

MATEMATIKA



ALGEBRA VA ANALIZ ASOSLARI GEOMETRIYA II QISM

Umumiy oʻrta taʼlim maktablarining 11-sinflari va oʻrta maxsus,
kasb-hunar taʼlimi muassasalari uchun darslik

Oʻzbekiston Respublikasi Xalq taʼlimi vazirligi tomonidan tasdiqlangan

1-nashr

TOSHKENT

2018

UO‘K: 51(075.32)
KBK: 22.1ya72
M 54

Algebra va analiz asoslari bo‘limining mualliflari:

M.A. Mirzaahmedov, Sh.N. Ismailov, A.Q. Amanov

Geometriya bo‘limining muallifi:

B.Q. Xaydarov

Taqrizchilar:

R.B. Beshimov – Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy Universiteti “Geometriya va topologiya” kafedrasini mudiri, fizika-matematika fanlari doktori;


Q.S. Jumaniyozov – Nizomiy nomidagi TDPU fizika-matematika fakulteti “Matematika o‘qitish metodikasi” kafedrasini dotsenti, pedagogika fanlari nomzodi;


R.O. Ro‘zimov – Sergeli tumani 237- umumta’lim maktabi matematika fani o‘qituvchisi;


S.B. Jumaniyozova – RTM metodisti;

I.B. Saibova – Yashnobod tumani 307- DIUMning oliy toifali matematika fani o‘qituvchisi.

Darslikning “Algebra va analiz asoslari” bo‘limida ishlatilgan belgilar va ularning talqini:

 – masalani yechish (isbotlash) boshlandi

 – masalani yechish (isbotlash) tugadi

 – nazorat ishlari va test (sinov) mashqlari

 – savol va topshiriqlar

 – asosiy ma’lumot

 – murakkabroq mashqlar

ISBN: 978-9943-5127-5-7

© “ZAMIN NASHR” MCHJ, 2018

© Barcha huquqlar himoyalangan

Algebra va analiz asoslari

II BOB. INTEGRAL VA UNING TATBIQLARI



ANIQ INTEGRALNING TATBIQLARI

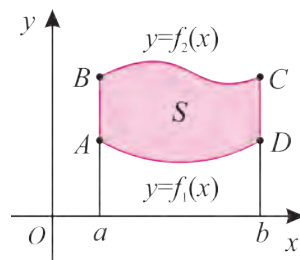
Yuzlarni integrallar yordamida hisoblash

Masala. Rasmdagi $ABCD$ shakl yuzi S hisoblansin (7.a-rasm).

△ Ravshanki, bu shaklning S yuzi $aBCb$ va $aADb$ egri chiziqli trapetsiyalar yuzlarining ayirmasiga teng:

$$S = \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_1(x) dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx. \quad (1)$$

Javob: $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx.$ ▲



7.a-rasm.

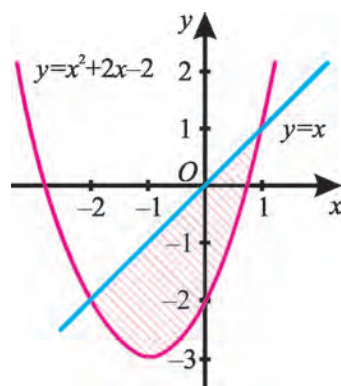
(1) formula $f_2(x) \geq f_1(x)$ shartni qanoatlantiradigan uzluksiz funksiyalar uchun to‘g‘ridir.

1-misol. $y=x$ to‘g‘ri chiziq va $y=x^2+2x-2$ parabola bilan chegaralangan shakl yuzini hisoblang.

- △ 1) $y=x$ va $y=x^2+2x-2$ chiziqlarning kesishish nuqtalarini topamiz:
2) $x^2+2x-2=x$ tenglamadan $x_1=-2, x_2=1$.

Demak, chiziqlar $(1; 1), (-2; -2)$ nuqtalarda kesishadi. Ravshanki, $(-2; 1)$ oraliqda $y=x$ funksiya grafigi $y=x^2+2x-2$ funksiya grafigidan yuqorida yotadi (8-rasm).

U holda (1) formulada $a=-2, b=1, f_2(x)=x, f_1(x)=x^2+2x-2$ desak, izlanayotgan yuz (1) ga ko‘ra



8-rasm.

$$S = \int_{-2}^1 (x - (x^2 + 2x - 2)) dx = \int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) dx = \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right) \Big|_{-2}^1 = \frac{7}{6} - \left(-\frac{10}{3}\right) = 4,5.$$

Javob: $S = 4,5$ (kv.birlik). ▲

2-misol. $y = \sqrt{x}$ va $y = x^2$ chiziqlar bilan chegaralangan shakl yuzini hisoblang.

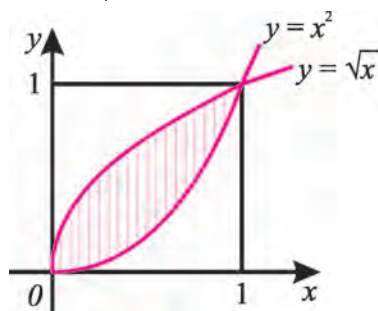
△ $x \in [0; 1]$ kesmada $x^2 \leq \sqrt{x}$ (9-rasm).

(1) formulada $a=0$, $b=1$, $f_1(x) = x^2$,

$f_2(x) = \sqrt{x}$ deymiz.

$$\text{U holda } S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3\right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ (kv.birlik).}$$

Javob: $S = \frac{1}{3}$ kv.birlik. ▲

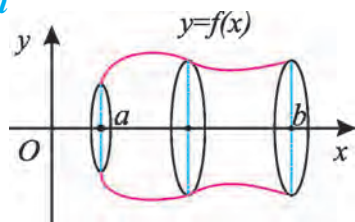


9-rasm.

Aylanish jismlarining hajmini hisoblash

Egri chiziqli trapetsiyani Ox o'qi atrofida aylantirish natijasida hosil bo'ladigan jismning

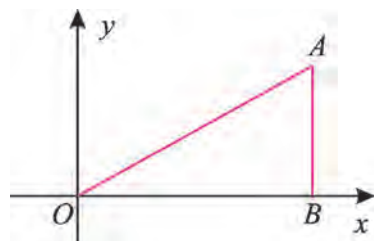
$$\text{hajmi} \quad V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) dx \quad (2)$$



10-rasm.

formula bilan hisoblanishini isbotlash mumkin. Bu formuladan $f(x)$ ni tanlash hisobiga kesik konus, konus, silindr, shar, shar segmenti hajmlarini osonlikcha topsa bo'ladi (10- rasm).

Konusning hajmi. Bu holda $AB=R$, $OB=H$ deb olamiz (11-rasm). OA to'g'ri chiziq tenglamasi $y = \frac{R}{H}x$ ekanligi ravshan. U holda (2) formulaga muvofiq



11-rasm.

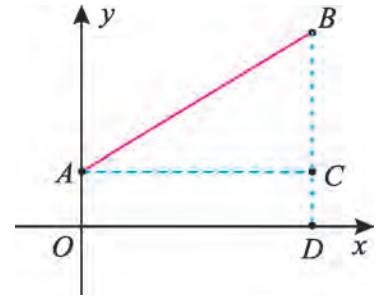
$$V_{\text{konus}} = \pi \cdot \int_0^H \left(\frac{R}{H}x\right)^2 dx = \pi \cdot \frac{R^2}{3H^2} \cdot x^3 \Big|_0^H = \pi \cdot \frac{R^2}{3H^2} \cdot (H^3 - 0) = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

Demak, $V_{\text{konus}} = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$

Kesik konusning hajmi. AB kesmani Ox o'qi atrofida aylantirishdan kesik konus hosil bo'ladi. $AO=r$, $BD=R$, $OD=H$ deylik (12- rasm).

AB to'g'ri chiziqning tenglamasi $y = \frac{R-r}{H}x + r$ ekani ravshan.

Demak, $a=0$, $b=H$, $f(x) = \frac{R-r}{H}x + r$.



12-rasm.

U holda (2) formulaga muvofiq

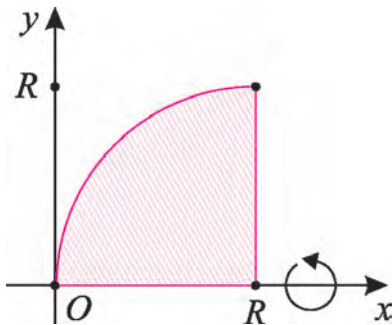
$$V_{k.konus} = \pi \cdot \int_0^H \left(\frac{R-r}{H}x + r \right)^2 dx = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{H}{R-r} \cdot \left(\frac{R-r}{H}x + r \right)^3 \Big|_0^H = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{H}{R-r} \cdot (R^3 - r^3) = \frac{\pi}{3} \cdot H \cdot (R^2 + Rr + r^2).$$

Shunday qilib, kesik konusning hajmi: $V = \frac{\pi}{3} \cdot (R^2 + Rr + r^2)H$. Bundan $AO=r=0$ bo'lsa, konus hajmi formulasini olamiz.

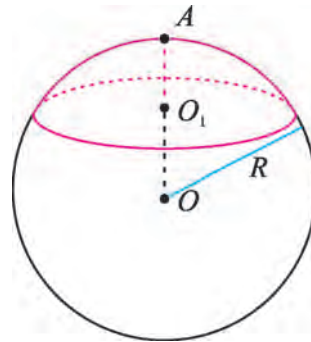
Sharning hajmi. Radiusi R , markazi $(R; O)$ nuqtada bo'lgan doiraning cho'raq qismini Ox o'qi atrofida aylantirishdan (13-rasm) hosil qilinadigan shakl

sharning yarmidir. Bizning holda mos aylana tenglamasi $(x-R)^2 + y^2 = R^2$ bo'ladi, bundan $y = \sqrt{2Rx - x^2}$, $x \in [0; R]$. (2) formulaga ko'ra

$$\frac{1}{2}V_{shar} = \pi \cdot \int_0^R (2Rx - x^2) dx = \pi \cdot \left(Rx^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^R = \frac{2}{3}\pi R^3, \text{ demak, } V_{shar} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$



13-rasm.



14-rasm.

Shar segmentining hajmi. 14-rasmda $OA=R$, $O_1A=H$ (segmentning balandligi) bo'lsin. Doira segmentini uning balandligi atrofida aylanishidan shar segmenti hosil bo'ladi (14-rasm.) Shar segmentining hajmini hisoblash shar hajmini topish kabi bo'ladi, bu holda integrallash $[0; H]$ kesma bo'yicha bajariladi:

$$V_{segment} = \pi \cdot \int_0^H (2Rx - x^2) dx = \pi \cdot \left(Rx^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^H = \pi \cdot \left(RH^2 - \frac{1}{3} H^3 \right).$$

Demak, $V_{segment} = \frac{1}{3} \pi \cdot H^2 \cdot (3R - H)$.

Silindrning hajmi. Ox o'qqa parallel AB kesmani Ox o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'ladigan shakl silindr bo'ladi.

$AB=OC=H$, $OA=BC=R$ bo'lsin (15-rasm).

AB to'g'ri chiziq tenglamasi $y=R$ ekani ravshan, $x \in [0; H]$. U holda (2) formulaga ko'ra,

$$V_{silindr} = \pi \cdot \int_0^H R^2 dx = \pi R^2 x \Big|_0^H = \pi R^2 \cdot (H - 0) = \pi R^2 H. \text{ Demak, } V_{silindr} = \pi R^2 \cdot H.$$

Nega aylanish Ox o'qi atrofida bo'lishi kerak? Aylanish Oy atrofida bo'lsa-chi? Bunday savolni qo'yish tabiiy.

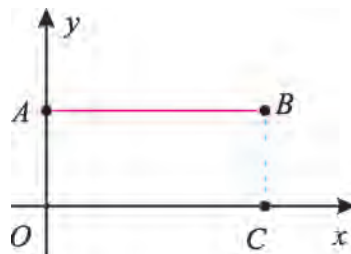
Yuqoridan uzluksiz $y=f(x)$ funksiya grafigi, pastdan Ox o'qi, chap va o'ngdan, mos ravishda, $x=a$ va $x=b$ vertikal chiziqlar bilan chegaralangan egri chizikli trapetsiyaning Oy o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'ladigan jismning hajmi

$$V = 2\pi \cdot \int_a^b xf(x) dx \quad (3)$$

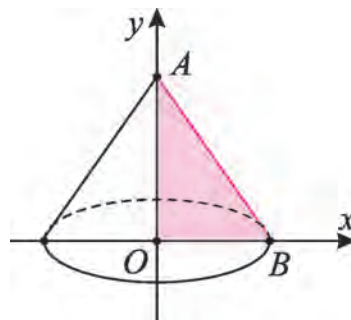
formula bilan hisoblanishini isbotlash mumkin.

1-misol. Konus hajmini toping (16-rasm).

\triangle $OA=H$, $OB=R$ deylik. AB to'g'ri chiziq tenglamasi $y = -\frac{H}{R}x + H$ ekani ravshan. U holda (3) formulada $a=0$, $b=R$, $f(x) = -\frac{H}{R}x + H$ desak, AB kesmaning Oy o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'ladigan konus hajmi



15-rasm.



16-rasm.

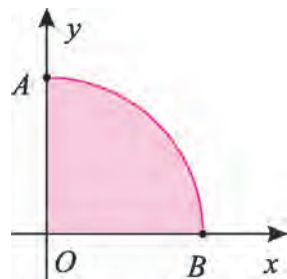
$$V_{konus} = 2\pi \cdot \int_0^R x \cdot \left(-\frac{H}{R}x + H\right) dx = 2\pi \left[-\frac{H}{R} \int_0^R x^2 dx + H \int_0^R x dx \right] =$$

$$= 2\pi \cdot \left(-\frac{H}{R} \cdot \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^R + H \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^R = -2\pi \cdot \frac{H}{R} \cdot \frac{R^3}{3} + 2\pi \cdot H \cdot \frac{R^2}{2} = \pi R^2 H \cdot \left(-\frac{2}{3} + 1\right) = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

Demak, $V_{konus} = \frac{1}{3} \pi R^2 H$. ▲

2-misol. Radiusi R bo'lgan shar hajmini toping.

△ $OA = OB = R$, O – aylana markazi deylik. Bu aylana tenglamasi, ravshanki, $x^2 + y^2 = R^2$, bundan $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $0 \leq x \leq R$. Bunga mos doiraning chorak qismini (17-rasm) Oy o'qi atrofida aylantirishdan sharning yarmi hosil bo'ladi. Avval shu yarimshar



17-rasm.

hajmini topamiz. (3) formulada $a = 0$, $b = R$, $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ deylik. U holda

$$V = 2\pi \cdot \int_0^R x \sqrt{R^2 - x^2} dx.$$

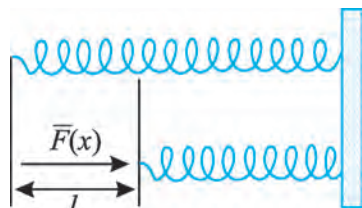
$$R^2 - x^2 = u \text{ desak, } x dx = -\frac{du}{2},$$

$$\int x \sqrt{R^2 - x^2} dx = -\frac{1}{2} \cdot \int \sqrt{u} du = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{3} \cdot u^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{3} (R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Bu yerda $C = 0$ deb olish mumkin.

$$\text{Demak, } V = -\frac{2\pi}{3} (R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^R = \frac{2}{3} \pi R^3 \text{ yoki } V_{shar} = \frac{4}{3} \pi R^3. \text{ ▲}$$

Kuchning bajargan ishini hisoblash. Vintsimon prujinaning bir uchi mustahkamlangan, ikkinchi uchiga esa $F = F(x)$ kuch ta'sir etib, prujinani siqadi, deylik (18-rasm). Guk qonuniga ko'ra prujinaning siqilishi unga ta'sir etayotgan $F(x)$ kuchga proporsionaldir. Prujinani l birlikka siqish uchun $F(x)$ kuchning bajargan ishini toping.



18-rasm.

△ Ma'lumki, o'zgaruvchi $F(x)$ kuchning $[a; b]$ oraliqdagi bajargan ishi

$$A = \int_a^b F(x) dx \quad (4)$$

formula yordamida hisoblanadi. Agar $F(x)$ kuch ta'sirida prujinaning siqilish kattaligini x orqali belgilasak, u holda Guk qonuniga ko'ra $F(x) = k \cdot x$ bo'ladi, bu yerda k – o'zgarmas son. (4) formulaga muvofiq bajarilgan ish

$$A = \int_0^l kx dx = k \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^l = \frac{kl^2}{2}. \blacktriangle$$

Xususan, prujinani 0,01 m siqish uchun 10N kuch kerak bo'lsa,

$$F = 10N = k \cdot x \text{ tenglikdan } k = \frac{F}{x} = 1000. \text{ Demak, } F(x) = kx = 1000 \cdot x.$$

Prujinani 0,09 m siqish uchun ketadigan F kuch bajargan ish bu holda

$$A = \int_0^{0,09} 1000x dx = 1000 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0,09} = 500 \cdot 0,0081 = 4,05(\text{J}).$$

Mashqlar

51. $y = -x^2 + 4x$ parabola, (4;0) va (0;4) nuqtalar orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq bilan chegaralangan shakl yuzini toping.

52. $f(x) = 2x - 2$ funksiya grafigi va uning $F(0) = 1$ shartni qanoatlantiruvchi boshlang'ich funksiyasi bilan chegaralangan shakl yuzini toping.

Quyidagi chiziqlar bilan chegaralangan shakl yuzini toping. Mos rasm chizing (**53–54**):

53. 1) $y = x^2, y = 1 - x^2;$

2) $y = \frac{1}{x}, y = 0, x = 1, x = 4;$

3) $y = x^2 - 2x, y = 4 - x^2;$

4) $y = \frac{1}{x}, y = 0, x = 1, x = a(a > 1).$

54. 1) $y = \frac{x^2}{3}, y = 4 - \frac{2}{3}x^2;$

2) $y = x^2, y = 2x^2, y = 2;$

3) $y = x^2, y = \frac{x^2}{2}, y = 2x;$

4) $y = \frac{1}{x}, y = x^2, y = \frac{x^2}{2}.$

55. $y = \sin x, x \in [0; \pi]$, funksiya grafigining Ox o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jism hajmini hisoblang.

56. $y = \sqrt{x}, x = 1, x = 4$ chiziqlar bilan chegaralangan shaklning Ox o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'ladigan jism hajmini toping.

57. Qiyalik bo'yicha pastga tushayotgan poyezdning tezligi $v(t) = 15 + 0,2(\text{m/s})$ qonunga ko'ra o'zgaradi. Agar poyezd qiyalikni 20 s davomida o'tgan bo'lsa, qiyalikning uzunligini toping.

58. Vaqtning $t = 0$ paytida 20 m/s tezlik bilan yer sirtidan otilgan jism $s(t) = 20t - 5t^2$ (m) qonun bilan harakatlanadi. Jismning tezligi 5 m/s bo'lganda, u yerdan qanday balandlikda bo'ladi?

59. Avtomobilning tormozlanish tezligi $v(t)=19-1,2\cdot t$ (m/s) qonunga ko'ra o'zgaradi. Agar avtomobil tormoz olgan vaqtdan 10 s o'tgach to'xtagan bo'lsa, uning tormozlanish yo'li uzunligini toping.

60. Nuqtaning tezligi $v(t)=3t+\frac{3}{2}\sqrt{t}$ (m/s) qonun bo'yicha o'zgaradi.

Shu nuqtaning $t=0$ dan $t=4$ gacha vaqt oralig'ida bosib o'tgan yo'lini toping.

61. Yuqoridan $y=e^x$ chiziq bilan, pastdan Ox o'qi bilan, chapdan $x=0$, o'ngdan $x=1$ chiziq bilan chegaralangan sohaning Oy o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jism hajmini toping.

Quyidagi chiziqlar bilan chegaralangan shakl yuzini toping. Mos rasm chizing (**62–63**):

62. 1) $y=2\sqrt{x}$, $y=6$, $x=0$; 2) $y=x^2$, $y=2\sqrt{2x}$;
3) $y=x^2$, $y=\sqrt[3]{x}$; 4) $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{4-3x}$, $y=0$.

63. 1) $y=\sin 6x$, $x=0$, $x=\pi$, Ox o'qi;

2) $y=\sin 2x$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, Ox o'qi;

3) $y=\cos x$, $y=1+\frac{2}{\pi}x$, $x=\frac{\pi}{2}$;

4) $y=-x^2$, $y=2e^x$, $x=0$, $x=1$.

64*. $y=2x^2-8x$, parabola va shu parabolaga uning uchidan o'tkazilgan urinma va Oy o'qi bilan chegaralangan shakl yuzini toping.

65*. $y=x^2+10$ parabola va shu parabolaga (0; 1) nuqtadan o'tkazilgan urinmalar bilan chegaralangan shakl yuzini toping.

66. Agar $2N$ kuch prujinani 1 cm qissa, prujinani 3 cm qisish uchun sarflanadigan ishni hisoblang.

67. To'g'ri chiziqli harakat qilayotgan nuqtaning vaqtning $[t_1; t_2]$ oralig'idagi tezligi $v(t)>0$ bo'lsin. Vaqtning $t=t_1$ paytidan $t=t_2$ paytigacha bo'lgan oralig'ida nuqta bosib o'tgan yo'lini toping.

68*. $y=-x^2+1$, $0\leq x\leq 1$ va Oy o'qi bilan chegaralangan shaklning Oy o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'ladigan jism hajmini hisoblang.

69. $y=-x^2+4$, $0\leq x\leq 2$, $x=0$ (Oy o'qi) chiziqlar bilan chegaralangan shaklning Ox o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jismning hajmini hisoblang.

$\int_a^b f(x)dx$ integraldagi $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasini topa olsak, uni Nyuton–Leybnis formulasidan foydalanib, aniq hisoblay olamiz.

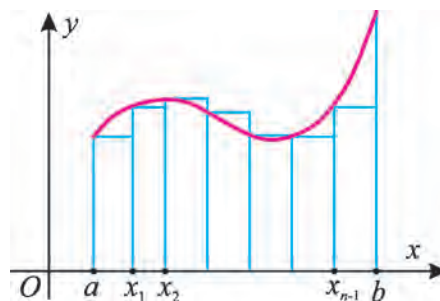
Agar boshlang'ich funksiya topilmasa, u holda $\int_a^b f(x)dx$ integralni taqribiy hisoblash masalasi qo'yiladi. Aniq integralni taqribiy hisoblashning bir nechta usuli bor. Shulardan ba'zilarini keltiramiz.

To'g'ri to'rtburchaklar formulasi. $[a; b]$ kesmada $y=f(x)$ uzluksiz funksiya aniqlangan bo'lsin. $[a; b]$ kesmani $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ nuqtalar yordamida n ta o'zaro teng kesmalarga ajratamiz. Har bir kesmaning uzunligi $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ ga teng bo'ladi. $a=x_0, b=x_n$ deylik. Bo'linish nuqtalari $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ orqali $y=f(x)$ funksiya grafigi bilan kesishguncha vertikal to'g'ri chiziqlar (Ox ga perpendikularlar) o'tkazamiz. Natijada egri chiziqli trapetsiya n ta kichik egri chiziqli trapetsiyalarga bo'linadi.

Har bir kichik egri chiziqli trapetsiyani asosi Δx , balandligi esa $y=f(x)$ funksiyaning $[x_k; x_{k+1}]$ kesmaning, masalan, chap uchi x_k dagi qiymati $f(x_k)$ ga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchak bilan almashtiramiz, bunda $k=0, 1, \dots, n-1$.

Hosil bo'lgan bu to'g'ri to'rtburchaklar yuzlarining yig'indisi taqriban egri chiziqli trapetsiyaning yuziga teng bo'ladi (19-rasm). Shunday qilib ushbu formulaga kelimiz:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot (f(a) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1})). \quad (1)$$



19-rasm.

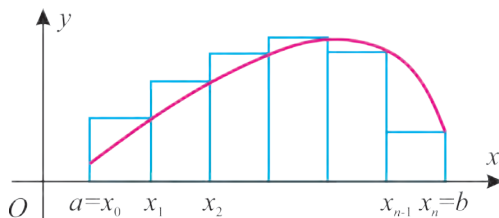
Bu formula aniq integralni taqribiy hisoblashning *to‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasi* deyiladi.

To‘g‘ri to‘rtburchakning balandligi sifatida $f(x)$ funksiyaning $[x_k; x_{k+1}]$ kesmaning o‘ng uchidagi $f(x_{k+1})$ yoki shu kesma o‘rtasi $\frac{x_k + x_{k+1}}{2} = x_{k/2}$ dagi $f(x_{k/2})$ qiymatini ham olish mumkin edi.

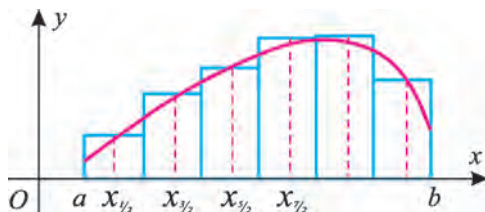
Agar to‘g‘ri to‘rtburchakning balandligi qilib $f(x_{k+1})$ yoki $f(x_{k/2})$ olinsa, u holda, mos ravishda, shunday formulalarni hosil qilamiz (20 a, b - rasmlar):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot (f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(b)), \quad (1a)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \left(f(x_{1/2}) + f(x_{3/2}) + \dots + f(x_{2n-1/2}) \right). \quad (1b)$$



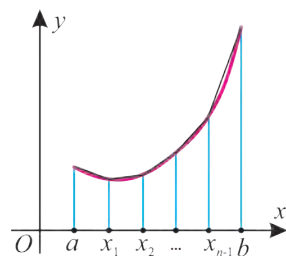
20.a-rasm.



20.b-rasm.

O‘tkazilgan vertikal chiziqlarning $y=f(x)$ funksiya grafigi bilan kesishish nuqtalarini ketma-ket tutashtirish natijasida har bir kichik egri chiziqli trapetsiyaning asoslari $f(x_k)$ va $f(x_{k+1})$ hamda balandligi $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ bo‘lgan trapetsiya bilan almashtiramiz, bunda $k=0, 1, \dots, n-1$.

Hosil qilingan bunday trapetsiyalar yuzlarining yig‘indisi taqriban egri chiziqli trapetsiyaning yuziga teng bo‘ladi (20.d - rasm).



20.d-rasm.

Shunday qilib ushbu formulani hosil qilamiz:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) \right). \quad (2)$$

Bu formula aniq integralni taqribiy hisoblashning *trapetsiyalar formulasi* deyiladi.

1-misol. $A = \int_0^1 e^{-x^2} dx$ integralni taqribiy hisoblang.

△ Ma'lumki, $f(x) = e^{-x^2}$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasini bevosita topishning iloji yo'q. Avval berilgan integralni to'g'ri to'rtburchaklar formulasi yordamida hisoblab ko'ramiz. $[0;1]$ kesmani, masalan, 5 ta teng qismga ajratamiz $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{5} = 0,2$; demak, $x_0=0$; $x_1=0,2$; $x_2=0,4$; $x_3=0,6$; $x_4=0,8$; $x_5=1$.

$f(x) = e^{-x^2}$ funksiyaning shu nuqtalardagi taqribiy qiymatlarini yozamiz:

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
e^{-x^2}	1	0,96079	0,85214	0,69768	0,52729	0,36788

U holda (1) formulaga ko'ra

$$A \approx \frac{1}{5} \cdot (1 + 0,96079 + 0,85214 + 0,69768 + 0,52729 + 0,36788) = \frac{1}{5} \cdot 4,40578 = 0,881156.$$

(2) formulaga ko'ra

$$A \approx \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1 + 0,36788}{2} + 0,96079 + 0,85214 + 0,69768 + 0,52729 \right) = \frac{1}{5} \cdot 3,72184 \approx 0,74437.$$

Aytish joizki, trapetsiyalar formulasi aniqroq natijani beradi. ▲

2-misol. $B = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ integralni (1b) formulaga ko'ra hisoblang.

△ $[0; 1]$ kesmani 10 ta teng qismga ajratamiz.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = \frac{1}{10} = 0,1.$$

$\frac{x_{2k+1}}{2}$ nuqta $[x_k; x_{k+1}]$ kesmaning o'rtasi, $\frac{x_{2k+1}}{2} = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$, $k=0,1, \dots, 9$.

Ravshanki, $\frac{x_1}{2} = 0,05$; $\frac{x_3}{2} = 0,15$; $\frac{x_5}{2} = 0,25$;

$$\frac{x_7}{2} = 0,35; \frac{x_9}{2} = 0,45; \frac{x_{11}}{2} = 0,55; \frac{x_{13}}{2} = 0,65; \frac{x_{15}}{2} = 0,75; \frac{x_{17}}{2} = 0,85; \frac{x_{19}}{2} = 0,95;$$

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ funksiyaning $\frac{x_1}{2}, \frac{x_3}{2}, \dots, \frac{x_{19}}{2}$ nuqtalardagi mos qiymatlari $f(\frac{x_1}{2}), f(\frac{x_3}{2}), \dots, f(\frac{x_{19}}{2})$ larni hisoblaymiz.

$$\text{Masalan, } f(\frac{x_{15}}{2}) = f(0,75) = f(\frac{3}{4}) = \frac{1}{1 + (\frac{3}{4})^2} = \frac{16}{25} = 0,64.$$

Natijada ushbu jadvalni hosil qilamiz:

x	0,05	0,15	0,25	0,35	0,45	0,55	0,65	0,75	0,85	0,95
$f(x)$	0,9975	0,9780	0,9412	0,8909	0,8316	0,7679	0,7029	0,6400	0,5806	0,5256

$$f\left(\frac{x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_3}{2}\right) + \dots + f\left(\frac{x_{19}}{2}\right) = 0,9975 + 0,9780 + \dots + 0,5256 = 7,8561.$$

Demak, $B \approx \frac{1}{10} \cdot 7,8561 = 0,78561$.

$$\text{Ammo } B = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tg } x \Big|_0^1 = \text{arc tg } 1 - \text{arc tg } 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Shunday qilib, $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ ni taqribiy hisoblash $\frac{\pi}{4}$ ni taqribiy hisoblashga keltirilgan ekan. $\frac{\pi}{4} \approx 0,7854$ ekanini hisobga olsak, xatolik taqriban $0,7856 - 0,7854 = 0,0002$ ni tashkil etadi. ▲

Mashqlar

$[0; 1]$ kesmani 10 ta teng qismga ajrating va $B = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ integralni:

70. (1) formula – to‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasi yordamida hisoblang.

71. (1a) formula yordamida hisoblang.

72. Trapetsiyalar formulasi yordamida hisoblang va natijani **70**, **71**–mashqlardagi natijalar hamda $\frac{\pi}{4} \approx 0,785398\dots$ bilan taqqoslang.

73*. $B = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ integralni (1), (1b) va (2) formulalar bo‘yicha hisoblashga doir komputer dasturlarini tuzing.

52–56

MASALALAR YECHISH

Berilgan tezlik bo‘yicha $s(t)$ yo‘lni topish masalasini ko‘raylik.

Masalan, $v(t) = 5 - 3t$ (m/s) bo‘lsa, $s(t)$ yo‘lni topish uchun $s'(t) = v(t)$ tenglamani yechish kerak. Bu tenglamada topilishi kerak bo‘lgan noma‘lum $s(t)$ funksiyaning hosilasi qatnashgan.

Ta‘rif. Noma‘lum funksiyaning hosilasi qatnashgan tenglama *differensial tenglama* deyiladi.

Demak, berilgan tezlik bo‘yicha yo‘lni topish, masalasi $s'(t) = v(t)$ differensial tenglamani yechishga keltiriladi.

Boshlang‘ich funksiya ta‘rifiga ko‘ra $y'(x) = f(x)$ ko‘rinishidagi differensial tenglama yechimi $y(x) = F(x) + C$ ko‘rinishda bo‘ladi, bu yerda $F(x)$ – boshlang‘ich funksiya, C – ixtiyoriy son.

1-masala. $s' = 5 - 3t$ differensial tenglamani yeching.

△ Bu masalada hosilasi $5-3t$ ga teng bo‘lgan $s(t)$ funksiyani topish so‘rallyapti. Berilgan hosilasi bo‘yicha funksiyaning o‘zini topish esa uning boshlang‘ich funksiyasini topish demakdir. $5-3t$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi esa $5t - \frac{3}{2}t^2 + C$ ga teng ekani ravshan, bu yerda C – ixtiyoriy o‘zgarmas son. *Javob:* $s(t) = 5t - \frac{3}{2}t^2 + C$. ▲

2-masala. $y' = 3x^2 - 1$ differensial tenglamani yeching.

△ Bu masalada hosilasi $3x^2 - 1$ ga teng bo‘lgan $y(x)$ funksiyani topish so‘rallyapti. Berilgan hosilasi bo‘yicha funksiyaning o‘zini topish esa uning boshlang‘ich funksiyasini topish demakdir. $3x^2 - 1$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi esa $x^3 - x + C$ ekani ravshan, bu yerda C – ixtiyoriy o‘zgarmas son. Shunday qilib, masalaning javobi $y = x^3 - x + C$. ▲

Demak, bu differensial tenglamaning yechimi cheksiz ko‘p, u bir qiymatli topilmadi. O‘zgarmas son C ni topish uchun differensial tenglamaga qo‘shimcha shartlar qo‘yish kerak.

3-masala. $y' = \sin x + \cos x$ differensial tenglamaning $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5$ shartni qanoatlantiruvchi $y(x)$ yechimini toping.

△ Berilgan tenglamaning barcha yechimlari, ravshanki, $y(x) = -\cos x + \sin x + C$ bo‘ladi. $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} + C = 5$, bundan $C = 4$.

Javob: $y = -\cos x + \sin x + 4$. ▲

4-masala. $y' = 1 + 2x + 3x^2 - 4x^3$ differensial tenglamaning $y(2) = 9$ shartni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

△ Integrallar jadvalidan foydalanamiz. Unga ko‘ra $y = x + x^2 + x^3 - x^4 + C$. $x = 2$ bo‘lganda $y = 9$ bo‘lgani uchun $2 + 4 + 8 - 16 + C = 9$, bundan $C = 11$.

Javob: $y = x + x^2 + x^3 - x^4 + 11$. ▲

5-masala. y miqdorning vaqtning har bir t momentidagi o‘zgarish tezligi shu miqdorning ayni t momentdagi qiymatiga proporsional bo‘lsin. Agar $t = 0$ bo‘lganda bu miqdorning qiymati y_0 bo‘lsa, y ning vaqtning t momentidagi qiymatini toping.

△ Masala shartiga va hosilaning ma’nosiga ko‘ra $y(t)$ ga nisbatan

$$y' = ky \quad (1)$$

differensial tenglamani hosil qilamiz, bu yerda k – proporsionallik koeffitsiyenti.

$y'(t)$ hosilani $\frac{dy}{dt}$ “kasr” shaklda ifodalaymiz va (1)ni $\frac{dy}{dt} = ky$ kabi yozamiz, bundan $\frac{dy}{y} = kdt$ tenglikni hosil qilamiz. Bundan bevosita $\int \frac{dy}{y} = \int kdt$ tenglik kelib chiqadi. Integrallaymiz: $\ln y = kt + \ln C$ (o‘zgarmas son C o‘rniga $\ln C$ ni olish qulay, $C > 0$). Demak, $y = Ce^{kt}$. Shartga ko‘ra, $y_0 = C \cdot e^{k \cdot 0}$, ya’ni $C = y_0$ va

$$y = y_0 \cdot e^{kt} \quad (2)$$

Javob: $y = y_0 \cdot e^{kt}$. ▲

5-masala fizika, biologiya, kimyo fanlarida uchraydigan ko‘plab jarayonlarning matematik modelini beradi (I qism, 29–32- mavzularga qarang).

6-masala. $y(t)$ miqdorning o‘zgarish tezligi shu miqdor bilan o‘zgarmas son a ning ayirmasiga proporsional bo‘lsin. Agar $t=0$ bo‘lganda $y(t)$ miqdorning qiymati y_0 bo‘lsa, $y(t)$ ning t vaqtdagi qiymatini toping.

$$\triangle \quad y' = k(y - a) \quad (3)$$

differensial tenglamani yoza olamiz.

(3) tenglamani yechish uchun $z = y - a$ belgilash kiritamiz.

$z' = (y - a)' = y' - a' = y' - 0 = y'$ bo‘lgani uchun (3) tenglamani $z' = kz$ ko‘rinishida yozib olish mumkin. Bu tenglamaning yechimi $z = z_0 \cdot e^{kt}$ ekani ravshan. $y = z + a$, $z = y_0 - a$ ekanidan

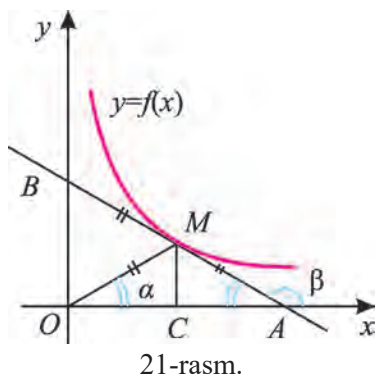
$$y = a + (y_0 - a)e^{kt} \quad (4)$$

ni hosil qilamiz, bu yerda y_0 son $y(t)$ ning $t=0$ dagi qiymati.

Javob: $y = a + (y_0 - a)e^{kt}$. ▲

(4) tenglama ham ko‘pgina jarayonlarning matematik modelidir (I qism, 29–32- mavzularga qarang).

Differensial tenglamaga olib keladigan bitta geometrik masala ko‘raylik.



7-masala. Egri chiziq $M(a; b)$, $a > 0$, $b > 0$ nuqtadan o‘tadi. Bu chiziqning ixtiyoriy nuqtasida o‘tkazilgan urinmaning koordinatalar o‘qlari orasidagi kesmasi urinish nuqtasida teng ikkiga bo‘linadi. Shu egri chiziq tenglamasini yozing.

△ Izlanayotgan egri chiziq tenglamasi $y=f(x)$ bo‘lsin. Bu egri chiziqqa $M(x; y)$ nuqtda koordinata o‘qlarini A va B nuqtalarda kesib o‘tuvchi urinma o‘tkazilgan (21-rasm).

$\triangle AOB$ – to‘g‘ri burchakli, M nuqta – AB gipotenuzaning o‘rtasi, OM kesma – gipotenuzaga o‘tkazilgan mediana. $OM = \frac{1}{2}AB$ bo‘lgani uchun, $\triangle MOA$ – teng yonli, demak, $\angle MOA = \angle MAO$. Bundan $\alpha = \angle MOA = 180^\circ - \angle MAx = 180^\circ - \beta$ va $\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}\beta$. Ammo $\operatorname{tg}\alpha = \frac{MC}{OC}$, $\operatorname{tg}\beta$ esa M nuqtada o‘tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyentiga teng, ya‘ni $\operatorname{tg}\beta = y'$. Bundan $y' = -\frac{y}{x}$ differensial tenglamaga kelamiz. Bu tenglamadan izlanayotgan egri chiziqning $y=f(x)$ ko‘rinishidagi tenglamasini topa olamiz. y' hosilani $\frac{dy}{dx}$ “kasr” shaklida ifodalaymiz va tenglamani $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ kabi yozib olamiz, bundan $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$ tenglikni hosil qilamiz. U holda $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$ tenglik kelib chiqadi. Bu tenglikdagi integral-larni topib, $\ln y = -\ln x + \ln C$ tenglikka kelamiz.

Bundan esa $y = e^{-\ln x} \cdot e^{\ln C} = \frac{C}{x}$, $y = \frac{C}{x}$. Boshlang‘ich $y(a) = b$ shartdan $C = ab$ ekanini topamiz. *Javob:* $y' = \frac{ab}{x}$. ▲

8-masala*. Sig‘imi 50 litr bo‘lgan idishdagi moddaning 70 foizi azot va 30 foizi kisloroddan iborat. Idishga har bir sekunda 0,2 litr azot quyiladi va aralashmaning shuncha miqdori idishdan oqib chiqib ketadi. Qancha vaqtdan so‘ng idishda 99% azot bo‘ladi?

▲ Jarayon boshlanganidan t sekund o‘tgandan so‘ng idishda $y(t)$ litr azot bo‘lgan deylik. U holda azot jami eritmaning $\frac{y}{50}$ qismini tashkil qiladi. Δt vaqt oralig‘ida idishga 0,2· Δt litr azot quyiladi va eritmaning 0,2· Δt litri chiqib ketadi. Vaqtning $[t; t+\Delta t]$ oralig‘ida idishdagi azot konsentratsiyasi o‘zgarmaydi, deb faraz qilamiz. U holda shu $\frac{y}{50}$ hajmda $\frac{y}{50} \cdot 0,2 \cdot \Delta t$ litr azot bo‘ladi. Azot miqdorining o‘sishi $\Delta y \approx 0,2 \cdot \Delta t - \frac{0,2y}{50} \cdot \Delta t$ kabi ifodalanadi. Bundan $\frac{\Delta y}{\Delta t} \approx 0,2 - \frac{0,2y}{50}$ ($\frac{\Delta y}{\Delta t}$ nisbat – $y(t)$ funksiya orttirmasining argument t orttirmasiga nisbati ekaniga e‘tibor bering). Δt nolga intilganda ($\Delta t \rightarrow 0$) bu taqribiy tenglikdan

$$y' = 0,2 \cdot \left(1 - \frac{y}{50}\right) \quad (5)$$

tenglikni olamiz.

Demak, masalada aytilgan jarayon (5) differensial tenglama bilan ifodalanadi. (5) tenglama ko'rilgan jarayonlarning matematik modelidir. (5) tenglamani yechamiz. Uni $y' = -0,004(y-50)$ ko'rinishga keltirib olamiz. (3) va (4) tenglamalarga ko'ra, (5) ning yechimi $y = 50 + (y_0 - 50) \cdot e^{-0,004t}$ bo'ladi, bu yerda y_0 son $y(t)$ ning $t=0$ vaqtdagi qiymatidir. Masala shartiga ko'ra, boshlang'ich vaqtda ($t=0$ da) 50 litrli idishda 70% azot, ya'ni 35 litr azot bo'lgan. Demak, $y_0 = 35$ litr. Azotning aralashmadagi konsentratsiyasi 99% bo'lgan vaqtda idishda $50 \cdot 0,99 = 49,5$ litr azot bo'ladi. Bu holat qancha vaqtdan so'ng ro'y berishini bilish uchun $49,5 = 50 - 15 \cdot e^{-0,004t}$ ko'rsatkichli tenglamani yechish kerak: $15 \cdot e^{-0,004t} = 0,5$.

$$e^{-0,004t} = \frac{1}{30}, \quad -0,004t = -\ln 30. \text{ Hisoblash vositasi yordamida } \ln 30 \text{ ni to-}$$

pamiz. U holda $t = \frac{\ln 30}{0,004} \approx \frac{3,4112}{0,004} \approx 852,8 \text{ (s)} \approx 14,2 \text{ (min)}$.

Javob: 14,2 min. ▲

❓ Savol va topshiriqlar

1. Differensial tenglama deb nimaga aytiladi?
2. $y' = ky$ tenglamaga olib keluvchi misollar keltiring.
3. $x=1$ da $y=2$ bo'lsa, $y' = \frac{2y}{x}$ tenglamani yeching.

Mashqlar

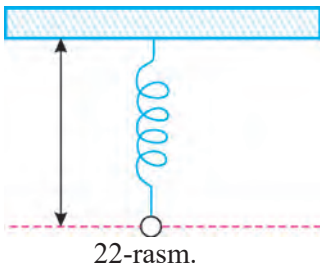
Berilgan funksiya berilgan differensial tenglamaning yechimi ekanini isbotlang (74–76):

74. $y = x^2 + x$, $xy' = y + x^2$;

75*. $y = xe^x$, $y'' + 3y' - 4y = 5 \cdot e^x$. Bu yerda $y'' = (y')' - y(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi. Berilgan tenglama ikkinchi tartibli differensial tenglamadir.

76. $y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$, $y'' + k^2 y = 0$.

77. Xonadagi havo temperaturasi 20°C ga teng. Xonada qaynoq suv 20 minut davomida 100°C dan 60°C gacha sovidi. Suvning sovish tezligi suv va xonadagi havo temperaturasi ayirmasiga proporsional deb hisoblab, suvning temperaturasi qancha vaqtda 30° bo'lishini toping.



78*. Davriy takrorlanadigan jarayonlarning (22-rasm) (masalan, prujina, mayatnik) matematik modeli bo'lib, $y'' + \omega^2 y = 0$ differensial tenglama xizmat qiladi. Bu tenglama *garmonik tebranishlarning differensial tenglamasi* deb ataladi. $y(x) = C_1 \cdot \sin(\omega x + C_2)$ funksiya $y'' + \omega^2 y = 0$ tengla-

mani qanoatlantirishini ko'rsating, bunda ω – berilgan musbat son.

79. Biror radioaktiv moddaning yarim parchalanish (yemirilish) davri 1000 yilga teng, deylik. Dastlab modda miqdori m_0 bo'lsa: 1) 100 yildan; 2) 500 yildan; 3) 2000 yildan so'ng bu moddaning qanchasi qoladi?

Garmonik tebranishning differensial tenglamasini yozing va fizik ma'nosini tushuntiring (**80–81**):

80*. $y(t) = 5 \sin(4t + \frac{\pi}{6})$. **81.** $y(t) = 4 \sin(5t - \frac{\pi}{3})$.

82. Differensial tenglamaning berilgan shartni qanoatlantiradigan yechimini toping: 1) $y' = 7 \cos x$, $y(\frac{\pi}{2}) = 1$; 2) $y' = e^{-x}$, $y(1) = 2$.

83. Idishda 10 litr suv bor. Idishga har minutda 2 litrdan, har bir litrining tarkibida 0,3 kg tuz bo'lgan, eritma (30% li eritma) quyilib turadi. Bu eritma bilan idishdagi suyuqlik aralastirilib, o'sha tezlikda (har minutda 2 litrdan) idishdan oqib chiqadi. Idishdagi tuz miqdorining o'zgarish qonunini toping.

II bobga doir mashqlar

Aniqmas integrallarni hisoblash

$F(x)$ funksiya $f(x)$ uchun boshlang'ich funksiya bo'ladimi (**84 – 85**):

84. 1) $F(x) = x(\ln x - 1)$, $f(x) = \ln x$;

2) $F(x) = -5 - \cos 2x$, $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$;

3) $F(x) = 4x^2 + 2 \operatorname{tg} 3x + 2$, $f(x) = 8x + \frac{6}{\cos^2 3x}$.

85. 1) $F(x) = -x + \sqrt[5]{x^4} - e^{2x} + 10$, $f(x) = -1 + \frac{4}{5\sqrt[5]{x}} - 2e^{2x}$;

2) $F(x) = 3^{2x} - \frac{7}{x} - \sin 4x - 7$, $f(x) = (2 \ln 3) \cdot 3^{2x} - 4 \cos 4x + \frac{7}{x^2}$;

3) $F(x) = \sqrt{x} + \ln 5 \cdot \log_5 x - 18$, $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \log_5 x$?

86. $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ funksiyaning qaysi biri uchun $F(x)$ boshlang'ich funksiya bo'ladi:

1) $f_1(x) = 6(x^2 - 1)$, $f_2(x) = 6x^2 - 6x + 4$, $f_3(x) = 6x(x - 2)$, $F(x) = 2x^3 - 6x^2 + 9$;

2) $f_1(x) = -4 \sin x \cos x$, $f_2(x) = 4 \sin x \cos x$, $f_3(x) = -\sin 2x$, $F(x) = -\cos 2x$;

3) $f_1(x) = 3x^2 - 2x$, $f_2(x) = -3x \cdot \left(\frac{4}{3} - x\right)$, $f_3(x) = 3x^2 - 4x$, $F(x) = x^3 - 2x^2 + 3$?

87. Integralni hisoblang: $A = \int \frac{6x - 9}{x^2 - 4x + 5} dx$.

△ Integralni shunday yozib olamiz:

$$A = \int \frac{3 \cdot (2x - 4) + 3}{x^2 - 4x + 5} dx = 3 \int \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 5} + 3 \int \frac{dx}{(x - 2)^2 + 1}$$

$(x^2 - 4x + 5)' = 2x - 4$ bo'lgani uchun 1-integral

$$3 \int \frac{d(x^2 - 4x + 5)}{x^2 - 4x + 5} = 3 \ln |x^2 - 4x + 5| + C \text{ ga teng: } x^2 - 4x + 5 = t$$

almashtirish kiritilsa, 1-integral $3 \int \frac{dt}{t} = 3 \ln |t| + C_1$ bo'ladi.

2-integral esa aniqmas integrallar jadvaliga ko'ra $3 \arctg(x-2) + C_2$ ga teng.

Javob: $A = 3 \ln |x^2 - 4x + 5| + 3 \cdot \arctg(x-2) + C$, $C = C_1 + C_2$. ▲

88 - mashqning 1), 5) va **89** - mashqning 3), 4), 6) misollari shu kabi mos almashtirish kiritib yechiladi. Boshlang'ich funksiyani toping (**88** – **89**):

$$\mathbf{88.} \quad 1) \int \frac{e^x dx}{e^x + 1}; \quad 2) \int \cos(3x - 2) dx; \quad 3) \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5};$$

$$4) \int 5ax^4 dx; \quad 5) \int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}.$$

$$\mathbf{89.} \quad 1) \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}; \quad 2) \int \ln e^{x^2-1} dx; \quad 3) \int \frac{e^x}{x^2} dx;$$

$$4) \int \frac{\sin 6x}{1 + \cos 6x} dx; \quad 5) \int e^{3 \ln x} dx; \quad 6) \int \frac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x} dx.$$

90. Integralni hisoblang: $I = \int \sin^4 x \cos^3 x dx$.

△ $\sin x = t$ almashtirish kiritamiz, $dt = \cos x dx$. U holda $\cos^2 x = 1 - t^2$ bo'ladi.

Shunday qilib, $I = \int t^4 \cdot (1 - t^2) dt = \int (t^4 - t^6) dt$. Integrallar jadvaliga muvo-

fiq oxirgi integral $\frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + C$ ga teng.

Demak, javob: $I = \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{1}{7} \sin^7 x + C$. ▲

91. Integralni hisoblang: $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$.

△ $\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$ ayniyatlardan foydalanamiz. U holda

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{4} \int \sin^2 2x dx = \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int dx - \frac{1}{8} \int \cos 4x dx = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + C.$$

Javob: $\frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + C$ ▲

92. $f(x) = 3 \cos x + \sqrt{3x-2}$ funksiyaning grafigi $A\left(\frac{2}{3}; 0\right)$ nuqtadan o'tuvchi boshlang'ich funksiyasi $F(x)$ ni toping.

△ Aniqmas integrallar jadvali va integralni hisoblash qoidalariga muvofiq

$$F(x) = \int f(x)dx = 3 \int \cos x dx + \int \sqrt{3x-2} dx = 3 \sin x + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{(3x-2)^3}}{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= 3 \sin x + \frac{2}{9} \cdot \sqrt{(3x-2)^3} + C.$$

Shartga ko'ra $F\left(\frac{2}{3}\right) = 0$, u holda $3 \cdot \sin \frac{2}{3} + C = 0$, $C = -3 \cdot \sin \frac{2}{3}$.

Javob: $F(x) = 3 \sin x + \frac{2}{9} \sqrt{(3x+2)^3} - 3 \cdot \sin \frac{2}{3}$. ▲

93. $f(x)$ funksiyaning grafigi koordinatalari berilgan A nuqtadan o'tuvchi boshlang'ich funksiyasi $F(x)$ ni toping:

- | | |
|---|--|
| 1) $f(x) = \sin 2x$, $A\left(\frac{\pi}{4}; 2\right)$; | 2) $f(x) = \sqrt{x}$, $A(4; 6)$; |
| 3) $f(x) = e^{-3x}$, $A\left(\ln 2; \frac{5}{24}\right)$; | 4) $f(x) = \sin x - \cos x$, $A\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$; |
| 5) $f(x) = 2x^2 - 3\sqrt{x} + 4$, $A\left(1; \frac{2}{3}\right)$; | 6) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 3x}$, $A\left(\frac{\pi}{12}; -1\right)$. |

Integrallarni hisoblang (**94–96**):

94. 1) $\int \frac{x^2 + 5x - 1}{\sqrt{x}} dx$; 2) $\int \frac{2 - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx$; 3) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$;

4) $\int x e^{x^2} dx$; 5) $\int 3^x \cdot 2^{2x} dx$; 6) $\int \frac{4 \ln^3 x}{x} dx$.

95*. 1) $\int \cos x \sqrt{\sin x} dx$; 2) $\int \frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$; 3) $\int \frac{1 - \cos x}{x - \sin x} dx$;

4) $\int \frac{2x+3}{x^2+2x+2} dx$; 5) $\int \frac{dx}{(2x-1)^4}$; 6) $\int \frac{dx}{x^2+x}$.

96*. 1) $\int \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} dx$; 2) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$; 3) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x \sqrt{\cos x}} dx$;

4) $\int \frac{(1 - \sin x) \cos x}{\sin x} dx$; 5) $\int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} dx$; 6) $\int \cos 5x \cos x dx$.

Aniq integrallarni hisoblang (97–103):

97. 1) $\int_0^3 xe^x dx$; 2) $\int_0^1 \frac{e^x dx}{e^x + 1}$; 3) $\int_1^2 e^{-5 \ln x} dx$.

98. 1) $\int_0^1 xe^{-x} dx$; 2) $\int_0^3 \frac{x^2 - 4}{x + 2} dx$; 3) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$.

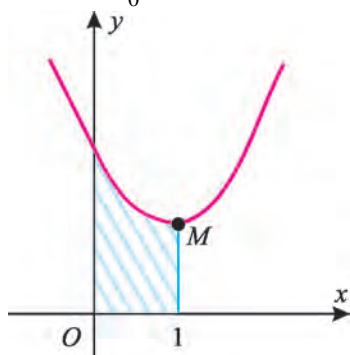
99*. 1) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}$; 2) $\int_0^1 2 \cdot e^{-2x} dx$; 3) $\int_1^{e^4} \frac{\ln x}{x} dx$.

100*. 1) $\int_1^4 \frac{dx}{x^2 + 2x}$; 2) $\int_0^3 \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 16}}$; 3) $\int_0^{4\sqrt{2}} \frac{xdx}{x^2 + 4}$.

101*. 1) $\int_1^a (2x - 3) dx = 0$; 2) $\int_0^4 \frac{2x + 5}{2x + 3} dx = a + \ln \frac{17}{3}$ bo'lsa, a ni toping.

102. 1) $\int_2^3 d(2^{2x-1})$; 2) $\int_0^4 (x - 2)(x^2 + 2x + 4) dx$; 6) $\int_1^e \frac{\ln x}{x}$.

103. 1) $\int_0^2 (3x + 1)^4 dx$; 2) $\int_1^e \frac{dx}{0,5x}$; 3) $\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 3x\right) dx$.



23-rasm.

104*. $y = x^2 - 2x + 4$ parabolaning uchi $M(x_0; y_0)$ nuqtada bo'lsa, shtrixlangan soha yuzini toping (23-rasm).

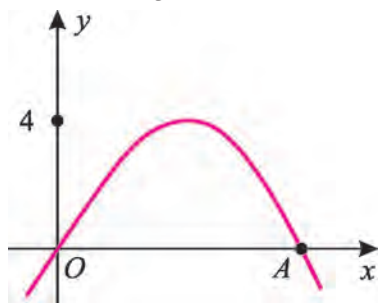
△ Parabola uchining koordinatalarini topamiz:

$$y = x^2 - 2x + 4 = (x - 1)^2 + 3. \text{ Bundan } x_0 = 1, y_0 = 3.$$

Shunday qilib, integrallash chegarasi $a = 0$ dan $b = 1$ gacha bo'ladi.

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 [(x - 1)^2 + 3] dx = \int_0^1 (x - 1)^2 dx + 3 \int_0^1 dx = \\ &= \frac{(x - 1)^3}{3} \Big|_0^1 + 3 \cdot x \Big|_0^1 = 0 + \frac{1}{3} + 3 = 3 + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Javob: $3\frac{1}{3}$ kvadrat birlik. ▲

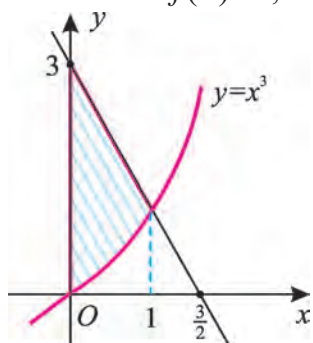


24-rasm.

105*. $f(x)$ parabola Ox o'qini $O(0; 0)$ va $A(x_0; 0)$ nuqtalarda kesib o'tadi. Bu parabola va Ox o'qi bilan chegaralangan soha yuzi $\frac{32}{3}$ kv. birlikka

teng bo'lsa, x_0 va parabola tenglamasini toping (24-rasm).

$\triangle x=0$ da $f(0)=0$, $x=x_0$ da ham $f(x_0)=0$.



25-rasm.

Bundan $-x_0^2 + bx_0 = 0$, $x_0 = b$. U holda $f(x)$ parabolaning tenglamasi: $f(x) = -x^2 + x_0 \cdot x$ bo'ladi. Demak,

$$S = \int_0^{x_0} (-x^2 + x_0 \cdot x) dx = -\frac{1}{3}x^3 \Big|_0^{x_0} + x_0 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{x_0} = -\frac{1}{3}x_0^3 + \frac{x_0^3}{2} = \frac{x_0^3}{6}.$$

Shartga ko'ra, bu yuz $\frac{32}{3}$ ga teng, ya'ni $\frac{x_0^3}{6} = \frac{32}{3}$, bundan $x_0 = 4$.

Javob: $x_0 = 4$; $f(x) = -x^2 + 4x$. ▲

106. Shtrixlangan soha yuzini toping (25-rasm).

$\triangle y = x^3$ kubik parabola bilan to'g'ri chiziqning kesishish nuqtasi koordinatalari $A(1; 1)$ ekanini ravshan. $(0; 3)$ va $(1; 1)$ nuqtalar orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi: $y = -2x + 3$. Bu chiziq Ox o'qini $(\frac{3}{2}; 0)$ nuqtada kesib o'tadi. Shtrixlangan soha yuzini hisoblashning ikkita usulini beramiz.

1-usul. $S = \int_0^1 (-2x + 3 - x^3) dx = (-x^2 + 3x - \frac{x^4}{4}) \Big|_0^1 = -1 + 3 - \frac{1}{4} = 1\frac{3}{4}$.

2-usul. Uchlari $O(0; 0)$, $(0; 3)$, $(1; 1)$ va $(1; 0)$ nuqtalarda bo'lgan trapetsiya yuzidan $y = x^3$, $x = 1$, $y = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan soha yuzini ayiramiz. Trapetsiyaning yuzi: $\frac{1+3}{2} \cdot 1 = 2$ (kv. birlik). 2-yuz esa

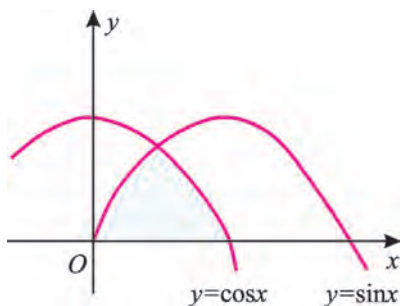
$\int_0^1 x^3 dx$ ga teng. $\int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$ (kv. birlik). Demak, qidirilayotgan yuz

$2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$ (kv. birlik) bo'lar ekan.

Javob: $1\frac{3}{4}$ kvadrat birlik. ▲

107. Shtrixlangan soha yuzini toping (26-rasm).

$\triangle y = \cos x$ va $y = \sin x$ funksiyalar grafiklarining kesishish nuqtasining koordinata-



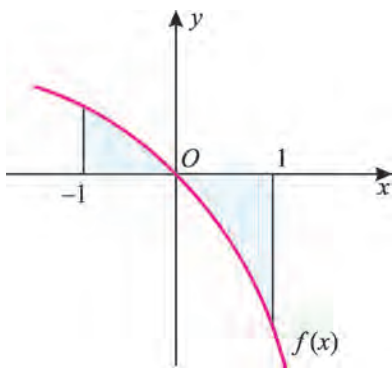
26-rasm.

lari $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ekanini ravshan. Egri chiziqli uchburchakni $x = \frac{\pi}{4}$ to'g'ri chiziq

teng ikkiga bo'ladi. U holda izlanayotgan yuz $S = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = -2 \cdot \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -2(\cos \frac{\pi}{4} - \cos 0) = -2 \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2} - 1) = 2 - \sqrt{2}$. *Javob:* $2 - \sqrt{2}$ kv. birlik. ▲

108. 27-rasmda $f(x) = -x^2 - 4x$ funksiya grafigining bir qismi chizilgan. Shtrixlangan soha yuzini toping.

$$\begin{aligned} \triangle S &= \int_{-1}^0 (-x^2 - 4x) dx + \int_0^1 (0 - (-x^2 - 4x)) dx = \left(-\frac{x^3}{3} - 2x^2\right) \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{x^3}{3} + 2x^2\right) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{-1}{3} + 2 + \frac{1}{3} + 2 = 4, \text{ Demak, } S = 4 \text{ (kv. birlik).} \end{aligned}$$



27-rasm.

Javob: 4 kvadrat birlik. ▲

109. $y = x^3$ va $y^2 = 32x$ chiziqlar bilan chegaralangan soha yuzini toping.

Quyidagi chiziqlar bilan chegaralangan soha yuzini toping. Mos rasm chizing (**110 – 113**):

110. 1) $y = 3x^2$, $x = 2$, $y = 0$; 2) $y = -x^2 + 4$, $y = 0$ (Ox o'qi).

111. 1) $y = x^2 + 4x + 4$, Ox o'qi va Oy o'qi; 2) $y^3 = x$, $x = 1$, $x = 27$ va Ox o'qi.

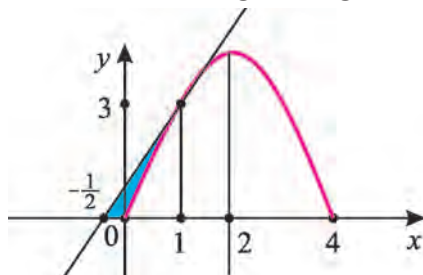
112. 1) $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = \frac{3}{2}x^2 + 8$;

2) $y = \ln x$, $x = e^3$ va Ox o'qi.

113. 1) $y = -x^2 + x$ va Ox o'qi;

2) $y = \sqrt{x}$, Ox o'qi, $y = 2 - x$.

114. Ox o'qi, $y = -x^2 + 4x$ parabola va uning $A(1; 3)$ nuqtasida o'tkazilgan urinma bilan chegaralangan soha yuzini toping (28-rasm).



28-rasm.

△ $y = f(x)$ egri chiziqqa uning $A(x_0; y_0)$ nuqtasida o'tkazilgan urinma tenglamasi $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ bo'ladi. $x_0 = 1$, $y_0 = 3$ va $f'(1) = 2$ ekanidan berilgan parabola uning $A(1; 3)$ nuqtasida o'tkazilgan urinma tenglamasi $y - 3 = 2 \cdot (x - 1)$, $y = 2x + 1$ bo'ladi.

Urinma Ox o'qini $x = -\frac{1}{2}$ nuqtada kesib o'tadi. Bo'yalgan soha yuzi, ravshanki, katetlari 3 va $\frac{3}{2}$ bo'lgan uchburchak yuzidan egri chiziqli uchburchak yuzining ayirmasiga teng. Bu yuzlarning har birini hisoblay-

miz. $S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 3 = \frac{9}{4}$ (kv. birlik). Egri chiziqli uchburchakning yuzi esa

$$S = \int_0^1 (-x^2 + 4x) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{3} + 2 = 1\frac{2}{3} \text{ ga teng. U holda izlanayotgan}$$

yuz $\frac{9}{4} - \frac{5}{3} = \frac{7}{12}$ kv. birlik bo'ladi.

Javob: $\frac{7}{12}$ kv. birlik. ▲

115. Quyidagi chiziqlar bilan chegaralangan soha yuzini hisoblang.

Mos rasmni chizing:

1) $y = \frac{1}{2}x^2$ va $y = \frac{1}{1+x^2}$;

2) $x=9$ va $y^2=x$;

3) $y=5x-8$ va $y=-x^2+3x$;

4) $y=e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$.

116. Boshlang'ich v_0 (m/s) tezlik bilan tepaga vertikal otilgan jism (havo qarshiligi hisobga olinmaganda) $v(t)=v_0-gt$ tezlikka ega, bu yerda g – erkin tushish tezlanishi, t – vaqt. Jism qanday eng katta balandlikka ko'tariladi?

117. To'g'ri chiziqli harakat qilayotgan jismning tezligi $v(t) = \sqrt{2t+3}$ (m/s). Harakat boshlanganidan dastlabki 3 sekundda jism qancha yo'lni bosib o'tagan?

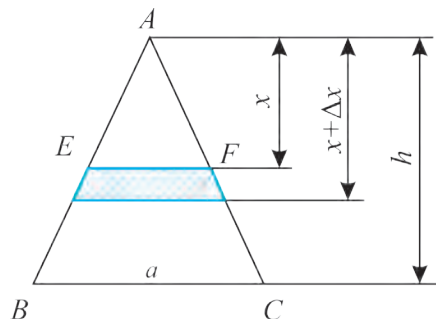
118. Nuqta $v(t)=2t^2+3t$ tezlik bilan to'g'ri chiziqli harakat qiladi. (v – m/s larda, t – sekundlarda). Nuqtaning $t_1=1$ dan $t_2=4$ gacha vaqt oralig'ida bosib o'tgan yo'lini toping.

119*. Balandligi h , asosi a bo'lgan uchburchak shaklidagi plastinka suvga vertikal ravishda botirildi, bunda uning uchi suv sirtida bo'ldi. Suvning shu plastinkaga bosim kuchini aniqlang.

▲ Paskal qonuniga muvofiq r chuqurlikka botirilgan va yuzi S bo'lgan sohaga suyuqlikning bosim kuchi $P=\rho grS$ formulaga ko'ra hisoblanadi, bu yerda ρ – suyuqlikning zichligi (suv uchun $\rho=1 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}$ deb qabul qilamiz), g – erkin tushish tezlanishi. x chuqurlikda bo'lgan va eni Δx ga teng bo'lgan gorizontal "tasma"ni qaraymiz (29-rasm). Bu tasmani to'g'ri to'rtburchak deb faraz qilib, uning EF asosini topamiz.

$$\triangle ABC \sim \triangle AEF \text{ ekanidan, } EF = \frac{ax}{h}.$$

U holda tasmaning yuzi ΔS tartiban $\frac{ax}{h} \cdot \Delta x$ ga teng bo'ladi: $\Delta S \approx \frac{ax}{h} \cdot \Delta x$. Pas- kal qonuniga ko'ra ΔS yuzga bo'ladigan bosim kuchi $\Delta P \approx \rho g x \cdot \frac{ax}{h} \Delta x = \frac{\rho g a}{h} x^2 \cdot \Delta x$.

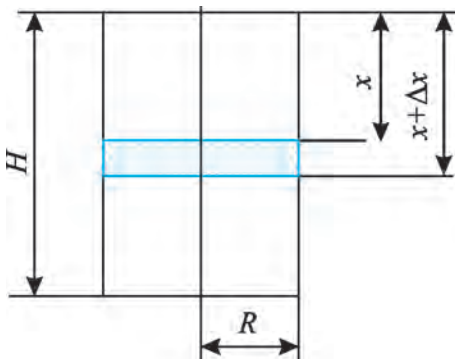


29-rasm.

