{\pi}{\varepsilon^2} + \frac{I_1}{\varepsilon^2},$$

$$\varepsilon = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}, \quad |\varepsilon| < 1.$$

Следовательно, $I = \frac{1}{\varepsilon^2(1+\alpha^2)}(\pi - (1-\varepsilon^2)I_1)$.

Поскольку $I_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-|\varepsilon|}{1+|\varepsilon|}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right]\right)\Big|_0^{\pi-0} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$ (см. пример 20), то

$$I = \frac{\pi}{\varepsilon^2(1+\alpha^2)}(1-\sqrt{1-\varepsilon^2}) = \frac{\pi}{4\alpha^2}(1+\alpha^2 - |1-\alpha^2|).$$

Принимая во внимание, что $I = \frac{\pi}{2}$ при $\alpha = 1$, получаем

$$I = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & \text{если } |\alpha| \leqslant 1, \\ \dfrac{\pi}{2\alpha^2}, & \text{если } |\alpha| > 1. \end{cases}$$ ►

58. $I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$.

◄ Из тождества $1 \equiv (3+\cos x) - (2+\cos x)$ следует, что

$$I = \varepsilon_1 \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon_1\cos x} - \varepsilon_2 \int_0^{2\pi}\frac{dx}{1+\varepsilon_2\cos x},$$

где $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$, $\varepsilon_2 = \frac{1}{3}$. Так как

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1+\varepsilon_j\cos x} = \left(\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon_j^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon_j}{1+\varepsilon_j}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon_j^2}}\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right]\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon_j^2}},$$

то $I = 2\pi\left(\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{1-\varepsilon_1^2}} - \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{1-\varepsilon_2^2}}\right) = \pi\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. ►

59. $I = \int\limits_E \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx$, $E =]0, \pi[$.

◄ Поскольку $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sin nx}{\sin x} = n$, $\lim\limits_{x\to\pi-0}\frac{\sin nx}{\sin x} = (-1)^{n+1}n$, то

$$\int_E \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx = \int_0^{\pi} f(x)\,dx,$$

где $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin nx}{\sin x} & \text{при } x \in E, \\ n & \text{при } x = 0, \\ (-1)^{n+1}n & \text{при } x = \pi. \end{cases}$

Из формул Эйлера следует, что $\sin kx = \frac{1}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx})$, $k = \overline{1, n}$, следовательно,

$$f(x) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{e^{ix} - e^{-ix}} = \sum_{k=1}^{n} e^{i((n+1)-2k)x} =$$

$$= \begin{cases} 2(\cos(n-1)x + \cos(n-3)x + \ldots + \cos x), & \text{если n четное,} \\ 2(\cos(n-1)x + \cos(n-3)x + \ldots + \cos x) + 1, & \text{если n нечетное} \end{cases}$$

Поскольку $\int\limits_0^\pi \cos(n-k)x\,dx = \frac{\sin(n-k)x}{n-k}\Big|_0^\pi = 0$, $k = 1, 3, \ldots, n-1$, то

$$\int\limits_E \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx = \int\limits_0^\pi f(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{если n четное,} \\ \pi, & \text{если n нечетное.} \end{cases} \blacktriangleright$$

60. $I = \int\limits_E \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}\,dx$, $E = [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

◀ Функция $x \mapsto \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}$, $x \in E$, имеет предельное значение при $x \to \frac{\pi}{2}$, равное $(-1)^n(2n+1)$, поэтому

$$\int\limits_E \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}\,dx = \int\limits_0^\pi f(x)\,dx,$$

где $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}, & \text{если } x \in E, \\ (-1)^n(2n+1), & \text{если } x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Согласно формулам Эйлера, имеем

$$\cos(2n+1)x = \frac{1}{2}\left(e^{i(2n+1)x} + e^{-i(2n+1)x}\right), \quad \cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right),$$

$$f(x) = 2\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cos 2(n-(k-1))x + (-1)^n, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi.$$

Следовательно,

$$I = \int\limits_0^\pi f(x)\,dx = 2\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\int\limits_0^\pi \cos 2(n-(k-1))x\,dx + (-1)^n\pi =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{\sin 2(n-(k-1))x}{2(n-(k-1))}\Bigg|_0^\pi + (-1)^n\pi = (-1)^n\pi. \blacktriangleright$$

61. $I = \int\limits_0^\pi \cos nx \cos^n x\,dx$.

◀ С помощью формул Эйлера находим

$$\cos nx\cos^n x = \frac{1}{2^{n+1}}\left(e^{inx} + e^{-inx}\right)\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^n = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n} C_n^k\left(e^{i2(n-k)x} + e^{-i2kx}\right) =$$

$$= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}\left(\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k e^{i2(n-k)x} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k e^{-i2kx}\right) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n} C_n^k \cos 2kx.$$

Интегрируя полученное выражение на сегменте $[0, \pi]$ и принимая во внимание равенства

$$\int\limits_0^\pi \cos 2kx\,dx = 0, \quad k = \overline{1, n},$$

получаем $I = \frac{\pi}{2^n}$. ▶

62. $I = \int\limits_0^\pi \sin nx \sin^n x\,dx$.

◀ Произведем в интеграле замену $x = \frac{\pi}{2} + t$. При этом получим

$$I = \sin n\frac{\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \cos nt\, dt + \cos n\frac{\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \sin nt\, dt.$$

Так как функция $t \mapsto \cos^n t \sin nt$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$, нечетная, то, согласно примеру 49, имеем

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \sin nt\, dt = 0.$$

Следовательно,

$$I = \sin n\frac{\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \cos nt\, dt.$$

В предыдущем примере показано, что

$$\cos^n t \cos nt = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n} C_n^k \cos 2kx.$$

Принимая во внимание равенства

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2kx\, dx = \frac{1}{2k}\sin 2kx\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0, \qquad k = \overline{1, n},$$

находим

$$I = \frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{2^n}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2^n}\sin n\frac{\pi}{2}. \ ▶$$

63. Многочлен Лежандра определяется формулой

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \quad n \in \mathbb{Z}_0.$$

Доказать, что

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1}, & \text{если } m = n. \end{cases}$$

◀ Рассмотрим при $m < n$ интеграл

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n)x^m\, dx$$

и вычислим его, применив формулу интегрирования по частям m раз. При этом получим

$$I = (-1)^m m! \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(x^2-1)^n\, dx = (-1)^m m! \frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}}(x^2-1)^n\Big|_{-1}^{1} = 0, \qquad (1)$$

так как $\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^n\Big|_{-1}^{1} = 0$ при $k=\overline{0, n-1}$.

Многочлен $P_n(x)$ отличается от многочлена $\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ лишь постоянным множителем, а многочлен $P_m(x)$ является линейной комбинацией степеней x^k, $k=\overline{0, m}$, поэтому из (1) следует, что

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = 0, \text{ если } m<n.$$

Если $m>n$, то, очевидно, $\int\limits_{-1}^{1} P_m(x)x^n\,dx=0$, в силу чего $\int\limits_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx=0$.

Таким образом, $\int\limits_{-1}^{1} P_m(x)\,P_n(x)\,dx = 0$, если $m\neq n$.

Рассмотрим интеграл

$$I_n=\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\,dx$$

и для его вычисления применим n раз формулу интегрирования по частям, получим

$$I_n=\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}((x^2-1)^n)(x^2-1)^n\,dx.$$

Многочлен $(x^2-1)^n$ имеет коэффициент 1 при старшем члене, поэтому $\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^n=(2n)!$ Следовательно,

$$I_n=\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\,dx = (-1)^n\frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{0}^{1}(x^2-1)^n\,dx = \frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{0}^{1}(1-x^2)^n\,dx$$

(в силу четности функции $x\mapsto(x^2-1)^n$, $-1\leqslant x\leqslant 1$). Произведя в интеграле замену $\arcsin x = t$ и принимая во внимание решение примера 43, находим

$$I_n=\frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}t\,dt = \frac{2(2n)!(2n)!!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)!!}=\frac{2}{2n+1}. \ ►$$

64. Пусть $f\in R[a,b]$ и функция $x\mapsto F(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, такая, что $F'(x)=f(x)$ всюду на $[a,b]$, за исключением конечного числа внутренних точек c_i, $i=\overline{1,p}$, и точек a и b, в которых F терпит разрывы первого рода.

Доказать, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b-0)-F(a+0)-\sum_{i=1}^{p}(F(c_i+0)-F(c_i-0)).$$

◄ Образуем функцию $x\mapsto F_1(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, где

$$F_1(x)=\begin{cases} F(x), & \text{если } x\in]c_i, c_{i+1}[,\\ F(c_i+0), & \text{если } x=c_i,\\ F(c_{i+1}-0), & \text{если } x=c_{i+1},\end{cases}\qquad i=\overline{0,p},\ c_0=a,\ c_{p+1}=b.$$

Пусть Π — произвольное разбиение сегмента $[a,b]$, в число точек которого входят c_i, $i=\overline{1,p}$. Применяя на каждом сегменте $[x_j, x_{j+1}]$, $j=\overline{0,n-1}$, формулу конечных приращений, получим

$$S_\Pi(f)=\sum_{j=0}^{n-1}(F_1(x_{j+1})-F_1(x_j))=\sum_{j=0}^{n-1}F_1'(\xi_j)\,\Delta x_j=\sum_{j=0}^{n-1}f(\xi_j)\,\Delta x_j,\qquad x_j<\xi_j<x_{j+1}.$$

Вместе с тем сумма $S_\Pi(f)$ имеет вид

$$S_\Pi(f) = \sum_{i=0}^{p}(F_1(c_{i+1}) - F_1(c_i)) = F_1(c_1) - F_1(c_0) + F_1(c_{p+1}) - F_1(c_p) + \sum_{i=1}^{p-1}(F(c_{i+1}-0) - F(c_i+0)) =$$

$$= F(b-0) - F(a+0) + F(c_1-0) - F(c_p+0) + \sum_{i=1}^{p-1}(F(c_{i+1}-0) - F(c_i+0)) =$$

$$= F(b-0) - F(a+0) - \sum_{i=1}^{p}(F(c_i+0) - F(c_i-0)).$$

Поскольку $f \in R[a, b]$, то $\lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(f) = \int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b-0) - F(a+0) - \sum\limits_{i=1}^{p}(F(c_i+0) - F(c_i-0))$. ►

65. Используя теоремы о среднем, определить знаки следующих интегралов:

$$\text{а) } I = \int\limits_E \frac{\sin x}{x}\,dx, \quad E =]0, 2\pi]; \quad \text{б) } I = \int\limits_{-2}^{2} x^3 2^x\,dx.$$

◄ а) Функция $F : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, где

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{если } x \in E, \\ 1, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

непрерывна на сегменте $[0, 2\pi]$, поэтому $F \in R[0, 2\pi]$, причем

$$\int\limits_E \frac{\sin x}{x}\,dx = \int\limits_0^{2\pi} F(x)\,dx.$$

Из свойства аддитивности интеграла следует, что

$$\int\limits_0^{2\pi} F(x)\,dx = \int\limits_0^{\pi} F(x)\,dx + \int\limits_{\pi}^{2\pi} F(x)\,dx = \pi \int\limits_0^{\pi} \frac{F(x)}{x+\pi}\,dx$$

(в интеграле $\int\limits_{\pi}^{2\pi} F(x)\,dx$ произведена замена $x - \pi = t$). Применив первую теорему о среднем, получим

$$I = \pi F(\xi) \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{x+\pi} = \pi F(\xi) \ln(x+\pi)\Big|_0^{\pi} = \pi \frac{\sin\xi}{\xi} \ln 2, \quad 0 < \xi < \pi,$$

откуда следует, что $I > 0$.

б) Запишем $I = I_1 + I_2$, где

$$I_1 = \int\limits_{-2}^{0} x^3 2^x\,dx, \qquad I_2 = \int\limits_0^{2} x^3 2^x\,dx,$$

и произведем в I_1 замену $x = -t$, получим

$$I = 2\int\limits_0^{2} x^3 \operatorname{sh}(x \ln 2)\,dx.$$

Согласно первой теореме о среднем, имеем

$$I = 2\,\mathrm{sh}(\xi\ln 2)\int_0^2 x^3\,dx = 8\,\mathrm{sh}(\xi\ln 2), \quad 0 < \xi < 2.$$

Следовательно, $I > 0$. ►

66. Пусть $f \in C[0, +\infty[$ и $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$, $A \in \mathbb{R}$. Найти

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt.$$

Рассмотреть $f(t) = \operatorname{arctg} t$, $0 \leqslant t < +\infty$.

◄ Поскольку $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists B > 0$:

$$\forall x \geqslant B \Rightarrow |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Рассмотрим при $x > B$ интеграл

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{x}\int_0^B f(t)\,dt + \frac{1}{x}\int_B^x f(t)\,dt.$$

Так как $f \in R[0, B]$, то $\int\limits_0^B f(t)\,dt = C$, $C = \mathrm{const}$. Согласно первой теореме о среднем, имеем

$$\frac{1}{x}\int_B^x f(t)\,dt = f(\xi)\left(1 - \frac{B}{x}\right), \quad B \leqslant \xi \leqslant x.$$

Оценим $\alpha(x) = \left|\frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)\,dt - A\right|$ при $x > B$. Имеем

$$\alpha(x) = \left|\frac{C}{x} + (f(\xi) - A) - f(\xi)\frac{B}{x}\right| \leqslant \frac{|C - f(\xi)B|}{x} + |f(\xi) - A| < \frac{|C - f(\xi)B|}{x} + \frac{\varepsilon}{2},$$

так как $B \leqslant \xi \leqslant x$. Поскольку $|C - f(\xi)B| = \mathrm{const}$, то при достаточно больших $x > 0$ будет выполняться неравенство $\frac{|C-f(\xi)B|}{x} < \frac{\varepsilon}{2}$, следовательно, и неравенство $\alpha(x) < \varepsilon$, из которого следует, что

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = A.$$

Если $f(t) = \operatorname{arctg} t$, $0 \leqslant t < +\infty$, то

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x \operatorname{arctg} t\,dt = \frac{\pi}{2}. \ ►$$

Оценить интегралы:

67. $I = \int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dx}{1 + 0{,}5\cos x}$.

◄ Представим I в виде $I = I_1 + I_2$, где

$$I_1 = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + 0{,}5\cos x}, \quad I_2 = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{1 + 0{,}5\cos x}.$$

Заменяя в интеграле I_2 переменную по формуле $2\pi - x = t$, убеждаемся в том, что $I_2 = I_1$. Следовательно,

$$I = 2I_1 = 4\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{1+2\cos^2\frac{x}{2}}.$$

Функция $f : x \mapsto \int\limits_0^x \frac{dt}{1+2\cos^2\frac{t}{2}}$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, удовлетворяет на сегменте $[0, \pi]$ всем условиям теоремы Лагранжа о конечных приращениях, в силу чего имеем

$$I = 4(f(\pi) - f(0)) = 4\pi f'(\xi) = \frac{4\pi}{1+2\cos^2\frac{\xi}{2}}, \quad 0 < \xi < \pi.$$

Так как $\frac{1}{3} < \frac{1}{1+2\cos^2\frac{\xi}{2}} < 1$, то справедлива оценка $\frac{4\pi}{3} < I < 4\pi$, или $-\frac{4\pi}{3} < I - \frac{8}{3}\pi < \frac{4\pi}{3}$. Обозначив $\theta = \left(I - \frac{8\pi}{3}\right) : \frac{4\pi}{3}$, получим

$$I = \frac{8\pi}{3} + \frac{4}{3}\pi\theta, \quad |\theta| < 1. \ ►$$

68. $I = \int\limits_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100}\,dx.$

◄ Поскольку функция $x \mapsto \frac{1}{x+100}$, $0 \leqslant x \leqslant 100$, монотонная, а функция $x \mapsto e^{-x}$, $0 \leqslant x \leqslant 100$, непрерывная, то к I можно применить вторую теорему о среднем (формулу (6) п. 2.2). Тогда получим

$$I = 0{,}01 \int\limits_0^{\xi} e^{-x}\,dx + 0{,}005 \int\limits_{\xi}^{100} e^{-x}\,dx = 0{,}01\,(1 - e^{-\xi}) + 0{,}005\,(e^{-\xi} - e^{-100}), \quad 0 < \xi < 100.$$

Так как $\xi = 100\,\theta$, $0 < \theta < 1$, то I принимает вид

$$I = 0{,}01 - 0{,}005\,(e^{-100\,\theta} - e^{-100}) = 0{,}01 - 0{,}005\,\theta_1,$$

где $\theta_1 = e^{-100\,\theta} - e^{-100}$, $0 < \theta_1 < 1$. ►

69. $I = \int\limits_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx.$

◄ Функция $x \mapsto \frac{1}{x}$, $100\pi \leqslant x \leqslant 200\pi$, монотонная, а функция $x \mapsto \sin x$, $100\pi \leqslant x \leqslant 200\pi$, непрерывная, поэтому применим формулу (6), п. 2.2. При этом получим

$$I = \frac{1}{100\pi} \int\limits_{100\pi}^{\xi} \sin x\,dx + \frac{1}{200\pi} \int\limits_{\xi}^{200\pi} \sin x\,dx = \frac{1-\cos\xi}{200\pi}, \quad 100\pi < \xi < 200\pi.$$

Следовательно, $0 < I < \frac{1}{100\pi}$. Обозначим $\theta = I : \frac{1}{100\pi}$, тогда $I = \frac{\theta}{100\pi}$, $0 < \theta < 1$. ►

70. $I = \int\limits_{100}^{200} \sin \pi x^2\,dx.$

◄ После замены переменной по формуле $\pi x^2 = t$, получим

$$I = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{100^2\pi}^{200^2\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt.$$

Воспользовавшись формулой (6), п. 2.2, имеем

$$I = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{100\sqrt{\pi}} \int\limits_{100^2\pi}^{\xi} \sin t\, dt + \frac{1}{200\sqrt{\pi}} \int\limits_{\xi}^{200^2\pi} \sin t\, dt \right) = \frac{1-\cos\xi}{400\pi}, \quad 100^2\pi < \xi < 200^2\pi.$$

Очевидно, $0 < I < \frac{1}{200\pi}$, поэтому $I = \frac{\theta}{200\pi}$, $0 < \theta < 1$. ►

71. $I = \int\limits_a^b \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx$, $0 < a < b$.

◄ Функция $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$, $a \leqslant x \leqslant b$, убывает на сегменте $[a, b]$, а функция $x \mapsto \cos x$, $a \leqslant x \leqslant b$, непрерывна на нем, поэтому, согласно формуле (4), п. 2.2, имеем

$$I = \frac{1}{\sqrt{a}} \int\limits_a^{\xi} \cos x\, dx = \frac{\sin\xi - \sin a}{\sqrt{a}}, \quad a < \xi < b.$$

Из оценки $|\sin\xi - \sin a| < 2$ следует, что

$$-\frac{2}{\sqrt{a}} < I < \frac{2}{\sqrt{a}}.$$

Обозначив $\theta = I : \frac{2}{\sqrt{a}}$, получим

$$I = \frac{2\theta}{\sqrt{a}}, \quad |\theta| < 1. \ ►$$

72. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = 0$.

◄ При доказательстве можно было бы воспользоваться результатом решения примера 43 Мы воспользуемся первой теоремой о среднем.

Представим $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$ в виде $I_n = I_n^{(1)} + I_n^{(2)}$, где

$$I_n^{(1)} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} \sin^n x\, dx, \quad I_n^{(2)} = \int\limits_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx,$$

$0 < \varepsilon < \pi$ — произвольное, наперед заданное число.

При любом $n \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$I_n^{(2)} \leqslant \int\limits_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $\sin^n x < \sin^{n-1} x$, $0 < x < \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}$, то

$$I_n^{(1)} < I_{n-1}^{(1)}, \text{ где } I_{n-1}^{(1)} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} \sin^{n-1} x\, dx.$$

Поскольку $I_n^{(1)} > 0$, то убывающая последовательность $(I_n^{(1)})$ ограничена снизу и

$$\exists \lim_{n\to\infty} I_n^{(1)} = C, \quad C \geqslant 0.$$

Следовательно,

$$I_n^{(1)} = C + \alpha_n, \quad I_{n-1}^{(1)} = C + \beta_n,$$

где α_n, β_n — бесконечно малые последовательности.

Согласно первой теореме о среднем, имеем

$$I_n^{(1)} = \sin \xi_n I_{n-1}^{(1)}, \quad 0 < \xi_n \leqslant \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда получаем $C = \frac{\alpha_n - \beta_n \sin \xi_n}{1 - \sin \xi_n}$, т. е. C — бесконечно малая последовательность. Так как $C = \text{const}$, то $C = 0$. ►

73. Доказать равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_n^{n+p} \frac{\sin x}{x}\,dx = 0$, $p > 0$.

◄ Функция $x \mapsto \frac{1}{x}$, $n \leqslant x \leqslant n+p$, убывает, а функция $x \mapsto \sin x$, $n \leqslant x \leqslant n+p$, непрерывна на каждом сегменте $[n, n+p]$, поэтому, применив вторую теорему о среднем (формула (4), п. 2.2), получим

$$I_n = \int\limits_n^{n+p} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{n}\int\limits_n^{\xi_n} \sin x\,dx = \frac{\cos n - \cos \xi_n}{n}, \quad n < \xi_n < n+p.$$

Из оценки $|I_n| = \frac{|\cos n - \cos \xi_n|}{n} \leqslant \frac{2}{n}$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$. ►

74. Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ — непрерывные функции, причем функция φ дифференцируема на интервале $]a, b[$ и $\varphi'(x) \geqslant 0$. Доказать вторую теорему о среднем (формула (6), п. 2.2), применяя интегрирование по частям и используя первую теорему о среднем.

◄ Рассмотрим интеграл $I = \int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx$ и применим к нему формулу интегрирования по частям, полагая $dv(x) = f(x)\,dx$, $u(x) = \varphi(x)$. При этом получим

$$I = \left(\varphi(x)\int\limits_a^x f(t)\,dt\right)\Bigg|_a^b - \int\limits_a^b \left(\varphi'(x)\int\limits_a^x f(t)\,dt\right)dx = \varphi(b)\int\limits_a^b f(x)\,dx - (\varphi(b) - \varphi(a))\int\limits_a^{\xi} f(x)\,dx$$

(применив к интегралу $\int\limits_a^b \left(\varphi'(x)\int\limits_a^x f(t)\,dt\right)dx$ первую теорему о среднем). Применение этой теоремы законно, поскольку функция $x \mapsto \int\limits_a^x f(t)\,dt$, $a \leqslant x \leqslant b$, непрерывна, а $\varphi'(x) \geqslant 0$ согласно условию.

После несложных преобразований получаем

$$I = \varphi(b)\int\limits_{\xi}^b f(x)\,dx + \varphi(a)\int\limits_a^{\xi} f(x)\,dx. \ ►$$

Если $f \in R[a, b]$, то средним значением функции f на сегменте $[a, b]$ называется число

$$M(f) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Найти средние значения функций на указанных сегментах:

75. $\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 < \varepsilon < 1$.

◄ Согласно определению, имеем

$$M(\rho)=\frac{p}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1-\varepsilon\cos\varphi}=\frac{p}{2\pi}\left(\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left[\frac{\varphi+\pi}{2\pi}\right]\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\quad \text{(см. пример 20).}$$

Из аналитической геометрии известно, что $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$, $p=\frac{b^2}{a}$, где a — большая полуось эллипса, b — его малая полуось. Подставив вместо ε и p их значения, получим $M(\rho)=b$. ►

76. $f: x\mapsto \sin x\sin(x+\varphi)$, $0\leqslant x\leqslant 2\pi$.

◄ Исходя из определения среднего значения функции, имеем

$$M(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin x\sin(x+\varphi)\,dx=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(\cos\varphi-\cos(2x+\varphi))\,dx=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left(x\cos\varphi-\frac{1}{2}\sin(2x+\varphi)\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{\cos\varphi}{2}. \ ►$$

77. Найти среднее значение скорости свободно падающего тела, начальная скорость которого равна v_0.

◄ Скорость свободно падающего тела в момент времени t выражается формулой

$$v(t)=v_0+gt,$$

где g — ускорение свободного падения.

Согласно определению, получим

$$M(v)=\frac{1}{T}\int_0^T(v_0+gt)\,dt=v_0+\frac{gT}{2}=\frac{v(T)+v_0}{2},$$

так как $\frac{gT}{2}=\frac{v(T)-v_0}{2}$. ►

78. Сила переменного тока изменяется по закону

$$i=i_0\sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right),$$

где i_0 — амплитуда, t — время, T — период, φ — начальная фаза.

Найти среднее значение квадрата силы тока.

◄ Поскольку $i^2=i_0^2\sin^2\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right)=\frac{i_0^2}{2}\left(1-\cos\left(\frac{4\pi t}{T}+2\varphi\right)\right)$, то

$$M(i^2)=\frac{i_0^2}{2T}\int_0^T\left(1-\cos\left(\frac{4\pi t}{T}+2\varphi\right)\right)\,dt=\frac{i_0^2}{2}. \ ►$$

79. Пусть $f\in R[a,b]$ и $g\in R[a,b]$. Доказать неравенство Коши—Буняковского

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\,dx\int_a^b g^2(x)\,dx.$$

◄ Так как $f\in R[a,b]$ и $g\in R[a,b]$, то

$$fg\in R[a,b],\quad f^2\in R[a,b],\quad g^2\in R[a,b].$$

Обозначим $\alpha=\int_a^b f^2(x)\,dx$, $\beta=\int_a^b f(x)g(x)\,dx$, $\gamma=\int_a^b g^2(x)\,dx$ и рассмотрим два возможных случая:

1) $\alpha = \gamma = 0$; 2) хотя бы одно из чисел α или γ отлично от нуля.

1) Пусть $\alpha = \gamma = 0$. Интегрируя неравенство

$$|f(x)g(x)| \leqslant \frac{1}{2}(f^2(x) + g^2(x)), \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

получаем

$$|\beta| \leqslant \int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leqslant \frac{1}{2}(\alpha + \gamma),$$

откуда $\beta = 0$ и доказываемое неравенство выполняется.

2) Пусть, например, $\gamma > 0$. Тогда при всех $t \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $(f(x) + t\,g(x))^2 \geqslant 0$, интегрируя которое получаем

$$\gamma t^2 + 2\beta t + \alpha \geqslant 0, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, дискриминант квадратного трехчлена

$$y = \gamma t^2 + 2\beta t + \alpha$$

неположителен, т. е. $\beta^2 - \alpha\gamma \leqslant 0$. Таким образом, $\beta^2 \leqslant \alpha\gamma$. ►

80. Пусть $f \in C^{(1)}[a, b]$ и $f(a) = 0$. Доказать неравенство

$$M^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f'^2(x)\,dx,$$

где $M = \sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} \{|f(x)|\}$.

◄ Запишем неравенство Коши—Буняковского в виде

$$\left|\int_a^x \tilde{f}(t)\,g(t)\,dt\right| \leqslant \sqrt{\int_a^x \tilde{f}^2(t)\,dt}\sqrt{\int_a^x g^2(t)\,dt},$$

где $g(t) = f'(t)$, $\tilde{f}(t) = 1$, $a \leqslant t \leqslant x$, $a \leqslant x \leqslant b$. Оно принимает вид

$$\sqrt{\int_a^x f'^2(t)\,dt}\sqrt{\int_a^x dt} \geqslant \left|\int_a^x f'(t)\,dt\right|,$$

откуда получим неравенство

$$\sqrt{\int_a^x f'^2(t)\,dt}\,\sqrt{x-a} \geqslant |f(x)|, \qquad a \leqslant x \leqslant b,$$

(принимая во внимание, что $f(a) = 0$).

Левая часть последнего неравенства лишь усилится, если в ней положить $x = b$, а в правой части можно взять и то значение $x \in [a, b]$, при котором непрерывная функция $x \mapsto |f(x)|$, $a \leqslant x \leqslant b$, достигает своей точной верхней грани M. Следовательно, справедливо неравенство

$$M^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f'^2(x)\,dx. \text{ ►}$$

Упражнения для самостоятельной работы

Вычислить интегралы, построив первообразные подынтегральных функций на всем промежутке интегрирования и применив формулу Ньютона—Лейбница:

18. $\int\limits_{1,3}^{150,2} [x]x^3\,dx$. **19.** $\int\limits_{2,4}^{35,5} \frac{[x]}{x^4}\,dx$. **20.** $\int\limits_{1,2}^{125,3} \frac{[x]}{x}\,dx$. **21.** $\int\limits_{\sqrt{2,3}}^{\sqrt{74,2}} [x^2]\,dx$. **22.** $\int\limits_{0,04}^{0,81} \left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]\,dx$.

23. $\int\limits_{0,25}^{100,2} [x]\,|\sin \pi x|\,dx$. **24.** $\int\limits_{-10}^{20} \max(1,\, x^2)\,dx$.

Вычислить определенные интегралы:

25. $\int\limits_{3}^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,dx$. **26.** $\int\limits_{\sqrt{\frac{8}{3}}}^{2\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-2)^5}}$. **27.** $\int\limits_{0}^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx$. **28.** $\int\limits_{0}^{1} (\arcsin x)^4\,dx$.

29. $\int\limits_{0}^{1} e^{-x}\sin \pi x\,dx$. **30.** $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{a+\cos x}{1+2a\cos x+a^2}\,dx$. **31.** $\int\limits_{e^{-2\pi n}}^{1} \left|\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right|\,dx,\ n \in \mathbb{N}$.

32. $\int\limits_{-1}^{1} e^{k\arcsin x}\,dx$. **33.** $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^3}{(1+x^3)^2}\,dx$. **34.** $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2-1}{(x+2)^4}\,dx$. **35.** $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-mx}\cos^{2n+1} x\,dx$.

36. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$. **37.** $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{a+b\cos x}$. **38.** $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)^2}$. **39.** $\int\limits_{0}^{\pi} \sin^{2n} x\,dx,\ n \in \mathbb{N}$.

40. $\int\limits_{E} \frac{\cos(4n+1)x}{\cos x}\,dx,\ E = [0,\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\},\ n \in \mathbb{N}$.

