

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики

Ш.Ф.Арасланов

**ТЕОРИЯ ГРАФОВ
ЛЕКЦИИ И ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ**

Учебное пособие по дисциплине
“Дополнительные главы математики”
для студентов дневного отделения направления подготовки
230400 “Информационные системы и технологии”

Казань
2013

УДК 519.17
ББК 22.176
А79

Арасланов Ш.Ф.

А79 Теория графов. Лекции и практические занятия: учеб. пособие. – Казань: Изд-во Казанск. гос. архитектур.-строит. ун-та, 2013. – 87 с.

ISBN 978-5-7829-0407-4

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Казанского государственного архитектурно-строительного университета

Учебное пособие предназначено для изучения теории графов дисциплины «Дополнительные главы математики» студентами дневного отделения направления подготовки 230400 «Информационные системы и технологии».

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой моделирование экосистем КФУ Ш.Х.Зарипов;

доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики КГАСУ Р.С.Хайруллин

© Казанский государственный архитектурно-строительный университет, 2013

ISBN 978-5-7829-0407-4

© Арасланов Ш.Ф., 2013

СОДЕРЖАНИЕ

Лекция 1. История возникновения. Основные понятия и их пояснение на примере. Первый способ аналитического задания графа в виде перечня подмножеств вершин.....	4
Лекция 2. Второй способ аналитического задания графа с помощью матрицы инцидентности. Понятия смежности и инцидентности. Принцип изоморфизма. Матрица смежности.....	9
Практическое занятие 1. Матрица инцидентности. Изоморфизм графов.....	13
Лекция 3. Элементы графа. Лемма о рукопожатиях. Маршрут графа. Цепь. Цикл. Путь и контур. Связный граф. Полный граф. Турнир. Плоские и планарные графы. Задача о трёх домах и трёх колодцах... ..	21
Лекция 4. Задача о полном графе, имеющем 5 вершин. Теорема Куратовского. Формула Эйлера для многогранников.....	28
Практическое занятие 2. Элементы графов и орграфов: путь, длина, источники, стоки, степени вершин. Деревья. Эйлеров цикл. Плоские и планарные графы.....	32
Лекция 5. Графы – деревья. Корень. Задача о соединении городов или построении “экономичного дерева”.....	38
Лекция 6. Задача о кёнигсбергских мостах. Эйлерова линия, граф и путь. Необходимые и достаточные условия существования эйлерова графа и пути.....	44
Практическое занятие 3. Эйлерова линия и эйлеров путь. Правило Тарри. Алгоритм Флёрри. Построение “экономичного дерева”.....	51
<u>Контрольная №1. Элементы графов. Изоморфизм. Построение циклов</u>	56
Лекция 7. Поиск кратчайшего пути между вершинами. Алгоритм Декстра.....	58
Практическое занятие 4. Поиск кратчайших путей между всеми вершинами с помощью алгоритма Декстра.....	64
Лекция 8. Проблема коммивояжёра. Минимальный цикл Гамильтона. Эффективные и неэффективные алгоритмы	74
Лекция 9. Алгоритм «самой близкой вставки».....	78
Практическое занятие 5. Проблема коммивояжёра. Алгоритм «самой близкой вставки». Выдача заданий РГР1: “Поиск экономичных путей”	81
Список литературы.....	86

Лекция 1. История возникновения. Основные понятия и их пояснение на примере. Первый способ аналитического задания графа в виде перечня подмножеств вершин

История возникновения. Существует много различных подходов к определению графа. Отдельные авторы при определении графа исключают возможность введения нескольких рёбер, соединяющих одни и те же вершины. Другие исключают наличие петель, т.е. рёбер, соединяющих вершину саму с собой, а потом, чтобы определить графы, вводятся специальные термины типа мультиграф и т.п. Таким образом, в настоящее время всё ещё не сложилось единого стандарта терминологии теории графов. Поэтому если вы откроете новую книгу, то внимательно проследите за введёнными автором понятиями и определениями [1].

Одним из важнейших разделов дискретной математики является теория графов. С их помощью описывается сложное строение физических, химических, социальных и т.д. объектов. Графы широко используются в градостроительстве при проектировании сетей водо-, газо-, тепло-, электроснабжения и в экономике, например, в «сетевом» планировании.

Датой рождения этой теории можно считать 1736 год, когда была опубликована статья Леонарда Эйлера, посвящённая решению головоломки под названием «Задача о кёнигсбергских мостах». Долгое время методы, аналогичные эйлеровым, использовались для исследования подобных развлекательных задач. Но в XIX веке Г.Кирхгоф и А.Кэли нашли им более достойное применение. Первый с помощью графов стал описывать электрические, а второй – химические «цепи» и «деревья» [2].

Существующее название закрепилось за этой наукой с 1936 года, после выхода в свет монографии венгерского математика Д.Кёнига. Термин «граф» происходит от греческого слова «пишу». Он говорит о

наглядной графической интерпретации основных понятий этой теории, во-первых, и о тесной связи её с геометрией, во-вторых. И действительно, этот раздел дискретной математики находится на стыке геометрии, топологии, комбинаторики и ряда других математических дисциплин и интенсивно использует их методы [2].

Основные понятия: граф, вершина, ребро, дуга, неориентированный граф, орграф. Объектом исследований теории графов является «граф», который определяется следующим образом.

Определение. Графом называется совокупность точек (объектов) и соединяющих их линий (связей). Точки графа при этом называются его вершинами, а связывающие их линии – рёбрами.

Пусть в графе имеется N вершин p_n ($n=1, 2, \dots, N$) и M рёбер u_m ($m=1, 2, \dots, M$). Тогда, подразумевая под P и U множества всех вершин $P=(p_n)$ и рёбер $U=(u_m)$, графом называют совокупность этих двух множеств. В этом случае он обозначается символом $\Gamma(P, U)$.

Если для рёбер графа существенно положение соединяемых ими вершин, то он называется ориентированным. В противном случае – неориентированным. У ориентированного графа, т.е. орграфа или направленного графа, рёбра имеют начало и конец, будем также называть такие рёбра дугами.

Рёбра ориентированного графа отмечают двумя буквами, обозначающими точки начала и конца. Аналогичная символика используется, как известно, в векторном исчислении.

Конечный граф. В случае, когда числа вершин N и рёбер M конечны, граф называется конечным.

Особенности различных связей элементов графа имеют свои наименования.

Смежные вершины и ребра. Смежными называют 2 вершины,

соединённые рёбрами, и рёбра, имеющие хотя бы одну общую вершину.

Степень или валентность вершины, правильный или однородный граф. Степенью или валентностью вершины p_n именуют число рёбер, соединяемых ею. Её обозначают символом $\rho(p_n)$. Правильным или однородным r -валентным графом является граф, все вершины которого имеют одинаковую степень, $\rho(p_n)=r$ для всех n .

Правильный нулевой или несвязный граф. Нулевым или несвязным он называется тогда, когда множество U пусто, т.е. когда в графе нет рёбер. В этом случае он состоит из одних вершин $\Gamma(P, \emptyset)=P$.

Полный граф. Полный граф – это граф, каждая пара различных вершин которого связана лишь одним ребром.

Петля, множественные рёбра, простой граф. Петля – линия, начинающаяся и заканчивающаяся в одной и той же вершине. Множественные рёбра – совокупность нескольких линий, соединяющих одни и те же вершины. Простым называется граф, не имеющий петель и множественных рёбер.

Пояснение основных понятий на примере. Для пояснения введённых понятий рассмотрим граф, изображённый на рис. 1 [2].

Обозначим его $\Gamma(P, U)$, полагая $P = (p_n)$ ($n= 1, 2, \dots, 8$) и $U = (u_m)$ ($m= 1, 2, \dots, 8$). Очевидно, в нём $N = 8$ и $M=8$.

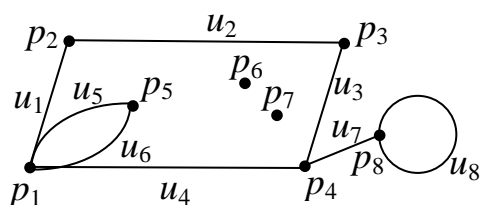


Рис. 1

Примерами смежных вершин здесь могут служить пары точек (p_1, p_2) и (p_2, p_3) , соединённых рёбрами u_1 и u_2 соответственно. Смежными являются и пары рёбер (u_1, u_2) и (u_2, u_3) , имеющих общие вершины: p_2 для

первой пары и p_3 для второй. Легко подсчитать степени всех вершин графа:

$$\rho(p_1) = 4, \rho(p_2) = \rho(p_3) = \rho(p_5) = 2, \rho(p_4) = \rho(p_8) = 3, \rho(p_6) = \rho(p_7) = 0.$$

$\Gamma(P, U)$ содержит три нулевые графа.

$\Gamma_1(p_6, \emptyset) = p_6$ есть точка p_6 . $\Gamma_2(p_7, \emptyset) = p_7$ есть точка p_7 . $\Gamma_3((p_6, p_7), \emptyset) = (p_6, p_7)$ есть совокупность этих двух точек.

В $\Gamma(P, U)$ имеются полные графы, например граф $\Gamma_4(P_1, U_1)$, где $P_1 = (p_1, p_4)$, $U_1 = (u_4)$. Есть петля $\Gamma_5(p_8, u_8)$, множественное (двойное) ребро $\Gamma_6((p_1, p_5), (u_5, u_6))$.

Способы задания графа: графический или геометрический и аналитический. Важнейший способ задания графа – графический. Его преимущества следуют из наглядности всех элементов графа, что позволяет быстро визуально анализировать его строение. Это явное превосходство метода предопределило его широкое использование. В первую очередь это относится к тем сферам применения графов, которые связаны с передачей какой-то информации большому числу людей. Например, схемы движений различных видов транспорта, эвакуации людей из помещений в чрезвычайных ситуациях, размещения экспозиций выставок и т.д. даются только в графическом виде, иначе их не сможет воспринять большая масса народа, что, неизбежно, создаст очевидные проблемы.

Однако у этого метода представления графов есть и свои недостатки. К ним относятся громоздкость и трудность машинного восприятия. Второе особенно важно при обработке графа с помощью ЭВМ. Это в первую очередь относится к задачам управления различными отраслями народного хозяйства страны.

Поэтому в теории графов разработаны и другие способы их задания. Существует несколько достаточно удобных методов аналитического представления графов, из которых наиболее удобными считаются следующие два.

Первый способ аналитического задания графа в виде перечня подмножеств вершин. Пусть не ориентированный граф имеет N вершин p_n . Рассмотрим в P подмножества $T(p_n)$, каждое из которых содержит точки, имеющие связь с p_n . $T(p_n)$ может содержать и саму точку p_n , что говорит о наличии в p_n петли. Возможен и случай i -кратного повторения какой-то точки p_n . Это бывает в тех случаях, когда ребро, связывающее точки p_n и p_k , является множественным, а точнее i -кратным. Записываются $T(p_n)$ в порядке точек P . Совокупность всех $T(p_n)$ и задаёт неориентированный граф $\Gamma(P, U)$; т.е. $\Gamma(P, U) = (T(p_n))$.

Для графа, изображённого на рис. 1, данный способ задания реализуется следующим образом. $\Gamma(P, U)$ записывается в виде перечня подмножеств $T(p_n)$, где $n= 1, 2, \dots, 8$:

$$T(p_1)=(p_2, p_4, p_5, p_5);$$

$$T(p_2)=(p_1, p_3);$$

$$T(p_3)=(p_2, p_4);$$

$$T(p_4)=(p_1, p_3, p_8);$$

$$T(p_5)=(p_1, p_1);$$

$$T(p_6)=T(p_7)=\emptyset;$$

$$T(p_8)=(p_4, p_8).$$

Следует иметь в виду, что существуют другие символы для обозначения $T(p_n)$. Например, Tr_n и T_n .

Лекция 2. Второй способ аналитического задания графа с помощью матрицы инцидентности. Понятия смежности и инцидентности. Принцип изоморфизма. Матрица смежности

Если первый метод задаёт $\Gamma(P, U)$ перечнем подмножеств множества P , то вполне естественно задать вопрос: «Нельзя ли задавать граф с помощью рёбер?» [2]. Оказывается, это возможно, и именно их использует для определения графа второй способ.

Понятия смежности и инцидентности. Если вершина p_n является концом ребра u_m (у ребра 2 конца), то говорят, что они (ребро и вершина) инцидентны. В то время как смежность представляет собой отношение между однородными объектами (вершинами или рёбрами или дугами), инцидентность – это отношение между разнородными объектами (вершинами и рёбрами, или вершинами и дугами). При рассмотрении орграфов различают положительную инцидентность (дуга исходит из вершины) и отрицательную инцидентность (дуга заходит в вершину) [3].

Второй способ аналитического задания графа с помощью матрицы инцидентности. Назовём матрицей инцидентности таблицу A , состоящую из N строк (вершины) и M столбцов (рёбра или дуги), в которой [4]:

1) для неориентированного графа

$a_{nm} = 1$, если вершина p_n инцидентна ребру u_m ;

$a_{nm} = 0$, если вершина p_n не инцидентна ребру u_m ;

2) для орграфа

$a_{nm} = 1$, если вершина p_n является началом дуги u_m ;

$a_{nm} = 0$, если вершина p_n не инцидентна дуге u_m ;

$a_{nm} = -1$, если вершина p_n является концом дуги u_m .

Отметим, что в процитированной книге М.С.Спириной [4] матрица инцидентности отличается от определённой в книге Б.М.Логинова [1], где строки соответствуют рёбрам, а столбцы вершинам. Кроме того, для вершины с петлёй соответствующий элемент матрицы в книге М.С.Спириной [4] берётся равным 1, а у А.Н.Кошева [3] берётся равным 0.

Так как ребро (дуга) может соединять одну или две конкретные точки графа, то каждый столбец матрицы инцидентности может содержать одну или две 1 (одну 1, или одну 1 и одну -1). Очевидно, если в m -м столбце имеется одна единица, то u_m является петлёй, если же имеются одинаковые столбцы, то их число определяет кратность множественного ребра.

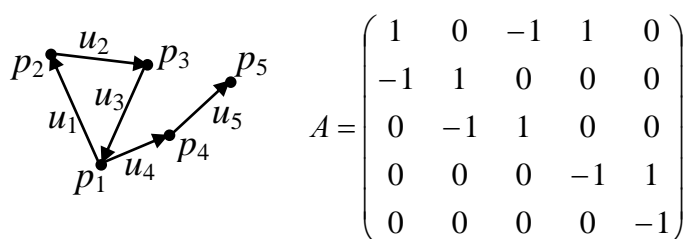
Из определения матрицы инцидентности следует, что она учитывает отдельные точки графа нулевыми строками. В строках может быть любое количество единиц или может вообще их не быть.

Примеры матриц инцидентности для неориентированного графа и орграфа. Пусть $\Gamma(P,U)$ имеет вид, изображённый на рис. 1. Матрица инцидентности этого графа имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} v \\ e \\ p \\ ш \\ и \\ н \\ ы \end{matrix}$$

$p \quad \tilde{e} \quad \tilde{b} \quad p \quad a$

Пусть, например, $\Gamma(P, U)$ имеет вид, изображённый на рисунке. Рядом изображена матрица инцидентности этого орграфа



В отличие от работы [2], где в обозначениях дуг используются обозначения векторов \vec{u}_i , мы пишем просто u_i .

Существуют и другие аналитические способы задания графа, например, через матрицу смежности. Этот способ мы рассмотрим в конце лекции.

Геометрический способ изображения графа и его восприятие весьма субъективны и в этом отношении изложенные два метода аналитического задания графов абсолютно безупречны: они позволяют легко определить эквивалентные графы.

Эквивалентные или изоморфные графы. 2 графа считаются эквивалентными или изоморфными, если, во-первых, у них одинаковые числа вершин и рёбер (дуг), а во-вторых, соответствующие, т.е. имеющие одинаковые номера рёбра (дуги) соединяют соответствующие вершины.

Способ доказательства изоморфизма двух графов с помощью матрицы инцидентности. Чтобы показать, что 2 графа изоморфны, используя матрицы инцидентности, надо, если матрицы не совпадают, перенумеровать вершины и рёбра одного графа, чтобы соответствующая матрица инцидентности стала совпадать с матрицей другого графа. То есть если после перестановки рёбер и столбцов 1-й матрицы она совпадает с другой, то соответствующие графы будут изоморфны.

Принцип изоморфизма. Для того, чтобы показать, что 2 графа изоморфны, изоморфизм из одного в другой должен быть найден. Для

того, чтобы показать, что 2 графа неизоморфны, должны быть найдены такие свойства графа, которыми обладает один граф, но не обладает другой [1].

Матрица смежности. Матрицей смежности вершин графа Γ с N вершинами называется матрица A равная $A=(a_{ij})_{N \times N}$, в которой элемент a_{ij} равен числу дуг (рёбер), идущих из p_i в p_j (соединяющих p_i и p_j).

При установлении изоморфизма двух графов по матрицам смежности путём изменения нумерации вершин одного графа надо учитывать, что при этом надо менять не только строки, но и одновременно соответствующие столбцы. Поэтому, по-видимому, непосредственно по матрицам смежности установить изоморфизм графов невозможно.

Задача 1. Построить матрицы смежности для неориентированного и ориентированного графов



Ответ:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача 2. Для матрицы инцидентности $n \times t$ (n вершин, t рёбер) сколько существует неизоморфных графов? Для неориентированных графов и орграфов? Учитывать, что элементы матрицы 0, 1 и 0, 1, -1 соответственно.

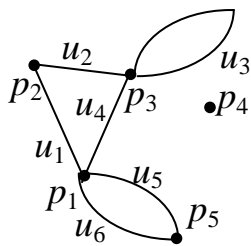
Практическое занятие 1. Матрица инцидентности. Изоморфизм графов

■ УПРАЖНЕНИЯ

Аудиторные задания

1. Построить матрицу инцидентности для неориентированного графа.

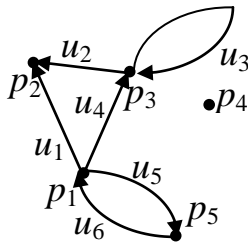
Ответ:



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Построить матрицу инцидентности для ориентированного графа.

Ответ:



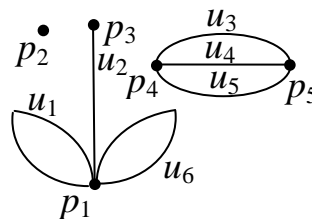
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Восстановить геометрическое представление графа по матрице инцидентности для:

а) неориентированного графа

Ответ:

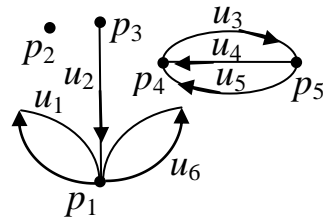
$$\begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & p_1 \\ & p_2 \\ & p_3 \\ & p_4 \\ & p_5 \end{matrix}$$



б) ориентированного графа

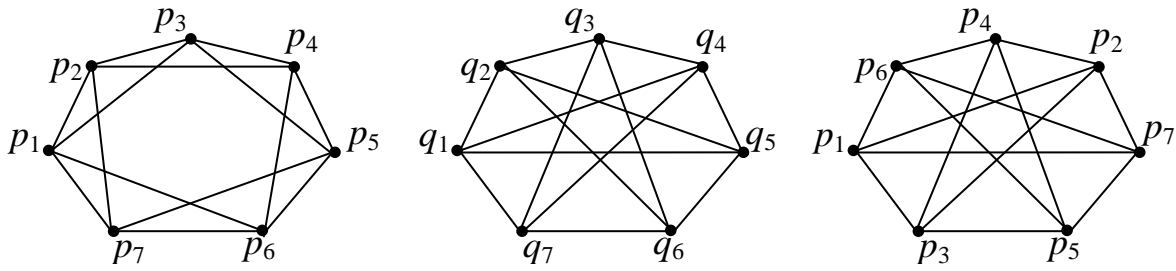
Ответ:

$$\begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ \left(\begin{array}{cccccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) & \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{matrix} \end{matrix}$$



4. Попробовать для двух неориентированных графов, представленных геометрически, показать их изоморфизм, задав соответствующую нумерацию вершин.

Ответ:



Решение. Проверим сначала, что число рёбер совпадает. Причём совпадение должно быть не только по сумме, но и по количеству рёбер у каждой пары вершин сравниваемых графов. То, что число рёбер совпадает, — очевидно.

$$\text{Число рёбер 1-го графа} = \frac{1}{2} \sum \rho_i = \frac{1}{2} (4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4) = 14.$$

$$\text{Число рёбер 2-го графа} = \frac{1}{2} \sum \rho_i = \frac{1}{2} (4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4) = 14.$$

Методом подбора находим новую нумерацию вершин 2-го графа, соответствующую вершинам 1-го графа. В качестве p_1 можем взять любую из точек q_i . Пусть $p_1 = q_1$. В качестве p_2 пробуем взять q_2 . Так как в первом графе p_1 и p_2 соединены с p_7 , а на втором с q_5 , то $q_5 = p_7$. Рассуждая подобным образом, приходим к противоречию. Поэтому в качестве p_2 нельзя брать q_2 . В конце концов находим, что в качестве p_2 можно взять q_4 .