ABC uchburchak yuzi tasmalarning ΔS yuzlarining yig'indisidan iborat bo'ladi. U holda $\frac{\Delta P}{\Delta x} \approx \frac{\rho g a}{h} x^2$. Tasmalarning eni (kengligi) Δx yetarlicha kichik bo'lsa, ya'ni Δx nolga intilsa, $\frac{\Delta P}{\Delta x}$ nisbat P' (P ning hosilasiga) ga intiladi, ya'ni, $P' = \frac{\rho g a}{h} x^2$ tenglik o'rinli bo'ladi. Demak, suyuqlikning $\triangle ABC$

yuziga bosim kuchi P shunday hisoblanadi:

$$P = \int_0^h \frac{\rho g a}{h} x^2 dx = \frac{\rho g a}{h} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{1}{3} \rho g a h^2. \text{ Javob: } P = \frac{1}{3} \rho g a h^2. \blacktriangle$$



30-rasm.

120. Asosining radiusi R , balandligi H bo'lgan doiraviy silindr vertikal (tikka) turibdi va u suv bilan to'la. Suvni tortib chiqarish uchun zarur bo'lgan A ishni hisoblang (30-rasm).

\triangle *Ko'rsatma.* Asos tekisligidan x va $x + \Delta x$ masofalarda bo'lgan "elementar" (kichik) silindrning hajmi $\pi R^2 \Delta x$ ga,

og'irligi esa $\pi R^2 g \Delta x$ ga teng. Bu og'irlikni x balandlikka ko'tarish uchun $\Delta A \approx \pi R^2 g \Delta x \cdot x$ ish bajariladi, bundan $\frac{\Delta A}{\Delta x} \approx \pi R^2 g x$ va ushbu $A' = \pi R^2 g x$ differen-

sial tenglamaga kelamiz. Uning yechimi: $A = \int_0^H \pi R^2 g x dx = \pi R^2 g \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^H = \frac{\pi R^2 H^2 g}{2}$.

Javob: $A = \frac{\pi g}{2} \cdot R^2 H^2 (J). \blacktriangle$



Yozma nazorat ishi namunasi

I variant

1. $f(x) = 2\sin 5x + \sqrt{x} + \frac{3}{5}$ funksiyaning shunday $F(x)$ boshlang'ich funksiyasini topingki, bunda $f(x)$ va $F(x)$ funksiyalarning grafiklari Oy o'qida kesishsin.

(Ko'rsatma: $f(x)$ va $F(x)$ funksiyalarning grafiklari Oy o'qida kesishsin degan shart $x=0$ da $f(0)=F(0)$ tenglik bajarilishini bildiradi).

2. $y = -x^3$, $y = \frac{8}{3}\sqrt{x}$ va $y = 8$ funksiyalarning grafiklari bilan chegaralangan (yopiq) shakl yuzini toping. Mos rasm chizing.

3. To'g'ri chiziqli harakat qilayotgan nuqtaning tezligi $v(t) = 2t^2 + 3t$ (t – sekundlarda, v – m/s larda o'lchanadi). $t_1 = 1$ dan $t_2 = 6$ gacha bo'lgan vaqt oralig'ida u qanday masofani o'tadi? Nuqtaning $t = 3$ paytidagi tezlanishi nimaga teng bo'ladi?

4. Prujinani 1 cm ga cho'zishga 1N kuch ishlatiladi. Prujinani 5 cm ga cho'zishga qancha kuch ishlatiladi? (Guk qonuniga ko'ra kuch prujinaning cho'zilishiga proporsional).

5. $y = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x$ funksiya C_1 va C_2 ning istalgan qiymatlarida $y'' + 25y = 0$ differensial tenglamaning yechimi ekanini isbotlang.

II variant

1. $f(x) = 3\cos 4x + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{5}{8}$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasini toping.

2. $y = x$, $y = \frac{1}{3}x^2$ funksiyalarning grafiklari bilan chegaralangan (yopiq) shakl yuzini toping. Mos rasm chizing.

3. To'g'ri chiziqli harakat qilayotgan nuqtaning tezligi $v(t) = 4t^2 - 5t$ (t – sekundlarda, v – m/s larda o'lchanadi). $t_1 = 2$ dan $t_2 = 3$ gacha bo'lgan vaqt oralig'ida u qanday masofani o'tadi? Nuqtaning $t = 3$ paytidagi tezlanishi nimaga teng bo'ladi?

4. Prujinani 3 cm ga cho'zishga 2N kuch ishlatiladi. Prujinani 6 cm ga cho'zishga qancha kuch ishlatiladi? (Guk qonuniga ko'ra kuch prujinaning cho'zilishiga proporsional).

5. $y = C_1 \cos 7x + C_2 \sin 7x$ funksiya C_1 va C_2 ning istalgan qiymatlarida $y'' + 49y = 0$ differensial tenglamaning yechimi ekanini isbotlang.

Variantlarni qarab chiqishga oid kombinatorika masalalari

Kombinatorikaning asosiy savoli—“qancha?”, asosiy masalasi esa berilgan chekli sondagi obyektlarning u yoki bu shartga bo‘ysunuvchi har xil kombinatsiyalarini sanashdir.

Variantlarni birma-bir qarab chiqishda quyidagi ikkita qoidaga amal qilish maqsadga muvofiq:

1. *Kombinatsiyalarni harflar yoki raqamlar ketma-ketligi bilan belgilaymiz, bunda belgilash bir qiymatli bo‘lishi kerak.*

2. *Kombinatsiyalarni alifbo tartibida (agar belgilashda harflar ishlatilsa) yoki sonlarni o‘sish tartibida yozib chiqish.*

Bunday holatda birorta ham variant qolib ketmaydi va ayrim variantlarning takrorlanishiga yo‘l qo‘yilmaydi.

1-masala. Madina olma, nok va mandarinni yemoqchi. Buni u necha usul bilan bajarishi mumkin?

△ Mevalarni harflar bilan belgilaymiz: O —olma, N —nok, M —mandarin. Bu holda, masalan, NMO —bu dastlab nok, so‘ng mandarin va oxirida olma yeyilishiga mos variant.

Variantlarni yozib chiqamiz: MNO , MON , NMO , NOM , OMN , ONM . Jami 6 ta usul hosil bo‘ldi. ▲

2-masala. Raqamlari yig‘indisi 4 dan kichik bo‘lgan to‘rt xonali sonlar nechta?

△ Raqamlari yig‘indisi 1, 2 va 3 bo‘lgan to‘rt xonali sonlarni o‘sish tartibida yozamiz: 1000; 1001; 1002; 1010; 1011; 1020; 1100; 1101; 1110; 1200; 2000; 2001; 2010; 2100; 3000. Jami 15 ta son hosil bo‘ldi. ▲

3-masala. Birinchi raqami 2 bo‘lgan va 1, 2, 3, 4 va 5 raqamlardan tashkil topgan uch xonali sonlar nechta?

△ Oxirgi ikkita raqam bo‘yicha barcha variantlarni qarab chiqamiz:

	1	2	3	4	5
1	211	212	213	214	215
2	221	222	223	224	225
3	231	232	233	234	235
4	241	242	243	244	245
5	251	252	253	254	255

Javob. Jami 25 ta son. ▲

4-masala. Maktabda beshta 11-sinf mavjud. Shu sinflardan ikki nafar navbatchini tanlashimiz kerak, bunda har qanday juftlikda turli sinf o'quvchilari bo'lishi kerak. Buni necha usulda amalga oshirsa bo'ladi?

△ Sinflarni 1, 2, 3, 4, 5 raqamlar bilan belgilaymiz va variantlarni yozib chiqamiz: (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5).

Javob. Jami 10 ta usul. ▲

Qo'shish va ko'paytirish qoidalarini

Qo'shish va ko'paytirish qoidalarini kombinatorika masalalarini yechishda eng ko'p qo'llaniladigan va samarali usullar hisoblanadi.

5-masala. Savatda 5 ta olma va 3 ta nok bor. Savatdan 1 ta meva tanlashni necha usulda amalga oshirish mumkin?

△ Olmani 5 ta usulda, nokni esa 3 ta usulda tanlash mumkin.

Demak, savatdan mevani tanlash $5+3=8$ usulda amalga oshirilishi mumkin. ▲

6-masala. a) Toqqa 7 ta yo'l olib boradi. Sayyoh toqqa chiqib, so'ng pastga tushmoqchi. Bu ishni necha usulda amalga oshirish mumkin?

b) Agar yuqoriga chiqish va pastga tushish har xil yo'llar bilan amalga oshirilsa, javob qanday o'zgaradi?

△ a) Sayyoh toqqa 7 usulda chiqishi mumkin, har bir chiqishda 7 ta usulda pastga tushishi mumkin. Jami $7+7+7+7+7+7+7=7 \cdot 7=49$ ta usul.

b) Sayyoh toqqa 7 usulda chiqishi mumkin, har bir chiqishda 6 usulda pastga tushishi mumkin. Jami $7 \cdot 6=42$ ta usul. ▲

7-masala. Do'konda 5 ta turli piyola, 3 ta turli likopcha va 4 ta turli choy qoshig'i bor.

a) Piyola va likopcha juftligi necha usulda xarid qilinishi mumkin?

b) Piyola, likopcha va choy qoshig'i uchligi necha usulda xarid qilinishi mumkin?

c) Turli nomdagi ikkita idishning juftligi necha usulda xarid qilinishi mumkin?

△ a) Dastlab piyolani tanlaymiz. Unga juft qilib uchta likopchadan ixtiyoriysini olishimiz mumkin. Jami beshta piyola bo'lgani sababli turli juftliklar soni 15 ($15 = 5 \cdot 3$) ga teng.

b) Oldingi masaladagi 15 juftliklardan ixtiyoriysini tanlaymiz. Uni choy qoshig'i bilan "uchlik" kacha 4 ta usulda to'ldirish mumkin. Shuning uchun barcha uchliklar soni 60 ($60 = 15 \cdot 4 = 5 \cdot 3 \cdot 4$) ga teng.

c) Uchta holat bo'lishi mumkin: birinchisi piyola va likopcha juftligi

sotib olinadi, ikkinchisi – piyola va qoshiq, uchinchisi– likopcha va qoshiq. Har bir holat uchun juftliklar soni oson topiladi (birinchisida – 15 ta, ikkinchisida – 20 ta, uchinchisida – 12 ta). Hammasini qo‘shib chiqsak, barcha variantlar sonini topamiz: 47 ta. ▲

8-masala. Barcha raqamlari juft bo‘lgan besh xonali sonlar nechta?

△ Besh xonali sonning raqamlari uchun 5 ta o‘rinni belgilaymiz. Birinchi o‘ringa 4 ta raqam qo‘ysa bo‘ladi: 2, 4, 6 yoki 8. Ikkinchi o‘ringa beshta raqam qo‘ysa bo‘ladi: 0, 2, 4, 6 yoki 8. Uchinchi, to‘rtinchi va beshinchi o‘rinlarga ham shu beshta raqamni qo‘ysa bo‘ladi: 0, 2, 4, 6 yoki 8. Demak, jami o‘rinlarni to‘ldirishning $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2500$ usuli mavjud. Barcha raqamlari juft bo‘lgan besh xonali sonlar ham 2500 ta. ▲

Bu masalalarni hal qilishda quyidagi qoidalardan foydalandik.

Qo‘shish qoidasi. Agar A obyekt m ta usul bilan, B obyekt esa boshqa n ta usul bilan tanlanishi mumkin bo‘lsa, u holda (A yoki B) $m + n$ ta usul bilan tanlanishi mumkin.

Ko‘paytirish qoidasi. Agar A obyekt m ta usul bilan tanlansa va shunday tanlashdan so‘ng B obyekt n ta usul bilan tanlanishi mumkin bo‘lsa, u holda (A va B) mn ta usul bilan tanlanishi mumkin.

Takrorli va takrorsiz o‘rinlashtirishlar

9-masala. Xonada beshta chiroq bor. Ularning har biri yo yonishi, yo yonmasligi mumkin. Xonani nechta usulda yoritish mumkin?

△ Har bir chiroq uchun ikkita variant mavjud – yo yonish, yo yonmaslik. Jami bo‘lib $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$ ta usul. ▲

Yuqoridagi masalani umumlashtiramiz: n ta elementdan tashkil topgan to‘planning barcha qism to‘plamlari sonini topaylik.

To‘planning n elementlaridan har biri uchun ikkita imkoniyat bor—u yo qism to‘plamga tegishli, yo tegishli emas. Oldingi masalaga o‘xshab 2^n ta variant hosil bo‘ladi.

10-masala. 3 ta tovuq, 4 ta o‘rdak va 2 ta g‘oz bor. Bir nechta qush tanlanmoqda, bunda tanlangan qushlar ichida ham tovuq, ham o‘rdak, ham g‘oz bo‘lishi shart. Bunday variantlar soni nechta?

△ Ixtiyoriy tovuq tanlanganlar ichida yo bor, yo yo‘q. Shuning uchun tovuqni 2^3 ta usul bilan tanlab olishimiz mumkin. Shartga ko‘ra tovuq albatta bo‘lishi uchun $2^3 - 1 = 7$ ta imkoniyat bor. Xuddi shunday, o‘rdakni $2^4 - 1 = 15$ ta, g‘ozni esa $2^2 - 1 = 3$ ta usulda tanlasa bo‘ladi.

Jami $7 \cdot 15 \cdot 3 = 315$ ta usul. ▲

11-masala. Futbol jamoasida 11 nafar o‘yinchi bor.

a) Jamoa sardori va uning yordamchisi; b) jamoa sardori, uning birinchi yordamchisi, uning ikkinchi yordamchisi necha usulda tayinlanishi mumkin?

△ a) Sardor etib jamoaning 11 nafar o‘yinchisidan ixtiyoriysini tayinlash mumkin. Sardorning yordamchisi etib qolgan 10 nafar o‘yinchidan ixtiyoriysini tayinlash mumkin. Shuning uchun jamoa sardori va uning yordamchisi $11 \cdot 10 = 110$ usulda tayinlanishi mumkin.

b) Jamoa sardori va uning birinchi yordamchisini $11 \cdot 10 = 110$ usulda tayinladik. Ikkinchi yordamchi etib qolgan 9 nafar o‘yinchidan ixtiyoriysini tayinlash mumkin. Shuning uchun jamoa sardori, uning birinchi yordamchisi, uning ikkinchi yordamchisi $11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$ usulda tayinlanishi mumkin. ▲

Bu masalada biz 11 elementli to‘plamda tartiblangan juftliklar va tartiblangan uchliklar sonini topdik. Endi bu masalani umumiy holda yechaylik.

Ta’rif. n ta elementli $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ to‘plam berilgan bo‘lsin. Shu to‘plamning ixtiyoriy k ta turli elementidan hosil qilingan tartiblangan $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k})$ ketma-ketlik n ta elementdan k tadan takrorsiz o‘rinlashtirish deb ataladi.

Bunday o‘rinlashtirishlar soni A_n^k deb belgilanadi. Bu sonni topish uchun xuddi oldingi masaladagidek ish tutamiz.

Birinchi elementni tanlash uchun n ta usul, ikkinchi elementni tanlash uchun $n-1$ ta usul, uchinchi elementni tanlash uchun $(n-2)$ ta usul va h.k., oxirgi, k -elementni tanlash uchun $(n-k+1)$ ta usul mavjud. Demak, $A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$.

12-masala. Barcha raqamlari turlicha bo‘lgan yetti raqamli telefon nomerlari nechta?

△ Birinchi raqamni tanlash uchun 10 ta usul (0 ham kiradi deb faraz qilamiz), ikkinchi raqamni tanlash uchun 9 ta usul, uchinchi raqamni tanlash uchun 8 ta usul va h.k., oxirgi raqamni tanlash uchun 4 ta usul mavjud. Demak, $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ ta telefon nomer. ▲

13-misol. A alifbo n ta belgidan tashkil topgan bo‘lsin. Uzunligi k ga teng bo‘lgan hamda turli belgilardan tashkil topgan so‘zlar (ya’ni uzunligi k ga teng bo‘lgan ketma-ketliklar) soni $A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$ bo‘ladi. Bu natija yuqoridagi mulohazalardan kelib chiqadi.

Izoh. Agarda har bir so‘zni tashkil etgan belgilar orasida

takrorlanadiganlari bor bo'lsa, bunday so'zlar soni n ta elementdan r tadan takrorli o'rinlashtirishlar soni deb ataladi va $\overline{A_n^k}$ kabi belgilanadi. Ko'paytirish qoidasiga ko'ra bu miqdor $\overline{A_n^k} = n^k$ formula yordamida topiladi.

14-masala. Natural sonning o'nli yozuvida faqat toq raqamlar bo'lsa, bunday sonni "chiroyli" deymiz. Jami nechta to'rt xonali "chiroyli" son bor?

△ Bir xonali chiroyli sonlar 5 taligi ravshan. Bir xonali har bir "chiroyli" sonning oxiriga ikkinchi toq raqamni 5 ta usulda yozishimiz mumkin. Demak, ikki xonali "chiroyli" sonlar $\overline{A_5^2} = 5 \cdot 5 = 25$ ta bo'ladi. Xuddi shunday, uch xonali "chiroyli" sonlar $\overline{A_5^3} = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ ta, to'rt xonalilari esa $\overline{A_5^4} = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 = 625$ ta. ▲

15-masala. Qizil, qora, ko'k va yashil sharlarni bir qatorga necha usulda joylashtirish mumkin?

△ Birinchi o'ringa to'rtta shardan ixtiyoriysini qo'yish mumkin. Ikkinchi o'ringa esa qolgan uchta shardan ixtiyoriysini, uchinchi o'ringa qolgan ikkita sharlardan ixtiyoriysini, va nihoyat, oxirgi o'ringa eng oxirgi sharni qo'yish mumkin.

Javob. $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. ▲

Izoh. 1 dan n gacha barcha natural sonlar ko'paytmasi $n!$ deb belgilanadi va "en faktorial" deb o'qiladi.

Aslida $n!$ berilgan n elementli to'plam elementlarining o'rin almash-tirishlari soniga teng.

16-masala. 1, 2, 3 raqamlaridan ularni takrorlamasdan tuzilgan jami uch xonali sonlar nechta?

△ Birinchi o'ringa uchta raqamdan ixtiyoriysini qo'yish mumkin. Ikkinchi o'ringa qolgan ikkita raqamdan ixtiyoriysini va uchinchi o'ringa eng oxirgi raqamni qo'yish mumkin. Demak, jami $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$ ta son. ▲

17-masala. 7 nafar o'quvchi navbatga necha usul bilan turishi mumkin?

△ Birinchi o'rinda 7 nafar o'quvchidan ixtiyoriysi turishi mumkin. Ikkinchi o'rinda qolgan 6 nafar (birinchi o'rinda turgan o'quvchidan qolganlari), 3- o'rinda qolgan 5 nafar o'quvchidan ixtiyoriysi, ..., oxirgi o'rinda faqat bir nafari turishi mumkin. Jami $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ ta usul. ▲

Mashqlar

Masalalarni, variantlarni sanab, yeching (1–4):

1. Voris, Doniyor, Olim, Kamola va Anora sinfda matematikani eng yaxshi biladigan o‘quvchilardir. Bir nafar o‘g‘il bola va bir nafar qiz bolani “Bilimlar bellashuvi”ga qatnashish uchun tanlash kerak. Buni nechta usulda amalga oshirsa bo‘ladi?

2. Oshxonada birinchi taom sifatida karam sho‘rvani, qaynatma sho‘rvani, no‘xat sho‘rvani, ikkinchi taom sifatida garnirli go‘sht, baliq, tovuqni, uchinchisiga esa choy va sharbatni buyurish mumkin. Birinchi, ikkinchi va uchinchi taomdan iborat tushlikni nechta usulda buyurish mumkin?

3. Gullola, Sanobar, Karim, Olim, Madina va Voris a‘lo baholarga o‘qiydi. Maktab ma‘muriyati a‘lochilar uchun sovg‘a tarzida konsertga 4 ta chipta olib keldi. Shu chiptalalar a‘lochilar o‘rtasida necha usulda taqsimlanishi mumkin?

4. 3 ta oq, 2 ta qizil va 4 ta sariq atirgul bor. Uchta guldand iborat guldastani necha usulda tuzish mumkin?

Qo‘shish va ko‘paytirish qoidalaridan foydalanib, masalalarni yeching (5–10):

5. Kitob javonida matematikadan 9 ta, chet tilidan 4 ta va ona tilidan 6 ta kitob turibdi. Javondan bitta kitobni necha usulda tanlash mumkin?

6. Sehrli mamlakatda uchta shahar bor: A , B va C . A shahardan B shaharga 6 ta yo‘l boradi, B shahardan C shaharga esa – 4 ta yo‘l. A shahardan C shaharga necha usulda borsa bo‘ladi?

7. Do‘konda 7 xil pidjak, 5 xil shim va 4 xil galstuk sotilmoqda. Pidjak, shim va galstukdan iborat uchlikni (to‘plamni) necha usul bilan sotib olsa bo‘ladi?

8. Sehrli mamlakatda to‘rtta shahar bor: A , B , C va D . A shahardan B shaharga 6 ta yo‘l boradi, B shahardan C shaharga esa – 4 ta yo‘l.

A shahardan D shaharga 2 ta yo‘l, D shahardan B shaharga ham 2 ta yo‘l boradi. A shahardan C shaharga necha usulda borsa bo‘ladi?

9. Agar oltita turli rangli mato bor bo‘lsa, bir xil kenglikdagi gorizontall yo‘lli uchta rangli bayroqni necha usul bilan tiksa bo‘ladi?

10. “Matbuot tarqatuvchi” do‘konida 5 xil konvert va 4 xil marka sotilmoqda. Konvert bilan markani necha usulda sotib olishimiz mumkin?

Guruhlashlar

1-masala. Sinfda 30 nafar o‘quvchi bor. Olimpiadada qatnashish uchun 2 nafar o‘quvchini tanlab olishimiz kerak. Buni necha usulda amalga oshirish mumkin?

△ Birinchi o‘quvchini 30 ta usulda, ikkinchi o‘quvchini esa qolgan 29 nafar o‘quvchidan 29 ta usulda tanlasak bo‘ladi. Bunda har bir juftlik ikki marta sanalgani bois jami $\frac{30 \cdot 29}{2} = 435$ ta usulni hosil qilamiz.

Javob. 435. ▲

Izoh. Umumiy holda n elementli to‘planning elementlari yordamida

hosil bo‘lgan juftliklar soni $\frac{n(n-1)}{2}$ ga teng.

2-masala. Tekislikda n ta nuqta berilgan. Uchlari bu nuqtalarda bo‘lgan nechta kesma o‘tkazsa bo‘ladi?

Javob. $\frac{n(n-1)}{2}$.

3-masala. Qavariq n - burchakda nechta diagonal bor?

△ *Birinchi usul.* Uchlari n ta nuqtada bo‘lgan $\frac{n(n-1)}{2}$ ta kesma o‘tkazsa bo‘ladi. Shulardan n tasi diagonal bo‘lmaydi (ular tomonlar bo‘ladi). Demak, diagonal soni $\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$ ga teng.

Ikkinchi usul. Har bir uchdan $(n-3)$ ta diagonal o‘tkazsa bo‘ladi. Demak, jami $n(n-3)$ ta diagonal. Ammo har diagonalni ikki martadan sanaganmiz.

Shuning uchun diagonal soni $\frac{n(n-3)}{2}$ ga teng.

Javob: $\frac{n(n-3)}{2}$. ▲

4-masala. Sinfda 30 nafar o‘quvchisi bor. Fan olimpiadasida qatnashish uchun 3 nafar o‘quvchidan iborat jamoani tanlab olishimiz kerak. Buni necha usulda amalga oshirish mumkin?

△ Birinchi o‘quvchini 30 ta usulda, ikkinchi o‘quvchini qolgan 29 nafar o‘quvchidan 29 ta usulda, uchinchi o‘quvchini esa 28 usulda tanlasak bo‘ladi. Demak, $30 \cdot 29 \cdot 28$ ta usul (variant) paydo bo‘ldi. Ammo bunday sanashda biror jamoa bir necha marta sanaldi: bitta uchlik turli usulda

tanlanishi mumkin, masalan, dastlab A , soʻng B , undan keyin C yoki dastlab C , soʻng A , undan keyin B , va h.k.

Uchta elementdan oʻrin almashtirishlar soni $3!$ ga teng boʻlgani bois, har bir jamoa 6 marta sanaldi. Jami $\frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{6}$ ta usulni hosil qilamiz. ▲

Izoh. Masalani umumlashtiramiz.

Sinfda n nafar oʻquvchi boʻlsin. Jamoa esa k nafar oʻquvchidan iborat. *Jamoani tanlab olish usullari soni n elementdan k tadan olingan guruhlashlar soni deyiladi.*

Yaʼni, n elementli toʻplamdan olingan k ta elementli qism toʻplamlar sonini hisoblaymiz. k ta elementni navbatma-navbat tanlab olamiz – dastlab birinchisini, keyin ikkinchisini va h.k. Natijada

$n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ sonini hosil qilamiz. Ammo har bir qism

toʻplamni $k!$ marta sanadik. Shuning uchun natijani $k!$ ga boʻlish lozim:

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Hosil boʻlgan son binomial koeffitsiyent deb ham ataladi:

5-masala. Qurilish tashkilotining duradgorlar boʻlimida 15 nafar ishchi bor. Koʻp qavatli uyning eshiklarini oʻrnatish uchun 3 nafar duradgorni tanlash zarur. Agar boʻlimdagi har bir duradgor bu topshiriqni bajarishga layoqatli boʻlsa, bunday tanlash imkoniyatlari (variantlari) qancha?

△ Guruhlashlar sonini topish formulasidan foydalanish mumkin. Bu yerda $n=15$, $m=3$ va $C_{15}^3 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455$. Demak, 15 nafar duradgorlar orasidan 3 nafarini tanlash imkoniyatlari soni 455 ta ekan. ▲

6-masala. 5 ta kitobdan 3 ta kitobni necha usulda tanlashimiz mumkin?

△ Binomial koeffitsiyentlar taʼrifiga koʻra C_5^3 usulda tanlash mumkin. ▲

7-masala. 30 ta turli munchoqlardan iborat taqinchoqni 8 ta munchoqli qismlarga nechta usulda ajratsa boʻladi?

△ Bu masalaning javobi 30 elementli toʻplamdan 8 ta elementli qism toʻplamlarini ajratib olishlar soni C_{30}^8 ga teng.

Javob. C_{30}^8 . ▲

8-masala. 7 nafar kishidan 3 nafarini (ishchi guruhni) necha usulda tanlasa boʻladi? Guruh rahbari ishchi guruh aʼzolaridan tanlab olinsa-chi?

△ Uch nafar (ishchi guruh)ni C_7^3 ta usulda, har bir guruh rahbarini esa 3 ta usulda tanlasa boʻladi.

Javob. $3C_7^3$. ▲

Nyuton binomi

Quyidagi qisqa ko'paytirish formulalarini eslaylik:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - \text{ikki son yig'indisining kvadrati};$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - \text{ikki son yig'indining kubi}.$$

Yig'indining navbatdagi ikkita, ya'ni 4- va 5- darajalarini hisoblaymiz:

$$(a+b)^4 = (a+b)(a+b)^3 = (a+b)(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4a^3b + b^4;$$

$$(a+b)^5 = (a+b)(a+b)^4 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Umumiy holda, haqiqiy a va b hamda natural n sonlar uchun

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

formula o'rinlidir.

Bu formula **Nyuton binomi** formulasi deb ataladi.

Binomial koeffitsiyentlarning xossalari. Binomial koeffitsiyentlarning ba'zi xossalari keltiramiz.

1-xossa. Ixtiyoriy natural n son uchun barcha C_n^m ($m=0, 1, 2, \dots, n$) binomial koeffitsiyentlar yig'indisi 2^n ga teng, ya'ni

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$$

Bu tenglik Nyuton binomi formulasida $a = b = 1$ deb olinganda hosil bo'ladi.

Bu xossadan n -elementli to'plamning barcha qism to'plamlari soni 2^n ga tengligi kelib chiqadi.

2-xossa. Toq o'rinlarda turgan binomial koeffitsiyentlar yig'indisi juft o'rinlarda turgan binomial koeffitsiyentlar yig'indisiga teng, ya'ni

$$C_n^0 + C_n^2 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + \dots$$

Chindan ham, Nyuton binomi formulasida $a=1$ va $b=-1$ deb olinsa,

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikdan tasdiqning to'g'riligi kelib chiqadi.

1- va 2-xossalar asosida quyidagi xossani hosil qilamiz.

3-xossa. n natural sondan oshmaydigan eng katta toq m son uchun $C_n^1 + C_n^3 + \dots + C_n^m = 2^{n-1}$ tenglik hamda n sondan oshmaydigan eng katta juft m son uchun $C_n^0 + C_n^2 + \dots + C_n^m = 2^{n-1}$ tenglik o'rinlidir.

Mashqlar

11. Shaxmat musobaqasida har bir ishtirokchi boshqa ishtirokchilarning har biri bilan bittadan o'yin o'ynaydi. Jami 18 ta ishtirokchi bo'lsa, nechta o'yin o'ynaladi?

12. Tekislikda n ta to'g'ri chiziq shunday chizilganki, bunda hech qanday ikkita to'g'ri chiziq parallel emas, hech qanday uchtasi esa bitta nuqtadan o'tmaydi. To'g'ri chiziqlarning kesishishidan hosil bo'lgan uchburchaklar nechta?

13. 7 ta turli rangli bo'yoqdan 4 tasini necha usulda tanlashimiz mumkin?

14. Bir to'g'ri chiziqda 10 ta nuqta, unga parallel bo'lgan boshqa to'g'ri chiziqda esa 11 ta nuqta belgilangan. Uchlari bu nuqtalarda bo'lgan nechta a) uchburchak; b) to'rtburchaklar mavjud?

15. Ikkita parallel a va b to'g'ri chiziqlarda, mos ravishda, A_1, A_2, \dots, A_m va B_1, B_2, \dots, B_n nuqtalar belgilangan. Barcha $A_i B_j$ kesmalar shunday o'tkazilganki, ulardan hech qanday uchtasi bitta nuqtadan o'tmaydi. Kesishish nuqtalar soni nechta?

16. n ta to'g'ri chiziq eng ko'pi bilan nechta nuqtada kesishishi mumkin?

17. 100 elementli to'plamning 40 elementli qism to'plamlari soni bilan shu to'plamning 60 elementli qism to'plamlari sonini solishtiring.

18*. $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n$ binom yoyilmasida 5- had koeffitsiyenti 3- had koeffitsiyentiga nisbati 7:2 ga teng. x ning darajasi 1 bo'lgan hadni toping.

19*. $\left(x\sqrt{x} - \frac{1}{x^4}\right)^n$ binom yoyilmasida 3- had koeffitsiyenti 2- had koeffitsiyentidan 44 ga katta. Ozod hadni toping.

20*. $\left(\sqrt[3]{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{20}$ binom yoyilmasining barcha ratsional hadlarini toping.

21. $x(2-3x)^5 + x^3(1+2x^2)^7 - x^4(3+2x^3)^9$ ko'phadning x^5 oldidagi koeffitsiyentini toping.

22. $(a - \sqrt{2})^6$ binom yoyilmasini yozing.

1-misol. Firma ishlab chiqargan mahsulotni biror sifat yoki miqdor belgisiga ko'ra tahlil qilish talab etiladi. Bu vazifa qanday bajariladi?

Masalan, go'sht mahsuloti solingan konserva idishlari ichida nuqsonlari bor konservalar ulushini yoki mahsulotning o'rtacha massasini aniqlash uchun har bir konserva idishini tekshirishimiz shartmi?

Go'sht mahsuloti solingan konserva idishining o'rtacha massasini aniqlash uchun har bir konserva idishning massasini o'lchab, ular yig'indisini barcha idishlar soniga bo'lishimiz kerak. Biz bu holda matematik nuqtai nazardan to'g'ri ish tutgan bo'lamiz, ammo iqtisodiyot nuqtai nazaridan emas.

Ammo mahsulotlar soni juda katta bo'lsa, u holda yalpi tekshirishni o'tkazish maqsadga muvofiq kelmaydi; sababi, bunday tekshirish qo'shimcha ish kuchini, vaqtni va boshqa resurslarni jalb qilishni talab qiladi. Ayrim hollarda (masalan, tez buziladigan o'simlik yoki go'sht mahsulotlari solingan konserva idishining o'rtacha massasini o'lchash, elektr uskunaning buzilmasdan xizmat qilish vaqtini aniqlash va boshqalar) bunday tekshirishda mahsulot yaroqsiz holga kelishi tabiiy.

Shunga o'xshash hollarda yalpi tekshirishdan voz kechib, mahsulotlar to'plamidan chekli sondagi mahsulotlar tasodifiy ravishda, tavakkaliga olinadi va ular o'rganiladi. Bunday usul *tanlanma kuzatish* deb nomlanadi.

Bizning misolimizda barcha konservalardan bir nechtasi, aytaylik, 200 tasi olinib, shu 200 ta konservaning massalaridan tashkil topgan (x_1, x_2, \dots, x_{200})

qator aniqlanadi va uning $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{200}}{200}$ o'rta qiymati hisoblanadi.

Shu o'rta qiymat barcha konservalarning o'rta qiymatiga *taqriban* teng degan xulosaga kelinadi.

Tanlanma kuzatish usuli mamlakatning ijtimoiy-iqtisodiy holati, asosiy demografik tavsiflar, aholi bandligi, uning turmush darajasi, yashash sharoitlari, ta'lim, sog'liqni saqlash, madaniyat sohalaridagi ko'rsatkichlarini aniqlashda, tovar va xizmatlar iste'mol bozori, transport va aloqa xizmatlari haqida ma'lumotlarni tahlil qilishda qo'llaniladi.

O'rganilishi kerak bo'lgan barcha obyektlar to'plami **bosh to'plam** deyiladi. **Tanlanma to'plam** (ba'zan tanlanma) deb bosh to'plamdan ajratib olingan obyektlar to'plamiga aytiladi.

Shu to'plamlarning har bir elementini xarakterlovchi sifat yoki miqdor

ko'rsatkichlari majmuasi **statistik¹ ma'lumotlar** deyiladi.

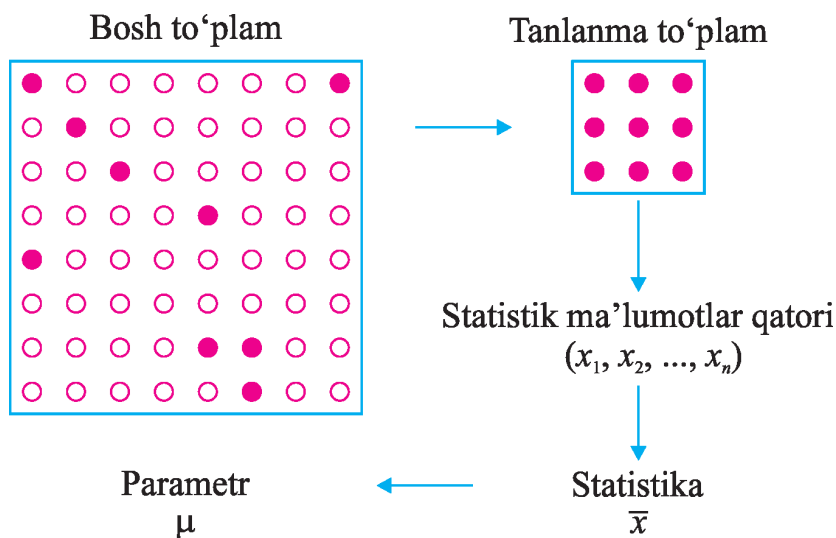
Statistik ma'lumotlar qatorining tabiati sonli bo'lishi shart emas. Masalan, foydalanishda bo'lgan avtomashinalar rusumlari, ranglari o'rganilganda, ularga mos statistik ma'lumotlarning tabiati sonli emasligi ravshan.

Tabiati sonli bo'lmagan statistik ma'lumotlar **kvalitativ** (ing.quality – sifat), miqdoriy statistik ma'lumotlar esa **kvantitativ** (ing.quantum – miqdor) deyiladi.

Odatda, kvantitativ statistik ma'lumotlar sonlar ketma-ketligini (qatorini) tashkil qiladi.

Bosh to'planning barcha elementlarini xarakterlovchi sifat yoki miqdor belgisi **parametr** deyiladi. Tanlanma to'planning funksiyasi esa **statistika** deyiladi. Statistika miqdoriy xarakterga ega bo'lsa, uni **statistik kattalik** ham deyishadi.

Agar yuqoridagi 1-misolda har bir konserva idishining o'rtacha massasi- ni μ deb belgilasak, u holda μ – parametr, tanlanmadagi har bir konserva idishining \bar{x} o'rtacha massasi esa statistika misol bo'lishi mumkin. Bunda muayyan holatlarda statistika qarab, parametrning qiymatini baholash mumkin.



Keng ma'noda **statistika** deb statistik ma'lumotlarni to'plash, ularni tizimga solish, ishlov berish hamda ulardan ilmiy va amaliy xulosalar chiqarish usullarini o'rganadigan fanga aytiladi.

¹ statistika (lot. stato — davlat; status — holat)

Savol va topshiriqlar

1. Bosh to‘plam, tanlanma to‘plam deganda nimani tushunasiz?
2. Parametr, statistika deganda nimani tushunasiz? Misollar keltiring.
3. Qaysi ko‘rsatkichni o‘rganganimizda tanlanma kuzatish usulidan foydalanish qulayroq:
 - a) bog‘dagi olma daraxtlarining o‘rtacha hosildorligi;
 - b) O‘zbekistondagi avtomashinalarning rusumi va rangi;
 - c) mahallangizdagi avtomashinalarning rusumi va rangi;
 - d) O‘zbekistondagi o‘quvchilarning matematika fanidan o‘rtacha bahosi;
 - e) maktabdagi o‘quvchilarning matematika fanidan o‘rtacha bahosi;
 - f) do‘stlaringizning matematika fanidan o‘rtacha bahosi;
 - g) teatr tomoshabinlaridan har ikkinchisining jinsi;
 - h) maktabingizda tibbiy ko‘rikdan o‘tayotgan o‘quvchilarning o‘rtacha vazni?
4. Ikkita turli sifatga ega bo‘lgan bosh to‘plamga misol keltiring.
5. Quyidagi statistik ma’lumotlar qatori kvantitativmi yoki kvalitativmi:
 - a) bu yili kasalxonaga tushgan birinchi 40 nafar kasalning jinsi;
 - b) tasodifiy ravishda olingan 20 nafar o‘quvchining sochlari rangi;
 - c) tasodifiy ravishda olingan 20 nafar o‘quvchining yoshi;
 - d) bu oyda ishlab chiqarilgan 20 ta avtomashinaning yoqilg‘i sarflash ko‘rsatkichi;
 - e) tasodifiy ravishda olingan 100 nafar saylovchining siyosiy partiyalarga mansubligi?
6. Tadbirkor supermarketga bir kunda kirgan insonlarning o‘rtacha sarflagan mablag‘lari 57000 so‘m ekanligini aniqladi.
 - a) U qanday bosh to‘plamni o‘rgandi?
 - b) U qanday parametrni o‘rgandi?
 - c) Tanlanma kuzatuvni amalga oshirsak, uning statistikasi qanday ma’noga ega? U nechaga teng bo‘lishi mumkin?
7. Tibbiyot sohasidagi tadqiqotchi oxirgi yillarda tug‘ilgan chaqaloqlarning o‘rtacha vaznini baholamoqchi. U 235 nafar chaqaloqning o‘rtacha massasini hisoblaganda, 3 kg 270 g qiymatni hosil qildi.
 - a) U qanday bosh to‘plamni o‘rgandi?
 - b) U qanday parametrni o‘rgandi?
 - c) Tanlanma qanday statistikaga ega? U nechaga teng?
 - d) Parametr nechaga teng bo‘lishini aniq bila olamizmi?

8. Sotsiolog hududdagi yosh qizlar orasida sport bilan shug'ullanayotgan qizlarning ulushini baholamoqchi. Tasodifan olingan 1 320 nafar qizdan 145 nafari (ya'ni taxminan 11 foizi) sport bilan shug'ullanganligi aniqlandi.

- a) Sotsiolog qanday bosh to'plamni o'rgandi?
- b) U qanday parametrni o'rgandi?
- c) Tanlanma qanday statistikaga ega? U nechaga teng?
- d) Parametr nechaga teng bo'lishini aniq bila olamizmi?

Biz bundan buyon faqat kvantitativ statistik ma'lumotlar qatorini qaraymiz. Bu holda statistik ma'lumotlar qatori chekli to'plamni tashkil qiladi deb faraz qilishimiz mumkin.

Tanlanma hajmi yoki **bosh to'plam hajmi** deb, shu to'plamlardagi obyektlar soniga aytiladi.

Masalan, 1-misolda 10000 ta konserva sifatini tekshirish uchun 200 ta konserva tanlab olingan bo'lsa, bosh to'plam hajmi $N = 10000$ va tanlanmaning hajmi $n = 200$ ga teng bo'ladi.

Tanlanmaning har bir elementi **varianta**, tartiblangan tanlanma **variatsion qator** deb ataladi.

Bosh to'plamdan tanlanma to'plam olingan va unda x_1 qiymat n_1 marta, x_2 qiymat n_2 marta, . . . , x_k qiymat n_k marta kuzatilgan bo'lsin. n_i kattalik

x_i variantaning **chastotasi**, $\frac{n_i}{n}$ kattalik esa **nisbiy chastotasi** deb ataladi.

Ravshanki, tanlanmaning hajmi $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ ga teng.

Statistik ma'lumotlarga quyidagicha dastlabki ishlov berilishi mumkin:

- 1) variatsion qator tuziladi;
- 2) ma'lumotlar chastotalar bo'yicha jadval ko'rinishida yoziladi;
- 3) chastotalar poligoni chiziladi;
- 4) gistogramma chiziladi.

2-Misol. Iqtisodchi firma ishchilarining malaka toifalarini o'rganish uchun 20 nafarining hujjatlari asosida quyidagi statistik ma'lumotlar qatorini hosil qildi: 4; 4; 3; 2; 5; 2; 3; 5; 4; 3; 3; 2; 5; 4; 5; 4; 6; 3; 4; 5.

Bu ma'lumotlarni o'sish tartibida yozib, *variatsion qatorni* hosil qildi: 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6.

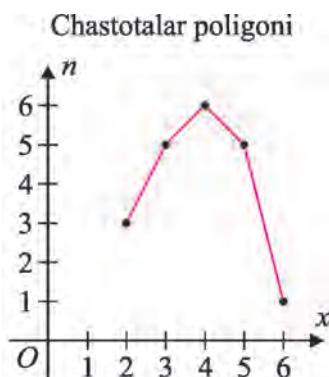
Variatsion qatorda $x_1 = 2$; $x_2 = 3$; $x_3 = 4$; $x_5 = 5$; $x_6 = 6$ — variantalar; x_1 variantaning chastotasi 3 ga; x_2 niki 5 ga; x_3 niki 6 ga; x_4 niki 5 ga; x_5 niki esa 1 ga teng. Bundan tashqari x_1 variantaning nisbiy chastotasi $\frac{3}{20} = 15\%$;

x_2 variantaning nisbiy chastotasi esa $\frac{5}{20} = 25\%$ ga teng.

So'ng iqtisodchi chastotalar bo'yicha jadvalni tuzdi:

Malaka toifasi x_i	2	3	4	5	6
Ishchilar soni p_i	3	5	6	5	1

Dekart koordinatalar sistemasida (2; 3), (3; 5), (4; 6), (5; 5) va (6; 1) nuqtalarni siniq chiziq bilan tutashtirdi. Bu bilan iqtisodchi **chastotalar poligoni** yasadi:



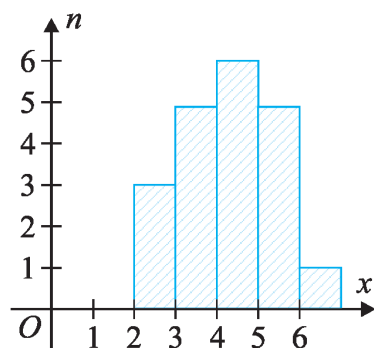
Umumiy holda **chastotalar poligoni** deb $(x_1; n_1)$, $(x_2; n_2)$, ..., $(x_n; \omega_n)$ nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziqqa aytiladi.

Nisbiy chastotalar poligoni deb $(x_1; \omega_1)$, $(x_2; \omega_2)$, ..., $(x_k; \omega_k)$ nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziqqa aytiladi, bunda $\omega_1 = \frac{n_1}{n}$, $\omega_2 = \frac{n_2}{n}$, ..., $\omega_k = \frac{n_k}{n}$ – nisbiy chastotalar.

So'ng absissa o'qida asoslari [2; 3], [3; 4], [4; 5], [5; 6], [6; 7] kesmalar hamda balandliklari, mos ravishda, 3; 5; 6; 5; 1 chastotalarga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklarni yasadi. Bunday shakl **gistogramma** deb nomlanadi.

Agar ma'lumotlar qatori katta bo'lib, unda takrorlanadigan qiymatlar kam uchrasa, chastotalar jadvalini tuzishda noqulayliklarga duch kelamiz. Bunday hollarda ma'lumotlarni tahlil qilish uchun ularni o'z ichiga olgan bir nechta bir xil uzunlikdagi *oraliqlar* qaraladi. Har bir oraliqqa tegishli

Gistogramma

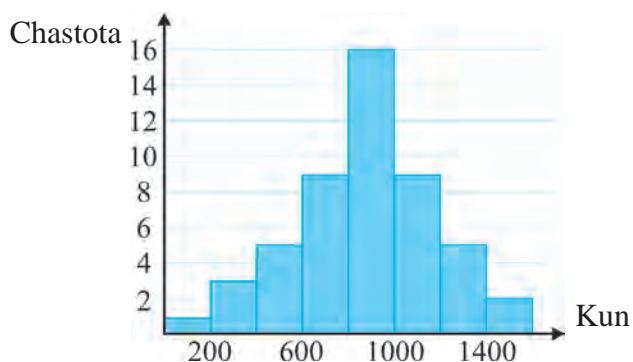


variantalar soni (uni ham chastota deb nomlaymiz) hisoblanadi va tegishli jadval tuziladi.

3-misol. Ishlab chiqarilayotgan elektr asboblarning xizmat qilish muddatini o‘rganish uchun 50 ta mahsulot tanlab olindi. Natijada quyidagi jadval tuzildi:

Xizmat qilish muddati, kun	Chastota
200 gacha	1
200 – 400	3
400 – 600	5
600 – 800	9
800 – 1000	16
1000 – 1200	9
1200 – 1400	5
1400 – 1600	2

Asoslari absissa o‘qidagi mos oraliqlar bo‘lgan hamda balandliklari, mos ravishda, chastotalarga teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklardan tashkil topgan **gistogramma** yasaladi:



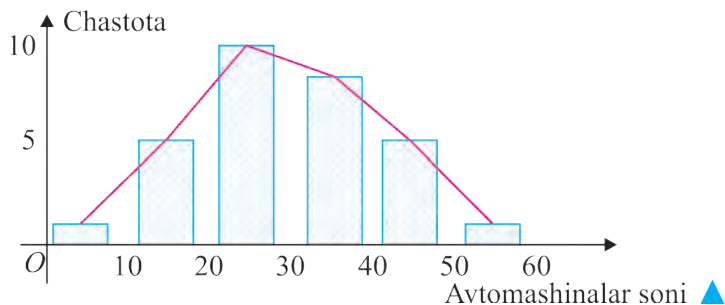
4-misol. Odil “Yo‘l harakati xavfsizligi oyi” davomida maktab darvozasi yonida soat 7.45 dan 8.00 gacha nechta avtomashina o‘tishini sanadi va quyidagi jadvalni tuzdi:

Avtomashinalar soni	Sanash	Chastota	Nisbiy chastota
0 – 9		1	0,033
10 – 19		5	0,167
20 – 29		10	0,333
30 – 39		9	0,3
40 – 49		4	0,133
50 – 59		1	0,033
Jami		30	

Ma’lumotlarni gistogramma va poligon ko‘rinishda ifodalang. Kuzatilgan

vaqt oralig'ida eng ko'pi bilan nechta avtomashina o'tdi?

△ Asoslari jadvaldagi kesmalar bo'lgan va balandliklari chastotalarga teng to'g'ri to'rtburchaklar (ustunlar) chizib, gistogrammani hosil qilamiz va har bir ustunning yuqori qismining o'rtalarini tutashtiramiz. Natijada poligon hosil bo'ladi:



Mashqlar

Mashqlarda berilgan ma'lumotlarni jadval, poligon va gistogramma ko'rinishida ifodalang. Qaysi varianta eng ko'p uchradi? Bundan qanday xulosaga kelsa bo'ladi? (23–25):

23. Maktab futbol jamoasining har o'yinda kiritgan gollari quyidagicha:

2	0	1	4	0	1	2	1	1	0	3	1
3	0	1	1	6	2	1	3	1	2	0	2

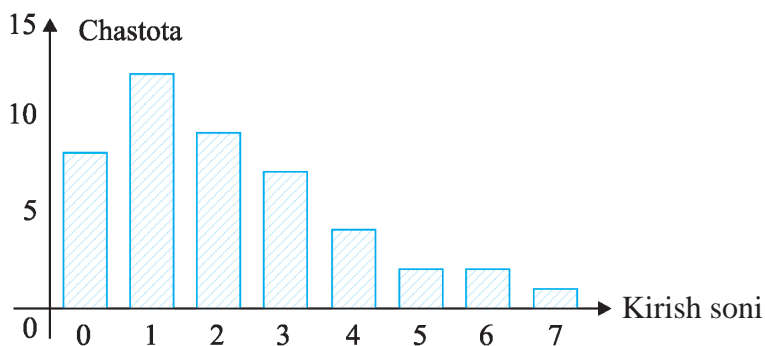
24. Jadvalda oxirgi haftada 40 nafar o'quvchining nechta a'lo baho olgani yozilgan:

0	2	1	5	0	1	4	2	3	1
4	3	0	2	9	2	1	5	0	3
6	4	2	1	5	1	0	2	1	4
3	1	2	0	4	3	2	1	2	3

25. 10 ta savoldan iborat test nazoratida o'quvchilar to'g'ri yechgan testlar soni quyidagicha bo'lgan:

5	7	6	4	6	5	6	7	5	8
7	6	9	8	7	6	6	9	6	7
6	4	7	5	8	7	6	8	7	8
5	6	9	7						

26. Marketolog tasodifiy ravishda tanlangan insonlardan "Siz shu haftada necha marta do'konga kirdingiz?" degan savol bilan murojaat qildi va so'rovnom natijalarini quyidagicha tasvirladi:



- So'rovnomada nechta kishi ishtirok etdi?
- Qaysi varianta eng ko'p uchradi? Qanday xulosaga kelsa bo'ladi?
- Necha kishi bu hafta do'konga kirmagan?
- Do'konga 3 martadan ko'proq kirgan kishilar necha foiz?
- Chastotalar jadvalini tuzing.

27. Samandar maktabga avtobusda qatnaydi. 30 kun mobaynida u o'zi chiqqan avtobusdagi yo'lovchilar sonini sanadi va quyidagi ma'lumotlarni hosil qildi:

17	25	32	19	54	30	22	15	38	8
21	29	37	25	42	35	19	31	26	7
22	11	27	44	24	22	32	18	40	29

- 0–9, 10–19, ..., 40–49 oraliqlarga mos chastotalar jadvalini tuzing.
- Necha kunda avtobusga 10 nafardan kamroq yo'lovchi chiqqan?
- 30 nafardan ko'proq yo'lovchi chiqqan kunlar necha foiz?
- Ustunli diagramma, poligonni chizing.
- Qaysi oraliqda eng ko'p yo'lovchi chiqqan?

28. Adabiyot darsligidan sizga yoqqan she'rni tanlab oling va undagi unli harflar sonini sanab chiqing. Mos jadvalni, poligonni va gistogrammani yasang. Qaysi harf ko'proq uchradi? Natijangizni boshqa sinfdoshlaringiz bilan solishtiring.

Jami unli harflar	A	E	I	O	U	O'
Sanash natijasi						

O'rta qiymat, moda va mediana

Mamlakatning ijtimoiy-iqtisodiy holati, asosiy demografik tavsiflar, aholi bandligi, uning turmush darajasi, yashash sharoitlari, ta'lim, sog'liqni saqlash, madaniyat sohalari ko'rsatkichlarini aniqlashda, tovar va xizmatlar iste'mol bozori, transport va aloqa xizmatlari haqidagi statistik ma'lumotlar qatorlariga ishlov berish *statistik kattaliklar yoki xarakteristikalar* asosida yuritiladi.

Quyidagi statistik xarakteristikalar ma'lumotlar qatorining turli ma'nodagi *markazlarini (ba'zi adabiyotlarda markaziy tendensiya deb yuritiladi)* ifodalaydi: *o'rta qiymat, moda va mediana*.

$$o'rta\ qiymat = \frac{\text{ma'lumotlar qatoridagi hadlar yig'indisi}}{\text{ma'lumotlar qatoridagi hadlar soni}}.$$

1-misol. 11-sinf o'quvchilaridan 12 nafari tanlab olinib, ularning bo'ylari o'lchandi:

168, 159, 181, 172, 161, 163, 164, 170, 169, 154, 168, 175.

O'quvchilarning *o'rtacha* bo'yi necha santimetr?

O'quvchilardan nechtasining bo'yi o'rtacha bo'ydan baland?

△ O'lchash natijalarini qo'shib, o'quvchilar soniga bo'lamiz:

$(168+159+181+172+161+163+164+170+169+154+168+175):12=167$.

Demak, o'quvchilarning o'rtacha bo'yi 167 cm ekan. O'quvchilardan 7 nafarining bo'ylari o'rtacha bo'ydan baland. ▲

O'zgarish kengligi deb, berilgan statistik ma'lumotlar qatoridagi eng katta variant bilan eng kichik variant ayirmasiga aytiladi.

Masalan, o'quvchilar bo'ylari to'g'risidagi ma'lumotlar qatorining o'zgarish kengligi $181-154=27$ cm ekan.

2-misol. O'quvchining chorak davomida matematika fanidan olgan baholari 5, 3, 4, 2, 5, 5, 4, 3, 3, 5, deylik.

Uning o'rtacha bahosi $\frac{5+3+4+2+5+5+4+3+3+5}{10} = 3,9$ bo'lgani uchun bu son yaxlitlanib chorakka 4 baho chiqarildi. To'plangan 10 ta baho ichida oltitasi o'rtacha bahodan yuqori ekanligi ko'rinib turibdi.

Shu bilan birga eng ko'p uchragan baho 5 ekanligini aytish joiz.

O'rta qiymat *ma'lumotlar qatorining markazini* ifodalaydigan sonidir. Bu qiymat qatarga tegishli bo'lishi shart emas.

Masalan, maktabda test sinovlarining o'rtacha natijasi 75% bo'lsa, ayrim o'quvchilar natijasi 75% dan yuqori, ayrimlariniki esa 75% dan past bo'lishi mumkin. Bunda 75% natijaga erishgan o'quvchi bo'lmasligi

ham mumkin. x_1, x_2, \dots, x_n tanlanmaning \bar{x} o'rta qiymati $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$ formula

yordamida hisoblanadi, bu yerda n – tanlanma hajmi, $\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n$.

Ma'lumotlar qatorida eng ko'p uchraydigan varianta *ma'lumotlar qatorining modasi* deyiladi. Masalan, 2-misol uchun moda 5 ga teng.

Topshiriq. Kundalik daftaringizda o'tgan chorakda matematika fanidan olgan baholaringiz qatorini yozing. O'rtacha bahoingizni va baholar qatorining modasini toping. Qanday xulosaga keldingiz?

Ma'lumotlar qatorida variantalar soni toq son bo'lsa, u holda qatorning *medianasi* deb variatsion qatorning o'rtasida turgan songa aytiladi.

Ma'lumotlar qatorida variantalar soni juft bo'lsa, u holda qatorning *medianasi* deb variatsion qatorning o'rtasida turgan ikki variantaning o'rta arifmetigiga aytiladi.

x_1, x_2, \dots, x_n tanlanmaning medianasini topish uchun dastlab x_1, x_2, \dots, x_n sonlar o'sish tartibida joylashtiriladi, ya'ni variatsion qator hosil qilinadi. So'ng $\frac{n+1}{2}$ qiymat topiladi.

Agar $\frac{n+1}{2}$ son butun bo'lsa, ya'ni n – toq bo'lsa, u holda mediana variatsion qatorning $\frac{n+1}{2}$ - hadiga, $\frac{n+1}{2}$ son butun bo'lmasa, yani n – juft bo'lsa, u holda mediana variatsion qatorning $\frac{n}{2}$ - va $\frac{n+2}{2}$ - hadlarining o'rta arifmetigiga teng bo'ladi.

Masalan, $n=13$ bo'lsa, $\frac{n+1}{2} = \frac{13+1}{2} = 7$ bo'ladi. Bu holda mediana 7-variantaga teng.

Agar $n=14$ bo'lsa, $\frac{n+1}{2} = \frac{14+1}{2} = 7,5$ va bu holda mediana 7- va 8-variantalarning o'rta arifmetigiga teng.

Mediana variatsion qatorni teng ikki qismga bo'ladi. Shulardan bir qismi qiymati medianadan katta bo'lmagan variantalardan, ikkinchi qismi esa

qiymati medianadan kichik bo'lmagan variantalardan tashkil topgan.

Masalan, maktabda test sinovlari natijalari medianasi 75% bo'lsa, natijalari 75% dan katta bo'lmagan o'quvchilar soni barcha o'quvchilar sonining teng yarmini tashkil qiladi.

3-misol. Statistik ma'lumotlar qatorining o'rta qiymatini, modasini va medianasini toping:

a) 3, 6, 5, 6, 4, 5, 5, 6, 7; b) 13, 12, 15, 13, 18, 14, 16, 15, 15, 17.

△ a) O'rta qiymat: $\frac{3+6+5+6+4+5+5+6+7}{9} = \frac{47}{9} \approx 5,2.$

Bu qator ikkita modaga ega: 5 va 6 (ular uch martadan takrorlanadi).

$n=9$, $\frac{n+1}{2}=5$ bo'lgani uchun variatsion qatorning ikkala tarafdin

hadlarni ketma-ket o'chirib o'rta hadini topamiz: ~~3, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7.~~

Demak, mediana 5 ga teng ekan.

b) O'rta qiymat: $\bar{x} = \frac{13+12+15+13+18+14+16+15+15+17}{10} = \frac{148}{10} = 14,8.$

Bu qator modasi 15 ga teng (bu son eng ko'p marta takrorlanadi). $n=10$, $\frac{n+1}{2}=5,5$ bo'lgani uchun, variatsion qatorni tuzib, variatsion qatorning

ikkita o'rta hadini topamiz: ~~12, 13, 13, 14, 15, 15, 15, 16, 17, 18.~~

Demak, mediana 15 ga teng ekan.

Mashqlar

29. Ma'lumotlar qatorlarining modasini, medianasini va o'rta qiymatini toping.

a) 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9;

b) 10, 12, 12, 15, 15, 16, 16, 17, 18, 18, 18, 18, 19, 20, 21;

c) 22,4, 24,6, 21,8, 26,4, 24,9, 25,0, 23,5, 26,1, 25,3, 29,5, 23,5.

30. Ma'lumotlar qatorlari berilgan bo'lsin:

A: 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 10;

B: 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 15.

a) Ularning o'rta qiymatlarini toping.

b) Ularning medianalarini toping.

d) Nega A qatorning o'rta qiymati B qatorning o'rta qiymatidan kichik?

c) Nega A qatorning medianasi B qatorning medianasiga teng?

31. Ikki nafar sportchi musobaqada quyidagi natijalarni ko'rsatdi:

160, 175, 142, 137, 151, 144, 169, 182, 175, 155;

157, 181, 164, 142, 195, 188, 150, 147, 168, 148.

Ularning qaysi biri o'rtacha hisobda yuqoriroq natijaga erishdi?

32. Olim 15 kun davomida har kuni necha dona olma yeganini yozib bordi: 2, 3, 1, 1, 0, 0, 4, 3, 0, 1, 2, 3, 2, 1, 4. Shu qatorning:

a) moda; b) o'rta qiymat; c) medianasini toping.

33. Maktab basketbol jamoasi 4 ta o'yinda savatga 43, 55, 41 va 37 ta ochkoli to'p tushirdi (ochkoga ega bo'ldi).

a) Shu to'rt o'yinda savatga o'rtacha necha ochkoli to'p tushirildi?

b) O'rtacha ochkolar soni saqlanishi uchun keyingi, beshinchi o'yinda savatga necha ochkoli to'p tushirilishi kerak?

c) Beshinchi o'yinda savatga 25 ochkoli to'p tushirilgan bo'lsa, besh o'yinda o'rtacha ochkolar soni nechaga teng bo'ladi?

d) Jamoa 6 – o'yinda savatga 41 ochkoli to'p tushirdi. O'rtacha ochkolar soni qanday o'zgaradi? 6 ta o'yinda o'rtacha ochkolar soni nechaga teng bo'ladi?



? Savol va topshiriqlar

1) Qanday statistik xarakteristikalarni bilasiz?

2) Moda nimani anglatadi?

3) Berilgan sonlarning medianasi qanday topiladi?

Agar x_1, x_2, \dots, x_k tanlanmaning qiymatlari, mos ravishda, n_1, n_2, \dots, n_k chastotalarga ega, shu bilan birga $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ bo'lsa, u holda tanlanmaning o'rta qiymati

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k}{n} \quad (2)$$

yoki

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i$$

formula bo'yicha topiladi.

4-misol. Statistik qator quyidagicha berilgan bo‘lsin:

Qiymat (x_i)	Chastota (n_i)
3	1
4	1
5	3
6	7
7	15
8	8
9	5
Jami	$\sum n_i = 40$

Uning o‘rta qiymatini topish uchun jadvalga yana bir ustunni qo‘shib, unga $n_i x_i$ ko‘paytmalarni yozamiz va tegishli hisob-kitoblarni amalga oshiramiz:

Qiymat (x_i)	Chastota (n_i)	Ko‘paytma ($n_i x_i$)
3	1	$1 \cdot 3 = 3$
4	1	$1 \cdot 4 = 4$
5	3	$3 \cdot 5 = 15$
6	7	$7 \cdot 6 = 42$
7	15	$15 \cdot 7 = 105$
8	8	$8 \cdot 8 = 64$
9	5	$5 \cdot 9 = 45$
Jami	$\sum n_i = 40$	$\sum n_i x_i = 278$

Demak, o‘rta qiymat $\frac{278}{40} = 6,95$ bo‘ladi.

Endi medianani topamiz. Tanlanma hajmi 40 ga teng bo‘lgani bois $\frac{n+1}{2} = \frac{41}{2} = 20,5$ bo‘ladi. Demak, mediana 20- va 21- variantalarning o‘rta arifmetigiga teng.

Uning qiymatini topish uchun quyidagi jadvalni tuzamiz:

Qiymat	Chastota	Yig‘ma chastota	Izoh
3	1	1	1 ta had 3 ga teng
4	1	$1+1=2$	2 ta had 4 dan kichik yoki teng
5	3	$2+3=5$	5 ta had 5 dan kichik yoki teng
6	7	$5+7=12$	12 ta had 6 dan kichik yoki teng

7	15	12+15=27	27 ta had 7 dan kichik yoki teng
8	8	27+8=35	35 ta had 8 dan kichik yoki teng
9	5	35+5=40	Barcha 40 ta had 9 dan kichik yoki teng
Jami	40		

Jadvaldan ko‘rinib turibdiki, 20- va 21- variantlar ikkalasi ham 7 ga teng.

Demak, mediana $\frac{7+7}{2} = 7$ bo‘lar ekan.

5-misol. Xalqaro tennis musobaqasida O‘zbekiston vakili o‘yining setlarida jadvalda ko‘rsatilgandek bir nechta eys qayd etildi:

Eyslar soni	1	2	3	4	5	6
Chastota	4	11	18	13	7	2

- Shu setlarda qayd etilgan eyslarning o‘rtacha sonini aniqlang.
- Shu setlarda qayd etilgan eyslarning medianasini aniqlang.
- Modani toping.

△ Quyidagi jadvalni tuzamiz:

Eyslar soni (x_i)	Chastota (n_i)	Ko‘paytma ($n_i x_i$)	Yig‘ma chastota
1	4	4	4
2	11	22	15
3	18	54	33
4	13	52	46
5	7	35	53
6	2	12	55
Jami	$\sum n_i = 55$	$\sum n_i x_i = 179$	

$$a) \bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i} = \frac{179}{55} \approx 3,25.$$

Shu setlarda qayd etilgan eyslar o‘rtacha soni taxminan 3,25 ga teng.

b) Tanlanma hajmi $n=55$ bo‘lgani uchun $\frac{n+1}{2} = 28$. Demak, mediana 28- had bilan ustma-ust tushadi.

Jadvaldan ko‘rinib turibdiki, 16- haddan boshlab 33- hadgacha barcha hadlar qiymati 3 ga teng, demak, mediana ham 3 ga teng.

c) Eng katta chastota 18 ga teng bo‘lgani uchun, unga mos eyslar soni 3 ga teng.

Mashqlar

34. 3 ta tanga birgalikda 30 marta tashlanganda jadvalda ko'rsatilgan natija qayd etildi.

Gerblar soni	Necha marta kuzatildi
0	4
1	12
2	11
3	3
Jami	30

Shu ma'lumotlarga ko'ra:

- modani;
- medianani;
- o'rta qiymatni toping.
- O'zingiz ham 3 ta tanga olib shunday tajribani amalga oshirib ko'ring-chi? Qanday natijalarga erishdingiz?

35. Quyidagi jadvalda maktab direktoriga har kuni qilingan murojaatlar soni ko'rsatilgan. Bunga ko'ra:

Kunlik murojaatlar soni	0	1	2	3	4	5	6	7	8	11
Chastota	5	8	13	8	6	3	3	2	1	1

- Modani, medianani va o'rta qiymatni toping.
- Mos ustunli diagrammani yasang va moda, mediana va o'rta qiymat qayerda ekanligini ko'rsating.
- Nega o'rta qiymat medianadan katta?
- Ma'lumotlar qatorining markazi sifatida qanday statistik kattalikni tanlar edingiz? Javobingizni asoslang.

36. Amaldagi texnik qoidalarga ko'ra gugurt chiqaradigan firma gugurt qutisiga 50 dona gugurt cho'pini solishi kerak. Sifat komissiyasi 30 ta gugurt qutisini tanlab, ulardagi gugurt cho'plarini sanadi va natijalarni quyidagi jadval ko'rinishida yozdi:

Qutidagi gugurtlar soni	Chastota
47	5
48	4
49	11
50	6
51	3
52	1
Jami	30

- Modani, medianani va o'rta qiymatni toping.

b) Firma texnik qoidalarga rioya qilmoqdam? Nega?

37. Samandar mahallasida istiqomat qiladigan 59 ta oilada bolalar sonini aniqlab, quyidagi jadvalni tuzdi:

Oiladagi bolalar soni	Chastota
1	5
2	28
3	15
4	8
5	2
6	1
Jami	59

Samandarga modani, medianani va o'rtacha qiymatni topishga yordam bering.

Statistik ma'lumotlar oraliqlar bo'yicha guruhlanganda o'rtacha qiymat aniq topilmasligi mumkin. O'rtacha qiymatni taqriban topish uchun har bir oraliqning o'rtasi bilan ish ko'riladi. Bu usulning mohiyatini tushunish uchun misol ko'raylik.

6-misol. Firma ishchilari yoshi bo'yicha quyidagicha taqsimlangan:

Yoshi	21 – 25	26 – 30	31 – 35	36 – 40	41 – 45	46 – 50	51 – 55
Chastota	11	14	32	27	29	17	7

Firma ishchilarining o'rtacha yoshining taqribiy qiymatini topish uchun ushbu jadvalni tuzamiz:

Yoshi (yillar)	Chastota (n_i)	oraliq o'rtasi (x_i)	$n_i x_i$
21 – 25	11	23	253
26 – 30	14	28	392
31 – 35	32	33	1056
36 – 40	27	38	1026
41 – 45	29	43	1247
46 – 50	17	48	816
51 – 55	7	53	371
Jami	$\sum n_i = 137$		$\sum n_i x_i = 5161$

Bundan
$$\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i} = \frac{5161}{137} \approx 37,7.$$

Firma ishchilarining o'rtacha yoshi taqriban 37,7 ga teng ekan.