Решить уравнения:

41. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{x} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} = \frac{\pi}{12}$. **42.** $\int\limits_{\ln 2}^{x} \frac{dt}{\sqrt{e^t-1}} = \frac{\pi}{6}$.

43. Найти абсолютные экстремумы функции $f : x \mapsto \int\limits_{0}^{x} \frac{2t+1}{t^2-2t+2}\,dt, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$.

44. Исследовать на экстремум и найти точки перегиба графика функции

$$f : x \mapsto \int\limits_{0}^{x} (t-1)(t-2)^2\,dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

45. Доказать тождество $\int\limits_{0}^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\,dt + \int\limits_{0}^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,dt = \frac{\pi}{4}$.

46. Доказать, что $\sum\limits_{k=1}^{n-1} kx^{k-1} = \frac{(n-1)x^n - nx^{n-1}+1}{(x-1)^2}$.

47. Вычислить среднее значение функции $f : x \mapsto \frac{2}{e^x+1}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2$.

48. При каком a среднее значение функции $x \mapsto \ln x$, $1 \leqslant x \leqslant a$, равно средней скорости изменения функции?

Показать, что:

49. $\frac{\pi}{6} < \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}} < \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$. **50.** $0{,}5 < \int\limits_{0}^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} \leqslant \frac{\pi}{6},\ n \geqslant 1$.

51. $0{,}78 < \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} < 0{,}93$.

Доказать равенства:

52. $\int\limits_{100}^{200} \frac{x^3\,dx}{x^4+x+1} = \ln 2 - \frac{\theta}{3\cdot 10^6},\ 0 < \theta < 1$. **53.** $\int\limits_{100}^{200} \frac{\sin \pi x}{x}\,dx = \frac{0{,}005}{\pi} - \frac{2\theta}{\pi^3 10^6},\ 0 < \theta < 1$.

Показать, что:

54. $0 < \int\limits_{0}^{1} \frac{x^{19}}{\sqrt[3]{1+x^6}}\,dx < \frac{1}{20}$. **55.** $0 < \int\limits_{0}^{200} \frac{e^{-5x}}{20+x}\,dx < 0{,}01$. **56.** $1 < \int\limits_{0}^{1} \frac{1+x^{20}}{1+x^{40}}\,dx < 1+\frac{1}{42}$.

57. $0 < \int\limits_{10}^{20} \frac{x^3\,dx}{x^4+x+1} < \frac{1}{20}$. **58.** $1-\frac{1}{n} < \int\limits_{0}^{1} e^{-x^n}\,dx < 1,\ n > 1$.

59. Определить знак интеграла $I = \int\limits_{0,5}^{1} x^2 \ln x\, dx$.

60. Какой интеграл больше: $I_1 = \int\limits_{0}^{\pi} e^{-x^2} \cos^2 x\, dx$ или $I_2 = \int\limits_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2} \cos^2 x\, dx$?

61. Найти $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\varepsilon x^3 + 1}$.

62. Найти $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} f(x) \frac{dx}{x}$, где $a > 0$, $b > 0$, $f \in C[0, 1]$.

§ 3. Интегрирование вектор–функций, комплекснозначных функций и функциональных матриц

3.1. Интеграл Римана вектор–функции.

Пусть $\mathbf{f} : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — вектор-функция с компонентами f_j, $j = \overline{1, m}$, являющимися ограниченными на сегменте $[a, b]$ функциями. Рассмотрим произвольное разбиение Π сегмента $[a, b]$ и образуем при любом выборе точек $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ сумму

$$\mathbf{S}_\Pi(\mathbf{f}) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{f}(\xi_i)\, \Delta x_i,$$

которую назовем интегральной суммой вектор-функции $\mathbf{f}$ на сегменте $[a, b]$. Согласно определению операции сложения в пространстве $\mathbb{R}^m$, интегральная сумма $\mathbf{S}_\Pi(\mathbf{f})$ имеет вид

$$\mathbf{S}_\Pi(\mathbf{f}) = (S_\Pi(f_1), S_\Pi(f_2), \ldots, S_\Pi(f_m)), \tag{1}$$

где $S_\Pi(f_j) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f_j(\xi_i)\, \Delta x_i$ — интегральные суммы функций f_j, $j = \overline{1, m}$. Пусть $d(\Pi) = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \Delta x_i$. Полагаем $\lim\limits_{d(\Pi) \to 0} \mathbf{S}_\Pi(\mathbf{f}) \overset{def}{=} \mathbf{I}$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall \Pi \vee d(\Pi) < \delta \Rightarrow |\mathbf{S}_\Pi(\mathbf{f}) - \mathbf{I}| < \varepsilon$.

Определение. *Определенным интегралом вектор–функции* $\mathbf{f}$ *на сегменте* $[a, b]$ *назовем предел*

$$\lim_{d(\Pi) \to 0} \mathbf{S}_\Pi(\mathbf{f}) = \mathbf{I},$$

если он существует.

Если вектор–функция $\mathbf{f}$ имеет определенный интеграл на сегменте $[a, b]$, то будем ее называть *интегрируемой по Риману на этом сегменте*, а ее интеграл обозначать символом $\int\limits_a^b \mathbf{f}(x)\, dx$. Множество всех интегрируемых на сегменте $[a, b]$ вектор–функций $\mathbf{f}$ будем обозначать $\mathbf{f} \in R[a, b]$.

Теорема. *Вектор–функция* $\mathbf{f} : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ *интегрируема на сегменте* $[a, b]$ *тогда и только тогда, когда каждая ее компонента* f_j, $j = \overline{1, m}$, *интегрируема на этом сегменте.*

Принимая во внимание эту теорему, получаем, что если $\mathbf{f} \in R[a, b]$, то

$$\int_a^b \mathbf{f}(x)\, dx = \left(\int_a^b f_1(x)\, dx,\ \int_a^b f_2(x)\, dx,\ \ldots,\ \int_a^b f_m(x)\, dx \right). \tag{2}$$

Отметим, что замена переменной в интеграле $\int\limits_a^b \mathbf{f}(x)\, dx$ сводится к замене переменной в каждом из интегралов $\int\limits_a^b f_j(x)\, dx$, $j = \overline{1, m}$, поскольку интегрирование вектор–функции $\mathbf{f}$ приводит к интегрированию m числовых функций.

Если вектор-функции $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ интегрируемы на $[a,\ b]$ вместе со своими производными $\mathbf{f}'$ и $\mathbf{g}'$, то справедливы формулы интегрирования по частям для скалярного и векторного произведений этих функций:

$$\int\limits_a^b (\mathbf{f}(x),\ \mathbf{g}'(x))\,dx = (\mathbf{f}(x),\ \mathbf{g}(x))\Big|_a^b - \int\limits_a^b (\mathbf{f}'(x),\ \mathbf{g}(x))\,dx, \tag{3}$$

$$\int\limits_a^b [\mathbf{f}(x),\ \mathbf{g}'(x)]\,dx = [\mathbf{f}(x),\ \mathbf{g}(x)]\Big|_a^b - \int\limits_a^b [\mathbf{f}'(x),\ \mathbf{g}(x)]\,dx. \tag{4}$$

3.2. Интеграл Римана комплекснозначной функции.

Определение. *Для функции $f : [a,\ b] \to \mathbb{C}$, где $f(x) = u(x) + i\,v(x)$, образуем при произвольном разбиении Π сегмента $[a,\ b]$ и любом выборе точек $\xi_j \in [x_j,\ x_{j+1}]$ интегральную сумму*

$$S_\Pi(f) = \sum_{j=0}^{n-1} u(\xi_j)\,\Delta x_j + i\sum_{j=0}^{n-1} v(\xi_j)\,\Delta x_j.$$

Тогда $\int\limits_a^b f(x)\,dx \overset{def}{=} \lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(f)$, *если этот предел существует.*

Множество всех интегрируемых по Риману комплекснозначных функций f будем обозначать $f \in R\,[a,\ b]$.

Теорема. $\exists \lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(f) \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(u) \wedge \exists \lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(v)$, *причем*

$$\lim_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(f) = \left(\lim_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(u),\ \lim_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(v)\right).$$

Таким образом, комплекснозначная функция f интегрируема по Риману на сегменте $[a,\ b]$ тогда и только тогда, когда $u \in R\,[a,\ b]$, $v \in R\,[a,\ b]$ и при этом

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b u(x)\,dx + i\int\limits_a^b v(x)\,dx. \tag{1}$$

Если комплекснозначная функция f интегрируема на сегменте $[a,\ b]$, то комплексно-сопряженная ей функция $\bar{f}$ интегрируема на этом сегменте. Тогда и произведение $f\cdot\bar{f} = |f|^2$ является интегрируемой числовой функцией, причем

$$\int\limits_a^b f(x)\bar{f}(x)\,dx = \int\limits_a^b (u^2(x) + v^2(x))\,dx. \tag{2}$$

3.3. Интеграл Римана функциональной матрицы.

Если $x \mapsto A(x) = (a_{ij}(x))$, $a \leqslant x \leqslant b$, — функциональная матрица размера $n \times m$, элементами которой являются ограниченные на сегменте $[a,\ b]$ функции, то она является элементом векторного пространства $\mathfrak{M}$ над полем $\mathbb{R}$, причем в этом пространстве определена интегральная сумма $S_\Pi(A) = (S_\Pi(a_{ij}))$ при произвольном разбиении Π сегмента $[a,\ b]$ и любом выборе точек $\xi_i \in [x_i,\ x_{i+1}]$. Полагаем

$$\int\limits_a^b A(x)\,dx \overset{def}{=} \lim_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(A),$$

если этот предел существует.

Теорема. $\exists \lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(A) \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(a_{ij})$, $i = \overline{1,\ n}$, $j = \overline{1,\ m}$, *причем*

$$\lim_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(A) = \left(\lim_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(a_{ij})\right).$$

Таким образом, функциональная матрица $A(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$ тогда и только тогда, когда на этом сегменте интегрируемы все ее элементы a_{ij} и при этом

$$\int_a^b A(x)\,dx = \left(\int_a^b a_{ij}(x)\,dx\right), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}. \tag{1}$$

Класс всех интегрируемых на сегменте $[a, b]$ функциональных матриц A будем обозначать $A \in R[a, b]$.

81. Вычислить $\mathbf{I} = \int\limits_0^{10} (\sqrt{x}, 2^x)\,dx$, рассматривая его как предел интегральной суммы.

◀ Поскольку $\sqrt{x} \in R[0, 10]$ и $2^x \in R[0, 10]$, то $(\sqrt{x}, 2^x) \in R[0, 10]$ и при любом разбиении Π сегмента $[0, 10]$ и произвольном выборе точек $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ получим

$$\mathbf{I} = \left(\lim_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(\sqrt{x}), \lim_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(2^x)\right), \quad \text{где} \quad S_\Pi(\sqrt{x}) = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\xi_i}\,\Delta x_i, \quad S_\Pi(2^x) = \sum_{i=0}^{n-1} 2^{\xi_i}\Delta x_i.$$

Разбивая сегмент $[0, 10]$ на n равных частей и полагая $\xi_i = x_i = i\frac{10}{n}$, получим

$$S_\Pi(\sqrt{x}) = \left(\frac{10}{n}\right)^{\frac{3}{2}} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{i}, \qquad S_\Pi(2^x) = \frac{10}{n}\sum_{i=0}^{n-1} 2^{i\frac{10}{n}}$$

(приняв во внимание, что $\Delta x_i = \frac{10}{n}$).

Рассмотрим числовую последовательность $(z_n) = \left(\frac{x_n}{y_n}\right)$, где $x_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \sqrt{i}$, $y_n = n^{\frac{3}{2}}$. Так как существует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{(n+1)^{\frac{3}{2}} - n^{\frac{3}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right)} = \frac{2}{3},$$

то, согласно теореме Штольца, существует

$$\lim_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(\sqrt{x}) = 10^{\frac{3}{2}} \lim_{n\to\infty} z_n = \frac{20}{3}\sqrt{10}.$$

Поскольку $S_\Pi(2^x) = \frac{10}{n} \cdot \frac{2^{10} - 2^{\frac{10}{n}}}{2^{\frac{10}{n}} - 1}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{10}{n} \cdot \frac{2^{10} - 2^{\frac{10}{n}}}{2^{\frac{10}{n}} - 1} = \frac{2^{10} - 1}{\ln 2}$, то

$$\lim_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(2^x) = \frac{2^{10} - 1}{\ln 2}.$$

Следовательно, $\mathbf{I} = \left(\frac{20}{3}\sqrt{10}, \frac{2^{10}-1}{\ln 2}\right)$. ►

82. Вычислить $\mathbf{I} = \int\limits_{-1}^{1} \mathbf{f}(x)\,dx$, где

$$\mathbf{f}(x) = \left(\frac{1}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}, \frac{1}{\sqrt{(1 - 2ax + a^2)(1 - 2bx + b^2)}}\right),$$

$$0 < \alpha < \pi, \quad |a| < 1, \quad |b| < 1, \quad ab > 0.$$

◀ Согласно формуле (2), п. 3.1, имеем

$$\mathbf{I} = \left(\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}, \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1 - 2ax + a^2)(1 - 2bx + b^2)}}\right),$$

поэтому интегрирование вектор-функции $\mathbf{f}$ на сегменте $[-1, 1]$ сводится к вычислению двух определенных интегралов числовых функций.

Очевидно,

$$I_1 = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1} = \int_{-1}^{1} \frac{d(x - \cos\alpha)}{(x - \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha}\left(\operatorname{arctg}\frac{x - \cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{1}{\sin\alpha}\left(\operatorname{arctg}\frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} + \operatorname{arctg}\frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = \frac{1}{\sin\alpha}\left(\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2\sin\alpha}.$$

В интеграле

$$I_2 = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1 - 2ax + a^2)(1 - 2bx + b^2)}} = \frac{1}{2\sqrt{ab}}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(A - x)(B - x)}},$$

где $A = \frac{a}{2} + \frac{1}{2a}$, $B = \frac{b}{2} + \frac{1}{2b}$, произведем замену, полагая $\sqrt{(A - x)(B - x)} = t(A - x)$. Тогда получим

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{ab}} \int_{\left|\frac{b+1}{a+1}\right|\sqrt{\frac{a}{b}}}^{\left|\frac{b-1}{a-1}\right|\sqrt{\frac{a}{b}}} \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln\left|\frac{t - 1}{t + 1}\right| \Bigg|_{\left|\frac{b+1}{a+1}\right|\sqrt{\frac{a}{b}}}^{\left|\frac{b-1}{a-1}\right|\sqrt{\frac{a}{b}}} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln\left(\frac{\sqrt{ab} + 1}{\sqrt{ab} - 1}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{ab}} \ln\frac{1 + \sqrt{ab}}{1 - \sqrt{ab}}.$$

Окончательно имеем

$$\mathbf{I} = \left(\frac{\pi}{2\sin\alpha},\ \frac{1}{\sqrt{ab}} \ln\frac{1 + \sqrt{ab}}{1 - \sqrt{ab}}\right). \ ►$$

83. Вычислить $I = \int_0^1 (\mathbf{f}(x), \mathbf{g}(x))\, dx$, где

$$\mathbf{f}(x) = \left(\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right),\ \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right), \quad \mathbf{g}(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}},\ \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1 + x^2}\right).$$

◄ Поскольку $\mathbf{g}(x) = \mathbf{v}'(x)$, где $\mathbf{v}(x) = (\sqrt{1 + x^2},\ e^{\operatorname{arctg} x})$, $\mathbf{f}'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}},\ \frac{1}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$, то, согласно формуле (3), п. 3.1, получим

$$I = (\mathbf{f}(x), \mathbf{v}(x))\Big|_0^1 - \int_0^1 (\mathbf{f}'(x), \mathbf{v}(x))\, dx = \left(\sqrt{1 + x^2} \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) + \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1 + x^2}}\right)\Bigg|_0^1 -$$

$$- \int_0^1 \left(1 + \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}\right) dx = \sqrt{2}\ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} - 1 - \int_0^1 \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx.$$

Полагая в последнем интеграле $\operatorname{arctg} x = t$ и интегрируя по частям, находим

$$\int_0^1 \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^t \cos t\, dt = \frac{e^t}{2}(\cos t + \sin t)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}.$$

Окончательно получаем $I = \sqrt{2}\ln\left(1 + \sqrt{2}\right) - \frac{1}{2}$. ►

84. Вычислить $\mathbf{I} = \int_{-1}^{1} [\mathbf{f}(x), \mathbf{g}(x)]\, dx$, где $\mathbf{f}(x) = (x, x^2, x^3)$, $\mathbf{g}(x) = (e^x, e^{2x}, e^{3x})$.

◀ Так как $\mathbf{g}(x) = \mathbf{v}'(x)$, где $\mathbf{v}(x) = \left(e^x, \frac{e^{2x}}{2}, \frac{e^{3x}}{3}\right)$, то согласно формуле (4), п. 3.1, имеем

$$\mathbf{I} = [\mathbf{f}(x), \mathbf{v}(x)]\big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} [\mathbf{f}'(x), \mathbf{v}(x)]\,dx = [\mathbf{f}(1), \mathbf{v}(1)] - [\mathbf{f}(-1), \mathbf{v}(-1)] -$$

$$- \left(\mathbf{i}\left(\frac{2}{3}\int_{-1}^{1} xe^{3x}\,dx - \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x^2e^{2x}\,dx\right) + \mathbf{j}\left(3\int_{-1}^{1} x^2e^{x}\,dx - \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} e^{3x}\,dx\right) + \right.$$

$$\left. + \mathbf{k}\left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx - 2\int_{-1}^{1} xe^{x}\,dx\right)\right).$$

Вычисляя интегралы и принимая во внимание, что

$$[\mathbf{f}(1), \mathbf{v}(1)] - [\mathbf{f}(-1), \mathbf{v}(-1)] = \mathbf{i}\left(\frac{2}{3}\operatorname{sh} 3 - \operatorname{ch} 2\right) + \mathbf{j}\left(2\operatorname{ch} 1 - \frac{2}{3}\operatorname{ch} 3\right) + \mathbf{k}(\operatorname{ch} 2 - 2\operatorname{sh} 1),$$

окончательно получим

$$\mathbf{I} = \mathbf{i}\left(\frac{22}{27}\operatorname{sh} 3 - \frac{4}{9}\operatorname{ch} 3 - \operatorname{ch} 2 + \frac{3}{4}\operatorname{sh} 2 - \frac{3}{2}e^{-2}\right) +$$

$$+ \mathbf{j}\left(\frac{2}{9}\operatorname{sh} 3 - \frac{2}{3}\operatorname{ch} 3 + 2\operatorname{ch} 1 - 6\operatorname{sh} 1 + 12e^{-1}\right) + \mathbf{k}\left(\operatorname{ch} 2 - \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2 + 4\operatorname{ch} 1 - 6\operatorname{sh} 1\right),$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — орты осей координат. ▶

85. Вычислить $I = \int_0^{\pi} z(x)\,dx$, где $z(x) = e^x(\cos^2 x + i\sin^2 x)$.

◀ Применив формулу (1), п. 3.2, получим

$$I = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi} e^x(1 + \cos 2x)\,dx + i\int_0^{\pi} e^x(1 - \cos 2x)\,dx\right).$$

Интегрируя по частям, находим

$$I = \frac{1}{2}(e^x(1 + \cos 2x + i(1 - \cos 2x))\Big|_0^{\pi} + 2(1 - i)\int_0^{\pi} e^x \sin 2x\,dx) = e^{\pi} - 1 + (1 - i)\int_0^{\pi} e^x \sin 2x\,dx.$$

Поскольку

$$\int_0^{\pi} e^x \sin 2x\,dx = \operatorname{Im}\int_0^{\pi} e^{(1+2i)x}\,dx = \operatorname{Im}\frac{e^{(1+2i)x}}{1+2i}\Bigg|_0^{\pi} = \operatorname{Im}\frac{e^{\pi} - 1}{1 + 2i} = -\frac{2}{5}(e^{\pi} - 1),$$

то $I = e^{\pi} - 1 + (i - 1)(e^{\pi} - 1)\frac{2}{5} = \frac{e^{\pi} - 1}{5}(3 - 2i)$. ▶

86. Доказать, что $I = \int_0^{2\pi} e^{inx}e^{-imx}\,dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ 2\pi, & \text{если } m = n. \end{cases}$

◀ Применяя формулу Эйлера, получим

$$e^{inx}e^{-imx} = e^{i(n-m)x} = \cos(n - m)x + i\sin(n - m)x$$

Если $m = n$, то $e^{inx}e^{-imx} = 1$, следовательно,

$$I = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi.$$

Если $m \neq n$, то

$$I = \int_0^{2\pi} \cos(n-m)x\,dx + i\int_0^{2\pi} \sin(n-m)x\,dx = \sin(n-m)x\Big|_0^{2\pi} + i\cos(n-m)x\Big|_{2\pi}^{0} = 0. \ ►$$

87. Вычислить $I = \int_0^1 A(x)\,dx$, где

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{pmatrix}, \quad a_{11}(x) = \frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)}, \quad a_{12}(x) = \frac{x}{x^4+3x^2+2},$$

$$a_{21}(x) = x^3\sqrt[3]{1+x^2}, \quad a_{22}(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{2+\cos 2x}}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

◄ Согласно формуле (1), п. 3.3, имеем

$$\int_0^1 A(x)\,dx = \begin{pmatrix} \int_0^1 a_{11}(x)\,dx & \int_0^1 a_{12}(x)\,dx \\ \int_0^1 a_{21}(x)\,dx & \int_0^1 a_{22}(x)\,dx \end{pmatrix},$$

и решение примера сводится к вычислению четырех интегралов.

Интегрируя тождество $\frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+2}$, находим

$$\int_0^1 a_{11}(x)\,dx = \left(\operatorname{arctg} x - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Поскольку $\frac{1}{x^4+3x^2+2} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+2}$ и $x\,dx = \frac{1}{2}d(x^2)$, то

$$\int_0^1 a_{12}(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \frac{d(x^2)}{x^2+1} - \int_0^1 \frac{d(x^2)}{x^2+2}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{x^2+1}{x^2+2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}.$$

Так как $x^3\,dx = \frac{1}{2}x^2\,d(1+x^2) = \frac{1}{2}((1+x^2)-1)\,d(1+x^2)$, то

$$\int_0^1 a_{21}(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 ((1+x^2)^{\frac{4}{3}} - (1+x^2)^{\frac{1}{3}})\,d(1+x^2) =$$

$$= \left(\frac{3}{14}(1+x^2)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{8}(1+x^2)^{\frac{4}{3}}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{28}\left(\sqrt[3]{2} + \frac{3}{2}\right)$$

Принимая во внимание тождество $2+\cos 2x = 3 - 2\sin^2 x$, находим

$$\int_0^1 a_{22}(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{d(\sqrt{2}\sin x)}{\sqrt{3-(\sqrt{2}\sin x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin 1\right).$$

Окончательно получаем

$$I = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3} \\ \frac{3}{28}\left(\sqrt[3]{2} + \frac{3}{2}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin 1\right) \end{pmatrix}. \ ►$$

Упражнения для самостоятельной работы

Вычислить следующие интегралы:

63. $\int\limits_2^3 \mathbf{f}(x)\,dx$, $\mathbf{f}(x) = \left(\frac{x}{x^8-1}, \frac{1}{x(x^{10}+2)}\right)$. **64.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} A(x)\,dx$, $A(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-e^x}} & \cos^5 x\sqrt{\sin x} \\ \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} & \frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x} \end{pmatrix}$.

65. $\int\limits_1^2 A(x)\mathbf{f}(x)\,dx$, $A(x) = \begin{pmatrix} \sqrt{x} & x \\ x & x^2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}(x) = (\ln^2 x, \operatorname{arctg} x)$.

66. $\int\limits_0^1 (\mathbf{f}(x), \mathbf{g}(x))\,dx$, $\mathbf{f}(x) = (x^3, \ln(x + \sqrt{1+x^2}))$, $\mathbf{g}(x) = (e^{-x^2}, 1)$.

§ 4. Несобственные интегралы

4.1. Несобственные интегралы первого и второго рода.

Определение 1. *Пусть $\mathcal{J} = [a, b[$ — полуинтервал числовой прямой $\mathbb{R}$, причем b может быть символом $+\infty$, а функция $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ интегрируема на любом сегменте $[a, b'] \subset \mathcal{J}$.*

Если существует конечный предел $\lim\limits_{b' \to b-0} \int\limits_a^{b'} f(x)\,dx$, то его обозначают символом $\int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx$, если $b \in \mathbb{R}$, и символом $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, если $b = +\infty$. В этом случае говорят, что функция f интегрируема в несобственном смысле на $\mathcal{J}$, а $\lim\limits_{b' \to b-0} \int\limits_a^{b'} f(x)\,dx$ называют несобственным (или обобщенным) интегралом функции f на $\mathcal{J}$ (первого рода, если $b = +\infty$, и второго рода, если $b \in \mathbb{R}$).

Определение 2. *Если $\mathcal{J} =]a, b]$, $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ и если $\lim\limits_{a' \to a+0} \int\limits_{a'}^{b} f(x)\,dx$ существует и конечен, то будем обозначать его символом $\int\limits_{a+0}^{b} f(x)\,dx$, если $a \in \mathbb{R}$, или символом $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$, если $a = -\infty$.*

Определение 3. *Если $\lim\limits_{b' \to b-0} \int\limits_a^{b'} f(x)\,dx = \int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx$ существует, то говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx$ или $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится (существует). Если этот предел не существует (или бесконечен), то говорят, что интеграл $\int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx$ или $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится (соответственно расходится к ∞).*

Теорема (критерий Коши). *Интеграл $\int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда*

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \to 0 \quad \text{при} \quad x_1 \to b-0 \quad \text{и} \quad x_2 \to b-0.$$

4.2. Абсолютная сходимость.

Определение 1. *Если интеграл $\int\limits_a^{b-0} |f(x)|\,dx$ сходится, то говорят, что интеграл $\int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx$ абсолютно сходится.*

Если $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ — неотрицательная функция то сходимость интеграла $\int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx$ означает его абсолютную сходимость.

Пусть $f(x) \geqslant 0$ $\forall x \in [a, b[$, $f(x) \not\equiv 0$. Тогда функция $F : x \mapsto \int\limits_a^x f(t)\,dt$, $a \leqslant x < b$, возрастает вместе с x, а интеграл $\int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx$ существует тогда и только тогда, когда множество $\left\{\int\limits_a^x f(t)\,dt\right\}$ ограничено сверху на полуинтервале $[a, b[$.

Если же $f(x) \geqslant 0$ $\forall x \in [a, b[$ и интеграл $\int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx$ не является сходящимся, то интеграл $\int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx = +\infty$.

Если интеграл $\int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx$ сходится, то будем писать

$$\int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx < \infty.$$

Определение 2. *Всякий сходящийся несобственный интеграл, абсолютно расходящийся, будем называть условно сходящимся.*

Заметим, что если $f \in R[a, b]$, то

$$\int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx = \int\limits_a^{b} f(x)\,dx = \int\limits_{a+0}^{b} f(x)\,dx.$$

4.3. Алгебраические свойства несобственных интегралов.

1) Пусть $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ и сужение функции f на любой сегмент $[a, b'] \subset [a, b[$ интегрируемо по Риману на нем. Тогда функция αf, $\alpha = \text{const}$, интегрируема на $[a, b']$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Следовательно, если $\exists \int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx = \lim\limits_{x \to b-0} \int\limits_a^x f(t)\,dt$, то

$$\exists \int\limits_a^{b-0} \alpha f(x)\,dx = \alpha \int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx.$$

2) Пусть $f : [a, b[\to \mathbb{R}$, $g : [a, b[\to \mathbb{R}$ — функции, сужения которых на любой сегмент $[a, b'] \subset [a, b[$ интегрируемы по Риману на нем. Тогда этим же свойством обладает и сумма $f + g$, следовательно, если существуют интегралы $\int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{b-0} g(x)\,dx$, то

$$\lim_{x \to b-0} \int\limits_a^x (f(t) + g(t))\,dt = \lim_{x \to b-0} \int\limits_a^x f(t)\,dt + \lim_{x \to b-0} \int\limits_a^x g(t)\,dt,$$

в силу чего

$$\int\limits_a^{b-0} (f(x) + g(x))\,dx = \int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx + \int\limits_a^{b-0} g(x)\,dx.$$

Таким образом, множество E функций $f : [a, b[\to \mathbb{R}$, интегрируемых по Риману на всяком содержащемся в $[a, b[$ сегменте $[a, b']$ и имеющих сходящиеся интегралы $\int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx$, образуют векторное пространство над полем $\mathbb{R}$, а отображение $f \mapsto \int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx$ пространства E в $\mathbb{R}$ есть линейная форма.

4.4. Замена переменной в несобственном интеграле и формула интегрирования по частям.

1) Пусть $f : [a, b[\to \mathbb{R}$, $f \in C[a, b[$, и $\int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx < \infty$. Пусть $[\alpha, \beta[$ — другой полуинтервал из $\mathbb{R}$, причем $\alpha, a \in \mathbb{R}$, но β и b могут быть как конечными, так и бесконечными. Пусть функция $g : [\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ возрастает на полуинтервале $[\alpha, \beta[$ и имеет на нем непрерывную производную g' всюду, за исключением счетного множества точек, и, кроме того,

$$g([\alpha, \beta[) \subset [a, b[, \quad g(\alpha) = a, \quad g(\beta - 0) = b - 0.$$

Тогда справедлива формула замены переменной в несобственном интеграле

$$\int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^{\beta-0} f(g(u))\,g'(u)\,du. \tag{1}$$

2) Пусть $f : [a, b[\to \mathbb{R}$, $g : [a, b[\to \mathbb{R}$, $f, g \in C^{(1)}[a, b[$, и a — конечное число. Тогда, применив формулу интегрирования по частям на сегменте $[a, x] \subset [a, b[$, получим

$$\int\limits_a^x f(t)\,g'(t)\,dt = f(x)\,g(x) - f(a)\,g(a) - \int\limits_a^x f'(t)\,g(t)\,dt. \tag{2}$$

Если при $x \to b - 0$ любые два из трех членов равенства (2) имеют конечный предел, то и третий член этого равенства имеет предел, поскольку произведение $f(a)\,g(a)$ определено.