В этом случае соответствие остальных вершин p_i и q_j находится, что показано на рисунке. Кстати, возможен и другой вариант, когда в качестве p_2 берётся q_5 . Учитывая, что в качестве p_1 можно было взять 7 вариантов точек, получаем $2 \times 7 = 14$ вариантов перенумерации вершин 2-го графа, показывающих изоморфизм двух графов.

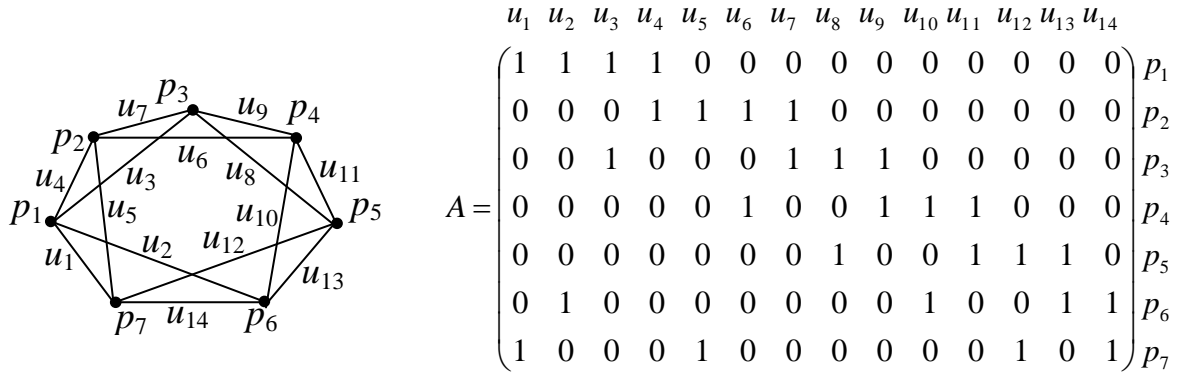
5. Показать изоморфизм обоих графов задачи 4 с помощью матриц инцидентности. Для этого записать матрицы инцидентности для обоих графов задачи 4 и найти порядок перестановки столбцов

$$(1,2,3,\dots) \rightarrow (\dots) \text{ и строк } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vdots \end{pmatrix}, \text{ которые переводят одну матрицу}$$

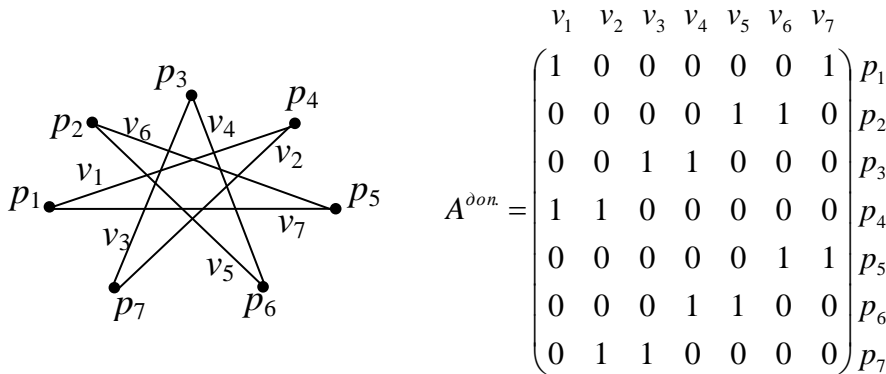
в другую. После этого расставить новую нумерацию вершин и рёбер 2-го графа, соответствующую вершинам и рёбрам 1-го графа. В действительности осуществить это сложно, поскольку мы не знаем алгоритма. Этот алгоритм, в принципе, можно создать. Например, путём перебора, но тогда надо этот алгоритм осуществлять на компьютере, поскольку алгоритм перебора очень трудоёмкий, да и на компьютере при большом количестве вершин и рёбер, возможно, может потребоваться много времени. Предлагаю, всё же сделать вручную, но для графов-дополнений, которые в данной задаче являются более простыми. Для графа $\Gamma(P,U)$ дополнение графа $\Gamma^{don.}(P,U^{don.})$ имеет те же вершины, что и граф $\Gamma(P,U)$, а ребро между p_i и p_j тогда и только тогда, когда в графе $\Gamma(P,U)$ ребро между p_i и p_j отсутствует. После нахождения соответствия вершин для графов-дополнений, если таковое соответствие существует, такое же соответствие следует использовать для исходных графов. Если у них рёбра не множественные, то это соответствие будет искомым. Если у них

есть множественные рёбра, то надо будет проверить, что их количество совпадает у соответствующих вершин.

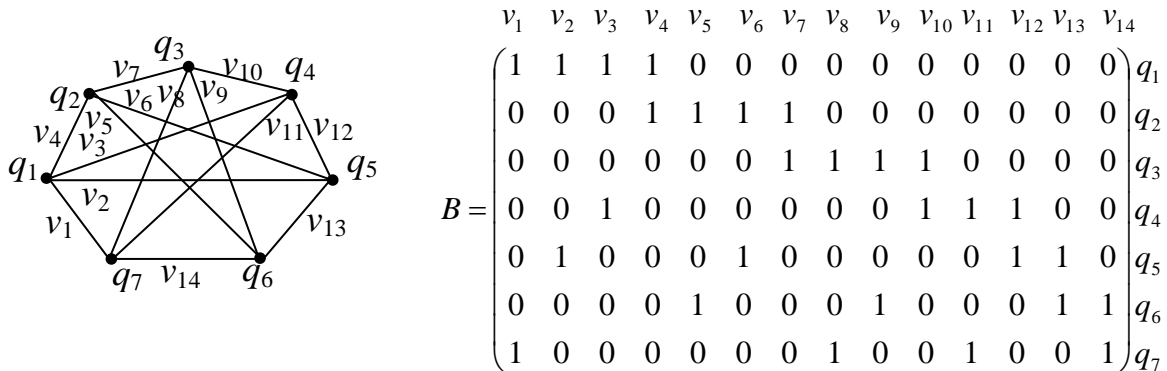
Решение. Изобразим на первом графе рёбра и получим матрицу инцидентности



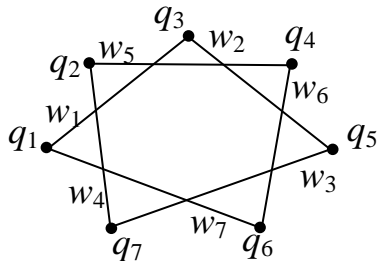
Изобразим соответствующий граф-дополнение и получим матрицу инцидентности для него



Изобразим на втором графе рёбра и получим матрицу инцидентности



Изобразим соответствующий граф-дополнение и получим матрицу инцидентности для него



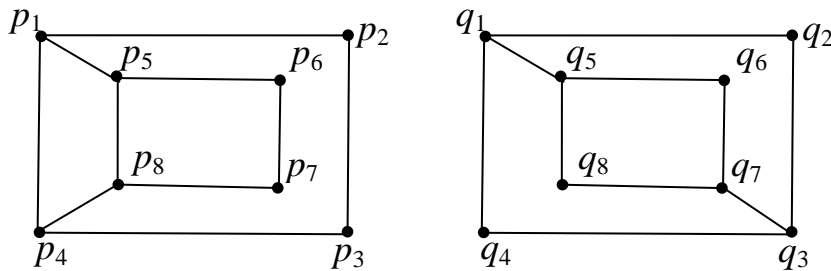
$$B^{don} = \begin{matrix} & \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 & w_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Найдём порядок перестановки строк, который переводит эту матрицу B^{don} в матрицу B_1^{don} , совпадающую с A^{don} .

Получили следующее соответствие вершин: $p_1 \rightarrow q_1, p_2 \rightarrow q_4, p_3 \rightarrow q_7,$
 $p_4 \rightarrow q_3, p_5 \rightarrow q_6, p_6 \rightarrow q_2$ и $p_7 \rightarrow q_5.$

$$B_1^{don} = \begin{matrix} & \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 & w_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} q_1 \\ q_4 \\ q_7 \\ q_3 \\ q_6 \\ q_2 \\ q_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

6. Показать, что два неориентированных графа неизоморфны



Решение 1. Проверим сначала, что степени вершин совпадают. Да, это так. Если бы степени вершин у двух графов отличались, то это сразу показало бы отсутствие изоморфизма.

Можно заметить, что на первом графе имеется последовательность из восьми смежных рёбер, возвращающаяся к начальной вершине. В этом цикле все вершины проходятся по одному разу. Например, его можно задать перечислением вершин $p_1, p_2, p_3, p_4, p_8, p_7, p_6, p_5, p_1.$ При этом некоторые рёбра остались неиспользованными. Можно эту же

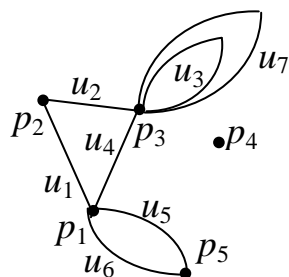
последовательность рёбер начинать с любой другой вершины, в которой последовательность рёбер и закончится. Это означает, что каждая вершина в данном цикле имеет только два смежных ребра. Чтобы графы были изоморфны, необходимо, но не достаточно, чтобы аналогичная последовательность имела во втором графе.

Предположим, что это так. Во втором графе вершины q_2 и q_4 имеют каждая только по два смежных ребра, следовательно, эти четыре ребра должны быть в последовательности рёбер соответствующего цикла, но тогда для перехода к вершинам q_5, q_6, q_7, q_8 необходимо использовать ребро (q_1, q_5) или (q_3, q_7) . Следовательно, в соответствующей последовательности вершин и рёбер второго графа будет вершина, из которой исходят три ребра, чего быть не может. В цикле из каждой вершины может исходить только 2 ребра. Следовательно, наше предположение не верно, т.е. два графа не изоморфны.

Решение 2. Это решение аналогично предыдущему, но сделано с использованием понятия “гамильтонов цикл”. Это цикл, проходящий через все вершины по одному разу. У первого графа имеется гамильтонов цикл $p_1, p_2, p_3, p_4, p_8, p_7, p_6, p_5, p_1$. Чтобы был изоморфизм, второй граф тоже должен иметь гамильтонов цикл. Так как вершины q_2, q_4, q_6, q_8 — двухвалентны, то все рёбра, исходящие из них, должны присутствовать в этом гамильтоновом цикле. Для вершин q_2, q_4 это четыре ребра $q_1-q_2-q_3-q_4-q_1$. Для вершин q_6, q_8 это четыре ребра $q_5-q_6-q_7-q_8-q_5$. Так как в гамильтоновом цикле в каждой вершине должны быть использованы только 2 ребра, следовательно, рёбра q_1-q_5 и q_3-q_7 не могут быть использованы. Но тогда от вершин q_1, q_2, q_3, q_4 невозможно перейти к вершинам q_5, q_6, q_7, q_8 . Следовательно, предположение, что 2-й граф имеет гамильтонов цикл, неверно. Графы не изоморфны, так как обладают разными свойствами.

Домашние задания

1. Построить матрицу инцидентности для неориентированного графа.

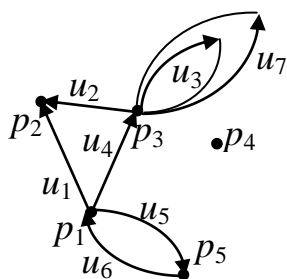


Ответ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Построить матрицу инцидентности для ориентированного графа.

Ответ:



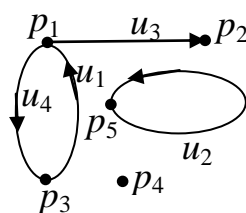
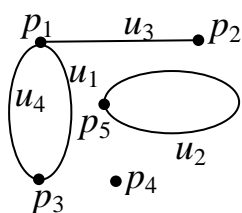
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Восстановить геометрическое представление по матрицам инцидентности неориентированного и ориентированного графов.

$$\begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{matrix} \end{matrix}$$

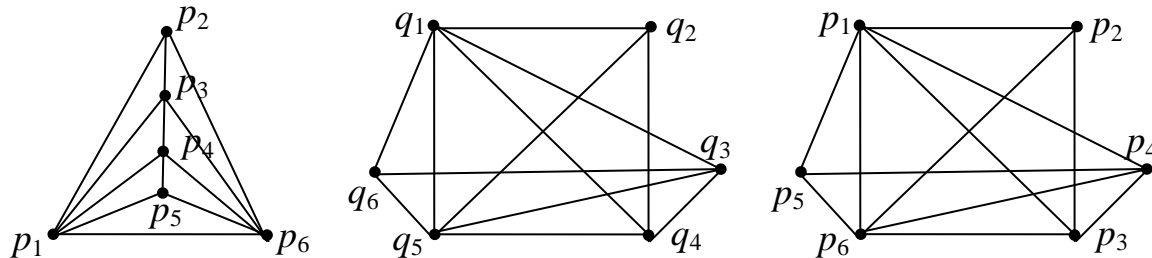
$$\begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{matrix} \end{matrix}$$

Ответ:



4. Попробовать для двух неориентированных графов, представленных геометрически, показать их изоморфизм, задав соответствующую нумерацию вершин.

Ответ:



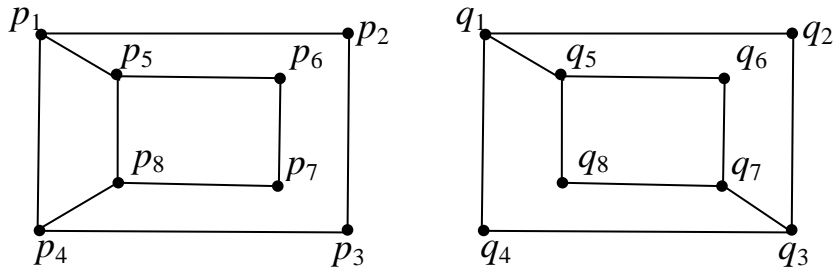
Решение. Проверим сначала, что число рёбер совпадает. Причём совпадение должно быть не только по сумме, но и по количеству рёбер у каждой пары вершин сравниваемых графов. То, что число рёбер совпадает, — очевидно.

$$\text{Число рёбер 1-го графа} = \frac{1}{2} \sum \rho_i = \frac{1}{2} (5+3+4+4+3+5) = 12.$$

$$\text{Число рёбер 2-го графа} = \frac{1}{2} \sum \rho_i = \frac{1}{2} (5+3+4+4+5+3) = 12.$$

Методом подбора находим новую нумерацию вершин 2-го графа, соответствующую вершинам 1-го графа.

5. Показать изоморфизм обоих графов задачи 4 с помощью матриц инцидентности. Для этого записать матрицы инцидентности для обоих графов задачи 4 и найти порядок перестановки столбцов и строк, которые переводят одну матрицу в другую. После этого расставить новую нумерацию вершин и рёбер 2-го графа, соответствующую вершинам и рёбрам 1-го графа.
6. Показать, что два неориентированных графа неизоморфны, путём поиска соответствующей перенумерации вершин или другим способом.



Решение 1. Последовательности вершин p_1, p_5, p_8, p_4, p_1 , образующей цикл, в случае изоморфизма графов должна соответствовать последовательность, включающая вершины q_1, q_5, q_3, q_7 , так как только эти вершины имеют степени, совпадающие со степенями вершин p_1, p_5, p_8, p_4 . Но эти четыре вершины q_1, q_5, q_3, q_7 , очевидно, не могут быть соединены четырьмя рёбрами в цикл, как вершины p_1, p_5, p_8, p_4 . Следовательно, графы не изоморфны.

Решение 2. Вершина p_1 , степени 3, связана рёбрами с двумя вершинами p_4 и p_5 , со степенями также 3. Аналогичной p_1 вершины среди вершин q_i нет. Например, вершина q_1 , степени 3, связана ребром только с одной вершиной степени 3. Таким образом, оба графа имеют различные свойства и, следовательно, графы не изоморфны.

Лекция 3. Элементы графа. Лемма о рукопожатиях. Маршрут графа. Цепь. Цикл. Путь и контур. Связный граф. Полный граф. Турнир. Плоские и планарные графы. Задача о трёх домах и трёх колодцах

Элементы графа: висячая или концевая и изолированная вершины. Висячее ребро. Степенью или валентностью вершины p_n графа Γ , обозначаемой через d_n , называют число рёбер (дуг), инцидентных этой вершине. Вершина степени 1 называется висячей или концевой. Ребро, инцидентное висячей вершине, называется висячим. Вершина степени 0

называется изолированной. По определению петля при вершине p_n , добавляет 2 в степень соответствующей вершины.

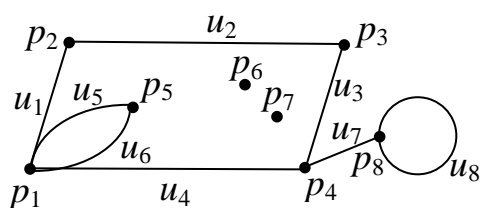


Рис. 1

Сумма степеней вершин графа. В графе Γ на рис. 1 видно, что сумма степеней вершин графа равна 16 и равна удвоенному числу рёбер 8. Таким образом, сумма степеней вершин графа Γ равна удвоенному числу рёбер графа Γ и, следовательно, является чётным числом.

Пусть граф Γ (без петель и изолированных точек) имеет N вершин и M рёбер. Поскольку каждое ребро инцидентно двум вершинам, оно добавляет двойку к сумме степеней вершин графа, поэтому сумма

$$\sum_{n=1}^N d_n = 2M.$$

Если граф имеет петли и изолированные точки, формула также справедлива, так как изолированная точка добавляет 0 к сумме степеней вершин графа, а петля добавляет двойку.

Число вершин нечётной степени. Лемма о рукопожатиях. Более того, можно показать, что число нечётных вершин, т.е. вершин нечётной степени, также чётно. Действительно,

$$\sum \text{степ. нечёт. верш.} = \sum \text{степ. верш.} - \sum \text{степ. чёт. верш.} = 2M - \sum \text{степ. чёт. верш.}$$

$$\Rightarrow \sum \text{степ. нечёт. верш.} = \text{чётное число.}$$

Поскольку в сумме стоят нечётные числа, то чтобы сумма была чётной, количество слагаемых должно быть чётным.

Итак: число нечётных вершин всегда чётно.

Это утверждение справедливо и в том случае, если граф вовсе не содержит нечётных вершин, так как 0 является числом чётным.

Этот результат, известный ещё более двухсот лет назад Эйлеру, часто называют леммой о рукопожатиях. Лемма утверждает, что если несколько человек обменялись рукопожатиями, то общее число пожатых рук обязательно чётно, ибо в каждом рукопожатии участвуют две руки (при этом каждая рука считается столько раз, сколько она участвовала в рукопожатиях).

Бывают графы, у которых все вершины имеют одинаковые степени $d_1 = d_2 = \dots = d_n = r$.

Такой граф, как уже было сказано в лекции 1, называется правильным или однородным графом степени r . Примерами однородных графов являются куб и тетраэдр.

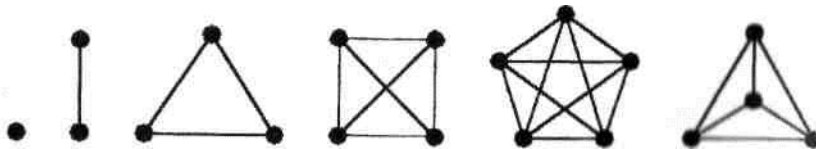
Маршрут графа. Цепь. Цикл. Простой, сложный и элементарный циклы. Маршрут в графе Γ представляет собой конечную чередующуюся последовательность вершин и рёбер. Маршрут называется открытым, если его концевые вершины различны, в противном случае он называется замкнутым. Маршрут называется цепью, если все его рёбра различны. Цепь называется элементарной, если при обходе по какому-нибудь направлению каждая вершина цепи встречается только один раз. Замкнутый маршрут образует цикл. Цикл может быть простым, если он содержит отличные друг от друга рёбра, сложным – в противном случае, элементарным, если при обходе по какому-нибудь направлению каждая вершина цикла встречается только один раз. Очевидно, нет смысла вводить для цепи термин “простая цепь”, если термин “простой”, как в определении графа и цикла, означает отсутствие повторяющихся рёбер.

Путь и контур. Длина пути и контура. Длина петли. Последовательность дуг, при которой конец одной дуги является началом

другой, называется путём. Если начальная и конечная точки пути совпадают, образуется контур. Длиной пути (или контура) называют число дуг, которые его образуют. Петля – контур единичной длины. Будем также под длиной пути от одной вершины до другой понимать количество рёбер, входящих в соответствующий маршрут. То есть будем применять термин “длина пути” не только к орграфам. Во всех случаях для орграфов и для неориентированных графов дуги и рёбра будем считать столько раз, сколько раз они входят в путь или маршрут.

Связный граф. Граф называется связным, если любая пара вершин соединена маршрутом. Несвязный граф состоит из нескольких отдельно связных графов.