Mashqlar

38. Jadvalda o'quvchilardan olingan test natijalari qayd etilgan:

Ballar	0 – 9	10 – 19	20 – 29	30 – 39	40 – 49
Chastota	2	5	7	27	9

O'rtacha natijani taqriban aniqlang.

39. Jadvalda yoqilg‘i shahobchalarida sotilgan kunlik benzin hajmi haqida ma’lumotlar keltirilgan:

Hajm (litr)	Chastota
2000 – 2999	4
3000 – 3999	4
4000 – 4999	9
5000 – 5999	14
6000 – 6999	23
7000 – 7999	16

- Nechta shahobcha o‘rganilgan?
- Bir kunda jami qancha benzin sotiladi?
- Bir kunda o‘rta hisobda qancha benzin sotiladi?

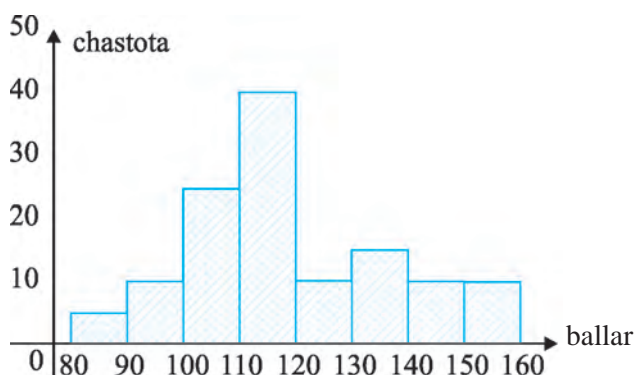
40. Basketbolchining o‘yinlarda keltirgan ochkolari soni quyidagicha:

15	8	6	10	0	9	2	16	11	14	13	17	16	12
3	13	5	18	14	19	4	15	15	19	19	14	6	11
9	7	15	19	12	17	14	13	12	10	6	8	9	3

- O‘rta hisobda bir o‘yinda qancha ochko olingan?
- Ma’lumotlarni quyidagi oraliqlarga guruhlab, o‘rtacha ochkolar sonini taqriban toping va asl o‘rta qiymat bilan solishtiring:

- 0 – 4, 5 – 9, 10 – 14, 15 – 19;
- 0 – 3, 4 – 7, 8 – 11, 12 – 15, 16 – 19.

41. Test sinovlarida o‘quvchilar tomonidan olingan natijalar quyidagi gistogrammada tasvirlangan:



- Test sinovlarida qancha o‘quvchi qatnashgan?
- O‘rtacha ballar soni nechaga tengligini baholang.
- 100 balldan yuqori natijaga erishgan o‘quvchilar ulushini toping.

d) Agar 20% o‘quvchi rag‘batlantirilishi ko‘zda tutilgan bo‘lsa, rag‘bat olish uchun eng quyi ball nechaga teng bo‘ladi?

Chetlanish, standart chetlanish. Statistik ma’lumotlar qatorining modasi, medianasi va o‘rta qiymati o‘rganilayotgan qatorning qaysi qiymati eng xarakterli ekanligini ko‘rsatadi, lekin bular qatorni tavsiflash uchun hali yetarli emas. Chunki statistik ma’lumotlar orasidagi har xillik, ya’ni o‘zgaruvchanlikning mavjudligi ma’lumotlar to‘plamining asosiy xususiyati hisoblanadi.

Agar o‘zgaruvchanlik bo‘lmaganda edi, statistik qator haqida ma’lumotni qatorning bitta elementiga qarab olish mumkin bo‘lar edi. O‘zgaruvchanlik mavjud bo‘lganda esa bu ma’lumot o‘zgaruvchanlikning xarakteri va darajasini hisobga olgan bo‘lishi kerak.

Yuqoridagi misollarda ma’lumotlar qatori elementlarining qatorning o‘rta arifmetik qiymatidan ozmi-ko‘pmi chetlanganini ko‘rdik. Bu *chetlanish belgining qanchalik o‘zgaruvchanligini ko‘rsatadi*.

Tanlanma to‘plam belgisining kuzatilgan qiymatlari uning o‘rtacha qiymati atrofida tarqoqligini xarakterlash uchun *standart chetlanishdan* foydalaniladi.

x_1, x_2, \dots, x_n tanlanmaning o‘rta qiymati \bar{x} bo‘lsin. Uning *standart chetlanishi* deb

$$s_n = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}} \quad \text{yoki} \quad s_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

songa aytiladi.

Bunda $(x_i - \bar{x})^2$ ifoda x_i belgi \bar{x} o‘rta qiymatdan qanchalik *chetlanishini*,

$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ ifoda barcha chetlanishlar yig‘indisini, $\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$ ifoda esa

o‘rtacha chetlanishni bildiradi. Ildiz belgisi esa o‘rtacha chetlanishning o‘lchov birligi ma’lumotlar o‘lchov birligiga mosligini ta’minlash uchun qo‘yiladi.

7-misol. 2, 5, 4, 6, 7, 5, 6 qatorning standart chetlanishini hisoblang.

$$\bar{x} = \frac{2+5+4+6+7+5+6}{7} = 5 \quad \text{o‘rta qiymatni hisoblab, quyidagi jadvalni}$$

tuzamiz:

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
2	-3	9
4	-1	1
5	0	0
5	0	0
6	1	1
6	1	1
7	2	4
35		16

So'ng standart chetlanishni hisoblaymiz:

$$s_n = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{16}{7}} \approx 1,51.$$

Agar n hajmli tanlanmada x_1, x_2, \dots, x_k qiymatlar, mos ravishda, n_1, n_2, \dots, n_k chastotalarga ega bo'lsa, u holda standart chetlanish

$$s_n = \sqrt{\frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_k(x_k - \bar{x})^2}{n}}$$

yoki $s_n = \sqrt{\frac{\sum n_i(x_i - \bar{x})^2}{\sum n_i}}$ formula yordamida hisoblanadi .

8-misol. Tanlanma to'plam quyidagi jadval bilan berilgan:

x_i	1	2	3	4
n_i	20	15	10	5

Standart chetlanishni toping.

$$\triangle \bar{x} = \frac{20 \cdot 1 + 15 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{20 + 15 + 10 + 5} = \frac{100}{50} = 2.$$

Endi jadvalni to'ldiramiz:

(x_i)	(n_i)	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$n_i(x_i - \bar{x})^2$
1	20	-1	1	20
2	15	0	0	0
3	10	1	1	10
4	5	2	4	20
Jami:	50			50

$$\text{Demak, } s_n = \sqrt{\frac{20 + 0 + 10 + 20}{20 + 15 + 10 + 5}} = 1.$$

Mashqlar

42. Tashkilotning avtomashinalari bir haftada sarflagan yoqilg'i miqdori haqidagi ma'lumotlar quyidagicha bo'lsin:

62, 40, 52, 48, 64, 55, 44, 75, 40, 68, 60, 42, 70, 49, 56

Bu qatorning standart chetlanishini hisoblang.

43. Fermer olmazordan tasodifiy ravishda tanlangan bir nechta olmalar-ning vaznini o'lchab,

87, 75, 68, 69, 81, 89, 73, 66, 91, 77, 84, 83, 77, 84, 80, 76, 67

tanlanmani hosil qildi.

Tanlanmaning o'rtacha qiymatini va standart chetlanishni hisoblang.

Olmazordagi jami olmalar-ning o'rtacha vazni va standart chetlanishi haqida nima deya olasiz?

44. Valijon mahallasida istiqomat qiladigan oilalarda bolalar sonini aniqlab, quyidagi jadvalni tuzdi:

Oiladagi bolalar soni, (x)	0	1	2	3	4	5	6	7
Chastota, (n_i)	14	18	13	5	3	2	2	1

Ma'lumotlar qatorining o'rtacha qiymatini va standart chetlanishni toping.

45. Musobaqada qatnashgan ishtirokchilarning yoshi haqidagi statistik ma'lumotlar quyidagi jadvalda berilgan:

Yoshi	11	12	13	14	15	16	17	18
Chastota	2	1	4	5	6	4	2	1

Musobaqada qatnashgan ishtirokchilarning o'rtacha yoshini va standart chetlanishni toping.

46. Tuman sog'lomlashtirish maskani yil mobaynida har haftada murojaat qilgan fuqarolar sonini hisoblab, quyidagi jadvalni to'ldirdi:

Mijozlar soni	Chastota
36	2
39	5
44	9
45	11
46	15
48	5
50	4
52	1
Jami	52

Haftada murojaat qilgan fuqarolarning o'rtacha sonini va standart chetlanishni toping.

Sochilish diagrammasi. Kundalik faoliyatimizdagi ko'pgina amaliy masalalarda, tajribalarda o'rganilayotgan ikkita ma'lumotlar qatorlari o'rtasida bog'liqlikni aniqlash talab etiladi.

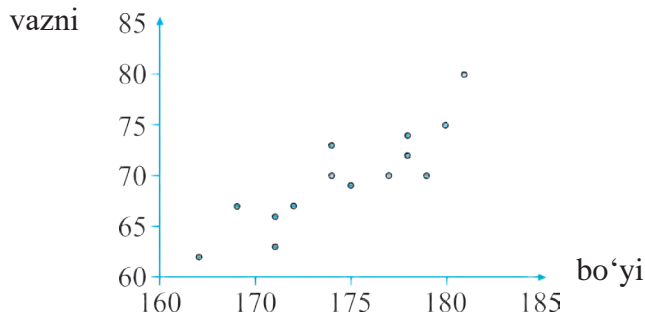
Bunda *sochilish diagrammasi* deb nomlangan diagramma yordam beradi.

1-misol. Inson bo'yi va vazni orasida bog'lanish bormi?

△ Bu savolga javob topish uchun 15 nafar yigit tanlanib, ularning bo'ylari va vaznlari o'lchandi. Natijada quyidagi jadval hosil bo'ldi:

Bo'yi, cm	167	169	179	178	177	175	171	181	174	175	180	174	172	178	171
Vazni, kg	62	67	70	72	70	69	63	80	73	66	75	70	67	74	66

Dekart koordinatalar sistemasida absissalari bo'ylar, ordinatalari esa vaznlar bo'lgan (167; 62) ..., (171; 66) nuqtalarni tasvirlaymiz:



Hosil bo'lgan diagramma *sochilish diagrammasi* deyiladi.

Ko'rinib turibdiki, taxminan bir xil vaznga ega bo'lgan insonlar turli bo'ylarga ega bo'lishi mumkin va aksincha, taxminan bir xil bo'yga ega bo'lgan insonlar turli vaznlarga ega bo'lishi mumkin. Bundan, shu miqdorlar (bo'y va vazn) orasidagi qat'iy bog'lanish yo'q, degan xulosaga kelamiz. Ammo, umuman aytganda, insonning bo'yi kattalashsa, uning vazni ham katta bo'laveradi. ▲

Sochilish diagrammasi ikki tur ma'lumotlar qatorlari orasidagi bog'lanishning taxminiy xarakterini ko'rsatadi.

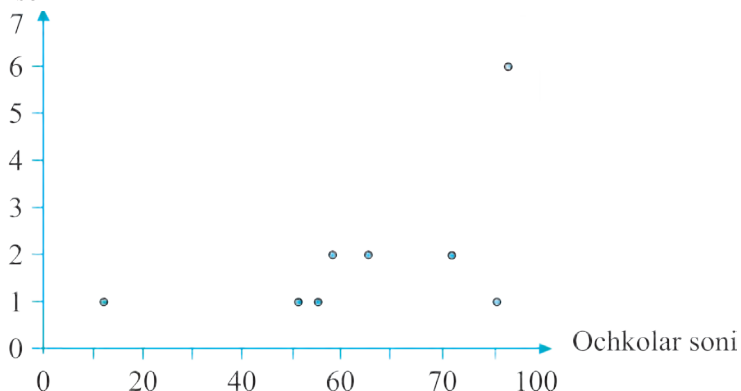
2-misol. Quyidagi jadvalda "Formula-1" poygasi qatnashchilarining bir mavsumda erishgan natijalari ko'rsatilgan:

Poygachi	Yutgan bosqichlar soni	Ochkolar soni	O‘rin
M.Shumaxer	6	93	1
K.Raykonen	1	91	2
X.P.Montoyya	2	82	3
R.Barikello	2	65	3
R.Shumaxer	2	58	5
F.Allonso	1	55	6
D.Kultxart	1	51	7
D.Fizikella	1	12	12

G‘alaba qozongan etap (bosqich)lar soni bilan, barcha bosqichlarda to‘plangan ochkolar orasida bog‘lanish bormi?

△ Sochilish diagrammasini yasaymiz:

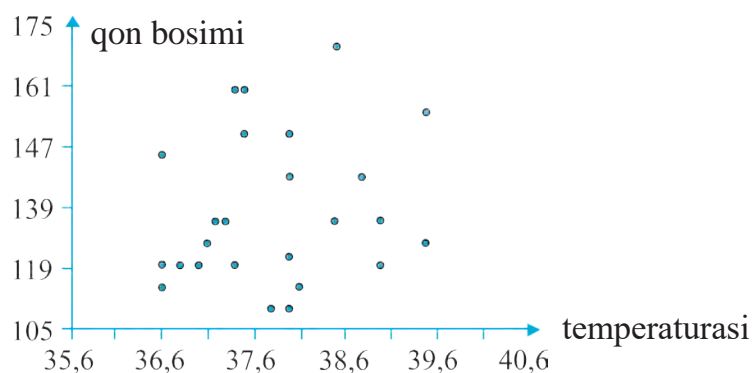
Yutgan bosqichlar soni



Diagrammadan ko‘rinib turibdiki, faqat bitta bosqichda g‘alaba qozongan poygachilar ham ko‘p ochkolarni to‘plashi mumkin ekan. Masalan, Raykonen deyarli barcha bosqichlarda ikkinchi bo‘lib kelib, jami 91 ochko to‘plagan. Ikkita bosqichda g‘alaba qozonganlarning o‘rtacha ochkolari soni (taxminan 68 ochko) bitta bosqichda g‘alaba qozonganlarning o‘rtacha ochkolaridan (taxminan 52 ochko) ko‘proq.

G‘alaba qozongan bosqichlar soni bilan barcha bosqichlarda to‘plangan ochkolar orasida bog‘lanish bor bo‘lishi mumkin, ammo ko‘rsatilgan jadval asosida bunday qat‘iy xulosaga kelib bo‘lmaydi. ▲

3-misol. Insonning salomatligi ko‘pincha uning tanasi temperaturasi hamda arterial qon bosimiga bog‘liq. Kasalxonada 25 nafar bemorning shu ko‘rsatkichlari aniqlanib, mos sochilish diagrammasi qurildi:



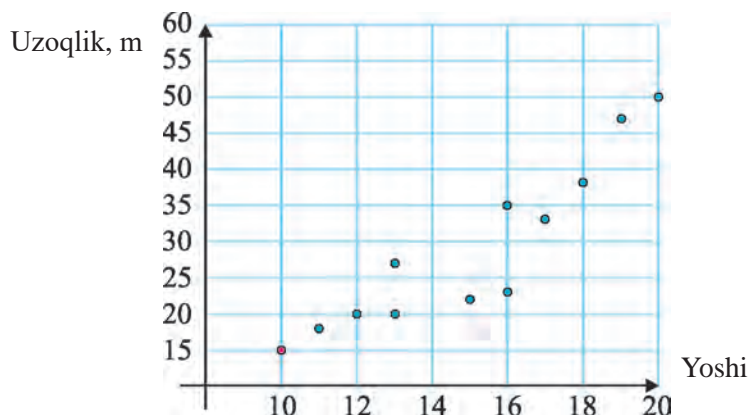
Bu diagrammada inson tana temperaturasi hamda arterial qon bosimi orasida hech qanday bog‘lanish yo‘qligi ko‘rinmoqda. Chindan ham, gripp bilan kasallangan inson tana temperaturasi yuqori bo‘lib, bunda arterial qon bosimi normal bo‘lishi mumkin. Shu bilan birga, arterial qon bosimi yuqori bo‘lgan insonlarning (gipertoniklar) hamda arterial qon bosimi past bo‘lgan insonlarning (gipotoniklar) tana temperaturasi normal bo‘lishi mumkinligi ma’lum.

4-misol. Maktab musobaqasida yosh sportchilar granatani uzoqqa uloqtirishda bellashdilar. Quyida ularning natijalari ko‘rsatilgan:

Sportchi	A	B	C	D	E	F	G	H	I	G	K	L
Yoshi	12	16	16	18	13	19	11	10	20	17	15	13
Uzoqlik, m	20	35	23	38	27	47	18	15	50	33	22	20

Sportchilar ko‘rsatgan natijalar ularning yoshlariga bog‘liqmi?

Agar sportchining yoshi kattaroq bo‘lsa, uning natijasi yuqoriroq bo‘ladimi?



Sochilish diagrammasini yasaymiz:

Ikkita 13 yashar hamda ikkita 16 yashar sportchilar turli natijalarni ko‘rsatmoqda. 16 yashar bitta sportchi esa 13 yashar bitta sportchidan yomonroq natija ko‘rsatdi.

Shunga qaramasdan, umuman aytganda, sportchilar ko'rsatgan natijalari ularning yoshlariga bog'liq ekan. Shu bilan birga, sportchining yoshi kattaroq bo'lsa, uning natijasi yuqoriroq bo'lishi kuzatilmoqda.

Mashqlar

47. (1; 2), (2; 2), (3; 2), (3; 4), (4; 5), (5; 6), (4; 3), (4; 4), (6; 6)

nuqtalar bo'yicha sochilish diagrammasini yasang. Birinchi koordinata o'sganda, ikkinchi koordinata ham o'sadi, degan umumiy xulosaga kela olamizmi?

48. (1; 2), (2; 3), (3; 3), (3; 4), (3; 2), (4; 3), (4; 4), (5; 2), (6; 3)

nuqtalar bo'yicha sochilish diagrammasini yasang. Birinchi koordinata o'sganda, ikkinchi koordinata kamayadi, degan umumiy xulosaga kela olamizmi?

49. 12 nafar bola tanlanib, ularning bo'ylari va vaznlari o'lchandi. Natijada quyidagi jadval hosil bo'ldi:

Bo'yi, cm	165	177	161	162	170	176	177	164	166	161	169	159
Vazni, kg	53	67	45	53	60	62	58	60	62	55	55	49

Sochilish diagrammasini yasang. Inson bo'yi va vazni orasida bog'lanish bormi?

50. Konkida figurali uchishda sportchilarga ikkita baho qo'yiladi: texnika va artistik mahorat uchun.

Quyida bir hakamning bir nechta sportchiga qo'ygan ballari jadvali keltirilgan:

Texnika	165	177	161	162	170	176	177	164	166	161	169	159
Mahorat	4,5	4,2	4,6	4,5	5,1	6,2	5,2	5,6	5,1	5,6	5,9	5,8

Sochilish diagrammasini yasang. Texnika va artistik mahorat orasida qandaydir bog'lanish bormi?

51. O'g'il bolalar musobaqasida ishtirokchilar uzunlikka sakrash va 60 m masofaga yugurishda bellashdilar. Quyida ularning natijalari ko'rsatilgan:

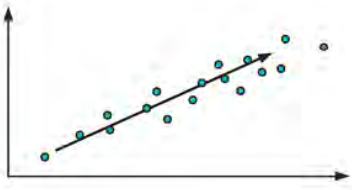
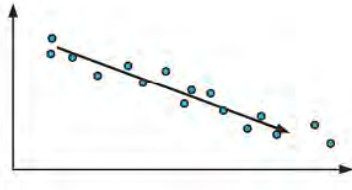
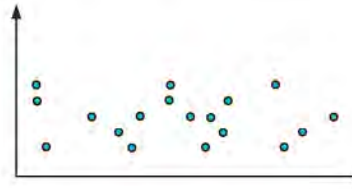
Sakrash, cm	180	194	190	215	210	170	175	202	205	195	205	200	190	186
Yugurish, s	10,8	10,2	10,6	9,5	10,2	11,0	11,6	10,4	10,0	11,0	9,8	10,6	10,8	10,7

Sochilish diagrammasini yasang. Uzunlikka sakrash hamda 60 m masofaga yugurish orasida qandaydir bog'lanish bormi?

Sochilish diagrammalarining ba'zi xossalari aytib o'tamiz.

1) Bogʻlanishning yoʻnalishi

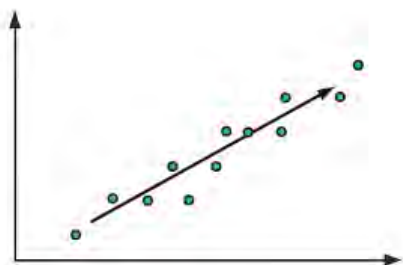
Bunda uch hol kuzatilishi mumkin:

Sochilish diagrammasining koʻrinishi	Izoh
	Bu holda bogʻlanish mavjud boʻlib, unga musbat bogʻlanish deyiladi. Bunday holatlarda birinchi maʼlumotlar qatoridagi belgi oʻssa, ikkinchi maʼlumotlar qatoridagi belgi ham oʻsadi.
	Bu holda bogʻlanish mavjud boʻlib, unga manfiy bogʻlanish deyiladi. Bunday holatlarda birinchi maʼlumotlar qatoridagi belgi oʻssa, ikkinchi maʼlumotlar qatoridagi belgi kamayadi.
	Bu holda bogʻlanish mavjud emas.

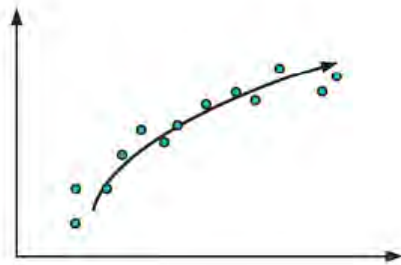
2) Bogʻlanishning chiziqiligi

Bu xossa mos nuqtalarning qandaydir toʻgʻri chiziq yaqinida joylashish darajasini ifodalaydi.

Chizikli bogʻlangan

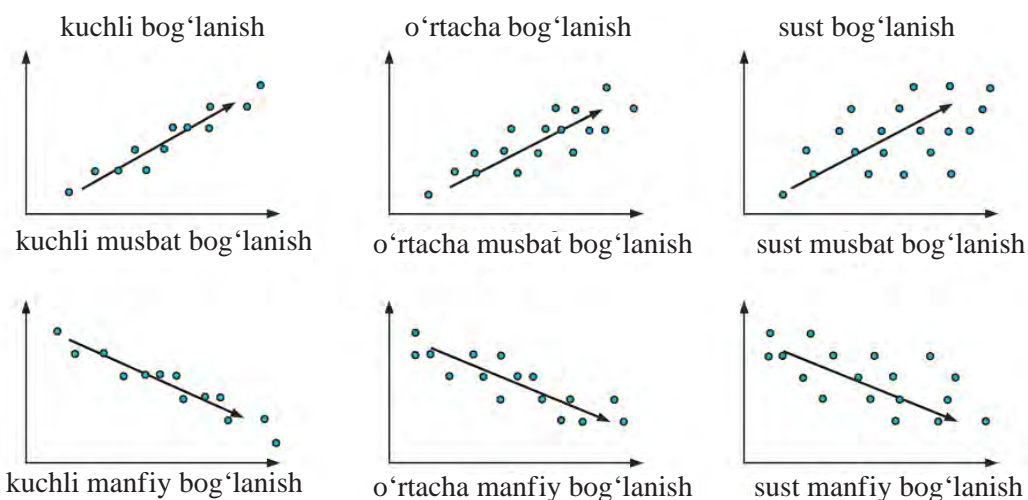


Chizikli bogʻlanmagan



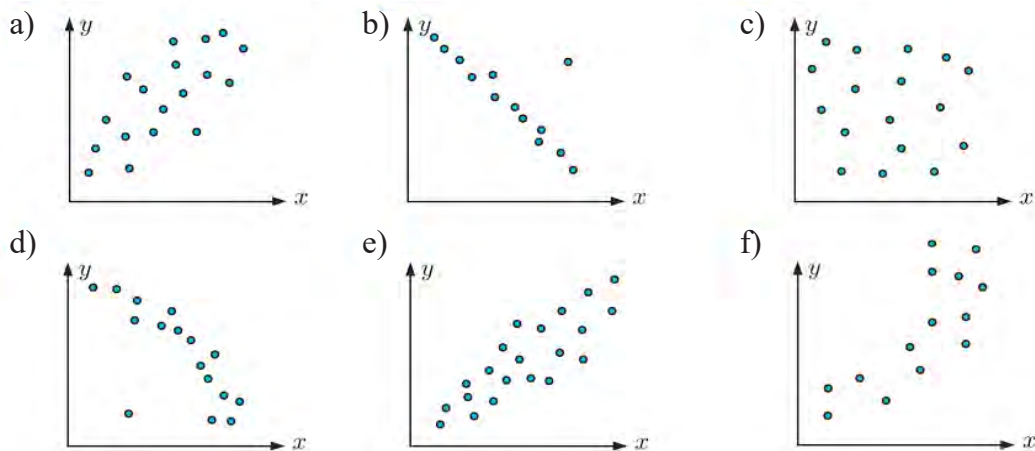
3) Chizikli bogʻlanishning turgʻunligi

Bu xossa birinchi maʼlumotlar qatoriga qarab, ikkinchi maʼlumotlar qatoridagi belgining oʻzgarishi haqida xulosa chiqarishimiz (prognoz qilishimiz)ga imkon beradi.



Mashqlar

52. Quyidagi sochilish diagrammalariga qarab, xossalari aniqlang.



Ikkita tur ma’lumotlar o‘rtasidagi bog‘liqlik haqida xulosa chiqaring.

53. Quyida ikki nafar hakamning bir nechta sportchiga qo‘ygan ballari keltirilgan:

Sportchi	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
1-hakam	5	6.5	8	9	4	2.5	7	5	6	3
2-hakam	6	7	8,5	9	5	4	7.5	5	7	4.5

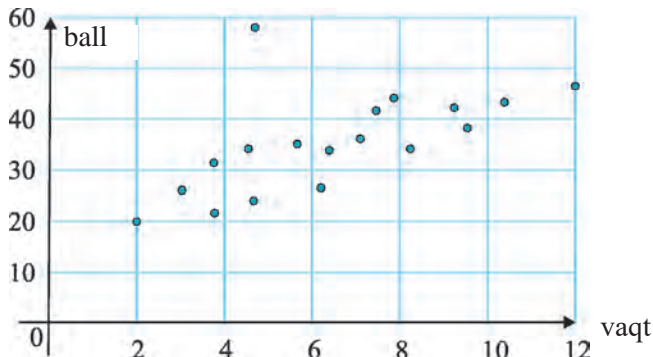
Sochilish diagrammasini yasang. Hakamlar qo‘ygan ballar o‘rtasida bog‘liqlik bormi? Agar bor bo‘lsa, uni tadqiq qiling .

54. Quyida o‘quvchilarning ona tili va matematika fanlaridan bajargan test natijalari keltirilgan:

O'quvchi	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Ona tili	64	67	69	70	73	74	77	82	84	85
Matematika	85	82	80	82	72	71	70	71	62	66

Sochilish diagrammasini yasang. O'quvchi matematikani yaxshi bilsa, ona tilini ham yaxshi biladimi?

55. Quyidagi diagrammada o'quvchilar matematikadan bajargan test natijalari va shu testga tayyorlanish vaqtlari ko'rsatilgan. O'quvchi testga qancha ko'p vaqt tayyorlansa, uning natijasi yaxshiroq bo'ladimi?



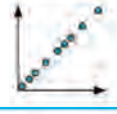



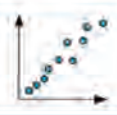
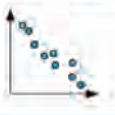






Chiziqli bog'lanish darajasini aniqlash. x_1, x_2, \dots, x_n va y_1, y_2, \dots, y_n ma'lumotlar qatorlari orasidagi chiziqli bog'lanishning darajasini aniqlashda **korrelyatsiya koeffitsiyenti** (ing. correlation – bog'lanish) tushunchasidan foydalaniladi.

Bu koeffitsiyent quyidagicha aniqlanadi:
$$r = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x - \bar{x})^2 \sum (y - \bar{y})^2}}$$
 Bu yerda \bar{x}, \bar{y} – berilgan ma'lumotlar qatorlarining o'rta qiymatlari, \sum – yig'indi belgisi.

Korrelyatsiya koeffitsiyentining xossalarini keltiramiz:

- 1) r koeffitsiyentning qiymatlari $[-1; 1]$ kesmaga tegishli.
- 2) r koeffitsiyent **ishorasi** bog'lanishning **yo'nalishini** belgilaydi, ya'ni
 - agar r **musbat** bo'lsa, u holda berilgan ma'lumotlar qatorlari **musbat** bog'lanishda bo'ladi;
 - agar r **manfiy** bo'lsa, u holda ma'lumotlar qatorlari **manfiy** bog'lanishda bo'ladi;
- 3) r koeffitsiyent qiymati bog'lanishning **turg'unligini** belgilaydi, bunda
 - agar $r = \pm 1$ bo'lsa, u holda berilgan ma'lumotlar qatorlari chiziqli bog'langan bo'ladi.
 - agar $r = 0$ bo'lsa, u holda ma'lumotlar qatorlari **chiziqli bog'lanmagan** bo'ladi;

Quyidagi jadvalda r koeffitsiyent qiymatlariga qarab bog‘lanish turlari keltirilgan:

$r = 1$	musbat chiziqli bog‘lanish		$r = -1$	manfiy chiziqli bog‘lanish	
$0,95 \leq r < 1$	juda kuchli musbat bog‘lanish		$-1 < r \leq -0,95$	juda kuchli manfiy bog‘lanish	
$0,87 \leq r < 0,95$	kuchli musbat bog‘lanish		$-0,95 < r \leq -0,87$	kuchli manfiy bog‘lanish	
$0,5 \leq r < 0,87$	o‘rtacha musbat bog‘lanish		$-0,87 < r \leq -0,5$	o‘rtacha manfiy bog‘lanish	
$0,1 \leq r < 0,5$	sust musbat bog‘lanish		$-0,5 < r \leq -0,1$	sust manfiy bog‘lanish	
$0 \leq r < 0,1$	chiziqli bog‘lanish mavjud emas		$-0,1 < r \leq 0$	chiziqli bog‘lanish mavjud emas	

Ko‘rinib turibdiki, r koeffitsiyent sochilish diagrammasidagi $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, ..., $(x_n; y_n)$ nuqtalar qandaydir to‘g‘ri chiziqqa naqadar yaqin ekanligini belgilaydi.

Korrelyatsiya koeffitsiyentni hisoblash uchun ma’lumotlar asosida jadval tuzish maqsadga muvofiq.

7-misol. Fermer yetishtiriladigan paxta g‘o‘zasi o‘shish tezligini solingan o‘g‘it miqdori bilan bog‘liqligini o‘rganmoqchi. U daladan to‘rtta A, B, C, D g‘o‘za ajratib, har biriga har xil miqdorda o‘g‘it soldi va paxta g‘o‘zasining kunlik o‘shishini yozib oldi (jadvalga qarang):

G‘o‘za	O‘g‘it miqdori (g)	Kunlik o‘shish (mm)
A	1	3
B	2	3
C	4	6
D	5	8

Olingan ikki tur ma’lumotlar orasidagi bog‘lanishni tadqiq qiling.

△ Jadvalni to‘ldiramiz:

x	y	$x - \bar{x}$	$y - \bar{y}$	$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$	$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$
1	3	-2	-2	4	4	4
2	3	-1	-2	2	1	4
4	6	1	1	1	1	1
5	8	2	3	6	4	9
Jami:	12	20		13	10	18

Bu yerda $\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{12}{4} = 3$, $\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{20}{4} = 5$.

Jadvaldan foydalanib, korrelyatsiya koeffitsiyentini hisoblaymiz:

$$r = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x - \bar{x})^2 \sum (y - \bar{y})^2}} = \frac{13}{\sqrt{10 \cdot 18}} \approx 0,969.$$

Demak, g‘o‘zaning o‘shish tezligi solingan o‘g‘it miqdori bilan juda kuchli musbat bog‘lanishda ekan. ▲

Eslatma. Ma‘lumotlar qatorning hajmi katta bo‘lganida korrelyatsiya koeffitsiyentini topish hisoblash vositalari yordamida amalga oshiriladi.

8-misol. Bir guruh sportchilarning vaznlari va yugurishdagi maksimal (eng katta) tezliklari o‘lchandi:

Vazn, x (kg)	85	60	78	100	83	67	79	62	88	68
Maksimal tezlik, y (km/h)	26	29	24	17	22	30	25	24	19	27

Olingan ikki tur ma‘lumotlar orasidagi bog‘lanishni tadqiq qiling.

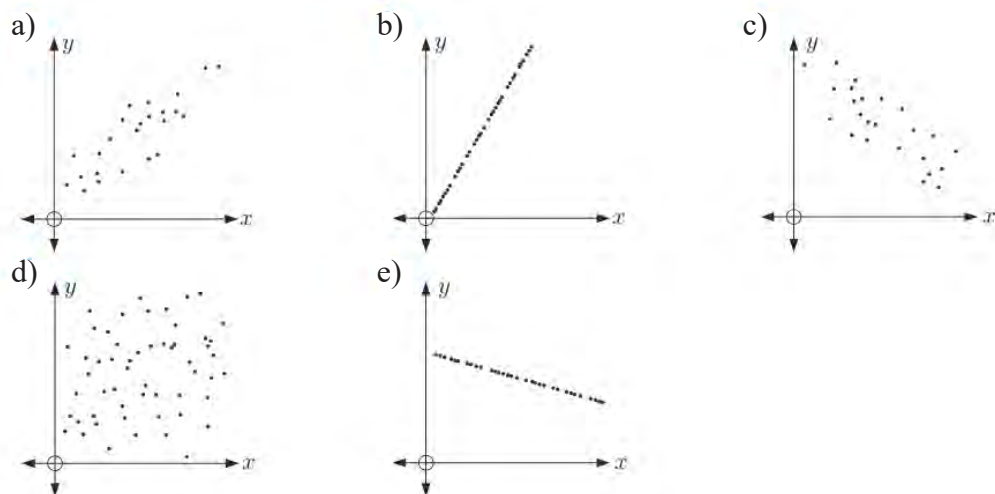
△ Berilgan ma‘lumotlarni Microsoft Excel jadvaliga kiritib, korrelyatsiya koeffitsiyentini hisoblash uchun bo‘sh katakka KOPPEJ(A2:A11; B2:B11) funksiyasini kiritamiz. Natijada quyidagiga ega bo‘lamiz:

	A	B	C
	Vazn x (kg)	Maksimal tezlik y (km/h)	
1			
2	85	26	KOPPEJ(A2:A11;B2:B11) funksiya yordamida hisoblangan korrelyatsiya koeffitsiyenti -0.813 ga teng.
3	60	29	
4	78	24	
5	100	17	
6	83	22	
7	67	30	
8	79	25	
9	62	24	
10	88	19	
11	68	27	

$r \approx -0,813$ hamda $-0,87 < r \leq -0,5$ bo'lgani uchun sportchilar vaznlari va ularning yugurishdagi maksimal tezliklari o'rtacha manfiy bog'lanishda ekan.

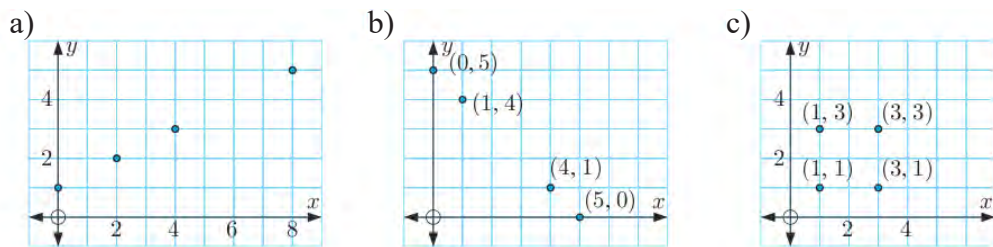
Mashqlar

56. Keltirilgan sochilish diagrammalariga korrelyatsiya koeffitsiyentining qaysi qiymatlari mos keladi?



57*. $r = \frac{\sum(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x - \bar{x})^2 \sum(y - \bar{y})^2}}$ formuladan foydalanib, sochilish diagram-

maları uchun korrelyatsiya koeffitsiyentini toping:



58*. Jadvalda mahalladagi bolalarning sog'lig'ini tekshirish maqsadida shifokorlar tashrifi haqidagi ma'lumotlar keltirilgan:

Yoshi	2	5	7	5	8
Shifokor tashrifi soni	10	6	5	4	3

- Sochilish diagrammasini yasang.
- Korrelyatsiya koeffitsiyentini hisoblang. Natijani Microsoft Excel jadvali yordamida tekshiring.
- Bolalar yoshi bilan shifokorlar tashrifi qanday bog'lanishda?

Tadqiqot uchun masala. Fermer no‘xat yetishtirish uchun yangi o‘g‘itni ishlatmoqchi va uning samaradorligini aniqlamoqchi. Buning uchun u ikkita kichik maydonga bir xil nav no‘xatni ekib, birinchisiga an’anaviy o‘g‘itni, ikkinchisiga esa yangi o‘g‘itni soldi.

Hosil yetilgandan so‘ng u ikki daladan tasodifiy ravishda 150 tadan dukkakni tanlab, har biridagi no‘xat donlarini sanab chiqdi va natijalarni yozdi:

An’anaviy o‘g‘it solingan dala:

4	6	5	6	5	6	4	6	4	9	5	3	6	8	5	4	6	8	6	5	6	7	4	6	5	2	8	6	5	6	5	5	5	4	4	4	6	7	5	6
7	5	5	6	4	8	5	3	7	5	3	6	4	7	5	6	5	7	5	7	6	7	5	4	7	5	5	5	6	6	5	6	7	5	8	6	8	6	7	6
6	3	7	6	8	3	3	4	4	7	6	5	6	4	5	7	3	7	7	6	7	7	4	6	6	5	6	7	6	3	4	6	6	3	7	6	7	6	8	6
6	6	6	4	7	6	6	5	3	8	6	7	6	8	6	7	6	6	6	8	4	4	8	6	6	2	6	5	7	3										

Yangi o‘g‘it solingan dala:

6	7	7	4	9	5	5	8	9	8	9	7	7	5	8	7	6	6	7	9	7	7	7	8	9	3	7	4	8	5	10	8	6	7	6	7	5	6	8	
7	9	4	4	9	6	8	5	8	7	7	4	7	8	10	6	10	7	7	9	7	7	8	6	8	6	8	7	4	8	6	8	7	3	8	7	6	9	7	
6	9	7	6	8	3	9	5	7	6	8	7	9	7	8	4	8	7	7	7	6	6	8	6	3	8	5	8	7	6	7	4	9	6	6	6	8	4	7	8
9	7	7	4	7	5	7	4	7	6	4	6	7	7	6	7	8	7	6	6	7	8	6	7	10	5	13	4	7	11										

Har bir dala uchun:

- 1) chastotalar bo‘yicha ma’lumotlarni guruhlang;
- 2) chiziqli diagrammalarni yasang;
- 3) modani, medianani va o‘rtacha qiymatlarni toping va ma’nosini tushuntiring;
- 4) ikkala dala uchun olingan xulosalarni taqqoslang.



Yozma nazorat ishi namunasi

5 ta firmada xodimlarning oylik maoshi (X) va bir yil mobaynida ishdan bo‘shaganlar soni (Y) quyidagi jadvalda keltirilgan:

X (ming so‘m)	1000	1500	2000	2500	3000
Y (nafar)	60	35	20	20	15

- 1) Bir yil davomida ishdan bo‘shagan xodimlarning o‘rtacha maoshi qancha bo‘lgan?
- 2) X va Y ma’lumotlar qatorlari orasidagi bog‘lanishni tahlil qiling. Xulosa chiqaring.

Radiodan yoki televizordan “ob-havo ma’lumoti” berilganda, ba’zan, “... ertaga qisqa muddatli yomg‘ir yog‘ishi mumkin”, “ertaga ... viloyatda momaqaldiraq bo‘lib, yomg‘ir yog‘ish ehtimoli bor”, degan so‘zlarni eshitib qolamiz. Ob-havo ma’lumotida ertaga yomg‘ir albatta yog‘adi (ertaga yomg‘ir yog‘ish hodisasi albatta ro‘y beradi) deyilmayapti, balki uning yog‘ishi mumkinligi (demak, yog‘masligi ham mumkinligi) aytilyapti, xolos. Yomg‘ir yog‘ish hodisasining ro‘y berishi son jihatdan, miqdoran, 30% mi? 50% mi? 95% mi? “Ertaga” – yomg‘ir yog‘ishiga bizning ishonchimizni son bilan o‘lchash mumkinmi? degan savolni qo‘yish tabiiy.

Shu bilan birga, “tavakkaliga 10 ta lotereya chiptasi olgandim, bir emas, ikkitasiga yutuq chiqdi-ya!”, “to‘satdan shu voqea sodir bo‘lib qoldi”, “tajriba uchun 100 ta urug‘ qadagandim, shundan 96 tasi unib chiqibdi” kabi gaplarni eshitgansiz, albatta. Ehtimolliklar nazariyasining muhim tushunchalaridan biri – tajriba. Biz “tajriba” (eksperiment, sinov)ni juda keng ma’noda tushunamiz.

1) Futbol o‘yinida hakam 11 metrli jarima to‘pini belgiladi. Hamma hayajonda. “Xo‘sh, to‘pni tepishga shaylanib turgan o‘yinchi uni darvozaga kirita oladimi yoki yo‘qmi? Shu imkoniyat amalga oshadimi, ro‘yobga chiqadimi yoki boy beriladimi? Qaysi bir hodisa ro‘y beradi? Buni biz muqarrar ravishda, oldindan ayta olmaymiz. O‘yinchi to‘pni darvozaga kirita olishi ham mumkin, kirita olmasligi ham mumkin. Ammo, ma’lum bir ishonch, katta ehtimollik bilan “to‘p darvozaga kiritiladi” deyishimiz mumkin, chunki shunga o‘xshash hollarning ko‘pida to‘p darvozaga kiritilgan.

Futbol o‘yini ham – tajriba. Bu tajribada “qaysi komanda yutishi”, “o‘yin qanday natija bilan tugashi” kabi hodisalarni kuzatamiz, ammo tajriba – o‘yin natijasini avvaldan 100% ishonch bilan aytib bera olmaymiz. Bu tajribada biz “o‘yin yoki biror tarafning g‘alabasi bilan, yoki durang natija bilan tugashi muqarrar” deya olamiz, xolos.

2) Idishda (xaltada) radiuslari o‘zaro teng, massalari ham o‘zaro teng va bir xil materialdan yasalgan 10 ta shar bor. Ularning 5 tasi yashil, 5 tasi oq rangda. Idishdan, uning ichiga qaramasdan, sharlarni aralashtirib, bir dona shar olamiz. Olingan shar qanday rangda bo‘ladi? Idishdan shar olish ham – tajriba. Bu tajribada biz “olingan sharlarning rangi qahday”ligi hodisasini kuzatamiz. Ammo tajriba natijasini avvaldan ayta olmaymiz. Olingan shar oq rangli ham, yashil rangli ham bo‘lishi mumkin. Idishda oq va yashil rangli sharlar soni o‘zaro teng bo‘lgani uchun olingan sharning oq rangda yoki yashil rangda bo‘lish hodisasining imkoniyatlari barobar, bir xil. Bunday

hodisalarni *teng imkoniyatli hodisalar* deymiz.

3) Yoqlariga 1, 2, 3, 4, 5, 6 raqamlari yozilgan (yoki yoqlarida 1 ta, 2 ta, 3 ta, 4 ta, 5 ta, 6 ta “xoli” bor) kubni tashlashni ko‘raylik. Bu ham – tajriba. Tabiiyki, kub bir jinsli materialdan yasalgan bo‘lishi (yarmi metall, yarmi yog‘och emas!), tashlanganda havoda “yaxshi aylanishi” va tekis joyga tushishi kerak. Bu tajribada tashlangan kubning yuqori yog‘ida “qanday raqam paydo bo‘lishi” hodisasini kuzatamiz. Bunda 1, 2, 3, 4, 5, 6 raqamlaridan har birining paydo bo‘lishi imkoniyatlari bir xil, o‘zaro teng.

4) Futbol o‘yinida hakam o‘yin boshlanishidan avval “tanga tashlab”, o‘yinni qaysi taraf boshlashini aniqlaydi. “Tanga tashlash” tajribasida “raqam yozilgan tomon”, “gerbli tomon”ning paydo bo‘lishi, ro‘y berishi, chiqishi hodisalarini kuzatamiz. Bunda “raqamli” va “gerbli” tomonlarning chiqishi – teng imkoniyatli.

Tajribani, uning shartlarini o‘zgartirmay, ko‘p marta takrorlash mumkin, deb faraz qilamiz. Xususan, tanga yoki kubni ko‘p marta tashlash mumkin. Natijasi tasodifiy hodisa bo‘lgan tajribalarni o‘quvchining o‘zi ham ko‘plab topa oladi. Shunday qilib:

1) *“tajriba” tushunchasi nihoyatda keng qamrovli; har birimizning har kungi faoliyatimizning o‘zi ham tajriba;*

2) *tajriba ma‘lum shartlarda o‘tkaziladi (sharlarning radiuslari o‘zaro teng, massalari bir xilligi, idishdan aralastirib olinishi; tanga, kubning bir jinsli materialdan yasalganligi, tashlanganda havoda yaxshi aylanishi va hokazolar);*

3) *tajriba shart-sharoitlarini o‘zgartirmagan holda uni ko‘p marta, istalgancha takrorlash mumkin.*

1-ta‘rif. *Tajriba natijasida ro‘y berishi ham, ro‘y bermasligi ham mumkin bo‘lgan hodisa **tasodifiy hodisa** deyiladi.*

Kubni otganda 5 raqamining chiqishi, tanga tashlanganda gerbli tomon tushishi, idishdan olingan sharning oq rangda ekanligi – bularning hammasi tasodifiy hodisalaridir. Tasodifiy hodisalar, odatda, *A, B, C, ...* harflari bilan belgilanadi.

2-ta‘rif. *Tajriba natijasida har gal albatta ro‘y beradigan hodisa **muqarrar hodisa** deyiladi.*

Kubni tashlaganda 1 dan 6 gacha qandaydir raqamning paydo bo‘lishi muqarrar hodisa. Muqarrar hodisani *U* harfi bilan belgilaymiz.

3-ta‘rif. *Tajriba natijasida sira ham ro‘y bermaydigan hodisa **ro‘y berishi mumkin bo‘lmagan hodisa** deyiladi.*

Kubni tashlaganda 7 raqamining yoki 0 raqamining paydo bo‘lishi ro‘y berishi mumkin bo‘lmagan hodisadir. Ro‘y berishi mumkin bo‘lmagan

hodisani V harfi bilan belgilaymiz.

Tasodifiy hodisalar orasidagi bog‘lanishni o‘rganish, tasodifiylik olamini tadqiq qilish, uning qonuniyatlarini kashf qilish, bu qonunlarni, xulosalarni amaliyot masalalarini yechishga qo‘llash bilan ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fani shug‘ullanadi. Aziz Vatanimiz O‘zbekistonning buyuk olimlari Vsevolod Romanovskiy, Toshmuhammad Sarimsoqov, Sa‘di Sirojiddinov va ular yaratgan ilmiy maktabning chuqur tadqiqotlari jahonga mashhur.

Mashqlar

59. Savollarga javob bering:

- 1) “Tajriba” deganda nimani tushunasiz? Misollar keltiring.
- 2) Tasodifiy hodisa deb nimaga aytiladi?
- 3) Muqarrar hodisa ta’rifini ayting. Misollar keltiring.
- 4) Ro‘y berishi mumkin bo‘lmagan hodisa deb nimaga aytiladi? Misollar keltiring.

60. Tasodifiy, muqarrar, ro‘y berishi mumkin bo‘lmagan hodisalarga 4 tadan misol keltiring.

61. Quyidagi hodisalardan qaysi biri: tasodifiy, muqarrar, ro‘y berishi mumkin bo‘lmagan hodisa:

- 1) sotib olgan lotereyangiz yutuqli;
- 2) siz grossmeyster bilan shaxmat o‘ynab, uni yutasiz;
- 3) Quyosh Sharqdan chiqadi;
- 4) Quyosh Janubga botadi;
- 5) dushanbadan so‘ng chorshanba keladi;
- 6) berilgan sharoitlarda piyolani to‘nkarsangiz undagi suv to‘kilmaydi;
- 7) sportloto o‘yinida 8, 12, 17, 22, 29, 38 sonlari yutuqli bo‘ladi;
- 8) payshanbadan so‘ng juma keladi;
- 9) 20-iyul kuni Toshkentda yomg‘ir yog‘adi;
- 10) 10-mart kuni Farg‘onada yomg‘ir yog‘adi;
- 11) 1 dan 6 gacha raqamlangan o‘yin kubi tashlaganda 9; 0; 14 sonlari chiqadi.

62. Ikkita tanga baravar tashlandi. Bunda ro‘y berishi mumkin bo‘lgan barcha imkoniyatlarni (hodisalarni) yozib chiqing.

63. Ma’mura basketbol to‘riga (savatiga) 30 marta otgan to‘pidan 20 tasini, Manzura esa 28 marta otgan to‘pidan 18 tasini tushirdi. Kim merganroq?

64*. Ikkita kub baravar tashlandi. Kublarning yuqori yoqlarida paydo bo‘lishi mumkin bo‘lgan barcha imkoniyatlarni – sonlar juftligini yozib chiqing.

65*. Tanga 3 marta tashlandi. Bunda qanday imkoniyatlar bo‘lishi mumkin? Ularni yozib chiqing.

66. *A* va *B* tasodifiy hodisalarning ro‘y berish imkonini chamalang. Bunda “ehtimolligi (imkoniyati) ko‘proq”, “ehtimolligi kamroq”, “teng ehtimollik” so‘zlarini ishlatib:

1) *A*: kub tashlanganda 5 raqamining chiqishi; *B*: kub tashlanganda 5 raqamining chiqmasligi;

2) *A*: “Bunyodkor” futbol bo‘yicha O‘zbekiston chempioni bo‘ladi;

B: “Bunyodkor” futbol bo‘yicha jahon chempioni bo‘ladi;

3) *A*: ertaga payshanba; *B*: ertaga payshanba emas;

4) *A*: kub tashlanganda juft raqam chiqadi; *B*: kub tashlanganda toq raqam chiqadi;

5) *A*: 30-dekabr kuni qor yog‘adi; *B*: 10-iyul kuni Termizda havo temperaturasi 12° C bo‘ladi;

6) *A*: tanga tashlanganda raqam tomoni chiqadi; *B*: tanga tashlanganda raqam tomoni chiqmaydi.

67*. 3, 6, 7, 9 raqamlaridan ularni takrorlamasdan mumkin bo‘lgan barcha 4 xonali sonlarni tuzing. Bu sonlar ichida nechtasi: 1) 4 ga bo‘linadi; 2) 6 raqami bilan boshlanadi; 3) 7 raqami bilan tugaydi; 4) nechta holda toq raqamlar yonma-yon turadi? 5) 3 ga bo‘linadigan raqamlar yonma-yon turgan hollar nechta?

68. Ikkita kub baravar tashlandi. Ularning yuqori yoqlaridagi raqamlari yig‘indisi qanday sonlar bo‘lishi mumkin? 3 ta kub tashlanganda-chi?

69. “49 tadan 6 ta” sportloto chiptasida Muyassar 10, 11, 12, 13, 14, 15 sonlarini, Ma‘mura 7, 13, 19, 26, 31, 48 sonlarini belgiladi. Kimning yutish imkoniyati (ehtimolligi) ko‘proq deb o‘ylaysiz? Nima uchun?

70. 2, 3, 4 raqamlaridan, ularni takrorlamasdan mumkin bo‘lgan barcha uch xonali sonlarni tuzing. Nechta holda juft raqamlar yonma-yon joylashgan?

71. 1, 2, 3, 4 raqamlaridan, ularni takrorlamasdan mumkin bo‘lgan barcha to‘rt xonali sonlarni tuzing. Nechta holda toq raqamlar yonma-yon joylashgan?

Tasodifiy hodisaning ehtimolligi. Ikkita misol ko‘raylik.

1-misol. Idishda 10 ta shar bo‘lib, uning 1 tasi qora, 9 tasi oq rangda. Tasodifiy ravishda (tavakkaliga) bitta shar olamiz. Uning oq rangda bo‘lish imkoniyati ko‘pmi, qora rangda bo‘lish imkoniyati ko‘pmi? Oq rangda bo‘lish imkoniyati katta albatta, chunki idishda ular ko‘p. Idishdagi sharlarning ixtiyoriy bittasi olinishi mumkin. Bu tajribada ro‘y berishi mumkin bo‘lgan barcha imkoniyatlar soni 10 ta, ulardan 9 tasi olinadigan sharning “oq rangda bo‘lishi” hodisasiga qo‘l keladi, *qulaylik tug‘diradi*. Idishdan olinadigan sharning oq rangda bo‘lishiga ishonchimizni $\frac{9}{10}$ soni bilan o‘lchash tabiiy.

2-misol. Kubni tashlash tajribasida barcha imkoniyatlar soni 6 ta. Har bir raqamning paydo bo'lishiga faqat 1 ta imkoniyat bor. Masalan, 5 raqamining paydo bo'lishiga faqat 1 ta imkoniyat *qulaylik tug'diradi*.

Keltirilgan misollar tajriba natijasida kuzatilayotgan tasodifiy hodisaning ro'y berishini son bilan o'lchashga, ifodalashga yo'l ko'rsatadi.

Biz tajriba natijasida ro'y berishi mumkin bo'lgan hodisalar teng imkoniyatli bo'lgan holni qaraymiz, xolos. Tajriba natijasida ro'y berishi mumkin bo'lgan barcha imkoniyatlar soni n ta bo'lib, shundan k tasi tajribada kuzatilayotgan A hodisaga qulaylik tug'diruvchi imkoniyatlar bo'lsin.

Ta'rif. $\frac{k}{n}$ kasr son A tasodifiy hodisaning ro'y berish ehtimolligi deyiladi.

Bu ehtimollik $P(A)$ bilan belgilanadi (P – ing. *probability* – ehtimollik so'zining bosh harfi). Shunday qilib, ta'rifga ko'ra:

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{qulaylik tug'diruvchi imkoniyatlar soni}}{\text{barcha imkoniyatlar soni}}.$$

Bu formula *ehtimollikning klassik ta'rifi* deyiladi. Muqarrar hodisa uchun $k = n$ va $P(U) = \frac{n}{n} = 1$. Ro'y berishi mumkin bo'lmagan hodisa uchun

$k = 0$ va $P(V) = \frac{0}{n} = 0$. Bu ikkala hol istisno qilinsa, $\frac{k}{n}$ – to'g'ri kasrdan iborat bo'ladi.

Misollar

1) Tanga tashlanganda uning “gerbli tomoni chiqishi” hodisasining ehtimolligini toping. Bu hodisani G desak, $P(G) = \frac{1}{2}$, chunki barcha imkoniyatlar soni $n = 2$, gerb chiqishiga qulaylik tug'diruvchi imkoniyatlar soni $k = 1$.

2) Idishda 10 ta oq, 20 ta ko'k rangli sharlar bor. Tasodifiy ravishda olingan sharning oq rangda; ko'k rangda ekanligining ehtimolligini toping.

Bu misolda $n = 10 + 20 = 30$.

$$P(\text{oq rangli shar chiqishi}) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3};$$

$$P(\text{ko'k rangli shar chiqishi}) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}.$$

? Savol va topshiriqlar

- 1) Teng imkoniyatli hodisalar deganda nimani tushunasiz?
- 2) “Qulaylik tug'diruvchi imkoniyat” nima?
- 3) Ehtimollikning klassik ta'rifi nima?

Mashqlar

- 72.** 1000 ta mahsulotdan 20 tasi yaroqsiz. Sotib olingan mahsulotning yaroqsiz ekanligi ehtimolligini toping va uni protsentlarda ifodalang.
- 73.** Maktabda 800 ta bola o'qiydi. Shulardan 80 tasi a'lochi. Tasodifiy ravishda bir o'quvchi tanlandi. Uning a'lochi ekanligining ehtimolligini toping va uni protsentlarda ifodalang.
- 74.** Savatda 30 ta qizil olma va 20 ta nashvati nok bor. Savatdan tavakkaliga bir dona meva olindi. Uning: 1) nok; 2) olma; 3) yong'oq; 4) nok yoki olma ekanligining ehtimolligini toping.
- 75.** Idishda 15 ta shar bor, ularga 1, 2, 3, ..., 14, 15 sonlari yozilgan. Tasodifiy ravishda idishdan bitta shar olindi. Unda yozilgan sonning 7 ga; 10 ga; 5 ga; 3 ga; 2 ga bo'linish ehtimolligini toping.
- 76.** Tanga 2 marta tashlandi. Bunda ro'y berishi mumkin bo'lgan hodisalarning ehtimolliklarini toping va shunga mos jadval tuzing.
- 77*.** Tanga 3 marta tashlandi. Bunda ro'y berishi mumkin bo'lgan hodisalarning ehtimolliklarini toping va mos jadval tuzing.
- 78*.** Ikkita kub tashlandi. Ularning yuqori yoqlaridagi raqamlar yig'indisining: 2 ga, 3 ga, ..., 12 ga teng bo'lish ehtimolligini toping va jadvalni to'ldiring:

Raqamlar yig'indisi	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Paydo bo'lish ehtimolligi											

Ko'rsatma: $2=1+1$; $3=1+2=2+1$; $4=1+3=3+1=2+2$.

- 79*.** Idishda o'lchamlari bir xil 10 ta ko'k, 25 ta yashil, 15 ta qora rangli qalamlar bor. Ko'k rangli qalam albatta chiqishi uchun eng kam deganda idishdan bir yo'la nechta qalam olish kerak?
- 80.** Kubning yoqlari oq yoki yashil rangga bo'yalgan. Kubni tashlaganda oq rangli yoq chiqish ehtimolligi $\frac{1}{3}$ ga, yashil rangli yoq chiqish ehtimolligi esa $\frac{2}{3}$ ga teng. Kubning nechta yog'i oq, nechta yog'i yashil rangga bo'yalgan?
- 81.** Idishda o'lchamlari bir xil 18 ta ko'k, 15 ta qora, 17 ta qizil qalam bor. Idishdan tavakkaliga bir dona qalam olindi. Uning: 1) ko'k; 2) qizil; 3) qora rangda ekanligining ehtimolligini toping. Bu ehtimolliklarni qo'shing. Nima uchun yig'indi 1 ga teng chiqishini tushuntiring.
- 82.** Idishdagi sharlarning 40% i oq, $\frac{1}{3}$ qismi qora, qolganlari qizil rangda. Idishdan tavakkaliga bitta shar olindi. Olingan sharning qaysi rangda

bo‘lish ehtimolligi ko‘proq? Kamroq?

- 83.** 1) 6, 7, 8 raqamlaridan, ularni takrorlamasdan, 3 xonali sonlar tuzilgan. Juft raqamlarning yonma-yon joylashishi ehtimolligini toping. 2) 3, 4, 5 raqamlaridan, ularni takrorlamasdan, 3 xonali sonlar tuzilgan. Toq raqamlarning yonma-yon joylashishi ehtimolligini toping.
- 84.** 5 ta idishda sharlarning quyidagicha taqsimlanganligi ma’lum:
 birinchisida: 20 ta yashil, 60 ta oq; ikkinchisida: 30 ta yashil, 90 ta oq;
 uchinchisida: 18 ta yashil, 32 ta oq; to‘rtinchisida: 25 ta yashil, 75 ta oq;
 beshinchisida: oq, yashil, qora rangli sharlar teng miqdorda.
 Idishdan tavakkaliga olingan shar yashil bo‘lsa, Sizni yutuq kutadi.
 Shar olish uchun qaysi idishni tanlagan bo‘lardingiz?
- 85.** Hamidulla matematikadan 50 ta yozma ish variantlaridan 5 tasini yechishni bilmaydi. Yozma ishda unga bitta variant berildi. Hamidullaning shu variantni bilishi ehtimolligini toping va uni protsentlarda ifodalang.
- 86.** 100 000 ta lotoreya chiptasi o‘yinga qo‘yildi. Shuning 25 000 tasi yutuqli. Tavakkaliga olingan chiptaning: yutuqli bo‘lishi; yutuqli emasligi ehtimolligini toping va uni protsentlarda ifodalang.

Ehtimollikning statistik ta’rifi. Tanga tashlanganda gerbli tomoni tushishi

ehtimolligi $P(G) = \frac{1}{2}$ ekanini ko‘rdik. Bu tenglikni qanday tushunish kerak?

Ikkita teng imkoniyatli hodisa bo‘lsa, tajribalarda ular galma-gal chiqaveradi, masalan, tanga 100 marta tashlansa, shuning 50 tasida gerbli, 50 tasida raqamli tomoni chiqadi, degani emas.

Agar tanga tashlash tajribasini ko‘p marta takrorlasak, ularning *taqriban yarmida* tangananing gerbli tomoni chiqadi.

Tangananing gerbli tomoni tushgan tajribalar sonining umumiy tajribalar soniga nisbati $\approx \frac{1}{2}$ ga teng bo‘ladi – gerb chiqishi hodisasining ehtimolligi $\frac{1}{2}$ ga tengligini shunday tushunamiz. Chindan ham, “tanga tashlash” tajribasida olingan natijalar bu fikrni tasdiqlaydi:

1- jadval

Tajriba o‘tkazuvchilar	Tanga tashlashlar soni, n	“Gerb” chiqishi soni, μ	“Gerb” chiqish chastotasi, $\frac{\mu}{n}$
Fransuz olimi J.L.Byuffon	4040	2048	$\approx 0,5069$
Maktab o‘quvchilari	6000	2953	$\approx 0,4922$
Ingliz olimi K.Pirson	12000	6019	$\approx 0,5016$
Ingliz olimi K.Pirson	24000	12012	$\approx 0,5005$

Ehtimollikning klassik ta’rifiga ko‘ra, $P(G) = \frac{1}{2}$. Jadvaldan $\frac{\mu}{n}$

nisbatning $\frac{1}{2}$ ga taqriban tengligini ko‘ramiz:

$$\frac{\mu}{n} \approx \frac{1}{2} \quad (\mu - \text{“m’yu” yunon harfi}).$$

Biror hodisasining ro‘y berish ehtimolligini tajriba yo‘li bilan topish uchun quyidagicha ish tutiladi:

1) tajribani bir xil shart-sharoitlarda, aytaylik, n marta o‘tkazishadi. Kuzatilayotgan hodisaning mohiyatiga qarab, masalan, $n = 10; 20; 50; 100; 1000; 10\,000; 50\,000, \dots$ bo‘lishi mumkin;

2) bizni qiziqtirayotgan A hodisasining ro‘y berganini (yoki ro‘y bermaganini) har tajribada kuzatib, yozib, sanab borishadi. Odatda, quyidagi belgilashdan foydalaniladi (jadvalga qarang):

Kuzatilayotgan A hodisasining ro‘y berish soni	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Shu songa mos belgi	•	• •	•• ••	••• •••	•••• ••••	••••• •••••	•••••• ••••••	••••••• •••••••	•••••••• ••••••••	••••••••• •••••••••	•••••••••• ••••••••••

Ro‘y berishlar soni 10 tadan ortiq bo‘lsa, bu belgilash takrorlanadi. Sanash uchun bundan boshqa belgilar ham ishlatilishi mumkin;

3) o‘tkazilgan n ta tajribada A hodisasining ro‘y berishlari soni sanab chiqiladi. Bu sonni μ deb belgilaylik;

4) $\frac{\mu}{n}$ nisbat tuziladi, bu nisbat A hodisasining n ta tajribada ro‘y berish chastotasi deyiladi.

Tajribalar ko‘p marta o‘tkazilgan bo‘lsa, ya’ni n katta son bo‘lsa, $\frac{\mu}{n}$ nisbat biror p son atrofida “tebrana” boshlaydi. Bu p son $\frac{\mu}{n}$ ga nihoyatda yaqin bo‘ladi:

$$\frac{\mu}{n} \approx p.$$

Ana shu p son A hodisasining ehtimolligi deb olinadi. Bunday usulda aniqlangan ehtimollikni *statistik ehtimollik* deyiladi.

1- jadvaldan 2- jadvalni hosil qilamiz:

2- jadval

$\frac{\mu}{n}$	Klassik ta’rifga ko‘ra $p=P(G)=0,5$	Farqi, $\left \frac{\mu}{n} - p \right $	Farqi, % larda
0,5069	0,5	0,0069	1,38
0,4922	0,5	0,0078	1,56
0,5016	0,5	0,0016	0,32
0,5005	0,5	0,0005	0,1

Tajribalar soni orta borgan sari $\frac{\mu}{n}$ nisbat bilan $p=0,5$ orasidagi farq kamayib borayotganini ko‘ramiz. Shunday qilib, tanga tashlanganda G (gerbli to-

mon) chiqishining ehtimolligini tajriba yo‘li bilan aniqladik. Tajribamiz soni n xulosa chiqarish uchun yetarli. Tanga tashlaganda gerb chiqishlari soni μ ning tajribalarning umumiy soni n ga nisbati $\frac{\mu}{n}$ chastota $\frac{1}{2}$ atrofida “tebrana-yapti”. Demak, tanga tashlaganda uning gerbli tomoni chiqishi ehtimolligini $\frac{1}{2}$ deb olish tabiiy.

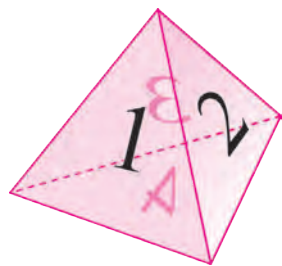
? Savol va topshiriqlar

1. “Kub tashlaganda 4 raqamining chiqish ehtimolligi $\frac{1}{6}$ ga teng”, degan jumlaning qanday tushunasiz?
2. Tajribada kuzatilayotgan hodisaning ro‘y berish chastotasi nima?
3. Ehtimollikning statistik ta‘rifi nima?

Mashqlar

87. “Har 150 ta lotereya chiptasiga bitta yutuq to‘g‘ri kelarkan” degan xabarni eshitib, Akmal 150 ta bilet sotib oldi va “Men o‘yinda albatta yutaman”, deb yuribti. Uning fikri to‘g‘rimi? Nima uchun?
88. Po‘lat “49 tadan 6 ta” sportloto o‘yini chiptasida 9, 17, 23, 31, 39, 43 sonlarini belgilagan edi, unga yutuq chiqdi. “Keyingi o‘yinlarda ham men faqat shu sonlarni belgilayman, bu sonlar yutuq keltirarkan”, – dedi u. Uning fikri to‘g‘rimi? Nima uchun?
- 89*. Idishda 1 dan 50 gacha (1 dan 1000 gacha) natural sonlar yozilgan 50 ta (1000 ta) bir xil qog‘ozchalar bor. Ularni aralashtirib, yozuviga qaramasdan – tavakkaliga bitta qog‘ozcha olindi. Undagi sonning oxirgi raqami: 0; 5; 6; 7; 9 bo‘lishining ehtimolligini toping. Xulosa chiqaring.
90. Idishda 21 dan 100 gacha (100 ham kiradi) natural sonlar yozilgan bir xil qog‘ozchalar bor. Tavakkaliga bitta qog‘ozcha olindi. Undagi sonning: 30 ga, 40 ga, 7 ga, 11 ga, 9 ga bo‘linish ehtimolligini toping.
- 91*. Yog‘ochdan yasali, ko‘k rangga bo‘yalgan kubning qirrasiz uzunligi 40 cm ga teng. Kubning qirralari teng 20 bo‘lakka bo‘lindi va mos bo‘linish nuqtalari kesmalar bilan birlashtirildi. Kub shu kesmalar bo‘yicha ajratildi va mayda kubchalarga ajratildi. Ular idishga solinib, yaxshilab aralashtirildi.
Quyidagi hodisalarning ehtimolligini toping. Tavakkaliga olingan kubning: 1) uchta yog‘i bo‘yalgan; 2) ikkita yog‘i bo‘yalgan; 3) bitta yog‘i bo‘yalgan; 4) hech bir yog‘i bo‘yalmagan.
92. Idishda 251 dan 1000 gacha natural sonlar yozilgan bir xil qog‘ozchalar bor. Tavakkaliga bitta qog‘ozcha olindi. Undagi sonning: 500 ga; 300 ga; 200 ga; 75 ga; 25 ga; 10 ga; 9 ga; 3 ga; 2 ga; 80 ga bo‘linish ehtimolligini toping.