Если, например, существуют интегралы $\int\limits_a^{b-0} f(x)\,g'(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{b-0} f'(x)\,g(x)\,dx$, то существует произведение $f(b-0)\,g(b-0)$.

Если же существуют интеграл $\int\limits_a^{b-0} f(x)\,g'(x)\,dx$ и произведение $f(b-0)\,g(b-0)$, то существует и интеграл $\int\limits_a^{b-0} f'(x)\,g(x)\,dx$.

В каждом из рассмотренных случаев имеем

$$\int\limits_a^{b-0} f(x)\,g'(x)\,dx = f(b-0)\,g(b-0) - f(a)\,g(a) - \int\limits_a^{b-0} f'(x)\,g(x)\,dx. \tag{3}$$

Формула (3) называется *формулой интегрирования по частям несобственных интегралов.*

4.5. Случай внутренней особой точки.

Пусть функция $f : [a, b] \setminus (c) \to \mathbb{R}$, где $c \in]a, b[$, имеет интегрируемые по Риману сужения на любые сегменты $[a, a'] \subset [a, c[$ и $[c', b] \subset]c, b]$. Тогда полагаем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \int\limits_a^{c-0} f(x)\,dx + \int\limits_{c+0}^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

если каждый из интегралов, входящих в правую часть (1), существует, и будем называть несобственный интеграл сходящимся.

Если хотя бы один из этих интегралов не существует, то говорят, что несобственный интеграл расходится.

4.6. Признаки сравнения и признаки Абеля и Дирихле.

1) Если f и g — неотрицательные функции, определенные на полуинтервале $[a, +\infty[$ и интегрируемые на любом сегменте $[a, x] \subset [a, +\infty[$, причем $f(x) \leqslant g(x)$, то

$$\int\limits_a^x f(t)\,dt \leqslant \int\limits_a^x g(t)\,dt, \quad a \leqslant x < +\infty,$$

и из сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, а из расходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

2) Пусть $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ — интегрируемая по Риману на любом сегменте $[a, b']$ функция, бесконечно малая при $x \to +\infty$, того же порядка, что и функция $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$. Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

3) Пусть $[a, b[\to \mathbb{R}$ — интегрируемая по Риману на любом сегменте $[a, b'] \subset [a, b[$ функция, имеющая при $x \to b - 0$ тот же порядок роста, что и функция $x \mapsto \frac{1}{(b-x)^\lambda}$, $\lambda > 0$. Тогда $\int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx$ сходится при $\lambda < 1$ и расходится при $\lambda \geqslant 1$.

Теорема (признак Абеля). *Пусть $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$, $g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, а функция g монотонна и ограничена. Тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$* сходится.

Теорема (признак Дирихле). *Пусть $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$, $g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ и функция f имеет ограниченную первообразную $x \mapsto \int\limits_a^x f(t)\,dt$, $a \leqslant x < +\infty$, а функция g монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$. Тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx$* сходится.

4.7. Главное значение расходящегося несобственного интеграла.

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится.

Если функция f интегрируема по Риману на всяком сегменте числовой прямой и если существует $\lim\limits_{A \to +\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)\,dx$, то его называют *главным значением в смысле Коши расходящегося интеграла* и обозначают

$$\text{v. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A \to +\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)\,dx.$$

Пусть $f : [a, b] \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$, $c \in]a, b[$, и интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ расходится.

Если при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ существуют интегралы $\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx$ и $\int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ и существует

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \right) = \text{v. p.} \int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

то его называют *главным значением в смысле Коши расходящегося интеграла*.

Вычислить следующие несобственные интегралы:

88. $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-0} \cos 2nx \ln \cos x \, dx$.

◀ Согласно определению 1, п. 4.1, имеем

$$I_n = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-0} \int\limits_0^x \cos 2nt \ln \cos t \, dt.$$

Применим формулу интегрирования по частям к интегралу

$$I_n^{(1)}(x) = \int\limits_0^x \cos 2nt \ln \cos t \, dt,$$

полагая $\cos 2nt\, dt = dv$, $\ln \cos t = u$. Тогда получим

$$I_n^{(1)}(x) = \frac{1}{2n} \sin 2nt \ln \cos t \Big|_0^x + \frac{1}{2n} \int\limits_0^x \sin 2nt \operatorname{tg} t \, dt =$$

$$= \frac{1}{2n} \cdot \frac{\ln \cos x}{(\sin 2nx)^{-1}} + \frac{1}{4n} \int\limits_0^x \frac{\cos(2n-1)t - \cos(2n+1)t}{\cos t} \, dt.$$

Аналогично тому, как было показано в примере 60, запишем

$$\frac{\cos(2n-1)t}{\cos t} = 2 \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \cos 2(n-k)t + (-1)^{n-1},$$

$$\frac{\cos(2n+1)t}{\cos t} = 2 \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cos 2(n-(k-1))t + (-1)^n.$$

Следовательно,

$$I_n^{(1)}(x) = \frac{\ln \cos x}{2n(\sin 2nx)^{-1}} + \frac{1}{4n} \int\limits_0^x \left(4 \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \cos 2(n-k)t - 2 \cos 2nt + 2(-1)^{n-1} \right) dt =$$

$$= \frac{\ln \cos x}{2n(\sin 2nx)^{-1}} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{\sin 2(n-k)x}{2(n-k)} - \frac{1}{4n^2} \sin 2nx + (-1)^{n-1} \frac{x}{2n}.$$

Переходя к пределу при $x \to \frac{\pi}{2} - 0$, получим

$$I_n = (-1)^{n-1} \frac{\pi}{4n} + \frac{1}{2n} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-0} \frac{\ln \cos x}{(\sin 2nx)^{-1}} =$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2n} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-0} \frac{\operatorname{ctg} x}{-2n(\sin 2nx)^{-2} \cos 2nx} = (-1)^{n-1} \frac{\pi}{4n}. \ ▶$$

89. $I_n = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)\ldots(x+n)}$.

◀ Поскольку $\frac{1}{x(x+1)\ldots(x+n)} < \frac{1}{x^2}$, $1 \leqslant x < +\infty$, то, согласно признаку 2), п. 4.6, интеграл I_n сходится, так как

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \int\limits_1^x \frac{dt}{t^2} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1.$$

Согласно определению несобственного интеграла, имеем

$$I_n = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{dt}{t(t+1)\ldots(t+n)} = \lim_{x\to+\infty} I_n^{(1)}(x).$$

Разлагая правильную дробь $\frac{1}{t(t+1)\ldots(t+n)}$ на сумму простых дробей, находим

$$\frac{1}{t(t+1)\ldots(t+n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{t+k}, \quad \text{где } A_k = \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} = (-1)^k \frac{C_n^k}{n!}.$$

Следовательно,

$$I_n^{(1)}(x) = \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \ln(x+k) + \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1} C_n^k \ln(1+k)\right) =$$

$$= \frac{1}{n!}\left(\ln \prod_{k=0}^{n}(x+k)^{(-1)^k C_n^k} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} C_n^k \ln(1+k)\right).$$

Так как сумма биномиальных коэффициентов C_n^k, стоящих на четных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах, то

$$\lim_{x\to+\infty} \prod_{k=0}^{n}(x+k)^{(-1)^k C_n^k} = 1,$$

в силу чего $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln \prod\limits_{k=0}^{n}(x+k)^{(-1)^k C_n^k} = 0$.

Таким образом, $I_n = \frac{1}{n!}\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} C_n^k \ln(1+k)$. ►

90. Вычислить $I_m = \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{\cos(2m-1)x}{\cos x}\,dx$, $a > 0$.

◄ Функция $f : x \mapsto e^{-ax}\frac{\cos(2m-1)x}{\cos x}$, $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{x_k\}$, $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}_0$, имеет особые точки x_k. Поскольку существует $\lim\limits_{x\to x_k} f(x) = (-1)^{m+1}(2m-1)e^{-a\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)}$, то функция $t \mapsto F(t)$, $0 \leqslant t < +\infty$, где

$$F(t) = \begin{cases} f(t), & \text{если } t \neq x_k, \\ (-1)^{m+1}(2m-1)e^{-a\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)}, & \text{если } t = x_k, \end{cases}$$

интегрируема на любом сегменте $[0, x]$, $x > 0$.

Так как множество $\{x_k\}$ имеет лебегову меру 0, то

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x F(t)\,dt,$$

поэтому $I_m = \lim\limits_{x\to+\infty}\int\limits_0^x F(t)\,dt$. На основании решения примера 60, имеем

$$F(t) = e^{-at}\left((-1)^{m-1} + 2\sum_{n=1}^{m-1}(-1)^{n-1}\cos 2(m-n)t\right).$$

Следовательно,

$$\int_0^x F(t)\,dt = (-1)^{m-1}\left(\frac{1-e^{-ax}}{a}\right) + 2\sum_{n=1}^{m-1}(-1)^{n-1}\int_0^x e^{-at}\cos 2(m-n)t\,dt.$$

Поскольку $e^{-at}\cos 2(m-n)t = \operatorname{Re} e^{(-a+i2(m-n))t}$, то

$$\int_0^x e^{-at}\cos 2(m-n)t\,dt = \operatorname{Re}\frac{e^{(-a+i2(m-n))t}}{-a+i2(m-n)}\Bigg|_0^x =$$

$$= \operatorname{Re}\frac{e^{-at}}{a^2+4(m-n)^2}(\cos 2(m-n)t + i\sin 2(m-n)t)(-a-i2(m-n))\Bigg|_0^x =$$

$$= \frac{e^{-at}}{a^2+4(m-n)^2}(2(m-n)\sin 2(m-n)t - a\cos 2(m-n)t)\Bigg|_0^x =$$

$$= \frac{1}{a^2+4(m-n)^2}(e^{-ax}(2(m-n)\sin 2(m-n)x - a\cos 2(m-n)x) + a).$$

Таким образом,

$$I_m = \lim_{x\to+\infty}\left((-1)^{m-1}\frac{1-e^{-ax}}{a} + 2\sum_{n=1}^{m-1}\frac{(-1)^{n-1}}{a^2+4(m-n)^2}\times\right.$$

$$\left.\times\,(e^{-ax}(2(m-n)\sin 2(m-n)x - a\cos(m-n)x) + a)\right) =$$

$$= \frac{(-1)^{m-1}}{a} + 2a\sum_{n=1}^{m-1}\frac{(-1)^{n-1}}{a^2+4(m-n)^2} = \frac{(-1)^{m-1}}{a} + 2a\sum_{j=1}^{m-1}\frac{(-1)^{m-j-1}}{a^2+4j^2}. \blacktriangleright$$

91. Доказать равенство $\int\limits_0^{+\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx = \frac{1}{a}\int\limits_0^{+\infty} f(\sqrt{x^2+4ab})\,dx$, где $a>0$ и $b>0$, предполагая, что интеграл в левой части сходящийся.

◀ Обозначим $I = \int\limits_0^{+\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx$ и произведем замену $ax+\frac{b}{x}=t$, предварительно представив I в виде $I = I_1 + I_2$, где

$$I_1 = \int_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx, \quad I_2 = \int_{\sqrt{\frac{b}{a}}}^{+\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx.$$

После замены переменной получим

$$I_1 = \frac{1}{2a}\int_{+\infty}^{2\sqrt{ab}} f(t)\left(1-\frac{t}{\sqrt{t^2-4ab}}\right)dt, \quad I_2 = \frac{1}{2a}\int_{2\sqrt{ab}}^{+\infty} f(t)\left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2-4ab}}\right)dt,$$

$$I = \frac{1}{a}\int_{2\sqrt{ab}}^{+\infty}\frac{tf(t)}{\sqrt{t^2-4ab}}\,dt = \frac{1}{a}\int_{2\sqrt{ab}}^{+\infty} f(t)\,d(\sqrt{t^2-4ab}).$$

Полагая в интеграле $\sqrt{t^2-4ab}=z$, имеем

$$I = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f(\sqrt{z^2+4ab})\,dz. \blacktriangleright$$

92. Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то обязательно ли $f(x)\to 0$ при $x\to+\infty$?

◀ Не обязательно. Рассмотрим, например, интеграл Френеля $I = \int\limits_0^{+\infty} \sin x^2\,dx$. Произведя в нем замену $x^2 = t$, получим

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_{+0}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt = I_1 + I_2, \quad \text{где } I_1 = \frac{1}{2}\int\limits_{+0}^{1} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt, \quad I_2 = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$$

Поскольку $\lim\limits_{t\to+0} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} = 0$, то I_1 существует. Интеграл I_2 сходится по признаку Дирихле, поскольку $\frac{1}{\sqrt{t}} \downarrow 0$ при $t \to +\infty$, а функция $x \mapsto \int\limits_1^x \sin t\,dt = \cos 1 - \cos x$, $1 \leqslant x < +\infty$, ограничена числом 2 $\forall x \in]1, +\infty[$. Следовательно, I сходится, а функция $x \mapsto \sin x^2$, $0 \leqslant x < +\infty$, не имеет предельного значения при $x \to +\infty$

Рассмотрим также $I = \int\limits_0^{+\infty} x \sin x^4\,dx$ и произведем в этом интеграле замену $x^2 = t$. При этом получим сходящийся интеграл $I = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \sin t^2\,dt$. Вместе с тем функция $x \mapsto x \sin x^4$, $0 \leqslant x < +\infty$, не ограничена при $x \to +\infty$. Следовательно, несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ может сходиться и в случае, когда функция f не ограничена при $x \to +\infty$. ▶

93. Доказать, что если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится и f — монотонная функция, то $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x \to +\infty$.

◀ Из сходимости интеграла следует, что $|f(x)| \to 0$ при $x \to +\infty$ (в противном случае интеграл расходился бы, так как функция f в силу монотонности должна быть знакопостоянной при всех достаточно больших x, поэтому функция $x \mapsto \left|\int\limits_a^x f(t)\,dt\right|$, $a \leqslant x < +\infty$, была бы неограниченной при $x \to +\infty$). Таким образом $|f|$ — монотонно убывающая функция. Поскольку интеграл сходится, то для него выполняется критерий Коши:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists A > a : \forall x_1 > A \wedge \forall x_2 > A \Rightarrow \left|\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Фиксируем произвольное $x_0 > A$ и рассмотрим при $x > x_0$ интеграл

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt.$$

Так как $|f|$ — монотонно убывающая функция, то $|f(x)| \leqslant |f(x_0)|$ при $x > x_0$, поэтому

$$|f(x)|(x - x_0) < \left|\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right| < \varepsilon.$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty} x_0|f(x)| = 0$, то из последнего неравенства следует, что $\lim\limits_{x\to+\infty} x f(x) = 0$, т. е. $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x \to +\infty$. ▶

94. Найти представление ζ-функции Римана с помощью несобственного интеграла.

◀ В примере 21, гл. 3, показано, что

$$\int \frac{[x]}{x^{\lambda+1}}\,dx = \frac{1}{\lambda}\left(-\frac{[x]}{x^{\lambda}} + 1 + \frac{1}{2^{\lambda}} + \ldots + \frac{1}{[x]^{\lambda}}\right) + C, \qquad \lambda \neq 0.$$

Если $\lambda > 0$, то

$$\zeta(\lambda) = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\lambda[x]}{x^{\lambda+1}}\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2^\lambda} + \ldots + \frac{1}{n^\lambda}\right), \qquad n = [x]. ▶$$

Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

95. $I = \int\limits_0^2 \frac{dx}{\ln x}$.

◀ Из неравенства $\ln x < x-1$, $1 < x < 2$, следует неравенство $(\ln x)^{-1} > (x-1)^{-1}$, поэтому

$$\int\limits_x^2 \frac{dt}{\ln t} > \int\limits_x^2 \frac{dt}{t-1} = \ln\frac{1}{x-1}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 1+0} \ln\frac{1}{x-1} = +\infty$, то интеграл $\int\limits_{1+0}^{2} \frac{dx}{\ln x}$ расходится, следовательно, согласно пункту 4.5, интеграл I — расходящийся. ▶

96. $I = \int\limits_{+0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}\,dx$.

◀ Сравним в правосторонней окрестности точки $x = 0$ подынтегральную функцию с функцией $f : x \mapsto \frac{1}{x^\lambda}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{2} < \lambda < 1$, рассмотрев предел

$$\lim_{x\to+0} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{x^\lambda} = \lim_{x\to+0} \frac{\ln(\sin x)}{x^{\frac{1}{2}-\lambda}} = \lim_{x\to+0} \frac{\operatorname{ctg} x}{\left(\frac{1}{2}-\lambda\right) x^{-\lambda-\frac{1}{2}}} =$$

$$= \lim_{x\to+0} \frac{x^{\lambda+\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to+0} \frac{x^{\lambda+\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}-\lambda\right) x} = 0$$

(так как $\lambda + \frac{1}{2} > 1$).

При $x \to +0$ подынтегральная функция имеет порядок роста ниже, чем функция f. Так как интеграл

$$\int\limits_{+0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \int\limits_{+0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x^\lambda}$$

сходится, то, согласно признаку сравнения 3), п. 4.6, интеграл I сходящийся. ▶

97. $I = \int\limits_{1+0}^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$.

◀ Произведем в интеграле замену переменной, полагая $\ln x = t$. Тогда получим

$$I = \int\limits_{+0}^{+\infty} \frac{e^{(1-p)t}}{t^q}\,dt$$

Представим I в виде $I = I_1 + I_2$, где

$$I_1 = \int\limits_{+0}^{1} \frac{e^{(1-p)t}}{t^q}\,dt, \qquad I_2 = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{e^{(1-p)t}}{t^q}\,dt.$$

При $t \to +0$ функция $t \mapsto \frac{e^{(1-p)t}}{t^q}$, $0 < t \leqslant 1$, $q > 0$, $p \in \mathbb{R}$, имеет тот же порядок роста, что и функция $t \mapsto \frac{1}{t^q}$, $0 < t \leqslant 1$, а при $q \leqslant 0$ интеграл I_1 не является несобственным.

Следовательно, согласно признаку сравнения 3), п. 4.6, интеграл I_1 сходится, если $q < 1$, и расходится, если $q \geqslant 1$.

При $t \to +\infty$ функция $t \mapsto \frac{e^{(1-p)t}}{t^q}$, $1 \leqslant t < +\infty$, $p > 1$, убывает быстрее любой функции вида $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$, $1 \leqslant t < +\infty$, $\alpha > 1$, так как в этом случае при любом $q \in \mathbb{R}$ имеем

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{e^{(1-p)t}}{t^q} : \frac{1}{t^\alpha} = 0,$$

следовательно, интеграл I_2 сходится при $p > 1$. Если $p \leqslant 1$, то I_2 расходится

Таким образом, интеграл I сходится лишь при $q < 1$ и $p > 1$. ►

98. $I = \displaystyle\int_{+0}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx.$

◄ Представляя I в виде $I = I_1 + I_2$, где

$$I_1 = \int_{+0}^{1} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx, \qquad I_2 = \int_{1}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx,$$

видим, что интеграл I_1 существует, поскольку $\exists \lim\limits_{x \to +0} \frac{\sin^2 x}{x} = 0$.

Записав I_2 в виде

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_{1}^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{x}\, dx = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \to +\infty} \left(\int_{1}^{x} \frac{dt}{t} - \int_{1}^{x} \frac{\cos 2t}{t}\, dt \right) \right)$$

и приняв во внимание, что $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{dt}{t} = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, а интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\, dx$ сходится по признаку Дирихле, делаем вывод о том, что интеграл I_2 расходится.

Следовательно, интеграл I расходящийся. ►

99. $I = \displaystyle\int_{+0}^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}.$

◄ При $p = q$, очевидно, интеграл I расходится, поэтому исследуем его при $p \neq q$.

Пусть $p < q$. Представляя I в виде $I = I_1 + I_2$, где

$$I_1 = \int_{+0}^{1} \frac{dx}{x^p + x^q}, \qquad I_2 = \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q},$$

исследуем интегралы I_1 и I_2 в отдельности.

Поскольку $\frac{1}{x^p + x^q} = \frac{1}{x^p(1 + x^{q-p})}$ и $x^{q-p} \to 0$ при $x \to +0$, то подынтегральная функция в I_1 имеет при $p > 0$ тот же порядок роста, что и функция $x \mapsto \frac{1}{x^p}$, $0 < x \leqslant 1$, $p > 0$. Если $p \leqslant 0$, то интеграл I_1 существует.

Следовательно, согласно признаку сравнения 3), п. 4.6, I_1 в рассматриваемом случае сходится, если $p < 1$, и расходится, если $p \geqslant 1$.

Исследуем I_2, представляя подынтегральную функцию в виде

$$f(x) = \frac{1}{x^p + x^q} = \frac{1}{x^q(1 + x^{p-q})}, \qquad 1 \leqslant x < +\infty.$$

При $x \to +\infty$ $f(x) = O\left(\frac{1}{x^q}\right)$, следовательно I_2 сходится при $q > 1$ и расходится, если $q \leqslant 1$.

Таким образом, если $p < q$, то I сходится при всех $p < 1$ и $q > 1$.

Если $p > q$, то, очевидно, исследуемый интеграл сходится при всех $p > 1$ и $q < 1$.

Оба рассмотренных случая легко объединяются в один: I сходится, если $\min\{p, q\} < 1$, $\max\{p, q\} > 1$. ►

100. $I = \int\limits_{+0}^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)}\, dx$, где $P_m(x)$ и $P_n(x)$ — взаимно простые многочлены степеней соответственно m и n.

◄ Если многочлен $P_n(x)$ имеет действительные нули $x = x_i$ на интервале $]0, +\infty[$, то интеграл расходится, согласно признаку 3), п. 4.6, так как при $x \to x_i$ подынтегральная функция будет иметь одинаковый порядок роста с функцией

$$x \mapsto \frac{1}{(x - x_i)^{\lambda}}, \quad x \in S(x_i, \delta), \quad \lambda \geqslant 1,$$

(здесь $S(x_i, \delta)$ — δ-окрестность точки x_i).

Если же многочлен $P_n(x)$ не имеет действительных нулей на интервале $]0, +\infty[$, то при $x \to +\infty$ $\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = O\left(\frac{1}{x^{n-m}}\right)$ и интеграл I будет сходиться согласно признаку сравнения 2), п. 4.6, если $n - m > 1$, и будет расходиться при $n - m \leqslant 1$. ►

Исследовать на абсолютную и условную сходимости следующие интегралы:

101. $I = \int\limits_{+0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$.

◄ Представим I в виде $I = I_1 + I_2$, где

$$I_1 = \int\limits_{+0}^{1} \frac{\sin x}{x}\, dx, \qquad I_2 = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Рассмотрим при $0 < x_1 < x_2 < 1$ интеграл

$$\bar{I} = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Так как $0 < \frac{\sin x}{x} < 1$ при $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, то $0 < \bar{I} < x_2 - x_1$, поэтому $\bar{I} \to 0$ при $x_1 \to 0$, $x_2 \to 0$, в силу чего интеграл I_1 сходится согласно критерию Коши.

Поскольку $|F(x)| = \left|\int\limits_1^x \sin t\, dt\right| \leqslant 2 \ \forall x \in]1, +\infty[$, а функция $x \mapsto \frac{1}{x}$, $1 \leqslant x < +\infty$, убывая, стремится к нулю, то интеграл I_2 сходится по признаку Дирихле.

Из сходимости интегралов I_1 и I_2 следует, что интеграл I сходится.

Из неравенства $|\sin x| \geqslant \sin^2 x$, справедливого $\forall x \in \mathbb{R}$, решения примера 98 и признака сравнения 1), п. 4.6, приходим к выводу, что интеграл

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\, dx$$

расходится, следовательно, I — абсолютно расходящийся интеграл. ►

102. $I = \int\limits_{+0}^{+\infty} \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^{\alpha}}\, dx$.

◄ Пусть $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$ [1], где

$$I_1 = \int\limits_{+0}^{1} \frac{\sin x \cos \frac{1}{x}}{x^{\alpha}}\, dx, \quad I_2 = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x \cos \frac{1}{x}}{x^{\alpha}}\, dx \quad I_3 = \int\limits_{+0}^{1} \frac{\cos x \sin \frac{1}{x}}{x^{\alpha}}\, dx, \quad I_4 = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\cos x \sin \frac{1}{x}}{x^{\alpha}}\, dx,$$

[1] Такое представление возможно для тех значений параметра α, при которых интеграл I существует.

а затем произведем в интегралах I_1 и I_3 замену $\frac{1}{x} = t$. Тогда получим

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t \sin \frac{1}{t}}{t^{2-\alpha}}\,dt, \qquad I_3 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t \cos \frac{1}{t}}{t^{2-\alpha}}\,dt,$$

из чего следует, что интегралы I_1, I_4 и I_2, I_3 однотипны. Поэтому достаточно исследовать интегралы I_2 и I_4 и результат исследований автоматически перенести на интегралы I_1 и I_3.

Поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos \dfrac{1}{x} = 1$, то $\exists x_0 > 1$:

$$\forall x > x_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} < \cos\frac{1}{x} < 1, \quad \frac{1}{2x^\alpha} < \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^\alpha} < \frac{1}{x^\alpha},$$

поэтому $\frac{\cos\frac{1}{x}}{x^\alpha} \downarrow 0$ при $x \to +\infty$ и $\alpha > 0$.

Функция $x \mapsto \sin x$, $1 \leqslant x < +\infty$, имеет ограниченную первообразную $\forall x \in [1, +\infty[$. Таким образом, при $\alpha > 0$ интеграл I_2 сходится по признаку Дирихле.

Покажем, что I_2 расходится при $\alpha \leqslant 0$. Пусть задано произвольное $0 < \varepsilon < 1$. Положим $\beta = -\alpha$ и возьмем такое $n \in \mathbb{N}$, чтобы выполнялось неравенство $\cos\frac{1}{x} > \frac{1}{2}$ при $x \geqslant 2n\pi$. Применяя первую теорему о среднем к интегралу $\int\limits_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} x^\beta \sin x \cos\frac{1}{x}\,dx$, получим неравенство

$$\left| \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} x^\beta \sin x \cos\frac{1}{x}\,dx \right| = 2\xi_n^\beta \cos\frac{1}{\xi_n} > \xi_n^\beta \geqslant 1, \qquad 2n\pi \leqslant \xi_n \leqslant (2n+1)\pi,$$

из которого, согласно критерию Коши, следует расходимость интеграла I_2 при $\alpha \leqslant 0$, поскольку $\forall x_0 > 1\ \exists n \in \mathbb{N}$ такое, что $2n\pi > x_0$. Следовательно, I_2 сходится лишь при $\alpha > 0$. Из проведенных выше рассуждений следует, что I_3 сходится лишь при $2 - \alpha > 0$, т. е. при $\alpha < 2$.

Таким образом, интегралы I_2 и I_3 одновременно сходятся, если $0 < \alpha < 2$.

Исследуем интеграл I_4 с помощью признака Дирихле. Так как $0 < \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{x^\alpha} < \dfrac{1}{x^{\alpha+1}}$ при всех $x > 1$, $\alpha + 1 > 0$, а функция $x \mapsto \int\limits_1^x \cos t\,dt$, $1 \leqslant x < +\infty$, ограничена, то I_4 сходится при $\alpha + 1 > 0$, т. е. при $\alpha > -1$. Следовательно, I_1 сходится при $\alpha < 3$, а оба интеграла сходятся одновременно при $-1 < \alpha < 3$. Так как $]-1, 3[\cap]0, 2[=]0, 2[$, то интеграл I сходится при $0 < \alpha < 2$.

Исследуем интеграл I_2 на абсолютную сходимость. Из неравенств

$$\frac{1 - \cos 2x}{4x^\alpha} = \frac{\sin^2 x}{2x^\alpha} < \frac{\left|\sin x \cos\frac{1}{x}\right|}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{x^\alpha},$$

выполняющихся при всех достаточно больших $x > 1$, следует, что I_2 сходится абсолютно при $\alpha > 1$, а при $\alpha \leqslant 1$ абсолютно расходится.

Следовательно, I_3 абсолютно сходится, если $2 - \alpha > 1$, т. е. при $\alpha < 1$. Поскольку множества $\{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha > 1\}$ и $\{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha < 1\}$ не пересекаются, то интегралы I_2 и I_3 не могут одновременно абсолютно сходиться ни при каких общих значениях $\alpha \in \mathbb{R}$. Поэтому интеграл I абсолютно расходится. ►

103. $I = \int\limits_0^{+\infty} x^2 \cos(e^x)\,dx.$

◄ Полагая в интеграле $e^x = t$, получаем

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 t}{t} \cos t\,dt.$$

Применив второе правило Лопиталя, находим

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln^2 t}{t}=2\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=2\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}=0.$$

Следовательно, $\frac{\ln^2 t}{t}\downarrow 0$ при $t\to+\infty$.

Поскольку функция $x\mapsto\int\limits_1^x\cos t\,dt=\sin x-\sin 1$, $1\leqslant x<+\infty$, ограничена, то, согласно признаку Дирихле, интеграл I сходится.

Из неравенства $\frac{\ln^2 t}{t}|\cos t|\geqslant\frac{\ln^2 t}{t}\cos^2 t$, справедливого для всех $t>1$, следует, что интеграл

$$I_1=\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln^2 t}{t}\cos^2 t\,dt=\frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln^2 t}{t}\,dt+\frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln^2 t}{t}\cos 2t\,dt$$

расходится, так как $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln^2 t}{t}\,dt=\lim\limits_{x\to+\infty}\int\limits_1^x\ln^2 t\,d(\ln t)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{3}\ln^3 x=+\infty$, а интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln^2 t}{t}\cos 2t\,dt$$

сходится по признаку Дирихле. ►

Найти следующие пределы:

104. $\lim\limits_{x\to+0}\int\limits_x^1\frac{\cos t}{t^2}\,dt.$

◄ Применив первую теорему о среднем к интегралу $I(x)=\int\limits_x^1\frac{\cos t}{t^2}\,dt$, получим

$$I(x)=\cos\xi\left(\frac{1}{x}-1\right),\quad x<\xi<1.$$

Пусть $x\in\left]0,\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right[$, где $\varepsilon>0$ — произвольное, наперед заданное. Тогда $\cos\xi\left(\frac{1}{x}-1\right)>\frac{\cos\xi}{\varepsilon}$, следовательно, $I(x)\to+\infty$ при $x\to+0$.