Полный граф. Граф называется полным, если любая пара его вершин соединена ровно одной дугой или ребром.



Число рёбер полного графа с N вершинами. Если полный граф G имеет N вершин, то он обозначится через K_N . Легко видеть, что K_N имеет $N(N-1) / 2$ рёбер.

Простым графом называют граф, который не имеет петель или кратных рёбер. **Является ли полный граф простым и однородным графом?** Полный граф – это простой граф. Он однозначно задаётся числом своих вершин. Полный граф с N вершинами является однородным степени $(N-1)$, так как из каждой его вершины выходит $(N-1)$ рёбер, ведущих к каждой из остальных $(N-1)$ вершин.

Турнир. Полный ориентированный граф называется турниром. Этот термин получил своё название от соревнований по круговой системе, графическое представление которых имеет структуру полного ориентированного графа. В турнирах по круговой системе играют

несколько команд, каждая со всеми остальными по одному разу. Игра по правилам не может закончиться вничью. В представлении турнира по круговой системе ориентированным графом, командам соответствуют вершины, и дуга (p_1, p_2) присутствует в графе, если соответствующая p_1 команда победила команду, представленную вершиной p_2 . Очевидно, что в таком ориентированном графе нет параллельных дуг и петель и между каждыми двумя вершинами имеется точно одна дуга. Таким образом, граф является полным, а следовательно, и турниром.

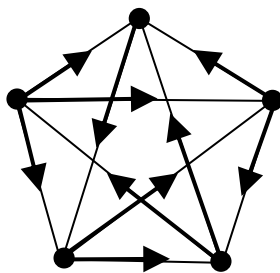


Рис. 2

Пример турнира приведён на рис. 2. Участвующие в турнире команды можно ранжировать в соответствии с количеством очков. Количество очков команды соответствует числу побеждённых ею противников.

Введём определение последовательности очков турнира. Последовательностью очков турнира на N вершинах называется последовательность (S_1, S_2, \dots, S_N) , в которой каждое S_n – число дуг, исходящих из n -й вершины турнира.

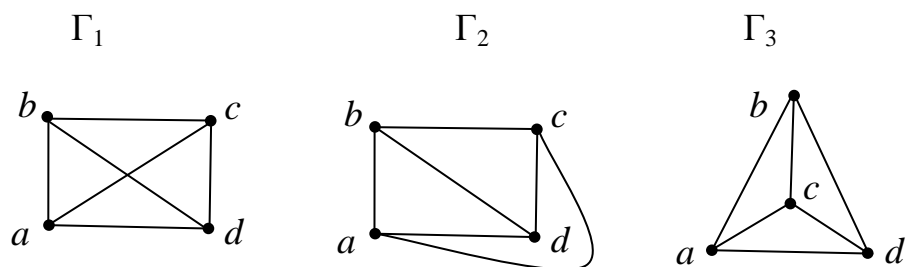
Плоские и планарные графы. Граф, который можно начертить на плоскости так, чтобы рёбра его пересекались только в его вершинах, называется планарным графом. Его изображение на плоскости без пересечения рёбер назовём плоским графом. Граф, который не является планарным, называется непланарным.

Заметим что в общем случае рёбра графа могут пересекаться между

собой, причём точки пересечения не обязательно являются вершинами графа.

Интегральная микросхема состоит из слоёв миниатюрных микросхем, впечатанных в пластину. В такой ситуации крайне важно исключить пересечение проводов в местах, не предназначенных для соединений. Если изобразить места указанных соединений вершинами графа, то возникнет задача построения графа с непересекающимися рёбрами. Важно отметить, что нас интересует возможность построения графа с непересекающимися рёбрами.

Можно также сказать, что граф, изоморфный плоскому графу, называется планарным. Например, все три изоморфных графа $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ на следующем рисунке планарные, но только Γ_2 и Γ_3 – плоские.



Планарный граф на рис. 3а можно изобразить в виде изоморфных плоских графов (рис. 3б и рис. 3в):

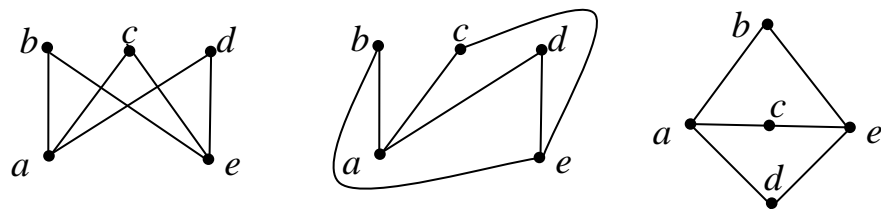


Рис. 3а

Рис. 3б

Рис. 3в

Естественно поставить следующий вопрос: всегда ли можно изобразить плоский граф так, чтобы все его рёбра были прямолинейными отрезками?

Этот вопрос остаётся открытым.

Задача о трёх домах и трёх колодцах. На одном участке земли были построены три дома и вырыты три колодца для их обитателей.

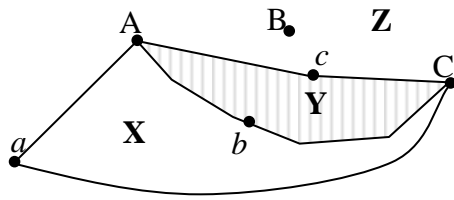


Рис. 4

Природа страны и её климат таковы, что колодцы часто пересыхают, поэтому важно, чтобы от каждого из домов имелся доступ к каждому из трёх колодцев.

Спустя некоторое время обитатели домов

А, В, и С серьёзно поссорились друг с другом и решили проложить дорожки к трём колодцам a, b, c так, чтобы по пути к колодцам и обратно им не приходилось встречать друг друга.

А возможно ли это? Является ли соответствующий граф плоским, т.е. можно ли провести дорожки так, чтобы они не пересекались нигде, кроме вершин графа А, В, С и a, b, c ? С помощью непосредственной проверки легко убедиться, что всегда можно провести 8 тропинок, которые, кроме указанных точек, других точек пересечения иметь не будут, а девятая тропинка обязательно пересечёт хотя бы одну из них. На рис. 4 показан один из возможных вариантов проведения тропинок. Решим эту задачу посредством рассуждений.

От домиков А и С проведём требуемые тропинки. Полученный граф разделит плоскость на области: **X**, **Y**, **Z**.

Легко заметить, что домик В может находиться в одной из этих областей.

Рассмотрим каждый случай в отдельности.

1. Если домик В находится в области **Z**, как изображено на рисунке, то от него невозможно провести тропинку к b , которая не пересекалась бы ни с одной из уже проведённых тропинок.

2. Если домик В находится в области **Y**, то от него невозможно провести тропинку к объекту a , которая не пересекалась бы ни с одной из

уже проведённых.

3. Если домик В находится в области X, то от него невозможно провести тропинку к объекту с, которая не пересекалась бы ни с одной из уже проведённых.

Итак, получается, что граф, выражающий ситуацию данной задачи, плоским быть не может. А это значит, что задача неразрешима.

Лекция 4. Задача о полном графе, имеющем 5 вершин. Теорема Куратовского. Формула Эйлера для многогранников

Задача о полном графе, имеющем 5 вершин. Доказать, что любой полный граф, имеющий пять вершин, неплоский.

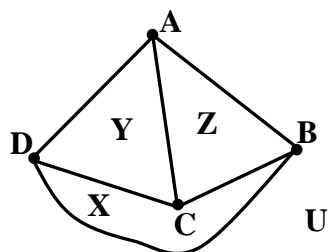


Рис. 1

Решение. Вершины графа обозначим буквами А, В, С, D, К. Если по точкам А, В, С и D построим полный граф, то он будет плоским и разделит плоскость на четыре области (рис. 1). Обозначим эти области буквами X, Y, Z, U. Тогда точка К будет расположена в одной из этих областей.

Проведя рассуждения, аналогичные предыдущим, получаем, что полный граф с пятью вершинами действительно плоским быть не может.

Графы Куратовского. Условия, при которых граф будет плоским

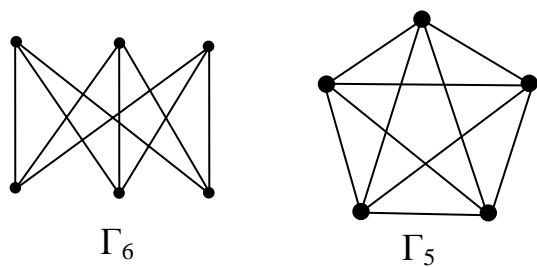


Рис. 2

Граф, рассматриваемый в задаче о трёх домиках и колодцах, а также полный граф с пятью вершинами (см. рис. 2) позволяют определить целое

семейство непланарных графов и играют особую роль в определении того, является ли данный граф планарным или нет. Эти два графа, изображённые на рис. 2, называются графами Куратовского. Критерий, характеризующий плоские графы, был предложен в 1930 г. польским математиком Куратовским. Чтобы сформулировать его, мы должны сначала объяснить, что мы понимаем под расширением и сжатием графа.

Расширение и сжатие графа. Предположим, что на некоторые рёбра графа мы поставили новые вершины, так что эти рёбра стали элементарными цепями, состоящими из нескольких рёбер. Эту операцию мы назовём расширением графа. На рис. 3 приведён пример расширения, переводящего граф Γ_1 , содержащий всего четыре вершины, в граф Γ_2 .

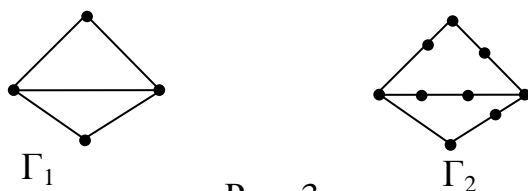


Рис. 3

Обратно, предположим, что мы имеем такой граф, как Γ_2 , на рис. 3, содержащий элементарные цепи, разделённые на рёбра, причём из промежуточных вершин не исходит никаких других рёбер. Посредством обратной операции он может быть сжат в такой граф, на котором его элементарные цепи становятся рёбрами. Так, граф Γ_2 на рис. 3 может быть сжат в граф Γ_1 путём удаления вершин из соответствующих элементарных цепей, соединяющих их вершины. Теперь сформулируем теорему Куратовского.

Теорема Куратовского (без доказательства). Для того, чтобы граф был планарным, т.е., чтобы его можно было бы изобразить плоским графом, необходимо и достаточно, чтобы он не содержал внутри себя никакого графа, который можно было бы сжать до графов Куратовского (т.е. до пятиугольного графа Γ_5 или шестиугольного графа Γ_6).

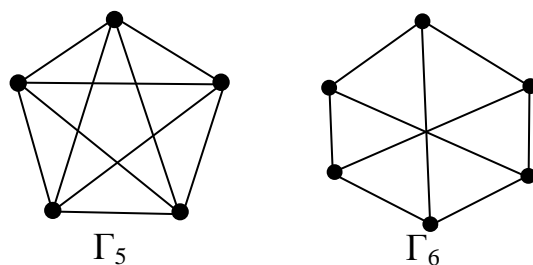


Рис. 4. Графы Куратовского

Заметим, что всякий плоский граф может быть изображён на поверхности сферы. Очевидно, что в этом случае такое изображение будет уже не плоским, а планарным графом. Существует много способов такого представления. Например, можно воспользоваться для этого стереографической проекцией, этот метод часто используется картографами, особенно для составления карт районов земного шара, лежащих вблизи полюсов.

Формула Эйлера для многогранников

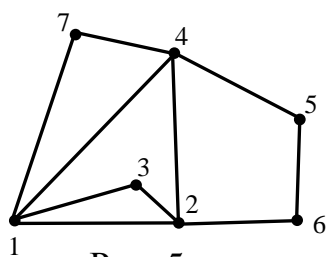


Рис. 5

Грань плоского графа. В качестве характеристики плоского представления графа вводится понятие грани. Гранью в плоском представлении графа называется часть плоскости, ограниченная простым циклом и не содержащая внутри других циклов. На рис. 5 имеем плоское представление графа с четырьмя гранями: $(1,7,4,1)$, $(1,2,3,1)$, $(1,3,2,4,1)$, $(2,6,5,4,2)$. Часть плоскости, ограниченная простым циклом $(1,2,4,1)$, гранью не является, так как содержит внутри себя цикл $(1,2,3,1)$.

Простой цикл, ограничивающий грань, назовём границей грани. Две грани будем называть соседними, если их границы имеют хотя бы одно общее ребро.

Простой цикл, ограничивающий грань, назовём границей грани. Две грани будем называть соседними, если их границы имеют хотя бы одно общее ребро.

Бесконечная грань. В качестве грани можно рассматривать и часть плоскости, расположенную "вне" плоского представления графа; она

ограничена "изнутри" простым циклом и не содержит в себе других циклов. Эту часть плоскости называют "бесконечной" гранью. Всякое плоское представление графа либо не имеет бесконечной грани, либо имеет в точности одну бесконечную грань. В плоском представлении дерева и леса за грань принимают всю плоскость (рис. 6). Графы – дерево и лес – рассмотрим в будущем.

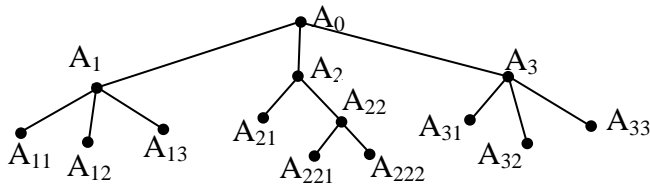


Рис. 6

В дальнейшем не будем делать различия между понятиями "граф, уложенный на плоскости" и "граф, изображённый на поверхности сферы".

Плоские графы образуют на плоскости многоугольные сети.

Для плоских многогранников существует одно интересное соотношение, впервые доказанное Эйлером и известное под названием формулы Эйлера для многогранников. Она справедлива для всякого связного плоского графа.

Обозначим через v , p , g соответственно число вершин, рёбер и граней такого графа G . Теорема Эйлера утверждает, что всегда

$$v - p + g = 2.$$

Доказательство. Формула Эйлера очевидна в том простейшем случае, когда рассматривается только один многоугольник, имеющий n рёбер. В этом случае $v=p=n$, $g = 2$, и формула Эйлера действительно имеет место. Для доказательства справедливости этой формулы в общем случае мы воспользуемся методом математической индукции, а именно покажем, что если она справедлива для графов, имеющих g граней, то она также будет верна и для графов с $(g+1)$ гранями. Многоугольные графы

можно строить, последовательно добавляя по одной грани "извне". Предположим, что Γ произвольный граф, имеющий v вершин, p рёбер и γ граней, и что для чисел v, p, γ справедлива формула Эйлера. Добавим новую грань, проводя по грани Γ_∞ некоторую элементарную цепь, соединяющую 2 вершины максимального цикла графа Γ . Если эта элементарная цепь имеет l рёбер, то нам придётся добавить $(l - 1)$ новых вершин и одну новую грань. Но тогда ясно, что формула Эйлера останется справедливой и для нового графа, так как

$$v' - p' + \gamma' = (v + l - 1) - (p + l) + (\gamma + 1) = v - p + \gamma .$$

Пример. Проверьте формулу Эйлера для графа, изображённого на рис. 7.

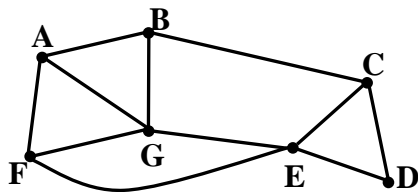


Рис. 7

$$v = 7;$$

$$p = 11;$$

$$\gamma = 6 \text{ (включая } \Gamma_\infty \text{)}.$$

$$\text{Значит } v - p + \gamma = 2.$$

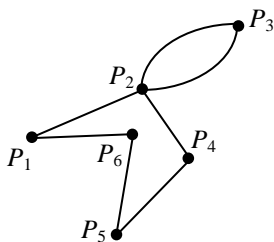
Практическое занятие 2. Элементы графов и орграфов: путь, длина, источники, стоки, степени вершин. Деревья. Эйлеров цикл.

Плоские и планарные графы

■ УПРАЖНЕНИЯ

Аудиторные задания

1. Для неориентированного графа



1) построить матрицу инцидентности;

2) указать степени вершин графа;

3) найти длину маршрута из вершины p_2 в вершину p_5 , составить маршруты длины 5, указать все цепи и элементарные цепи, соединяющие вершину p_2 и вершину p_5 ;

4) построить простой цикл, содержащий вершину p_4 ;

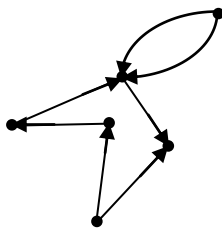
5) найти цикломатическое число графа $\gamma = M - N + 1$, равное увеличенной на 1 разности между числом рёбер и числом вершин графа;

6) определить вид заданного графа;

7) является ли граф эйлеровым, т.е. содержит ли цикл, содержащий все рёбра графа, причём каждое ребро в точности по одному разу?

8) существует ли эйлеров путь в графе, т.е. такой путь, когда все рёбра проходятся по одному разу, но без возвращения в исходную точку?

2. Для ориентированного графа



1) обозначить вершины и ориентированные рёбра;

2) построить матрицу инцидентности;

3) определить степень входа и степень выхода каждой вершины графа. Имеются ли здесь источники и стоки?

3. Для неориентированного графа, заданного матрицей инцидентности

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) восстановить геометрическое представление;

2) указать степени вершин графа;

3) найти длину пути из вершины p_2 в вершину p_5 , составить маршруты длины 5, указать все цепи и элементарные цепи, соединяющие вершину p_2 и вершину p_5 ;

4) построить простой цикл, содержащий вершину p_4 ;

5) найти цикломатическое число графа;

6) определить вид заданного графа.

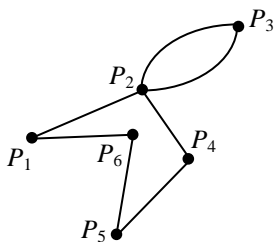
4. Для ориентированного графа, заданного матрицей инцидентности

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) восстановить геометрическое представление;

2) определить степень входа и степень выхода каждой вершины графа. Имеются ли здесь источники и стоки?

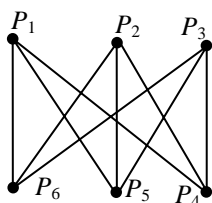
5. Для неориентированного графа



Что из приведённого ниже является путём в графе? Которые из них являются простыми путями? Приведите длину каждого из путей:

1) $p_4p_1p_2p_3p_6p_2$; 2) $p_1p_2p_3p_2p_4p_2$; 3) $p_1p_2p_3p_4p_5p_6p_1$; 4) $p_2p_4p_3p_2$.

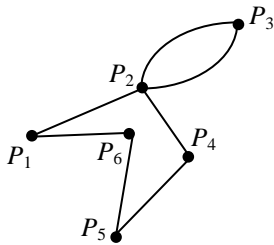
6. Для неориентированного графа



- 1) определить степени вершин и по ним число рёбер графа;
- 2) что из приведённого ниже является путём в графе? Которые из них являются простыми путями? Приведите длину каждого из путей.

а) $p_1p_5p_2p_4p_3p_6$; б) $p_1p_5p_2p_5p_3p_4p_2p_6$; в) $p_1p_6p_5p_1p_6p_5p_3$; г) $p_6p_5p_3p_4p_5p_1$.

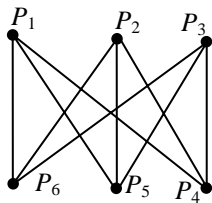
7. Для неориентированного графа



Что из приведённого ниже является циклом в графе? Которые из них являются простыми циклами?

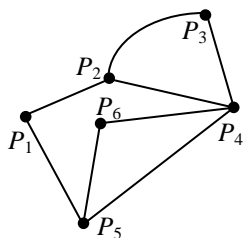
- 1) $p_4p_1p_2p_3p_6p_2p_5p_4$; 2) $p_4p_5p_6p_1p_2p_3p_4$; 3) $p_1p_2p_3p_6p_5p_2p_6p_3p_1$; 4) $p_2p_6p_3p_5p_4p_2p_6$.

8. Является ли следующий граф планарным?



Домашние задания

1. Для неориентированного графа



- 1) построить матрицу инцидентности;
- 2) указать степени вершин графа;
- 3) найти длину маршрута из вершины p_2 в вершину p_5 , составить

маршруты длины 5, указать все цепи и элементарные цепи, соединяющие вершину p_2 и вершину p_5 ;

4) построить простой цикл, содержащий вершину p_4 ;

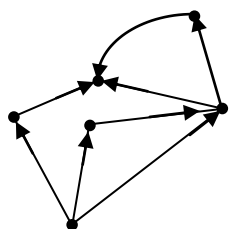
5) найти цикломатическое число графа $\gamma = M - N + 1$, равное увеличенной на 1 разности между числом рёбер и числом вершин графа;

6) определить вид заданного графа;

7) является ли граф эйлеровым, т.е. содержит ли цикл, содержащий все рёбра графа, причём каждое ребро в точности по одному разу?