93. Kartondan 4 ta muntazam uchburchak qirqib oling. Ularni bir-biriga tomonlari bo‘ylab yopishtirib, rasmdagidek shaklni yasang. Bu shakl muntazam to‘rtyoqlik – tetraedr deyilishini bilasiz. Uning yoqlariga 1, 2, 3, 4 raqamlarini yozing. Tetraedrni 100 marta (ko‘proq bo‘lsa, yana yaxshi) tashlang, bunda asosdagi paydo bo‘lgan raqamning takrorlanishini hisoblab boring. Jadvalni to‘ldiring.



Raqamlar	Asosdagi raqamlar takrorlanishini sanash	Takrorlanishlar soni	Paydo bo‘lish chastotasi
1			
2			
3			
4			

Tadqiqot uchun. O‘zbek yozuvchisining biror badiiy asarini olib, undagi bir bo‘g‘inli, ikki bo‘g‘inli, uch bo‘g‘inli, ... so‘zlarning uchrash chastotasini toping. Buning uchun asardagi, masalan, 30 betdagi (ko‘proq bo‘lsa, yana-da yaxshi!) barcha so‘zlarni sanang – ular n ta deylik. Endi shu betlardagi barcha 1, 2, 3, ... bo‘g‘inli so‘zlarni sanang. Ular, mos ravishda, k_1, k_2, k_3, \dots ta deylik. So‘ngra $\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}, \frac{k_3}{n}, \dots$ nisbatlarni tuzing.

Ular asarning tajriba uchun olingan betlaridagi 1, 2, 3, ... bo‘g‘inli so‘zlarning uchrash chastotasi bo‘ladi. Bu chastotalarga mos ustunli va doiraviy diagrammalar tuzing. Chastotalarni verguldan keyin 3 xona aniqligida o‘nli kasrlarda va foizlarda ifodalang.

Amaliy ish. Gugurt qutisi tashlanganda rasmda ko‘rsatilgan har bir holatning ro‘y berish ehtimolligini baholang, ya‘ni ro‘y berish chastotasini toping. Buning uchun gugurt qutisini 100 marta (ko‘p bo‘lsa, yana yaxshi) tashlang va jadvalni to‘ldiring.



Holatlar	Holatlar takrorlanishini sanash	Takrorlanishlar soni	Ro‘y berish chastotasi
1			
2			
3			

Tasodifiy hodisalarga oid bir nechta tushunchalar kiritamiz.

1) Agar A hodisa ro‘y berganda B hodisa ham ro‘y bersa, A hodisa B hodisani *ergashtiradi* deymiz va buni $A \subset B$ (yoki $B \supset A$) kabi yozamiz.

1-misol. $A = \{\text{kub tashlaganda 2 sonining chiqishi}\},$
 $B = \{\text{kub tashlanganda juft sonlarning chiqishi}\}.$



Ravshanki, $A \subset B$.

2-misol. $A = \{\text{yomg‘ir sharros yog‘yapti}\},$
 $B = \{\text{Osmonni bulut qoplagan}\}.$

Bu hodisalar uchun $A \subset B$ bo‘lishi ayon.

2) Agar A hodisa B hodisani va B hodisa A hodisani ergashtirsa, ya‘ni $A \subset B$ va $B \subset A$ bo‘lsa, A va B hodisalarni *tengkuchli* deymiz va $A = B$ deb yozamiz.

3-misol. $A = \{\text{kub tashlanganda 3 yoki 6 sonlaridan birining paydo bo‘lishi}\},$
 $B = \{\text{kub tashlanganda 3 ga bo‘linadigan sonning paydo bo‘lishi}\}.$

Bu hodisalar uchun $A = B$ ekani ravshan.

3) A va B hodisalarining ikkalasining bir vaqtda ro‘y berish hodisasi A va B hodisalarining *ko‘paytmasi* deyiladi va AB (yoki $A \cap B$) kabi belgilanadi.

4-misol. $A = \{\text{kub tashlanganda 2, 3, 4 sonlaridan birining chiqishi}\},$
 $B = \{\text{kub tashlanganda juft sonlarning paydo bo‘lishi}\}.$

Bu holda $AB = \{\text{kub tashlanganda 2 va 4 sonlaridan birining chiqishi}\}.$

4) A va B hodisalaridan hech bo‘lmaganda bittasining ro‘y berishidan iborat hodisani A va B hodisalarining *yig‘indisi* deymiz va $A+B$ (yoki $A \cup B$) kabi belgilaymiz.

5-misol. $A = \{\text{kub tashlanganda 1, 3 sonlaridan birining chiqishi}\},$
 $B = \{\text{kub tashlanganda 1, 2, 6 sonlaridan birining chiqishi}\}.$

Bu holda $A+B = \{1, 2, 3, 6\}.$

5) A hodisa ro‘y bersa-yu, ammo B hodisasi ro‘y bermasa, bunday hodisani A va B hodisalarining *ayirmasi* deymiz va $A-B$ kabi belgilaymiz.

6-misol. $A = \{\text{kub tashlanganda } 1, 4, 6 \text{ sonlaridan birining chiqishi}\},$
 $B = \{\text{kub tashlanganda } 1, 3, 4, 5 \text{ sonlaridan birining chiqishi}\}.$

Kub tashlanganda 6 soni chiqdi, ya'ni A hodisa ro'y berdi deylik, ammo B hodisa ro'y bermadi. Bu holda $A-B$ hodisa ro'y bergan bo'ladi.

Agar $A+\bar{A}=U$, $A\bar{A}=V$ shartlar bajarilsa, A va \bar{A} hodisalar *qarama-qarshi* hodisalar deyiladi.

7-misol. $A = \{\text{kub tashlanganda juft sonning chiqishi}\}.$ $\bar{A} = \{\text{kub tashlanganda toq sonning chiqishi}\}.$ $\{\text{Kub tashlanganda juft yoki toq sonning chiqishi}\}$ hodisasi $A+\bar{A}=U$ bo'ladi. A va \bar{A} hodisalar bir vaqtda ro'y bera olmaydi, ya'ni $A \cdot \bar{A} = V$ – ro'y berishi mumkin bo'lmagan hodisa. Demak, A va \bar{A} qarama-qarshi hodisa.

6) Agar $AB = V$ bo'lsa, A va B hodisalar *birgalikda emas* deyiladi, ularning bir vaqtda ro'y berishi mumkin emas.

8-misol. $A = \{\text{kub tashlanganda } 2 \text{ ning chiqishi}\},$
 $B = \{\text{kub tashlanganda } 3 \text{ ning chiqishi}\}.$

Ravshanki, bitta kub tashlanganda 2 va 3 sonlari birgalikda paydo bo'lmaydi (birgalikda ro'y bermaydi). Demak, bu misolda A va B hodisalar birgalikda emas.

7) Agar $A = B_1 + B_2 + \dots + B_n$ va $B_i \cdot B_j = V$ ($i \neq j$) bo'lsa, A hodisa B_1, B_2, \dots, B_n xususiy hollarga (hodisalarga) ajraladi deymiz. Agar A hodisa hususiy hollarga ajralmasa, uni *elementar hodisa* deymiz.

9-misol. Kub tashlanganda 1 sonining chiqish hodisasi B_1 , 2 sonining chiqish hodisasi B_2 , 3 sonining chiqish hodisasi B_3 bo'lsa, u holda kub tashlanganda 1, 2, 3 sonlardan birining chiqish hodisasini A desak, $A = B_1 + B_2 + B_3$. Shu bilan birga $B_1 B_2 = B_1 B_3 = B_2 B_3 = V$. Bu misolda B_1, B_2, B_3 – elementlar hodisalar.

8) Agar $B_1 + B_2 + \dots + B_n = U$ va $B_i \cdot B_j = V$, $i \neq j$, bo'lsa, B_1, B_2, \dots, B_n hodisalar o'zaro birgalikda bo'lmagan hodisalarning *to'liq gruppasini* tashkil etadi deymiz.

Masalan, kubni bir marta tashlanganda 1, 2, 3, 4, 5, 6 sonlarining paydo bo'lishi hodisasi, mos ravishda, $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ bo'lsa, ravshanki, $B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5 + B_6 = U$.

Odatda, elementar hodisalar $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ harflar bilan, elementar hodisalar fazosi esa U (yoki Ω) harfi bilan belgilanadi. Biror tajriba natijasida ro'y berishi mumkin bo'lgan barcha elementar hodisalar *elementar hodisalar fazosini tashkil qiladi* deyishadi.

Masalan: tanga tashlash tajribasida ikkita elementar hodisa bor:

$G = \{\text{tanganing gerb tomoni bilan tushishi}\},$
 $R = \{\text{tanganing raqam tomoni bilan tushishi}\}.$ Bu yerda $U = \{G, R\}.$

Kubni tashlash tajribasida jami 6 ta elementar hodisa bor:

$\omega_1 = \{1 \text{ raqamining tushishi}\}, \dots, \omega_6 = \{6 \text{ raqamining tushishi}\}.$

Bu yerda $U = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}.$

Agar $U = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ bo'lsa, uning barcha qism to'plamlari soni nechta degan savolga kombinatorika masalalari mavzusida javob berilgan:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n,$$

bu yerda C_n^k son n elementli to'plamdan olingan k elementli barcha qism to'plamlar soni.

Elementar hodisalar $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ teng imkoniyatli bo'lishi shart emas: $P(\omega_1) = p_1, \dots, P(\omega_n) = p_n, p_1 + \dots + p_n = 1,$ ya'ni har bir elementar hodisa ω_k ga manfiy bo'lmagan p_k son mos qo'yiladi. Elementar hodisalar teng imkoniyatli bo'lgan holda $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$ bo'ladi.

Har bir tasodifiy hodisa A bir nechta elementar hodisalar yig'indisidan iborat. Masalan, $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_k}\},$ ya'ni $A = \omega_{i_1} + \omega_{i_2} + \dots + \omega_{i_k}$ bo'lsa, u holda

$$P(A) = p(\omega_{i_1}) + \dots + p(\omega_{i_k}) = p_{i_1} + \dots + p_{i_k}.$$

Umuman, A hodisaning ehtimolligi $P(A)$ ushbu shartlarni qanoatlantiradi:

1) $P(A) \geq 0;$ 2) $P(U) = 1;$ 3) Agar $A \cup B = U$ bo'lsa, $P(A+B) = P(A) + P(B).$

Agar $A \cap B \neq V$ bo'lsa, ravshanki, $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$

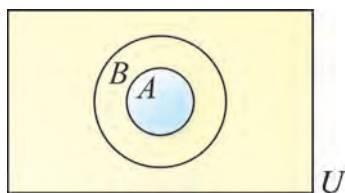
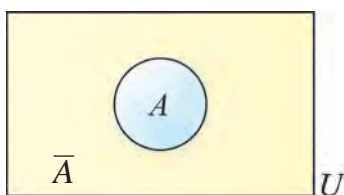
$A + \bar{A} = U$ va $A \cap \bar{A} = V$ bo'lgani uchun $P(A + \bar{A}) = P(U) = 1$ va bu holda

$P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}).$ Bundan $P(\bar{A}) = 1 - P(A).$

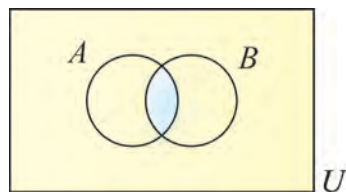
Hodisalar ustida amallarni Eyler-Venn diagrammasida tasvirlash qulay. Bunga rasmlarni tahlil qilib, ishonch hosil qilamiz:

A, \bar{A} – qarama-qarshi hodisalar

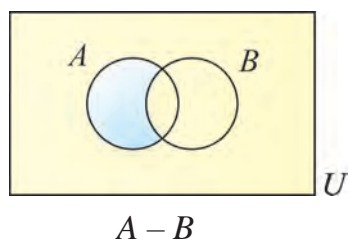
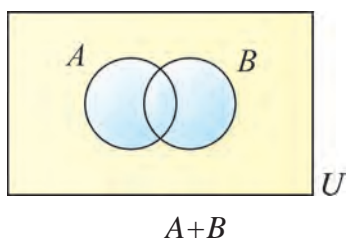
$$A + \bar{A} = U, A\bar{A} = V$$



$$A \subset B$$



$$A \cdot B$$



Mashqlar

94. Vertolyot har uchishda 6 nafar odamni manzilga yetkazadi. 30 nafar sayyoh shu vertolyotda toqqa bormoqchi. Ularning vertolyotga o‘tirish tartibi tasodifiydir. Alisher Imomovning birinchi reysda uchishi ehtimolligini toping.



95. 10, 11, ..., 199 sonlaridan tavakkaliga bitta sonni tanlasak, uning 3 ga karrali bo‘lishi hodisasining ehtimolligini toping.

96. Xalqaro musiqa musobaqasida 20 nafar musiqachi qatnashmoqda: 8 nafar O‘zbekistondan, 7 nafar AQSHdan, qolgani esa Xitoy Xalq Respublikasidan. Sahnaga birinchi bo‘lib xitoylik musiqachi chiqishi hodisasining ehtimolligini toping.

97. 1000 ta suv nasosidan 5 tasi nosoz. Tavakkaliga olingan nasos soz bo‘lishi hodisasining ehtimolligini toping.

98. Tanga uch marta tashlanganda raqam tomoni tushmaslik hodisasining ehtimolligini toping.



99. Tanga uch marta tashlanganda raqam tomoni aynan bir marta tushish hodisasining ehtimolligini toping.

100. Tanga uch marta tashlanganda raqam tomoni kamida bir marta tushish hodisasining ehtimolligini toping.

101. Ikkita signalizator (avariya ro'y berganda xabar beruvchi qurilma) mustaqil (bog'liqsiz) holda ishlamoqda. Agar birinchi signalizatorning avariya ro'y berganda ishlash ehtimolligi 0,9 va 2- signalizatorning avariya ro'y berganda ishlash ehtimolligi 0,95 bo'lsa, u holda quyidagi hodisalarning ehtimolligini toping. Avariya ro'y berganda quyidagi hodisalarning ro'y berish ehtimolliklarini toping:

- 1) ikkala signalizatorning bir vaqtda xabar berish hodisasi;
- 2) bitta signalizatorning xabar berish hodisasi;
- 3) faqat birinchi signalizatorning xabar berish hodisasi;
- 4) faqat ikkinchi signalizatorning xabar berish hodisasi;
- 5) ikkala signalizatorning xabar bermaslik hodisasi.



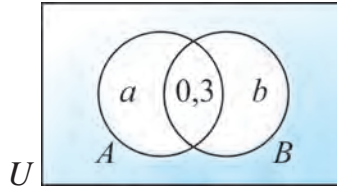
Ehtimolliklarni qo‘shish. Avval ko‘rdikki, ixtiyoriy A va B hodisalar uchun

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Bu tenglik *ehtimolliklarni qo‘shish qoidasini* ifodalaydi.

1-misol. $P(A) = 0,6$, $P(A \cup B) = 0,7$, $P(A \cap B) = 0,3$ bo‘lsa, $P(B)$ ni toping.

△ *1-usul.* Tegishli Eylar – Venn diagrammasini chizamiz:



Bundan $a + 0,3 = 0,6$; $a = 0,3$. $a + b + 0,3 = 0,7$; $0,3 + b = 0,4$; $b = 0,1$.

Demak, $P(B) = 0,4$.

2-usul. Ehtimolliklarni qo‘shish qoidasiga ko‘ra

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B); \quad 0,7 = 0,6 + P(B) - 0,3; \quad P(B) = 0,4.$$

Ma‘lumki, birgalikda bo‘lmagan hodisalar uchun $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

2-misol. 31 nafar fuqarodan 7 nafari Samarqand shahrida (S), 5 nafari esa Samarqand viloyatida (W) doimiy ro‘yxatdan o‘tgan.

a) S va W hodisalar birgalikda bo‘ladimi?

b) Ixtiyoriy ravishda tanlangan fuqaroning:

I) Samarqandda;

II) Samarqand viloyatida;

III) Yo Samarqandda, yo Samarqand viloyatida

doimiy ro‘yxatdan o‘tganligining ehtimoligini toping.

△ a) Fuqaro doimiy ro‘yxatdan faqat bir joyda o‘tishi mumkin.

Demak, S va W hodisalar birgalikda bo‘lmaydi.

b) I) $P(S) = \frac{7}{31}$; II) $P(W) = \frac{5}{31}$.

Birgalikda bo‘lmagan hodisalar uchun

$$\text{III) } P(S \cup W) = P(S) + P(W) = \frac{7}{31} + \frac{5}{31} = \frac{12}{31}. \blacktriangle$$

3-masala. Gulzorda 20 ta qizil, 30 ta binafsha rang va 40 ta oq rangli gul ochilgan. Agar bitta gul uzilgan bo'lsa, uning qizil yoki binafsha rangli bo'lish ehtimolligini toping.

$$\triangle P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{20}{90} + \frac{30}{90} - \frac{0}{90} = \frac{50}{90} = \frac{5}{9}. \blacktriangle$$

Mashqlar

102. $P(A)=0,4$, $P(A \cup B)=0,9$, $P(A \cap B)=0,1$ bo'lsa, $P(B)$ ni toping.

103. $P(A)=0,6$, $P(B)=0,5$, $P(A \cup B)=0,9$ bo'lsa, $P(AB)$ ni toping.

104. A va B hodisalar birgalikda bo'lmasin. $P(A)=0,45$, $P(A \cup B)=0,8$ bo'lsa, $P(B)$ ni toping.

105. 1, 2, ..., 15 sonlari bilan nomerlangan chiptalardan ixtiyoriy biri tanlab olinmoqda. Chiptadagi nomer 11 dan katta bo'lishi hodisasini A harfi bilan, 8 dan kichik bo'lishi hodisasini B harfi bilan belgilaymiz.

- a) A va B hodisalar birgalikda bo'ladimi?
 b) I) $P(A)$; II) $P(B)$; III) $P(A \cup B)$ larni toping.

106. Sinfda 25 o'quvchi bor. Ulardan
 11 nafari 16 yoshda (F);
 12 nafari 17 yoshda (S);
 8 nafarining uyida qo'y boqiladi (D);
 7 nafarining uyida qoramol boqiladi (C);
 4 nafarining uyida hech qanday uy hayvoni boqilmaydi (N).

Ixtiyoriy ravishda o'quvchi tanlanmoqda.

Quyidagilarni toping va ma'nosini tushuntiring:

- a) $P(F)$; b) $P(S)$; c) $P(D)$; d) $P(C)$; e) $P(N)$;
 f) $P(F \cup S)$; g) $P(F \cup D)$; h) $P(C \cup N)$; i) $P(F \cup D)$; j) $P(D \cup N)$.

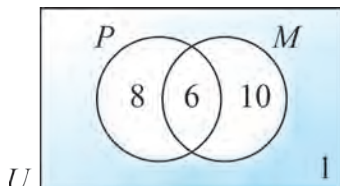
Ehtimolliklarni ko'paytirish

A va B hodisalar berilgan bo'lsin. A/B yozuv B hodisaning ro'y berganligi aniq bo'lganida A hodisaning ro'y berishini bildirsin.

4-misol. 25 o‘quvchidan 14 nafari palovni, 16 nafari esa mantini yoqtiradi. Bir nafar o‘quvchi palov va mantidan boshqa taomni, 6 nafar o‘quvchi esa ikkala taomni ham yoqtiradi. Ixtiyoriy ravishda tanlangan o‘quvchi:

- palovni (P) yoqtirishining;
- mantini (M) yoqtirganligi aniq bo‘lganda palovni yoqtirishining ehtimolligini toping.

△ Eylar–Venn diagrammasini chizamiz:



25 nafar o‘quvchidan 14 nafari palovni yoqtirganligi sababli

$$P(\text{palov}) = \frac{14}{25}.$$

16 nafar mantini yoqtirganlar ichida 6 nafari palovni ham yoqtirganligi

uchun

$$P(\text{palov} | \text{manti}) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$$

Umumiy holda ham B hodisa ro‘y berganligi aniq bo‘lganda A hodisaning ro‘y berish ehtimolligi

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

formula yordamida topiladi, bundan $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A | B)$. Bu formula ehtimollikni ko‘paytirish formulasi deyiladi.

$P(A/B)$ ehtimollik **shartli ehtimollik** deb ataladi.

$P(A/B) = P(A)$ bo‘lsa, A hodisa B hodisaga bog‘liq emas deyiladi. A hodisa B hodisaga bog‘liq bo‘lmasa, u holda B hodisa ham A hodisaga bog‘liq bo‘lmaydi, ya’ni $P(B/A) = P(B)$.

Agar A va B hodisalar o‘zaro bog‘liq bo‘lmasa, ularning birgalikda ro‘y berish ehtimolligi bu hodisalarning har birining ro‘y berish ehtimolliklarining ko‘paytmasiga teng, ya’ni $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

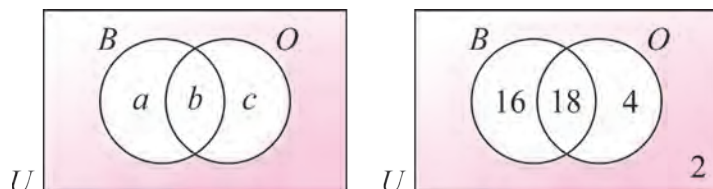
Tadqiqot uchun. Agar A va B hodisalar bog‘liq bo‘lmasa: 1) A va \bar{B} ; 2) \bar{A} va B ; 3) \bar{A} va \bar{B} hodisalar ham o‘zaro bog‘liq bo‘lmaydi.

5-misol. 40 nafar o‘quvchidan 34 nafari banan (B), 22 nafari olma (O) va

2 nafari ikkala mevani yoqtiradi. Ixtiyoriy tanlangan o'quvchining:

- ikkala mevani yoqtirishining;
- eng ko'pi bilan bitta mevani yoqtirishi;
- olmani yoqtirishi sharti bilan bananni yoqtirishining;
- bananni yoqtirishi sharti bilan olmani yoqtirmasligining (\bar{O}) ehtimolligini toping.

△



Diagrammadan ravshanki: $a+b=34$; $b+c=22$; $a+b+c=38$.

Bundan, $c=38-34=4$; $b=18$; $a=16$.

Demak,

$$\text{a) } P(\text{ikkala meva}) = \frac{18}{40} = \frac{9}{20} = 0,45;$$

$$\text{b) } P(\text{eng ko'pi bilan bitta meva}) = \frac{38}{40} = \frac{19}{20} = 0,95;$$

$$\text{c) } P(B|O) = \frac{18}{22} = \frac{9}{11}; \quad \text{d) } P(\bar{O} | B) = \frac{16}{34} = \frac{8}{17}. \quad \blacktriangle$$

6-misol. $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A \cup B) = p$ bo'lsin.

Agar A va B hodisalar:

- birgalikda bo'lmasa;
- bog'liq bo'lmasa, p ni toping.

△ a) A va B hodisalar birgalikda bo'lmasa, $A \cap B = \emptyset$, ya'ni $P(A \cap B) = 0$.

Ammo $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, bundan

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 0 = \frac{5}{6}.$$

b) A va B hodisalar o'zaro bog'liq bo'lmasa, u holda

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

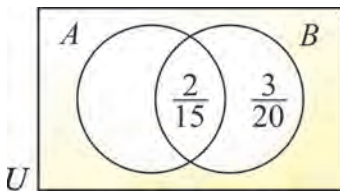
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}. \quad \blacktriangle$$

7-misol. Agar $P(B|\bar{A}) = \frac{1}{4}$, $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B|A) = \frac{1}{3}$ bo'lsa, quyidagilarni toping: a) $P(B)$; b) $P(A \cap \bar{B})$.

$$\triangle P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}, \text{ bundan } P(B \cap A) = P(B|A)P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{15}.$$

$$\text{Xuddi shuningdek, } P(B \cap \bar{A}) = P(B|\bar{A})P(\bar{A}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{20}.$$

Eyler–Venn diagrammasidan



$$\text{a) } P(B) = \frac{2}{15} + \frac{3}{20} = \frac{17}{60};$$

$$\text{b) } P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{2}{5} - \frac{2}{15} = \frac{4}{15}.$$

Hodisalarning ehtimolliklarini hisoblash

1-misol. Korxonada bir necha dastgoh ishlaydi. Ish vaqti davomida bitta dastgohni ta'mirlash talab etilishi ehtimolligi 0,2 ga teng, ikkita dastgohni ta'mirlash talab etilishi ehtimolligi 0,13 ga teng. Ish vaqti davomida ikkitadan ortiq dastgohni ta'mirlash talab etilishi ehtimolligi esa 0,07 ga teng. Ish vaqti davomida hech bo'lmaganda bitta dastgohni ta'mirlash talab etilishi ehtimolliini toping.

\triangle Quyidagi hodisalarni qaraymiz:

$A = \{\text{ish vaqti davomida bitta dastgohni ta'mirlash talab etiladi}\};$

$B = \{\text{ish vaqti davomida ikkita dastgohni ta'mirlash talab etiladi}\};$

$C = \{\text{ish vaqti davomida ikkitadan ortiq dastgohni ta'mirlash talab etiladi}\}.$

A, B va C hodisalar o'zaro birgalikda emas. Bizni qiziqtiradigan hodisa:

$A + B + C = \{\text{ish vaqti davomida hech bo'lmaganda bitta dastgohni ta'mirlashning zarur bo'lishi}\}$, shu hodisaning ehtimoligini topamiz:

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) = 0,2 + 0,13 + 0,07 = 0,4.$$

Javob: 0,4. \blacktriangle

2-misol. Idishda 10 ta qizil va 6 ta ko'k rangli shar bor. Tavakkaliga 2 ta shar olinadi. Olingan ikkala sharning bir xil rangli bo'lish ehtimoligini toping.

\triangle A olingan ikkala shar qizil bo'lishi, B esa olingan ikkala sharning ko'k rangda bo'lishi hodisasi deylik. Ko'rinib turibdiki, A va B hodisalar birgalikda

bo‘lmagan hodisalardir. Demak,

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

A hodisaning ro‘y berishiga C_{10}^2 ta elementar hodisa qulaylik tug‘diradi. B hodisaning ro‘y berishiga esa C_6^2 ta elementar hodisa qulaylik tug‘diradi. Ro‘y berishi mumkin bo‘lgan jami elementar hodisalar soni esa C_{16}^2 ga teng. U holda

$$P(A + B) = \frac{C_{10}^2 + C_6^2}{C_{16}^2} = \frac{1}{2}. \blacktriangle$$

3-misol. Ikki ovchi bo‘riga qarata bittadan o‘q uzishdi. Birinchi ovchining o‘qni bo‘riga tekkizish ehtimolligi 0,7 ga, ikkinchisniki esa 0,8 ga teng. Hech bo‘lmaganda bitta o‘qning bo‘riga tegishi ehtimolligini toping.

\triangle A – birinchi ovchining o‘qni bo‘riga tekkizishi hodisasi, B – ikkinchi ovchining o‘qni bo‘riga tekkizishi hodisasi bo‘lsin. Ravshanki, A va B hodisalar birgalikda bo‘lgan, ammo bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan hodisalardir. U holda

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,7 + 0,8 - 0,56 = 0,94. \blacktriangle$$

4-misol. Tanga va kub bir vaqtda tashlangan. “Gerb“ tushishi va “3” soni tushishi hodisalarining birgalikda ro‘y berishi ehtimolligini toping.

\triangle A – tanganing “gerb” tomoni tushishi hodisasi, B – kubik tashlanganda “3” sonining tushishi hodisasi bo‘lsin. A va B hodisalar bog‘liq bo‘lmagan hodisalar. Demak,

$$P(AB) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}. \blacktriangle$$

5-misol. Firmada 7 ta erkak va 3 ta ayol ishchi ishlaydi. Tavakkaliga 3 kishi ajratildi. Ajratib olingan ishchilarning barchasi erkaklar bo‘lishi ehtimolligini toping.

\triangle Hodisalarni quyidagicha belgilaymiz:

A – birinchi ajratilgan ishchining erkak kishi bo‘lishi hodisasi;

B – ikkinchi ajratilgan ishchining erkak kishi bo‘lishi hodisasi;

C – uchinchi ajratilgan ishchining erkak kishi bo‘lishi hodisasi.

Birinchi ajratilgan ishchining erkak kishi bo‘lishi hodisasining ehtimolligi:
 $P(A) = 0,7$.

Birinchi ajratilgan ishchining erkak kishi bo‘lishi shartida ikkinchi ishchining ham erkak kishi bo‘lishi ehtimolligi, ya’ni B hodisaning shartli ehtimolligi:

$$P(B | A) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Oldin ajratib olinganlarning ikkalasi erkak kishi bo‘lishi sharti ostida uchinchi ajratilgan ishchining ham erkak kishi bo‘lishi ehtimolligi, ya’ni C hodisaning shartli ehtimolligi: $P(C|AB) = \frac{5}{8}$. Ajratib olingan ishchilarning hammasi erkak kishilar bo‘lishi ehtimolligi $P(ABC) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|AB) = \frac{7}{24}$. ▲

6-misol. Biror obyekt yakson bo‘lishi uchun bitta bombaning kelib tushishi kifoya, deylik. Agar obyektga tushishi ehtimolliklari, mos ravishda 0,3; 0,4; 0,6; 0,7 ga teng bo‘lgan 4 ta bomba tashlangan bo‘lsa, u holda obyektning yakson bo‘lish ehtimolligini toping.

△ Agar A_1, A_2, \dots, A_n hodisalar o‘zaro bog‘liq bo‘lmasa, ularga qarama-qarshi bo‘lgan $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$ hodisalar ham o‘zaro bog‘liq emas. Bundan

$$P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_n) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_n) = (1 - P(A_1))(1 - P(A_2)) \dots (1 - P(A_n)). \quad (1)$$

Shu bilan birga, $A_1 + A_2 + \dots + A_n$ va $\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \dots \cdot \bar{A}_n$ hodisalar qarama-qarshi hodisalaridir. Shuning uchun (1) ga ko‘ra $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1 - P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \dots \cdot \bar{A}_n) = 1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_2)) \dots (1 - P(A_n))$. (2)

Bu formula, agar $P(A_1), \dots, P(A_n)$ ehtimolliklar ma’lum bo‘lsa, A_1, A_2, \dots, A_n hodisalarning kamida bittasining ro‘y berishi ehtimolligini hisoblash imkonini beradi. Masalan, avvalgi $P(A_1) = P(A_2) = \dots = P(A_n) = p$ bo‘lsa, (2) formula $P(A_1 + \dots + A_n) = 1 - (1 - p)^n$ ko‘rinishni oladi. Demak, 4 bombadan kamida bitta bombaning ko‘prikka tushishi ehtimolligi

$$P(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = 1 - (1 - 0,3)(1 - 0,4)(1 - 0,6)(1 - 0,7) = 1 - 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,3 = 1 - 0,0504 = 0,9496. \quad \blacktriangle$$

Mashqlar

107. $P(R) = 0,4$, $P(S) = 0,5$ va $P(R \cup S) = 0,7$ bo‘lsa, R, S lar o‘zaro bog‘liq bo‘ladimi?

108. $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$ bo‘lsin.

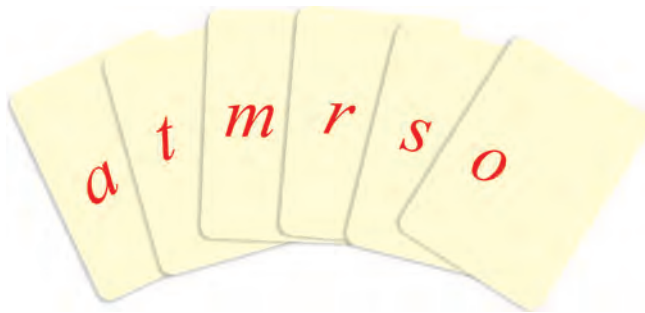
a) $P(A \cap B)$; b) $P(B|A)$; c) $P(A|B)$

ni toping. A, B lar o‘zaro bog‘liq bo‘ladimi?

109. $P(X) = 0,5$, $P(Y) = 0,7$ va X, Y o‘zaro bog‘liq bo‘lmasa, quyidagi hodisalarning ehtimolliklarini toping:

- a) X, Y hodisalarning ikkalasi ham ro‘y berdi;
- b) Yo X , yo Y hodisasi ro‘y berdi;
- c) Na X , na Y hodisasi ro‘y bermadi;
- d) X ro‘y berdi, ammo Y ro‘y bermadi;
- e) X ning ro‘y berishi sharti bilan Y hodisasi ro‘y berdi.

110. Oltita bir xil qog‘ozchaning har biriga quyidagi harflardan biri yozilgan: a, t, m, r, s, o . Qog‘ozchalar yaxshilab aralashtirilgan. Bittalab olingan va “bir qator qilib” terilgan to‘rtta qog‘ozchada: 1) satr; 2) rost; 3) taom so‘zlarini o‘qish mumkinligi hodisasining ehtimolligini toping.



111. Tanga 5 marta tashlandi. Tanganing gerbli tomoni bilan ikki marta tushishi hodisasining ehtimolligini toping.

112. 21 ta standart va 10 ta nostandart buyum solingan idishni tashish vaqtida bitta buyum yo‘qolgan, biroq qanday buyum yo‘qolgani ma’lum emas. Idishdan (tashishdan keyin) tavakkaliga olingan buyum standart buyum bo‘lib chiqdi. Nostandart buyumning yo‘qolgan bo‘lishi hodisasining ehtimolligini toping.

113. Abonent telefon nomerini terayotib, nomerning oxirgi uchta raqamini eslay olmadi va bu raqamlar turli ekanligini bilgan holda ularni tavakkaliga terdi. Kerakli raqamlar terilgan bo‘lishi hodisasining ehtimolligini toping.



Bernulli sxemasi. n ta o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan sinashlar (tajribalar) ketma-ketligi o‘tkazilgan. Har bir sinashda A hodisaning ro‘y berish ehtimolligi p , ro‘y bermaslik ehtimolligi esa $q = 1 - p$ bo‘lsin (p va q har bir sinash uchun bir xil, sinashning nomeriga bog‘liq emas), deylik.

Mazkur sinashlar ketma-ketligi **Bernulli sxemasi** deyiladi.

3 ta sinashdan iborat Bernulli sxemasini qaraylik. Agar A hodisa ro‘y bersa, 1 raqamini, ro‘y bermasa, 0 raqamini yozamiz. 3 ta sinashda ro‘y berishi mumkin bo‘lgan 8 ta elementar hodisaga mos kodlar shunday bo‘ladi:
111, 110, 101, 100, 011, 010, 001 va 000.

Sinashlar o‘zaro bog‘liq bo‘lmaganligi sababli, har bir elementar hodisaning ehtimolligini ehtimolliklarni ko‘paytirish formulasiga muvofiq topsak bo‘ladi.

Masalan, 110 ga mos hodisa $ppq = p^2q$ ehtimollikka ega.

Hisoblashlar natijalarini jadval ko‘rinishda yozaylik:

Elementar hodisa	111	110	101	100	011	010	001	000
Ehtimolligi	p^3	p^2q	p^2q	pq^2	p^2q	pq^2	pq^2	q^3

Bog‘liq bo‘lmagan $n = 4, 5, \dots$ sinashlardan iborat Bernulli sxemalarini ham xuddi shunday qarasa bo‘ladi.

Bunda 3 ta sinashda $8 = 2^3$ ta elementar hodisa, 4 ta sinashda $16 = 2^4$ ta elementar hodisa, 5 ta sinashda $32 = 2^5$ ta elementar hodisa va h.k., n ta sinashda esa 2^n ta elementar hodisa ro‘y beradi.

1-misol. Tanga uch marta ketma-ket tashlangan. A hodisasi har bir tashlashda tanganing gerbli tomoni bilan tushishi hodisasi bo‘lsin.

Har bir sinashda A hodisasining ro‘y berish yoki bermasligining ehtimolliklari $p = q = \frac{1}{2}$ bo‘ladi. Bu holda jadvaldagi har bir hodisaning ehtimolligi $\frac{1}{8}$ ekani ravshan. Masalan, “ikki marta gerb, bir marta raqam tushish (bunga mos kod 110) hodisasining ehtimolligi $p^2q = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ bo‘ladi.

Boshqa hollarni ham shunday qarash mumkin.

2-misol. Qutida 3 ta qizil va 5 ta ko'k qalam bor. Bir sinashda tavakkal qilib bitta qalam olindi. Har gal olingan qalamni joyiga qaytarib, sinashlarni 4 marta takrorlaymiz. Natijada 4 ta o'zaro bog'liq bo'lmagan sinashlarning Bernulli sxemasini hosil qilamiz. A hodisa olingan qalam rangining qizil bo'lishi hodisasi deylik. Ravshanki, bu holda har bir sinashda A hodisaning ro'y berish ehtimolligi $p = \frac{3}{8}$, ro'y bermaslik ehtimolligi esa $q = \frac{5}{8}$ ga teng.

Savol qo'yamiz: birinchi, uchinchi va to'rtinchi sinashda qizil, ikkinchi sinashda esa ko'k rangli qalamni olish hodisasining ehtimolligi qanday bo'ladi?

Yuqoridagi kabi mulohazalar yuritib, bu hodisaga 0 va 1 larning 1011 ketma-ketligi mos kelishini, kuzatilayotgan hodisasining ehtimolligi esa

$$p^3 q = \left(\frac{3}{8}\right)^3 \cdot \frac{5}{8} = \frac{135}{4096} \approx 0,033 \text{ ekanini topamiz.}$$

n ta sinashdan iborat Bernulli sxemasida kuzatilayotgan A hodisasining roppa-rosa m marta ro'y berish ehtimolligini topaylik.

Kombinatorikaga oid mavzularda uzunligi n ga teng va tarkibida aynan m ta a harfi va $n - m$ ta b harfi bo'lgan so'zlar soni C_n^m ga tengligi isbotlangan edi.

Demak, Bernulli sxemasida A hodisasining roppa-rosa m marta ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi elementar hodisalar soni C_n^m ga teng. Har bir bunday elementar hodisaning ehtimolligi esa $p^m q^{n-m}$ ga teng bo'lgani uchun quyidagi tasdiqqa kelamiz:

Teorema. n ta o'zaro bog'liq bo'lmagan sinashdan iborat Bernulli sxemasida A hodisasining roppa-rosa m marta ro'y berish ehtimolligi $P(n, m) = C_n^m p^m q^{n-m}$ bo'ladi.

3-misol. 3 ta sinashdan iborat Bernulli sxemasida har bir sinashda A hodisaning ro'y berish ehtimoligi $p = 0,2$ bo'lsin. Bu holda $q = 1 - 0,2 = 0,8$.

3 ta sinashda A hodisasining: ro'y bermaslik (0 marta ro'y berishlik), 1 marta, 2 marta, 3 marta ro'y berishi ehtimolliklari, mos ravishda, quyidagilarga teng:

$$P(3, 0) = C_3^0 p^0 q^3 = 1 \cdot 1 \cdot 0,8^3 = 0,512;$$

$$P(3,1) = C_3^1 p^1 q^2 = 3 \cdot 0,2 \cdot 0,8^2 = 0,384;$$

$$P(3,2) = C_3^2 p^2 q^1 = 3 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8 = 0,096;$$

$$P(3,3) = C_3^3 p^3 q^0 = 1 \cdot 0,2^3 \cdot 1 = 0,008.$$

Natijalarni **binomial taqsimot** jadvali deb nomlangan jadval ko‘rinishda ifodalaymiz:

m	0	1	2	3
$P(3, m)$	0,512	0,384	0,096	0,008

Bu jadvalning ikkinchi qatoridagi ehtimolliklar yig‘indisi 1 ga teng ekanligiga ishonch hosil qiling. Shu bilan birga,

$$\sum_{m=0}^n P(n, m) = \sum_{m=0}^n C_n^m p^m q^{n-m} = (p + q)^n = 1.$$

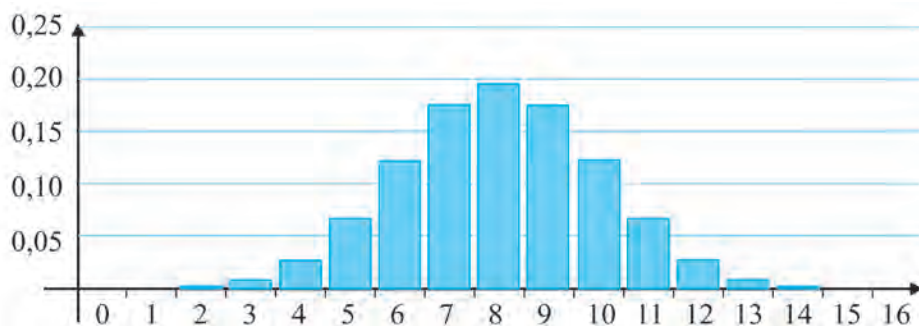
4-misol. Statistika ma‘lumotlarga ko‘ra o‘g‘il bola tug‘ilishining ehtimolligi taqriban $p=0,515$ bo‘ladi. Tavakkal qilib tanlangan 10 ta chaqaloqdan 6 tasi o‘g‘il bola bo‘lishining ehtimolliligi taqriban

$$P(10, 6) = C_{10}^6 (0,515)^6 (0,485)^4 \approx 0,2167.$$

5-misol. 16 ta sinashdan iborat Bernulli sxemasida har bir sinashda A hodisaning ro‘y berish ehtimolligi $p=0,5$ bo‘lsin. Bu holda binomial taqsimot jadvali quyidagicha bo‘lar ekan (verguldan so‘ng 3 xona aniqligida olindi):

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(16, m)$	0	0	0,002	0,009	0,028	0,067	0,122	0,175	0,196	0,175
m	10	11	12	13	14	15	16			
$P(16, m)$	0,122	0,067	0,028	0,009	0,002	0	0			

Bu ma‘lumotlarga mos ustunli diagrammani yasaymiz:



Ko‘rinib turibdiki, ehtimolliklar 0,196 qiymatga nisbatan simmetrik

joylashgan. A hodisaning roppa-rosa 8 marta ro‘y berish ehtimolligi eng kattadir.

6-misol. Mahsulotning sifatsiz bo‘lishining ehtimolligi 0,01 ga teng. Tavakkaliga tanlangan 100 mahsulotdan 3 ta dan kam sifatsiz mahsulot chiqishining ehtimolligi $P(100,0) + P(100,1) + P(100,2) = C_{100}^0(0,01)^0(0,99)^{100} + C_{100}^1(0,01)^1(0,99)^{99} + C_{100}^2(0,01)^2(0,99)^{98} \approx 0,9816$ bo‘ladi.

Tasodifiy miqdor. Tajriba natijasida u yoki bu qiymatni qabul qiladigan miqdor *tasodifiy miqdor* deyiladi.

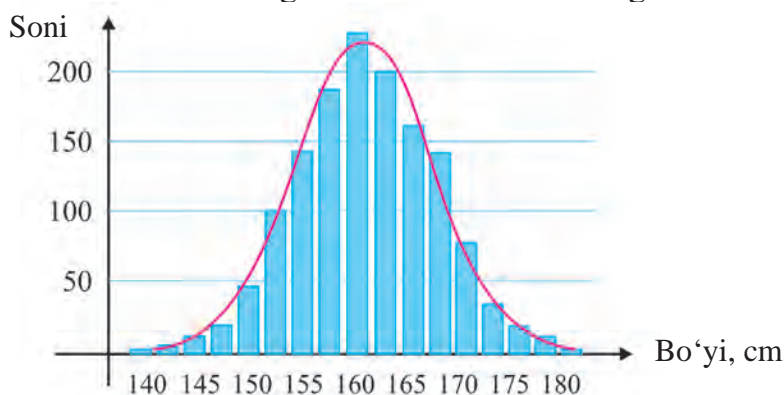
Tasodifiy miqdorlarga bir nechta misol keltiraylik.

1. O‘yin kubi tashlanganda tushgan ochkolar soni.
2. Ixtiyoriy tanlangan insonning santimetrlarda ifodalangan bo‘yi.
3. Taksi to‘xtash joyiga bir soat davomida kelib to‘xtaydigan taksilar soni.
4. Televizorning buzilmasdan xizmat qilish davri.
5. Tavakkaliga tanlangan 100 ta mahsulotdan sifatsizlari soni.
6. 11-sinf o‘quvchining vazni yoki bo‘yi.
7. Yer sirtining ma’lum maydoniga berilgan vaqt oralig‘ida kelib tushuvchi kosmik zarralar soni.
8. Ma’lum nav paxtadan berilgan ingichkalikda tayyorlangan ipning pishiqligini tekshirishdagi uzilishlar soni.

Tadqiqot uchun. 1) Yuqorida keltirilgan 1–8- misollardagi tasodifiy miqdorlarni muhokama qiling. Bu miqdorlar qanday qiymatlarni qabul qilishi mumkin?

2) Boshqa turdagi tasodifiy miqdorlarga misollar keltiring.

2-misoldagi tasodifiy miqdorni fransuz olimi Muavr tadqiq qilgan. U tasodifiy ravishda tanlangan 1375 nafar ayolning bo‘yini o‘lchab, olingan statistik ma’lumotlarni ustunli diagramma shaklida tasvirlagan:

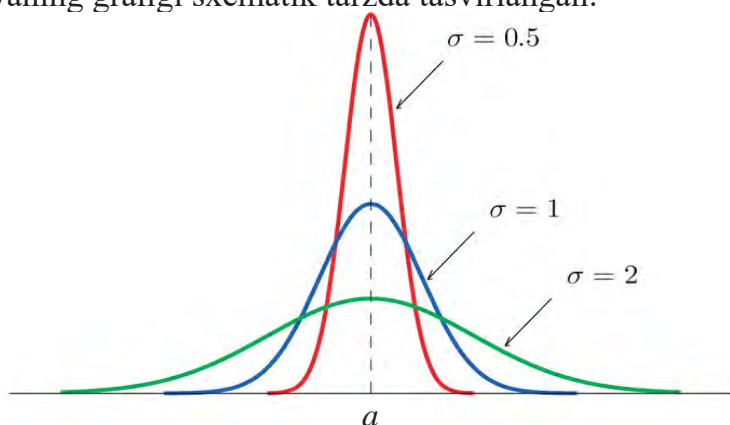


Shu diagrammada tasvirlangan “qalpoqsimon” egri chiziq taqriban

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

funksiya grafigiga yaqinligi aniqlangan, bu yerda a , σ – parametrlar.

Quyida a , σ – parametrlarning turli qiymatlarida $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ funksiyaning grafigi sxematik tarzda tasvirlangan:



Ko‘rinib turibdiki, a parametr tasodifiy miqdor qabul qilgan qiymatlar to‘plamining o‘rtasini, σ esa standart chetlanishni bildiradi.

Tabiatdagi tasodifiy jarayonlarda shunday ko‘rinishda taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ko‘p uchraganligi sababli, Muavr ularni *normal taqsimlangan* deb nomlagan.

Agar biror miqdor yetarlicha ko‘p bo‘lgan va bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan kichik tasodifiy omillar yig‘indisi ta’sirida bo‘lsa, u holda ushbu miqdorni normal taqsimlangan deb faraz qilish mumkin.

Normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlarga misollar keltiraylik.

1. O‘q o‘tishda nishondan chetlanish miqdori (soni).
2. O‘lchashlardagi xatoliklar.
3. Populatsiyalardagi tirik organizmlarning ba’zi xarakteristikalari.

Tadqiqotlarga ko‘ra, sinashlar (tajribalar) soni n yetarlicha katta bo‘lganida binomial taqsimot normal taqsimotga yaqinlashadi.

Tadqiqot uchun. Yuqorida keltirilgan misollardagi tasodifiy miqdorlar normal taqsimlanganmi? Normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlarga misollar keltiring.



Yozma nazorat ishi namunasi

1. Idishda 25 ta olma bor, shulardan 8 tasi qizil, qolgani esa yashil rangda. Tasodifiy ravishda (tavakkaliga) olingan olma qizil rangda bo'lishi hodisasi ehtimolligini toping.

2. Biologiya fanidan savollar to'plamida 25 ta savol bor. Shu savollar ichida 2 tasi genetikaga oid ekan. Tavakkaliga tanlangan savol genetika haqida emasligining ehtimolligini toping.

3. O'quvchi tavakkaliga 100 dan katta bo'lmagan natural sonni aytdi. Shu son 5 ga karrali bo'linishining ehtimolligini toping.

4. Tanga 3 marta tashlanganda 2 marta gerb va bir marta raqam tomoni tushishining ehtimolligini toping.

5. Merganning nishonga tegish ehtimolligi 0,9 ga teng. U nishonga 3 marta o'q uzganda barcha o'qlari nishonga tegishining ehtimolligini toping. Biror marta ham nishonga tegmasligi hodisasining ehtimolligi bilan solishtiring.

Mashqlar

114. Merganning bir o'q bilan nishonga tegish ehtimolligi 0,8 ga teng. U 6 marta o'q uzganda 4 marta nishonga tegish ehtimolligini toping.

115. 4 ta mergan bir-biriga bog'liq bo'lmagan holda bir martadan o'q uzishmoqda. Har birining nishonga tegish ehtimolligi 0,25 ga teng. Nishonga

a) 1 ta o'qning nishonga tegishi;

b) 2 ta o'qning nishonga tegishi;

c) 3 ta o'qning nishonga tegishi;

d) 4 ta o'qning nishonga tegishi;

e) birorta ham o'qning nishonga tegmasligi hodisalarining ehtimolliklarini toping.

116*. Uskuna 10 ta qismdan iborat. Har bir qismning ishdan chiqishi ehtimolligi q ga teng. Qismlar o'zaro bog'liqsiz holda ishdan chiqishi mumkin. Quyidagi hodisalarning ehtimolliklarini toping:

a) ikkita qismning ishdan chiqishi;

b) kamida ikkita qismning ishdan chiqishi;

c) kamida bitta qismning ishdan chiqishi.

IV BOB. ALGEBRA VA ANALIZ ASOSLARINI TAKRORLASH



ALGEBRA VA ANALIZ ASOSLARINI TAKRORLASHGA OID MISOLLAR

1. Tenglamani yeching:

$$1) 3\left(0,75x + \frac{6}{5}\right) - 2x = \frac{1}{4}x + 2,5; \quad 2) 7x(2,5 - x)\left(1\frac{2}{3}x + 3\right) = 0;$$

$$3) (x+1)(x-1)(x-2) - (x^2 + 7x)(x-4) - 2 = 2x;$$

$$4) \frac{x^2 - 4}{x-2} = 4; \quad 5) \frac{x^2 - 5x + 4}{x-1} = x+1; \quad 6*) \frac{8}{x^2 - 6x + 8} + \frac{1-3x}{2-x} = \frac{4}{x-4};$$

$$7*) x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0;$$

$$8*) 24x^4 + 16x^3 - 3x - 2 = 0;$$

$$9*) 2x^4 - 5x^3 - 18x^2 + 45x = 0;$$

$$10) x^6 - x^4 - 9x^2 + 9 = 0;$$

$$11*) (x+1)(x^2 + 2) + (x+2)(x^2 + 1) = 2.$$

2. a ning qanday qiymatida $(5-a)x = a-5$ tenglamaning ildizlari soni cheksiz ko'p bo'ladi?

3. Birinchi son ikkinchisidan 15% katta. Agar kichik songa 16 ni qo'shib, katta sondan 32 ni ayirsak, sonlar teng bo'ladi. Shu sonlarni toping.

4. Yangi o'zgaruvchi kiritib tenglamani yeching:

$$1) (x^2 - 3x)^2 - 2(x^2 - 3x) = 8; \quad 2) (x^2 + 2x)^2 + (x+1)^2 = 57;$$

$$3) (x^2 - 5x + 7)^2 - (x-3)(x-2) = 1; \quad 4) \frac{21}{x^2 - 4x + 10} = x^2 - 4x + 6;$$

$$5) \frac{3x+7}{5x-1} + \frac{5x-1}{3x+7} = 5,2; \quad 6*) \frac{x^2 - x}{x^2 - x + 1} - \frac{x^2 - x + 2}{x^2 - x - 2} = 1; \quad 7) \frac{3x^2}{(x-1)^2} - \frac{5x}{x-1} = 2.$$

5. Tenglamalar sistemasini o'rniga qo'yish usuli bilan yeching:

$$1) \begin{cases} x - 6y = -2, \\ 2x + 3y = 11; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{x+3y+1}{y} - \frac{y-3x+3}{2(x-2)} = 2, \\ y - x = 1; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x - y = 1, \\ x^3 - y^3 = 7. \end{cases}$$

6. Tenglamalar sistemasini qo'shish usuli bilan yeching:

$$1) \begin{cases} \frac{3x}{4} + \frac{y}{2} = 2, \\ \frac{y}{5} - \frac{x+y}{2} = -1; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x + y^2 = 3, \\ 3x + y^4 = 4; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ xy = 8. \end{cases}$$

7. Tenglamalar sistemasini yangi o'zgaruvchni kiritish usuli bilan yeching:

$$1) \begin{cases} xy = 5, \\ \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{13}{6}; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{1}{x+y} - \frac{10}{x-y} = 1, \\ \frac{1}{x+y} + \frac{2}{x-y} = -\frac{3}{5}; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 3xy - 11\frac{x}{y} = 4, \\ 2xy - 3\frac{x}{y} = 20. \end{cases}$$

8. Tenglamalar sistemasini yeching:

$$1) \begin{cases} x+y=3, \\ x^3+x^2y=12; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x+xy+y=11, \\ x-xy+y=1; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x^2+2y+1=0, \\ y^2+2x+1=0; \end{cases}$$

$$4*) \begin{cases} x^3-xy^2=10, \\ y^3-x^2y=5; \end{cases} \quad 5*) \begin{cases} (x+y)^3+(x-y)^2=27 \\ (x-y)^3(x+y)^2=9. \end{cases}$$

9. Agar $(x; y) \begin{cases} 2x+5y=12, \\ 3x-4y=-5 \end{cases}$ tenglamalar sistemasining yechimi bo'lsa, x^2+y^2 ni toping.

10. Tenglamalar sistemasini nechta yechimga ega: $\begin{cases} 3x^2+y^2=19, \\ y-2x=6? \end{cases}$

11. Tenglamalar sistemasining yechimlari sonini toping:

$$\begin{cases} x^2+y^2+x+y=18, \\ x^2-y^2+x-y=6. \end{cases}$$

12. Tengsizlikning eng kichik butun yechimini toping: $\frac{x}{2} - \frac{x-2}{6} > 1$.

13. Tengsizlikning butun yechimlari sonini toping: $x^2 \leq 2$.

14. Tengsizlikni yeching: 1) $|x-1| \geq 2$; 2) $x^2 - 7x + 10 < 0$;

$$3) \frac{1}{2x} > 3; \quad 4*) x^3 - 3x^2 - x + 3 > 0; \quad 5) \frac{x^2 - 6x + 9}{x-1} \leq 0;$$

$$6) \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x} \leq 0; \quad 7*) \frac{(x-4)(x-5)^2}{x-7} < 0; \quad 8*) \frac{x^4 + 2x^3 - x - 2}{3x^2} \geq 0.$$

15. Tengsizliklar sistemasini yeching: 1) $\begin{cases} -2x^2 + 5x - 3 \geq 0, \\ 5x - 6 < 0; \end{cases}$

$$2) \begin{cases} \frac{x^2}{x-1} \geq 0, \\ \frac{x^2-3}{3x+5} \leq 0; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} \frac{(x-1)^2-1}{5} + \frac{x}{2} < \frac{2(x-1)^2}{10} + \frac{x-1}{2} + 3, \\ 1-x > \frac{0,5(x-1)-1}{2} - \frac{2(x-1)+4,5}{3}. \end{cases}$$

16. Qo'sh tengsizlikni yeching:

- 1) $1 < \frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3} \leq 6$; 2) $-1,25 < \frac{1}{4}(1-3x) \leq 1\frac{1}{4}$;
3) $1 < \frac{3x-1}{12} + x + 2 < 3$; 4) $5x - 20 \leq x^2 \leq 8x$.

17. Tekislikda $A(8; 7)$ va $B(-5; 4)$ nuqtalardan teng uzoqlikda joylashgan $C(x; 0)$ nuqtani toping.

18. Tekislikda $A(12; 9)$ va $B(-9; 7)$ nuqtalardan teng uzoqlikda joylashgan $C(0; y)$ nuqtani toping.

19. Tenglamani yeching: 1) $4^{13x+5} = 4^{23-x}$; | 2) $7^{14x-3} = 7^{85+5x}$;

3) $6^{x+7} = 36^{3x}$; | 4) $8^{x+5} = 128^{2-5x}$; | 5) $3^{x+2} - 3^x = 108$;

6) $2^{x+2} + 2^x = 5$; | 7) $11 \cdot 16^x + 9 \cdot 12^x - 20 \cdot 9^x = 0$; | 8) $9^{x^2-4x} = 243^{2(x^2-15)}$;

9) $9^x - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$; | 10) $6 \cdot 25^x + 7 \cdot 15^x - 13 \cdot 9^x = 0$; | 11) $3^{x+2} + 3^{x-1} + 3^x = 39$.

20. Savdogar 100 000 000 so'mni bankka yillik 14% foyda bilan ma'lum muddatga qo'ydi. Muddat oxirida u 148 154 400 so'm oldi. Pul necha yilga qo'yilgan edi?

21. Tadbirkor 100 000 000 so'mni bankka yillik 16% foyda bilan ma'lum muddatga qo'ydi. Muddat oxirida u 181 063 936 so'm oldi. Pul necha yilga qo'yilgan edi?

22. Aholi soni yiliga 2% ga ortsa, necha yildan so'ng, aholi soni 2 barobar ortadi?

23. Aholi soni yiliga 1% kamaysa, necha yildan so'ng, aholi soni 10% kamayadi?

24. Tengsizlikni yeching: 1) $\sqrt{3x-13} > 15$; | 2) $\sqrt{2x+23} > -17$;

3) $\sqrt{2x+25} \geq -27$; | 4*) $\sqrt{x^2+5x+14} > x-18$;

5*) $\sqrt{x^2-3x+22} > x+23$; | 6*) $\sqrt{x^2-5x+26} \leq x-23$;

7*) $\sqrt{x^2-13x+44} \leq x-36$; | 8*) $\sqrt{x^2-25x+34} \geq \sqrt{x^2-3x+23}$.

25. 1) Tekislikda $A(12; 4)$, $B(-23; 5)$, $C(x; y)$ nuqtalar berilgan. $AC > BC$ shartni qanoatlantiruvchi to'g'ri chiziqni toping.

2) Tekislikda $A(24; 34)$, $B(-25; 37)$, $C(x; y)$ nuqtalar berilgan. $AC > BC$ shartni qanoatlantiruvchi to'g'ri chiziqni toping.

26. Tengsizlikni yeching: 1) $4^x \geq 64$; 2) $3^x \leq 81$; | 3) $(0,5)^x < \frac{1}{64}$;

$$4) \left(\frac{1}{9}\right)^x < \frac{1}{27}; \quad | \quad 5) 3^{6-x} > 3^{3x-2}; \quad | \quad 6) 2^{9x-x^3} > 1; \quad | \quad 7) 0,4^{x^2-x-20} > 1.$$

$$27. \text{ Hisoblang: } 1) \log_2 4; \quad | \quad 2) \log_{0,5} 0,25; \quad | \quad 3) 6^{\log_6 50}; \quad | \quad 4) \left(\frac{1}{7}\right)^{1+2\log_7 3};$$

$$5) 4^{\log_4 5 - \log_4 5}; \quad 6) 16^{0,5 \log_4 10}; \quad 7) \frac{4}{5} (1 + 9^{\log_3 8})^{\log_{65} 5};$$

$$8) 27^{\frac{1}{3} \log_1 0,5 - \log_{27} 2}; \quad 9) 5^{\log_{\sqrt{5}} 4 + \log_5 3}; \quad 10*) 3 \log_2 \log_4 16 + \log_{0,5} 2.$$

$$28. \text{ Taqqoslang: } 1) \log_6 7 \text{ yoki } \log_7 6; \quad | \quad 2*) \log_{0,4} 0,5 \text{ yoki } \log_{\sqrt{2}} \sin \frac{\pi}{2}.$$

29. Funksiyaning aniqlanish sohasini toping:

$$1) y = \log_3(4 - 5x); \quad | \quad 2) y = \log_{0,1}(x^2 - 3x - 4); \quad | \quad 3) y = \lg \frac{x^2 + 4x}{x^2 - 3x - 4}.$$

30*. b ni a va c orqali ifodalang:

$$1) b = \log_5 6, \quad a = \log_2 3, \quad c = \log_2 10;$$

$$2) b = \log_{30} 8, \quad a = \log_{30} 3, \quad c = \log_{30} 5.$$

$$31. \text{ Tenglamani yeching: } 1) \log_3 x = \log_3 1,5 + \log_3 8;$$

$$2) \log_{0,3} x = 2 \log_{0,3} 6 - \log_{0,3} 12; \quad | \quad 3) \log_2(x^2 + 4x + 3) = 3;$$

$$4) \log_5(x+1) + \log_5(2x+3) = 1; \quad | \quad 5) \lg^2 x = 1; \quad 6) x^{\log_2 x} = 8;$$

$$7) \log_5^2 x + \log_{0,2} x = 2; \quad | \quad 8*) \frac{1}{\lg x - 6} + \frac{5}{\lg x + 2} = 1;$$

$$9*) \log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1).$$

$$32. \text{ Tengsizlikni yeching: } 1) \log_3(12 - 2x - x^2) > 2;$$

$$2) \log_4(x+1) + \log_4 x < \log_4 2; \quad 3) \log_5(x-3) < 2;$$

$$4) \log_{0,5}(2x-4) > -1; \quad 5) \log_{0,5} x^2 > \log_{0,5} 3x;$$

$$6) 3^{\log_2 \frac{3x-1}{x}} < 1;$$

$$7*) (5x-2) \log_{0,(3)} x < 0.$$

33*. Tenglamalar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} 2^{\log_2(3x-4)} = 8, \\ \log_9(x^2 - y^2) - \log_9(x+y) = 0,5. \end{cases}$$

34*. Tengsizliklar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} (x-1) \lg 2 + \lg(2^{x+1} + 1) < \lg(7 \cdot 2^x + 12), \\ \log_x(x+2) > 2. \end{cases}$$

35. O‘shir tartibida yozing: 1) $\sin 30^\circ$; $\cos 30^\circ$; $\cos 180^\circ$; $\sin 90^\circ$;
2) $\sin 45^\circ$; $\cos(-90^\circ)$; $\sin 210^\circ$; $\cos(-45^\circ)$.

36. Soddalashtiring: 1) $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + (\cos \alpha + \sin \alpha)^2 - 2$;

$$2^*) \frac{\sin 90^\circ - \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) \operatorname{tg}(45^\circ + 3\alpha)}{\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) + \operatorname{ctg}(45^\circ - 3\alpha)} + \operatorname{tg} 4\alpha.$$

37. Berilgan shartga ko‘ra hisoblang:

$$1) \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4}; \quad 2) \frac{3 \sin^2 \alpha + 12 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha - 2 \cos^2 \alpha}, \operatorname{tg} \alpha = 2.$$

38. Berilganlarga ko‘ra qolgan trigonometrik funksiyalar qiymatlarini toping: 1) $\sin \alpha = -0,6$, $270^\circ < \alpha < 360^\circ$;

2) $\operatorname{tg} \alpha = 2$, $180^\circ < \alpha < 270^\circ$.

39. Ko‘paytma ko‘rinishiga keltiring: 1) $\sin 2\alpha + \sin \alpha$;

2) $\cos x - \cos 3x$; 3) $\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x$; 4) $\cos 2x - \cos 4x - \cos 8x$.

40. Tenglamani yeching: 1) $\sin 3x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; 2) $\sin \frac{x}{2} = 1,5$;

3) $\cos 2x = \frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) $\cos \frac{x}{2} = 1,5$; 5) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - 30^\circ\right) = 0$;

6) $\operatorname{tg}(3x + 60^\circ) = \sqrt{3}$; 7) $\operatorname{tg} 4x = 3$; 8) $\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} - 30^\circ\right) = 0$;

9) $\sin^2 x - 2 \sin x - 3 = 0$; 10) $\cos 2x = 7 \sin x$;

11) $\cos^2 x + 4 \sin^2 x = 2 \sin 2x$; 12) $7 \operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x = 15$;

13*) $\sin^2 x - \cos^2 2x + \sin^2 3x = 1,5$; 14*) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{8}$.

41. Tenglamalar sistemasini yeching:

$$1) \begin{cases} \cos(x+y) = 0, \\ \cos(x-y) = \frac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases} \quad 2^*) \begin{cases} \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4}, \\ \sin x \sin y = \frac{\sqrt{3}}{4}; \end{cases} \quad 3^*) \begin{cases} \sin x \sin y = \frac{3}{4}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3. \end{cases}$$

42. Tengsizlikni yeching:

1) $\sin x > \frac{1}{2}$; 2) $\sin x < \frac{1}{2}$; 3) $\sin x \geq -\frac{1}{2}$; 4) $2 \cos x > 1$;

5) $\sin 3x \cos x + \cos 3x \sin x \geq \frac{1}{2}$; 6) $\cos 2x \leq -1$; 7) $2 \cos 2x \geq 1$;

8*) $\operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{4} \operatorname{tg} x - \frac{3}{4} \leq 0$; 9) $\operatorname{tg}^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq \sqrt{3}$.

43. 2, 5, 8, ... arifmetik progressiyaning 15- hadini va dastlabki 15 ta hadi yig'indisini toping.

44. Agar $a_3=25$, $a_{10}=-3$ bo'lsa, arifmetik progressiyaning 1-hadini va ayirmasini toping.

45. 2 xonali 3 ga karrali sonlarning yig'indisini toping.

46. -4, 16, -64... geometrik progressiyaning 7- hadini va dastlabki 7 ta hadi yig'indisini toping.

47. Agar $b_3=8$, $b_7=128$ bo'lsa, geometrik progressiyaning 1-hadini va maxrajini toping.

48. Yig'indini toping:

1) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$; | 2) $\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} + \dots$; | 3*) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{2} - \dots$.

49. $y=x^2$ funksiya uchun Δx va Δy ni toping:

1) $x=2,5$ va $x_0=2$;

2) $x=3,9$ va $x_0=3,75$;

3) $x=-1,2$ va $x_0=-1$;

4) $x=-2,7$ va $x_0=-2,5$.

50. Hosilani toping:

1) $y = 4x^3 - 2x^2 + x - 5$;

2) $y = -x^3 + 9x^2 + x - 1$;

3) $y = 0,25x^4 + 0,3x^3 + 0,5x^2 - 1$;

4) $y = (x^3 - 1)(x^2 + x + 1)$;

5) $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$;

6) $y = (x^3 - 1)^6$;

7) $y = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$;

8) $y = \frac{1 + \cos x}{\cos x - 1}$;

9) $y = \cos x^3$;

10) $y = \cos \frac{1}{x^2}$;

11) $y = \text{tg}(2x^2 + 1)$;

12) $y = \lg(5x^2 + 1)$;

13*) $y = \ln^2(x^2 - 1)$;

14) $y = 2 \cdot 5^x + 3e^x$;

15) $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$.