Применив второе правило Лопиталя, имеем

$$\lim_{x\to+0}\frac{I(x)}{x^{-1}}=\lim_{x\to+0}\frac{I'(x)}{(x^{-1})'}=\lim_{x\to+0}\frac{-\frac{\cos x}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=1.\ ►$$

105. $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\int\limits_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt}{\ln\frac{1}{x}}.$

◄ При любом $a>0$ интеграл $\int\limits_a^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt$ сходится согласно признаку Дирихле. Поэтому $\int\limits_a^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt=C$, $C=\text{const}$, и $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\int\limits_a^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt}{\ln\frac{1}{x}}=0$. Следовательно,

$$\lim_{x\to+0}\frac{\int\limits_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt}{\ln\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\int\limits_x^{a}\frac{e^{-t}}{t}\,dt}{\ln\frac{1}{x}}$$

Из неравенства $I(x) = \int\limits_x^a \frac{e^{-t}}{t}\,dt \geqslant e^{-a}(\ln a - \ln x)$ следует, что $\lim\limits_{x\to+0} I(x) = +\infty$, поэтому, согласно второму правилу Лопиталя, получаем

$$\lim_{x\to+0} \frac{I(x)}{\ln\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0} \frac{I'(x)}{\left(\ln\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to+0} \frac{-\frac{e^{-x}}{x}}{-\frac{1}{x}} = 1. \ \blacktriangleright$$

106. Доказать, что при $x > 0$ $\exists \operatorname{li} x = \text{v. p.} \int\limits_{+0}^{x} \frac{dt}{\ln t}$.

◀ При любых $0 < \mu < 1$ и $0 < \varepsilon < 1$ существуют интегралы $I_1 = \int\limits_{\mu}^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\ln t}$, $I_2 = \int\limits_{1+\varepsilon}^{2} \frac{dt}{\ln t}$, а

$$\operatorname{li} x = \lim_{\substack{\mu\to+0\\ \varepsilon\to+0}} \left(\int\limits_{\mu}^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\ln t} + \int\limits_{1+\varepsilon}^{x} \frac{dt}{\ln t}\right), \quad 1 < x \leqslant 2.$$

При $0 < x < 2$ справедливо разложение $\frac{1}{\ln x} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} + O(x-1)$, поэтому

$$\operatorname{li} x = \lim_{\substack{\mu\to+0\\ \varepsilon\to+0}} \left(\ln|t-1|\Big|_{\mu}^{1-\varepsilon} + \frac{t}{2}\Big|_{\mu}^{1-\varepsilon} + O((t-1)^2)\Big|_{0}^{1-\varepsilon} + \ln(t-1)\Big|_{1+\varepsilon}^{x} + \frac{t}{2}\Big|_{1+\varepsilon}^{x} + O((t-1)^2)\Big|_{1+\varepsilon}^{x}\right) =$$

$$= \ln(x-1) + \frac{x}{2} + O((x-1)^2), \quad 0 < x \leqslant 2.$$

Если $x > 2$, то получим

$$\operatorname{li} x = \text{v. p.} \int\limits_0^x \frac{dt}{\ln t} = \text{v. p.} \int\limits_0^2 \frac{dt}{\ln t} + \int\limits_2^x \frac{dt}{\ln t} = 1 + \int\limits_2^x \frac{dt}{\ln t} + O(1). \ \blacktriangleright$$

107. Найти v. p. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$.

◀ Квадратный трехчлен $y = x^2 - 3x + 2$ имеет действительные нули $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$, следовательно,

$$\text{v. p.} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2} = \text{v. p.} \int\limits_0^{3} \frac{dx}{x^2-3x+2} + \int\limits_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2} =$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \mu\to+0}} \left(\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\Big|_{0}^{1-\varepsilon} + \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\Big|_{1+\varepsilon}^{2-\mu} + \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\Big|_{2+\mu}^{3}\right) + \lim_{x\to+\infty} \ln\frac{t-2}{t-1}\Big|_3^x =$$

$$= -\ln 2 + \lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \mu\to+0}} \left(\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} + \ln\frac{1+\mu}{1-\mu}\right) + \lim_{x\to+\infty} \ln\frac{x-2}{x-1} = \ln\frac{1}{2}. \ \blacktriangleright$$

Упражнения для самостоятельной работы

Вычислить следующие интегралы:

67. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$. **68.** $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(4-x)\sqrt{1-x^2}}$. **69.** $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x^4\,dx}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}}$. **70.** $\int\limits_a^b \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\,x\,dx$.

71. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx,\ a>0$. **72.** $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx,\ a>0$. **73.** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^n},\ n\in\mathbb{N}$.

74. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^n},\ ac-b^2>0$. **75.** $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\sin^{2n} x\,dx,\ a>0$.

76. а) $I_1=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx$; б) $I_2=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\,dx$.

Исследовать на сходимость следующие интегралы:

77. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4\sin^2 x}$. **78.** $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{1+x^2\sin^2 x}$. **79.** $\int\limits_0^{1}\frac{dx}{e^x-\cos x}$. **80.** $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^n(x+2)}{x+1}\,dx$. **81.** $\int\limits_0^{\pi}\ln\sin x\,dx$.

82. $\int\limits_0^{\pi}\frac{\ln\sin x}{x}\,dx$. **83.** $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+(\ln x)^n}$. **84.** $\int\limits_0^{+\infty}x^x e^{-x^n}\,dx$. **85.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^n e^{-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\,dx$.

86. $\int\limits_0^{+\infty}\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Доказать неравенства:

87. $-\frac{\pi}{4}<\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{x^2+4}\,dx<\frac{\pi}{4}$. **88.** $0<\int\limits_2^{+\infty}e^{-x^2}\,dx<\frac{1}{4e^4}$.

89. $\frac{1}{19}<\int\limits_1^{+\infty}\frac{1+x^{20}}{1+x^{40}}\,dx<\frac{1}{19}+\frac{1}{39}$. **90.** $\frac{20}{19}<\int\limits_0^{+\infty}\frac{1+x^{20}}{1+x^{40}}\,dx<\frac{20}{19}+\frac{1}{20}$.

91. $0<\int\limits_1^{+\infty}e^{-x^n}\,dx<\frac{1}{n},\ n>1$. **92.** $1-\frac{1}{n}\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^n}\,dx<1+\frac{1}{n},\ n>1$.

93. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 n^2x^{n-1}(1-x)\,dx\neq\int\limits_0^1\lim\limits_{n\to\infty}n^2x^{n-1}(1-x)\,dx$.

94. Доказать, что если интеграл $\int\limits_0^{+\infty}f(x)\,dx$ абсолютно сходится, то

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^{+\infty}f(x)|\sin x|\,dx=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}f(x)\,dx.$$

95. Доказать равенство

$$\int\limits_{+0}^{\frac{\pi}{2}-0}\frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg}x}}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-0}\sqrt{\operatorname{tg}x}\,dx=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

96. Доказать, что несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\sin^2\left(\pi\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)dx$ расходится.

Найти:

97. v. p. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a-b\cos x}$, $0<a<b$. **98.** v. p. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1-x^3}$. **99.** v. p. $\int\limits_0^{2\pi}\frac{x\,dx}{1-a\cos x}$ при $a>1$.

§ 5. Функции ограниченной вариации

Определение 1. *Пусть* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, Π — *произвольное разбиение сегмента* $[a,b]$, $\Delta f_i=f(x_{i+1})-f(x_i)$, $V_\Pi(f;a,b)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}|\Delta f_i|$. *Число* $V_\Pi(f;a,b)$ *называется вариацией функции* f *по разбиению* Π, *а число* $V(f;a,b)=\sup\limits_{\{\Pi\}}\{V_\Pi(f;a,b)\}$, *где точная верхняя грань берется по всем возможным разбиениям* Π *сегмента* $[a,b]$, *называется полной вариацией функции* f *на сегменте* $[a,b]$.

Если $V(f;a,b)<\infty$, то говорят, что f — функция *ограниченной вариации*.

Определение 2. *Пусть* $\mathbf{f}:[a,\,b]\to\mathbb{R}^m$, Π — *произвольное разбиение сегмента* $[a,\,b]$, $\Delta\mathbf{f}_i=\mathbf{f}(x_{i+1})-\mathbf{f}(x_i)$, $V_\Pi(\mathbf{f};\,a,\,b)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}|\Delta\mathbf{f}_i|$, *где* $|\cdot|$ — *евклидова норма в пространстве* $\mathbb{R}^m$.

Число $V(\mathbf{f};\,a,\,b)=\sup\limits_{\{\Pi\}}\{V_\Pi(\mathbf{f};\,a,\,b)\}$, *где точная верхняя грань берется по всем возможным разбиениям сегмента* $[a,\,b]$, *называется полной вариацией вектор-функции* $\mathbf{f}$ *на сегменте* $[a,\,b]$.

Если $V(\mathbf{f};\,a,\,b)<\infty$, то говорят, что вектор-функция $\mathbf{f}$ — функция *ограниченной вариации.*

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{f}:[a,\,b]\to\mathbb{R}^m$. *Для того чтобы вектор-функция* $\mathbf{f}$ *была функцией ограниченной вариации на* $[a,\,b]$, *необходимо и достаточно, чтобы каждая ее компонента* f_j, $j=\overline{1,\,m}$, *имела ограниченную вариацию на этом сегменте.*

Теорема 2. *Если* $f:[a,\,b]\to\mathbb{R}$, $g:[a,\,b]\to\mathbb{R}$ — *функции ограниченной вариации на* $[a,\,b]$, *то* $f+g$ *и* fg *также функции ограниченной вариации на* $[a,\,b]$.

Следствие. *Если функции* f *и* g *монотонно возрастают на* $[a,\,b]$, *то* $f-g$ *есть функция ограниченной вариации на* $[a,\,b]$.

Теорема 3. *Пусть* $\mathbf{f}:[a,\,b]\to\mathbb{R}^m$ — *вектор-функция ограниченной вариации. Тогда:*

1) $V(\mathbf{f};\,a,\,y)=V(\mathbf{f};\,a,\,x)+V(\mathbf{f};\,x,\,y)$, *если* $a\leqslant x\leqslant y\leqslant b$;

2) *функция* $V_f:x\mapsto V(\mathbf{f};\,a,\,x)$ *непрерывна на* $[a,\,b]$, *если* $\mathbf{f}\in C[a,\,b]$.

Теорема 4. *Пусть* $f:[a,\,b]\to\mathbb{R}$ — *функция ограниченной вариации на* $[a,\,b]$. *Тогда существуют такие неубывающие функции* $p:[a,\,b]\to\mathbb{R}$, $q:[a,\,b]\to\mathbb{R}$, *что* $p(a)=q(a)=0$ *и* $\forall x\in[a,\,b]$ *выполняются равенства*

$$f(x)-f(a)=p(x)-q(x), \tag{1}$$

$$V(f;\,a,\,x)=p(x)+q(x). \tag{2}$$

Функции p и q соответственно называют *функциями положительной* и *отрицательной вариаций* функции f.

108. На примере функции $f:[0,\,2]\to\mathbb{R}$, где

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{\pi}{x}, & \text{если } 0<x\leqslant 2,\\ 0, & \text{если } x=0,\end{cases}$$

убедиться в том, что непрерывнал на сегменте функция не обязательно имеет ограниченную вариацию.

◀ Функция f непрерывна в области определения.

Пусть $\Pi=\left\{0,\,\frac{2}{2n-1},\,\frac{2}{2n-3},\,\ldots,\,\frac{2}{5},\,\frac{2}{3},\,2\right\}$ — разбиение сегмента $[0,\,2]$. Тогда полная вариация $V_\Pi(f;\,0,\,2)=\frac{2}{2n-1}+\left(\frac{2}{2n-3}+\frac{2}{2n-1}\right)+\ldots+\left(2+\frac{2}{3}\right)>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=C+\ln n+\varepsilon_n$, $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$, C — постоянная Эйлера. Следовательно, $V_\Pi(f;\,0,\,2)\to+\infty$ при $n\to\infty$ и множество $\{V_\Pi(f;\,0,\,2)\}$ не ограничено сверху. ▶

109. Найти функции положительной, отрицательной и полной вариаций функции $f: x\mapsto 3x^2-2x^3$, $-2\leqslant x\leqslant 2$.

◀ Найдем сначала функцию $x\mapsto V(f;\,-2,\,x)$, $-2\leqslant x\leqslant 2$, приняв во внимание, что $f\in C^{(1)}[-2,\,2]$.

Пусть Π — произвольное разбиение сегмента $[-2,\,x]$, $-2\leqslant x\leqslant 2$. Тогда

$$V_\Pi(f;\,-2,\,x)=\sum_{i=0}^{n-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)|=\sum_{i=0}^{n-1}|f'(\xi_i)|\,\Delta x_i,\qquad x_i<\xi_i<x_{i+1}$$

(по формуле конечных приращений Лагранжа).

Следовательно, $V_\Pi(f;\,-2,\,x)=S_\Pi(|f'|)$, где $S_\Pi(|f'|)$ — некоторая интегральная сумма функции $t\mapsto|f'(t)|$, $-2\leqslant t\leqslant x$, в силу чего получаем

$$V(f;\,-2,\,x)=\int_{-2}^{x}|f'(t)|\,dt=\begin{cases} -\int\limits_{-2}^{x}f'(t)\,dt=-f(x)+28, & \text{если } -2\leqslant x\leqslant 0,\\ -\int\limits_{-2}^{0}f'(t)\,dt+\int\limits_{0}^{x}f'(t)\,dt=f(x)+28, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -\int\limits_{-2}^{0}f'(t)\,dt+\int\limits_{0}^{1}f'(t)\,dt-\int\limits_{1}^{x}f'(t)\,dt=30-f(x), & \text{если } 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$$

Согласно формулам (1) и (2), имеем

$$p(x) = \frac{V(f; -2, x) + f(x) - f(-2)}{2} = \begin{cases} 0, & \text{если } -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ f(x), & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1, & \text{если } 1 \leqslant x \leqslant 2, \end{cases}$$

$$q(x) = \frac{V(f; -2, x) - f(x) + f(-2)}{2} = \begin{cases} -f(x) + 28, & \text{если } -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ 28, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ -f(x) + 29, & \text{если } 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases} \quad ►$$

110. Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации на $[a, b]$, p и q — функции положительной и отрицательной вариаций функции f, а p_1 и q_1 — возрастающие на сегменте $[a, b]$ функции и $f = p_1 - q_1$. Доказать, что

$$V(p; a, b) \leqslant V(p_1, a, b), \quad V(q; a, b) \leqslant V(q_1; a, b).$$

◄ Согласно теореме 4, функции p и q не убывают на сегменте $[a, b]$ и $p(x) \geqslant 0$, $q(x) \geqslant 0$ $\forall x \in [a, b]$, так как $p(a) = q(a) = 0$.

Из формулы (2) следует, что $\forall x \in [a, b]$

$$p(x) = V(f; a, x) - q(x) \geqslant 0, \quad q(x) = V(f; a, x) - p(x) \geqslant 0,$$

следовательно, справедливы неравенства

$$q(x) \leqslant V(f, a, x), \quad p(x) \leqslant V(f; a, x), \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{1}$$

Поскольку $f = p_1 - q_1$, то

$$V(f; a, x) = V(p_1 - q_1; a, x), \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Рассмотрим при произвольном разбиении Π сегмента $[a, b]$ вариацию

$$V_\Pi(f; a, b) = V_\Pi(p_1 - q_1, a, b) = \sum_{i=0}^{n-1} |(p_1(x_{i+1}) - p_1(x_i)) - (q_1(x_{i+1}) - q_1(x_i))| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} |p_1(x_{i+1}) - p_1(x_i)| \leqslant V_\Pi(p_1; a, b).$$

Тогда $V(f; a, b) \leqslant V(p_1, a, b)$. Аналогично, $V(f; a, b) \leqslant V(q_1, a, b)$. Из монотонности функции p и q, а также из того, что $p(a) = q(a) = 0$, получаем, что

$$V(p; a, b) = p(b), \quad V(q; a, b) = q(b).$$

Тогда из неравенств (1) следуют неравенства

$$V(p; a, b) = p(b) \leqslant V(f; a, b) \leqslant V(p_1; a, b), \quad V(q; a, b) = q(b) \leqslant V(f; a, b) \leqslant V(q_1; a, b). ►$$

111. Пусть $g \in R[a, b]$, $f(x) = \int\limits_a^x g(t)\,dt$, $g^+(t) = \max\{g(t), 0\}$, $g^-(t) = \min\{g(t), 0\}$.

Доказать, что f — функция ограниченной вариации на $[a, b]$ и что ее функции вариации задаются равенствами

$$V(f; a, x) = \int\limits_a^x |g(t)|\,dt, \quad p(x) = \int\limits_a^x g^+(t)\,dt, \quad q(x) = \int\limits_a^x g^-(t)\,dt.$$

◄ Пусть Π — произвольное разбиение сегмента $[a, x]$, $a < x \leqslant b$. Тогда, согласно определению вариации, получим

$$V_\Pi(f, a, x) = \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} g(t)\,dt \right| = \sum_{i=0}^{n-1} |\mu_i| \Delta x_i,$$

где $\inf\limits_{x_i \leqslant t \leqslant x_{i+1}} \{g(t)\} \leqslant \mu_i \leqslant \sup\limits_{x_i \leqslant t \leqslant x_{i+1}} \{g(t)\}$.

Следовательно, $\underline{\int} |g|\, dt \leqslant V(f;\, a,\, x) \leqslant \overline{\int} |g|\, dt$, а так как $g \in R[a, b]$, то и $|g| \in R[a, b]$, в силу чего $V(f,\, a,\, x) = \int\limits_a^x |g(t)|\, dt$ По теореме 4 имеем

$$p(x) - q(x) = \int\limits_a^x g(t)\, dt, \quad p(x) + q(x) = \int\limits_a^x |g(t)|\, dt.$$

Следовательно,

$$p(x) = \frac{1}{2}\int\limits_a^x g(t)(1 + \operatorname{sgn} g(t))\, dt = \int\limits_a^x g^+(t)\, dt, \quad q(x) = \frac{1}{2}\int\limits_a^x g(t)(\operatorname{sgn} g(t) - 1)\, dt = \int\limits_a^x g^-(t)\, dt. \ ►$$

112. Пусть $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации на сегменте $[\alpha, \beta]$, а функция $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица на сегменте $[a, b]$, причем $[a, b] \supset f([\alpha, \beta])$. Доказать, что композиция $F \circ f$ есть функция ограниченной вариации на сегменте $[\alpha, \beta]$.

◄ Функция F удовлетворяет условию Липшица на сегменте $[a, b]$, если существует такое число $L = \text{const}$, что $\forall x_1,\ x_2 \in [a, b] \Rightarrow |F(x_1) - F(x_2)| \leqslant L|x_1 - x_2|$.

Пусть Π — произвольное разбиение сегмента $[\alpha, \beta]$. Тогда получим

$$V_\Pi(F \circ f;\, \alpha,\, \beta) = \sum_{i=0}^{n-1} |F(f(t_{i+1})) - F(f(t_i))| \leqslant L \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| = LV_\Pi(f;\, \alpha,\, \beta).$$

Из полученного неравенства следует, что композиция $F \circ f$ имеет ограниченную вариацию на сегменте $[\alpha, \beta]$. ►

Упражнения для самостоятельной работы

100. Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации на сегменте $[a, b]$, а $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ — монотонная функция и $[a, b] \supset \varphi([\alpha, \beta])$. Доказать, что композиция $f \circ \varphi$ является функцией ограниченной вариации на сегменте $[\alpha, \beta]$.

101. Доказать, что полная вариация функции $F : x \mapsto \int\limits_a^x f(t)\, dt$, $a \leqslant x \leqslant b$, $f \in R[a, b]$, равна

$$\int\limits_a^b |f(t)| dt.$$

102. Доказать, что если функция $x \mapsto f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, имеет ограниченную вариацию на сегменте $[a, b]$ и $|f(x)| > \varepsilon > 0$ $\forall x \in [a, b]$, то функция $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$, $a \leqslant x \leqslant b$, также является функцией ограниченной вариации на этом сегменте.

103. Вычислить: а) $V(\sin x;\, 0,\, 2\pi)$; б) $V(\cos x;\, 0,\, 2\pi)$.

104. Вычислить функции положительной, отрицательной и полной вариаций функции $x \mapsto [x] - x$, $0 \leqslant x \leqslant 2$.

§ 6. Приложение определенного интеграла к решению задач геометрии

6.1. Длина дуги спрямляемой кривой.

Определение 1. *Путем в* $\mathbb{R}^m$ *будем называть непрерывное отображение* $\mathbf{f} : [a, b] \to \mathbb{R}^m$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Определение 2. *Если непрерывное отображение* $\mathbf{f}:[a,\,b]\to\mathbb{R}^m$ *биективно, то путь будем называть дугой.*

Определение 3. *Следом дуги* $\mathbf{f}:[a,\,b]\to\mathbb{R}^m$ *или кривой* γ *называется образ сегмента* $[a,\,b]$ *при отображении* $\mathbf{f}$:

$$\gamma=\{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^m: y_j=f_j(x),\ a\leqslant x\leqslant b,\ j=\overline{1,m}\}.$$

Определение 4. *Пусть* $\mathbf{f}$ *— дуга в пространстве* $\mathbb{R}^m$. *Если* $\mathbf{f}(a)=\mathbf{f}(b)$ *и* $\mathbf{f}(x_1)\neq\mathbf{f}(x_2)$ *для любой пары различных точек* x_1 *и* x_2 *из интервала* $]a,\,b[$, *то кривая* γ *называется простой замкнутой кривой.*

Определение 5. *Кривая* γ *спрямляема, если вектор-функция* $\mathbf{f}$ *имеет ограниченную вариацию на сегменте* $[a,\,b]$, *а длиной кривой* γ *будем называть полную вариацию* $V(\mathbf{f};\,a,\,b)$.

Теорема. *Если вектор-функция* $\mathbf{f}':[a,\,b]\to\mathbb{R}^m$ *непрерывна на сегменте* $[a,\,b]$, *то кривая* γ *спрямляема, а ее длина* l *может быть вычислена по формуле*

$$l=\int\limits_a^b|\mathbf{f}'(x)|\,dx,\tag{1}$$

где $|\mathbf{f}'(x)|=\sqrt{f_1'^2(x)+f_2'^2(x)+\ldots+f_m'^2(x)}$.

Рассмотрим частный случай теоремы, когда $m=2$, а кривая γ задана параметрическими уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$. Тогда $|\mathbf{f}'(t)|=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}$ и формула (1) принимает вид

$$l=\int\limits_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt.\tag{2}$$

Для случая $m=3$, когда кривая γ задана параметрическими уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\chi(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, при выполнении всех условий теоремы имеем

$$l=\int\limits_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}\,dt.\tag{3}$$

В частном случае, когда кривая γ в $\mathbb{R}^2$ представлена в виде $f_1(x)=x$, $f_2(x)=f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, где $f:[a,\,b]\to\mathbb{R}$, $f\in C^{(1)}[a,\,b]$, формула (2) принимает вид

$$l=\int\limits_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.\tag{4}$$

Если же кривая γ в $\mathbb{R}^2$ задана в полярной системе координат, т. е. параметрическими уравнениями

$$x=\rho(\varphi)\cos\varphi,\quad y=\rho(\varphi)\sin\varphi,\quad \varphi_0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_1,\quad \rho:[\varphi_0,\,\varphi_1]\to\mathbb{R}^+,\quad \rho\in C^{(1)}[\varphi_0,\,\varphi_1],$$

то формула (2) принимает вид

$$l=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}\,d\varphi.\tag{5}$$

В частном случае, когда кривая в полярной системе координат задана в виде $\varphi=\varphi(\rho)$, $\rho_1\leqslant\rho\leqslant\rho_2$, то в интеграле (5) следует произвести замену переменной. После замены получим следующую формулу:

$$l=\int\limits_{\rho_1}^{\rho_2}\sqrt{1+(\rho\varphi'(\rho))^2}\,d\rho.\tag{6}$$

6.2. Вычисление площадей плоских фигур.

Определение 1. *Криволинейной трапецией называется плоская фигура* Φ, *ограниченная снизу сегментом* $[a, b]$ *оси* Ox, *сверху — графиком непрерывной неотрицательной функции* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, *с боков — отрезками прямых* $x = a$ и $x = b$ (рис. 62).

Теорема 1. Криволинейная трапеция — квадрируемая фигура, а ее площадь P *вычисляется по формуле*

$$P = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Если непрерывная функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ меняет знак на $[a, b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx$ равен алгебраической сумме площадей криволинейных трапеций, расположенных над осью Ox и под ней.

Если плоская фигура Φ ограничена снизу графиком непрерывной функции $f_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$, сверху — графиком непрерывной функции $f_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$, с боков — отрезками прямых $x = a$ и $x = b$ (рис. 63), то ее площадь можно вычислить по формуле

$$P = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx. \tag{2}$$

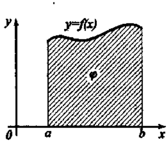


Рис. 62

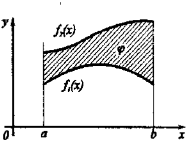


Рис. 63

Определение 2. *Криволинейным сектором называют плоскую фигуру, ограниченную двумя лучами, составляющими с полярной осью углы* $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, *и непрерывной кривой* γ, *заданной уравнением* $\rho = \rho(\varphi)$, $\rho \geqslant 0$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$.

Теорема 2. Криволинейный сектор — квадрируемая плоская фигура, площадь P *которой можно вычислить по формуле*

$$P = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\varphi. \tag{3}$$

Пусть Φ — односвязная область в $\mathbb{R}^2$, ограниченная гладкой замкнутой кривой γ, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ (кривая γ называется *гладкой*, если в каждой точке t сегмента $[t_0, t_1]$ функции x и y непрерывно дифференцируемы и $x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$).

Предположим, что Φ — выпуклая ориентированная плоская фигура, обход границы которой совершается против хода часовой стрелки при изменении параметра t от t_0 до t_1. Тогда площадь P фигуры Φ может быть вычислена по любой из следующих формул:

$$P = -\int_{t_0}^{t_1} y(t)x'(t)\,dt, \tag{4}$$

$$P = \int_{t_0}^{t_1} x(t)y'(t)\,dt, \tag{5}$$

$$P = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \left(x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\right) dt. \tag{6}$$

Если фигура Ф не выпукла, но ее можно с помощью прямых, параллельных оси Oy, разбить на выпуклые части, то к каждой такой части применимы формулы (4)—(6). Складывая полученные результаты, опять придем к формулам (4)—(6), справедливым для вычисления площади всей фигуры Ф.

6.3. Вычисление объемов тел.

Определение. *Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in C[a, b]$. Тело T, образованное вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции Ф, ограниченной графиком функции f, отрезками прямых $x = a$, $x = b$ и сегментом $[a, b]$ оси Ox, будем называть телом вращения.*

Теорема 1. Тело вращения T кубируемо и его объем можно вычислить по формуле

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx. \tag{1}$$

Рассмотрим тело T, содержащееся между плоскостями $x = a$ и $x = b$. Предположим, что всякое сечение $\Phi(x)$ тела T плоскостью, перпендикулярной к оси Ox в точке $x \in [a, b]$, есть квадрируемая плоская фигура, площадь которой $P(x)$ нам известна.

Теорема 2. Если тело T кубируемо, а функция $P : x \mapsto P(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, интегрируема на $[a, b]$, то объем V тела T можно вычислить по формуле

$$V = \int_a^b P(x)\, dx. \tag{2}$$

Найти длины дуг кривых γ, заданных в пространстве $\mathbb{R}^2$:

113. $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = 2px,\ 0 \leqslant x \leqslant x_0,\ p > 0\}$.

◄ Применим формулу (4), п. 6.1, приняв во внимание симметрию множества точек $\{M(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant x_0,\ y^2 = 2px\}$ относительно оси Ox:

$$l = 2\int_0^{x_0} \sqrt{1 + \frac{p}{2x}}\, dx = 2\int_0^{x_0} \frac{\sqrt{p + (\sqrt{2x})^2}}{\sqrt{2x}}\, dx = 2\int_0^{x_0} \sqrt{p + (\sqrt{2x})^2}\, d(\sqrt{2x}) = 2\int_0^{\sqrt{2x_0}} \sqrt{p + t^2}\, dt =$$

$$= \left(t\sqrt{p + t^2} + p\ln(t + \sqrt{p + t^2})\right)\Big|_0^{\sqrt{2x_0}} = 2\sqrt{x_0\left(x_0 + \frac{p}{2}\right)} + p\ln\frac{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0 + \frac{p}{2}}}{\sqrt{\frac{p}{2}}}. \ ►$$

114. $\gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{1}{2}\ln y,\ 1 \leqslant y \leqslant e\right\}$.

◄ В качестве переменной интегрирования возьмем y. Формула (4), п. 6.1, принимает вид

$$l = \int_1^e \sqrt{1 + x'^2(y)}\, dy = \int_1^e \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(y - \frac{1}{y}\right)^2}\, dy.$$

Следовательно,

$$l = \frac{1}{2}\int_1^e \left(\frac{1}{y} + y\right) dy = \frac{1}{2}\left(\ln y + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_1^e = \frac{1}{4}(1 + e^2). \ ►$$

115. $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = a(\operatorname{sh} t - t),\ y = a(\operatorname{ch} t - 1),\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$.