8) существует ли эйлеров путь в графе, т.е. такой путь, когда все рёбра проходятся по одному разу, но без возвращения в исходную точку?

2. Для ориентированного графа



1) обозначить вершины и ориентированные рёбра;

2) построить матрицу инцидентности;

3) определить степень входа и степень выхода каждой вершины графа. Имеются ли здесь источники и стоки?

3. Для неориентированного графа, заданного матрицей инцидентности

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) восстановить геометрическое представление;

2) указать степени вершин графа;

3) найти длину пути из вершины p_2 в вершину p_5 , составить

маршруты длины 5, указать все цепи и элементарные цепи, соединяющие вершину p_2 и вершину p_5 ;

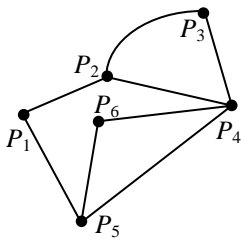
- 4) построить простой цикл, содержащий вершину p_4 ;
- 5) найти цикломатическое число графа;
- 6) определить вид заданного графа.

4. Для ориентированного графа, заданного матрицей инцидентности

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1) восстановить геометрическое представление;
- 2) определить степень входа и степень выхода каждой вершины графа. Имеются ли здесь источники и стоки?

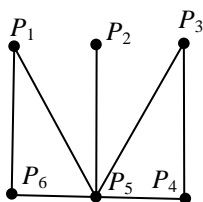
5. Для неориентированного графа



Что из приведённого ниже является путём в графе? Которые из них являются простыми путями? Приведите длину каждого из путей:

- 1) $p_4p_1p_2p_3p_6p_2$; 2) $p_1p_2p_3p_2p_4p_2$; 3) $p_1p_2p_3p_4p_5p_6p_1$; 4) $p_2p_4p_3p_2$.

6. Для неориентированного графа

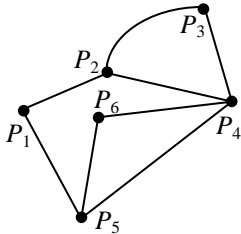


- 1) определить степени вершин и по ним число рёбер графа;

2) что из приведённого ниже является путём в графе? Которые из них являются простыми путями? Приведите длину каждого из путей:

а) $p_1p_5p_2p_4p_3p_6$; б) $p_1p_5p_2p_5p_3p_4p_2p_6$; в) $p_1p_6p_5p_1p_6p_5p_3$; г) $p_6p_5p_3p_4p_5p_1$.

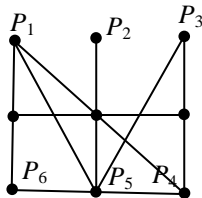
7. Для неориентированного графа



Что из приведённого ниже является циклом в графе? Которые из них являются простыми циклами?

1) $p_4p_1p_2p_3p_6p_2p_5p_4$; 2) $p_4p_5p_6p_1p_2p_3p_4$; 3) $p_1p_2p_3p_6p_5p_2p_6p_3p_1$; 4) $p_2p_6p_3p_5p_4p_2p_6$.

8. Является ли следующий граф планарным?



Лекция 5. Графы – деревья. Корень. Задача о соединении городов или построении “экономичного дерева”

Графы – деревья. Лес. Деревом называется связный граф, не содержащий циклов. В частности, дерево не имеет петель и кратных рёбер (поскольку кратные рёбра образуют цикл). Граф без циклов есть граф, связные компоненты которого являются деревьями; иногда такой граф называется лесом.

Любая цепь в графе без циклов является элементарной; любая часть такого графа также будет графом без циклов. Здесь элементарная цепь, как уже определялось ранее, – это цепь, при обходе которой, каждая вершина

встречается только один раз.

Теорема.

В дереве любые две вершины связаны единственной цепью.

Доказательство. Если бы было две связывающие цепи, то был бы и цикл. Условие этой теоремы является также достаточным для того, чтобы граф был деревом.

Наглядное представление для дерева можно получить при помощи следующей конструкции (см. рис. 6 лекции 4). Выберем произвольную вершину A_0 . От A_0 проведём все рёбра к вершинам, находящимся на расстоянии 1. От этих вершин проведём рёбра к вершинам, находящимся на расстоянии 2 от A_0 , и т.д. Из вершины A_2 , расположенной на расстоянии 1 от A_0 , выходит одно ребро к единственной последующей вершине A_{21} , находящейся от A_0 на расстоянии 2, а также некоторое семейство рёбер к вершинам A_{221} и A_{222} , находящимся на расстоянии 1 от A_{22} . Ни для какой из этих вершин, A_{221} и A_{222} , не может быть рёбер, соединяющих её с вершинами, с тем же или меньшим расстоянием, кроме A_{22} .

Корень. Исходная вершина дерева называется его корнем. Заметим, что корнем может служить любая вершина дерева.

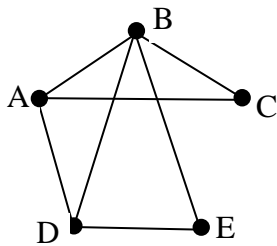
Число вершин и рёбер дерева. Для подсчёта числа элементов дерева служит теорема: "Дерево с N вершинами имеет $N - 1$ рёбер".

Для доказательства заметим, что простейшее дерево имеет только одно ребро, т.е. оно состоит из двух вершин и одного ребра; каждый раз, когда мы добавляем ещё одно ребро в конце ветви, прибавляется также и вершина.

Применение деревьев. Деревья имеют многочисленные применения в анализе иерархических систем. Так, например, можно представить граф на рис. 6 лекции 4 как структуру города (A_0 – город в целом, A_1, A_2, A_3 –

функциональные зоны, A_{12} , A_{13} , и т.д. – планировочные элементы). Применение деревьев облегчает разработку и анализ системы, избавляет от необходимости держать в памяти много данных. В последние десятилетия компьютерная наука столкнулась с тем фактом, что деревья обеспечивают удобные структуры для хранения и исправления определённых типов данных – так называемых иерархических баз.

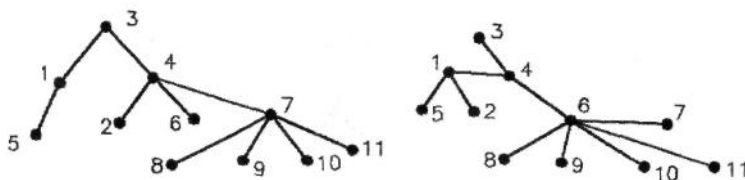
Циклический порядок графа. Интересен вопрос о взаимодействии циклов и деревьев: каково наименьшее число рёбер, которые надо удалить из данного связного графа, чтобы на нём не осталось ни одного цикла?



Можно доказать, что для того, чтобы в связном графе G с N вершинами и M рёбрами не осталось ни одного цикла, из него надо удалить по меньшей мере $\gamma = M - N + 1$ рёбер. Определённое таким образом число $\gamma(G)$ называется циклическим порядком графа или цикломатическим числом графа G .

Оно равно увеличенной на 1 разности между числом рёбер и числом вершин графа. Чтобы превратить граф на данном рисунке в дерево, надо из него удалить $\gamma = 7 - 5 + 1 = 3$ ребра. Например, рёбра AC, AD, DE.

Рассмотрим произвольное дерево с N заданными и пронумерованными в произвольном порядке вершинами. Пусть, например, $N=11$ (см. левый рис.).



Но ведь те же 11 вершин можно соединить попарно 10 рёбрами и по-другому, чтобы получилось какое-то новое дерево (см. правый рис.). У этого нового дерева совпадает с предыдущим только 3 ребра.

Спрашивается: сколько существует таких разных деревьев?

Английскому математику А.Кэлли (1875 г.) опыт, приобретённый в процессе непосредственного подсчёта числа деревьев, помог найти правильный ответ на этот вопрос. Деревьев с N пронумерованными вершинами существует N^{N-2} .

Задача о соединении городов

Деревья служат весьма эффективным средством решения задач, связанных с транспортными системами. В частности, очень важной является задача прокладки магистралей. Эта задача ставится следующим образом.

Пусть N населённых пунктов p_i ($i=1, \dots, N$) требуется соединить наиболее дешёвой коммуникационной сетью, если известны стоимости q_{ij} строительства всех её участков от p_i до p_j .

Задача состоит в том, чтобы построить самую дешёвую из всех возможных сетей дорог. Заметим, что аналогично может рассматриваться вопрос о линиях электропередач, системах водогазоснабжения, телефонизации и т.п. Приступим к решению задачи. Граф искомой сети должен быть деревом, так как, если бы он содержал цикл, то из него можно было бы удалить одно из рёбер, а города остались бы соединёнными. Следовательно, для соединения N городов необходимо построить $(N-1)$ дорог. Для построения дерева-решения воспользуемся простым правилом экономичности. В соответствии с этим правилом на каждом шаге построения дерева необходимо брать самое дешёвое из возможных рёбер, не образующих цикла. При наличии нескольких рёбер одинаковой стоимости можно выбрать любое из них. Таким образом, при решении задачи мы сначала соединяем два города с наименьшей стоимостью дороги между ними; затем добавляем к ним самое дешёвое из возможных рёбер и т.д. Полученное дерево называется экономичным.

Итак, метод определения искомой коммуникационной сети заключается в следующем.

За корень дерева берётся любая из вершин (p_r, p_s) , для которых $q_{rs} \leq q_{ij}$ ($i, j \neq r, s$). Первый ярус образует пункты, имеющие наименьшие стоимости коммуникаций с корнем. Последующие уровни образуются теми из оставшихся пунктов, которые, во-первых, смежны с предыдущим ярусом, во-вторых, имеют минимальную стоимость и, в-третьих, не образуют циклов графа. Этот процесс заканчивается, когда все N пунктов будут включены в коммуникационную схему.

Пример решения задачи о соединении городов [2]. Рассмотрим пример распространения подобной системы связи. Пусть пять пунктов p_i ($i=1, \dots, 5$) требуется соединить коммуникациями, если стоимость (в условных единицах) каждого из участков дана следующими числами: $q_{12} = 20$, $q_{13} = 15$, $q_{14} = 25$, $q_{15} = 30$, $q_{23} = 17$, $q_{24} = 22$, $q_{25} = 20$, $q_{34} = 10$, $q_{35} = 31$, $q_{45} = 29$.

Последовательность построения нужного графа иллюстрирует рис. 1.

I. На первом этапе строится ребро, которое является наиболее дешёвым. Им является отрезок, соединяющий p_3 и p_4 . \Rightarrow одна из этих точек может стать корнем дерева.

II. На втором – определяется и строится точка, имеющая наименьшее из значений q_{3i} и q_{4i} ($i = 1, 2, 5$). Так как наименьшим из этих значений является $q_{31} = 15$, то очевидно, что к имеющемуся отрезку пристраиваются точка p_1 и ребро p_1p_3 .

III. Затем сравниваются стоимости q_{lj} ($j = 2, 5$, $l = 1, 3, 4$). Наименьшим из них является $q_{32} = 17$. Таким образом, к предыдущему графу добавляется ребро p_2p_3 .

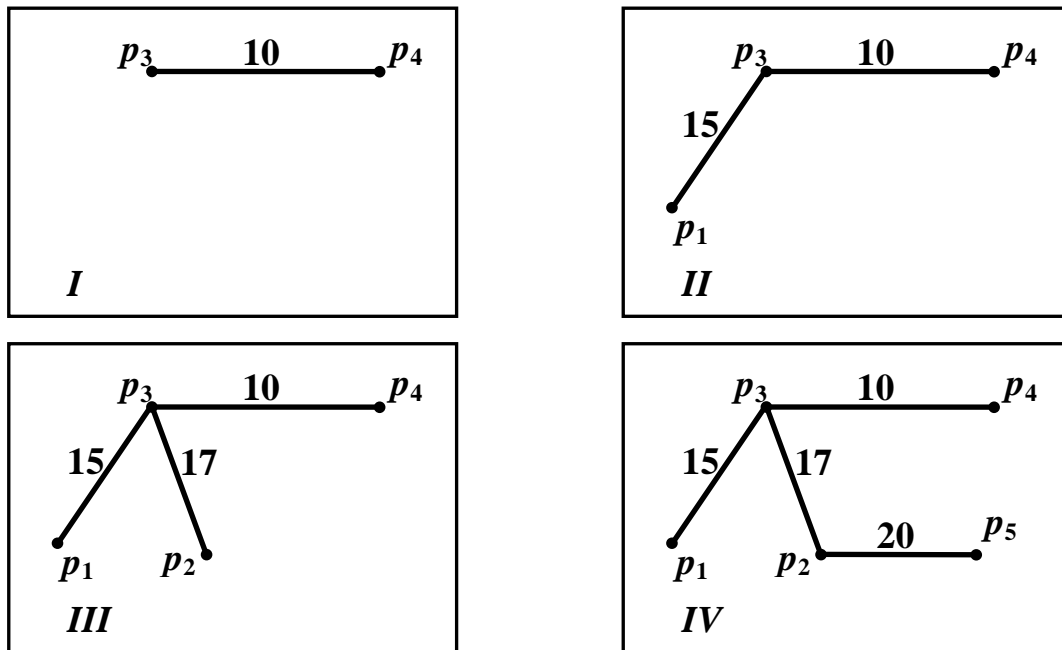


Рис. 1

IV. Наконец, сопоставляя значения q_{5k} ($k = 1, \dots, 4$), определяем наименьшее из них: $q_{52} = 20$. Это позволяет изображением ребра p_2p_5 завершить построение графа коммуникационной сети. Стоимость её строительства $Q = q_{34} + q_{13} + q_{23} + q_{25} = 10 + 15 + 17 + 20 = 62$ условных единиц.

Можно доказать, что решение, даваемое экономичным деревом, будет самым дешёвым из всех возможных решений. В теории графов доказывается также, что каждому ребру дерева можно поставить в соответствие одну и только одну из его конечных вершин. Это соответствие можно применить для установления соответствия между улицами и площадями города; например, потребовать, чтобы каждая улица начиналась на площади с тем же названием. Дерево может представлять карту улиц только очень маленьких городов, где нет обычных городских кварталов или где имеется лишь один центральный жилой массив, к которому подходят улицы, идущие от окраин.

Лекция 6. Задача о кёнигсбергских мостах. Эйлеровы линия, граф и путь. Необходимые и достаточные условия существования эйлерового графа и пути

Многие открытия теории графов были использованы для решения «практических» проблем – задач, головоломок, игр и т.д. Развлечения, в которых требуется обрисовать некоторую фигуру, не прерывая и не повторяя линии, являются по-видимому очень давними. Считается, что фигура, называемая «саблями Магомета», имеет арабское происхождение.

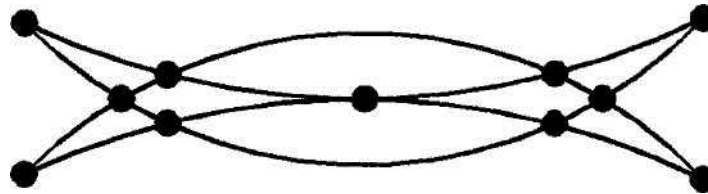


Рис. 1

Задача 1. К одной из таких задач относится знаменитая **задача о кёнигсбергских мостах** [5]. Теория графов является одной из немногих областей математики, дата рождения которых может быть указана. Первая работа о графах, принадлежащая швейцарскому математику Леонарду Эйлеру (1707–1783), появилась в 1736 году в публикациях Петербургской Академии наук. Эйлер начал свою работу о графах с рассмотрения головоломки – так называемой задачи о «кёнигсбергских мостах». Город Кёнигсберг (ныне Калининград) расположен на берегах реки Прегель и двух островах. Различные части города были соединены семью мостами. По воскресеньям горожане совершали прогулки по городу. Вопрос заключался в том, можно ли совершить прогулки таким образом, чтобы, выйдя из дома, вернуться обратно, пройдя в точности один раз по каждому мосту.

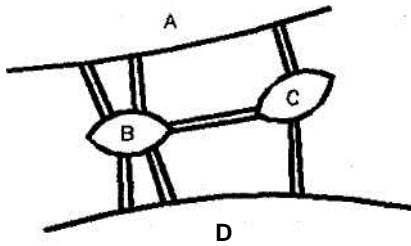


Рис. 2а

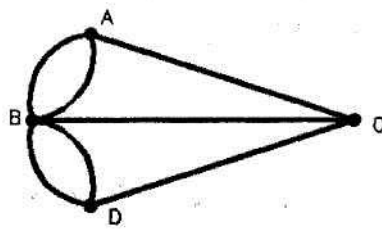


Рис. 2б

Схематическая карта Кёнигсберга изображена на рис. 2а. Четыре части города обозначены буквами А, В, С, D. Так как нас интересуют только переходы по мостам, мы можем считать А, В, С, D вершинами некоторого графа, рёбра которого отвечают соответствующим мостам. Этот граф изображён на рис. 2б. Эйлер показал, что задача не имеет решения, т.е. не существует цикла, проходящего по всем рёбрам точно по одному разу. Ведь если бы такой цикл существовал, то в каждой вершине графа было бы столько входящих в неё рёбер, сколько и выходящих из неё, т.е. в каждой вершине графа было бы чётное число рёбер. Однако это условие, очевидно, не выполнено для графа, представляющего карту Кёнигсберга.

Эйлерова линия и эйлеров граф. Изложив решение задачи о кёнигсбергских мостах, Эйлер в своей работе перешёл к следующей общей проблеме теории графов: на каких графах можно найти **цикл**, содержащий все рёбра графа, причём каждое ребро в точности по одному разу? Такой цикл называется **эйлеровой линией** или **эйлеровым циклом**, а граф, обладающий эйлеровой линией, – **эйлеровым графом**.

Итак, эйлеров граф можно обойти полностью, проходя по каждому ребру только один раз. Поэтому эйлеровы графы можно построить, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя одну и ту же линию дважды.

Доказательство необходимого условия существования эйлерового графа. Для того, чтобы граф имел эйлерову линию, он должен

быть **связным**. Как и в задаче о кёнигсбергских мостах, ясно, что каждая эйлерова линия должна входить в каждую вершину и выходить из неё одно и то же число раз, т.е. степени всех вершин графа должны быть чётными. Значит, чтобы граф был **эйлеровым**, необходимы два условия: **связность графа и чётность степеней** всех его вершин.

Эйлер доказал, что эти условия являются также и достаточными: **связный граф, степени всех вершин которого чётные, обладает эйлеровой линией.**

Доказательство достаточного условия существования эйлерового графа. Если начать путь из произвольной вершины графа Γ , то найдётся цикл, содержащий все рёбра графа. Пусть A произвольная вершина графа Γ .

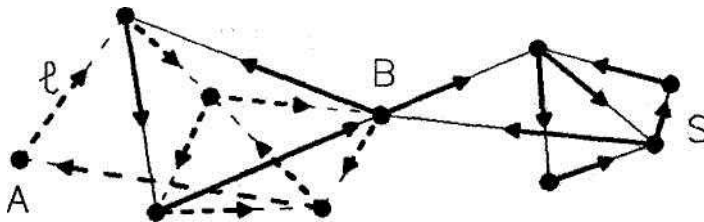


Рис. 3

Из A начнём путь l по одному из рёбер и продолжим его, проходя каждый раз по новому ребру. Так как число рёбер конечно, то этот путь должен закончиться, причём в вершине A (на рис. 3 путь l и направление его обхода показаны штриховыми стрелками). Он не может закончиться в другой вершине, так как в этом случае все рёбра инцидентные этой вершине окажутся пройденными по разу и их число будет нечётным. В самом деле, либо мы зашли в неё один раз, либо вышли из этой вершины по другому ребру и снова вошли по новому ребру, т.е. число рёбер инцидентных этой вершине равно 3, и т.д. рассуждая, получим $=5$ или $=7$ и т.д. Этого быть не может, так как степени вершин чётные.

Если путь l , замкнувшийся в A , проходит через все рёбра графа, то мы получим искомый эйлеров цикл.

Если остались не пройденные рёбра, то должна существовать вершина B , принадлежащая l и ребру, не вошедшему в l , так как в противном случае граф окажется не связанным, потому что вершина, соответствующая не пройденному ребру, не будет связана маршрутом с любой вершиной пути l . Так как вершина B – чётная, то число рёбер, которым принадлежит B и которые не вошли в путь l , тоже чётное.

Начнём новый путь s из B и используем только рёбра, не принадлежащие l . Этот путь кончится в B (на рис. 3 путь s обозначен сплошными стрелками). Это доказывается рассуждением, аналогичным тому, как доказывалось, что путь кончится в A .

Объединим теперь оба цикла: из A пройдем по пути l к B , затем по циклу s и, вернувшись в B , пройдем по оставшейся части пути l обратно в A .

Если снова найдутся рёбра, которые не вошли в путь, то найдём новые циклы. Число рёбер и вершин конечно, процесс закончится.

Итак, приведено конструктивное доказательство достаточного условия существования эйлерова графа, т.е. приведён **алгоритм**, позволяющий отыскать эйлеров цикл, и показано, что он применим во всех случаях, допускаемых условиями теоремы.