51. Berilgan funksiyaning kritik nuqtalari, o'sish va kamayish oraliqlari, ekstremumlari hamda $x = -2$ absissali nuqtadan o'tuvchi urinma tenglamasini toping: 1) $y = -x^2 - 2x$; | 2) $y = x^3 + 3x^2$; | 3) $y = 0,5x^4$.

52. Berilgan funksiyaning boshlang'ich funksiyalarini toping:

1) $y = -7x + 4$; | 2) $y = 3x^2 + 4$; | 3) $y = 2x^2 + 3x - 8$;

4) $y = \frac{1}{x^2} - 4\sin x$; | 5) $y = 1 - \cos 3x$; | 6) $y = x^2 + \sqrt{x}$;

7) $y = \frac{2}{\sin^2 3x}$; | 8) $y = \frac{3}{\cos^2 5x}$; | 9) $y = 7\sin \frac{x}{3} + \frac{2}{\cos^2 4x}$;

10) $y = \frac{1}{\sqrt{3x-2}}$; | 11) $y = \frac{5}{\sqrt{2x+7}}$; | 12) $y = \frac{6}{(5x-7)^3}$;

13) $y = \frac{2}{4x-1}$; | 14) $y = e^{2x-3}$; | 15) $y = 2^{0,5x+1}$.

53. Berilgan chiziqlar bilan chegaralangan soha yuzini toping:

- 1) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$; 2) $y = -\sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$; $x = 9$;
 3) $y = \frac{2}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$; 4) $y = \sin x$, $y = 0$, $0 \leq x \leq \pi$;
 5) $y = \frac{1}{x \ln 2}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$.

54. Integralni hisoblang:

- 1) $\int_{-2}^2 x^3 dx$; 2) $\int_{-\pi}^2 \sin x dx$; 3) $\int_{-3}^2 4x^3 dx$;
 4) $\int_0^2 (3x^2 - 4x + 5) dx$; 5) $\int_1^4 (x - 2\sqrt{x}) dx$; 6) $\int_{-1}^1 (x+1)^2 dx$;
 7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x + 60^\circ) dx$; 8) $\int_0^2 (3x^4 + 2x^2 - 5) dx$;
 9) $\int_4^9 \left(\frac{2x}{5} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx$; 10) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^2 \frac{dx}{\cos^2(2x + 60^\circ)}$; 11) $\int_{-4}^2 \frac{xdx}{\sqrt{2-0,5x}}$.

Yozma nazorat ishi namunasi



1. Hosilani toping: $y = (x^2 - 5x + 8)^6$.

2. Funksiyaning ekstremumlarini toping: $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 8$.

3. $y = 2x^2 - 5x + 4$ funksiya grafigining $x = 3$ absissali nuqtadan o'tuvchi urinma tenglamasini yozing.

4. Berilgan funksiyaning boshlang'ich funksiyalarini toping:
 $y = 8(11 - 3x)^5$.

5. Berilgan chiziqlar bilan chegaralangan shakl yuzini toping:

$y = x^2 - 7x + 10$, $y = 10$.

6. Integralni hisoblang: $\int_{\frac{\pi}{6}}^2 \operatorname{tg} 2x dx$.

7. Yoqlari 1 dan 6 gacha raqamlar bilan nomerlangan ikkita kub tashlanganida hosil bo'ladigan ikki xonali sonning raqamlari yig'indisi 4 ga bo'linishining ehtimolligini toping.

JAVOBLAR II BOB

51. $5\frac{1}{4}$. 52. $2\frac{1}{3}$. 53. 1) $\frac{2}{3}$; 2) $1\frac{2}{3}$; 3) 9; 4) $\frac{1}{4}(a^2-1)$.
54. 1) $9\frac{2}{3}$; 2) $7\sqrt{3}-1$; 3) $4\frac{3}{4}$; 4) $2\sqrt{\ln 3}$. 55. $V = \frac{\pi^2}{2}$ (kub birlik).
56. $7,5\pi$ (kub birlik). 57. 340 m. 58. 18,75 m. 59. 120 m.
60. 32 m. 61. $V=2\pi$ (kub birlik). 62. 1) 18; 2) $\frac{8}{3}$; 3) $\frac{5}{12}$; 4) $\frac{8}{9}$.
63. 1) $\frac{1}{3}$; 2) 1; 3) $\frac{3\pi-4}{4}$; 4) $\frac{6e-5}{3}$. 64. $\frac{64}{3}$. 65. 18. 66. 0,009 J.
67. $\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = s(t_2) - s(t_1)$. 68. $\frac{\pi}{3}$. 69. $17\frac{1}{15}\pi$. 70. $\approx 0,8099$ ((1)- formula).
71. $\approx 0,7599$ ((1a)- formula). 72. 0,7850 (trapetsiyalar formulasi).
74. 1) $y = \operatorname{tg}x - \operatorname{ctg}x + C$; 2) $y = \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C$. 75. 2) $y = \frac{C}{x}$. 77. $C=2$.
78. 60 minut. 79. 1) $\frac{m_0}{\sqrt{10^2}}$; 2) $\frac{m_0}{\sqrt{2}}$; 3) $\frac{m_0}{4}$.
83. $y' = -0,2 \cdot (y-3)$; $y = 3 + C \cdot e^{-0,2t}$. 84. 1), 3) - bo'ladi.
85. 1), 2) - bo'ladi. 86. 1) $f_3(x)$ uchun; 2) $f_2(x)$ uchun; 3) $f_2(x)$ uchun.
88. 2) $\ln(e^x+1)+C$; 3) $\operatorname{arctg}(x+2)+C$; 5) $\frac{1}{\cos x} + C$.
89. 2) $\frac{1}{3}x^3 - x + C$; 4) $-\frac{1}{3}\ln|\cos 3x| + C$; 6) $\ln|x(x^2+2)| + C$.
93. 2) $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{2}{3}$; 4) $F(x) = -\cos x - \sin x + 2$.
96. 1) $F(x) = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{8} + C$; 2) $F(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x} + C$;
- 3) $F(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}} + \frac{3}{5}\cos x \sqrt[3]{\cos^2 x} + C$; 4) $F(x) = \ln|\sin x| - \sin x + C$;
- 5) $F(x) = -\ln|\cos x - \sin x| + C$; 6) $F(x) = \frac{1}{6}\sin 6x + \frac{1}{4}\sin 4x + C$.
98. 3) $\operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{4}$. 99. 1) $\sqrt{2}-1$; 2) $1 - \frac{1}{e^2}$.
100. 2) 1; 3) $\ln\sqrt{10}$. 101. 1) $a=2$; 2) $a=4$. 102. 1) 24; 2) 32; 3) 0,5.

103. 1) 1120,4; 3) 2; 43) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 109. $6\frac{2}{3}$. 110. 1) 8; 2) $10\frac{2}{3}$. 111. 1) $2\frac{2}{3}$; 2) 60. 112. 1) $21\frac{1}{3}$; 2) $2e^3+1$. 113. 1) $\frac{1}{6}$; 2) $1\frac{1}{6}$. 115. 1) $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$; 2) 36; 3) 36; 4) e^2-1 .

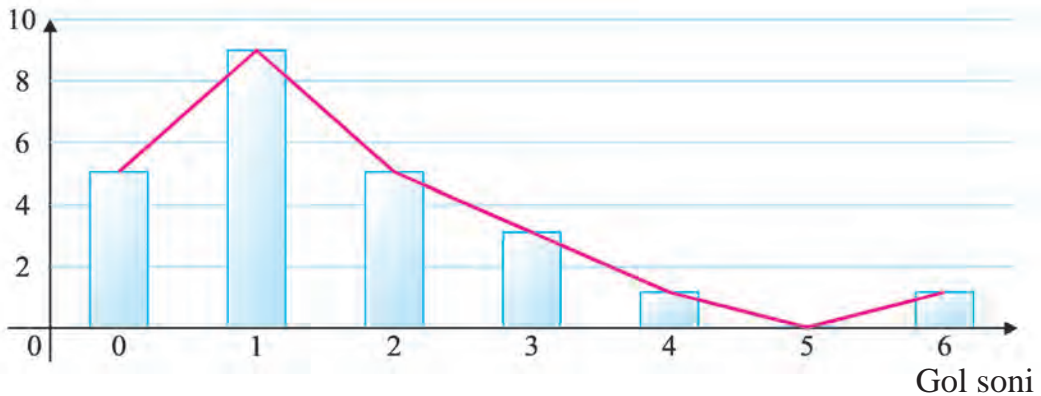
116. 1) $\frac{v_0^2}{2g}$ metr. 118. 64,5 metr. 120. $A = \frac{\pi R^2 H^2 g}{2} J$.

III BOB

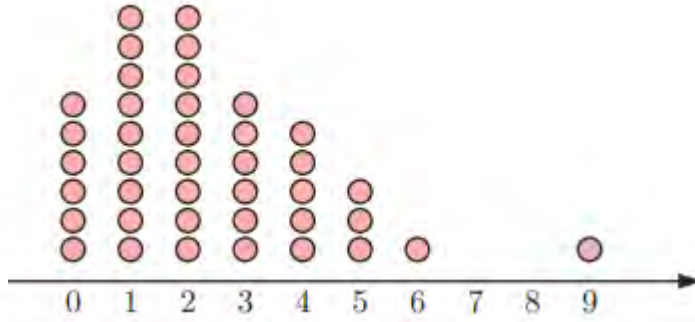
1. 6. 2. 18. 3. 3. 4. 24. 5. $10+4+6=20$. 6. $24=6\cdot 4$. 7. $7\cdot 5\cdot 4=140$.
 8. 24. 9. $6\cdot 5\cdot 4=120$. 10. $20=5\cdot 4$. 11. $18\cdot 17/2=153$. 12. C_n^3 .
 13. C_7^4 . 14. a) $C_{10}^1 C_{11}^2 + C_{10}^2 C_{11}^1$. b) $C_{10}^1 C_{11}^3 + C_{10}^2 C_{11}^2 + C_{10}^3 C_{11}^1$.

15. $C_m^2 C_n^2$. 16. $\frac{n(n-1)}{2}$. 19. -165. 21. 824.
 23.

Gollar soni	Sanash	Chastota	Nisbiy chastota
0		5	0.208
1		9	0.375
2		5	0,208
3		3	0,125
4		1	0,042
5		0	0
6		1	0,042
	Jami:	24	

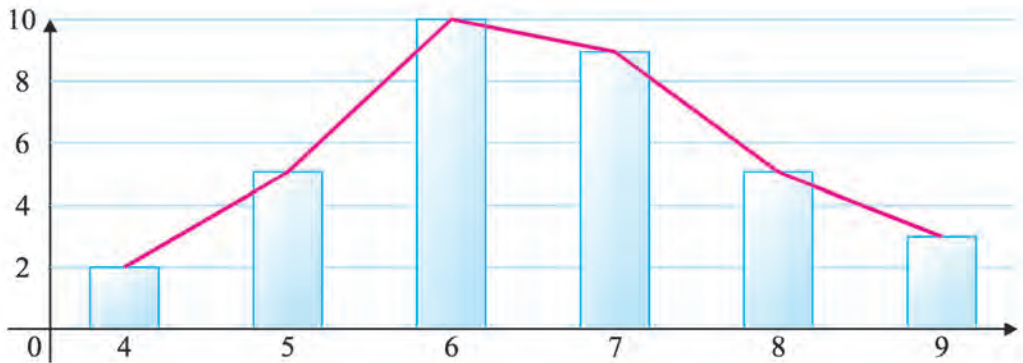


24.



25.

4		2	0,059
5		5	0,147
6		10	0,294
7		9	0,265
8		5	0,147
9		3	0,088



26. a) 45; b) 1; c) 8; d) 20%.

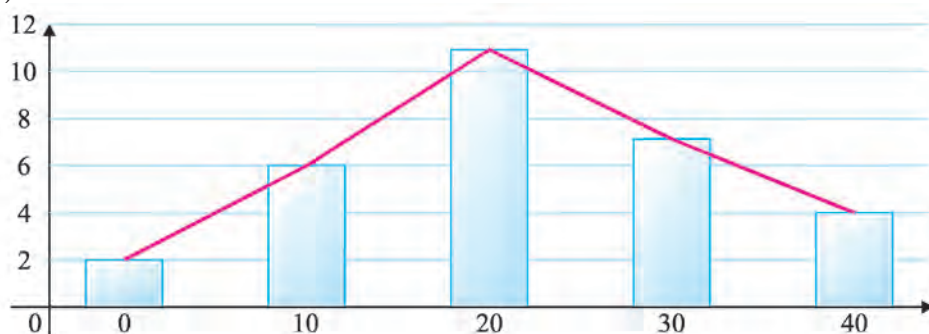
27. a)

0 – 9		2	0,067
10 – 19		6	0,200
20 – 29		11	0,367
30 – 39		7	0,233
40 – 49		4	0,133

b) 2;

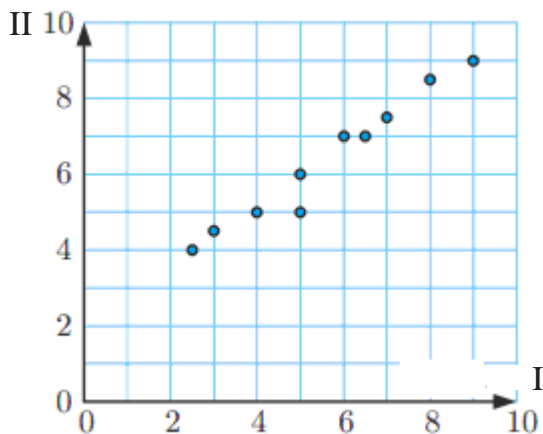
c) 36,7%;

e)

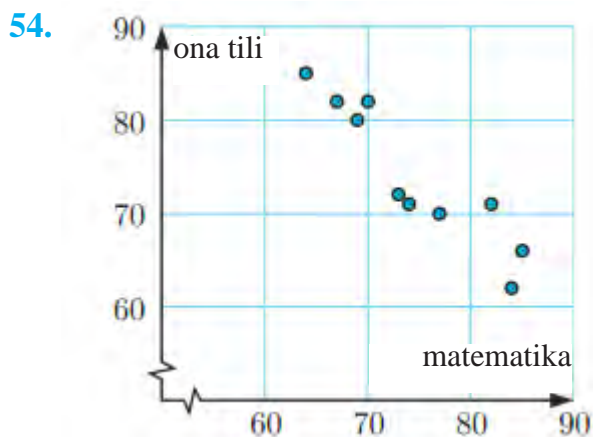


29. a) I) 5,61; II) 6; III) 6. b) I) 16,3; II) 17; III) 18. c) I) 24,8; II) 24,9; III) 23,5. 30. a) A:6,46; B:6,85. b) A:7; B:7. d) 7 – ikkita tanlanma o‘rtachasi. 31. Ikkinchi sportchi – 164. 32. a) 1; b) 1,8; c) 2. 33. a) 44; b) 44; c) 40,2; d) o‘sadi, 40,3. 38. 31,7. 39. a) 70; b) taxminan 411000 l; c) taxminan 5870 l. 40. a) 11,5; b) I) 11,3; II) 11,4. 41. a)125; b) 119; c) 12%; d) 137. 44. O‘rta qiymat – 1,72; Standart chetlanish – 1,67. 45. O‘rta qiymat – 14,5; Standart chetlanish – 1,75. 46. O‘rta qiymat – 45; Standart chetlanish – 3,28. 52. a) sust musbat bog‘langan, chiziqli; b) kuchli manfiy bog‘langan, chiziqli; c) bog‘lanish mavjud emas; d) kuchli manfiy bog‘langan, chiziqli emas; f) sust musbat bog‘langan, chiziqli emas.

53.

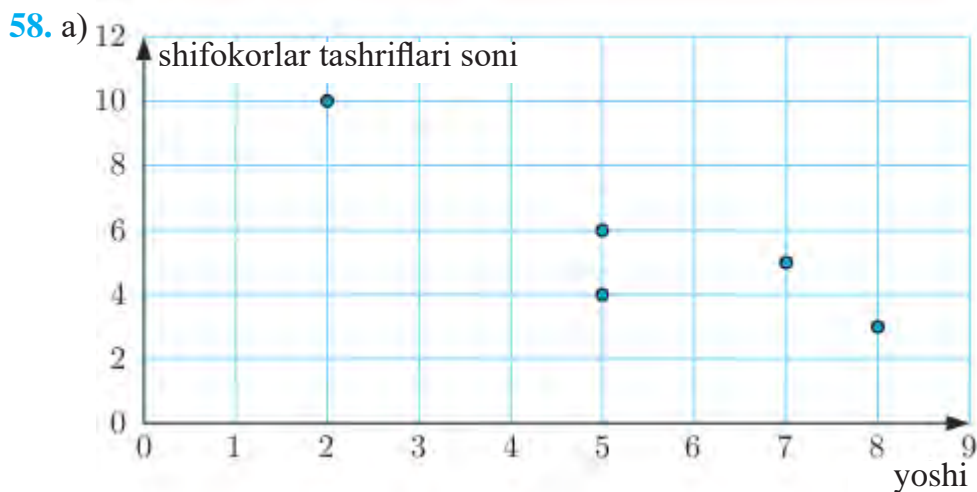


kuchli musbat bog‘langan, I hakam qo‘ygan ballari o‘sganda II hakam qo‘ygan ballar ham o‘sadi.

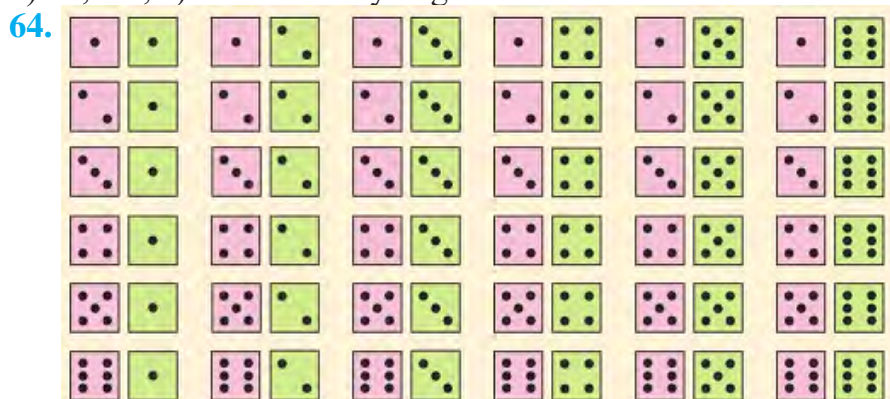


kuchli manfiy bog‘lanish.

55. a) o‘rtacha musbat bog‘lanish. 56. a) *b*; b) *a*; c) *d*; d) *c*; e) *e*; 57. a) $r=1$; b) $r=-1$; c) $r=0$.



b) $-0,892$; c) kuchli manfiy bog‘lanish.



65. 8 ta imkoniyat: GGG ; GGR ; GRG ; RGG ; GRR ; RGR ; RRG ; RRR .

IV BOB

1. 4) \emptyset ; 5) \emptyset ; 7) 2; 3; -2; 11) -2. 2. 5. 4. 1) 1; 2; -1; 4; 6) 0; 1; 5. 1) (4; 1); 3) (2; 1); (1; -2). 6. 2) (1; 1); (1; -1); $\left(\frac{5}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\frac{5}{4}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 3) (4; 2); (-4; -2); (4; -2); (-4; 2); (2; 4); (-2; -4); (2; -4); (-2; 4). 7. 1) (5; 1); (-5; -1). 8. 1) (2; 1); (-2; 5); 2) (5; 1); (1; 5). 9. 5. 10. 2 ta. 11. 4 ta. 12. 2. 13. 3 ta. 14. 3) $\left(0; \frac{1}{6}\right)$; 5) $(-\infty; 1) \cup \{3\}$; 6) $(-\infty; -3) \cup (0; 3]$. 19. 1) $\frac{9}{7}$; 4) $-\frac{1}{38}$; 6) 0; 7) 0; 9) 2. 24. 1) $\left(\frac{238}{3}; +\infty\right)$; 2) \emptyset ; 3) $(-12,5; +\infty)$. 26. 1) $[3; +\infty)$; 2) $(-\infty; 4]$; 3) $(6; +\infty)$; 5) $(-\infty; 2)$. 27. 1) 2; 3) 50; 6) 10; 7) 4. 28. 1) $\log_6 7 > \log_7 6$. 29. 1) $(-\infty; 0,8)$; 2) $(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$. 30. 1) $\frac{1+a}{c-1}$; 2) $\frac{3(1-a)}{1+c}$. 31. 1) 12; 2) 3; 3) -5; 1; 5) 10; 0,1; 8) 100; 100 000 000. 32. 1) (-3; 1); 2) (0; 1); 3) (3; 28); 5) (0; 3). 33. (4; 1). 34. (1; 2). 35. 1) $\cos 180^\circ$; $\sin 30^\circ$; $\cos 30^\circ$; $\sin 90^\circ$. 36. 1) 0. 37. 1) $\frac{12}{7}$. 39. 2) $2\sin 2x \sin x$. 40. 1) $(-1)^{n+1} 15^\circ + 60^\circ n$, $n \in \mathbb{Z}$; 5) \emptyset ; 6) $60^\circ + 360^\circ n$, $n \in \mathbb{Z}$; 9) $240^\circ + 360^\circ n$, $n \in \mathbb{Z}$; 10) $-90^\circ + 360^\circ n$, $n \in \mathbb{Z}$. 42. 5) $(7^\circ 30' + 90^\circ n; 37^\circ 30' + 90^\circ n)$, $n \in \mathbb{Z}$. 48. 1) 2. 50. 1) $12x^2 - 4x + 1$; 3) $x^3 + x^2 + x$; 7) $18x^2(x^3 - 1)^5$. 51. 2) o'sadi: $(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$; kamayadi: (-2; 0); ekstremumlari: -2 va 0; urinma tenglamasi: $y = -6x - 8$. 52. 2) $x^3 + 4x + c$; 5) $x - \frac{\sin 3x}{9} + C$. 54. 3) -81; 4) 10; 7) $\frac{1}{2}$.

Foydalanilgan va tavsiya etiladigan adabiyotlar

1. *Ш.А. Алимов и др.* Алгебра и начала математического анализа, учебник для 10–11 классов. Учебник для базового и профильного образования.– М., “Просвещение”, 2016.
2. Mal Coad and others. Mathematics for the international students. Mathematical Studies SL 2nd edition. Haese and Harris publications. 2010.
3. *А.Н. Колмогоров и др.* Алгебра и начала анализа. Учебное пособие для 10–11 классов.– М., “Просвещение”, 2018.
4. *Э. Сайдаматов и др.* Алгебра и основы математического анализа. часть 2, учебное пособие.– Т., “Ilm ziyo”, 2016.
5. *А.У. Abduhamidov va boshqalar.* Algebra va matematik analiz asoslari, 1- qism.– Т., “O‘qituvchi”, 2012.
6. *Н.П. Филичева.* Уравнения и системы уравнений: Учебно-методическое пособие.– “Рязань”, 2009.
7. *М.И. Исроилов.* Ҳисоблаш методлари.– Тошкент, “Ўқитувчи”, 1988.
8. *Г.К. Муравин и др.* Алгебра и начала анализа. Учебник для 10 класса. – М., “Дрофа”, 2006.
9. Алгебра. Учебное пособие для 9–10 классов. Под ред. Н.Я. Виленкина. – М., “Просвещение”, 2004.
10. *Г.П. Бевз и др.,* Алгебра и начала анализа. Учебник для 11 класса. – Киев, 2011.
11. “Математика в школе” jurnali.
12. Fizika, matematika va informatika. Ilmiy-uslubiy jurnal (2001- yildan boshlab chiqqan).
13. *М.А. Mirzaahmedov, Sh.N. Ismailov.* Matematikadan qiziqarli va olimpiada masalalari. I qism.– Т., “Turon-Iqbol”, 2016.
14. Matematikadan qo‘llanma, I va II qismlar. O‘qituvchilar uchun qo‘llanma. Prof. Т.А. Azlarov tahriri ostida.– Т., “O‘qituvchi”, 1979.
15. *М.А. Mirzaahmedov, D.A. Sotiboldiyev.* O‘quvchilarni matematik olimpiadalariga tayyorlash.– Т., “O‘qituvchi”, 1993.
16. *М.А. Mirzaahmedov, Sh.N. Ismailov.* 10-sinf uchun “Algebra va analiz asoslari”dan testlar.– Т., G‘.G‘ulom NMIU, 2018.
17. *В.М. Говоров и др.* Сборник конкурсных задач по математике, Наука. – М., 1984.
18. *Т.А. Azlarov, X. Mansurov.* Matematik analiz asoslari. 3-nashr. – Т., “Universitet”2005.

19. *Б.П. Демидович*. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.– М., Наука, 1990.
20. Материалы ЕГЭ по математике.–М., 2016.
21. *Е.П. Кузнецова, Г.А. Муравьева*. Сборник задач по алгебре, 11-класс. “Мнемозина”, 2016.
22. *А.Г. Мордкович*. Сборник задач по алгебре, 10–11 классы. “Мнемозина”, 2016.
23. *М.И. Шкиль, З.И. Слепкань*. Алгебра, учебник для 11 класса.– Киев, 2016.
24. *Е.П. Нелина, О.Е. Долгова*. Алгебра, учебник для 11 класса.– Киев, 2015.
25. *Ю. Н. Тюрин и др.* Теория вероятностей и статистика.– М.: МЦНМО ОАО “Московские учебники”, 2008.
26. *М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова*. Элементы статистики и теории вероятности. Учеб. пособие для 7–9 кл. общеобразоват. учреждений, М.В.Ткачева, Н.Е.Федорова. – М., Просвещение, 2004.
27. *Е.А. Бунимович, В.А. Булычев*. Основы статистики и вероятности. 5–11 кл.: учебное пособие – М., Дрофа, 2008.
28. *Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк*. Алгебра: элементы статистики и теории вероятностей: учеб. Пособие для учащихся 7–9 кл. общеобразоват. учреждений. 3- е изд. – М., Просвещение, 2005.
29. *В.С. Крамор*. Повторяем и систематизируем школьный курс "Алгебры и начал анализа". 4-е издание.– М., "ОНИКС", 2008.
30. *Г. В. Дорофеев и др.* Математика 5–9. Учебное пособие. – М., Просвещение. 2009.
31. <http://www.edu.uz> – Xalq ta’limi vazirligining axborot ta’lim portali.
32. <http://www.eduportal.uz> – Multimedia markazi axborot ta’lim portali.
33. <http://www.problems.ru> – Matematikadan masalalar izlash tizimi (rus tilida).
34. <http://matholymp.zn.uz> – O‘zbekistonda va dunyoda matematik olimpiadalar.
35. <http://www.ams.org/mathweb/> – Internetda matematika (ingliz tilida).

MUNDARIJA

II bob. INTEGRAL VA UNING TATBIQLARI

47–50. Aniq integralning tatbiqlari.....	3
51. Taqribiy integrallash.....	10
52–56. Masalalar yechish.....	13

III bob. MA'LUMOTLAR TAHLILI. EHTIMOLLIK

57–58. Kombinatorika masalalari	27
59–60. Nyuton binomi	33
61–64. Statistik ma'lumotlar. Statistik ma'lumotlarning turli ko'rinishlari.....	37
65–67. O'rta qiymat, moda va mediana. Chetlanish, standart chetlanish	45
68–70. Ikkita tur ma'lumotlar o'rtasida bog'liqlikni tadqiq qilish	57
71–73. Tasodifiy hodisalar va ularning ehtimolligi haqida tushuncha.....	68
74–77. Qarama-qarshi hodisalar. Hodisalar ustida amallar va ularni Eyler–Venn diagrammalarida tasvirlash	78
78–80. Ehtimolliklarni qo'shish va ko'paytirish. Hodisalarning ehtimolligini hisoblash usullari.....	83
81–85. Binomial va normal taqsimot haqida tushuncha.....	91

IV bob. ALGEBRA VA ANALIZ ASOSLARINI TAKRORLASH

86–93. Algebra va analiz asoslarini takrorlashga oid mashqlar	97
JAVOBLAR	104
Foydalanilgan va tavsiya etiladigan adabiyotlar	110



GEOMETRIYA

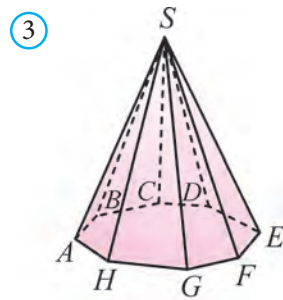
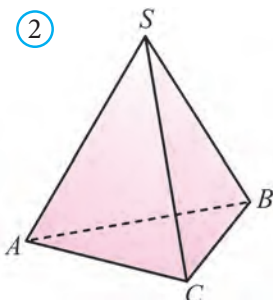
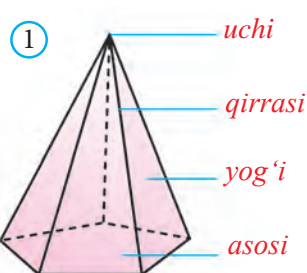
III BOB. PIRAMIDA VA KONUS

10. PIRAMIDA VA KESIK PIRAMIDA

10.1 Piramida

Bitta yog'i ko'pburchak, qolgan yoqlari esa umumiy uchga ega uchburchaklardan iborat ko'pyoq *piramida* deb ataladi (1-rasm).

Ko'pburchak piramidaning *asosi*, uchburchaklar *yon yoqlari*, uchburchaklarning tomonlari piramidaning *qirralari*, umumiy uchi esa piramidaning *uchi* deb ataladi.

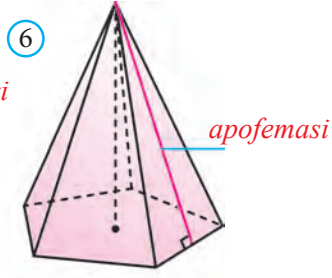
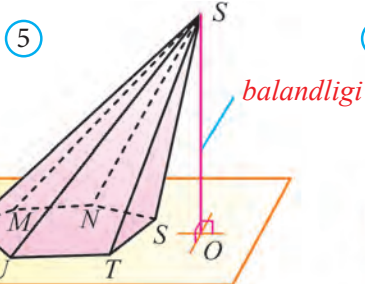
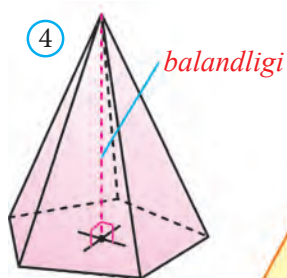


Asosining tomonlari soniga qarab piramidalar *uchburchakli*, *to'rtburchakli* va hokazo *n-burchakli piramidalar* deb yuritiladi. Uchburchakli piramida *tetraedr* deb ham ataladi (2-rasm).

3- rasmda *SABCDEFGH* sakkizburchakli piramida tasvirlangan.

Piramida uchidan uning asos tekisligiga tushirilgan perpendikular uning *balandligi* deb ataladi (4- rasm).

Balandlik piramida asosiga tushmasligi ham mumkin (5-rasm).



Bundan keyin asosi qavariq ko'pburchakdan iborat piramidalarni qaraymiz. Bunday piramidalar qavariq bo'ladi.

Piramida yon sirtining yuzi uning yon yoqlari yuzlarining yig'indisidan iborat.

Piramida to'la sirtining yuzi uning yon sirti va asosining yuzi yig'indisiga teng:

$$S_{\text{to'la}} = S_{\text{yon}} + S_{\text{asos}}$$

Teorema. Agar piramida asosidagi barcha ikki yoqli burchaklari φ ga teng bo'lsa, $S_{\text{asos}} = S_{\text{yon}} \cdot \cos\varphi$ bo'ladi.

Bu ortogonal proyeksiya yuzi haqidagi teoremadan kelib chiqadi.

Muntazam piramida deb asosi muntazam ko'pburchakdan iborat va balandligi asosining markaziga tushuvchi piramidaga aytiladi (6-rasm).

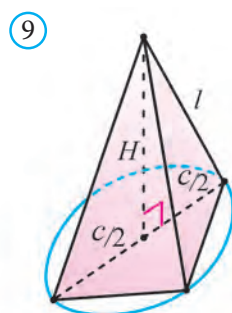
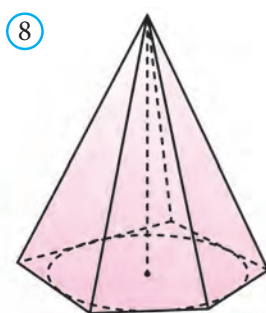
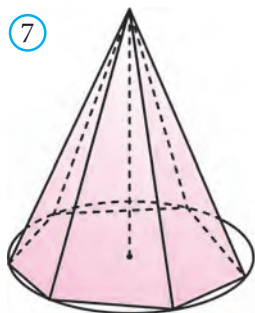
Muntazam piramida yon yog'ining piramida uchidan tushirilgan balandligi piramidaning **apofemasi** deb yuritiladi.

Muntazam piramidaning yon yoqlari, yon qirralari va apofemalari o'zaro teng bo'ladi. Shuningdek, uning asosidagi barcha ikki yoqli burchaklari, barcha yon qirralaridagi ikki yoqli burchaklari ham o'zaro teng bo'ladi.

Muntazam piramida balandligining ixtiyoriy nuqtasi piramida asosining uchlaridan va qirralaridan hamda yon yoqlaridan baravar uzoqlikda yotadi.

Agar piramidaning barcha yon qirralari o'zaro teng bo'lsa, u holda uning asosiga tashqi aylana chizish mumkin va bu aylana markazi piramida balandligi asosi bilan ustma-ust tushadi (7-rasm).

Agar piramida asosidagi barcha ikki yoqli burchaklari o'zaro teng bo'lsa, u holda uning asosiga ichki aylana chizish mumkin va bu aylana markazi piramida balandligi asosi bilan ustma-ust tushadi (8-rasm).



Teorema. Muntazam piramida yon sirtining yuzi uning asosi yarim perimetri bilan apofemasining ko'paytmasiga teng: $S_{\text{yon}} = \frac{1}{2}Pl$, bu yerda P – piramida asosining perimetri, l – apofemasi.

1-masala. Uchburchakli piramida asosining tomonlari 6, 8 va 10 ga teng. Piramidaning yon qirralari asosi tekisligi bilan bir xil burchak hosil qiladi. Agar piramidaning balandligi 4 ga teng bo'lsa, uning yon qirrasini uzunligini toping.

Yechish: Piramida yon qirralari asosi tekisligi bilan bir xil burchak hosil qilgani uchun piramidaning balandligi uning asosiga tashqi chizilgan aylana markaziga tushadi (9-rasm). Buni mustaqil asoslang.

Piramidaning asosi to'g'ri burchakli uchburchak bo'ladi, chunki 6, 8, 10 – Pifagor sonlari: $6^2 + 8^2 = 10^2$.

Ma'lumki, to'g'ri burchakli uchburchakka tashqi chizilgan aylana markazi gipotenuzaning o'rtasida yotadi. Shunday qilib, piramidaning balandligi gipotenuzaning o'rtasiga tushar ekan.

Piramidaning yon qirrasini – l , balandligini – H va asosining gipotenuzasini c bilan belgilaylik. Unda:

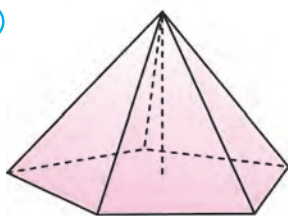
$$\text{Pifagor teoremasiga ko'ra } l^2 = H^2 + (c/2)^2 = 4^2 + 5^2 = 41.$$

$$\text{Demak, } l = \sqrt{41}. \text{ Javob: } \sqrt{41}. \square$$

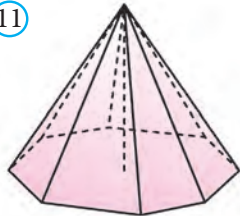
Mavzuga oid masalalar va amaliy topshiriqlar

- 349.** To'rtburchakli muntazam piramidaning balandligi 12 cm, asosining tomoni 16 cm bo'lsa, piramidaning yon qirrasini toping.
- 350.** Uchburchakli muntazam piramidaning balandligi 1 cm, asosining tomoni 6 cm bo'lsa, uning apofemasini toping.
- 351.** Oltiburchakli muntazam piramidaning balandligi 8 cm, asosining tomoni 4 cm bo'lsa, uning katta diagonal kesimining yuzini hisoblang.
- 352.** To'rtburchakli muntazam piramida diagonal kesimining yuzi $12\sqrt{2}$ cm², piramidaning balandligi esa 4 cm. Piramida asosining yuzini hisoblang.
- 353.** Beshburchakli muntazam piramida berilgan (10-rasm). Piramida balandligi uning asosiga ichki chizilgan aylana radiusiga teng. Asosining yuzi $\sqrt{800}$ ga teng. Piramidaning yon sirtini toping.
- 354.** Sakkizburchakli muntazam piramida berilgan (11-rasm). Piramida yon sirti 25 ga, piramida balandligi esa $\sqrt{12}$ ga teng. Piramidaning asosiga ichki chizilgan aylana radiusini toping.

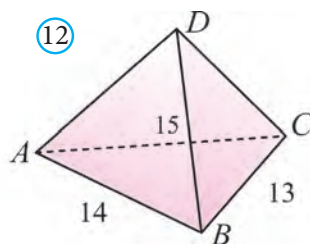
⑩



⑪



⑫

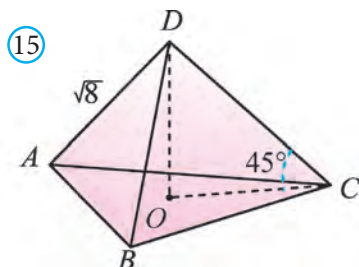
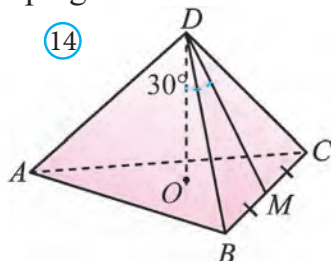
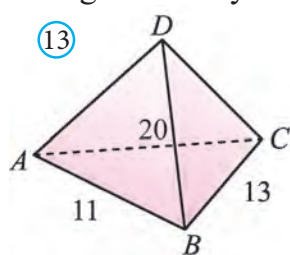


355. $DABC$ piramida yon yoqlarining D uchidan tushirilgan balandliklari 5 ga teng (12-rasm). $AB=14$, $BC=13$, $AC=15$. Piramida balandligini toping.

356. $DABC$ piramida D uchidan tushirilgan yon yoqlarining balandliklari o'zaro teng (13-rasm). Piramida balandligi 4 ga teng. $AB=11$, $BC=13$, $AC=20$. Piramidaning yon sirtini toping.

357. $DABC$ – muntazam piramida. DO – piramida balandligi, $\angle ODM = 30^\circ$ (14- rasm). ADM tekislik bilan piramidani kesganda hosil bo‘lgan kesim yuzi $18\sqrt{3}$ ga teng. AB ni toping.

358. $DABC$ – muntazam piramida. DO – piramida balandligi, $\angle DCO = 45^\circ$. $AD = \sqrt{8}$ (15-rasm). AOD tekislik bilan piramidani kesganda hosil bo‘lgan kesim yuzini toping.



359. To‘rtburchakli muntazam piramida diagonal kesimining yuzi 40 cm^2 , piramidaning balandligi esa 5 cm . Piramida to‘la sirtining yuzini toping.

360. To‘rtburchakli muntazam piramida asosining tomoni 10 dm , apofemasi esa 6 cm ga teng bo‘lsa, uning yon sirtini toping.

361. Oltiburchakli muntazam piramida asosining tomonlari 12 dm , yon sirti 84 cm^2 ga teng bo‘lsa, uning apofemasini toping.

362. Piramida asosidagi barcha ikki yoqli burchalari 60° ga, asosining yuzi 48 cm^2 ga teng bo‘lsa, uning yon sirtini toping.

363. Piramida asosidagi barcha ikki yoqli burchalari 45° ga, yon sirti 48 cm^2 ga teng bo‘lsa, uning asosi yuzini toping.

364*. Muntazam piramidaning a) yon yoqlari; b) yon qirralari; c) apofemalari o‘zaro teng bo‘lishini isbotlang.

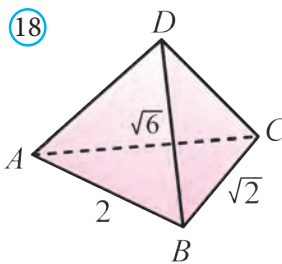
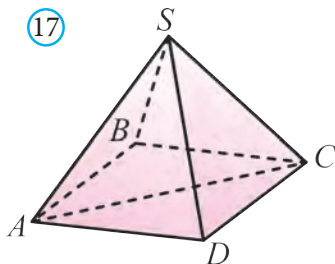
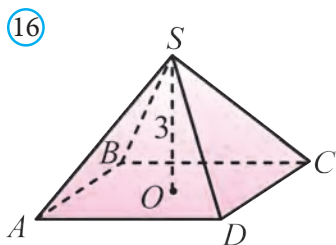
365*. Muntazam piramidaning a) asosidagi barcha ikki yoqli burchaklari; b) barcha yon qirralaridagi ikki yoqli burchaklari o‘zaro teng bo‘lishini isbotlang.

366. Piramidaning asosi tomonlari 6 cm va 8 cm ga teng to‘g‘ri to‘rtburchakdan iborat. Piramidaning har bir qirradi 13 cm ga teng bo‘lsa, uning balandligini toping.

367. $SABCD$ muntazam piramida berilgan (16-rasm). Piramida balandligi 3 ga, yon sirtining yuzi esa 80 ga teng. Piramida to‘la sirtining yuzini toping.

368. $SABCD$ muntazam piramida berilgan (17-rasm). Piramida yon sirtining yuzi 60 ga, diagonal kesimining yuzi $12\sqrt{2}$ ga teng. Piramida to‘la sirtining yuzini toping.

369. Tetraedrning barcha yon yoqlari asos tekisligi bilan 45° tashkil qiladi (18-rasm). Asosining tomonlari, mos ravishda, 2 , $\sqrt{2}$ va $\sqrt{6}$ ga teng. Tetraedr yon sirtining yuzini toping.

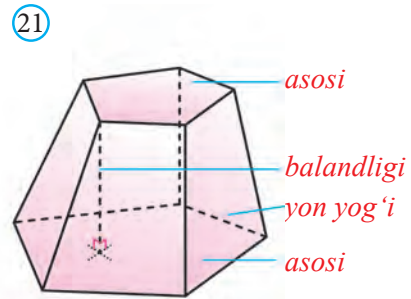
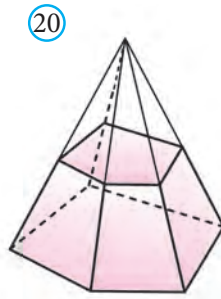
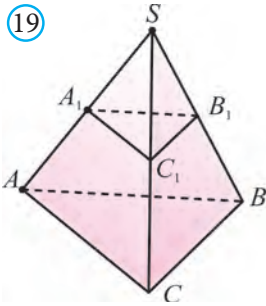


- 370.** Tetraedrning barcha yon yoqlari asos tekisligi bilan 60° li burchak tashkil qiladi. Asosining tomonlari, mos ravishda, 7, 24 va 25 ga teng. Tetraedr yon sirtining yuzini toping.
- 371*.** Piramidaning asosi – tomonlari 3 cm va 7 cm, diagonallaridan biri 6 cm ga teng bo‘lgan parallelogrammdan iborat. Piramidaning balandligi 4 cm ga teng bo‘lib, piramida diagonallarining kesishish nuqtasidan o‘tadi. Piramidaning yon qirrasini toping.
- 372*.** Agar piramida asosidagi barcha ikki yoqli burchaklari φ ga, asosining yuzi S_{asos} ga teng bo‘lsa, $S_{\text{yon}} = \frac{S_{\text{asos}}}{\cos\varphi}$ bo‘lishini isotlang.
- 373*.** Muntazam piramida balandligining ixtiyoriy nuqtasi piramida asosining uchlaridan va qirralaridan hamda yon yoqlaridan baravar uzoqlikda yotishini isbotlang.
- 374*.** Agar piramidaning barcha yon qirralari o‘zaro teng bo‘lsa, u holda uning asosiga tashqi aylana chizish mumkinligini va bu aylana markazi piramida balandligi asosi bilan ustma-ust tushishini isbotlang (7-rasm).
- 375*.** Agar piramida asosidagi barcha ikki yoqli burchaklari o‘zaro teng bo‘lsa, u holda uning asosiga ichki aylana chizish mumkinligini va bu aylana markazi piramida balandligi asosi bilan ustma-ust tushishini isbotlang (8-rasm).

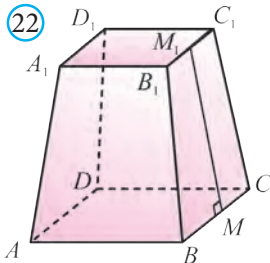
10.2. Kesik piramida

Teorema. Piramidaning asosiga parallel va uni kesib o‘tadigan tekislik undan shu piramidaga o‘xshash piramida ajratadi.

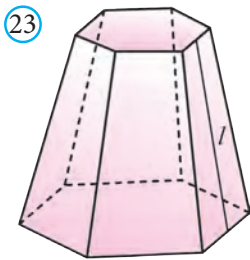
Isbot. Aytaylik, S – piramidaning uchi, A – asosining uchi, A_1 – kesuvchi tekislikning SA yon qirra bilan kesishish nuqtasi bo‘lsin (19-rasm). S nuqtaga nisbatan $k = \frac{SA_1}{SA}$ koeffitsiyentli gomotetiyanı qaraymiz. Bu gomotetiyada ABC uchburchak $A_1B_1C_1$ uchburchakka o‘tadi. Unda $SABC$ piramida $SA_1B_1C_1$ piramidaga o‘tadi. Mazkur gomotetiya o‘xshash almashtirish bo‘lganligi uchun bu piramidalar o‘xshash bo‘ladi. \square



Piramidani uning asos tekisligiga parallel tekislik bilan kesamiz. Natijada u ikki bo'lakka ajraladi (20-rasm). Ulardan biri mazkur piramidaga o'xshash bo'lgan piramidadan, ikkinchisi esa *kesik piramida* deb ataluvchi ko'pyoqdan iborat bo'ladi. Kesik piramidaning parallel tekisliklarda yotgan yoqlari kesik piramidaning *asoslari*, qolgan yoqlari esa *yon yoqlari* deyiladi (21-rasm). Kesik piramidaning asoslari o'xshash ko'pburchaklardan, yon yoqlari esa trapetsiyalardan iborat.



Kesik piramida *balandligi* uning ikki asoslari orasidagi masofaga teng bo'ladi. Kesik piramida muntazam piramidaning bo'lagi bo'lsa, unga *muntazam kesik piramida* deyiladi. 22-rasmda $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kesik piramida tasvirlangan. $ABCD$ va $A_1 B_1 C_1 D_1$ parallel yoqlar uning asoslari, MM_1 esa uning apofemasidir.



Teorema. *Muntazam kesik piramida yon yog'ining yuzi, asoslari perimetrlari yig'indisining yarimi bilan apofemasi ko'paytmasiga teng:*

$$S_{yon} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)l.$$

Isbot. Muntazam n -burchakli kesik piramida asoslarining perimetrlari va apofemasi, mos ravishda, P_1 , P_2 va l ga teng bo'lsin (23-rasm). Unda uning har

bir yog'i tomonlari $\frac{P_1}{n}$ va $\frac{P_2}{n}$ ga hamda balandligi l ga teng bo'lgan trapetsiyadan iborat bo'ladi.

Bunday trapetsiyalardan bittasining yuzi $(\frac{P_1}{n} + \frac{P_2}{n}) \cdot \frac{l}{2}$ ga teng.

Unda berilgan kesik piramida yon sirtining yuzi

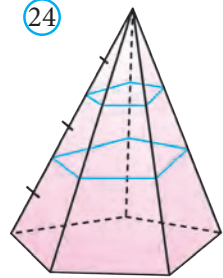
$$S_{yon} = n \cdot (\frac{P_1}{n} + \frac{P_2}{n}) \cdot \frac{l}{2} = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot l \text{ bo'ladi. } \square$$

Oxirgi tenglikni boshqacha

$$S_{yon} = \frac{1}{2} (a + b) nl$$

ko‘rinishda ham yozish mumkin, bu yerda a va b – kesik piramida asoslarining tomoni.

Masala. Piramidaning yon qirralari uchta teng qismga bo‘linib, uning bo‘linish nuqtalaridan asosiga parallel tekisliklar o‘tkazilgan (24-rasm). Agar piramida asosining yuzi 360 cm^2 ga teng bo‘lsa, uning kesimlarini yuzini toping.



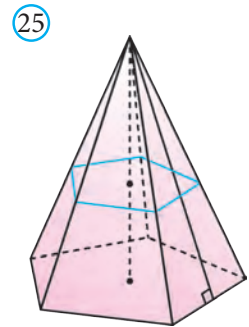
Yechish. Hosil bo‘lgan ikkita kesim piramida asosiga, mos ravishda, $\frac{1}{3}$ va $\frac{2}{3}$ o‘xshashlik koeffitsiyenti bilan o‘xshash bo‘ladi.

Ma’lumki, o‘xshash shakllar yuzlarining nisbati ularning o‘xshashlik koeffitsiyenti kvadratiga teng. Unda kesimlar yuzining piramida asosi yuziga nisbati, mos ravishda, $(\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$ va $(\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$ bo‘ladi.

Unda kesimlar yuzi: $360 \cdot \frac{1}{9} = 40 \text{ (cm}^2\text{)}$ va $360 \cdot \frac{4}{9} = 160 \text{ (cm}^2\text{)}$ ga teng bo‘ladi. **Javob:** 40 cm^2 va 160 cm^2 . \square

Yuqoridagi masaladan kelib chiqib, piramida asosiga parallel tekislik bilan kesilganda unga o‘xshash piramida hosil bo‘lishini hisobga olsak, quyidagi teoremani hosil qilamiz. Uni mustaqil isbotlang.

Teorema. *Piramida asosiga parallel tekislik bilan kesilganda (25-rasm) hosil bo‘lgan piramida uchun $\frac{a_1}{a} = \frac{H_1}{H}$, $\frac{S_1}{S} = (\frac{a_1}{a})^2$, bu yerda a , H , S berilgan piramida, a_1 , H_1 , S_1 esa hosil bo‘lgan piramida asosining mos tomonlari, balandliklari va asoslarining yuzi.*



Mavzuga oid masalalar va amaliy topshiriqlar

- 376.** To‘rtburchakli muntazam kesik piramidaning asoslarining tomonlari 14 cm va 10 cm , diagonali esa 18 cm ga teng. Kesik piramidaning balandligini toping.
- 377.** To‘rtburchakli muntazam kesik piramida asoslarining tomonlari 4 cm va 8 cm , diagonali esa 12 cm ga teng. Kesik piramidaning balandligini toping.
- 378.** To‘rtburchakli muntazam kesik piramida asosining tomonlari 24 cm va 40 cm , balandligi esa 16 cm ga teng. Kesik piramidaning diagonalini toping.
- 379.** To‘rtburchakli muntazam kesik piramida asoslarining tomonlari 12 cm va 36 cm , apofemasi 6 cm ga teng bo‘lsa, yon yog‘ining yuzini toping.

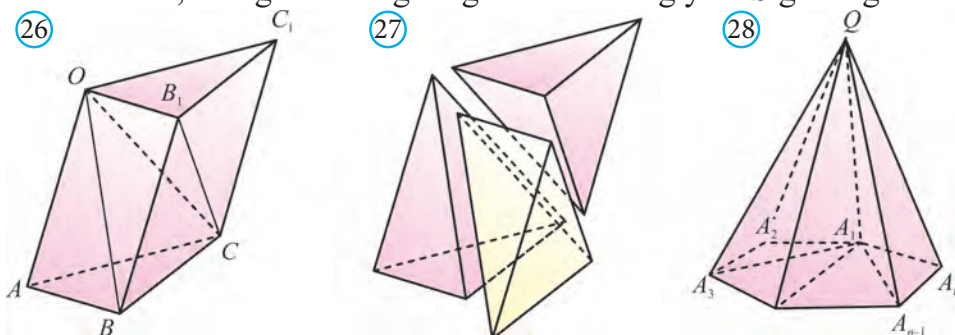
380. To'rtburchakli muntazam kesik piramida asoslarining tomonlari 6 cm va 8 cm, yon yog'i yuzi 84 cm^2 ga teng bo'lsa, uning apofemasini toping.
381. To'rtburchakli muntazam kesik piramida asoslarining tomonlari 4 cm va 8 cm, diagonali 12 cm. Kesik piramidaning balandligini toping.
382. To'rtburchakli muntazam kesik piramida asoslarining tomonlari 3 cm va 5 cm, diagonali 9 cm. Kesik piramidaning balandligini toping.
383. To'rtburchakli muntazam kesik piramida asoslarining tomonlari 8 cm va 2 cm ga teng. Balandligi 4 ga teng. Uning to'la sirtini toping.
384. To'rtburchakli muntazam kesik piramida asoslarining diagonallari 6 va 10 ga, balandligi $\sqrt{14}$ ga teng. Piramidaning apofemasini toping.
385. Piramida uning asosiga parallel tekislik bilan kesilgan. Agar piramida asosining yuzi 40 cm^2 , hosil bo'lgan kesim yuzi 10 cm^2 va piramida balandligi 8 cm bo'lsa, hosil bo'lgan kesik piramida balandligini toping.
386. Piramida uning asosiga parallel tekislik bilan kesilgan. Agar piramida asosining yuzi 144 cm^2 , hosil bo'lgan kesik piramida yuqori asosining yuzi 16 cm^2 va balandligi 4 cm bo'lsa, piramida balandligini toping.
387. Asosining yuzi Q_1 ga teng bo'lgan piramida berilgan. Uning asosiga parallel, undan h masofada yotgan va yuzi Q_2 ga teng kesim o'tkazilgan. Piramidaning balandligini toping.

10.3. Piramidaning hajmi

Teorema. Uchburchakli piramidaning hajmi, asosining yuzi bilan balandligi ko'paytmasining uchdan bir qismiga teng (26-rasm):

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{asos}} \cdot H.$$

Isbot. Aytaylik, $OABC$ uchi O nuqtada, asosi ABC uchburchakdan iborat piramida bo'lib, uning balandligi H ga va asosining yuzi S ga teng bo'lsin.



Bu piramidani shunday asosga va shunday balandlikka ega bo'lgan prizma bilan to'ldiramiz (26-rasm). Bu prizma uchta: berilgan piramida hamda yana ikkita OCC_1B_1 va $OCBB_1$ piramidalardan tashkil topgan. OCC_1B_1

va $OCBB_1$ piramidalarning balandliklari umumiy bo‘lib, asoslari CC_1B_1 va B_1BC teng uchburchaklardan iborat. Shuning uchun ularning hajmlari ham teng bo‘ladi.

Xuddi shunga o‘xshash, $OABC$ va $OCBB_1$ piramidalarning C uchidan tushirilgan balandliklari umumiy bo‘lib, asoslari OAB va BB_1O teng uchburchaklardan iborat. Shuning uchun ularning ham hajmlari teng bo‘ladi.

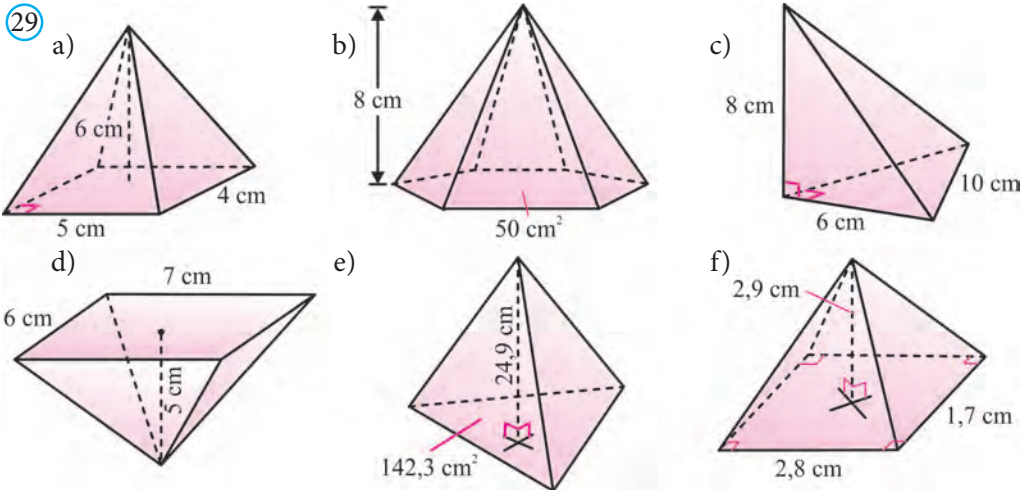
Demak, har uchala piramidalar hajmlari o‘zaro teng ekan. Ularning hajmlari yig‘indisi prizma hajmiga teng ekanligini hisobga olsak (27- rasm), $OABC$ uchburchakli piramidaning hajmi $V = \frac{1}{3} S_{asos} \cdot H$ bo‘ladi. \square

Teorema. *Ixtiyoriy piramidaning hajmi, asosining yuzi bilan balandligi ko‘paytmasining uchdan biriga teng: $V = \frac{1}{3} S_{asos} \cdot H$.*

Bu teoremani 28- rasmdan foydalanib mustaqil isbotlang.

Mavzuga oid masalalar va amaliy topshiriqlar

388. 29-rasmda berilgan ma’lumotlar asosida piramidalarning hajmini toping.



389. Piramidaning asosi – tomonlari 6 cm, 6 cm va 8 cm bo‘lgan teng yonli uchburchak. Hamma yon qirralari 9 cm ga teng. Piramidaning hajmini toping.

390. Uchburchakli piramidaning bitta qirradi 4 cm ga, qolganlari esa 3 cm ga teng. Piramidaning hajmini toping.

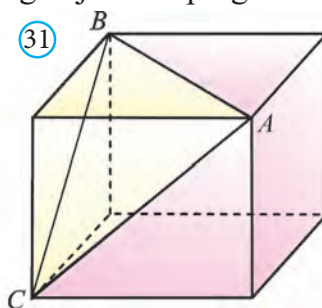
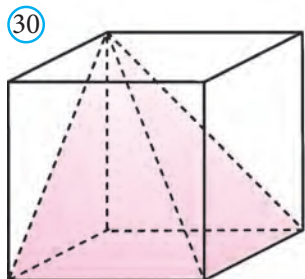
391. 30-rasmdagi piramida kubning qanday qismini tashkil qiladi?

392. To‘rtburchakli muntazam piramida yon sirtining yuzi 72 cm^2 ga, asosining yuzi esa 64 cm^2 ga teng. Piramidaning hajmini toping.

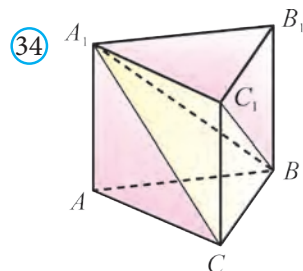
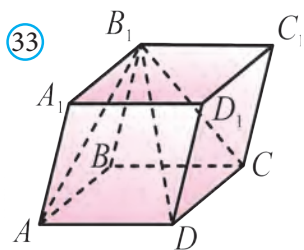
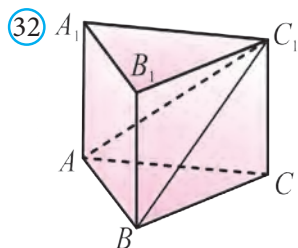
393. To‘rtburchakli muntazam piramida asosining perimetri 12 cm, yon yog‘ining perimetri esa 18 cm ga teng. Piramidaning hajmini toping.

394*. Qirradi 5 ga teng kub ABC uchburchak tekisligi bilan ikki bo‘lakka

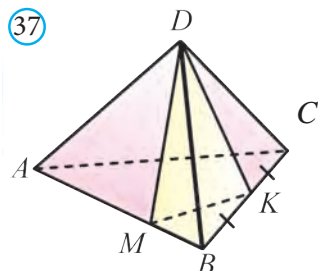
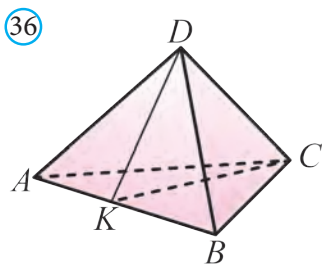
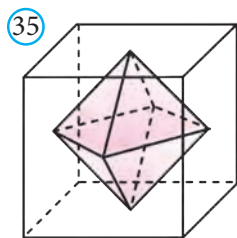
bo'lingan (31-rasm). Kichik bo'lakning hajmini toping.



- 395***. Qirradi 6 ga teng kub ABC uchburchak tekisligi bilan ikki bo'lakka bo'lingan (31-rasm). Katta bo'lakning hajmini toping.
- 396.** Muntazam piramidaning balandligi 3 ga, yon qirradi 5 ga teng. Piramidaning hajmini toping.
- 397***. $ABCD$ tetraedrda $AB=BC=2$, $\angle ABC=120^\circ$. DA, DB, DC yon qirralar asos tekisligi bilan 60° li burchak tashkil qiladi. Tetraedrning hajmini toping.
- 398.** $ABCA_1B_1C_1$ prizma hajmi 48 ga teng (32-rasm). C_1ABC piramida hajmini toping.
- 399.** $ABCD A_1B_1C_1D_1$ og'ma parallelepiped (33-rasm). B_1ABCD piramida hajmi 12 ga teng. Parallelepiped hajmini toping.
- 400.** $ABCA_1B_1C_1$ prizma hajmi 87 ga teng (34-rasm). C_1A_1BC piramida hajmini toping.

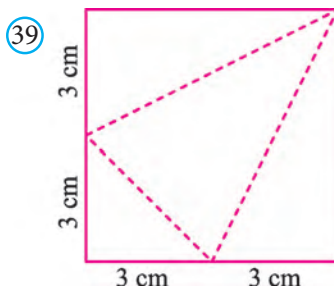


- 401.** Kub yoqlarining o'rtalari – oktaedrning uchlari (35-rasm). Oktaedr hajmi 12 ga teng. Kubning hajmini toping.
- 402.** $AK:KB=2:3$. Piramida hajmi 24 ga teng (36-rasm). $DABC$ piramida hajmini toping.
- 403.** $BM:MA=2:3$, $BK=KC$ (37-rasm). $DABC$ piramida hajmining $DMBK$ piramida hajmiga nisbatini toping.
- 404***. Piramidaning asosi to'g'ri to'rtburchakdan iborat. Piramidaning har bir yon qirradi a ga teng bo'lib, ular to'g'ri to'rtburchakning qo'shni tomonlari bilan α va β burchaklar tashkil etadi. Piramidaning hajmini toping.



405*. Piramidaning asosi – ikkita burchagi α va β ga teng bo‘lgan uchburchakdan iborat. Bu uchburchakka tashqi chizilgan doiraning radiusi R ga teng. Piramidaning yon qirralari uning asos tekisligiga γ burchak ostida og‘gan bo‘lsa, uning hajmini toping.

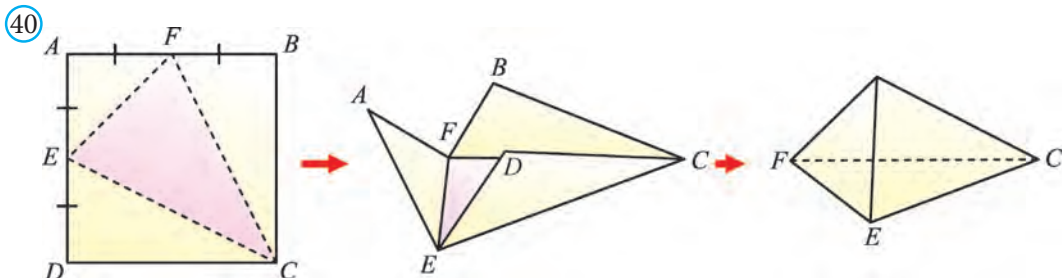
406. Xeops piramidasi to‘rtburchakli muntazam piramida shaklida bo‘lib, uning asosi tomoni 230 m, balandligi esa 147 m (38-rasm). Piramidaning hajmini toping va uni kub metrlarda ifodalang.



407. Oldingi masaladagi berilganlardan foydalanib Xeops piramidasi yon yog‘ining asos tekisligiga og‘ish burchagini toping.

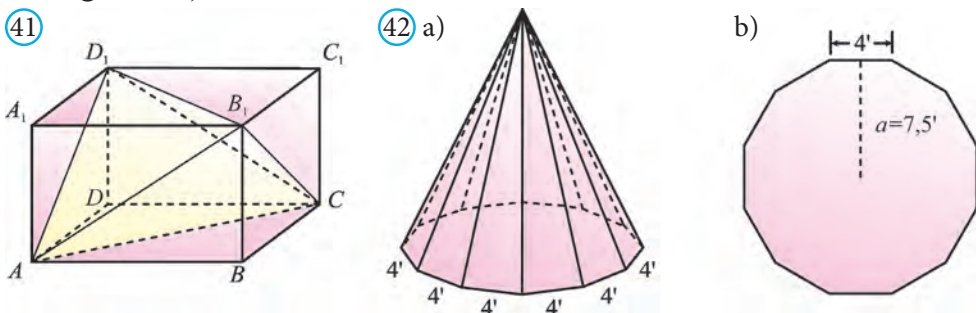
408*. Tomoni 6 cm bo‘lgan kvadrat shaklidagi varaqni 39-rasmda ko‘rsatilgandek qilib buklab, uchburchakli piramida hosil qilindi. Bu piramida hajmini toping.

409. Qirradi 10 cm bo‘lgan kvadrat shaklidagi qog‘ozni 40-rasmda ko‘rsatilgandek buklab piramida yasalgan. Rasmda berilgan ma’lumotlar asosida hosil bo‘lgan piramida to‘la sirtini va hajmini toping.



410*. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ parallelepipedning hajmi 4,5 ga teng (41-rasm). $AD_1 CB_1$ uchburchakli piramidaning hajmini toping.

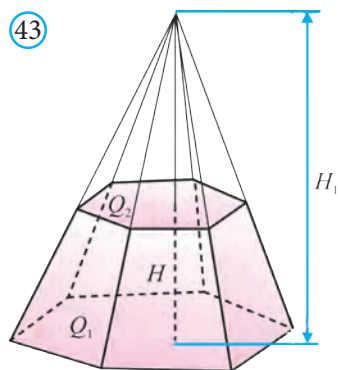
411. Chodir piramida shaklda bo'lib, u 12 ta tayoqdan qurilgan (42.a-rasm). Chodirning balandligi 15 fut, asosi esa tomoni 4 futga teng muntazam o'nikkiburchakdan iborat. Yetishmayotgan kattalikni 42.b-rasmdan aniqlab, chodirning yon sirti va sig'imini toping (eslatma: 4 fut 4' kabi belgilanadi).



10.4. Kesik piramidaning hajmi

Teorema. Balandligi H , asoslarining yuzi Q_1 va Q_2 ($Q_1 > Q_2$) ga teng bo'lgan kesik piramidaning hajmi: $V = \frac{1}{3}H(Q_1 + \sqrt{Q_1 Q_2} + Q_2)$ ga teng.

Isbot. Berilgan kesik piramidani to'liq piramidagacha to'ldiramiz (43-rasm). H_1 bu piramidaning balandligi bo'lsin. Kesik piramida hajmi ikkita piramidalar hajmlari ayirmasidan iborat bo'ladi: $V = V_1 - V_2$.