◀ Воспользуемся формулой (2), п. 6.1, получим

$$x'(t) = a(\operatorname{ch} t - 1), \quad y'(t) = a \operatorname{sh} t,$$

$$x'^2(t) + y'^2(t) = a^2(\operatorname{sh}^2 t + \operatorname{ch}^2 t - 2\operatorname{ch} t + 1) = 2a^2(\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{ch} t) =$$

$$= 2a^2 \operatorname{ch} t(\operatorname{ch} t - 1) = 4a^2 \operatorname{ch} t \operatorname{sh}^2 \frac{t}{2} = 4a^2 \operatorname{sh}^2 \frac{t}{2}\left(2\operatorname{ch}^2\frac{t}{2} - 1\right).$$

Следовательно,

$$l = 2a\int_0^T \operatorname{sh}\frac{t}{2}\sqrt{2\operatorname{ch}^2\frac{t}{2} - 1}\,dt = \frac{4a}{\sqrt{2}}\int_0^T \sqrt{\left(\sqrt{2}\operatorname{ch}\frac{t}{2}\right)^2 - 1}\,d\left(\sqrt{2}\operatorname{ch}\frac{t}{2}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\,a\left(\sqrt{2}\operatorname{ch}\frac{t}{2}\sqrt{\operatorname{ch} t} - \ln\left(\sqrt{2}\operatorname{ch}\frac{t}{2} + \sqrt{\operatorname{ch} t}\right)\right)\Big|_0^T =$$

$$= a\left(2\left(\operatorname{ch}\frac{T}{2}\sqrt{\operatorname{ch} T} - 1\right) - \sqrt{2}\ln\frac{\sqrt{2}\operatorname{ch}\frac{T}{2} + \sqrt{\operatorname{ch} T}}{\sqrt{2} + 1}\right). \ ▶$$

116. $\gamma = \left\{\rho = \frac{p}{1 + \cos\varphi},\ |\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$.

◀ Длину кривой вычислим с помощью формулы (5), п. 6.1. Имеем

$$\rho'(\varphi) = \frac{p\sin\varphi}{(1 + \cos\varphi)^2},$$

$$\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi) = \frac{p^2}{(1+\cos\varphi)^2} + \frac{p^2\sin^2\varphi}{(1+\cos\varphi)^4} = \frac{2p^2}{(1+\cos\varphi)^3} = \frac{p^2}{4\cos^6\frac{\varphi}{2}},$$

$$l = \frac{p}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\cos^3\frac{\varphi}{2}} = p\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\cos^3\frac{\varphi}{2}} = 2p\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^3 t} = 2p\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos t(1 - \sin^2 t)} =$$

$$= 2p\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\sin t)}{(1 - \sin^2 t)^2} = 2p\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dz}{(1 - z^2)^2} = 2p\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dz}{1 - z^2} + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{z^2\,dz}{(1 - z^2)^2}\right) =$$

$$= 2p\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dz}{1 - z^2} + \frac{z}{2(1 - z^2)}\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dz}{1 - z^2}\right) = 2p\left(\frac{1}{4}\ln\frac{1 + z}{1 - z}\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= p(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})). \ ▶$$

117. $\gamma = \left\{\varphi = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right),\ 1 \leqslant \rho \leqslant 3\right\}$.

◀ Для вычисления длины кривой γ воспользуемся формулой (6), п. 6.1, получим

$$l = \int_1^3 \sqrt{1 + (\rho\varphi'(\rho))^2}\,d\rho = \int_1^3 \left(\frac{\rho}{2} + \frac{1}{2\rho}\right)d\rho = \left(\frac{\rho^2}{4} + \frac{1}{2}\ln\rho\right)\Big|_1^3 = 2 + \frac{1}{2}\ln 3. \ ▶$$

118. Доказать, что длина эллипса $\gamma_1 = \{x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\}$ равна длине одной волны синусоиды $\gamma_2 = \left\{y = c\sin\frac{x}{b},\ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi b\right\}$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

◀ Обозначив длины эллипса и одной волны синусоиды соответственно через l_1 и l_2, получим

$$l_1 = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt,$$

$$l_2 = \int_0^{2\pi b} \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx = \int_0^{2\pi b} \sqrt{1 + \frac{c^2}{b^2} \cos^2 \frac{x}{b}}\, dx =$$

$$= \int_0^{2\pi b} \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \cos^2 \frac{x}{b}}\, d\left(\frac{x}{b}\right) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}\, dt$$

(в интеграле произведена замена $\frac{x}{b} = t$).

Поскольку функции $t \mapsto \sin^2 t$, $t \mapsto \cos^2 t$, $t \in \mathbb{R}$, периодические, с периодом $T = \pi$, то, согласно примеру 51, имеем

$$l_1 = 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt.$$

Аналогично имеем

$$l_2 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}\, dt.$$

Заменяя в последнем интеграле переменную по формуле $\frac{\pi}{2} - t = z$, получаем

$$l_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 z + b^2 \cos^2 z}\, dz = l_1. \blacktriangleright$$

Вычислить площади плоских фигур, ограниченных графиками следующих функций:

119. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $|x| \leqslant a$.

◀ Плоская фигура является эллипсом с полуосями $x = a$ и $x = b$. Используя симметрию точек эллипса относительно осей координат, вычислим площадь P_1 его четвертой части. Согласно формуле (1) п. 6 2, получим

$$P_1 = b\int_0^{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, dx = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = \frac{\pi}{4}ab$$

(здесь произведена замена $\frac{x}{a} = \sin t$). Окончательно имеем, что $P = 4P_1 = \pi ab$. ▶

120. $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$, $A > 0$, $AC - B^2 > 0$.

◀ Решая относительно x уравнение $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - 1 = 0$, получаем

$$x = \frac{-By \pm \sqrt{A - (AC - B^2)\, y^2}}{A}, \qquad A - (AC - B^2)\, y^2 \geqslant 0.$$

Следовательно, $|y| \leqslant \sqrt{\frac{A}{AC - B^2}} = b$. Искомую площадь вычислим по формуле (2), п. 6.2 которая в рассматриваемом случае принимает вид

$$P = \int_{-b}^{b} (x_1(y) - x_2(y))\, dy,$$

где

$$x_1 = \frac{-By + \sqrt{A - (AC - B^2)y^2}}{A}, \quad x_2 = \frac{-By - \sqrt{A - (AC - B^2)y^2}}{A}.$$

Таким образом, имеем

$$P = \frac{2}{A}\int_{-b}^{b} \sqrt{A - (AC - B^2)y^2}\, dy = \frac{2\sqrt{AC - B^2}}{A}\int_{-b}^{b} \sqrt{b^2 - y^2}\, dy =$$

$$= \frac{4b^2}{A}\sqrt{AC - B^2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = \frac{\pi b^2}{A}\sqrt{AC - B^2} = \frac{\pi}{\sqrt{AC - B^2}}$$

(в интеграле произведена замена $\arcsin \frac{y}{b} = t$). ►

121. $y = e^{-x}|\sin x|$, $y = 0$, $x \geqslant 0$.

◄ График функции $y : x \mapsto e^{-x}|\sin x|$, $0 \leqslant x < +\infty$, не имеет точек пересечения с осью Ox, являющейся его асимптотой при $x \to +\infty$. Поэтому множество точек плоскости xOy, ограниченное графиком функции y и положительной полуосью $\mathbb{R}^+$, не является квадрируемой фигурой в обычном понимании.

Рассмотрим множество площадей

$$\left\{P(x) = \int_0^x e^{-t}|\sin t|\, dt,\ x \in \mathbb{R}^+\right\}$$

и положим

$$P \overset{\text{def}}{=} \lim_{x \to +\infty} P(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x}|\sin x|\, dx.$$

Представляя P в виде суммы

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x}|\sin x|\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x}|\sin x|\, dx$$

и заменяя в каждом интеграле переменную по формуле $x - k\pi = t$, получаем

$$P = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} e^{-k\pi}\int_0^{\pi} e^{-t}\sin t\, dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} e^{-k\pi}e^{-t}\frac{\sin t + \cos t}{2}\bigg|_{\pi}^{0} = \frac{1 + e^{-\pi}}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} e^{-k\pi}.$$

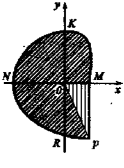


Рис. 64

Вопрос вычисления площади фигуры свелся к вычислению суммы убывающей геометрической прогрессии.

Таким образом, имеем

$$P = \frac{1 + e^{-\pi}}{2(1 - e^{-\pi})} = \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}}{e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{2}\operatorname{cth}\frac{\pi}{2}. \ ►$$

122. $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, и отрезком луча $x = a$, $y \leqslant 0$.

◄ Рассмотрим плоскую фигуру $MKNRP$, ограниченную разверткой круга и отрезком луча $x = a$, $y \leqslant 0$ (рис. 64). Искомая площадь P равна сумме площадей треугольника MOP и фигуры $MKNRPOM$. Очевидно, $P_{\Delta MOP} = \pi a^2$, так как $OM = a$, $|MP| = 2\pi a$.

Переходя к полярным координатам ρ и φ, получим

$$\rho^2 = x^2 + y^2 = a^2(1 + t^2), \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin t - t\cos t}{\cos t + t\sin t}.$$

Для вычисления площади фигуры *MKNRPOM* воспользуемся формулой (3), п. 6.2, а затем перейдем в интеграле от переменной φ к переменной t.

Дифференцируя левую и правую части равенства

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin t - t\cos t}{\cos t + t\sin t},$$

находим

$$d\varphi = \frac{1}{1 + \left(\frac{\sin t - t\cos t}{\cos t + t\sin t}\right)^2} d\left(\frac{\sin t - t\cos t}{\cos t + t\sin t}\right) = \frac{t^2}{1+t^2}\,dt.$$

Следовательно,

$$P_{MKNRPOM} = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\,d\varphi = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi} \frac{(1+t^2)t^2}{1+t^2}\,dt = \frac{4}{3}\pi^3 a^2.$$

Окончательно имеем

$$P = \pi a^2 + \frac{4}{3}\pi^3 a^2 = \frac{a^2}{3}(4\pi^3 + 3\pi). \ ►$$

123. $x = a\cos t,\ y = \dfrac{a\sin^2 t}{2+\sin t}$.

◄ При возрастании t от 0 до π переменная x убывает от a до $-a$ и при этом переменная $y = L_1(t)$ принимает неотрицательные значения, возрастая от 0 до $\frac{a}{3}$ при изменении t от 0 до $\frac{\pi}{2}$ и убывая от $\frac{a}{3}$ до 0 при изменении t от $\frac{\pi}{2}$ до π. Если же t возрастает от π до 2π, то переменная x возрастает от $-a$ до a, и значения переменной $y = L_2(t)$ в интервале $]\pi, 2\pi[$ больше значений $y = L_1(t)$ в интервале $]0, \pi[$, так как $\sin t < 0$ при $t \in]\pi, 2\pi[$. Следовательно, уравнения $x = a\cos t$, $y = \frac{a\sin^2 t}{2+\sin t}$ описывают замкнутую кривую с точками возврата $(a, 0)$ и $(-a, 0)$. При этом интеграл $P_1 = \int\limits_0^{\pi} y\,dx$ равен площади фигуры, ограниченной кривой $L_1(t)$ и сегментом $[-a, a]$ оси Ox, взятой со знаком "$-$", а интеграл $P_2 = \int\limits_{\pi}^{2\pi} y\,dx$ равен площади фигуры, ограниченной кривой $L_2(t)$ и сегментом $[-a, a]$ оси Ox. Поэтому искомая площадь P равна алгебраической сумме P_1 и P_2:

$$P = P_1 + P_2 = \int\limits_0^{2\pi} y(t)\,dx(t) = \int\limits_0^{2\pi} \frac{a\sin^2 t}{2+\sin t}(-a\sin t)\,dt = -a^2\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^3 t}{2+\sin t}\,dt =$$

$$= -a^2\int\limits_0^{2\pi}\left(\sin^2 t - 2\sin t + 4 - \frac{8}{2+\sin t}\right)dt = -9\pi a^2 + 8a^2\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{2+\sin t}.$$

Поскольку функция $t \mapsto \frac{1}{2+\sin t}$, $t \in \mathbb{R}$, периодическая с периодом 2π, то, согласно примеру 51, имеем

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{2+\sin t} = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{2+\sin t} = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)}{\operatorname{tg}^2\frac{t}{2} + \operatorname{tg}\frac{t}{2} + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}+1}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_{-\pi+0}^{\pi-0} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Окончательно получаем, что $P = \pi a^2\left(\frac{16}{\sqrt{3}} - 9\right)$. ►

124. $x = 2t - t^2,\ y = 2t^2 - t^3$.

◄ Кривая ограничивающая плоскую фигуру, имеет точку самопересечения в начале координат, поэтому в примере речь идет о вычислении площади, ограниченной петлей кривой. Так как $x = y = 0$ при $t = 0$ и $t = 2$, то $0 \leqslant t \leqslant 2$.

Применив формулу (6), п. 6.2, получим

$$P = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 (t^4 - 4t^3 + 4t^2)\,dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t^5}{5} - t^4 + \frac{4}{3}t^3\right)\Bigg|_0^2 = \frac{8}{15}. \ ►$$

Найти площади плоских фигур Φ, ограниченных кривыми, заданными в полярных координатах:

125. $\rho = \frac{p}{1-\cos\varphi}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

◄ Применив формулу (3), п. 6.2, получим

$$P = \frac{p^2}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1-\cos\varphi)^2} = \frac{p^2}{4}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}\right) d\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right) =$$

$$= \frac{p^2}{4}\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3\frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{p^2}{4}(\sqrt{2} + \frac{1}{3}((\sqrt{2}+1)^3 - 1)) = \frac{p^2}{6}(4\sqrt{2}+3). \ ►$$

126. $\rho = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$, $0 < \varepsilon < 1$ (эллипс).

◄ Согласно формуле (3), п. 6.2, и решению примера 131, гл. 3, имеем

$$P = \frac{p^2}{2}\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} = \frac{p^2}{2(1-\varepsilon^2)}\left(-\varepsilon\frac{\sin x}{1+\varepsilon\cos x} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right]\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{\pi p^2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}. \ ►$$

127. $\rho = \frac{1}{\varphi}$, $\rho = \frac{1}{\sin\varphi}$, $0 < \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$.

◄ Множество точек $\left\{(\varphi, \rho) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{\varphi} \leqslant \rho \leqslant \frac{1}{\sin\varphi},\ 0 < \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$ не является плоской квадрируемой фигурой в обычном понимании, поэтому $P \overset{def}{=} \lim\limits_{\varepsilon\to+0} P(\varepsilon)$, где

$$P(\varepsilon) = \frac{1}{2}\int\limits_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin^2\varphi} - \frac{1}{\varphi^2}\right) d\varphi = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} + \frac{2}{\pi}\right) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Поскольку $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(\operatorname{ctg}\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\right) = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \frac{\varepsilon - \operatorname{tg}\varepsilon}{\varepsilon\operatorname{tg}\varepsilon} = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \frac{-\frac{\varepsilon^3}{3}}{\varepsilon^2} = 0$, то $P = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} P(\varepsilon) = \frac{1}{\pi}$. ►

128. $\rho = a\cos\varphi$, $\rho = a(\cos\varphi + \sin\varphi)$, $M\left(0, \frac{a}{2}\right) \in \Phi$.

◄ Точки окружности $\left\{\rho = a\cos\varphi,\ |\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$ симметричны относительно полярной оси, а радиус этой окружности равен $\frac{a}{2}$. Из неравенства $a\cos\varphi\sin\varphi < a(\cos\varphi + \sin\varphi)\sin\varphi$, справедливого при $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, следует, что полуокружность $\{\rho = a\cos\varphi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\}$ целиком принадлежит той части круга, ограниченного окружностью $\left\{\rho = a(\cos\varphi + \sin\varphi),\ -\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{4}\right\}$, которая лежит над полярной осью, поэтому точка M, лежащая на полярной оси и принадлежащая по условию фигуре Φ, не может принадлежать множеству точек

$$\left\{a\sin\varphi\cos\varphi \leqslant \rho\sin\varphi \leqslant a(\cos\varphi + \sin\varphi)\sin\varphi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Следовательно, фигура Φ является объединением полукруга $\left\{\rho \leqslant a\cos\varphi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$, площадь которого $\frac{\pi a^2}{8}$, и части Φ_1, круга $\left\{\rho \leqslant a(\cos\varphi + \sin\varphi),\ -\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{4}\right\}$, лежащей под полярной осью, площадь которой P_{Φ_1} вычисляется по формуле

$$P_{\Phi_1} = \frac{a^2}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0}(\cos\varphi + \sin\varphi)^2\,d\varphi = \frac{a^2}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0}(1+\sin 2\varphi)\,d\varphi = \frac{a^2}{2}\left(\varphi - \frac{\cos 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{0} = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right).$$

Таким образом, $P = \frac{\pi a^2}{8} + \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{a^2}{4}(\pi - 1)$. ►

129. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной лепестком кривой $(\varphi = \sin\pi\rho,\ 0 \leqslant \rho \leqslant 1)$.

◄ При возрастании ρ от 0 до $\frac{1}{2}$ угол φ возрастает от 0 до 1, а при возрастании ρ от $\frac{1}{2}$ до 1 угол φ убывает от 1 до 0 (рис. 65), поэтому выражение

$$\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}\rho^2(\varphi)\,d\varphi + \frac{1}{2}\int\limits_{1}^{0}\rho^2(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}\rho^2\varphi'(\rho)\,d\rho$$

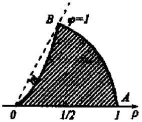


Рис. 65

определяет искомую площадь, взятую со знаком "−", так как первое слагаемое в левой части написанного равенства равно площади сегмента OmB, а второе слагаемое равно площади сектора OAB, взятой со знаком "−". Следовательно,

$$P = -\frac{\pi}{2}\int\limits_{0}^{1}\rho^2\cos\pi\rho\,d\rho = -\frac{\pi}{2}\left(\rho^2\frac{\sin\pi\rho}{\pi}\Bigg|_{0}^{1} - \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{1}\rho\sin\pi\rho\,d\rho\right) = \int\limits_{0}^{1}\rho\sin\pi\rho\,d\rho =$$

$$= \rho\frac{\cos\pi\rho}{\pi}\Bigg|_{1}^{0} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{1}\cos\pi\rho\,d\rho = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}\sin\pi\rho\Bigg|_{0}^{1} = \frac{1}{\pi}. \ ►$$

130. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной кривой

$$\gamma = \left\{(\varphi,\ \rho) \in \mathbb{R}^2 : \rho = \frac{2at}{1+t^2},\ \varphi = \frac{\pi t}{1+t}\right\}.$$

◄ Из условия $\rho \geqslant 0$ следует, что $t \geqslant 0$. Поскольку $\rho = 0$ при $t = 0$ и $\rho \to 0$ при $t \to +\infty$, то $0 \leqslant t < +\infty$. Следовательно,

$$P = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{+\infty}\rho^2(t)\varphi'(t)\,dt = 2\pi a^2\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^2(1+t)^2}.$$

Интегрируя с помощью метода Остроградского, получим

$$P = 2\pi a^2\left(-\frac{t^2+t+2}{4(1+t^2)(1+t)} - \frac{1}{4}\operatorname{arctg} t\right)\Bigg|_{0}^{+\infty} = 2\pi a^2\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \pi a^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right). \ ►$$

131. Найти площадь фигуры, ограниченной петлей листа Декарта $x^3 + y^3 = 3axy$.

◄ Параметризуем лист Декарта, полагая $y = tx$. Тогда параметрические уравнения петли листа Декарта примут вид

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}, \quad 0 \leqslant t < +\infty.$$

Для вычисления площади воспользуемся формулой (6), п. 6.2, приняв во внимание, что

$$(x(t)y'(t) - y(t)x'(t))\,dt = x^2(t)\,d\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right) = \frac{9a^2t^2}{(1+t^3)^2}\,dt.$$

Следовательно,

$$P = \frac{9a^2}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^2\,dt}{(1+t^3)^2} = \frac{3a^2}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{d(1+t^3)}{(1+t^3)^2} = \frac{3}{2}a^2\frac{1}{1+t^3}\bigg|_{+\infty}^{0} = \frac{3}{2}a^2. \ ►$$

132. Вычислить площадь фигуры, ограниченной замкнутой кривой, заданной уравнением $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$.

◄ Перейдем к полярным координатам по формулам

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi.$$

Поскольку кривая симметрична относительно осей координат, то $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Уравнение кривой, ограничивающей плоскую фигуру, принимает вид $\rho^2 = \frac{a^2}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}$.

Применяя формулы (3), п. 6.2, и принимая во внимание решение примера 23, получаем

$$P = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi} = \frac{a^2}{2}\cdot 2\sqrt{2}\,\pi = \pi\sqrt{2}\,a^2. \ ►$$

133. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной уравнением $x^4 + y^4 = ax^2y$.

◄ Параметризуем кривую, полагая $y = tx$. Тогда

$$x = a\frac{t}{1+t^4}, \qquad y = a\frac{t^2}{1+t^4}, \qquad y \geqslant 0.$$

Переменные x и y обращаются в нуль при $t = 0$ и стремятся к нулю при $t \to \infty$, а множество точек кривой

$$\gamma = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 : x = a\frac{t}{1+t^4},\ y = a\frac{t^2}{1+t^4},\ t \in \mathbb{R}\right\}$$

симметрично относительно оси Oy. Следовательно, плоская фигура ограничена двумя симметричными относительно оси Oy петлями, лежащими в верхней полуплоскости плоскости xOy, и поэтому искомая площадь равна удвоенной площади фигуры, ограниченной одной петлей:

$$P = \int\limits_0^{+\infty}(x(t)y'(t) - y(t)x'(t))\,dt = \int\limits_0^{+\infty}x^2(t)\,d\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right) = a^2\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^2\,dt}{(1+t^4)^2}.$$

С помощью подстановки $y = \frac{1}{x}$ легко убедиться в справедливости равенства

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{y^m\,dy}{(1+y^4)^n} = \int\limits_0^{+\infty}\frac{y^{4n-m-2}}{(1+y^4)^n}\,dy, \quad n \geqslant 1, \quad m \geqslant 0, \tag{1}$$

в силу которого имеем

$$I = \int\limits_0^{+\infty}\frac{t^2\,dt}{(1+t^4)^2} = \int\limits_0^{+\infty}\frac{t^4\,dt}{(1+t^4)^2} = -\frac{1}{4}\int\limits_0^{+\infty}t\,d\left(\frac{1}{1+t^4}\right) = -\frac{t}{4(1+t^4)}\bigg|_0^{+\infty} + \frac{1}{4}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^4} = \frac{1}{4}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^4}.$$

Поскольку $\frac{1}{4}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^4} = \frac{1}{4}\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^2\,dt}{1+t^4}$ (согласно равенству (1)), то

$$I = \frac{1}{8}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1+t^2}{1+t^4}\,dt = \frac{1}{8}F(t)\bigg|_0^{+\infty},$$

где $F(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t^2-1}{t\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \operatorname{sgn} t$ при $t \neq 0$ и $F(0) = 0$ (см. пример 20, гл. 3). Окончательно получаем

$$I = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}, \quad P = \frac{\pi a^2}{8\sqrt{2}}. \blacktriangleright$$

Прежде чем решать примеры на вычисление объемов тел с помощью формул (1) и (2), п. 6.3, рассмотрим два примера на доказательство. При этом получим полезные формулы для вычисления объемов тел.

134. Доказать, что объем V тела T, образованного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции

$$\Phi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b, \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)\},$$

где $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная на сегменте функция, равен

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx.$$

◀ Пусть $\Pi = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ — произвольное разбиение сегмента $[a, b]$. На каждом сегменте $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$, рассмотрим два прямоугольника, в основании каждого из которых лежит сегмент $[x_i, x_{i+1}]$, а боковые стороны равны m_i и M_i, где

$$m_i = \min_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}} (f(x)), \quad M_i = \max_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}} \{f(x)\}.$$

Объединения всех однотипных прямоугольников образуют две ступенчатые фигуры, одна из которых вписана в фигуру Φ, а другая описана вокруг нее. При вращении этих ступенчатых фигур вокруг оси Oy получим два кубируемых тела T_1 и T_2, составленные из кольцевых цилиндров.

Объемы тел T_1 и T_2 соответственно равны

$$V_{T_1} = \sum_{i=0}^{n-1} \pi m_i (x_{i+1}^2 - x_i^2) = \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi m_i \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \Delta x_i, \quad V_{T_2} = \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi M_i \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \Delta x_i.$$

Рассмотрим функцию $\varphi : x \mapsto 2\pi x f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Так как $\varphi \in R[a, b]$, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \Pi : \overline{S}_\Pi(\varphi) - \underline{S}_\Pi(\varphi) < \frac{\varepsilon}{2}$, где $\overline{S}_\Pi(\varphi) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} 2\pi M_i x_{i+1} \Delta x_i$, $\underline{S}_\Pi(\varphi) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} 2\pi m_i x_i \Delta x_i$.

Из очевидных равенств

$$V_{T_1} = \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi m_i x_i \Delta x_i + \sum_{i=0}^{n-1} \pi m_i \Delta x_i^2 = \underline{S}_\Pi(\varphi) + \sum_{i=0}^{n-1} \pi m_i \Delta x_i^2,$$

$$V_{T_2} = \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi M_i x_{i+1} \Delta x_i - \sum_{i=0}^{n-1} \pi M_i \Delta x_i^2 = \overline{S}_\Pi(\varphi) - \sum_{i=0}^{n-1} \pi M_i \Delta x_i^2$$

следует, что $V_{T_2} - V_{T_1} = \overline{S}_\Pi(\varphi) - \underline{S}_\Pi(\varphi) - \gamma_n$, где $\gamma_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \pi(M_i + m_i)\Delta x_i^2$. Оценивая γ_n, получаем $|\gamma_n| \leqslant 2\pi M(b-a)\, d(\Pi)$, где $M = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} \{f(x)\}$, $d(\Pi) = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \Delta x_i$.

Принимая во внимание неравенство $\overline{S}_\Pi(\varphi) - \underline{S}_\Pi(\varphi) < \frac{\varepsilon}{2}$ и выбирая разбиение Π таким, чтобы выполнялось неравенство $2\pi M(b-a)\, d(\Pi) < \frac{\varepsilon}{2}$, получим неравенство $V_{T_2} - V_{T_1} < \varepsilon$, из которого следует, что тело T кубируемо (в силу включений $T_1 \subset T \subset T_2$).

Поскольку $\lim\limits_{d(\Pi) \to 0} V_{T_1} = 2\pi \int\limits_a^b x f(x)\, dx$, $\lim\limits_{d(\Pi) \to 0} V_{T_2} = 2\pi \int\limits_a^b x f(x)\, dx$, то $V = 2\pi \int\limits_a^b x f(x)\, dx$. ▶

135. Доказать, что объем V тела T, образованного вращением вокруг полярной оси фигуры $\Phi = \{(\varphi, \rho) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta \leqslant \pi,\ \rho = \rho(\varphi),\ \rho \geqslant 0\}$, $\rho \in C[\alpha, \beta]$, равен

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_\alpha^\beta \rho^3(\varphi) \sin\varphi\, d\varphi. \tag{1}$$

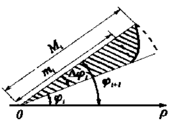


Рис. 66

◀ Пусть $\Pi = \{\varphi_0 = \alpha,\ \varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_n = \beta\}$ — произвольное разбиение сегмента $[\alpha, \beta]$, а Φ_i — плоская фигура, ограниченная отрезками лучей $\varphi = \varphi_i$, $\varphi = \varphi_{i+1}$ и куском кривой $\varphi \mapsto \rho(\varphi)$, $\varphi_i \leqslant \varphi \leqslant \varphi_{i+1}$ (рис. 66).

Обозначим $M_i = \max\limits_{\varphi_i \leqslant \varphi \leqslant \varphi_{i+1}} \{\rho(\varphi)\}$, $m_i = \min\limits_{\varphi_i \leqslant \varphi \leqslant \varphi_{i+1}} \{\rho(\varphi)\}$ и рассмотрим два тела T_1 и T_2, образованных вращением вокруг полярной оси двух плоских фигур, составленных из круговых секторов, имеющих соответственно радиусы M_i и m_i и центральный угол $\Delta\varphi_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i$, $i = \overline{0, n-1}$. Из определения тел T, T_1 и T_2 следуют включения $T_2 \subset T \subset T_1$.

Вычислим объемы тел T_1 и T_2, используя для этого известную из геометрии формулу для вычисления объема шарового сектора, имеющую вид $V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$, где h — высота шарового сегмента, R — радиус шара. Имеем

$$V_{T_1} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2}{3}\pi M_i^3 (\cos\varphi_i - \cos\varphi_{i+1}) = \frac{4}{3}\pi \sum_{i=0}^{n-1} M_i^3 \sin\frac{\varphi_i + \varphi_{i+1}}{2} \sin\frac{\Delta\varphi_i}{2},$$

$$V_{T_2} = \frac{4}{3}\pi \sum_{i=0}^{n-1} m_i^3 \sin\frac{\varphi_i + \varphi_{i+1}}{2} \sin\frac{\Delta\varphi_i}{2}.$$

Обозначим $\frac{\varphi_i + \varphi_{i+1}}{2} = \bar{\varphi}_i$, $\sin\hat{\varphi}_i = \max\limits_{\varphi_i \leqslant \varphi \leqslant \varphi_{i+1}} \{\sin\varphi\}$, $\sin\check{\varphi} = \min\limits_{\varphi_i \leqslant \varphi \leqslant \varphi_{i+1}} (\sin\varphi)$ и рассмотрим разность объемов

$$V_{T_1} - V_{T_2} = \frac{4}{3}\pi \sum_{i=0}^{n-1} (M_i^3 - m_i^3) \sin\bar{\varphi}_i \sin\frac{\Delta\varphi_i}{2}.$$

Из неравенств $(M_i^3 - m_i^3)\sin\bar{\varphi}_i \leqslant M_i^3 \sin\hat{\varphi}_i - m_i^3 \sin\check{\varphi}_i$, $\sin\frac{\Delta\varphi_i}{2} < \frac{\Delta\varphi_i}{2}$ следует неравенство

$$V_{T_1} - V_{T_2} < \frac{2\pi}{3} \sum_{i=0}^{n-1} (M_i^3 \sin\hat{\varphi}_i - m_i^3 \sin\check{\varphi}_i)\, \Delta\varphi_i = \overline{S}_\Pi(f) - \underline{S}_\Pi(f),$$

где $f : \varphi \mapsto \frac{2\pi}{3}\rho^3(\varphi)\sin\varphi$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, — непрерывная на сегменте $[\alpha, \beta]$ функция. Так как $f \in R[\alpha, \beta]$, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \Pi : 0 \leqslant \overline{S}_\Pi(f) - \underline{S}_\Pi(f) < \varepsilon$, следовательно, $V_{T_1} - V_{T_2} < \varepsilon$. Таким образом, тело T кубируемо, а его объем V можно вычислить по формуле (1), так как

$$\lim_{d(\Pi)\to 0} V_{T_1} = \lim_{d(\Pi)\to 0} V_{T_2} = \frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta \rho^3(\varphi)\sin\varphi\, d\varphi. \ ▶$$

Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями:

136. Параболоида вращения, площадь основания которого равна S, а высота равна H

◀ Воспользуемся формулой (2), п. 6.3. Поверхность параболоида вращения задана уравнением $z = x^2 + y^2$, а в любом ортогональном сечении тела плоскостью $z = c$, $0 < c < H$, получим круг $x^2 + y^2 \leqslant c$. Таким образом, множество сечений тела, ограниченного поверхностью $z = x^2 + y^2$, является множеством кругов радиуса z, площади $P(z)$ которых равны πz. Согласно формуле (2), п. 6.3, получим

$$V = \pi \int_0^H z\, dz = \frac{\pi H^2}{2} = \frac{SH}{2},$$

так как, согласно условию, $\pi H = S$. ▶

137. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $z = \pm c$.