Таким образом, в соответствии с теоремой Эйлера, в задаче о кёнигсбергских мостах нет эйлерова цикла (следует из условий необходимости).

Эйлеров путь. Можно ввести понятие эйлерова пути – это путь, когда все рёбра проходятся по одному разу, но без возвращения в исходную точку.

Если граф не обладает эйлеровым циклом, то можно поставить задачу об отыскании одного эйлерова пути или нескольких эйлеровых путей, в совокупности содержащих все рёбра графа.

Необходимое и достаточное условие существования эйлерового пути. Покажем, что если граф Γ обладает эйлеровым путём с концами A и B (A не совпадает с B), то граф Γ **связный** и A и B – единственные **нечётные** его вершины. Действительно, связность графа следует из определения эйлерова пути. Если путь начинается в A , а заканчивается в другой вершине B , то и A и B – нечётные, даже если путь неоднократно проходил через A и B . В любую другую вершину графа путь должен был привести и вывести из неё, т.е. все остальные вершины должны быть чётными.

Верно и обратное: если граф Γ **связный**, а A и B – **единственные нечётные вершины** его, то граф Γ обладает эйлеровым путём с концами A и B . Доказательство этого приведено в пособии [6] Л.Г.Залётовой, на стр.15. Здесь приведём его с некоторыми изменениями и уточнениями.

Вершины A и B могут быть соединены ребром в графе, а могут быть и не соединены. В любом случае добавим либо дополнительное, либо новое ребро (A,B) , тогда все вершины его станут чётными. Новый граф, согласно приведённому выше конструктивному доказательству достаточного условия существования эйлерового графа, обладает эйлеровым циклом, который можно начать по любому ребру. Начнём эйлеров цикл из вершины A по добавленному ребру (A,B) и кончим его в вершине A . Если удалить теперь из полученного цикла добавленное ребро (A,B) , то останется эйлеров путь с началом в B и концом в A .

В соответствии с этой теоремой об эйлеровом пути через кёнигсбергские мосты не существует эйлерова пути, так как хотя соответствующий граф связный, но степени всех его вершин нечётные, а должно быть только две вершины нечётными, а остальные чётными, чтобы существовал эйлеров путь.

Таким образом, **всякую замкнутую фигуру**, имеющую в точности

две нечётные вершины, можно расчертить одним росчерком без повторений, начав в одной из нечётных вершин, а кончив в другой. Последнее утверждение можно обобщить. Пусть Γ – произвольный конечный связный граф. Определим наименьшее число путей, таких, что никакие два из них не имеют общих рёбер и все вместе они покрывают граф. Ясно, что если на графе имеется такое семейство путей, то каждая нечётная вершина должна быть либо начальной, либо конечной точкой, по крайней мере, одного из них. Иначе эта вершина была бы чётной. Известно, что число нечётных вершин графа чётно (см. лекцию 3), скажем, равно $2k$. Значит, каждое семейство покрывающих граф путей состоит, по меньшей мере, из k путей. Можно показать, что существование $2k$ вершин нечётных является и достаточным условием существования k таких путей. Заметим, что последнее утверждение справедливо и для графа с петлями, если петли считать дважды, т.е. если каждая петля добавляет 2 к числу рёбер инцидентных вершине с петлёй. По принципу эйлеровых графов располагаются экспонаты выставок. Вдоль помещения устанавливаются знаки, показывающие, как именно посетители должны двигаться, чтобы осмотреть каждый экспонат в точности по одному разу.

Определим **гамильтонов цикл**. Это цикл, проходящий через все вершины по одному разу. Рёбра при этом могут быть пройдены не все. Естественно, вершина, из которой начинается цикл, является и конечной вершиной. Очевидно также, что этот гамильтонов цикл – элементарный (см. лекцию 3).

Задача 2. Можно ли через кёнигсбергские мосты провести гамильтонов цикл?

Ответ. Да.

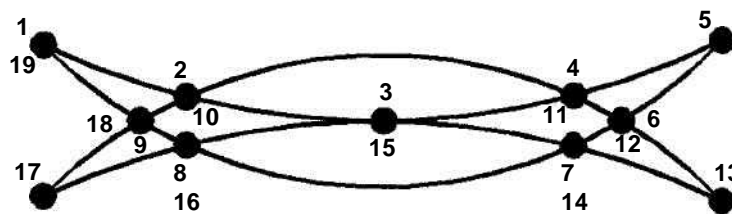
Гамильтонова цепь – это цепь, которая проходит через все вершины по одному разу без возвращения в начальную вершину. Рёбра

при этом могут быть пройдены не все.

Задача 3. Можно ли через кёнигсбергские мосты провести гамильтонову цепь?

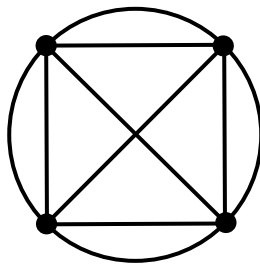
Ответ. Да, так как если можно провести гамильтонов цикл, то можно провести и гамильтонову цепь. Надо в гамильтоновом цикле не проходить по последнему ребру, чтобы не закончить путь в начальной вершине.

Задача 4. Можно ли обрисовать фигуру, называемую «саблями Магомета», не прерывая и не повторяя линии?

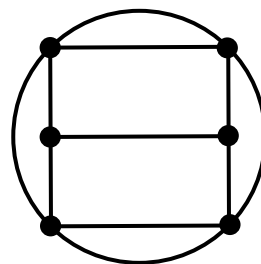


Ответ. Можно. Смотри соответствующую нумерацию на рисунке.

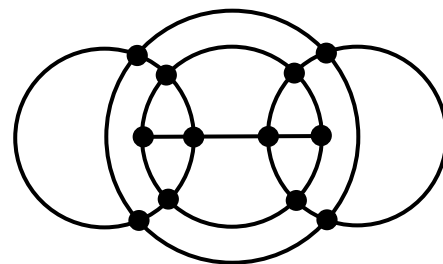
Задача 5. Существуют ли эйлеровы циклы в графах (а), (б), (в)? Если существуют, найдите их.



(а)



(б)



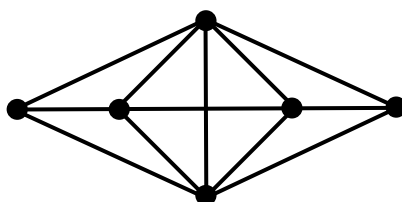
(в)

Ответ: нет

нет

нет

Задача 6. В соответствии с теоремой об эйлеровом пути определите: существует ли эйлеров путь в графе? Если существует, найдите его.



Ответ. Эйлерова пути нет, так как число нечётных вершин 4, а должно быть 2.

**Практическое занятие 3. Эйлерова линия и эйлеров путь.
Правило Тарри. Алгоритм Флёри. Построение “экономичного дерева”**

■ УПРАЖНЕНИЯ

Аудиторные задания

Задача 1. На рис. 1 схема зоопарка (вершины графа – вход, выход, перекрёстки, повороты, тупики, рёбра-дорожки, вдоль которых расположены клетки). Найдите маршрут, по которому экскурсовод мог бы провести посетителей, показав им всех зверей и не проходя более одного раза ни одного участка пути, т.е. найдите эйлеров путь.

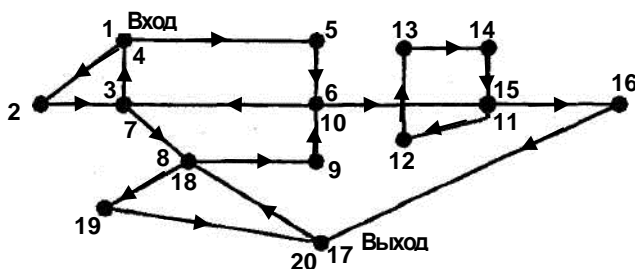


Рис. 1

Ответ. Найденный маршрут, т.е. эйлеров путь, показан на рисунке номерами у вершин и стрелками у рёбер.

Правило Тарри построения эйлерового пути для связного графа в случае, когда каждое ребро проходит ровно два раза – по одному разу в каждом направлении.

Оказывается, если план выставки представляет собой связный граф и если экспонаты расположены по обеим сторонам залов, то можно составить такой замкнутый маршрут, что по каждому залу посетитель сможет пройти в точности два раза – по одному с каждой стороны, причём в разных направлениях. Аналогично любой город (в этом случае граф всегда связный), например, Москву, можно обойти, проходя по каждой улице ровно два раза – по одному в каждом направлении. (А разделённый

до 1989 года стеной на восточную и западную часть – Берлин? Его не обойдешь, но это другой случай – здесь граф не связный!)

Общее правило построения такого пути предложил французский математик Тарри.

Из произвольной вершины А пройдем вдоль какого-нибудь ребра (А,В), отметив его стрелкой, указывающей направление пути (рис. 2).

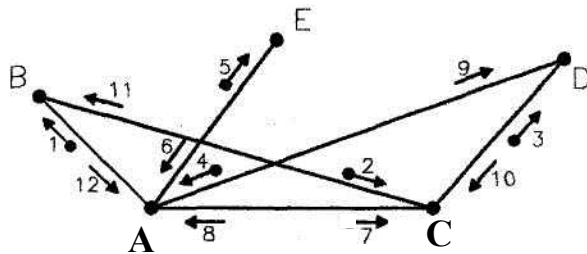


Рис. 2

Из В пройдем к третьей вершине, снова отметив стрелкой направление прибытия, и так далее. Ребро, по которому **впервые прибываем в вершину**, будем отмечать стрелкой вида "•→". Выходя из вершины, выбирают дальнейший путь: либо ребро, по которому ещё не проходили ни разу, либо ребро, по которому прибыли в эту вершину. Договариваемся, что ребро, **по которому впервые попали в вершину**, будем использовать для выхода только тогда, когда оно остаётся **единственным выходом** из этой вершины.

Продолжаем строить путь, пока это возможно. Заметим, что в каждой вершине имеется одинаковое число возможностей для входа и выхода. Если мы вошли в какую-то вершину, кроме исходной вершины А, то мы из неё выйдем. Поэтому процесс может закончиться только в исходной вершине А. На рис. 2 дан связный граф, на котором по правилу Тарри построен искомый цикл, для удобства стрелки пронумерованы. Итак, процесс закончился в А. Теперь необходимо доказать, что в обоих направлениях пройдены все рёбра. Выхода из А более нет, так как иначе процесс бы не закончился и мы могли бы двигаться дальше. Все входы в

вершину А тоже использованы, так как их число равно числу путей, по которым мы выходили из А. В частности, ребро (А,В) пройдено в обоих направлениях. Следовательно, все рёбра, которым принадлежит В, тоже пройдены в обоих направлениях, так как первое входящее в В ребро (А,В) по условию могло быть использовано в качестве выходящего лишь в последнюю очередь.

То же рассуждение применимо ко второму в пути ребру (В,С) и следующей вершине С и т.д. Поскольку граф связный и имеет конечное число вершин и рёбер, аналогично можно исследовать все его вершины и рёбра.

Задача 2. По правилу Тарри найдите замкнутый путь из вершины А, содержащий все рёбра графа дважды, по одному разу в каждом направлении.

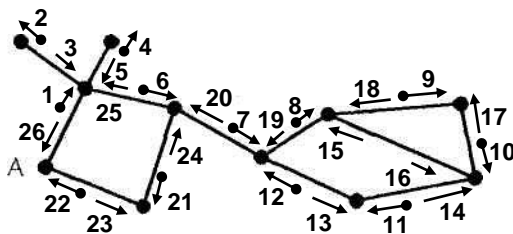


Рис. 3

Ответ. Решение, полученное согласно правилу Тарри, показано на рисунке занумерованными стрелками около рёбер графа.

Алгоритм Флёрри построения эйлерового цикла

В дополнении к алгоритму, приведённому в лекции 6 при конструктивном доказательстве достаточного условия существования эйлерового графа, приведём без доказательства ещё алгоритм, известный под названием **алгоритма Флёрри**.

Пусть Γ – эйлеров граф; тогда следующая процедура всегда возможна и приводит к эйлеровому **циклу** графа Γ . Выходим из

произвольной вершины и идём по рёбрам графа произвольным образом, соблюдая лишь следующие правила:

(i) стираем рёбра по мере их прохождения и стираем также изолированные вершины, которые при этом образуются;

(ii) на каждом этапе идём по мосту только тогда, когда нет других возможностей. (Мост – это ребро, которое после удаления делает граф не связным. Хотя эйлеров граф не содержит мостов, но после удаления рёбер, могут образоваться мосты!)

Задача 3. На рис. 4 приводится план воображаемого города, который Эйлер использовал для иллюстрации в своей работе. Начертите граф для плана Эйлера и определите, существует ли в нём эйлеров цикл.

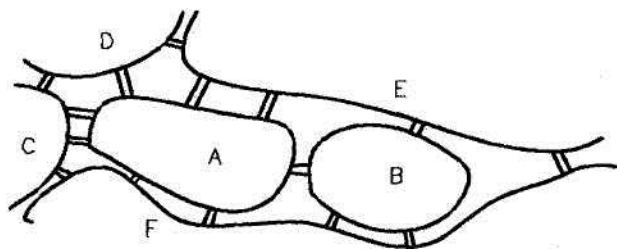
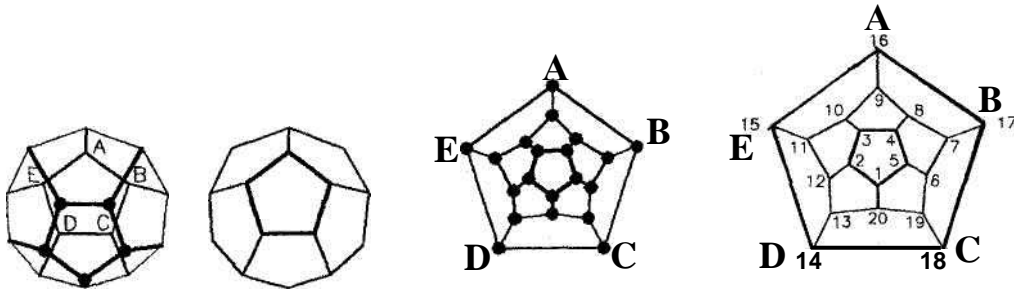


Рис. 4

Задача 4. Найдите циклы, содержащие все вершины додекаэдра, причём в точности по одному разу каждую. Для определённости начните путь из вершины 1 и в первую очередь посетите вершины 2, 3, 4, 5.

Правильный додекаэдр – это один из так называемых **правильных** многогранников: его гранями служат 12 правильных пятиугольников, причём в каждой из 20 его вершин сходится по 3 ребра. Всего 30 рёбер. Однако такой додекаэдр был слишком громоздким, и Гамильтон предложил многогранник заменить плоским графом, изоморфным графу, образованному рёбрами додекаэдра. Плоское его представление можно получить следующим образом. Пусть рёбра проволочного додекаэдра можно растягивать без разрывов. Взявшись за вершины A, B, C, D, E, растягиваем «каркас» додекаэдра на плоскости так, чтобы не появилось

новых точек пересечения рёбер.



Решение. Один из возможных циклов показан на рисунке: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 19, 18, 14, 15, 16, 17, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 20, 1.

Домашние задания

Задача 1. С помощью алгоритма Флёрри найдите эйлеров цикл в графе, изображённом на следующем рисунке 5а.

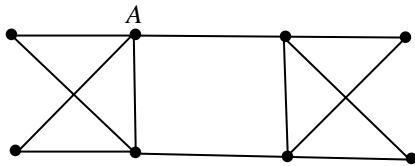


Рис. 5а

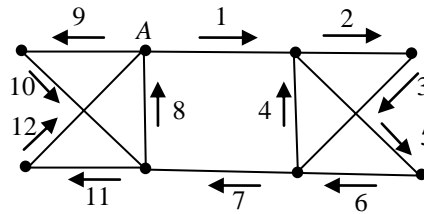


Рис. 5б

Ответ. Найденный маршрут, т.е. эйлеров путь, показан на рисунке 5б номерами и стрелками у рёбер.

Задача 2. Найдите эйлеровы циклы или пути на следующих графах Γ_1, Γ_2 .

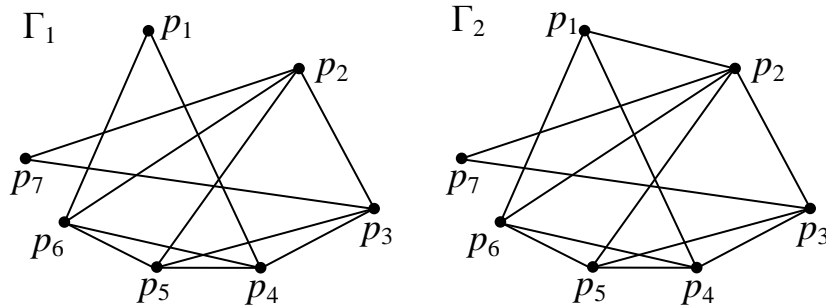


Рис. 6

Задача 3. Задача о ходе коня. Можно ли ходом коня обойти шахматную доску, побывав на каждой клетке по одному разу?

Задача 4. Задача о ходе коня. Можно ли ходом коня обойти шахматную доску, побывав на каждой клетке по одному разу и вернуться в исходную точку?

Задача 5. Построить коммуникационную сеть, т.е. построить «экономичное дерево», минимизирующее сумму расстояний между вершинами связного графа, для двух вариантов (а) и (б)

(а)

$$q_{12}=4, q_{13}=7, q_{14}=11, q_{15}=4, \\ q_{23}=6, q_{24}=7, q_{25}=11, \\ q_{34}=15, q_{45}=2.$$

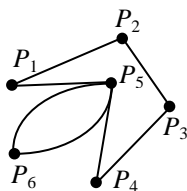
(б)

$$q_{12}=6, q_{13}=8, q_{14}=11, q_{15}=4, \\ q_{23}=6, q_{24}=3, q_{25}=11, \\ q_{34}=15, q_{45}=9.$$

Контрольная №1. Элементы графов. Изоморфизм. Построение циклов

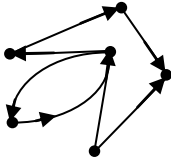
Образец контрольного задания

1. Для неориентированного графа

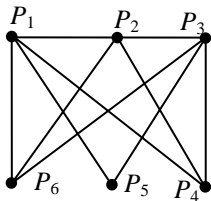


- 1) обозначить рёбра и построить матрицу инцидентности;
- 2) найти длину маршрута из вершины p_2 в вершину p_5 , составить маршруты длины 5, указать все цепи и элементарные цепи, соединяющие вершину p_2 и вершину p_5 ;
- 3) построить простой цикл, содержащий вершину p_4 ;
- 4) найти цикломатическое число графа $\gamma = M - N + 1$;

- 5) определить вид заданного графа;
 - 6) является ли граф эйлеровым?
 - 7) существует ли эйлеров путь в графе?
2. Для ориентированного графа



- 1) обозначить вершины и ориентированные рёбра, т.е. дуги;
 - 2) построить матрицу инцидентности;
 - 3) определить степень входа и степень выхода каждой вершины графа. Имеются ли здесь источники и стоки?
3. Является ли следующий граф планарным?



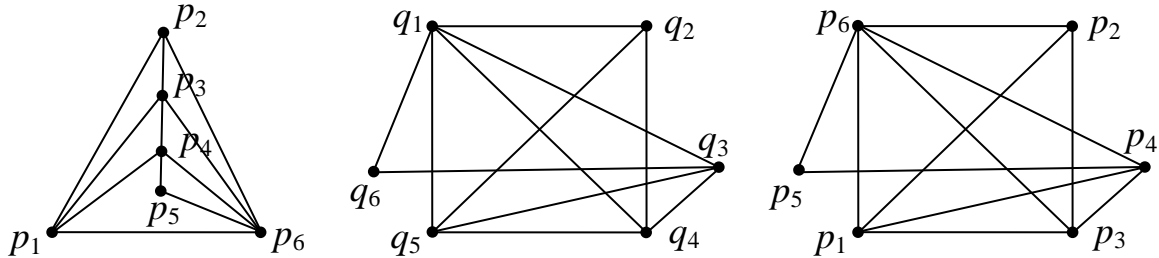
4. Восстановить геометрическое представление графов по матрицам инцидентности для неориентированного и ориентированного графов

$$\begin{array}{cccccc}
 u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\
 \left(\begin{array}{cccccc}
 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
 \end{array} \right) & \begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{array}
 \end{array}$$

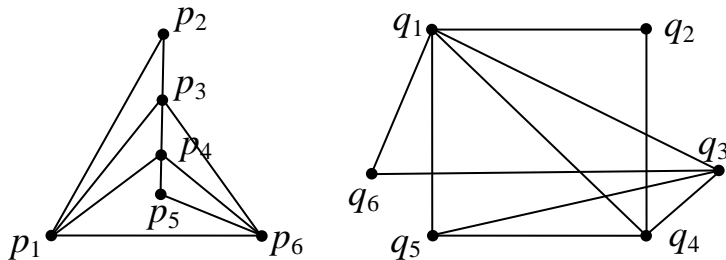
$$\begin{array}{cccccc}
 u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\
 \left(\begin{array}{cccccc}
 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0
 \end{array} \right) & \begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{array}
 \end{array}$$

5. Для двух неориентированных графов, представленных геометрически, показать их изоморфизм, задав соответствующую нумерацию вершин

Ответ:



6. Показать, что два неориентированных графа неизоморфны, путём поиска соответствующей перенумерации вершин или другим способом



Лекция 7. Поиск кратчайшего пути между вершинами.