Birinchi piramidaning asosi – Q_1 , balandligi – H_1 , ikkinchi piramidaning asosi – Q_2 , balandligi esa $H_1 - H$ ga teng. 117-betda isbotlangan teoreмага ko'ra bu piramidalar o'xshash bo'ladi. Unda 119-betda isbotlangan teoreмага ko'ra quyidagi tenglikka ega bo'lamiz:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \left(\frac{H_1}{H_1 - H}\right)^2.$$

Bu tenglikdan $H_1 = \frac{H\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1} - \sqrt{Q_2}}$. (1)

Unda kesik piramidaning hajmi:

$$V = V_1 - V_2 = \frac{1}{3}Q_1 \cdot H_1 - \frac{1}{3}Q_2 \cdot (H_1 - H) = \frac{1}{3}((Q_1 - Q_2)H_1 - Q_2H).$$

(1) tenglikdan foydalanib hajmni hisoblasak:

$$V = \frac{1}{3} \left((Q_1 - Q_2) \cdot \frac{H\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1} - \sqrt{Q_2}} + Q_2H \right) = \frac{1}{3}H \cdot (Q_1 + \sqrt{Q_1 Q_2} + Q_2) \text{ hosil bo'ladi. } \square$$

10.5. O'xshash jismlarning hajmlari

F jism berilgan bo'lib, u shunday F_1, F_2, \dots, F_n uchburchakli piramidalarga ajratilgan bo'lsinki, F jism hajmi bu piramidalar hajmlari yig'indisiga teng bo'lsin. Shunigdek, koeffitsiyentni k ga teng bo'lgan o'xshashlik almashtirishi berilgan bo'lib, F jism bu almashtirishda G jismga o'tsin.

Unda bu o'xshashlik almashtirishi F_1, F_2, \dots, F_n piramidalarni G_1, G_2, \dots, G_n piramidalarga o'tkazadi va ular o'z navbatida G jismni tashkil qiladi. Shu bois, G jismning hajmi bu piramidalar hajmlari yig'indisidan iborat bo'ladi (44-rasm).

F_i va G_i ($i=1, 2, \dots, n$) uchburchakli piramidalar o'xshash bo'lgani uchun ularning balandliklari nisbati k ga, asoslarining yuzlari nisbati esa k^2 ga teng bo'ladi. U holda ularning hajmlari nisbati k^3 ga teng bo'ladi.

F jism F_i piramidalardan, G jism G_i piramidalardan ($i=1, 2, \dots, n$) tashkil topgani uchun F va G jismlarning hajmlari nisbati ham k^3 ga teng bo'ladi.

Ma'lumki, k o'xshashlik almashtirishi koeffitsiyenti F jismning ixtiyoriy ikki nuqtasi orasidagi masofaning bu nuqtalarga mos kelgan G jismning nuqtalari orasidagi masofaga nisbatiga teng. U holda, k soni F va G jismlarning mos chiziqli o'lchamlari nisbatiga teng bo'ladi. Shunday qilib, quyidagi xos-saga egamiz:

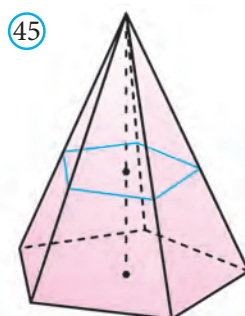
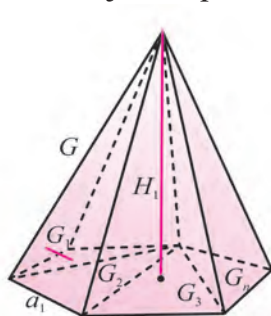
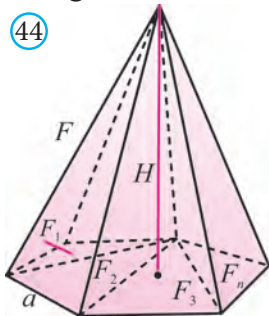
Teorema. *Ikki o'xshash jismning hajmlari nisbati ularning mos chiziqli o'lchamlari nisbatining kubiga teng.*

Xususiy holda, o'xshash piramidalar uchun (44-rasm)

$$\frac{V_1}{V} = \left(\frac{a_1}{a}\right)^3 = k^3, \quad \frac{V_1}{V} = \left(\frac{H_1}{H}\right)^3 = k^3,$$

bu yerda a va a_1 – o'xshash piramidalar asosining mos tomonlari, H va H_1 – balandliklari, V va V_1 – hajmlari, k esa o'xshashlik koeffitsiyenti.

Masala. Piramida balandligining o'rtasidan asosiga parallel tekislik o'tkazilgan. Bu tekislik piramida hajmini qanday nisbatda bo'ladi?

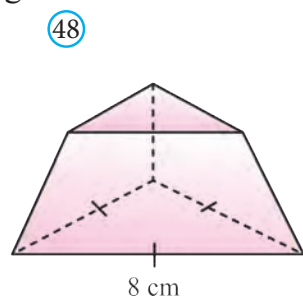
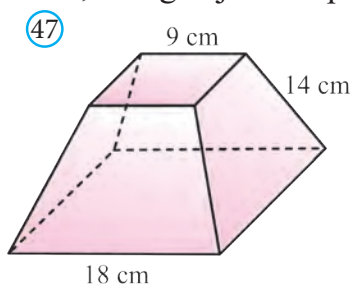
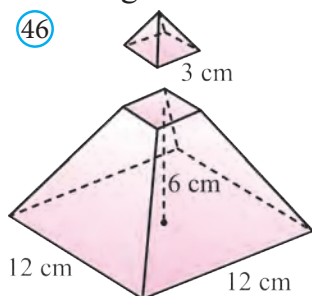


Yechish. Ma'lumki, o'tkazilgan tekislik berilgan piramidadan unga o'xshash piramidani ajratadi (45-rasm). O'xshashlik koeffitsiyenti balandliklar nisbatiga, ya'ni $\frac{1}{2}$ ta teng.

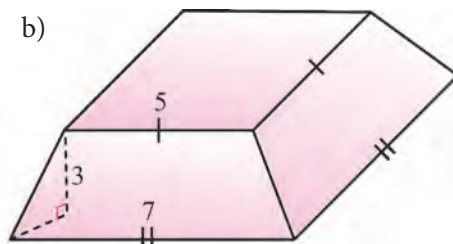
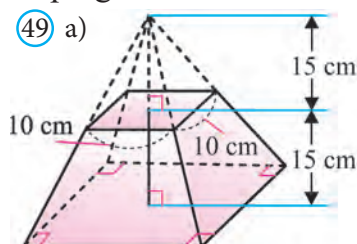
Shuning uchun piramidalar hajmlari nisbati $(\frac{1}{2})^3 : 1$ ga teng. Demak, tekislik piramidani hajmlarining nisbati $\frac{1}{8} \cdot (1 - \frac{1}{8}) = 1.7$ bo'lgan qismlarga ajratadi.

Mavzuga oid masalalar va amaliy topshiriqlar

- 412.** Piramida balandligining o'rtasidan asosiga parallel tekislik o'tkazilgan. Hosil bo'lgan kichik piramida hajmining berilgan piramida hajmiga nisbatini toping.
- 413.** To'rtburchakli muntazam piramida asosiga parallel tekislik bilan kesilgan (46-rasm). Butun va kesik piramida hajmini toping.
- 414.** Asoslarining yuzlari 18 dm^2 va 8 dm^2 va balandligi 6 dm ga teng bo'lgan kesik piramidaning hajmini toping.
- 415.** Asoslarining yuzi $2\sqrt{2} \text{ cm}^2$ va $8\sqrt{2} \text{ cm}^2$, balandligi 9 cm ga teng bo'lgan kesik piramidaning hajmini toping.
- 416.** 47-rasmda berilgan to'rtburchakli muntazam kesik piramidaning hajmini toping.
- 417.** 48-rasmda berilgan uchburchakli muntazam kesik piramida yuqori asosining tomoni 2 cm bo'lsa, uning hajmini toping.



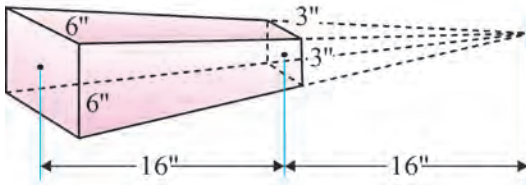
- 418.** 49-rasmda berilganlarga ko'ra kesik piramidaning to'la sirti va hajmini toping.



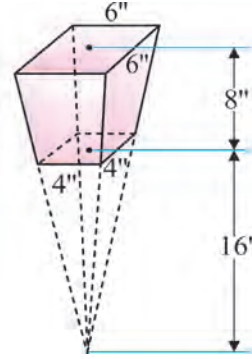
- 419.** 50-rasmda berilgan ma'lumotlarga ko'ra ko'pyoqlarning hajmini toping va cm^3 larda ifodalang. (Eslatma: $6 \text{ duym} = 6''$ kabi belgilanadi va $2,83 \text{ cm}$ ga teng.)

50

a)



b)



420*. To'rtburchakli muntazam kesik piramidaning pastki va ustki asoslarining tomonlari a va b ga, pastki asosi qirrasidagi ikki yoqli burchak α ga teng. Piramidaning hajmini toping.

11. KONUS VA KESIK KONUS

11.1. Konus va uning sirti

Tog'ri burchakli uchburchakni bir kateti atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan jism *konus* deb aytiladi (51- rasm). Bu katetni esa *konusning o'qi* deb ataymiz. Bu aylantirishda boshqa katet hosil qilgan doira *konusning asosi*, gipotenuza hosil qilgan sirt esa *konusning yon sirti*, gipotenuzaning o'zi esa *konusning yasovchisi* deb yuritiladi (52-rasm).

Konus uchidan uning asos tekisligiga tushirilgan perpendikular *konusning balandligi* deb ataladi. Konusning o'qi uning balandligi hamdir.

Eslatma. Tog'ri burchakli uchburchakni bir kateti atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan jism aslida *to'g'ri doiraviy konus* deb yuritiladi. Konus tushunchasi esa keng ma'noda quyidagicha kiritiladi:

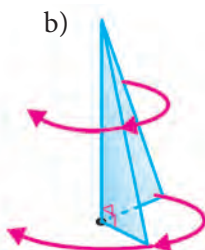
Aytaylik, fazoda berilgan yassi F_1 shaklning nuqtalarini unda yotmagan nuqta bilan tutashtiruvchi kesmalardan iborat shakl *konus* deb ataladi (53- rasm). Berilgan nuqta konusning *uchi*, berilgan yassi shakl esa konusning *asosi* deb ataladi.

51

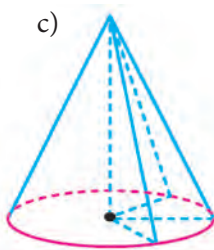
a)



b)

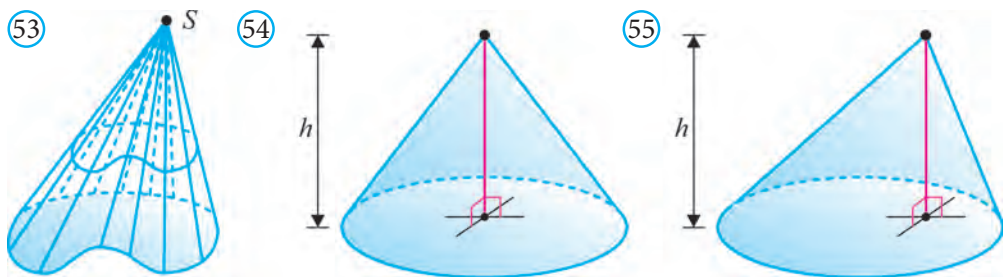


c)



52





Agar F_1 shakl doiradan iborat bo'lsa, konus – *doiraviy konus* deb ataladi (54–55- rasmlar). Doiraviy konus uchini uning asosi markazi bilan tutashtiruvchi kesma konus asosiga perpendikular bo'lsa, konus – *to'g'ri*, aks holda *og'ma* doiraviy konus deb ataladi. Ta'riflangan barcha konuslar ichidan faqat to'g'ri doiraviy konusgina aylanma jism bo'ladi. Biz kelgusida ana shu to'g'ri doiraviy konuslar bilan ish ko'ramiz va ularni qisqalik uchun konuslar deb ataymiz.

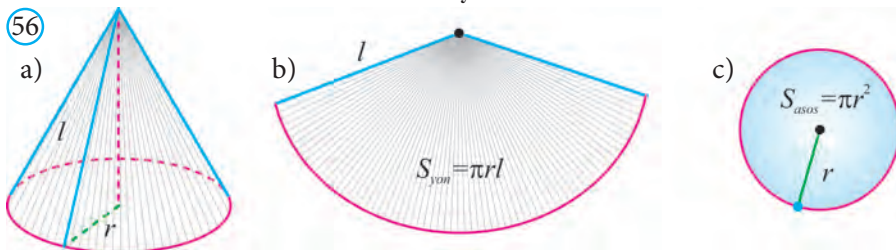
Konus o'qidan o'tuvchi tekislik bilan kesilganda hosil bo'lgan kesim *o'q kesim* deb ataladi. Konusning barcha o'q kesimlari teng yonli uchburchaklardir. Konus o'qidan o'tuvchi har qanday tekislik uning simmetriya tekisligi bo'ladi. Konusning simmetriya markazi yo'q.

56.a- rasmda berilgan konus yon sirtini biror yasovchisi bo'ylab kesib yoysak, uning doiraviy sektordan iborat yoyilmasi hosil bo'ladi (56.b-rasm). Yoyilma asosida quyidagi formulalarni osongina keltirib chiqarish mumkin:

Konusning yon sirti uning asosi aylanasi uzunligining yarmi va yasovchisining ko'paytmasiga teng: $S_{yon} = \pi r l$.

Konusning to'la sirti uning yon sirti va asosining yuzi yig'indisiga teng:

$$S_{to'la} = S_{yon} + S_{asos}$$

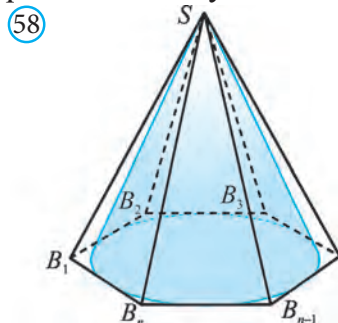
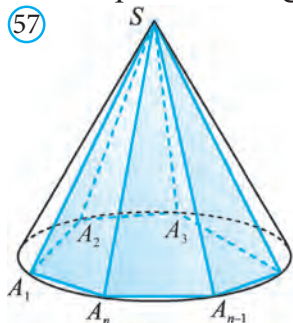


$$S_{to'la} = S_{yon} + S_{asos} = \pi r l + \pi r^2 = \pi r (r + l).$$

11.2. Konusning hajmi

Ixtiyoriy konus berilgan bo'lsin. Uning asosiga ichki $A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n$ ko'pburchakni chizamiz. Ko'pburchakning A_1, A_2, \dots, A_{n-1} va A_n uchlarini konusning uchi S nuqta bilan tutashtiramiz. Natijada $SA_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n$ piramidani hosil qilamiz. Bu piramida berilgan *konusga ichki chizilgan piramida* deb ataladi

(57-rasm). Konus esa *piramidaga tashqi chizilgan konus* deb yuritiladi. Agar piramida konusga ichki chizilgan bo'lsa, uning asosi konus asosiga ichki chizilgan bo'ladi va piramidaning yon qirralari konus yon sirtida yotadi.



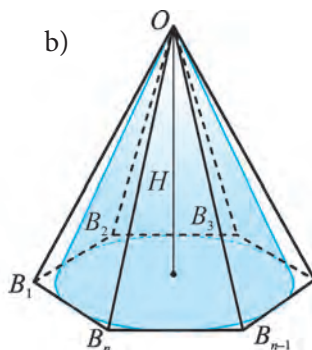
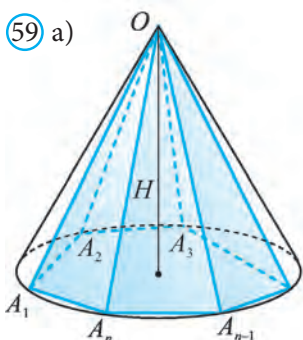
Ravshanki, agar piramida asosiga tashqi aylana chizish mumkin bo'lsa, bu piramidaga tashqi konus ham chizish mumkin.

Shunga o'xshash *konusga tashqi chizilgan piramida* va *piramidaga ichki chizilgan konus* tushunchalari ham kiritiladi (58-rasm). Agar piramida konusga tashqi chizilgan bo'lsa, unda piramidaning asosi konus asosiga tashqi chizilgan bo'ladi va piramidaning yon yoqlari konus yon sirtiga urinadi.

Ravshanki, agar piramida asosiga ichki aylana chizish mumkin bo'lsa, bu piramidaga ichki konus ham chizish mumkin.

Teorema. *Konusning hajmi asosining yuzi bilan balandligi ko'paytmasining uchdan biriga teng (59-rasm):* $V = \frac{1}{3} S_{asos} \cdot H$.

Isbot. Uchi O nuqtada va balandligi H ga teng bo'lgan konus berilgan bo'lsin (59.a-rasm).



Unga ichki $OA_1A_2\dots A_{n-1}A_n$ (59.a-rasm) va tashqi $OB_1B_2\dots B_{n-1}B_n$ (59.b-rasm) piramidalarni chizamiz. Konus hajmini V , ichki va tashqi chizilgan piramidalar hajmini V_1 va V_2 bilan belgilasak, unda $V_1 < V < V_2$ qo'shtengsizlik o'rinli bo'ladi. Piramidalar hajmi quyidagi formulalardan topiladi:

$$V_1 = \frac{1}{3} S_{A_1A_2\dots A_{n-1}A_n} \cdot H \quad \text{va} \quad V_2 = \frac{1}{3} S_{B_1B_2\dots B_{n-1}B_n} \cdot H.$$

soni n ni borgan sari oshirib boramiz. Unda ichki chizilgan piramida hajmi oshib boradi, tashqi chizilgan piramidaning hajmi esa kamayib boradi. Agar tomonlar soni n cheksiz kattalashib borsa, bu hajmlar orasidagi farq nolga intiladi. Konusga ichki va tashqi chizilgan piramidalar hajmi yaqinlashgan son berilgan konusning hajmi sifatida olinadi.

Bu jarayonda $A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$ va $B_1B_2 \dots B_{n-1}B_n$ ko'pburchaklar yuzi konus asosida yotgan doira yuzi S ga yaqinlashadi.

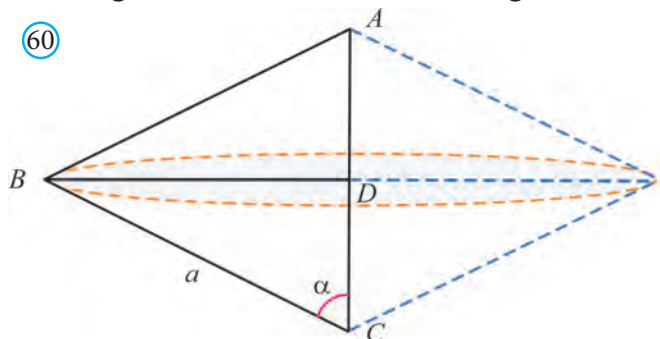
Demak, $V = \frac{1}{3} S_{asos} \cdot H$. \square

Agar konus asosining radiusi r ga teng bo'lsa, konus hajmi $V = \frac{1}{3} \pi r^2 H$ bo'ladi.

Masala. Asosi a ga, asosidagi burchagi α ga teng bo'lgan teng yonli uchburchakni yon tomoni atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan jismning hajmini toping.

Yechish: ABC teng yonli ($AB=AC$) uchburchakni AC yon tomoni atrofida aylantiraylik (60-rasm). Hosil bo'lgan jismning V hajmi ikkita konus V_1, V_2 hajmlarining yig'indisiga teng.

Birinchi konusning uchi A nuqtada, ikkinchisniki esa C nuqtada joylashgan. Har bir konus asosining radiusi ABC uchburchakning BD balandligiga teng.



BD va AC ni topamiz: $BD = a \sin \alpha$, $AC = \frac{a}{2 \cos \alpha}$.
Konusning hajmi formulasiga ko'ra

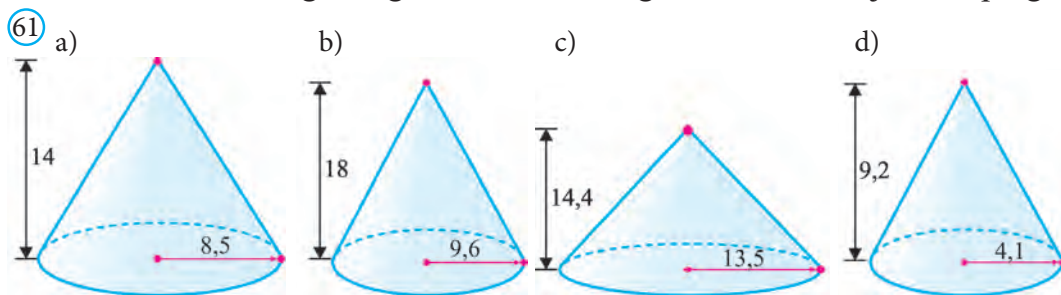
$$V_1 = \frac{1}{3} \pi \cdot BD^2 \cdot AD, \quad V_2 = \frac{1}{3} \pi \cdot BD^2 \cdot DC.$$

$$\begin{aligned} \text{U holda } V &= V_1 + V_2 = \frac{1}{3} \pi \cdot BD^2 \cdot AD + \frac{1}{3} \pi \cdot BD^2 \cdot DC = \frac{1}{3} \pi \cdot BD^2 \cdot (AD + DC) = \\ &= \frac{1}{3} \pi \cdot BD^2 \cdot AC = \frac{1}{3} \pi \cdot a^2 \sin^2 \alpha \cdot \frac{a}{2 \cos \alpha} = \pi a^3 \sin^2 \alpha / 6 \cos \alpha. \end{aligned}$$

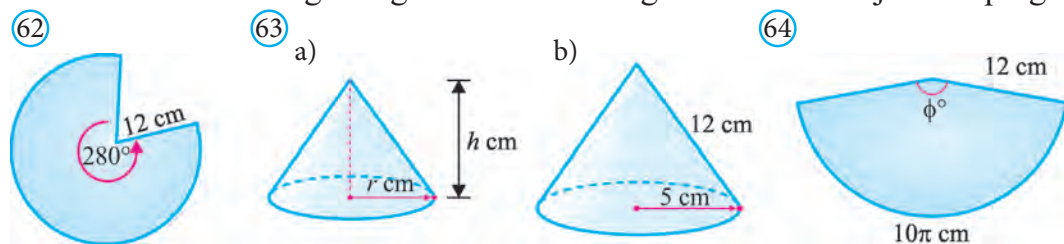
Javob: $\pi a^3 \sin^2 \alpha / 6 \cos \alpha$. \square

Mavzuga oid masalalar va amaliy topshiriqlar

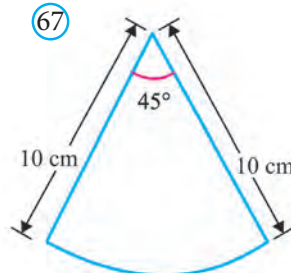
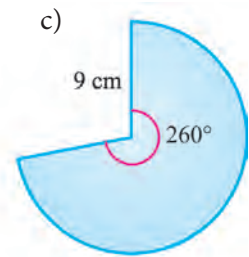
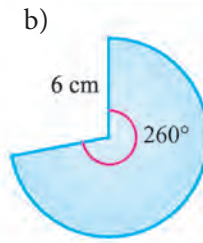
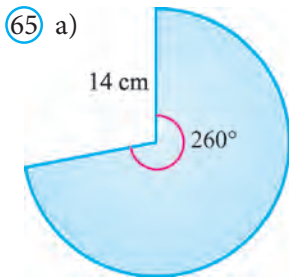
421. Konusning yasovchisi 13 cm, asosi aylanasining diametri 10 cm. Konusning balandligini toping.
422. Konus asosi aylanasining radiusi 4 cm, balandligi 6 cm bo'lsa, uning yasovchisini toping.
423. Konus asosi aylanasining diametri 9,6 cm, yasovchisi 5,2 cm bo'lsa, uning balandligini toping.
424. Konus yasovchisi 12 cm, balandligi esa asosi aylanasining radiusidan 3 marta uzun bo'lsa, bu radiusni toping.
425. Konus asosi aylanasining radiusni 6 cm, balandligi esa yasovchisidan ikki marta qisqa bo'lsa, konus yasovchisini toping.
426. Konus asosining diametri 12 cm, yasovchisi esa 10 cm. Konus to'la sirtining yuzini hisoblang.
427. Konus asosining radiusi 16 cm, konusning balandligi esa 12 cm. Konus yon sirtining yuzini hisoblang.
428. 61-rasmda berilganlarga ko'ra konusning to'la sirti va hajmini toping.



429. 62-rasmda berilgan konus yon sirti yoyilmasiga ko'ra, uning to'la sirti va hajmini toping.
430. 63-rasmda berilganlarga ko'ra konusning to'la sirti va hajmini toping.



431. 64-rasmda berilgan konus yoyilmasiga ko'ra uning hajmini toping.
432. 65-rasmda berilgan konus yoyilmalariga ko'ra ularning hajmlari nisbatini toping.

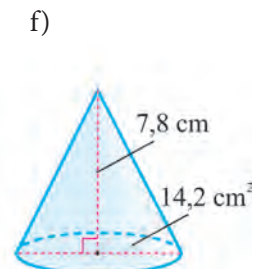
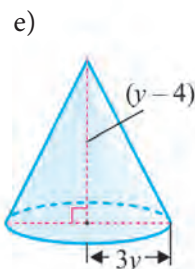
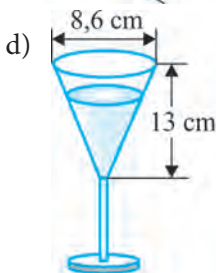
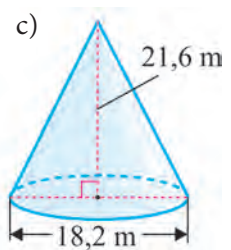
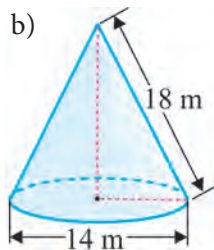
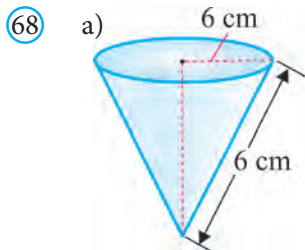


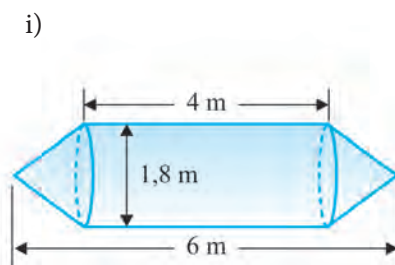
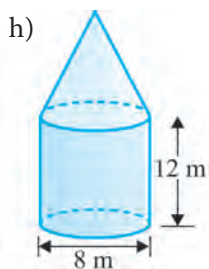
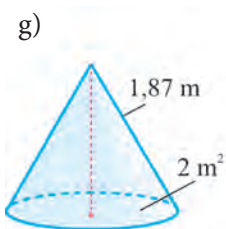
433*. Hindular chodiri konus shaklida bo'lib, uning asosi radiusi 6 futga, balandligi esa 15 futga teng (66-rasm). Chodir yon sirtining yuzini va hajmini toping hamda ularni, mos ravishda, kvadrat metr va kub metrlarda ifodalang.

Ma'lumot: 1 fut (*foot*) ingliz o'lchov birligi bo'lib, qiymati taqriban 30,48 cm ga teng. Shuningdek, u boshqa o'lchov birliklari bilan quyidagi munosabatlar orqali bog'langan: 1 fut = 12 duym (*inches*), 1 duym = 2,54 cm, 1 yard (*yard*) = 3 fut = 36 duym = 91,44 cm.

434*. Yon sirti yoyilmasi 67-rasmda tasvirlangan doira sektoridan iborat konus hajmini toping.

435. Quyidagi 68-rasmda tasvirlangan geometrik jismlar hajmini toping.





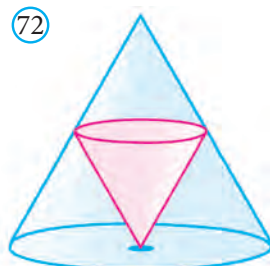
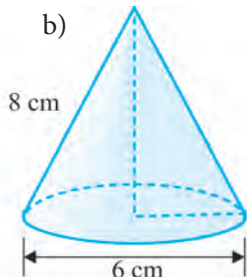
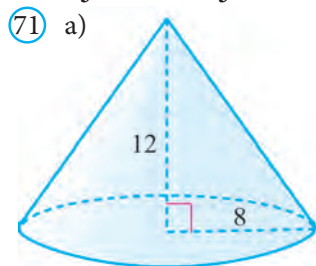
436*. Tomoni a ga teng bo'lgan muntazam oltiburchakni o'z tomonlaridan biri atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan jismning hajmini toping.

437*. Konus shaklidagi idishdagi sath balandligi 12 cm bo'lgan suv boshqa silindr shaklidagi idishga quyildi (69-rasm). Agar konus va silindr shaklidagi idishlar asoslarining radiusi bir-biriga teng bo'lsa, ikkinchi idishga quyilgan suv sathi qancha bo'ladi?



438. Silindrdan konus 70-rasmda ko'rsatilgandek o'yib olingan. Agar silindr asosining radiusi 6 cm va balandligi 8 cm bo'lsa, hosil bo'lgan jismning hajmini toping.

439*. 71-rasmda berilgan ma'lumotlardan foydalanib, tasvirlangan fazoviy jismlar hajmini toping.

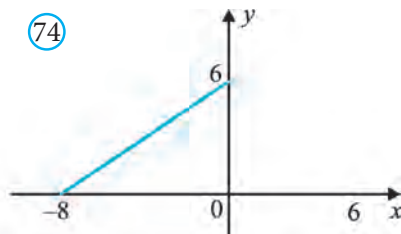
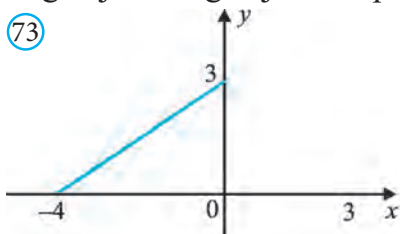


440. Konus asosining diametri 16 cm, konusning balandligi 6 cm. Konus to'la sirtining yuzini hisoblang.

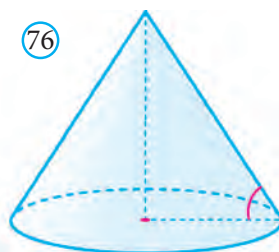
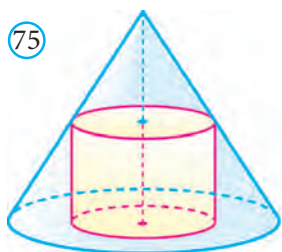
441. Konus yon sirtining yuzi $65 \pi \text{ dm}^2$, konusning yasovchisi esa 12 cm. Konusning hajmini hisoblang.

442. Konus o'q kesimining konus uchidagi burchagi 120° ga teng. Agar konus uchidan o'tuvchi boshqa kesimning konus uchidagi burchagi 90° bo'lib, konus asosining radiusi 12 cm bo'lsa, bu kesimning yuzini hisoblang.

443. Konusning o‘q kesimi – teng tomonli uchburchak bo‘lib, balandligi 9 cm ga teng. Konusning uchi orqali uning asosi markazidan 3 cm masofada o‘tuvchi kesimning yuzini hisoblang.
444. Katetlari 12 cm va 16 cm bo‘lgan to‘g‘ri burchakli uchburchak kichik katet atrofida aylanadi. Hosil bo‘lgan aylanma jism to‘la sirtining yuzini hisoblang.
445. Konus yon sirtining yuzi 32π ga teng, uning yasovchisi asos tekisligiga 60° li burchak ostida og‘gan. Konusning hajmini hisoblang.
446. Konus o‘q kesimining perimetri 24 cm, yon sirti yoyilmasining burchagi 120° ga teng. Konus to‘la sirtining yuzini hisoblang.
- 447*. Konusda ikkita o‘zaro perpendikular yasovchilar orqali o‘tkazilgan kesimning yuzi 18 cm^2 . Uning asosidagi kesimga mos vatar 120° li yoyni tortib turadi. Konusning hajmini hisoblang.
448. 72-rasmda katta konusga kichik konus ichki chizilgan, bunda kichik konus uchi katta konus asosining markazida yotadi va kichik konus balandligi kattasini ikki marta kichik. Katta konus hajmining kichik konus hajmiga nisbatini toping.
- 449*. 73-rasmda ko‘rsatilgan shaklni Ox o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan jismning hajmini toping.



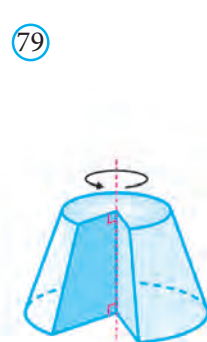
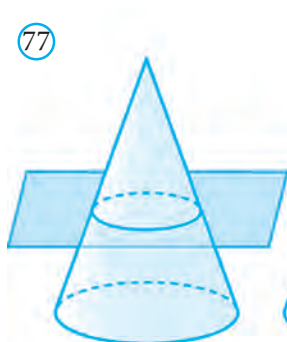
- 450*. 74- rasmda ko‘rsatilgan shaklni Ox o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan jism sirtining yuzini toping.
- 451*. Uchlari Oxy tekisligining $(0; 0)$, $(5; 0)$ va $(0; 9)$ nuqtalarda bo‘lgan to‘g‘ri burchakli uchburchakning a) Ox ; b) Oy o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan fazoviy jismning to‘la sirtini va hajmini toping.
- 452*. Uchlari Oxy tekisligining $(0; 0)$, $(6; 0)$ va $(6; 4)$ nuqtalarda bo‘lgan to‘g‘ri burchakli uchburchak a) Ox ; b) Oy o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan fazoviy jismning to‘la sirtini va hajmini toping.
453. Konusga balandligi konus balandligidan 2 marta kichik bo‘lgan silindr ichki chizilgan. Konusning hajmi 48 ga teng (75-rasm). Silindr hajmini toping.
454. Konus asosining yuzi 40 ga, yasovchisi asos tekisligi bilan 60° li burchak tashkil qiladi (76-rasm). Konus yon sirtining yuzini toping.



11.3. Kesik konus va uning sirti

Konusni uning asos tekisligiga parallel va uni kesib o‘tadigan tekislik bilan kesamiz. Natijada u ikki bo‘lakka ajraladi. Ulardan biri mazkur konusga o‘xshash bo‘lgan konusdan, ikkinchisi esa *kesik konus* deb ataluvchi jismdan iborat bo‘ladi (77-rasm). Kesik konus ikkita doira – kesik konusning *asoslari* va *yon sirti* bilan chegaralangan (78-rasm).

Kesik konusni to‘g‘ri burchakli trapetsiyaning kichik yon tomoni atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jism sifatida ham qarash mumkin (79-rasm).



Kesik konusning *balandligi* uning ikki asosi orasidagi masofaga teng bo‘ladi. Kesik konus yon sirtining yuzi quyidagi formula yordamida hisoblanadi:

$$S_{\text{yon}} = \pi l (r_1 + r_2),$$

bu yerda l , r_1 , r_2 , mos ravishda, konusning yasovchisi va asoslarining radiuslari (78-rasm).

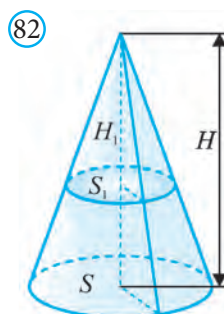
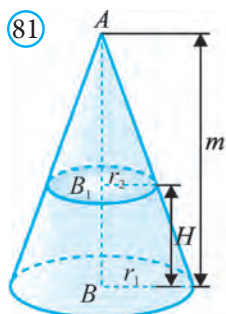
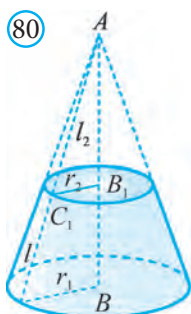
Kesik konusning to‘la sirti uning yon sirti va asoslari yuzi yig‘indisiga teng:

$$S_{\text{to‘la}} = S_{\text{yon}} + \pi r_1^2 + \pi r_2^2 = \pi l (r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2.$$

$$S_{\text{to‘la}} = \pi (r_1^2 + \pi r_2^2 + l (r_1 + r_2)).$$

11.4. Kesik konusning hajmi

Teorema. Balandligi H , asoslarining yuzi S_1 va S_2 ($S_1 > S_2$) ga teng bo‘lgan kesik konusning hajmi $V = \frac{1}{3}H(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$ ga teng (80-rasm).



Isbot. Berilgan kesik konusni to‘liq konusgacha to‘ldiramiz (81-rasm). m bu konusning balandligi bo‘lsin. Kesik konusning hajmi ikkita konuslar hajmlari ayirmasidan iborat bo‘ladi.

Birinchi konusning asosi – S_1 , balandligi – m , ikkinchi konusning asosi – S_2 , balandligi esa $m-H$ ga teng. Bu konuslarning o‘xshashligidan quyidagi tenglikka ega bo‘lamiz:

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{m}{m-H}\right)^2. \text{ Bu tenglikdan } m = \frac{H\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}.$$

Unda kesik konusning hajmi:

$$V = V_1 - V_2 = \frac{1}{3}S_1 \cdot m - \frac{1}{3}S_2 \cdot (m-H) = \frac{1}{3}(S_1 - S_2)m + S_2H). \quad m = \frac{H\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} \text{ ni}$$

o‘rniga qo‘yib hajmni hisoblasak, $V = \frac{1}{3}H(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2)$ ni hosil qilamiz. \square

Agar kesik konus asoslarining radiusi r_1 va r_2 ga teng bo‘lsa, kesik konusning hajmi:

$$V = \frac{1}{3} \pi H (r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2) \quad \text{ga teng bo‘ladi.}$$

Shuningdek, oldingi paragrafda piramidalar uchun ifodalangan xossa konuslar uchun o‘rinli bo‘ladi:

Teorema. *Hajmi V , balandligi H va asosining yuzi S ga teng bo‘lgan konus asosiga parallel tekislik bilan kesilganda, hajmi V_1 , balandligi H_1 va asosining yuzi S_1 ga teng bo‘lgan konus hosil bo‘lgan bo‘lsin (82-rasm).*

U holda
$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{H_1}{H}\right)^2 = k^2, \quad \frac{V_1}{V} = \left(\frac{H_1}{H}\right)^3 = k^3$$

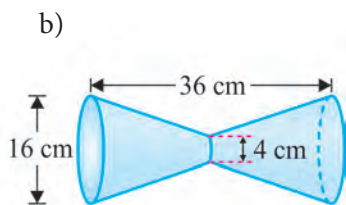
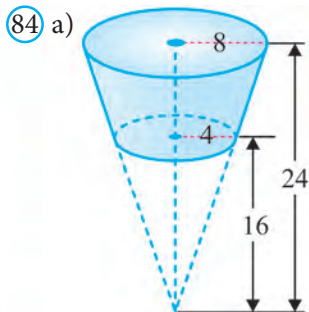
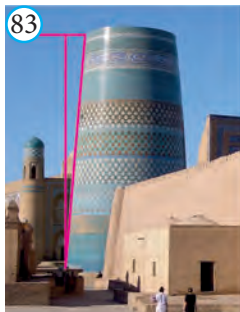
bu yerda k – konuslarning o‘xshashlik koeffitsiyenti.

Mavzuga oid masalalar va amaliy topshiriqlar

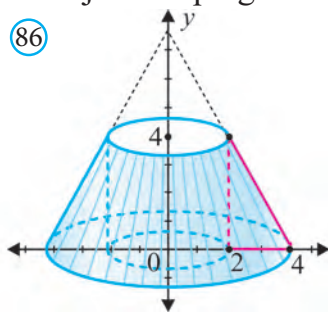
455. Kesik konus asoslarining diametrlari, mos ravishda, 16 cm va 10 cm, balandligi esa 4 cm. Kesik konus yon sirtining yuzini hisoblang.
456. Kesik konus asoslarining radiuslari 12 cm va 8 cm, yasovchisi esa katta asos tekisligiga 60° li burchak ostida og‘gan. Kesik konus yon sirtining yuzini hisoblang.
457. Xiva shahridagi Kalta Minor kesik konus shaklida bo‘lib, uning pastki

asosi diametri 14,2 m va balandligi 29 m ni tashkil qiladi (83-rasm). Minoraning yasovchisi balandligi bilan 15° li burchak hosil qiladi. Minora yon sirtining yuzini toping.

- 458.** Kesik konus asoslarining radiuslari, mos ravishda, 8 cm va 5 cm, yasovchisi asos tekisligiga 45° li burchak ostida ogʻgan. Kesik konusning hajmini hisoblang.
- 459.** Kesik konus yuqori va pastki asoslarining radiuslari 18 cm va 10 cm, oʻq kesimining diagonallari oʻzaro perpendikular. Kesik konusning hajmini hisoblang.



- 460.** Kesik konusning yasovchisi 10 cm va asos tekisligiga 60° li burchak ostida ogʻgan, oʻq kesimining diagonali bu burchakni teng ikkiga boʻladi. Kesik konusning hajmini hisoblang.
- 461*.** 84-rasmda tasvirlangan geometrik jismlar hajmini toping.



- 462*.** Osiyoning koʻplab xalqlari qadimdan oʻtovlarda yashab kelishgan. 85- rasmda zamonaviy oʻtovlardan biri tasvirlangan. Oʻtov devorlari silindr, tomi esa kesik konus yon sirtlaridan iborat. Oʻtovning balandligi 3,5 m, devorlari balandligi 1,7 m va asosining diametri 6,83 m ni tashkil qiladi. Yetishmayotgan kattalikni rasmdan chamalab aniqlab, oʻtov devorlari va tomini qoplash uchun necha kvadrat metr kigiz materialidan kerak boʻlishini hamda oʻtovning sigʻimini toping.
- 463*.** Uchlari Oxy tekisligining $(2; 0)$, $(4; 0)$ va $(2; 4)$ nuqtalarda boʻlgan toʻgʻri burchakli uchburchakning Oy oʻqi atrofida aylanishidan hosil boʻlgan fazoviy jismning hajmini toping (86- rasm).

464*. Oxy tekisligining birinchi choragida joylashgan, koordinata o'qlari, $x=9$ va $y=5$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan to'g'ri to'rtburchakning a) Ox ; b) Oy o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan fazoviy jismning to'la sirtini va hajmini toping.

87



88



465. Yogurt qutisi kesik konus shaklida bo'lib (87-rasm), uning katta asosining diametri 8 cm, kichik asosining diametri 6 cm, balandligi esa 7,5 cm. Qutining hajmini toping.

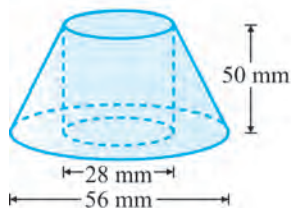
466. Qaymoq idishi kesik konus shaklida bo'lib (88-rasm), uning katta asosining diametri 14 cm, kichik asosining diametri 11 cm, balandligi esa $6\frac{2}{3}$ cm. Qutining hajmini toping.

467*. Yog'ochdan ishlangan kesik konusdan 89-rasmda ko'rsatilgandek qilib silindr o'yib olingan. Hosil bo'lgan jism sirtini va hajmini toping.

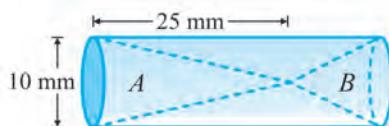
468*. Silindr ichiga joylashtirilgan konuslar hajmi nisbati 1:2 bo'lsa (90-rasm), silindrning bo'sh qolgan qismining hajmini toping.

469. To'g'ri burchakli parallelepipedga ichki chizilgan konus hajmini toping (91-rasm).

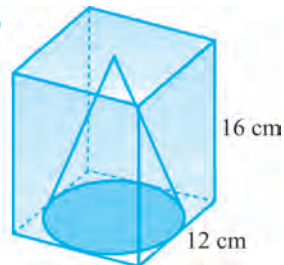
89



90



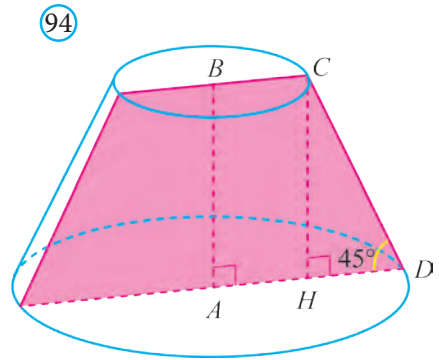
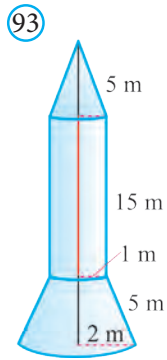
91



470*. Asosining o'lchamlari 10 cm va 12 cm bo'lgan to'g'ri burchakli parallelepiped shaklidagi sut qutisida 1200 cm^3 hajmdagi sut bor (92-rasm). Sut qutisi asosining yuzi 80 cm^2 bo'lgan silindr shaklidagi stanga to'ldirib quyilganda, idishlardagi sut sathlari teng bo'lib qoldi. Stakaning hajmini toping.

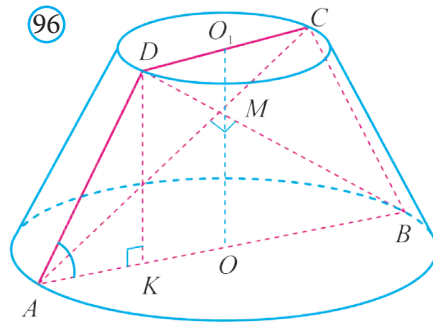
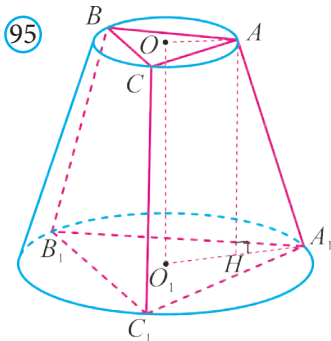
471. 93-rasmda berilganlarga ko'ra raketaning to'la sirti va hajmini toping.

472*. $ABCD$ trapetsiyada $\angle A=90^\circ$, $\angle D=45^\circ$, $BC=5\text{ cm}$, $CD=3\sqrt{2}\text{ cm}$ (94-rasm). Bu trapetsiyaning AB tomoni atrofida aylanishidan hosil bo'lgan kesik konusning yon sirti va hajmini toping.



473*. $ABCD$ trapetsiyada $\angle A = 90^\circ$, $\angle D = 60^\circ$, $BC = 4$ cm, $CD = 12$ cm. Bu trapetsiyaning AB tomoni atrofida aylanishidan hosil bo'lgan kesik konusning yon sirti va hajmini toping.

474*. Kesik konusga uchburchakli muntazam kesik piramida ichki chizilgan, ya'ni piramida asoslari kesik konus asoslariga ichki chizilgan (95-rasm). Kesik konus asoslarining radiuslari 2 cm va 5 cm, balandligi esa 4 cm ga teng. Piramidaning to'la sirtini toping.



475*. Kesik konusda o'q kesim diagonallari o'zaro perpendikular bo'lib, katta asos tekisligi bilan 60° li burchak tashkil qiladi va 4 cm ga teng (96-rasm). Kesik konus hajmini toping.

Tarixiy ma'lumotlar

Al-Xorazmiyning "Al-jabr val-muqobala hisobi haqida" nomli asarining o'lchash haqidagi bobida kesik piramidaning hajmini hisoblashga oid quyidagi ma'lumotlar keltirilgan: "Agar piramidaning pastki asosi to'rt gazga to'rt gaz, balandligi o'n gaz va uning yuqori asosi ikki gazga ikki gaz deyilsa, u holda, bizga ma'lumki, har bir o'tkir uchli piramida shunday bo'ladi, uning asosi yuzining uchdan birining balandligiga ko'paytmasi uning hajmidir. Shuning uchun bu piramidaning uchi bo'lmaganligi sababli, biz uning uchini tiklash uchun qanchalik ko'tarish kerak ekanligini bilmoqchimiz. Uning uchi yo'q, lekin bu o'n gazning uning butun uzunligiga nisbati,

ikkining to'rtga nisbati ekanligini bilamiz. Biroq ikki – to'rtning yarmi, shuning uchun, agar nisbat shunday bo'lsa, u holda o'n uzunlikning yarmi va (demak) uzunlik – yigirma gaz. Shunday qilib, biz uzunlikni bilamiz. Asosning uchdan birini, ya'ni besh-u uchdan birni olamiz, buni uzunlikka, ya'ni yigirma gazga ko'paytiramiz; buning ko'paytmasi bir yuz olti-yu uchdan ikki gaz. Biz uni (to'liq) piramidagacha to'ldirish uchun qo'shganimizni, undan (o'lchami) ikkiga ikki bo'lgan yuzaning uchdan birini o'nga qo'shganimizni yoki o'n uch-u uchdan birni ya'ni to'liq piramida hosil qilish uchun biz qo'shgan hajmni ayiramiz. Agar biz buni bir yuz olti-yu uchdan ikki gazdan ayirsak, to'qson uch-u uchdan bir qoladi. Ana shu piramidaning hajmidir”.

Abu Ali ibn Sino “Donishnoma” asarining o'n ikkinchi bobida geometrik jismlar haqida fikr yuritadi. Jumladan, uchburchakli piramidani ikkita o'zaro teng, berilgan piramidaga o'xshash piramidalarga hamda ikkita teng prizmalarga ajratish usulini bayon qilgan.

12. BOBNI TAKRORLASHGA DOIR AMALIY MASHQLAR

3-test topshirig'i

1. To'rtburchakli muntazam piramidaning balandligi 6 cm, apofemasi esa 6,5 cm. Piramida asosining perimetrini toping.
A) 10 cm; B) 12 cm; C) 24 cm; D) 20 cm.
2. Muntazam piramida yon sirtining yuzi 96 ga, asosining perimetrini 24 ga teng. Piramidaning apofemasini toping.
A) 16; B) 10; C) 6; D) 8.
3. Uchburchakli muntazam piramidaning balandligi 4 ga, asosining balandligi esa 4,5 ga teng. Piramidaning yon qirrasini toping.
A) 6; B) 6,5; C) 5; D) 5,5.
4. To'rtburchakli muntazam piramidaning balandligi 24 ga, asosining tomoni esa 14 ga teng. Uning apofemasini toping.
A) 18; B) 27; C) 25; D) 32.
5. Muntazam piramidaning asosi ichki burchaklarining yig'indisi 720° ga, tomoni 6 ga teng bo'lgan ko'pburchakdan iborat. Agar piramidaning yon qirradi 10 ga teng bo'lsa, piramidaning balandligini toping.
A) 8; B) 6; C) 9; D) 7.
6. Oktaedrning qirradi a ga teng. Uning to'la sirtini hisoblang.
A) $2a^2\sqrt{3}$; B) $a^2\sqrt{3}$; C) $2\sqrt{3a^2}/3$; D) $4a^2\sqrt{3}$.
7. Muntazam tetraedrning qirradi 1 ga teng. Uning asosiga tashqi chizilgan aylananing markazidan uning yon yog'igacha bo'lgan masofani toping.
A) $2\sqrt{3}/6$; B) $\sqrt{6}/9$; C) $2\sqrt{2}/5$; D) $3\sqrt{6}/8$.

8. Muntazam piramidaning yon sirti 24 ga, asosining yuzi 12 ga teng. Piramidaning yon yog‘i bilan asos tekisligi orasidagi burchakni toping.
A) 45° ; B) 30° ; C) 60° ; D) 35° .
9. To‘rtburchakli muntazam piramida asosining tomoni 4 marta kattalashtirildi, balandligi esa 4 marta kichiklashtirildi. Hosil bo‘lgan piramida hajmining dastlabki piramida hajmiga nisbatini toping.
A) 1 : 16; B) 16 : 1; C) 1 : 1; D) 4 : 1.
10. To‘rtburchakli muntazam piramidaning hajmi 48 ga, balandligi esa 4 ga teng. Piramida yon sirtining yuzini toping.
A) 120; B) 144; C) 60; D) 96.
11. Qirradi 1 ga teng bo‘lgan kub yoqlarining markazlari tutashtirildi. Hosil bo‘lgan jismning hajmini toping.
A) $\frac{1}{6}$; B) $\frac{1}{3}$; C) $\frac{1}{2}$; D) $\frac{1}{4}$.
12. Parallelepiped ostki asosining diagonal va ustki asosining bu diagonalga qarama-qarshi uchi orqali tekislik o‘tkazilgan. Bu tekislik parallelepipedni ikkita jismga ajratadi. Shu jismlardan biri piramidadan iborat. Parallelepiped hajmining piramida hajmiga nisbatini toping.
A) 5 : 1; B) 6 : 1; C) 3 : 1; D) 4 : 1.
13. $SABC$ piramidaning SBC yon yog‘ining yuzi 60 ga teng. Bu yon yoq A uchidan 8 ga teng masofada joylashgan. Piramidaning hajmini toping.
A) 170; B) 150; C) 120; D) 180; E) 160.
14. To‘rtburchakli muntazam piramidaning balandligi 9 ga, diagonal kesimining yuzi 36 ga teng. Piramidaning hajmini toping.
A) 84; B) 96; C) 48; D) 72.
15. Qirrasining uzunligi a ga teng bo‘lgan muntazam tetraedrning hajmini toping.
A) $\frac{1}{12}a^3\sqrt{2}$; B) $\frac{1}{24}a^3$; C) $\frac{1}{12}a^3\sqrt{3}$; D) $\frac{1}{24}a^3\sqrt{3}$.
16. Quyida keltirilgan parallelogrammlarning qaysilari barcha yon yoqlari asos tekisligi bilan bir xil burchak tashkil qiladigan piramidaning asosi bo‘lishi mumkin?
A) ixtiyoriy parallelogramm; B) faqat kvadrat;
C) romb yoki kvadrat; D) faqat to‘g‘ri to‘rtburchak.
17. To‘rtburchakli muntazam kesik piramida asoslarining tomonlari 3 cm va 7 cm, diagonal 10 cm. Kesik piramidaning balandligi necha cm?
A) 5; B) $5\sqrt{2}$; C) $4\sqrt{2}$; D) 4.

18. To'rtburchakli muntazam kesik piramidaning diagonallari o'zaro perpendikular va ularning har biri 8 ga teng. Piramidaning balandligini toping.
A) $4\sqrt{2}$; B) $2\sqrt{2}$; C) 4; D) 6.
19. Konus asosining radiusi $1/\sqrt{3}$ ga teng. Konus yasovchisi bilan uning asos tekisligi orasidagi burchak qanday bo'lganda konus yon sirtining yuzi $\pi/\sqrt{3}$ ga teng bo'ladi?
A) 30° ; B) 60° ; C) 45° ; D) $\arccos(1/3)$.
20. Konus asosining radiusi 6 ga teng, yasovchisi asos tekisligi bilan 30° li burchak tashkil etadi. Asos markazidan yasovchigacha bo'lgan masofani toping.
A) 4; B) 3; C) 2,5; D) $3\sqrt{3}$.
21. Konusning yasovchisi asos tekisligi bilan 45° li burchak tashkil etadi. Asosning markazidan yasovchisigacha bo'lgan masofa $3\sqrt{2}$ ga teng. Konusning balandligini toping.
A) 5; B) 4; C) 7; D) 6; 5.
22. Konusning yasovchisi 12 ga teng va u asos tekisligi bilan 60° li burchak hosil qiladi. Konus asosining radiusini toping.
A) 12; B) 6; C) 3; D) 2.
23. Konus o'q kesimining yuzi 8 ga, asosining radiusi 2 ga teng. Konus yon sirtining yuzini hisoblang.
A) 6π ; B) $4\sqrt{5}\pi$; C) $5\sqrt{5}\pi$; D) 5π .
24. Konusning yon sirti tekislikka yoyilganda, yoyilmaning uchidagi burchak 30° ga teng bo'ldi. Konus yasovchisining asos radiusiga nisbatini toping.
A) 10; B) 12; C) 11; D) 9.
25. Konusning balandligi 8 ga, asosining radiusi 6 ga teng. Konus yoyilmasining uchidagi burchakni aniqlang.
A) 216° ; B) 270° ; C) 180° ; D) 312° .
26. Asosining radiusi R ga teng bo'lgan konusning yon sirti asosi bilan o'q kesimi yuzlarining yig'indisiga teng. Konusning hajmini toping.
A) $2\pi^2R^3/3(\pi^2-1)$; B) $\pi R^3/2(\pi^2+1)$; C) $2(\pi^2+1)/\pi R^3$; D) $\pi(\pi^2+1)/3$.
27. Konusning o'q kesimi teng tomonli uchburchakdan, silindrniki esa kvadratdan iborat. Agar ularning to'la sirlari teng bo'lsa, hajmlarining nisbatini toping.
A) 2 : 3; B) 1 : 3; C) $1 : \sqrt{2}$; D) $\sqrt{2}$.

28. Konusning yasovchisi 6 ga teng va u asos tekisligi bilan 30° li burchak hosil qiladi. Konusning hajmini toping.

A) 9π ; B) $9\sqrt{3}\pi$; C) 27π ; D) $27\sqrt{3}\pi$.

29. $y = |x + 2|$, $x = -3$, $x = 0$ va $y = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan shaklni absissalari o'qi atrofida aylantirish natijasida hosil bo'lgan jismning hajmini toping.

A) 2π ; B) 3π ; C) π ; D) 4π .

30. Yasovchisi 5 ga, balandligi 4 ga teng bo'lgan konus asosidan 2 ga teng masofada shu asosga parallel tekislik bilan kesildi. Hosil bo'lgan kesimning yuzini hisoblang.

A) $2,25\pi$; B) $3,16\pi$; C) $2,64\pi$; D) $1,81\pi$.

Masalalar

Piramida to'la sirtining yuzi

476. To'rtburchakli muntazam piramidaning uchidagi tekis burchagi 60° ga teng. Shu piramidaning yon qirralari va asosi orasidagi burchakni toping.

477. Apofemasi 5 ga teng bo'lgan to'rtburchakli muntazam piramidaning to'la sirti 11 dan katta va 24 dan kichik. Piramida asosi tomonining uzunligi qanday oraliqda yotadi?

478. To'rtburchakli muntazam piramida asosining tomoni 5 ga, to'la sirti 85 ga teng. Piramida yon yog'ining asos tekisligiga og'ish burchagini toping.

479. Piramidaning asosi gipotenuzasi uzunligi 2 bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchakdan iborat. Piramidaning qirralari asos tekisligi bilan α burchak tashkil qiladi. Agar uning balandligi 5 ga teng bo'lsa, $\text{tg}\alpha$ ning qiymatini toping.

480. Asosdagi ikki yoqli burchaklari 60° ga teng bo'lgan piramidaning asosi tomoni 6 ga, o'tkir burchagi 30° ga teng rombdan iborat. Piramidaning to'la sirtini toping.

481. Uchburchakli muntazam piramidaning balandligi asosining tomonidan ikki marta kichik. Piramidaning yon yog'i asos tekisligi bilan qanday burchak tashkil etadi?

482. Uchburchakli muntazam piramida asosining tomoni 10 ga teng. Yon yog'i asos tekisligi bilan 45° li burchak hosil qiladi. Piramidaning balandligini toping.

483. Uchburchakli muntazam piramidaning yon qirralari 10 ga, asosining tomoni 12 ga teng. Piramidaning balandligini toping.

484. Piramidaning yon qirralari asosi tekisligi bilan bir xil burchak tashkil etadi. Romb, uchburchak, kvadrat va to'g'ri to'rtburchakdan qaysi biri piramidaning asosi bo'lolmaydi?

485. Uchburchakli piramidaning asosidagi barcha ikki yoqli burchaklar 30° ga teng. Agar piramidaning balandligi 6 ga teng bo'lsa, uning asosiga ichki chizilgan doiraning radiusini toping.

Piramidaning hajmi

486. Uchburchakli piramida asosining tomonlari 9, 10 va 17 ga teng. Piramidaning barcha yon yoqlari asos tekisligi bilan 45° li burchak tashkil etsa, uning hajmini toping.

487. Uchburchakli og'ma prizma asosining medianasi va shu mediana bilan kesishmaydigan qirraning o'rtasi orqali bu prizmadan piramida ajratadigan kesim o'tkazildi. Agar prizmaning hajmi 30 ga teng bo'lsa, piramidaning hajmini toping.

488. Oltiburchakli muntazam piramidaning hajmi 13,5 ga, balandligi esa $\sqrt{3}$ ga teng. Shu piramida yon qirrasining asos tekisligi bilan hosil qilgan burchagini toping.

489. Uchburchakli piramidaning asosi tomonlari 4, 4 va 2 ga teng bo'lgan uchburchakdan iborat. Piramidaning barcha yon yoqlari asos tekisligi bilan 60° li burchak tashkil etadi. Piramidaning hajmini toping.

490. Oltiburchakli muntazam piramidaning hajmi 324 ga, balandligi $6\sqrt{3}$ ga teng. Shu piramidaning yon qirradi va asos tekisligi orasidagi burchakni toping.

491. Piramidaning asosi kvadratdan iborat. Kvadratning digonali 6 ga teng. Piramidaning yon qirralaridan biri uning asosiga perpendikular. Piramidaning katta yon qirradi va asos tekisligi orasidagi burchak 45° ga teng. Piramidaning hajmini toping.

492. Uchburchakli muntazam piramidaning yon qirradi l ga teng va asos tekisligi bilan α burchak hosil qiladi. Piramidaning hajmini toping.

493. To'rtburchakli muntazam piramidaning hajmi 20 ga, balandligi esa 1 ga teng. Piramidaning apofemasi uzunligini toping.

494. Kesik piramida asoslarining yuzlari 96 va 24 ga, unga mos keluvchi butun piramidaning balandligi 16 ga teng. Kesik piramidaning hajmini toping.

495. Muntazam kesik piramida ustki asosining yuzi ostki asosining yuzidan uch marta kichik. Piramidaning barcha yon yoqlari ostki asosiga 60° li burchak ostida og'gan. Piramida ostki asosining yuzi piramida yon sirtining necha foizini tashkil etadi?

Konusning yon va to'la sirti

496. Konus o'q kesimi teng tomoli uchburchakdan iborat bo'lib, uning yuzi $16\sqrt{3}$ ga teng. Shu konus yon sirtining yuzini toping.

497. Asosining radiusi R ga teng va o'q kesimi to'g'ri burchakli uchburchakdan iborat konusning yon sirtini toping.
498. Konusning yasovchisi 100 ga, uning asos tekisligi bilan tashkil qilgan burchagining sinusi 0,6 ga teng. Konus o'q kesimining perimetrini aniqlang.
499. Konus asosining radiusi 12 ga, yasovchisi esa 40 ga teng. Shu konus yoyilmasining uchidagi burchagini toping.
500. Konus asosining radiusi 6 ga, balandligi 8 ga teng. Konus yoyilmasining uchidagi burchagini toping.
501. Konusning o'q kesimi muntazam uchburchakdan iborat. Uchburchakning yuzi $16\sqrt{3}$ ga teng. Konusning to'la sirtini toping.

Konusning hajmi

502. Muntazam uchburchakning tomoni 2 ga teng. Shu uchburchakni uchidan o'tuvchi va qarama-qarshi tomoniga parallel o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan jismning hajmini toping.
503. Konusning balandligi 12 ga, o'q kesimining perimetri 36 ga teng. Uning hajmini toping.
504. Konus asosining radiusi 2 ga, yasovchisi va asos tekisligi orasidagi burchak 60° ga teng. Konusning hajmini toping.
505. Teng yonli uchburchakning tomonlari 10 va 22 ga teng. Shu uchburchak o'zining simmetriya o'qi atrofida aylantirilganda hosil bo'lgan aylanish jismining to'la sirtini toping.
506. Konusning yon sirti 96π ga teng. Shu konus balandligining o'rtasidan unga perpendikular tekislik o'tkazish natijasida hosil bo'lgan kesik konusning yon sirtini toping.

3-nazorat ishi namunasi

1. Uchburchakli muntazam piramidaning balandligi 4 ga, asosining balandligi esa 4,5 ga teng. Piramidaning yon qirrasini toping.
2. To'rtburchakli muntazam piramidaning balandligi 15 ga, diagonal kesimining yuzi 120 ga teng. Shu piramidaning hajmini toping.
3. To'rtburchakli muntazam kesik piramida asoslarining tomonlari 3 cm va 5 cm, diagonali 9 cm. Kesik piramidaning balandligini toping.
4. Konus asosining radiusi 6 ga, balandligi 8 ga teng. Konus yoyilmasining uchidagi burchagini toping.
5. Rasmda ko'rsatilgan uchburchakning to'g'ri chiziq atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jismning hajmini toping.



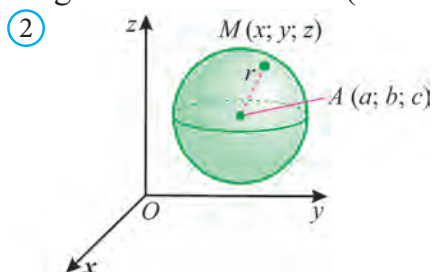
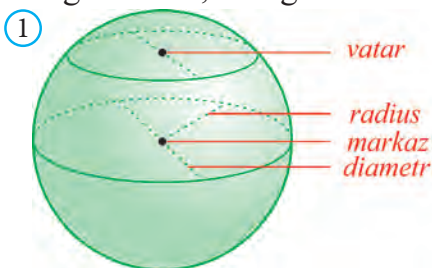


IV BOB. SFERA VA SHAR

13. SHAR VA UNING ELEMENTLARI

13.1. Shar va uning kesimlari

Fazoning berilgan nuqtadan, berilgan masofadan katta bo'lmagan uzoqlikda yotgan hamma nuqtalaridan iborat jismga *shar* deyiladi. Berilgan nuqta sharning *markazi*, berilgan masofa esa sharning *radiusi* deb ataladi (1-rasm).

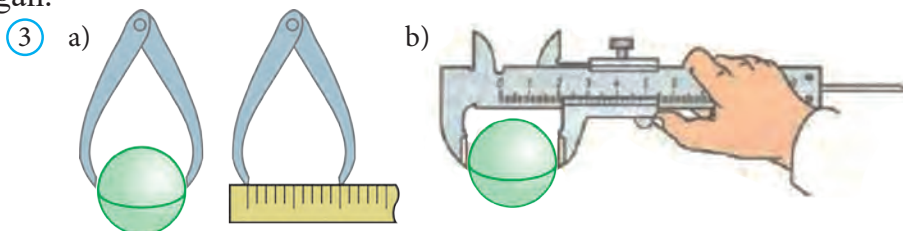


Sharning chegarasi *shar sirti* yoki *sfera* deb ataladi. Shunday qilib, sharning markazidan radiusga teng masofa qadar uzoqlashgan hamma nuqtalar sferaning nuqtalaridir. Shar markazini shar sirtining istalgan nuqtasi bilan tutashiruvchi kesma ham *radius* deyiladi (1-rasm)

Ta'rifga ko'ra, markazi $A(a; b; c)$ nuqtada va radiusi R ga teng bo'lgan sferaning ixtiyoriy $M(x; y; z)$ nuqtasi koordinatalari $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ tenglikni qanoatlantiradi (2-rasm). Uni *sferaning tenglamasi* deb yuritimiz. Agar sferaning markazi $A(0; 0; 0)$ nuqtada bo'lsa, uning tenglamasi $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ko'rinishni oladi.

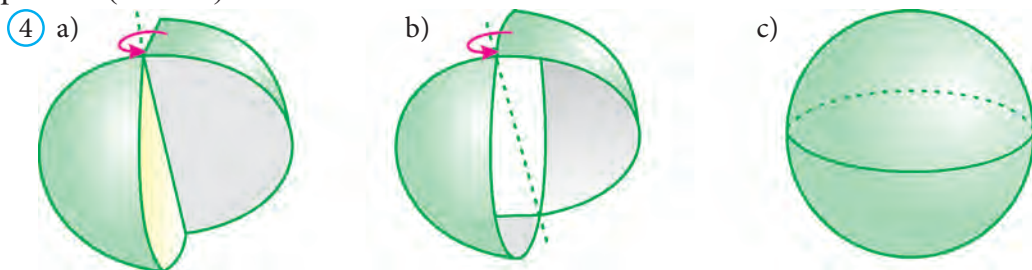
Shuningdek, ta'rifga ko'ra, markazi $A(a; b; c)$ nuqtada va radiusi R ga teng bo'lgan shar $M(x; y; z)$ nuqtalarining koordinatalari $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \leq R^2$ tengsizlikni qanoatlantiradi.