◀ Тело ограничено однополостным гиперболоидом и кусками плоскостей $z = \pm c$ В силу симметрии точек тела относительно плоскости xOy, достаточно вычислить объем части тела, лежащей в полупространстве $z \geqslant 0$, и удвоить результат.

В ортогональном сечении тела плоскостью $z = c_1$, $0 < c_1 < c$, получаем эллипс $\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1+\frac{c_1^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1+\frac{c_1^2}{c^2}}\right)^2} = 1$, поэтому площадь $P(z)$ поперечного сечения тела плоскостью, согласно решению примера 119, равна $\pi ab\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)$. Применив формулу (2), п. 6.3, получим

$$V = 2\int\limits_0^c P(z)\,dz = 2\pi ab\int\limits_0^c \left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)dz = \frac{8}{3}\pi abc. \ ▶$$

138. $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=ax$.

◀ Тело ограничено частью поверхности кругового цилиндра и двумя кусками сферы, а плоскость xOy делит его на две равные части. Поэтому рассмотрим ту часть тела, которая лежит в полупространстве $z \geqslant 0$. В сечении этой части тела плоскостью, перпендикулярной к оси Ox, получим криволинейную трапецию, площадь $P(x)$ которой вычисляется по формуле

$$P(x) = 2\int\limits_0^{\sqrt{ax-x^2}} \sqrt{(a^2-x^2)-y^2}\,dy.$$

Тогда искомый объем V получим, применив формулу (2), п. 6.3:

$$V = 2\int\limits_0^a P(x)\,dx.$$

Вычислим сначала $P(x)$, произведя в интеграле подстановку $t = \arcsin\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}$:

$$P(x) = 2\int\limits_0^{\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}} (a^2-x^2)\cos^2 t\,dt = (a^2-x^2)\left(\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}} + \frac{\sqrt{ax}}{a+x}\right).$$

Подставляя полученное $P(x)$ в формулу для вычисления объема V, находим

$$V = 2\int\limits_0^a (a^2-x^2)\left(\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}} + \frac{\sqrt{ax}}{a+x}\right)dx = 2(I_1+I_2),$$

где

$$I_1 = \int\limits_0^a (a^2-x^2)\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}\,dx, \quad I_2 = \int\limits_0^a (a-x)\sqrt{ax}\,dx = \frac{4}{15}a^3.$$

В интеграле I_1 произведем замену $x = a\,\mathrm{tg}^2\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$, получим

$$I_1 = a^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \varphi(1-\mathrm{tg}^4\varphi)\,d(\mathrm{tg}^2\varphi) = a^3\left(\varphi\left(\mathrm{tg}^2\varphi - \frac{\mathrm{tg}^6\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\mathrm{tg}^2\varphi - \frac{\mathrm{tg}^6\varphi}{3}\right)d\varphi\right) =$$

$$= a^3\left(\frac{\pi}{6} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}-1\right)d\varphi + \frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}(\mathrm{tg}^4\varphi - \mathrm{tg}^2\varphi+1)\,d(\mathrm{tg}\,\varphi) - \frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\right) =$$

$$= a^3\left(\frac{\pi}{3} - 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+1\right)\right) = \frac{a^3}{3}\left(\pi - \frac{32}{15}\right).$$

Окончательно имеем

$$V = 2a^3\left(\frac{4}{15} + \frac{\pi}{3} - \frac{32}{45}\right) = \frac{2}{3}a^3\left(\pi - \frac{4}{3}\right). \blacktriangleright$$

139. Найти объем тела, ограниченного поверхностью, полученной в результате вращения графика функции $x^2 + (y-b)^2 = a^2$, $|x| \leqslant a$, $0 < a < b$, вокруг оси Ox.

◀ Вращающаяся окружность радиуса a с центром в точке $(0, b)$ имеет две оси симметрии: ось Oy и прямую $y = b$. Уравнения верхней и нижней частей окружности относительно прямой $y = b$ имеют соответственно вид

$$y_{\text{В}} = b + \sqrt{a^2 - x^2}, \quad y_{\text{Н}} = b - \sqrt{a^2 - x^2}, \quad |x| \leqslant a.$$

Применив формулу (1), п. 6.3, получим

$$V = \pi\int_{-a}^{a}(y_{\text{В}}^2 - y_{\text{Н}}^2)\,dx = 8\pi b\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = 8\pi a^2 b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt = 2\pi^2 a^2 b. \quad \blacktriangleright$$

140. Найти объем тела, ограниченного поверхностью, полученной в результате вращения графиков функций $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, и $y = 0$:

1) вокруг оси Ox; 2) вокруг оси Oy; 3) вокруг прямой $y = 2a$.

◀ 1) Применив формулу (1), п. 6.3, получим

$$V = \pi\int_0^{2\pi a} y^2\,dx = \pi a^3\int_0^{2\pi}(1 - \cos t)^3\,dt = 8\pi a^3\int_0^{2\pi}\sin^6\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= 16\pi a^3\int_0^{\pi}\sin^6 z\,dz = 32\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 z\,dz = 32\pi a^3\frac{5!!}{6!!}\cdot\frac{\pi}{2} = 5\pi^2 a^3$$

(здесь воспользовались решением примера 43).

2) Объем тела вычислим по формуле, доказанной в примере 134:

$$V = 2\pi\int_0^{2\pi a} xy\,dx = 2\pi a^3\int_0^{2\pi}(t - \sin t)(1 - \cos t)^2\,dt =$$

$$= 2\pi a^3\left(\int_0^{2\pi} t(1 - \cos t)^2\,dt - \int_0^{2\pi}\sin t(1 - \cos t)^2\,dt\right) = 2\pi a^3\int_0^{2\pi} t(1 - \cos t)^2\,dt =$$

$$= 2\pi a^3\int_0^{2\pi} t\left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{\cos 2t}{2}\right)dt = 3\pi a^3\int_0^{2\pi} t\,dt = 6\pi^3 a^3$$

(здесь мы приняли во внимание равенства $\int\limits_0^{2\pi}\sin t(1 - \cos t)^2\,dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin t(1 - \cos t)^2\,dt = 0$, $\int\limits_0^{2\pi} t\left(-2\cos t + \frac{\cos 2t}{2}\right)dt = 0$.)

3) Перейдем к новой системе координат по формулам $y_1 = y - 2a$, $x_1 = x$. При этом получим $V = V_1 - V_2$, где V_1 — объем кругового цилиндра, высота которого равна $2\pi a$ и радиус основания равен $2a$, а объем V_2 вычисляется по формуле

$$V_2 = \pi\int_0^{2\pi a} y_1^2\,dx = \pi a^3\int_0^{2\pi}((1 - \cos t)^2 - 4(1 - \cos t) + 4)(1 + \cos t)\,dt = \pi^2 a^3.$$

Поскольку $V_1 = 8\pi^2 a^3$, то $V = 7\pi^2 a^3$. ►

141. Найти объем тела, образованного вращением плоской фигуры, ограниченной петлей кривой $\gamma = \{x = 2t - t^2,\ y = 4t - t^3,\ t \in \mathbb{R}\}$, вокруг: 1) оси Ox; 2) оси Oy.

◄ 1) Поскольку $x = y = 0$ при $t = 0$ и при $t = 2$, то $0 \leqslant t \leqslant 2$. При возрастании параметра t от 0 до 1 переменная x также возрастает от 0 до 1, а при возрастании t от 1 до 2 переменная x убывает от 1 до 0, поэтому

$$V = -\pi \int_1^2 y^2\,dx - \pi \int_0^1 y^2\,dx = -\pi \int_0^2 y^2\,dx = 2\pi \int_0^2 (t-1)(16t^2 - 8t^4 + t^6)\,dt = \frac{64}{35}\pi.$$

2) Для вычисления объема воспользуемся формулой примера 134 и примем во внимание соображения, высказанные при рассмотрении случая 1). Тогда получим

$$V = -2\pi \int_1^2 xy\,dx - 2\pi \int_0^1 xy\,dx = -2\pi \int_0^2 xy\,dx = ll = -2\pi \int_0^2 (2t - t^2)(4t - t^3)2(1-t)\,dt = \frac{64}{105}\pi. \blacktriangleright$$

142. Найти объем тела, образованного вращением плоской фигуры, ограниченной графиком неявно заданной функции $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, вокруг: 1) оси Ox; 2) оси Oy; 3) прямой $y = x$.

◄ 1) Перейдем к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Уравнение кривой имеет вид $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $|\varphi - k\pi| \leqslant \frac{\pi}{4}$, $k = 0, 1$. Принимая во внимание симметрию точек кривой относительно полярной оси и прямой $\rho\cos\varphi = 0$, воспользуемся решением примера 135. При этом получим

$$V = \frac{4}{3}\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^3 \cos^{\frac{3}{2}} 2\varphi \sin\varphi\,d\varphi = \frac{4\pi a^3}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} (2\cos^2\varphi - 1)^{\frac{3}{2}}\,d(\cos\varphi) =$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \int_1^{\sqrt{2}} (t^2 - 1)^{\frac{3}{2}}\,dt = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \left(\frac{t}{4}(t^2-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{8}t\sqrt{t^2-1} + \frac{3}{8}\ln(t + \sqrt{t^2-1}) \right)\Bigg|_1^{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \left(\frac{3}{8}\ln(1+\sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{8} \right) = \frac{\pi a^3}{4} \left(\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2}) - \frac{2}{3} \right).$$

2) Возьмем луч $\varphi = \frac{\pi}{2}$ в качестве полярной оси системы (ρ', θ) (рис. 67). Тогда $\rho'(\theta) = \rho(\varphi)$, $\theta = -\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \varphi - \frac{\pi}{2}$.

Применим теперь формулу, доказанную в примере 135, приняв при этом во внимание, что плоская фигура симметрична и что $\sin\theta < 0$. Имеем

Рис. 67

$$V = \frac{4\pi}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} (\rho'(\theta))^3 |\sin\theta|\,d\theta = \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}} \left|\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right|\,d\varphi =$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{\frac{3}{2}} 2\varphi \cos\varphi\,d\varphi = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - 2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}\,d(\sqrt{2}\sin\varphi) =$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \int_0^1 (1 - t^2)^{\frac{3}{2}}\,dt = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 z\,dz = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{3!!}{4!!} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}.$$

3) Возьмем луч $\varphi = \frac{\pi}{4}$ в качестве полярной оси системы (ρ', θ) (рис. 68). При этом имеем $\rho'(\theta) = \rho(\varphi)$, $\theta = \varphi - \frac{\pi}{4}$.

Принимая во внимание симметрию фигуры и неравенство $\sin\theta \leqslant 0$, согласно формуле примера 135, получим

$$V = \frac{4\pi}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (\rho'(\theta))^3 |\sin\theta|\, d\theta = \frac{4\pi a^3}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^{\frac{3}{2}} 2\varphi \left|\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\right| d\varphi.$$

Произведем в интеграле подстановку $\varphi - \frac{\pi}{4} = -t$. При этом имеем

$$V = \frac{4\pi a^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} 2t \sin t\, dt = \frac{8\sqrt{2}\pi a^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{1}{2}} t \sin^{\frac{5}{2}} t\, d(\sin t) = \frac{8\sqrt{2}}{3}\pi a^3 \int\limits_0^1 z^{\frac{5}{2}}(1-z^2)^{\frac{1}{4}}\, dz$$

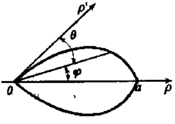


Рис. 68

После замены $\frac{1}{z^2} - 1 = u^4$ находим, что $V = \frac{16\sqrt{2}}{3}\pi a^3 I$, где

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{u^4}{(1+u^4)^3}\, du = \int\limits_0^{+\infty} \frac{u^6}{(1+u^4)^3}\, du$$

(согласно решению примера 133).

Интегрируя по частям, получаем

$$I = -\frac{1}{8}\cdot\frac{u^3}{(1+u^4)^2}\Bigg|_0^{+\infty} + \frac{3}{8}\int\limits_0^{+\infty} \frac{u^2\, du}{(1+u^4)^2} = \frac{3}{8}\int\limits_0^{+\infty} \frac{u^2\, du}{(1+u^4)^2}.$$

При решении примера 133 показано, что $\int\limits_0^{+\infty} \frac{u^2\, du}{(1+u^4)^2} = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}$. Следовательно, $I = \frac{3\pi}{64\sqrt{2}}$, $V = \frac{\pi^2 a^3}{4}$. ▶

Упражнения для самостоятельной работы

Вычислить длину кривой γ, если:

105. $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \ln x,\ \sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{8}\}$.

106. $\gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = a \operatorname{ch}\frac{x}{a},\ 0 \leqslant x \leqslant x_0,\ a > 0\right\}$.

107. $\gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = a \ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y} - \sqrt{a^2-y^2},\ b \leqslant y \leqslant a\right\}$.

108. $\gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},\ |x| \leqslant a\right\}$.

109. $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = a\cos^5 t,\ y = a\sin^5 t,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\}$.

110. $\gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt,\ 0 \leqslant t \leqslant t_0\}$.

111. $\gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 = 3y,\ 2xy = 9z,\ 0 \leqslant x \leqslant x_0\}$.

112. $\gamma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = a\arcsin\frac{x}{a},\ z = \frac{a}{4}\ln\frac{a+x}{a-x},\ 0 \leqslant x \leqslant x_0\right\}$.

113. $\gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = at,\ y = \sqrt{3ab}\,t^2,\ z = 2bt^3,\ 0 \leqslant t \leqslant t_0\}$.

114. Найти длину кривой, заданной уравнением $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, от точки $(0, a)$ до точки $(a, 0)$.

115. Парабола $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4ay = x^2,\ x \in \mathbb{R}\}$ катится по оси Ox. Доказать, что ее фокус описывает цепную линию

$$\gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a},\ x \in \mathbb{R}\right\}.$$

Найти площадь плоской фигуры Φ, ограниченной:

116. Графиком астроиды $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

117. Графиком функции, заданной уравнением $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.

118. Графиком подэры эллипса $(x^2+y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$.

119. Графиками функций $y^2 = 4ax$, $x^2+y^2 = 2ax$, $2x - y = 4a$ и лежащей над осью Ox.

120. Петлей строфоиды $(a-x)y^2 = (a+x)x^2$.

121. Графиком функции, заданной уравнением $(y-x)^2 = x^3$ и отрезком оси Ox.

122. Графиком функции, заданной уравнением $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$, и отрезками осей координат.

123. Эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ и лежащей вне круга $x^2 + y^2 = ab$.

124. Графиком кривой, заданной уравнением $\rho = a \cos 4\varphi$.

125. Графиком равнобочной гиперболы $\rho^2 \cos 2\varphi = a^2$, $-\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$.

126. Графиками функций, заданных уравнениями $\rho^2 \cos 2\varphi = 4a^2 \cos^4 \varphi$ и $\rho^2 \cos 2\varphi = a^2$.

127. Петлей кривой, определяемой уравнением $x^7 + y^7 = ax^3y^3$.

128. Графиком функции, заданной уравнением $x^2y^2 = 4(x-1)$ и прямой, проходящей через точку перегиба графика.

129. Вычислить площадь криволинейного квадрата, принадлежащего обоим эллипсам

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1, \qquad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} \leqslant 1.$$

Найти объемы тел, ограниченных поверхностями, полученными в результате вращения следующих кривых:

130. $\gamma = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi)$ вокруг оси Ox.

131. $\gamma = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 : (2a - x)y^2 = x^3,\ 0 \leqslant x < a \leqslant 2)$ вокруг оси Ox.

132. $\gamma = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 : x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi a\}$ вокруг пересекающей ее прямой $y = ka$, $0 < k < 2$ (вычислить объемы получающихся двух тел вращения).

133. $\gamma = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{4a^3}{x^2+4a^2},\ x \in \mathbb{R}\right\}$ вокруг своей асимптоты.

134. Кривая, заданная уравнением $\rho^3 = a^3 \cos 3\varphi$, вращается вокруг полярной оси. Определить объем тела, полученного в результате вращения фигуры, ограниченной петлей, лежащей в третьем квадранте.

135. Сегмент круга радиуса R, соответствующий центральному углу 2α, вращается вокруг своей хорды. Определить объем тела вращения.

136. Куб с ребром a вращается вокруг своей диагонали. Определить объем тела, полученного в результате вращения одной из граней куба.

137. Ребро куба a. Определить объем тела, полученного в результате вращения одной из граней куба вокруг диагонали противоположной грани.

138. Кривая, заданная уравнением $x^4 + y^4 = 2axy^2$, вращается вокруг оси Oy. Определить объем тела, ограниченный полученной поверхностью вращения.

Найти объемы тел, ограниченных поверхностями:

139. $S = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 = 8z,\ x^2 + 4y^2 = 1,\ z = 0\}$.

140. $S = ((x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 = 2p(a - x),\ x - z = 0,\ x - 2z = 0)$.

141. $S = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = (a - x - y)a,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0)$.

142. $S = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = b(a - x),\ x^2 + y^2 = ax\}$.

143. $S = \left\{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a},\ -b \leqslant x \leqslant b\right)$.

144. В прямой круговой цилиндр (стакан) радиуса r налита вода. Ось наклонена под углом α к горизонту. Часть дна, покрытая водой, является сегментом с центральным углом 2φ. Найти объем воды.

145. Три взаимно перпендикулярные прямые являются осями трех круговых цилиндров одинакового радиуса r. Определить объем общей части всех трех цилиндров.

§ 7. Общая схема применения определенного интеграла. Задачи из механики и физики

7.1. Аддитивная функция промежутка.

Если всякому сегменту $[\alpha, \beta]$, содержащемуся в фиксированном сегменте $[a, b]$, отвечает значение определенной физической или геометрической величины $P([\alpha, \beta])$, то P называют *функцией промежутка*.

Определение. *Функция* $P : [\alpha, \beta] \mapsto P([\alpha, \beta])$, $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, *называется аддитивной, если*

$$\forall \gamma \in]\alpha, \beta[\Rightarrow P([\alpha, \beta]) = P([\alpha, \gamma]) + P([\gamma, \beta]).$$

Теорема. *Пусть* $P : [\alpha, \beta] \mapsto P([\alpha, \beta])$, $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, — *аддитивная функция*, а $p : [a, b] \to \mathbb{R}$, $p \in C[a, b]$, *такая функция, что* $P([x_0, x]) = p(x - x_0) + o((x - x_0))$, $x \to x_0$, $\forall x_0 \in [a, b]$. *Тогда справедлива формула*

$$P([a, b]) = \int\limits_a^b p(x)\, dx. \tag{1}$$

7.2. Вычисление статических моментов, моментов инерции, координат центра тяжести плоских кривых и фигур.

Пусть $\{M_j(x_j, y_j)\}$ — система материальных точек плоскости xOy с массами m_j, $j = \overline{1, n}$. Величины

$$M_x = \sum_{j=1}^{n} m_j y_j, \qquad I_x = \sum_{j=1}^{n} m_j y_j^2,$$

называются соответственно *статическим моментом и моментом инерции* этой системы точек относительно оси Ox.

Если на гладкой кривой $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x),\ a \leqslant x \leqslant b\}$ равномерно распределена масса с линейной плотностью $\mu \equiv 1$, то статическими моментами и моментами инерции кривой γ относительно осей координат называются соответственно величины

$$M_x = \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx, \qquad M_y = \int\limits_a^b x\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx, \tag{1}$$

$$I_x = \int\limits_a^b f^2(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx, \qquad I_y = \int\limits_a^b x^2\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx, \tag{2}$$

а координаты ее центра тяжести $C(\xi, \eta)$ вычисляются по формулам

$$\xi = \frac{M_y}{l}, \qquad \eta = \frac{M_x}{l}, \tag{3}$$

где l — длина кривой γ.

Предположим, что криволинейная трапеция Φ лежит по одну сторону оси Ox и что она однородна. Статическими моментами и моментами инерции этой трапеции относительно осей Ox и Oy называются соответственно величины

$$M_x = \frac{\operatorname{sgn} f(x)}{2} \int\limits_a^b f^2(x)\, dx, \qquad M_y = \operatorname{sgn} f(x) \int\limits_a^b x f(x)\, dx, \tag{4}$$

$$I_x = \frac{1}{3} \int\limits_a^b f^2(x)|f(x)|\, dx, \qquad I_y = \int\limits_a^b x^2|f(x)|\, dx, \tag{5}$$

а координаты ее центра тяжести $C(\xi, \eta)$ вычисляются по формулам

$$\xi = \frac{M_y}{P}, \quad \eta = \frac{M_x}{P}, \tag{6}$$

где P — площадь трапеции.

Если плоская однородная фигура имеет ось симметрии, то ее центр тяжести лежит на этой оси.

143. Определить координаты центра тяжести плоской фигуры

$$\Phi = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1, \ 0 \leqslant x \leqslant a, \ 0 \leqslant y \leqslant b\right\}.$$

◀ Применяя последовательно формулы (4) и (6), получим

$$M_x = \frac{b^2}{2}\int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{b^2}{2}\left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_0^a = \frac{ab^2}{3},$$

$$M_y = b\int_0^a x\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, dx = \frac{ba^2}{3}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_a^0 = \frac{a^2 b}{3},$$

$$\xi = M_y : \frac{\pi ab}{4} = \frac{4a}{3\pi}, \quad \eta = M_x : \frac{\pi ab}{4} = \frac{4b}{3\pi}$$

(поскольку площадь фигуры Φ равна πab). ▶

144. Найти моменты инерции I_x и I_y параболического сегмента Φ, ограниченного графиком функции $x \mapsto \frac{2ax - x^2}{a}$, $0 \leqslant x \leqslant 2a$, и отрезком оси Ox.

◀ Согласно формулам (5), имеем

$$I_x = \frac{1}{3a^3}\int_0^{2a} (2ax - x^2)^3\, dx = \frac{32}{105}a^4, \quad I_y = \int_0^{2a} x^2\left(2x - \frac{x^2}{a}\right) dx = \frac{8}{5}a^4. \ ▶$$

145. Найти координаты центра тяжести однородного полушара радиуса a.

◀ Ось $0z$ является осью симметрии полушара

$$T = \left((x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2, \ z \geqslant 0\right),$$

поэтому центр тяжести находится на этой оси. Приняв шаровой пояс, нижнее основание которого находится на расстоянии z от плоскости xOy и высота которого равна dz, за цилиндр, высота которого равна высоте шарового пояса, а основание равно нижнему основанию шарового пояса (кругу радиуса $r = \sqrt{a^2 - z^2}$), вычислим приближенно статический момент dM шарового пояса относительно плоскости xOy, равный $\pi(a^2 - z^2)z\,dz$. Тогда

$$M = \pi\int_0^a z(a^2 - z^2)\, dz = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Поскольку объем полушара равен $\frac{2}{3}\pi a^2$, то

$$\zeta = \frac{3M}{2\pi a^3} = \frac{3}{8}a.$$

Следовательно, $C(\xi, \eta, \zeta) = \left(0, 0, \frac{3}{8}a\right)$. ▶

146. Определить силу давления воды на вертикальную перегородку в канале, имеющую форму полукруга радиуса a, диаметр которого находится на поверхности воды

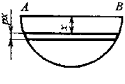


Рис. 69

◀ Обозначим через $l(x)$ длину горизонтальной прямой, проведенной на расстоянии x от AB (рис. 69). Приняв полоску, содержащуюся между горизонтальными прямыми, отстоящими от AB на расстояниях x и $x + dx$, за прямоугольник с основанием $l(x)$ и высотой dx, можем приближенно вычислить давление $P([x, x + dx])$, испытываемое этой полоской, применив правило гидростатики, согласно которому давление воды на полоску, погруженную в нее, равно площади полоски, умноженной на глубину погружения:

$$P([x, x+dx]) \approx xl(x)\,dx = 2x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

Согласно формуле (1), п. 7.1, имеем

$$P = 2\int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{2}{3}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_a^0 = \frac{2}{3}a^3. \ ▶$$

147. Диск толщиной h и радиусом r состоит из вещества с плотностью δ и совершает n оборотов в секунду. Какую работу нужно затратить, чтобы его затормозить?

◀ Согласно теореме об изменении кинетической энергии, ее приращение за некоторый промежуток времени равно работе, совершенной приложенными к телу силами за тот же промежуток времени:

$$T - T_0 = A.$$

Здесь T — кинетическая энергия в конечный момент, T_0 — начальная кинетическая энергия тела, A — работа внешних сил. Поскольку тело абсолютно твердое, то работа внутренних сил равна нулю.

В конце промежутка времени тело остановилось, значит, $T = 0$. Следовательно, $T_0 = -A$. Знак минус соответствует затрачиваемой работе.

При вычислении кинетической энергии выделим кольцевой цилиндр радиуса ρ, $0 < \rho \leqslant r$, толщина которого $d\rho$ и высота h. Его объем с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем $d\rho$, равен $2\pi h\rho\, d\rho$, а масса dm равна $2\pi\delta h\rho\, d\rho$ (рис. 70).

Рис. 70

Линейная скорость v точек диска, находящихся на расстоянии ρ от оси вращения, равна $\omega\rho$; где ω — угловая скорость диска. Так как диск совершает n оборотов в секунду, то $\omega = 2\pi n$ c^{-1}. Следовательно, $v = 2\pi n\rho$. Кинетическая энергия кольцевого цилиндра приближенно равна

$$dT_0 = \frac{v^2}{2}\,dm = \frac{1}{2}\,\omega^2\rho^2\,dm = \pi\delta\omega^2 h\rho^3\,d\rho.$$

Согласно общей схеме применения интеграла, получаем

$$T_0 = \pi\delta h\int_0^r \omega^2\rho^3\,d\rho = 4\pi^3\delta n^2 h\int_0^r \rho^3\,d\rho = \pi^3\delta n^2 h r^4.$$

Следовательно, $A = -T_0 = -\pi^3\delta n^2 h r^4$. ▶

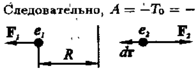


Рис. 71

148. Электрические заряды отталкивают друг друга с силой $\frac{e_1 e_2}{r^2}$, где e_1 и e_2 — величины зарядов, а r — расстояние между ними. Определить работу, необходимую для того, чтобы приблизить заряд $e_2 = 1$ к заряду e_1 из бесконечности на расстояние, равное R.

◀ Элементарная работа dA равна произведению силы на элементарное перемещение и на косинус угла между направлением силы и направлением перемещения: $dA = F\cos\alpha\,dr$ (рис. 71). В рассматриваемом случае имеем $dA = F_2\,dr\cos\pi = -F_2\,dr = -\frac{e_1}{r^2}\,dr$, так как $F_2 = \frac{e_1}{r^2}$. Согласно общей схеме применения интеграла, находим

$$A = -e_1\int_\infty^R \frac{dr}{r^2} = \frac{e_1}{r}\Big|_\infty^R = \frac{e_1}{R}. \ ▶$$

Упражнения для самостоятельной работы

140. Однородная прямоугольная пластина со сторонами a и b разбивается на две части параболой, вершина которой совпадает с одной из вершин прямоугольника и проходит через его противоположную вершину. Найти центры тяжести верхней S_1 и нижней S_2 частей прямоугольника.

147. Найти координаты центра тяжести однородной фигуры, ограниченной осями координат и параболой $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

148. Найти статический момент однородной фигуры, ограниченной графиками функций $x \mapsto \frac{2}{1+x^2}$ и $x \mapsto x^2$, $x \in \mathbb{R}$, относительно оси Ox.

149. Найти координаты центра тяжести однородной фигуры, ограниченой графиком функции, заданной уравнением $y^2 = ax^3 - x^4$.

150. Найти декартовы координаты центра тяжести однородной фигуры, ограниченной графиком правой петли лемнискаты Бернулли $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

151. Найти декартовы координаты центра тяжести части логарифмической спирали $\rho = ae^{\varphi}$, $\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

152. Найти момент инерции боковой поверхности конуса, радиус основания которого R и высота H, относительно его оси симметрии.

153. Найти положение центра тяжести однородного конуса.

154. Радиусы оснований усеченного прямого кругового конуса равны R и r, высота h, плотность μ. С какой силой действует он на материальную точку массы m, помещенную в его вершине?

155. Капля с начальной массой M падает под действием силы тяжести и равномерно испаряется, теряя ежесекундно массу, равную m. Какая работа силы тяжести за время от начала движения до полного испарения капли? Сопротивлением воздуха пренебречь.

156. Треугольная пластинка, основание которой $a = 0{,}4$ м, а высота $h = 0{,}3$ м, вращается вокруг своего основания с постоянной угловой скоростью $\omega = 5\pi\,\text{с}^{-1}$. Найти кинетическую энергию пластинки, если толщина ее $d = 0{,}002$ м, а плотность материала, из которого она изготовлена, $\mu = 2200\,\text{кг}/\text{м}^3$.