Алгоритм Декстра

Самый короткий путь [1]

Пусть Γ – связный взвешенный граф и пусть v, v' – две вершины графа Γ . Проблема самого короткого пути состоит в том, чтобы найти путь с самым маленьким весом, соединяющий v и v' . Конечно, так как путь – это подграф графа Γ , то его вес определяется как сумма весов его рёбер. Поскольку мы имеем дело с конечными графами, то очевидно, что самый короткий путь существует, хотя может существовать более одного самого

короткого пути, соединяющего заданную пару вершин.

Имеются различные методы для обнаружения самого короткого пути между двумя заданными вершинами. Мы опишем алгоритм, который, подобно алгоритму, использующему правило экономичности, описанному в лекции 5, формирует путь в результате присоединения одного ребра на каждом шаге.

Идея состоит в том, чтобы начать процесс с вершины v и, двигаясь через граф, приписывать по очереди каждой вершине u число $L(u)$, которое представляет собой длину самого короткого пути, обнаруженного между вершинами v и u . Эти значения длин $L(u)$ первоначально рассматриваются временными и могут быть впоследствии заменены, если мы обнаружим путь между вершинами v и u , который имеет величину длины меньшую, чем назначенную в текущий момент времени. Ниже данный алгоритм рассмотрен более подробно. Фактически данный алгоритм строит поддерево графа Γ , содержащего вершины v и v' ; самый короткий путь между двумя вершинами является тогда единственным путём, соединяющим эти вершины. (Обратите внимание, что поддерево, формируемое алгоритмом, не обязательно должно быть поддеревом покрытия графа Γ , ибо процедуру алгоритма заканчивают, как только находится самый короткий путь, соединяющий вершины v и v' .)

Алгоритм Декстра [1]

1. Сначала назначим $L(v) = 0$ для начальной вершины v . Мы говорим, что вершина v **маркирована** ценою (значением) 0, т.е. имеет ярлык 0. Кроме того, этот ярлык **постоянен**, поскольку мы впоследствии не будем изменять его цену (значение). Так как мы строим последовательность из деревьев, то мы также начинаем с дерева, состоящего только из вершины v , и это начальное дерево не имеет никаких

граней.

2. Пусть u является вершиной, которой **наиболее недавно** дали **постоянный** ярлык. (Первоначально $u = v$, поскольку первоначально это единственная вершина с постоянным ярлыком.) Рассмотрим по очереди каждую вершину u' смежную с u и назначим каждой вершине **временный ярлык** следующим образом. (Рассматриваются только вершины u' без **постоянного** ярлыка.)

Если вершина u' ещё не маркирована, то устанавливаем $L(u')$ равным $L(u) + W(e)$, где $W(e)$ – вес ребра e , соединяющего вершины u и u' . (Если имеются больше одного такого ребра e , то следует выбирать с самым маленьким весом.)

Если вершина u' уже маркирована, то всё равно вычисляем $L(u) + W(e)$ и, если эта величина меньше текущей цены $L(u')$, то заменяем цену $L(u')$ на $L(u) + W(e)$; в противном случае оставляем $L(u')$ без изменения.

3. Выбираем вершину w с **самым маленьким временным** ярлыком и делаем ярлык **постоянным**. На рисунке выделим его **жирным** шрифтом. Возможно, на данном этапе придётся сделать выбор из числа нескольких временно замаркированных вершин, имеющих одинаковый самый маленький ярлык. Также важно представлять, что вершина w не обязательно должна быть смежной к вершине u – последней из числа замаркированных вершин. Выбрав вершину w , присоединяем к дереву соответствующее ребро, которое приводит к цене $L(w)$. На рисунке выделим это ребро **жирной линией**.

4. Повторяем шаги 2 и 3 до тех пор, пока финальной вершине v' не будет назначен **постоянный** ярлык. При этом путь самой короткой длины от вершины v до вершины v' будет являться единственным путём (в таком образом сформированном дереве), соединяющим вершины v и v' . Длина такого пути имеет значение, равное **постоянному** ярлыку $L(v')$.

Вместо того, чтобы применять такой странный термин как «наиболее недавно» присвоенный постоянный ярлык, используемый Б.М.Логиновым [1], можно было бы, казалось, написать – постоянный ярлык, присвоенный «последним». Но, видимо, чтобы подчеркнуть, что потом другой ярлык, для другой вершины, будет сделан постоянным, используется термин «наиболее недавно» вместо «последним».

Пояснение алгоритма Декстра на примере [1]. Проиллюстрируем этот алгоритм построением самого короткого пути от вершины А до вершины Н для взвешенного графа, представленного на рис. 1(а).

Мы начинаем, задавая вершине А постоянный ярлык **0**. Далее приписываем вершинам В, С и D временные ярлыки 2, 6 и 7 соответственно, поскольку $L(B) = L(A) + W(AB) = 0+2$, $L(C) = L(A) + W(AC) = 0+6$, $L(D) = L(A) + W(AD) = 0+7$. Так как 2 самый маленький вес, то мы делаем ярлык вершины В постоянным и выделяем его на рисунке жирным шрифтом. Одновременно мы добавляем к дереву (которое до этого состояло только из одной вершины А) ребро, соединяющее вершину А с вершиной В. Выделяем это ребро **жирной линией**. Эта стадия изображена на рис. 1(б).

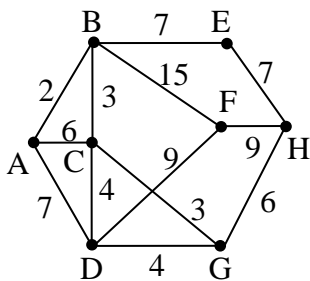


Рис. 1(а)

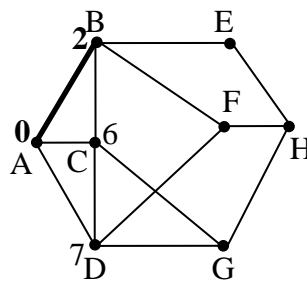


Рис. 1(б)

Затем мы рассматриваем вершины, смежные с В (которая – вершина В – маркировалась как постоянная последней (наиболее недавно)). Так как вершины Е и F не маркированы, мы маркируем их соответствующими

суммами величин цены вершины В ($L(B) = 2$) и веса рёбер, соединяющих вершину В с каждой из вершин, т.е. приписываем вершине Е сумму $L(E) = L(B) + W(BE) = 2 + 7 = 9$ и вершине F сумму $L(F) = L(B) + W(BF) = 2 + 15 = 17$. Вершина С уже маркирована. Однако текущий (временный) ярлык $L(C)$ больше, чем $L(B)$ плюс вес ребра, соединяющего В и С, поэтому мы должны изменить (заменить) $L(C)$ на меньшую цену $L(C) = L(B) + W(BC) = 2 + 3 = 5$ за счёт ВС. Теперь вершина С имеет самый маленький временный ярлык, поэтому мы делаем его постоянным и добавляем к дереву ребро, соединяющее вершины В и С. Мы теперь получили фигуру, представленную на рис. 1(с).

Повторяя этот процесс для вершины С, мы даем G временный ярлык $L(G) = L(C) + W(CG) = 5 + 3 = 8$. (Обратите внимание, что ярлык вершины D не изменяется на этой стадии, так как значение $L(D) = 7$ текущего ярлыка этой вершины меньше, чем $L(D) = L(C) + W(CD) = 5 + 4 = 9$.) Теперь вершина D имеет самый маленький временный ярлык, поэтому сделаем этот ярлык постоянным и добавим к дереву соответствующее ребро AD, т.е. сделаем его жирным на рис. 1(d). На основании рисунка 1(d) может показаться, что, присоединяя к дереву первые два ребра, мы сделали фальстарт. Это действительно весьма возможно, однако в данном примере, как мы увидим из дальнейшего, это не так и эти рёбра, в конечном счёте, представляют собой часть пути самой короткой длины, т.е. то, что мы ищем.

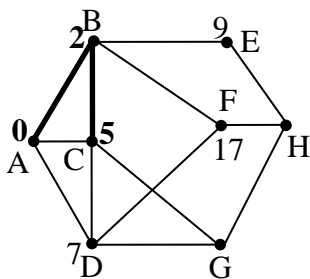


Рис. 1(с)

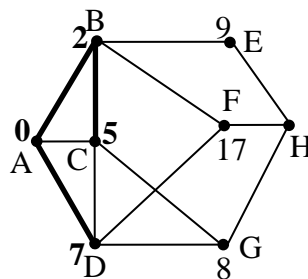


Рис. 1(d)

Повторяя процесс, мы должны рассмотреть не имеющие постоянных ярлыков вершины, смежные с вершиной D, поскольку вершина D последней получила постоянный ярлык. Ярлык вершины F должен быть уменьшен до $L(F) = L(D) + W(DF) = 7 + 9 = 16$ (что представляет собой сумму $L(D)$ и веса ребра, соединяющего вершины D и F). Несмотря на уменьшение цены вершины F, самый маленький временный ярлык будет у вершины G. Так как $L(G) = L(D) + W(DG) = 7 + 4 = 11 > 8$, то оставляем $L(G) = 8$ за счёт CG. Сделаем этот ярлык постоянным и добавим к дереву ребро, соединяющее вершины C и G (см. рис. 1(e)).

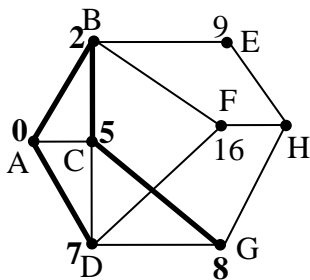


Рис. 1(e)

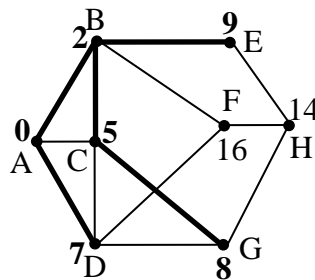


Рис. 1(f)

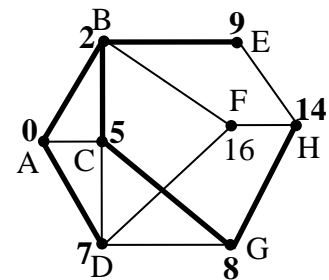


Рис. 1(g)

Дальнейшее повторение процесса представлено на рисунке 1(f). Вершина G – наиболее недавно (самой последней до сих пор) была промаркирована как постоянная. Поэтому $L(H) = L(G) + W(GH) = 8 + 6 = 14$. Вершина E получает постоянный ярлык 9 за счёт BE.

Однако это ещё не заканчивает выполнение алгоритма, поскольку ярлык H всё ещё является временным на этой стадии. Тем не менее, ещё одно прохождение шагов 2 и 3 алгоритма заканчивает строительство требуемого дерева. Вершина E – наиболее недавно была промаркирована как постоянная. Поэтому проверяем $L(H) = L(E) + W(EH) = 9 + 7 = 16 > 14$. Следовательно, оставляем $L(H) = 14$ за счёт GH. Теперь вершина H получает постоянный ярлык (см. рис. 1(g)).

«Теперь, когда дерево сформировано, мы можем определить самый короткий путь от A до H. Это единственный путь дерева, соединяющий

две вершины А и Н, и он проходит через вершины В, С и G и его полный вес равен 14 (постоянный ярлык для Н).

Использование алгоритма Декстра для относительно простого графа, подобного рассмотренному в предыдущем примере, может показаться утомительным. Можно было бы почти наверняка найти самый короткий путь методом проб и ошибок (перебором всех возможных вариантов) гораздо быстрее. Однако рассмотренный алгоритм, в силу механичности и простоты процедуры построения желанного пути, имеет несомненное преимущество в случае более сложных графов, для которых метод проб и ошибок может потребовать излишних вычислительных затрат, обусловленных сложностью и, возможно, противоречивостью алгоритма перебора всевозможных вариантов» [1].

Практическое занятие 4. Поиск кратчайших путей между всеми вершинами с помощью алгоритма Декстра

■ УПРАЖНЕНИЯ

Аудиторные задания

Задача 1. Для графа, с весами

$q_{12}=7$, $q_{13}=3$, q_{14} – не задан, $q_{15}=4$,
 $q_{23}=6$, $q_{24}=7$, $q_{25}=11$,
 $q_{34}=15$, $q_{35}=2$,
 $q_{45}=2$,

найти кратчайшие расстояния между всеми вершинами с помощью алгоритма Декстра. С помощью полученных кратчайших расстояний между всеми вершинами исходного графа сформировать полный граф. Этот граф будет использоваться для решения проблемы коммивояжера с помощью алгоритма «самой близкой вставки» на следующем практическом занятии 5.

Для нахождения кратчайших расстояний между всеми вершинами связанного взвешенного графа с n вершинами будем

применять **следующий алгоритм**.

Сначала строим кратчайшие пути на основе алгоритма Декстра от вершины $k=1$ до вершин со 2-й по n . То есть видоизменяем в алгоритме Декстра, приведённом в лекции 7, шаг 4, который теперь будет таким:

4. Повторяем шаги 2 и 3 до тех пор, пока всем вершинам v' , с $k+1$ по n , не будут назначены **постоянные** ярлыки. При этом длины кратчайших путей от вершины $v=k$ до вершин v' , с $k+1$ по n , будут иметь значения, равные **постоянным** ярлыкам $L(v')$.

Далее строим кратчайшие пути на основе алгоритма Декстра от вершины $k=2$ до вершин с 3-й по n .

Подобным образом переберём все вершины, кончая нахождением кратчайшего пути от вершины $n-1$ до вершины n .

Решение. По заданным весам на рис. 1 изобразим граф.

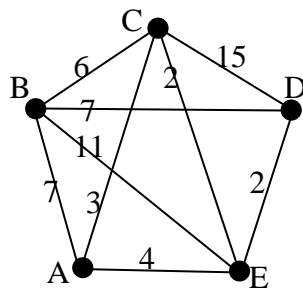


Рис. 1

1) Сначала строим кратчайшие пути на основе алгоритма Декстра от вершины A до вершин B, C, D, E:

а) начинаем, задавая вершине A **постоянный** ярлык **0**. Далее приписываем смежным с A вершинам B, C и E временные ярлыки 7, 3 и 4 соответственно. Так как 3 самый маленький вес, то мы делаем ярлык вершины C **постоянным** и выделяем его на рисунке **жирным** шрифтом. Одновременно добавляем к дереву (которое до этого состояло только из одной вершины A) ребро, соединяющее вершину A с вершиной C. Выделяем это ребро **жирной линией**. Эта стадия изображена на рис. 1а.

Для удобства анализа на этом и последующих рисунках приведён также граф с весами рисунка 1:

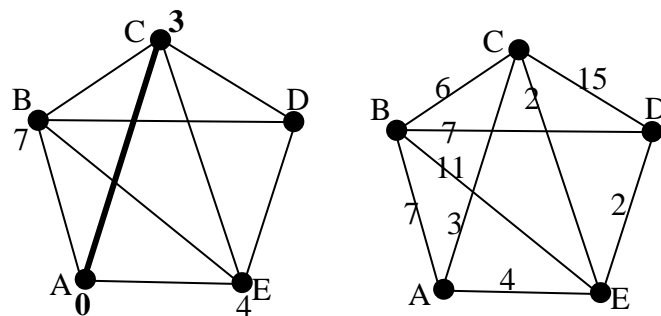


Рис. 1а

б) затем мы рассматриваем вершины B, D и E без **постоянного** ярлыка, смежные с C, которая маркировалась как **постоянная** последней

$$L(B) = L(C) + W(CB) = 3 + 6 = 9 > 7 \Rightarrow \text{Оставляем } L(B) = 7;$$

$$L(D) = L(C) + W(CD) = 3 + 15 = 18;$$

$$L(E) = L(C) + W(CE) = 3 + 2 = 5 > 4 \Rightarrow \text{Оставляем } L(E) = 4.$$

Теперь вершина E имеет самый маленький временный ярлык, поэтому мы делаем его **постоянным** и добавляем к дереву ребро, соединяющее вершины A и E. Мы теперь получили фигуру, представленную на рис. 1б:

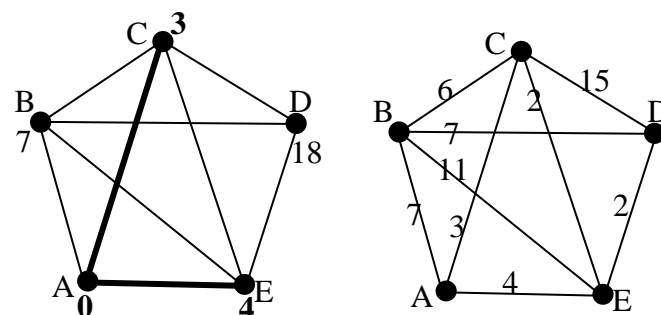


Рис. 1б

в) затем мы рассматриваем вершины B и D без **постоянного** ярлыка, смежные с E, которая маркировалась как **постоянная** последней

$$L(B) = L(E) + W(EB) = 4 + 11 = 15 > 7 \Rightarrow \text{Оставляем } L(B) = 7;$$

$$L(D) = L(E) + W(ED) = 4 + 2 = 6 < 18 \Rightarrow \text{Заменяем на } L(D) = 6.$$

Теперь вершина D имеет самый маленький временный ярлык,

поэтому мы делаем его **постоянным** и добавляем к дереву ребро, соединяющее вершины E и D. Мы теперь получили фигуру, представленную на рис. 1в:

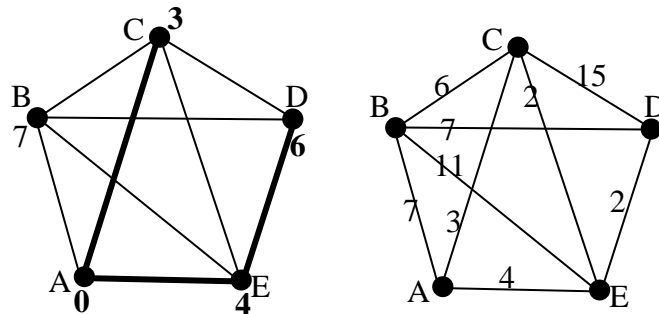


Рис. 1в

г) затем мы рассматриваем вершину B без **постоянного** ярлыка, смежную с D, которая маркировалась как **постоянная** последней

$$L(B) = L(D) + W(DB) = 6 + 7 = 13 > 7 \Rightarrow \text{Оставляем } L(B) = 7.$$

Теперь вершина B – единственная с временным ярлыком, следовательно, имеет самый маленький временный ярлык, поэтому мы делаем его **постоянным** и добавляем к дереву ребро, соединяющее вершины B и A. Мы теперь получили фигуру, представленную на рис. 1г:

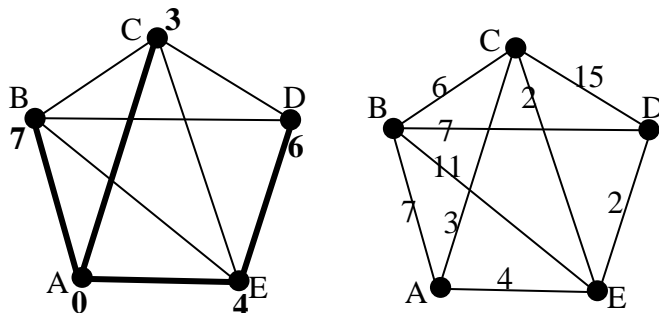


Рис. 1г

2) Далее строим кратчайшие пути на основе алгоритма Декстра от вершины B до вершин C, D, E:

а) начинаем, задавая вершине B **постоянный** ярлык 0. Далее приписываем смежным с B вершинам A, C, D и E временные ярлыки 7, 6, 7 и 11 соответственно. Так как 6 самый маленький вес, то мы делаем ярлык вершины C **постоянным** и выделяем его на рисунке **жирным** шрифтом.