Shar sirtining ikki nuqtasini tutashiruvchi va sharning markazidan o'tuvchi kesma *diametr* deyiladi. 3-rasmda shar diametrini o'lchash jarayoni ko'rsatilgan.



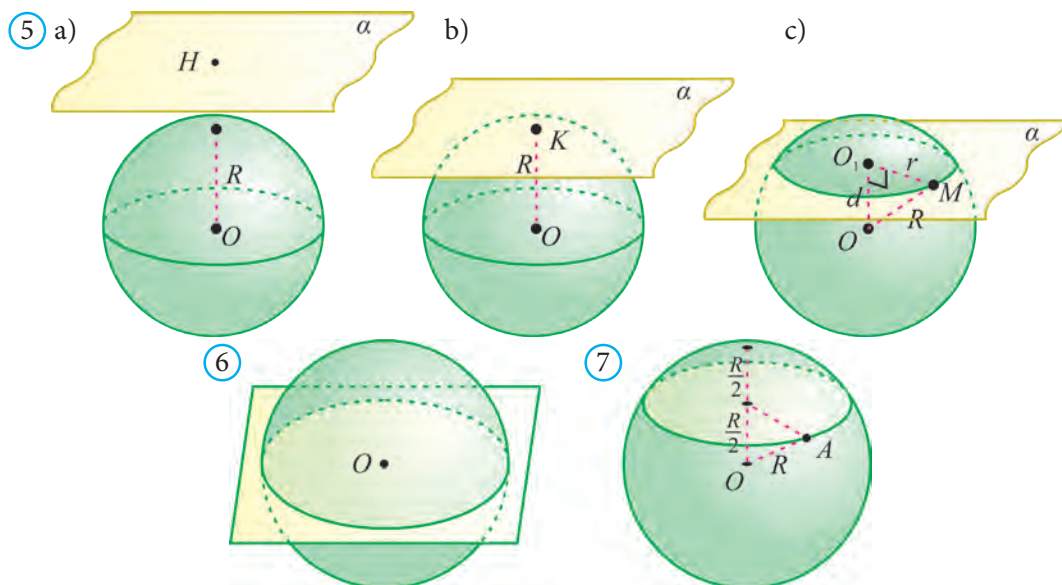
Silindr va konus kabi shar va sfera ham aylanish jismlaridir. Ular mos ra-

vishda, yarim doira va yarim aylanani diametri atrofida aylantirishdan hosil qilinadi (4-rasm).



Sharni ixtiyoriy tekislik bilan kesganda kesimda doira hosil bo‘ladi va bu doiraning markazi shar markazidan kesuvchi tekislikka tushirilgan perpendikular asosidan iborat bo‘ladi (5-rasm).

Radiusi R ga teng shar markazidan d masofada bo‘lgan tekislik o‘tkazilgan bo‘lsin. Bu holda, agar $d > R$ bo‘lsa, tekislik va shar umumiy nuqtaga ega emas (5.a-rasm), agar $d = R$ bo‘lsa, tekislik sharga urinadi (5.b-rasm), agar $d < R$ bo‘lsa, tekislik sharni radiusi $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ bo‘lgan doira bo‘ylab kesib o‘tadi (5.c-rasm).



6

7

Sharning markazidan o‘tadigan tekislik *diametr tekisligi* deyiladi. Diametr tekisligining shar bilan kesimi *katta doira* deyiladi (6-rasm), sfera bilan kesimi esa *katta aylana* deyiladi.

1-masala. Shar radiusining o‘rtasidan unga perpendikular tekislik o‘tkazilgan. Hosil bo‘lgan kesim yuzining katta doira yuziga nisbatini toping.

Yechish. Shartga ko‘ra shar markazidan kesim tekisligigacha bo‘lgan masofa $d = \frac{R}{2}$ ga teng. Sharning radiusi R bo‘lsa (7-rasm), unda kesimdagi

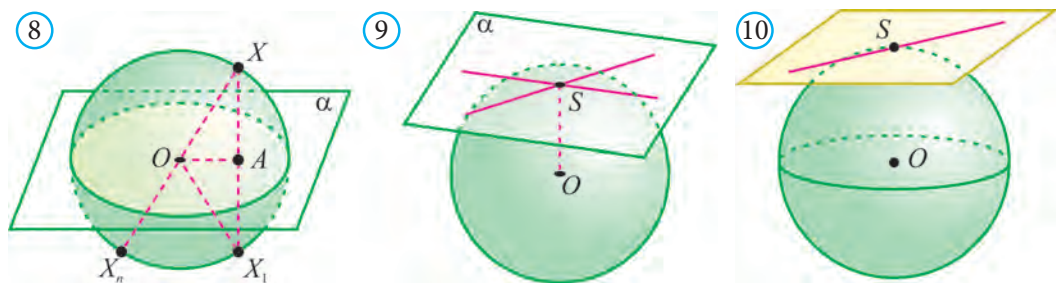
doiraning radiusi $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = R\sqrt{\frac{3}{4}}$ bo'ladi.

Kesimning yuzi: $S = \pi r^2 = \pi \left(R\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2 = \frac{3}{4}\pi R^2$.

Unda kesim yuzining katta doira yuziga nisbati: $\frac{3}{4}\pi R^2 : \pi R^2 = \frac{3}{4}$ bo'ladi.

Javob: $\frac{3}{4}$.

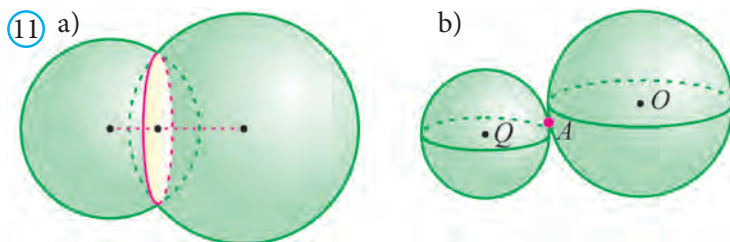
Sharining ixtiyoriy diametr tekisligi uning simmetriya tekisligidan iborat bo'ladi. Sharining markazi uning simmetriya markazidir (8-rasm)



Shar sirtidagi S nuqtadan o'tib, shu nuqtaga o'tkazilgan radiusga perpendikular bo'lgan tekislik sharining **urinma tekisligi**, S nuqtaga esa **urinish nuqtasi** deyiladi (9-rasm).

Ravshanki, urinma tekislik bilan shar faqat bitta umumiy nuqtaga – urinish nuqtasiga ega bo'ladi.

Sharining urinma tekisligida yotib, urinish nuqtasidan o'tuvchi to'g'ri chiziq shu nuqtada sharga **urinma** deyiladi (10-rasm).

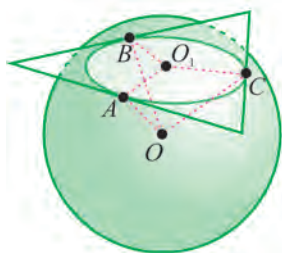


Urinma to'g'ri chiziq ham shar bilan faqat bitta umumiy nuqtaga – urinish nuqtasiga ega bo'ladi.

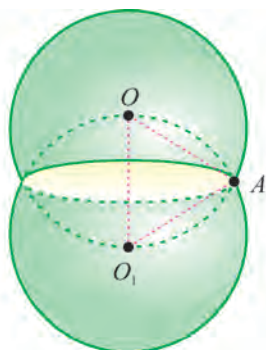
Ikkita sferaning kesishishidan aylana hosil bo'ladi (11.a-rasm). Kesishish nuqtasi faqat bitta nuqtadan iborat sferalar bir-biriga urinadigan sferalar deyiladi (11.b-rasm).

2-masala. Radiusi R ga teng shar tomoni a ga teng muntazam uchburchakning hamma tomonlariga urinadi (12-rasm). Shar markazidan uchburchak tekisligigacha bo'lgan masofani toping.

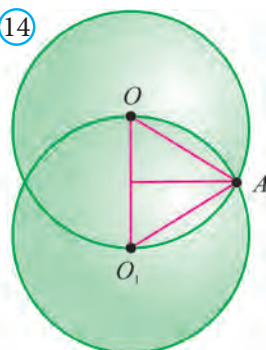
12



13



14



Yechish. A, B, C – sharning uchburchak tomonlariga urinish nuqtalari bo‘lsin (12-rasm). Sharning O markazida uchburchak tekisligiga OO_1 perpendikularni tushiramiz. OA, OB, OC kesmalar uchburchak tomonlariga perpendikular. Uch perpendikular haqidagi teorema ko‘ra O_1A, O_1B, O_1C kesmalar ham uchburchakning mos tomonlariga perpendikular.

To‘g‘ri burchakli OO_1A, OO_1B, OO_1C uchburchaklar o‘zaro teng. Unda ular uchun OO_1 katet umumiy, gipotenuzalari esa radiusga teng:

$$O_1A = O_1B = O_1C.$$

Demak, O_1 – berilgan uchburchakka ichki chizilgan aylananing markazi.

Bu aylananing radiusi $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ ga teng.

Pifagor teoremasiga ko‘ra, izlanayotgan masofani topamiz. Bu masofa quyidagiga teng: $OO_1 = \sqrt{OA^2 - O_1A^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{12}}$. **Javob:** $\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{12}}$. \square

3-masala. Radiusi R ga teng ikkita teng shar shunday joylashganki, biringining markazi ikkinchisining sirtida yotadi (13-rasm). Bu sharlar sirtlari kesishgan chiziq uzunligini toping.

Yechish. Sharlarni markazlaridan o‘tuvchi tekislik bilan kesamiz. (14-rasm). Ma’lumki, bu sharlar sirti aylana bo‘ylab kesishadi. Mazkur aylananing radiusi tomonlari R ga teng bo‘lgan teng tomonli OAO_1 uchburchakning balandligiga teng. Bu balandlik $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ ga teng.

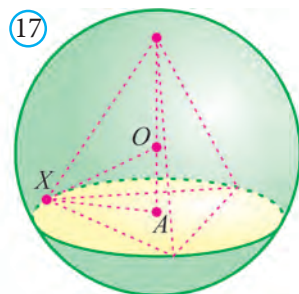
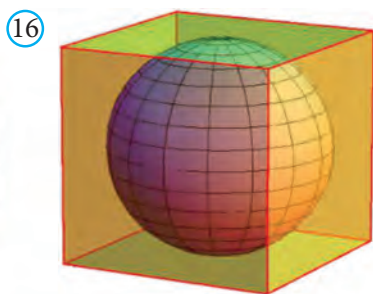
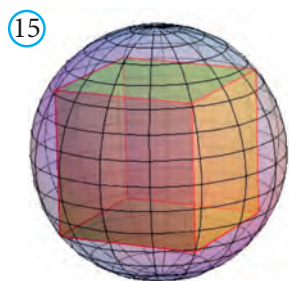
Demak, izlanayotgan chiziqning uzunligi $\pi R\sqrt{3}$ ga teng. **Javob:** $\pi R\sqrt{3}$. \square

13.2. Sharga ichki va tashqi chizilgan ko‘pyoqlar va aylanish jismlari

Agar ko‘pyoqning hamma uchlari shar sirtida yotsa, *ko‘pyoq sharga ichki chizilgan* deyiladi (15-rasm). Shar esa ko‘pyoqqa tashqi chizilgan deb yuritiladi.

Ma’lum bo‘lishicha, har qanday uchburchakli piramidaga yagona tashqi shar chizish mumkin. Shuningdek, to‘g‘ri prizmaning asosiga tashqi aylana

chizish mumkin bo'lsa, bunday prizmagacha tashqi shar chizish mumkin va aksincha.



Agar ko'pyoqning hamma yoqlari shar sirtiga urinsa, bunday *ko'pyoq sharga tashqi chizilgan* deyiladi (16-rasm). Shar esa ko'pyoqqa ichki chizilgan deb yuritiladi.

Ma'lum bo'lishicha, har qanday uchburchakli piramidaga yagona ichki shar chizish mumkin. Shuningdek, to'g'ri prizmaning asosiga ichki aylana chizish mumkin va prizma balandligi shu aylana diametridan iborat bo'lsa, bunday prizmagacha ichki shar chizish mumkin va aksincha.

Quyidagi munosabatlarning ham o'rinli bo'lishini mustaqil asoslang.

1. Asosiga ichki chizilgan aylana radiusi r_1 ga, asosidagi ikki yoqli burchagi α ga teng bo'lgan muntazam piramidaga r radiusli shar ichki chizilgan bo'lsa, $r = r_1 \sin \alpha / (1 + \cos \alpha)$ tenglik o'rinli bo'ladi.

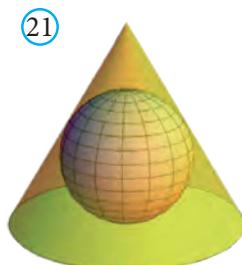
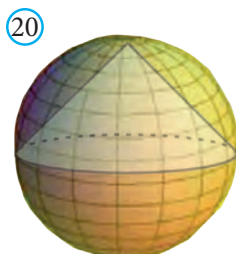
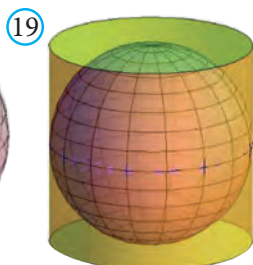
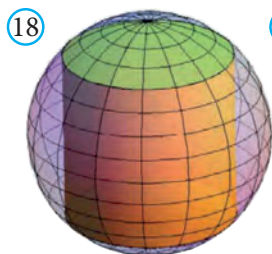
2. Balandligi H ga, yon qirradi l ga teng bo'lgan muntazam piramidaga R radiusli shar tashqi chizilgan bo'lsa, $l^2 = 2HR$ tenglik o'rinli bo'ladi.

4-masala. Muntazam piramidaga tashqi chizilgan sharining markazi uning o'qida yotishini isbotlang.

Isbot. Sharining O markazidan piramida asosi tekisligiga OA perpendikular tushiramiz (17-rasm). X piramida asosining ixtiyoriy bir uchi bo'lsin. Pifagor teoremasiga ko'ra $AX^2 = OX^2 - OA^2 = R^2 - OA^2$ bo'ladi.

Shunday qilib, AX kesmaning uzunligi piramida asosining istalgan uchi uchun aynan bir xil. Bu esa A nuqta piramida asosiga tashqi chizilgan aylananing markazi ekanini anglatadi.

Demak, sharining O markazi piramidaning o'qida yotadi. \square



Agar silindr asoslarining aylanalari shar sirtida yotsa, *silindr sharga ichki chizilgan* deyiladi (18-rasm), shar esa silindrga tashqi chizilgan deb yuritiladi.

Agar shar sirti silindrning asoslari va yon sirtiga urinsa, *shar silindrga ichki chizilgan* deyiladi (19-rasm), silindr esa sharga tashqi chizilgan deb yuritiladi.

Ma'lum bo'lishicha, silindrning yasovchisi asos diametriga teng bo'lsa, unga tashqi shar chizish mumkin. Shuningdek, quyidagi munosabatlarning ham o'rinli bo'lishini mustaqil asoslang.

1. Silindrga shar ichki chizilgan bo'lsa, silindrning o'q kesimi kvadrat va sharning radiusi silindr asosining radiusiga teng bo'ladi. Silindrning balandligi H , asosining radiusi R , ichki chizilgan shar radiusi r bo'lsa, u holda

$$H = 2r; R = r.$$

2. Diagonali d ga teng bo'lgan silindrga R radiusli shar tashqi chizilgan bo'lsa,

$$d = 2R.$$

Agar konusning uchi va asos aylanasi shar sirtida yotsa, *konus sharga ichki chizilgan* deyiladi (20-rasm), shar esa silindrga tashqi chizilgan deb yuritiladi.

Agar shar sirti konusning asosi va yon sirtiga urinsa, *shar konusga ichki chizilgan* deyiladi (21-rasm), konus esa sharga tashqi chizilgan deb yuritiladi.

Ma'lum bo'lishicha, har qanday konusga ichki va tashqi shar chizish mumkin. Shuningdek, quyidagi munosabatlarning ham o'rinli bo'lishini mustaqil asoslang.

1. Asosining radiusi R ga, yasovchisi bilan asos tekisligi orasidagi burchagi α ga teng bo'lgan konusga r_1 radiusli shar ichki chizilgan bo'lsa, u holda

$$r_1 = R \sin \alpha (1 + \cos \alpha).$$

2. Balandligi H ga, yasovchisi l ga teng bo'lgan konusga R_1 radiusli shar tashqi chizilgan bo'lsa, u holda $l^2 = 2HR_1$.

3. Asoslarining radiuslari R va r ga, balandligi H ga, yasovchisi l ga teng bo'lgan kesik konusga r_1 radiusli shar ichki chizilgan bo'lsa, u holda

$$H = 2r_1 \quad \text{va} \quad l = R + r.$$

5-masala. Sharga tashqi chizilgan kesik konusning yasovchilari o'rtalaridan o'tuvchi tekislik bilan shu kesik konus hosil qilgan kesimning yuzi 4π ga teng. Kesik konusning yasovchisini toping.

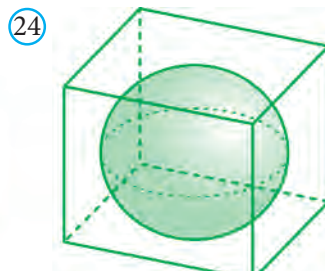
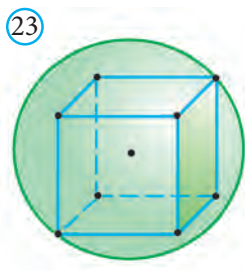
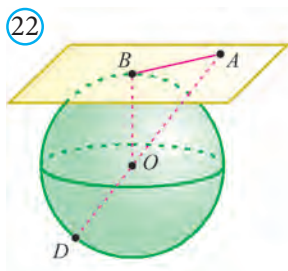
Yechish. Kesik konus yasovchilari o'rtalaridan o'tuvchi tekislik uni doira bo'ylab kesadi. Bu doiraning radiusi r ga teng bo'lsin. Masalaning shartiga ko'ra $\pi r^2 = 4\pi$. Bu yerdan $r = 2$ ekanini topamiz.

Kesik konusning o'q kesimida teng yonli trapetsiya hosil bo'ladi. Bu trapetsiyaning o'rta chizig'ini topamiz: $l = 2r = 4$.

Kesik konus sharga tashqi chizilgani uchun trapetsiyaga ichki aylana chizish mumkin. Shu sababli trapetsiyaning yon tomoni x uning o'rta chizig'i l ga teng bo'ladi: $x = l = 4$. *Javob:* 4. \square

Mavzuga oid masalalar va amaliy topshiriqlar

507. Sfera a) to'g'ri chiziq; b) tekislik bilan nechta umumiy nuqtaga ega bo'lishi mumkin?
508. Sferaning radiusi 13 dm ga teng. Sfera markazidan 5 dm masofada tekislik o'tkazilgan. Hosil bo'lgan kesimning yuzini hisoblang.
509. K nuqtadan sferagacha bo'lgan eng qisqa masofa 6 cm, eng uzoq masofa esa 16 cm. Berilgan sfera bilan chegaralangan shar katta doirasining yuzini hisoblang.
510. Sferaning tenglamasi $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 25$ ko'rinishda berilgan bo'lsa, uning markazi va radiusini toping.
511. Markazi $C(5; -2; 7)$ nuqtada, radiusi $R = 2$ bo'lgan sfera tenglamasini yozing.
512. Agar sferaning markazi $C(3; -2; 1)$ nuqtada va $K(2; -1; -3)$ nuqta unga tegishli bo'lsa, sfera tenglamasini yozing.
513. $A(2; -3; 5)$ va $B(4; 1; -3)$ sfera diametrining uchlari bo'lsa, sfera tenglamasini yozing.
514. Sharining radiusi 10 dm, uning tekislik bilan kesimining yuzi 64π dm². Sharining markazidan kesim tekisligigacha bo'lgan masofani toping.
515. Tekislik radiusi 20 cm bo'lgan sharga urinadi. A nuqta bu tekislikda yotadi va sharining markazidan 25 cm masofada joylashgan. A nuqtadan urinish nuqtasi B gacha bo'lgan masofani toping (22-rasm).



516. Birlik sharga ichki chizilgan to'g'ri burchakli parallelepiped sirtining yuzini toping (23-rasm).
517. Birlik sharga tashqi chizilgan kub hajmini toping (24-rasm).
518. Sferaga tashqi chizilgan kub hajmi 216 ga teng. Sfera radiusini toping.

519. Shardan tashqaridagi M nuqtadan uning sirtiga MN urinma o'tkazildi. M nuqtadan sharning sirtigacha bo'lgan eng qisqa masofa 6 ga, sharning markazigacha bo'lgan masofa 15 ga teng. MN ning uzunligini toping.
520. Shar katta doirasining yuzi 25π ga teng. Sharning markazidan qanday masofada o'tkazilgan tekislik shardan doirasining yuzi 9π ga teng bo'lgan kesim ajratadi?
521. Tomonlari 10, 10 va 12 ga teng bo'lgan uchburchak shar sirtiga urinadi. Uchburchak tekisligidan shar markazigacha masofa 4 ga teng bo'lsa, sharning radiusini toping.
522. Radiusi 13 ga teng bo'lgan shar sirtiga diagonallari 30 va 40 ga teng bo'lgan romb tomonlari urinadi. Romb tekisligidan shar markazigacha bo'lgan masofani aniqlang.
523. Shar radiusi 6 ga teng. Radius uchidan 30° burchak tashkil qiluvchi tekislik o'tkazilgan. Shar bilan tekislik hosil qilgan kesimning yuzini toping.
524. Radiusi 15 ga va 20 ga teng bo'lgan ikki shar markazlari orasidagi masofa 25 ga teng. Shar sirtlari kesishishidan hosil bo'lgan aylananing uzunligini toping.
525. Sharning radiusi $\sqrt{8}\pi$ ga teng. Radiusning oxiridan u bilan 60° li burchak tashkil etadigan kesuvchi tekislik o'tkazilgan. Kesimning yuzini toping.
526. Tomoni 12,5 ga teng bo'lgan romb tomonlari shar sirtiga urinadi. Sharning radiusi 10 ga teng. Romb tekisligi va shar markazi orasidagi masofa 8 ga teng bo'lsa, rombnings yuzini toping.
527. Ikki kesik konusga ichki chizilgan shar radiuslarining nisbati 2 ga teng. Bu kesik konuslar balandliklarining nisbatini toping.
528. Asoslarning radiuslari R va r bo'lgan kesik konusga shar ichki chizilgan. Kesik konus yasovchisining uzunligini toping.
529. Sferaning radiusi 60% uzaytirilsa, sfera o'q kesimining yuzi necha foiz ko'payadi?
530. To'la sirtining yuzi 72 ga teng bo'lgan kubga tashqi chizilgan sharning radiusini toping.
531. Qirrasining uzunligi 8 ga teng bo'lgan kubning barcha uchlaridan o'tuvchi sferaning radiusini toping.
532. Muntazam tetraedrning qirradi 1 ga teng. Shu tetraedrga tashqi chizilgan sharning radiusini toping.
533. To'rtburchakli muntazam piramida asosining tomoni 12 ga, unga ichki chizilgan sharning radiusi 3 ga teng. Piramidaning yon sirtini toping.

534. Piramidaning hajmi 25 ga, unga ichki chizilgan sharning radiusi 1,5 ga teng. Piramidaning to‘la sirtini toping.
535. Sharga ichki chizilgan konusning balandligi 3 ga, asosining radiusi $3\sqrt{3}$ ga teng. Sharning radiusini toping.
536. Radiusi 5 ga teng bo‘lgan sharga ichki chizilgan konusning balandligi 4 ga teng. Konusning hajmini toping.
537. Sferaga balandligi asosining diemetriga teng bo‘lgan konus ichki chizilgan. Agar sferaning radiusi 2 ga teng bo‘lsa, konus asosining yuzini toping.

Tarixiy ma’lumotlar

Abu Rayhon Beruniy “Astronomiya san’atidan boshlang‘ich ma’lumot beruvchi kitob” nomli asarining geometriyaga tegishli qismida fazoviy jismlar, jumladan, aylanish jismlari haqida qator ma’lumotlar keltirgan.

To‘g‘ri va og‘ma silindrlarga ta’rif bergan. Konusni (asos deb ataluvchi) doiradan yoki boshqa shakldan boshlanib, nuqtada tugovchi jism sifatida tasvirlaydi. Shuningdek, konus uchun silindr mavjudligi va uning bir asosi konusning asosi, ikkinchi asosining markazi esa to‘g‘ri konusning uchi bo‘lishini aytadi. Bu silindrning to‘g‘ri yoki og‘ma bo‘lishiga qarab, konusning ham to‘g‘ri yoki og‘ma bo‘lishini ta’kidlaydi. Beruniyning “Konus hamma vaqt silindrning uchdan birini tashkil qiladi” – degan tasdig‘idan konusning hajmi asosi va balandligi konusning asosi va balandligi bilan bir xil bo‘lgan silindr hajmining uchdan biriga teng, degan jumla kelib chiqadi.

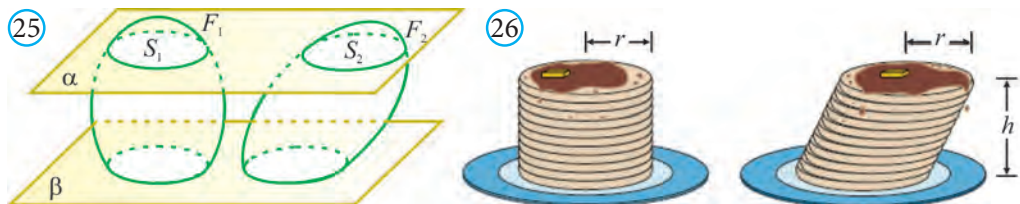
Beruniy konusni tekislik bilan kesganda, kesim: uchburchak, doira, parabola, ellips, giperbola bo‘lishini aytadi va ular haqida batafsil izoh beradi. Beruniy parabolani – “kifoyali kesim”, ellipsni – “yetishmovchi kesim” va giperbolani “ortiqcha kesim” deb nomlaydi.

Shuningdek, Beruniy shar va sferaga ham ta’rif berib ularning qator xossalari o‘rgangan. Xususan, u doira o‘zining qo‘zg‘olmas diametri atrofida aylantirilsa, shar hosil bo‘lishini ta’kidlab o‘tgan. Sharga ichki chizilgan beshta jism – beshta muntazam ko‘pyoq: kub, ikosaedr, oktaedr, tetraedr va dodekaedrlar haqida ma’lumot bergan. Sharni tekislik bilan kesganda hosil bo‘ladigan kesimlar haqida batafsil ma’lumotlarni keltirgan. Jumladan, kesimda hosil bo‘ladigan katta doira yuzi shar sirti yuzining to‘rtidan biriga tengligi, xuddi shu singari, agar sharning diametri katta doira aylanasi-ning yuziga ko‘paytirilsa, shar sirtining yuzi hosil bo‘lishini aytib o‘tadi. Bu xossalar qadimgi yunon olimi Arximedning “Shar va silindr haqida” degan asarida ham uchraydi. Demak, Beruniy Arximedning shu asari bilan tanish bo‘lgan.

14. SHAR VA UNING BO'LAKLARI HAJMI

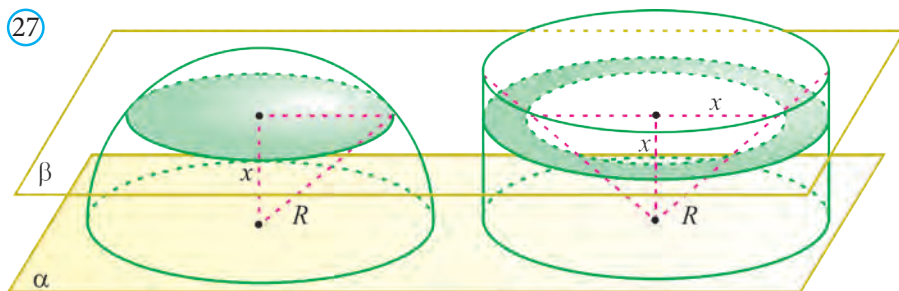
14.1. Sharning hajmi

Fazoda berilgan F_1 va F_2 jismlarni bitta tekislikka parallel tekisliklar bilan kesganda kesimda teng yuzaga ega bo'lgan shakllar hosil bo'lsa, bu jismlar hajmi teng bo'ladi (25- rasm).



Bu ajoyib xossa *Kavalyeri prinsipi* deb yuritiladi. Uni asoslash uchun F_1 va F_2 jismlarni bitta tekislikka parallel tekisliklar bilan kesganda hosil bo'ladigan yupqa qatlamlardan tuzilgan deb olamiz. Bu qatlamlarni bir xil qalinlikdagi (balandlikdagi) to'g'ri silindrlar deb olsak, shartga ko'ra ularning asoslari yuzalari tengligidan bu silindrlarning hajmlari ham bir-biriga teng bo'lishi kelib chiqadi. Unda bu qatlamlardan tuzilgan F_1 va F_2 jismlarning hajmlari ham o'zaro teng bo'ladi (26- rasm).

Teorema. *Radiusi R ga teng sharning hajmi $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ bo'ladi.*



Isbot. α tekislikda yotgan R radiusli yarimshar berilgan bo'lsin (27-rasm). Uning yonida asosi shu tekislikda yotgan, radiusi R ga teng doiradan iborat va balandligi R ga teng bo'lgan silindrni qaraymiz. Bu silindrga, asosi silindrning yuqori asosidan iborat, uchi esa silindr pastki asosi markazida bo'lgan konusni ichki chizamiz.

Berilgan yarimshar hajmi silindrning konusdan tashqari qismi hajmiga teng ekanligini ko'rsatamiz. α tekislikdan x ($0 \leq x \leq R$) masofada o'tuvchi va unga parallel β tekislikni o'tkazamiz. Bu tekislikning yarimshar bilan kesimida radiusi $\sqrt{R^2 - x^2}$ ga, yuzi esa $\pi(R^2 - x^2)$ ga teng bo'lgan doirani hosil qilamiz.

Bu tekislikning ikkinchi jism bilan kesimida tashqi radiusi R ga, ichki radiusi esa x ga teng bo'lgan halqa hosil bo'ladi. Bu halqaning yuzi ham

$\pi R^2 - \pi x^2 = \pi(R^2 - x^2)$ bo'ladi. Unda Kavalyeri prinsipiga ko'ra yarimdoira va yasalgan jism hajmlari o'zaro teng bo'ladi. Bu hajmni topaylik:

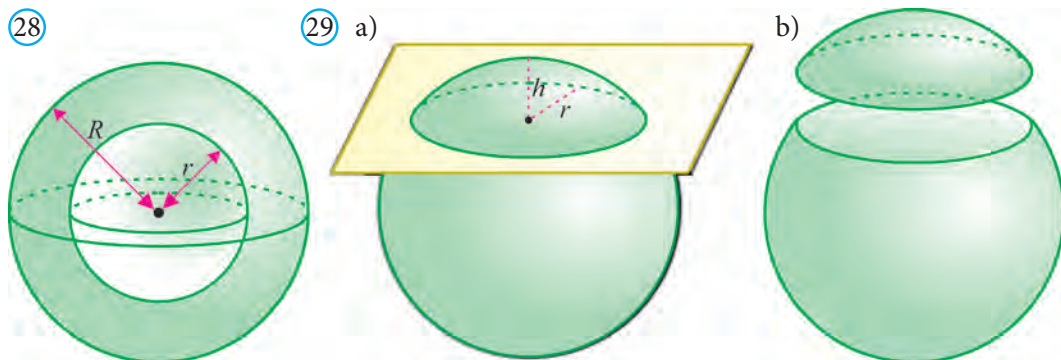
$$V^1 = V_{\text{silindr}} - V_{\text{konus}} = \pi R^2 R - \frac{1}{3} \pi R^2 R = \frac{2}{3} \pi R^3.$$

Sharning hajmi yarimshar hajmidan ikki marta katta, demak, u $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ bo'ladi. \square

14.2. Shar bo'laklari va ularning hajmi

Shar halqasi deb umumiy markazga ega bo'lgan ikkita shar sirlari orasidagi jismga aytiladi (28-rasm). Bu sharlar radiuslari, mos ravishda, R va r bo'lsa ($R < r$),

shar halqasining hajmi $V = \frac{4}{3} \pi (R^3 - r^3)$ bo'ladi.



Shar segmenti deb uning markazidan o'tmaydigan tekislik bilan uni kesganda hosil bo'lgan shar bo'laklariga aytiladi (29-rasm). Bu tekislik bilan sharni kesganda kesimda hosil bo'lgan doira *shar segmentining asosi* deb ataladi. Shar segmenti asosiga perpendikular shar radiusining segment ichidagi bo'lagi *shar segmentining balandligi* deb ataladi.

Teorema. *Shar segmentining hajmi* $V = \frac{1}{3} \pi h^2 (3R - h)$ bo'ladi, bu yerda R – shar radiusi, h esa shar segmentining balandligi.

Isbot. Yana 27-rasmga murojaat qilamiz. β tekislik yarimshardan H balandlikka ega bo'lgan segment ajratgan bo'lsin, deb faraz qilamiz. Unda bu tekislik silindrdan va unga ichki chizilgan konusdan balandligi h ga teng bo'lgan silindr va kesik konusni ajratadi.

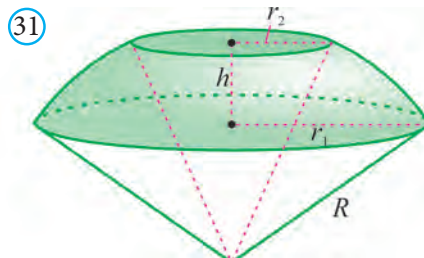
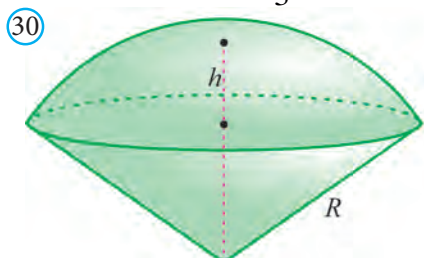
Unda Kavalyeri prinsipiga ko'ra, shar segmenti V hajmi silindr va kesik konuslar hajmlarining ayirmasiga teng bo'ladi.

Silindrning hajmi $V_{\text{silindr}} = \pi R^2 h$. Kesik konusning hajmi esa

$$V_{\text{kesik konus}} = \frac{1}{3}\pi R^3 - \frac{1}{3}\pi(R-h)^3 = \pi R^2 h - \pi R^2 h + \frac{1}{3}\pi h^3.$$

Demak, shar segmentining hajmi

$$V = V_{\text{silindr}} - V_{\text{kesik konus}} = \frac{1}{3}\pi h^2(3R-h). \square$$



Shar sektori deb shar segmenti va uchi shar markazida, asosi esa shar segmenti asosidan iborat konusdan tashkil topgan shar bo‘lagiga aytiladi (30-rasm).

Shar sektorining hajmini shar segmenti va mos konus hajmlarini qo‘shib topish mumkin (30-rasm).

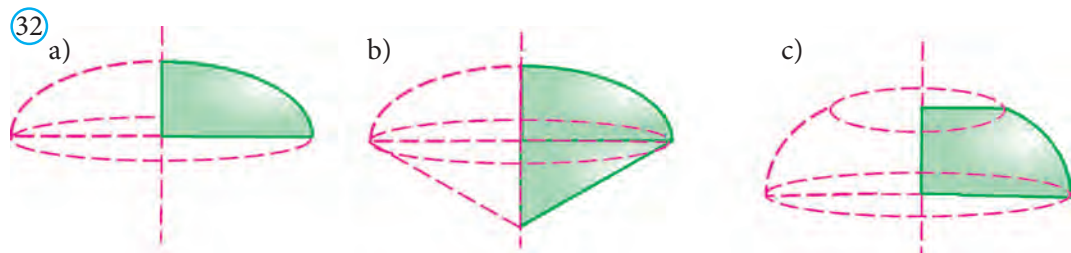
Shar sektorining hajmi $V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$ bo‘ladi.

Shar kamari deb sharning ikki parallel kesuvchi tekisliklar orasidagi bo‘lagiga aytiladi (31-rasm). Sharning bu tekisliklar bilan hosil qilgan kesimlari **shar kamarining asoslari**, bu tekisliklar orasidagi masofa esa **shar kamarining balandligi** deb aytiladi.

Shar kamarining hajmini shar hajmidan ortiqcha segmentlar hajmlarini ayirib topish mumkin (31-rasm). Shar kamari asoslarining radiuslari r_1 va r_2 , balandligi esa h bo‘lsa,

shar kamarining hajmi $V = \frac{1}{6}\pi h(3r_1^2 - 3r_2^2 + h^2)$ bo‘ladi.

Eslatma: Shar va sfera kabi shar segmenti, shar sektori va shar kamarlari ham aylanish jismlaridir. Ular, mos ravishda, quyidagi yassi shakllarning muayyan o‘q atrofida aylantirishdan hosil qilinadi (32-rasm):

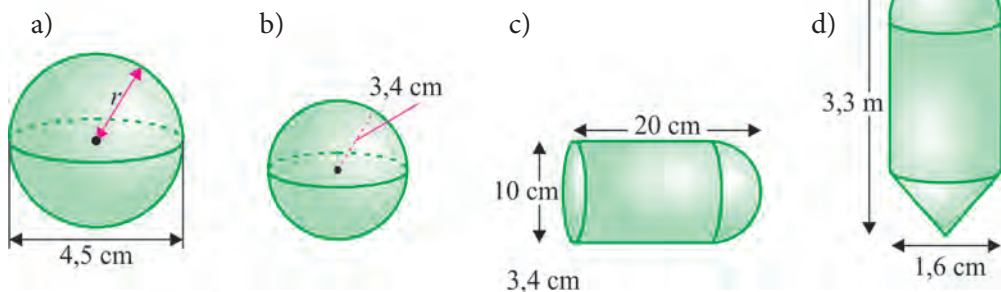


Mavzuga oid masalalar va amaliy topshiriqlar

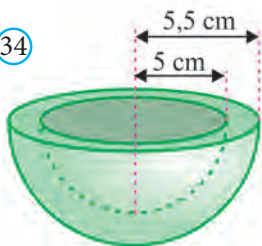
538. Diametri 2 marta kattalashtirilgan shar hajmi necha marta kattalashadi?

539. 33-rasmda tasvirlangan jismlar hajmini toping.

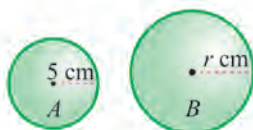
33



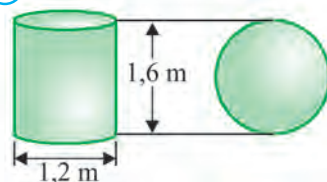
34



35



36



540. Ichki radiusi 5 cm, tashqi radiusi 7 cm bo'lgan shar halqasining hajmini toping.

541. 34-rasmda tasvirlangan qozonning hajmini toping.

542. 35-rasmdagi *B* sharning hajmi *A* sharning hajmidan ikki marta katta bo'lsa, uning radiusini toping.

543. 36-rasmda berilganlarga ko'ra, shar va silindrning hajmini toping.

544. Hajmi 8 m^3 ga teng bo'lgan kubga ichki chizilgan shar hajmini toping.

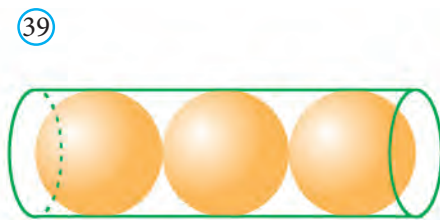
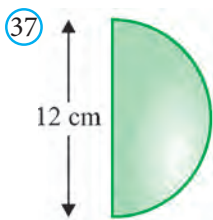
545. Hajmi $\frac{4}{3}\pi \text{ cm}^3$ ga teng bo'lgan sharga ichki chizilgan silindrning o'q kesimining yuzini toping.

546. Radiusi 5 cm va balandligi 3 cm bo'lgan shar segmenti hajmini toping.

547. Radiusi 3 cm va balandligi 1 cm bo'lgan shar sektorining hajmini toping.

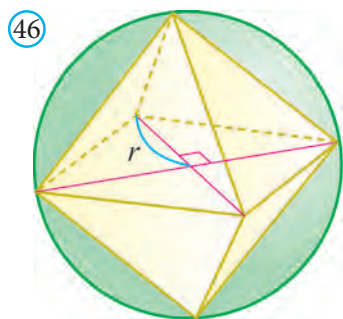
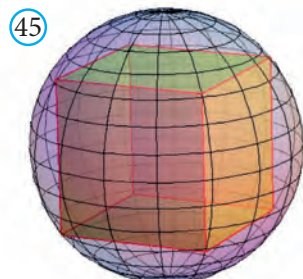
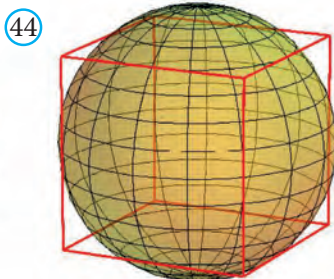
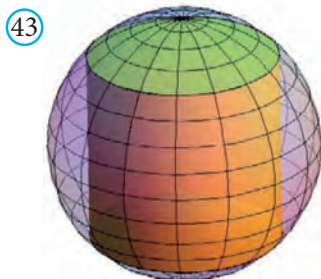
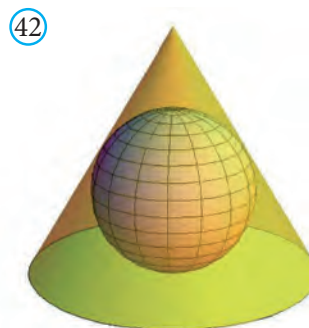
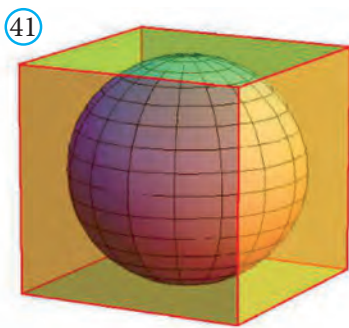
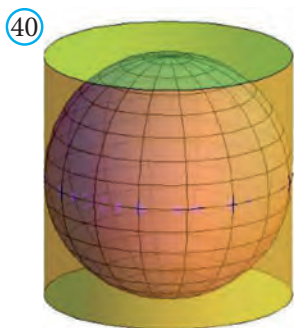
548. Qirrasi *a* ga teng bo'lgan kub berilgan. Kubga a) ichki; b) tashqi chizilgan shar hajmini toping.

549. 37-rasmda tasvirlangan yarimdoiraning vertikal diametri atrofida aylanishidan hosil bo'lgan fazoviy jismning hajmini toping.



550. Gaz saqlanadigan sferik shakldagi sisternaning hajmi $113 \frac{1}{3} \text{ m}^3$ ga teng bo'lsa, uning radiusini toping.
- 551*. Tegishli o'lchash ishlarini bajarib, 38-rasmda tasvirlangan apelsinning mag'zi va po'chog'ining hajmlari o'zaro teng ekanligini tekshiring.
- 552*. Silindrik shakldagi qutiga radiusi 5 cm bo'lgan uchta tennis koptogi joylashadi (39-rasm). Qutining hajmini toping.
553. Radiuslari 2 cm va 5 cm bo'lgan sovun pufaklari qo'shilishidan hosil bo'lgan katta pufakning hajmi qancha bo'ladi?
554. Radiusi 3 cm va 5 cm bo'lgan sharlar tarozining bir pallasiga, radiusi 8 cm bo'lgan shar ikkinchi pallasiga qo'yildi? Qaysi palla og'irroq bo'ladi?
555. Sharning markazidan 6 cm masofada joylashgan kesimning yuzi $64\pi \text{ cm}^2$ bo'lsa, sharning hajmini toping.
556. Qirrası 1 m bo'lgan kubga tashqi chizilgan sharning radiusini toping.
- 557*. Sharga ichki chizilgan kubning hajmi shar hajmidan necha marta kichik?
558. Radiusi 2 ga teng bo'lgan shardan deometri bo'ylab silindrik teshik teshilgan. Agar silindrik teshikning radiusi 1 ga teng bo'lsa, sharning qolgan bo'lagining hajmini hisoblang.
559. Agar shar sektori asosining radiusi 60 cm ga, sharning radiusi esa 75 cm ga teng bo'lsa, shar sektorining hajmini toping.
560. Shar kamarining asoslari yuzlari $225\pi \text{ cm}^2$, $264\pi \text{ cm}^2$ va shar radiusi 17 cm bo'lsa, shar kamarining hajmini toping.
561. Massasi 1 kg bo'lgan qo'rg'oshindan radiusi 0,6 cm ga teng bo'lgan nechta sharcha quyish mumkin? Qo'rg'oshinning zichligi $11,4 \text{ kg/dm}^3$ ga teng deb oling.
562. Shar shaklidagi handalaklardan birining diametri ikkinchisidan ikki marta katta. Birinchi handalak ikkinchisidan necha marta og'ir?
563. Ikkita shar hajmlarining nisbati $m:n$ kabi. Ular diametrlarining nisbati nimaga teng bo'ladi?
564. Shar diametriga perpendikular va uni 6 cm va 12 cm qismlarga bo'luvchi tekislik o'tkazilgan. Sharning hosil bo'lgan qismlari hajmlarini hisoblang.
565. Sharni chegaralovchi sfera tenglamasi $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 6z = 3$ ko'rinishda bo'lsa, shar hajmini hisoblang.

566. Asosining radiusi 1 ga teng bo'lgan silindrga ichki chizilgan sharning hajmini toping (40-rasm).
567. Qirradi 1 ga teng bo'lgan kubga ichki chizilgan sharning hajmini toping (41-rasm).
568. Asosining radiusi 1 ga, yasovchisi 2 ga teng bo'lgan konusga ichki chizilgan sharning hajmini toping (42-rasm).
569. Asosining radiusi 3 ga, balandligi 8 ga teng bo'lgan silindrga tashqi chizilgan sharning hajmini toping (43-rasm).
570. Uzunliklari 1 ga teng kubning qirralariga urinadigan sharning hajmini toping (44-rasm).
571. Qirradi 1 ga teng bo'lgan kubga tashqi chizilgan sharning hajmini toping (45-rasm).



572. Sharga ichki chizilgan oktaedr hajmini toping (46-rasm).

573. Qirradi 3 ga teng bo'lgan kubga shar ichki chizilgan. Sharning hajmini toping.

574. Qirradi $\sqrt{3}$ ga teng bo'lgan kubga shar tashqi chizilgan. Sharning hajmini toping.

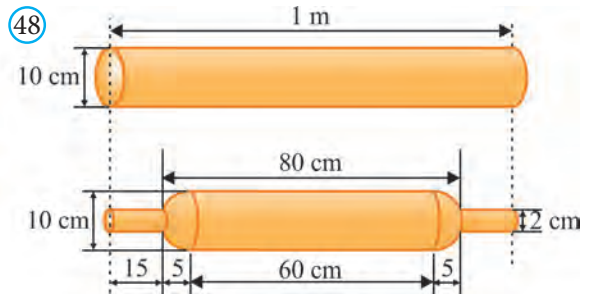
575. Silindr sharga tashqi chizilgan. Silindrning hajmi 33 ga teng. Sharning hajmini toping.

576. Silindr sharga tashqi chizilgan. Shar hajmi 24 ga teng. Silindrning hajmini toping.

577*. Arximed teoremasini isbotlang: Sharning hajmi unga tashqi chizilgan silindr hajmidan 1,5 marta kichik.

578. O'quvchi qumni yarimshar shaklidagi va radiusi r ga teng bo'lgan idishdan, radiusi va balandligi r ga teng bo'lgan konus shaklidagi idishga solayotib, yarimshar hajmi konus hajmidan ikki marta katta, degan xulosaga keldi. Uning tajribadan kelib chiqqan bu xulosasi nazariy jihatdan to'g'rimi?

579. 47-rasmda berilganlarga ko'ra masala tuzing va uni yeching.



580. 48- rasm asosida masala tuzing va uni yeching.

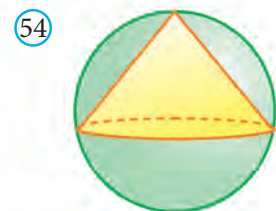
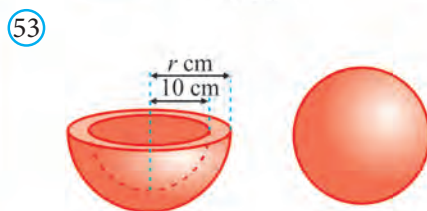
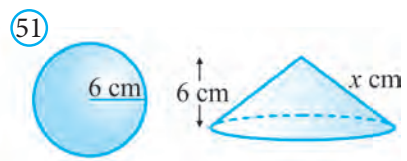
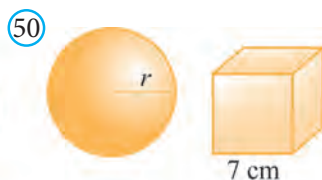
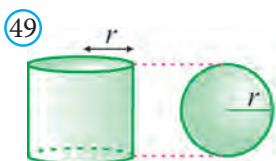
581. 49-rasmda berilganlarga ko'ra, silindr va shar hajmlari nisbatini toping.

582. 50-rasmdagi shar va kub hajmlari teng bo'lsa, shar radiusini toping.

583. 51-rasmdagi shar va konus hajmlari o'zaro teng bo'lsa, konusning yasovchisini toping.

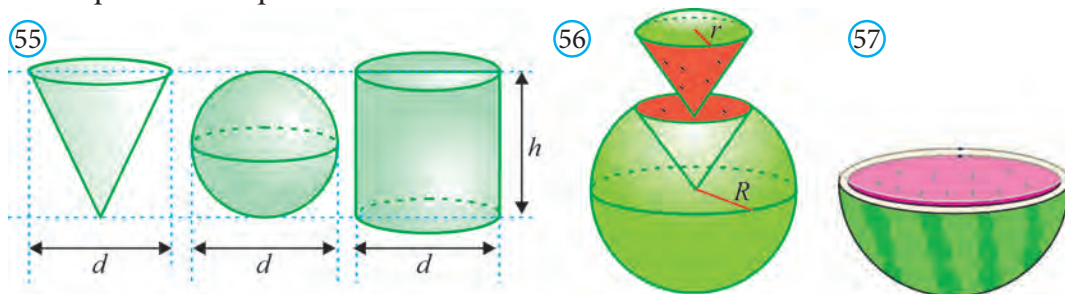
584. Radiusi 10 cm bo'lgan shar kub shaklidagi qutiga zich qilib joylangan. Qutining bo'sh qolgan qismining hajmini toping (52-rasm).

585. 53-rasmdagi jismlar bir xil hajmdagi materialdan yasalgan. Agar sharning radiusi 7 cm, yarimshar diametr kesimi halqasining ichki radiusi 10 cm bo'lsa, tashqi radiusini toping.

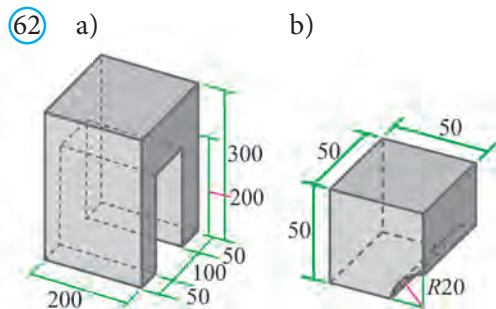
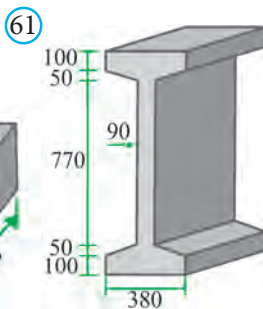
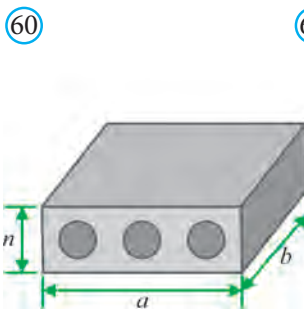
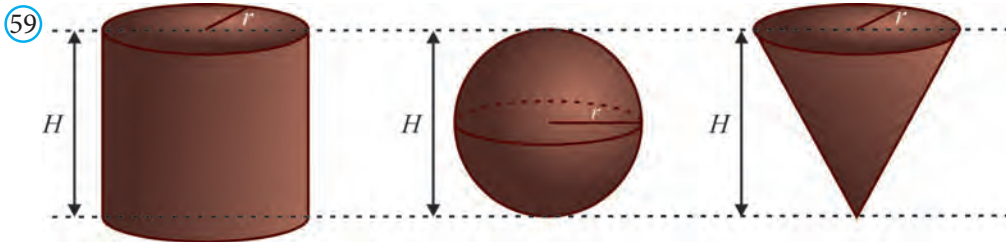
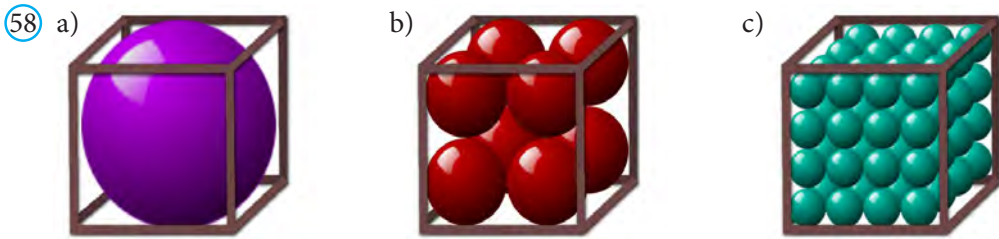


586. Balandligi diametriga teng bo'lgan silindr shaklidagi taxtdan eng katta hajmli shar yo'nib olingan. Taxtaning necha foizi chiqitga chiqib ketgan?

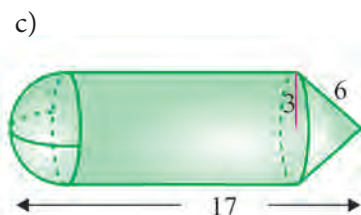
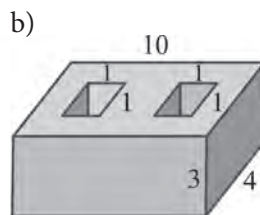
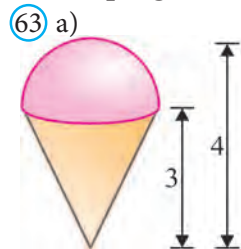
- 587*. Radiusi 10 mm bo'lgan mis shar bolg'alanib, qalinligi 3 mm bo'lgan silindr shaklidagi disk hosil qilingan. Diskning radiusini toping.
588. Konus sharga ichki chizilgan. Konus asosining radiusi shar radiusiga teng. Shar hajmi 28 ga teng. Konusning hajmini toping (54-rasm).
589. Konus sharga ichki chizilgan. Konus asosining radiusi shar radiusiga teng. Konusning hajmi 6 ga teng bo'lsa, sharning hajmini toping.
590. Kubga radiusi $\sqrt{3}$ ga teng bo'lgan shar ichki chizilgan. Kubning hajmini toping.
- 591*. Radiusi va balandligi bir xil bo'lgan silindr, shar va konus shaklidagi idishlar berilgan (55-rasm). Silindr idish suvga to'ldirilib, undagi suv bilan avvaliga konus shaklidagi idish to'ldirilgan, so'ng ortib qolgan suv shar shaklidagi idishga quyilgan. Natijada silindr shaklidagi idishda qancha suv qoladi?



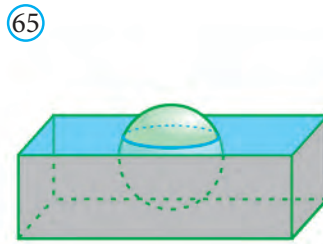
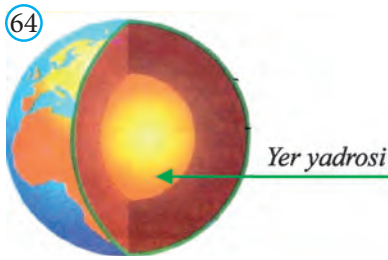
- 592*. Shar shaklidagi tarvuzdan shar sektori shaklidagi bo'lagi kesib olingan (56-rasm). Rasmdagi berilganlardan foydalanib, butun tarvuz hajmining bo'lagi hajmiga nisbatini toping.
593. Shar shaklidagi brinchi tarvuzning diametri ikkinchisidan 2 marta uzun. Birinchi tarvuz ikkinchisidan necha marta og'irroq?
594. Radiusi 20 cm bo'lgan shar shaklidagi tarvuz po'chog'ining qalinligi 2 cm. Yarimta tarvuzning qanchasi po'choqqa chiqib ketadi (57-rasm)?
- 595*. Kub shaklidagi uchta bir xil akvariumga 58-rasmda ko'rsatilgandek, kub yoqlariga yoki (va) bir-biriga urinadigan qilib sharchalar joylashtirilgan hamda akvariumlar suv bilan to'ldirilgan. Akvariumlarning qaysi biriga ko'proq suv ketadi?
- 596*. Do'konda radiusi va balandligi bir xil bo'lgan silindr, shar va konus shaklidagi shokolad konfetalari sotilmoqda (59-rasm). Agar ularning narxi bir xil bo'lsa, siz ulardan qaysi birini sotib olgan bo'lar edingiz? Nega?
597. 60-rasmda tasvirlangan beton plitaning o'lchamlariga ko'ra uning massasini hisoblang. Bu yerda, o'yilgan silindr shaklidagi teshiklar diametri $d = 10$ cm, $a = 1,5$ m, $b = 6$ m, $n = 20$ cm va plita zichligini $\rho = 4$ g/cm³ deb oling.



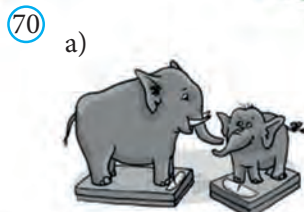
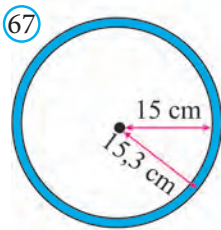
598. 61-rasmda tasvirlangan 6 m uzunlikdagi beton plita ko'ndalang kesimining millimetrlarda berilgan o'lchamlariga ko'ra massasini hisoblang (plitaning zichligini $\rho = 4 \text{ g/cm}^3$ deb oling).
599. 62-rasmda tasvirlangan detallar zichligi 10 g/cm^3 bo'lgan metallardan ishlangan. Qirqish va ishlov berish natijasida metallning 1,5% chiqitga chiqishi ma'lum. Bu detallarning millimetrlarda berilgan o'lchamlariga ko'ra, ularni tayyorlashga sarflanadigan metall massasini toping.
600. 63-rasmdagi ma'lumotlar asosida berilgan fazoviy jismlar hajmini toping.



601. Yer ekvatorning uzunligi 40 000 km ga, yadrosining radiusi esa 3500 km (64-rasm). Yer yadrosining hajmi Yerning hajmidan necha marta kichik?



- 602*. Radiusi 6 cm bo'lgan sharcha suvda suzib yuribdi (65-rasm). Agar sharcha materialining zichligi $0,7 \text{ g/cm}^3$ bo'lsa, sharchaning suvdan chiqib turgan qismining balandligini toping.
- 603*. Kosmik kema Yerga tushadigan apparatining radiusi 1 m bo'lgan shar shaklida (66-rasm). Suvga tushganda cho'kib ketmasligi uchun bu apparatning massasi qancha bo'lishi kerak?
604. Plasmassadan ishlangan sharchaning diametri 0,6 cm. Agar plasmassa zichligi $0,15 \text{ g/cm}^3$ ekanligi ma'lum bo'lsa, sharchalardan nechtasining massasi 8 kg bo'ladi?
605. Bolalar to'pining diametr kesimi 67-rasmda berilgan. Rasmda berilgan ma'lumotlardan foydalanib, bu to'pni ishlab chiqarish uchun sarflangan rezina hajmini toping.
- 606*. Bozorda bir xil radiusli ikki xil navli tarvuz sotilmoqda (68- rasm). Birinchisining po'chog'i yupqa bo'lib, u 5000 so'mdan, ikkinchisi radiusining 20 foizi po'choqdan iborat bo'lib, u 3500 so'mdan sotilmoqda. Qaysi tarvuzni sotib olgan bo'lar edingiz?
607. Yer ekvatori lenta bilan tarang qilib o'raldi. So'ng lentaning uzunligi 1 m ga uzaytirildi (69-rasm). Bu lenta tagidan mushuk o'ta oladimi?

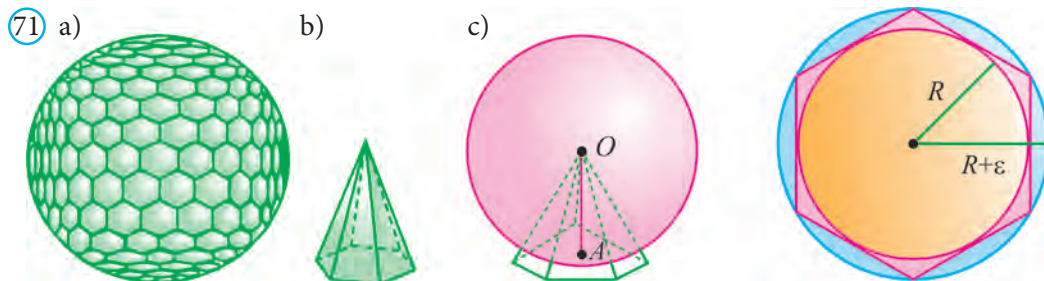


608. Mis halqa qizdirilganda uning teshigi kengligi 1,5 marta uzaydi. Halqa teshigining yuzi qanchaga o'zgardi?

- 609*. Globus ekvatorining uzunligi 1 m ga teng. Yetishmayotgan ma'lumotlarni qidirib topib, Yer hajmining globus hajmiga nisbatini toping.
610. Jism bir yo'nalishda k marta cho'zilsa, uning hajmi qanday o'zgaradi?
611. Filning barcha chiziqli o'lchamlari ikki marta uzaytirilsa, uning massasi qanchaga o'zgaradi (70.a-rasm)? Fil rasmining yuzi-chi (70.b-rasm)?
- 612*. Kovak shar devorining hajmi $252\pi \text{ cm}^3$ ga, devorning qalinligi 3 cm ga teng. Tashqi sharning radiusini toping.

15. SFERA SIRTINING YUZI

Sferaga yoqlari kichik qavariq ko'pburchaklardan iborat ko'pyoqni tashqi qilib chiqamiz (71.a-rasm). Bu ko'pyoq sirtining yuzi, ya'ni barcha qavariq ko'pburchaklar yuzlarining yig'indisi S' ga teng bo'lsin. Ko'pyoq yoqlarining chiziqli o'lchovlari, ya'ni istalgan ikki nuqtasi orasidagi masofa ε dan kichik deb faraz qilamiz va ko'pyoq sirti yuzining taqribiy qiymatini topamiz.



Ko'pyoqning hajmi asosi ko'pyoqning yoqlaridan iborat, uchi esa sferaning O markazida bo'lgan piramidalar hajmlarining yig'indisiga teng (71.b-rasm). Har bir piramidaning OA balandligi sferaning R radiusiga teng (71.c-rasm). Shuning uchun ko'pyoqning hajmi $V = \frac{1}{3} S'R$ bo'ladi.

Ko'pyoqning hajmi sfera bilan chegaralangan sharning hajmidan katta, biroq o'sha markazli va $R + \varepsilon$ radiusli sharning hajmidan kichik bo'ladi. Shunday qilib,

$$\frac{4}{3}\pi R^3 < \frac{1}{3}S'R < \frac{4}{3}\pi(R + \varepsilon)^3.$$

Bundan $4\pi R^2 < S' < 4\pi(R + \varepsilon)^2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{R}\right)$ ga ega bo'lamiz.

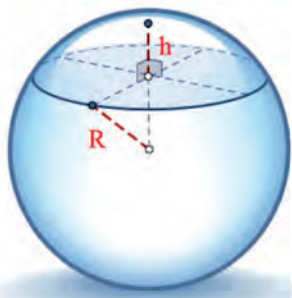
Tashqi chizilgan ko'pyoq yoqlarining o'lchamlari cheksiz kamaytirilgan-ga, ya'ni ε cheksiz kamayganda, ko'pyoq sirti $4\pi R^2$ ga yaqinlashadi. Shuning uchun $4\pi R^2$ soni sferaning yuzi sifatida qabul qilinadi.

Shunday qilib, R radiusli sferaning yuzi

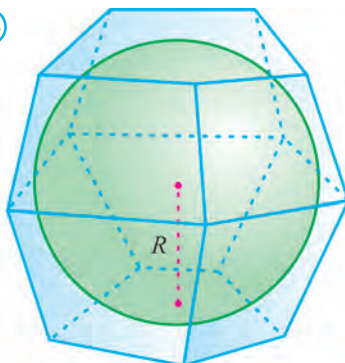
$$S = 4 \pi R^2$$

formula bo'yicha hisoblanadi, ya'ni u to'rtta katta doira yuziga teng.

72



73



Yuqoridagi mulohazalardan quyidagi natijalar kelib chiqadi:

1. Shar sektori sirti sferik qismining (72-rasm) yuzi, ya'ni sferik segmentning yuzi $S = 2\pi Rh$, bu yerda R – shar radiusi, h – segmentning balandligi.
2. R radiusli sharga tashqi chizilgan ko'pyoqning hajmi $V = \frac{1}{3}SR$, bu yerda S ko'pyoq to'la sirtining yuzi (73- rasm).
3. R radiusli sharning hajmi $V = \frac{1}{3}SR$, bu yerda S shar sirtining yuzi.

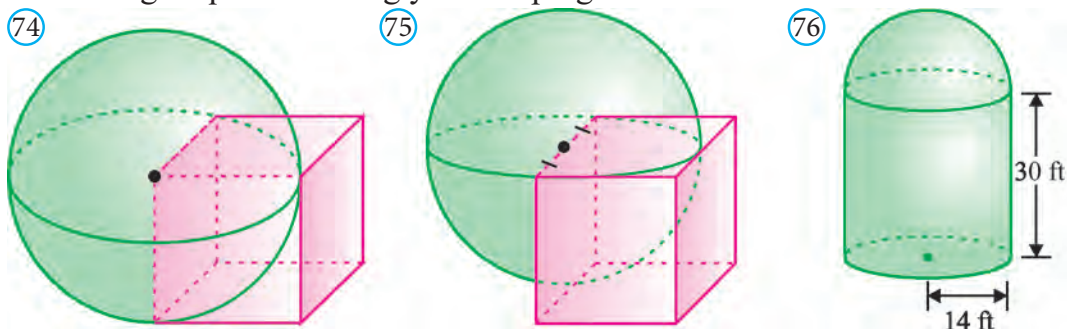
Mavzuga oid masalalar va amaliy topshiriqlar

- 613.** Sharning katta doirasi yuzi 3 ga teng. Shar sirtining yuzini toping.
- 614.** Radiusi R ga teng bo'lgan sharning hajmi V , sirtining yuzi S bilan belgilangan. a) agar $R = 4$ cm bo'lsa, S va V ni toping; b) agar $V = 4000$ cm³ bo'lsa, R va S ni toping; c) agar $S = 64\pi$ cm² bo'lsa, R va V ni toping.
- 615.** Radiusi 10 cm bo'lgan futbol to'pini tayyorlash uchun qancha teri materiali kerak bo'ladi? (To'pni tayyorlashda 10% material chiqitga chiqishini hisobga oling).
- 616.** Sfera radiusi uch marta kattalashtirilsa, uning sirti yuzi qancha kattalashadi?
- 617.** Shar shaklidagi pufak shishirildi. Bunda uning sirti yuzi 9% ga oshgan bo'lsa, uning radiusi qanchaga uzaydi?
- 618.** Shar tekislik bilan hajmi 720π cm³ va 252π cm³ bo'lgan bo'laklarga bo'lingan. Shar sirtining yuzini toping.
- 619.** Sferaning tenglamasi a) $x^2 + y^2 + z^2 = 3$; b) $x^2 + 2x + y^2 + z^2 = 0$;
c) $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 16$; d) $x^2 - 2x + y^2 + 2y + z^2 - 4z = 3$

ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, uning yuzini hisoblang.