157. Пластинка в форме треугольника погружена вертикально в воду так, что ее основание лежит на поверхности воды. Основание пластинки a, высота h.

а) Вычислить силу давления воды на каждую из сторон пластинки.

б) Во сколько раз увеличится давление, если перевернуть пластинку так, что на поверхности окажется вершина, а основание будет параллельно поверхности воды?

158. Стержень длиной l вращается вокруг своего конца, совершая n оборотов в секунду. Определить величину натяжения в точке прикрепления, если вес единицы длины стержня равен σ, а центробежная сила для массы m, движущейся по окружности радиуса r с угловой скоростью ω, равна $mr\omega^2$.

159. Под действием нагрузки f проволока длиной l с поперечным сечением S и модулем Юнга E получает удлинение Δl равное $\frac{fl}{ES}$. Определить удлинение этой проволоки под действием своей тяжести, если она висит вертикально. Удельный вес вещества проволоки равен μ.

160. От нагрузки в 9,8 Н проволока растягивается на 0,01 м. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть ее на 0,04 м?

161. Какую работу надо затратить, чтобы насыпать кучу песка конической формы радиусом 1,2 м и высотой 1 м, если плотность песка $2000\,\text{кг}/\text{м}^3$?

162. По закону Джоуля количество тепла, выделяемого постоянным током, равно Rci^2t, где $c = 0{,}24$ — постоянная, R — сопротивление, t — число секунд, i — сила тока. Найти выделяемое тепло для переменного тока $i = a\cos bt$.

163. По закону Торричелли скорость вытекающей жидкости равна $\sqrt{2gh}$, где h — глубина отверстия под уровнем жидкости. Определить время вытекания воды из конической воронки с вершиной внизу, имеющей площадь основания P, высоту h и отверстие в вершине площадью σ

164. Цилиндр радиуса 0,15 м и высотой 0,6 м наполнен воздухом под давлением $9{,}8 \cdot 10^4\,\text{Н}/\text{м}^2$. Какую работу надо совершить при изотермическом сжатии газа до объема в два раза меньшего?

165. Точка движется по оси Ox, начиная от точки (1, 0), так что скорость ее численно равна абсциссе. Где будет находиться точка через 10 с после начала движения?

§ 8. Интеграл Стилтьеса

8.1. Верхний и нижний интегралы Стилтьеса. Критерий интегрируемости.

Пусть $f\colon \overline{\mathcal{J}} \to \mathbb{R}$, $\overline{\mathcal{J}} = [a, b]$, — ограниченная на сегменте $\overline{\mathcal{J}}$ функция, $\alpha : \overline{\mathcal{J}} \to \mathbb{R}$ — неубывающая на этом сегменте функция, $\Pi = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ — произвольное разбиение сегмента $\overline{\mathcal{J}}$. Образуем верхнюю и нижнюю интегральные суммы

$$\overline{S}_\Pi(f, \alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i\, \Delta\alpha_i, \quad \underline{S}_\Pi(f, \alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i\, \Delta\alpha_i,$$

где

$$M_i = \sup_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}} \{f(x)\}, \quad m_i = \inf_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}} \{f(x)\}, \quad \Delta\alpha_i = \alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i),$$

и введем в рассмотрение числа

$$\overline{\int} f\, d\alpha = \inf_{\{\Pi\}} \{\overline{S}_\Pi(f, \alpha)\}, \quad \underline{\int} f\, d\alpha = \sup_{\{\Pi\}} \{\underline{S}_\Pi(f, \alpha)\},$$

которые называются соответственно *верхним* и *нижним интегралами Стилтьеса*.

Определение. *Если* $\overline{\int} f\, d\alpha = \underline{\int} f\, d\alpha$, *то общее значение верхнего и нижнего интегралов назовем интегралом Стилтьеса функции f по функции α (или относительно функции α) и обозначим его*

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x).$$

Множество всех функций f, интегрируемых по Стилтьесу относительно функции α на сегменте $[a, b]$, обозначим $f \in S(\alpha)[a, b]$.

Из этого определения следует, что при $\alpha(x) = x$ интеграл Стилтьеса совпадает с интегралом Римана функции f на сегменте $\overline{\mathcal{J}}$.

В общем случае функция α может быть разрывной на $\overline{\mathcal{J}}$. Функцию α называют *интегрирующей функцией.*

Теорема (критерий интегрируемости).

$$f \in S(\alpha)[a, b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \Pi : 0 \leqslant \overline{S}_\Pi(f, \alpha) - \underline{S}_\Pi(f, \alpha) < \varepsilon.$$

8.2. Интеграл Стилтьеса как предел интегральной суммы.

Пусть Π — произвольное разбиение сегмента $\overline{\mathcal{J}}$, $d(\Pi) = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \Delta x_i$. На каждом сегменте $[x_i, x_{i+1}]$ возьмем произвольную точку ξ_i и образуем сумму

$$S_\Pi(f, \alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\, \Delta\alpha_i,$$

которую назовем *интегральной суммой Стилтьеса.*

Полагаем $\lim\limits_{d(\Pi) \to 0} S_\Pi(f, \alpha) \overset{\text{def}}{=} I$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall \Pi \wedge d(\Pi) < \delta \Leftrightarrow |S_\Pi(f, \alpha) - I| < \varepsilon.$$

Теорема. *Если:*

1) *при* $d(\Pi) \to 0$ $\exists \lim S_\Pi(f, \alpha)$, *то* $f \in S(\alpha)[a, b]$ *и*

$$\lim_{d(\Pi) \to 0} S_\Pi(f, \alpha) = \int_a^b f(x)\, d\alpha(x);$$

2) $f \in S(\alpha)[a, b]$, $\alpha \in C[a, b]$, *то* $\exists \lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(f, \alpha) = \int\limits_a^b f(x)\, d\alpha(x)$.

Эта теорема устанавливает два эквивалентных определения интеграла Стилтьеса.[1)]

8.3. Основные свойства интеграла Стилтьеса.

Теорема 1. *Если:*

1) $f \in S(\alpha)[a, b]$, $g \in S(\alpha)[a, b]$, *то* $(f + g) \in S(\alpha)[a, b]$, $cf \in S(\alpha)[a, b]$, $c = \text{const}$, *и при этом*

$$\int\limits_a^b (f+g)(x)\, d\alpha(x) = \int\limits_a^b f(x)\, d\alpha(x) + \int\limits_a^b g(x)\, d\alpha(x), \quad \int\limits_a^b cf(x)\, d\alpha(x) = c\int\limits_a^b f(x)\, d\alpha(x);$$

2) $f, g \in S(\alpha)[a, b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ $\forall x \in \overline{\mathcal{J}}$, *то*

$$\int\limits_a^b f(x)\, d\alpha(x) \leqslant \int\limits_a^b g(x)\, d\alpha(x);$$

3) $f \in S(\alpha)[a, b]$ *и если* $c \in]a, b[$, *то* $f \in S(\alpha)[a, c] \land f \in S(\alpha)[c, b]$ *и при этом*

$$\int\limits_a^c f(x)\, d\alpha(x) + \int\limits_c^b f(x)\, d\alpha(x) = \int\limits_a^b f(x)\, d\alpha(x);$$

4) $f \in S(\alpha)[a, b]$ *и если* $|f(x)| \leqslant M$ $\forall x \in \overline{\mathcal{J}}$, *то*

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\, d\alpha(x)\right| \leqslant M(\alpha(b) - \alpha(a));$$

5) $f \in S(\alpha_1)[a, b]$ *и* $f \in S(\alpha_2)[a, b]$, *то* $f \in S(\alpha_1 + \alpha_2)[a, b]$ *и при этом*

$$\int\limits_a^b f(x)\, d(\alpha_1 + \alpha_2)(x) = \int\limits_a^b f(x)\, d\alpha_1(x) + \int\limits_a^b f(x)\, d\alpha_2(x);$$

6) $f \in S(\alpha)[a, b]$ *и* c — *положительное число, то* $f \in S(c\alpha)[a, b]$ *и*

$$\int\limits_a^b f(x)\, d(c\alpha(x)) = c\int\limits_a^b f(x)\, d\alpha(x).$$

Следует отметить, что в случае интеграла Римана справедливо и обратное свойству 3) утверждение: *если* $f \in R[a, c]$ *и* $f \in R[c, b]$, *то* $f \in R[a, b]$.

Для интеграла Стилтьеса из существования $\int\limits_a^c f(x)\, d\alpha(x)$ и $\int\limits_c^b f(x)\, d\alpha(x)$ не следует, вообще говоря, существование $\int\limits_a^b f(x)\, d\alpha(x)$.

Теорема 2. *Пусть* $f \in S(\alpha)[a, b]$, $A \leqslant f(x) \leqslant B$ $\forall x \in [a, b]$, $\varphi \in C[A, B]$ *и* $g = \varphi \circ f : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Тогда* $g \in S(\alpha)[a, b]$.

Теорема 3. *Если* $f \in S(\alpha)[a, b]$ *и* $g \in S(\alpha)[a, b]$, *то:*

1) $fg \in S(\alpha)[a, b]$;

2) $|f| \in S(\alpha)[a, b]$ *и* $\left|\int\limits_a^b f(x)\, d\alpha(x)\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\, d\alpha(x)$.

[1)] Если α разрывна, то возможен случай, что $f \in S(\alpha)[a, b]$, а $\lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(f, \alpha)$ не существует (см. пример 154).

Теорема 4 (формула интегрирования по частям). *Пусть* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *и существует какой-либо из интегралов Стилтьеса* $\int\limits_a^b f(x)\,dg(x)$, $\int\limits_a^b g(x)\,df(x)$. *Тогда существует и другой интеграл, причем справедлива формула*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dg(x) = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b g(x)\,df(x). \qquad (1)$$

8.4. Классы функций, интегрируемых по Стилтьесу.

Теорема 1. *Если функция f непрерывна на сегменте $[a, b]$, то $f \in S(\alpha)[a, b]$.*

Теорема 2. *Если функция f монотонна на сегменте $[a, b]$, а $\alpha \in C[a, b]$, то $f \in S(\alpha)[a, b]$.*

Теорема 3. *Если $f \in R[a, b]$, а α удовлетворяет условию Липшица на $[a, b]$, то $f \in S(\alpha)[a, b]$.*

Пусть $h : \overline{\mathcal{J}} \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации на сегменте $\overline{\mathcal{J}} = [a, b]$, $f : \overline{\mathcal{J}} \to \mathbb{R}$ — произвольная функция. Согласно теореме 4, § 5, функция h представима на $\overline{\mathcal{J}}$ в виде

$$h = \alpha - \beta,$$

где α и β — неубывающие на этом сегменте функции.

Определение. *Полагаем*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dh(x) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_a^b f(x)\,d\alpha(x) - \int\limits_a^b f(x)\,d\beta(x), \qquad (1)$$

если $f \in S(\alpha)[a, b]$, $f \in S(\beta)[a, b]$, и при этом будем писать $f \in S(h)[a, b]$.

Теорема 4. *Если $f \in R[a, b]$, $\varphi \in R[a, b]$, $g(x) = y_0 + \int\limits_a^x \varphi(t)\,dt$, $a \leqslant x \leqslant b$, $y_0 =$ const, то $f \in S(g)[a, b]$ и при этом*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dg(x) = \int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx. \qquad (2)$$

8.5. Вычисление интеграла Стилтьеса.

Теорема. *Пусть $f \in C[a, b]$, а функция g кусочно-непрерывна на $[a, b]$ и имеет интегрируемую на этом сегменте производную g', которая существует в каждой точке непрерывности функции g. Пусть $x_0^* = a, x_1^*, \dots, x_m^* = b$ — точки разрыва функции g и ее производной g'. Тогда справедлива формула*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dg(x) = \int\limits_a^b f(x)g'(x)\,dx + f(a)(g(a+0) - g(a)) + \\ + f(b)(g(b) - g(b-0)) + \sum_{k=1}^{m-1} f(x_k^*)(g(x_k^*+0) - g(x_k^*-0)). \qquad (1)$$

8.6. Теорема о среднем и оценка интеграла Стилтьеса.

Теорема 1. *Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$ $\forall x \in [a, b]$, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ не убывает на $[a, b]$ и $f \in S(g)[a, b]$. Тогда справедлива формула*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dg(x) = \mu(g(b) - g(a)), \qquad (1)$$

где $m \leqslant \mu \leqslant M$.

Следствие. *Если* $f \in C[a, b]$, *то* $\exists \xi \in [a, b]$:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dg(x) = f(\xi)(g(b) - g(a)). \tag{2}$$

Теорема 2. *Если* $f \in C[a, b]$ и $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ — ***функция ограниченной вариации на*** $[a, b]$, *то справедлива оценка*

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dg(x)\right| \leqslant MV(g;\, a,\, b), \tag{3}$$

где $M = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|$, $V(g;\, a,\, b)$ — ***полная вариация функции*** g.

149. Пусть функция α возрастает на $[a, b]$, $a \leqslant x_0 \leqslant b$, α непрерывна в точке x_0, $f(x_0) = 1$ и $f(x) = 0$, если $x \neq x_0$. Доказать, что $f \in S(\alpha)[a, b]$ и $\int\limits_a^b f(x)\,d\alpha(x) = 0$.

◄ Из непрерывности функции α в точке x_0 следует, что

$$\forall \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0 : \forall x \in S(x_0,\, \delta) \Rightarrow |\alpha(x) - \alpha(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть Π — такое разбиение сегмента $[a, b]$, что $d(\Pi) < \delta$. Если точка x_0 принадлежит сегменту $[x_i, x_{i+1}]$ при некотором $0 \leqslant i \leqslant n-1$, то $\overline{S}_\Pi(f, \alpha) = \alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i) = \alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_0) + \alpha(x_0) - \alpha(x_i) < \varepsilon$, $\underline{S}_\Pi(f, \alpha) = 0$, следовательно,

$$0 \leqslant \overline{S}_\Pi(f, \alpha) - \underline{S}_\Pi(f, \alpha) < \varepsilon \quad \text{и} \quad f \in S(\alpha)[a, b].$$

Поскольку $\underline{S}_\Pi(f, \alpha) = 0$ при любом разбиении Π сегмента $[a, b]$, то

$$\underline{\int} f\,d\alpha = \sup_{\{\Pi\}} \{\underline{S}_\Pi(f, \alpha)\} = \int\limits_a^b f(x)\,d\alpha(x) = 0. \;►$$

150. Функции $\beta_j : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $j = 1, 2, 3$, определены следующим образом: $\beta_j(x) = 0$, если $x < 0$, $\beta_j(x) = 1$, если $x > 0$, $\beta_1(0) = 0$, $\beta_2(0) = 1$, $\beta_3(0) = \frac{1}{2}$.

Пусть f — ограниченная функция на $[-1, 1]$.

а) Доказать, что $f \in S(\beta_1)[-1, 1] \Leftrightarrow f(+0) = f(0)$ и что в этом случае

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,d\beta_1(x) = f(0).$$

б) Сформулировать и доказать аналогичный результат для β_2.

в) Доказать, что $f \in S(\beta_3)[-1, 1] \Leftrightarrow f$ непрерывна в точке $x = 0$.

г) Пусть f непрерывна в точке $x = 0$. Доказать, что

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,d\beta_1(x) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,d\beta_2(x) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,d\beta_3(x) = f(0).$$

◄ а) *Необходимость* Если $f \in S(\beta_1)[-1, 1]$, то, согласно свойству 3), теорема 1, п. 8.3,

$$f \in S(\beta_1)[-1, 0] \wedge f \in S(\beta_1)[0, 1] \wedge \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,d\beta_1(x) = \int\limits_{-1}^{0} f(x)\,d\beta_1(x) + \int\limits_{0}^{1} f(x)\,d\beta_1(x) = \int\limits_{0}^{1} f(x)\,d\beta_1(x),$$

так как $\int\limits_{-1}^{0} f(x)\,d\beta_1(x) = 0$.

Из существования $\int\limits_{0}^{1} f(x)\,d\beta_1(x)$ следует, что $\forall\varepsilon > 0$ существует такое разбиение Π сегмента $[0,\,1]$, что

$$0 \leqslant \overline{S}_\Pi(f,\,\beta_1) - \underline{S}_\Pi(f,\,\beta_1) < \varepsilon.$$

Поскольку $\beta_1(x_{i+1}) - \beta_1(x_i) = 0$, если $i \neq 0$, и $\beta_1(x_1) - \beta_1(x_0) = 1$, то

$$0 \leqslant \overline{S}_\Pi(f,\,\beta_1) - \underline{S}_\Pi(f,\,\beta_1) = \omega_0 < \varepsilon, \tag{1}$$

где ω_0 — колебание функции f на сегменте $[x_0,\,x_1] = [0,\,x_1]$. Тогда для любого разбиения Π^* такого, что $d(\Pi^*) < d(\Pi)$, получим неравенство

$$\overline{S}_{\Pi^*}(f,\,\beta_1) - \underline{S}_{\Pi^*}(f,\,\beta_1) = \omega_0^* < \varepsilon, \tag{2}$$

из которого, согласно критерию Бэра, следует, что функция f непрерывна справа в точке $x = 0$:

$$f(+0) = f(0).$$

Достаточность. Пусть $f(+0) = f(0)$, т. е. функция f непрерывна справа в точке $x = 0$. Тогда $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$: на интервале $]x_0,\,x_0+\delta[$ колебание ω_f функции f удовлетворяет неравенство $\omega_f < \varepsilon$.

Возьмем произвольное разбиение Π сегмента $[-1,\,1]$, в которое входит точка $x = 0$, такое, чтобы $d(\Pi) < \delta$. Тогда $0 \leqslant \overline{S}_\Pi(f,\,\beta_1) - \underline{S}_\Pi(f,\,\beta_1) < \varepsilon$, следовательно, $f \in S(\beta_1)[-1,\,1]$.

Поскольку при любом разбиении Π сегмента $[-1,\,1]$, содержащем точку $x = 0$, выполняются неравенства

$$m_1 \leqslant \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,d\beta_1(x) \leqslant M_1, \tag{3}$$

где $m_1 = \inf\limits_{0\leqslant x\leqslant x_1}(f(x))$, $M_1 = \sup\limits_{0\leqslant x\leqslant x_1}\{f(x)\}$, и $\lim\limits_{x_1\to+0} m_1 = \lim\limits_{x_1\to+0} M_1 = f(0)$, то

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,d\beta_1(x) = f(0).$$

б) Рассуждая аналогично, получаем

$$f \in S(\beta_2)[-1,\,1] \Leftrightarrow f(-0) = f(0),$$

и при этом $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,d\beta_2(x) = f(0)$.

в) Пусть Π — произвольное разбиение сегмента $[-1,\,1]$ и точка $x = 0$ не входит в Π. Если $0 \in\,]x_j,\,x_{j+1}[$, то $\overline{S}_\Pi(f,\,\beta_3) - \underline{S}_\Pi(f,\,\beta_3) = \omega_j$, где ω_j — колебание функции f на сегменте $[x_j,\,x_{j+1}]$. Следовательно, $(\omega_j \to 0$ при $d(\Pi) \to 0) \Leftrightarrow (f(-0) = f(0) \vee f(+0) = f(0) \vee f(-0) = f(0) \wedge f(+0) = f(0))$.

Если точка $x = 0$ входит в разбиение Π и принадлежит сегменту $[x_j,\,x_{j+1}]$, то $\overline{S}_\Pi(f,\,\beta_3) - \underline{S}_\Pi(f,\,\beta_3) = \frac{1}{2}(\omega_j^{(1)} + \omega_j^{(2)})$, где $\omega_j^{(1)}$ — колебание функции f на сегменте $[x_j,\,0]$, $\omega_j^{(2)}$ — колебание функции f на сегменте $[0,\,x_{j+1}]$. Следовательно,

$$\overline{S}_\Pi(f,\,\beta_3) - \underline{S}_\Pi(f,\,\beta_3) \to 0 \ \text{ при } \ d(\Pi) \to 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = f(0),$$

т. е. f непрерывна в точке $x = 0$. Таким образом, $(f \in S(\beta_3)[-1,\,1]) \Leftrightarrow (f$ непрерывна в точке $x = 0$, и при этом

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,d\beta_3(x) = f(0)).$$

г) Если f непрерывна в точке $x = 0$, то одновременно выполняются все предыдущие случаи и при этом

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,d\beta_1(x) = \int_{-1}^{1} f(x)\,d\beta_2(x) = \int_{-1}^{1} f(x)\,d\beta_3(x) = f(0). \ \blacktriangleright$$

151. Используя обозначения задачи 150, доказать, что $\beta_2 \in S(\beta_1)[-1, 1]$ несмотря на то, что $\lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(\beta_2, \beta_1)$ не существует.

◀ Интегрируемость функции β_2 по функции β_1 следует из случая а) примера 150, причем

$$\int_{-1}^{1} \beta_2(x)\,d\beta_1(x) = \beta_2(0) = 1.$$

При любом разбиении Π сегмента $[-1, 1]$ и произвольном выборе точек $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$, имеем, если $0 \in [x_j, x_{j+1}]$:

$$S_\Pi(\beta_2, \beta_1) = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_2(\xi_i)(\beta_1(x_{i+1}) - \beta_1(x_i)) = \begin{cases} \xi_j, & \text{если } \xi_j \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } \xi_j < 0. \end{cases}$$

Следовательно, $\lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(\beta_2, \beta_1)$ не существует. ▶

Этот пример показывает, что условием $\alpha \in C[a, b]$, о котором говорится в теореме пункта 8.2, нельзя пренебрегать.

152. Показать, что

$$\int_0^3 x\,d([x] - x) = \frac{3}{2}.$$

◀ Интегрирующая функция $x \mapsto [x] - x$, $0 \leqslant x \leqslant 3$, представлена в виде разности неубывающей функции $x \mapsto [x]$, $0 \leqslant x \leqslant 3$, и возрастающей функции $x \mapsto x$, $0 \leqslant x \leqslant 3$, следовательно, согласно определению интеграла Стилтьеса по интегрирующей функции ограниченной вариации, имеем

$$\int_0^3 x\,d([x] - x) = \int_0^3 x\,d[x] - \int_0^3 x\,dx.$$

Функция $x \mapsto [x]$, $0 \leqslant x \leqslant 3$, терпит разрывы первого рода в точках $x = 1$, $x = 2$ и $x = 3$, а функция $f : x \mapsto x$, $0 \leqslant x \leqslant 3$, непрерывна в каждой точке сегмента $[0, 3]$, поэтому, согласно решению примера 151, получаем

$$\int_0^3 x\,d[x] = f(1) + f(2) + f(3) = 6.$$

Поскольку $\int\limits_0^3 x\,dx = \frac{9}{2}$, то окончательно имеем

$$\int_0^3 x\,d([x] - x) = 6 - \frac{9}{2} = \frac{3}{2}. \ \blacktriangleright$$

153. Пусть p_i — точки сегмента $[a, b]$ такие, что $a = p_0 < p_1 < \ldots < p_n = b$. Предположим, что функция $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ не убывает на сегменте $[a, b]$ и постоянна на каждом интервале $]p_i, p_{i+1}[$, $i = \overline{0, n-1}$. Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in C[a, b]$. Вычислить

$$\int_a^b f(x)\,dg(x).$$

◀ Функция g терпит разрывы первого рода в точках p_i, а функция f непрерывна на сегменте $[a, b]$. На основании решения примера 151 можно утверждать, что $f \in S(g)[a, b]$, причем

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = f(p_0)(g(p_0+0) - g(p_0)) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1} f(p_i)\left((g(p_i+0) - g(p_i)) + (g(p_i) - g(p_i-0))\right) + f(p_n)(g(p_n) - g(p_n-0)) =$$

$$= f(a)(g(a+0) - g(a)) + \sum_{i=1}^{n-1} f(p_i)(g(p_i+0) - g(p_i-0)) + f(b)(g(b) - g(b-0)). \blacktriangleright$$

154. Пусть $G(x) = h(x) + g(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, где $h \in C^{(1)}[a, b]$, $h'(x) \geqslant 0$ $\forall x \in [a, b]$, а g и f — функции, заданные в предыдущем примере. Вычислить

$$\int_a^b f\,dG(x).$$

◀ Поскольку G — неубывающая на сегменте $[a, b]$ функция, равная сумме двух неубывающих на этом сегменте функций, то, согласно формуле (1), п. 8.5, имеем

$$\int_a^b f(x)\,dG(x) = \int_a^b f(x)\,dh(x) + \int_a^b f(x)\,dg(x).$$

Поскольку $h \in C^{(1)}[a, b]$, то $\int_a^b f(x)\,dh(x) = \int_a^b f(x)h'(x)\,dx$, следовательно, получаем

$$\int_a^b f(x)\,dG(x) = \int_a^b f(x)h'(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dg(x),$$

где $\int_a^b f(x)\,dg(x)$ вычисляется по формуле, полученной в предыдущем примере. ▶

155. Пусть $f \in C[a, b]$, $p \in R[a, b]$, $p(x) \geqslant 0$ $\forall x \in [a, b]$. Доказать, что

$$\int_a^b f(x)\,dP(x) = \int_a^b f(x)p(x)\,dx,$$

где $P(x) = \int_a^x p(t)\,dt$, $a \leqslant x \leqslant b$.

◀ Рассмотрим произвольное разбиение Π сегмента $[a, b]$ и составим интегральную сумму Стилтьеса функции f по функции P:

$$S_\Pi(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(P(x_{i+1}) - P(x_i)) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x)\,dx, \qquad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}].$$

Составим также риманову интегральную сумму интегрируемой на сегменте $[a, b]$ функции fp:

$$S_\Pi(fp) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)p(\xi_i)\,\Delta x_i$$

и рассмотрим разность

$$S_\Pi(f,\,P)-S_\Pi(fp)=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}}p(x)\,dx-p(\xi_i)\,\Delta x_i\right).$$

Согласно первой теореме о среднем, имеем

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}p(x)\,dx=\mu_i\,\Delta x_i,\qquad m_i\leqslant\mu_i\leqslant M_i,$$

где $m_i=\inf\limits_{x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}}\{p(x)\}$, $M_i=\sup\limits_{x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}}\{p(x)\}$. Принимая во внимание оценку $|f(x)|\leqslant M$, $a\leqslant x\leqslant b$, $M=\text{const}$, неравенство $|\mu_i-p(\xi_i)|\leqslant\omega_i$, где ω_i — колебание функции p на сегменте $[x_i,\,x_{i+1}]$, а также интегрируемость функции p, получаем, что $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$:

$$|S_\Pi(f,\,P)-S_\Pi(fp)|\leqslant M\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\,\Delta x_i<\varepsilon,$$

для каждого разбиения Π, для которого $d(\Pi)<\delta$.

Таким образом, $\exists\lim\limits_{d(\Pi)\to0}S_\Pi(f,\,P)=\lim\limits_{d(\Pi)\to0}S_\Pi(fp)=\int\limits_a^b f(x)p(x)\,dx$. Следовательно,

$$f\in S(P)[a,\,b]\quad\text{и}\quad\int_a^b f(x)\,dP(x)=\int_a^b f(x)p(x)\,dx.\ ►$$

156. Вычислить $\int\limits_{-2}^{2}x\,dg(x)$, где

$$g(x)=\begin{cases}x+2, & \text{если }-2\leqslant x\leqslant-1,\\ 2, & \text{если }-1<x<0,\\ x^2+3, & \text{если }0\leqslant x\leqslant2.\end{cases}$$

◄ Функция g имеет скачки, равные 1, в точках $x=-1$ и $x=0$, а ее производная g' имеет вид

$$g'(x)=\begin{cases}1, & \text{если }-2\leqslant x<-1,\\ 0, & \text{если }-1<x<0,\\ 2x, & \text{если }0<x\leqslant2.\end{cases}$$

Применяя формулу (1), п. 8.5, получаем

$$\int_{-2}^{2}x\,dg(x)=\int_{-2}^{-1}x\,dx+2\int_0^2x^2\,dx+(-1)\cdot1+0\cdot1=\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-2}^{-1}+\left.\frac{2}{3}x^3\right|_0^2-1=\frac{17}{6}.\ ►$$

157. Пусть на сегменте $[a,\,b]$ оси Ox расположены массы, непрерывно распределенные и сосредоточенные в точках x_j, $j=\overline{1,\,n}$. Найти статический момент этих масс относительно начала координат.

◄ Пусть $x\mapsto\Phi(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, — количество массы на сегменте $[a,\,x]\subset[a,\,b]$, причем $\Phi(a)=0$. Тогда Φ — неубывающая функция. Пусть Π — произвольное разбиение сегмента $[a,\,b]$ на n частей. Тогда на сегменте $[x_i,\,x_{i+1}]$ содержится масса $\Phi(x_{i+1})-\Phi(x_i)=\Delta\Phi(x_i)$. В частности, на сегменте $[x_0,\,x_1]$ содержится масса $\Phi(x_1)-\Phi(a)\geqslant0$ (в силу предположения $\Phi(a)=0$). Считая в каждом случае массу сосредоточенной на правом конце сегмента $[x_i,\,x_{i+1}]$, получим приближенное значение статического момента dM всей массы относительно начала координат в виде

$$dM\approx\sum_{i=0}^{n-1}x_{i+1}\,\Delta\Phi(x_i)=S_\Pi(x,\,\Phi),$$

где $S_{\Pi}(x, \Phi)$ — интегральнав сумма Стилтьеса функции x по функции Φ. Переходя к пределу при $d(\Pi) \to 0$, получим для вычисления искомого статического момента M формулу

$$M = \int_a^b x\, d\Phi(x).$$

Если $x \mapsto \mu(x)$ — линейная плотность непрерывно распределенной массы, то $\Phi'(x) = \mu(x)$

В точках x_j, $j = \overline{1, m}$, функция Φ разрывна и в каждой из этих точек ее скачок равен массе m_j.