Одновременно мы добавляем к дереву (которое до этого состояло только из одной вершины В) ребро, соединяющее вершину В с вершиной С. Выделяем это ребро **жирной линией**. Эта стадия изображена на рис. 2а:

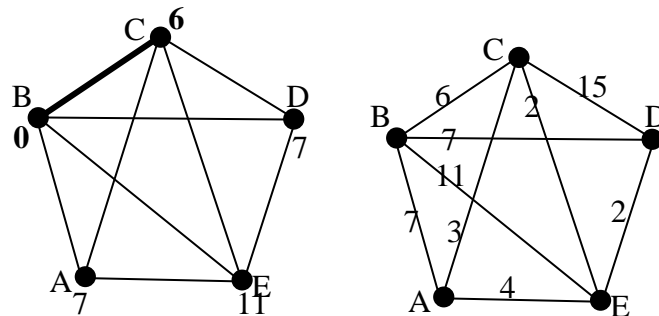


Рис. 2а

б) затем мы рассматриваем вершины А, D и E без **постоянного** ярлыка, смежные с С, которая маркировалась как **постоянная** последней

$$L(A) = L(C) + W(CA) = 6 + 3 = 9 > 7 \Rightarrow \text{Оставляем } L(A) = 7;$$

$$L(D) = L(C) + W(CD) = 6 + 15 = 21 > 7 \Rightarrow \text{Оставляем } L(D) = 7;$$

$$L(E) = L(C) + W(CE) = 6 + 2 = 8 < 11 \Rightarrow \text{Заменяем на } L(E) = 8.$$

Теперь две вершины А и D имеют самый маленький временный ярлык, поэтому делаем его **постоянным** для любой из них, например А, и добавляем к дереву ребро, соединяющее вершины А и В. Мы теперь получили фигуру, представленную на рис. 2б:

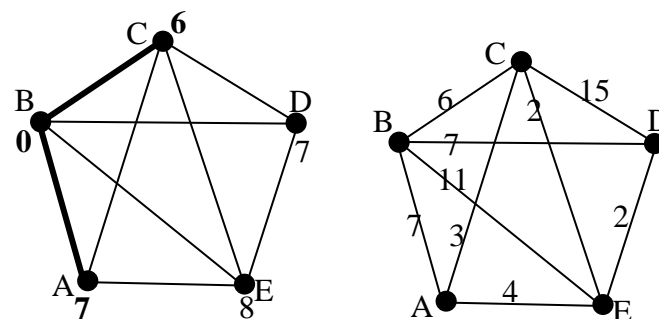


Рис. 2б

в) затем мы рассматриваем вершину E без **постоянного** ярлыка, смежную с А, которая маркировалась как **постоянная** последней

$$L(E) = L(A) + W(AE) = 7 + 4 = 11 > 8 \Rightarrow \text{Оставляем } L(E) = 8.$$

Теперь вершина D имеет самый маленький временный ярлык,

поэтому мы делаем его **постоянным** и добавляем к дереву ребро, соединяющее вершины В и D. Мы теперь получили фигуру, представленную на рис. 2в:

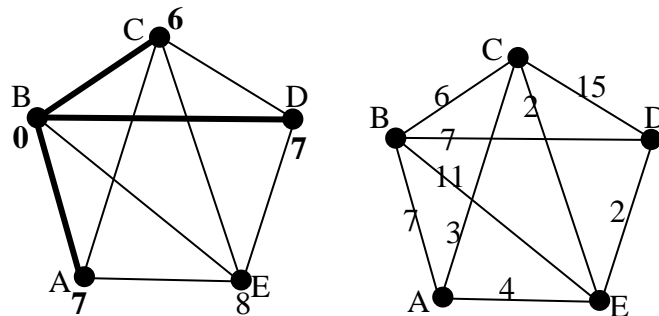


Рис. 2в

г) затем мы рассматриваем вершину E без **постоянного** ярлыка, смежную с D, которая маркировалась как **постоянная** последней

$$L(E) = L(D) + W(DE) = 7 + 2 = 9 > 8 \Rightarrow \text{Оставляем } L(E) = 8 = W(BCЕ).$$

Теперь вершина E единственная с временным ярлыком, следовательно, имеет самый маленький временный ярлык, поэтому мы делаем его **постоянным** и добавляем к дереву ребро, соединяющее вершины E и C. Мы теперь получили фигуру, представленную на рис. 2г:

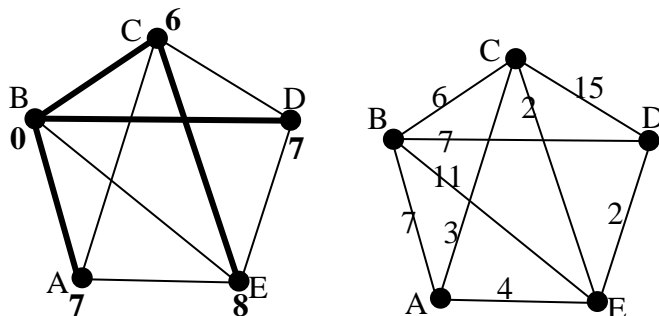


Рис. 2г

Длины кратчайших путей – ВА, полученная сейчас, и АВ, полученная выше, совпадают, естественно. Кратчайший путь ВА определился по логике алгоритма, хотя нам и не требовалось его находить, так как мы уже определили ранее кратчайший путь АВ.

3) Далее строим кратчайшие пути на основе алгоритма Декстра от вершины C до вершин D, E:

а) начинаем, задавая вершине С **постоянный** ярлык 0. Далее приписываем смежным с С вершинам А, В, D и E временные ярлыки 3, 6, 15 и 2 соответственно. Так как 2 самый маленький вес, то мы делаем ярлык вершины E **постоянным** и выделяем его на рисунке **жирным** шрифтом. Одновременно мы добавляем к дереву (которое до этого состояло только из одной вершины С) ребро, соединяющее вершину С с вершиной E. Выделяем это ребро **жирной линией**. Эта стадия изображена на рис. 3а:

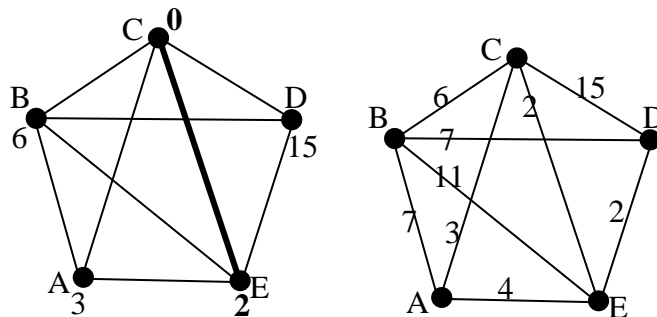


Рис. 3а

б) затем мы рассматриваем вершины А, В и D без **постоянного** ярлыка, смежные с E, которая маркировалась как **постоянная** последней

$$L(A) = L(E) + W(EA) = 2 + 4 = 6 > 3 \Rightarrow \text{Оставляем } L(A) = 3;$$

$$L(B) = L(E) + W(EB) = 2 + 11 = 13 > 6 \Rightarrow \text{Оставляем } L(B) = 6;$$

$$L(D) = L(E) + W(ED) = 2 + 2 = 4 < 15 \Rightarrow \text{Заменяем на } L(D) = 4.$$

Теперь вершина А имеет самый маленький временный ярлык, поэтому делаем его **постоянным** и добавляем к дереву ребро, соединяющее вершины С и А. Мы теперь получили фигуру, представленную на рис. 3б:

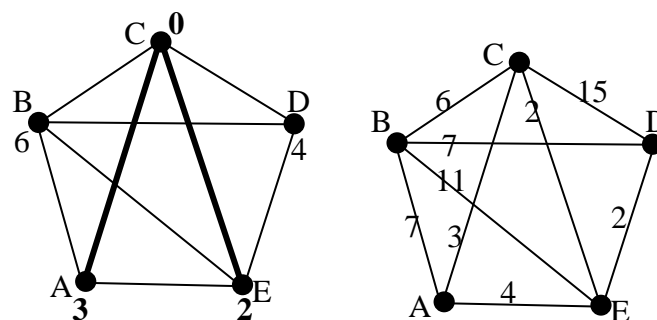


Рис. 3б

в) затем мы рассматриваем вершину В без **постоянного** ярлыка, смежную с А, которая маркировалась как **постоянная** последней

$$L(B) = L(A) + W(AB) = 3 + 7 = 10 > 6 \Rightarrow \text{Оставляем } L(B) = 6.$$

Теперь вершина D имеет самый маленький временный ярлык, поэтому мы делаем его **постоянным** и добавляем к дереву ребро, соединяющее вершины E и D. Мы теперь получили фигуру, представленную на рис. 3в:

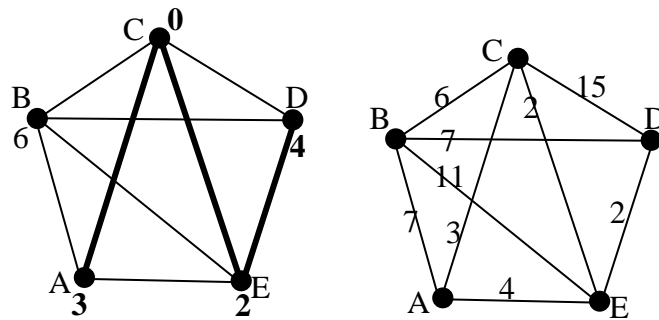


Рис. 3в

Мы получили, как и хотели, кратчайшие пути от С до D и E. Длины кратчайших путей – СА, полученная сейчас, и АС, полученная выше, совпадают, естественно. Кратчайший путь СА определился по логике алгоритма, хотя нам и не требовалось его находить, так как мы уже определили ранее кратчайший путь АС.

4) Наконец строим кратчайший путь на основе алгоритма Декстра от вершины D до вершины E:

а) начинаем, задавая вершине D **постоянный** ярлык 0. Далее приписываем смежным с D вершинам B, C и E временные ярлыки 7, 15 и 2 соответственно. Так как 2 самый маленький вес, то мы делаем ярлык вершины E **постоянным** и выделяем его на рисунке **жирным** шрифтом. Одновременно мы добавляем к дереву (которое до этого состояло только из одной вершины D) ребро, соединяющее вершину D с вершиной E. Выделяем это ребро **жирной линией**. Эта стадия изображена на рис. 4а:

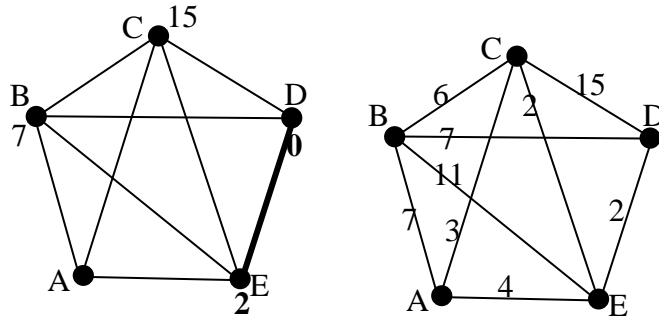


Рис. 4а

Итак, мы нашли кратчайшие пути между всеми вершинами:

$$W(AB) = 7; W(AC) = 3; W(AD) = W(AED) = 6; W(AE) = 4;$$

$$W(BC) = 6; W(BD) = 7; W(BE) = W(BCE) = 8;$$

$$W(CD) = W(CED) = 4; W(CE) = 2;$$

$$W(DE) = 2.$$

Поместим их длины на всех рёбрах соответствующего полного графа на рис. 5. Рядом изображён исходный граф с рис. 1.

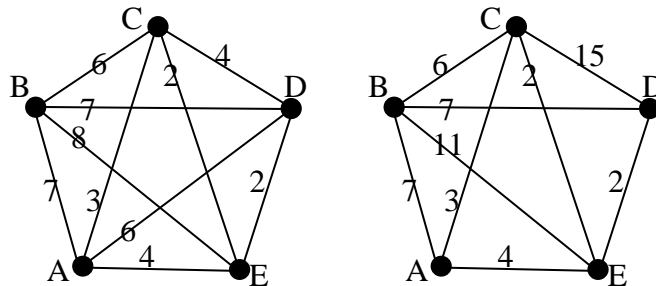


Рис. 5

Как видим, появилось за счёт пути AED ребро AD, которого вообще не было. Длины рёбер BE и CD в новом полном графе уменьшились за счёт кратчайших путей BCE и CED.

Этот полный граф на следующем практическом занятии будет использоваться для решения проблемы коммивояжёра с помощью алгоритма «самой близкой вставки».

Домашние задания

Для графов с весами найти кратчайшие расстояния между всеми вершинами с помощью алгоритма Декстра. С помощью полученных

кратчайших расстояний между всеми вершинами исходного графа сформировать полный граф.

Задача 1:

$q_{12}=4, q_{13}=3, q_{14}$ – не задан, $q_{15}=4,$
 $q_{23}=3, q_{24}=7, q_{25}=11,$
 $q_{34}=15, q_{35}=2,$
 $q_{45}=2.$

Ответ. Соответствующий исходный граф и полный граф справа изображены на рис. 6.

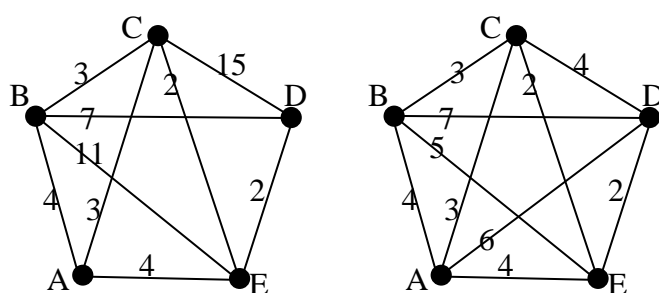


Рис. 6

Как видим, появилось за счёт пути AED ребро AD, которого вообще не было. Длины рёбер BE и CD в новом полном графе уменьшились за счёт кратчайших путей BCE и CED.

Задача 2:

$q_{12}=10, q_{13}=18, q_{14}$ – не задан, $q_{15}=14,$
 $q_{23}=12, q_{24}=20, q_{25}$ – не задан,
 $q_{34}=6, q_{35}=14,$
 $q_{45}=10.$

Ответ. Соответствующий исходный граф и полный граф справа изображены на рис. 7.

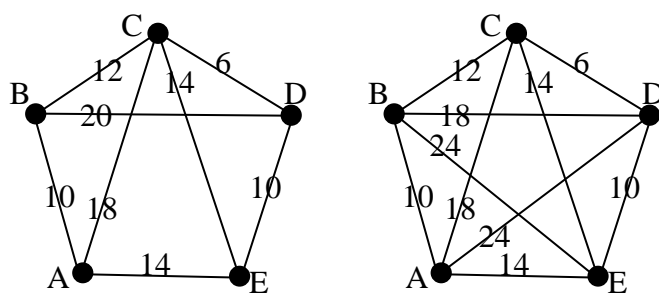


Рис. 7

Как видим, появились за счёт пути AED или ACD ребро AD, за счёт пути BAE – ребро BE, которых вообще не было. Длина ребра BD в новом полном графе уменьшилась за счёт кратчайшего пути BCD.

Лекция 8. Проблема коммивояжёра. Минимальный цикл Гамильтона. Эффективные и неэффективные алгоритмы

Проблема коммивояжёра [1]

Предположим, что коммивояжёр должен посетить каждый из нескольких городов и возвратиться к своему первоначальному положению. Учитывая сеть дорог, соединяющих различные города на его маршруте, проблема путешествующего коммивояжёра состоит в том, чтобы найти маршрут, который минимизирует полное расстояние его путешествия [1]. При этом такой маршрут допускает посещение некоторых городов более одного раза и прохождение дороги между двумя городами, например, А и В, два раза, по разу в противоположных направлениях. Читатель может сообразить, что прохождения дороги между двумя городами, например, А и В, два раза и более в одном направлении не может быть. В самом деле, прохождение дороги между двумя городами А и В два раза в одном направлении означает существование разных циклов ABCA и ABDA, через соответственно города С и D. Эти циклы можно заменить на ACB и BDA, вовсе исключив двойное прохождение АВ, что сократит маршрут, чего быть не должно, так как маршрут должен быть минимальным.

Сеть дорог может быть представлена взвешенным связным графом следующим образом. Каждый город представляется вершиной, а каждая дорога, соединяющая два города, представляется ребром, соединяющим соответствующие две вершины, причём вес ребра равен длине данной дороги. Путешествие, при котором посещается каждый город и которое

заканчивается в исходном стартовом положении, является циклом, содержащим все вершины графа. В терминологии теории графов проблема коммивояжёра состоит в том, чтобы найти такую замкнутую последовательность рёбер, т.е. цикл, который содержит все вершины графа и полный вес которого является минимальным.

Построение полного графа и нахождение минимального цикла Гамильтона. Как правило, оказывается целесообразным несколько видоизменить исходную проблему следующим образом. Связный граф, описанный выше, заменяется полным графом с одной вершиной для каждого города. Напомним, что полный граф – это такой граф, у которого имеется единственное ребро, соединяющее каждую пару отличных вершин. Каждому ребру такого графа приписывается вес, равный наикратчайшему расстоянию между соответствующими городами, в соответствии с используемой сетью дорог. Эти самые короткие расстояния могут быть найдены на основании применения алгоритма Декстра к первоначальному графу. Чтобы мы могли позже возвращать информацию относительно исходного графа (который может и не являться полным графом), мы должны будем хранить записи, связанные с информацией о том, какие пути исходного графа формировали рёбра полного графа.

Замкнутая последовательность рёбер, позволяющая посетить все вершины графа, представляющего дорожную сеть, соответствует циклу Гамильтона в полном графе. Таким образом, проблема коммивояжёра может быть сформулирована следующим образом.

ПРОБЛЕМА КОММИВОЯЖЁРА. Для заданного связанного, взвешенного, полного графа, с расстояниями между вершинами, являющимися кратчайшими, требуется построить цикл Гамильтона минимального веса; т. е. минимальный цикл Гамильтона.

В пятой главе учебника Б.М.Логинова [1] говорится, что не каждый

граф имеет цикл Гамильтона; однако каждый полный граф, имеющий, по крайней мере, три вершины, имеет цикл Гамильтона. Так как наши графы конечны, то может иметься только конечное число циклов Гамильтона, и, следовательно, среди них должен быть и минимальный, т.е. проблема коммивояжера имеет решение. Отметим, то, что мы в данной работе и авторы в ряде других книг называем циклом Гамильтона, в учебнике Б.М.Логинова [1] называется цепью Гамильтона, что по нашей терминологии отличается от цикла Гамильтона (определение цикла и цепи Гамильтона – см. практическое занятие 1 и лекцию 6). Поэтому в приведённом здесь из [1] материале мы заменили слово цепь на цикл.

Заметим, без доказательства, что минимальный цикл Гамильтона для полного графа, с расстояниями между вершинами, являющимися кратчайшими, будет простым, т.е. не будет содержать повторяющихся рёбер. Но после замены рёбер полного графа путями исходного графа мы можем получить, как было отмечено выше, повторяющиеся рёбра.

Так как веса рёбер в полученном полном графе – это самые короткие расстояния между вершинами первоначального графа сети дорог, то для полного графа должно выполняться следующее **неравенство треугольника**.

Для каждого триплета отличных вершин (v_1, v_2, v_3) справедливо:

$$W(v_1, v_2) + W(v_2, v_3) \geq W(v_1, v_3),$$

где $W(v_i, v_j)$ обозначает вес единственного ребра, соединяющего v_i и v_j .

Эффективные и неэффективные алгоритмы [1]. В 1965 Дж. Эдмондс и А. Кобхэм представили широкую классификацию алгоритмов, которые выполняются в полиномиальной и в показательной зависимости от времени. Грубо говоря, алгоритм в **вычислительном отношении эффективен**, если его "стоимость" не превышает некоторую степень числа n , например, n^k для некоторого целого числа k . При этом

число n является "размером" проблемы. Это так называемые **алгоритмы полиномиального времени**. Альтернативно, алгоритм в **вычислительном отношении неэффективен**, если его стоимость – показательная функция n ; т.е. стоимость зависит от a^n для некоторого действительного числа $a > 1$. Такие алгоритмы называются **алгоритмами показательного времени**.

Возвращаясь к проблеме коммивояжера, следует сказать, что все известные алгоритмы, дающие точно минимальный цикл Гамильтона, в вычислительном отношении являются неэффективными относительно числа вершин графа; т.е. все известные алгоритмы являются алгоритмами показательного времени. Тем не менее, с практической точки зрения известны различные эффективные алгоритмы, которые дают приблизительное решение. Другими словами, они обеспечивают циклы Гамильтона, чей вес оказывается близким к минимально возможному, однако при этом нельзя быть уверенным в том, что данный вес является самым минимальным из возможных.

Алгоритмы «ближайшего соседа» и «самой близкой вставки». Имеется достаточно очевидный и простой "приблизительный" алгоритм, так называемый известный "алгоритм ближайшего соседа". Имеется также так называемый «жадный» алгоритм, который, как отмечает Б.М.Логинов [1], очень не эффективен.

В учебнике Б.М.Логинова [1] рассматривается и подробно описывается другой "приблизительный" алгоритм – "алгоритм самой близкой вставки", который мы приведём из [1]. Хотя этот алгоритм оказывается значительно сложнее описывать, зато он гарантирует нахождение цикла Гамильтона с полным весом, который не более чем в два раза превышает минимальный цикл. Это, несомненно, значительное улучшение по отношению к ранее отмеченному алгоритму "ближайшего

соседа". Причём, как правило, алгоритм самой близкой вставки порождает цикл Гамильтона с весом, значение которого оказывается значительно меньше двойного минимума.