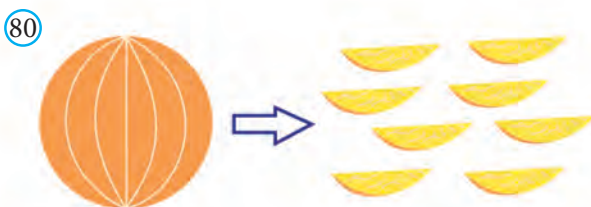
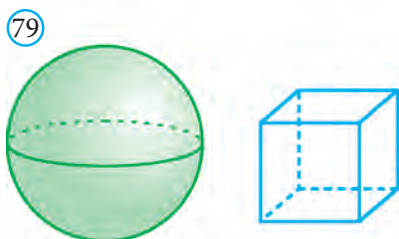
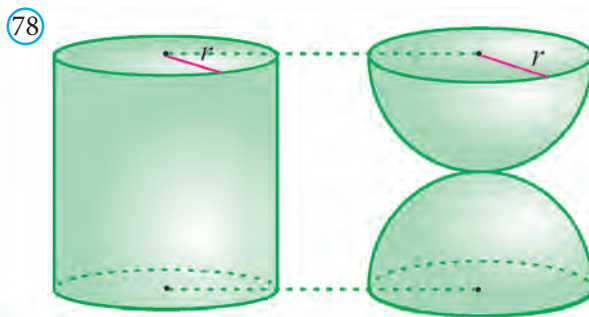
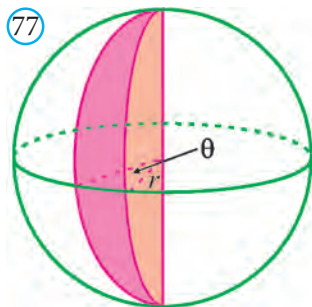
- 620.** Sferaning tenglamasi $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 6z - 3 = 0$ ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, uning sirti yuzini hisoblang.
- 621.** Yer sirtining taxminan 75 foizini suv tashkil qiladi. Yerning radiusi 6375 km bo‘lsa, Yer yuzasi quruqlik qismining yuzini toping.
- 622.** Balandligi 50 cm va radiusi 3 m bo‘lgan shar segmenti shaklidagi tepalikni hosil qilish uchun necha kub metr tuproq kerak bo‘ladi?
- 623.** Shar shaklidagi radiuslari 10 cm va 20 cm bo‘lgan handalaklardan qaysi birini tanlagan bo‘lar edingiz? Nega?
- 624*.** Oynning diametri Yer diametridan taxminan 4 marta kichik. Oy va Yerning shaklini shar deb olib, ularning hajmlari nisbatini toping.
- 625*.** Mars diametri Yer diametrining yarmini tashkil qiladi. Mars va Yerning shaklini shar deb olib, Mars sirti Yer sirtidan necha marta kichik ekanligini aniqlang.
- 626*.** Quyoshning diametri Oy diametridan 400 marta katta. Quyosh sirtining yuzi Oy sirtining yuzidan necha marta katta?
- 627.** O‘lchamlari 20 cm, 20 cm va 10 cm bo‘lgan to‘g‘ri burchakli parallelepiped shaklidagi mis parchasi eritilib, shar shaklida quyilgan. Sharning radiusini toping.
- 628.** Radiusi 2 cm bo‘lgan sharlarning nechtasidan radiusi 6 cm bo‘lgan shar hosil qilish mumkin?
- 629.** Radiusi 3 cm, 4 cm va 5 cm bo‘lgan mis sharlarni eritib, qanday radiusli sharni hosil qilish mumkin?
- 630.** Olcha danagini qalinligi danak diametriga teng bo‘lgan mag‘zi qoplab turadi. Olcha va uning danagini shar shaklida deb olib, olcha mag‘zi hajmining uning danagi hajmiga nisbatini toping.
- 631.** Radiusi 1 m bo‘lgan shar sirtini qalinligi 0,5 mm bo‘lgan bo‘yoq bilan bo‘yash uchun qancha hajmdagi bo‘yoq kerak bo‘ladi?
- 632.** Sharga silindr ichki chizilgan. Silindrning to‘la sirtining yuzi 18 ga teng. Shar sirtining yuzini toping.
- 633.** Kubning qirradi a ga teng. a) kubga ichki chizilgan; b) kubga tashqi chizilgan; c) kubning barcha qirralari o‘rtasidan o‘tuvchi sfera sirtining yuzini toping.
- 634.** Tekislik sfera sirtini yuzi 12 dm^2 va 24 dm^2 bo‘lgan bo‘laklarga ajratgan. Kesimda hosil bo‘lgan doira yuzini toping.
- 635*.** Qirradi 1,6 ga teng $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kubning A uchi A_1 nuqtadan o‘tuvchi sferaning markazi hisoblanadi (74-rasm). Sferaning kub ishida joylashgan qismi sirtining yuzini toping.
- 636*.** Qirradi 1,9 ga teng kubning bitta qirrasining o‘rtasi – radiusi 0,95 ga

teng bo'lgan sharning markazidir (75-rasm). Sharning kub ichida joylashgan qismi sirtining yuzini toping.

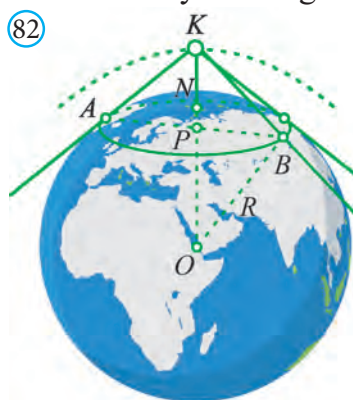


- 637.** Ikkita shar berilgan. Birinchi shar radiusi ikkinchi shar radiusidan 2 marta katta. Birinchi shar sirtining yuzi ikkinchisidan qancha marta katta?
- 638.** Shar radiusi uch marta kattalashtirilsa, uning hajmi qancha kattalashadi?
- 639.** Uchta shar radiuslari, mos ravishda, 6, 8, 10 ga teng. Hajmi shu uchta shar hajmiga teng bo'lgan shar radiusini toping.
- 640.** Birinchi shar hajmi ikkinchisidan 27 marta katta. Birinchi shar sirtining yuzi ikkinchisidan necha marta katta?
- 641.** Ikkita shar radiuslari, mos ravishda, 6 va 8 ga teng. Hajmi shu ikkita shar hajmiga teng bo'lgan shar radiusini toping.
- 642*.** Shar sektori sirti sferik qismining yuzi, ya'ni sferik segment yuzi $S = 2\pi R h$ ga teng ekanligini asoslang, bu yerda R – shar radiusi, h – segmentning balandligi.
- 643*.** R radiusli sharga tashqi chizilgan ko'pyoqning hajmi $V = \frac{1}{3}SR$ ga teng ekanligini asoslang, bu yerda S ko'pyoq to'la sirtining yuzi.
- 644*.** R radiusli sharning hajmi $V = \frac{1}{3}SR$ ekanligini asoslang, bu yerda S shar sirtining yuzi.
- 645*.** 76-rasmda osmon jismlarini kuzatish uchun mo'ljallangan observatoriya binosi keltirilgan. Rasmda berilganlardan foydalanib, observatoriya devorlari va tomining sirtini toping. Arag 1 gallon bo'yoq 300 kvadrat fut sirtini bo'yashga yetishi ma'lum bo'lsa, observatoriya sirtini bo'yash uchun necha gallon bo'yoq kerak bo'ladi?
- 646.** 77-rasmda berilgan ma'lumotlar asosida berilgan fazoviy jismning to'la sirti va hajmini toping.

647. 78-rasmda tasvirlangan fazoviy jismlarning balandliklari teng. Qaysi jismlarning to'la sirti katta?
648. Sferani bo'yash uchun 250 g bo'yoq kerak bo'ldi (79-rasm). Qirrasiz sfera radiusiga teng bo'lgan kubni bo'yash uchun qancha bo'yoq kerak bo'ladi?
- 649*. Apelsin 8 ta teng bo'lakka bo'lindi (80-rasm). Barcha bo'laklarning to'la sirti apelsin to'la sirtidan qanchaga katta?



650. Shar shaklidagi shokolad eritilib, undan kub shaklidagi shokolad yasaldi (81-rasm). Qaysi shaklning to'la sirti kichikroq bo'ladi?
- 651*. 1060 km balandlikda uchib borayotgan fazoviy kema qanday qismi sirtini kuzatish imkoniyatiga ega? 40- paralleldan shimolda joylashgan Yer sirtining yuzini toping. Masalani yechishda Yer radiusini 6 370 km deb oling va 82-rasmdan foydalaning.



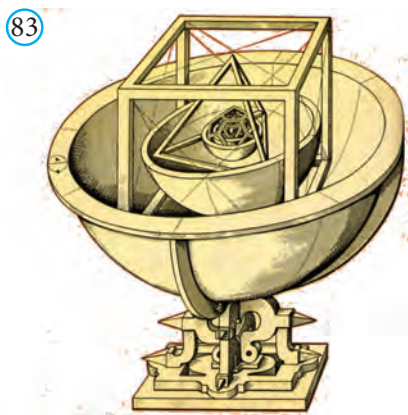
652*. Globus ekvatorining uzunligi 1 m ga teng. Yetishmayotgan ma'lumotlarni qidirib topib, globusda O'zbekiston egallagan maydon yuzini toping.

Tarixiy ma'lumotlar

Quyosh sistemasidagi sayyoralarning harakat qonunini kashf qilgan nemis astronomi Iogann Kepler (1571–1630) muntazam ko'pyoqlar bilan qiziqib qolib, 1596-yilda bu xususida o'z qarashlarini “Dunyo yaralishining siri” deb nomlangan asarida bayon etdi. Mavjud sayyoralar harakat orbitalari (harakatlanish trayektoriyalari) orasidagi masofalarni bir-biriga ichma-ich joylashgan Platon jismlaridan foydalanib topish mumkinligini ko'rsatib berdi.

Keplerning sayyoralar geometriyasi quyidagicha edi (83- rasm). “Yer (Yer orbitasi) hamma orbitalar uchun o'lchov birligi hisoblanadi. Uni shar deb olib unga dodekaedrni tashqi chizamiz. Dodekaedrga tashqi chizilgan sfera Mars orbitasidir. Mars orbitasi sferasiga tetraedrni tashqi chizamiz. Tetraedrga tashqi chizilgan sfera Yupiter orbitasidan iborat bo'ladi. Yupiter orbitasi sferasiga kubni tashqi chizamiz. Kubga tashqi chizilgan sfera Saturn orbitasini tashkil qiladi. Yer orbitasi sferasiga ikosaedrni ichki chizamiz. Unga ichki chizilgan sfera Venera orbitasidan iborat bo'ladi. Venera sferasiga oktaedrni ichki chizamiz. Oktaedrga ichki chizilgan sfera Merkuriy sayyarasi orbitasidan iborat bo'ladi.

Kepler shu tariqa muntazam ko'pyoqlardan foydalanib, o'zining “Koinot kubogini” qurdi. Bu hisoblar haqiqatdan ham sayyoralar orbitalari orasidagi masofalarga juda yaqin bo'lgan.



16. BOBNI TAKRORLASHGA DOIR AMALIY MASHQLAR

4-TEST TOPSHIRIG'I

- Agar sferaning radiusi 50% orttirilsa, sfera sirtining yuzi necha foizga ko'payadi?
A) 125%; B) 100%; C) 150%; D) 75%.
- Radiusi 13 ga teng bo'lgan shar tekislik bilan kesilgan. Agar shar markazidan kesimgacha masofa 10 ga teng bo'lsa, kesimning yuzini toping.
A) 69π ; B) $3\sqrt{6}\pi$; C) 100π ; D) 3.
- Shar sirtining yuzi Q bo'lsa, uning hajmi nimaga teng?
A) $Q\sqrt{Q/6}$; B) $\frac{1}{3}Q\pi$; C) $\frac{3\pi}{4}\sqrt{Q}$; D) $\frac{4}{3}Q\sqrt{Q}$.
- Sharni bo'yash uchun 100 gramm bo'yoq ishlatildi. Agar sharning diametri uch marta orttirilsa, uni bo'yash uchun necha gramm bo'yoq kerak bo'ladi?
A) 900; B) 300; C) 600; D) 450.
- Radiusi 5 ga teng bo'lgan shar markazidan 3 ga teng bo'lgan masofada tekislik bilan ikkita jisimga ajratildi. Shu jismlardan kichigining hajmini toping.
A) $17\frac{1}{3}\pi$; B) $15\frac{2}{3}\pi$; C) $17\frac{2}{3}\pi$; D) $16\frac{1}{3}\pi$.
- Radiusi 2 ga teng bo'lgan yarimshar balandligining o'rtasidan yarimsharning asosiga parallel tekislik o'tkazilgan. Hosil bo'lgan shar qatlamining hajmini toping.
A) $10\pi/3$; B) $11\pi/3$; C) 4π ; D) 3π .
- Sfera sirtidagi uchta nuqta orasidagi masofa 26, 24 va 10 ga, sfera sirtining yuzi esa 900π ga teng. Shu uchta nuqta orqali o'tgan tekislikdan sferaning markazigacha bo'lgan masofani toping.
A) $2\pi\sqrt{14}$; B) $2\sqrt{14}$; C) $4\sqrt{14}$; D) 56π .
- Hajmi 125 bo'lgan kubga ichki chizilgan shar sirtining yuzini toping.
A) 125π ; B) 25π ; C) $24,5\pi$; D) 105π .
- Ikkita qo'shni yoqlarining markazlari orasidagi masofa $2\sqrt{2}$ ga teng bo'lgan kubga tashqi chizilgan shar sirtining yuzini toping.
A) 28π ; B) 36π ; C) 48π ; D) $18\sqrt{2}\pi$.
- Radiusi $\sqrt{\frac{3}{2}}$ ga teng yarimsharga kub ichki chizilgan bo'lib, uning to'rtta uchi yarimshar asosida, qolgan to'rttasi shar sirtida yotadi. Kubning hajmini toping.

- A) 1; B) $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$; C) 2,25; D) 2.

11. Kubga tashqi chizilgan sharning hajmi 1023π ga teng. Kubning diagonaliga tegishli bo‘lmagan uchlaridan diagonalgacha bo‘lgan masofani toping.

- A) $4\sqrt{2}/3$; B) $3\sqrt{2}/4$; C) $4\sqrt{2}/9$; D) $3\sqrt{3}/8$.

12. Kubning bir uchidan chiqqan uchta qirralarining o‘rtalari orqali o‘tkazilgan kesimning yuzi $16\sqrt{3}$ ga teng. Shu kubga ichki chizilgan shar sirtining yuzini hisoblang.

- A) 96π ; B) 256π ; C) 144π ; D) 128π .

13. Kubga ichki chizilgan sharning hajmi $85\frac{1}{3}\pi$ ga teng. Shu kubning to‘la sirtini toping.

- A) 382; B) 386; C) 385; D) 384.

14. Piramidaning to‘la sirti 60 ga, unga ichki chizilgan sharning radiusi 5 ga teng. Piramidaning hajmini toping.

- A) 120; B) 80; C) 90; D) 100.

15. Oltiburchakli muntazam piramidaning apofemasi 5 ga, uning asosiga tashqi chizilgan doiraning yuzi 12π ga teng. Shu piramidaga ichki chizilgan sharning radiusini toping.

- A) 3; B) 3,2; C) 1,5; D) 2,5.

16. Uchburchakli muntazam piramidaga tashqi chizilgan sharning markazi uning balandligini 6 va 3 ga teng bo‘lgan qismlarga ajratadi. Piramidaning hajmini toping.

- A) $25\sqrt{3}/4$; B) $81\sqrt{3}/2$; C) $729\sqrt{3}/4$; D) $243\sqrt{3}/4$.

17. Kubga ichki chizilgan silindrning hajmi unga ichki chizilgan konusning hajmidan π ga ortiq. Kubning hajmini toping.

- A) 4; B) 6; C) 8; D) 12.

18. O‘q kesimi kvadratdan iborat silindrga radiusi 3 ga teng bo‘lgan shar ichki chizilgan. Silindr va shar sirtlari orasidagi jismning hajmini toping.

- A) 27π ; B) 24π ; C) 18π ; D) 12π .

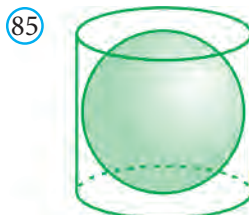
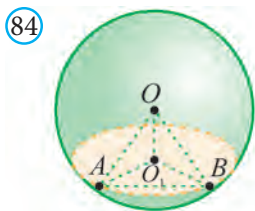
19. O‘q kesimi kvadratdan iborat silindrga radiusi 2 ga teng bo‘lgan shar tashqi chizilgan. Silindr hajmini toping.

- A) $2\sqrt{2}\pi$; B) $3\sqrt{2}\pi$; C) $4\sqrt{2}\pi$; D) 8π .

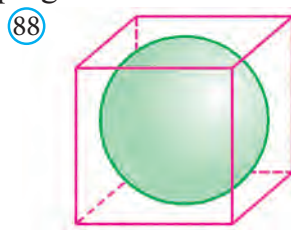
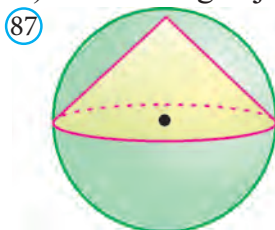
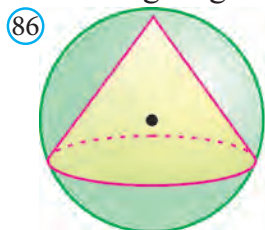
20. Silindrga shar ichki chizilgan. Silindrning hajmi 16π ga teng bo'lsa, shar-ning hajmini toping.
 A) $32\pi/3$; B) $16\pi/3$; C) $64\pi/3$; D) $10\frac{1}{3}\pi$.
21. Kesik konusga shar ichki chizilgan. Konus ustki asosining yuzi 36π ga, ostki asosining yuzi esa 64π ga teng. Shar sirtining yuzini toping.
 A) 172π ; B) 100π ; C) 144π ; D) 192π .
22. Radiusi 2 ga teng shar konusga ichki chizilgan. Konus yasovchisi va balandligi orasidagi burchak 30° ga teng. Konus yon sirtining yuzini toping.
 A) 24π ; B) 4π ; C) 16π ; D) 18π .
23. Balandligi 6 ga, yasovchisi 10 ga teng konusga ichki chizilgan sharning sirtini toping.
 A) $32\pi/3$; B) $64\pi/3$; C) $256\pi/9$; D) $64\pi/9$.
24. Radiusi 10 ga teng bo'lgan sferaga balandligi 18 ga teng bo'lgan konus ichki chizilgan. Konusning hajmini toping.
 A) 210π ; B) 216π ; C) 220π ; D) 228π .
25. Sharga balandligi asosining diametriga teng bo'lgan konus ichki chizilgan. Agar konus asosining yuzi 2,4 ga teng bo'lsa, shar sirtining yuzini toping.
 A) 9π ; B) 6; C) 12,5; D) 15.
26. O'q kesimi teng tomonli uchburchakdan iborat konusga diametri D ga teng sfera ichki chizilgan. Konusning to'la sirtini toping.
 A) $\frac{2}{3}\pi D^2$; B) $\frac{2}{5}\pi D^2$; C) $\frac{3}{4}\pi D^2$; D) $\frac{9}{4}\pi D^2$.
27. Sharga konus shunday ichki chizilganki, konusning yasovchisi asosining diametriga teng. Konusning to'la sirti shar sirti yuzining necha foizini tashkil etadi?
 A) 62; B) 56,25; C) 54,5; D) 60,75.
28. Kesik konus asoslarining yuzlari 9π va 25π ga teng. Agar bu konusga sharni ichki chizish mumkin bo'lsa, konusning yon sirtini toping.
 A) 80π ; B) 36π ; C) 54π ; D) 64π .
29. Yasovchisi 5 ga, asosining diametri 6 ga teng bo'lgan konusga ichki chizilgan shar sirtining yuzini toping.
 A) 16π ; B) $64\pi/11$; C) 9π ; D) $71\pi/9$.
30. Kesik konusga shar ichki chizilgan. Agar kesik konus asoslarining yuzlari π va 4π ga teng bo'lsa, shu konus yon sirtining yuzini toping.
 A) 6π ; B) 7π ; C) 8π ; D) 9π .

Masalalar

652. O – shar markazi, O_1 – shar kesimining markazi (84-rasm). $\angle AOB = 60^\circ$, $\angle ABO_1 = 45^\circ$. Sharining katta doirasi yuzi 12 ga teng. Kesim yuzini toping.



653. Silindr sferaga tashqi chizilgan (85-rasm). Sfera sirtining yuzi 20 ga teng. Silindr to'la sirtining yuzimi toping.
654. Silindr radiusi 2 ga teng sferaga tashqi chizilgan. Sfera sirtining yuzi 20 ga teng. Silindr hajmini toping.
655. Silindr sharga tashqi chizilgan. Shar hajmi 16 ga teng. Silindr hajmini toping.
656. Radiusi 6 ga teng sharga asos diametri va yasovchisi teng bo'lgan konus ichki chizilgan (86-rasm). Konusning hajmini toping.
657. Radiusi 3 ga teng sharga konus ichki chizilgan. Shar markazi konus asosiga tegishli (87-rasm). Konusning hajmini toping.



658. Kubning qirrasi 6 ga teng (88-rasm). Kubga ichki chizilgan shar hajmini toping.
659. Radiuslari 2, 3 va 4 ga teng bo'lgan metall sharlar eritilib, bitta shar quyildi. Shu sharining hajmini toping.
660. Kovak shar devorining hajmi 156π ga, devorning qalinligi 2 ga teng. Tashqi sharining radiusini toping.
661. Hajmi $9\pi/16$ ga teng shar sirtining yuzini aniqlang.
662. Radiusi $\sqrt[3]{2}$ bo'lgan shar sirti, yon sirti asosining yuzidan 3 marta katta bo'lgan konus sirtiga teng. Konusning balandligini toping.
663. Kubning diagonali $\sqrt{3}$ ga teng. Kubga ichki chizilgan shar hajmini toping.
664. Radiusi 5 ga teng bo'lgan sharga balandligi 8 ga teng to'rtburchakli muntazam prizma ichki chizilgan. Prizmaning hajmini toping.

665. Radiusi R ga teng sharga balandligi H ga teng bo'lgan uchburchakli muntazam prizma ichki chizilgan. Prizmaning hajmini toping.
666. Sakkizburchakli muntazam piramidaning apofemasi 10 ga, uning asosiga ichki chizilgan doiraning yuzi 36π ga teng. Shu piramidaga ichki chizilgan sharning radiusini toping.
667. Oltiburchakli muntazam piramidaning to'la sirti 2000 ga, hajmi 4800 ga teng. Shu piramidaga ichki chizilgan sharning radiusini toping.
668. To'rtburchakli muntazam kesik piramida kichik asosining yuzi 50 ga, katta asosining yuzi 200 ga teng. Shu piramidaga ichki chizilgan sfera sirtining yuzini toping.
- 669*. Radiusi 1 ga teng bo'lgan sferaga ichki chizilgan eng katta hajmli silindrning balandligini aniqlang.
- 670*. Radiusi 6 cm bo'lgan metall shardan eng katta hajmli silindr yo'nilgan. Bu silindr asosining radiusi nechaga teng?
671. O'q kesimi kvadratdan iborat silindr shaklidagi g'oladan eng katta hajmdagi shar yo'nib olindi. G'olaning qancha foizi chiqitga ketgan?
672. O'q kesimi teng tomonli uchburchak bo'lgan konusga shar tashqi chizilgan. Shar sirtining konus to'la sirtiga nisbatini toping.
673. Sharga konus ichki chizilgan. Konusning yasovchisi asosining diametriga teng. Shar hajmining konus hajmiga nisbatini toping.
674. Sharga tashqi chizilgan kesik konusning yasovchilari o'rtalaridan o'tuvchi tekislik bilan shu kesik konus hosil qilingan kesimning yuzi 4π ga teng. Kesik konusning yasovchisini toping.
675. Kesik konusning yon sirti 10π ga, to'la sirti 18π ga teng. Konusning to'la sirti unga ichki chizilgan shar sirtidan qancha ko'p?
- 676*. R radiusli yarimsharga asosining markazi bilan ustma-ust tushadigan konus tashqi chizilgan. Konusning balandligi qanday bo'lganda, uning hajmi eng kichik bo'ladi?
677. Konus asosining yuzi 9π ga, yon sirtining yuzi 15π ga teng. Shu konusga ichki chizilgan sferaning radiusini toping.
678. Teng tomonli konusga ichki va tashqi shar chizildi. Ichki chizilgan shar hajmi tashqi chizilgan shar hajmining necha foizini tashkil etadi?
- 679*. Radiusi R ga teng bo'lgan shar ichiga chizilgan eng katta hajmga ega bo'lgan konusning balandligini toping.
680. Radiusi 1 ga teng bo'lgan sharga yasovchisi $\sqrt{3}$ ga teng bo'lgan konus ichki chizildi. Shu konus o'q kesimining uchidagi burchakning kattaligini toping.

681. Silindr va unga tashqi chizilgan muntazam parallelepiped asosining tomoni 4 ga teng. Silindrning hajmini toping.
682. Hajmi 432π ga teng bo'lgan silindrning o'q kesimi kvadratdan iborat. Silindrga ichki chizilgan shar sirtining yuzini toping.
683. Uchburchakli muntazam prizмага tashqi chizilgan silindr yon sirti yuzining unga ichki chizilgan silindr yon sirti yuziga nisbatini toping.
684. To'rtburchakli muntazam prizмага silindr ichki chizilgan. Silindr hajmining prizma hajmiga nisbatini toping.
685. Qirradi 12 ga teng kubga konus ichki chizilgan. Agar konusning asosi kubning ostki asosiga ichki chizilgan bo'lsa, uchi esa yuqoridagi asosining markazida yotsa, konusning hajmini toping.
686. Qirradi 6 ga teng bo'lgan kubga konus ichki chizilgan. Konusning asosi kubning yuqoridagi asosiga ichki chizilgan, uchi esa kubning quyi asosining markazida. Konusning hajmini toping.
687. To'rtburchakli muntazam prizмага konus ichki chizilgan. Konusning asosi prizmaning ostki asosida, uchi esa prizma ustki asosining markazida yotadi. Prizma hajmining konus hajmiga nisbatini toping.
688. Uchburchakli muntazam piramidaga konus ichki chizilgan. Agar piramidaning yon yoqlari bilan asosi 60° li burchak hosil qilib, piramidaning asosiga ichki chizilgan aylananing radiusi 16 ga bo'lsa, konusning yon sirtini toping.
689. Konus asosining radiusi 2 ga, o'q kesimining uchidagi burchagi 60° ga teng. Shu konusga tashqi chizilgan uchburchakli muntazam piramidaning hajmini toping.
690. Sfera silindrga ichki chizilgan. Sfera sirtining yuzi 20 ga teng. Silindr yon sirtining yuzi 23 ga teng. Sfera sirtining yuzini toping.

4-nazorat ishi namunasi

1. Sharning katta doirasi yuzi 16 ga teng. Shar sirtining yuzini toping.
2. Sharga tashqi chizilgan kubning hajmi 8 ga teng. Sharning radiusini toping.
3. O'q kesimi kvadratdan iborat silindrga ichki chizilgan sharning hajmi $9\pi/16$ ga teng. Silindrning yon sirtini toping.
4. Sharga ichki chizilgan konusning asosi sharning katta doirasiga teng. Konus o'q kesimining yuzi 9 ga teng. Sharning hajmini toping.
5. Sharga ichki chizilgan konusning o'q kesimi teng yonli to'g'ri burchakli uchburchakdan iborat. Konus hajmi shar hajmining qanday qismini tashkil etadi?

V BOB. TAKRORLASH

17. STEREOMETRIYANI TAKRORLASHGA DOIR TEST TOPSHIRIQLARI

Mazkur bobda oliy o'quv yurtlariga kirish imtihonlarida stereometriya kursidan berilgan test topshiriqlari keltirilgan. Ularni yechib, stereometriyani takrorlang va shu bilan birga stereometriya kursidan olgan bilimlaringizni tekshirib ko'ring.

- $a(-3; 2; -1)$ va $b(-4; 4; 1)$ vektorlar berilgan bo'lsa, ularning yig'indisini toping.
A) $(7; 6; 0)$; B) $(-7; 6; 0)$; C) $(12; 8; -1)$; D) $(-7; 6; -1)$.
- $a(3x; 2; -1)$ va $b(x; -2x; -1)$ vektorlar berilgan. x ning qanday qiymatida ular o'zaro perpendikular bo'ladi?
A) $1; 3$; B) $-1; -\frac{1}{3}$; C) $1; \frac{1}{3}$; D) $1; -\frac{1}{3}$.
- $M(3; -2; 0)$ va $N(-1; 1; 12)$ nuqtalar orasidagi masofani toping.
A) 10 ; B) 12 ; C) 23 ; D) 13 .
- $a(-1; 3; 2)$ va $b(-2; 4; -3)$ vektorlarning skalar ko'paytmasini toping.
A) 10 ; B) 14 ; C) 8 ; D) -2 .
- Bir uchi $A(3; 4; 8)$ nuqtada, o'rtasi $C(5; 6; 12)$ nuqtada bo'lgan kesmaning ikkinchi uchini toping.
A) $(7; 8; 16)$; B) $(8; 7; 7)$; C) $(2; 2; 0)$; D) $(8; 10; 1)$.
- $a(-2; -4; 5)$ va $b(-3; 4; -2)$ vektorlar berilgan bo'lsa, ularning ayirmasi $a-b$ ni toping.
A) $(-5; 0; 3)$; B) $(1; -8; 7)$; C) $(5; 0; 3)$; D) $(1; 8; 7)$.
- Beshburchakli piramidaning nechta uchi bor?
A) 6 ; B) 5 ; C) 10 ; D) 7 .
- Oxy tekisligiga nisbatan $(-1; 2; 3)$ nuqtaga simmetrik bo'lgan nuqtani toping.
A) $(-1; -2; -3)$; B) $(1; 2; -3)$; C) $(-1; 2; -3)$; D) $(1; 2; -3)$.
- $a(0; -5; 2)$ va $b(2; -3; 1)$ vektorlar berilgan. $2a - 3b$ vektorni toping.
A) $(-6; -19; 1)$; B) $(-6; -1; 1)$; C) $(0; -4; -1)$; D) $(6; -4; 1)$.
- Quyidagi nuqtalardan qaysi biri Oxz tekislikda yotadi?
A) $(-4; 2; 0)$; B) $(0; 5; 0)$; C) $(2; 0; -8)$; D) $(0; -2; 1)$.

11. $a(-4; 2; 2)$ va $b(\sqrt{2}; -\sqrt{2}; 0)$ vektorlar berilgan bo'lsa, ular orasidagi burchakni toping.
 A) 60° ; B) 150° ; C) 135° ; D) 120° .
12. Uchlari $A(1; -3; -5)$ va $B(5; -1; -3)$ nuqtalarda bo'lgan kesma o'rtasining koordinatalarini toping.
 A) $(3; 2; 4)$; B) $(3; -2; -4)$; C) $(2; -1; 1)$; D) $(2; 1; 1)$.
13. Kub uchun nechta simmetriya tekisligi mavjud?
 A) 8; B) 9; C) 7; D) 10.
14. Kubning barcha qirralari yig'indisi 96. Uning hajmini toping.
 A) 256; B) 216; C) 384; D) 4.
15. Kub yog'ining yuzi 16 ga teng. Kubning hajmini toping.
 A) 60; B) 62; C) 66; D) 64.
16. Kubning barcha qirralari yig'indisi 48 ga teng. Kub sirtining yuzini toping.
 A) 96; B) 24; C) 36; D) 48.
17. Agar kubning qirradi 10% ga kamaytirilsa, uning hajmi necha foiz kamayadi?
 A) 10; B) 30; C) 33; D) 27.
18. Qirradi 1 m bo'lgan kub qirradi 1 cm bo'lgan kublarga ajratildi va ular bir qatorga yig'ildi. Hosil bo'lgan qatorning uzunligini toping.
 A) 10 m; B) 100 cm C) 10 km; D) 500 m.
19. Asosi kvadrat bo'lgan to'g'ri burchakli parallelepiped uchun nechta simmetriya tekisligi mavjud?
 A) 9; B) 7; C) 3; D) 5.
20. To'g'ri burchakli parallelepiped asosining tomonlari 7 cm va 24 cm. Parallelepipedning balandligi 8 cm. Diagonal kesimining yuzini toping.
 A) 168; B) 1344; C) 100; D) 200.
21. O'lchamlari $21 \times 27 \times 9$ bo'lgan to'g'ri burchakli parallelepipedga eng ko'pi bilan qirradi 5 ga teng bo'lgan kublardan nechtasini joylashtirish mumkin (kubning barcha qirralari parallelepipedning qirralariga parallel).
 A) 20; B) 25; C) 30; D) 40.
22. Zalning uzunligi, eni va balandliklarining nisbati 5:3:1 kabi. Zalning uzunligi uning enidan 8 m ko'p. Zalning hajmini (m^3) toping.
 A) 930; B) 840; C) 960; D) 790.
23. 60 ta qirradi bo'lgan prizmaning nechta yog'i bo'ladi?
 A) 20; B) 21; C) 22; D) 24.
24. Prizmaning jami qirralari 36 ta bo'lsa, uning nechta yon yog'i bor?
 A) 12; B) 16; C) 9; D) 10.

25. Prizmaning asosi tomoni $2\sqrt{5}$ bo'lgan muntazam oltiburchakdan, yon yoqlari kvadratlardan iborat. Prizmaning katta diagonalini toping.
 A) $4\sqrt{5}$; B) 10; C) $3\sqrt{5}$; D) 12.
26. Uchburchakli to'g'ri prizma asosining tomonlari 15, 20 va 25 ga, yon qirrasini asosining eng katta balandligiga teng. Prizmaning hajmini toping.
 A) 600; B) 750; C) 3000; D) 1200.
27. Uchburchakli to'g'ri prizma asosining tomonlari 13, 14 va 15 ga, yon qirrasini asosining o'rtacha balandligiga teng. Prizmaning hajmini toping.
 A) 336; B) 504; C) 1008; D) 978.
28. O'q kesimining yuzi 10 ga teng bo'lgan silindr yon sirtining yuzini toping.
 A) 10π ; B) 20π ; C) 30π ; D) 15π .
29. Silindrning balandligi 3 ga, o'q kesimining diagonalini 5 ga teng. Asosining radiusini toping.
 A) 2; B) 3; C) 4; D) 5.
30. Silindr o'q kesimining yuzi 4 ga teng. Yon sirtining yuzini toping.
 A) 4π ; B) 8π ; C) 2π ; D) 7π .
31. Agar silindrning yon sirti 2 marta orttirilsa, uning hajmi necha marta ortadi?
 A) 2; B) 4; C) 8; D) aniqlab bo'lmaydi.
32. Silindrning hajmi 120π ga, yon sirti 60π ga teng. Silindr asosining radiusini toping.
 A) 4; B) 5; C) 6; D) 4; 2.
33. To'rtburchakli muntazam piramidaning balandligi 6 cm, apofemasi esa 6 cm va 5 cm. Piramida asosining perimetrini toping.
 A) 10; B) 12; C) 24; D) 20.
34. Muntazam piramida yon sirtining yuzi 96 ga, asosining perimetrini 24 ga teng. Piramidaning apofemasini toping.
 A) 16; B) 10; C) 6; D) 8.
35. Uchburchakli muntazam piramidaning balandligi 4 ga, asosining balandligi esa 4,5 ga teng. Piramidaning yon qirrasini toping.
 A) 6; B) 6,5; C) 5; D) 5,5.
36. Muntazam piramidaning yon sirti 24 ga, asosining yuzi 12 ga teng. Piramidaning yon yog'i bilan asos tekisligi orasidagi burchakni toping.
 A) 45° ; B) 30° ; C) 60° ; D) 35° .

37. To'rtburchakli muntazam piramidaning uchidagi tekis burchagi 60° ga teng. Shu piramidaning yon qirradi va asosi orasidagi burchakni toping.
A) 15° ; B) 30° ; C) 45° ; D) 60° .
38. Asosining tomoni 2 ga teng bo'lgan uchburchakli muntazam piramidaning to'la sirti $7\sqrt{3}$ dan kichik emas va $13\sqrt{3}$ dan katta emas. Shu piramidaning apofemasi qanday oraliqda yotadi?
A) $[2; 3]$; B) $[\sqrt{3}; 3\sqrt{3}]$; C) $[2\sqrt{3}; 4\sqrt{3}]$; D) $[3; 4]$.
39. Piramida asosi to'g'ri burchakli uchburchakdan iborat. Uchburchakning katetlari 3 va 4 ga teng. Piramidaning yon yoqlari asos tekisligi bilan 60° li burchaklar hosil qiladi. Piramidaning to'la sirtini toping.
A) 18; B) 20; C) 15; D) 24.
40. Qirradi 28 ta bo'lgan piramidaning yon yoqlari nechta?
A) 12; B) 14; C) 15; D) 18.
41. Hajmi 36 ga teng bo'lgan to'rtburchakli muntazam piramidaning asosidagi ikki yoqli burchagi 45° . Piramida asosining tomonini toping.
A) 6; B) 8; C) 4; D) 12.
42. To'rtburchakli muntazam piramida asosining tomoni 3 marta kattalashtirildi, balandligi esa 3 marta kichiklashtirildi. Hosil bo'lgan piramida hajmining dastlabki piramida hajmiga nisbatini toping.
A) 3:1; B) 1:3; C) 9:1; D) 1:9.
43. Hajmi 48 bo'lgan to'rtburchakli muntazam piramida asosining tomoni 6 ga teng. Piramida yon sirtining yuzini toping.
A) 144; B) 60; C) 72; D) 120.
44. Hajmi 1296 bo'lgan to'rtburchakli muntazam piramida asosining tomoni 18 ga teng. Piramida yon sirtining yuzini toping.
A) 540; B) 1080; C) 360; D) 900.
45. Piramidaning yon yoqlari asosi bilan bir xil burchak tashkil etadi. Quyidagi ko'pburchaklardan qaysi biri piramidaning asosi bo'lolmaydi?
A) Romb; B) uchburchak; C) kvadrat; D) to'g'ri to'rtburchak.
46. Hajmi $8\sqrt{3}$ ga teng bo'lgan muntazam tetraedrning balandligini toping.
A) $2\sqrt{3}$; B) $3\sqrt{3}$; C) $4\sqrt{3}$; D) 4.
47. Oltiburchakli muntazam $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ ($AA_1 // BB_1, \dots, FF_1 // AA_1$) prizmaning EC diagonali va D_1 uchi orqali o'tkazilgan tekislik shu prizmadan ajratgan $D_1 E C D$ piramidaning hajmi 24 ga teng.

Berilgan prizmaning hajmini toping.

A) 436; B) 428; C) 426; D) 432.

48. To'rtburchakli muntazam piramida asosining yuzi 36 ga, yon sirtining yuzi esa 60 ga teng. Piramidaning hajmini toping.

A) 64; B) 120; C) 144; D) 72.

49. O'nikkiburchakli muntazam piramidaning apofemasi $2\sqrt{2}$ ga teng, barcha yon yoqlari asos tekisligiga 45° burchak ostida og'gan. Uning hajmini toping.

A) $56-30\sqrt{2}$; B) $64-32\sqrt{3}$; C) $68-48\sqrt{2}$; D) $64-32\sqrt{2}$.

50. To'rtburchakli muntazam kesik piramida asoslarining tomonlari 14 va 10 cm, diagonali 18 cm. Kesik piramidaning balandligi necha cm?

A) 6; B) 7; C) 8; D) 5.

51. Piramidaning balandligi 8 ga teng. Piramida uchidan 4 ga teng masofada asosga parallel tekislik o'tkazilgan va hosil bo'lgan kesim yuzi 27 ga teng. Piramida hajmini toping.

A) 480; B) 210; C) 92; D) 288.

52. To'rtburchakli muntazam piramidaning balandligi 8 ga, asosining tomoni 12 ga teng. Piramida yon yog'iga parallel bo'lib, asosining markazi orqali o'tgan kesimi yuzini hisoblang.

A) 45; B) 60; C) 72; D) 30.

53. Konus asosining radiusi 0,5 ga teng. Konus yasovchisi bilan uning asos tekisligi orasidagi burchak qanday bo'lganda konus yon sirtining yuzi $0,5\pi$ ga teng bo'ladi?

A) 30° ; B) 60° ; C) 45° ; D) $\arccos(1/3)$.

54. Konus asosining radiusi $\sqrt{3}/2$ ga teng. Konus yasovchisi bilan uning asos tekisligi orasidagi burchak qanday bo'lganda konus yon sirtining yuzi $\sqrt{3}\pi/2$ ga teng bo'ladi?

A) $\arccos(1/\sqrt{3})$; B) $\arccos(1/3)$; C) 45° ; D) 30° .

55. Konusning yon sirti 60π ga, to'la sirti 96π ga teng. Konusning yasovchisini toping.

A) 12; B) 9; C) 8; D) 10.

56. Katetlari 6 va 8 ga teng bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchakning kichik kateti atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jismning to'la sirtini toping.

A) 144π ; B) 100π ; C) 80π ; D) 150π .

57. Konusning to'la sirti asosining yuzidan 3 marta katta bo'lsa, o'q kesimining uchidagi burchagini toping.
 A) 60° ; B) $\arccos(7/9)$; C) 45° ; D) 30° .
58. Konus o'q kesimining ikki tomoni 4 va 9 ga teng. Shu konusning yon sirtini toping.
 A) 12π ; B) 16π ; C) 18π ; D) 24π .
59. Asos aylanasining uzunligi $8\sqrt{\pi}$ ga, balandligi 9 cm ga teng bo'lgan konusning hajmini toping.
 A) 16π ; B) 24; C) 16; D) 48.
60. Konusning o'q kesimi muntazam uchburchakdan, silindrniki esa kvadratdan iborat. Agar ularning hajmlari teng bo'lsa, to'la sirtlarining nisbati nimaga teng?
 A) $\sqrt{2} : \sqrt{3}$; B) $\sqrt[3]{3} : \sqrt[3]{2}$; C) 3 : 2; D) 1 : $\sqrt[3]{3}$.
61. $y = |x - 1|$, $x = -1$, $x = 2$ va $y = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan shaklning absissalar o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jismning hajmini toping.
 A) 3π ; B) 4π ; C) 5π ; D) π .
62. Konus hajmi 9π ga teng bo'lib, uning yasovchisi asos tekisligi bilan 45° li burchak tashkil qiladi. Konusning balandligini toping.
 A) 3; B) 2; C) $\sqrt{3}$; D) 1,5.
63. Konusning balandligi 6 ga teng. Konusning asosidan 4 ga teng masofada unga parallel tekislik o'tkazilgan. Hosil bo'lgan kesim yuzining konus asosi yuziga nisbatini toping.
 A) $1/3$; B) $2/3$; C) $4/9$; D) $1/9$.
64. Kesik konus asoslarining radiuslari 1 va 5 ga teng. Agar uning balandligi 3 ga teng bo'lsa, yasovchisini toping.
 A) 6; B) 3; C) 4; D) 5.
65. Agar sferaning radiusi 50% orttirilsa, sfera sirtining yuzi necha foizga ko'payadi?
 A) 125; B) 100; C) 150; D) 75.
66. Radiusi 13 ga teng bo'lgan shar tekislik bilan kesilgan. Agar shar markazidan kesimgacha masofa 10 ga teng bo'lsa, kesimning yuzini toping.
 A) 69π ; B) $3\sqrt{6}\pi$; C) 100π ; D) 3.
67. Radiuslari 2, 3 va 4 ga teng bo'lgan metall sharlar eritilib, bitta shar quyildi. Shu sharning hajmini toping.
 A) 144π ; B) 396π ; C) 99π ; D) 132π .

68. Sharning radiusi $\sqrt{8}\pi$ ga teng. Radiusning oxiridan u bilan 60° li burchak tashkil etadigan kesuvchi tekislik o'tkazilgan. Kesimning yuzini toping.
A) 8; B) 12; C) 16; D) 14.
69. Sharni bo'yash uchun 50 massa birligida bo'yoq ishlatildi. Agar sharning diametri ikki marta orttirilsa, uni bo'yash uchun qancha bo'yoq kerak bo'ladi?
A) 100; B) 125; C) 150; D) 200.
70. Shardan tashqaridagi M nuqtadan uning sirtiga MN urinma o'tkazildi. M nuqtadan sharning sirtigacha bo'lgan eng qisqa masofa 6 ga, sharning markazigacha bo'lgan masofa 15 ga teng. MN ning uzunligini toping.
A) 10; B) 16; C) 14; D) 12.
71. Kovak shar devorining hajmi 252π ga, devorning qalinligi 3 ga teng. Ichki sharning radiusini toping.
A) 5; B) 3; C) 4; D) 7.
72. Shar radiusi 6 ga teng. Radius uchidan 30° burchak tashkil qiluvchi tekislik o'tkazilgan. Shar bilan tekislik hosil qilgan kesimning yuzini toping.
A) 27π ; B) 8π ; C) 64π ; D) 25π .
73. Radiusi 15 ga va 20 ga teng bo'lgan ikki shar markazlari orasidagi masofa 25 ga teng. Shar sirtlari kesishishidan hosil bo'lgan aylananing uzunligini toping.
A) 24π ; B) 20π ; C) 25π ; D) 15π .
74. To'la sirtining yuzi 72 ga teng bo'lgan kubga tashqi chizilgan sharning radiusini toping.
A) 3; B) 6; C) $3\sqrt{3}$; D) $2\sqrt{3}$.
75. Hajmi 125 bo'lgan kubga ichki chizilgan shar sirtining yuzini toping.
A) 125π ; B) 25π ; C) $24,5\pi$; D) 105π .
76. Ikkita qo'shni yoqlarining markazlari orasidagi masofa $2\sqrt{2}$ ga teng bo'lgan kubga tashqi chizilgan shar sirtining yuzini toping.
A) 28π ; B) 36π ; C) 48π ; D) $18\sqrt{2}\pi$.
77. Kubning qirradi 6 ga teng. Kubga ichki chizilgan sharning hajmini toping.
A) 12π ; B) 36π ; C) 27π ; D) 18π .
78. Oktaedr sirtining yuzi $24\sqrt{3}$ cm^2 ga teng bo'lsa, uning qirrasini toping.
A) $2\sqrt{3}$ cm; B) $2\sqrt{2}$ cm; C) 2 cm; D) $2\sqrt{6}$ cm.
79. Piramidaning to'la sirti 60 ga, unga ichki chizilgan sharning radiusi 5 ga teng. Piramidaning hajmini toping.
A) 120; B) 80; C) 90; D) 100.

80. Oltiburchakli muntazam piramidaning apofemasi 5 ga, uning asosiga tashqi chizilgan doiraning yuzi 12π ga teng. Shu piramidadagi ichki chizilgan sharning radiusini toping.
A) 3; B) 3,2; C) 1,5; D) 2,5.
81. Muntazam tetraedrning qirradi 1 ga teng. Shu tetraedrga tashqi chizilgan sharning radiusini toping.
A) $2\sqrt{2}/3$; B) $\sqrt{6}/4$; C) $3\sqrt{2}/8$; D) $11\sqrt{2}/24$.
82. To'rtburchakli muntazam kesik piramida kichik asosining yuzi 50 ga, katta asosining yuzi 200 ga teng. Shu piramidaga ichki chizilgan sfera sirtining yuzini toping.
A) 96π ; B) 125π ; C) 120π ; D) 100π .
83. O'q kesimi kvadratdan iborat silindrga ichki chizilgan sharning hajmi $9\pi/16$ ga teng. Silindrning yon sirtini toping.
A) $3\pi/4$; B) $7\pi/4$; C) $9\pi/4$; D) $5\pi/4$.
84. Silindrga shar ichki chizilgan. Silindrning hajmi 16π ga teng bo'lsa, sharning hajmini toping.
A) $32\pi/3$; B) $16\pi/3$; C) $64\pi/3$; D) 16π .
85. Radiusi 1 ga teng bo'lgan sferaga ichki chizilgan eng katta hajmli silindrning balandligini toping.
A) $3\sqrt{3}/4$; B) $\sqrt{3}/2$; C) $2\sqrt{3}/3$; D) $\sqrt{2}/3$.
86. O'q kesimi kvadratdan iborat silindr shaklidagi g'oladan eng katta hajmdagi shar yo'nib olindi. G'olaning qancha foizi chiqitga ketgan?
A) 25; B) 30; C) $33\frac{1}{3}$; D) $37\frac{2}{5}$.
87. Sharga ichki chizilgan konusning balandligi 3 ga, asosining radiusi $3\sqrt{3}$ ga teng. Sharning radiusini toping.
A) 5; B) 6; C) $4\sqrt{3}$; D) $5\sqrt{2}$.
88. Sharga ichki chizilgan konusning asosi sharning eng katta doirasidan iborat. Sharning hajmi konusning hajmidan necha marta katta?
A) 2; B) 4; C) 3; D) 1,5.
89. Konusning balandligi 6 ga, yasovchisi 10 ga teng. Konusga ichki chizilgan sharning radiusini toping.
A) 3; B) $2\frac{2}{3}$; C) 4; D) $3\sqrt{3}$.

90. Sharga konus shunday ichki chizilganki, konusning yasovchisi asosining diametriga teng. Konusning to'la sirti shar sirti yuzining necha foizini tashkil etadi?
 A) 62; B) 56,25; C) 54,5; D) 60,75.
91. Kesik konus asoslarining yuzlari 9π va 25π ga teng. Agar bu konusga sharni ichki chizish mumkin bo'lsa, konusning yon sirtini toping.
 A) 80π ; B) 36π ; C) 54π ; D) 64π .
92. Yasovchisi 5 ga, asosining diametri 6 ga teng bo'lgan konusga ichki chizilgan shar sirtining yuzini toping.
 A) 16π ; B) $64\pi/11$; C) 9π ; D) $71\pi/9$.
93. Kesik konusga shar ichki chizilgan. Agar kesik konus asoslarining yuzlari π va 4π ga teng bo'lsa, shu konus yon sirtining yuzini toping.
 A) 6π ; B) 7π ; C) 8π ; D) 9π .
94. Radiusi 4 ga teng bo'lgan sharga balandligi 9 ga teng bo'lgan konus tashqi chizilgan. Konus asosining radiusini toping.
 A) 12; B) 9; C) 10; D) 8.
95. Teng tomonli konusga shar tashqi chizilgan. Shar sirtining konusning to'la sirtiga nisbatini toping.
 A) $9 : 4$; B) $7 : 4$; C) $16 : 9$; D) $4 : 3$.
96. Konus asosining yuzi 9π ga, yon sirtining yuzi 15π ga teng. Shu konusga ichki chizilgan sferaning radiusini toping.
 A) 1,5; B) 1,8; C) 2; D) 2,4.
97. Silindr va unga tashqi chizilgan to'rtburchakli muntazam parallelepiped asosining tomoni 4 ga teng. Silindrning hajmini toping.
 A) 10π ; B) 12π ; C) 16π ; D) 20π .
98. Kubga konus ichki chizilgan. Agar konusning asosi kubning ostki asosiga ichki chizilgan bo'lsa, uchi esa yuqoridagi asosining markazida yotsa, konus va kub hajmlari nisbatini toping.
 A) $\pi/2$; B) $\pi/3$; C) $\pi/6$; D) $\pi/12$.

Yakuniy nazorat ishi namunasi

1-variant

- Uchta nuqta berilgan: $A(1; 1; 1)$, $B(-1; 0; 1)$, $C(0; 1; 1)$. Shunday $D(x; y; z)$ nuqtani topingki, \overline{AB} va \overline{CD} vektorlar teng bo'lsin.
A) $D(2; 0; 1)$; B) $D(-2; 0; 1)$; C) $D(-2; 1; 1)$; D) $D(2; 0; 0)$.
- Skalar ko'paytmasi 0,5 ga teng bo'lgan birlik vektorlar orasidagi burchakni toping.
A) 60° ; B) 30° ; C) 120° ; D) 45° .
- Kubning ikkita qarama-qarshi yoqlarining diagonallari orqali o'tkazilgan kesimning yuzi $16\sqrt{2}$ ga teng. Kubning qirrasini toping.
A) 4; B) $2\sqrt{2}$; C) $4\sqrt{2}$; D) 8.
- Muntazam uchburchakli prizmaning hajmi $27\sqrt{3}$ ga, asosiga tashqi chizilgan aylananing radiusi esa 2 ga teng. Prizmaning balandligini toping.
A) 12; B) 8; C) 6; D) 9.
- Oktaedrning qirrasini a ga teng. Uning to'la sirtini hisoblang.
A) $2a^2\sqrt{3}$; B) $a^2\sqrt{3}$; C) $2\sqrt{3}a^2/3$; D) $4a^2\sqrt{3}$.
- To'rtburchakli muntazam kesik piramidaning balandligi 16 ga, asoslari-ning tomonlari 24 va 40 ga teng. Kesik piramidaning diagonalini toping.
A) 48; B) 24; C) 36; D) 40.
- Konusning balandligi 10 ga, o'q kesimi uchidagi burchagi 120° ga teng. Konus hajmini toping.
A) 1000π ; B) 1200π ; C) 900π ; D) 600π .
- Shar katta doirasining yuzi 25π ga teng. Sharining markazidan qanday masofada o'tkazilgan tekislik shardan doirasining yuzi 9π ga teng bo'lgan kesim ajratadi?
A) 3,8; B) 3,6; C) 3,5; D) 4.
- Piramidaning hajmi 25 ga, unga ichki chizilgan sharining radiusi 1,5 ga teng. Piramidaning to'la sirtini toping.
A) 20; B) 15; C) 25; D) 50.
- Balandligi 3 ga, yasovchisi 6 ga teng bo'lgan konusga tashqi chizilgan sharining radiusini toping.
A) $3\sqrt{3}$; B) 5; C) 6; D) $4\sqrt{2}$.

2-variant

- Uchta nuqta berilgan: $A(2; 1; -1)$, $B(-3; 1; 1)$, $C(2; 0; 1)$. Shunday-
 $D(x; y; z)$ nuqtani topingki, \overline{AB} va \overline{CD} vektorlar teng bo'lsin.
A) $D(3; 0; 1)$; B) $D(-3; 0; 1)$; C) $D(-3; 0; 3)$; D) $D(-3; 0; 0)$.
- Skalar ko'paytmasi $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ga teng bo'lgan birlik vektorlar orasidagi bur-
chakni toping.
A) 60° ; B) 30° ; C) 120° ; D) 45° .
- To'rtburchakli muntazam prizma asosining tomoni $\sqrt{2}$ ga, diagonali
bilan yon yog'i orasidagi burchak esa 30° ga teng. Prizmaning hajmini
toping.
A) $8\sqrt{2}$; B) 4; C) 16; D) $4\sqrt{2}$.
- Silindrning balandligi 5 ga, uning asosiga ichki chizilgan muntazam uch-
burchakning tomoni $3\sqrt{3}$ ga teng. Silindrning hajmini toping.
A) 25π ; B) 35π ; C) 45π ; D) 40π .
- To'rtburchakli muntazam piramidaning yon qirradi $3\sqrt{2}$ ga, yon qirra
va asos tekisligi orasidagi burchak 45° ga teng. Piramidaning hajmini
toping.
A) $12\sqrt{2}$; B) 18; C) $9\sqrt{2}$; D) 24.
- Konusning yasovchisi 15 ga, yon sirti yoyilmasining uchidagi burchagi
 120° ga teng. Konus asosining diametrini toping.
A) 10; B) 15; C) 20; D) 25.
- Asoslarning radiuslari 2 va 7 ga, o'q kesimining diagonali 15 ga teng
bo'lgan kesik konus yon sirtining yuzini toping.
A) 112π ; B) 115π ; C) 117π ; D) 120π .
- Kubga tashqi chizilgan sharning hajmi unga ichki chizilgan sharning haj-
midan necha marta katta?
A) 8; B) 4; C) $4\sqrt{2}$; D) $3\sqrt{3}$.
- Silindrga shar ichki chizilgan. Silindrning hajmi 16π ga teng bo'lsa, shar-
ning hajmini toping.
A) $32\pi/3$; B) $16\pi/3$; C) $64\pi/3$; D) $10\frac{1}{3}\pi$.
- Qirradi 12 ga teng bo'lgan kubga konus ichki chizilgan. Konusning asosi
kubning quyi asosiga ichki chizilgan, uchi esa kubning yuqoridagi asosi-
ning markazida. Konusning hajmini toping.
A) 120π ; B) 132π ; C) 126π ; D) 144π .

JAVOBLAR

- 349.** 20 cm. **350.** 2 cm. **351.** 32 cm². **352.** 36 cm². **360.** 576 cm². **361.** 2 cm.
376. 6 cm. **377.** 3 cm. **378.** 48 cm. **379.** 576 cm². **380.** 2 cm. **381.** $6\sqrt{2}$. **382.** 8.
383. 168. **384.** 4. **385.** 2 cm. **386.** 36 cm. **391.** $\frac{1}{3}$. **394.** $20\frac{5}{6}$. **395.** 180.
406. 2592100 m³. **407.** $\approx 50^\circ$. **408.** 9. **414.** 84 dm. **421.** 12 cm. **426.** 48 cm².
427. 320π cm². **437.** 4 cm. **440.** 144π cm². **441.** 100π dm². **442.** 96 cm².
443. $\frac{27\sqrt{11}}{8}$ cm². **444.** 576π cm². **445.** $\frac{128}{3}\pi$. **446.** 36π cm². **447.** $16\sqrt{3}\pi$ cm².
449. 30π . **450.** 132π . **455.** 65π cm². **456.** 160π cm². **458.** 129π cm³. **459.** $\frac{2114}{3}\pi$ cm².
460. $\frac{875\sqrt{3}}{3}\pi$ cm². **476.** 45° . **477.** (1; 2). **478.** $\arccos 5/12$. **480.** 54. **481.** 60° .
483. $2\sqrt{13}$. **484.** Romb. **485.** $6\sqrt{3}$. **486.** 24. **487.** 2,5. **488.** 30° . **489.** $\sqrt{3}$.
490. 60° . **491.** 36. **492.** $l^3\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha$. **493.** 4. **494.** 448. **495.** 75. **496.** 32π . **497.** $\sqrt{2}\pi R^2$.
498. 360. **499.** 108° . **500.** 216° . **501.** 48π . **502.** 4π . **503.** 100π . **504.** $8\pi\sqrt{3}/3$.
505. 135π . **506.** 72π .

3-test sinovi javoblari

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
D	D	C	C	A	A	B	C	D	C	A	B	D	B	A
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
C	B	A	A	B	D	B	B	B	A	A	D	C	B	A

3-nazorat ishi javoblari: 1) 5; 2) 640; 3) 7 cm; 4) 216° ; 5) 24π .

- 507.** a) 1 yoki $2ta$; b) 1 ta yoki cheksiz ko'p. **508.** 1447π dm². **590.** 25π cm².
510. $O(-1; 2; 1)$, $R = 5$. **511.** $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 + (z - 7)^2 = 4$.
512. $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 18$. **513.** $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - l)^2 = 2l$.
514. 6 dm. **515.** 15 s. **516.** 24. **517.** 8. **518.** 3. **519.** 12. **520.** 4. **521.** 5. **522.** 5.
523. 27π . **524.** 24π . **526.** 150. **527.** 2. **528.** $R+r$. **529.** 254%. **530.** 3. **531.**
 $4\sqrt{3}$. **532.** $\sqrt{6}/4$. **533.** 240. **534.** 50. **535.** 6. **536.** 32π . **537.** $\frac{18}{13}\pi$.
555. $4000\pi/3$ cm³ = $4/3\pi$ dm³. **564.** 252π cm³, 720π cm³. **565.** $500/3\pi$.
566. $\frac{4}{3}\pi$. **567.** $\frac{1}{6}\pi$. **568.** $\frac{4\sqrt{3}}{27}\pi$. **569.** $\frac{500}{3}\pi$. **570.** $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$. **571.** $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$. **573.** $4,5\pi$.

574. $4,5\pi$. 575. 22. 576. 36. 588. 7. 589. 24. 606. Birinchisini. 611. 8 marta, 4 marta. 613. 12. 616. 9 marta. 620. 10π . 626. 160000. 627. 10cm. 628. 27 cm. 629. 6 cm. 630. 26. 631. $\approx 6 \text{ dm}^3$. 632. 12. 635. $1,28\pi$. 636. $0,9025\pi$. 638. 27 marta. 639. 12. 640. 9 marta. 641. 10. 659. 132π . 661. $2\frac{1}{4}\pi$. 662. 4. 664. 144. 665. $3\sqrt{3}H(4R^2 - H^2)/16$. 666. 3. 667. 7,2. 668. 100π . 669. $2\sqrt{3}/3$. 670. $2\sqrt{6}$. 671. $33\frac{1}{3}$. 672. 16:9. 673. 32:9. 674. 4. 675. 14π . 676. $\sqrt{3}R$. 677. 1,5. 678. 12,5. 679. $1\frac{1}{3}R$. 680. 60° . 681. 12π . 682. 144π . 683. 2. 684. $\pi/4$. 685. 144π . 686. 18π . 687. $12/\pi$. 688. 512π . 689. 24.

4-test sinovi javoblari

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	D	A	A	A	B	B	B	C	A	A	D	D	D	C
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
D	B	C	C	A	D	A	C	B	D	D	B	D	C	D

4-nazorat ishi javoblari: 1) 64; 2) 1; 3) $9\pi/4$; 4) 36π ; 5) 0,75.

Takrorlash testi javoblari

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
B	C	D	C	A	B	A	B	A	C	D	B	B	D	D
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
A	D	C	D	D	A	C	C	A	B	C	C	A	A	A
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
D	A	D	D	C	C	C	C	A	B	A	A	B	A	D
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
D	D	D	B	A	D	A	B	D	D	A	A	C	D	B
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
A	A	D	D	A	D	D	C	D	D	B	A	A	A	B
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
C	B	A	D	C	B	D	C	A	C	C	B	C	B	B
91	92	93	94	95	96	97	98							
D	D	D	A	C	A	B	D							

Yakuniy nazorat ishi javoblari

1-variant	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	B	A	A	B	D	C	A	B	A	A
2-variant	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	C	D	A	C	D	D	D	A	C	D

**Darslikni tuzishda foydalanilgan va qo‘shimcha o‘rganishga tavsiya
etilayotgan adabiyotlar va elektron resurslar**

1. *A'zamov A., Xaydarov B.* Matematika sayyorasi.–T., O‘qituvchi, 1993.
2. *Afonina S.I.* Matematika va qo‘zallik.–T., O‘qituvchi, 1986.
3. *Norjigitov X. Mirzayev Ch.* Stereometrik masallarni yechish. Akademik litseylar uchun o‘quv qo‘llanma.–T., 2004.
4. *Israilov I., Pashayev Z.* Geometriya. Akademik litseylar uchun o‘quv qo‘llanma. II qism.–T., O‘qituvchi, 2005.
5. *Александров А. Д., Вернер А, Л., Рыжик В, И.* Геометрия для 10–11-х классов: учеб. пособие для учащихся шк. и классов с углубленным изучением математики, – 3-е. изд.–М., Просвещение, 1992. – 464 с.
6. *Киселев А. П.* Элементарная геометрия. Книга для учителя / А. П. Киселев. – М.: Просвещение, 1980. – 287 с.
7. *Погорелов А.В.* “Геометрия 10–11”, учебник. –М., Просвещение, 2009.
8. *Л. А. Латотин, Б. Д. Чеботаревский.* “Математика 11”, учебник.–Минск, 2013.
9. *Смирнова И.М., Смирнов В.А.* Геометрия. 10–11 класс. учебник. –М., 2008.
10. *Бевз Г. П.* Геометрия: Учебник для 7–11 кл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н.Г. Владимиrowa. –М., Просвещение, 1990.
11. *А. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др.* Геометрия: Учеб. для 10 – 11 кл. общеобразоват. учреждений. М., Просвещение, 1998.
12. *Смирнова И.* –М. Геометрия: учебное пособие для 10–11 кл. гуманитар. профиля. / И. М. Смирнова. М., Просвещение, 1997.
13. *Шарыгин И. Ф.* Геометрия 10 – 11 классы. / И. Ф. Шарыгин // Математика – 2006 – №3 – С. 36–38.
14. *Билянина О.Я. и др.* “Геометрия 11” учебник. –Киев, “Генеза”, 2010.
15. *Daniel C.Alexander,* Elementary geometry for college students, Canada, Brooks / Cole, Cengage Learning, 2011.
16. *Mal Coad and others,* Mathematics for the international students, Haese and Harris publications, Australia, 2010.
17. <http://www.uzedu.uz> – Xalq ta’limi vazirligining axborot ta’lim portali.
18. <http://www.eduportal.uz> – Multimedia markazi axborot ta’lim portali.
19. <http://www.school.edu.ru> – Umumta’lim portali (rus tilida).
20. <http://www.problems.ru/> Matematikadan masalalar izlash tizimi (rus tilida).
21. <http://geometry.net/> – Algebra va geometriyadan o‘quv materiallari (ingliz tilida).
22. <http://www.ixl.com> – Masofadan turib o‘qitish sayti (ingliz tilida).
23. <http://www.mathkang.ru> – “Kenguru” xalqaro matematik tanlov sayti (rus tilida).
24. <http://www.khanacademy.org> – “Xon akademiyasi” masofaviy ta’lim sayti (ingliz tilida).
25. <http://www.brilliant.org> – Matematikadan masofaviy ta’lim sayti (ingliz tilida).

MUNDARIJA

III BOB. PIRAMIDA VA KONUS

10. Piramida va kesik piramida	113
11. Konus va kesik konus.....	127
12. Bobni takrorlashga doir amaliy mashqlar	140

IV BOB. SFERA VA SHAR

13. Shar va uning elementlari	146
14. Shar va uning bo‘lamlari hajmi.....	155
15. Sfera sirtining yuzi	165
16. Bobni takrorlashga doir amaliy mashqlar	171

V BOB. TAKRORLASH

17. Stereometriyani takrorlashga doir test topshiriqlari	177
--	-----

JAVOBLAR	188
Darslikni tuzishda foydalanilgan va qo‘shimcha o‘rganishga tavsiya etilayotgan adabiyotlar va elektron resurslar	190

Algebra va analiz asoslari: **M.A. Mirzaahmedov, Sh.N. Ismailov,**
A.Q. Amanov.

Geometriya: **B.Q. Xaydarov.**

MATEMATIKA 11
ALGEBRA VA ANALIZ ASOSLARI,
GEOMETRIYA
II QISM

Oʻrta taʼlim muassasalarining 11-sinfi va oʻrta maxsus,
kasb-hunar taʼlimi muassasalari oʻquvchilari uchun darslik
1- nashr

Muharrirlar:	N. Gayipov M. Raemov
Texnik muharrir:	A. Abdusalomov
Kompyuterda sahifalovchi:	S. Gʻofurov

Nashriyot litsenziyasi AI № 015. 20.07.2018
Bosishga ruxsat etildi 05.09.2018. Bichimi $70 \times 100^{1/16}$
“Times New Roman” garniturasini.
Hajmi: 12,0 bosma tab. Nashr tab. 11,0.
Adadi 433091 nusxada
Original-maket “Zamin Nashr” MCHJ da
tayyorlandi. 100053, Toshkent sh.
Bogʻishamol koʻchasi, 160. Tel: 235 44 82
Buyurtma № 18-334.

Oʻzbekiston matbuot va axborot agentligi
"OʻZBEKISTON" nashriyot-matbaa ijodiy uyi.
100011, Toshkent sh., Navoiy 30.
Tel.: (371) 244-87-55, 244-87-20