Применяя формулу (1), п. 8.5, для вычисления интеграла Стилтьеса, находим

$$M = \int_a^b x\mu(x)\, dx + \sum_{j=1}^{m} x_j m_j. \ \blacktriangleright$$

Полученная формула показывает, что интеграл Стилтьеса позволяет объединить с помощью одной интегральной формулы разнородные случаи непрерывно распределенных и сосредоточенных масс.

Упражнения для самостоятельной работы

166. Пусть $f : x \mapsto \sin x$, $\varphi : x \mapsto x^2 - 3x + 5$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$. Вычислить $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, d\varphi(x)$.

167. Пусть $f : x \mapsto x^3$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\varphi : x \mapsto k$, если $\frac{k-1}{n} < x \leqslant \frac{k}{n}$, $\varphi(0) = 0$, $k = \overline{1, n}$. Вычислить $\int\limits_0^1 f(x)\, d\varphi(x)$.

168. Пусть $f : x \mapsto x$, $\varphi : x \mapsto [x^2]$, $0 \leqslant x \leqslant 5$. Вычислить $\int\limits_0^5 f(x)\, d\varphi(x)$.

169. Пусть $f : x \mapsto x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\varphi(x) = 0$, если $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$ и $x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$, $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. Вычислить $\int\limits_0^1 f(x)\, d\varphi(x)$.

170. Пусть $f : x \mapsto x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\varphi(x) = 1$, если $x \in]0, 1[$, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Вычислить $\int\limits_0^1 f(x)\, d\varphi(x)$.

171. Вычислить $\int\limits_{-1}^3 x\, d\varphi(x)$, где $\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = -1, \\ 1, & \text{если } -1 < x < 2, \\ -1, & \text{если } 2 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$

172. Вычислить $\int\limits_{-2}^2 x\, d\varphi(x)$, $\int\limits_{-2}^2 x^2\, d\varphi(x)$, $\int\limits_{-2}^2 (x^3 + 1)\, d\varphi(x)$, где

$$\varphi(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{если } -2 \leqslant x \leqslant -1, \\ 2, & \text{если } -1 < x < 0, \\ 3, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

173. Пусть f — функция ограниченной вариации на сегменте $[0, 2\pi]$ и $f(2\pi) = f(0)$. Доказать, что каждый из интегралов

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\, dx, \qquad \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx\, dx$$

не превосходит $\frac{V(f; 0, 2\pi)}{n}$ по абсолютной величине.

§ 9. Приближенное вычисление определенных интегралов

1°. Формула прямоугольников. Если функция $y(x) \in C^{(1)}[a, b]$; $h = \frac{b-a}{n}$; $x_i = a + ih$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$; $y(x_i) = y_i$, то

$$\int_a^b y(x)\,dx = h\,(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}) + R_n,$$

где $R_n = \frac{(b-a)h}{2} y'(\xi)$, $a \leqslant \xi \leqslant b$.

2°. Формула трапеций. Если $y = y(x) \in C^{(2)}[a, b]$, то при тех же обозначениях имеем

$$\int_a^b y(x)\,dx = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right) + R_n,$$

где $R_n = -\frac{(b-a)h^2}{12} y''(\eta)$, $a \leqslant \eta \leqslant b$.

3°. Формула парабол (формула Симпсона). Пусть $y = y(x) \in C^{(4)}[a, b]$. Полагая $n = 2k$, можно получить формулу Симпсона

$$\int_a^b y(x)\,dx = \frac{h}{3}\left((y_0 + y_{2k}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2k-1}) + 2\,(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2k-2})\right) + R_n,$$

где $R_n = -\frac{(b-a)h^4}{180} y^{(\mathrm{IV})}(\zeta)$, $a \leqslant \zeta \leqslant b$.

Примечание. Если имеет место формула

$$\|z - \bar{z}\|_0 = \max|z_i - \bar{z}_i| \leqslant Mh^n,$$

где $\bar{z}_i$ — приближенное значение величины z_i, вычисленное по некоторой формуле, то говорят, что эта формула в некотором классе функций имеет n-й порядок точности ($M > 0$ — постоянная, не зависящая от h).

Таким образом, формула прямоугольников имеет в классе $y \in C^{(1)}[a, b]$ первый порядок точности, формула трапеций в классе $y \in C^{(2)}[a, b]$ имеет второй порядок точности, формула парабол в классе $y \in C^{(4)}[a, b]$ имеет четвертый порядок точности.

Часто вместо нормы $\|\cdot\|_0$ берут другие специальные нормы, выбор которых зависит от характера решаемых задач. В дальнейшем отрезок $[a, b]$ с выделенными на нем точками $x_i = a + ih$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ будем называть равномерной сеткой с шагом h; точки деления x_i называются узлами сетки.

158. Применяя формулу прямоугольников ($n = 12$), приближенно вычислить $I = \int_0^{2\pi} x \sin x\,dx$ и результат сравнить с точным ответом.

◀ Рассмотрим равномерную сетку на отрезке $[0, 2\pi]$ с шагом $h = \frac{\pi}{6}$, тогда $x_i = i\frac{\pi}{6}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, 12)$. По формуле прямоугольников, имеем

$$\int_0^{2\pi} x \sin x\,dx \approx \frac{\pi}{6}\sum_{i=0}^{11} i\frac{\pi}{6}\sin i\frac{\pi}{6} = \frac{\pi^2}{36}\sum_{i=0}^{11} i\sin\frac{i\pi}{6} = -\frac{\pi^2}{36}\left(\sum_{i=1}^{11}\cos ix\right)'\Bigg|_{x=\frac{\pi}{6}} =$$

$$= -\frac{\pi^2}{36}\left(\frac{\cos 6x \cdot \sin\frac{11}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right)'\Bigg|_{x=\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi^2}{36}\left(\frac{\left(6\sin 6x \cdot \sin\frac{11}{2}x - \frac{11}{2}\cos\frac{11}{2}x \cdot \cos 6x\right)\sin\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}} + \right.$$

$$+\left.\frac{\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\cos 6x\sin\frac{11}{2}x}{\sin^2\frac{x}{2}}\right)\Bigg|_{x=\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi^2}{36}\,\frac{\left(\frac{11}{2}\cos\frac{11}{12}\pi\sin\frac{\pi}{12}-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{11}{12}\pi\right)}{\sin^2\frac{\pi}{12}} =$$

$$= -\frac{\pi^2}{72}\cdot\frac{11\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}}{\sin^2\frac{\pi}{12}} = -\frac{\pi^2}{6}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12} = -\frac{\pi^2}{6}\left(2+\sqrt{3}\right)\approx -6{,}2961$$

(взяли $\pi\approx 3{,}14$; $\sqrt{3}\approx 1{,}73$). Точное значение интеграла $I=-2\pi=-6{,}28\ldots$ ▶

159. С помощью формулы трапеций вычислить интеграл

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}\,dx \quad (n=6)$$

и оценить погрешность формулы.

◀ Построим на отрезке $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ равномерную сетку с шагом $h=\frac{\pi}{12}$: $\left\{x_i=i\frac{\pi}{12};\ i=0,1,2,3,4,5,6\right\}$. По формуле трапеций

$$I=\frac{\pi}{12}\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{i=1}^{5}\sqrt{7+\cos 2i\frac{\pi}{12}}\right)=\frac{\pi}{24}\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{i=1}^{5}\sqrt{7+\cos i\frac{\pi}{6}}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{24}\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{14+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{2}}+\sqrt{7}+\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{14-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}\right)\right)=$$

$$=\frac{\pi}{48}\left(2+\sqrt{3}+\sqrt{14+\sqrt{3}}+\sqrt{15}+\sqrt{14}+\sqrt{13}+\sqrt{14-\sqrt{3}}\right)\approx$$

$$\approx\frac{3{,}142}{48}(3{,}732+3{,}966+3{,}873+3{,}742+3{,}606+3{,}503)\approx\frac{3{,}142\cdot 22{,}422}{48}\approx 1{,}4677.$$

Оценим погрешность формулы трапеций; для этого оценим R_n. Очевидно, $|R_n|\leqslant\frac{(b-a)h^2}{12}\max\limits_{a\leqslant\eta\leqslant b}|f''(\eta)|$.

В нашем случае $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}}\left|\left(\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}\right)''\right|\leqslant\frac{17}{14\sqrt{14}}$.

Таким образом, $|R_n|\leqslant\frac{17\pi^3}{2^8\cdot 3^3\,7\sqrt{14}}<0{,}002$. ▶

160. С помощью формулы Симпсона вычислить интеграл

$$I=\int\limits_0^1\frac{dx}{1+x^2}\quad (k=2).$$

◀ Деля отрезок $[0,1]$ на четыре равных части $\left(h=\frac{1}{4}\right)$, по формуле Симпсона имеем $I\approx\frac{1}{12}\left((y_0+y_4)+4(y_1+y_3)+2y_2\right)\approx\frac{1}{12}(1+0{,}5+3{,}76471+2{,}56+1{,}6)=0{,}78539$. ▶

161. Принимая $n=10$, вычислить константу Каталана

$$G=\int\limits_0^1\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx.$$

◀ Построим равномерную сетку с шагом $h=0{,}1$ $\{x_i=ih;\ i=0,1,\ldots,10\}$ и вычислим приближенно G по формуле Симпсона

$$G=\frac{1}{30}\left((y_0+y_{10})+4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9)+2(y_2+y_4+y_6+y_8)\right).$$

Вычисляя соответствующие значения функции с точностью до пяти знаков после запятой, получаем $y_0=1$; $y_{10}=0{,}78540$; $y_0+y_{10}=1{,}78540$; $y_1=0{,}99668$; $y_3=0{,}97152$; $y_5=0{,}92730$;

$y_7 = 0{,}87246$; $y_9 = 0{,}81424$; $4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) = 4 \cdot 4{,}58220 = 18{,}32880$; $y_2 = 0{,}98698$; $y_4 = 0{,}95127$; $y_6 = 0{,}90070$; $y_8 = 0{,}84343$; $2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) = 2 \cdot 3{,}68238 = 7{,}36476$. Подставляя вычисленные значения, находим

$$G \approx \frac{1{,}78540 + 18{,}32880 + 7{,}36476}{30} = 0{,}915965. ►$$

162. Пользуясь формулой $\frac{\pi}{4} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, вычислить число π с точностью до 10^{-4}.

◄ Мы уже вычислили в задаче 160 интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ с помощью формулы Симпсона, взяв $k = 2$. Оценим погрешность формулы. Поскольку (см. пример 77, гл. II)

$$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}} \sin\left((n+1)\operatorname{arctg} x\right),$$

то $\left|\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(4)}\right| \leqslant 4!$ при $x \in [0, 1]$, следовательно,

$$|R_n| \leqslant \frac{24}{180} \cdot \frac{1}{4^4} = \frac{1}{1920} \approx 5 \cdot 10^{-4}.$$

Используя результат задачи 160, находим $\pi \approx 4 \cdot 0{,}78539 = 3{,}14156$. Сравнивая полученный результат с табличным $\pi = 3{,}141592\ldots$, видим, что все четыре цифры после запятой правильны. ►

163. Вычислить $\int\limits_0^1 e^{x^2}\,dx$ с точностью до 0,001.

◄ Вычислять интеграл будем по формуле Симпсона; поскольку $\left|\left(e^{x^2}\right)^{(4)}\right| \leqslant 228$ при $x \in [0, 1]$, то шаг сетки выбираем из условия (оценивая погрешность формулы парабол) $h^4 < \frac{10^{-3}\ 15}{19} \approx 8\ \ 10^{-4}$.

Деля отрезок $[0, 1]$ на 10 равных частей, получаем

$$\int\limits_0^1 e^{x^2}\,dx \approx \frac{1}{30}\left((y_0 + y_{10}) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8)\right).$$

Вычислим значения функции e^{x^2} в узлах сетки с точностью до 10^{-5} (можно вычислить, используя, например, формулу Тейлора). Имеем $y_0 = 1$, $y_{10} \approx 2{,}71828$, $y_1 \approx 1{,}01004$, $y_3 \approx 1{,}09417$, $y_5 \approx 1{,}28733$, $y_7 \approx 1{,}63230$, $y_9 \approx 2{,}24789$, $y_2 \approx 1{,}04081$, $y_4 \approx 1{,}17351$, $y_6 \approx 1{,}43332$, $y_8 \approx 1{,}89648$, $y_0 + y_{10} \approx 3{,}71828$; $4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) \approx 4 \cdot 7{,}27173 = 29{,}08692$; $2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) \approx 2 \cdot 5{,}54412 = 11{,}08824$;

$$\int\limits_0^1 e^{x^2}\,dx \approx \frac{1}{30}(3{,}71828 + 29{,}08692 + 11{,}08824) = \frac{43{,}89344}{30} \approx 1{,}46311.$$

Получили три верных цифры после запятой. ►

164. Вычислить $\int\limits_0^1 (e^x - 1)\ln\frac{1}{x}\,dx$ с точностью до 10^{-4}.

◄ При $x \to 0$ $(e^x - 1)\ln\frac{1}{x} \to 0$, поэтому интеграл Римана существует Производная четвертого порядка подынтегральной функции имеет весьма сложный вид и оценить ее трудно; более того. уже первая производная подынтегральной функции неограничена на $[0, 1]$ В принципе мы можем воспользоваться формулой Симпсона, однако оценку погрешности произвести не сможем. Поэтому поступим следующим образом. Разложим по формуле Тейлора функцию $1 - e^x$ по степеням x:

$$1 - e^x = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720}\right) + R(x),$$

где $R(x) = \frac{e^c x^7}{7!}$, $0 < c < 1$. Запишем подынтегральную функцию в виде

$$f(x) = (1 - e^x)\ln x$$

и обозначим через $\varphi(x)$ функцию

$$\varphi(x) = -\ln x\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720}\right).$$

Очевидно. $f(x) = \varphi(x) + R_1(x)$, где $R_1(x) = \ln x R(x)$. Оценим $|R_1(x)| = \left|\frac{\ln x\, e^c x^7}{7!}\right|$ при $x \in [0, 1]$. Поскольку $\lim\limits_{x\to 0} x^7 \ln x = 0$; $\ln 1 = 0$, то функция $|z| = |x^7 \ln x|$ достигает абсолютного максимума в некоторой внутренней точке отрезка $[0, 1]$. Дифференцируя $z(x)$, получаем $z'(x) = x^6 + 7x^6 \ln x$. Приравнивая нулю $z'(x)$, находим, что в точке $x = e^{-\frac{1}{7}}$ функция $|z(x)|$ достигает абсолютного экстремума, равного

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1} |z(x)| = \left|-\frac{1}{7}e^{-1}\right| = \frac{1}{7e}.$$

Так как $|R(x)| < \frac{e}{7!}$ при $x \in [0, 1]$, получаем оценку $|f(x) - \varphi(x)| = |R_1(x)| < \frac{1}{7\cdot 7!}$. Таким образом,

$$\left|\int_0^1 (f(x) - \varphi(x))\, dx\right| \leqslant \int_0^1 |f(x) - \varphi(x)|\, dx < \frac{1}{7\cdot 7!} < 10^{-4},$$

поэтому вместо интеграла функции $f(x)$ будем вычислять интеграл от функции $\varphi(x)$ Заданная точность будет обеспечена, если в процессе вычисления интеграла функции $\varphi(x)$ погрешность вычислений не превзойдет 10^{-4}.

Интегрируя функцию $\varphi(x)$ по частям, имеем

$$\int_0^1 f(x)\, dx \approx \int_0^1 \varphi(x)\, dx = \psi(x)\ln x\Big|_0^1 + \int_0^1 \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + \frac{x^5}{720} + \frac{x^6}{7!}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{18} + \frac{1}{96} + \frac{1}{600} + \frac{1}{6\cdot 6!} + \frac{1}{7\cdot 7!},$$

где

$$\psi(x) = -\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{7!}\right); \quad \psi(x)\ln x\Big|_0^1 = \psi(1)\cdot\ln 1 - \lim_{x\to 0}\psi(x)\ln x = 0.$$

С точностью до 10^{-6} имеем

$$\frac{1}{4} = 0{,}250000; \quad \frac{1}{18} = 0{,}055556; \quad \frac{1}{96} = 0{,}010417; \quad \frac{1}{600} = 0{,}001667; \quad \frac{1}{6\cdot 6!} = 0{,}000231:$$

$$\int_0^1 (1 - e^x)\ln x\, dx \approx 0{,}250000 + 0{,}055556 + 0{,}010417 + 0{,}001667 + 0{,}000231 = 0{,}317871 \approx 0{,}3179. ►$$

165. **Вычислить с точностью до 0,001 интеграл вероятностей** $I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$.

◀ Интеграл сходится, поэтому $\forall\varepsilon > 0\ \exists A_1 > 0$ такое, что при $A \geqslant A_1$

$$\int\limits_A^{+\infty} e^{-x^2}\,dx < \varepsilon.$$

Если мы нашли A_1, то можем записать при $A \geqslant A_1$

$$I = \int\limits_0^A e^{-x^2}\,dx + R, \text{ где } R = \int\limits_A^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

Возьмем $\varepsilon = 10^{-3}$ и постараемся определить оптимальное A, т.е. такое, чтобы промежуток $[0,\ A]$ имел по возможности небольшую длину. Проще всего поступить следующим образом: допустим, мы нашли такое A, что $\int\limits_A^{+\infty} e^{-x^2}\,dx < \varepsilon$; тогда и интеграл $\int\limits_{A+1}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx < \varepsilon$;

$$0 < \int\limits_A^{+\infty} e^{-x^2}\,dx - \int\limits_{A+1}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int\limits_A^{A+1} e^{-x^2}\,dx = e^{-\xi^2} < \varepsilon,$$

где $A < \xi < A + 1$ (по теореме о среднем).

Полученное неравенство эквивалентно неравенству

$$\xi > \sqrt{\ln\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Подставляя $\varepsilon = 10^{-3}$, получим

$$\xi > \sqrt{\ln 1000} \approx \sqrt{6{,}907755} \approx 2{,}628$$

и в качестве A можем взять $A = 2{,}6$.

Можно получить более тонкую оценку для A. Допустим, найдено такое A, что

$$I_1 = \int\limits_A^{+\infty} e^{-x^2}\,dx < \varepsilon.$$

Произведя замену $x^2 = t$ $\left(dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}\right)$, получим

$$I_1 = \frac{1}{2}\int\limits_{A^2}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt < \frac{1}{2A}\int\limits_{A^2}^{+\infty} e^{-t}\,dt = \frac{e^{-A^2}}{2A}.$$

Из условия $\frac{e^{-A^2}}{2A} < \varepsilon$ находим $Ae^{A^2} > \frac{1}{2\varepsilon}$, $\ln A + A^2 > \ln\frac{1}{2\varepsilon}$, откуда $A > \sqrt{\ln\frac{1}{2\varepsilon} - \ln A}$. Так как должно быть $A > 2$ при $\varepsilon = 10^{-3}$, под радикалом можем взять $\ln 2$ вместо $\ln A$:

$$A > \sqrt{\ln 1000 - 2\ln 2} \approx \sqrt{6{,}90775 - 1{,}38628} = \sqrt{5{,}52147} = 2{,}35.$$

Таким образом, взяв, например, $A = 2{,}4$, можем записать

$$0 < \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx - \int\limits_0^{2{,}4} e^{-x^2}\,dx < 10^{-3}.$$

Наша задача сводится теперь к вычислению с точностью до 10^{-3} интеграла

$$\bar{I} = \int\limits_0^{2{,}4} e^{-x^2}\,dx.$$

Мы могли бы поступить здесь, как и в предыдущей задаче 164: аппроксимировать функцию e^{-x^2} полиномом. Но в связи с тем, что промежуток интегрирования имеет длину 2,4, а степени $(2{,}4)^n$ растут довольно быстро, нам пришлось бы для обеспечения нужной точности взять больше 15 членов разложения в формуле Тейлора.

Интеграл $\overline{I}$ будем вычислять по формуле Симпсона. Найдем $y^{(4)}$ функции $y = e^{-x^2}$. Поскольку $y^{(4)} = 4y\left(3 - 12x^2 + 4x^4\right)$, то $\left|y^{(4)}(x)\right| \leqslant 4(3 - 12 \cdot 5{,}76 + 4 \cdot 33{,}1776)$, $x \in [0;\, 2{,}4]$, так как $\left|e^{-x^2}\right| \leqslant 1$, а функция $z = 3 - 12x^2 + 4x^4$ монотонно возрастает при $x > \sqrt{\frac{3}{2}}$. Таким образом, $\left|y^{(4)}(x)\right| \leqslant 4 \cdot 66{,}5904 = 266{,}3616$, $0 \leqslant x \leqslant 2{,}4$. Оценивая погрешность R формулы Симпсона

$$R = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi), \quad a \leqslant \xi \leqslant b,$$

находим для нашего случая

$$|R| \leqslant \frac{2{,}4 \cdot 266{,}3616}{180} h^4 \approx 3{,}55148 h^4.$$

Из условия $|R| < 10^{-3}$ получаем

$$h < \sqrt[4]{\frac{10^{-3}}{3{,}55148}} < \sqrt[4]{\frac{10^{-3}}{3{,}5}} = 0{,}1 \sqrt[4]{\frac{10}{3{,}5}} \approx 0{,}13.$$

Для получения заданной точности можем взять $h = 0{,}1$.

Рассмотрим сетку на отрезке $[0;\, 2{,}4]$: $\omega_h = \{x_i = 0{,}1i;\ i = 0, 1, \ldots, 24\}$. Для обеспечения заданной точности значения подынтегральной функции в узлах сетки будем вычислять с пятью значащими цифрами после запятой. Имеем $y_0 = 1$; $y_{24} \approx 0{,}00315$; $y_1 \approx 0{,}99005$, $y_2 \approx 0{,}96079$; $y_3 \approx 0{,}91393$; $y_4 \approx 0{,}85214$; $y_5 \approx 0{,}77880$; $y_6 \approx 0{,}69768$; $y_7 \approx 0{,}61263$; $y_8 \approx 0{,}52729$; $y_9 \approx 0{,}44486$; $y_{10} \approx 0{,}36788$; $y_{11} \approx 0{,}29820$; $y_{12} \approx 0{,}23693$; $y_{13} \approx 0{,}18452$, $y_{14} \approx 0{,}14086$; $y_{15} \approx 0{,}10540$; $y_{16} \approx 0{,}07731$; $y_{17} \approx 0{,}05558$; $y_{18} \approx 0{,}03916$; $y_{19} \approx 0{,}02705$; $y_{20} \approx 0{,}01832$; $y_{21} \approx 0{,}01216$; $y_{22} \approx 0{,}00791$; $y_{23} \approx 0{,}00504$; $y_0 + y_{24} \approx 1{,}00315$;

$$4\sum_{j=1}^{12} y_{2j-1} \approx 4 \cdot 4{,}42822 = 17{,}71288; \quad 2\sum_{j=1}^{11} y_{2j} \approx 2 \cdot 3{,}92627 = 7{,}85254;$$

$$\overline{I} \approx \frac{1}{30}\left(y_0 + y_{24} + 4\sum_{j=1}^{12} y_{2j-1} + 2\sum_{j=1}^{11} y_{2j}\right) \approx \frac{28{,}56857}{30} \approx 0{,}8856.$$

Рассмотрим точное значение $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0{,}8862\ldots$, а также ошибку $R = I - \overline{I} = 0{,}0006 = 6 \cdot 10^{-4}$. Полученная точность превысила заданную. ►

166. Приближенно найти длину эллипса, полуоси которого $a = 10$ и $b = 6$.

◄ Параметрическими уравнениями эллипса являются $x = 10\cos t$, $y = 6\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, а длина его дуги

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{100\cos^2 t + 36\sin^2 t}\, dt = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{17 + 8\cos 2x}\, dx.$$

Вычислим интеграл с помощью формулы Симпсона, разделив отрезок $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ на 6 равных частей $\left(h = \frac{\pi}{12}\right)$. Будем вычислять значения подынтегральной функции в узлах сетки $\omega_h = \{ih;\ i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

$$y_0 = 5, \quad y_6 = 3, \quad y_1 = \sqrt{17 + 4\sqrt{3}} \approx \sqrt{23{,}928} \approx 4{,}892; \quad y_2 = \sqrt{17+4} = \sqrt{21} \approx 4{,}583,$$

$$y_3 = \sqrt{17} \approx 4{,}123; \quad y_4 = \sqrt{17-4} = \sqrt{13} \approx 3{,}606; \quad y_5 = \sqrt{17 - 4\sqrt{3}} \approx \sqrt{10{,}072} \approx 3{,}174;$$

$$y_0 + y_6 = 8; \quad 4(y_1 + y_3 + y_5) \approx 48{,}756; \quad 2(y_2 + y_4) \approx 16{,}378.$$

Подставляя полученные значения в формулу парабол, находим:

$$L \approx \frac{2\pi}{9}(8 + 48{,}756 + 16{,}378) = \frac{6{,}283 \cdot 73{,}134}{9} \approx 51{,}056. \ ►$$

167. Построить по точкам график функции $y = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt \quad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$, приняв $\Delta x = \frac{\pi}{3}$.

◀ Рассмотрим сетку $\omega_h = \left\{x_i = \frac{i\pi}{3};\ i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\right\}$. Значения функции $y(x)$ в узлах сетки:

$$y_0 = 0; \quad y_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x}\,dx; \quad y_2 = \int\limits_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin x}{x}\,dx; \quad y_3 = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx;$$

$$y_4 = \int\limits_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin x}{x}\,dx; \quad y_5 = \int\limits_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin x}{x}\,dx; \quad y_6 = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Задача сводится к приближенному вычислению шести интегралов.

Рассмотрим на отрезке $[0, 2\pi]$ сетку $\bar{\omega}_h = \left\{x_i = i\frac{\pi}{12};\ i = 0, 1, \ldots, 24\right\}$; очевидно, узлы сетки ω_h являются узлами сетки $\bar{\omega}_h$. Вычислять интегралы будем по формуле Симпсона.

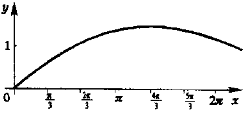


Рис. 72

Находя значения функции дискретного аргумента $\bar{y}_i = \frac{\sin x_i}{i}$ в узлах сетки $\bar{\omega}_h$, получим $\bar{y}_0 = \lim\limits_{i\to 0} \frac{\sin x_i}{i} = \frac{\pi}{12} \approx 0{,}2618$; $\bar{y}_1 \approx 0{,}2590$; $\bar{y}_2 = 0{,}25$; $\bar{y}_3 \approx 0{,}2359$; $\bar{y}_4 \approx 0{,}2165$; $\bar{y}_5 \approx 0{,}1932$; $\bar{y}_6 \approx 0{,}1666$; $\bar{y}_7 \approx 0{,}1380$; $\bar{y}_8 \approx 0{,}1083$; $\bar{y}_9 \approx 0{,}0785$; $\bar{y}_{10} = 0{,}05$; $\bar{y}_{11} \approx 0{,}0235$; $\bar{y}_{12} = 0$; $\bar{y}_{13} \approx -0{,}0199$; $\bar{y}_{14} \approx -0{,}0357$; $\bar{y}_{15} \approx -0{,}0471$; $\bar{y}_{16} \approx -0{,}0541$; $\bar{y}_{17} \approx -0{,}0568$; $\bar{y}_{18} \approx -0{,}0555$; $\bar{y}_{19} \approx -0{,}0508$; $\bar{y}_{20} \approx -0{,}0433$; $\bar{y}_{21} \approx -0{,}0336$; $\bar{y}_{22} \approx -0{,}0227$; $\bar{y}_{23} \approx -0{,}0112$; $\bar{y}_{24} = 0$.

Очевидно,

$$y_1 \approx \frac{1}{3}\left(\bar{y}_0 + \bar{y}_4 + 4(\bar{y}_1 + \bar{y}_3) + 2\bar{y}_2\right) = \frac{2{,}9579}{3} \approx 0{,}9860;$$

$$y_2 \approx \frac{1}{3}\left(\bar{y}_0 + \bar{y}_8 + 4\sum_{k=1}^{4} \bar{y}_{2k-1} + 2\sum_{k=1}^{3} \bar{y}_{2k}\right) = \frac{4{,}9407}{3} \approx 1{,}6469;$$

$$y_3 \approx \frac{1}{3}\left(\bar{y}_0 + \bar{y}_{12} + 4\sum_{k=1}^{4} \bar{y}_{2k-1} + 2\sum_{k=1}^{5} \bar{y}_{2k}\right) = \frac{5{,}5570}{3} \approx 1{,}8523;$$

$$y_4 \approx \frac{1}{3}\left(\bar{y}_0 + \bar{y}_{16} + 4\sum_{k=1}^{5} \bar{y}_{2k-1} + 2\sum_{k=1}^{7} \bar{y}_{2k}\right) = \frac{5{,}1635}{3} \approx 1{,}7212;$$

$$y_5 \approx \frac{1}{3}\left(\bar{y}_0 + \bar{y}_{20} + 4\sum_{k=1}^{10} \bar{y}_{2k-1} + 2\sum_{k=1}^{5} \bar{y}_{2k}\right) = \frac{4{,}5247}{3} \approx 1{,}5082;$$

$$y_6 \approx \frac{1}{3}\left(\bar{y}_0 + \bar{y}_{24} + 4\sum_{k=1}^{12} \bar{y}_{2k-1} + 2\sum_{k=1}^{11} \bar{y}_{2k}\right) = \frac{4{,}2568}{3} \approx 1{,}4189.$$

При $x \in]0, \pi[$ $y'(x) > 0$, а при $x \in]\pi, 2\pi[$ $y'(x) < 0$; $y''(x) < 0$ при $x \in \left]0, \frac{4\pi}{3}\right[$. Таким образом, $y(x)$ в интервале $]0, \pi[$ возрастает, а в интервале $\left]\pi, \frac{4\pi}{3}\right[$ убывает; на интервале $\left]0, \frac{4\pi}{3}\right[$ функция $y(x)$ выпукла сверху. График функции изображен на рис. 72. ▶

Упражнения для самостоятельной работы

174. Вычислить $\ln 10 = \int\limits_0^{10} \frac{dx}{x}$, используя правило Симпсона при $n = 10$. Найти модуль перехода от натуральных логарифмов к десятичным. Сравнить с табличным значением.