Основной шаг в алгоритме самой близкой вставки заключается в том, чтобы взять в графе цикл и увеличить его, включая в него самые близкие к нему вершины. Этот шаг повторяется до тех пор, пока все вершины не окажутся включёнными в цикл. Алгоритм может применяться к любому полному взвешенному графу, для которого выполняется неравенство треугольника.

Лекция 9. Алгоритм «самой близкой вставки»

1. Сначала выбираем любую вершину. Далее выбираем инцидентное вершине ребро e с самым маленьким весом, и пусть Π является последовательностью рёбер: e, e . Мы расцениваем Π как наш стартовый "цикл", хотя, строго говоря, это не цикл, так как данная последовательность содержит повторяющееся ребро.

2. Выбираем ребро с самым маленьким весом, которое присоединяет инцидентную ему вершину, находящуюся вне цикла Π , к вершине входящей в цикл Π (может иметься несколько возможностей выбора таких рёбер).

3. Следующий шаг заключается в увеличении цикла в результате включения выбранной вершины v . Чтобы решить, как вставить v , следует рассмотреть все пары u_1, u_2 смежных вершин цикла Π и выбрать такую пару, для которой выражение:

$$I(u_1, u_2) = W(u_1, v) + W(v, u_2) - W(u_1, u_2)$$

является минимальным, где $W(u, v)$ обозначает вес ребра, соединяющего u и v . Это выражение $I(u_1, u_2)$ представляет увеличение полного веса цикла

Ц после включения в него вершины v . Мы увеличиваем цикл Ц, включая вершину v , путём присоединения ребра, соединяющего вершины u_1 и v , и ребра, соединяющего вершины v и u_2 , и удаляя ребро, соединяющее вершины u_1 и u_2 .

4. Повторяем шаги 2 и 3, пока цикл не будет включать в себя все вершины графа.

Пример. Проиллюстрируем алгоритм ближайшего включения для взвешенного полного графа, представленного на рис. 1 (который удовлетворяет неравенству треугольника).

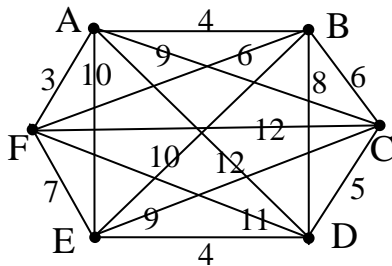


Рис. 1

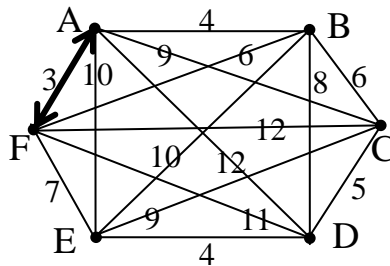


Рис. 2

Договоримся обозначать (единственное) ребро, соединяющее вершины X и Y , либо XY , либо YX .

Шаг 1. Чтобы выполнить шаг 1, мы сначала выберем вершину, маркированную на рисунке буквой A (мы могли бы, конечно, выбрать любую другую из вершин). Ребро AF является ребром, инцидентным вершине A , и имеет самый маленький вес из числа рёбер, инцидентных вершине A . Поэтому первый цикл будет: $\text{Ц} = AF, FA$ (от вершины A до вершины F и назад к вершине A), как показано на рис. 2.

Шаг 2. Ребро с самым маленьким весом, среди инцидентных вершине A и вершине F , – это ребро AB , поэтому вершина B – это первая вершина, которую следует вставить.

Шаг 3. При первом применении шага 3 вершина B может быть вставлена в цикл Ц единственным образом: удалением ребра AF и

вставкой на его место рёбер АВ, ВF. Это порождает цикл Ц = АВ, ВF, FА, показанный на рис. 3(а).

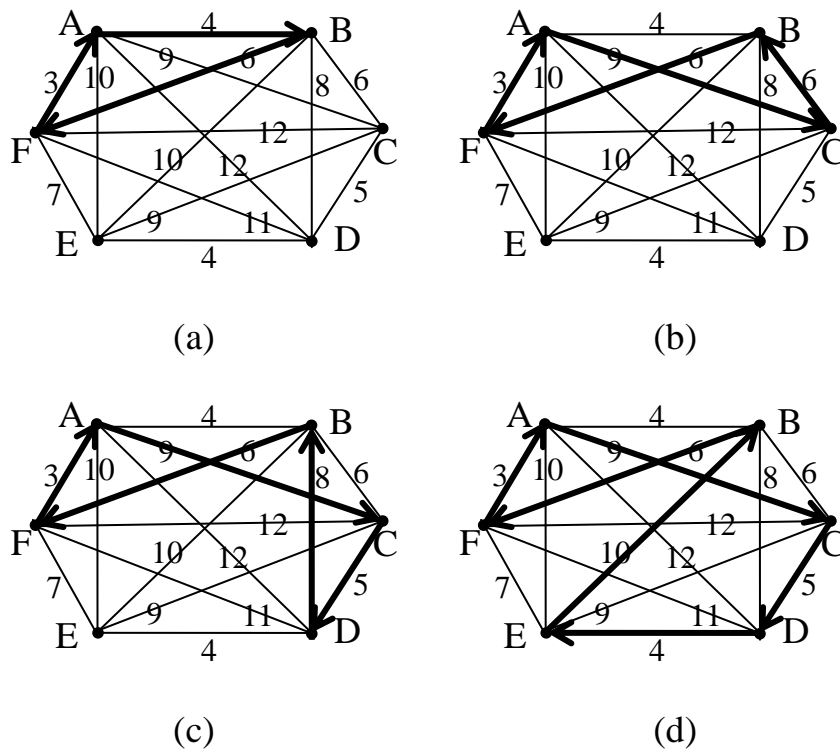


Рис. 3

Шаг 2. Вершина, которая является самой близкой к вершине этого цикла – это вершина С.

Шаг 3. Мы должны найти лучший способ вставить вершину С, добившись минимального увеличения полного веса цикла Ц. Величины увеличения или цены I при замене каждого из трёх рёбер текущего цикла будут, соответственно:

$$I(AB) = W(AC) + W(CB) - W(AB) = 9 + 6 - 4 = 11;$$

$$I(BF) = W(BC) + W(CF) - W(BF) = 6 + 12 - 6 = 12;$$

$$I(FA) = W(FC) + W(CA) - W(FA) = 12 + 9 - 3 = 18.$$

Минимальное увеличение полного веса цикла Ц будет при удалении ребра АВ и вставке на его место рёбер АС, СВ. Это даёт цикл, показанный на рис. 3(б).

Повторяя этот процесс, т.е. шаги 2 и 3, дважды, мы увеличиваем

цикл, включая сначала вершину D и затем вершину E, как это показано на рис. 3(с)-(d).

Заключительный цикл $\Pi = AC, CD, DE, EB, BF, FA$ является требуемым циклом Гамильтона с полным весом $9 + 5 + 4 + 10 + 6 + 3 = 37$. Этот пример иллюстрирует тот факт, что алгоритм самой близкой вставки может не производить минимальный цикл Гамильтона. Граф действительно имеет единственный минимальный цикл Гамильтона – AB, BC, CD, DE, EF, FA – с полным весом 29, что изображено на рис. 4.

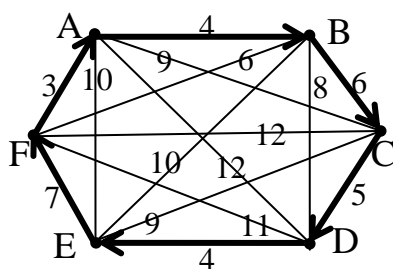


Рис. 4

Практическое занятие 5. Проблема коммивояжёра. Алгоритм «самой близкой вставки». Выдача заданий РГР1: “Поиск экономичных путей”

■ УПРАЖНЕНИЯ

Аудиторные задания

Задача 1. Для графа, изображённого на рис. 1, на предыдущем практическом занятии 4 в аудиторном задании был получен полный граф, изображённый на рис. 2, с длинами рёбер, равными длинам кратчайших путей между вершинами исходного графа

$$\begin{aligned} W(AB) &= 7; W(AC) = 3; W(AD) = W(AED) = 6; W(AE) = 4; \\ W(BC) &= 6; W(BD) = 7; W(BE) = W(BCE) = 8; \\ W(CD) &= W(CED) = 4; W(CE) = 2; \\ W(DE) &= 2. \end{aligned}$$

Решим проблему коммивояжёра с помощью алгоритма «самой близкой

вставки» для этого полного графа.

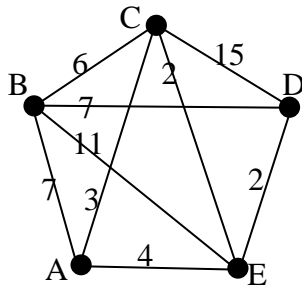


Рис. 1

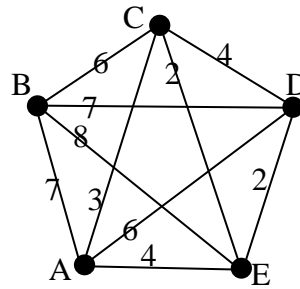


Рис. 2

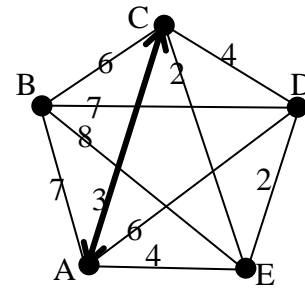


Рис. 3

Решение. Договоримся обозначать через XU ребро цикла в направлении обхода от X к U .

Шаг 1. Чтобы выполнить шаг 1, мы сначала выберем вершину, маркированную на рисунке буквой A (мы могли бы, конечно, выбрать любую другую из вершин). Ребро AC является ребром, инцидентным вершине A , и имеет самый маленький вес из числа рёбер, инцидентных вершине A . Поэтому первый цикл будет: $\mathcal{C} = AC, CA$ (от вершины A до вершины C и назад к вершине A), как показано на рис. 3.

Шаг 2. Ребро с самым маленьким весом, среди инцидентных вершине A и вершине C , – это ребро CE , поэтому вершина E – это первая вершина, которую следует вставить.

Шаг 3. При первом применении шага 3 вершина E может быть вставлена в цикл \mathcal{C} единственным образом: удалением ребра AC и вставкой на его место рёбер AE, EC . Это порождает цикл $\mathcal{C} = AE, EC, CA$, показанный на рис. 4(а).

Шаг 2. Вершина, которая является самой близкой к вершине этого цикла – это вершина D .

Шаг 3. Мы должны найти лучший способ вставить вершину D , добившись минимального увеличения полного веса цикла \mathcal{C} . Величины увеличения или цены I при замене каждого из трёх рёбер текущего цикла

будут, соответственно:

$$I(AE) = W(AD) + W(DE) - W(AE) = 6 + 2 - 4 = 4;$$

$$I(EC) = W(ED) + W(DC) - W(EC) = 2 + 4 - 2 = 4;$$

$$I(CA) = W(CD) + W(DA) - W(CA) = 4 + 6 - 3 = 7.$$

Минимальное увеличение полного веса цикла Ц будет при удалении ребра АЕ и вставке на его место рёбер AD, DB, что даёт цикл, показанный на рис. 4(b). Можно было выбрать и другой вариант, с удалением ребра ЕС, но мы выбрали первый из двух возможных вариантов.

Шаг 2. Вершина, которая является самой близкой к вершине этого цикла – это последняя вершина В.

Шаг 3. Величины увеличения или цены I при замене каждого из трёх рёбер текущего цикла будут, соответственно:

$$I(AD) = W(AB) + W(BD) - W(AD) = 7 + 7 - 6 = 8;$$

$$I(DE) = W(DB) + W(BE) - W(DE) = 7 + 8 - 2 = 13;$$

$$I(EC) = W(EB) + W(BC) - W(EC) = 8 + 6 - 2 = 12;$$

$$I(CA) = W(CB) + W(BA) - W(CA) = 6 + 7 - 3 = 10.$$

Минимальное увеличение полного веса цикла Ц будет при удалении ребра AD и вставке на его место рёбер AB, BD, что даёт цикл, показанный на рис. 4(c).

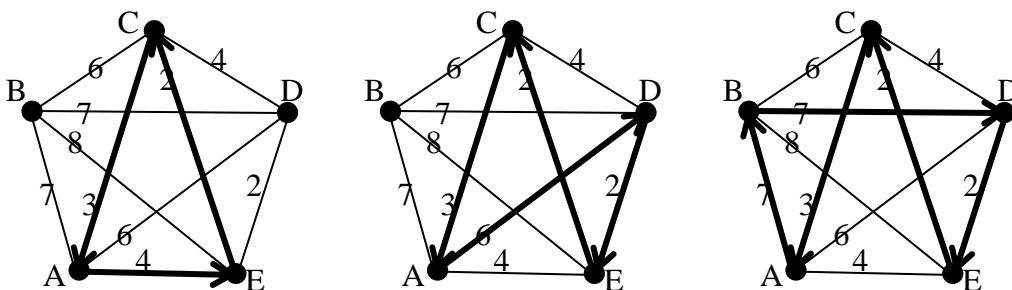


Рис. 4 (a)

(b)

(c)

Заключительный цикл Ц = AB, BD, DE, ЕС, СА является требуемым циклом Гамильтона с полным весом $7 + 7 + 2 + 2 + 3 = 21$. Если бы мы

выбрали вариант с удалением ребра ЕС вместо АЕ, то получили бы вместо варианта, изображённого на рис. 4 (а), (b), (с), вариант изображённый на рис. 5 (а), (b), (с), что даёт полный вес цикла $4 + 2 + 7 + 6 + 3 = 22$.

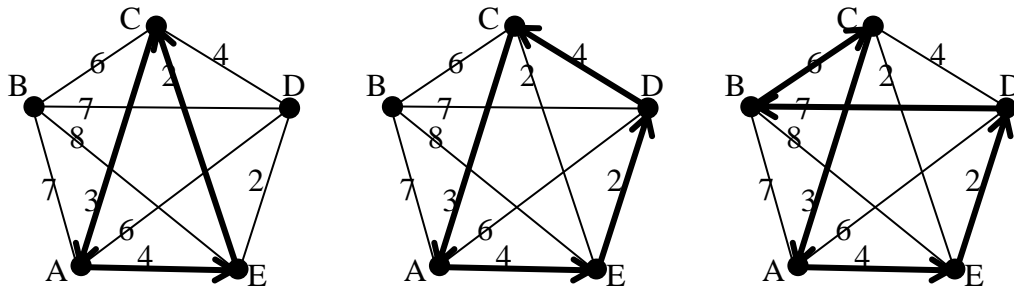


Рис. 5 (а)

(b)

(с)

Проанализировав, какие пути исходного графа формировали рёбра полного графа, убеждаемся, что как цикл на рис. 4 (с), так и цикл на рис. 5 (с) содержат только рёбра исходного графа, изображённого на рис. 1, и, следовательно, эти циклы дают окончательный ответ, приведённый на рис. 6 и рис. 7 соответственно.

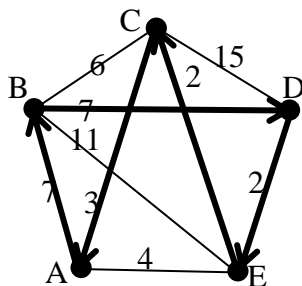


Рис. 6

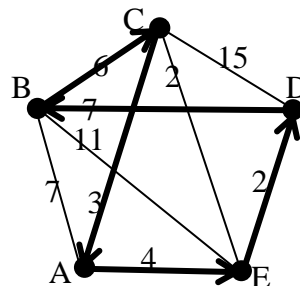


Рис. 7

Домашнее задание

Задача 1. Для графа, для которого на предыдущем практическом занятии 4 в домашнем задании 1 был получен полный граф, с длинами рёбер, равными длинам кратчайших путей между вершинами исходного графа, решить проблему коммивояжёра с помощью алгоритма «самой близкой вставки» для полученного полного графа.

Решение. Исходный и полный графы изображены на рис. 8 и 9, а на

рис. 10 и рис. 11 (а), (b), (с) показано соответствующее решение для полученного полного графа.

Заключительный цикл $\Pi = AD, DE, EC, CB, BA$ является требуемым циклом Гамильтона с полным весом $6 + 2 + 2 + 3 + 4 = 17$. Если заменить кратчайшие пути исходными рёбрами, получим, как изображено на рис. 12, окончательный ответ задачи. Это цикл $\Pi = AE, ED, DE, EC, CB, BA$, что не является циклом Гамильтона, так как вершина E имеет степень 4, а не 2. Ребро ED проходится 2 раза, по разу в противоположных направлениях.

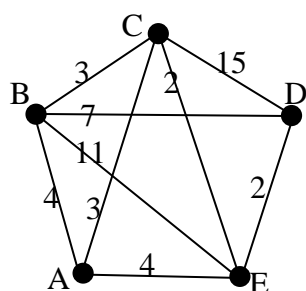


Рис. 8

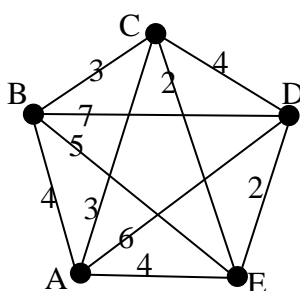


Рис. 9

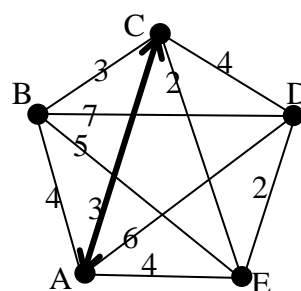


Рис. 10

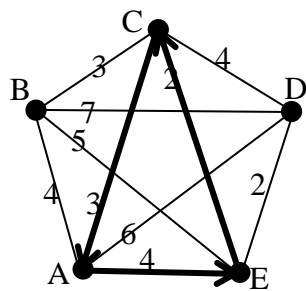
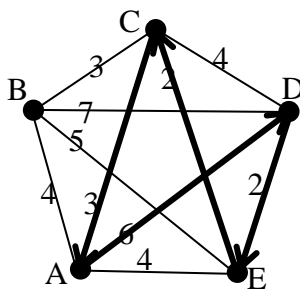
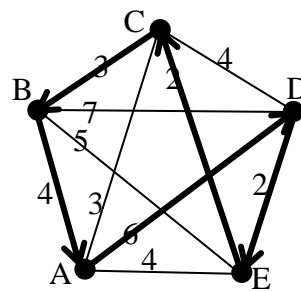


Рис. 11 (а)



(b)



(с)

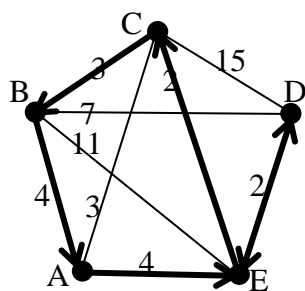


Рис. 12

Образец задания РГР1: “Поиск экономических путей”

Билет №1

$q_{12}=7$, $q_{13}=3$, $q_{14}=11$, $q_{15}=4$, $q_{16}=2$,
 $q_{23}=6$, $q_{24}=7$, $q_{25}=11$, $q_{26}=4$,
 $q_{34}=15$, $q_{35}=2$, $q_{36}=9$, $q_{45}=2$, $q_{46}=9$.

1. Построить наиболее дешёвую коммуникационную сеть.
 2. Найти кратчайшие расстояния между вершинами с помощью алгоритма Декстра.
- Решить проблему коммивояжёра с помощью алгоритма «самой близкой вставки».

Список литературы

1. Логинов Б.М. Лекции и упражнения по курсу «Введение в дискретную математику», МГТУ, Калужский филиал, 1998. – 423 с.
2. Деревенский В.П., Славутин М.Л. Дополнительные главы курса математики: учеб. пособие. – Казань: КГАСА, 2003. – 119 с.
3. Кошев А.Н., Кузина В.В. Дискретная математика: учеб. пособие. – Пенза: Изд-во ПГАСА, 2002. – 156 с.
4. Спирина М.С., Спирин П.А. Дискретная математика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования. – М.: Издательский центр «Академия», 2004. – 368 с.
5. Залётова Л.Г. Элементы теории графов: методические указания для самостоятельной работы по математике студентов КГАСУ. – Казань: КГАСУ, 2007. – 35 с.
6. Залётова Л.Г. Элементы теории графов: методические указания для самостоятельной работы студентов дневного отделения архитектурного факультета. – Казань: Казанск. инж.-строит. ин-т, 1993. – 37 с.

Учебное издание

Арасланов Шамиль Фатыхович

**ТЕОРИЯ ГРАФОВ
ЛЕКЦИИ И ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ**

Учебное пособие по дисциплине
“Дополнительные главы математики”
для студентов дневного отделения направления подготовки
230400 “Информационные системы и технологии”

Редактор: Е.А. Кириллович

Издательство

Казанского государственного архитектурно-строительного университета		
Подписано в печать		Формат 60x84/16
Заказ	Печать ризографическая	Усл.-печ.л. 5,44
Тираж 50 экз.	Бумага офсетная № 1	Уч.-изд.л. 5,44

Отпечатано в полиграфическом секторе
Издательства КГАСУ
420043, Казань, ул.Зелёная, 1